SH.Y. Pulatov, F.A. Mamadaliyev

OLIY MATEMATIKA

O‘QUV QO‘LLANMA

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

ISLOM KARIMOV NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI
QO‘QON FILIALI

SH.Y. PULATOV, F.A. MAMADALIYEV

«Matematika, tabiiy-ilmiy va umumkasbiy fanlar» kafedrasi

OLIY MATEMATIKA

O‘QUV QO‘LLANMA

Toshkent
“Muharrir”
2020

UO‘K:51(075.8)
KBK:22.1ya73
P-99

Sh.Y. Pulatov, F.A. Mamadaliyev
Oliy matematika. O‘quv qo‘llanma. [Matn] – Toshkent, «Muharrir» nashriyoti, 2020. / – 240 b.

Ushbu o‘quv qo‘llanma oliy texnika o‘quv yurtlari bakalavriat talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, «Oliy matematika» kursining asosiy bo‘limlarini o‘z ichiga olgan. Shu bilan birga Oliy o‘quv yurtlarining barcha texnik yo‘nalishda tahsil olayotgan talabalari foydalanishlari uchun tavsiya etiladi.

KBK:22.1ya73

Islom Karimov nomidagi TDTU Qo‘qon filiali ilmiy kengashida muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan. Bayonnoma №5. 29-yanvar 2020-yil.

Taqrizchilar:
N.X. Yuldashev, f-m.f.d., FarPI professori,
U.Y. Akbarov, f-m.f.n., TDTU QF dotsenti

Mas’ul muharrir:
M.M. Mansurov, TDTU QF katta o‘qituvchisi

ISBN 978-9943-6588-0-6

SO'Z BOSHI

Xalq xo'jaligining hamma sohalari uchun hozirgi zamon talabiga javob beradigan mutaxassislarni tayyorlash dolzarb masalalar qatoridan joy oldi. Oliy o'quv yurtlarida nazariy bilimlari puxta, ayni paytda undan amaliyotda keng foydalana oladigan mutaxassislar etishtirish shu kunning dolzarb muammolaridan biriga aylandi. Bunday mutaxassislarni tayyorlashda oliy o'quv yurtlarida o'qitiladigan oliy matematikaning ahamiyati kattadir. Shuni ham ta'kidlash lozimki, oliy matematikani o'rgatish talabalarni faqat qator matematik ma'lumotlar bilan tanishtirishdan iborat bo'lmasdan, balki mantiqiy fikrlashga, binobarin uni tatbiq qilishga xam karatilgandir.

Ko'pchilik oliy o'quv yurtlarida tayyorlanadigan mutaxassisliklarga qarab matematika turli hajmda o'qitiladi.

Oliy matematikaning turli sohalarini o'z ichiga oladigan, deyarli barcha mutaxassisliklarga mos keladigan oliy matematika asoslarini yozishga jazm etildi.

Mazkur oliy matematika bo'yicha o'quv qo'llanma sakkiz bobdan iborat bo'lib, chiziqli algebra, oliy algebra, analitik geometriya va matematik analiz bo'limlarining asosiy tushunchalarini o'z tarkibiga olgan.

Ushbu o'quv qollanma texnik oliy o'quv yurtlari uchun oliy matematika fanining na'munaviy dasturi asosida yozilgan bo'lib, boshqa oquv yurtlarida ham foydalanish mumkin. O'quv qo'llanmada nazariy ma'lumotlarni bayon etish bilan bir qatorda misol va masalalarni yechish namunalari ham berilgan.

O'quv qo'llanma texnik oliy o'quv yurtlari talabalariga mo'ljallangan bo'lib, oliy matematikaning asosiy bo'limlarini o'z ichiga olgan hamda mualliflarning ko'p yillik ma'ruzalari asosida yozilgan. Respublikamiz oliy o'quv yurtlarida yangi pedagogik texnologiyalarga o'tish boshlanganini hisobga olib, qo'llanmani yozishda ma'ruzalarni talaba mustaqil tushuna oladigan, soddaroq ko'rinishda berishga harakat qilindi.

Ushbu o'quv qo'llanmada oliy matematika kursining asosiy bo'limlarini o'z ichiga olgan va mualliflarning ko'p yillik tajribalari asosida yozilgan. Qo'llanmada kamchiliklar va ba'zi xatolarga yo'l qo'yilgan bo'lishi tabiiy. Qo'llanmadagi o'z tanqidiy fikr va mulohazalarini bildirgan kishilarga mualliflar oldindan minnatdorchiliklarini bildiradilar.

I BOB. BA’ZI BIR BOSHLANG‘ICH TUSHUNCHALAR VA DASTLABKI MA’LUMOTLAR

Bu bobda risolaning bayoni davomida zarur bo‘ladigan matematikaning ba’zi bir boshlang‘ich va yordamchi tushunchalari, hamda dastlabki ma’lumotlar haqida fikr yuritamiz.

Risolada boblar ularning tutgan o‘rnini bildiruvchi tartibi, ularning tarkibidagi bosh bandlar nuqta bilan ajratilgan ikkita natural sonlar bilan nomerlangan bo‘lib, ulardan birinchisi mazkur bandni o‘z tarkibiga olgan bobning nomerini, ikkinchisi esa bandning bob tarkibida tutgan o‘rnining tartibini anglatadi. Shuningdek, bosh bandlar tarkibida bo‘lgan ichki (kichik) bandlar ham mavjud bo‘lsa, ular nuqtalar bilan ajratilgan uchta natural sonlar orqali nomerlangan bo‘lib, ulardan birinchi va ikkinchilari yuqorida aytilganlarni, uchinchisi esa mazkur ichki (kichik) bandning bosh bantda tutgan o‘rnining tartibini anglatadi. Formulalar, ta’riflar, teoremalar va rasmlar ham shu yo‘sinda nomerlangandir. Masalan, «2.2.1- teorema» kabi yozilgan bo‘lsa, mazkur teorema 2-bobning 2-bandiga tegishli 1-teorema ekanligini bildiradi.

1.1. Matematik mantiqiyot elementlari.

Matematik mantiqiyot (logika) matematikaning bo‘limlaridan biri sifatida o‘ziga mustaqil fan ekanligi ma’lumdir. Bu bandda ushbu risolaning bayonida zarur bo‘ladigan matematik mantiqiyotning ba’zi bir elementlarini keltiramiz.

Barcha fanlar kabi matematika ham o‘z alifbosiga egadir. Alifbo harflar, raqamlar va maxsus belgilardan tashkil etilib, ularning har biri o‘z navbatida yaxlit deb qabul qilingan belgilardan iboratdir.

Matematikaning alifbosi barcha tillar va fanlar alifbolarining birlashmasidan iboratdir desak yanglish bo‘lmaydi va bunga sabab matematika barcha xalqlar uchun va barcha fanlarnimg asosida bo‘lganligidadir deb o‘ylaymiz.

Harflar deb qabul qilingan yaxlit belgilarning bir satrga joylashgan birikmasini «so‘z» va so‘zlarning yuqoridagidek birikmasi esa «gap» yoki «jumla» deb atalishi ham bizga ma'lumdir.

Matematikaning yuqorida aytilgan alifbosi asosida harflar, raqamlar, maxsus belgilar, so‘zlar va gaplardan foydalanib bitilgan yozuv *ifoda* deb ataladi.

Ifoda tarkibida qatnashgan harf uning qiymati deb ataluvchi turli ifodalarni (sonlarni) qabul qilsa, uni *o‘zgaruvchi* deb ataladi.

Agar o‘zgaruvchi faqat sonlardan iborat qiymat qabul qilsa, uni *sonli o‘zgaruvchi* deyiladi.

Tarkibida o‘zgaruvchi qatnashgan ifoda *shakl*, o‘zgaruvchi qatnashmagan ifoda esa, *konstant (o‘zgarmas)* deb ataladi.

Tarkibida n ta o‘zgaruvchi qatnashgan shakl n *o‘zgaruvchili shakl* deyiladi.

Shakl o‘zgaruvchilarining qabul qilishi mumkin bo‘lgan (shakl ma'noga ega bo‘ladigan) qiymatlari majmui *shaklning aniqlanish sohasi* deyiladi.

Masalan, x haqiqiy sonli o‘zgaruvchi bo‘lganda, ushbu $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4}$ shaklning aniqlanish sohasi $x \neq \pm 2$ bo‘lgan barcha haqiqiy sonlardan iboratdir. Ammo, $\{-2;2\}$ lardan birortasi ham sonli x o‘zgaruvchi uchun joiz qiymat bo‘la olmaydi.

Agar φ shakl bo'lib, u n ta $x_1; x_2; ...; x_n$ o'zgaruvchilarga ega bo'lsa, uni $\varphi(x_1; x_2; ...; x_n)$ kabi yozish qabul qilingandir.

Tegishli o'zgaruvchilarining barcha joiz qiynıat-larida sonni bildiradigan shakl *sonli shakl* deyiladi.

Matematikada «=» *tenglik* harfi sifatida qabul qilinib, u turli ma'nolarga ega ekanligini aytamiz:

1) bir elementning turli shaklda yozilishini anglatadi, masalan, $\sqrt{4} = 2Sin\frac{\pi}{2}$

2) tenglama o'rinli bo'ladigan uning o'zgaruvchilari qiymatlarini anglatadi, masalan, $(x+2)\cdot(x-3)=0$ uchun $x=-2$ yoki $x=3$;

3) sonli shakllarning teng kuchliligi (ekvivalentligi) ni anglatadi, masalan, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

va boshqalar.

So'zlar va jumlalar orasida «emas», «va», «yoki» so'zlari bog'lovchilar sifatida kelishi bizga ma'lumdir; matematik mantiqiyotda ham bu so'zlar *mantiqiy bog'lovchilar* deb atalib, ular uchun mos ravishda «$\rceil$», «$\wedge$», «$\vee$» kabi maxsus belgilar ishiatiladi.

Biror gapdan «emas» so'zi yordamida hosil qilingan yangi gap berilgan *gapning inkori* deyiladi. Masalan, A «a haqiqiy son musbat» dan iborat bo'lsa, $\rceil$A «a haqiqiy son musbat emas» degan gapdan iboratdir.

Ikkita gapmng «va» bog'lovchi so'z yordamida birikishidan hosil qilingan, ikkala gapning ham aym paytda o'rinli bo'lishidan iborat yangi gap ularning *kon'yunksiyasi* deyiladi. Masalan, P «kvadrat uchhad koeffitsiyentlari haqiqiy» degan, Q esa «diskrimmanti manfiy» degan gaplardan iborat bo'lsa; $P \wedge Q$ «kvadrat uchhad koeffitsiyentlari haqiqiy va diskrimmanti manfiy» gapidan iboratdir.

Ikkita gapning «yoki» bog'lovchi so'z yordamida birikishidan hosil qilingan, ayni paytda ulardan aqalli hittasining o'rinli bo'lishidan iborat yangi gap ularning *diz'yunksiyasi* deyiladi. Masalan, A gap yuqoridagidek bo'lib, B esa «-1 dan kichik» gapidan iborat bo'lsa, $A \vee B$ bo'lganda «a soni musbat yoki −1 dan kichik» gapiga egamiz.

Berilgan ikkita M hamda N gaplardan «agar M bo'lsa, u holda N bo'ladi» ko'rinishida hosil qilingan yangi gap ularnimg *implikatsiyasi* deyiladi va $\Rightarrow$ belgi yordamida $M \Rightarrow N$ kabi yoziladi.

Berilgan ikkita K hamda L gaplardan «agar K bo'lsa, faqat shu holda L bo'ladi» ko'rinishida hosil qilingan yangi gap ularning *ekvivalensiyasi* deyiladi va $\Leftrightarrow$ belgi yordamida $K \Leftrightarrow L$ kabi yoziladi. Bu ba'zan *ikki tomonlama implikatsiya* deb ham yuritiladi. «K bo'lishi uchun L ning bo'lishi zarur va yetarlidir» degan gapda ekvivalensiya mavjuddir.

Misol, ax^2+bx+c kvadrat uchhad berilgan bo'lsin. Agar A,P va Q gaplar yuqoridagicha bo'lib, T – «uning haqiqiy ildizi mavjud» degan, F – esa «uning qiymati musbat» degan gaplar bo'lsa, quyidagilar o'rinlidir:

1) $P \wedge Q \wedge A \Rightarrow F$; 2) $P \wedge (\neg Q) \Rightarrow T$; *3)* $A \vee (\neg A) \Leftrightarrow$ «a haqiqiy son».

Bularga ishonch hosil qilishni o'quvchining o'ziga qoldiramiz.

Quyidagi belgilashlarga ham ushbu risolaning bayoni davomida ko'p marotabalab murojaat qilamiz:

1) «har qanday (ixtiyoriy) x uchun» degan gap *umumiylik kvantori* deyiladi va $\forall x$ kabi belgilanadi;

2) «shunday x mavjudki» degan gap *mavjudlik kvantori* deyiladi va $\exists x$ kabi belgilanadi.

3) Agar m va n butun sonlar berilgan bo‘lib, biror i o‘zgaruvchi shu berilganlar va ular orasidagi barcha butun sonlarni o‘sish ($m<n$ bo‘lganda) yoki kamayish ($m>n$ bo‘lganda) tartibida ketma-ket qabul qilsa, uni $i=\overline{m,n}$ kabi belgilashni kelishib olamiz. Masalan, $i=1,2,...,n$ o‘rniga $i=\overline{1,n}$ yozuvni ishlatish mumkin.

4) Agar a_i $\left(i=\overline{1;n}, n\in N\right)$ifodalar (sonlar) berilgan bo‘lsa, ularning yig‘indisi va ko‘paytmasini mos ravishda

$$a_1+a_2+...+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i; \qquad a_1\cdot a_2\cdot...\cdot a_n=\prod_{i=1}^{n}a_i$$

kabi belgilaymiz.

5) $1<n\in N$ bo‘lganda $\prod\limits_{i=1}^{n}i=n!$ kabi belgilanadi va uni “n faktorial” deb o‘qiladi. Undan tashqari, $0!=1!=1$ deb qabul qilinadi. $\forall n\in N$ uchun $n!=n\cdot(n-1)!$ tenglikning to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

1.2. To‘plam

To‘plam matematikaning boshlang‘ich tushuncha-laridan bo‘lib, uni o‘zidan soddaroq tushunchalar orqali ta’riflab bo‘lmaydi. Shuning uchun to‘plam tushunchasi misollar orqali tushuntiriladi. Masalan, auditoriyadagi studentlar to‘plami, kutubxonadagi barcha kitoblar to‘plami, maktabdagi a’lochi o‘quvchilar to‘plami, $x^2-7x+10=0$ tenglamaning ildizlari to‘plami, natural sonlar to‘plami, Sirdaryodagi baliqlar to‘plami, Galaktikamizdagi planetalar to‘plami va boshqalar to‘plam tushunchasiga misol bo‘la oladi.

Agar *to'plamga tegishli bo'ladigan narsalarning belgisi ko'rsatilgan bo'lsa, u holda to'plam berilgan deb hisoblanadi.* Odatda, to'plamni tashkil etgan narsalar uning *elementlari* deyiladi. To'plam, qulaylik uchun, lotin alifbosiining bosh harflari, masalan, $A,B,C,...,X,Y,...$, uning elementlari esa satriy harflari, masalan, $a,v,c,d,...,x,y,z,...$ bilan belgilanadi. Biror x element A to'plamning elementi ekani $x \in A$ ko'rinishda, elementi emasligi esa $x\overline{\in}A$ (yoki $x \notin A$) ko'rinishda yoziladi va birinchi holda «x *element A ga tegishli*», ikkinchi holda «x *element A ga tegishli emas*» deb o'qiladi. Masalan, natural sonlar to'plamini olaylik:

$$N=\{1,2,3,4,...,n,...\},$$

bunda $2 \in N$, $1000 \in N$ munosabatlar o'rinli; $x^2+5x-14=0$ kvadrat tenglamaning ildizlari $x_1=-7$, $x_2=2$ ni olsak, $-7 \notin N$, $2 \in N$ bo'ladi.

To'plamlarni ularning elementlari chekli sonda yoki cheksiz ko'p bo'lishiga qarab ikki sinfga ajratish mumkin. Agar to'plamni tashkil qilgan elementlar chekli sonda bo'lsa, bunday to'plam *chekli to'plam* deyiladi. Masalan, Farg'ona politexnika instituti studentlari to'plami chekli to'plamni tashkil etadi. Agar to'plamning elementlari cheksiz ko'p bo'lsa, bunday to'plam *cheksiz to'plam* deyiladi. Masalan, natural, juft, musbat, toq sonlar to'plamlari cheksiz to'plamlarga misol bo'la oladi.

1.2.1- ta'rif. Bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam *bo'sh to'plam* deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Masalan, $x^2+1=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami bo'shdir.

1.2.2- ta'rif. Agar A to'plamning hamma elementlari B to'plamga tegishli bo'lsa, *A to'plam B to'plamning qism to'plami* deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Bunda «*A to'plam B da yotadi*» yoki «*A to'plam B ning qismi*» deb o'qiladi. Bu ta'rifdan quyidagi munosabatlar kelib chiqadi: $\varnothing\subset A,\ A\subset A.$

1.2.3- ta'rif. *Agar* $A\subset B$ *va* $B\subset A$ *bo'lsa* $A=B$ *deb qabul qilinadi.*

1.2.4- ta'rif. $A_i\ \left(i=\overline{1;n}\right)$ to'plamlarning *birlashmasi (yig'indisi)* deb, har bir elementi bu to'plamlardan aqalli bittasining elementidan iborat bo'lgan A to'plamga aytiladi va $A=A_1\cup A_2\cup...\cup A_n$ yoki $A=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A=\{1,3,5\}$ va $B=\{2,3,4\}$ berilgan bo'lsa,

$$C=A\cup B=\{1,2,3,4,5\}.$$

1.2.5- ta'rif. $A_i\ \left(i=\overline{1;n}\right)$ to'plamlarning *kesishmasi (ko'paytmasi)* deb, har bir elementi bu to'plamlarning barchasining elementidan iborat bo'lgan A to'plamga aytiladi va $A=A_1\cap A_2\cap...\cap A_n$ yoki $A=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A=\{1,2,3,4,5,6,7\},\qquad B=\{1,3,5,7,9\}$$

bo'lsa,

$$C=A\cap B=\{1,3,5,7\}$$

bo'ladi.

1.2.6-ta'rif. A va B *to'plamlarning ayirmasi* deb, A to'plamning B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan iborat C to'plamga aytiladi va u $C=A\backslash B$ orqali belgilanadi.

Masalan,

$$A=\{1,2,3,4,5,6\},\qquad B=\{2,4,6,8\}$$

bo'lsa,

$$C=A\backslash B=\{1,3,5\}.$$

1.2.7-ta'rif. $A\supset B$ bo'lganda, $A\backslash B$ ayirma *B to'plamning A gacha to'ldiruvchisi* deyiladi va B_A kabi belgilanadi.

1.2.8-ta'rif. Agar $A_i\left(i=\overline{1;n}; n\in N, n\geq 2\right)$ to'plamlar berilgan bo'lib, ular vositasida $C=\{(x_1,x_2,...,x_n):x_i\in A_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)\}$ to'plam tuzilgan bo'lsa, uni $A_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ *to'plamlarning to'g'ri (Dekart) ko'paytmasi* deyiladi va

$$C=A_1\times A_2\times...\times A_n$$

ko'rinshida yoziladi.

Biz yuqorida misol tariqasida keltirgan N natural sonlar to'plami kabi quyidagi sonli to'plamlarga bu kurs davomida ko'p marta murojaat qilishimizga to'g'ri keladi. Shu sababli, quyida ularni keltirishni lozim topdik:

1) $N=\{1;2;...;n;...\}$-natural sonlar;

2) $Z_0=\{0;1;2;...;n;...\}$- manfiy bo'lmagan butun sonlar;

3) $Z=\{0;\pm1;\pm2;...;\pm n;...\}$-butun sonlar;

4) $Q=\left\{\frac{m}{n}:m\in Z,\ n\in N\right\}$-ratsional sonlar;

5) J-irratsional sonlar;

6) $R=Q\cup J=(-\infty;+\infty)$-haqiqiy sonlar;

7) $R_0=[0;+\infty)$-manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar;

8) $R^+=(0;+\infty)$ -musbat haqiqiy sonlar;

9) $R^-=(-\infty;0)$-manfiy haqiqiy sonlar

to'plamlari.

To'plamlar ustidagi asosiy amallar quyidagi xossalarga ega:

1). $A\cup B=B\cup A$; *2). $A\cap B=B\cap A$;*

3). $A\cup A=A$; *4). $A\cap A=A$;*

5). $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

6). $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

1.3. Chiziqli ifodalash

Aytaylik, M to'plam elementlari ustida qo'shish va ularni songa ko'paytirish amallari aniqlangan bo'lsin. Ya'ni $\forall x, y \in M$ uchun shunday $z \in M$ mavjud bo'lsinki, uni x va y larning yig'indisi deb atalib, $x + y = z$ kabi belgilansin, hamda $x + y = y + x$ (kommutativlik xossasi) va $(x + y) + z = x + (y + z)$ (associativlik xossasi) o'rinli bo'lib, undan tashqari, M ning shunday 0 (nol) deb ataluvchi elementi mavjud bo'lsinki, $x + 0 = x$ bajarilsin; shu bilan birga, $x \in M$ va $\lambda \in R$ ($\lambda -$son) uchun ularning ko'paytmasi deb ataluvchi va λx (yoki $x\lambda$) kabi belgilanuvchi M to'plamning elementi mavjud bo'lib, bu amal uchun

$$\lambda \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot x = x,\ 0 \cdot x = 0,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = \mu \cdot (\lambda x) = (\lambda \cdot \mu) \cdot x,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$$

xossalar o'rinli bo'lsin; bu yerda $x, y, z \in M$; $\lambda, \mu \in R$ dir.

U vaqtda, $x_1, x_2, ..., x_n \in M$ va $c_1, c_2, ..., c_n \in R$ bo'lganda

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n \ \left(= \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \right)$$

ifoda M to'plamga tegishli bo'lib, uni $x_1, x_2, ..., x_n$ *elementlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi* deb ataladi. Agar $x \in M$ element

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$

ko'rinshda ifodalangan bo'lsa, uni $x_1, x_2, ..., x_n$ *elementlar sistemasining chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalangan (yoki qisqacha chiziqli ifodalangan)* deb ataladi.

1.4. Haqiqiy sonning absolut qiymati

Berilgan x haqiqiy sonning absolut qiymati deb, u manfiy bo'lmaganda shu sonning o'ziga, manfiy bo'lganda esa uning qarama-qarshisiga aytiladi va $|x|$ *kabi belgilanadi.*

Demak,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Quyidagi xossalar o'rinli ekanligiga, ta'rifga asoslamib, ishonch hosil qilish qiyin emas:

1). $|x| \geq 0,\quad |x| = |-x|,\ x \leq |x|,\ -x \leq |x|,\quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2). $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \quad (a > 0),$

$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$

3). $|x \pm y| \leq |x| + |y|, \qquad |x \pm y| \geq \big||x| - |y|\big|,$

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \qquad \left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0).$

4). $\sqrt{x^2} = |x|.$

1.5. Kombinatorika elementlari

Bu yerda o'rinlashtirish, o'rinalmashtirish va kombinatsiya deb ataluvchi kombinatorika tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik, n ta elementdan tashkil topgan M to'plam berilgan bo'lsin.

Berilgan M to'plamning *n ta elementlaridan m tasini ajratib olib* $(1 \le m \le n)$ *tuzilgan guruh o'rinlashtirish* deb ataladi. Bu yerda *bir xil elementlardan tuzilib bu elementlarni joylashtirish tartibi bilan farqlanuvchi guruhlar turli (farqli) guruhlar* deb qabul qilinadi. Bu usulda tuzilgan guruhlar sonini A_n^m bilan belgilanadi.

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-m+1) \qquad (1.5.1)$$

o'rinlidir. Buni matematik induksiya usuli yordamida isbotlash mumkin. Haqiqatdan ham,

1) $m = 1$ bo'lganda $A_n^1 = n$ bo'lishi ayondir;

2) $m = k-1$ uchun (1.5.1) o'rinli deb faraz qilaylik $(1 < k \le n)$;

3) $m = k$ uchun (1.5.1) ni keltirib chiqaraylik.

Bunimg uchun $k-1$ ta elementdan tuzilgan A_n^{k-1} ta o'rinalashtirishlarning har biriga unda qatnashmagan $n-(k-1) = n-k+1$ ta elementlardan har birini birlashtirib k ta elementdan tuzilgan o'rinlashtirishlarga ega bo'lishimizni e'tiborga olsak,

$$A_n^k = A_n^{k-1} \cdot (n-k+1) = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$$

ni, ya'ni (1.5.1) formula $m=k$ uchun ham o'rinli ekanligini olamiz.

Demak, (1.5.1) formula $1 \le m \le n$ uchun to'g'ridir.

Berilgan *n ta elementdan n tadan qilib tuzilgan o'rinlashtirishlarni o'rinalmashtirishlar* deyiladi va ularning sonini P_n bilan belgilanadi.

Demak,

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 1 = n! \qquad (1.5.2)$$

Berilgan n ta elementdan m tadan qilib tuzilgan aqalli bitta elementi bilan boshqalaridan farq qiluvchi guruhlarni *n ta elementdan m tadan qilib tuzilgan kombinatsiyalar* deb ataladi va ularning sonini C_n^m bilan belgilanadi.

Agar o‘rinlashtirishlarda m ta bir xil elementlardan tuzilgan faqat ularning joylashish tartiblari bilan bib-biridan farq qiluvchi $P_m = m!$ ta guruhlar kombinatsiyalarda bitta guruh deb qabul qilinishini (yuqorida kiritilgan kombinatsiyalar tushunchasi asosida) hisobga olsak,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

formulani olamiz, yoki

$$C_n^m = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (1.5.3)$$

bu yerda $0!=1!=1$ va $n \geq 2$ bo‘lganda $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ ekanligini eslatamiz.

Agar bo‘sh to‘plam har qanday to‘plamga qism bo‘lishini va u yagona ekanligini e’tiborga olsak, o‘rinlashtirishlar uchun $A_n^0 = 1$ bo‘ladi.

Undan tashqari, (1.5.1) formulani

$$A_n^m = \frac{n!}{m!}$$

ko‘rinishda yozsak, u vaqtda $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o‘xshash, $C_0^0 = 1$ ni ham olamiz.

1.6. Nyuton binomi formulasi

Oliy matematikani o‘rganishda va uning nazariy hamda ba’zi - bir amaliy masalalarini yechishda *Nyuton binomi* deb atalauvchi $(a+b)$ ikki hadning n-natural darajasini ifodalovchi

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k \qquad (1.6.1)$$

formuladan foydalanishga to‘g‘ri keladi.

Bu yerda C_n^m larni *binomial koeffitsiyentlar* deb atash qabul qilingan bo‘lib, ular uchun quyidagi xossalar o‘rinlidir:

$$1^0. \quad C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad\qquad (1.6.2)$$
$$2^0. \quad C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k.$$

Bu xossalardan foydalanib, (1.6.1) ni matematik induksiya usuli bilan isbotlaylik.

Haqiqatdan ham, $a \neq 0$ va $b \neq 0$ bo‘lganda (aks holda, bir hadning darajasiga ega bo‘lib qolamiz):

a) $n = 1$ uchun $(a+b)^1 = a + b = C_1^0 a^1 \cdot b^0 + C_1^1 a^0 b^1$ (1.6.1) formulaning to‘g‘ri ekanligiga ishonch hosil qilamiz;

b) $n = m-1$ uchun (1.6.1) formula o‘rinli deb faraz qilamiz:

$$(a+b)^{m-1} = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k a^{(m-1)-k} \cdot b^k;$$

c) $n = m$ uchun (1.6.1) formula o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz:

$$(a+b)^m = (a+b)^{m-1} \cdot (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k a^{(m-1)-k} \cdot b^k \right) \cdot (a+b) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \cdot a^{(m-1)-k+1} \cdot b^k + \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \cdot a^{(m-1)-k} \cdot b^{k+1} + =$$

$$= a^m + \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^k \cdot a^{m-k} \cdot b^k + \sum_{k=1}^{m-1} C_{m-1}^{k-1} \cdot a^{m-k} \cdot b^k + b^m =$$

$$= a^m + \sum_{k=1}^{m-1} \left(C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k \right) \cdot a^{m-k} \cdot b^k + b^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \cdot a^{m-k} \cdot b^k,$$

ya’ni $(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} \cdot b^k$ kelib chiqdi.

Demak, (1.6.1) Nyuton binomi formulasi ixtiyoriy natural n uchun o‘rinlidir.

(1.6.1) formulada *b* ni - *b* bilan almashtirib,

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a^{n-k} b^k$$

formulani olamiz.

Agar binomial koeffitsiyentlarning yuqorida keltirilgan (1.6.2) xossalarini e'tiborga olsak, ularni quyidagi *Paskal sxemasi* bo'yicha hisoblash qulay ekanligini ko'ramiz:

n=0: 1

n=1: 1 + 1

↓

n=2: 1 + 2 + 1

↓ ↓

n=3: 1 + 3 + 3 + 1

↓ ↓ ↓

n=4: 1 + 4 + 6 + 4 + 1

↓ ↓ ↓ ↓

n=5: 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

1-bobga doir mashqlar

1. $A=\{1,2,3,4,5,6,\}$ va $B=\{2,4,6,8\}$ to'plamlar berilgan. $A\cap B=?$ $A\setminus B=?$ $A\cup B=?$ $A\times B=?$
2. Quyidagi to'plamlarning qaysi biri bo'sh to'plam:

a) $x^2-2\pi x+5=0$ tenglamaning butun yechimlari to'plami,

b) $\sin 2x=\frac{1}{2}$ tenglamaning musbat yechimlari to'plami.

3. $A\bigcup B=A$; $A\bigcup B=B$; $A\bigcup B=\varnothing$ bo'lsa, A va B to'plamlar haqida nima deyish mumkin?

4. Z – butun N natural sonlar to'plami bo'lsa, $Z\backslash N$ ni toping.

5. Quyidagi yozuvlarning qaysi biri to'g'ri?

a) $\pi\in N$; $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^n}\right)\in N$;

b) $\forall a\in R\Rightarrow\exists x\in R$: $x^2+ax=0$ o'rinli bo'ladi.

6. Ushbu yozuvlarning to'g'riligini tushuntiring:

a) $\{x:x\in R,\ x^2=49\}=\{7;-7\}$

b) $\{4\}\subset\{x:x\in R, x^2=16\}$

c) $\{-3\}\subset\{x:x\in R, x^4=81\}$

d) $M\cap N=\{a\}\ \Rightarrow M\backslash N=M\backslash\{a\}$

7. Binom darajasining yoyilmasini toping:

a) $(a+в)^6$, *b)* $(x+y)^5$, *c)* $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^4$, *d)* $(3x-1)^7$.

1-bob bo‘yicha o‘z bilimingizni sinab ko‘ring

1. Gapning inkori deganda nimani tushunasiz va unga qanday mantiqiy (logik) belgi qo‘llaniladi?
2. Gaplarning kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi haqida nimalarni bilasiz?
3. Inplikaciya va ekvivalensiya nimalardan iborat?
4. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari tushunchalarini keltiring.
5. «To‘plam» tushunchasi qanday ma’noni bildiradi?
6. Har qanday A to‘plam uchun $A \subset A$ va $\varnothing \subset A$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladimi?
7. To‘plamlar ustida qanday amallarni bilasiz?
8. Berilgan elementlarning chiziqli kombinatsiyasi va chiziqli ifodalashni tushuntiring.
9. Haqiqiy sonning absolut qiymati to‘g‘risida nimalarni bilasiz?
10. Nyuton binomi formulasini yozing.

2-BOB.DETERMINANTLAR NAZARIYASINING ELEMENTLARI

Mazkur bobda oliy algebraning determinant tushunchasini va uning chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga tatbiqini keltiramiz.

2.1. Determinant

Faraz qilaylik, $\{a_{ij} : i=\overline{1;n},\ j=\overline{1;n,\ n\in N}\}$ to'plam berilgan bo'lib, uning elementlari bo'lgan a_{ij} ifodalar ustida arifmetik amallar aniqlangan bo'lsin.

2.1.1-ta'rif. Yuqorida berilgan to'plamning har bir elementini *birinchi tartibli determinant* deb ataymiz va uning qiymati sifatida shu elementning o'zini qabul qilamiz ([4] §16).

Endi , *(n-1)* – tartibli determinant tushunchasi aniqlangan degan faraz asosida *n*-tartibli determinantni $(2\le n\in N)$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (2.1.1)$$

kabi belgilab, uning qiymatini aniqlash maqsadida quyidagi yordamchi tushunchalarni kiritamiz.

1) Yotiq (gorizontal) ko'rinishda yozilgan $(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$ ni (2.1.1) *determinantning i-satri* (*i-satr – vektori*);

2) tik (vertikal) ko'rinishda yozilgan

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

ni j- *ustuni* (j- *ustun – vektori*);

3) $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ni esa *diagonali* (*bosh diagonali*) deb ataymiz.

2.1.2-ta'rif. $2 \le n \in N$ bo'lganda (2.1.1) n-tartibli determinant a_{ij} $\left(i=\overline{1;n}, j=\overline{1,n}\right)$ elementining (n-1) - *tartibli minori (minori)* deb, mazkur element joylashgan determinantning i-satri va j-ustunini o'chirish natijasida hosil qilingan (n-1)- tartibli determinantni ataymiz hamda M_{ij} kabi belgilaymiz.

Bu ta'rifdan ko'rinadikki, n- tartibli determinantda n^2 ta (n-1)- tartibli minorlar mavjud bo'lib, yuqoridagi farazga ko'ra, ularning barchasi aniqlangandir.

2.1.3- ta'rif. (2.1.1) n- tartibli determinant a_{ij} elementining *algebraik to'ldiruvchisi* deb, $(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ ni ataymiz va A_{ij} bilan belgilaymiz.

Demak, bu ta'rifga asosan,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij} \; (i=\overline{1;n}, j=\overline{1;n}). \qquad (2.1.2)$$

2.1.4-ta'rif. n-tartibli determinantning qiymati deb

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} A_{1j}$$

(2.1.3)

ni qabul qilamiz ([4] §16).

(2.1.3) ning o'ng tomonini *determinantning birinchi satri bo'yicha yoyilmasi* deb yuritiladi.

2.1.1. Ikkinchi tartibli determinant

Agar (2.1.3) da $n=2$ deb olsak, 2.1.1-ta'rif bilan birinchi tartibli determinant tushunchasi aniqlanganligi sababli, (2.1.2) yordamida

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{2} a_{1j}A_{1j} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2.1.4)$$

ni olamiz.

Ikkinchi tartibli determinantda (a_{11}, a_{22}) *diagonal* bilan bir qatorda (a_{12}, a_{21}) ni *yordamchi diagonal* deb yuritiladi.

(2.1.4) *dan ikkinchi tartibli determinant qiymati diagonal elementlari ko'paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko'paytmasini ayirish natijasiga tengligini ko'ramiz.*

1-misol. $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 6 - (-2)\cdot 5 = -6 + 10 = 4.$

2-misol.

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin\alpha\cdot\sin\alpha - \cos\alpha\cdot(-\cos\alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

3-misol. $\begin{vmatrix} tg\alpha & -1 \\ 1 & tg\alpha \end{vmatrix} = tg\alpha\cdot tg\alpha - 1\cdot(-1) = tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

4-misol.

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\rho\sin\alpha & \rho\cos\alpha \end{vmatrix} = \rho\cos^2\alpha + \rho\sin^2\alpha = \rho(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \rho.$$

2.1.2. Uchinchi tartibli determinant

$n=3$ bo'lganda, ikkinchi tartibli determinant (2.1.4) bilan aniqlanganligini hisobga olib, (2.1.3) dan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2.1.5)$$

ni olish qiyin emas. Bu uchinchi tartibli determinantni hisoblashning asosiy formulasi bo'lib, uning o'ng tomonidagi ifodani hosil qilishda (2.1.3) bilan bir qatorda *uchburchaklar* hamda *Sarius qoidasi* deb ataluvchi usullar mavjuddir.

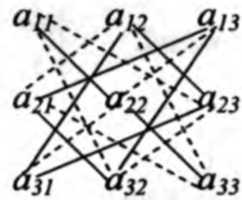
1. Uchburchaklar qoidasi. Asosi uchinchi tartibli determinant diagonaliga parallel uchlari esa determinant elementlari joylashgan nuqtalarda bo'lgan teng yonli uchburchaklar chizamiz (tasavvurimizda). Diagonalda joylashgan va aytilgan uchburchaklar uchiarida joylashgan 3 tadan elementlarni ko'paytirib, (2.1.5) ning o'ng tomonidagi ifodaning dastlabki 3 ta hadini, xuddi shunday ishni (a_{13}, a_{22}, a_{31}) yordamchi diagonal uchun ham takrorlab, olingan ko'paytmalarni qarama-qarshi ishoralar bilan olib, so'nggi 3 ta hadini hosil qilamiz (2.1.1-rasm).

5-misol.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\cdot 2+3\cdot 1\cdot 0-$$

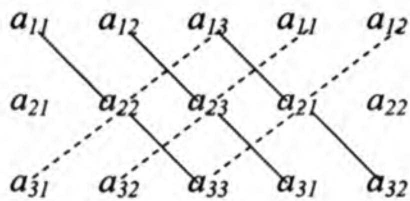
$$-2\cdot(-4)\cdot 0-(-1)\cdot 3\cdot(-1)-1\cdot 1\cdot 2=$$

$$=8-2+0-0-3-2=1.$$



2.1.1-rasm.

2. *Sarius qoidasi.* Bu usulda uchinchi tartibli determinantning birinchi va ikkinchi satrlarini uning davomiga mos ravishda to‘rtinchi va beshinchi satrlar qilib yozib, determinant diagonaliga parallel uchtadan elementlar orqali o‘tuvchi yana ikkita diagonallar o‘tkazamiz. Ularga joylashgan uchtadan elementlarni ko‘paytirib (2.1.5) ning birinchi uchta hadini va bu ishni yordamchi diagonal uchun ham bajarib olingan ko‘paytmalar ishorasini qarama-qarshisiga o‘zgartirib, so‘ngi uchta hadini olamiz. Huddi shunga o‘xshash ishni determinantning birinchi va ikkinchi ustunlarini mos ravishda to‘rtinchi va beshinchi ustunlar qilib yozish bilan ham bajarish mumkin (2.1.2-rasm).



2.1.2-rasm.

2.2. Determinantning xossalari

2.2.1-teorema. $2 \le n \in N$ bo‘lganda (2.1.1) n-tartibli determinant uchun

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad i = \overline{1;n}$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = D_n, \quad j = \overline{1;n} \qquad (2.2.1)$$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda D_n- (2.1.1) n-tartibli determinantning qiymati, A_{ij} esa a_{ij} elementining algebraik to'ldiruvchisidir.

Isbot. (2.2.1) ning birinchi munosabati $i=1$ bo'lgan hol uchun to'g'ri ekanligi n-tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi. Qolganlarini matematik induksiya usuli bilan ko'rsatamiz. Avvalo, (2.2.1) ning birinchi munosabati (2.1.1) n-tartibli *determinantning i-satri bo'yicha*, ikkinchisi esa *j-ustuni bo'yicha yoyilmasi* deb atalishini aytamiz.

$n=2$ uchun (2.2.1) o'rinli ekanligini ko'rsatish osondir. Masalan, ikkinchi ustun bo'yicha yoyilmani olsak,

$$\sum_{i=1}^{2} a_{i2}A_{i2} = -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11} = D_2 .$$

Qolganlari ham xuddi shunga o'xshash ko'rsatiladi.

Endi, (2.2.1) $n-1$ uchun to'g'ri deb uni n uchun ham to'g'ri bo'lishini ko'rsataylik. Yuqorida aytganimizdek,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = D_n$$

ekanligi n-tartibli determinant qiymatining (2.1.3) ta'rifidan kelib chiqadi.

$n \geq 3$ bo'lganda yordamchi *(n-2)*-tartibli minor tushchasini kiritamiz. (2.1.1) *n-tartibli determinant a_{ij} va a_{mk} ($i\neq m$, $j\neq k$) elementlariga mos (n-2)-tartibli minor deb determinantning i- va m-satrlarini hamda j- va k-ustunlarini o'chirishdan hosil qilingan (n-2)-tartibli determinantga aytamiz va M_{ijmk} kabi belgilaymiz ($M_{ijmk}= M_{mkij}$ ekanligi ravshandir).*

Endi, i-satr bo'yicha determinant yoyilmasini qaraylik:

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij}M_{ij}$$

Bu yerda M_{ij} (2.1.1) n-tartibli determinant a_{ij} elementining

(n-1) - tartibli minori ekanligidan, u (n-1)-tartibli determinant bo‘lib, yuqoridagi farazga ko‘ra, uning uchun (2.2.1) munosabatlar o‘rinlidir. $2 \le i \le n$ bo‘lganda M_{ij} ning birinchi satri bo‘yicha yoyilınasi

$$M_{ij} = \sum_{j \neq k=1}^{n} (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k}$$

bo‘lib, bu yerda $\sigma = \sigma_0(j-k)$, $\sigma_0(x)$ esa Hevisaydning birlik funksiyasidir:

$$\sigma_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \ge 0. \end{cases}$$

Demak,

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \sum_{j \neq k=1}^{n} (-1)^{k+\sigma} \cdot a_{1k} M_{ij1k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} \sum_{k \neq j=1}^{n} (-1)^{i+j+\sigma-1} \cdot a_{ij} M_{ij1k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = S_1 = D_n,$$

ya’ni $S_i = D_n$, $i = \overline{2;n}$ ni olamiz. Bu satrlar bo‘yicha yoyilmalar uchun (2.2.1) ning isbotidir.

Ustun bo‘yicha yoyilmani olsak, $j = \overline{2;n}$ bo‘lganda, xuddi yuqoridagiga o‘xshash,

$$U_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = U_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin (buni o‘quvchining o‘ziga qoldiramiz).

Endi, $U_1 = S_1$ ekanligini ko‘rsatish kifoyadir.

$$U_1=\sum_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i1}=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}=$$
$$=a_{11}M_{11}+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j}a_{1j}M_{i11j}=$$
$$=a_{11}M_{11}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i}a_{i1}M_{i11j}=$$
$$=a_{11}M_{11}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}=S_1.$$

Teorema isbotlandi.

(2.2.1) yordamida (2.1.1) n-tartibli determinantning quyidagi xossalarini isbotlash mumkin.

1). Determinantning barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozish (determinantni transponirlash) uning qiymatini o'zgartirmaydi.

2). $2\le n\in N$ bo'lganda determinantning ikkita satrlarining (ustunlarining) o'rinlari o'zaro almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi.

3). $2\le n\in N$ bo'lganda ikkita bir xil satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

4). Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

5). Biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlari bir xil ko'paytuvchiga ega bo'lsa, bu ko'paytuvchini determinant tashqarisiga chiqarish mumkin, va aksincha, determinantni biror songa ko'paytirish uchun uning biror satridagi (ustunidagi) barcha elementlarini shu songa ko'paytirish kifoyadir.

6). Proportsional satrlarga (ustunlarga) ega bo'lgan determinant qiymati nolga tengdir.

7). Agar determinantning biror satrining (ustunining) har bir elementi yig'indidan iborat bo'lsa, u mos satrining (ustunining) elementi berilgan determinantdagi mos satr (ustun) elementining mos qo‘shiluvchisidan, qolgan satrlari (ustunlari) esa berilgan determinant mos satrlaridan (ustunlaridan) iborat bo‘lgan determinantlarning yig‘indisiga tengdir. Masalan,

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a'_{12}+a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a''_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8). Determinant biror satri (ustuni) elementlari boshqa satrlar (ustunlar) mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, u nolga tengdir.

9). Determinant biror satri (ustuni) elementlariga boshqa satr (ustun) mos elementlarini bitta songa ko‘paytirib qo‘shilsa, uning qiymati o‘zgarmaydi.

1-xossani matematik induksiya usulini qo‘llab va (2.2.1) dan foydalanib isbotlash mumkin. Haqiqatdan ham, $n=2$ uchun uning o‘rinli ekanligiga bevosita (2.1.4) formuladan foydalanib ishonch hosil qilish osondir. Endi, (n-1)-tartibli determinant uchun bu xossa o‘rinli deb faraz qilib, uni n-tartibli determinant uchun isbotlaylik. Agar qiymati D_n dan iborat berilgan (2.1.1) n-tartibli determinant barcha satrlarini mos ustunlar qilib yozishdan hosil qilingan determinantni berilganga *transponirlangan* deb atab, uning qiymatini D_n^* bilan belgilasak, uning birinchi satri bo‘yicha yoyilmasidan foydalanib,

$$D_n^* = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}^* = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = D_n$$

ni olamiz (M_{ij}^* orqali M_{ij} ning transponirlangani belgilangan bo‘lib, qilingan farazga ko‘ra ular uchun $M_{ij}^* = M_{ij}$ dir).

2-xossa ham xuddi shunga o‘xshash isbotlanadi. Buning uchun $n=2$ bo‘lganda bevosita (2.1.4) dan foydalanish, $n\geq 3$ bo'lganda esa determinantning o'z o'rnida qolgan satri (ustuni) bo'yicha (2.2.1) yoyilmasini yozish kifoyadir.

3-xossa 2-ning natijasi sifatida kelib chiqadi.

4- va 5-xossa unda qayd qilingan satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanib isbotlanadi.

6-xossa 5- va 3-larning natijasi sifatida kelib chiqadi.

7-xossani ko'rsatish uchun elementlari yig'indilardan iborat satr (ustun) bo'yicha determinant yoyilmasidan foydalanish kerak bo'ladi.

8- va 9-xossalar 7- va 6-larning natijasidir.

Bulardan tashqari determinantning yana bitta xossasini isbotsiz keltiramiz.

10). n-tartibli A va B determinantlarning elementlari vositasida elementlari

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, \qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{jk}$$

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}b_{ik}, \qquad c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}b_{ki} \qquad \left(i=\overline{1;n},\ j=\overline{1;n}\right)$$

formulalardan biri yordamida hisoblangan C determinant uchun

$$C=A\cdot B$$

o'rinlidir. Bu yerda a_{ij} A, b_{ij} B, c_{ij} esa C determinantlarning i-satri va j-ustuni elementidir ([4] §13).

5-misol.

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

determinantni hisoblang.

Yechish. Uchinchi ustun elementlarini -2 ga ko'paytirib, birinchi ustun mos elementlariga, so'ngra -3 ga ko'paytirib, to'rtinchi ustun mos elementlarga qo'shsak, 9^0 xossaga ko'ra

$$D_4 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 10 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -3 \\ 10 & 3 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-80 - 30 + 18 + 120 - 10 + 36) = -54.$$

2.2.2-teorema. $2 \le n \in N$ bo'lganda n-tartibli determinant uchun

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \delta_{ik} D_n \qquad \left(i = \overline{1;n},\ k = \overline{1;n}\right)$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} D_n \qquad \left(j = \overline{1;n},\ k = \overline{1;n}\right) \qquad (2.2.2)$$

munosabatlar o'rinlidir. Bu yerda δ_{pq}-Kroneker belgisi deb atalib, $p \in N$, $q \in N$ bo'lganda

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \ne q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$$ kabi aniqlanadi.

Isbot. (2.2.2) ning birinchi munosabatida $i=k$, ikkinchisida esa $j=k$ bo'lgan hollarning isboti 2.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Demak, birinchi munosabatda $i \ne k$ va ikkinchisida esa $j \ne k$ deb faraz qilsak, ularning o'ng tomonlari noldan iborat bo'ladi. Chap tomonidagi ifoda esa (2.2.1) lar asosida birinchi munosabatda bir xil i- va k-satrlari, ikkinchisida esa bir xil j- va k-ustunlari mavjud bo'lgan determinantlar sifatida nolga tengdir. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi xulosa kelib chiqadi:

Determinant biror satri (ustuni) elementlarini algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi determinant qiymatiga , boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi esa nolga tengdir.

2.3. Determinant yordamida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish. Kramer formulalari

Aytaylik, n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = c_i\,; \quad i=\overline{1,n} \tag{2.3.1}$$

sistemasi berilgan bo'lsin, bu yerda $a_{ij}\left(i,j=\overline{1,n}\right)$ sistemaning koeffitsiyentlari va $c_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ uning o'ng tomoni (yoki ozod hadlari) deb atalib, ular berilgan (ma'lum) ifodalar (sonlar)dir, $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ esa noma'lumlardir.

Berilgan (2.3.1) sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.3.2}$$

ni *sistemaning determinanti (aniqlovchisi)* deyiladi.

2.3.1-ta'rif. *Agar ushbu* n ta x'_j $\left(j=\overline{1;n}\right)$ *ifodalar (sonlar) sistemasi uchun* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j = c_i\,;\ i=\overline{1,n}$ *tengliklar o'rinli bo'lsa, bu ifodalar (sonlar) sistemasi (2.3.1) sistemaning yechimi deyiladi. Yechimi mavjud bo'lgan* *sistemani birgalikda, mavjud bo'lmasa, birgalikda emas deyiladi.*

Agar (2.3.1) ning har ikki tomonini (2.3.2) ning A_{ik} algebraik to'ldiruvchisiga ko'paytirib, so'ngra, bu sistemaning barcha tenglamalarini hadlab qo'shsak, 2.2.2-teoremaga ko'ra

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ik}x_j\right)=\sum_{i=1}^{n} c_i A_{ik} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik}\right)x_j=\Delta_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\cdot x_k=\Delta_k$$

ni olamiz. Bu yerda Δ_k (2.3.2) sistema determinantining k-ustuni o'rniga (2.3.1) ning o'ng tomonini yozish bilan hosil qilinib, ularni *sistemaning yordamchi determinantlari* deb ataladi.

Oxirgi olingan natijani barcha $k=\overline{1,n}$ uchun bajarib,

$$\Delta\cdot x_j=\Delta_j;\quad j=\overline{1,n} \qquad (2.3.3)$$

sistemaga kelamiz. Bu shakl almashtirishlar natijasida hosil qilingan, (2.3.3) sistemani (2.3.1) ning yechimi qanoatlantirishini ko'rish qiyin emas. Agar

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij}^2>0,\quad j=\overline{1,n} \qquad (2.3.4)$$

shart bajarilsa, yuqorida bajarilganlar elementar shakl almashtirishlardan iborat bo'lib, (2.3.1) va (2.3.3) sistemalarning ekvivalent bo'lishi ravshandir.

Eslatma. (2.3.1) sistemada elementar shakl almashtirishlar deyilganda quyidagilarni tushunamiz:

1) (2.3.1) ning ixtiyoriy tenglamasining barcha hadlarini noldan farqli songa ko'paytirish yoki bo'lish;
2) ixtiyoriy ikkita tenglamalarining o'rinlarini almashtirish;

3) ixtiyoriy tenglamasining hadlariga boshqa biror tenglamasi mos hadlarini bitta songa ko‘paytirib qo‘shish.

Agar $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, (2.3.4)ning bajarilishi kelib chiqadi va bu vaqtda (2.3.1) va (2.3.3) ekvivalent sistemalar bo‘lib, ularning yechimi uchun

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}; \quad j = \overline{1,n} \tag{2.3.5}$$

ga ega bo‘lamiz. (2.3.5) *Kramer formulalari* deb ataladi.

2.3.1-teorema. *Agar (2.3.1) n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining (2.3.2) determinanti noldan farqli bo'lsa, u yagona yechimga egadir.*

Isbot. $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, (2.3.1)ning yechimi mavjudligini yuqorida isbotladik. Yagonaligi (2.3.1) va (2.3.3) sistemalar ekvivalentligidan kelib chiqadi.

1-misol. Ushbu $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 4x-5y=3 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechish. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)-3\cdot 4 = -22 \neq 0,$

demak, sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -35-9 = -44, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6-28 = -22.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-44}{-22} = \frac{44}{22} = 2, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1.$$

Javob: $\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$

2-misol. $\begin{cases} x+2y-z=6, \\ 2x-3y+2z=2, \\ 3x+y+z=12 \end{cases}$

sistema yechilsin.

Yechish.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -7 & 4\\ 3 & -5 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7 & 4\\ -5 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot 4\begin{vmatrix}7 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-4(7-5)=-8$$

$\Delta\neq 0\Rightarrow$ sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}6 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\\ 12 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 6 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 7 & 1 & 2\\ 9 & 3 & 1\end{vmatrix}=2\cdot(-1)\begin{vmatrix}7 & 1\\ 9 & 3\end{vmatrix}=-24,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 6 & -1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 12 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -10 & 4\\ 3 & -6 & 4\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-10 & 4\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-40+24=-16,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 6\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 1 & 12\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -7 & -10\\ 3 & -5 & -6\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-7 & -10\\ -5 & -6\end{vmatrix}=42-50=-8;$$

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-24}{-8}=3,\qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-16}{-8}=2,\qquad z=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-8}{-8}=1.$$

Javob: $\begin{cases}x=3,\\ y=2,\\ z=1.\end{cases}$

2.3.2-teorema. Agar (2.3.1) sistemaning (2.3.2) determinanti nolga teng (ya'ni $\Delta=0$) bo'lib, uning yordamchi Δ_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ determinantlaridan birortasi noldan farqli bo'lsa, (2.3.1) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

Isbot. Teorema sharti asosida (2.3.3) sistema yechimga ega emasligi aniqdir. Agar (2.3.1) yechimga ega deb faraz qilinsa, bu yechim (2.3.3)ning ham yechimi bo'lishi kerak, ammo, buning bo‘lishi mumkin emas. Demak, (2.3.1) yechimga ega emas ekan. Teorema isbotlandi.

2.3.3-teorema. Agar (2.3.1) sistemaning (2.3.2) determinanti Δ bilan birga uning yordamchi Δ_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ determinantlarining barchasi nolga teng (ya'ni $\Delta_j=\Delta=0,\ j=\overline{1,n}$) bo‘lsa, u vaqtda (2.3.1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi yoki yechimga ega bo‘lmaydi.

Isbot. $n=1$ bo‘lgan holda $0x_1=0$ ko‘rinishdagi tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega ekanligi ma'lumdir. Endi, $n>1$ bo‘lgan holni qaraylik. Teorema sharti asosida (2.3.3) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega ekanligi ravshandir. Agar (2.3.4) shart bajarilsa, (2.3.1) ham cheksiz ko‘p yechimga egaligi kelib chiqadi. Demak, (2.3.4) shart bajarilmagan holni tekshirib ko‘rish kifoyadir. Agar sistema koeffitsiyentlarining barchasi nolga teng bo‘lsa, (2.3.4) bajarilmaydi va bu holda sistemaning o‘ng tomoni qanday bo‘lishidan qa'ti nazar $\Delta_j=0,\ \left(j=\overline{1,n}\right)$ bo‘lib, birorta tenglamaning o‘ng tomonidagi son noldan farqli bo‘lsa, bu tenglama ziddiyatli ekanligidan sistema yechimga ega bo‘lmaydi; o‘ng tomondagi barcha sonlar nolga teng bo‘lsa, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi ravshandir.

Agar sistema koeffitsiyentlaridan birortasi, masalan, $a_{i_0 j_0}\neq 0$ bo‘lsa, i_0 tenglamaning har ikki tomonini bu noldan farqli koeffitsiyentga bo‘lib, so‘ngra uning yordamida qolgan tenglamalardagi x_{j_0} qatnashgan hadni yo‘qatish mumkin. Buning natijasida i_0-tenglamada x_{j_0} noma'lum qolganlari orqali chiziqli ifodalanadi va i_0-tenglamasiz qolgan tenglamalardan tuzilgan $(n-1)$ noma'lumli $(n-1)$ta chiziqli tenglamalar sistemasining determinanti $(-1)^{i_0+j_0}\cdot\dfrac{\Delta}{a_{i_0 j_0}}$

ga teng bo‘lib, u ham $\Delta = 0$ bo‘lganligi sababli, nolga tengdir. Xuddi shunga o‘xshash bu sistemanmg yordamchi determinantlari ham nolga teng bo‘lishi ko‘rsatiladi. Olingan sistema uchun yana teoremaning yuqorida isbotlangan qismida bayon qilingan hollardan biri yuz bersa, masala hal, aks holda, yuqorida qilingan ishni takrorlab, yana bitta noma’lumni yo‘qatib, tenglamalar sonini bittaga kamaytiramiz va hokazo. Bu jarayon davomida biror qadamda teoremaning yuqorida isbotlangan qismida qayd qilingan hollardan biri yuz beradi yoki, aks holda, oxir oqibat (2.3.1) noma’lumlardan birortasiga nisbatan $0x_{k_0} = 0$ ko‘rimshdagi tenglamaga kelamiz va cheksiz ko‘p yechimga ega ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. Agar (2.3.1) sistemaning o‘ng tomonidagi barcha $c_i = 0\ \left(i = \overline{1,n}\right)$ bo‘sa, uni *bir jinsli sistema* deb atalib, $x_j = 0\left(j = \overline{1,n}\right)$ unga yechim bo‘lishi ayondir va bu holda bir jinsli sistema noldan farqli ($x_j\left(j = \overline{1,n}\right)$ lardan birortasi noldan farqli bo‘ladigan) yechimga ega bo‘lishi uchun uning determmanti nolga teng $(\Delta = 0)$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

3-misol.
$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 4x + 6y = 6 \end{cases}$$

sistema tekshirilsin.

Yechish.
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$$

sistema ikkinchi tenglamasini 2 ga bo'lib,

$$\begin{cases} 2x+3y=3, \\ 2x+3y=3 \end{cases} \Leftrightarrow 2x+3y=3 \Leftrightarrow x=-1{,}5(y-1)$$

ga ega bo'lamiz. Demak, sistema birgalikda va u cheksiz ko'p yechimga egadir: $\{(-1{,}5(y-1);y): y \in R\}$.

4-misol. $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 10x+4y=7 \end{cases}$

sistema tekshirilsin.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Demak, sistema birgalikda emas.

5-misol. $\begin{cases} x-y-z=0, \\ x-2y-z=0, \\ 2x-4y-2z=0 \end{cases}$

sistemani yeching.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Berilgan sistema bir jinsli va uning determinanti nolga tengligi sababli u cheksiz ko'p yechimga egadir. Sistemaning uchinchi tenglamasi ikkinchi tenglamasini 2 ga hadlab ko'paytirish natijasi ekanligini ko'rish mumkin. Demak,

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \end{cases}$$

sistema berilganga teng kuchlidir. Bundan

$$\begin{cases} x - y = z, \\ x - 2y = z \end{cases}$$

sistemani hosil qilib, $z \in R$ ixtiyoriy son deb faraz qilib, uni yechsak,

$$\begin{cases} x = z, \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t, \\ y = 0, \quad t \in R \\ z = t, \end{cases}$$

ga kelamiz. Demak, $\{(t;0;t): t \in R\}$- sistema cheksiz ko'p yechimga egadir.

2-bobga doir mashqlar

1. Determinantni hisoblang:

$a)$ $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$; $b)$ $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$; $c)$ $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

$d)$ $\begin{vmatrix} a & 1 \\ a^3 & a^2 \end{vmatrix}$; $e)$ $\begin{vmatrix} a^2 - 1 & b + c \\ a^2 + a & ab + ac \end{vmatrix}$; $f)$ $\begin{vmatrix} tg^4\alpha & -1 \\ 1 & ctg^2\alpha \end{vmatrix}$;

Javob: *a) 17; b) -5; c) 1; d) 0; e) 0; f)* $1/\cos^2\alpha$

2. Tenglamani yeching:

$a)$ $\begin{vmatrix} 2 & x^2 - 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$ $b)$ $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3x & x+22 \end{vmatrix} = 0,$ $c)$ $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ -4 & x+1 \end{vmatrix} = 0,$ $d)$ $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$

Javob: *a)* $x=\pm 4$; *b)* $x=2$;

c) $x_1=-1, x_2=-4$; *d)* $x_1 = -\frac{1}{6},\ x_2 = \frac{3}{2}$.

3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yeching:

a) $\begin{cases} 8x - y = 4; \\ 9x + 2y = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9y - 4x = 1; \\ 2x + 3y = 18 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x - y = 6; \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$

Javob: *a) (1;4) b) (2;1) c) ∅,*

4. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$a) \begin{cases} 2x - 4y + 3z = 7; \\ x - 2y + 4z = 6; \\ 3x - y + 5z = 11 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 4y + z = 1; \\ x + 5y - 3z = 18; \\ 3x + y + 9z = 4 \end{cases}$$

Javob: *a) (2;0;1) b) (5;2;-1)*

5. To'rt noma'lumli to'rtta chiziqli tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} x - y + 5z - 2t = -8; \\ 3x - y + 4z - 3t = -12; \\ x - 3y + 6z - t = -12; \\ 3x - 2y + z - t = -11 \end{cases}$$

Javob: (-1;3;0;2)

Determinantlar nazariyasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. Ikkinchi tartibli determinant qanday hisoblanadi?
2. Uchinchi tartibli determinant tushunchasini bering.
3. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashda uchburchaklar usulini ko'rsating.
4. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashda Sarius usulini ko'rsating.
5. n-tartibli determinant haqida tushuncha bering.
6. Determinant minori va algebraik to'ldiruvchilariga ta'rif bering.
7. Determinantning xossalarini keltiring.

8. n ta noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini determinantlar yordamida yechishni ko'rsating.
9. Kramer formulalarini yozing.
10. n ta noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo'lishining zaruriy va yetarli shartini ayting.

3-BOB. VEKTORLAR ALGEBRASINING ELEMENTLARI

Tabiiy fanlarning ba'zi-bir bo'limlarida faqat son qiymati bilan tavsiflanuvchi va skalyarlar deb ataluvchi kattaliklar qatorida ham son qiymati ham yo'nalishi bilan tavsiflanuvchi kattaliklarni o'rganishga to'g'ri keladi. Bunday, ham son qiymati ham yo'nalishi bilan tavsiflanuvchi kattaliklarni *vektor kattaliklar* deb ataladi. Masalan, uzunlik, yuza, hajm, massa skalyar kattaliklarga; kuch, tezlik, tezlanish, magnit maydonining biror nuqtasidagi kuchianishi vektor kattaliklarga misoldir.

Matematikada skalyar kattaliklarni *skalyarlar* deb atalib, ularni sonlar vositasida o'rganilsa, vektor kattaliklarni *vektor* tushunchasi yordamida o'rganiladi.

Geometriyada oddiy kesma tushunchasidan tashqari, yo'nalishli, ya'ni ma'lum bir uchi boshlanishi, ikkinchi uchi esa oxiri deb qabul qilingan kesma tushunchasi ham qaraladi. Yo'nalishli kesmani ma'lum tartibda olingan (berilgan), uning boshi va oxiri deb hisoblanuvchi, ikkita nuqta aniqlaydi. Oddiy kesmada esa uning uchlarini aniqlovchi ikkita nuqtalar tartibining ahamiyati yo'qdir.

3.1. Vektor tushunchasi

3.1.1-ta'rif. *Boshlanish va oxirgi nuqtasi ko'rsatilgan (aniqlangan) kesma (yo'nalishli kesma) yoki ikkita nuqtalarning tartiblangan jufti vektor deb atalib, birinchi nuqta uning boshl, ikkinchisi esa uchi (oxiri) deyiladi.*

Boshi A, uchi esa B nuqtada bo'lgan vektorni $\overrightarrow{AB}$ (yoki $\overline{AB}$) kabi belgilanadi (vektorning boshini anglatadigan harf har doim birinchi o'rinda yoziladi). Ba'zida vektor bitta satriy harf bilan ham belgilanadi, masalan, $\vec{a}$ (yoki $\bar{a}$) kabi. Chizmada vektor ko'rsatkichli kesma shaklida tasvirlanadi (3.3.1-rasm).

Boshi bilan uchi ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va $\vec{0}$ kabi belgilanadi. Nol vektor yo'nalishli emasligi aniqdir, shu sababli, uni oddiy nol soni kabi ham yoziladi.

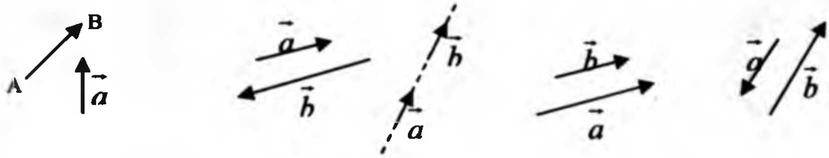
Vektorga mos kesmaning uzunligi uning *moduli* (yoki *uzunligi*) deyiladi. $\overrightarrow{AB}$ $(\vec{a})$ vektor moduli $|\overrightarrow{AB}|$ $(|\vec{a}|)$ kabi belgilanadi. Faqatgina *nol vektor moduli nolga teng* bo'lib, *noldan farqli vektor moduli musbat son* bo'lishi aniqdir.

Moduli birga teng bo'lgan vektorni birlik vektor (ort) deb ataladi.

3.1.2-ta'rif. *Parallel to'g'ri chiziqlarda yoki bitta to'g'ri chiziqda yotuvchi vektorlarni kollinear vektorlar deb ataladi (3.1.1$_b$-rasm).*

Kollinear bo'lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni $\vec{a} \| \vec{b}$ kabi belgilanadi.

3.1.3-ta'rif. $\vec{a} \| \vec{b}$ bo'lib, agar vektorlarning yo'nalishlari bir xil bo'lsa, ular *yo'nalishdosh* (yoki *bir xil yo'nalishli*) deb ataladi va $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ kabi belgilanadi (3.1.1$_c$-rasm), agar yo‘nalishlari turlicha bo‘lsa, *qarama-qarshi yo‘nalishli* deb atalib, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ kabi belgilanadi (3.1.1$_d$-rasm).



a) *b*) c) *d*)

3.1.1-rasm.

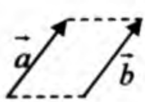
3.1.4-ta’rif. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ va $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = \vec{b}$ kabi yoziladi (3.1.2-rasm).

Bu ta’rifdan biror vektorni parallel ko‘chirish natijasida hosil qilingan vektor dastlabki vektorga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

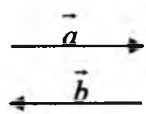
3.1.5-ta’rif. Agar $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ va $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ bo‘lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar *qarama-qarshi vektorlar* deyiladi va $\vec{a} = -\vec{b}$ (yoki $\vec{b} = -\vec{a}$) kabi yoziladi (3.1.3-rasm).

$\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ lar qarama-qarshi vektorlar ekanligi ravshandir.

$\vec{a}$ ga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ kabi belgilanadi.



3.1.2-rasm.



3.1.3-rasm.

Quyidagi xossalarning o'rinli ekanligini ko'rsatish qiyin emas:

1). $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=\vec{a}$;

2). $\vec{a}=\vec{b} \wedge \vec{b}=\vec{c} \Rightarrow \vec{a}=\vec{c}$;

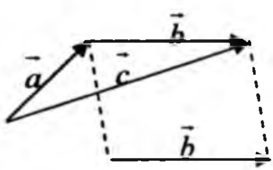
3). $\vec{a}=-\vec{b} \wedge \vec{b}=-\vec{c} \Rightarrow \vec{a}=\vec{c}$.

3.2. Vektorlar ustida chiziqli amallar

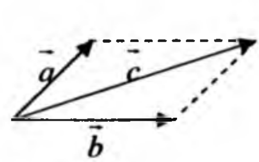
Vektorlar ustida chiziqli va chiziqsiz bo'lgan amallar mavjuddir. Bu bandda vektorlar ustidagi chiziqli bo'lgan ularni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallari bilan tanishamiz.

3.2.1. Vektorlarni qo'shish

3.2.1-ta'rif. *Berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, $\vec{b}$ vektor boshini parallel ko'chirish bilan $\vec{a}$ vektorning uchiga keltirilgach, boshi $\vec{a}$ ning boshida uchi esa $\vec{b}$ ning uchida bo'lgan $\vec{c}$ vektorga aytiladi va $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ kabi yoziladi* (3.2.1-rasm).



3.2.1-rasm.

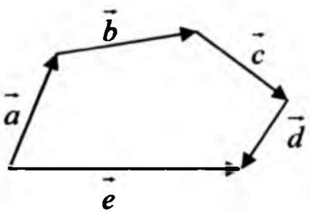


3.2.2-rasm.

Bu ta'rifda keltirilgan usul vektorlarni qo'shishning geometrik usullaridan biri bo'lib, uni *uchburchak qoidasi* (yoki *uch nuqta qoidasi*) deb yuritiladi. Bu borada *parallelogramm qoidasi* ham mavjud bo‘lib, unda berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi deb, parallel ko‘chirish yordamida vektorlarning boshlari bir nuqtaga keltirilgach, ularga qurilgan parallelogrammning vektorlar umumiy boshidan chiquvchi diagonali qabul qilinadi (3.2.2-rasm).

Vektorlarni qo‘shishning uchburchak va parallelogramm qoidalarining ekvivalent ekanligiga mustaqil ishonch hosil qilishni tavsiya qilamiz.

Vektorlar soni ikkitadan ortiq bo‘lganda ularning yig‘indisi *siniq chiziq qoidasi* bilan ta’riflanadi, ya’ni parallel ko‘chirish bilan vektorlardan keyingisining boshini oldingisining uchiga keltirish natijasida hosil qilingan siniq chiziqning birinchi vektori boshini so‘nggi vektori uchi bilan tutashtiruvchi (siniq chiziqni yopuvchi) vektor berilgan vektorlarning yig‘indisi deb qabul qilinadi (3.2.3-rasm).



$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{e}$$

3.2.3-rasm.

Vektorlarni qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

1). $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

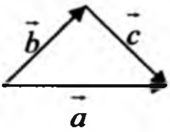
2). $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

3). $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4). $\vec{a}=-\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

3.2.2. Vektorlarni ayirish

3.2.2-ta'rif. *Berilgan* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlarning ayirmasi deb,* $\vec{b}$ *vektor bilan yig'indisi* $\vec{a}$ *vektorga teng bo'ladigan* $\vec{c}$ *vektorga aytiladi va* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$ *kabi yoziladi* $\left(\vec{b}+\vec{c}=\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}-\vec{b}=\vec{c}\right)$.



3.2.4-rasm.

3.2.5- rasm.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, vektorlarni ayirish ularni qo'shishga teskari amaldir. Demak, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni geometrik jixatdan ayirish uchun ularning boshlarini, parallel ko'chirish yordamida, hitta nuqtaga keltirish, so'ngra, boshi ikinchi ($\vec{b}$) vektorning uchida, uchi esa birinchi ($\vec{a}$) vektorning uchida bo'lgan ($\vec{c}$) vektorni qurish kifoyadir (3.2.4-rasm).

3.2.3. Vektorni songa ko'paytirish

3.2.3-ta'rif. *Berilgan* $\vec{a}$ *vektorning berilgan* λ *songa ko'paytmasi deb, quyidagi qoidalar bilan aniqlanuvchi* $\vec{b}$ *vektorga aytiladi:*

1) $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) $\lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}, \lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

va $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ (yoki $\vec{b} = \vec{a}\lambda$) kabi belgilanadi (3.2.5-rasm).

Vektorni songa ko'paytirish amali tubandagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir $(\lambda, \mu \in R)$:

1). $0\vec{a} = \vec{0}$;

2). $\lambda\vec{0} = \vec{0}$;

3). $1\vec{a} = \vec{a}$;

4). $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

5). $\lambda(\vec{a} \pm \vec{b}) = \lambda\vec{a} \pm \lambda\vec{b}$;

6). $(\lambda \pm \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} \pm \mu\vec{a}$;

7). $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$;

8). $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$.

3.2.1-teorema. *Agar $\vec{a} \parallel \vec{b} \wedge \vec{a} \neq \vec{0}$ bo'lsa, shunday λ son mavjud bo'lib, $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ tenglik o'rinli bo'ladi.*

Isbot. Haqiqatdan ham, bu son uchun $|\lambda| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo'lib, uning ishorasi $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ bo'lsa musbat, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ bo'lsa manfiy, $\vec{b} = \vec{0}$ bo'lganda esa $\lambda = 0$ bo'lishi ravshandir.

Kezi kelganda, *noldan farqli $\vec{a}$ vektor yo'nalish, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a_0} \wedge |\vec{a_0}| = 1$ bo'lgan $\vec{a_0}$ vektor esa, $\vec{a}$ vektorning (yo'nalishning) birlik vektori (orti) deb atalib, uning uchun*

$$\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a_0}$$

tenglik bajarilishini aytamiz.

3.3. Vektorlar sistemasining chiziqli bog‘liqlik va bog‘liq emaslik (erklilik) tushunchalari

3.3.1-ta’rif. *Berilgan* $\vec{a}_i\left(i=\overline{1;n}, n\in N\right)$ *vektorlar sistemasi (to‘plami) uchun*

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{a}_i=0 \qquad (3.3.1)$$

tenglik $\lambda_i\left(i=\overline{1;n}\right)$ *sonlarning barchasi nolga teng bo‘lgandagina o‘rinli bo‘lsa, bu vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq emas (chiziqli erkli), aks holda, chiziqli bog‘liq deyiladi.*

$\vec{a}_i\left(i=\overline{1;n}\right)$ vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun (3.3.1) tenglik $\lambda_i\left(i=\overline{1;n}\right)$ sonlardan aqalli bittasi noldan farqli bo‘lganda o‘rinli bo‘lishi kerak ekan. Bundan, agar vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, ulardan birortasini qolganlari orqali chiziqli ifodalash mumkinligi va, aksincha, agar vektorlar sistemasining vektorlaridan birortasini qolganlari orqali chiziqli ifodalash mumkin bo‘lsa, ularning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

Quyidagi misollarni keltiramiz

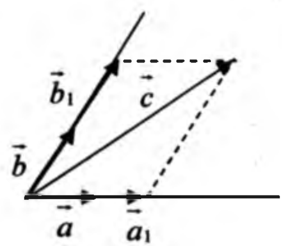
1) Noldan farqli bitta $\vec{a}$ dan iborat bo‘lgan sistemaning chiziqli erkli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

2) Kollinear bo‘lgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sitemasi chiziqli bog‘liqdir va, aksincha, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sitemasi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, ular kollineardir. Haqiqatdan ham, $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bo‘lganda, $\vec{a}=\vec{b}=\vec{0}$ hol uchun bu aniqdir, agar vektorlardan biri, masalan, $\vec{a}\neq\vec{0}$ bo‘lsa, $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ bo‘lishi 3.2.1-teoremadan kelib chiqadi. Demak, $-\lambda\vec{a}+\vec{b}=0$ bo‘lib, $\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}=0$

tenglik $\lambda_1=-\lambda$, $\lambda_2=1\neq 0$ uchun o'rinli ekanligidan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liqdir. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'lsa, $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ekanligini ko'rsatish qiyin emas (o'quvchining o'ziga havola qilamiz).

3). *Agar $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar bitta tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotsa, ularni komplanar vektorlar deb ataladi.*

Komplanar bo'lgan uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog'liq bo'ladi va, aksincha, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, ular komplanardir. Haqiqatdan ham, vektorlardan biror juftligi kollinear (masalan, $\vec{a} \parallel \vec{b}$) bo'lgan hol uchun bu ravshandir. Demak, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasida birorta ham juftlik kollinear bo'lmagan holni qarash kifoyadir. Bu holda, vektorlarning uchalasi ham noldan farqli ekanligi aniq bo'lib, ular komplanar bo'lganligi uchun parallel ko'chirish yordamida ularning boshiari bitta nuqtaga keltirilgach, bitta tekislikda yotishi ham aniqdir. Demak, bu vektorlardan birini (masalan, $\vec{c}$) parallelogramın qoidasi yordamida qolgan ikkitasining (masalan, $\vec{a}, \vec{b}$) yo'nalishlari bo'yicha ikkita vektorlarning (3.2.6-rasmda $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}$ va $\vec{b}_1 \parallel \vec{b}$) yig'indisi orqali ifodalash mumkin.



3.2.6- rasm.

3.2.6-rasmdan $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{b}_1$.

Endi, $\vec{a}_1 \parallel \vec{a} \wedge \vec{b}_1 \parallel \vec{b} \wedge |\vec{a}| \neq 0 \wedge |\vec{b}| \neq 0 \Rightarrow \vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{a} \wedge$

$\vec{b}_1 = \lambda_2 \vec{b}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} \Rightarrow \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} - \vec{c} = 0 .$$

Demak, $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$ tenglik $\lambda_3 = -1 \neq 0$ bo‘lganda bajarilganligi uchun $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liqdir.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lsa, ularning komplanar ekanligini ko‘rsatish qiyinchilik tug‘dirmaydi (mustaqil bajarishni tavsiya qilamiz).

3.4. Vektorning o‘qdagi proyeksiyasi

Avvalo, o‘q tushunchasini kiritaylik. Agar berilgan to‘g‘ri chiziqda yotgan holda qo‘zg‘aluvchi nuqtani qarasak, u faqat ikki yo‘nalish bo‘yicha harakatlanishi mumkinligi aniqdir. Bu yo‘nalishlardan birini musbat boshqasini esa manfiy deb qabul qilsak, *to‘g‘ri chiziqda musbat yo‘nalish aniqlangan* deyiladi.

Musbat yo‘nalishi tanlangan to‘g‘ri chiziq o‘q deyiladi va o‘qning yo‘nalishi deyilganda, uning musbat yo‘nalishini tushunamiz.

O‘qning yo‘nalishi, odatda, to‘g‘ri chiziqqa ko‘rsatkich qo‘yish bilan aniqlanadi (3.4.1-rasm).

3.4.1- rasm.

O‘qning yo‘nalishi bilan yo‘nalishdosh birlik $\vec{i}$ vektor uning *orti (bazisi)* deyiladi.

To‘g‘ri chiziqda musbat yo‘nalish $\vec{i}$ ort va koordinatalar boshi deb ataluvchi O nuqta tanlab olingan bo‘lsin. U vaqtda , bu to‘g‘ri chiziq o‘qdan iborat va unda yotgan *M* nuqtaga $\overline{OM}$ vektorni mos qo‘yish mumkin bo‘lib, $\overline{OM} \| \vec{i} \wedge |\vec{i}| = 1 \neq 0$ ekanligidan 3.2.1-teoremaga ko‘ra

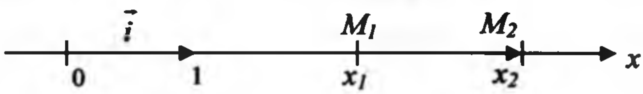
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} \qquad (3.4.1)$$

ni yozish mumkin. (3.4.1) da $|x| = |\overline{OM}|$ bo‘lib, $\overline{OM} \uparrow\uparrow \vec{i} \Rightarrow x > 0,\ \overline{OM} \uparrow\downarrow \vec{i} \Rightarrow x < 0, M$ nuqta O bilan ustma-ust tushsa, $x = 0$ bo‘lishi ravshandir.

Demak, yuqorida kiritilgan o‘qning har bir *M* nuqtasiga (3.4.1) vositasida aniq bitta *x* sonni mos qo‘yish mumkinligini ko‘ramiz. Va, aksincha, har bir *x* haqiqiy songa, (3.4.1) vositasida, aytilgan o‘qning bitta *M* nuqtasi mos qo‘yiladi. Demak, bunday kiritilgan o‘qning nuqtalari va haqiqiy sonlar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud ekan. Bunday kiritilgan o‘qni *Ox o‘qi* deb nomlab, unda *Dekart koordinatalar sistemasi* kiritilgan deb ataymiz, hamda *M nuqtaga (3.4.1) vositasida mos qo‘yilgan x sonni uning koordinatasi* deb atab, *M(x)* ko‘rinishda yozishni qabul qilamiz. Shuningdek, x *sonni* $\overline{OM}$ *vektorning koordinatasi* deb ham ataymiz.

Bunday kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasini *sonlar o'qi* deb atalishi bizga ma'lumdir.

Eslatma. Ko'pincha, x songa o'qdagi mos nuqtani x ning o'zi bilan belgilanadi (3.4.1-rasmga qarang).



3.4.2-rasm.

Endi, Ox o'qining $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalari bilan aniqlanuvchi $\overline{M_1M_2}$ vektorni qarasak (3.4.2-rasm),

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\vec{i}$$

ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emasdir.

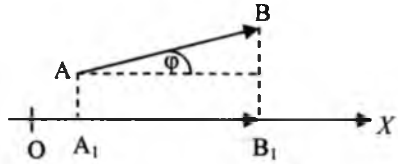
Demak,

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = |x_2 - x_1| \qquad (3.4.2)$$

bo'lishi ravshandir. (3.4.2) *sonlar o'qidagi ikki nuqta orasidagi masofa* formulasidir.

3.4.1-ta'rif. $\overline{AB}$ *vektorning Ox o'qidagi proyeksiyasi deb, uning boshi va uchidan o'qqa tushirilgan perpendikulyarlarning asoslari bo'lgan A_1 va B_1 mos nuqtalar bilan aniqlanuvchi $\overline{A_1B_1}$ vektor o'q bilan yo'nalishdosh bo'lganda $\left|\overline{A_1B_1}\right|$ ga, qarama-qarshi yo'nalishli bo'lganda $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$ ga, nol vektordan iborat bo'lganda (A_1 va B_1 lar ustma-ust tushganda) esa nolga aytiladi va* $\pi p_{ox}\overline{AB}$ *kabi belgilanadi* (3.4.3-rasm).

Demak, ta'rif bo'yicha $\pi\, p_{ox}\overrightarrow{AB} = \pm\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$ bo'lib, bu yerda «+» ishora $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow Ox$, «-» esa $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow Ox$ bo'lgan holga to'g'ri keladi.



3.4.3- rasm.

$\overrightarrow{AB}$ vektorning Ox o'q yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagi $(\overrightarrow{AB},\hat{}\ Ox) = \varphi$ ma'lum bo'lsa, 3.4.3-rasmdan

$$\pi\, p_{ox}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi \qquad (3.4.2)$$

ekanligini olish qiyin emas.

(3.4.2) yordamida va 3.4.1-ta'rifga asoslanib proyeksiyaning quyidagi xossalarini ko'rsatish osondir ($\lambda \in R$):

1). $\vec{a} = \vec{0} \vee \vec{a} \perp Ox \Leftrightarrow \pi p_{ox}\vec{a} = 0$;

2). $\pi p_{ox}(\lambda\,\vec{a}) = \lambda\,\pi p_{ox}\vec{a}$;

3). $\pi p_{ox}(\vec{a} \pm \vec{b}) = \pi p_{ox}\vec{a} \pm \pi p_{ox}\vec{b}$;

4). Agar $\vec{a}$ vektorning boshi va uchidan Ox sonlar o'qiga tushirilgan perpendikulyarlar asoslarining (ya'ni ortogonal proyeksiyalarining) koordinatalari mos ravishda x_1 va x_2 bo'lsa, $\pi p_{ox}\vec{a} = x_2 - x_1$ bo'ladi.

3.5. Vektorni berilgan yo'nalishlar bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratish Dekart bazisi

Avvalo, bu tushunchalarni tekislikda qaraymiz. Aytaylik, tekislikda kollinear bo'lmagan (chiziqli erkli) $\vec{e_1}$ va $\vec{e_2}$ vektorlar (yo'nalishlar) berilgan bo'lsin. U vaqtda, shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni olsak, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{a}\}$ vektorlar sistemasi komplanar bo'lib, ular chiziqli bog'liq ekanligidan $\vec{a}$ ni $\vec{e_1}$ va $\vec{e_2}$ vektorlar orqali

$$\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} \qquad (3.5.1)$$

kabi chiziqli ifodalash mumkin bo'lib (3.3-bandga qarang), $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ tekislikdagi *bazis* (yoki *bazis vektorlar*); x va y lar *$\vec{a}$ vektorning koordinatalari*; (3.5.1) ning o'ng tomoni *bazis bo'yicha yoyilmasi*; $x\vec{e_1}$ va $y\vec{e_2}$ larni esa tashkil etuvchilari deb ataladi va $\vec{a}(x;y)$ yoki $\vec{a}=(x;y)$ yoki $\vec{a}=\{x;y\}$ kabi yozishga kelishib olamiz va uni tekislikda koordinatalari bilan berilgan vektor deb ataymiz.

$\vec{a}(x;y)=\vec{0} \Leftrightarrow (x=0 \wedge y=0)$ ekanligi ravshandir, ya'ni $\vec{O}(0;0)$.

Tekislikda berilgan ikkita yo'nalishlar (vektorlar) ortlardan (birlik vektorlardan) iborat va perpendikulyar bo'lgan holni qarab, ularni $\vec{i}, \vec{j}$ kabi belgilaylik. Demak, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1 \wedge \vec{i} \perp \vec{j}$.

Mazkur tekislikda biror O nuqtani olib, uni orti $\vec{i}$ dan iborat Ox va $\vec{j}$ dan iborat Oy o'qlarning umumiy boshi deb qabul qilaylik (3.5.1-rasm). Bu tekislikning ixtiyoriy M nuqtasini olib uni O nuqta bilan tutashtiruvchi $\overline{OM}$ vektorni qurib, uning Ox va Oy o'qlarga proyeksiyalarini mos ravishda $\pi p_{\vec{i}}\overline{OM} = x$, $\pi p_{\vec{j}}\overline{OM} = y$ deb belgilasak, tekislikdagi har bir M nuqtaga ikkita sonlarning yagona $(x;y)$ juftligi mos kelishini ko'ramiz. Buning aksinchasi ham to'g'ridir, ya'ni ikkita sonlarning har bir $(x;y)$ juftligiga yuqoridagi tekislikning yagona M nuqtasi mos keladi. Demak, bu tekislikning nuqtalari va ikkita sonlarning tartiblashgan juftliklari orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjuddir. Bu aytilganlarga asoslanib, *tekislik nuqtasini M(x;y) ko'rinishda belgilashga, x va y larni uning koordinatalari, x ni abssissasi, y ni esa ordinatasi deb, hamda Ox ni abssissalar, Oy ni esa ordinatalar o'qi deb atashga kelishib olamiz.*

Bu usul bilan kiritilgan sistemani *tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi* deb ataladi va, odatda, uni xOy kabi belgilanadi.

Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan tekislikda yotuvchi ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni sistema o'qlarining ortlari $\vec{i}$ va $\vec{j}$ lar bo'yicha tashkil etuvchilarga ajratsak, (3.5.1)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

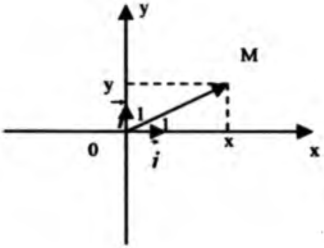
ko'rinishni olib, bunda

$$x = \pi p_{\vec{i}}\vec{a}, \quad y = \pi p_{\vec{j}}\vec{a}$$

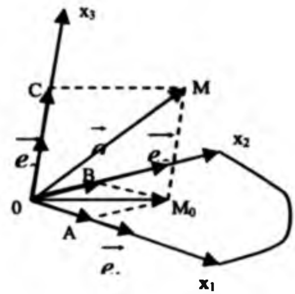
bo'lishi ravshandir. Bu holda, $\vec{i}$ va $\vec{j}$ ortlarni *tekislikda Dekart bazisi* deb ataymiz.

Ox – abssissalar o'qini yotiq (gorizantal) holatda (demak, Oy – ordinatalar o'qini tik (vertikal) holatda) olish odatini (an'anasii) saqlab qolamiz (3.5.1-rasm).

1-eslatma. Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini ba'zan *koordinatalar tekisligi* deb yuritiladi.



3.5.1-rasm.



3.5.2-rasm.

Endi, fazoda $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vektorlarning komplanar bo'lmagan sistemasi berilgan bo'lsin. Bu vektorlarning boshini bitta O nuqtaga keltirib, orti $\vec{e_i}$ vektorning birlik vektori $\overline{e_{i0}}$ $(i=\overline{1;3})$ dan iborat boshi eslatilgan O nuqtada bo'lgan uchta Ox_i $(i=\overline{1;3})$ o'qlarni o'tkazaylik. U vaqtda, yo'nalishlar komplanar bo'lmaganligi sababli bu o'qlarning har ikkitasi orqali bitta (demak, jami 3 ta) tekislik o'tadi. Aniqlik uchun ulardan bittasini, masalan, Ox_1 va Ox_2 o'qlar orqali o'tuvchisini olaylik (3.5.2-rasm). Fazoda $\vec{a}$ vektor berilgan bo'lsa, uni parallel ko'chirish bilan 3.5.2-rasmdagidek $\overline{OM}$ holatga keltirilgan deb faraz qilib, M nuqta orqali Ox_3 o'qga parallel to'g'ri chiziq o'tkazsak, u yuqorida aytilgan tekislikni biror M_0 nuqtada kesadi. U vaqtda, $\overline{OM_0}$ vektor kollinear bo'lmagan $\vec{e_1}$ va $\vec{e_2}$ yo'nalishlar tekisligida yotganligi sababli uni (3.5.1) ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\overline{OM_0} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}.$$

3.5.2-rasmdan $\overline{OM} = \overline{OM_0} + \overline{M_0M}$ va $\overline{M_0M} \parallel \vec{e_3}$ ekanligidan $\overline{M_0M} = z\vec{e_3}$ bo'lib,

$$\vec{a} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} \qquad (3.5.2)$$

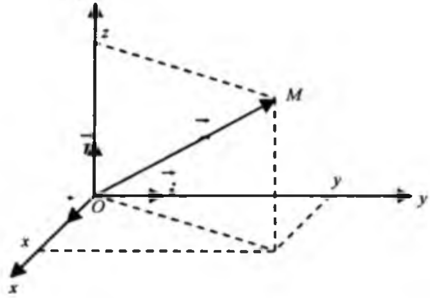
ni olamiz. Demak, fazoda komplanar bo‘lmagan uchta $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ vektorlar berilgan bo‘lsa, ixtiyoriy $\vec{a}$ vektorni ular yordamida (3.5.2) ko‘rinishda chiziqli ifodalash mumkin ekan. Bunda $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ni *fazoda bazis*; *x,y,z* larni $\vec{a}$ *vektorning koordinatalari*; (3.5.2) ning o‘ng tomonini *bazis bo‘yicha yoyilmasi*; $x\vec{e_1}$, $y\vec{e_2}$, $z\vec{e_3}$ larni esa *tashkil etuvchilari* deb ataladi. Bu holda $\vec{a}$ vektorni

$$\vec{a}(x;y;z) \text{ yoki } \vec{a} = (x;y;z) \text{ yoki } \vec{a} = \{x;y;z\}$$

kabi yozishga kelishib olamiz va uni *koordinatalari bilan berilgan vektor* deb ataymiz. $\vec{0}(0;0;0)$ ekanligi ravshandir.

Yuqorida qilingan mulohazalarga asoslanib, fazoda uchtadan ortiq vektorlardan iborat sistema chiziqli bog‘liq bo‘ladi degan xulosani chiqarish mumkin.

Fazoda berilgan uchta yo‘nalishlar (vektorlar) ortlardan (birlik vektorlardan) iborat va ular juft-jufti bilan perpendikulyar bo‘lgan holni qaraylik. U vaqtda, yuqorida kiritilgan o‘qlarni mos ravishda O*x*-abssissalar, O*y*-ordinatalar, O*z*- applikatalar o‘qi deb ataymiz va ularning ortlarini mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ deb belgilaymiz. O*x* va O*y* o‘qlarini yotiq (gorizontal) tekislikda yotadi (an’anaga asoslanib) deb faraz qilamiz (3.5.3-rasm).



3.5.3-rasm.

Bu holda (3.5.2)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

ko'rinishni oladi va $\vec{a} = \overline{OM}$ ekanligidan M nuqta x,y,z koordinatalarga ega deb, $M(x;y;z)$ kabi yozishni shartlashamiz. Undan tashqari,

$$x = \pi p_{\vec{i}} \overline{OM},\ y = \pi p_{\vec{j}} \overline{OM},\ z = \pi p_{\vec{k}} \overline{OM}$$

ekanligi ravshandir.

Bunday kiritilgan sistemani *fazoda Dekart koordinatalar sistemasi*, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ esa *fazoda Dekart bazisi* deb ataladi va O*xyz* kabi belgilanadi.

2-eslatma. Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini *koordinatalar fazosi* va har ikkita koordinatalar o'qlari orqali o'tuvchi tekislikni koordinatalar tekisligi deb yuritiladi.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlar uchun quyidagilar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $x_i; y_i; z_i \in R(i = \overline{1;2})$, $\lambda \in R$ bo'lsin:

1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2)$;

2) $\vec{O}(0;0;0)$;

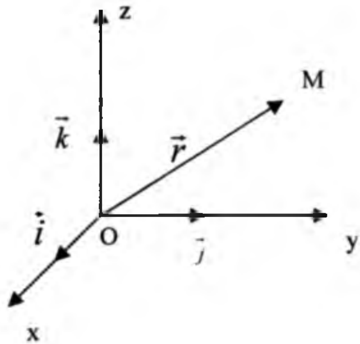
3) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2)$;

4) $\lambda\,\vec{a} = (\lambda\, x_1; \lambda\, y_1; \lambda\, z_1)$.

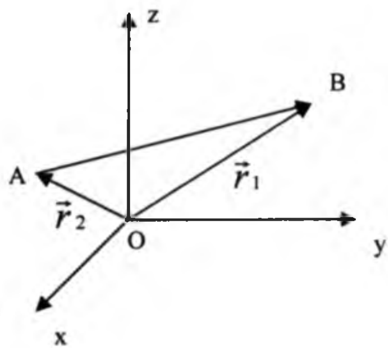
3-eslatma. Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan fazoning nuqtalari to'plami va $\mathrm{R}^3 = R \times R \times R = \{(x;y;z): x \in R \wedge y \in R \wedge z \in R\}$ to'plam orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjudligi sababli uni R^3 *(uch o'lchovli) fazo* deb yuritiladi. Xuddi shunga o'xshash, Dekart koordinatalar tekisligini R^2 *(ikki o'lchovli)*, sonlar o'qini esa *R (bir o'lchovli) fazo* deb yuritilishini aytamiz.

3.6. Nuqtaning radius vektori

Aytaylik, fazoda $Oxyz$ Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo'lib, unda $M(x;y;z)$ nuqta olingan bo'lsin. U vaqtda, M nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtiruvchi $\overline{OM}$ vektor uning *radius vektori* deyilib, $\vec{r}$ bilan belgilanadi, ya'ni $\vec{r}=\overline{OM}$ (3.6.1-rasm).



3.6.1- rasm.



3.6.2- rasm.

M(x;y;z) nuqta radius vektorining koordinatalari shu nuqta koordinatalaridan iborat, ya'ni $\vec{r}=(x;y;z)$ ekanligini ko'rish qiyin emasdir.

Demak,

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

ni yozish mumkin.

Agar fazoda boshi $A(x_1;y_1;z_1)$, uchi $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalarda bo'lgan $\overrightarrow{AB}$ vektorni qarasak, 3.6.2-rasmdan foydalanib, $\overrightarrow{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$ ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin (mustaqil bajaring). Demak, $\overrightarrow{AB}$ *vektor koordinatalari uchi va boshining mos koordinatalarining ayirmasidan iborat* bo'lar ekan.

3.7. Vektorning moduli va yo'naltiruvchi kosinuslari

Aytaylik, $\vec{a}(x;y;z)$ vektor berilgan bo'lsin. Uni uch o'lchovi $|x|,|y|,|z|$ lardan iborat to'g'riburchakli parallelepipedning diagonali deb qarash mumkin (3.7.1-rasm). U vaqtda,

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad (3.7.1)$$

ni olamiz. (3.7.1) *vektor modulini uning koordinatalari vositasida topish formulasidir.*

Agar $\alpha=\left(\vec{a}\,\hat{};\vec{i}\right)$, $\beta=\left(\vec{a}\,\hat{};\vec{j}\right)$, $\gamma=\left(\vec{a}\,\hat{};\vec{k}\right)$ burchaklarni kiritsak,

$$\pi p_{\vec{i}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha, \qquad \pi p_{\vec{j}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\beta, \qquad \pi p_{\vec{k}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma$$

tengliklardan hamda $\pi p_{\vec{i}}\vec{a}=x$, $\pi p_{\vec{j}}\vec{a}=y$, $\pi p_{\vec{k}}\vec{a}=z$ va (3.7.1) ni hisobga olib, $\left|\vec{a}\right|\neq 0$ bo'lganda

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

larni olamiz. Bunday aniqlangan $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ lar $\vec{a}$ *vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari* deb ataladi. Ular quyidagi xossalarga ega ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

1). $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$;

2). $\overrightarrow{a_0}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ berilgan $\vec{a}$ vektorning birlik vektoridan iboratdir.

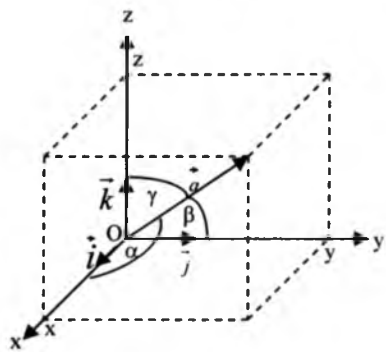
Agar $\vec{a}(x;y)$ vektor koordinatalar tekisligida berilgan bo'lsa, (3.7.1)

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$$

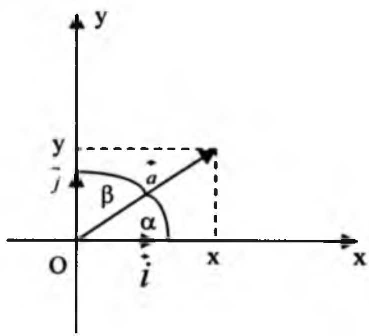
ko'rinishni oladi. Bu holda, $\alpha = (\vec{a}\,\hat{}\,;\vec{i})$, $\beta = (\vec{a}\,\hat{}\,;\vec{j})$ burchaklar uchun $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ bo'lib, $\left|\vec{a}\right| \neq 0$ bo'lganda yo'naltiruvchi kosinuslar

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

bo'ladi (3.7.2-rasmga qarang).



3.7.1- rasm.



3.7.2-rasm.

3.8. Ikki nuqta orasidagi masofa. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

Agar $A(x_1;y_1;z_1)$ va $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar koordinatalar fazosida berilgan bo'lsa, ular orasidagi masofani $d(A;B)$ bilan belgilasak,

$$d(A;B)=\left|\overline{AB}\right|$$

ekanligi ravshandir.

$$\overline{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$$

bo'lganligidan (3.7.1) formulaga ko'ra

$$d(A;B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (3.8.1)$$

ni olamiz. (3.8.1) *ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidir.*

Aytaylik, yuqoridagi A va B nuqtalar bilan birga λ son ham berilgan bo'lib, nuqtalar ustma-ust tushmasin. U vaqtda, AB kesmani λ nisbatda bo'lish masalasi quyidagicha qo'yiladi: AB kesma yotgan to'g'ri chiziqda shunday C nuqta topilsinki, $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$ tenglik o'rinli bo'lsin (3.8.1-rasm).

C(x;y;z) desak, $\overrightarrow{AC}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overrightarrow{CB}=\{x_2-x;y_2-y;z_2-z\}$ bo'lib, yuqoridagi tenglikdan

$$\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}=\{\lambda(x_2-x);\lambda(y_2-y);\lambda(z_2-z)\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x-x_1=\lambda(x_2-x), y-y_1=\lambda(y_2-y), z-z_1=\lambda(z_2-z).$$

ni va oxirgidan

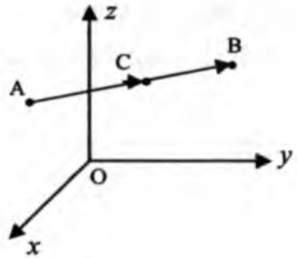
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (3.8.2)$$

ni olamiz. (3.8.2) *kesmani berilgan λ nisbatda bo'lish formulalaridir.*

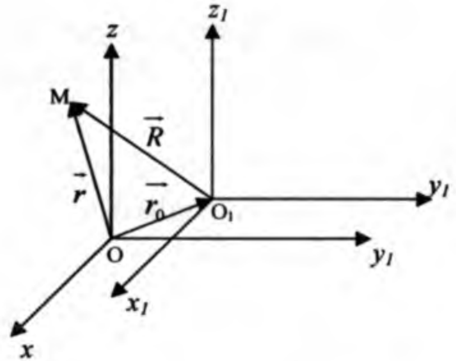
Agar λ=1 bo'lsa, *kesmaning o'rtasini topish formulalari*ga ega bo'lamiz:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2} \qquad (3.8.3)$$

Eslatma. Agar yuqorida koordinatalar tekisligi haqida so'z ketsa, (3.8.1), (3.8.2), (3.8.3) formulalarda uchinchi koordinata qatnashmaydi. Ya'ni koordinatalar tekisligida berilgan $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ nuqtalar uchun (3.8.1) formula $d(A;B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ko'rinishni; (3.8.2) esa $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$ ko'rinishni oladi. Sonlar o'qidagi $A(x_1)$ va $B(x_2)$ nuqtalar uchun $d(A;B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|$, $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$ kabi bo'ladi.



3.8.1- rasm.



3.9.1- rasm.

3.9. Koordinatalar boshini ko‘chirish formulalari

Aytaylik, fazoda kiritilgan $Oxyz$ Dekart koordinatalar sistemasining boshlni, o‘qlari yo‘nalishlarini saqlagan holda, uning $O_1(x_0;\ y_0;\ z_0)$ nuqtasiga ko‘chirib yangi $O_1x_1y_1z_1$ sistema hosil qilingan bo‘lsin (3.9.1-rasm).

Fazodagi M nuqta $Oxyz$ sistemada $M(x;\ y;\ z)$, $O_1x_1y_1z_1$ da esa

$M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ koordinatalarga ega deb faraz qilaylik. U vaqtda, 3.9.1-rasmdan ko‘rinadiki, $\vec{R}=\vec{r}-\vec{r_0}$ tenglik o‘rinlidir. Radius-vektorlar uchun $\vec{r}=(x;y;z)$, $\vec{r_0}=(x_0;y_0;z_0)$ $\vec{R}=(x_1;y_1;z_1)$ ekanligidan, yuqoridagi tenglikka asosan,

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0, \\ z_1 = z - z_0 \end{cases} \qquad (3.9.1)$$

ni olamiz. (3.9.1) *koordinatalar boshini ko‘chirish formulalari* (*almashtirishlari*) deb yuritiladi.

Eslatma. Agar yuqorlda koordinatalar tekisligi haqida so‘z ketgan bo‘lsa, (3.9.1) da uchinchi z koordinata qatnashmaydi. Ya'ni, xOy koordinatalar tekisligi boshini, uning o'qlari yo'nalishini o'zgartirmay, $O_1(x_0; y_0)$ nuqtasiga ko'chirilgan bo'lsa, M nuqtaning dastlabki xOy sistemadagi $(x; y)$ va keyingi x_1Oy_1 sistemadagi $(x_1; y_1)$ koordinatalari orasidagi bog'lanish

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0 \end{cases}$$

dan iborat bo'lishi ravshandir.

Sonlar o'qida O koordinatalari boshi uning $M_0(x_0)$ nuqtasiga ko'chirilsa, M nuqtaning dastlabki va keyingi sonlar o'qidagi mos x va x_1 koordinatalari orasida

$$x_1 = x - x_0$$

bog'lanish borligi aniqdir.

3.10. Vektorlar ustida chiziqsiz amallar

Vektorlar ustida turli chiziqsiz amallar mavjud bo'lib, bu yerda ulardan uchtasini, ya'ni ikki vektorning skalyar va vektor ko'paytmalarini hamda uch vektorning aralash ko'paytmasini keltiramiz.

3.10.1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi

3.10.1-ta'rif. *Ikkita* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ularning modullaridan va ular orasidagi burchak kosinusidan iborat sonlarning ko'paytmasiga aytiladi* va $(\vec{a},\vec{b})$ yoki $\vec{a}\cdot\vec{b}$ kabi belgilanadi.

Ta'rif bo'yicha

$$(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \qquad (3.10.1)$$

bo'lib, bu yerda $\varphi = (\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$ dir (3.10.1-rasm).

Skalyar ko'paytmaning quyidagi xossalariga, uning ta'rifiga asoslanib, ishonch hosil qilish osondir:

1). $\vec{a} \perp \vec{b} \vee \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \left(\vec{a} = \vec{0} \wedge \vec{b} = \vec{0}\right) \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0;$

2). $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2,$

ya'ni vektorning skalyar kvadrati modulining kvadratiga tengdir;

3). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$

4). $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \text{пр}_{\vec{a}} \vec{b} = \left|\vec{b}\right| \text{пр}_{\vec{b}} \vec{a};$

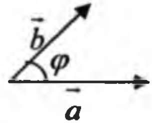
5). $\left(\vec{a_1} \pm \vec{a_2}\right) \cdot \vec{b} = \vec{a_1} \cdot \vec{b} \pm \vec{a_2} \cdot \vec{b};$

6). $\left(\lambda\, \vec{a}, \mu \vec{b}\right) = (\lambda\, \mu)\left(\vec{a}, \vec{b}\right),$

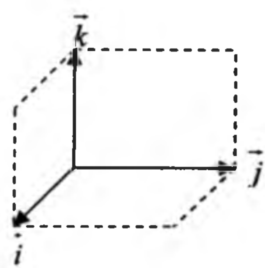
bu yerda λ, $\mu \in R$.

Eslatma. *Agar* $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ *bo'lsa,* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlar ortogonal* deyiladi.

1-xossadan ko'rinadiki, vektorlarning ortogonallik tushunchasi ularning perpendikulyarlik tushunchasidan kengroqdir. Darhaqiqat, $\vec{0}$ vektor boshqa bir vektorga perpendikulyar deb bo'lmaydi (chunki, $\vec{0}$ yo'nalishga ega emas), ammo, $\vec{0} \cdot \vec{b} = 0$ dir.



3.10.1- rasm



3.10.2- rasm.

Endi, $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$ vektorlar fazoda Dekart bazisida berilganda ularning skalyar ko'paytmasini aniqlaylik:

$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b}) &= (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}) = \\ &= x_1x_2\vec{i}^2 + x_1y_2(\vec{i},\vec{j}) + x_1z_2(\vec{i},\vec{k}) + \\ &+ y_1x_2(\vec{j},\vec{i}) + y_1y_2\vec{j}^2 + y_1z_2(\vec{j},\vec{k}) + \\ &+ z_1x_2(\vec{k},\vec{i}) + z_1y_2(\vec{k},\vec{j}) + z_1z_2\vec{k}^2\end{aligned}$$

3.10.2-rasmdan hamda $\vec{i}\perp\vec{j},\ \vec{j}\perp\vec{k},\ \vec{k}\perp\vec{i},\ |\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ ekanligidan ko'rinadiki,

$$\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1,\quad (\vec{i},\vec{j})=(\vec{j},\vec{k})=(\vec{k},\vec{i})=0$$

o'rinlidir, demak,

$$(\vec{a},\vec{b}) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \qquad (3.10.2)$$

ni olamiz. (3.10.2) *vektorlarning skalyar ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.*

Ikki vektor orasidagi burchak ularning koordinatalari orqali quyidagicha topiladi: skalyar ko'paytma ta'rifiga ko'ra (3.10.1) dan

$$\cos(\vec{a},\wedge\vec{b}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Yuqorida olingan skalyar ko'paytma (3.10.2) va vektor moduli (3.7.1) formulalarini hisobga olib, ($\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$ deb faraz qilib),

$$\cos(\vec{a},\wedge\vec{b}) = \frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} \qquad (3.10.3)$$

ni olamiz. (3.10.3) *ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasi* deb yuritiladi.

Agar, $$\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}, \qquad (3.10.4)$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=0\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0; \qquad (3.10.5)$$

shu sababli, (3.10.4) ni vektorlarnmg kollinearligi, (3.10.5) ni esa ortogonalligi (perpendikulyarligi) sharti deb yuritiladi.

3.10.2. Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi

Avvalo, fazoda nokomplanar vektorlar uchligining joylashish tartibiga bog‘liq bo‘lgan quyidagi tushunchani keltiramiz.

3.10.2-ta’rif. *Agar fazoda* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *tartibIda nokomplanar vektorlar sistemasi berilgan bo‘lib, ularning boshi umumiy nuqtaga keltirilgach, uchinchisi bo‘lgan* $\vec{c}$ *vektorning uchidan uning yo‘nalishiga qarama-qarshi qaralganda birinchisi* $\vec{a}$ *vektordan ikkinchisi* $\vec{b}$ *vektorga tomon yoyiq burchakdan kichik burilish burchagining yo‘nalishi soat ko‘rsatkichi harakati yo‘nalishiga qarama-qarshi (ya’ni musbat) bo‘lsa, bu tartibdagi vektorlar uchligini o‘ng uchlik, aks holda chap uchlik deb ataladi.*

Vektorlarning tartiblangan uchligi quyidagi xossalarga ega bo‘lishini ko‘rsatish osondir:

1). Vektorlarning tartiblangan uchligida ixtiyoriy ikki vektorlarning o‘rinlari (tartiblari) o‘zaro almashtirilsa, uchlik o‘z nomini o‘zgartiradi;

2). Tartiblangan uchlik vektorlarining o‘rinlari (tartiblari) doiraviy shaklda almashtirilsa, uchlik o‘z nomini o‘zgartirmaydi, ya’ni $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$; $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$; $\vec{c},\vec{a},\vec{b}$ lar bir xil nomli uchliklar bo‘ladi.

Eslatma. Agar fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lib, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ortlar o‘ng uchlikni tashkil qilsa, uni *o‘ng sistema*, chap uchlikni tashkil qilsa, *chap sistema* deb yuritiladi. Biz asosan o‘ng sistema bilan ishlaymiz.

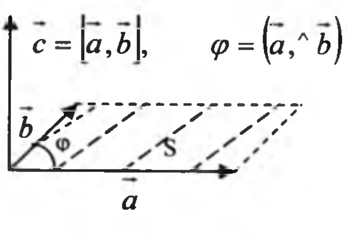
3.10.3-ta’rif. *Berilgan* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb, quyidagi shartlar bilan aniqlanuvchi va* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *(yoki* $\vec{a}\times\vec{b}$*) kabi belgilanuvchi* $\vec{c}$ *vektorga aytiladi:*

1) $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \left|\sin\varphi\right|, \quad \left(\varphi = \left(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}\right)\right);$

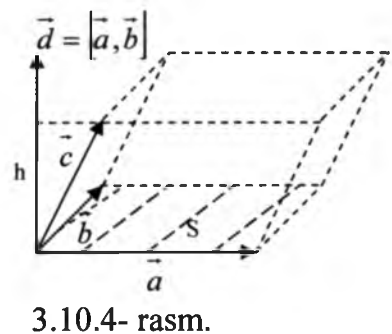
2) $\left(\vec{a},\vec{c}\right) = \left(\vec{b},\vec{c}\right) = 0;$

3) $\left|\vec{c}\right| \neq 0$ *bo‘lganda* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *vektorlar o‘ng uchlikni tashkil etadi.*

Bu ta’rif bilan kiritilgan $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{c}$ vektor ko‘paytmaning geometrik ma’nosini $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lmagan hol uchun 3.10.3-rasmda ko‘rish mumkin.



3.10.3-rasm.



3.10.4- rasm.

Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi uchun quyidagi xossalar o‘rinlidir (mustaqil ishonch hosil qiling):

1). $\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = 0;$

2). $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right];$

3). $\left[\vec{a}_1 \pm \vec{a}_2, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}_1,\vec{b}\right] \pm \left[\vec{a}_2,\vec{b}\right], \quad \left[\vec{a}, \vec{b}_1 \pm \vec{b}_2\right] = \left[\vec{a},\vec{b}_1\right] \pm \left[\vec{a},\vec{b}_2\right];$

4). $\left[\lambda \vec{a}, \mu \vec{b}\right] = (\lambda \mu)\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \quad (\lambda\ \mu \in R).$

Keltirilgan 1-xossadan ko'rinadiki, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearlik sharti sifatida $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ bo'lishini olish mumkindir.

$\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ vektorlar koordinatalari bilan fazoda Dekart bazisida berilgan bo'lsin. U vaqtda,

$$\begin{aligned}\left[\vec{a}, \vec{b}\right] &= \left[x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},\ x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}\right] = \\ &= (x_1 x_2)\left[\vec{i}, \vec{i}\right] + (x_1 y_2)\left[\vec{i}, \vec{j}\right] + (x_1 z_2)\left[\vec{i}, \vec{k}\right] + \\ &+ (y_1 x_2)\left[\vec{j}, \vec{i}\right] + (y_1 y_2)\left[\vec{j}, \vec{j}\right] + (y_1 z_2)\left[\vec{j}, \vec{k}\right] + \\ &+ (z_1 x_2)\left[\vec{k}, \vec{i}\right] + (z_1 y_2)\left[\vec{k}, \vec{j}\right] + (z_1 z_2)\left[\vec{k}, \vec{k}\right].\end{aligned}$$

3.10.2-rasmdan hamda $\vec{i} \perp \vec{j}, \vec{j} \perp \vec{k}, \vec{k} \perp \vec{i}, \left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$ ekanligidan ko'rinadiki, $\left[\vec{i}, \vec{i}\right] = \left[\vec{j}, \vec{j}\right] = \left[\vec{k}, \vec{k}\right] = \vec{0}$, $\left[\vec{i}, \vec{j}\right] = \vec{k}$, $\left[\vec{j}, \vec{k}\right] = \vec{i}$, $\left[\vec{k}, \vec{i}\right] = \vec{j}$ o'rinlidir. Demak,

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (y_1 z_2 - z_1 y_2)\vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2)\vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\vec{k}$$

ni va, nihoyat, oxirgidan

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \qquad (3.10.4)$$

ni olamiz. (3.10.4) *vektorlarning vektor ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.*

Vektor ko'paytmaning ta'rifidan uning moduli son qiymati jihatidan berilgan (ko'paytuvchi) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuziga tengdir (3.10.3-rasmga qarang):

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Masalan, uchlari *A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)* nuqtalarda bo'lgan uchuburchak yuzini hisoblaylik. *ABC* uchburchakning yuzi $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzining yarmiga tengligi ravshandir:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.$$

$\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni hisoblaylik:

$$\overrightarrow{AB}=\{3-1;0-2;-3-0\}=\{2;-2;-3\},$$

$$\overrightarrow{AC}=\{5-1;2-2;6-0\}=\{4;0;6\}.$$

Endi, hisoblangan bu vektorlarning vektor ko'paytmasini topamiz. (3.10.4) formulaga ko'ra

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=4\left(-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right).$$

Demak,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}4\left|-3\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}\right|=2\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+2^2}=$$

$$=2\sqrt{9+36+4}=2\sqrt{49}=14.$$

3.10.3. Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

3.10.4-ta'rif. *Tartiblangan* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *vektorlar uchligining aralash ko'paytmasi deb,* $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ *ga aytiladi.*

Bu ta'rifdan, agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar uchligi komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga tengligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, agar $d=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ deb belgilasak, vektor ko‘paytma ta’rifiga ko‘ra $\left(\vec{d},\vec{a}\right)=\left(\vec{d},\vec{b}\right)=0$ bo‘ladi.

Undan tashqari, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanar ekanligidan ular bitta tekislikda yotishi sababli (vektorlar umumiy boshga keltirilgan degan faraz asosida) $\left(\vec{d},\vec{c}\right)=0$ kelib chiqadi.

Endi, vektorlarning $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ uchligi nokomplanar deb faraz qilaylik. U vaqtda, 3.10.4-rasmdan

$$h=\pi p_{\vec{d}}\vec{c}$$

bo‘lib, $|h|$ asosi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammdan iborat bo‘lgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning balandligidir. Uning hajmi

$$V=S|h|$$

bo‘lib, $S=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ ekanligidan

$$V=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|\cdot|h|=\left|\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|h\right|=$$

$$=\left|\left|\vec{d}\right|\pi p_{\vec{d}}\vec{c}\right|=\left|\left(\vec{d},\vec{c}\right)\right|=\left|\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)\right|$$

ni olamiz. Bundan

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\pm V$$

ga kelamiz. Demak, nokomplanar bo‘lgan tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchligining aralash ko‘paytmasining absolut qiymati son qiymati jihatidan bu vektorlarga qurilgan parallelepiped hajmiga teng bo‘lar ekan. Oxirgi tenglik o‘ng tomondagi «+» ishora tartiblangan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar sistemasi o‘ng uchlikni, «-» esa chap uchlikni tashkil qilgan holga mos kelishiga ishonch hosil qilish qiyin emas (mustaqil bajaring).

Bu uchta vektorlar aralash ko'paytmasining geometrik ma'nosidir.

Uch vektorlar aralash ko'paytmasi uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

1). $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \vec{c}\right)=0$ bo'ladi va, aksincha, aralash ko'paytmasi nolga teng bo'lgan vektorlar uchligi komplanardir;

2). Aralash ko'paytmada vektor ko'paytuvchilardan ixtiyoriy ikkitasining o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi, masalan,

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)=-\left(\left[\vec{c}, \vec{b}\right], \vec{a}\right);$$

3). Aralash ko'paytmada vektor ko'paytuvchilarning o'rinlari doiraviy shaklda almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)=\left(\left[\vec{b}, \vec{c}\right], \vec{a}\right)=\left(\left[\vec{c}, \vec{a}\right], \vec{b}\right);$$

4). Aralash ko'paytmada vektor ko'paytirish va skalyar ko'paytirish belgilarining o'rinlari almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi, ya'ni $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)=\left(\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right)$.

Aralash ko'paytmaning yuqorida keltirilgan 4-xossasi asosida uni vektor va skalyar ko'paytirish belgilarisiz yozish imkoniyati tug'iladi, ya'ni

$$\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Bundan buyon shunday belgilashdan foydalanamiz.

Yuqorida keltirilgan 1^0 xossaga ko'ra, berilgan uchta $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlarning komplanarlik sharti sifatida $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ ni qabul qilish mumkindir.

Agar $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, $\vec{c}(x_3; y_3; z_3)$ vektorlar fazoda Dekart bazisida berilgan bo'lsa, (3.10.4) dan

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right]=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

ni va (3.10.1) dan

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

ni olamiz va, nihoyat,

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \qquad (3.10.5)$$

ga kelamiz. (3.10.5) *vektorlarning aralash ko'paytmasi formulasining koordinatalar shaklidir.*

Bu o'rinda Dekart bazasida berilgan $\vec{a}(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}(x_3;y_3;z_3)$ vektorlarning komplanarlik sharti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

ekanligini aytamiz.

3.11. *n* o'lchovli vektorlar fazosi tushunchasi

Yuqorida vektor sonlar o'qida uning koordinatasi deb ataluvchi bitta x son; koordinatalar tekisligida tartiblangan $(x;y)$ sonlarning jufti va koordinatalar fazosida esa $(x;y;z)$ sonlarning tartiblashgan uchligi bilan aniqlanishini (berilishini) ko'rdik. Shu sababli, ularni mos ravishda bir, ikki va uch o'lchovli vektorlar deb ataladi. Xuddi shunga o'xshash, *agar n ta* $x_i(i=\overline{1;n})$ *sonlarning tartiblangan sistemasi (to'plami) bilan aniqlanadigan* $\vec{a}$ *vektor tushunchasi kiritlsa, uni n o'lchovli, mazkur sonlar sistemasini esa uning koordinatalari (komponentalari)* *deyilib,* $\vec{a}(x_1;x_2;...;x_n)$ *yoki* $\vec{a}=(x_1;x_2;...;x_n)$ *yoki* $\vec{a}=[x_1;x_2;...;x_n]$ *yoki* $\vec{a}=\{x_1;x_2;...;x_n\}$ *kabi yoziladi.*

n o'lchovli vektorlar uchun aniqlangan quyidagi amailarni keltiramiz ($\vec{a}_j(x_1^{(j)};x_2^{(j)};...;x_n^{(j)})$ deb faraz qilamiz):

1) $\vec{a}_1=\vec{a}_2 \Leftrightarrow \{x_i^{(1)}=x_i^{(2)}, i=\overline{1;n}\}$

2) $\vec{a}_1=\vec{0} \Leftrightarrow \{x_i^{(1)}=0, i=\overline{1;n}\}$

3) $|\vec{a}_1|$ kabi belgilanuvchi $\vec{a}_1$ vektorning moduli deb,

$$|\vec{a}_1|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(1)})^2}$$

ni qabul qilinadi;

4) *moduli 1 ga teng bo'lgan vektorni birlik vektor (ort) deb ataladi;*

5) *berilgan* $\vec{a}_1$ *va* $\vec{a}_2$ *vektorlarning yig'indisi deb, koordinatalari ularning mos koordinatalarining yig'indisidan iborat bo'lgan* $\vec{a}_3$ *vektorga aytiladi, ya'ni*

$$x_i^{(3)}=x_i^{(1)}+x_i^{(2)},\ i=\overline{1;n},$$

va $\vec{a}_1+\vec{a}_2=\vec{a}_3$ *kabi yoziladi;*

xossalari:

1). $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,

2). $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,

3). $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$;

4). agar $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar qarama-qarshi vektorlar deb ataladi va $\vec{a}=-\vec{b}$ $(\vec{b}=-\vec{a})$ kabi yoziladi hamda $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektorni $-\vec{a}$ kabi belgilanadi;

6) *berilgan* $\overline{a_1}$ *va* $\overline{a_2}$ *vektorlarning ayirmasi deb, shunday* $\overline{a_3}$ *vektorga aytiladiki, uning* $\overline{a_2}$ *bilan yig'indisi* $\overline{a_1}$ *dan*

iborat bo'ladi va $\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_3}$ *kabi yoziladi* demak, bu ta'rif bo'yicha

$$\overrightarrow{a_3}+\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_1}\Leftrightarrow\overrightarrow{a_1}-\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{a_3}$$

ekanligini va vektorlarni qo'shish ta'rifi yordamida

$$x_i^{(3)}=x_i^{(1)}-x_i^{(2)},\quad i=\overline{1;n}$$

formulani olamiz;

7) *berilgan* $\overrightarrow{a_1}$ *vektorning berilgan* λ *songa ko'paytmasi deb, shunday* $\overrightarrow{a_2}$ *vektorga aytiladiki, uning har bir koordinatasi* $\overrightarrow{a_1}$ *ning mos koordinatasining* λ *songa ko'paytmasidan iborat bo'ladi va* $\overrightarrow{a_2}=\lambda\,\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{a_1}\lambda$ *kabi yoziladi,* demak,

$$x_i^{(2)}=\lambda\,x_i^{(1)},\quad i=\overline{1;n}$$

formula o'rinlidir; vektorni songa ko'paytirish amali quyidagi xossalarga egadir $(\lambda\,,\mu\in R)$:

1). $0\vec{a}=\vec{0}$,

2). $\lambda\ \vec{0}=\vec{0}$,

3). $1\vec{a}=\vec{a}$,

4). $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$,

5). $\lambda\left(\vec{a}\pm\vec{b}\right)=\lambda\,\vec{a}\pm\lambda\,\vec{b}$,

6). $(\lambda\pm\mu)\vec{a}=\lambda\,\vec{a}\pm\mu\,\vec{a}$,

7). $\lambda\left(\mu\,\vec{a}\right)=\mu\left(\lambda\,\vec{a}\right)=(\lambda\,\mu)\vec{a}$,

8). $\left|\lambda\,\vec{a}\right|=|\lambda\,|\cdot\left|\vec{a}\right|$;

8) *berilgan* $\overrightarrow{a_1}$ *va* $\overrightarrow{a_2}$ *vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb, ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi va* $\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2}\right)$ *yoki* $\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{a_2}$ *kabi belgilanadi,* demak,

$$\left(\vec{a_1},\vec{a_2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^{(1)}\cdot x_i^{(2)}\right);$$

xossalari $(\lambda,\ \mu\in R)$:

1). $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

2). $\left(\lambda\,\vec{a},\mu\vec{b}\right)=(\lambda\,\mu)\left(\vec{a},\vec{b}\right)$;

3). $\left(\vec{a}\pm\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{c}\right)\pm\left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

4). $\left(\vec{a},\vec{a}\right)=\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$ - vektorning skalyar kvadrati modulining kvadratiga tengdir;

5). $\left(\vec{a},\vec{0}\right)=0$;

6). agar $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$ bo‘lsa, bu vektorlar ortogonal deb ataladi.

Eslatma. Bu keltirilgan amallar $n=\overline{1;3}$ bo‘lgan hollarda oldingi ko‘rilganlar bilan ustma-ust tushishiga ishonch hosil qilish qiyinchilik tug‘dirmaydi.

Koordinatalari (komponentlari) haqiqiy bo‘lgan barcha n o‘lchovli vektorlar to‘plami *n o‘lchovli vektorlar fazosi* deb ataladi.

Agar n o‘lchovli vektorlar fazosining $\vec{e}_i(\delta_{i1};\delta_{i2};...;\delta_{in})$ $\left(i=\overline{1;n}\right)$ vektorlari sistemasini qarasak, bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisi, ularning har biri birlik vektordan (ortdan) iborat ekanligi ravshandir. Shu sababli, ularni *n o‘lchovli vektorlar fazosining ortlari sistemasi* deb yuritiladi.

Quyidagi tasdiq o‘rinlidir.

3.11.1-teorema. $\vec{a}_i(a_{i1};a_{i2};...;a_{in})$ $\left(i=\overline{1;n},\ n\in N\right)$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo‘lishi uchun

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.11.1}$$

determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Yetarliligi. Aytaylik, $\vec{a}_i$ $\left(i=\overline{1;n},\ n\in N\right)$ vektorlar sistemasi uchun (3.11.1) determinant noldan farqli $(\Delta\neq 0)$ bo'lsin. Ma'lumki, bu vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lishi uchun

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{a}_i = 0 \tag{3.11.2}$$

tenglik $c_i=0$ $\left(i=\overline{1;n}\right)$ bo'lgandagina bajarilishi kerakdir. (3.11.2) ni koordinatalar shaklida yozib,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_i = 0\,, \quad j=\overline{1;n} \tag{3.11.3}$$

n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli sistemasiga kelamiz. (3.11.3) sistemaning determinanti (3.11.1) ga transponirlangan determinantdan iborat bo'lib, u noldan farqli ekanligidan yagona $c_i=0$ $\left(i=\overline{1;n}\right)$ yechimga egadir (2-bobga qarang). Demak, vektorlar sistemasi chiziqli erklidir.

Zaruriyligi. Endi, $\vec{a}_i$ $\left(i=\overline{1;n},\ n\in N\right)$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda, (3.11.2) tenglik $c_i=0$ $\left(i=\overline{1;n}\right)$ bo'lgandagina o'rinli va u (3.11.3) bir jinsli sistemaning yagona yechimidan iborat bo'lib, $\Delta\neq 0$ bo'lishi kelib chiqadi (2-bobga qarang).

3.11.2-teorema. $\vec{a}_i\left(a_{i1};a_{i2};\dots;a_{in}\right)$ $\left(i=\overline{1;n},\ n\in N\right)$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lsa, u vaqtda, ixtiyoriy n o'lchovli vektorni yagona tarzda ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Isbot. Teorema sharti bajarilsin va $\vec{b}(b_1;b_2;...;b_n)$ ixtiyoriy n o'lchovli vektor berilgan bo'lsin. Agar $\vec{b}$ vektorning berilgan vektorlar sistemasi bo'yicha chiziqli kombinatsiyasini

$$\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_i$$

deb faraz qilsak, x_i $\left(i = \overline{1;n}\right)$ larga nisbatan quyidagi sitemaga kelamiz:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j, \quad j = \overline{1;n}. \qquad (3.1.4)$$

Uning determinanti, $\vec{a}_i$ $\left(i = \overline{1;n},\ n \in N\right)$ vektorlar sistemasi chiziqli erkli ekanligidan, 3.11.1-teoremaga asosan, noldan farqli bo'lib, yagona yechimga egadir (2-bobga qarang). Teorema isbotlandi.

Isbotlangan 3.11.2-teoremadan ko'ramizki, agar n o'lchovli vektorlar fazosida (to'plamida) chiziqli erkli bo'lgan n ta vektorlar berilgan bo'lsa, n o'lchovli ixtiyoriy vektorni shu berilgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi sifatida yagona tarzda ifodalash mumkin bo'lib, berilgan bunday *chiziqli erkli n ta vektorlarning sistemasini n o'lchovli vektorlar fazosining (to'plamining) bazisi* deb ataladi. 3.11.1-teoremaga asosan esa berilgan n ta vektorlar n o'lchovli vektorlar fazosida bazisni tashkil etishi uchun ularning koordinatalari vositasida tuzilgan (3.11.1) determinantning noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar $\vec{a}_i$ $\left(i = \overline{1;n},\ n \in N\right)$ vektorlar sistemasi n o'lchovli vektorlar fazosida bazisni tashkil etib,

$$i \neq j \Rightarrow \left(\vec{a}_i, \vec{a}_j\right) = 0 \quad \left(i, j = \overline{1;n}\right)$$

shartni qanoatlantirsa, ya'ni bazisning vektorlari juft-juft ortogonal bo'lsa, uni *ortogonal bazis* deb; bazis vektorlarning barchasi birlik vektorlardan (ortlardan) iborat bo'lsa, uni *normal bazis* deb; ham ortogonal ham normal bo'lgan bazisni esa *ortonormal bazis* deb ataladi.

Bu o'rinda, agar $\vec{a}_i$ $\left(i=\overline{1;n},\ n\in N\right)$ ortonormal bazisdan iborat bo'lsa,

$$\left(\vec{a}_i,\vec{a}_j\right)=\delta_{ij}\quad\left(i,j=\overline{1;n}\right)$$

bo'lishini aytamiz (bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisi).

Agar $\vec{e}_i\left(\delta_{i1};\delta_{i2};...;\delta_{in}\right)$ $\left(i=\overline{1;n},\ n\in N\right)$ n o'lchovli vektorlar fazosining ortlari sistemasini olsak, u chiziqli erkli bo'lib, bazisni tashkil etishi aniqdir; bazis to'g'risida maxsus eslatilmagan holda n o'lchovli vektorlar fazosinig bazisi deb xuddi shu sistemani tushunamiz. Undan tashqari, bu sistema ortonormal bazisdan iborat ekanligiga ishonch hosil qilish osondir. Masalan, uch o'lchovli vektorlar fazosini olsak, unda $\vec{e}_1(1;0;0),\vec{e}_2(0;1;0),\vec{e}_3(0;0;1)$ sistema ortonormal bazisdan iborat bo'lib, uni oldinroq $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ kabi belgilanishini aytgan edik.

Misol. $\vec{a}_1(1;-1;0;1),\vec{a}_2(1;1;0;-1),\vec{a}_3(1;1;0;1),\vec{a}_4(0;1;-1;0)$ berilgan. Ularning 4 o'lchovli vektorlar fazosida bazis tashkil etishini tekshiring va ijobiy javob olingan taqdirda $\vec{b}(2;2;4;2)$ vektorni shu bazisdagi koordinatalarini aniqlang.

Yechish.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&0&1\\1&1&0&-1\\1&1&0&1\\0&1&-1&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+3}\cdot(-1)\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\1&1&1\end{vmatrix}=$$

$$=1+1+1-1+1+1=4\neq 0.$$

$\Delta \neq 0$ ekanligidan, 3.11.1-teoremaga asosan $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ vektorlar sistemasi 4 o'lchovli fazoda bazisni tashkil qiladi.

Endi, $\vec{b}(2;2;4;2)$ vektorning bu bazisdagi koordinatalarini $\vec{b}(x_1;x_2;x_3;x_4)$ deb belgilab, (3.11.4) sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ -x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

Bu sistemaning determinanti yuqorida hisoblangan determinantga transponirlanganligidan u ham 4 ga tengdir. Yordamchi determinantlarni hisoblaymiz:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2-6-2-6+2=-8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+6+2-2+2+6=16,$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}1&1&1&2\\-1&1&1&2\\0&0&0&4\\1&-1&1&2\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=-4(1+1+1-1+1+1)=-16.$$

Kramer formulalariga asosan:

$$x_1=\frac{-8}{4}=-2,\ x_2=\frac{0}{4}=0,\ x_3=\frac{16}{4}=4,\ x_4=\frac{-16}{4}=-4.$$

Demak, $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4\}$ bazisda $\vec{b}(-2;0;4;-4)$.

3-bobga doir mashqlar

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ to‘g‘ri burchakli parallelepipedda berilgan $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a},\ \overrightarrow{AB}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c}$ vektorlarga ko‘ra

a) $\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}$; *b*) $\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; *c*) $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ vektorlarni yasang.

2. Ixtiyoriy ABC uchburchakda E va F nuqtalar mos ravishda AB va AC tomonlarining o‘rtasi bo‘lsa, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlarni $\vec{a}=\overrightarrow{AE}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AF}$ vektorlar orqali ifodalang.

Javob: $\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=2(\vec{b}-2\vec{a})$, $\overrightarrow{AC}=2(\vec{b}-\vec{a})$.

3. Tekislikda $A(2;3)$, $B(-3;3)$, $C(-3;0)$ nuqtalarga koordinatalar boshidan $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ kuchlar qo‘yilgan. Ularnimg teng ta’sir etuvchisi $\overrightarrow{ON}$ ni yasang va uning koordinata o‘qlardagi proyeksiyalarini hamda modulini toping.

Javob:

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$; $np_{ox}\overrightarrow{ON}=-3$; $np_{oy}\overrightarrow{ON}=6$ $\quad|\overrightarrow{ON}|=3\sqrt{50}$

4. To‘rtburchak uchlarining koordinatalari berilgan:

$A(4;0;8)$, $B(5;2;6)$, $C(3;1;4)$, $D(2;-1;6)$. Shu to'rtburchakning kvadrat ekanligini ko'rsating.

5. $\overline{AB}$ vektorning boshi $A(-1;2;4)$ va uni teng ikkiga bo'luvchi nuqta $C(2;0;2)$ berilgan bo'lsa, B uchining koordinatalarini toping.

Javob: $B(8;-4;-2)$.

6. $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}+7\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

Javob: 0.

7. $\vec{a}=m\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ va $\vec{b}=4\vec{i}+m\vec{j}-7\vec{k}$ vektorlar berilgan. m ning qanday qiymatlarida bu vektorlar o'zaro perpendikulyar bo'ladi?

Javob: 4.

8. $\vec{a}=\{2;3;5\}$ va $\vec{b}=\{1;2;1\}$ vektorlar berilgan. Bu vektorlarning vektor ko'paytmasi topilsin.

Javob: $7\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$.

9. $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k}$ vektorlarning aralash ko'paytmasini hisoblang.

Javob: 33.

Vektor tushunchasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring.

1. Vektorga ta'rif bering.
2. Qanday shartlar bajarilganda vektorlar o'zaro teng bo'ladi?
3. Ikkita va undan ortiq vektorlar berilganda, qanday qoida bo'yicha ularning yig'indisini topasiz?
4. Vektorlarni qo'shishda guruhlash va o'rin almashtirish qonunlarini keltiring.
5. Vektorlarni songa ko'paytirishga ta'rif bering.
6. Vektorning o'qdagi proyeksiyasini chizmada ko'rsating.
7. Bazis deganda nimani tushunasiz?
8. Dekart bazisi nima?
9. Vektorni Dekart bazisi bo'yicha tashkil etuvchilarga yoyishni ko'rsating.
10. Vektorning moduli qanday formula yordamida topiladi?
11. Vektorning yo'naltiruvchi kosinuslarini tushuntiring.
12. Ikki nuqta orasidagi masofa qanday formula yordamida topiladi?
13. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalarini yozing.
14. Vektorlarni skalyar ko'paytirish haqida tushuncha bering.
15. Skalyar ko'paytma qanday shartni qanoatlantirganda ikki vektor ortogonal bo'ladi?
16. Skalyar ko'paytmaning xossalarini keltiring.
17. Skalyar ko'paytma formulasining koordinatalar shaklini yozing.

18. Ikki vektor orasidagi burchakni topish formulasini yozing.

19. Vektorlarning vektor ko‘paytmasini ta’riflang.

20. Vektor ko‘paytmaning xossalarini keltiring.

21. Vektor ko‘paytmaning koordinatalar shaklini yozing.

22. Vektor ko‘paytmaning nolga teng bo‘lish shartini yozing.

23. Vektorlarning aralash ko‘paytmasini ta’riflang.

24. Aralash ko‘paytmaning Dekart bazisi orqali ifodasini yozing.

25. Aralash ko‘paytmaning xossalarini keltiring.

26. *n* o‘lchovli vektor va ular ustidagi amallar haqida nimalarni bilasiz?

4-BOB. MATRITSA VA CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Bu bob oliy algebraning matritsa tushunchasini va uning chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishga tatbiqini hamda Jordan-Gauss usulini yoritishga bagishlanadi.

4.1. Matritsalar algebrasining elementlari

Aytaylik, $a_{ij}\left(i=\overline{1;m},\ j=\overline{1;n}\right)$ $m\cdot n$ ta ifodalar (sonlar) berilgan va ular ustida arifmetik amallar aniqlangan bo'lsin.

4.1.1-ta'rif. Agar $a_{ij}\left(i=\overline{1;m},\ j=\overline{1;n}\right)$ $m\cdot n$ ta ifodalar (sonlar) m ta satr va n ta ustundan iborat

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (4.1.1)$$

jadval ko'rinishda yozilgan bo'lsa, uni *matritsa*, $m\times n$ ni esa uning *tuzilishi (tarkibi)* deb ataladi.

Yotiq (gorizontal) ko'rinishda yozilgan $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ ni *matritsaning i-satri (i-satr-vektori)*, tik (vertikal) ko'rinishda

yozilgan $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

ni esa *j-ustuni (j-ustun-vektori)* deb ataladi. Demak, matritsani satr-vektorlar (yoki ustun-vektorlar) sistemasi sifatida ham qarash mumkin ekan.

Matritsalarni belgilash uchun, odatda, Lotin allfbosining bosh, uni tashkil etgan $a_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ ifodalarni (sonlarni) esa uning *elementlari* deyilib, qo‘sh indeks bilan ta’minlangan satriy harflaridan foydalaniladi. Aytilgan qo‘sh indekslardan birinchisi mazkur element joylashgan matritsa satrining, ikkinchisi esa ustunining tartibini bildiradi.

Matritsalarni belgilasbda $[\cdot]$ qavslardan tashqari $(\cdot)$ va $\{\cdot\}$ qavslar, hamda $\|\cdot\|$ kabi belgilash ham qo‘llaniladi. Shuningdek, soddalik uchun $\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{m\times n}$, $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ va boshqa shularga o‘xshash belgilashlardan ham foydalanamiz.

Agar matritsaning tuzilishl $m\times n$ da $m\neq n$ bo‘lsa, uni *to‘g‘ri to‘rtburchak*, $m=n$ bo‘lganda esa *kvadrat matritsa* deb ataladi ($m=n$ bo‘lganda kvadrat matritsani *n-tartibli matritsa* deb ham yuritiladi va $\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{n\times n}$ o‘rniga $\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{n}$ belgilashdan ham foydalanamiz).

Agar $A=\left\lfloor a_{ij}\right\rfloor_{m\times n}$ matritsaning $a_{ii}\left(i=\overline{1;k}\right)$ diagonal elementlaridan boshqa barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, uni *diagonal matritsa* deyiladi, bu yerda $k=\min\{m,n\}$. Diagonal matritsa, odatda, D bilan belgilanadi.

Barcba diagonal elementlari 1 ga teng bo‘lgan kvadrat diagonal matritsani *birlik matritsa* deyiladi va E harfi orqali belgilanadi, ya’ni

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

Kroneker belgisi (simvoli) dan foydalanib, D va E matritsalarni qisqacha ko'rinishda yozish mumkin:

$$D=\lfloor \delta_{ij}\cdot d_{ij}\rfloor_{m\times n}, \qquad E=\lfloor \delta_{ij}\rfloor_{n}.$$

Matritsaning barcha elementlari nollardan iborat bo'lsa, uni *nol matritsa* deyiladi va E^0 yoki oddiy nol orqali belgilanadi,

ya'ni $E^0=[0]_{m\times n}=0$.

Bir xil tuzilishli $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ va $B=\lfloor в_{ij}\rfloor_{m\times n}$ matritsalardan birining barcha elementlari ikkinchisining mos elementlariga teng (ya'ni $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1;m}$, $j=\overline{1;n}$) bo'lsa, bu *matritsalar teng* deb hisoblanadi va $A=B$ ko'rinishda yoziladi. Agar birinchi matritsaning kamida bitta elementi ikkinchisining mos elementiga teng bo'lmasa, bu *matritsalar teng emas* deyiladi va $A\neq B$ ko'rinishda yoziladi.

Quyidagi xossalar o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish osondir:

1). $A=B\Leftrightarrow B=A$;

2). $A=B\wedge B=C\Rightarrow A=C$.

Odatda, *kvadrat matritsaning elementlaridan tuzilgan determinant uning determinanti* deb ataladi va A kvadrat matritsa determinentini detA yoki $|A|$ kabi belgilanadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

matritsaning determinanti quyidagidir:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Determinanti noldan farqli bo‘lgan kvadrat matritsa *maxsus emas* deb, nolga teng bo‘lsa, *maxsus* deb ataladi.

Masalan,

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ maxsus matritsadir, chunki

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0;$$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ esa maxsusmas matritsadir, chunki

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 = 8 \neq 0.$$

4.1.1. Matritsalarni qo‘shish, ayirish va songa ko‘paytirish amallari

4.1.2-ta’rif. Bir xil tuzilishli $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ va $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ *matritsalarning yig‘indisi* deb shunday C matritsaga aytiladiki, uning elementlari A va B matritsalar mos elementlarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi va $C=A+B$ deb yoziladi.

Ta’rif bo‘yicha

$$C = A + B,\;\; C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n},\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\; i = \overline{1,m},\;\; j = \overline{1,n}\;\; .$$

Matritsalar yig‘indisi ta’rifidan ularni qo‘shish amalining quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1). A+(B+C)=(A+B)+C;

2). A+B=B+A;

3). A+E^0=A (bunda E^0=(0), A,B,C – berilgan bir xil tuzilishli matritsalar).

Matritsalarning ayirmasi ularni qo'shishga teskari amal tariqasida ta'riflanadi, ya'ni bir xil tuzilishli A va B matritsalarning ayirmasi deb, shunday C matritsaga aytiladiki, B+C=A bo'ladi va C=A-B deb belgilanadi.

Bu ta'rif asosida $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ va $B=\lfloor b_{ij}\rfloor_{m\times n}$ bo'lsa,

$$C=A-B,\ \ C=\left[c_{ij}\right]_{m\times n},\ c_{ij}=a_{ij}-b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n}$$

natija olinadi.

Tuzilishlari bir xil bo'lmagan, matritsalarni qo'shish va ayirish amallari aniqlanmagandir.

4.1.3-ta'rif. $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ *matritsaning α songa ko'paytmasi* deb, uning barcha elementlarini shu α songa ko'paytirishdan hosil qilingan matritsaga aytiladi va αA yoki $A\alpha$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifga ko'ra

$$A\cdot\alpha=\alpha\cdot A=\lfloor\alpha\, a_{ij}\rfloor_{m\times n}.$$

Matritsani songa ko'paytirish amalining ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1). $1\cdot A=A\cdot 1=A;$

2). $A\cdot 0=0\cdot A=E^0;$

3). $\alpha(\beta A)=\beta(\alpha A)=(\alpha\beta)A;$

4). $(\alpha\pm\beta)\cdot A=\alpha A\pm\beta A;$

5). $\alpha(A\pm B)=\alpha A\pm\alpha B.$

Bu yerda A va B – bir xil tuzilishli matritsalar, α va β - haqiqiy sonlardir.

Yuqorida ta'riflangan *qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish matritsalar ustidagi chiziqli amallardan iboratdir.*

4.1.2. Matritsalarni ko'paytirish

Tuzilishlari mos ravishda $m \times n$ va $p \times q$ bo'lgan

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}, \quad B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{p \times q}$$

to'g'ri to'rt burchak matritsalar berilgan bo'lsin. Agar A matritsaning ustunlari soni n B matritsaning satrlari soni p ga teng bo'lsa, bu matritsalarni ko'paytirish amali ma'noga ega bo'ladi.

4.1.4-ta'rif. Berilgan tartibda olingan $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n}$ va $B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{n \times q}$ *matritsalarning ko'paytmasi* deb shunday $C = \lfloor c_{ij} \rfloor_{m \times q}$ matritsaga aytiladiki, uning elementlari

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}; \quad i = \overline{1;m}, \ j = \overline{1;q} \tag{4.1.2}$$

formula bilan aniqlanadi va $AB=C$ kabi belgilanadi.

Ta'rifdan matritsalarni ko'paytirish uchun quyidagi qoida kelib chiqadi:

Ikki matritsaning ko'paytmasidan iborat bo'lgan matritsaning i – satri va j – ustunida turuvchi elmentni hisoblash uchun birinchi matritsaning i – satridagi har bir elementini ikkinchi matritsaning j–ustunining mos elementiga ko'paytirib, so'ngra ularni qo'shish kerak ((4.1.2) formulaga qarang).

Masalan, quyidagi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

to‘g‘ri to‘rt burchak matritsalar ko‘paytmasini topaylik:

$$C=A\cdot B=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot(-1)+2\cdot(-3) & 1\cdot 0+2\cdot 1\\ 3\cdot 2+(-4)\cdot 1 & 3\cdot(-1)+(-4)\cdot(-3) & 3\cdot 0+(-4)\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -7 & 2\\ 2 & 9 & -4\end{bmatrix}$$

Matritsalarni ko‘paytirish amali quyidagi xossalarga ega:

1). $A(BC) = (AB)C;$

2). $\alpha(AB) = (\alpha A)\cdot B = A\cdot(\alpha B)$

3). $(A \pm B)\cdot C = A\cdot C \pm B\cdot C;$

4). $C(A \pm B) = C\cdot A \pm C\cdot B;$

5). A va B lar bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lsa,

$det(AB)=(detA)\cdot(detB)$ [4].

Bu yerda A, B, C matritsalar, α - haqiqiy son.

Ikki matritsaning ko‘paytmasi uchun kommutativlik (o‘rin almashtirish) xossasi umuman aytganda o‘rinli emas, yani ushbu $AB=BA$ tenglik doim o‘rinli bo‘lavermaydi. Ammo, ular bir xil tartibli kvadrat matritsalar bo‘lib, bittasi E – birlik matritsadan iborat bo‘lganda (masalan, $B=E$) $AE=EA=A$ tenglik o‘rinlidir.

Agar A va B matritsalar uchun $AB=BA$ bajarilsa, u vaqtda ular *kommutativ matritsalar* deyiladi. Yuqorida eslatganimizdek, birlik matritsa o‘zi bilan bir xil tartibga ega bo‘lgan kvadrat matritsa bilan kommutativdir.

Matritsalarni ko‘paytirish ular ustidagi chiziqsiz amaldir.

4.1.3. Matritsani transponirlash

4.1.5-ta’rif. Berilgan $m\times n$ tuzilishli

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n}\\ - - - & - - - & - - -\\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

matritsadan uning satrlarini mos ustunlar qilib yozish natijasida hosil qilinadigan matritsani A ga nisbatan *transponirlangan matritsa* deyiladi va uni A^* (yoki A′) bilan belgilanadi, ya'ni

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{m2} \\ ----- & ----- \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, agar A matritsa $m \times n$ tuzilishli bo'lsa, A^* matritsa $n \times m$ tuzilishli bo'ladi.

Matritsani transponirlash amali doimo aniqlangan bo'lib, quyidagi hossalarga ega:

1). $(A^*)^* = A$

2). A va B lar bir xil tuzilishli bo'lganda $(A \pm B)^* = A^* \pm B^*$

3). $A=[a_{ij}]_n$ – *simmetrik kvadrat matritsa*, ya'ni $a_{ij} = a_{ji}$ $i, j = \overline{1, n}$ bo'lsa, $A^*=A$ bo'ladi, va aksincha.

4). Agar A va B matritsalar uchun AB aniqlangan bo'lsa, $(AB)^* = B^* A^*$ o'rinlidir.

4.1.4. Teskari matritsa

4.1.6-ta'rif. Agar bir xil tuzilishli A va B kvadrat matritsalar uchun $AB=BA=E$ (E-birlik matritsa) munosabat o'rinli bo'lsa, u vaqtda ularni *o'zaro teskari matritsalar* deyiladi.

Agar A kvadrat matritsa berilgan bo'lsa, unga teskari matritsani A^{-1} orqali belgilanadi. Yuqoridagi ta'rifga ko'ra

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar teskari matritsa mavjud bo'lsa, uning yagona bo'lishi ta'rifidan kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, A

matritsaga ikkita A_1^{-1} va A_2^{-1} teskari matritsalar mavjud deb faraz qilsak,

$$AA_1^{-1} = A_1^{-1}A = E,\ AA_2^{-1} = A_2^{-1}A = E \Rightarrow A_1^{-1}\left(AA_2^{-1}\right) = A_1^{-1}E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(A_1^{-1}A\right)A_2^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow EA_2^{-1} = A_1^{-1} \Rightarrow A_2^{-1} = A_1^{-1}$$

ni olamiz.

Berilgan kvadrat matritsaga teskari matritsa har doim ham mavjud bo'lavermaydi. Bu o'rinda quyidagi tasdiq to'g'ridir.

4.1.1-teorema. Matritsaga teskari matritsa mavjud bo'lishi uchun u maxsus bo'lmasligi (diterminanti nolga teng bo'lmasligi) zarur va yetarlidir.

Isboti. $A=[a_{ij}]_n$ – kvadrat matritsa berilgan bo'lsin. Unga teskari matritsani $A^{-1}=[x_{ij}]_n$ deb faraz qilaylik. U vaqtda, $AA^{-1}=E$ tenglikdan

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot x_{kj} = \delta_{ij}; \quad i = \overline{1;n},\ j = \overline{1;n} \tag{4.1.3}$$

dan iborat n noma'lumli n ta chiziqli tenglamalarning n ta sistemalarini olamiz. Bu sistemalar koeffitsiyentlari bir xil bo'lib, A matritsa elementlaridir, o'ng tomoni esa birlik matritsaning mos ustun elementlaridir (δ_{ij} – Kroneker belgisi ekanligini esalatamiz).

Demak, $\det A \neq 0$ bo'lsa, bu sistemalarning har biri yagona yechimga ega bo'lib, teskari matritsaning mos ustun elementlarini aniqlaydi. Bu teoremaning yetarli qismining isbotidir.

Endi, A^{-1} mavjud bo'lsin deylik, u vaqtda $AA^{-1} = E$ o'rinli bo'lib, bundan $\det A \cdot \det A^{-1} = 1$ ni olamiz. Agar $\det A = 0$ deb faraz qilsak, oxirgi tenglikdan $0 = 1$ ziddiyatli tenglikka kelamiz, demak, $\det A \neq 0$ bo'lar ekan. Bu teoremaning zaruriy qismining isbotidir.

Bu yerda Kramer formulalaridan foydalansak va (4.1.3) ning har bir sistemasining o'ng tomoni birlik matritsaning mos ustuni ekanligini e'tiborga olsak, $\det A \neq 0$ bo'lganda

$$x_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}, \quad i = \overline{1;n}, \ j = \overline{1;n}$$

ekanligi kelib chiqadi, bu yerda A_{ji} $\det A$ ning a_{ji} elementiga mos algebraik to'ldiruvchidir.

Agar $C = \lfloor A_{ij} \rfloor_n$ matritsani qarasak, u vaqtda

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^*$$

ekanligi ravshandir. Demak,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ushbu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsa uchun teskari matritsani topaylik. Buning uchun, avvalo, $\det A$ determinantni yozamiz va uni hisoblaymiz:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Demak, A – maxsusmas matritsa, unga teskari matritsa mavjud. Endi, $\det A$ ning har bir satr algebraik to'ldiruvchilarini hisoblaymiz:

$A_{11} = 4 \cdot 6 - 5 \cdot 5 = -1$, $A_{12} = -(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) = 3$, $A_{13} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$,

$A_{21} = -(2 \cdot 6 - 5 \cdot 3 = 3$, $A_{22} = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = -3$, $A_{23} = -(5 \cdot 1 - 3 \cdot 2) = 1$,

$A_{31} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = -2$, $A_{32} = -(1 \cdot 5 - 3 \cdot 2) = 1$, $A_{33} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$.

Bularni mos ravishda ustunlar qilib yozib, C^* matritsani tuzamiz:

$$C^* = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nihoyat, C^* ning barcha elementlarini $detA=-1$ ga bo'lib teskari matritsaga ega bo'lamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Endi, $A \cdot A^{-1}=E$ ekanligini tekshiramiz. Haqiqiatdan ham,

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot(-3)+3\cdot2 & 1\cdot(-3)+2\cdot3+3\cdot(-1) & 1\cdot2+2\cdot(-1)+3\cdot0 \\ 2\cdot1+4\cdot(-3)+5\cdot2 & 2\cdot(-3)+4\cdot3+5\cdot(-1) & 2\cdot2+4\cdot(-1)+5\cdot0 \\ 3\cdot1+5\cdot(-3)+6\cdot2 & 3\cdot(-3)+5\cdot3+6\cdot(-1) & 3\cdot2+5\cdot(-1)+6\cdot0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Shunga o'xshash, $A^{-1} \cdot A=E$ ekani ham ko'rsatiladi.

4.1.5. Matritsaning rangi

Aytaylik, $A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m\times n}$ matritsa berilgan bo'lsin. Agar $k \leq \min(m,n)$ bo'lsa, A matritsaning k ta ustuni va k ta satri kesishishidagi elementlaridan hosil bo'lgan k–tartibli kvadrat matritsaning determinantini *A matritsaning k – tartibli minori* deb ataladi. Matritsaning har bir elementini uning birinchi tartibli minori deb qabul qilinadi.

Matritsaning rangi deb, uning noldan farqli minorlari tartiblarining eng kattasiga aytiladi.

Agar A matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, bu matritsada hech bo'lmaganda bitta noldan farqli r-tartibli minor borligini, biroq, uning r dan katta tartibli minorlari mavjud bo'lsa, ularning barchasi nolga tengligini anglatadi. A matritsaning rangini *rank A* yoki *r(A)* orqali belgilanadi.

Ushbu matritsani qaraylik:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Uning yagona to'rtinchi tartibli minori nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(ikkita satri bir xil bo'lgan determinant sifatida); uchinchi tartibli minorlaridan biri esa noldan farqli, masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Demak, berilgan matritsaning rangi 3 ga teng, ya'ni *r(A)=3*.

Matritsaning rangini uning ta'rifi bo'yicha topish uchun ko'p sondagi determinantlarni hisoblashga to'g'ri keladi. Bu ishni matritsadagi elementar almashtirishlar tushunchalari yordamida osonlashtirish mumkin.

Elementar almashtirishlar deb quyidagilarga aytiladi:

1) Matritsaning biror satri (ustuni) barcha elementlarini noldan farqli bir xil songa ko'paytirish yoki bo'lish;
2) Matritsaning biror satri (ustuni) barcha elementlariga boshqa satri
(ustuni)ning mos elementlarini biror songa ko'paytirib qo'shish;
3) Matritsaning satrlari (ustunlari) o'rnini o'zaro almashtirish;
4) Matritsaning barcha elementlari nolga teng bo'lgan satrini (ustunini) tashlab yuborish.

Bir-biridan elementar almashtirishlar orqali hosil qilinadigan matritsalar *ekvivalent matritsalar* deb ataladi. Ekvivalent matritsalarning ranglari teng bo'lishi isbotlangandir.

Shuningdek, matritsada ko'pi bilan uning rangiga teng sondagi chiziqli erkli satrlari (ustunlari) mavjud bo'lib, ular matritsa rangiga teng tartibli noldan farqli minoriga mos keluvchi satrlaridan (ustunlaridan) iborat bo'lishi isbotlangandir. Agar matritsaning rangiga teng sondagi uning chiziqli erkli satrlari (ustunlari) sistemasi aniqlangan bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi orqali qolgan satrlarini (ustunlarini) ifodalash mumkin bo'ladi va elementar almashtirishlar yordamida ularga mos satrlarining (ustunlarining) elementlari nollardan iborat bo'lgan ekvivalent matritsani olish mumkin [4]. Bu aytilganlarni matritsaning rangini topish jarayoniga qo'llash ishni birmuncha osonlashtiradi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & -3 & -2\\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1\\ 6 & 4 & 3 & -4 & -3\end{pmatrix}$$

matritsaning rangini hisoblaylik. Berilgan matritsaning birinchi satri elementlarini

-1 ga ko'paytirib, uchinchi satriga qo'shaylik:

$$A_1=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & -3 & -2\\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

endi, A_1 ning 2-satrini -1 ga ko'paytirib, uchinchi satriga qo'shsak,

$$A_2=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & -3 & -2\\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ni olamiz.

A_2 matritsaning nollardan iborat uchinchi satrini tashlab yuborib,

$$A_3=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & -3 & -2\\ 3 & 4 & 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

matritsaga kelamiz; uning rangi ikkiga tengligi ravshandir. Demak, berilgan matritsaning rangi ham ikkiga teng, ya'ni $r(A)=2$.

4.1.6. Matritsaning xos soni va xos vektori

Aytaylik, $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{m\times n}$ matritsa berilgan bo'lsin. U vaqtda X n o'lchovli vektor (ustun-vektor) bo'lsa, AX ko'paytma mavjud bo'lib, u m o'lchovli Y vektordan iborat bo'ladi va

$$AX = Y \qquad (4.1.4)$$

chiziqli almashtirishga ega bo'lamiz. (4.1.4) da A ni *chiziqli almashtirish matritsasi* deb ataladi. Agar chiziqli almashtirish matritsasi kvadrat matritsadan iborat bo'lsa, $(m = n)$, u vaqtda X va Y lar bir xil n o'lchovli vektorlardan iborat bo'lib, ular kollinear bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin. Bu vektorlarning kollinear bo'lib qolgan holi aloxida ahamiyatga ega bo'lib, bu hol ko'p masalalarni hal qilishda uchraydi.

Agar A kvadrat matritsaga ega bo'lgan (4.1.4) chiziqli almashtirish biror noldan farqli X vektorni o'ziga kollinear bo'lgan Y vektorga akslantirsa (o'tkazsa), X vektor A kvadrat matritsaning (chiziqli almashtirishning) *xos vektori*, Y ning X ga proporsionallik koeffitsiyentidan iborat bo'lgan λ son esa uning *xos soni* deyiladi [4].

Demak, agar X berilgan A kvadrat matritsaning xos vektori bo'lsa, yuqoridagi ta'rif bo'yicha

$$AX = \lambda X \qquad (4.1.5)$$

tenglik o'rinli bo'lib, bu yerda λ matritsaning xos sonidan iboratdir.

(4.1.5) ni oddiy shakl o'zgartirishlar yordamida

$$(A - \lambda E)X = 0 \qquad (4.1.6)$$

ko'rinishga keltirish qiyin emas. Bu X ga nisbatan bir jinsli matritsaviy tenglamadir. Agar

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

deb, $A = \left[a_{ij}\right]_n$ - kvadrat matritsa ekanligini hisobga olsak, (4.1.6) dan

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})x_j=0,\ i=\overline{1;n} \qquad (4.1.7)$$

n noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli sistemasini olamiz, bu yerda δ_{ij} - Kroneker belgisidir. Bu bir jinsli sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli ekanligi bizga ma'lum (2-bobga qarang):

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (4.1.8)$$

Bu (4.1.8) λ ga nisbatan tenglama bo'lib, undan A matritsaning xos soni aniqlanadi. Umumiy holda, (4.1.8) dan ko'rinadiki, λ ga nisbatan n- darajali algebraik tenglamaga egamiz. Algebraning asosiy teoremasiga ko'ra bu tenglama n ta kompleks ildizga ega bo'lib [4], ular oddiy yoki karrali bo'lishi mumkin.

Demak, (4.1.8) tenglamani yechib, λ xos sonning qiymati aniqlangach, uni (4.1.7) ga qo'yish natijasida determinanti nolga teng bo'lgan bir jinsli sistemani olamiz va uning noldan farqli yechimini topib, A matritsaning xos vektorini aniqlaymiz.

1-misol. $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$

matritsaning xos soni va xos vektori topilsin.

Yechish. (4.1.8) tenglamani yozamiz va uni echamiz:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 3 & 5-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\lambda^2-6\lambda-7=0\Rightarrow\lambda_{-1}=-1,\quad \lambda_2=7$$

Demak, A matritsa ikkita haqiqiy xos sonlarga ega. Endi, bu xos sonlarning har biriga mos keladigan xos vektorlarni aniqlaymiz. Buning uchun topilgan λ xos son qiymatini (4.1.7) ga qo'yib, undan noldan farqli yechimni aniqlaymiz.

1) $\lambda=-1$ xos son uchun:

$$\begin{cases}(1-(-1))x_1+4x_2=0,\\ 3x_1+(5-(-1))x_2=0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_1+4x_2=0,\\ 3x_1+6x_2=0;\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_1+2x_2=0 \Leftrightarrow x_1=-2x_2.$$

Xos vektor: $\begin{pmatrix}-2x_2\\ x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}, \quad x_2\neq 0.$

Agar $x_2=1$ desak,

$$X_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}.$$

xos vektorni olamiz.

2) $\lambda=7$ xos son uchun:

$$\begin{cases}-6x_1+4x_2=0,\\ 3x_1-2x_2=0;\end{cases} \Leftrightarrow 3x_1-2x_2=0 \Leftrightarrow$$

$$x_2=\frac{3}{2}x_1.$$

Xos vektor: $X_2=\begin{pmatrix}x_1\\ \frac{3}{2}x_1\end{pmatrix}$

Agar $x_1=2$ desak,

$$X_2=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}.$$

xos vektorni olamiz.

2-misol.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 17 & 1\end{pmatrix}$$

matritsaning xos vektorlari aniqlansin.

Yechish.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 17 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 20 = 0;$$

$$\lambda_1 = 2+4i, \quad \lambda_2 = 2-4i.$$

Demak, matritsanimg xos sonlari mavhum.

1) $\lambda = \lambda_1 = 2+4i$:

$$\begin{cases} (3-(2+4i))x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 + (1-(2+4i))x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-4i)x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 - (1+4i)x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = (1-4i)x_1;$$

Xos vektor:

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ (1-4i)x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-4i \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 1$ deb olsak,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-4i \end{pmatrix}$$

xos vektor kelib chiqadi.

2) $\lambda = \lambda_2 = 2-4i$:

$$\begin{cases} (3-(2-4i))x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 + (1-(2-4i))x_2 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1+4i)x_1 - x_2 = 0, \\ 17x_1 - (1-4i)x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_2 = (1+4i)x_1;$$

Xos vektor:

$$X_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ (1+4i)x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1+4i \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 1$ deb olsak,

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+4i \end{pmatrix}.$$ xos vektorni olamiz.

Matritsaning (chiziqli almashtirishning) turli xos sonlariga mos keluvchi xos vektorlarimng sistemasi chiziqli erkli bo‘lishi isbotlangandir [4].

4.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida tekshirish

4.2.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar vositasida yozish va yechish

Ushbu tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = c_i \,, \quad i = \overline{1;m}. \qquad (4.2.1)$$

Bu sistemaning koeffitsiyentlaridan tuzilgan matritsani hamda noma'lumlari va ozod hadlarini matritsa-ustunlar (ustun-vektorlar) sifatida yozamiz:

$$A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix}. \qquad (4.2.2)$$

A-sistemaning matritsasi X-noma'lum vektor, C esa sistemaning o'ng tomoni deb yuritiladi.

Bizga ma'lum bo'lgan matritsalarni ko'paytirish qoidasidan va matritsalarning tengligi shartidan foydalanib, (4.2.1) tenglamani (4.2.2) asosida, quyidagicha yozish mumkin:

$$AX=C. \qquad (4.2.3)$$

(4.2.3) ni *matritsaviy tenglama* deb ataladi.

Agar (4.2.1) sistema (4.2.3) matritsaviy shaklda yozilgan bo'lib, $m = n$ hamda sistemaning A matritsasi maxsus bo'lmasa, bu tenglama quyidagicha yechiladi. Uning har ikki tomonini chapdan A^{-1} matritsaga ko'paytiramiz:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}C.$$

Matritsalarni ko'paytirishning guruhlash qonunidan foydalanib, oxirgini quyidagicha yozish mumkin:

$$(A^{-1}A)\cdot X=A^{-1}\cdot C.$$

$A^{-1}A=E$ va $EX=X$ bo‘lgani uchun (4.2.3) matritsaviy tenglamaning yechimini ushbu ko‘rinishda hosil qilamiz:

$$X=A^{-1}\cdot C. \qquad (4.2.4)$$

Masalan,

$$\begin{cases} x_1+2x_2=10, \\ 3x_1+2x_2+x_3=23, \\ x_2+2x_3=13 \end{cases}$$

tenglamalar sitsemasini matritsaviy usulda yechaylik.

Buning uchun

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad C=\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}$$

matritsalarni kiritamiz va teskari matritsani topish uchun quyidagilarni bajaramiz:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+0+0-0-12-1=-9\neq 0.$$

A maxsusmas ekan, demak, unga teskari matritsa mavjud. Endi, A_{ij} algebraik to‘ldiruvchilarni hisoblaymiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=-6; \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-4; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=2; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-4.$$

Teskari matritsani hisoblaymiz:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\frac{1}{-9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Berilgan sistemaning yechimini (4.2.4) ko'rinishda yozamiz:

$$X=A^{-1}\cdot C=\begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bu yerdan, matritsalarning tenglik shartiga asosan, $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=5$ kelib chiqadi.

4.2.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi yechimining mavjudligi haqidagi Kroneker-Kopelli teoremasi

Faraz qilaylik, n noma'lumli m ta chiziqli algebraik tenglamalarning (4.2.1) sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistema koeffitsiyentlari, noma'lumlari va ozod hadlari bo'lgan o'ng tomomidan tuzilgan (4.2.2) matritsalardan tashqari sistema matritsasiga yana bitta $(n+1)$ – ustun qilib sistema o'ng tomonini yozish bilan kengaytirib, B matritsani hosil qilinadi va uni *sistemaning kengaytirilgan matritsasi* deb ataladi. Demak, sistemaning kengaytirilgan matritsasi

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} & c_2 \\ ------ & ------ & -- \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu o‘rinda quyidagi tushunchalarni eslatamiz: agar (4.2.1) sistema yechimga ega bo‘lsa, u birgalikda, aks holda birgalikda emas deb yuritiladi.

Agar sistema o‘ng tomonidagi barcha ozod hadlar nolga teng, ya’ni $C=0$ (nol matritsa) bo‘lsa, (4.2.1) sistenıa *bir jinsli* deb yuritiladi. Bunday bir jinsli sistema har doim birgalikdadir, ya’ni $X=0$ uning yechimi bo‘lishi ravshandir.

4.2.1-teorema(Kroneker-Kopelli). Chiziqli algebraik tenglamalarnig (4.2.1) sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning matritsasi *A* nmg rangi kengaytirilgan matritsasi *B* nmg rangiga teng bo‘lishi *(r(A)=r(B))* zarur va yetarlidir.

Isbot. Sistema bir jinsli bo‘lgan hol uchun isbot ravshandir,

chunki, bu holda *A* va *B* lar ekvivalent bo‘lib *r(A)=r(B)* aniqdir. Endi, sistema bir jinsli bo‘lmagan, ya’ni uning o‘ng tomonidagi ozod hadlardan aqalli bittasi noldan farqli bo‘lgan holni qaraymiz.

Zaruriyligi. (4.2.1) sistema birgalikda va $x'_j\ \left(j=\overline{1;n}\right)$ sonlar (ifodalar) sistemasi uning yechimi deylik. Bu yechimni sistemaning tenglamalariga qo‘yib, *m* ta

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j = c_i,\ \ i=\overline{1;m}$$

tengliklarga ega bo‘lamiz va kengaytirilgan *B* maricaning (4.2.1) sistemaning o‘ng tomonidan iborat bo‘lgan *(n+1)* – ustunining har bir elementi oldingi (*A* matrıtsaning) *n* ta ustunlari mos elementlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko'ramiz. Demak, A va B lar ekvivalent bo'lib, $r(A)=r(B)$ kelib chiqadi.

Yetarliligi. Faraz qilaylik, (4.2.1) sistema matritsasining rangi uning kengaytirilgan matritsasining rangiga teng, ya'ni $r(A)=r(B)=r$ bo'lsin.

A matritsaning noldan farqli r – tartibli minorini ajratib olamiz va uni *bazis minor* deb nomlaymiz. Uning ustunlariga (satrlariga) mos A matritsaning ustunlarini (satrlarini) *bazis ustun-vektorlar (satr-vektorlar)* deb nomlaymiz. Bazis satr-vektorlarga mos sistema tenglamalarini uning *bazis tenglamalari* deb, bazis ustun-vektorlarga mos noma'lumlarni *sistemaning bazis noma'lumlari* deb yuritiladi, ravshanki, ular r ta bo'ladi; qolgan noma'lumlar ($r<n$ bo'lganda) *ozod (erkin) noma'lumlar* deb, ozod noma'lumlar soni $S=n-r$ esa sistemaning *ozodlik (erkinlik) soni* deb ataladi.

Agar yuqorida olingan bazis minorga mos keluvchi sistema bazis tenglamalarini ajratib olib, ozod noma'lumlar nolga teng deb qabul qilsak, r noma'lumli r ta chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz va uning determinanti noldan farqli bo'lganligi uchun yagona yechimga ega bo'ladi (Buni 2-bobda ko'rgan edik). Sistemaning qolgan tenglamalari ham bazis minorga mos tenglamalariga chiziqli bog'liq bo'lganliklari sababli, bazis noma'lumlar yuqoridagicha topilganda va ozodlari nolga teng deb olinganini hisobga olsak, qanoatlanishini payqash qiyin emas. Bu teoremaning yetarli qismining isbotidir.

1-eslatma. Yuqoridagi 4.2.1-teorema (4.2.1) sistemaning birgalikda yoki birgalikda emasligi haqida bo'lib, uning yechimlari soni haqida hech narsa demaydi. Haqiqatdan ham, agar $r(A)=r(B)$ bo'lib, $S>0$, ya'ni ozod noma'lum mavjud bo'lsa, unga (yoki ularga) ixtiyoriy qiymatlar berish mumkin bo‘lib, bu holda (4.2.1) sistemaning yechimlari soni cheksiz ko‘p bo‘lishi; *S=0* bo‘lganda esa yechim yagona bo‘lishi ravshandir.

Yagona yechimga ega bo‘lgan sistema aniqlangan, bittadan ortiq yechimga ega bo‘lganda esa aniqlanmagan deb yuritiladi.

2-eslatma. (4.2.1) sistema birgalikda bo‘lganda ozod noma’lumlar mavjud (S>0) bo‘lsa, ularni nolga tenglab olingan sistema yechimini uning *bazis yechimi* deb yuritiladi.

4.2.3. Chiziqli algehraik tenglamalar sistemasini yechishda Jordan-Gauss usuli

Oldinroq, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda qo‘llaniladigan Kramer formulalarini va matritsalar usulini ko‘rdik. Bu usullarda tenglamalar va noma’lumlar soni ortgan sari hisoblash ishiarining hajmi juda tez ortib borishini ham payqagan bo‘lishimiz kerak. Bu yerda, amaliy jixatdan ancha qulay bo‘lgan usullardan biri bilan, ya’ni *Jordan-Gauss usuli* bllan tanishamiz. Bu usulni ba’zan *noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotib (chiqarib) borish usuli* deb ham yuritiladi.

Soddalik uchun uch noma’lumll uchta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}. \end{cases}$$

Bu sistema determinanti noldan farqli, ya’ni sistema yagona yechimga ega, undan tashqari, $a_{11} \neq 0$ deb faraz qilamiz ($a_{11}=0$ bo‘lsa, tenglamalarning o‘rnini almashtirish bilan bunga erishish mumkin) va uni *etakchi koeffitsiyent*, unga mos tenglamani esa *etakchi tenglama* deb nomlaymiz.

Sistemaning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo'lib, etakchi tenglamani

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \qquad (4.2.5)$$

ko'rinishga keltiramiz va x_1 ni *bazis noma'lum* deb hisoblaymiz. Bu yerda

$$a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \qquad (j = 2;3;4).$$

Olingan (4.2.5) tenglama yordamida sistemaning qolgan ikkala tenglamalaridagi x_1 qatnashgan hadlarni yo'qotamiz (masalan, (4.2.5) ni $-a_{21}$ ga ko'paytirib ikkinchi tenglamaga hadlab qo'shsak $a_{21}x_1$ had yo'qotiladi):

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{2n}^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{3n}^{(1)}. \end{cases} \qquad (4.2.6)$$

Bu yerda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}^{(1)} \cdot a_{i1} \qquad (i = 2;3, \qquad j = 2;3;4)$$

Endi, $a_{22}^{(1)} \neq 0$ deb faraz qilib (aks xolda tenglamalar o'rnini almashtirib bunga erishamiz), uni (4.2.6) sistema uchun etakchi koeffitsiyent hisoblab, (4.2.6) sistemaning birinchi tenglamasini unga bo'lib, x_2 ni bazis noma'lum deb hisoblab,

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)}$$

tenglamani olamiz. Bu yerda

$$a_{2j}^{(2)} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \qquad (j = 3;4)$$

olingan oxirgi tenglama yordamida (4.2.6) sistema 2-tenglamasidagi x_2 qatnashgan hadni yo'qotib

$$a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)}$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(2)} \cdot a_{i2}^{(1)} \qquad (i = 3, \quad j = 3;4)$$

Shunday qilib, quyidagi teng kuchli sistemalarni oldik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ \qquad a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ \qquad a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 = a_{14}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 = a_{24}^{(2)} \\ \qquad x_3 = a_{34}^{(3)} \end{cases}$$

Oxirgi sistemada $a_{34}^{(3)} = \dfrac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}$ va $a_{33}^{(2)}$ uni olish uchun etakchi koeffitsiyent, x_3 esa bazis noma'lum bo'lishi ravshandir.

Bu teng kuchli sistemalarni hosil qilish jarayoni Jordan-Gauss usulinmg *olg'a borish bosqichi* deb yuritiladi. Unda bitta, ya'ni x_3 noma'lummng qiymati aniq bo'lib qoldi. Qolgan noma'lumlarning qiymatlari ketma-ket

$$x_2 = a_{24}^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3, \qquad x_1 = a_{14}^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 - a_{13}^{(1)}x_3$$

formulalar bilan hisoblanadi va bu jarayon usulning *ortga qaytish bosqichi* deb yuritiladi.

Bu usulni umumiy holda (4.2.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga qo'llash jarayoni ham xuddi yuqoridagidek kechadi.

Bu o'rinda shuni ham aytamizki, (4.2.1) sistemaning birgalikda ekanligi haqidagi ma'lumot bo'lmagan taqdirda ham (uni tekshirmasdan ham) unga bu usulni qo'llash mumkin. Bu holda, uning yechimi yagona bo'lsa, Jordan-Gauss usulining olg'a borish jarayoni yakunida (4.2.1) sistemani

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad\qquad x_n = a_{n,n+1}^{(n)} \end{cases}$$

ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lib, uni *uchburchakli sistema* deb yuritiladi va mazkur holda sistemaning aniqlangan ekanligi ravshandir.

(4.2.1) sistemaning yechimi cheksiz ko‘p bo‘lganda esa, uni

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = a_{1,n+1}^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = a_{2,n+1}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \qquad\qquad x_k + \ldots + a_{kn}^{(k)}x_n = a_{k,n+1}^{(k)} \end{cases}$$

ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘ladi, bu yerda $1 \leq k \leq m$, $k < n$. Bunday sistemani *pog‘onali sistema* deb ataladi va bu holda sistema aniqlanmagan bo‘lishi ravshandir.

Agar (4.2.1) sistemaning yechimi mavjud bo‘lmasa, Jordan-Gauss usulinimg olg‘a borish jarayonining biror qadamida (Iteratsiyasida) ziddiyatli tenglama olinadi.

Yuqorida bayon qilingan usulning olg‘a borish jarayonini quyidagicha 1-jadvalga joylashtirish qulaydir.

Bu jadvaldagi oxirgi ustun qilingan hisoblar to‘g‘ri borayotganini nazorat qilib borish uchun kerak bo‘lib, unga joylashgan har bir satrdagi son shu satrdagi oldindagi ustunlarga joylashgan sonlar yig‘indisiga teng bo‘lishi kerak. Bu o‘rinda, boshlang‘ich Iteratsiyada bu ustunga joylashgan sonlar oldingi ustunlardagi sonlar yig‘indisi sifatida hisoblanadi, qolgan Iteratsiyalarda usuldagi hisob jarayoni bu ustunga ham qo‘llaniladi va so‘ngra, olingan son oldingi ustunlarda joylashgan sonlar yig'indisiga teng ekanligi tekshiriladi, agar hisobda xatoga yo'l qo'yilgan bo'lsa tenglik bajarilmaydi.

1-jadval.

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya	a_{11} a_{21} a_{31}	a_{12} a_{22} a_{32}	a_{13} a_{23} a_{33}	a_{14} a_{24} a_{34}	$\sum a_{1j} = a_{15}$ $\sum a_{2j} = a_{25}$ $\sum a_{3j} = a_{35}$
1-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(1)}$ $a_{22}^{(1)}$ $a_{32}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(1)}$ $a_{33}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(1)}$ $a_{34}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(1)}$ $a_{35}^{(1)}$
2-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(2)}$ 1	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(2)}$ $a_{33}^{(2)}$	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(2)}$ $a_{34}^{(2)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(2)}$ $a_{35}^{(2)}$
3-Iteratsiya	1	$a_{12}^{(1)}$ 1	$a_{13}^{(1)}$ $a_{23}^{(2)}$ 1	$a_{14}^{(1)}$ $a_{24}^{(2)}$ $a_{34}^{(3)}$	$a_{15}^{(1)}$ $a_{25}^{(2)}$ $a_{35}^{(3)}$

Misol.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$
sistema yechilsin.

Yechish. Jordan-Gauss usulini jadval ko'rinishida tatbiq etamiz (2-jadval).

2-jadval.

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya	1 2 -1	2 -3 1	-1 1 1	2 -1 4	4 -1 5
1-Iteratsiya	1	2 -7 3	-1 3	2 -5 6	1 -9 9
2-Iteratsiya	1	2 1	-1 -3/7 9/7	2 5/7 27/7	4 9/7 36/7
3-Iteratsiya	1	2 1	-1 -3/7 1	2 5/7 3	4 9/7 4

Olg‘a borish bosqichi yakunida uchburchakli sistemaga keldik.

Oxirgi Iteratsiyadan $x_3=3$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Qolgan noma’lumlarni ortga qaytish bosqichi bilan topamiz.

$x_2 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7}x_3 = \frac{5}{7} + \frac{3}{7} \cdot 3 = \frac{14}{7} = 2$, $x_1 = 2 - 2x_2 + x_3 = 2 - 2 \cdot 2 + 3 = 1$.

Demak, sistema yechimi (1;2;3) dan iborat ekan.

Yuqorida keltirilgan usulni biroz mukammallashtirib, ortga qaytish bosqichidan holis bo‘lishimiz mumkin. Buning uchun har bir Iteratsiyada (qadamda) etakchi tenglamadan keyingi tenglamalardagi yo‘qotilishi lozim bo‘lgan bazis noma’lumni undan oldingi tenglamalarda ham yo‘qotib borilsa bas. Bu yo‘l bilan yuqoridagi sistemani yechaylik (3-jadval yordamida).

3-jadval

Iteratsiya	x_1	x_2	x_3	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya	1 2 -1	2 -3 1	-1 1 1	2 -1 4	4 -1 5
1-Iteratsiya	1	2 -7 3	-1 3	2 -5 6	1 -9 9
2-Iteratsiya	1	1	-1 -3/7 9/7	2 5/7 27/7	10/7 9/7 36/7
3-Iteratsiya	1	1	1	1 2 3	2 3 4

Ya’ni, ortga qaytish bosqichi kerak bo‘lmay qoldi, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ ekanligi yaqqol ko‘rinib turibdi.

Jordan-Gauss usulini qo‘llashdagi Iteratsiyalarda (qadamlarda) tanlanadigan etakchi tenglama va Iteratsiya (qadam) nomerlarining mos tushishi shart emas. Har blr Iteratsiyada oldin tanlanmagan ixtiyoriy tenglanıani etakchi deb tanlab, navbatdagi bazis noma’lum sifatida oldmgi Iteratsiyalarda tanlanmagan va koeffitsiyenti noldan farqli bo‘lgan noma‘lumni tanlab olish mumkinligini aytamiz. Bundan foydalanib, nol elementlari ko‘proq bo‘lgan ustun (yoki satr) yordamida hisoblash ishlarini tezlashtirish mumkin. Shum ham aytamizki, jadval usulini qo‘llaganda bazis noma’lumlarini belgilab borish ustunini ham yozib borish foydali bo‘ladi.

Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \end{cases}$$

sistemani yechaylik (4-jadval).

Demak, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 1$.

4-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	X_3	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya		1 2 1	1 -1 -2	 1 -1	4 -6	6 2 -8
1-Iteratsiya	 x_3	1 2 3	1 -1 -3	 1 	4 -6	6 2 -6
2-Iteratsiya	x_2 x_3	1 3 6	 1 	 1	4 4 6	6 8 12
3-Iteratsiya	x_2 x_3 x_1	 1	 1 	 1	3 1 1	4 2 2

Uchrashi mumkin bo'lgan ba'zi-bir hollarni quyidagi misollar asosida tushintirishga harakat qilamiz.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (5-jadval).

5-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	O‘ng tomon	Nazo-rat ustuni
Boshlang‘ich Iteratsiya		1	1	0	0	1	3
		0	1	2	0	1	4
		0	1	1	-1	0	1
		1	3	3	-1	2	8
1-Iteratsiya		1	1	0	0	1	3
	x_1	0	1	2	0	1	4
		0	1	1	-1	0	1
		0	2	3	-1	1	5
2-Iteratsiya	x_1	1	1	0	0	1	3
		0	1	2	0	1	4
	x_4	0	-1	-1	1	0	-1
		0	1	2	0	1	4
3-Iteratsiya	x_1	1	0	-2	0	0	-1
	x_2	0	1	2	0	1	4
	x_4	0	0	1	1	1	3
		0	0	0	0	0	0

4-Iteratsiyani qilib bo‘lmaydi, chunki oxirgi satr elementlarining barchasi nollarga aylanib ketdi. Bu oxirgi tenglama qolganlarinmg chiziqli kombinatsiyasidan iborat ekanligini ko‘rsatadi. Demak, sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, yuqoridagi jarayon natijasida bu yechimlarni $x_1=2x_3$,

$x_2=1-2x_3$, $x_4=1-x_3$ ko‘rinishida bo‘lib, bu yerda x_3 ozod noma’lum ixtiyoriy qiymat olishi mumkin. Bu misolda oxirgi interaciya natijasida pog‘onali sistemaga keldik.

2-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (6-jadval).

6-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	x_4	O‘ng tomon	Nazorat ustuni
		1	3	-1	1	0	4
Boshlang‘ich Iteratsiya		1	-1	1	0	1	2
		0	1	1	-1	2	3
		1	3	-1	1	0	4
1-Iteratsiya	x_1	0	-4	2	-1	1	-2
		0	1	1	-1	2	3
	x_1	1	4	0	0	2	7
2-Iteratsiya		0	-5	1	0	-1	-5
	x_4	0	-1	-1	1	-2	-3
	x_1	1	4	0	0	2	7
3-Iteratsiya	x_3	0	-5	1	0	-1	-5
	x_4	0	-6	0	1	-3	-8

4-Iteratsiyani bajarib bo‘lmaydi, chunki bazis ustuni to‘lib qoldi. Demak, x_2–ozod noma’lum bo‘lib, yechim $x_1=2-4x_2$, $x_3=-1+5x_2$, $x_4=-3+6x_2$ dan iboratdir. Bu misolda ham pog‘onali sistemaga keldik.

3-misol.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

sistemani yeching.

Yechish (7-jadval).

3-Iteratsiyani bajarib bo'lmaydi, chunki oxirgi satrdagi koeffitsiyentlar barchasi 0 bo'lib, o'ng tomonda noldan farqli 6 soni turibdi (ya'ni 0=6 ziddiyatli tenglikka egamiz). Demak, sistema yechimga ega emas.

7-jadval

Iteratsiya	Bazis	x_1	x_2	x_3	O'ng tomon	Nazorat ustuni
Boshlang'ich Iteratsiya		1 -1 1	2 -2 2	-1 3 -4	0 2 3	2 2 2
1-Iteratsiya	x_1	1 0 0	2 0 0	-1 2 -3	0 2 3	2 4 0
2-Iteratsiya	x_1 x_3	1 0 0	2 0 0	0 1 0	1 1 6	4 2 6

4-bobga doir mashqlar

1. Amallarni bajaring:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

c) $4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matritsalar ko'paytmasini toping.

Javob: $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -2 & 11 \end{pmatrix}$

3. Matritsalarni transponirlang:

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$; *b)* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

4. Berilgan matritsaga teskari matritsani toping:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

Javob: *a)* $\begin{pmatrix} \frac{-1}{13} & \frac{5}{13} & \frac{5}{13} \\ \frac{3}{13} & \frac{-2}{13} & \frac{-2}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{4}{13} & \frac{-9}{13} \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

5. Matritsaning rangini toping:

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

6. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kroneker-Kapelli teoremasidan foydalanib tekshiring:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

7. Tenglamalar sistemasini Jordan-Gauss usulidan foydalanib yeching:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5, \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10; \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 14, \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -9, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

Javob: *a)* (1;5; 2), *b)* (1; 2; 3; -4)

Matritsa va chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. Matritsaga ta'rif bering. Matritsaning tuzilishi nimadan iborat?

2. Diagonal matritsaning ko'rinishini yozing.

3. Birlik matritsaning ko'rinishini yozing.

4. Matritsalarning tengligiga va teng emasligiga ta'rif bering.

5. Maxsus va maxsusmas matritsalarga ta'rif bering.

6. Berilgan matritsalarni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish qanday bajariladi?

7. Matritsalarni ko'paytirish amalini tushuntiring.

8. Teskari matritsa haqida tushuncha bering.

9. Kvadrat matritsa teskari matritsaga ega bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak? Teskari matritsa qanday topiladi?

10. Matritsaning rangi deganda nimani tushunasiz?

11. Matritsada elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?

12. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida yozishni ko'rsating.

13. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini matritsalar yordamida qanday yechiladi?

14. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqidagi Kroneker-Kapelli teoremasini ayting.

15. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Jordan-Gauss usulini tushuntirib bering.

16. Pog'onali va uchburchak sistemalar haqida tushuncha bering.

17. Matritsaning xos soni va xos vektori haqida tushuncha bering.

5-BOB. TEKISLIKDAGI BIRINCHI VA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR

Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lib, bu tekislikning koordinatalari berilgan iki o‘zgaruvchili

$$F(x;y)=0$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $M(x;y)$ nuqtalarining to‘plami qaralsa, u biror chiziqdan iborat bo‘ladi. Bunday holda yuqoridagi tenglamani shu *chiziqning tenglamasi* deb yuritiladi.

Bu bobda birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlarning tenglamalarini keltiramiz.

5.1. To‘g‘ri chiziqning tekislikdagi tenglamalari

Nuqta va to‘g‘ri chiziq planimetriyaning (tekislikdagi geometriyaning) boshlang‘ich tushunchalari bo‘lib, koordinatalar tekisligida nuqta o‘zining koordinatalari deb ataluvchi ikkita sonlarning juftligi bilan aniqlanishini 3-bobda ko‘rdik. Mazkur bandda to‘g‘ri chiziqni ikki o‘zgaruvchili chiziqli tenglama vositasida aniqlash mumkinligini keltiramiz.

5.1.1. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

Tekislikda xOy Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lib, unda Oy o‘qiga parallel (ya’ni Ox o‘qiga tik) bo‘lmagan ℓ to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. U holda ℓ to‘g‘ri chiziq Oy o‘qni biror (0; b) nuqtada kesib o‘tishi ravshandir. Bunda *b ni ℓ to‘g‘ri chiziqning Oy o‘qdan ajratgan kesmasi* deb yuritiladi. Endi ℓ to‘g‘ri chiziqning Ox o‘qi musbat yo‘nalishi bilan hosil qiluvchi va $[0; \pi)$ ga tegishli burchagini φ bilan belgilaylik. Qaralayotgan hol uchun $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ bo‘lib, bu burchak tangensining mavjudligini e’tiborga olgan holda $tg\varphi=k$ deb belgilaymiz va bu sonni ℓ *to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti* deb ataymiz. Albatta, to‘g‘ri chiziq uchun b va k sonlar berilgan bo‘lsa, uni koordinatalar tekisligida qurish mumkin.

Endi, $\varphi=0$ (ya’ni $k=0$) bo‘lgan holni qarasak, to‘g‘ri chiziq $(0; b)$ nuqta orqali Ox o‘qiga parallel bo‘lib o‘tishi va uning ixtiyoriy nuqtasining ordinatasi b ga tengligi ravshandir. Demak, bunday Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasini

$$y = b$$

ko‘rinishda yozish mumkin ekan.

To‘g‘ri chiziq Ox o‘qiga ham, Oy o‘qiga ham parallel bo‘lmasin, ya’ni $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ya’ni o‘tkir burchak bo‘lgan holni qarasak, $M(x;y)$ to‘g‘ri chiziqning $(0; b)$ dan farqli nuqtasi bo‘lganda, 5.1.1-rasmdan ko‘rinadiki,

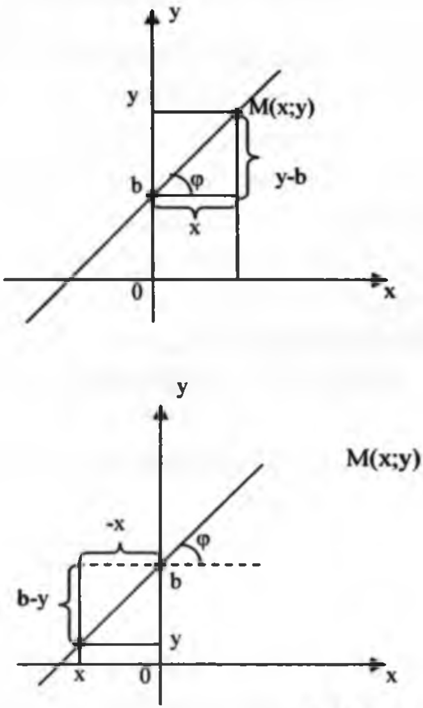
$$tg\varphi = \begin{cases} \dfrac{y-b}{x}, x > 0, \\ \dfrac{b-y}{-x}, x < 0 \end{cases}$$

kelib chiqadi. Bundan, $x \neq 0$ deb faraz qilib,

$$y = kx + b \qquad (5.1.1)$$

tenglamaga kelamiz. Agar bu tenglamada $x=0$ desak, $y=b$ ni, ya’ni $(0; b)$ nuqtani olamiz. Demak, (5.1.1) tenglama ℓ to‘g‘ri chiziqning barcha nuqtalari uchun o‘rinli bo‘lar ekan

($x \in R$). Uni *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi* deb ataladi.



5.1.1-rasm.

Agar (5.1.1) da $k=0$ $(\varphi=0)$ deyilsa, $y=b$ bo'lib, Ox o'qqa parallel to'g'ri chiziq tenglamasiga ega bo'lamiz.

Olingan (5.1.1) tenglama $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ - ya'ni o'tmas burchak bo'lgan hol uchun ham to'g'ri ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Endi, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ (to'g'ri chiziq Ox o'qqa tik) bo'gan holni qaraylik. Bu hol uchun burchak koeffitsiyent k mavjud emasligi ravshandir. Ammo, bunday to'g'ri chiziq Ox

o‘qidan biror a kesma ajratadi va unda yotgan barcha nuqtalarning abssissasi shu a songa teng, ya’ni

$$x = a \qquad (5.1.2)$$

bo‘ladi. Bu Ox o‘qqa tik (ya’ni Oy o‘qqa parallel) to‘g‘ri chiziq tenglamasidir. Demak, Ox o‘qqa tik to‘g‘ri chiziq tenglamasini burchak koeffitsiyentli ko‘rinishda ifodalab bo‘lmas ekan.

5.1.2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi

Yuqorida koordinatalar tekisligida yotuvchi to‘g‘ri chiziqning tenglamasi (5.1.1) yoki (5.1.2) shaklda bo‘lishini ko‘rdik. U x va y o‘zgaruvchi koordinatalarga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglamadir.

Ushbu,

$$Ax+By+C= 0 \qquad (5.1.3)$$

x va y o‘zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali (chiziqli) tenglama $A^2+B^2>0$ shart bajarilganda koordinatalar tekisligida yotuvchi birorta to‘g‘ri chiziqning tenglamasi ekanligini ko‘rsatish mumkin. Bu yerda A va B lar tenglama koeffitsiyentlari C esa ozod hadi deyilib, ular berilgan sonlardir.

(5.1.3) tenglamada A yoki B koeffitsiyentlardan aqalli bittasi nolga teng emas deb faraz qilaylik (aks holda biz tenglama emas $C=0$ sonli tenglikka ega bo‘lardik).

Masalan, $B=0$ va $A\neq 0$ bo‘lsin, bu holda (5.1.3) tenglama

$$x = -\frac{C}{A}$$

tenglamaga ekvivalent bo‘ladi. Bu Oy o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasidir. Agar $B\neq 0$ bo‘lsa, (5.1.3)

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (5.1.4)$$

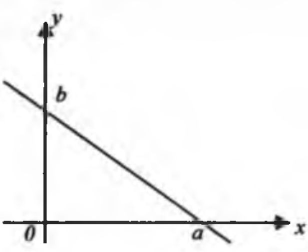
tenglamaga ekvivalent bo‘ladi. (5.1.4) da $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ deb belgilansa, undan to‘g‘ri chiziqning (5.1.1) burchak koeffitsiyentli tenglamasini olamiz. Demak, (5.1.3) tenglama $A^2+B^2>0$ bo‘lganda, to‘g‘ri chiziqni ifodalar ekan. Shu sababli, (5.1.3) ni *to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi* deb ataladi.

5.1.3. To‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha tenglamasi

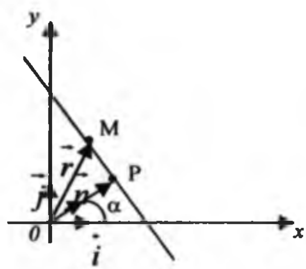
(5.1.3) da $A\cdot B\cdot C\neq 0$ bo‘lsa, uni $-\frac{A}{C}x-\frac{B}{C}y=1$ ko‘rinishga keltirish osondir. $-\frac{C}{A}=a$ va $-\frac{C}{B}=b$ belgilashlarni kiritib, oxirgini

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (5.1.5)$$

ko‘rinishga keltiramiz. (5.1.5) ni *to‘g‘ri chiziqning kesmalar bo‘yicha (kesmalardagi) tenglamasi* deyiladi. Undagi a va b lar to‘g‘ri chiziqning mos ravishda Ox va Oy o‘qlardan ajratgan kesmalari ekanligiga ishonch hosil qilish osondir (5.1.2-rasm).



5.1.2-rasm.



5.1.3-rasm.

5.1.4. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi

Koordinatalar boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziqlar uchun ko'pincha (5.1.3.) tenglamaning maxsus shaklidan foydalaniladi. ℓ koordinatalar boshidan o'tmaydigan to'g'ri chiziq bo'lsin. Koordinatalar boshidan ℓ to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning uzunligi p ga teng deylik, ya'ni $|\overrightarrow{Op}| = p$, bunda P –perpendikulyarning asosi. $\vec{n}$ $\overrightarrow{OP}$ ning birlik vektori bo'lsin. Bu holda $\overrightarrow{OP} = p\vec{n}$ deb yozish mumkin. $\overrightarrow{OP}$ vektor bilan $\vec{i}$ vektor o'zaro α burchak hosil qilsin (5.1.3-rasm). $\overrightarrow{OP}$ ni ℓ chiziqning normali deyiladi. Agar ixtiyoriy $M(x,y) \in \ell$ nuqtani olsak, u vaqtda, $\overline{OM} = \vec{r}$ radius-vektorning koordinatalari (x, y) ,ya'ni

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

5.1.3-rasmdan $\overrightarrow{PM} = \vec{r} - \overrightarrow{OP}$ bo'lib, u $\vec{n}$ vektorga ortogonal bo'lgani uchun ushbuni yoza olamiz:

$$(\vec{r} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}.$$

Agar $\vec{n}$ birlik vektor uchun

$$\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\sin\alpha$$

ekanini e'tiborga olsak, yuqoridagi tenglamadan, $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = p$ bo'lganligi sababli,

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad (5.1.6)$$

tenglamaga ega bo'lamiz. (5.1.6) ℓ *to'g'ri chiziqning normal tenglamasi* deyiladi. Bu yerda, agar ℓ to'g'ri chiziq koordinatalar boshi orqali o'tsa $p=0$ bo'lib, $\vec{n}$ to'g'ri chiziqqa tik bo'lgan birlik vektor ekanligi ravshandir. Demak, (5.1.6) tenglamada $p \geq 0$ hamda o'zgaruvchilar koeffitsiyentlari kvadratlarining yig'indisi birga tengdir. Endi, to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglama ko'rinishiga keltiraylik. Buning uchun $A^2+B^2>0$ shart bajarilganda (5.1.3) tenglamaning har ikkala tomonini $\lambda\neq 0$ ga ko'paytirib,

$$(\lambda A)x+(\lambda B)y+\lambda C=0$$

da λ ni yuqorida aytilgandek tanlaymiz:

$$(\lambda A)^2+(\lambda B)^2=1,\ \ \lambda C=-p\quad (p\geq 0).$$

Bundan

$$\lambda=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (5.1.7)$$

va $p=-\lambda C\geq 0$ bo'lishi uchun λ ning ishorasini C ning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlash kifoyadir. λ ning topilgan qiymatini oxirgi tenglamaga qo'yib, uni (5.1.6) ko'rinishga keltiramiz. (5.1.7) formula bilan aniqlangan λ ni *normallovchi ko'paytuvchi* deyiladi. Yuqoridagi mulohazalardan to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini normal tenglamaga keltirish uchun umumiy tenglamaning ikkala tomonini normallovchi ko'paytuvchiga ko'paytirish kifoya degan xulosa kelib chiqadi:

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0 \qquad (5.1.8)$$

Eslatma. Agar to'g'ri chiziqning normal tenglamasidagi x va y o'zgaruvchilarning koeffitsiyentlari to'g'ri chiziqqa koordinatalar boshidan tushirilgan (yoki o'tkazilgan) perpendikulyar birlik vektorining yo'naltiruvchi kosinuslari ekanligini eslasak, $\vec{N}(A;B)$ bilan $\vec{n}(\lambda A;\lambda B)$ kollinear ekanligidan to'g'ri chiziq umumiy tenglamasidagi koeffitsiyentlaridan tuzilgan $\vec{N}(A;B)$ vektor shu to'g'ri chiziqqa perpendikulyar ekanligi kelib chiqadi. Shu sababli, $\vec{N}(A;B)$ ni ham *to'g'ri chiziqning normali* deb yuritiladi.

5.1.5. To‘g‘ri chiziqlar dastasi

Tekislikning berilgan nuqtasidan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plami to‘g‘ri chiziqlar dastasi, berilgan nuqta esa uning markazi deyiladi.

Agar to‘g‘ri chiziqlar dastasining markazi $M_0(x_0;y_0)$ dan iborat bo‘lsa (5.1.4-rasm), uning tenglamasini

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \qquad (5.1.9)$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu yerda $A^2+B^2>0$ deb faraz qilinadi.

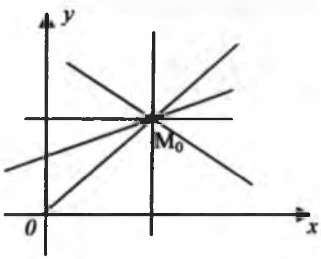
Haqiqatdan ham, agar dastaga tegishli $Ax+By+C=0$ to‘g‘ri chiziq $M_0(x_0;y_0)$ nuqta orqali o‘tishini hisobga olsak, $C=-Ax_0-By_0$ bo‘lib, (5.1.9) tenglamani olamiz.

Agar (5.1.9) da $B\neq 0$ deb faraz qilinsa, dasta tenglamasini

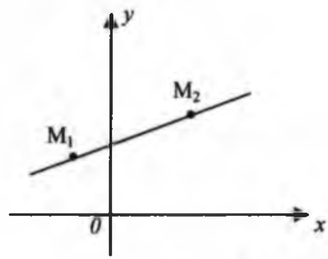
$$y-y_0=k(x-x_0)$$

ko‘rinishga keltirish mumkinligi ravshandir. Oxirgi tenglama vositasida yozilgan dastada $x=x_0$ to‘g‘ri chiziqning etishmasligini aytamiz.

Agar $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan berilgan k yo‘nalish bo‘yicha o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzish talab qilingan bo‘lsa, yuqoridagi tenglamani yozish kifoyadir.



5.1.4-rasm.



5.1.5- rasm.

5.1.6. Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Agar $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ular orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzish talab qilingan bo'lsa, ular ustma-ust tushmagan holda bu masala yagona yechimga egadir (5.1.5-rasm).

$x_1 = x_2$ bo'lgan holda talab qilingan tenglama $x = x_1$, $y_1 = y_2$ bo'lganda esa $y = y_1$ bo'lishi ravshandir. Endi, $x_1 \neq x_2$ va $y_1 \neq y_2$ bo'lgan holni qarasak, markazi M_1 nuqtada bo'lgan

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

dasta to'g'ri chiziqlaridan M_2 orqali o'tuvchisini ajratsak,

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1) \Rightarrow k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ni olamiz. Buni yuqoridagi tenglamaga qo'yib, oddiy shakl o'zgartirish bajarish natijasida

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

ga ega bo'lamiz. Bu *ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi*dir.

5.1.7. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar mos ravishda quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo'lsin:

$$(\ell_1): A_1x+B_1y+C_1=0 \quad va \quad (\ell_2): A_2x+B_2y+C_2=0$$

U vaqtda, $\vec{n}_1=\{A_1, B_1\}$ ℓ_1 ga, $\vec{n}_2=\{A_2, B_2\}$ esa ℓ_2 ga normal vektor bo'ladi.

Agar $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ o'zaro kollinear bo'lmasa, $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ orasidagi φ burchak ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar o'zaro tashkil qilgan burchaklardan biriga teng bo'ladi. Agar ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, ular orasidagi burchak nolga teng deb qabul qilinadi. Endi, umumiy holda φ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak bo'lsa, uni topish uchun $\vec{n}_1$ va $\vec{n}_2$ larning skalyar ko'paytmasidan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \qquad (5.1.10)$$

Agar $B_1 \neq 0$, $B_2 \neq 0$ bo'lsa, olingan (5.1.10) formulani

$$\cos\varphi = \frac{\left|\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2}{B_2} + 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{A_1^2}{B_1^2}\right) + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{A_2^2}{B_2^2}\right) + 1}}$$

ko'rinishga keltirib, to'g'ri chiziqlar burchak koeffitsiyentlari uchun

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

ifodalardan foydalansak,

$$\cos\varphi = \frac{|k_1 \cdot k_2 + 1|}{\sqrt{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)}}$$

ni olamiz. Sodda hisoblashlar yordamida quyidagi

$$tg\varphi = \left|\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$$

formulani hosil qilish mumkin.

Endi, ikki to'g'ri chiziqning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini ko'raylik. Agar $A_1x+B_1y+C_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2=0$ lar berilgan ikki to'g'ri chiziqning tenglamalari bo‘lib, ular perpendikulyar bo‘lsa, $\vec{n}_1=\{A_1;B_1\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2\}$ normalarning ortogonalligidan

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \qquad (5.1.11)$$

yoki ($B_1\neq 0$, $B_2\neq 0$ deb faraz qilib) burchak koeffitsiyentlar orqali

$$k_1 k_2+1=0 \qquad (5.1.12)$$

ni olamiz. (5.1.11) yoki (5.1.12) *munosabat to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartidan iboratdir.*

Ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti vektorlarning kollinearlik shartidan kelib chiqadi. Agar $\vec{n}_1=\lambda\vec{n}_2$ yoki $\{A_1,B_1\}=\{\lambda A_2;\ \lambda B_2\}$ bo‘lsa, undan

$$A_1B_2-A_2B_1=0\ . \qquad (5.1.13)$$

Buni $B_1\neq 0$, $B_2\neq 0$ bo‘lganda burchak koeffitsiyentlar orqali

$$k_1=k_2 \qquad (5.1.14)$$

ko‘rimshda ham yozish mumkin.

(5.1.13) yoki (5.1.14) *to‘g‘ri chiziqlarning parallellik shartidir.*

5.1.8. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

Koordinatalar tekisligida berilgan $M_1(x_1,y_1)$ nuqtadan berilgan ℓ to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish talab qilingan bo‘lsin. ℓ to‘g‘ri chiziq

$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ $(p\geq 0)$ normal tenglamaga ega deb faraz qilaylik. M_1 nuqta va ℓ to‘g‘ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashishini quyidagicha izohlaymiz (5.1.6-rasm):

$$M_0\in\ell,\ \overline{M_0M_1}\perp\ell,\ \vec{n}\perp\ell,\ \vec{n}(\cos\alpha;\sin\alpha),\ \vec{d}=\overline{M_0M_1}\ .$$

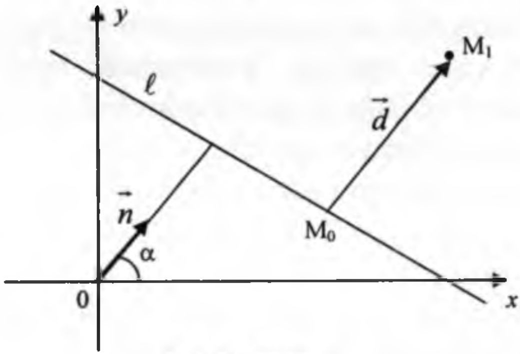
Demak, agar $M_0(x_0;y_0)$ desak, $x_0\cos\alpha+y_0\sin\alpha-p=0$; $\vec{d}(x_1-x_0\,;y_1-y_0)$;

$$\vec{d}\parallel\vec{n} \Rightarrow \delta = \left|\vec{d}\right| = \left|\vec{d}\cdot\vec{n}\right| = \left|(x_1 - x_0)\cos\alpha + (y_1 - y_0)\sin\alpha\right| =$$

$$= \left|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - (x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha)\right| = \left|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p\right|.$$

$$\delta = \left|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p\right| \qquad (5.1.15)$$

kelib chiqadi. (5.1.15) berilgan $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan *$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ to'g'ri chiziqqacha masofa formulasi*dir.



5.1.6- rasm.

Yuqorida normallovchi ko'paytuvchi yordamida to'g'ri (5.1.3) chiziqning umumiy tenglamasini normal (5.1.8) ko'rinishga keltirgan edik. Demak, bu hol uchun (5.1.15) ni

$$\delta = \frac{\left|Ax_1 + By_1 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad (5.1.16)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

5.2. Qutb koordinatalari sistemasi

Tekislikda boshi biror O nuqtada bo'lgan ℓ nurni olamiz. Tekislikda olingan ixtiyoriy M nuqtani O bilan tutashtirib, $\overline{OM}$ vektorni hosil qilaylik va

$$\rho = \left|\overline{OM}\right|$$

deb belgilaylik. $\overline{OM}$ vektor bilan ℓ nur (yo'naltirilgan nur) orasidagi burchakni φ deylik (5.2.1-rasm).

Shu yo'sinda olingan ρ va φ sonlar M nuqtaning *qutb koordinatalari* deyilib, bu holda, *tekislikda qutb koordinatalari sistemasi kiritilgan, O nuqta qutb boshi ℓ nur qutb o'qi, ρ qutb radiusi, φ qutb burchagi* deb yuritlladi. Xuddi shunmgdek, M nuqtaning qutb koordinatalari ρ va φ berilgan bo'lsa, $M(\rho;\varphi)$ ko'rinishda yozilib, uni qutb koordinatalari tekisligida qurish mumkinligi ravshandir. Kezi kelganda shuni ham aytamizki, qutb boshi O nuqta uchun $\rho=0$ bo'lib, φ ixtiyoriy qiymat qabul qilishi mumkin, aniqlik uchun ko'pincha $\varphi=0$ deb olinadi. Undan tashqari, qutb radiuslari teng qutb burchaklari esa bir-biridan 2π ga karrali (radianlarda hisoblanganda) burchakka farq qiluvchi nuqtalar ustma-ust tushishini, ya'ni aslida bitta nuqta ekanligini ham aytamiz. Haqiqatdan ham, agar $M(\rho,\varphi)$ bilan aniqlangan nuqtani olinsa, xuddi shu nuqta $(\rho,\varphi+2k\pi)$, $k\in Z$ koordinatalar bilan ham aniqlanadi. Bu holat, hatto, ko'p tekshirishiarda qulaylikka ham olib keladi. Bu tekislikda qutb sistemasining Dekart sistemasiga qaraganda kengroq imkoniyatga egaligini ko'rsatadi.

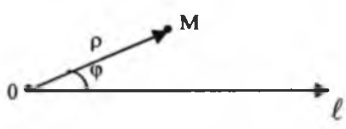
Agar tekislikda koordinatalar boshi qutb bilan, abssissalar o'qining musbat qismi esa qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan Dekart koordmatalar sistemasi kiritilsa (5.2.2-rasm), u vaqtda, M nuqtaning (x,y)- Dekart va (ρ,φ)-qutb koordinatalari quyidagi formulalar bilan bog'langandir:

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi.$$

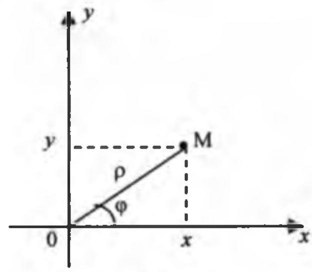
O'z navbatida, ρ va φ lar x va y orqali, $|x|+|y|>0,\ 0\le\varphi<2\pi$ bo'lganda bir qiymatli topiladi:

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2};\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\varphi=\begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x>0, y>0;\\ \pi+arctg\dfrac{y}{x}, & x\cdot y\neq 0,\ x<0;\\ 2\pi+arctg\dfrac{y}{x}, & x\cdot y<0,\ x>0;\\ 0, & x\cdot y=0,\ x>0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & x\cdot y=0,\ y>0;\\ \pi, & x\cdot y=0,\ x<0;\\ \dfrac{3\pi}{2}, & x\cdot y=0,\ y<0. \end{cases}$$



5.2.1- rasm.



5.2.2- rasm.

5.3. Ikkinchi tartibli chiziqlar

5.3.1-ta'rif. *Chiziq ikki o'zgaruvchili n-darajali algebraik tenglama vositasida aniqlangan bo'lsa, uni n-tartibli deyiladi.*

Yuqorida ko'rilgan to'g'ri chiziq tenglamasi birinchi darajali bo'lganligi sababli, keltirilgan ta'rifga ko'ra u birinchl tartibli chiziq ekan.

Bu bandda ikkinchi tartibli chiziqlar to'g'risida fikr yuritamiz.

Tekislikda ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (5.3.1)$$

ko'rimshda yozish mumkm. Bunda A,B,C,D,E,F o'zgarmas koeffitsiyentlar bo'lib; A,B,C lardan aqalli bittasi nolan farqli deb faraz qilamiz (aks holda birinchi tartibli chiziqga ega bo'lamiz).

5.3.1. Aylana

5.3.2–ta'rif. *Koordinatalar tekisligida berilgan $C(a;b)$ nuqtadan berilgan $R>0$ masofada joylashgan nuqtalar to'plami markazi $C(a;b)$ nuqtada bo'lgan R radiusli aylana deyiladi.*

Aylana tekislikda o'z markazining koordinatalari va radiusi bilan bir qiymatli aniqlanadi. Agar $M(x;y)$ markazi $C(a;b)$ nuqtada radiusi R ga teng bo'lgan aylananing nuqtasi bo'lsa(5.3.1$_a$-rasm), uning koordinatalari

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (5.3.2)$$

tenglamani qanoatlantirishini keltirib chiqarish qiymin emas.

Endi, (5.3.2) da shakl almashtirishlar qilib, uni

$$x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$$

ko'rinishga keltiramiz.

Agar ushbu

$$-2a=2D, \ \ -2b=2E, \ a^2+b^2-R^2=F$$

belgilashlarni kiritsak, u vaqtda, aylananing tenglamasi

$$x^2+y^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (5.3.3)$$

ko‘rinishga keladi. Bundan aylana ikkinchi tartibli chiziq ekani kelib chiqadi, chunki oxirgi tenglama (5.3.1) bilan $A=1$, $B=0$, $C=1$ bo‘lganda ustma-ust tushadi. Demak, (5.3.1) tenglama aylanani ifoda etish uchun $A=C\neq 0$, $B=0$ bo‘lishi zarurdir.

Agar aylana markazi koordinatalar boshlda bo‘lsa, u holda $a=b=0$ bo‘lib, (5.3.2) tenglama

$$x^2+y^2=R^2$$

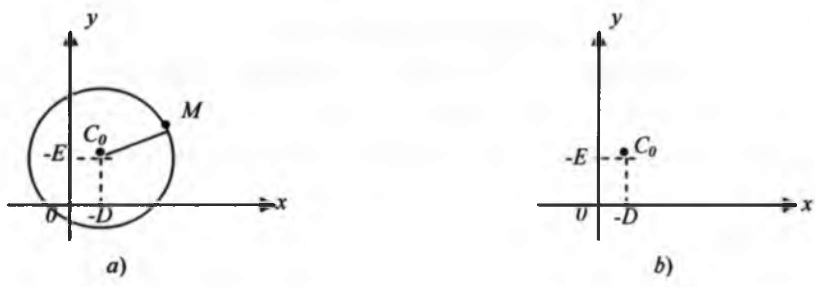
ko‘rinishni oladi.

Endi, (5.3.3) tenglama berilgan bo‘lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda, elementar shakl almashtirishlar qilib, uni

$$(x+D)^2+(y+E)^2=D^2+E^2-F$$

ko‘rinishga keltirish mumkin bo‘lib, bu yerda uch hol mavjudligi yaqqol ko‘rinib turibdi:

1) $D^2+E^2-F>0$ bo‘lsa, $R^2=D^2+E^2-F$ belgilash bilan markazi $(-D;-E)$ nuqtada bo‘lgan R radiusli aylanaga ega bo‘lamiz;
2) $D^2+E^2-F=0$ bo‘lganda, oxirgi tenglamani tekislikning faqat bitta $(-D;-E)$ nuqtasi qanoatlantiradi, ya’ni bitta nuqtaga ega bo‘lamiz (5.3.1$_b$-rasm);
3) $D^2+E^2-F<0$ bo‘lsa, oxirgi tenglamani qanoatlantiruvchi tekislikning birorta ham nuqtasi mavjud bo‘lmaydi. Bu holda mavhum aylanaga egamiz deyiladi.

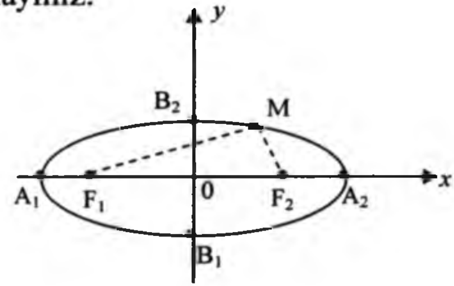


5.3.1- rasm.

5.3.2. Ellips

5.3.3-ta'rif. *Ellips deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi berilgan o'zgarmas songa teng bo'lib, bu berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi talab qilinadi.*

Ellips fokuslarini F_1 va F_2 bilan belgilaymiz. Ellipsning sodda tenglamasini olish maqsadida Dekart koordinatalar sistemasini Ox o'q fokuslardan o'tadigan, Oy o'q esa $|F_1F_2|$ kesmani teng ikkiga bo'ladigan qilib kiritamiz (5.3.2-rasm). Fokuslar orasidagi masofani 2c orqali belgilaymiz. U holda, F_1 va F_2 nuqtalarnimg koordinatalari mos ravishda $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ bo'ladi. Ta'rifda aytilgan berilgan o'zgarmas sonni $2a$ bilan belgilaymiz.



5.3.2- rasm.

$M(x;y)$–ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, undan fokuslarigacha bo'lgan $r_1 = d(F_1;M)$, $r_2 = d(F_2;M)$ masofalarni fokal radiuslari deb atalib, ta'rifga ko'ra:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Bunga

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

ifodalarni qo'yib,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu ellipsning yuqoridagidek qilib kiritilgan Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir. Bu tenglamani soddalashtirish uchun quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\cdot\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx \Rightarrow a^2(x-c)^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2.$$

Bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

F_1MF_2 uchburchakda $MF_1+MF_2>F_1F_2$, ya'ni $2a>2c>0$ yoki $a^2-c^2>0$. Shuning uchun,

$$a^2-c^2=b^2$$

deb belgilab, oxirgi tenglamani

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

ko'rinishda yozish mumkin yoki

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (5.3.4)$$

(5.3.4) *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Ellips haqidagi ba'zi bir mulohazalarni keltiramiz.

1) Agar ellipsning fokuslari deb ataluvchi F_1 va F_2 nuqtalar ustma-ust tushib qolsa, u holda $c=0$, $a^2=b^2$ bo'lib, (5.3.4) tenglama

$$x^2+y^2=a^2$$

ko'rinishga keladi. Bu bizga tanish markazi koordinatalar boshida bo'lgan aylana tenglamasidir. Demak, aylana ellipsning xususiy holidir.

2) (5.3.4) ellips Ox o'q bilan ikkita $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ nuqtalarda, Oy o'q bilan ham ikkita $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$

nuqtalarda kesishadi (5.3.2-rasm). A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalar *ellipsning uchlari* deb ataladi.

$|A_1A_2|=2a$; $|B_1B_2|2b$, $a>b$ ekanligi ravshandir. Shu sababli $|A_1A_2|$ kesmani *ellipsning katta o'qi*, $|B_1B_2|$ kesmani esa *kichik o'qi* deyiladi. Demak, a va b sonlar *ellipsning yarim o'qlari*dir.

3) Fokuslari orasidagi masofaning katta o'qi uzunligiga nisbati *ellipsning ekssentrisiteti* deb ataladi va ε harfi bilan belgilanadi. Ta'rifga ko'ra

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

bundan $0 \leq c < a$ ga asosan ellips ekssentrisiteti uchun

$$0 \leq \varepsilon < 1$$

tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

Ekssentrisitet ellipsning cho'ziqlik darajasini tavsiflaydi. U qanchalik birga yaqin bo'lsa, ellips shunchalik cho'ziq bo'ladi. $\varepsilon=0$ bo'lganda fokuslar ustma-ust tushadi va yarim o'qlar teng bo'lib, ellips aylanaga o'tadi.

4) Elippsning kanonik tenglamasidan uning nuqtalari Ox o'qqa nisbatan ham Oy o'qqa nisbatan ham simmetrik joylashganligi, shuningdek, koordinatalar boshiga nisbatan ham markaziy simmetriklik hossasiga ega ekanligi yaqqol ko'rinib turibdi. Demak, ellips ikkita simmetriya o'qlariga (ular katta va kichik o'qlaridan iborat) va bitta simmetriya markaziga ega ekan. Ellipsning simmetriya markazini uning *markazi* deb ataladi. Demak, *ellips markazli chiziqlar turkumiga tegishli*dir.

5) (5.3.4) ellipsning kanonik tenglamasidan uning ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasi uchun $|x| \leq a \wedge |y| \leq b$, ya'ni ellips tomonlari $2a$ va $2b$ hamda koordinata o'qlariga simmetrik bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichiga joylashgan ekanligi kelib

chiqadi. Shuningdek, (5.3.4) ellipsning koordinatalar tekisligining birinchi choragiga tegishli qismi uchun

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \le x \le a$$

ni yoza olamiz. Bundan $x = 0 \Rightarrow y = b$ bo‘lib, x o‘zgaruvchining qiymati 0 dan a gacha o‘sib borganda y o‘zgaruvchining qiymati b dan 0 gacha kamayib borishini ko‘rish mumkin. Demak, (5.3.4) ellipsning birinchi chorakdagi yoyining nuqtasi $B_2(0;b)$ nuqtadan $A_2(a;0)$ nuqtaga qarab pastlab boradi (5.3.2-rasm). (5.3.4) ellipsning qolgan choraklaridagi qismlari uchun uning simmetriklik xossasi asosida xulosa chiqarish osondir.

6) Ellipsning fokal radiuslari uchun $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$ o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatish qiyin emas.

5.3.3. Giperbola

5.3.4–ta’rif. *Giperbola deb, tekislikning shunday nuqtalari to‘plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati berilgan o‘zgarmas songa teng bo‘ladi.*

Ta’rifda aytilgan o‘zgarmasni *2a* deb, fokuslar orasidagi masofani *2c* deb belgilanadi. Shu bilan birga $2c>2a$ deb hisoblanadi. Giperbolaning sodda tenglamasini keltirib chiqarish maqsadida Dekart koordinatalar sistemsini ellips tenglamasini keltirib chiqargandagidek tanlaymiz (5.3.3-rasm). $M(x,y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsa, uning fokal radiuslar deb ataluvchi, $r_1=|F_1M|$ va $r_2=|F_2M|$ lar uchun

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\ .$$

U holda, giperbola ta'rifi bo'yicha ushbu tenglamani yozish mumkin:

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

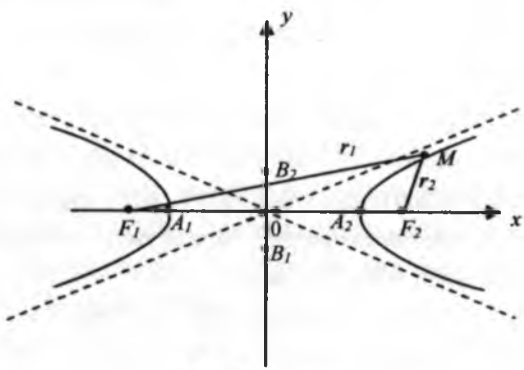
yoki

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Ellips kanomk tenglamasini keltirib chiqarishda qilingan shakl almashtirishlarni bu yerda ham bajarib, giperbolanmg quyidagi *kanonik tenglamasi*ni olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5.3.5)$$

Bu tenglamada $b^2=c^2-a^2$.



5.3.3-rasm.

Giperbola haqida quyidagi mulohazalarni keltiramiz.

1) Giperbolanmg (5.3.5) kanomk tenglamasidan $|x| \geq a$ bo'lishl kerakligi yaqqol ko'rimb turibdi. Demak $(-a;a)$ oralikda giperbolaning nuqtasi yo'qdir. Giperbola Ox o'q bilan $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ nuqtalarda kesishadi. Bu nuqtalar giperbolaning uchlari (5.3.3-rasm), $|A_1A_2|$ kesmani esa

giperbolaning haqiqiy o'qi deb ataladi. Giperbola ordinatalar o'qi bilan kesishmaydi, shu sababli uchlari $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ nuqtalarda bo'lgan $|B_1B_2|$ kesmani *giperbolaning mavhum o'qi* deb ataladi. a va b sonlar mos ravishda giperbolaning haqiqiy va mavhum yarim o'qlaridir.

2) (5.3.5) giperbola tarmoqlari ushbu

$$y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x$$

to'g'ri chiziqlarga cheksiz yaqinlashib borishi sababli ular *giperbolaning asimptotalari* deb yuritiladi (5.3.4-rasmga qarang).

Haqiqatdan ham giperbola (5.3.5) tenglamasini y ga nisbatan yechsak,

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},\ |x| \geq a$$

ni olamiz. Aniqlik uchun giperbolaning koordinatalar tekisligining I choragiga tegishli qismini olib, uning ordinatasi bilan $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziq ordinatasi orasidagi ayirmani topsak,

$$\delta(x) = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right),\ x \geq a$$

yoki oddiy shakl o'zgartirishlardan so'ng

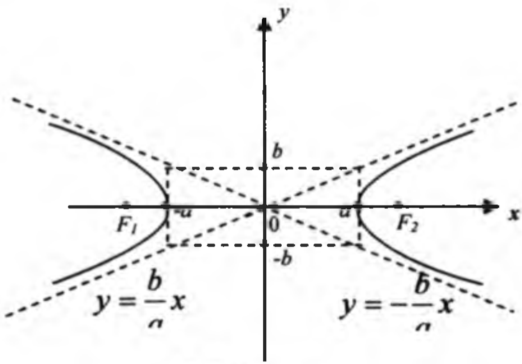
$$\delta(x) = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ga ega bo'lamiz. Bu ifodadan x cheksiz kattalashlb borganda $\delta(x)$ nolga yaqinlashib borishi yaqqol ko'rinib turibdi, ya'ni giperbolaning koordinatalar tekisligi I choragida yotgan tarmog'i $y = \frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borar ekan.

Umuman olganda giperbola ikkita $y=\pm\frac{b}{a}x$ asimptotalarga ega bo‘lib, ularni koordinatalar tekisligida qurish uchun giperbolaning haqiqiy uchlari bo‘lgan

$A_1(-a;0)$ va $A_2(a;0)$ nuqtalar orqali Oy o‘qiga parallellar hamda mavhum o‘qining uchlari bo‘lgan $B_1(-b;0)$ va $B_2(b;0)$ nuqtalar orqali Ox o‘qiga parallellar o‘tkazsak, ularning kesishishi natijasida hosil bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak *asimptotalar to‘rtburchagi* deb atalib, uning diagonallari giperbola asimptotalarida yotishidan foydalanish maqsadga muvofiqdir (5.3.4-rasm).

Agar *a=b bo‘lsa, giperbola teng tomonli* deb ataladi va uning kanonik tenglamasi $x^2-y^2=a^2$ ko‘rinishda bo‘lib asimptotalari $y=\pm x$ dir.



5.3.4- rasm.

3) Fokuslari orasidagi masofaning haqiqiy o‘qi uzunligiga nisbati *giperbolaning ekssentrisiteti* deyiladi va ε orqali belgilanadi.

Ta’rifga ko‘ra,

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}.$$

Giperbolada $c>a$ bo‘lgani sababli $\varepsilon>1$ dir.

4) Xuddi ellipsdagidek, giperbola uchun ham ikkita simmetriya o'qlari (ular haqiqiy va mavhum o'qlar) va bitta simmetriya markazi mavjudligi uning kanonik tenglamasidan kelib chiqadi. Simmetriya markazini *giperbolaning markazi* deb ataladi. Demak, *giperbola markazli chiziqlar turkumiga tegishli*dir.

5) Agar giperbolada haqiqiy va mavhum o'qlar o'z o'rinlarini almashtirsa, uning tenglamasini

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

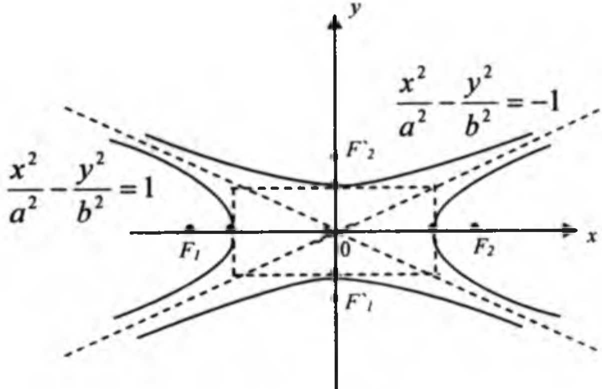
ko'rinishda yozish mumkin bo'lib, uni

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

giperbolaga *qo'shma giperbola* deb ataladi. Demak, o'zaro qo'shma giperbolalarni bitta

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\pm 1$$

tenglama bilan ifodalash mumkin (5.3.5-rasm).



5.3.5- rasm.

5.3.4. Parabola

5.3.5-ta'rif. *Parabola deb, tekislikning shunday nuqtalari to'plamiga aytiladiki, bu nuqtalarning har biri fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrissa deb ataluvchi berilgan to'g'ri chiziqdan teng uzoqlashgan bo'ladi.*

Parabolaning sodda tenglamasini keltirib chiqarish uchun, ellips va giperbola kanonik tenglamalarini chiqarishda qilinganidek, Dekart koordinatalar sistemasi maxsus tanlanadi. Bunda fokus deb ataluvchi F nuqtadan o'tuvchi va berilgan ℓ to'g'ri chiziqqa (direktrissaga) perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqni Ox o'q deb qabul qilamiz, berilgan F nuqtadan ℓ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani p deb belgilaymiz. Agar F dan ℓ ga perpendikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq direktrissa bilan B nuqtada kesishadi deb faraz qilinsa, $|FB|$ kesmaning o'rtasini koordinatalar boshi O deb qabul qilamiz (5.3.6-rasm). U vaqtda, $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ bo'lib, direktrissaning tenglamasi

$$x+\frac{p}{2}=0$$

ko'rinishda yoziladi. Parabolaning ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasi uchun uning ta'rifiga binoan $|MD|=|MF|$ $(MD\perp\ell,\ D\in\ell)$.

Agar $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, $|MD|=\left|x+\frac{p}{2}\right|$ ekanini hisobga olsak, yuqoridagi tenglikni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left|x+\frac{p}{2}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}\ .$$

Bu tenglamada shakl almashtirishlar bajarib,

$$y^2=2px \tag{5.3.6}$$

parabolaning kanonik tenglamasini olamiz. Endi, (5.3.6) tenglama bilan aniqlangan parabola haqidagi ba'zi-bir mulohazalarni keltiraylik.

1) Parabola koordinatalar boshidan o'tadi;

2) Ox o'qqa nisbatan simmetrik, ya'ni uning faqat bitta simmetriya o'qi bo'lib, uni *parabolaning o'qi* deyiladi. Simmetriya markaziga ega emas, shu sababli parabola markazsiz chiziqlar turkumiga tegishlidir.

3) Parabolaning o'z o'qi bilan kesishish nuqtasi (qaralayotgan holda $O(0;\ 0)$ – koordinatalar boshi) uning *uchi* deb ataladi.

4) Agar parabolaning (5.3.6) tenglamasida x bilan y ning o'rinlarini almashtirsak, uning tenglamasi

$$x^2=2py$$

ko'rinishni oladi, bu holda parabola koordinatalar o'qlariga nisbatan 5.3.7-rasmda ko'rsatilgandek joylashadi.

5) Parabolaning ixtiyoriy M nuqtasidan uning F fokusigacha bo'lgan masofani $|MF|=r$ bilan, direktrissagacha bo'lgan masofani $MD=k$ bilan belgilasak, ta'rifidan $r=k$ deb yozish mumkin (5.3.6-rasmga qarang).

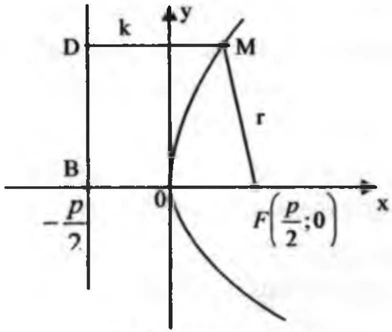
Parabolaning ekssentrisiteti deb $\varepsilon=\dfrac{r}{k}$ *songa aytiladi.* Bu holda, ravshanki,

$$\varepsilon=\frac{r}{k}=1.$$

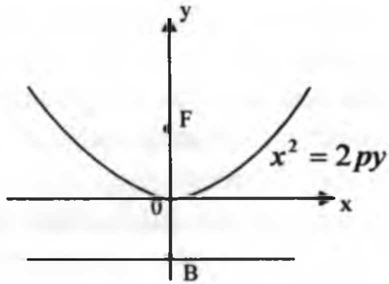
6) (5.3.6)dan parabolaning koordinatalar tekisligi I choragidagi yoyi uchun

$$y=\sqrt{2px},\ 0\le x<+\infty$$

bo‘ladi. Bundan parabola I chorakdagi qismi nuqtasining obsissasi 0 dan $+\infty$ gacha o‘sib borganda ordinatasi 0 dan $+\infty$ gacha o‘sishni ko‘rish osondir. Parabolaning IV chorakdagi yoyi haqida uning simmetriklik xossasi asosida xulosa chiqarish mumkin. (5.3.6) ning II va III choraklarga tegishli nuqtasi yo‘qdir.



5.3.6- rasm.



5.3.7- rasm.

5.3.5. Ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini tekshirish

Yuqorida ikkinchi tartibli chiziqning umumiy tenglamasini

(5.3.1) ko‘rinishda yozgan edik. Agar unda $B=0$ bo‘lsa, tenglama

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (5.3.7)$$

ko‘rinishni olib, x va y o‘zgaruvchilar bo‘yicha chap tomondagi ifodaning to‘la kvadratlarini ajratish imkoniyati tug‘iladi.

Haqiqatdan ham, agar $A \cdot C \neq 0$ bo‘lsa, (5.3.7) ni

$$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+C\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=f \qquad (5.3.8)$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu yerda $f=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{C}-F$.

1. Agar (5.3.7) da *$A\cdot C>0$ bo‘lsa, tenglama elliptik tipga tegishli* deyiladi va bu holda (5.3.7) dan olingan (5.3.8) tenglamada quyidagi hollar kuzatilishishi mumkin:

a) $A\cdot f>0$ $(C\cdot f>0)$ bo‘lsa, $x+\frac{D}{A}=x_1$, $y+\frac{E}{C}=y_1$ almashtirishlar yordamlda (ya’ni koordinatalar boshini $\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{C}\right)$ nuqtaga ko‘chirish bilan) (5.3.8) ni

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

ko‘rinishga keltiramiz, bu yerda $a^2=\frac{f}{A}$, $b^2=\frac{f}{B}$. Demak, bu holda ellipsga ($a^2=b^2$ bo‘lsa, aylanaga) egamiz.

b) $f=0$ bo‘lsa, (5.3.8) ni faqat bitta $\left(-\frac{D}{A};-\frac{E}{C}\right)$ nuqta qanoatlantiradi, ya’ni, bu holda, bitta nuqtaga egamiz:

c) $A\cdot f<0$ $(C\cdot f<0)$ bo‘lsa, (5.3.8) ni *a*) banddagidek

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=-1$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Tekislikning bu tenglamani qanoatlantiradigan nuqtasi yo‘qdir. Bu holda, *mavhum ellipsga ($a^2=b^2$ bo‘lganda mavhum aylanaga) egamiz deyish qabul qilingan.*

2. Agar (5.3.7) da $A\cdot C<0$ bo‘lsa, *tenglama giperbolik tipga tegishli* deyiladi va (5.3.8) tenglamada quyidagi hollar kuzatiladi:

a) $A\cdot f\neq 0$ bo‘lsa, yuqoridagiga o‘xshash (5.3.8) ni

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\pm 1$$

ko'rinishga keltirish mumkin. Bu yerda $A\cdot f>0$ bo'lganda «+», aks holda,
«-» ishora olinadi. Bu giperboladir.

b) $f=0$ bo'lsa, (5.3.8) dan

$$\left(y+x\sqrt{-\frac{A}{C}}\right)\left(y-x\sqrt{-\frac{A}{C}}\right)=0$$

ni olamiz. Bundan esa ikkita kesishuvchi

$$y=\pm x\sqrt{-\frac{A}{C}}$$

to'g'ri chiziqlarga ega ekanligimizni ko'ramiz.

3. Nihoyat, (5.3.7) da $A\cdot C=0$ *bo'lsa, tenglama parabolik tipga tegishli* deb ataladi. $A=C=0$ bo'lishi mumkin emas, aks holda (5.3.7) chiziqli tenglamaga aylanib qoladi. Aniqlik uchun $A=0$, $C\neq 0$ deb faraz qilsak ($A\neq 0$, $C=0$ hol ham shunga o'xshash bo'ladi),(5.3.7) ni

$$\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=-2\cdot\frac{D}{C}x-\frac{CF-E^2}{C^2}$$

(5.3.9)

ko'rinishga keltirish mumkin bo'lib, quyidagi hollar kuzatiladi:

a) $D\neq 0$ bo'lsa, (5.3.9) ni

$$\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=2p\left(x+\frac{CF-E^2}{2DC}\right)$$

ga keltiramiz, bu yerda $p=-\frac{D}{C}$. Oxirgidan $y+\frac{E}{C}=y_1$, $x+\frac{CF-E}{2DC}=x_1$ almashtirish bilan

$$y_1^2=2px_1$$

parabolaning kanonik tenglamasiga kelamiz.

b) $D=0$, $E^2-CF>0$ bo'lsa,

$$\left(y+\frac{E}{C}\right)^2=\frac{E^2-CF}{C^2}$$

tenglamadan, *ikkita parallel bo'lgan*

$$y=-\frac{E}{C}\pm\sqrt{\frac{E^2-CF}{C^2}}$$

*to'g'ri chiziqlar*ga ega bo'lamiz.

c) $D=0$, $E^2-CF=0$ bo'lsa, bitta

$$y=-\frac{E}{C}$$

to'g'ri chiziqqa ega bo'lamiz. Bu holda, *ustma-ust tushgan ikkita to'g'ri chiziq*qa egamiz deyiladi.

d) $D=0$, $E^2-CF<0$ bo'lsa, (5.3.9) tenglama o'ng tomoni manfiy o'zgarmas son bo'lib, u haqiqiy sohada yechimga ega emas, ya'ni hech qanday chiziqqa ega bo'lmaymiz. Bu holda, *ikkita parallel mavhum to'g'ri chiziqqa egamiz deyish qabul qilingan.*

Endi, (5.3.1) tenglamada $B\neq 0$ bo'lgan holni qaraymiz. Koordinatalar o'qlarini biror α burchakka burish bilan bu koeffitsiyentni nolga teng qilish mumkinligini ko'rsatamiz. 5.3.8-rasmdagidek M nuqtaning boshlang'ich xOy sistemadagi koordinatalari $M(x;y)$, koordinatalar o'qlarini biror α burchakka burib olingan yangi x_1Oy_1 sistemadagi korodinatalarini $M(x_1;y_1)$ bilan belgilaylik. Agar α va φ burchaklarni hisobga olib, Dekart va qutb koordinatalar orasidagi bog'lanishlarni eslasak, 5.3.8-rasmdan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1=r\cos\varphi, \\ y_1=r\sin\varphi; \end{cases} \qquad \begin{cases} x=r\cos(\alpha+\varphi)=x_1\cos\alpha-y_1\sin\alpha, \\ y=r\sin(\alpha+\varphi)=x_1\sin\alpha+y_1\cos\alpha. \end{cases}$$

Demak,

$$\begin{cases} x = x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha, \\ y = x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha \end{cases}$$

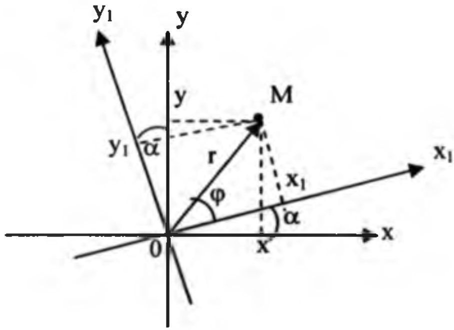
(5.3.10)

bog'lanishlarga egamiz. Ular koordinatalar o'qlarini α burchakka burish almashtirishlari deb ataladi. Olingan (5.3.10) almashtirishlar yordamida (5.3.1) ni

$$A_1x_1^2+2B_1x_1y_1+C_1y_1^2+2D_1x_1+2E_1y_1+F=0 \qquad (5.3.11)$$

ko'rimishga keltirish mumkin, bu yerda

$$A_1=A\cos^2\alpha+2B\sin\alpha\cos\alpha+C\sin^2\alpha,$$
$$B_1=-A\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+C\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$C_1=A\sin^2\alpha-2B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha,$$
$$D_1=D\cos\alpha+E\sin\alpha,$$
$$E_1=-D\sin\alpha+E\cos\alpha.$$



5.3.8- rasm.

Agar α burchakni $B_1=0$ bo'ladigan qilib tanlasak, (5.3.11) tenglama (5.3.7) ko'rimshga keladi.

Demak, α burchakni

$$-A\sin\alpha\cos\alpha+B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+C\sin\alpha\cos\alpha=0$$

tenglamadan aniqlash kerak ekan.

Agar $B\neq 0$ ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglamani

$$ctg2\alpha = \frac{A-C}{2B}$$
(5.3.12)

ko'rinishga keltirish mumkin.

Shunday qilib, koordinatalar o'qlarini (5.3.12) tenglamadan aniqlangan α burchakka bursak, (5.3.11) tenglamada $B_1=0$ bo'lib, u (5.3.7) ko'rinishga kelar ekan.

(5.3.10) almashtirish natijasida olingan (5.3.11) va (5.3.1) tenglamalarning koeffitsiyentlari uchun $A_1C_1 - B_1^2 = AC - B^2$ bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Demak, bu almashtirish natijasida berilgan tenglama tipini saqlaydi va agar α burchak (5.3.12) dan aniqlangan deb faraz qilib, (5.3.7) tenglamani tekshirishdagi muloxozalarni eslasak, $AC - B^2$ ifoda qiymati musbat bo'lsa, (5.3.1) tenglama eliptik; manfiy bo'lsa, giperbolik; nolga teng bo'lganda esa parobolik tipga tegishli bo'lishi kelib chiqadi.

5-bobga doir mashqlar

1. $2x-y+3=0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti va ordinatalar o'qidan ajratgan kesmasini toping.

Javob: $k= 2;\ b=3.$

2. Oy o'qdan 2 birlik kesma ajratuvchi hamda $x-2y+3=0$ to'g'ri chiziq bilan 45^0 li burchak hosil qiluvchi to'g'ri chiziqning tenglamasini tuzing.

Javob: $3x-y+2=0$ yoki $x+3y-6=0$.

3. $6x-8y-15=0$ to'g'ri chiziq normalining yo'naltiruvchi kosinuslarini toping.

Javob: $\cos\varphi = \frac{3}{5};\ \ \sin\varphi = -\frac{4}{5}.$

4. $A(2;5)$ nuqtadan $6x+8y-6=0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping.

Javob: δ=4,6.

5. Aylananing ushbu

$2x^2+2y^2-3x+4y+2=0$

tenglamasiga ko‘ra uning markazini va radiusini aniqlang.

Javob: $C\left(\frac{3}{4};-1\right)$; $R=\frac{3}{4}$.

6. $A\left(4;\frac{9}{5}\right)$ va $B\left(\frac{5\sqrt{5}}{3};-2\right)$ nuqtalardan o‘tuvchi ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

Javob: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

7. Fokuslari orasidagi masofa 26 ga, ekssentrisiteti esa $\varepsilon=\frac{13}{12}$ ga teng bo‘lsa giperbolaning kanonik tenglamasini tuzing.

Javob: $\frac{x^2}{144}-\frac{y^2}{25}=1$.

8. Uchi koordinatalar boshida va fokusi $4x-3u+4=0$ to‘g‘ri chiziq bilan Ox o‘qning kesishish nuqtasida bo‘lgan parabola tenglamasi yozilsin.

Javob: $y^2=-4x$.

Tekislikdagi birinchi va ikkinchi tartibli chiziqlar bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasini yozing.

2. *Ox* (yoki *Oy*) o'qqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi qanday ko'rinishga ega?

3. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini yozing.

4. To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini burchak koeffitsiyentli tenglamaga keltirish mumkinmi?

5. To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing.

6. To'g'ri chiziqning normal tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

7. Normallovchi ko'paytuvchi qanday ko'rinishda bo'ladi?

8. Ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni topish formulasini yozing.

9. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topish formulasini yozing.

10. Qutb koordinatalar sistemasiga ta'rif bering.

11. Aylana deb tekislikning qanday nuqtalari to'plamiga aytiladi?

12. Ellipsga ta'rif bering.

13. Giperbolaga ta'rif bering.

14. Parabolaga ta'rif bering.

15. Ellips, giperbola va paravbolalarning ekssentrisiteti formulalarini yozing.

6-BOB. FAZODAGI TEKISLIK VA TO‘G‘RI CHIZIQ

Ma’lumki, nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislik fazo geometriyasinimg (stereometriyanimg) boshiang‘ich tushunchalaridan iboratdir. Agar fazoda Dekart koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lsa, undagi har bir *M* nuqta o‘zining koordinatalari deb ataluvchi tartiblangan uchta *x, y, z* sonlar bilan aniqlanishi va *M(x;y;z)* kabi yozilishi ham bizga ma’lumdir. To‘g‘ri chiziq va tekislikka kelsak, ularni tenglamalar vositasida ifodalash qulaydir.

Koordinatalar fazosimng uch o‘zgaruvchili

$$F(x;y;z)=0$$

berilgan tenglamani koordinatalari qanoatlantiruvchi $M(x;y;z)$ nuqtalarining to‘plami *sirt*, berilgan tenglama esa *uning tenglamasi* deb yuritiladi.

6.1. Tekislikning tenglamalari

Fazoda tekislikni turli tenglamalar vositasida aniqlash mumkin.

6.1.1. Tekislikning vektor tenglamasi

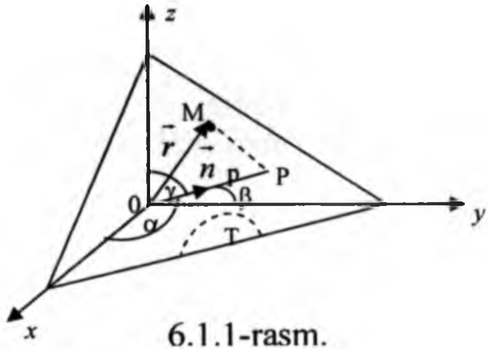
Faraz qilaylik, Dekart koordinatalar sistemasining boshidan berilgan *T* tekislikkacha bo‘lgan masofa p ga teng bo‘lib (p≥0), koordinatalar boshidan *T* tekislikka tushirilgan (p=0 bo‘lganda o‘tkazilgan) perpendikulyarning birlik vektori (normali) $\vec{n}$ bo‘lsin. U vaqtda, *T* tekisllkning ixtiyoriy *M* nuqtasinimg $\vec{r}$ radius vektori uchun (6.1.1-rasm)

$$\pi p_{\vec{n}}\vec{r} = p \Leftrightarrow \pi\, p_{\vec{n}}\vec{r} - p = 0$$

bo'lishi ravshandir. Endi, skalyar ko'paytmaning proyeksiya orqali ifodalanuvchi xossasini esga keltirsak, yuqoridagini

$$\vec{r}\cdot\vec{n}-p=0 \qquad (6.1.1)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (6.1.1) ni *tekislikning vektor tenglamasi* deb yuritiladi.



6.1.1-rasm.

6.1.2. Tekislikning normal tenglamasi

Endi, yuqorida olingan tekislikning vektor tenglamasida tekislikning ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasining radius-vektori $\vec{r}\,(x;y;z)$ va birlik vektor koordinatalari uning yo'naltiruvchi kosinuslari, ya'ni $\vec{n}\,(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$ ekanligini etiborga olsak,

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (6.1.2)$$

ni olamiz. (6.1.2) *tekislikning normal tenglamasi* deb yuritiladi va unda $p\geq 0$ va $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ bo'lishini yodda tutmoq lozimdir.

6.1.3. Tekislikning umumiy tenglamasi

Tekislikning normal tenglamasi bo'lgan (6.1.2) dan ko'rinadiki, u uch o'zgaruvchili chiziqlidir. Shu sababli, uch o'zgaruvchili

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{6.1.3}$$

chiziqli (umumiy) tenglama fazoda biror tekislikni aniqlashi haqidagi savolning qo'yilishi tabiiy bo'lib, agar

$$A^2+B^2+C^2>0 \tag{6.1.4}$$

shart bajarilsa, unga javob ijobiydir.

Haqiqatdan ham, $\vec{N}(A;B;C)$ vektorni kiritsak, (6.1.4) shartga ko'ra $|\vec{N}|>0$ ekanligi ravshandir. Endi, (6.1.3) tenglamaning har ikki tomonini *normallovchi ko'paytuvchi* deb ataluvchi

$$\mu=\pm\frac{1}{|\vec{N}|}=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

songa ko'paytiramiz va unda $D\geq 0$ bo'lsa «-» ishorani, $D<0$ bo'lganda esa «+» ishorani tanlaymiz. U vaqtda,

$$(\mu A)x+(\mu B)y+(\mu C)z-(-\mu D)=0 \text{ yoki } \frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0 \tag{6.1.5}$$

tenglamani olamiz va bu yerda

$(\mu A)^2+(\mu B)^2+(\mu C)^2=1,$ $P=-\mu D\geq 0$ bo'lishi, μ ning yuqoridagicha aniqlanishidan yaqqol ko'rinib turibdi.

Demak, (6.1.3) tenglama (6.1.5) ko'rinishdagi tekislikning normal tenglamasiga keltirildi, ya'ni (6.1.4) shart bajarilganda (6.1.3) tenglama fazoda biror tekislikni ifodalashi isbotlandi. Shu sababli, (6.1.3) ni *tekislikning umumiy tenglamasi* deb yuritiladi.

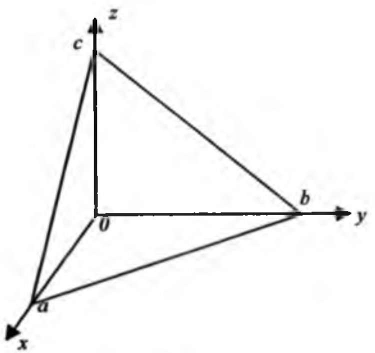
$\vec{n}(\mu A;\mu B;\mu C)$ birlik vektor bo'lib, u (6.1.3) tekislikka perpendikulyar hamda $\vec{n}\parallel\vec{N}$ ekanligidan $\vec{N}(A;B;C)$ ham tekislikka perpendikulyar bo'ladi va uni *tekislikning normali* deb yuritiladi.

6.1.4. Tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi

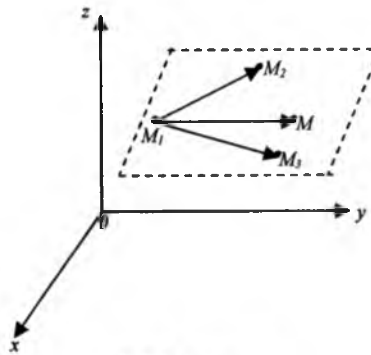
Endi, (6.1.3) tenglamada $ABCD\neq 0$ deb faraz qilaylik. U holda, tenglamani

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (6.1.6)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. (6.1.6) tenglamadagi a, b, c lar tekislikning Ox, Oy, Oz o‘qlaridan ajratgan mos kesmalarning miqdorlari ekanligini payqash qiyin emas (6.1.2-rasm). Shu sababli, (6.1.6) ni *tekislikning kesmalar bo‘yicha tenglamasi* deb yuritiladi.



6.1.2-rasm.



6.1.3- rasm.

6.1.5. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

Agar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmovchi $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ va $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsa, ular orqali yagona tekislik o‘tishi ma’lumdir. Faraz qilaylik, $M(x;y;z)$ shu tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U vaqtda, $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}, \overline{M_1M}$ vektorlar komplanar (6.1.3-rasm) va

$$\overline{M_1M}\;\overline{M_1M_2}\;\overline{M_1M_3}=0$$

bo‘lishi ravshandir.

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\},$$
$$\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\},$$
$$\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$$
ekanligini va aralash ko‘paytmaning koordinatalar shaklini e’tiborga olsak,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (6.1.7)$$

ni olamiz. (6.1.7) berilgan *uchta nuqta orqali o‘tuvchi tekislik tenglamasi*dir. Uni to‘rtinchi tartibli determmant orqali quyidagicha yozsa bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0\,.$$

6.1.6. Tekisliklar bog‘lami

Berilgan bitta $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi barcha tekisliklar to‘plami *tekisliklar bog‘lami*, M_0 nuqta uning *markazi* deb ataladi.

Agar bog‘lamga tegishli tekislik

$$Ax+By+Cz+D=0$$

deb qarab, u M_0 nuqta orqali o‘tishini hisobga olsak,

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0,\ \ D=-Ax_0-By_0-Sz_0$$

ekanligidan

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \qquad (6.1.8)$$

ga kelamiz. (6.1.8) tekisliklar bog‘laminmg tenglamasidir va unda A,B,C lar ixtiyoriy qiymatlar qabul qilib, ular (6.1.4) shartni qanoatlantirishi kerak.

6.1.7. Tekisliklar dastasi

Berilgan to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi barcha tekisliklar to‘plami *tekisliklar dastasi* deyilib, berilgan to‘g‘ri chiziq uning *o‘qi* deyiladi.

Agar dastaga tegishli bo‘lgan ikkita

$$A_1x+B_{1y}+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_{2y}+C_2z+D_2=0$$

tekisliklar ma’lum bo‘lsa, dastaning umumiy tenglamasini

$$\lambda(A_1x+B_{1y}+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_{2y}+C_2z+D_2)=0$$

ko‘rimishda ifodalash mumkin bo‘lib, bu yerda λ va μ lar ixtiyoriy $\lambda^2+\mu^2>0$ shartni qanoatlantiruvchi sonlardir. Buni isbotlaylik. $M_0(x_0;u_0;z_0)$ dasta o‘qining ixtiyoriy nuqtasi desak, ikala tekislik ham o‘q orqali o‘tganligi sababli

$$\lambda(A_1x_0+B_1y\,0+C_1z_0+D_1)+\mu(A_2x_0+B_2y\,_0+C_2z_0+D_2)=0 \Rightarrow$$
$$\lambda\cdot 0+\mu\,0=0 \;\Rightarrow 0=0$$

to‘g‘ri tenglikni olamiz.

Eslatma. Dasta tenglamasini bir parametrli ko‘rinishda ham yozsa bo‘ladi, masalan,

λ ≠ 0 deb faraz qilinsa,

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=q(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)$$

ni olish mumkin, bu yerda $q=-\frac{\mu}{\lambda}$. Ammo, bu tenglamadan ikkinchi tekislik tenglamasini olib bo‘lmaydi, ya’ni bu to‘plamga ikkinchi tekislik kirmaydi.

μ ≠ 0 deb qilingan faraz ham shunga o‘xshashdir.

6.2. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa

Aytaylik, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$$

normal tenglamasi bilan berilgan *T* tekislikgacha bo‘lgan masofani topish talab qilingan bo‘lsin. Ma’lumki p koordinatalar boshidan tekislikgacha bo'lgan masofa, $\vec{n}$ esa uning birlik vektoridir. 6.2.1-rasmda

$M_1 \in T$, $\overline{M_1M_0} = \vec{d}$, $\vec{d} \parallel \vec{n}$, $\vec{d} = \vec{r}_0 - \vec{r}_1$, $r_0(x_0;y_0;z_0)$;

$M_1(x_1;y_1;z_1)$ desak, $\vec{r}_1(x_1;y_1;z_1)$ bo'lib, $\vec{r}_1 \cdot \vec{n} = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p$ bo'lishi aniq.

$\vec{d} \parallel \vec{n}$ va $|\vec{n}| = 1$ ekanligidan

$\delta = |\vec{d}| = |\vec{d} \cdot \vec{n}| = |(\vec{r}_0 - \vec{r}_1)$

$\cdot \vec{n}| = |\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \vec{r}_1 \cdot \vec{n}| = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p|$,

ya'ni, berilgan nuqtadan berilgan tekislikkacha bo'lgan masofa uchun

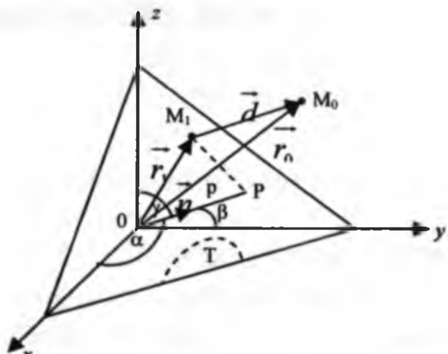
$$\delta = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| \qquad (6.2.1)$$

formulani olamiz.

Agar tekislik, $Ax+By+Cz+D=0$
umumiy tenglamasi bilan berilgan bo'lsa, normallovchi ko'paytuvchi yordamida uni normal ko'rinishga keltirilishini yodga keltirsak, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan bu tekislikkacha bo'lgan masofa uchun

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (6.2.2)$$

formulani olish qiyin emas.



6.2.1- rasm.

6.3. Ikki tekislik orasidagi burchakni topish

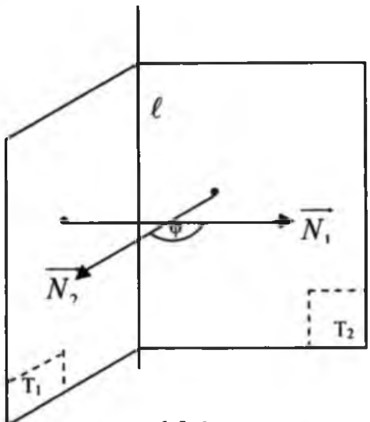
Ikki tekislik orasidagi burchak sifatida ularning normallari orasidagi burchakni qabul qilamiz. U vaqtda, agar T_1 va T_2 tekisliklar o'zlarining

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

umumiy tenglamalari bilan berilgan bo'lsa, ularning normallari $\vec{N}_1(A_1;B_1;C_1)$ va $\vec{N}_2(A_2;B_2;C_2)$ bo'lib, tekisliklar orasidagi burchak φ uchun (6.3.1-rasm)

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

formulani olamiz.



6.3.1-rasm.

Agar tekisliklar parallel bo'lsa, $\vec{N}_1 \| \vec{N}_2$ dan

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

ni olamiz. Bu tekisliklarning parallellik shartidir.

Eslatma. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ bo'lgan holda tekisliklarning ustma-ust tushishini ko'rish qiyin emasdir.

Agar tekisliklar perpendikulyar bo‘lsa, $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$ ekanligidan $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2=0$, ya’ni

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

kelib chiqadi. Bu tekisliklarning perpendikulyarlik shartidir.

6.4. Fazoda to‘g‘ri chiziq tenglamalari

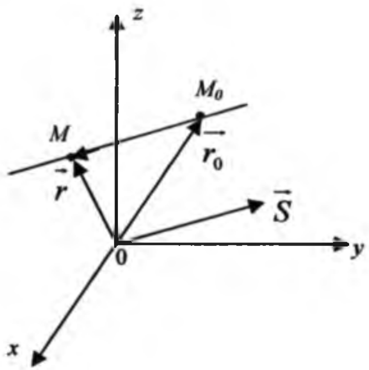
To‘g‘ri chiziqning tekislikdagi kabi fazoda ham turli ko‘rinishlardagi tenglamalari mavjuddir.

6.4.1. To‘g‘ri chiziqning vektor – parametrik tenglamasi

Aytaylik, ℓ to‘g‘ri chiziq fazoning M_0 nuqtasi orqali berilgan $\vec{S}$ yo‘nalish bo‘yicha o‘tgan bo‘lsin. 6.4.1-rasmda $\vec{r}_0$ berilgan M_0 nuqtaning, $\vec{r}$ esa to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy M nuqtasining radius-vektorlari bo‘lib, $\overline{M_0M} \parallel \vec{S}$ va $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ ekanligini hisobga olsak,

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{S} \qquad (6.4.1)$$

ni olamiz. (6.4.1) *to‘g‘ri chiziqning vektor-parametrik tenglamasi* deb yuritiladi. Bu yerda t parametr deb atalib, $t \in (-\infty; +\infty)$.



6.4.1-rasm.

6.4.2. To'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari

Agar to'g'ri chiziqning $M_0(a;в;c)$ nuqtasi va yo'nalishi $\bar{S}\,(m;n;p)$ berilgan bo'lib, uning ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y;z)$ desak, (6.4.1) dan

$$\begin{cases} x = a + mt, \\ y = b + nt, \\ z = c + pt \end{cases} \qquad (6.4.2)$$

larni olamiz. (6.4.2) *to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari* deb atalib, $t \in (-\infty;\ +\infty)$.

6.4.3. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari

(6.4.2) dan $\quad \dfrac{x-a}{m} = t,\ \dfrac{y-b}{n} = t,\ \dfrac{z-c}{p} = t$

larni hosil qilish qiyin emas. Bulardan

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \qquad (6.4.3)$$

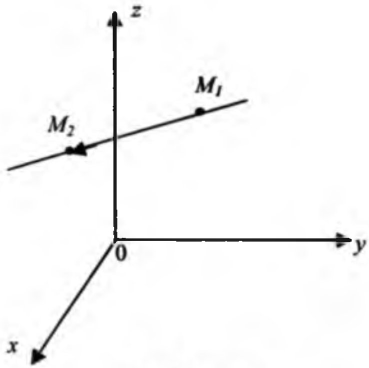
kelib chiqadi. (6.4.3) *to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari*dir.

6.4.4. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari

Agar $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lib, ustma-ust tushmasa, ular orqali yagona to'g'ri chiziq o'tishi ma'lum. Bu to'g'ri chiziqni M_1 nuqta orqali $\bar{S} = \overline{M_1M_2}$ yo'nalish bo'yicha o'tuvchi sifatida qaralsa (6.4.2-rasm),

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad (6.4.4)$$

ni olamiz. (6.4.4) berilgan *ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari*dir.



6.4.2-rasm.

6.4.5. To'g'ri chiziq ikki tekislikning kesishish chizig'i sifatida

Agar $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tekisliklar uchun parallellik sharti bajarilmasa, ular bitta to'g'ri chiziq bo'ylab kesishishi aniqdir.

Demak, bu to'g'ri chiziq

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

sistema vositasida aniqlanishi ravshandir (6.3.1-rasmda $T_1 \cap T_2 = \ell$).

6.5. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

To'g'ri chiziqlar orasidagi burchak sifatida ularning yo'nalishlari orasidagi burchakni qabul qilamiz. Agar ikki to'g'ri chiziq o'zlarining

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},$$

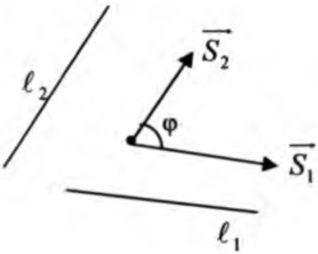
$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}$$

kanonik tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, ularning yo‘nalishlari mos ravishda $\vec{S}_1\ (m_1;n_1;p_1)$ va $\vec{S}_2\ (m_2;n_2;p_2)$ bo‘lib, bu yo‘nalishlar orasidagi φ burchak (6.5.1-rasm) uchun

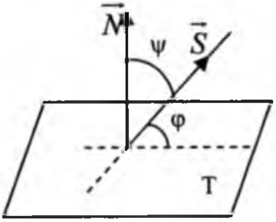
$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}} \qquad (6.5.1)$$

ni olamiz. (6.5.1) *ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasi*dir.

Agar $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqlar parallel; $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$ shart bajarilganda esa ular perpendikulyar bo‘lishi vektorlarning parallellik hamda perpendikulyarlik shartlaridan kelib chiqadi.



6.5.1- rasm.



6.6.1- rasm.

6.6. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak

To‘g‘ri chiziq bilan o‘zining tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi (soyasi) orasidagi burchakni to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb qabul qilinadi.

Bu ta’rif bo‘yicha bir-hirini yoyiq burchakka to‘ldiruvchi ikkita burchakka ega bo‘lamiz. Odatda, aytilgan burchak sifatida ulardan kichigi qabul qilinadi.

Aytaylik, ℓ to‘g‘ri chiziq

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}$$

kanonik tenglamalari, *T* tekislik esa

$$Ax+By+Cz+D=0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. 6.6.1-rasmdan ko‘rinadiki, ℓ to‘g‘ri chiziq bilan *T* tekislik orasidagi burchak φ hamda to‘g‘ri chiziq yo‘nalishi $\vec{S}\,(m;n;p)$ va tekislik normali $\vec{N}\,(A;B;C)$ orasidagi burchak ψ lar uchun $\psi=\frac{\pi}{2}-\varphi$ o‘rinlidir.

$$\cos\psi=\frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{|\vec{S}|\cdot|\vec{N}|}\quad \text{yoki}\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{|\vec{S}|\cdot|\vec{N}|},$$

$$\sin\varphi=\frac{mA+nB+pC}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Bu *to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasi*dir.

Agar $\ell \,||\, T$ bo‘lsa, $\vec{S}\perp\vec{N}$ bo‘lib,

$$mA+nB+pC=0$$

ni olamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning tekislikka parallellik shartidir.

Agar $\ell \perp T$ bo'lsa, $\bar{S} \| \bar{N}$ bo'lib, $\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$ ni olamiz. Bu to'g'ri chiziqning tekislikka perpendikulyarlik shartidir.

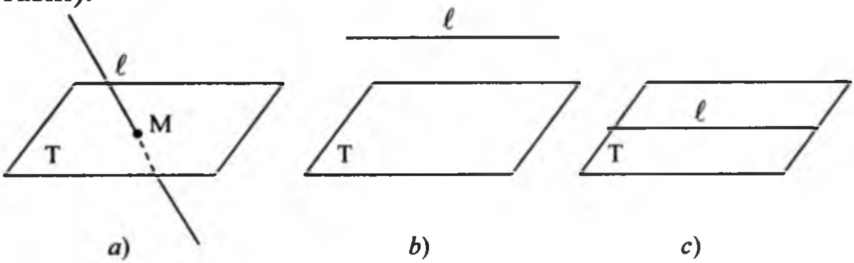
6.7. To'g'ri chiziq va tekislikning o'zaro joylashuvi

Agar fazoda ℓ to'g'ri chiziq va T tekislik berilgan bo'lsa, ularning o'zaro joylashishi bo'yicha quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) ular kesishuvchi, ya'ni faqat bitta umumiy nuqtaga ega va bu umumiy nuqta ℓ *to'g'ri chiziqning T tekislikdagi izi* deb yuritiladi. $6.7.1_a$-rasmda $\ell \cap T = M$;

2) ℓ to'g'ri chiziq T tekislik bilan birorta ham umumiy nuqtaga ega emas, ya'ni $6.7.1_b$-rasmda $\ell \cap T = \varnothing$ $(\ell \| T)$;

3) ℓ to'g'ri chiziq T tekislikda yotadi, ya'ni $\ell \subset T$ ($6.7.1_c$-rasm).



6.7.1- rasm.

Aytaylik, ℓ to'g'ri chiziq

$$\begin{cases} x = a + mt, \\ y = b + nt, \\ z = c + pt \end{cases} \qquad t \in (-\infty; +\infty)$$

parametrik tenglamalari, T tekislik esa

$$Ax+By+Cz+D=0$$

umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. U holda, ℓ va T lar umumiy nuqtaga ega yoki ega emasligini aniqlash maqsadida, to‘g‘ri chiziq parametrik tenglamalarini tekislik umumiy tenglamasiga qo‘yib, ba’zi-bir elementar shakl o‘zgartirishlardan so‘ng t parametrga nisbatan

$$(mA+nB+pC)t=-(Aa+Bb+Cc+D)$$

tenglamani olamiz. Bundan ko‘rinadiki, agar

$$mA+nB+pC\neq 0$$

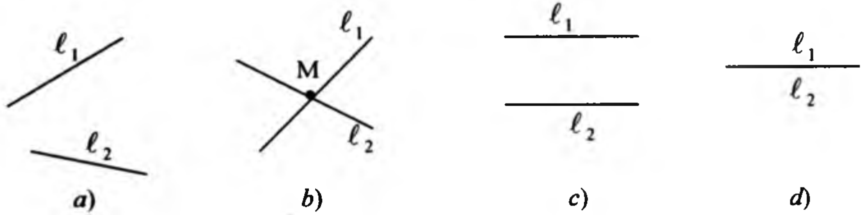
bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq bilan tekislik kesishadi va bu kesishish nuqtasi uchun t parametrning qiymati

$$t=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{mA+nB+pC}$$

bo‘ladi. Agar $mA+nB+pC=0$ va $Aa+Bb+Cc+D\neq 0$ bo‘lsa, ℓ va T lar umumiy nuqtaga ega bo‘lmaydi, ya’ni $\ell \parallel T$ bo‘ladi. Nihoyat, $mA+nB+pC=0$ va $Aa+Bb+Cc+D=0$ bo‘lsa, ℓ va T cheksiz ko‘p umumiy nuqtaga ega bo‘lib, $\ell \subset T$ hol kuzatiladi.

6.8. Fazoda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvi

Agar fazoda ℓ_1 va ℓ_2 to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lsa, ularning o‘zaro joylashuvi bo‘yicha quyidagi hollarni kuzatish mumkin: 1) ℓ_1 va ℓ_2 lar bir tekislikda yotmaydi, bu holda ular *uchrashmas* (*ayqash*) *to‘g‘ri chiziqlar* deb ataladi ($6.8.1_a$-rasm); 2) ℓ_1 va ℓ_2 lar bir tekislikda yotadi; bu yerda yana quyidagi hollar mavjuddir: *a*) ℓ_1 va ℓ_2 lar faqat bita umumiy nuqtaga ega, ya’ni ular kesishuvchi ($6.8.1_b$-rasm $\ell_1\cap\ell_2=M$); *b*) ℓ_1 va ℓ_2 lar umumiy nuqtaga ega emas, ya’ni $\ell_1\cap\ell_2=\varnothing$ bo‘lib, ular paralleldir ($6.8.1_c$-rasm); c) ℓ_1 va ℓ_2 lar cheksiz ko‘p umumiy nuqtalarga ega, ya’ni $\ell_1=\ell_2$ bo‘lib, ular ustma-ust tushadi ($6.8.1_d$-rasm).



6.8.1- rasm.

Aytilgan hollarni aniqlash maqsadida ℓ_1 va ℓ_2 to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining kanonik tenglamalari bilan berilgan deb faraz qilaylik:

$$\ell_1: \qquad \frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1},$$

$$\ell_2: \qquad \frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2}.$$

Bu holda, $\vec{S}_1(m_1;n_1;p_1)$ vektor ℓ_1 ning, $\vec{S}_2(m_2;n_2;p_2)$ esa ℓ_2 ning yo‘nalishlari bo‘lib, $M_1(a_1;b_1;c_1)\in\ell_1$, $M_2(a_2;b_2;c_2)\in\ell_2$ ekanligi ravshandir.

Endi, $\vec{S}=\overline{M_1M_2}=\{a_2-a_1;b_2-b_1;c_2-c_1\}$ vektorni kiritsak, uning boshi ℓ_1 ga uchi esa ℓ_2 ga tegishlidir (6.8.2-rasm). Agar $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}$ vektorlar komplanar bo‘lsa, ℓ_1 va ℓ_2 lar bir tekislikda yotishi, aks holda yotmasligi kelib chiqadi.

Demak,

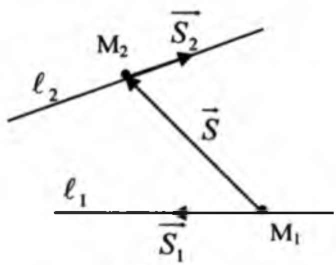
$$\vec{S}_1\vec{S}_2\vec{S}\neq 0,$$

ya’ni

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & m_2 & p_2 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \end{vmatrix}\neq 0$$

bo'lishi ℓ_1 va ℓ_2 to'g'ri chiziqlarning uchrashmaslik (ayqashlik) shartidir.

Agar $\vec{S}_1\vec{S}_2\vec{S}=0$ bo'lsa, ℓ_1 va ℓ_2 lar bitta tekislikda yotuvchi bo'lib, $\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}\neq\vec{0}$ bo'lganda ular kesishuvchi, $\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}=\vec{0}\wedge\overrightarrow{S_1}\times\vec{S}\neq\vec{0}$ bo'lganda parallel va, nihoyat, $\overrightarrow{S_1}\times\overrightarrow{S_2}=\vec{0}\wedge\overrightarrow{S_1}\times\vec{S}=\vec{0}$ bo'lganda esa ustma-ust tushuvchi bo'lishini ko'rish qiyin emasdir.



6.8.2- rasm.

6-bobga doir mashqlar

1. A(0;2;3) nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=\{1;0;1\}$, $\vec{n}_1=\{2;3;-1\}$ vektorlarga parallel bo'lgan tekislikning tenglamasini tuzing.

Javob: $x-y-z+5=0$

2. A(2;3;-1) nuqtadan o'tuvchi va $\vec{n}=\{1;2;-4\}$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislikning tenglamasini tuzing.

Javob: $x+2y-4z-12=0$

3. N(2;1;3) nuqtadan o'tuvchi va $\vec{S}=\{1;-3;1\}$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzing.

Javob: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{1}$.

4. A(1;-5;3) nuqtadan o'tuvchi va koordinatalar o'qlari bilan mos ravishda $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; $\beta = \frac{\pi}{3}$; $\gamma = \frac{\pi}{4}$ burchaklar tashkil qiluvchi to'g'ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamalarini tuzing.

Javob: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$; $\begin{cases} x = -t+1, \\ y = t-5, \\ z = \sqrt{2}t+3 \end{cases}$

5. A(7;9;7) nuqtadan $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{3}$ to'g'ri chiziqgacha bo'lgan masofani toping.

Javob: $\sqrt{\frac{467}{34}}$.

6. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$ to'g'ri chiziq $4x+3y-z+3=0$ tekislikda yotadimi?

7. Ushbu $\begin{cases} x = 2t-1, \\ y = t+2, \\ z = 1-t \end{cases}$ to'g'ri chiziqning $3x-2y+z-3=0$ tekislik bilan kesishish nuqtasining koordinatalari topilsin.

Javob: (5; 5; -2)

8. N(2;3;-5) nuqtadan $4x-2y+5z-12=0$ tekislikka tushirilgan perpendikulyarning uzunligini toping.

Javob: $P = \frac{7\sqrt{5}}{3}$.

Fazodagi tekislik va to'g'ri chiziq bo'yicha bilimingizni sinab ko'ring

1. Tekislikning umumiy tenglamasini yozing.
2. Tekislikning normal vektorining koordinatalarini yozing.

3. Tekislikning normal ko'rinishdagi tenglamasini yozing.
4. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani topish formulasini yozing.
5. Tekislik umumiy tenglamasining normallovchi ko'paytuvchisi nima?
6. Ikki tekislik orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
7. Qanday shart bajarilganda tekisliklar o'zaro parallel bo'ladi?
8. Qanday shartda ikki tekislik o'zaro perpendikulyar bo'ladi?
9. To'g'ri chiziqning vektor-parametrik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?
10. Fazoda to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
11. Fazoda to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari qanday ko'rinishda bo'ladi?
12. Fazoda ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
13. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel yoki perpendikulyar bo'ladi?
14. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish formulasini yozing.
15. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziq bilan tekislik o'zaro parallel yoki perpendikulyar bo'ladi?
16. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziq bilan tekislik kesishadi?
17. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziq tekislikda yotadi?
18. Qanday shart bajarilganda to'g'ri chiziqlar uchrashmas (ayqash) bo'ladi?

7-BOB. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

Uch o‘zgaruvchili n – darajali algebraik tenglama vositasida aniqlangan sirt *n – tartibli sirt* deyiladi.

6-bobda tekislik uch o‘zgaruvchili chiziqli (birinchi darajali) tenglama vositasida ifodalanishini ko‘rdik, demak, u birinchi tartibli sirtdir.

Ikkinchi tartibli sirt uchun

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + Kx + Ly + Mz + N = 0$$

umumiy tenglamani yoza olamiz. Bunda A,B,C,D,E,F,K,L,M,N lar berilgan koeficientlar; x,y,z lar o‘zgaruvchilar bo‘lib, $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 > 0$ dir.

Bu bobda aylanma, konik, silindrik sirtlarning hamda ellipsoid, giperboloid va paraboloidlarning kanonik tenglamalarini keltirish bilan cheklanamiz. Shu bilan birga, tenglamasi yuqoridagi ko‘rinishda bo‘lgan sirtni umumiy holda analitik geometriyaga oid qat’iyroq yozilgan adabiyotlardan o‘rganish mumkinligini aytamiz (masalan, [5]).

7.1. Aylanma sirtlar

Biror tekis L chiziqning tayin ℓ o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan nuqtalar to‘plami *aylanma sirt* deyiladi. L chiziq aylanma sirtning *meridiani*, ℓ o‘q esa *uning aylanish* o‘qi deyiladi.

Ta’rifdan ko‘rinadiki, meridianning har bir nuqtasi o‘q atrofida aylanishi jarayonida markazi aylanish o‘qida bo‘lgan aylana chizadi.

Quyida koordinatalar fazosida aylanish o‘qi biror koordinatalar o‘qi bilan ustma-ust tushadigan aylanma sirtning tenglamasini qaraymiz.

Aytaylik, aylanish o‘qi Oz o‘qdan iborat, L meridian esa Oyz tekislikda yotuvchi va

$$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases} \tag{7.1.1}$$

sistema bilan aniqlanuvchi chiziq, S berilgan L chiziqning Oz o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt va $M(x;y;z)$ uning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin (7.1.1-rasm). M nuqta orqali Oz o‘qqa perpendikulyar qilib o‘tkazilgan tekislik S sirtni markazi Oz o‘qda yotuvchi K nuqtada bo‘lgan aylana bo‘ylab kesadi va bu aylananing barcha nuqtalarining va K ning ham applikatasi M ning applikatasi bo‘lgan z dan iborat bo‘lishi aniqdir.

Aylana bilan L chiziqning kesishish nuqtasini N $(0;y_1;z)$ desak, K $(0;0;z)$ ekanligidan 7.1.1-rasmdan ko‘rinadiki,

$$|y_1| = |KN| = |KM| = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2}$$

va $N \in L$ ekanligidan (7.1.1) sistemadan

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z\right) = 0 \tag{7.1.2}$$

ni olamiz. Demak, S aylanma sirt ixtiyoriy M nuqtasining koordinatalari (7.1.2) tenglamani qanoatlantiradi. Shunday qilib, (7.1.2) tenglama meridianlaridan biri Oyz tekisligida yotib, (7.1.1) sistema bilan aniqlanuvchi, aylanish o‘qi esa Oz o‘qdan iborat bo‘lgan S aylanma sirtni aniqlaydi.

Yuqoridagiga o‘xshash, agar (7.1.1) bilan aniqlanuvchi meridian Oy o‘q atrofida aylantirilsa, hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasi

$$F\left(y; \pm\sqrt{x^2+z^2}\right) = 0 \tag{7.1.3}$$

bo‘ladi.

Agar L meridian Oxy tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases} \qquad (7.1.4)$$

sistema bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda, L ni Ox yoki Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtning tenglamasi, mos ravishda,

$$F\left(x;\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \qquad (7.1.5)$$

yoki

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0 \qquad (7.1.6)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar L meridian Oxz tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases} \qquad (7.1.7)$$

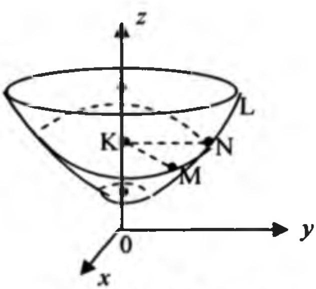
sistema bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda, L ni Ox yoki Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirtnmg tenglamasi, mos ravishda,

$$F\left(x;\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0 \qquad (7.1.8)$$

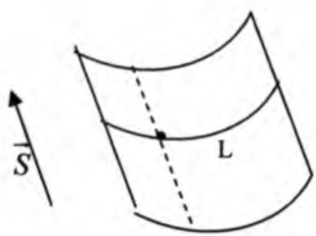
yoki

$$F\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0 \qquad (7.1.9)$$

ko'rimshda bo'ladi.



7.1.1-rasm.



7.2.1-rasm.

7.2. Silindrik sirtlar

Berilgan $\bar{S}$ vektor yo‘nalishiga parallel bo‘lib, berilgan L tekis chiziqni kesadigan to‘g‘ri chiziqlar to‘plami *silindrik sirt* deyiladi (7.2.1-rasm). Bunda L chiziq silindrik sirtning *yo‘naltiruvchisi*, $\bar{S}$ vektorga parallel va L ni kesuvchi to‘g‘ri chiziqlar silindrik sirtning *yasovchilari* deyiladi. Bu yerda $\bar{S}$ vektor L chiziq tekisligiga parallel emas deb faraz qilinadi.

Ba’zi-bir xususiy hollarni qarash bilan cheklanamiz.

1) Aylanish o‘qi Oz o‘qdan, meridiani esa Oyz tekislikda yotuvchi $y=a$ $(a>0)$ to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lgan aylanish sirtini qaraylik (7.2.2$_a$-rasm). Bu aylanish sirtining tenglamasi

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=a \quad \text{yoki} \quad x^2+y^2=a^2$$

dan iborat bo‘lib, uni yo‘naltiruvchisi

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=0 \end{cases}$$

aylanadan iborat, yasovchilari Oz o‘qga parallel bo‘lgan silindrik sirt sifatida ham qarash mumkin. Shu sababli, bu sirtni *doiraviy silindrik sirt* deyiladi.

2) Yasovchilari Oz o‘qga parallel, yo‘naltiruvchisi L esa Oxy tekislikda yotgan silindrik sirtni qaraylik. Ravshanki, L yo‘naltiruvchi biror

$$\begin{cases} F(x,y)=0, \\ z=0 \end{cases} \qquad (7.2.1)$$

tenglamalar sistemasi bilan beriladi. $M(x;y;z)$ sirtning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. U vaqtda, M ning Oxy tekislikdagi proyeksiyasi $N(x;y;0)$ bo‘lib, bu nuqta L yo‘naltiruvchida yotadi. Shu sababli, $M(x;y;z)$ ning koordinatalari

$$F(x;y)=0$$

tenglamani qanoatlantiradi. Demak, bu tenglama qaralayotgan silindrik sirtni tasvirlaydi. Xuddi shunga o‘xshash, yasovchilari Ox o‘qga parallel, yo‘naltiruvchisi L esa Oyz tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(y,z)=0, \\ x=0 \end{cases}$$

sistema bilan berilgan silindrik sirt $F(y;z)=0$ tenglama bilan; yasovchilari Oy o‘qga parallel, yo‘naltiruvchisi L esa Oxz tekislikda yotib,

$$\begin{cases} F(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$$

sistema bilan berilgan silindrik sirt $F(x;z)=0$ tenglama bilan tasvirlanishi ravshandir.

Yuqoridagilardan silindrik sirtning yasovchilari biror koordinatalar o‘qiga parallel bo‘lsa, shu koordinatalar o‘qiga mos o‘zgaruvchi uning tenglamasida qatnashmasligini ko‘ramiz.

3) Ko‘rilgan hollarda, yo‘naltiruvchisi ikkinchi tartibli chiziqdan iborat bo‘lgan silindrik sirt ikkinchi tartibli bo‘lishi ravshandir.

Yasovchisi Oz o‘qga parallel bo‘lgan ikkinchi tartibli asosiy silindrik sirtlar quyidagilardir:

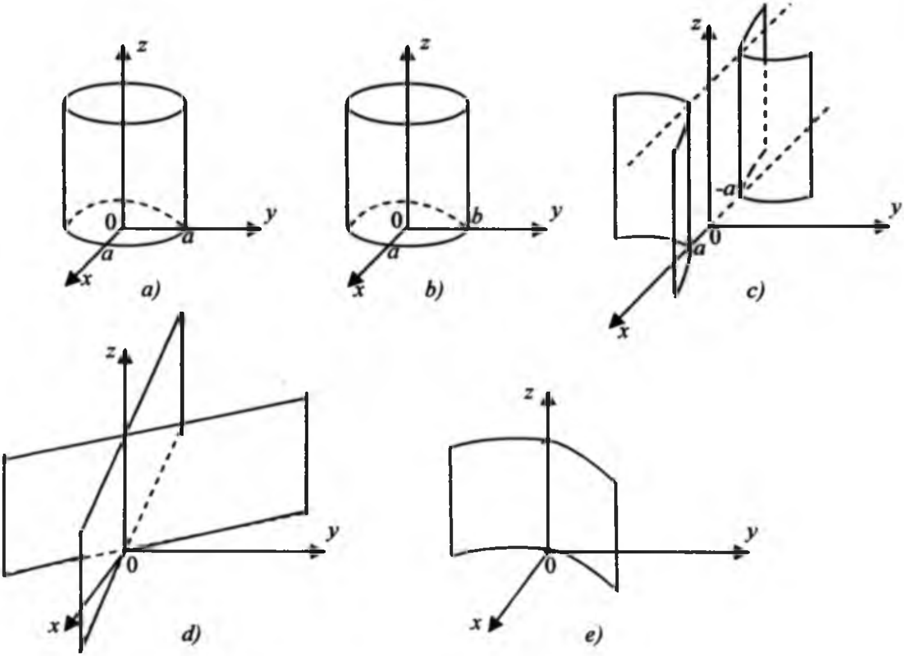
1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - elliptik silindrik sirt (7.2.2.$_b$ -rasm);

xususan $a=b$ bo‘lsa, doiraviy silindrik sirt (7.2.2$_a$-rasm);

2) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\right)$ - giperbalik silindrik sirt (7.2.2$_c$-rasm);

3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - vertikal ikki yoqli burchak (7.2.2$_d$-rasm);

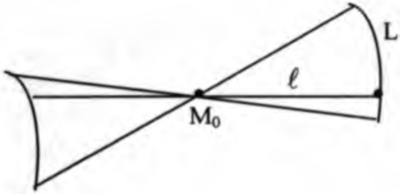
4) $y^2 = 2px$ $\left(x^2 = 2py\right)$ - parabolik silindrik sirt (7.2.2$_e$-rasm).



7.2.2-rasm.

7.3. Konus sirtlar

Koordinatalar fazosida biror qo‘zg‘almas $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtadan o‘tib, berilgan L tekis chiziqni kesuvchi barcha ℓ to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan sirt *konus sirt* deyiladi (7.3.1-rasm). $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtani konus sirtning *uchi*, L chiziq *yo‘naltiruvchisi*, ℓ to‘g‘ri chiziq esa *yasovchisi* deyiladi. Konus sirtning uchi, uning yo‘naltiruvchisining tekisligida yotmasligi kerak.



7.3.1- rasm.

Bu bandda quyidagilarni keltirish bilan cheklanamiz.

1) Koordinatalar fazosida berilgan

$$\begin{cases} \frac{y}{a} - \frac{z}{c} = 0, \\ x = 0 \end{cases} \qquad (a > 0,\ c > 0)$$

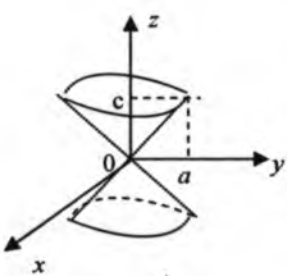
to‘g‘ri chiziqni Oz o‘q atrofida aylantirish natijasi bo‘lgan sirtning tenglamasi, (7.1.2) ga asosan,

$$\frac{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}{a} - \frac{z}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

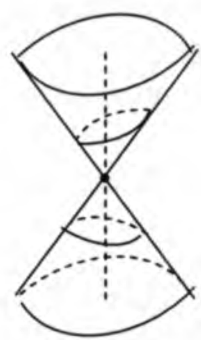
bo‘lishi ravshandir. Bu aylanish sirtini uchi O(0;0;0) nuqtadan, yo‘naltiruvchisi esa

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = c \end{cases}$$

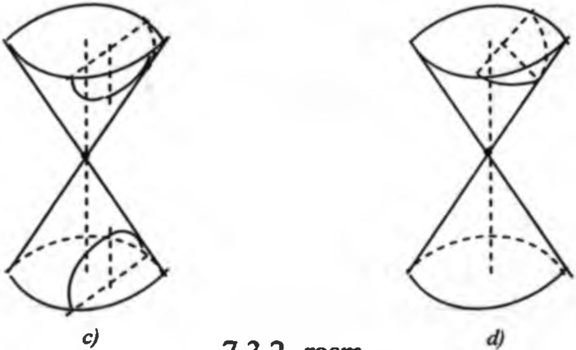
aylanadan iborat konus sirti deb qarash ham mumkin. Shu sababli, uni *doiraviy konus sirt* deb ataladi ($7.3.2_a$-rasm).



a)



b)



7.3.2- rasm.

Agar doiraviy konus sirtni tekislik bilan kesilsa, tekislik barcha yasovchilarni kesib o'tgan holda kesim ellips, aylana, konus uchidan iborat nuqta ($7.3.2_b$-rasm), tekislik ikkita yasovchiga parallel bo'lgan holda giperbola ($7.3.2_c$-rasm) yoki ikkita yasovchi va, nihoyat, bitta yasovchiga parallel bo'lsa parabola ($7.3.2_d$-rasm) yoki bitta yasovchi bo'lishi aniqlangandir.

2) Endi, uchi O(0;0;0) nuqtadan, yo'naltiruvchisi esa

$$\begin{cases} F(x;y)=0, \\ z=c \end{cases} \quad (c>0)$$

sistema bilan aniqlanuvchi tekis chiziqdan iborat bo'lgan konus sirtni qaraylik. Uning ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasi orqali o'tuvchi yasovchisi yo'naltiruvchisi bilan $M_0(x_0;y_0;c)$ umumiy nuqtaga ega deb faraz qilsak, bu yasovchining parametrik tenglamalari

$$x=x_0t,\ \ y=y_0t,\ \ z=ct$$

bo'lib, ularda $z\neq 0$ deb faraz qilib, t parametrni yo'qotsak,

$$x_0=c\frac{x}{z},\ \ y_0=c\frac{y}{z}$$

ni olamiz. Buni yo'naltiruvchi tenglamasiga qo'yib, konus sirtning

$$F\left(c\frac{x}{z};\ c\frac{y}{z}\right)=0$$

tenglamasiga kelamiz.

Olingan bu tenglama yordamida yo'naltiruvchisi ikkinchi tartibli chiziq bo'lgan konus sirt ikkinchi tartibli bo'lishini ko'rsatish mumkin (mustaqil bajaring).

Masalan, uchi O(0;0;0) nuqtada, yo'naltiruvchisi

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=c \end{cases} \qquad (a>0,\ b>0,\ c>0)$$

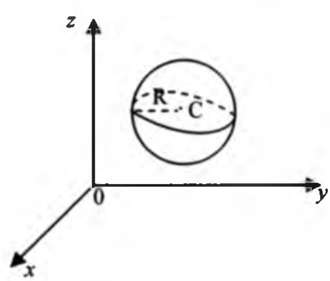
ellipsdan iborat konus sirtning tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

ekanligiga ishonch hosil qilish osondir. Bu sirtning $z=h$ $(h\neq 0)$ bo'lgan kesimi ellipsdan, $z=0$ bo'lsa bitta nuqtadan, $x=h\neq 0$ $(y=h\neq 0)$ kesimi giperboladan, $x=0$ $(y=0)$ bo'lganda esa ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

7.4. Sfera

Ma'lumki, *sfera deb fazoda markazi deb ataluvchi berilgan C(a;b;c) nuqtadan radiusi deb ataluvchi berilgan R>0 masofada joylashgan nuqtalarning to'plamiga aytiladi* (7.4.1-rasm).



7.4.1- rasm.

Agar $M(x;y;z)$ sferaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, uning ta'rifi asosida

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=R$$

bundan

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

tenglamani olamiz. Bu markazi $C(a;b;c)$ nuqtada bo'lgan R radiusli sfera tenglamasidir. Xususiy holda markazi O(0;0;0) nuqtada bo'lsa,

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

bo'lib, bu markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera tenglamasidir.

Sfera tenglamasi ikkinchi darajali uch o'zgaruvchili algebraik tenglama ekanligidan u ikkinchi tartibli sirtdir.

7.5. Ellipsoid

Koordinatalar sistemasini tegishlicha tanlanganda kanonik tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7.5.1)$$

dan iborat bo'lgan sirt *ellipsoid* deyiladi, bunda a,b,c– musbat sonlar bo'lib, *ellipsoidning yarim o'qlari* deb yuritiladi.

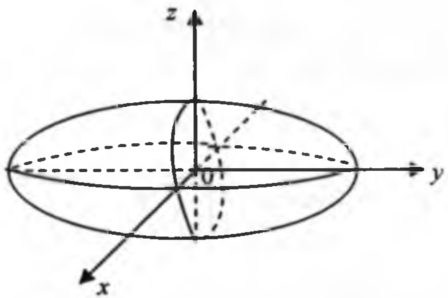
Ellipsoid haqida umumiy tasavvurga ega bo'lish maqsadida quyidagi masalani qaraylik: Oyz tekislikda $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ tenglama bilan berilgan ellipsning Oz o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirtning tenglamasini tuzish talab qilingan bo'lsin 7.1-bandda qilingan mulohazalardan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

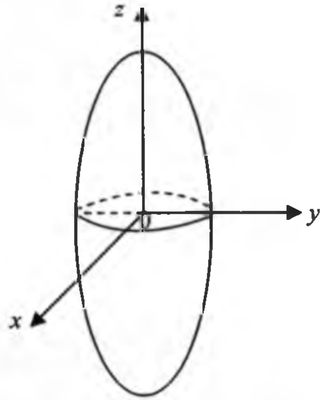
$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7.5.2)$$

(7.5.2) tenglama bilan berilgan sirt *aylanma ellipsoid* deyiladi. Agar $b>c$ bo'lsa, (7.5.2) tenglama qisilgan aylanma ellipsoidni ($7.5.1_a$-rasmga qarang), $b<c$ bo'lsa, cho'zilgan aylanma ellipsoidni ($7.5.1_b$-rasmga qarang), $b=c$ bo'lganda esa tenlama

$$x^2+y^2+z^2=b^2$$

ko'rinishni olib, u sferani ifodalashi ma'lumdir.





7.5.1- rasm.

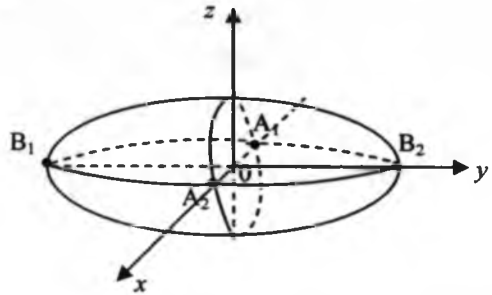
Ellipsoidnimg shaklini tekshirish uchun uni koordinatalar tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesimlarini qarash kifoya.

Masalan, (7.5.1) ellipsoidni $z=0$ tekislik bilan kesishish chizig'i ushbu

$$\left|\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0\end{array}\right| \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan beriladi. Bu chiziq yarim o'qlari a va b dan iborat bo'lib, Oxy tekisligida yotuvchi $A_1B_1A_2B_2$ ellipsdir (7.5.2-rasmga qarang). Xuddi shunga o'xshash,

$y=0$, $x=0$ tekisliklar bilan kesishish chizig‘i ham ellipsdan iborat bo‘ladi.



7.5.2- rasm.

7.6. Giperboloidlar

Oyz tekislikda $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ tenglama bilan berilgan giperbolaning *Oz* o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasini tuzaylik. 7.1-bandda qilingan mulohazalardan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Bu tenglama bilan berilgan sirt *bir pallali aylanma giperboloid* deyiladi (7.6.1-rasm).

Agar *Oyz* tekislikda yuqoridagiga qo‘shma

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

giperbolani *Oz* o‘q atrofida aylantirsak, hosil bo‘lgan sirt tenglamasi

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

ko'rinishda bo'lib, uni *ikki pallali aylanma giperboloid* deyiladi (7.6.2-rasm).

Umuman, tenglamasi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (7.6.1)$$

ko'rimshda bo'lgan sirt *bir pallali giperboloid*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (7.6.2)$$

ko'rinishda bo'lsa, *ikki pallali giperboloid* deb ataladi.

Agar (7.6.1) bir pallali giperboloidni $z=h$ tekislik bilan kesilsa, kesim

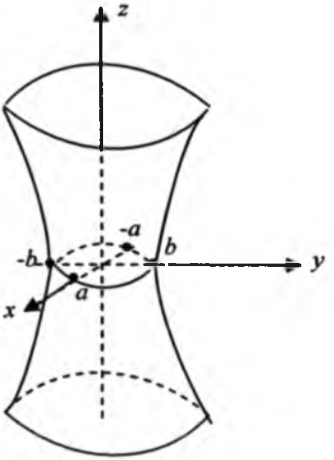
$$\left|\begin{matrix}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1,\\ z=h\end{cases} \left(a_1^2=a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right), b_1^2=b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)\right)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi hamda yarim o'qlari a_1 va b_1 bo'lgan ellips bo'ladi. Agar Oyz (yoki Oxz) tekislikka parallel tekislik bilan kesilsa, kesimda giperbola hosil bo'ladi. Masalan, $x=h$ tekislik (7.6.1) bir pallali giperboloidda

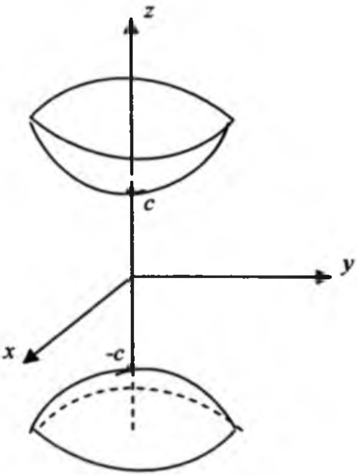
$$\left\{\frac{y^2}{b_2}-\frac{z^2}{c_2}=1 \qquad \left(b_2=b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right), c_2=c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)\right)\right.$$

giperboladan iborat kesim hosil qiladi.

Agar (7.6.2) ikki pallali giperboloidnmg $z=h$ tekislik bilan kesimi qaralsa, $|h|>c$ bo'lganda kesimda ellips hosil bo'ladi, $|h|=c$ bo'lganda bitta nuqta, $|h|<c$ bo'lganda kesim hosil bo'lmaydi. $x=h$ ($y=h$) tekislik bilan kesimi giperboladan iborat bo'lishini ko'rish qiyin emas.



7.6.1- rasm.



7.6.2- rasm.

7.7. Paraboloidlar

Koordinatalar fazosida ushbu

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad (7.7.1)$$

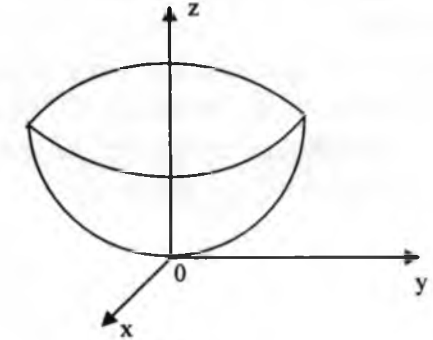
tenglama bilan ifodalangan sirt *elliptik paraboloid* deyiladi, bunda $p\cdot q>0$. Agar $p=q$ bo‘lsa, elliptik paraboloid

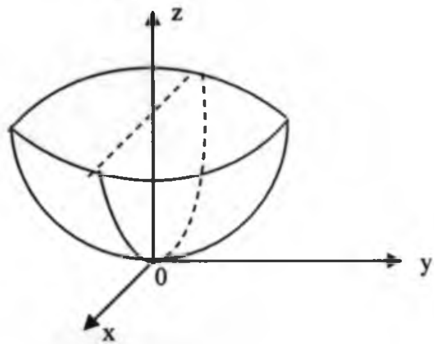
$$\begin{cases} x^2=2pz, \\ y=0 \end{cases}$$

parabolani Oz o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanish sirtidan iborat bo‘ladi (7.7.1-rasm). $p\neq q$ bo‘lgan umumiy holda elliptik paraboloid aylanma sirt bo‘lmaydi. Uning Oz o‘qqa perpendikulyar tekislik bilan kesimi ellipsdan iborat bo‘ladi (7.7.2-rasm).

(7.7.1) elliptik paraboloidning Ox (yoki Oy) o'qga perpendikulyar tekislik bilan kesimi paraboladir.

(7.7.1) tenglamada x va y o'zgaruvchilarning faqat kvadratlari qatnashganligi sababli Oxz va Oyz tekisliklar sirtning simmetriya tekisliklari bo'ladi (7.7.2-rasmga qarang).





7.7.1-rasm. 7.7.2-rasm.

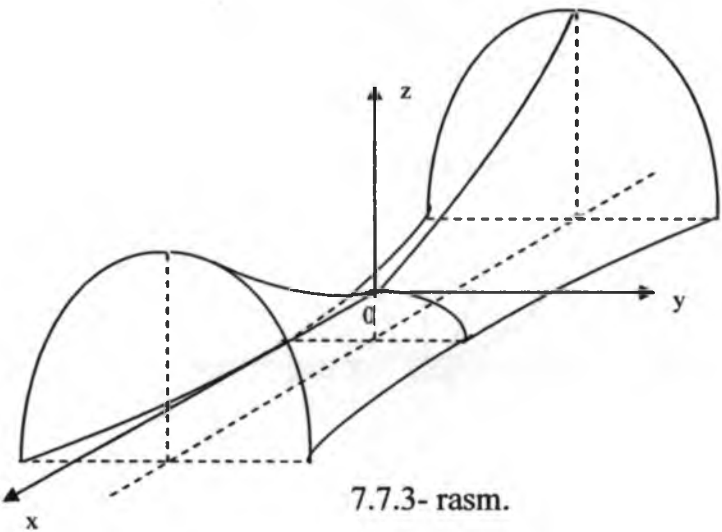
Agar,

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z \qquad (7.7.2)$$

tenglamada $pq>0$ bo'lsa, unga mos sirt *giperbolik paraboloid* deb ataladi.

(7.7.2) sirtning Oz o‘qga perendikulyar tekislik bilan kesimi giperbola ($z=0$ bo‘lganda kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq), Ox (yoki Oy) o‘qga perpendikulyar tekislik bilan kesimi paraboladir.

Giperbolik paraboloid shakli «egarsimon» bo‘lib, uni biror parabola uchini uning tekisligiga perpendikulyar tekislikda yotuvchi o‘qi birinchi parabola o‘qiga qarama-qarshi yo‘nalishli bo‘lgan ikkinchi parabola ustida parallel harakatlantirish bilan olish mumkin (7.7.3-rasm). Agar bu jarayonda ikala parabola o‘qlari bir xil yo‘nalishli bo‘lsa, natija elliptik paroboloid bo‘lishini ko‘rish qiyin emasdir (7.7.2-расм).



7.7.3- rasm.

7-bobga doir mashqlar

1. $\begin{cases} y = z, \\ x = 0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqning Oz o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan aylanma sirtning tenglamasini tuzing.

Javob: $x^2+y^2-z^2=0$ - doiraviy konus.

2. Yo‘naltiruvchisi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ z = 0 \end{cases}$$

chiziqdan iborat bo‘lgan va yasovchisi $\vec{a}\,(1;1;1)$ vektorga parallel bo‘lgan silindrik sirtning tenglamasini yozing.

Javob: $(x-z)^2+(y-z)^2=4(x-z)$.

3. Uchi $C(0;0;8)$ nuqtada va yo‘naltiruvchisi

$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

bo‘lgan konus sirtining tenglamasini tuzing.

Javob: $4y^2+xz-8x=0$

4. $3x^2+36y^2+81z^2-324=0$ tenglama qanday sirtni tasvirlaydi?

Javob: $\dfrac{x^2}{108}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$ - ellipsoid.

5. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y = 0 \end{cases}$ ellipsning Oz o‘q atrofida aylanishidan xosil bo‘lgan sirtning tenglamasini yozing.

Javob: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

6. $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{81}+\dfrac{z^2}{36}=1$ ellipsoidning koordinata tekisliklari bilan kesilishidan hosil bo‘lgan ellipslarning tenglamalarini yozing.

7. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ egri chiziqning *a*) *Oz* o‘q; *b*) *Ox* o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtning tenglamasini yozing.

Javoblar: *a*) $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ - bir pallali giperboloid;

b) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2+z^2}{c^2} = 1$ - ikki pallali giperboloid.

8. $y^2=2px$ parabolaning *Ox* o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma sirtning tenglamasini tuzing.

Javob: $y^2+z^2=2px$ - elliptik paraboloid.

Ikkinchi tartibli sirt tenglamalari bo‘yicha bilimingizni sinab ko‘ring

1. Ikkinchi tartibli sirtning umumiy tenglamasini yozing.
2. Aylanma sirtga ta’rif bering.
3. Aylanma sirt tenglamasini yozing.
4. Silindrik sirtga ta’rif bering.
5. Doiraviy silindrik sirtning tenglamasini yozing.
6. Konus sirtga ta’rif bering.
7. Doiraviy konus sirt tenglamasini yozing.
8. Ellipsoidning sodda tenglamasini yozing.
9. Bir pallali va ikki pallali giperboloidlarning sodda tenglamalarini yozing.
10. Elliptik va giperbolik paraboloidlarning tenglamasini yozing.

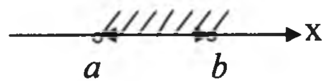
8-BOB. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

8.1. Haqiqiy sonli to'plamlar

Yuqorida to'plamning elementlari turli tabiatli bo'lishi mumkinligini ko'rdik. Oliy matematikani o'rganishda ko'proq *sonli (elementlari sonlardan iborat bo'lgan) to'plamlar* bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Bu o'rinda, bizga oldindan ma'lum bo'lgan *N – natural, Z – butun, Q – ratsional, J – irratsional, R – haqiqiy* sonli to'plamlarni hamda ratsional va irratsional sonli to'plamlar birgalikda haqiqiy sonlar to'plamini tashkil etishini yana bir bor eslatamiz. Shu bilan birga kurs davomida kerak bo'ladigan ba'zi bir sonli to'plamlarning ta'rifini keltiramiz. a va b haqiqiy sonlar berilgan va $a<b$ deb faraz qilamiz.

8.1.1–ta'rif. $a < x < b(a < b)$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x haqiqiy sonlar (sonlar o'qidagi nuqtalar) to'plami *oraliq* yoki *interval* deyiladi va $(a;b)$ orqali belgilanadi. 8.1.1-rasmda intervalning geometrik tasviri ifodalangan bo'lib, undagi ko'rsatkich uning uchidagi nuqta to'plamga tegishli emasligini bildiradi.

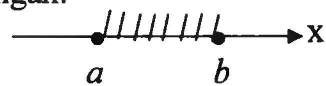
$$(a;b) = \{x : x \in R,\ \ a < x < b\}.$$



8.1.1-rasm.

8.1.2–ta'rif. $a \le x \le b$ qo'sh tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha x haqiqiy sonlar to'plami *kesma* yoki *segment* deyiladi va $[a;b]$ orqali belgilanadi. 8.1.2-rasmda kesmaning geometrik tasviri ifodalangan.

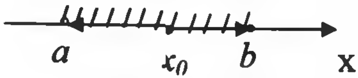
$$[a;b] = \{x : x \in R,\ \ a \le x \le b\}.$$



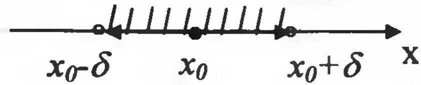
8.1.2- rasm.

8.1.3-ta'rif. $a \le x < b$ yoki $a < x \le b$ qo'sh tengsizliklarni qanoatlantiradigan haqiqiy sonlar to'plami *yarim oraliq* deyiladi va $[a;b)$ yoki $(a,b]$ orqali belgilanadi. Ba'zan ular *yarim interval (yarim segment)* deb ham ataladi.

8.1.4-ta'rif. Berilgan x_0 nuqtani o'z ichiga oladigan har qanday $(a;b)$ oraliq x_0 *nuqtaning atrofi* deyiladi (8.1.3-rasm).



8.1.3- rasm.



8.1.4- rasm.

Ko'pincha, x_0 nuqtaning $\delta > 0$ atrofi tushunchasi qo'llaniladi, bu $(x_0 - \delta, \ \ x_0 + \delta)$ dan iboratdir (8.1.4-rasm).

$$(x_0 - \delta, \ \ x_0 + \delta) = \{x : x \in R, \ |x - x_0| < \delta\}.$$

Shuningdek, nuqtaning *yaqin (qisqa) atrofi* tushunchasi ham qo'llaniladi. x_0 nuqtaning *yaqin atrofi* deb, uning atrofidan x_0 nuqtaning o'zini chiqarib tashlash natijasida olingan to'plamga aytiladi (8.1.5*a*-rasm). x_0 *nuqtaning* $\delta>0$ *yaqin atrofi* deyilganda $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$ tushunilishi tabiiydir (8.1.5b-rasm). Shuningdek, $(x_0 - \delta; x_0)$ ni x_0 nuqtaning chap, $(x_0; x_0 + \delta)$ ni esa o'ng δ yaqin atrofi deyiladi.

8.1.5- rasm.

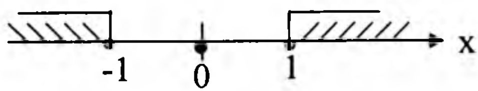
8.1.5-ta'rif. Agar *D* sonli to'plam berilgan bo'lib, x_0 nuqtaning ixtiyoriy yaqin atrofida unga tegishli nuqta mavjud bo'lsa, x_0 *D ning quyuqlik (limitlik) nuqtasi* deb ataladi.

8.1.6–ta'rif. Agar $x_0 \in D$ bo'lib, x_0 ning shunday yaqin atrofi mavjud bo'lsaki, unda D to'plamning bironta ham elementi bo'lmasa x_0 ni *D ning yakkalangan (ajralgan) nuqtasi* deyiladi.

Masalan, $\sqrt{x^2(x^2-1)}$ ifoda haqiqiy sohada qaralayotgan bo'lsa, bu ifoda ma'noga ega bo'ladigan sonli to'plam

$$D = (-\infty;-1] \cup \{0\} \cup [1;+\infty)$$

bo'lib, bu to'plamning 0 elementi yakkalangandir, chunki, 0 nuqtaning $(-1;0)\cup(0;1)$ yaqin atrofida D ning birorta ham elementi yo'qdir (8.1.6-rasm).



8.1.6- rasm.

8.1.7- ta'rif. Agar x_0 nuqta o'zining biror atrofi bilan D to'plamga tegishli bo'lsa, uni D ning ichki nuqtasi deyiladi.

Sonli to'plamlar orasida *cheksiz oraliqlar* ham muhim bo'lib, ular quyidagicha belgilanadi:

$(-\infty;+\infty) = R;\ (a,+\infty) = \{x : x \in R,\ x > a\};$

$$[a,+\infty) = \{x : x \in R,\ x \geq a\};$$
$$(-\infty,a) = \{x : x \in R,\ x < a\};$$
$$(-\infty,a] = \{x : x \in R,\ x \leq a\}.$$

8.2. Sonli to'plamlarning chegaralari va to'plamlarni solishtirish

8.2.1–ta'rif. Agar $X \subset R$ to'plamning barcha x elementlari uchun $x \geq a$ $(x \leq a)$ tengsizlikni qanoatlantiradigan a son mavjud bo'lsa, u holda X to'plam quyidan (yuqoridan) chegaralangan va a sonni X ning *quyi* (*yuqori*) *chegarasi* deyiladi. Aks holda, agar X to‘plamning quyi (yuqori) chegarasi mavjud bo‘lmasa, u *quyidan* (*yuqoridan*) *chegaralanmagan* deyiladi.

To‘planining quyi (yuqori) chegarasi tushunchasi bilan birga uning aniq quyi (aniq yuqori) chegarasi tushunchasi ham muhim ahamiyatga egadir.

A sonli to‘plamning *aniq quyi (aniq yuqori) chegarasi* deb shunday *m(M)* songa aytiladiki, $\forall x \in A,\ x \ge m(x \le M)$ va $\forall \varepsilon > 0$ uchun A to‘plamning $x < m + \varepsilon(x > M - \varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi kamida bitta elementi mavjud bo‘ladi. A to‘plamnimg *aniq quyi (aniq yuqori) chegarasini infA (supA) kabi belgilanadi.*

Eslatma. Quyidan (yuqoridan) chegaralangan to‘plamning aniq quyi (aniq yuqori) chegarasi mavjudligi isbotlangan bo‘lib, bunda irratsional va, oxir oqibat, haqiqiy son tushunchasini mukammal tarzda kiritish uchun foydalanilgan Dedekind kesimi tushunchasi qo‘llanilgandir [6],[7]. Bu isbotni keltirmay uni o‘quvchinimg o‘ziga matematik analiz kursidan o‘rganishni tavsiya etamiz.

8.2.2–ta’rif. Ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan to‘plam *chegaralangan to ‘plam* deb ataladi.

Masalan, 1) Barcha natural sonlar to‘plami N quyidan chegaralangandir. Unimg quyi chegarasi sifatida –1; 0; 0,5 va ixtiyoriy 1 dan katta bo‘lmagan sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lib, *infN=1* dir, lekin, u yuqoridan chegaralanmagandir.

2) Barcha to‘g‘ri kasrlar to‘plamini T desak, u ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan, demak, u chegaralangan to‘plam bo‘lib, $\inf T = 0$, $\sup T = 1$ ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

3) $R=(-\infty;+\infty)$ ham quyidan, ham yuqoridan chegaralanmagan to‘plamdir.

Maktab matematika kursida cheksiz to‘plamlar bevosita o‘rganilmasa-da bunday to‘plamlarning talaygina misollari uchraydi: natural, butun, ratsional, haqiqiy sonlar, tekislikdagi nuqtalar to‘plamlari va hokazo.

Matematikada to‘plamlarni ularning elementlari «soni» bo‘yicha taqqoslash muhim ahamiyat kasb qiladi. Agar to‘plamlar chekli bo‘lsa, bu masala juda oson hal qilinadi, ya’ni elementlari soni katta bo‘lgan to‘plam «quvvatli»roq hisoblanadi, agar elementlari soni teng bo‘lsa, ular ekvivalent (teng kuchli) hisoblanadi. Cheksiz to‘plamlar uchun bunday qilib bo‘lmaydi. Agar ekvivalent to‘plamlar tushunchasini quyidagicha kiritilsa, masala hal bo‘ladi.

8.2.3–ta’rif. Agar A to‘plamning har bir elementiga qandaydir usul bilan B to‘plamning faqat bitta elementi mos qo‘yilgan va, aksincha, B to‘plamning ham har bir elementiga A to‘plamning faqat bitta elementi mos qo‘yilgan (ya’ni A va B to‘plamlar elementlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin) bo‘lsa, bu to‘plamlar *ekvivalent (teng kuchli) to‘plamlar* deyiladi va $A\sim B$ kabi belgilanadi.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, ikkita chekli to‘plamlar ekvivalent bo‘lishlari uchun ularning elementlari soni teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Quyidagilar o‘rinlidir:

1) $A\sim A$ (refleksivlik xossasi);

2) $A\sim B \Leftrightarrow B\sim A$ (simmetriklik xossasi);

3) $A\sim B$, $B\sim C \Rightarrow A\sim C$ (tranzitivlik xossasi).

Cheksiz to‘plamlar ustida ish olib borilganda ko‘pincha sanoqli va sanoqsiz to‘plamlar tushunchalariga duch kelinadi.

8.2.4–ta'rif. Natural sonlar to'plamiga ekvivalent bo'lgan to'plam *sanoqli to'plam* deyiladi.

Bu ta'rifdan biror *A cheksiz to'plam sanoqli bo'lishi uchun uning elementlarini barcha natural sonlar yordamida nomerlab chiqish mumkinligi zarur va yetarli* ekanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy sanoqli to'plamni $\{a_1,...,a_n,...\}$ ko'rinishda yozish mumkin.

Masalan, barcha butun sonlar to'plami

$$Z = \{...,-1;0;1;...\}$$

sanoqli to'plamdir. Agar $\sin x = \frac{1}{2}$ tenglamani olsak, uning yechimlarini

$$x_n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad n \in z$$

ko'rinishda yozilishi yechimlarining to'plami sanoqli ekanini bildiradi.

Sanoqli to'plam cheksiz to'plamlarnimg eng soddasidir.

8.2.5–ta'rif. Sanoqli bo'lmagan cheksiz to'plam *sanoqsiz to'plam* deyiladi.

Masalan, $[0;1]$ kesmadagi haqiqiy sonlar to'plami va fazodagi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami sanoqsiz to'plamlarga misol bo'la oladi.

8.3. Akslantirish

8.3.1–ta'rif. Agar ikkita X va Y to'plam berilgan bo'lib, X to'plamning har bir x elementiga biror f qoidaga binoan Y to'plamnimg aniq bitta y elementi mos qo'yilgan bo'lsa, *X to'plamni Y to'plamga f akslantirish* berilgan deyiladi va

$$f : X \Rightarrow Y$$

ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda y elementni x elementning f akslantirishdagi *aksi (obrazi)* deyiladi va $y = f(x)$ ko'rinishda yoziladi; x ni esa y ning *asli (proobrazi)* deyiladi.

X to'plamning $f(x) = y$ munosabatni qanoatlantiradigan x elementlari to'plami y elementning f akslantirishdagi *to'la asli* deyiladi va $f^{-1}(y)$ ko'rinishda yoziladi, ya'ni

$$f^{-1}(y) = \{x : x \in X,\ f(x) = y\} \subset X .$$

X to'plamni Y to'plamga turli xil usullar bilan akslantirish mumkin. Bular orasida teskarilanuvchi deb ataladigan akslantirishlar muhim sinfni tashkil qiladi. Agar $f : X \Rightarrow Y$ akslantirishda har bir $y \in Y$ olinganda $f(x) = y$ munosabat yagona $x \in X$ uchun bajarilsa, f *o'zaro bir qiymatli akslantirish* deyiladi. Ravshanki, $f : X \Rightarrow Y$ akslantirish o'zaro bir qiymatli bo'lishi uchun Y to'plamning har bir elementi X to'plamdagi faqat bitta elementning aksi, ya'ni har bir $y \in Y \Rightarrow f^{-1}(y)$ to'plamning $x \in X$ yagona elementi mavjud bo'lishi kerak. Bu holda f *akslantirish teskarilanuvchi* deyiladi.

Quyidagi misollarni keltramiz.

1) Agar A ikkinchi tartibli elementlari haqiqiy sonlardan iborat kvadrat matritsalarning to'plami bo'lsa, bu to'plamning har bir elementiga uning determinanti vositasida bitta haqiqiy sonni mos qo'yish mumkindir, ya'ni

$$f : A \Rightarrow R$$

akslantirishga egamiz. Agar $a \in R$ ni olsak, $\det A = a$ bo'ladigan cheksiz ko'p ikkinchi tartibli kvadrat matritsalar mavjudligiga, ya'ni

$$f^{-1}(a) = A_a \subset A$$

cheksiz to'plam ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Demak, bu akslantirish teskarilanuvchi emasdir.

2) Tayin olingan guruhdagi studentlar to‘plamimi C desak, uning har bir elementi bo‘lgan studentga guruh jurnalidagi ro‘yxat bo‘yicha bitta nomerni mos qo‘yilgan ekanligidan, bu nomerlar to‘plamini D bilan belgilasak,

$$f : C \Rightarrow D$$

akslantirishni olamiz. Bu akslantirish teskarilanuvchidir. Haqiqatdan ham, D ga tegishli har bir nomer guruhning faqat bitta studentiga berilgandir.

8.4. Funksiya

Matematik analizda asosan sonli to‘plamni sonli to‘plamga akslantirishiar qaraladi. Bunday akslantirish *funksional bog‘lanish* deb ataladi. Funksional bog‘lanishlarning xususiy holi bo‘lgan *funksiya* tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uning ta’rifini keltiramiz:

8.4.1–ta’rif. *Agar X sonli to‘plamning har bir x elementiga biror f qonunga binoan Y sonli to‘plamning faqat bitta y elementi mos qo‘yilgan bo‘lsa, y funksiya x esa uning argumenti deyiladi va $y = f(x)$ kabi yoziladi. Bu yerda X to‘plamni funksiyaning berilish yoki aniqlanish sohasi, Y to‘plam uning o‘zgarish sohasi yoki qiymatlar to‘plami deyiladi.*

Masalan:

1) $y = n!$ funksiya barcha manfiy bo‘lmagan butun sonlar to‘plami Z_0 da aniqlangan. Uning qiymatlar to‘plami $N_1 \subset N$ bo‘ladi. Ya’ni bu funksiya $Z_0 \Rightarrow N_1 \subset N$ akslantirish bo‘lib, $y = n!$ esa uning moslik qonunidir. Bu akslantirish teskarilanuvchi emas, chunki, $y=1$ qiymat n ning ikkita 0 va 1 qiymatlariga mos keladi.

2) Agar $[x]$ bilan x sonning butun qismini belgilasak, u holda $y=[x]$ funksiya barcha haqiqiy sonlar to‘plami R da aniqlangan bo‘lib, y ning qiymatlar to‘plami barcha butun sonlar to‘plami Z dan iborat bo‘ladi, ya’ni bu funksiya $R \Rightarrow Z$ akslantirish bo‘lib, $y=[x]$ esa moslik qonunidir.

Bu akslantirish ham teskarilanuvchi emas, masalan, y=0 qiymat $\forall x \in [0;1)$ bo‘lgan cheksiz ko‘p qiymatlarga mos keladi, ya’ni $f^{-1}(0)=[0;1)$ dir.

Agar moslik qonuni bilan birgalikda funksiyanirng aniqlanish sohasi ham ko‘rsatilgan bo‘lsa, u holda funksiya berilgan deb hisobianadi. Aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami haqiqiy sonlardan iborat haqiqiy o‘zgaruvchili haqiqiy funksiyalarnirng berilish usullarini keltiramiz:

1) Funksiya va argument qiymatlari orasidagi moslik biror matematik ifoda orqali aniqlangan bo‘lsa, *funksiya analitik usulda berilgan* deb ataladi.

Agar funksiya analitik usulda berilgan bo‘lib, y ga nisbatan $y=f(x)$ ko‘rinishda yechilgan bo‘lsa, tenglikning o‘ng tomonidagi ifoda *funksiyaning analitik ifodasi* deyiladi.

Masalan: $y=\dfrac{3x-1}{x^2+2x-3}$; $\quad y=-x^2+5.$

Aksariyat hollarda analitik usulda berilgan funksiyanirng aniqlanish sohasi oldindan ko‘rsatilmagan bo‘ladi. Bunday holda unirng aniqlanish sohasi sifatida uni aniqlovchi analitik ifoda ma’noga ega bo‘ladigan argumentning qiymatlari to‘plami qabul qilinadi va bazan uni *funksiyaning mavjudlik sohasi* deb ham yuritiladi. Masalan,

$$y=\frac{3x-1}{x^2+2x-3};$$

funksiyaning mavjudlik sohasi $(-\infty;-3) \cup (-3;1) \cup (1;+\infty)$ to‘plamdan iboratdir.

Ba'zan funksiya analitik usulda x argumentning funksiya aniqlanish sohasiga tegishli barcha qiymatlari uchun birgina ifoda bilan berilmasdan x argumentning ayrim qiymatlari uchun bir ifoda, boshqa qiymatlari uchun boshqa bir ifoda bilan berilishi mumkin, masalan, ushbu Dirixle funksiyasini olaylik:
$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in J.\end{cases}$$

Bu funksiya R da ikkita ifoda yordamida berilgan.

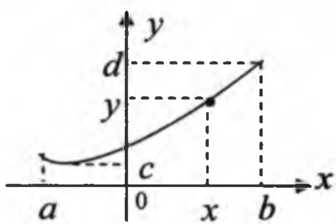
Shuningdek,
$$\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<-1,\\ 1-x, & -1\le x\le 0,\\ 1+x, & 0<x<1,\\ 2, & x\le 1\end{cases}$$
funksiya R da to'rtta ifoda yordamida berilgandir.

2) $y=f(x)$ funksiya biror D sohada berilgan bo'lsin.

8.4.2–ta'rif. xOy koordinatalar tekisligidagi abssissasi $x\in D$, ordinatasi $f(x)$ dan iborat bo'lgan nuqtalar to'plami $y=f(x)$ *funksiyaning grafigi* deyiladi.

Agar koordinatalar tekisligidagi nuqtalar to'plami Oy o'qqa parallel to'g'ri chiziq bilan bittadan ortiq umumiy nuqtaga ega bo'lmasa, u biror funksiyaning grafigi bo'ladi.

Koordinatalar tekisligida shunday nuqtalar to'plami berilsa, uni *grafik usulda berilgan funksiya* deyiladi. Grafikdagi nuqtaning abssissalar o'qidagi proyeksiyasi argument qiymatiga, ordinatalar o'qidagi proyeksiyasi esa funksiya qiymatiga mos keladi (8.4.1-rasm).



8.4.1-rasm.

Funksiyaning grafik usulda berilishi ko‘p tarqalgan hol bo‘lib, meteorologiya, kordiologiya va boshqa juda ko‘p sohalardagi o‘zi yozar asboblarda

hosil bo‘ladigan egri chiziqlar bunga misol bo‘la oladi.

3) Agar argumentning ma’lum tartibda olingan qiymatlariga mos keluvchi funksiyaning qiymatlari yozib qo‘yilgan bo‘lsa, *funksiya jadval usulda berilgan* deyiladi.

Masalan, logarifmik jadvallar, trigonometrik funksiya qiymatlarining jadvali funksiyaning jadval usulda berilishiga misol bo‘la oladi.

8.5. Funksiyalarning asosiy xossalari

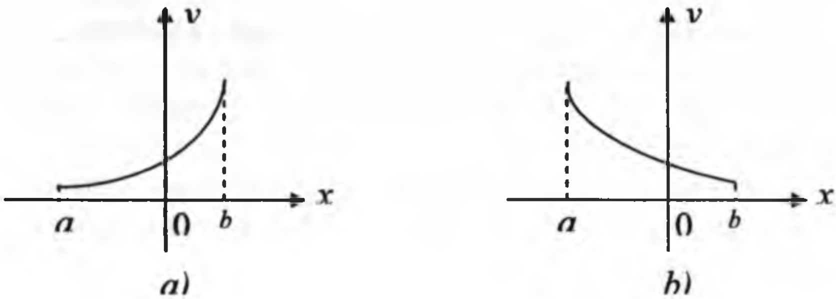
Matematik analizda funksiyalarni tekshirishda va ularni turli masalalarni yechishga tatbiq qilishda monotonlik, juftlik, toqlik, davriylik va chegaralanganlik kabi xossalarini e’tiborga olish qo‘l keladi. Quyida funksiyalarning ana shunday xossalari haqida so‘z yuritamiz.

1). Monotonlik. Agar funksiya *(a, b)* oraliqda aniqlangan bo‘lib, undan olingan argumentning katta qiymatiga funksiyaning *katta (kichik)* qiymati mos kelsa, bu funksiya *(a, b)* oraliqda *o‘suvchi (kamayuvchi)* deyiladi.

Yuqoridagi ta’rifda katta (kichik) so‘zi o‘rnida *kichik bo‘lmagan (katta bo‘lmagan)* so‘zlari ishlatilsa, *keng ma’noda o‘suvchi yoki kamaymovchi (keng ma’noda kamayuvchi yoki o‘smovchi)* funksiya ta’rifi kelib chiqadi.

O‘suvchi yoki kamayuvchi funksiyalar bir nom bilan *monoton* funksiyalar deb ataladi. Xuddi shunga o‘xshash, o‘smovchi yoki kamaymovchi funksiyalar *keng ma’noda monoton funksiyalar* deyiladi.

Agar *(a, b)* oraliqda funksiya o‘suvchi bo‘lsa, uning grafigi x chapdan o‘ngga qarab *(a, b)* da o‘zgarganda ko‘tarilib (8.5.1_a-rasm) , kamayuvchi bo‘lganda esa pasayib boradi (8.5.1_b-rasm).



8.5.1-rasm.

2). Juft va toq funksiyalar. *D* to‘plam elementlari uchun $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$ o‘rinli bo‘lsa, u *simmetrik to‘plam* deyiladi.

Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi *D(y)* simmetrik bo‘lib, $\forall x \in D(y)$ uchun

$$f(-x) = f(x) \qquad \big(f(-x) = -f(x)\big)$$

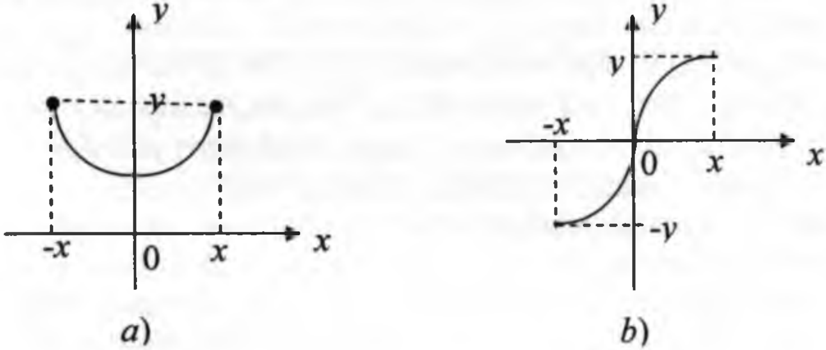
tenglik o‘rinli bo‘lsa, bu *funksiya juft (toq)* deyiladi.

Masalan, $y = x^2$, $y = \cos x$ juft; $y = x^3$, $y = \sin x$ esa toq funksiyalardir.

Juft funksiya grafigidagi biror *(x, y)* nuqtani olsak, *Oy* (ordinatalar) o‘qiga simmetrik bo‘lgan *(-x, y)* nuqta ham grafikka tegishlidir. Demak, juft funksiya grafigi ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik joylashgan bo‘lar ekan (8.5.2_a-rasm).

Xuddi shunga o‘xshash, toq funksiya grafigidagi *(x;y)* nuqtani olsak, *(-x;-y)* nuqta ham grafikka tegishlidir. *(x;y)* va *(-x;-y)* lar koordinatalar boshiga nisbatan markaziy simmetrik nuqtalar ekanligidan toq funksiya grafigi koordinatalar boshiga nisbatan markaziy simmetrik joylashganligi kelib chiqadi (8.5.2$_b$-rasm).

Demak, bunday funksiyalarni tekshirishda argumentning manfiy bo'lmagan (musbat bo'lmagan) qiymatlari uchun bu ishni bajarish kifoyadir.



8.5.2- rasm.

3). Davriy funksiyalar. Agar $y = f(x)$ funksiya uchun shunday $T \neq 0$ son mavjud bo'lib, bu funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy x uchun $x+T$ ham aniqlanish sohasiga tegishli va $f(x+T)=f(x)$ tenglik bajarilsa, $y = f(x)$ *davriy funksiya, T esa uning davri* deyiladi.

Agar $y = f(x)$ T davrli funksiya bo'lsa, $k \in Z$, $k \neq 0$ bo'lganda kT ham uning davri ekanligini ko'rsatish mumkin.

Masalan, $k=2$ bo'lgan holni olaylik:

$$x \in D(y) \Rightarrow x + T \in D(y) \Rightarrow x + 2T = (x+T) + T \in D(y)$$

hamda

$$f(x+T) = f(x), \qquad f((x+T)+T) = f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(x+2T) = f(x).$$

Demak, funksiya davriy bo'lsa, uning davri cheksiz ko'p bo'lar ekan.

Agar davriy funksiyaning eng kichik musbat davri mavjud bo'lsa, uni *asosiy* yoki *bosh davr* deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ va $y=\cos x$ lar bosh davri 2π ga, $y=tgx$ va $y=ctgx$ lar esa bosh davri π ga teng bo'lgan davriy funksiyalar ekanligi maktab matematika kursidan ma'lumdir.

Shuni ham aytish lozimki, davriy funksiyalarning barchasi ham bosh davrga ega bo'lavermaydi. Masalan, $y=C$ (C-o'zgarmas) funksiyani qarasak, u davriy bo'lib, uning davri ixtiyoriy $T\neq 0$ son bo'la oladi. Ammo, uning eng kichik musbat davri mavjud emas, demak, bosh davri yo'qdir.

Xuddi shunga o'xshash, Dirixle funksiyasini olsak, u davriy funksiya sifatida, uning davri ixtiyoriy noldan farqli ratsional son bo'lib, eng kichik musbat ratsional son mavjud emasligidan bosh davri yo'qligi kelib chiqadi.

Haqiqatdan ham, Dirixle funksiyasi:

$$y=\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in J;\end{cases}$$

bu yerda Q – ratsional, J – irratsional sonlar to'plamlari.

Agar, $T\in Q,\quad T\neq 0$ bo'lsa,

$$x\in Q\Rightarrow x+T\in Q,\quad \chi(x)=1,\quad \chi(x+T)=1;$$

$$x\in J\Rightarrow x+T\in J,\quad \chi(x)=0,\quad \chi(x+T)=0.$$

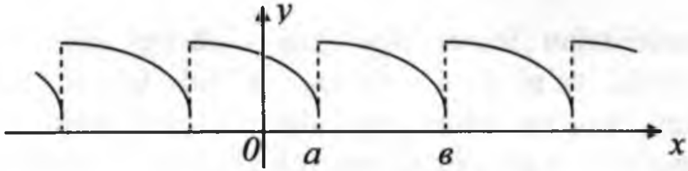
Ikkala holda ham $\chi(x+T)=\chi(x)$ kelib chiqadi.

Irratsional son Dirixle funksiyasining davri bo'la olmaydi. Haqiqatdan ham,

$T\in J,\ x\in Q\Rightarrow x+T\in J\Rightarrow \chi(x)=1, \chi(x+T)=0$ dir.

Endi, bosh davrli davriy funksiya grafigini qarasak, hir bosh davr oralig'idagi grafik o'ng va chap tomonga sonlar o'qi bo'yicha aynan takrorlanadi.

Qisqa qilib aytganda, bosh davri mavjud bo'lgan davriy funksiya xossalarini uzunligi uning bosh davriga teng bo'lgan oraliqda o'rganish kifoyadir (8.5.3-rasm).



8.5.3- rasm.

4). Funksiyaning chegaralanganligi. Agar $f(x)$ funksiya *D* sohada aniqlangan bo‘lib, shunday *M (m)* son mavjud bo‘lsaki,

$$\forall x \in D, \ f(x) \leq M \ \ (f(x) \geq m)$$

bajarilsa, bu *funksiya D sohada yuqoridan (quyidan) chegaralangan* deyiladi.

Ham yuqoridan ham quyidan chegaralangan funksiyani *chegaralangan* deyiladi.

Chegaralangan funksiya uchun quyidagi o‘rinli bo‘lishiga ishonch hosil qilish osondir: *f(x) funksiya chegaralangan bo‘lishi uchun uning aniqlanish sohasiga tegishli x argumentning barcha qiymatlari uchun* $|f(x)| \leq M$ *tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan manfiy bo‘lmagan M sonning mavjud bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Masalan, $f(x) = Sinx$ funksiyani olsak, u $D = R = (-\infty; +\infty)$ sohada aniqlangan bo‘lib, ma’lumki, $|Sinx| \leq 1$ dir. Demak, bu funksiya *R* da chegaralangandir.

8.6. Teskari funksiya

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya biror X sohada aniqlangan bo‘lib, uning o‘zgarish sohasi Y to‘plamdan iborat bo‘lsin. Bu funksiya

$$f : X \Rightarrow Y$$

akslantirishdan iborat ekanligini e'tiborga olib, u teskarilanuvchi, ya'ni $\forall y \in Y$ uchun $f^{-1}(y) = (x : x \in X, f(x) = y)$ to'plam yagona elementga ega bo'lgan holni qarasak, qandaydir $x = \varphi(y)$ funksiyaga ega bo'lamiz va uni berilgan $y = f(x)$ funksiyaga *teskari funksiya* deb ataymiz.

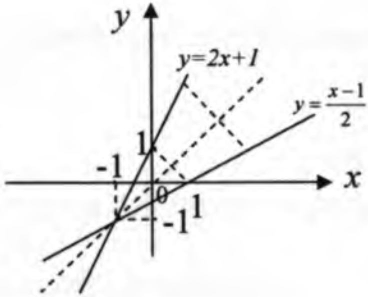
$y = f(x)$ ga teskari bo'lgan $x = \varphi(y)$ funksiyada ham an'anaviy belgilashga o'tib, $y = \varphi(x)$ funksiyani olamiz. Odatda, $y = f(x)$ ga teskari funksiya deyilganda oxirgi $y = \varphi(x)$ funksiya tushuniladi va, ko'pincha, $y = f^{-1}(x)$ kabi belgilanadi. Kezi kelganda, bunday belgilashni teskari qiymat bilan adashtirib yubormaslik lozimligini eslatamiz. Undan tashqari, berilganga teskari funksiya mavjud bo'lsa, ular *o'zaro teskari funksiyalar* bo'lishi ravshandir.

Masalan, $y = 2x + 1$ funksiyani qarasak, u R da aniqlangan bo'lib, o'zgarish sohasi ham R dir. $y \in R$ uchun $x = \dfrac{y-1}{2}$ ni hosil qilish qiyin emas. Oxirgida x va y larning o'rinlarini almashtirib, berilganga teskari funksiyaga ega bo'lamiz:

$$y = \frac{x-1}{2}.$$

O'zaro teskari funksiyalarning grafiklari koordinatalar tekisligining birinchi va uchinchi choraklari (burchaklari) bissektrisasiga (ya'ni $y = x$ to'g'ri chiziqqa) nisbatan simmetrik bo'lishiga osongina ishonch hosil qilish mumkin.

Masalan, bu fikrning to'g'ri ekanligini $y = 2x + 1$ va $y = \dfrac{x-1}{2}$ o'zaro teskari funksiyalar grafiklari bo'lgan 8.6.1-rasmda ko'rish mumkin.



8.6.1- rasm.

8.7. Murakkab funksiya (funksiyalarning superpozitsiyasi)

Faraz qilaylik, X sohada $z = \varphi(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, uning o'zgarish sohasi Z dan iborat, Z sohada esa $y = f(z)$ funksiya aniqlangan bo'lsm. U vaqtda, X sohada $y = f(\varphi(x))$ aniqlangan bo'ladi va uni *murakkab funksiya* yoki φ va *f funksiyalarning superpozitsiyasi* deb ataladi. Ba'zan, bu *funksiyaning funksiyasi* deb ham yuritiladi.

Yuqorida keltirilgan murakkab funksiya tushunchasida x argument y funksiyadan iborat bo'lib, z funksiya oraliq o'zgaruvchi (argument) sifatida qatnashishi ravshandir. Murakkab funksiya uchun bir nechta oralik argumentlar qatnashishi mumkin. Masalan,

$$y = f(\varphi(\phi(x)))$$

murakkab funksiya, $z = \varphi(u)$, $u = \phi(x)$ oralik o'zgaruvchilar yordamida hosil qilingandir.

Qisqa qilib aytganda, funksiya argumenti o'rniga funksiya qo'yib hosil qilingan funksiya murakkab funksiyadir. Bu argument o'rniga funksiya qo'yish amali (superpozitsiyalash) bir necha marta bo'lishi mumkinligini eslatamiz va uni *murakkab funksiya hosil qilish jarayoni* deb ataymiz.

Masalan,

$y = Sin\sqrt{x^2+1}$ ni $u = x^2$, $\vartheta = u + 1$, $z = \sqrt{\vartheta}$, $y = Sinz$ funksiyalarning superpozitsiyasi deb qarash mumkin.

8.8. Asosiy elementar funksiyalar

Maktab matematika kursidan ma'lum bo'lgan quyidagi funksiyalar *asosiy elementar funksiyalar* deb ataladi:

1) O'zgarmas funksiya: $y = C$, bu yerda $C \in R$ o'zgarmas son;

2) Darajali funksiya: $y = x^{\alpha}$ $\alpha \in R, \alpha \neq 0$;

3) Ko'rsatkichli funksiya: $y = a^x$, $a \in R^+$, $a \neq 1$;

4) Logarifmik funksiya: $y = \log_a x$, $a \in R^+$, $a \neq 1$;

5) Trigonometrik funksiyalar: $\sin x$, $\cos x$, tgx, $ctgx$;

6) Teskari trigonometrik funksiyalar:

$\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$;

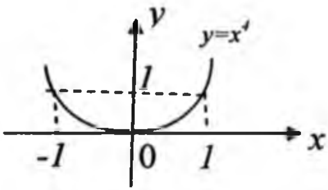
Demak, asosiy elementar funksiyalar 12 ta ekan.

Endi, asosiy elementar funksiyalarning aniqlanish sohalarini, ba'zi bir xossalarim va ularning grafiklarini ko'rib chiqamiz:

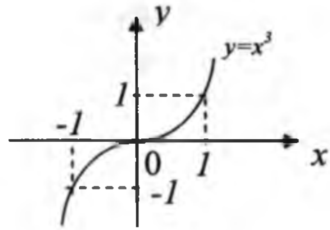
1) O'zgarmas funksiya uchun masala ravshandir.

2) $y = x^{\alpha}$ darajali funksiya:

a) α - natural son bo'lsa, funksiyaning aniqlanish sohasi *R* bo'lib, o'zgarish sohasi esa α toq bo'lganda R dan, juft bo'lganda esa $[0;+\infty)$ dan iboratdir. Bu funksiyaning grafigi α=4 va α=3 bo'lganda mos ravishda 8.8.1- va 8.8.2-rasmlarda tasvirlangandir.

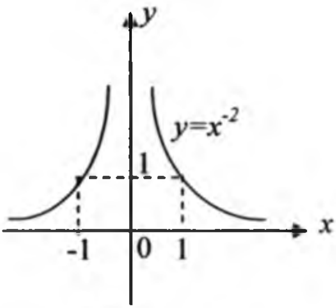


8.8.1-rasm.

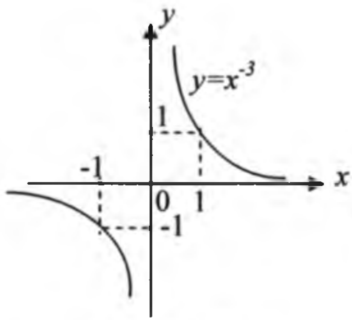


8.8.2-rasm.

b) α - manfiy butun son bo'lsa, funksiya x ning *0* dan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan bo'lib, aniqlanish sohasi $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ dan, o'zgarish sohasi esa -α toq bo'lganda $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ dan, juft bo'lganda esa $(0;+\infty)$ dan iboratdir. α=-2 va α=-3 bo'lganda funksiyaning grafigi 8.8.3- va 8.8.4-rasmlarda tasvirlangan.



8.8.3- rasm.



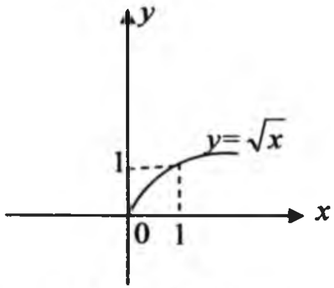
8.8.4- rasm.

c) α - ratsional kasr son bo'lsa, quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

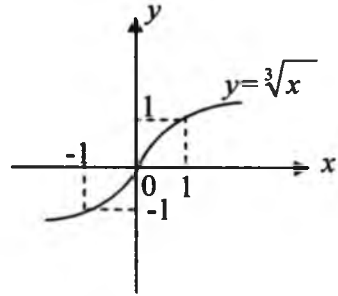
$\alpha=\dfrac{1}{n}$ bo'lib, n ixtiyoriy juft natural son (n=2k, k=1,2,3,…) bo'lsin. U holda, manfiy bo'lmagan sonning arifmetik ildizini e'tiborga olgan holda

$$y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[2k]{x}$$

funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $[0;+\infty)$ dan o‘zgarish sohasi ham $[0;+\infty)$ dan iborat bo‘ladi. Funksiyaning grafigi, masalan, $n=2$ da 8.8.5-rasmda tasvirlangandir.



8.8.5- rasm.



8.8.6- rasm.

$\alpha=\dfrac{1}{n}$ bo‘lib, n ixtiyoriy toq natural son ($n=2k+1$, $k=1,2,3,...$) bo‘lsin. Bu holda,

$$y=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[2k+1]{x}$$

bo‘lib, bu funksiyaning aniqlanish sohasi ham o‘zgarish sohasi ham R bo‘ladi. Bu funksiyaning grafigi, masalan, $n=3$ da 8.8.6-rasmda tasvirlangan ko‘rimshda bo‘ladi.

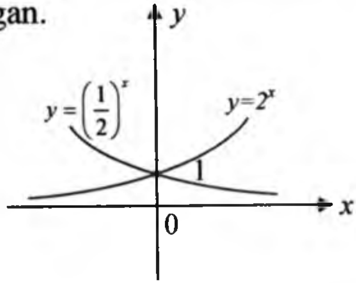
$\alpha=\dfrac{m}{n}$ $(n\in N, m\in Z,\ m\neq 0)$ bo‘lgan holda $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$ ekanligini hisobga olib, yuqoridagidek fikr yuritish kifoyadir.

d) Agar α musbat irratsional son bo‘lsa, darajali funksiya o‘suvchi bo‘lib, aniqlanish sohasi ham o‘zgarish sohasi ham $[0;+\infty)$ dan; manfiy irratsional son bo‘lganda esa, kamayuvchi bo‘lib, $(0;+\infty)$ dan iboratdir.

3) $y=a^x$ ko‘rsatkichli funksiya.

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi (-∞; +∞) dan o‘zgarish sohasi esa (0; +∞) dan iborat bo‘lib, uning grafigi (0; 1) nuqta orqali o‘tadi; $a>1$ bo‘lganda o‘suvchi va $0< a <1$ da esa kamayuvchi funksiyadir.

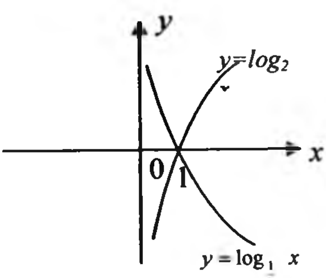
Masalan, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=2^x$ funksiyalarning grafiklari 8.8.7-rasmda tasvirlangan.



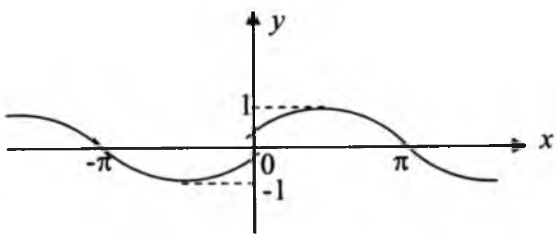
8.8.7- rasm.

4) $y=\log_a x$ logarifmik funksiya. Bu $y=a^x$ ko‘rsatkichli funksiyaga teskari bo‘lgan funksiya ekanligi malumdir.

Uning aniqlanish sohasi (0; +∞) dan, o‘zgarish sohasi (-∞; +∞) dan iborat bo‘lib, grafigi (1; 0) nuqta orqali o‘tadi; $a>1$ bo‘lganda o‘suvchi, $0<a<1$ bo‘lganda esa kamayuvchidir. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_2 x$ funksiyalar grafigi 8.8.8-rasmda tasvirlangan.



8.8.8- rasm.

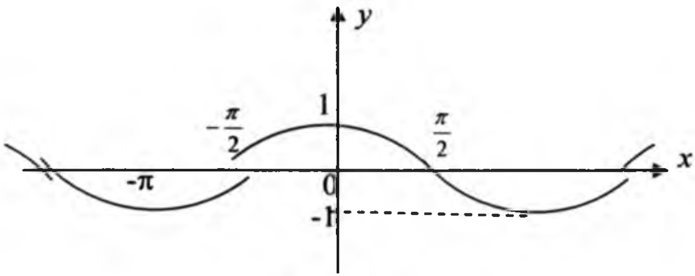


8.8.9- rasm.

5) Trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar ham maktab matematika kursidan ma'lum bo'lgani uchun bu yerda ular haqida qisqacha ma'lumot berishni lozim topdik.

a) $y = \sin x$ aniqlanish sohasi R, o'zgarish sohasi [-1; 1], bosh davri 2π bo'lgan davriy hamda toq funksiyadir (8.8.9-rasm).

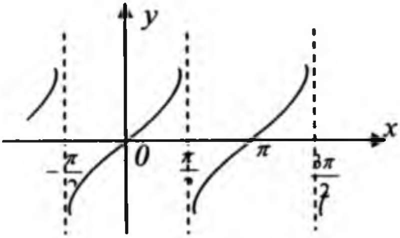
b) $y = \cos x$ aniqlanish sohasi R, o'zgarish sohasi [-1; 1], bosh davri 2π bo'lgan davriy hamda juft funksiyadir (8.8.10-rasm).



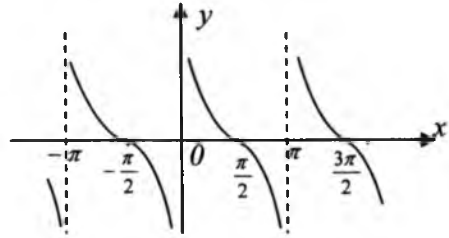
8.8.10- rasm.

c) $y = tgx$ aniqlanish sohasi $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\left(k = 0; \pm 1; \pm 2; ...\right)$ bo'lgan x ning barcha haqiqiy qiymatlari to'plamidan iborat (8.8.11-rasm); o'zgarish sohasi R, bosh davri π bo'lgan davriy hamda toq funksiyadir.

d) $y = ctgx$ aniqlanish sohasi $x \neq k\pi\left(k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; ...\right)$ bo'lgan x ning barcha haqiqiy qiymatlari to'plamidan iborat (8.8.12-rasm); o'zgarish sohasi R, bosh davri π bo'lgan davriy hamda toq funksiyadir.



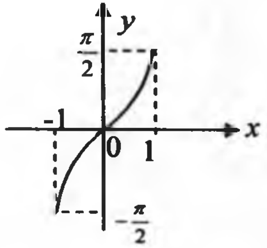
8.8.11-rasm.



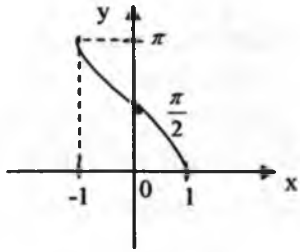
8.8.12-rasm.

e) $y = \arcsin x$ -arksinus. Bu funksiya quyidagicha aniqlanadi: $x = \sin y$ funksiyani olsak, (-∞;+∞) ga tegishli bo'lgan y ning har bir qiymatiga $[-1;1]$ ga tegishli bo'lgan x ning bitta qiymati mos kelishi malumdir; ammo, $[-1;1]$ ga tegishli bo'lgan x ning har bir qiymatiga $\sin y = x$ bo'ladigan y ning cheksiz ko'p qiymatlari mos keladi; agar $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ deb faraz qilinsa, bunday qiymat yagona bo'lishini ko'rish osondir va, bu holda, $y = \arcsin x$ kabi belgilanib, u sinusga teskari funksiyadan iboratdir. Uni arksinus deb o'qilib, $x \in [-1;1]$ bo'lganda sinusi x ga teng bo'lgan radian hisobidagi qiymati $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ga tegishli yoydan iboratdir. Shunday qilib, $y = \arcsin x -$ «arcsinus» funksiya [-1; 1] da aniqlangan bo'lib, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ uning o'zgarish sohasidir (8.8.13-rasm).

f) $y = \arccos x$ - arkkosinus. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi [-1;1], o'zgarish sohasi [0;π] dir (8.8.14-rasm). Arkkosinus qiymati $x \in [-1;1]$ bo'lganda kosinusi x ga teng bo'lgan radian hisobidagi qiymati [0;π] ga tegishli yoydan iboratdir.

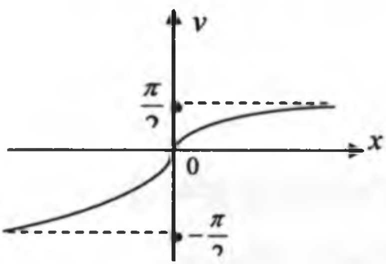


8.8.13-rasm.

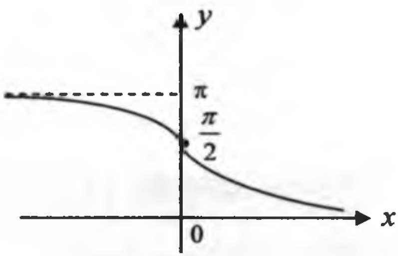


8.8.14-rasm.

k) $y = arctgx$ - arktangens. Bu funksiyanimg aniqlanish sohasi R, o‘zgarish sohasi $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ (8.8.15-rasm). Arktangensning qiymati tangensi x ga teng bo‘lgan radian hisobidagi qiymati $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ ga tegishli yoydan iboratdir.



8.8.15-rasm.



8.8.16-rasm.

l) $y = arcctgx$ - arkkotangens. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi R, o‘zgarish sohasi (0; π) (8.8.16-rasm). Arkkotangensning qiymati kotangensi x ga teng bo‘lgan radian hisobidagi qiymati (0; π) ga tegishli yoydan iboratdir.

8-bobga doir mashqlar

1. $N=\{1,2,3,4,...,n,...\}$ va $D=\{2,4,6,8,..,2n,...\}$ to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinmi?

2. $[0;1]$ va $[a;b]$ to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnating.

3. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohasini toping:

$$a)\ f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3};\qquad b) f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}$$

4. $y=x^{\frac{2}{3}}$ *ва* $y=x^{\frac{3}{2}}$ funksiyalarning grafiklarini chizing.

5. Quyidagi funksiyalarning o'sish va kamayish oraliqlarini aniqlang:

$$a)\ f(x)=-2x+3;\qquad b)\ f(x)=\frac{1}{x^2};\qquad c)\ f(x)=-3x^2+7x+6$$

8- bob bo'yicha o'z bilimingizni sinab ko'ring

1. Haqiqiy sonlar to'plami haqida nimalarni bilasiz?
2. N, Z, Q, J, R belgilarning nomlarini ayting.
3. $(a;b)$, $[a;b]$, $(-\infty;+\infty)=R$ beligilar qanday nomlanadi?
4. Chegaralangan va chegaralanmagan to'plamlarga misol keltiring.
5. Akslantirishga ta'rif bering.
6. Aksi (obrazi) va asli (proobrazi) so'zlarining ma'nosini tushuntiring.
7. Funksiyaga ta'rif bering.
8. Funksiya qanday ko'rinishlarda beriladi?
9. Asosiy elementar funksiyalarning nomlarini aytmg.

Tayanch masalalar va ularni yechishga ko'rsatmalar

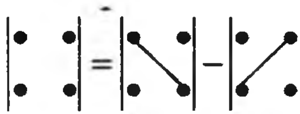
I. Matritsalar nazariyasiga kirish.

1.1.-masala. Ikkinchi tartibli aniqlovchini hisoblang

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Yechish usuli:

– Ikkinchi tartibli matritsa quyidagi sxema orqali hisoblanadi:



– Bu sxemani amaliyotga joriy etamiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$$

1.2.-masala. Uchinchi tartibli aniqlovchini hisoblang

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

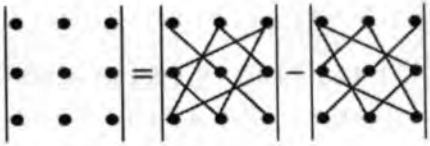
Yechishning birinchi usuli: Birinchi qatorga taqsimlash orqali aniqlovchini hisoblaymiz.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(5\cdot 2 - 3\cdot 4) - 2\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot 3) + 1\cdot(2\cdot 4 - 5\cdot 3) =$$

$$= 3\cdot(-2) - 2\cdot(-5) + 1\cdot(-7) = -3.$$

Yechishning ikkinchi usuli:

Aniqlovchini «uchburchaklar qoidasi» (Sarryus usuli) yordamida hisoblaymiz:



$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot2+2\cdot3\cdot3+2\cdot4\cdot1-1\cdot5\cdot3-3\cdot3\cdot4-2\cdot2\cdot2=30+18+8-15-36-8=-3.$$

1.3.-masala. 2A + 3B matritsalarning chiziqli kombinatsiyasi topilsin, bu yerda:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Yechish yo'li:

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2-6 & 4+9 & 6+0 \\ 0+6 & 2+3 & -2+3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.-masala. Agar

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

bo'lsa, AB va BA ko'paytmani hisoblansin (agar shunday qilish mumkin bo'lsa).

Yechish yo'li:

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}=$$

bu hisoblashni bajarishda A ning har bir qatori elementlariga mos ravishda B ning ustuni elementlari ko'paytrib chiqiladi va quyidagiga ega bo'lamiz:

$$=\begin{pmatrix} \boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.5.-masala. A matritsaning kubi hisoblansin bunda:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Yechish yo'li:

$$A^2=A\cdot A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-3 & -1-2 \\ 3+6 & -3+4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2-9 & 2-6 \\ 9+3 & -9+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}.$$

Javobi:

$$\begin{bmatrix} -11 & -4 \\ 12 & -7 \end{bmatrix}$$

1.6.-masala. Ushbu chiziqli, uch o'zgaruvchili algebraik tenglamalar sistemasini uch hil yo'l bilan yechilsin (Kramera qoidasi bilan, matritsali metod bilan, Gauss metodi bilan) va tekshirilsin:

$$\begin{cases} x+2y+z=12 \\ 2x+y+z=11 \\ x+3y+z=15 \end{cases}$$

Yechishning birinchi yo'li:

a) Dastlab tenglamalar sistemasiga Kramera qoidasi orqali yechim topamiz.

Buning uchun sistemaning asosiy matritsasi A ni yozib olamiz (sistema o'zgaruvchilarining qiyinatlaridan matritsa tuzamiz):

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

Bu A matritsaning aniqlovchisini uchburchaklar qoidasi bilan hisoblab topishimiz mumkin bo‘ladi:

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1+2\cdot3\cdot1-1\cdot1\cdot1-1\cdot1\cdot3-2\cdot2\cdot1=$$

$$=1+2+6-1-3-4=1\neq 0.$$

Shunday qilib, $|A|\neq 0$ dan ko‘rinib turibdiki, berilgan tenglamalar sistemasi Kramera formulasiga ko‘ra aniqlanadigan yagona yechimga ega bo‘ladi:

$$x=\frac{|A_1|}{|A|},\quad y=\frac{|A_2|}{|A|},\quad z=\frac{|A_3|}{|A|}.$$

Bu yerda: A1 , A2 , A3 - lar asosiy matritsa A dan j - ustunni ozod sonlar ustuni bilan almashtirish orqali olingan matritsaning aniqlovchilaridir.

$$|A_1|=\begin{vmatrix}12 & 2 & 1\\ 11 & 1 & 1\\ 15 & 3 & 1\end{vmatrix}=2,\quad |A_2|=\begin{vmatrix}1 & 12 & 1\\ 2 & 11 & 1\\ 1 & 15 & 1\end{vmatrix}=3,\quad |A_3|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 12\\ 2 & 1 & 11\\ 1 & 3 & 15\end{vmatrix}=4.$$

Shunday qilib, berilgan dastlabki sistemaning yechimlari quyidagicha topiladi:

$$x=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{2}{1}=2,\quad y=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{3}{1}=3,\quad z=\frac{|A_3|}{|A|}=\frac{4}{1}=4.$$

x, y, z o‘zgaruvchilarning topilgan qiymatlarini dastlab berilgan sistemaga qo‘yib, o‘zgaruvchilarning topilgan qiymatlarini to‘g‘riligini tekshirib ko‘ramiz. Agar o‘zgaruvchilarning topilgan qiymatlarida tenglamalar sistemasining tenglamalari ayniyatga aylansa, topilgan qiymatlar to‘g‘ri ekanligi o‘z tasdig‘ini topgan hisoblanadi:

$$\begin{cases} 2+2\cdot 3+4=12 \\ 2\cdot 2+3+4=11 \\ 2+3\cdot 3+4=15 \end{cases}$$

Endi bemalol quyidagi javoblarni yoza olamiz: x = 2, y = 3, z = 4.

Yechishning ikkinchi yo‘li:

b) Teskari matritsa usuli. Dastlab asosiy matritsa *A* ni yozib olamiz. So‘ngra sistema noma’lumlaridan iborat bo‘lgan usutun – matritsa *X* ni yozib olamiz va oxirida berilgan sistema ozod sonlaridan iborat bo‘lgan ustun – matritsa B ni yozamiz. Bunda quyidagi natijalarga ega bo‘lamiz.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Bu holda sistemaning yechimi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$X = A\text{-}1 \times B,$$

Bu yerda: A^{-1} sistemamıng berilgan matritsasi A ga teskari bo'lgan matritsa. Asosiy matritsa aniqlovchisini topamiz. Ilgari ham takidlab o'tganimizdek, asosiy matritsanıng aniqlovchisi noldan farqli bo'lsa, unga teskari matritsa mavjud bo'ladi (D =1), ya'ni A mavjud va uning teskarisi A^{-1} ham mavjuddir.

Uni topamiz:

Dastlab asosiy (transpomır matritsa) matritsani yozib olamiz – A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Endi qo'shilgan (yoki ittifoqchi) matritsa - A^* ni yozib olamiz qaysiki, uning elementlari asosiy matritsa elementlariga qo'shimcha hisoblanadi. Eslatıb o'tamiz, a_{ij} elementnıng A_{ij} algebraik qo'shimchasi o'z ishorasi bilan olingan shu edementnıng M_{ij} minori bo'ladi.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

U holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1, \quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3.$$

Bundan ushbu A^* qo'shilgan matritsa qiymatini yozib olami:

$$A^*=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Bundan teskari matritsa A^{-1} quyidagicha yoziladi:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1}\\ \frac{-1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1}\\ \frac{5}{1} & \frac{-1}{1} & \frac{-3}{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

Sistemani yechish jarayomida teskari matritsa A^{-1}ni ustun - matritsa B ga ko'paytirish yo'lini topamiz:

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 5 & -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}12\\ 11\\ 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\cdot 12+1\cdot 11+1\cdot 15\\ -1\cdot 12+0\cdot 11+1\cdot 15\\ 5\cdot 12+(-1)\cdot 11+(-3)\cdot 15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\end{pmatrix}.$$

Berilgan tenglamalar sistemasiga matritsali shakldagi yechimmi oldik.

Javob: $x=2, y=3, z=4$.

Yechishning uchinchi yo'li:

v) *Gauss usuli* (noma'lumlarni ketma-ket qisqartirish metodi). Bu metodning mohiyati shundan iboratki, berilgan chiziqli tenglamalr sistemasini aniq yechimga olib keluvchi ekvivalent sistemga keltiriladi.Buning uchun dastlab elemenntlari sistemanining nomalumlaridan iborat bo'lgan kengaytirilgan matritsa $\breve{A}$ ni yozib olamiz.

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Elementar o'zgartirishlar yordamida *kengaytirilgan matrits $\breve{A}$ ning qatorlari ustida* bu matritsani uchburchakli ko'rimshga keltirib olamiz. Buning uchun avval birinchi qator elementlarini (-2) ga ko'paytirib olamiz va olingan natijalarni ikkmchi qatorga qo'shamiz hamda birinchi qator elementlarini endi (-1) ga ko'paytirib chiqamib, uchuinchi qatorga qo'shamiz; so'ngra uchinchi qatorning hosil bo'lgan elementlarini 3 ga ko'paytirib, olingan 2 chi qatorga qo'shamiz. Bundan keyin olmgan 2 chi va 3 chi qatorlarning o'rinlarini almashtiramiz. Shunday qilib, uch qadam bosish kerak:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & -3 & -1 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

"Teskari yurish" yo'li bilan oxirgi tenglamadan "z" noma'lumni topamiz:

$$z:0\times x+0\times y-1\times z=-4\Rightarrow z=4.$$

Ikkinchi tenglamadan "y" ni topamiz:

$$y:0\times x+1\times y+0\times z=3\Rightarrow y=3.$$

Nihoyat, birinchi tenglamadan "x" ni topamiz:

$$x:1\times x+2\times y+1\times z=12,$$

$$x+6+4=12, x=12-10=2\Rightarrow x=2.$$

Javob: $x=2, y=3, z=4$.

Mustaqil ishlash uchun masalalar
(Matritsalar nazariyasiga kirish)

Mustaqil masalalar yechish bo'limida yuqorida berilgan ko'rsatmalarga tayangan holda yechimlarni bajarish tavsiya etiladi.

Masalalarni yechimini aniqlashda ularni mohiyatan anglash lozim bo'ladi.

1-masala. Chiziqli kombinatsiya topilsin. Javobda bosh diagonal elementlari vergul orqali yozilsin.

$$4A-5B,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

2-masala. Tenglamani yechilsin.

$$\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0 .$$

3-masala. Ushbu chiziqli, uch o‘zgaruvchili algebraik tenglamalar sistemasini uch hil yo‘l bilan yechilsin (Kramera qoidasi bilan, matritsali metod bilan, Gauss metodi bilan) va tekshirilsin:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ 7x - 2y - z = 4 \\ x + y + 2y = 13 \end{cases}$$

4-masala. Ushbu chiziqli, ikki o‘zgaruvchili algebraik tenglamalar sistemasini yechilsin (Kramera qoidasi bilan) va tekshirilsin:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13 \\ 3x - 4y = 8 \end{cases}$$

5-masala. Ushbu matritsani hisoblang.

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n .$$

II. Vektorlar algebrasi elementlari.

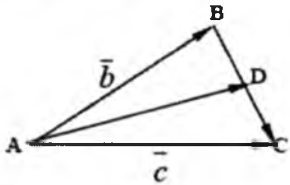
Ushbu bo‘limga oid masalalarni yechishda vektorlar algebrasiga taaluqli qoidalarni bilish va amaliyotda ishlatish ko‘nikmasi bo‘lishl talab etiladi.

2.1.-masala. ABC uchburchakda AD mediana o‘tkazilgan. AD vektorni $\overline{AB}$ = b va $\overline{AC}$ = c. Vektorlari orqali ifodalang.

Masalani yechish:
Ma'lumki, *BC* quyidagi vektorlar ayirmasiga teng.

$$\overline{AC} \text{ va } \overline{AB},$$

$$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \bar{c} - \bar{b}.$$



U holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}(\bar{c} - \bar{b}) = \frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{b}).$$

Binobarin:

$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \bar{b} + \frac{1}{2}(\bar{c} - \bar{b}) = \frac{1}{2}(\bar{c} + \bar{b}).$$

2.2.-masala. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o‘zaro $\varphi = \frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qilib kesishadi. Agar $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$ bo‘lsa, $\bar{c} = 2 \cdot \bar{a} - 3 \cdot \bar{b}$ vektorning uzunligi topilsin.
Masalani yechish:

Skalyar ko‘paytmaning hossasiga ko‘ra, $\bar{c}$ vektor uzunligining kvadrati uning skalyar kvadratiga teng. $\bar{c}$ vektorning skalyar kvadratini topamiz.

$$|\bar{c}|^2 = 4\bar{a}^2 - 12|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|\cos\varphi + 9|\bar{b}|^2 = 4 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 \cdot 1\cos\frac{\pi}{3} + 9 \cdot 1^2 =$$

$$= 16 - 12 + 9 = 13.$$

Binobarin: $\vec{c}=\sqrt{13}$.

2.3.-masala. Uchlaring koordinatalari A(2;2;2), B(1;3;3), C(3;4;2) ga teng bo'lgan uchburchakning yuzasini topilsin.
Masalani yechish:

ABC uchburchakning yuzasi, $\overline{AB}$ va $\overline{AC}$vektorlardan qurilgan parallelogramm yuzasining yarmiga teng, ya'ni bu vektorlar vetor ko'paytmasi modulining yarmiga teng. Chunki,

$\overline{AB}$={-1;1;1}, $\overline{AC}$={1;2;0}, то

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}.$$

Bundan

$$\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$$

va

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{14}\approx 1,87$$

$$S_{\Delta ABC}\approx 1,87 \text{ kv.birlik.}$$

2.4.-masala. Uchlarining koordinatalari A(-1;1;0), B(2;-2;1), C(3;1;-1), D(1;0;-2) ga teng bo'lgan tetraedrning xajmi hisoblansin.

Masalani yechish:

Quyidagi vektorlarni ko'rib chiqamiz:

$$\vec{a}=\overline{AB}=\{3;-3;1\},\quad \vec{b}=\overline{AC}=\{4;0;-1\},$$
$$\vec{c}=\overrightarrow{AD}=\{2;-1;-2\}$$

Ma'lumki, tetraedrning izlanayotgan xajmi, $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlardan qurilgan parallelepiped xajmming qismiga teng.

Shunday qilib,

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}\left|(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c})\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}3 & -3 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left|-4\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|-4\cdot 7+3\right|=\frac{25}{6},\ \text{(kub birlik).}$$

$$V_{\Delta ABC}=\frac{25}{6}\ \text{, kub birlik.}$$

2.5.-masala. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi=\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil qilib kesishadi. Agar $|\vec{a}|=10$, $|\vec{b}|=1$ bo'lsa,

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)$$

vektorning uzunligi topilsin.

Masalani yechish:

Skalyar ko'paytmaning hossasiga ko'ra:

$$\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)=3\vec{a}^2+5\vec{a}\,\vec{b}-2\vec{b}^2=3\left|\vec{a}\right|^2+5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)-2\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=3\cdot 100+5\cdot 10\cdot 2\cos\frac{2\pi}{3}-2\cdot 4=300-50-8=242.$$

Mustaqil ishlash uchun masalalar.
(Vektorlar algebrasi elementlari)

1-masala. A,B,C uchburchakning uchlari berilgan.
Quyidagilar talab etiladi:
1) ABC uchburchakni qurish;
2) BD balandlik va CE mediana tenglamalim tuzilsin;
3) A nuqta orqali o'tuvchi va BC tomonga parallel to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin. Vektorlar algebrasi usullaridan foydalanilsin.

Variant №	A	B	C	Variant №	A	B	C
1	7, 4	3, -3	-2, 9	11	1, 3	4, 1	0, 2
2	-3, 4	0, 2	3, 1	12	5, 5	3, 3	7, 8
3	3, 2	7, -3	2, 1	13	2, 4	5, 3	2, 1
4	-4, 3	1, 0	9, 5	14	8, 3	5, 0	-1, 2
5	1, -5	-3, -7	0, 1	15	6, 5	3, 1	0, -2
6	4, 0	7, 1	-2, 3	16	5, 0	7, -1	3, 2
7	5, 1	-3, 0	6, 1	17	-4, 6	-1, 5	4, 0
8	-4, 3	-1, -2	1, 7	18	5, 7	3, 9	2, 4
9	1, 6	3, 8	2, 0	19	7, 2	4, 0	-3, 1
10	2, 4	3, 9	6, 8	20	2, 4	3, -5	1, 0

III. Analitik geometriya elementlari

3.1.-masala. m va n nmg qaysi qiymatlarida quydagi to'g'ri chiziq

$$(m-3n-2)x++(2m+4n-1)y+(-3m+n-2)=0$$

OX o'qida uzunllgi 3 ga teng bo'lgan, OY o'qida uzunligi –2 ga teng bo'lgan kesmalar ajratadi?

Masalani yechish:

Berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini quydigi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Bunga ko‘ra ushbuga ega bo‘lamiz:

$$\frac{m-3n-2}{3m-n+2}x+\frac{2m+4n-1}{3m-n+2}y=1.\ \Rightarrow\ \frac{x}{\frac{3m-n+2}{m-3n-2}}+\frac{y}{\frac{3m-n+2}{2m+4n-1}}=1.$$

Shartga ko’ra: ***a = 3, b = - 2*** edi.

Binobarin,

$$\frac{3m-n+2}{m-3n-2}=3 \quad \text{va} \quad \frac{3m-n+2}{2m+4n-1}=-2.$$

Bu yerdan quyidagi sistemani olamiz:

$$\begin{cases} 8n+8=0, \\ 7m+7n=0. \end{cases}$$

Bu sistemani yechib, ***m = - 1 n = 1*** ekanligini topamiz.
Javob: ***m = - 1 n = 1***

Mustaqil ishlash uchun masalalar.

(Analitik geometriya elementlari)

1-masala. **M_0 (-1:2)** nuqta orqali o‘tuvchi, $\overline{N}$ **3: -4** vektorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzilsin.

2-masala. **M_0 (3:-5)** nuqta orqali o‘tuvchi, **OY** o‘qiga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzilsin.

3-masala. **M_0 (-1:2)** nuqta orqali o‘tuvchi, $\overline{s}$ $\{$**3: -4**$\}$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasim tuzilsin.

4-masala. **M(3:-6)** ва **M(-5:1)** berilgan nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

5-masala. Ushbu berilgan to‘g‘ri chiziqlarning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishda yozing:

$$\begin{cases} 5x-2y+3z-4=0 \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

Yana to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasini hаm yozing.

6-masala. M(-3:1:2) nuqtadan quyidigi to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani toping:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+6}{2}$$

7-masala. Quyidagi to‘g‘ri chiziqning $3x + 5y + z - 21 = 0$ teksilik bilan kesishish nuqtasini topilsin. To‘g‘ri chiziqning formulasi ushbu:

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1}$$

8-masala. A(4;-3;1) nuqtaning $x + 2y - z - 3 = 0$ tekislikdagi proyeksiyasi
topilsin.

9-masala. $x - 2y + z - 6 = 0$ tekislikka nisbatan M1(3;4;5) nuqtaga simmetrik bo‘lgan nuqtaning koordinatalari topilsin.

10-masala. Ushbu aylanalar markazlari orasidagi masofa topilsin:

$x2 + y2 + 6x - 14y - 6 = 0$ и $x2 + y2 - 24x + 2y - 51 = 0$.

Adabiyotlar

1. T. Jo'rayev va boshqalar. Oliy matematika asoslari. T., «O'zbekiston», 1995-y. I qism.
2. Y.U. Soatov. Oliy matematika. T., «O'qituvchi», 1994-y. I qism.
3. Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М., «Наука», 1990 г.
4. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. М., «Наука», 1971 г.
5. Д.В. Беклемишев. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., «Наука», 1984 г.
6. G.M. Fixtengolts. Differensial va integral hisob kursi. I tom. T., 1951.
7. И.М. Уваренков, М.З. Малер. Курс математического анализа. I том. М., 1966 г.
8. С.В. Фролов, Р.Я. Шостак. Курс высшей математики. I том. М., 1973 г.
9. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Наука», 1970 г.
10. Q. Boyqo'ziyev. Differensial tenglamalar. T., «O'qituvchi», 1983.
11. Н.С. Пискунов. Дифференциальные и интегральные исчисление для ВТУЗов. М., «Наука», в 2 частях, 1985 г.

MUNDARIJA

4-BOB. MATRITSA VA CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

5-BOB. TEKISLIKDAGI BIRINCHI VA IKKINCHI TARTIBLI CHIZIQLAR

6-BOB. FAZODAGI TEKISLIK VA TO‘G‘RI CHIZIQ

7-BOB. IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

8-BOB. MATEMATIK ANALIZGA KIRISH

TAYANCH MASALALAR VA ULARNI YECHISHGA KO‘RSATMALAR

Ilmiy nashr

SHARIFJON YIGITALIYEVICH PULATOV,
FOZILJON ABDULLAYEVICH MAMADALIYEV

OLIY MATEMATIKA

O‘QUV QO‘LLANMA

Muharrir:
A. Iskandar
Texnik muharrir:
R. Temirov
Musahhih:
D. Rustamova

Nashriyot litsenziyasi AI № 309. 2017-yil 22-iyun.
Bosishga ruxsat etildi: 2020-yil 17-sentabr.
Bichimi: 84×108 1/32.
Bosma tabog‘i: 15. Adadi: 500 nusxa. Buyurtma: 58
Bahosi kelishilgan narxda.

Nashriyot manzili:
«Muharrir» nashriyoti, Toshkent,
So‘galli ota ko‘chasi, 5-uy.

«Renessans press» MCHJning matbaa bo‘limida chop etildi.
Toshkent shahri, Glinka, 21-uy.