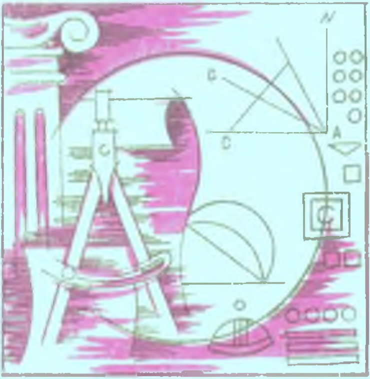
Х. НАЗАРОВ Қ. ОСТОНОВ

МАТЕМАТИКА ТАРИХИ



Х. НАЗАРОВ, Қ. ОСТОНОВ

МАТЕМАТИКА ТАРИХИ

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги педагогика институтлари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1996

Тақризчилар: физика-математика фанлари номзоди, профессор **Т. Н. Нуримов**

физика-математика фанлари номзоди, доцент **Э. А. Абдуқодиров**

Қўлланмада энг қадимий ва ҳамиша навқирон математика фанининг пайдо бўлиши, унинг асосий тушунчалари: сон, функция, чизиқ, интеграл ва дифференциал ҳамда асосий бўлимлари: арифметика, алгебра, геометрия, қаторлар назарияси ва ҳ. к. ларнинг яратилиши ҳамда тараққиёти ёритилган, бунда жаҳоннинг буюк олимлари, жумладан ватандошларимиз — Марказий Осиёлик мутафаккирларнинг бебаҳо ҳиссалари қизиқарли баён этилган. Шунингдек, китобда математиканинг энг сўнгги ютуқлари ва муаммолари, унинг ўқитилиши тарихига ҳам ўрин берилган.

Ўқув қўлланма университетлар ва педагогика институтларининг талабалари, математика ўқитувчилари учун аталган, у фан тарихи билан қизиқувчилар учун ҳам жуда фойдалидир.

Н $\frac{1602010000-187}{353(04)-96}$ 216—96

ISBN 5—645—02634—9

СЎЗ БОШИ

Ҳозирги даврда фаннинг тез суръатлар билан ривожланиши ёшлар олдига ўрганилаётган билимларнинг мазмунига чуқурроқ кириб бориш вазифасини қўймоқда. Бунда ҳар бир фан тарихини ўрганиш, унинг тараққиёт босқичлари билан яқиндан танишиш муҳим аҳамиятга эга. Шундан келиб чиқиб, бўлажак математика ўқитувчилари, умуман, мазкур фан билан қизиқувчилар учун математика фани тарихига бағишланган қўлланма яратиш зарурияти туғилмоқда.

Кейинги йилларда ўзбек тилида математика тарихига бағишланган анча китоблар чоп этилди. Уларнинг кўпчилиги Марказий Осиёлик математик олимлар ҳаёти ва ижодига бағишланган. Аммо бу соҳада ҳали ёритилмаган масалалар анчагина. Математика фани тарихи ҳақида тўлақонли қўлланмалар етишмайди. Айниқса олий ўқув юртларининг талабалари, мактаб ўқувчилари, математика ўқитувчилари учун бундай адабиётлар жуда зарурдир.

Ўқувчиларни математика тарихи, бу борадаги кашфиётлар билан изчил таништира бориш уларнинг дунё қарашини шакллантиришда, математикага бўлган қизиқишларини оширишда муҳим аҳамиятга эгадир.

Бундан ташқари, университетларда, педагогика олий ўқув юртларида «Математика тарихи» курсининг ўқитилиши талабалар математика фанининг ривожланиш қонуниятларини билиб олишлари, келгусида мактабда математика тарихидан турли ўқув-тарбиявий тадбирларни амалга оширишларида ёрдам беради.

Ушбу қўлланма математика фани тарихига бағишланган бўлиб, унда математика фани тараққиёти тўғрисида қизиқарли маълумотлар жамланган, буюк математик олимларимиз эришган ютуқлари, улар яратган назариялар ва фан тараққиётига қўшган ҳиссалари содда тилда таҳлил этилган.

МАТЕМАТИКАНИНГ РИВОЖЛАНИШ ДАВРЛАРИ. ТУРЛИ МАМЛАКАТЛАРДА МАТЕМАТИКА ТАРАҚҚИЁТИ

Матматиканинг ривожланиш даврларини А. Н. Колмогоров қуйидагича баён этган эди:

1. Математиканинг пайдо бўлиш даври (кишилик жамияти пайдо бўлгандан то милод. авв. VI—V асрларгача).

2. Элементар математика даври (милод. авв. VI—V асрлардан то милоднинг XVI асригача).

3. Ўзгарувчи миқдорлар математикаси даври (XVII асрдан XIX асрнинг биринчи ярмигача).

4. Ҳозирги замон математикаси даври (XIX асрнинг иккинчи ярмидан то ҳозирги давргача).

Биринчи даврда кишилар илк математик тушунча ва тасаввурларга эга бўлдилар. Бу даврнинг асосий тушунчаси сон бўлиб, у аста-секин шакллана борди, турли саноқ системалари яратилди. Эрамизгача бўлган минг йиллик даврида бир қатор саноқ системалари пайдо бўлган.

1. Нопозицион саноқ системалари. Бундай системаларда «асосий сонлар» танланиб, улар махсус белгилар билан белгиланган. Масалан, Рим саноқ системасида 1, 5, 10, 50, 100, 500 ва 1000 асосий сонлар сифатида танланган ва мос равишда I («и»), V («ве»), X («икс»), L («эль»), C («це»), D («де») ва M («эм») ҳарфлари билан белгиланган. Белгилашлар мос тартиб сонларни киши бармоқлари ва панжалари орқали ифодалаш тасвирларидан (*I* — бармоқ, V — беш бармоқли панжа, X — иккита панжа) ҳамда лотин сўзлари қисқартмаларидан (centum — юз, demimille — беш юз, mille — минг сўзларининг бош ҳарфлари) келиб чиққан.

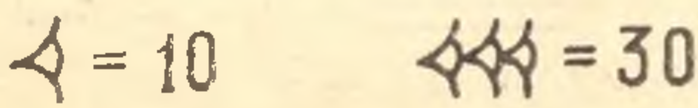
2. Алифбо саноқ системалари. Бунда сон-

лар махсус алифбо ҳарфлари билан белгиланган. Масалан, Ионик алифбо саноқ системасида сонлар қуйидагича ёзилган:

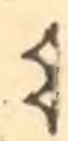
$\alpha=1$	$i=10$	$\rho=100$
$\beta=2$	$x=20$	$v=200$
$\gamma=3$	$\lambda=30$	$r=300$
$\delta=4$	$\mu=40$	$u=400$
$\int=5$	$\nu=50$	$\varphi=500$
$G=6$	$\varepsilon=60$	$\chi=600$
$z=7$	$o=70$	$\psi=700$
$\eta=8$	$\pi=80$	$w=800$
$\theta=9$	$b=90$	$\zeta=900$

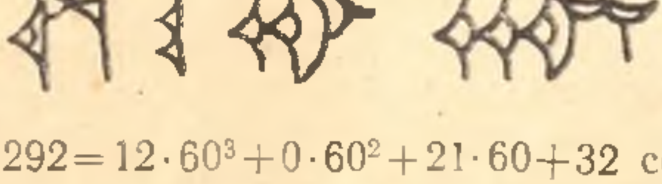
Сонларнинг ёзилишига мисоллар: $i\alpha=11$, $\varepsilon\theta=69$, $\rho x\int=125$.

3. Бобил (Вавилон) ва майя саноқ системалари. Бобил олтмишлик системасида сонлар қуйидагича белгиланган:



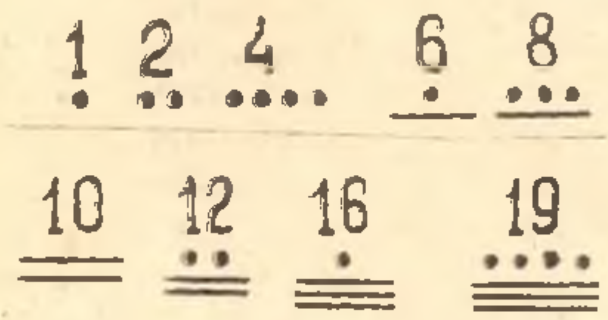
1 дан 59 гача бўлган сонлар ўнлик системада ёзилган. Лекин бобил математикасида олтмишлик система базиси 60, 60^2, 60^3, ... , 60^n, ... сонларидан иборат бўлган.

Ноль сифатида  белгилашдан фойдаланилган. Масалан,



ёзуви $2\,593\,292=12\cdot60^3+0\cdot60^2+21\cdot60+32$ сонини ифодалайди.

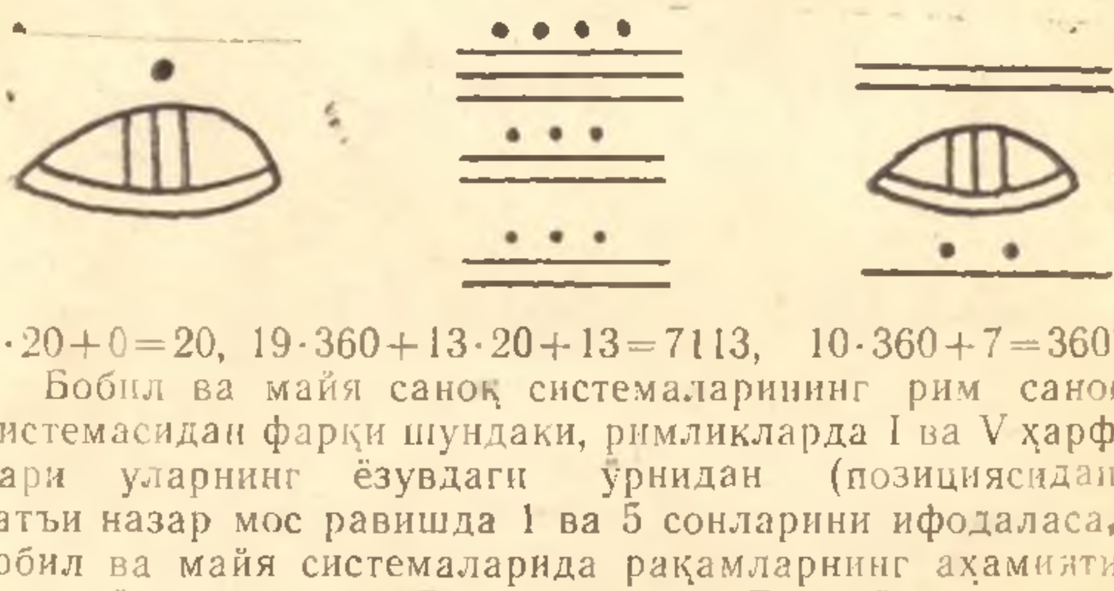
Худди шунга ўхшаш саноқ системаси Жанубий Америка ҳиндуларининг қадимги майя қабиласида ҳам юритилган. Агар бобил саноқ системаси ўнлик — олтмишлик системаси бўлса, майя системаи бешлик — йигирмалик системасидан иборат эди. Биринчи 19 та сон қуйидагича ёзилган:



1 ва 20 дан сўнг учинчи асосий сон $18 \cdot 20 = 360$ бўлиб, қолган асосий сонлар $18 \cdot 20^2$, $18 \cdot 20^3$ ва ҳ. к. бўлган. Ноль сони учун махсус

белги ишлатилган.

Майя саноқ системасида сонларнинг ёзилишига мисоллар:



$1 \cdot 20 + 0 = 20$, $19 \cdot 360 + 13 \cdot 20 + 13 = 7113$, $10 \cdot 360 + 7 = 3607$

Бобил ва майя саноқ системаларининг рим саноқ системасидан фарқи шундаки, римликларда I ва V ҳарфлари уларнинг ёзувдаги ўрнидан (позициясидан, қатъи назар мос равишда 1 ва 5 сонларини ифодаласа, бобил ва майя системаларида рақамларнинг аҳамияти унинг ёзувда тутган ўрнига боғлиқ. Бундай саноқ системалари (бунга VIII—IX асрларда Ҳиндистонда яратилган ўнлик саноқ системаси ҳам киради позицион саноқ системалари деб аталди.

Энди дастлабки даврларда баъзи қадимги давлатларда математика фани ривожланишига тўхталиб ўтамиз.

1. Қадимги Миср. Миср математикасининг асосий манбалари бўлиб Райнд ва Москва папируслари ҳисобланади. Биринчиси, уни излаб топган (1858 йилда) инглиз олими номи билан аталган ва Лондондаги Британия музейида, бир қисми Нью-Йоркда (АҚШ) сақла-

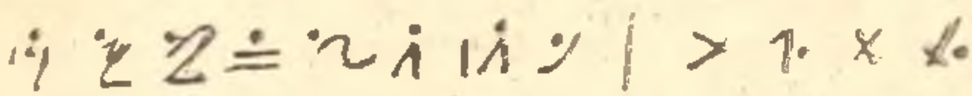
нади. Баъзида уни Ахмес папируси ҳам деб аташади. Папирус 5,25×0,33 м ўлчамли бўлиб, 84 та масалани ўз ичига олган. Шунингдек, касрларни «аликвот» (лотинча aliquot — «бир неча» маъносини англатади) касрлар деб аталувчи «асосий» касрларга, яъни бизнинг ёзувда $\frac{1}{k}$ (k — бутун сон) кўринишга эга бўлган касрларга ёйиш мисоллари ҳам берилган. Масалан, қуйидаги каср кўриб чиқилган:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}.$$

Бу тенглик қуйидаги усул билан ҳосил қилинган:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{13}+\frac{1}{13}=\frac{1}{26}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=\frac{1}{52}+\frac{1}{52}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=$$
$$=\frac{1}{104}+\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\left[\frac{1}{104}+\frac{1}{26}+\frac{1}{13}\right]=$$
$$=\frac{1}{104}+\frac{1}{52}+\frac{1}{8}.$$

Райнд папирусида касрларнинг ёзилиши қуйидаги жадвалда келтирилган:



$$\frac{1}{5}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{7}\quad\frac{1}{8}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{11}\quad\frac{1}{100}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{3}$$

«Асосий» касрлар қаторига $\frac{2}{3}$ ҳам киритилган. Бунга сабаб касрлар сони кам бўлган ва касрнинг умумий тушунчаси мавжуд бўлмаган даврда $\frac{2}{3}$ миқдор сон сифатида қўлланилган.

Иккинчи папирусда (5,44×0,08 м) 25 та масала ёзилган бўлиб, милод авв. 1900 йилларда матндан кўчирилган. Мазкур папирус ҳозирги пайтда Москва тасвирий санъат музейида сақланади.

Папируслардаги кўпгина масалалар содда бўлиб, бир номаълумли чизиқли тенгламаларни ечишга келтирилади.

Масалаларда нон ва бошқа озиқ-овқатлар миқдори ҳақида, ҳайвонларни боқиш ва донни сақлаш ҳақида сўз юритилади, бу эса уларнинг амалиётдан фойдаланиб тузилганлигини кўрсатади. Бир масалада геометрик прогрессия ҳадларининг йиғиндисини топиш формуласи ҳам келтирилган.

Баъзи масалалар геометрияга бағишланган бўлиб, асосан ўлчашларга тааллуқли. Учбурчакнинг юзи асоси ва баландлиги кўпайтмасининг ярми сифатида топилади, доира юзи эса $\left(d-\frac{d}{9}\right)^2$ формула билан аниқланади, бунда d — доира диаметри, бу эса π сони учун $\frac{256}{81}\approx$ $\approx 3{,}1605$ қийматни беради. Миср математикасида энг ажойиб натижа бўлиб, асослари квадрат бўлган пирамида ҳажми учун $V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2)$ формуланинг қўлланилганлиги ҳисобланади, бунда a ва b — квадратлар томонлари узунликлари, h — пирамида баландлиги.

2. Вавилон (Бобил). Бу давлат Тигр ва Евфрат дарёлари орасида жойлашган бўлиб, милод авв. икки ва уч мингинчи йилликларда лойдан қизитиб ясалган жадваллардан маълум бўлдики, бу ерда ҳисоблаш санъати жуда ривожланган. Уларда кўпайтириш жадваллари берилган бўлиб, олтмишлик саноқ системаси билан ўнли саноқ системаси биргаликда қўлланилган.

Вавилонда милод. авв. 1950 йилларда бир қатор математик жадваллар тузилган бўлиб, уларда арифметика билан бирга алгебраик тушунчалар ҳам ривожлнтирилган, яъни икки номаълумли чизиқли ва квадрат тенгламаларни, куб ва биквадрат тенгламаларга келтириладиган масалаларни ечганлар.

Бу даврда вавилонликлар содда геометрик фигураларнинг юзларини ва оддий жисмлар ҳажмларини топишга доир формулаларни билишган. Улар пифагор теоремасининг татбиқларини фақат хусусий ҳоллар учун эмас, балки умумий ҳоллар учун ҳам қўллашни билганлар. Бунда характерли томон шундаки, геометрик тушунчалар алгебра тушунчалари ёрдамида баён этилган.

Вавилон давридан мерос бўлиб қолган маълум 500 жадвалдан 150 таси математик масалаларни ечишга бағишланган, 200 таси эса арифметик сонли жадваллардир. Ҳар бир жадвалда 18—100 тагача масала берилган. Бу жадвалларнинг биттасида 148 та масала шарти баён қилинган.

Олтмишлик саноқ системасида кўпайтириш жадвали 3481 та кўпайтмадан иборат. Албатта, буни хотирада сақлаб қолиш ва исталган пайтда қўллаш табиий қийинчиликлар туғдирган. Шунинг учун мисол ва масалаларни ечиш жараёнида тайёр математик кўпайтириш жадвалларидан фойдаланилган. Бу жадвалларда сонларнинг квадратлари (n^2), кублари, (n^3) сонлардан квадрат ва куб илдизлар чиқариш, n^2+m^2 кўринишдаги йиғиндиларни ҳисоблашлар берилган.

3. Хитой давлатида математика қадим замонлардан бошлаб ривожланиб келган. Лекин, маълум бўлишича, милод. авв. бир мингинчи йилларда дастлабки математик ишлар яратилган. Афсуски, милод. авв. 213 йилда Хитой императорининг таъсирида барча математик қўлёзма ва китоблар ёқишга ҳукм қилинганлиги натижасида кўпгина математик асарлар бизгача етиб келмаган.

Хитойда милод. авв. икки мингинчи йилларда ҳар бир ҳарф (иероглиф) маълум сонларни ифодалаган. Улар ҳозиргача ҳам қўлланиб келинмоқда.

Маълум бўлишича, Хитойда қадимги вақтларда арифметик амалларни бамбук ва фил суягидан ясалган таёқчалар ёрдамида ҳисоблаш тахтасида бажаришган.

Қаср сонлар натурал сонлар билан бир вақтда пайдо бўлган. Қаср сонлар устида амалларни бажариш қоидалари асосан юзларни ўлчашга ва меросни тақсимлашга доир амалий масалаларни ечиш жараёнида баён этилган. Улар манфий сонларни «фу» деб, мусбат сонларни «чжен» деб аташган, манфий сонни ҳосил қилишда иккита мусбат сонниң айирмасидан фойдаланишган, масалан, 5—6=—1. Кейинчалик, манфий сонни алоҳида тушунча сифатида қарай бошлаганлар. Бу эса манфий сонларни киритишдаги илк қадам ҳисобланади.

Манфий сонлар киритилганидан кейин ҳисоблаш ишларида хитойликлар икки хил таёқчалардан фойдаланишган. Бунда қизил рангли таёқча мусбат сонни, қора рангли таёқча эса манфий сонни билдирган.

Биринчи математик китоб «Тўққиз китобли математика» деб номланган. Бу китобнинг муаллифи Чжан Цан милод. авв. 150 йилларда яшаган бўлиб, китоб ер ўлчовчилар, муҳандислар, амалдорлар, савдогарлар тайёрлаш учун мўлжалланган, унда 246 та амалий масала берилган. Ҳар бир масаланинг шарти, ечишға доир кўрсатмалари ва жавоби баён қилинган.

Масалалар касрлар устида амаллар бажариш, текис шакллар юзларини топиш ва оддий фазовий шаклларнинг ҳажмларини ҳисоблашга бағишланган. Шунингдек, икки номаълумли иккита чизиқли тенглама системаси ҳамда n номаълумли n та чизиқли тенглама системаларини «фан-чен» усулида ечиш баён қилинган. Сўнгра Пифагор теоремаси ёрдамида ечиладиган масалалар ҳам келтирилган.

Бу асар ўнта китобдан иборат бўлиб, унга Сунь-Цзининг «Математик рисола», Лю Хуеянинг «Денгиз ороли ҳақида рисола», Чжан Цюцзяннинг «Математик рисола» китоблари киритилган.

V асрда Хитойда $x^3+ax^2=b$ кўринишдаги куб тенгламанинг илдизларини тақрибий ҳисоблаш алгоритми, VIII асрга келиб умумий кўринишдаги куб тенгламани ечиш алгоритми ишлаб чиқилди.

Хитой математик ва астрономлари айлана узунлигининг диаметрга нисбатига доир аниқ натижаларни қўлга киритдилар. Масалан. Чжан Хен $\pi\approx\sqrt{10}=3.162...$, Ван Фан $\pi\approx\frac{142}{45}=3,155...$ Лю Хуея $\pi\approx3,1459...$, Цу Чунчжи $\pi\approx\frac{855}{155}$ қийматларни топганлар.

4. Ҳиндистон. Ҳиндистонда математика фанининг дастлабки тушунчалари милод. авв. II—I минг йилликларда яратилган. Масалан, «Шульва-сутра» асарида ҳар хил иншоотларни қуришнинг математик ҳисоблаш қоидалари ишлаб чиқилган.

IV асрда астрономия ва математикага бағишланган «сиддхант»лар вужудга келди. Бу ишлар санскрит тилида ёзилган. Бунда сонлар устида амаллар бажариш қоидалари, турли математик масалаларни ечиш усуллари баён қилинган.

VI асрда брахма рақамлари 1 дан 9 гача бўлган сонлар учун махсус белгилар бўлиб, ўнлик саноқ системасини яратишга асос бўлди.

Ҳиндлар нолни «шунья» (бўш) деб аташган, араб олимлари нолни «сифр» деб номлашган. Европаликлар уни лотинча cifra каби ёза бошладилар. Шундай қилиб «цифра» атамаси пайдо бўлди.

Арифметика фани биринчи бўлиб изчил равишда Ҳиндистонда ривож топди, яъни ўнлик позицион саноқ системасига асосланган арифметик амаллар қоидалари ишлаб чиқилди. Шунингдек, сонларни квадрат ва кубга

кўтариш, сонлардан квадрат ва куб илдиз чиқариш қо-
даларини яратдилар.

Ҳиндистонда биринчи марта алгебраик белгилашл
киритилди масалан, номаълум, озод ҳад, даражалар
белгилаш учун махсус белгилар ишлатилган. Кўпги
белгилашлар уларга мос санскрит атамаларидаги б
ринчи бўғин ҳисобланади. Мисол учун номаълум «й
ват» деб аталган ва у «йа» бўғини билан белгиланга
Агар номаълумлар бир нечта бўлса, уларни рангла
нинг номлари билан белгилашган.

Шарқ Коперниги деб ном олган Арнабхата (476 йилда туғилган) нинг «Ариабхатия» асари Ҳинди
тонда аниқ фанлар ривожининг бурилиш нуқтаси бўли
ҳисобланади.

Арнабхата I ғояларининг издоши ва шарҳловчис
Бхаскара I (VII аср) ўз ишларида диофант тенгла
малари назарияси ва астрономия бўйича бир қанч
муаммоларни ҳал этди.

IX аср ўрталарига келиб Магавири томонидан мат
матикага бағишланган «Математиканинг қисқа баёни
номли биринчи ҳинд асари яратилди.

Ҳинд математиги ва астрономи Бхаскара I
(1115—1183) «Лилаватти» ва «Бижаганити» номли ма
тематик асарлар ёзди. Биринчи асар арифметикага ба
ғишланган бўлиб, иккинчи асарда алгебра ва геомет
риянинг баъзи масалалари қараб чиқилган. Бундан
ташқари, унда Пифагор теоремасининг иккита кўргаз
мали исботи ҳам берилган. Бу китобда ушбу форму
лалар

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

$$\sqrt{a+b+\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

ёрдамида иррационал ифодалар устида айний шакл алмаштиришларни бажариш ва мураккаб ифодаларни соддалаштиришлар берилган.

Ҳинд математиклари манфий сонларни киритдилар ва манфий соннинг тўғри таърифини бердилар, масалан, Брахмагупта (596 йилда туғилган) мусбат сонларни майн, манфий сонларни борг деб атаб, рационал сонлар устида амаллар бажариш қоидаларини баён қилган.

Тақвим тузиш масалалари билан шуғулланиш натижасида ҳинд математиклари диофант тенгламаларини ечишга доир усулларни ҳам аниқладилар. Ариабхата I $ax+by=c$ кўринишдаги тенгламани бутун сонларда ечган бўлса, Брахмагупта ва Бхаскара II $ax^2+b=y^2$ кўринишдаги тенгламани ва унинг муҳим хусусий ҳоли бўлган $ax^2+1=y^2$ тенгламани натурал сонларда ечиш усулларини кўрсатганлар.

Геометрияга доир маълумотлар асосан астрономия ва математика бўйича мавжуд китобларда учрайди. Бунда теоремалар исботсиз берилган, чунки уларнинг барчаси чизмалар билан тасвирланган бўлиб, баъзи ҳолларда геометрик мулоҳазаларни исботлашга доир кўрсатмалар ҳам берилган.

Милод. аввалги V асрда ҳинд математиклари $\pi\approx3{,}1416$ деб олишган. Магавири—Шридхари IX—X асрлар) издошлари ўз асарларида призма, кесик доиравий конус ҳажмларини ҳисоблаш учун тўғри формулаларни берганлар. Бхаскара II шарнинг ҳажми формуласини аниқ ифодалаган. Бундан ташқари, астрономик масалаларни ечишда $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\sin\alpha=$ $=\cos(90^\circ-\alpha)$ каби тригонометрик муносабатлардан фойдаланилган.

5. Қадимги Юнонистонда математика турли фалсафа мактабларида ривожланди: Ион мактаби (милод. авв. VII—VI асрлар), Пифагор мактаби (милод. авв. VI—V асрлар), Платон академияси (милод. авв. V—IV асрлар). Айниқса, математиканинг янги бўлими — логистика тараққий этди. Бу фан асосан бутун сонлар устида амаллар, илдиз чиқариш, касрлар устида амаллар, биринчи ва иккинчи даражали тенгламаларни ечишга келтириладиган амалий масалалар ва ҳисоблашлар, меъморчилик ва ер ўлчаш ишларига оид ҳисоблашларни ўз ичига олган эди.

Математиканинг назарий томонларига Пифагор мактабида алоҳида эътибор берилган эди. Улар натурал сонларнинг баъзи хоссаларини умумлаштирганлар ҳамда, n та тоқ сон йиғиндисини ҳисоблай олганлар. Сонларнинг ўрта арифметик қиймати $\sum_{k=1}^{n} a_k/n$, ўрта геометрик қиймати $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\ldots a_n}$ ва ўрта гармоник қиймати $n/\sum_{k=1}^{n} a_k$ хоссаларини чуқур ўрганишга эришганлар.

Шунингдек, қадимги юнон математиклари иррационал сонларнинг мавжудлигини исботлашга эришдилар. Биринчи бўлиб 2 сонининг иррационаллигини Архит Тарентский (милод. авв. 428—365 йиллар), Теодор (милод. авв. 465—399 йиллар). Теэтет (милод. авв. 410—368 йиллар) лар исботлаганлар. Улар умумий ҳолда $\sqrt{n(n+1)}$ сонинг иррационаллигини ва 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 сонларининг квадрат илдизлари иррационал сон эканлигини исботладилар.

Милод. авв. V—IV асрларда Қадимги Юнонистонда қуйидаги учта классик масалани (циркуль ва чизғич ёрдамида ясашларга доир) ечишга ҳаракат қилинган:

1. Кубни иккилантириш масаласи.
2. Бурчакни учта тенг бўлака бўлиш масаласи.
3. Доира квадратураси масаласи.

Биринчи масаланинг моҳияти шундан иборатки, берилган кубдан икки марта катта ҳажмга эга бўлган кубни ясаш лозим. Агар берилган кубнинг қиррасини a, изланаётган кубнинг қиррасини x деб олсак, у ҳолда

$$x^3 = 2a^3 \text{ ёки } x = a\sqrt[3]{2}$$

тенгламаларга эга бўламиз.

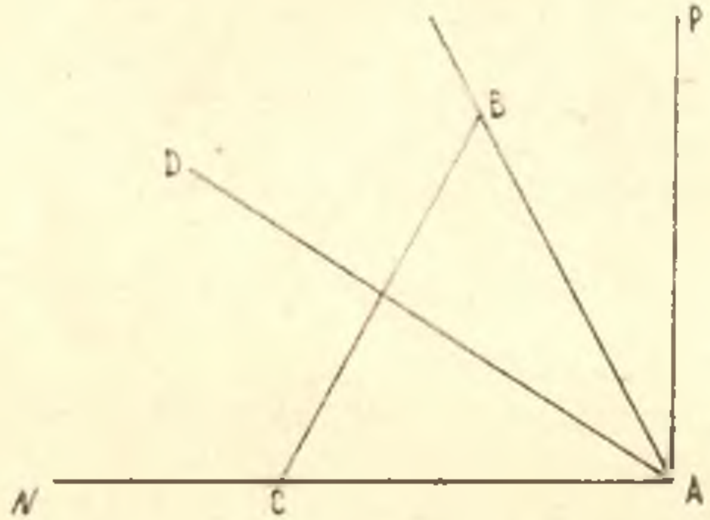
Мазкур масала квадратни иккилантириш масаласининг умумлашмасидан иборат: юзи $2 \cdot a^2$ га тенг бўлган квадратнинг томони узунлиги $a \cdot \sqrt{2}$ га тенгбўлган кесмадан, яъни берилган квадратнинг диагоналидан иборат. Масаланинг қийинлиги шундаки, узунлиги $a \cdot \sqrt[3]{2}$ га тенг бўлган кесма фақат циркуль ёки чизғич ёрдамида ясалиши мумкин эмас, бу ҳам кейинчалик, XIX асрнинг биринчи ярмида исботланган.

Қадимги юнон математиги ва астрономи Гиппократ Хиосский (милод. авв. V асрнинг иккинчи ярми) масалани берилган a ва b кесмалар орасидаги «иккита ўрта пропорционал» x ва y кесмаларни ясаш масаласига келтирди, яъни қуйидаги узлуксиз пропорция $a{:}x = x{:}y = y{:}b$ ни қаноатлантирувчи x ва y кесмаларни ясашга келтирди. Бу масаланинг ечимларини бошқа воситалар ёрдамида Архит Тарентский, Евдокс Книдский (милод. авв. 408—355 йиллар), Эратосфен Киренский (милод. авв. 276—194 йиллар), Никомед (милод. авв. III—II асрлар), Аполлоний

Пергский (милод. авв. 262—190 йиллар), Герон Александрийский (эхтимол, I аср) ва Папп (III асрнинг иккинчи ярми) ҳам баён этганлар.

Иккинчи масала, бурчак трисекцияси (лотинча tria — уч ва sectio — бўлиш, кесиш сўзларидан) деб аталиб, бурчакни циркуль ва чизғич ёрдамида тенг уч бўлакка бўлишдан иборат. Бу масала баъзи хусусий ҳолларда ҳал қилинган, пифагорчилар тенг томонли тўғри бурчакли учбурчакда ҳар бир бурчак 60° га тенг эканлигидан фойдаланиб, бурчакни тенг уч бўлакка ажратганлар.

Айтайлик, PAN тўғри бурчакни тенг учга бўлиш талаб қилинаётган бўлсин (1- расм).



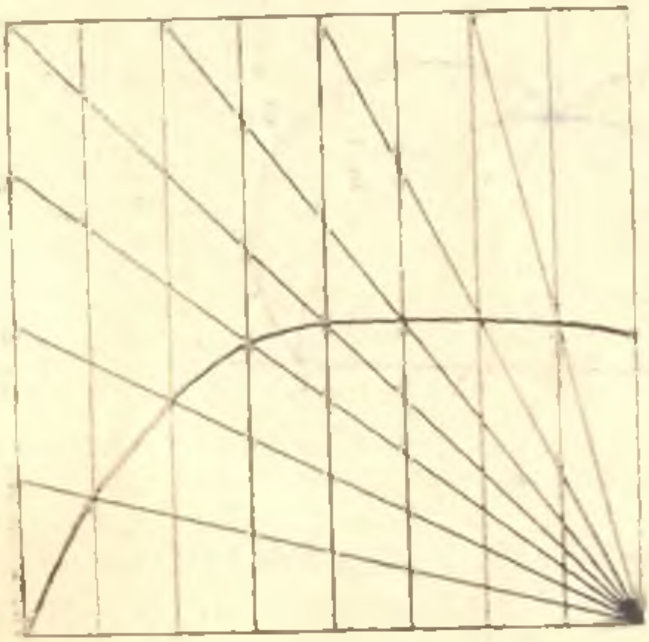
1-расм.

AN ярим тўғри чизиқда ихтиёрий AC кесмани оламиз ва унга ACB тенг томонли учбурчак ясаймиз. CAB бурчак 60° га тенг бўлгани учун $\widehat{BAP}=30°$. CAB бурчакнинг AD биссектрисасини ясаймиз ва MAP тўғри бурчак тенг учта бурчакка бўлинишини кўрамиз: $\widehat{NAD}$, $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAP}$.

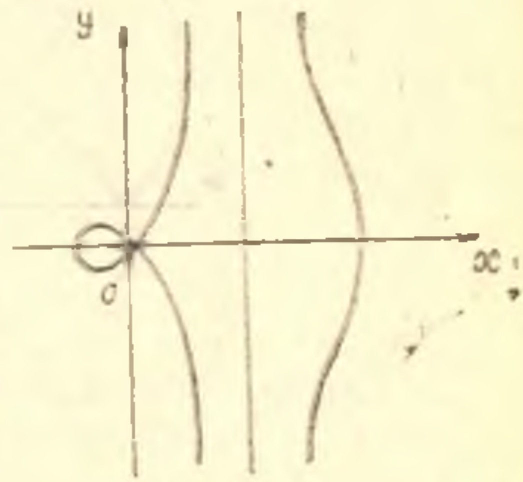
Француз математиги Пьер Лоран Вентцель (1814—1848) 1837 йилда юқоридаги икки масалани циркуль ва чизғич ёрдамида ҳал этиш мумкин эмаслигини исботлади.

Бурчак трисекцияси масаласи циркуль ва чизғичдан ташқари бошқа қўшимча воситалар ишлатилганда ечимга эга бўлади. Масалан, Гиппий Элидский (милод. авв. 420 йилларда яшаган) бу масалани ечиш учун квадратриса эгри чизиғидан фойдаланган (2-расм).

Александриялик математик Никомед бу масалани ҳал қилишда Никомед конхоидаси деб аталувчи эгри чизиқни қўллаган (3-расм).



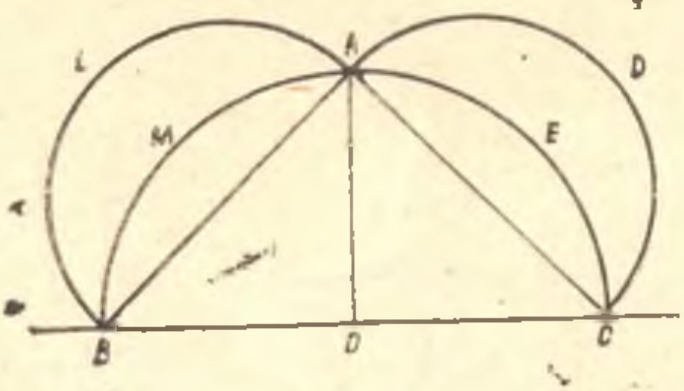
2-расм.



3-расм.

Учинчи масаланинг мазмуни циркуль ва чизғич ёрдамида берилган доирага тенгдош квадратни ясашдан иборат. Агар доиранинг радиусини r билан белгиласак, у ҳолда масала юзи πr^2 га, яъни томони $r\sqrt{\pi}$ га тенг бўлган квадратни ясашдан иборат. Бу масалани ечиш учун Аристотель (милод. авв. 384—322 йиллар) ҳам ҳаракат қилган. Гиппократ Хиосский ҳам бу масала билан шуғулланиб, эгри чизиқли шаклга тенгдош тўғри чизиқли шаклни ясаш имкониятн мавжудлигини исботлади (улар «гиппократ ойчалари» ҳам деб аталади). Гиппократ ойчалари муаммоси икки айлананинг ёйлари билан чегараланган текис шакл учун унга тенгдош квадратни ясашдан иборат. Ёйлар марказий бурчакларининг нисбати $\alpha:\beta=1:2$, $1:3$ ва $2:3$ каби бўлган ҳолларда ечимларни Гиппократ топган, $\alpha:\beta=1:5$, $3:5$ ҳолларда М. Валлениус (1766) ва унга боғлиқ бўлмаган равишда Л. Эйлер (1771) топган. Рационал $\alpha:\beta$ да бошқа квадратураланувчи ойчалар типлари мавжуд эмаслигини Н. Г. Чеботарёв (1894—1947) 1935 йилда ва А. В. Дороднов 1947 йилда исбот қилдилар.

Диаметри BC бўлган ярим доирага тенг ёнли тўғри бурчакли BAC учбурчак чизилган. ($BA=AC$). AB ва AC ни диаметрлар сифатида олиб, ярим айланалар ясалади. $ALBM$ ва $ADCE$ лар доира ёйлари билан чегараланган ойчалар деб аталади. Пифагор теоремасига кўра $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2=2\cdot|AC|^2$ (4-расм).



4-расм.

Доиралар юзлари нисбати $S_1:S_2$ ёки $BMAEC$ ва $AECD$ ярим доиралар юзлари нисбати уларнинг мос диаметрлари квадратлари нисбати $\frac{|BC|^2}{|AC|^2}$ га тенг, у эса ўз навбатида 2 га тенг бўлади. OAC сектор юзи $|AC|$ диаметрга ясалган ярим доира юзига тенг. Агар бу икки тенг юзлардан ACE сегмент умумий юзини айирсак, у холда AOC учбурчакнинг юзи $ADCE$ ойча юзига тенг бўлади ёки иккита ойчанинг юзлари йиғиндиси BCA тенг ёнли учбурчак юзига тенг.

Минг йиллар давомида бу муаммони ҳал этишга уринишлар муваффақиятсизликка учраб келди. Фақат XIX асрнинг 80-йилларида доира квадратурасини циркуль ва чизғич ёрдамида амалга ошириш мумкин эмаслиги исботланди. Немис математиги Карл Луис Фердинанд Линдеман (1852—1939) 1882 йилда француз математиги Ш. Эрмит ишларидан фойдаланиб, π сонининг трансцендент сон эканлигини исботлади, бу билан у доира квадратурасини циркуль ва чизғич ёрдамида ҳал этиб бўлмаслигини исботлади.

Доира квадратураси масаласи циркуль ва чизғичдан ташқари бошқа воситалар ишлатилганда ечимга эга. Масалан, милод. авв. IV асрда яшаб ижод этган юнон математиклари Диностратва Менехм бу масалани ечиш учун Гиппий Элидский томонидан киритилган квадратриса деб аталувчи трансцендент эгри чизиқдан фойдаланганлар. Бу эгри чизиқ айланани тўғри чизиқ кесмаларига пропорционал бўлган бўлакларга ажратиш учун қўлланилган. Худди шундай, кубни иккилантириш масаласидаги эгри чизиқни Диокл (милод. авв. II аср) кашф қилган бўлиб, у кейинчалик циссоида деб атала бошлаган ҳамда икки ўрта пропорционални ясаш учун фойдаланилган.

Файласуф Зенон Элейский (милод. авв. 490—430 йиллар) математикага зарбалар бериб, ўзининг 45 апорийсини (арогі—иложсиз, боши берк, тушунарсиз) ёзди ва уларда математикадан йироқ бўлган шаклда чексизлик тушунчасининг мантиқий қарама-қаршиликларга олиб келишини айтиб ўтган эди.

Бирор жараённи кузатар эканмиз, фараз қилиш мумкинки, ҳар бир бажарилаётган амал — геометрик алмаштиришлар, арифметик ёки алгебраик амаллардан сўнг навбатдаги амал келади. Шундай қилиб, потенциал чексизлик абстракциясига келамиз. Агар тўпламни вужудга келтириш чексиз жараёнини абстракцияласак, у вақтда барча элементлари билан актуал бўлган якуний қисмини қарасак, актуал чексизлик абстракциясига келамиз, математика ва фалсафада мантиқий қарама-қаршиликка олиб келади.

Зенонинг шогирди Демокрит (милод. авв. 460—380 йиллар) математикани атомлар нуқтаи-назаридан ишлаб чиқди. У нуқталарни чекли ҳажмга эга бўлган фазонинг бўлинмас атомлари сифатида қарайди. У ҳолда тўғри чизиқ кесмалари чекли, ваҳоланки, унда чексиз кўп нуқталар мавжуд. Бундан келиб чиқадики, юз бўлаги кесмалар йиғиндисидан, жисмлар шар юзларидан ташкил топган бўлиб қолади. Бу математикада чекли ва чексизлик орасидаги қарама-қаршиликни вужудга келтиради.

Қадимги юнон математиги ва астрономи Евдокс Книдский (милод. авв. тахминан 406—365 йиллар) томонидан яратилган нисбатлар назарияси XIX асрнинг иккинчи ярмигача ҳақиқий соннинг энг мукаммал назарияси бўлиб келди. Евдокс лимитлар ҳақидаги таълимотни биринчилар қаторида ишлаб чиқди. Бу назария асосида турли кетма-кетликларнинг лимитларини ҳисоблаш усулларини яратди. Натижада эгри чизиқлар, эгри чизиқли сиртлар билан чегараланган турли шаклларнинг юзи ва ҳажмларини ҳисоблаш имконияти вужудга келди. Дифференциал ва интеграл ҳисоби кашф қилингунга қадар бу усул квадратура ва кубатура масалаларини ҳал этишнинг энг ишончли ва умумий усули бўлиб келди.

МАРКАЗИЙ ОСИЁЛИК МАТЕМАТИК ОЛИМЛАР

Ҳозирги Марказий Осиё халқлари жуда қадимий фан ва маданият меросига эга. Бу ерда яшовчи халқлар Хитой, Ҳиндистон, Эрон, Кавказ мамлакатлари билан савдо, сиёсий ва маданий алоқалар туфайли фан янгиликларини ўрганиб бордилар ва ўзлари ҳам илм-фаннинг ривожланишига катта ҳисса қўшдилар.

Математика соҳасида турли ҳисоблаш усулларини такомиллаштириш, янги ҳисоблаш усулларини аниқлаш мақсадида турли илмий-тадқиқот ишлари кенг кўламда олиб борилди. Бунда турли миллат олимлари биргаликда ижодий иш олиб бордилар ва жуда кўп муҳим илмий натижаларни қўлга киритдилар.

Фанларнинг ривожланишида Халифа Маъмун ҳукмронлиги даврида Бағдодда ташкил этилган (813—833) «Байтул-ҳикмат» (Донишмандлик уйи) ижобий аҳамият касб этди. Унинг қошида катта кутубхона ва расадхона мавжуд бўлиб, жуда кўп машҳур олимлар бу даргоҳда илмий ишлар олиб бордилар.

Марказий Осиёлик математик олимлар орасида энг машҳурларидан бири А б у А б д у л л о ҳ М у ҳ а м м а д И б н М у с о ал-Х о р а з м и й (783—850) юқорида зикр этилган Бағдоддаги Донишмандлик уйида математика билан шуғулланди. Унинг математика бўйича ёзган рисолалари: «Китоб ал-жабр вал муқобала», «Ҳинд ҳисоби ҳақида қисқача китоб», «Астрономик жадваллар», «Китобул-суратул-арз». «Ҳинд ҳисоби ҳақида қисқача китоб» асари Оврупода ҳинд позицион системасининг тарқалишида муҳим роль ўйнади. «Китоб ал-жабр вал муқобала» асарида алгебра мустақил фан сифатида (математиканинг бир бўлими) биринчи бўлиб ўрганиб чиқилди. Бу рисола икки қисмдан иборат бўлиб, биринчи қисмида алгебраик миқдорлар устида амалларни лоғида туғилган, Хоразм ва Эронда ишлаган. Асосий асарлари: «Тиб қонунлари», «Ашшифо», «Нажот», «Ишорат ва танбиҳ», «Донишнома» ва «Уржуз». Булардан «Аш-шифо» ва «Донишнома»да математикага бағишланган махсус бўлимлар бор. «Донишнома» (1030—1035 йиллар) Исфаҳон шаҳрида ёзилган бўлиб, геометрик мазмунли материали планиметрия ва стереометрияга бағишланган. У шунингдек. Евклиднинг «Негизлар» шарҳини ўз ичига олади. «Аш-шифо» (1020—1032 йиллар) (Ҳамадон ва Исфаҳон шаҳарларида ёзилган) асарида математикага оид «Қисқартирилган Евклид», «Қисқартирилган Альмагест», «Сонлар фани», «Мусиқа фани» деб аталган бўлимлар бўлиб, сонлар ҳақидаги таълимот, геометрик аксиоматикани такомиллаштиришга ҳаракат қилган. Таърифлар, постулат, аксиома ва теоремалар ва уларнинг исботларини жойлаштириш тартиби тўғрисида маълум фикрларга эга бўлган. Евклид V постулатини исботлашга ҳаракат қилди ва ундан фарқли ўлароқ «чизиқларни кўпайтириш» ҳақида мулоҳаза юритади, бунда «тузма нисбат» таърифини беради. 1980 йилда унинг туғилганига 1000 йил тўлиши нишонланди. Унинг номи билан бир қатор жойлар жумладан Тошкентдаги кўкрак жарроҳлиги илмгоҳи, Бухоро вилоят кутубхонаси аталади. Шунингдек, Ойнинг кўриниб турган томонидаги бир кратерга ибн Сино номи берилган.

Шоир, файласуф, астроном ва математик Ғиёсиддин Абулфатҳ Умар ибн Иброҳим Ҳайём (15.05.1048—14.12.1131) Нишопурда туғилган. Унинг отаси чодир (хайма) тикувчи бўлганлигидан Ҳайём тахаллусини олган деган тахмин бор. Ўша даврнинг юқори савиясида таълим олиб, юксак қобилияти туфайли Бухорога Шамсул-мулк Қорахоний саройида ишлашга чақирилган. 1074 йилда салжуқийлар пойтахти — Исфаҳонга ўтади ва у шоҳ хизматчиси бўлади. 1076 йилда унинг ихтиёрига Исфаҳондаги расадхона берилади ва уни жиҳозлаш учун маблағ ажратилади. Унинг бошчилигидаги олимларга эски Эрон қуёш тақвимини ислоҳ қилиш топширилади, 1079 йилда янги тақвим тузиб чиқилди. У биринчи бўлиб учинчи даражагача бўлган тенгламаларни ечиш назариясини яратди ва барча тенгламаларнинг умумий синфларини баён этди. Бу «Алжабр вал муқобала масалаларининг исботлари ҳақида» асарида (Б. А. Розенфельд (1917 йилда туғилган, Яқин ва Ўрта Шарқ мамлакатларида ўрта асрларда математика тарихи бўйича илмий ишлар муаллифи) рус тилига таржима қилган) келтирилган.

Умар Ҳайём биринчи марта геометрия билан алгебранинг алоқаси тўғрисидаги ҳамда алгебраик тенгламаларни геометрик тушунтириш ва ечиш ҳақидаги масалани қўйди.

«Евклид китобининг қийин постулатларига шарҳлар» номли геометрияга бағишланган асари уч китобдан иборат: «Параллелларнинг ҳақиқий маъноси ва маълум шубҳалар ҳақида», «Муносабатлар, пропорциялар ва уларнинг ҳақиқий маъноси ҳақида», «Нисбатларни тузиш ва уларни текшириш ҳақида». Евклид V постулатини исботлашга уринди, бунда асосларидаги бурчакларнинг ҳар бири тўғри ва ён томонлари ўзаро тенг бўлган тўртбурчакдан, кейинчалик «Саккери тўртбурчаги» деб аталган тўртбурчакдан фойдаланган, геометрик тушунчалар тараққиётида жуда катта роль ўйнади. Ойнинг орқа томонидаги бир кратерга унинг номи берилган.

Абу Жаъфар Муҳаммад ибн Муҳаммад ибн Ҳасан Абу Бакр Насриддин Туси й (18.02.1201—25.07.1274) — қомусчи олим ва давлат арбоби. Тус (Эрон)да туғилган. Абу Али ибн Синонинг шогирди Камолиддин Мусо ибн Юнусдан таълим олган. Тусда, Бағдодда, Қуҳистон, сўнгра Мароғада (1259 йил) яшаган. Мароғада расадхона ташкил этди, унга машҳур олимларни таклиф этди, бой кутубхона яратди. Расадхонада унинг раҳбарлигида юлдузлар ва сайёралар жадвали «Элхон жадваллари» («Зижи Элхоний») тузиб чиқилди. У «Евклид баёни» («Таҳрири Уқлидис») асарида V постулат тўртта тўғри бурчакли тўртбурчакнинг мавжудлиги ҳақидаги фаразнинг натижаси эканлигини исботлади. «Тўлиқ тўрт томонлик ҳақида» («Шаклул-кита») рисоласи исботлар назарияси ва сферик тригонометрияга бағишланган, «Тахта ва тупроқ ёрдамида арифметикадан тўплам» («Жомиул-ҳисоб бит-тахти ват-туроб») (1265 йил) асарида арифметик амаллар, уларни ўнлик позицион саноқ системасида бажариш қоидалари ҳамда сонларни даражага кўтариш ва сонлардан илдиз чиқариш амаллари баён этилган. «Тусийнинг ал-жабр вал муқобаладаги фойдалари» («Фавоиди Туси дар жабр вал муқобала») асарида олим чизиқли ва квадрат тенгламалар, уларни ечиш усулларини баён этади. Ойнинг кўриниб турган томонидаги бир кратерга Тусийнинг номи берилган.

Марказий Осиёда математика фани ривожига Улуғбек илмий мактаби катта ҳисса қўшди (XV—XVI асрлар). У ўттиз йилдан ортиқ фаолият кўрсатди. Қуйида бу мактабда математика бўйича илмий ишлар олиб борган олимлар тўғрисида ҳикоя қиламиз.

Муҳаммад Тарағай Улуғбек (22.03. 1394—27.10.1449) — буюк ўзбек астрономи ва математиги. Давлат арбоби ва маърифатпарвари. Амир Темур Соҳибқироннинг невараси. 1409 йилдан Самарқанд ҳукмдори. Отаси—Шоҳруҳнинг вафотидан сўнг темурийлар династияси бошлиғи. Самарқандда мадраса ва дунёда энг яхши расадхона бунёд этди. Ўз атрофига машҳур математик ва мунажжимларни тўплаб, илмий мактаб ташкил этди. Самарқанд расадхонасида бир асрга яқин муддат мобайнида илмий кузатишлар олиб борилди. Унда юлдузлар ва сайёралар ҳаракатига оид «Янги астрономик жадваллар» («Зижи жадди Кўрагоний») (1437 й.) тузилиб, астрономиянинг назарий ва амалий масалалари кенг баён этилди. 1019 юлдузнинг вазияти кўрсатилиб, қарийб 200 йил давомида Тихо Брагегача унинг аниқлиги энг яхши бўлиб турди. Улуғбек томонидан жуда аниқ тригонометрик жадвалларни тузишга имкон берувчи ал-жабр усуллари ишлаб чиқилди. Бу усул исталган аниқликда ҳисоблашларни амалга оширишга ёрдам берар эди. Унинг номи билан Самарқанд меъморчилик-қурилиш институти, Тошкент шаҳрида Мирзо Улуғбек тумани ва кўплаб жойлар аталади. Ойнинг кўриниб турувчи томонидаги бир кратер Улуғбек номи билан аталади. 1994 йилда унинг 600 йиллик юбилейи республикамизда ва жаҳонда кенг нишонланди.

Салоҳиддин Мусо ибн Муҳаммад ар-Румий Қозизода (1364—1436) — Улуғбек илмий мактабида фаолият кўрсатган математик. Туркиядаги Рум (ҳозирги Бурса) шаҳрида таваллуд топган. Самарқандда яшади ва ижод қилди. Фан соҳасидаги ютуқлари учун «Афлотуни замон» деган ном олган. Унинг математикаға оид ишлари: «Арифметика ҳақида рисола», «Асосий жумлалар» китобига шарҳлар» (бунда Евклид V постулатини исботлашга уринади), «Синус ҳақида рисола» (2° ли ватар, яъни 1° ли синуснинг иккилангани учун тенгламани келтириб чиқариш ва ечиш баён этилган), «Синус чораги ҳақида рисола» (алгебра ва тригонометрияга бағишланган бўлиб, тригонометрик функцияларнинг ҳар бир тўртдан бир даража қийматлари ал-жабр усулида аниқланган). Унинг математика бўйича ишлари ал-Коший ишларига улашиб кетган.

Гиёсиддин Жамшид ибн Маъсуд ал-Коший (1385—22.06.1429) — математик ва астроном, Самарқандда Улуғбек расадхонасида Қозизода ар-Румий билан ишлаган. Кошон (Эрон) шаҳрида туғилган. 1417 йилда Самарқандга келади ва шу ерда яшаб ижод қилади. Математикага оид 3 та асар ёзган: «Арифметика калити» («Мифтохул-ҳисоб») (1427 йилда ёзган) содда математика бўйича асосий ўқиш китоби бўлиб хизмат қилган. Китобда илгари математика бўйича олинган натижалар билан биргаликда кўп муҳим кашфиётлар баён қилинган. Хусусан, сонлардан ихтиёрий мусбат бутун кўрсаткичли илдиз чиқариш, иккиҳад—Ньютон биномини бутун мусбат даражага кўтариш, Хитой ва араб Шарқи олимларига қараганда изчилроқ ўнли касрлар ва улар устида амаллар бажариш қоидалари ишлаб чиқилган. Олим юқори тартибли тенгламаларни тақрибий ечиш қоидаларини «Ватар ва синус ҳақида» асарида баён этади. Натурал сонлар тўртинчи даражалари йиғиндисини топиш қоидаси Коший номи билан аталади. «Айлана ҳақида рисола» (1427 йил) асарида ал-Коший π сонининг вергулдан кейинги 17 та қийматини топади (Европада бундай натижа 1597 йилда қўлга киритилган), бунда Архимед усулидан фойдаланади, айланага ички чизилган мунтазам $3\cdot10^{28}$ томонлик орқали π сони қийматини аниқлаган (яъни у мунтазам 600 335 168-бурчак томонини ҳисоблашига тўғри келган). У тригонометрик ҳисоблашларни такомиллаштирди, осмон жисмларигача бўлган масофаларни ўлчаш усулини топди, сайёралар ҳаракатини кузатиш учун механик асбоб ихтиро қилган.

Аловиддин ибн Муҳаммад Али Қушчи (1402—1474) — астроном ва математик. Улуғбек расадхонасида ишлаган. Дастлаб Улуғбек саройида «қушчи» лавозимида ишлаган. Сўнгра Хитой императори саройида Улуғбекнинг элчиси булган. Улуғбек вафотидан сўнг Истамбулга кўчиб кетади. Унинг бизга маълум математикага оид асарлари: «Ҳисоб рисоласи» (1425 йил) асари ҳиндлар арифметикаси (ўнлик позицион система), астрономлар арифметикаси (олтмишлик саноқ системаси) ва геометрияга бағишланган, «Касрлар ҳақида рисола» (1430 йил) касрларга бағишланган бўлиб, унда оддий ва ўнли касрлар ҳақида тўлиқ маълумот берилган. «Китобул — Муҳаммадия» асари форстожик тилида ёзилган, геометрия, тригонометрия ва арифметикага бағишланган. Бунда у биринчи бўлиб, ҳозирги «мусбат» ва «манфий» атамаларини киритди. Унда шунингдек, текис учбурчаклар тригонометрияси, синус ва косинус теоремалари, учбурчак ва доира юзларини топиш формулаларини берди. Қушчи учбурчакларни ечиш масаласи билан шуғулланган. Бу масалада Коший ва Қушчи биринчи бор косинуслар теоремасини қўллаганлар. (Оврупода Виет уни 1593 йилда татбиқ этган). Тригонометрик функцияларнинг қийматларини ҳисоблашда чизиқли интерполяциялаш усулини баён этган.

СОН ТУШУНЧАСИНИНГ РИВОЖЛАНИШИ

Сонлар табиатни миқдор жиҳатдан бошқаради деб айтиш мумкин.

Ж. Максвелл

Сон — математиканинг асосий тушунчаларидан бири бўлиб, кишиларнинг амалий аҳтиёжларидан келиб чиққан. Сонларнинг вужудга келиши ва тараққиёти тарихи илк босқичларини қуйидагича баён этиш мумкин:

Натурал сон буюм ва турли нарсаларни санаш эҳтиёжи туфайли пайдо бўлган.

Мусбат каср сон — миқдорларни ўлчаш ва тақсимлаш эҳтиёжи туфайли вужудга келган.

Манфий сонлар математиканинг ўз эҳтиёжлари, яъни алгебраик тенгламаларни ечиш ва назарий асослаш эҳтиёжлари сабабли яратилган.

Ноль сони — манфий сонларнинг киритилиши туфайли пайдо бўлган.

Бу рўйхатни давом эттириш мумкин, лекин биз юқорида тилга олинган сонлардан сўнг вужудга келган иррационал сонлар тарихи ҳақида маълумотларни баён этишга киришамиз.

Пифагор мактабида (милод. авв. V аср) рационал сонлар ҳар қандай кесмаларни аниқ ўлчаш учун етарли эмаслиги исботланган, ўлчовдош бўлмаган кесмалар мавжудлиги исботланган. Масалан, юзи 2 га тенг квадратнинг томони унинг диагонали билан ўлчовдош эмаслиги Евклиднинг «Негизлар» 10-китобида қарама-каршисидан фараз қилиш йўли билан исботланади.

Бу кашфиёт Пифагор таълимотига зид эди, чунки уларнинг фикрича ҳар қандай миқдорни бутун сонлар ва уларнинг нисбатлари орқали ифодалаш мумкин. Дастлаб, уни сир сақлашга интилдилар.

Пифагорчи Гиппас Метапонтский (милод. авв. V аср) ишини давом эттириб, шу аср охирида Теодор Киренский 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17 квадрат бирлик юзга эга бўлган квадратларнинг томонлари бирлик квадратнинг томони билан ўлчовдош эмаслигини, яъни иррационал эканлигини исботлади. Теэтет эса умумийроқ масалани, яъни ихтиёрий бутун N сон (тўлиқ квадрат бўлмаган) учун $\sqrt{N}$ сонниг иррационаллигини асослади.

Чексиз кўп кесма ва геометрик миқдорларни бутун ва каср сонлар ёрдамида ўлчаб бўлмаслигини англаган пифагорчилар геометрия ва алгебрани сонлар ҳақидаги таълимот ёрдамида эмас, балки геометриянинг ўзи ёрдамида асослашга уриндилар. Шундай қилиб, геометрик алгебра яратилди ва ривожланди. Шу асосда математиклар бутун сонларни ва ҳар қандай миқдорларни кесмалар, тўғри тўртбурчаклар ва бошқа шакллар ёрдамида геометрик ифодалашга киришдилар.

Араб Шарқи мамлакатларида VII асрдан бошлаб математика ривожлана борди. Бу даврда сон тушунчасининг ривожланишида Марказий Осиёлик олимлардан Ал-Хоразмий (783—850), Абу Райҳон Беруний (973—1048), Абу Али ибн Сино (980—1037), Абу Наср Форобий (873—950), Умар Ҳайём (1048—1131) ва бошқалар муҳим кашфиётлар қилдилар. Жумладан:

1) Олтмишлик саноқ системаси такомиллаштирилди;

2) Сонлардан квадрат илдиз чиқариш усуллари ишлаб чиқилди;

3) Ўнли касрлар кашф этилди;

4) Бином формуласи исботланди;

5) Мусбат ҳақиқий сон тушунчаси кенгайтирилди.

Ал-Хоразмий ўзининг «Ҳинд ҳисоби ҳақида» асарида ўнлик саноқ системасини батафсил баён этган бўлса-да, у фақат 300 йилдан сўнггина кенг қўлланила бошланди.

Манфий сонларни биринчи марта француз олими

Никола Шюке (1445—1500) нинг «Сон ҳақидаги фан» (1484, Лионда 1848 йилда чоп этилган) асарида учратиш мумкин. Лекин бу сонлар ҳақидаги дастлабки тасаввурлар Ҳиндистон ва Хитой математиклари асарларида мавжуд бўлган. Масалан, хитой математиклари бешта номаълумли бешта чизиқли тенглама системасини ечишда манфий сонлардан ошкор равишда бўлмасада фойдаланганлар. Ҳинд математиги Брахмагупта (598—660) манфий сонларни «қарз» сифатида ифодалайди. У қуйидаги қоидалардан фойдаланади: «Иккита қарзнинг йиғиндиси қарз. Йўқ ва қарз йиғиндиси яна қарз. Мусбат сонни «буюм» деб атайди, шунинг учун у «буюм» ва «қарз» йиғиндисини уларнинг айирмасига тенг деб таърифлайди. Агар улар тенг бўлса, айирма ноль бўлишини кўрсатиб ўтади.

Араб математиклари манфий ишорани «душман», мусбат ишорани эса «дўст» сифатида қараб, ҳар хил ишорали сонлар кўпайтмасининг ишораси ҳақида ҳаётий «қоидалар» ни талқин этганлар.

Иррационал сонлар соҳасида эрон математиги Ал-Кархий (1016 йилда вафот этган) «Ал-фахрий» китобида квадрат ва куб илдизлардан иборат кўпҳадлар қийматларини топади, мураккаб бўлмаган куб илдизлар устида шакл алмаштиришларни амалга оширади, масалан, $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$ кўринишдаги ифодаларни қарайди.

Умуман, «рационал» атамаси лотинчадан ratio нисбат сўзидан келиб чиққан бўлса, «иррационал» тушунчаси рационал бўлмаган маънода ишлатилган. Дастлаб бу атамалар ўлчовли ва ўлчовдош бўлмаган миқдорларга нисбатан қўлланилган. V ва VI асрларда Римлик математиклар Марциан Қапелла ва Кассиодор бу атамаларни лотинчага «рационал» ва «иррационал» деб таржима қилганлар.

Евклид «Негизлар» асарида иррационал сонларни геометрик нуқтаи назардан баён этади, аммо эрамизнинг бошига келиб Юнонистондаги геометрик алгебрага қарама-қарши ўлароқ Шарқ мамлакатларида геометриягина эмас, балки арифметикага асосланган алгебра ҳам ривожлана борди, текис ва сферик тригонометрия, астрономия учун зарур ҳисоблаш усуллари такомиллашди.

Ҳиндистон, Ўрта ва Яқин Шарқ математиклари алгебра, тригонометрия ва астрономияни ривожлантира бориб, иррационал сонларсиз иш тута олмас эдилар, лекин шундай бўлса-да, улар бу сонларни кўп вақт тан олмай юрдилар. Юнонлар иррационал миқдорни «алогос» — сўзлар билан ифодаланмайдиган деб, араблар эса «асамм» — гунг деб атар эдилар.

XVI асрда итальян математиги Рафаэль Бомбелли (1526—1572) ва голланд математиги Симон Стевин (1548—1620) ҳам иррационал сонни рационал сонга қараганда кучли сон деб қараган эдилар.

Уларгача кўпгина Яқин ва Узоқ Шарқ математиклари ҳам иррационал сонларни алгебрада кенг қўллаганлар. Масалан, Умар Ҳайём «Евклиднинг қийин постулатларига шарҳлар» номли асарида ўша давр математикасининг ривожланаётган назариялари ва уларнинг турлича татбиқ этилиши асосида бўлинадиган бирликни ва умумлашган сон тушунчасини киритди, уларни сон деб атади. Бу умумлашган сон тушунчаси ҳам рационал сон, ҳам иррационал сонни ўз ичига олади.

Шундай қилиб, Умар Ҳайём қадимги математикларнинг сон ҳақидаги тушунчасига янгилик киритди, миқдорлар нисбатини сон деб таърифлади. Бу нисбат эски маънода — бутун сон, янги сон эди. Умуман, Ҳайём иррационал миқдор билан сон орасидаги фарқ йўқлигини кўрсатиб, сон тушунчасини мусбат ҳақиқий сон тушунчасигача кенгайтирди.

Бу соҳа бўйича озарбайжонлик математик Насириддин Тусий (ат-Тусий, 1201—1274) ҳам катта ишларни амалга оширди. У «Тўлиқ тўрттомонлик ҳақида рисола» ва «Евклиднинг баёни» асарларида нисбатлар назарияси ва сон ҳақидаги таълимотни янада ривожлантирди.

Жумладан, Шарқда ва кейинчалик ўрта аср Оврупосида шуҳрат қозонган «Евклиднинг баёни» («Таҳрир Уқлидис») асари икки хил вариантда бизгача етиб келган: биринчиси, қисқа баёни ва иккинчиси 10 та китобдан иборат муфассал баёни 1594 йилда Римда чоп этилган. Бу асарида олим квадрат иррационалликлар устида фикр юритади, шунингдек, рационал миқдорга қуйидагича таъриф беради: «Берилган миқдорга нисбатда турган ҳар қандай миқдор рационал дейилади, бунда сон сонга нисбатда бўлади». Акс ҳолда у иррационал миқдор деб тушунтиради. Иррационал миқдор бирор миқдорга нисбатан, агар бу миқдор иррационал бўлса, соннинг сонга нисбати каби муносабатда бўлади. Масалан,

$$\sqrt{5} = \frac{1}{3}\sqrt{45} \text{ ёки } \sqrt{1\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Урта ва Узоқ Шарқ математик ва астрономлари олтмишлик касрлардан фойдаланганлар. Бу соҳада буюк ўзбек математиги ва астрономи Улуғбек (1394—1449) илмий мактабининг йирик олимларидан бири Ғиёсиддин Жамшид ал-Коший (1385—1430) иш олиб бориб, «Арифметика калити» (1427) асарининг уч қисмида сон таълимотини ривожлантиришга катта ҳисса қўшди. Унда олим бутун сонлар арифметикаси, бусун сонлардан илдиз чиқариш умумий қоидаларини баён этди. Шунингдек, биномни бутун мусбат даражага кўтаришни ҳам биринчи бўлиб Коший келтириб чиқарди.

Мазкур асарда турли касрлар: суратлари бирдан иборат бўлган миср касрлари, махражлари 60 га тенг бўлган бобил касрлари, сурат ва махражлари турли сонлардан иборат оддий касрлар, уларнинг ёзилиш усуллари, улар устида амалларни бажариш ва бошқа турли касрлар баён қилинган. Булардан ташқари, олим, махражлари 10, 100, 1000 ва ҳ. к. бўлган касрларни, яъни ўнли касрларни қаради, уларга таъриф берди, «ўндан бир», «юздан бир», «мингдан бир» ва ҳ. к. атамаларни киритди. Ўнли касрларни ёзишда бутун қисмидан сўнг тик чизиқ чизиб, сўнг каср қисмини ёзди ёки бутун қисмини бир хил сиёҳ билан, каср қисмини эса бошқа рангли сиёҳ билан ёзди. Ал-Коший ўнли касрлар устида амаллар бажариш қоидаларини ифодалади ва кўп мисолларда тушунтириб берди. Шундай қилиб, ватандошимиз самарқандлик олим ал Коший ўнли касрлар назариясини асослаган биринчи олимдир.

Оврупода ўнли касрлар ҳақида Коший замонидан бир ярим аср ўтгандан кейин голланд математиги Симон Стевин 1585 йилда асар ёзди. У 1594 йилда ёзган яна бир «Алгебрага иловалар» асарида олдинги «ўнлик» асаридаги ғояларни ривожлантириб, ўнлик касрларни ҳақиқий сонга чексиз яқинлаштириш учун ҳам ишлатиш мумкинлигини кўрсатди. Шундай қилиб, XVI асрда иррационал сон тушунчасини киритиш ва асослаш формал усулда бўлиб, ўнли касрларни ҳисоблаш ғояси яратилди.

Буюк француз файласуфи, математиги, физиги ва физиолог олими Рене Декарт (1596—1650) нинг «Геометрия» (1637) асари пайдо бўлиши ихтиёрий кесмаларни ўлчаш билан рационал сон тушунчасини кенгайтириш орасида боғлиқликни тушунишни осонлаштирди. Сон ўқида иррационал сонлар ҳам рационал сонлар каби нуқталар билан тасвирланди. Бу геометрик тасвирлаш иррационал сонлар хусусиятини тушунишга ва уларни тан олишга имконият яратди.

XVI—XVII асрларга келиб Оврупода сон тушунчасини ҳақиқий сон тушунчасигача кенгайтириш учун ҳаракатлар бошланди.

Узлуксиз миқдор ва сон тушунчаси орасидаги узилишни тугатиш учун Декарт ҳар қандай миқдорни тўғри чизиқ кесмаси билан ифодалади. Кесма билан биргаликда сонлар устидаги ҳар бир амалга кесмалар устида геометрик амални (ясашни) мос қўяди. Масалан, a, b кесмалар кўпайтмасини a, b, 1 га тўртинчи пропорционални ясаш билан топади. Илдиз чиқаришга $1:x=$ $=x:a$ пропорциядан аниқланувчи x кесмани ясаш мос келтирилади. Ҳар бир ҳақиқий сонни кесма сифатида қараб, кесмаларни ҳисоблаш бирлигини киритиб ҳамда манфий сонларни кўргазмали тавсифлаб, Декарт сон тушунчаси ва геометрик миқдор орасидаги узилишни тўлдирди ва сон тушунчасини умумлаштиришга ва унга янги таъриф беришга имконият яратди.

Соннинг янги таърифи инглиз олими Иссак Ньютон (1643—1727) томонидан «Умумий арифметика» (1707) асарида баён этилди. Бу ҳақиқий сон таърифи узлуксиз миқдорларни кесмалар устида декарт ҳисоби орқали эмас, балки бевосита арифметик ҳисоблашлар ёрдамида ўрганишга имкон берди. Бу эса лимитларнинг яратилиши, иррационал сонларни рационал сонлар кетма-кетликларининг лимитлари сифатида тушунишга йўл очди. Эйлер (1707—1783) ва немис математиги Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777) эса агар чексиз ўнли каср даврий бўлса, у рационал сонни ифодалашлигини исботладилар, бу эса даврий мас чексиз ўнли касрларни иррационал сонларга мос қўйилишига олиб келди. Шундай қилиб, XVIII аср бошига келиб иррационал сонлар тўғрисида уч фикр пайдо бўлди: рационал сонларнинг аниқ чиқарилмайдиган илдизлари; ҳар қандай аниқликдаги рационал яқинлашишлар кетма-кетлиги; Ньютон таърифига асосланган сонлар. Охирги таъриф фанда бир ярим аср хукм сурган бўлса ҳам ҳақиқий сонлар назариясининг яратилишига мантиқий асос бўлиб хизмат қила олмади.

Ҳақиқий сон тушунчасининг ривожи ва уни асослаш XIX асрда Бернард Больцано (1781—1848), Огюстен Луи Коши (1789—1857) ва Карл Теодор Вилгельм Вейерштрасс (1815—1897) томонидан лимитга ва математик анализнинг бошқа асосий тушунчаларига қатъий таъриф берилгандан сўнггина амалга оширилди.

XIX асрнинг иккинчи ярмида немис математиги Рихард Дедекинд (1831—1916) «Узлуксизлик ва иррационал сонлар» (1872) асарида узлуксизлик ва ҳақиқий сон таърифини берди, бунда у рационал сонларнинг учта хоссасига асосланди:

1. $a>b$, $b>c$ бўлса, $a>c$ бўлади.

2. a ва c турли сонлар бўлса, у ҳолда улар орасида ётувчи чексиз кўп сон мавжуд.

3. Агар a бирор сон бўлса, у бутун рационал сонлар тўпламини иккита A_1 ва A_2 синфга ажратади: бунда 1) рационал сонлар тўпламининг ҳар қандай элементи бу синфлардан биттасига ва фақат биттасига тегишли; 2) A_1 ва A_2 синфларнинг бирортаси ҳам бўш эмас; 3) биринчи синфнинг ҳар қандай сони иккинчи синфнинг ҳар қандай сонидан кичик.

Сонларнинг бундай синфларга бўлиниши Дедекинд кесими деб аталади. Бу кесим орқали рационал ва иррационал сонлар биргаликда ҳақиқий сонлар тўплами ёки континуум (лотинча — узлуксиз) ташкил этиши аниқланди. Сўнгра континуумни тартиблаш, ҳақиқий сонларнинг зичлиги ва узлуксизлигини исботлаш амалга оширилди. Ниҳоят, ҳақиқий сонлар устида амаллар аниқланди.

Дедекинд назарияси билан бир қаторда ҳақиқий сонлар тўпламининг бошқа назариялари — Кантор ва Вейерштрасс назариялари пайдо бўлди. Улар ҳам рационал сонларни асос қилиб олиб, бир-биридан кам фарқ қиладиган назарияларни яратдилар.

Ҳақиқий сон тушунчасини янада кенгайтириш математика фанини назарий жиҳатдан ривожлантириш эҳтиёжлари туфайли пайдо бўлди. Шундай қилиб, комплекс сон тушунчаси вужудга келди. Итальян математиги Р. Бомбелли тахминан 1560 йилларда ёзилган ва 1572 йилда чоп этилган «Алгебра» асарида мавҳум миқдорларни киритиб, улар устида амаллар бажаришнинг оддий қоидаларини келтирди ва уларни куб тенгламаларнинг келтирилмайдиган ҳолларини текширишга татбиқ этди.

Комплекс сон тушунчасини янада ривожлантиришда француз олими Франсуа Виет (1540—1603), инглиз олими Валлис (1616—1703) ва голланд математиги Альберт Жирар (1595—1632) катта ҳисса қўшдилар. Жумладан, Валлис 1685 йилда ёзган алгебра бўйича асарида комплекс сонларни геометрик тасвирлаш ғоясини баён қилган бўлса, Жирар «Алгебрада янги кашфиётлар» (1629) асарида тенгламаларнинг мавҳум илдизларини қаради ҳамда тенгламаларнинг манфий илдизларига йўналган кесмалар сифатида геометрик тавсиф берди.

XIX асрда сон тушунчаси яна ҳам умумлаштирилиб, комплекс соннинг умумлашган шакли кашф этилди. Бу сонни биринчи бўлиб ирланд математиги Уильям Роуан Гамильтон (1805—1865) ва немис математиги Грасман Герман Гюнтер (1809—1877) бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда киритдилар. Улар бир неча бирликка эга сонлар системаларининг хусусий ҳоли сифатида комплекс сонлар назариясининг формал баёнини бердилар. Гамильтон ўзаро қуйидаги кўпайтириш жадвали

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = ik = j$$

билан боғланган тўртта бирликка эга бўлган ўзига хос сонлар системаси (квартернионлар) ни яратди. Унинг ғояси Грасман ғояларига яқин эди, бунинг устида у 8 йил ишлади. Лекин Грасманнинг баёни ўзининг аниқлиги билан фақат кватернионларнингина эмас, балки комплекс сонларнинг ҳам тан олинишида муҳим роль ўйнади.

1844 йилда Грасман Гамильтонга боғлиқ бўлмаган ҳолда соннинг энг умумлашган шакли

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots\ldots + x_n\alpha_n$$

кўринишдаги сонларни, яъни гиперкомплекс сонларни ўрганишга киришди.

Хулоса қилиб, шуни таъкидлаш керакки, сон тушунчаси инсоният ва математика фани эҳтиёжлари туфайли ривожланиб келди ҳамда кўпдан-кўп математик назарияларнинг тараққиётига асос бўлиб хизмат қилди. Ҳозирги пайтда ҳам сонлар назарияси математиканинг мустақил бўлими сифатида янги назарияларга асос яратмоқда, шу билан турли йўналишлар татбиқларида тобора кенгроқ қўлланилмоқда.

ФУНКЦИЯ ТУШУНЧАСИНИНГ РИВОЖЛАНИШИ

Функция тушунчаси тўплам тушунчаси каби асосий ва бошлангич ҳисобланади.

Ф. Хаусдорф

Қадимда кишилар дастлаб функционал боғланишларга амалий фаолиятларида дуч келганлар. Масалан, ҳунармандчиликда қанча кўп маҳсулот тайёрланса, фойда ҳам шунча кўп бўлишини, яъни маҳсулот миқдорининг фойдага боғлиқлигини тушунганлар. Кейинчалик бунга ўхшаш тескари пропорционал богланиш ҳосил этувчи турли ҳаётий мисолларни тушунишга ҳаракат қилганлар. Шу билан биргаликда геометрик шаклларнинг ҳажмлари ва юзлари уларнинг ўлчамларига боғлиқлигини текширганлар. Қадимги Бобилда бу боғланишлар дастлаб сонлар жадвали шаклида ифодаланган. Масалан, соннинг квадрати, куби ва тескарисини топиш жадвалларини тузганлар. Юнонистонда эса кўпроқ назарий математикага эътибор берилиб, мантиқий хулосалар орқали мулоҳазалар юритишга ҳаракат қилганлар. Улар доирада геометрик боғланишларни текширганлар, лекин зарур натижаларга эриша олмаганлар.

Астрономиядаги тадқиқотчилар тригонометрик функциялар (боғланишлар)нинг келиб чиқишига асос солдилар. Масалан, милод. авв. III—II асрларда берилган узунликдаги ёйларни тортиб турувчи ватарлар жадвали тузилган. Уни юнон олими Клавдий Птолемей 100—178 йиллар давом эттириб, синуслар жадвалини тузиб чиқди.

Византия императори Юстиниан 529 йилда математик тадқиқотлар ўтказишни ман қилгандан сўнг, математика Шарқ мамлакатларида ва Марказий Осиёда ривожлана бошлади. Ҳинд ва араб математиклари тригонометрик функцияларни айланага ўтказилган кесмаларнинг узунликлари шаклида кўриб чиқади. Ҳинд математиги Ариабхата I (476-тахминан 550 йиллар) асосий тригонометрик айниятни, айрим синус, косинус ва тангенс учун формулаларни келтириб чиқарди. Шарқ олимлари эса тригонометрик функцияларнинг қийматларини интерполяциялаш ёрдамида ҳисоблаш мумкинлигини кўрсатдилар. Масалан, **Абу Райҳон Беруний** (973—1048) ўзининг «Қонуни Масъудий» (1037) асарида синуслар ва тангенслар жадвали, улардан фойдаланиш ҳамда чизиқли ва квадратик интерполяциялаш қоидаларини баён этган. Шунингдек, у синус ва тангенс функциялар учун берилган интерполяциялаш қоидалари «ҳамма жадваллар» учун ҳам, яъни астрономиядаги функционал боғланишларнинг ҳамма жадваллари учун қўлланилиши мумкинлигини таъкидлаб ўтади. Бу эса унинг функциялар умумий қонуниятини топишга ҳаракат қилганлигидан далолат беради. Мазкур асарнинг олтинчи мақоласида Беруний Қуёш ҳаракатини вақтнинг ёки эклиптика ёйининг функцияси сифатида математик нуқтаи назардан қараб ўтади ҳамда Қуёшнинг ҳаракат тезлиги апогейда минимумга, перигейда максимумга эришишини аниқлайди.

Умуман олганда, дастлабки тригонометрик миқдорлар Ҳиндистонда пайдо бўлган. Аввало синус, сўнгра «айлантирилган» синус $1-\cos\alpha$ миқдорни киритганлар. IV—V асрларда «сиддхант» (фанлар) деб аталувчи ҳинд ишларида ҳамда 499 йилда Ариабхата I томонидан тузилган «Ариабхаттиам» асарида синус, косинус ва «айлантирилган» синус (синус-версус) каби тригонометрик функциялар учрар эди ва улар фақат ўткир бурчаклар учун қаралган эди. Ҳисоблашларда эса фақат тўғри бурчакли учбурчаклар қаралган. Бундан ташқари, улар асосий айниятни, айрим $\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$ каби келтириш формулаларини билганлар.

Кейинроқ Ал-Хоразмий замондоши **Аҳмад ибн Абдулла ал-Марвазий ал-Ҳосиб ал-Ҳабаш** (764—874) гномоника (қуёш соатлари ҳақидаги таълимот бўлиб, кишилар асбоб ёрдамида вақтни аниқлаганлар, яъни ерга тик қоқилган ёғоч (гномон) бўлиб, вақт ёғоч сояси узунлиги ва йўналиши билан аниқланган) масалалари билан шуғулланиб, соя узунлиги u нинг гномон ўзгармас узунлиги l га нисбати Қуёш баландлигига (у φ бурчак билан ўлчанади) боғлиқ равишда ўзгаришини ҳисобга олиб, u соя узунлигининг $\varphi=1°, 2°, \ldots$ бурчак қийматларига мос келувчи қийматларини (яъни $u=l\,\mathrm{ctg}\,\varphi$, $u=\mathrm{ctg}\,\varphi$) топди. Горизонтал гомон учун ҳам у айлантирилган соялар, яъни $u'=l\,\mathrm{tg}\,\varphi$ $u'=\mathrm{tg}\,\varphi$ лар қийматлар жадвалини тузди. Шундай қилиб, у биринчи бўлиб, тангенс ва котангенсни тўғри бурчакли учбурчак томонлари нисбатлари сифатида киритди ва синуслар, тангенслар, котангенслар жадвалини тузди.

XII асрда араб асарларини лотин тилига таржима қилишда котангенс ва тангенс тригонометрик функциялар «тўғри соя» ва «тескари соя» деб атала бошлаган, «Тангенс» ва «секанс» атамалари (1583) даниялик математик астраном Томас Финк (1561—1656) томонидан киритилган бўлса, «котангенс» ва «косеканс» атамаларини Эдмонд Гюнтер (1581—1626) 1620 йилдан бошлаб қўллай бошлаган.

Ўрта асрларда биринчи бўлиб функция тушунчасини француз математиги Никола Орем (Оресм) (1323—1382) кесма узунлигида тасвирлади, яъни боғланишлар фақат сон жиҳатдан эмас, балки сифат жиҳатдан ҳам ўзгаришга эга эканлигини кўрсатди ва у каср кўрсаткичли даражали функция тушунчаси яратилишига катта ҳисса қўшди. У интенсивликларни(сифат жиҳатдан солиштириш) кесма узунликлари билан тасвирлади. Бу кесмаларни бирор тўғри чизиққа нисбатан перпендикуляр қилиб қўйиб чиқилса, уларнинг охирлари бир чизиқни ифодалайди. Бу функционал боғланишларнинг биринчи график тасвири эди. Шунингдек, у графикларни синфларга ажратишга ҳаракат қилди: текис, текис-нотекис ва нотекис-нотекис.

Оресмнинг ғояларини ривожлантириш учун миқдорлар орасидаги боғланишни фақат график равишда эмас, балки формулалар билан ҳам ифодалаш зарурати пайдо бўлди, лекин бунинг учун керак бўлган ҳарфли алгебра тўла-тўкис ривожланган эмас эди. Формулалар билан иш кўрувчи алгебра XVI асрда яратилди.

XVI—XVIII асрларда астрономия фани катта ютуқларга эришди. Бу эса ҳаракатни ўрганиш ва уни тадқиқ этиш усулларини ишлаб чиқишни зарурат қилиб қўйди. Шу асосда математикага ўзгарувчи миқдор тушунчаси киритилди. Уни биринчи бўлиб француз математиги Р. Декарт (1596—1650) киритди. У тўғри чизиқли координаталар усулини ишлаб чиқди, шунингдек ўзгарувчи миқдор ва функция тушунчаларини киритди. Бу билан у геометрия ва арифметика орасидаги узилишни бартараф этди. Шундай қилиб, миқдорлар орасидаги боғланишлар сонлар орасидаги боғланишлар орқали ифодалана бошлади, бу эса яққол ифодаланмаган сонли функция ғоясидан иборат эди.

Миқдорлар орасидаги муносабатларни ёзишда Декарт ҳарфлардан фойдаланди, бунда миқдорлар устида амалларга ҳарфлар устидаги амаллар мос келар эди. Алгебраик шакл алмаштиришлар ёрдамида боғланишларни бошқа богланишларга ўтказиш имконияти яратилди.

Фанга ўзгарувчи миқдорларнинг кириб келиши билан ҳисоблаш математикаси ва ҳарфли алгебра янада ривожланди. Координаталар ёрдамида миқдорлар орасидаги мосликларни график равишда тасвирлаш мумкин бўлди. Декарт ва унинг замондошларида функция тушунчаси геометрия ва механика тилида ифодаланган эди.

XVII аср охирида немис математиги Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) ва унинг шогирдлари «функция» атамасини қўллай бошладилар. Унинг ўзи бу атамани қўлёзмаларида 1673 йилдан бошлаб қўллаган. Эгри чизиқларга ўтказилган уринмалар кесмалари ва уларнинг координата ўқларига проекциялари ҳамда берилган фигура учун функцияни бажарувчи бошқа турдаги чизиқлар тўғрисида мулоҳаза юритиб, функция (лотинча функтус — бажариш) атамасини биринчи марта ишлатди.

Швейцариялик математик Иоганн I Бернулли (1667—1748) функцияга қуйидагича таъриф берди: ўзгарувчи миқдорларнинг функцияси деб қандайдир усул билан бу ўзгарувчи миқдордан ва ўзгармаслардан ҳосил қилинган миқдорга айтилади.

Буюк инглиз математиги ва физиги Исаак Ньютон (1643—1727) ҳам функция тушунчасини ривожлантириш бўйича кўп ишлар қилди. У функция ўрнида ордината атамасини қўллаган, шу асосда дифференциал ва интеграл ҳисобни ҳамда механика қонунларини яратди.

Леонард Эйлер (1707—1783) комплекс ўзгарувчили функцияларни киритди, тригонометрик ва кўрсаткичли функциялар орасидаги муносабатни топди. Эйлер кўп ишларида математик анализни геометрия ва механика тилидан қутқарди. У биринчи марта тригонометрик функциялар назариясини тўлиқ баён этди, кўрсаткичли ва логарифмик функциялар хоссаларини чуқур ўрганди.

Механика масалаларини, хусусан, тор тебраниши масаласини ўрганишда Эйлер ва француз математиги Жан Лерон Даламбер (1717—1783) ўртасида ечимнинг кўриниши турли оралиқларда турлича ифодаланиши ҳақида баҳс кетди. Бунга Даниил Бернулли (1700—1782) ҳам аралашиб, тор тебраниш масаласи ечимини тригонометрик функциялар йиғиндиси шаклида топди. Бундан у ечим умумий ҳолни ифодаланишини таъкидлади. Эйлер бунда хато фикр юритар эди, чунки битта ва фақат битта функция бир нечта формулалар орқали ифодаланишига ишонмас эди. Шундай қилиб, Эйлер ҳам, Даламбер ҳам ўз фикрларини ҳимоя қила олмадилар. Шунга ўхшаш, француз математиги Сильвестр Франсуа Лакруа (1765—1843) ҳам функция тушунчаси ва унинг аналитик ифодаси айнан бир эмаслигини тан олди.

Функция тушунчаси ва унинг аналитик ифодаси орасидаги узилиш XIX аср бошида француз математиги Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) тадқиқотларида, яъни маълум қўшимча шартларда турли аналитик ифодалар билан берилган функцияларни ҳам чексиз сондаги тригонометрик функциялар йиғиндиси шаклида (Фурье қатори) ифодалаш мумкинлигини асослагандан сўнггина бартараф қилинди. Фурье ишларидан кейин функциянинг қандай аналитик ифода билан берилиши муҳим эмаслиги аниқланди, асосийси эркли ўзгарувчининг берилган қийматларида эрксиз ўзгарувчининг қандай қийматлар қабул қилиш мумкинлиги исботланди. Бу ғоянинг шаклланишида Фурье билан бир қаторда рус математиги Николай Иванович Лобачевский (1792—1856), немис математиги Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859) ва бошқалар иштирок этдилар. Шундай қилиб, ўша даврда функциянинг қуйидагича таърифи пайдо бўлди: x ўзгарувчи миқдорнинг ҳар бир қийматига y ўзгарувчи миқдорнинг ягона аниқланган қиймати мос келса, y миқдор x ўзгарувчи миқдорнинг функцияси дейилади.

Юқоридаги таъриф жуда умумий бўлиб, ўз ичига жуда кўп функцияларни, масалан, Дирихле томонидан киритилган:

$$D(x) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x\text{—иррационал бўлса,} \\ 1, \text{ агар } x\text{— рационал бўлса.} \end{cases}$$

функцияни ҳам ўз ичига олар эди. Бундай функцияларни ўрганиш ўша давр математикаси учун жуда катта қийинчиликлар вужудга келтирди. Шу туфайли бундай функцияларни ўрганиш 25 йил давомида ҳеч қандай қизиқиш уйғотмади. Уларнинг фикрича (булар қаторига француз математиги Анри Жюль Пуанкаре (1854—1912), Шарль Эрмит (1822—1901) ни ҳам киритиш мумкин) бундай функцияларни ўрганиш «бемаънилик» ҳисобланар эди.

Лекин шундай бўлса-да математиклар узилишга эга бўлган функцияларни ўрганишга киришдилар. Бу соҳа бўйича француз олими Рене Луи Бэр (1874—1932) (узилишга эга узлукли функцияларни синфларга ажратди), Феликс Эдуард Жюстен Эмиль Борель (1871—1956) (узилишга эга функциялар назариясини ривожлантирди), Анри Луи Лебег (1875—1941) (узилишга эга функцияларни интеграллаш) катта илмий ишларни амалга оширдилар.

Узилишга эга функциялар синфларини текширишда рус математиклари ҳам четда қолмадилар. Узилишга эга функциялар хоссаларини очишда Дмитрий Федорович Егоров (1869—1931) ва Николай Николаевич Лузин (1883—1950) катта ҳисса қўшдилар. Шу асосда Москва математика мактаби «Лузитания» ташкил қилинган эди.

XIX асрнинг иккинчи ярмидан бошлаб функция таърифидаги «ўзгарувчи миқдор» сўзига шубҳа билан қарала бошланди. Бу ўзгарувчи миқдор тушунчаси нафақат математика, балки бошқа турдаги нарсалар бўлиши мумкинлигини ҳамда ундаги мослик фақат сонлар орасидаги мосликни ифодалашини тушуниладиган борилди. Шу сабабли, агар функциянинг аналитик ифода билан берилишидан воз кечилса, у ҳолда нарсалар орасидаги мосликларни ҳам қараш мумкинлиги аниқ бўлиб қолди.

Тўпламлар назариясининг яратилиши билан унинг ижодкорлари немис математиги Георг Кантор (1845—1918) ва немис олими Рихард Юлиус Вильгельм Дедекинд (1831—1916) функция тушунчасининг умумлашмаси—акслантиришга таъриф бердилар: X ва Y тўпламлар берилган бўлсин. X тўпламни Y тўпламга акслантириш f берилган дейилади, агарда X тўпламнинг ҳар қандай x элементига Y тўпламдаги унга мос элемент y кўрсатилган бўлса, y элемент x элементнинг f акслантиришдаги образи деб аталади. Бу тушунчанинг киритилиши тескари функция, мураккаб функция ва ҳ. к. тушунчаларни ойдинлаштиришга имкон беради.

Акслантириш тушунчаси ҳам етарлича умумий бўлиб қолмади, чунки тажрибада X тўпламдаги ҳар бир x элементга Y тўпламда битта ва фақат битта элемент мос келган тўпламлар билан бир қаторда мураккаб алоқаларга эга бўлган тўпламларни ҳам учратиш мумкин, яъни ҳар қандай $x \in X$ элементга Y тўпламдан битта элемент эмас, балки бу элементларнинг маълум қисм тўплами мос келиши мумкин. Бу ҳолларни ҳам қамраб олиш учун «бинар мослик» тушунчаси киритилди.

XX аср бошида функцияларни ўрганиш учун математиканинг янги соҳаси — функционал анализ пайдо бўлди. Бу фанда функциялар кетма-кетликлар, чизиқлардан ташкил топган тўпламлар ўрганилади, уларда функциялардан иборат фазолар чексиз ўлчовли бўлиши мумкин. Мазкур фан абстракт бўлса-да, унинг кўплаб татбиқлари ҳисоблаш математикаси, квант механикаси, иқтисод ва бошқа фанлар муаммоларини ҳал қилишда кенг қўлланилмоқда.

ГЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРИ

Ўтган XIX асрнинг энг истиқболли ва буюк ютуғи — ноевклид геометриясининг кашф этилишидир.

Д. Гильберт

Геометрияни мустақил фан сифатида асослашда қадимги юнон олимлари дастлабки ҳаракатларни амалга оширганлар. Масалан, Гиппократ Хиосский геометрия асослари ҳақидаги дастлабки тасаввурларини баён этган. Бу соҳа бўйича асосий ишларни буюк юнон олими Евклид (тахминан 356—300 йиллар, милоддгача бўлган давр) амалга оширган. Унинг асосий асари «Негизлар» планиметрия, стереометрия ва сонлар назарияси баъзи масалаларини, шунингдек, алгебра, нисбатлар умумий назарияси, юз ва ҳажмларни ҳисоблаш усули ҳамда лимитлар назарияси элементларни ўз ичига олади. «Негизлар» да Евклид қадимги юнон математикасининг барча ютуқларини жамлади ва унинг ривожи учун асос яратди.

«Негизлар» 13 китобдан иборат бўлиб, голланд математиги Ван-Дер-Варденнинг (1903 йилда туғилган) ҳисоблашича, «бу асар эрамизгача бўлган V—IV асрлар юнон математиклари асарлари қайта ишланмасидан иборат:

1—4-китоблар (планиметрия) — Гиппократ Хиосский «Негизларининг» қайта ишланмаси;

5-китоб (геометрик миқдорларнинг пропорциялар назарияси), 6-китоб (ўхшашлик назарияси) ва 12-китоб (доиравий жисмлар) — Евдокс Книдский (милод. авв. 408—355 йиллар) асари ишланмаси;

7—8-китоблар (сонлар назарияси ва сонли пропорциялар), 11-китоб (стереометрия асослари) — Архит Тарентский асари ишланмаси;

13-китоб (мунтазам кўпёқлар) ва 10-китоб (иррационал миқдорлар назарияси) — Теэтет Афинский асари ишланмаси.

Бу қомусий асар қўлёзма ҳолида XVI асргача ўқув қўлланмаси сифатида қўлланилиб келди, 1482 йилда биринчи марта чоп этилди. Асарда 23 та таъриф, 5 та постулат ва 9 та аксиома берилган. «Негизлар» нинг тарихий аҳамияти шундан иборатки, унда биринчи бўлиб аксиоматика асосида геометриянинг мантиқий тузилишини ишлаб чиқишга ҳаракат қилинган. Ҳозирги замон математикасида қўлланилаётган аксиоматик усул ҳам шу асардан бошлаб фойдаланила бошлаган.

Асарда тўғри тўртбурчакка, квадратга, айланага тўғри таърифлар берилган. Нуқтага қуйидагича таъриф берилади: «Нуқта деб шундай нарсага айтиладики, у қисмларга эга эмас». Чизиқ қуйидагича таърифланади: «Чизиқ деб эни йўқ узунликка айтилади».

Геометрик ясашларни амалга ошириш мумкинлигини баён этувчи математик мулоҳазалар (постулат)дан қуйидаги бештаси баён қилинган:

1. Ҳар қандай икки нуқтадан фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

2. Тўғри чизиқ кесмасини чексиз давом эттириш мумкин.

3. Ҳар қандай марказдан ихтиёрий масофада айлана ясаш мумкин.

4. Ҳамма тўғри бурчаклар ўзаро тенг.

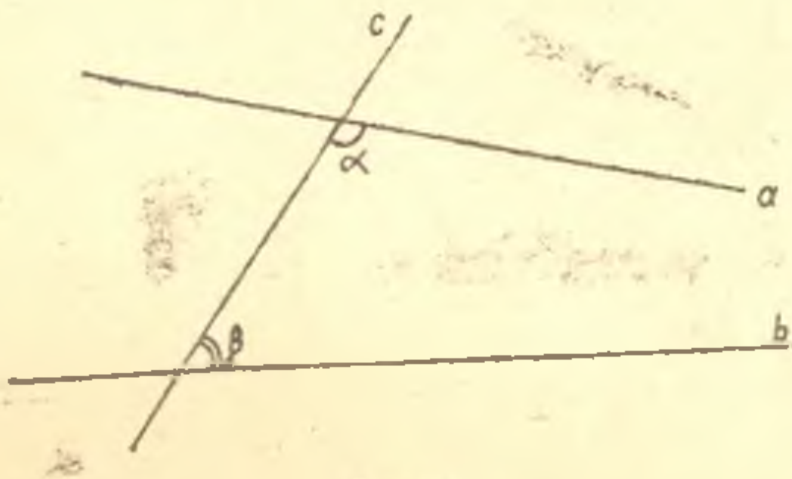
5. Бир текисликда ётган икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесиб, бир томонли ички бурчаклар ҳосил қилса ва бурчаклар йиғиндиси икки тўғри бурчакдан кичик бўлса, мазкур тўғри чизиқлар давом эттирилганда улар у йиғиндиси икки тўғри бурчакдан кичик бурчаклар томонида кесишади.

«Негизлар»да 9 та аксиомада исботсиз қабул қилинадиган мулоҳазалар баён этилган:

1. Бирор нарсага тенг бўлган миқдорлар ўзаро тенг.

2. Агар тенг миқдорларга тенгни қўшсак, яна тенг миқдорлар ҳосил бўлади ва ҳ. к.

Мазкур асар улкан ва узоқ шуҳратга эга бўлиб, 1482 йилдан бошлаб барча жаҳон тилларида 500 мартадан зиёд нашр қилинди. Айниқса, V постулат катта илмий мунозараларга сабаб бўлди. Агар V постулатдаги ички алмашинувчи бурчакларни α ва β десак, тўғри чизиқлар a ва b бўлса, у ҳолда постулат мазмунига кўра. $\alpha+\beta<2d$ бўлса, a ва b тўғри чизиқлар кесишади (5-расм).



5-расм.

Нима учун кўп асрлар давомида математиклар бу постулатга асосий эътиборни қаратганлар? Аввало шуни айтиш керакки, Евклид аксиоматикасида бешинчи постулатга эҳтиёж кейинчалик сезилади. «Негизлар»нинг катта қисми унга боғлиқ эмас. Шундай қилиб, Евклиднинг буюк кашфиётини шартли равишда икки қисмга ажратиш мумкин. Биринчи қисмга исботларида мазкур постулат қўлланилмайдиган мулоҳазалар киради. Сўнгра постулат баён этилади ва кейинги барча мулоҳазалар унга таянади. Бундан «Негизлар»ни бешинчи постулатсиз ҳам яратиш мумкин деган фикр пайдо бўлиши табиий. Шунинг учун уни исботлаш иштиёқи туғилади. Математиклар постулатни исботлашга урина бошладилар. Бу муаммони ҳал этишга юзлаб олимлар ҳаракат қилдилар. Уларнинг исботларида ёки қўпол хатолар, ёки бир қарашда илғаб бўлмайдиган чуқур ноаниқликлар учрар эди. Постулатни исботлаш йўлида унга тенг кучли бир қатор мулоҳазалар пайдо бўлди. Масалан, инглиз математиги Жон Плейфер (1748—1819) нинг параллеллик аксиомаси шулар жумласидандир: текисликда тўғри чизиқдан ташқарида олинган нуқтадан бу тўғри чизиққа фақат битта параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Бу аксиомани у 1795 йилда чоп этилган «Геометрия асослари» китобида баён этган.

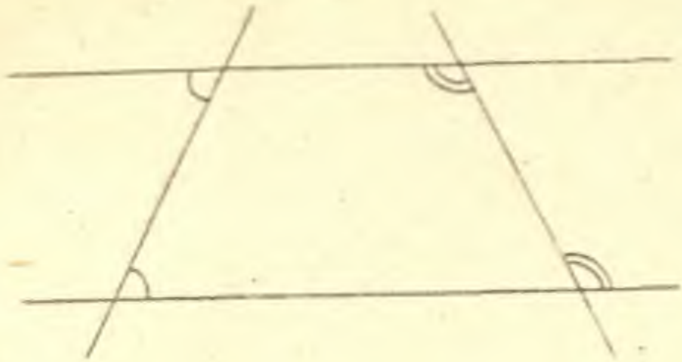
Энди бешинчи постулатни исботлашга уринишларнинг баъзиларини кўриб ўтайлик.

Қадимги юнон олими Посидоний (Посейдоний) (милод. авв. 135—51 йиллар) ҳамма нуқталари берилган тўғри чизиқдан ўзгармас масофада узоқлашган тўғри чизиқни параллел тўғри чизиқ деб аташни таклиф этди ва бунда бешинчи постулат осон исботланди. Посийдонийнинг хатоси постулатда киритилган янги таърифдир: текисликда берилган тўғри чизиқдан ўзгармас масофада жойлашган нуқталар тўплами тўғри чизиқ деб аталади (6-расм).

6-расм

Марказий Осиёлик математик ва астроном, ал-Хоразмийнинг замондоши ва маслакдоши ал-Жовҳарий (IX аср) ўз исботида агар ички кесишувчи бурчаклар бир кесувчи учун тенг бўлса, улар бошқалари учун ҳам тенг деган фараздан фойдаланган (7-расм).

Араб математиги Ибн Қорра Абу-л-Ҳасан Собит ас-Сабий ал-Ҳаррани (836—901) «Негизлар»ни араб тилига таржима қилди, унга шарҳлар ёзди ҳамда V постулатни исботлашга уриниб, «оддий» ҳаракат (илгариланма, барча траекториялари тўғри чи-



7-расм

зиқдан иборат) мавжудлигини фараз қилди. У ҳолда иккита ихтиёрий траектория бир хил узоқлашган тўғри чизиқлардир ва бундан параллеллик постулати исботланади.

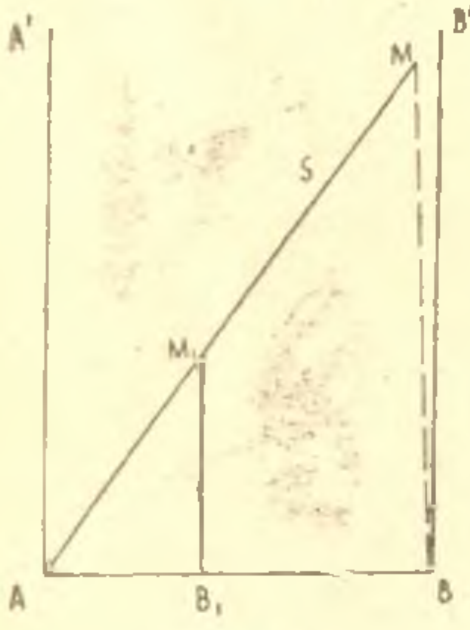
Ўзбек математиги, шоири, астроном ва файласуф Умар Ғиёсиддин Абу-л Фахт ибн Иброҳим Ҳайём (15.05.1048—14.12.1131), араб математиги Ибн Ал-Хайсам ал-Басрий (Альгазен) (965—1039) (унинг тўртта ноёб математик ва астрономик ишлари қўлёзмаси Самара области кутубхонасида сақланмоқда)нинг исботини (у Собит ибн Қорра исботини такрорлаган эди) шарҳлаб, «оддий» ҳаракат мавжуд деган фаразни рад этади. У юнон олими Аристотель (милод. авв. 384—322-йиллар) ишларига таянган ҳолда янги постулат баён этади: текисликда иккита «яқинлашувчи» тўғри чизиқ кесишади, яъни иккита кесишмайдиган тўғри чизиқда яқинлашиш узоқлашишга айланиши мумкин эмас (8-расм).

8-расм

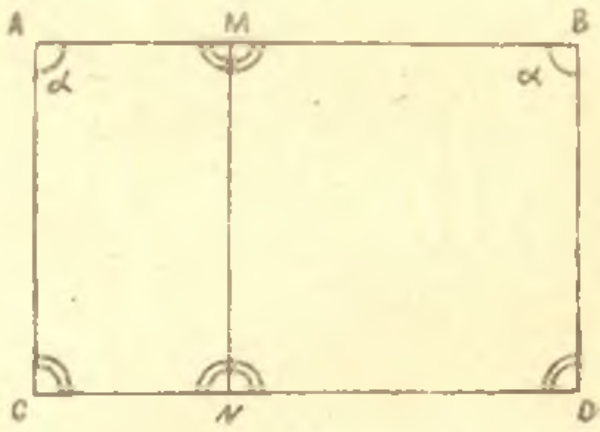
Инглиз математиги Жон Валлис (1616—1703) бешинчи постулатга тенг кучли мулоҳазаларни (уларнинг муаллифларини кўрсатиб) санаб ўтди ва ўхшаш (лекин тенг эмас) учбурчаклар мавжуд деган мулоҳазани баён этди. Валлис ўзининг барча кўп сонли ва муҳим натижалари тўла исботини бермаган, улар кейинчалик исботланган. Унинг юқоридаги мулоҳазасининг исботи қуйидагича:

(AA') ва (BB') — AB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлсин, AS нур эса $[AB]$ билан ўткир бурчак ташкил этади. AS нурнинг ихтиёрий N_1 нуқтасидан AB га перпендикуляр N_1B_1 ни туширамиз ва AB_1N учбурчакка ўхшаш тўғри бурчакли учбурчак ABN ни қараймиз. Бунинг учун AN_1 ни давом эттириб ва унда N нуқтани шундай оламизки, $\frac{|AN|}{|AN_1|} = \frac{|AB|}{|AB_1|}$ тенглик бажарилади. Ўхшашликдан $\widehat{ABN} = \widehat{AB_1N} = d$. Демак, N нуқта BB' тўғри чизиқда ётади, бундан перпендикуляр ва огманинг кесишишлиги келиб чиқади, бу билан бешинчи постулат исботланди (9- расм).

Итальян математиги Жованни Жироламо **Саккери** (1667—1733) «Барча туғма доғларидан халос этилган Евклид» (1733 йилда Миланда чоп этилган) асарида V постулатни тескарисидан фараз қилиш йўли билан исботлашга уринди. Бунда у «Ҳайём тўртбурчаги»ни ўрганишга таянди (10- расм).



9-расм.



10-расм

AC ва BD томонлар тенг. У ҳолда $\angle A = \angle B = \alpha$ бурчак катталиги ҳақида учта фараз мавжуд:

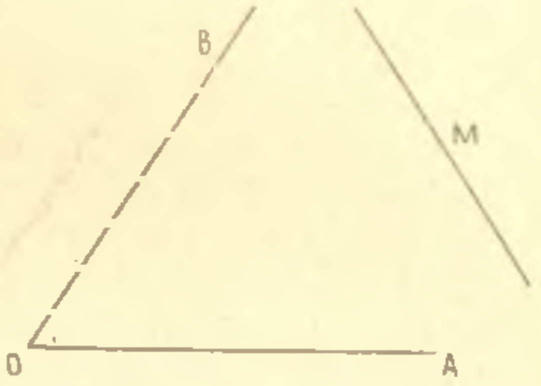
1) α — бурчак ўткир, яъни $\alpha < \frac{\pi}{2}$ (ўткир бурчак фарази);

2) α — ўтмас бурчак, яъни $\alpha > \frac{\pi}{2}$ (ўтмас бурчак фарази);

3) α — тўғри бурчак, яъни $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (тўғри бурчак фарази).

Умар Ҳайём Аристотель постулатидан 1 ва 2-ҳолларнинг бўлиши мумкин эмаслигини кўрсатади, шу орқали учинчи фаразнинг тўғрилиги исботланади. Саккери эса ўтмас бурчак фаразини қарама-қаршиликка олиб келди, сўнгра унинг фикрича мулоҳазалар ёрдамида ўткир бурчак фарази ҳам қарама-қаршиликка учрайди. Натижада, учинчи фаразнинг тўғрилиги келиб чиқади, бу билан постулат исботланади. Лекин Саккери мулоҳазаларда хатога йўл қўйиб, ягона мумкин бўлган геометрия — Евклид геометрияси деган хулосага келади, бу билан бешинчи постулатнинг ҳақиқатлиги «исботланди». Ўтмас бурчак фаразидан келиб чиққан Саккери мулоҳазалари умуман олганда Лобачевский геометриясининг биринчи теоремаларидан иборат деб ҳисоблаш мумкин. Уларни кейинчалик қайтадан француз математиги Адриен Мари Лежандр (1752—1833) топган.

Лежандр 1794 йилда ёзган элементар геометрия бўйича ўқув қўлланмаси «Геометрия асослари»да Евклид постулатини исботлашга бир қатор уринишлар қилган. У учбурчак бурчаклари йиғиндиси π дан катта бўлмаслигини исботлади. Лекин у π дан кичик ҳам бўлмаслигини исботлаётганда AOB ўткир бурчак ичида ётувчи M нуқтадан бурчакнинг OA ва OB томонларини кесиб ўтувчи тўғри чизиқни ҳамма вақт ҳам ўтказиш мумкин деган фаразга таянди. Агар бу фараз бўлмаганда эди, Евклид постулати исбот қилинган деб ҳисобланар эди. Ҳақиқатан, агар учбурчакнинг бурчаклари йиғиндиси π дан катта ва кичик бўлмаса, у ҳолда учинчи мумкин бўлган фараз: учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси π га тенг эканлиги келиб чиқар эди. Бундан эса Евклид постулатининг исботи келиб чиқади (11-расм).



11-расм

Немис математиги Иоганн Генрих Ламберт (1728—1777) ҳам бу постулатни исботлашга урииди. У қуйидагича ясашларни бажарди. AB кесманинг учларидан иккита перпендикуляр ва тенг кесмалар AA_1 ва BB_1 ни ажратди. Сўнгра AA_1 кесманинг охиридан A_1 нуқтага яна битта перпендикуляр туширди, учта тўғри бурчакли тўртбурчак ҳосил бўлди (12-расм).

12-расм

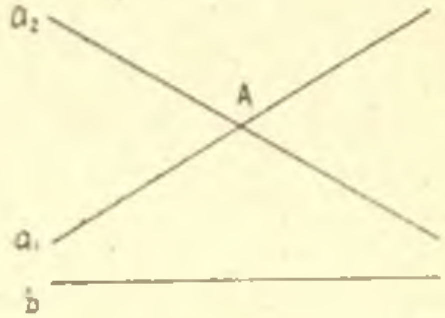
Саккерига ўхшаб у ҳам тўртинчи бурчак ҳақида тўғри бурчак, ўткир ва ўтмас бурчак фаразларини илгари сурди. Сўнгра тўғри бурчак фарази бешинчи постулатга тенг кучлилигини ҳамда ўтмас бурчак фарази қарама-қаршиликка учрашини исботлади. Ламберт кейинчалик, ўткир бурчак фаразидан келиб чиқадиган фикрларни ривожлантиришга ҳаракат қилди, лекин бунда қарама-қаршиликни учрата олмади. Шундай қилиб, V постулатни исбот қилиш мумкин эмас деган фикрга келди. Бу билан XIX аср бошигача бешинчи постулат муаммоси ҳал қилинмай қолди.

Бу муаммонинг ечимини буюк рус математиги Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) 1826 йил 23 февраль куни Қозон университети физика-математика бўлимига тақдим этган «Геометрия асосларининг қисқача баёни параллеллар тўғрисидаги теореманинг қатъий исботи билан» асари қўлёзмасида топди. Бу янги геометрия тўғрисидаги биринчи ахборот эди ва тарихга бу кун ноевклид геометрияси яратилган кун бўлиб кирди. Фақат уч йилдан сўнг, 1829—1830 йилларда «Казанский вестник» журналида унинг «Геометрия асослари ҳақида» мақоласи босилиб, бу кашфиёт мазмуни баён этилди. Лобачевский биринчи марта Евклиднинг бешинчи постулати геометриянинг бошқа аксиомаларига боғлиқ эмаслигини исботлади.

Лобачевский Евклид аксиоматикасида бешинчи постулатни қуйидаги аксиома билан алмаштирди: тўғри чизиқдан ташқарида текисликда ётувчи, улар билан кесишмайдиган иккитадан кам бўлмаган тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Демак, Лобачевский аксиомасига мувофиқ A нуқтадан ўтувчи a_1 ва a_2 тўғри чизиқлар b тўғри чизиқни кесиб ўтмайди (13-расм).

Лобачевский ўзи яратган геометрияни ривожлантира бориб, уни «фараз қилинувчи» геометрия деб этади ҳамда қатъий мантиқий системани яратди.

Бу геометрия Евклид геометриясидан тамоман фарқ қилар эди. Лекин у мантиқий қарама-қаршиликка (зиддиятликка) дуч келиши лозим эди, чунки иккита геометриянинг бир вақтда мавжуд бўлишлиги мумкин эмас эди. Шунга қарамай, Лобачевский янги натижалар келтириб чиқара берди, улар мантиқий қарама-қаршиликларга учрамади. Лобачевский бу натижаларни 1835 йилда Қозон университети илмий ишларида «Фараз қилинадиган геометрия», 1835—38 йилларда эълон қилинган «Параллел тўғри чизиқлар тўла назарияси ва геометриянинг янги асослари» ва 1885 йилда яна Қозон университети илмий ишларида чоп этилган «Пангеометрия» асарларида баён этди. Янги геометрия ва Евклид геометриясида биринчи тўртта гуруҳ аксиомалар устма-уст тушади. Бу аксиомалар гуруҳлари ва уларнинг натижалари а б с о л ю т г е о м е т р и я деб агала бошлади.



13-расм

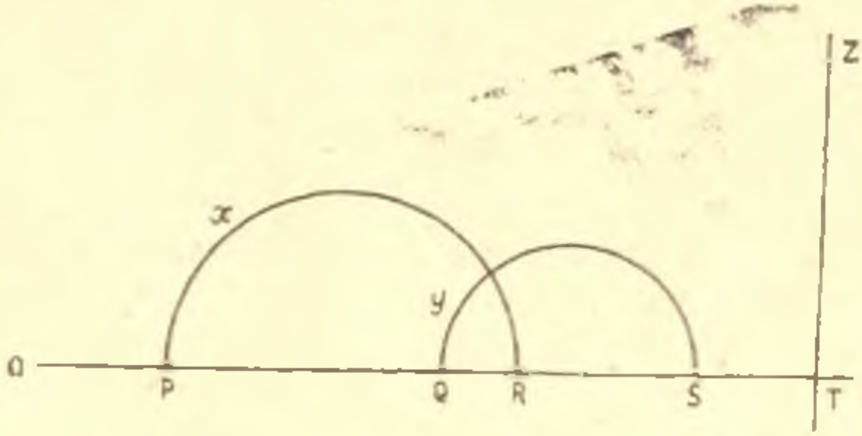
Лобачевский геометриясида қарама-қаршилик йўқлигидан Евклиднинг бешинчи постулатини исботлаш мумкин эмас деган натижа келиб чиқади. Нима учун? Нима учун бу постулатни абсолют геометриядан келтириб чиқариш мумкин эмас? Мазкур саволларга жавоб беришга ҳаракат қилиб кўрайлик. Маълумки, абсолют геометрия бу иккита геометриянинг умумий қисмидан ташкил топган: агар абсолют геометрияга Евклиднинг бешинчи постулатини қўшсак, Евклид геометрияси, агарда абсолют геометрияга Лобачевский аксиомасини қўшсак, Лобачевский геометрияси ҳосил бўлади. Шундай қилиб, Евклиднинг бешинчи постулатини (ёки унга тенг кучли бўлган ихтиёрий мулоҳазани) исбот қилиш, яъни абсолют геометриядан мантиқий келтириб чиқариш мумкин эмас. Лобачевский геометрияси каби Евклид геометрияси қарама-қаршиликсиздир, чунки арифметикада қарама-қаршилик йўқ. Демак, иккала геометрия ҳам мавжуд бўлиш ҳуқуқига эга. Лекин ноевклид геометрияси (Лобачевский геометрияси) Евклид геометриясидан жиддий фарқ қилади. Масалан, Лобачевский геометриясида учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси π дан кичик, унда ўхшаш тенгмас учбурчаклар мавжуд эмас, берилган тўғри чизиқдан бир хил узоқлашган нуқталар тўплами тўғри чизиқ эмас, балки эгри чизиқ ҳисобланади ва ҳ. к.

Ноевклид геометрияни яратишга венгр математиги Янош Больяи (1802—1860) ва немис математиги Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) катта ҳисса қўшганлар. Я. Больяи 1832 йилда чоп этган «Аппендикс» асарида Лобачевский яратган геометрия системаси асосларининг қисқача ва изчил баёнини берди. Бу асар жуда ихчамлиги ва мантиқийлиги билан математик адабиётлар ичида энг мукаммалларидан бири ҳисобланади (асар 1950 йилда рус тилида чоп этилган).

Гausснинг ноевклид геометрия бўйича тадқиқотлари унинг вафотидан сўнг маълум бўлди. У Яношнинг отасига (у ҳам математик эди) ёзган хатида бу геометрия системасига жуда аввал учраганлигини (бу фикрга у 1818 йилларда келган), лекин, уни ҳаётлиги даврида эълон қилмасликка қарор қилганлигини (тушунмовчиликларга сабаб бўлишидан хавфсираб) таъкидлаган эди. Ички қаршилик ва унга боғлиқ янги геометрия мавжудлиги ҳақидаги шубҳалар Гausснинг қатъий фикрга келишига, бу соҳада тадқиқотлар ўтказишига ва ишларини чоп этишга ҳалақит берди. У Н. И. Лобачевский ишларига катта эътибор билан қаради, уни Гёттинген фанлар академиясига мухбир-аъзо қилиб сайлаш ташаббускори эди; аммо бу кашфиётга оид ўз фикрини эълон қилмади.

Лобачевский геометрияси моделини машҳур француз математиги Жюль Анри Пуанкаре (1854—1912) 1882 йилда яратди. Евклид геометриясини оламиз ва унда горизонтал a тўғри чизиқни ўтказамиз, у текисликни иккита яримтекисликка ажратади. Юқориги яримтекислик нуқталарини ноевклд нуқталари (тўғри чизиқ нуқталари бунга кирмайди) деб атаймиз. Ноевклид тўғри чизиқлар деб эса марказлари a тўғри чизиқда ётувчи ярим айланаларни атаймиз. Ноевклид тўғри чизиқларга a тўғри чизиққа перпендикуляр нурларни ҳам киритамиз (14- расм).

Бундан олдинроқ, 1871 йилда немис математиги Феликс Христиан Клейн (1849—1925) проектив метрика ғояси асосида Лобачевский геометрияси тавсифини берган эди. У ўзининг геометрик тадқиқотлари-ни 1872 йилда нашр қилинган «Янги геометрик тадқиқотларга таққослама назар» («Эрланген дастури») асарида ҳар қандай геометрия алмаштиришлар махсус гуруҳининг инвариатлар назарияси бўлиб ҳисобланишини кўрсатди. Гуруҳни кенгайтириб ёки қисқартириб, бир турдаги геометриядан иккинчи турдаги геометрияга ўтиш мумкин. Евклид геометрияси — метрик гуруҳлар-



14-расм

нинг инвариантлари ҳақидаги фан; проектив геометрия проектив гуруҳларнинг инвариантлари ҳақидаги фандир. Алмаштиришлар гуруҳини синфларга ажратиш геометрияларни синфларга ажратишга олиб келади. Ҳар бир гуруҳларнинг алгебраик ва дифференциал инвариантлари назарияси геометриянинг аналитик тузилишини беради.

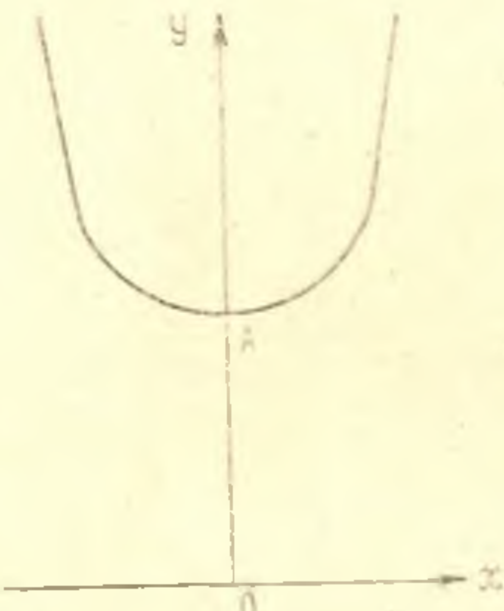
Кейинчалик Клейн Евклид геометриясининг моделини проектив метрика орқали тузиш мумкинлигини кўрсатди. Бунда у инглиз математиги Артур Кэли (1821—1895) 1859 йилда киритган проектив метрика тушунчасига асосланди.

Лобачевский, агар реал фазо евклид геометрияси қонунларига бўйсунмаса, у ҳолда космосда учбурчак бурчакларининг йиғиндиси π дан кичик, деб фараз қилди. У фазонинг ноевклидлигига ишонар эди. Агар олам ўлчовларининг бизга кўринарли қисмини қисқартирган ҳолда қарасак, у ҳолда Лобачевский геометрияси ўринли бўлади.

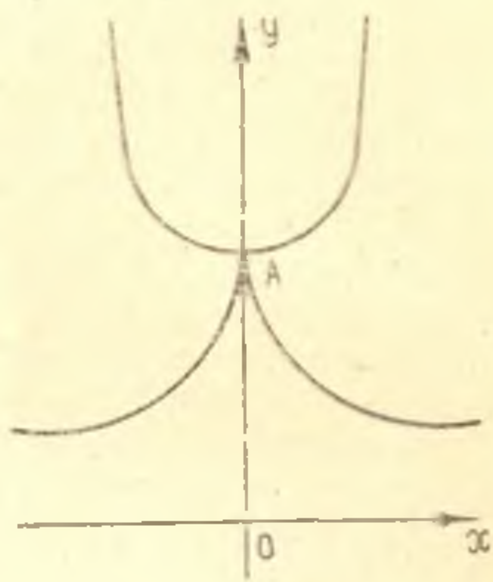
1863 йилда итальян математиги Эужению Бельтрами (1835—1900) ва немис математиги Бернхард Риман (1826—1866) янги геометрия тавсифи бўйича катта ишлар қилдилар. Бельтрами «Ноевклид геометриясини тавсифлаш тажрибаси» китобида сиртида Лобачевский геометрияси бажариладиган реал жисмлар мавжудлигини кўрсатди. У ўзгармас манфий эгриликка эга бўлган сиртларда (псевдосфера) ноевклид геометрияси бажарилишини исботлади, шунингдек, Лобачевский геометрияси мантиқий қарама-қаршиликсиз эканлигини кўрсатди.

Евклид реал фазосида ноевклид хусусиятига эга бўлган жисмлардан бирини қуйидагича ясаш мумкин. Дастлаб занжир чизиқ деб аталувчи эгри чизиқни оламиз (бундай деб аталишига сабаб икки нуқтада бириктириб қўйилган оғир занжир шундай чизиқ шаклини олади) (15-расм).

Энди занжир A нуқтада узилди дейлик, у ҳолда занжир учлари **трактриса** деб аталувчи эгри чизиқни чизади (16-расм).



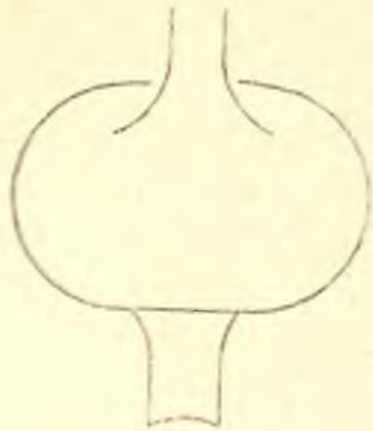
15-расм



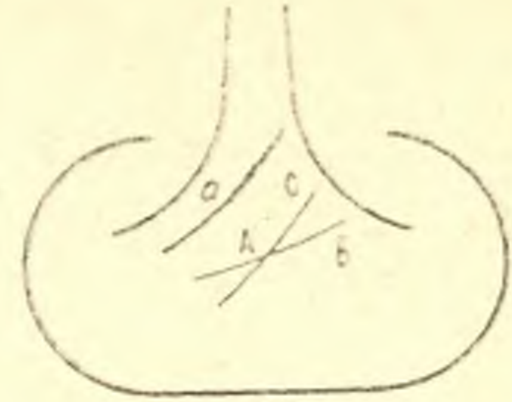
16-расм

Математика нуқтаи назардан трактрисанинг қуйидаги хоссасини баён этиш мумкин: уринма узунлиги, яъни уриниш нуқтасидан абсциссалар ўқигача бўлган масофа ўзгармас миқдордан иборат.

Трактрисани абсциссалар ўқи атрофида айлантириб, **псевдосфера** деб аталувчи сиртни ҳосил қиламиз (17-расм). Бу сиртда тўғри чизиқ деб «геодезик» чизиқни ҳисоблаймиз. Сиртда жойлашган нуқталар орасидаги энг кичик масофани «тўғри» чизиқ деб атаймиз. Бельтрами псевдосферасида Лобачевский геометриясининг бир қисми рўёбга чиқади (18-расм).

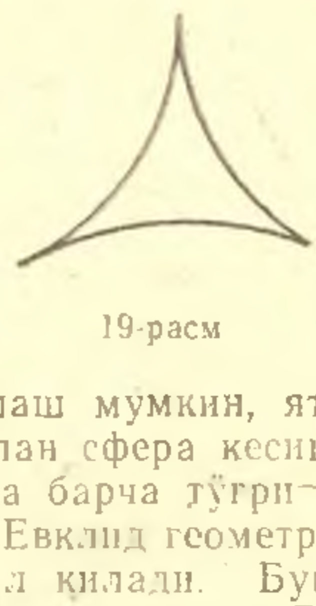


17-расм



18-расм

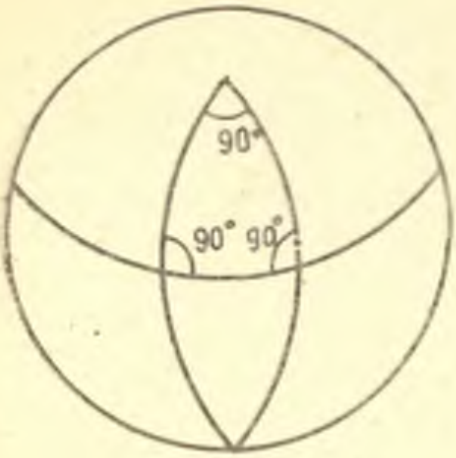
b ва c чизиқлар A нуқтадан ўтади ва a га параллел. Псевдосфера ўзгармас манфий эгриликка эга бўлган сирт деб ҳам аталади. Агар эгри чизиқли учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлса, сирт манфий эгриликка эга бўлади. Агар Лобачевский текислигида учбурчак (псевдосферада) ясасак, унинг бурчаклари йиғиндиси $2d$ дан кичик эканлиги кўринади (19-расм).



19-расм

Мусбат эгриликка эга бўлган сиртлар ҳам мавжуд, уларнинг сиртида учбурчак бурчакларининг йиғиндиси π дан катта. Бунга мисол сифатида шар сиртини олиш мумкин. Сферада тўғри чизиқ деб ихтиёрий катта доира айланасини ҳисоблаш мумкин, яъни шар марказидан ўтувчи текислик билан сфера кесишишидан ҳосил бўлган айлана. Сферада барча тўғри чизиқлар кесишади. Демак, сферада на Евклид геометрияси, на Лобачевский геометрияси амал қилади. Бунда учбурчак бурчакларининг йиғиндиси π дан катта. Баъзи ҳолларда у $3d$ га ҳам тенг бўлиши мумкин (20-расм). Булардан кўринадики, Евклид текислиги ноль эгриликка эга.

1854 йил 10 июнда Гёттинген университети фалсафа факультетида Б. Риман «Геометрия асосида ётувчи фаразлар ҳақида» номли машҳур маърузасини ўқиди. Аммо бу маъруза фақатгина 1868 йилда чоп этилди ва математиклар орасида катта шов-шувга сабаб бўлди. Мазкур маърузада Риман аксиомалар қаторига қуйидаги аксиомани қўшди: берилган тўғри чизиқ билан бир текисликда ётувчи ҳар қандай тўғри чизиқ бу тўғри чи-



20-расм

зиқ билан кесишади. Бу эса Риман геометриясида параллел тўғри чизиқлар умуман йўқлигини, ихтиёрий учбурчак бурчакларининг йиғиндиси π дан катта эканини кўрсатади. Бу геометрия ҳам қарама-қаршиликсиз экан. Бунда Лобачевский фазоси Риман фазоларининг хусусий ҳоли бўлиб қолар экан. Шундай қилиб, учта мантиқий пухта ва тенг кучли геометрик системаларнинг вужудга келиши олам геометрияси ва атом ички дунёси геометрияси қандай тузилишда эканлигини аниқлашни зарурат қилиб қўйди. Бунга ҳозирги замон фани ҳанузгача бир ёқлама жавоб топа олганича йўқ.

Эйнштейннинг нисбийлик назариясидан фазо эгриланувчанлиги келиб чиқади. Катта массага эга бўлган жисмлар фазоси геометрияси ноевклид геометриясидан иборат, унда Ньютон механикаси қонунлари ўзгаради.

Рус олими Александр Александрович Фридман (1888—1925) томонидан тузилган олам моделида у бир жинсли, яъни ҳамма қисмлари бир хил тузилган, деган фараз ётади. Лекин нисбатан унча катта бўлмаган ўлчамларда олам бир жинсли эмас. Фридман агар оламда модда зичлиги ўзгармас миқдордан кичик бўлса, фазо эгрилиги манфий, агар критик зичлик ошиб кетса, фазо мусбат эгриликка эга бўлишини кўрсатди. Агар зичлик критик қийматга тенг бўлса, фазо эгрилиги нолга тенг бўлади. Шундай қилиб, баъзи шартларда олам геометрияси манфий эгриликка эга ёки у Лобачевский геометриясидан иборат.

Оламнинг Фридман модели тажрибада американик мунажжим Эдвин Хаббл (1889—1953) томонидан тасдиқланди.

Ҳозирги замон фани Олам фазоси ўзгарувчи эгриликка эга эканлигини кўрсатмоқда. Демак, олам геометрияси на Евклид геометриясидан, на Лобачевский геометриясидан иборат.

Евклид бошлаб берган аксиоматика маълум маънода немис математиги Давид Гильберт (1862—1943) ва рус математиги Вениамин Федорович Каган (1869—1953) ишларида охирига етказилди.

Гильберт 1899 йилда ёзган «Геометрия асослари»да Евклид геометриясининг тўлиқ аксиомалар системасини берди, уларни гуруҳлар бўйича синфларга ажратди ва ҳар бир аксиомалар гуруҳи чегараларини аниқлашга ҳаракат қилди, бунда у ҳар бир аксиоманинг натижасини алоҳида ўрганиб қолмасдан, балки бу аксиомалар олинганда ёки ўзгарганда ҳосил бўлган турли «геометрияларни» тадқиқ этди. Каган эса 1905—07 йилларда ёзилган «Геометрия асослари»да евклид фазоси аксиоматикаси аксиомалари қарама-қаршиликсиз ва ўзаро боғлиқмаслигини таҳлили билан баён этди. Каган аксиоматикаси Гильберт аксиоматикасидан ҳаракат гуруҳи ни билан фарқ қилади, у маъносига кўра Г. Риман, варианти сифатида масофа тушунчасига асосланганлиги Г. Гельмгольц ва М. С. Ли аксиоматикаларига яқин ҳисобланади. Шундай қилиб, бу иккала математикнинг ишлари Евклид геометрияси аксиоматикаси қарама-қаршиликсизлигини арифметиканинг қарама-қаршиликсизлигига олиб келиш мумкинлигини исботлади.

XIX аср охирига келиб аксиомалар системасига қўйиладиган асосий талаблар ва аксиоматик усул принциплари ишлаб чиқилди ва кейинги давр математиклари томонидан янада ривожлантирилмоқда.

МАТЕМАТИК БЕЛГИЛАШЛАР

Араб рақамлари ... математикани демократлаштирди.

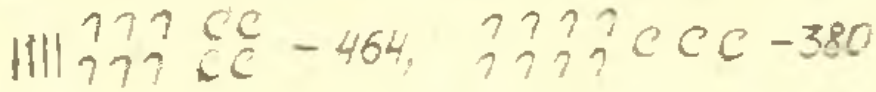
Ж. Бернал

Қадимги мисрликлар саноқ системалари уч минг йиллар давомида ўзгармай келган, фақат сонларни белгилаш шакллари ўзгариб турган.

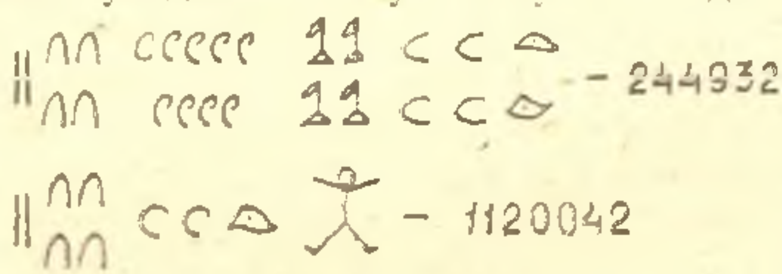
Мисрликларнинг иероглиф ёзувида расмлар мавжуд бўлиб, шунга мос сонларни белгилашлар расмлар шаклида берилган, бунда баъзилари конкрет нарсаларга ўхшаб кетар эди.

Бир учун | (тик чизиқ) белги ишлатилган бўлса, ўнлар  иероглиф билан белгиланган. Юз  белги билан ифодаланиб, «ўлчов арқони» аҳамиятини билдирган. Минг эса  белги ёрдамида ёзилиб, аниқмас кўп маъносини англатган. 10000 учун эса

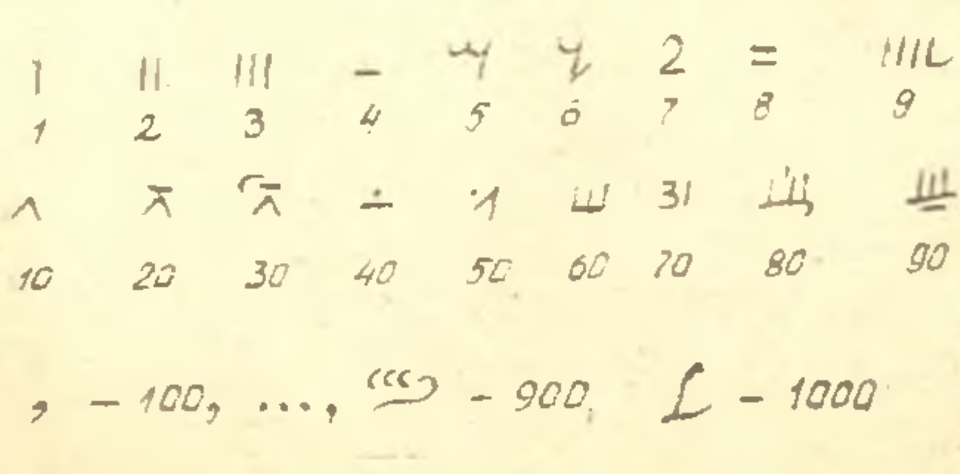
белги ишлатилиб, юқорига кўтарилган бармоқ шаклида бўлган. Юз минг (қурбақа) ва миллион (қўлини кўтарган одам) учун ҳам мос белгилар мавжуд эди. Мисрликларда сонларнинг белгиланишига мисоллар келтирамиз:



Белгилар кўпинча юқоридан пастга ўқиладиган қаторлар шаклида жойлаштирилган, бир қатордан иккинчисига ўтиш ўнгдан чапга ўтиш йўналишида бўлган.



Ёзувнинг қогозда (папирус) тарқалиши билан деворлардаги иероглиф ёзуви иератик ёзувга айлана борди, яъни бунда белгилар расм шаклини йўқота бошлади, фақат айрим ўхшашликлар қолди, холос. Бунга параллел равишда сон белгилари ҳам ўзгарди, сонларни иероглиф ва иератик ёзувларини таққослаганда шуни таъкидлаш керакки, кейингилари олдингисидан қисқартиришлар орқали пайдо бўлган, яъни улар янги белгилар эмас. Бир сонлар бирлигида такрорланувчи белгилар бирлашиб, ўнли рақам системаси ҳосил бўлди. Мисол учун Райд папирусида рақамлар иератик шаклда ёзилган:

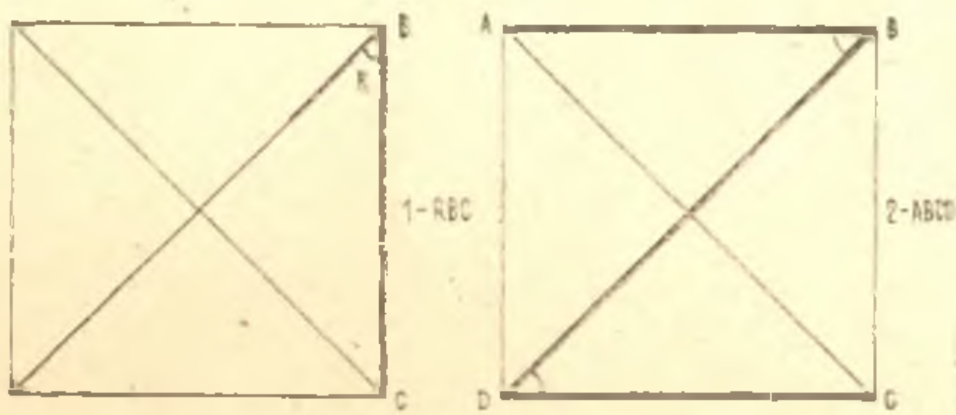


Қадимги Юнонистонда мавжуд саноқ системаларидан бири аттик системаси бўлиб, асосий рақамлар қуйидагича белгиланган:

ΓI = 6, P = 50, ⊏ = 5000

ΔΓ = 15, XΓ = 1005, XXPHΔΓ = 2615

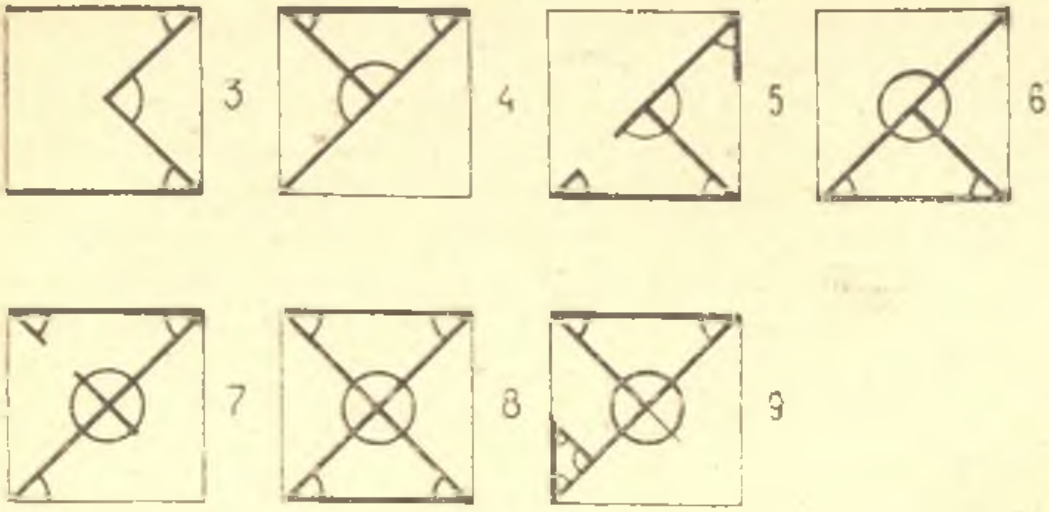
«Математика в школе» журналида В. А. Олевский араб рақамларининг келиб чиқиши ҳақида янги фараз билан чиқди. Унинг фикрича, рус шоири А. С. Пушкин араб рақамларини квадрат учларида ёзилган ҳарфлардан фойдаланиб ёзиш мумкинлигини кўрсатган. Масалан (21-расм).



21-расм

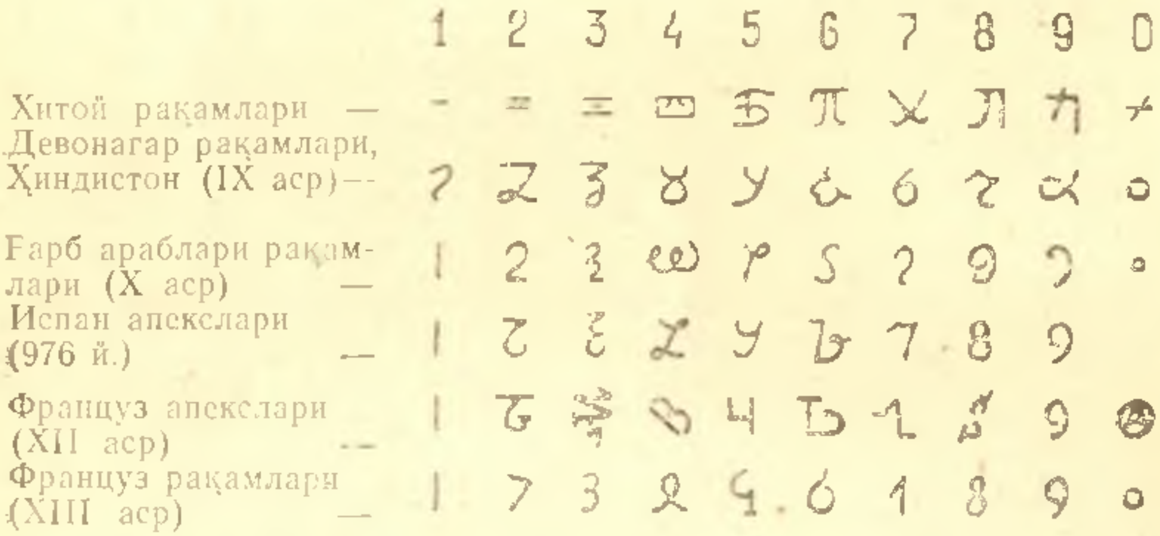
Бундай белгилашлар орқали, — деб таъкидлайди муаллиф, фигуралар «скелетлари» фақат квадрат томонларида ёки диагоналларида ётувчи нуқталарни туташтирувчи кесмалар ва учбурчаклардан тузилган. Агар ҳар бир шаклда қалин чизиқ билан чегараланган тўғри ёки ўткир бурчакларни ҳисобга олсак, бурчаклар ҳам мос келади. Масалан (22-расм).

Рус педагоги ва математика тарихчиси Иван Яковлевич Депман (1885—1970) «Арифметика тарихи» (1959—1965) асарида рақамлар бир манбадан бир вақтнинг ўзида вужудга келганлигини таъкидлаб,



22-расм

рақамлар ривожини қуйидаги жадвал шаклида акс эттиради:



Айрим математика тарихчилари рақамлар қоғоз ва пергамент вужудга келиши билан тез ёзишлар таъсирида пайдо бўлганлигини таъкидлашади. Нолнинг пайдо бўлиши ҳақида ҳам ҳар хил фаразлар мавжуд. Айримлар у дастлаб ҳиндларда бўш сон бирлиги ўрнидаги нуқтадан пайдо бўлган дейишса, юнон астрономлари олтмишлик касрларда бўш сон бирлигини айлана шаклида белгилаганлар, буни эса ҳиндлар ўзлаштириб олганлар, деган фаразни илгари суришади.

Умуман, 1, 2, 3, ..., 9 рақамларининг араб рақамлари дейилишига сабаб, биринчи бўлиб бу рақамлардан Оврупода араб олимлари ишларидан олиб фойдаланишган бўлса ажаб эмас, аслини олганда улар биринчи марта ҳиндлар томонидан қўлланилган ва Ал-Хоразмий фикрича ўз «ҳинд ҳисоб» (ҳисоб ал-ҳинд) ларидан фойдаланганлар.

Математик белгилашларни такомиллаштириш Аристотель давридан бошланган, деб ҳисоблаш мумкин. Масалан, у ҳар бир математик мулоҳазадаги параметрлар учун алоҳида белгилаш киритган. Номаълумлар ва уларнинг даражалари учун доимий ҳарфий белгилашларни қадимги юнон математиги Диофант (тахминан III аср) киритган:

$$x^0 - \overset{o}{M},\ x^1 - s,\ x^2 - \Delta^{\nu},\ x^3 - K^{\gamma}$$

$$x^4 - \Delta^{\gamma}\Delta,\ x^5 - \Delta K^{\nu},\ x^6 - K^{\gamma}K$$

Ҳарфий белгилашларнинг тўлиқ аҳамияти фақат француз математиги Франсуа Виет (1540—1603) уларни маълум миқдорлар ва тенгламалар коэффициентларига қўллагандан сўнг маълум бўлди. Ҳарфий коэффициентларнинг киритилиши билан алгебраик тенгламаларни текширнш ва илдизларни топиш умумий формулаларини тузиш мумкин бўлди.

Виет коэффициентларни катта ундош ҳарфлар *B*, *D*, *G*, билан, номаълумларни катта унли *A*, *E*, *I*, ҳарфлар билан белгилаган. Декарт эса коэффициентларни белгилашда дастлабки лотин *a*, *b*, *c*, ... ҳарфларни ишлатган бўлса, номаълумлар учун охирги *x*, *y*, *z* ҳарфларидан фойдаланган.

Диофантда айириш учун махсус белги бор эди, лекин қўшишда қатор ёзилган сонлар ҳадлар деб тушунилиб, қўшилар эди.

Номаълум ва параметрлар учун ҳарфий белгилашларни Оврупода XIII асрда дастлаб Париж университети профессори, математик ва механик Иордан Неморарий (Жордан) (1236 йилда вафот этган) қўлёзмаларида учратиш мумкин, лекин унда амаллар ишоралари йўқ эди, бу ҳарфий формулаларни келтириб чиқаришга халақит берар эди. Неморарий «Арифметика» асарида араб рақамларидан фойдаланган.

Амалларни белгилаш учун махсус белгиларнинг пайдо бўлиши билан математика вужудга келди. Оврупода XIV—XV асрларда қўшиш амали аввало «P» (plus — кўп), айириш эса «m» (minus — кам, айириш) ҳарфлари билан белгиланган. «—» ва «+» белгилари эса савдодан келиб чиққан деган фараз бор, унга кўра, товарнинг камайиши горизонтал чизиқчалар (—) билан белгиланган бўлса, унинг тўлдирилиши эса зарур сондаги чизиқчаларни ўчириш + билан белгиланган.

XV—XVI асрларда китоб босишнинг ихтиро қилиниши билан математик ёзувлар янада такомиллаша борди. Немис математиги Ян Видман (1460—тахминан 1498) нинг Лейпцигда 1489 йилда босмадан чиққан «Барча савдогарлар учун тез ва чиройли ҳисоб» асарида биринчи марта босмада «—» ва «+» ишоралари ва кўпайтириш жадвали чоп этилди. Немис астрономи ва математиги Региомонтан (тахаллуси Иоганн Мюллер) (1436—1476) математика бўйича биринчи китоб ношири ҳисобланади, у кўпайтириш белгиси сифатида (·) нуқтадан фойдаланди. Француз математиги Никола Орем натурал кўрсаткичли даражаларни ёзиш усулини кашф этган бўлса, бўлиш белгиси (—) горизонтал чизиқ араб олимлари ишларидан олинган.

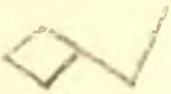
1557 йилда инглиз табиби ва математиги Роберт Рекорд (1510—1558), инглиз тилидаги биринчи арифметика ва алгебра бўйича ўқув қўлланмалари муаллифи, (=) тенглик белгисини ишлатди, у бунинг сабабини тушунтириб, икки нарса ўзаро иккита параллел кесмалар тенглигидан ортиқроқ тенг бўла олмаслигини таъкидлаган эди. Тенглик белгиси фақат XVIII асрда Лейбниц ва унинг издошлари томонидан бошлаб қўлланишта бошлади.

Бошқа бир инглиз математиги Гаррнот Томас (1560—1621) 1631 йилда биринчи бўлиб, >, < белгиларини киритди. Бу белгилар биринчи марта унинг 1631 йилда босилиб чиққан «Аналитик санъат тажрибаси» номли китобида учрайди. Унинг фикрича, агар иккита нарса тенг бўлмаса, тенглик белгисидаги кесмалар параллел эмас, улар кесишади: кесишиш ўнгдан (>) ёки чапдан (<) бўлиши мумкин. Биринчи ҳолда тенгсизлик «катта», иккинчисида эса «кичик»ни белгилайди. Шунингдек, Гаррнот сонларни белгилаш учун алифбонинг кичик ҳарфларидан фойдаланган, тенгламаларни ҳозиргига яқин шаклда ёзган.

Қатъий бўлмаган тенгсизликлар белгиларини ($\geqslant$, $\leqslant$) 1734 йилда француз математиги Пьер Буге (1698—1758) томонидан $>=$, $<=$ шаклларда киритилган.

VIII асрдан бошлаб Оврупо математиклари ишларида илдиз лотинча Radix (илдиз) ёки қисқача *R*, сўнгра R^2 [француз математиги Никола Шюке (тахминан 1445 — тахминан 1500) ишларида] шаклида қўлланилган. Умуман, математика тарихи бўйича манбаларнинг далолат беришича илдиз белгиси ($\sqrt{\ }$) қуйидаги ривожланиш босқичларини босиб ўтган:

1. XV аср — немис алгебрачилари «коссист»лар — ифода ёки сон олдида нуқта, италияликлар эса уни cos α деб таржима қилганлар. Немислар «косс» ва «коссист» атамаларини улардан олишган.
2. 1480 йил — тез ёзишлар туфайли



белгиси пайдо бўлди (квадрат илдиз);

— кубик илдиз;

— тўртинчи даражали илдиз.

3. 1525 йил — Страсбург, чех математиги Криштоф Рудольф (тахминан 1500—1545) алгебра бўйича ўқув қўлланмаланмасида илдиз сифатида «$\sqrt{\ }$» белгисини ишлатди.
4. 1626 йил — Голланд математиги Альберт Жирар, $\overset{2}{\vee}$, $\overset{3}{\vee}$ ва ҳ. к. белгиларни киритди, кейинроқ $\sqrt{\ }$ шаклда қўлланила бошлади.
5. 1637 йил — Р. Декартнинг «Геометрия» китобида илдиз $\sqrt{\ }$ шаклида учрайди.
6. 1685 йил — Ньютон «Универсал арифметика»да ҳам шу белгидан фойдаланган.

7. 1690 йил — Француз математиги Мишель Ролль (1652—1719) нинг «Алгебрадан қўлланма» асарида ҳозирги кўринишда биринчи марта қўлланилган.

Математик белгилашларни ривожлантиришда Марказий Осиёлик математик олимлар ҳам ўз ҳиссаларини қўшганлар. Масалан, Ал-Хоразмий (783—850) ўзининг машҳур «Китоб ал-жабр вал муқобала» асарида номаълумлар ва ифодаларни белгилашда махсус белгилардан фойдаланган.

Тригонометрик соҳаси бўйича биринчи бўлиб $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ белгилашларини Леонард Эйлер кашф қилган. Функциянинг ҳам $y=f(x)$ кўринишдаги ёзувини Эйлер 1734 йилда биринчи бўлиб ишлатган.

Логарифм белгиларини 1620 йилда Гритер, 1624 йилда эса Иоганн Кеплер Log кўринишда ишлатдилар. XVIII аср математиклари ва Эйлер log ёки l белгисидан фойдаланганлар. Коши 1821 йилда «Таҳлил курси» асарида log белгисидан ўнли логарифмлар учун, l белгисидан эса бошқа асосли логарифмлар учун фойдаланишни таклиф этди. Ҳозирги белгилашлар XIX аср охиридан бошлаб қўлланилмоқда.

Дифференциал ва интеграл ҳисоб белгилашларини ишлаб чиқишда Лейбницнинг хизматлари катта. У дифференциал ва интеграл белгиларини биринчи бўлиб киритган бўлса, француз математиги Жозеф Луи Лагранж ҳосила белгилари y', $f'(x)$ ларни биринчи марта қўллай бошлаган.

Математик белгилашларнинг ривожланиши математика фани тараққиётида гоят муҳим аҳамиятга эга. Ихчам ва қулай танлаб олинган символика олимнинг ақлий меҳнати маҳсули катта қисмини ўз ичига олади, ижодий меҳнатни осонлаштиришга ёрдам беради. Лейбницнинг фикрича: «Белгилашлар кашфиётлар учун қулай бўлишига эришиш лозим... Шундагина ҳайрон қоларли даражада фикр иши қисқаради».

Энди баъзи математик белгилашларнинг келиб чиқиши ҳақидаги тарихий маълумотларни келтирамиз:

1. Антье ($[x]$ — x соннинг бутун қисми) — функция номи, французча Entier — бутун сўзидан келиб чиққан. Шунинг учун Лежандр «Сонлар назарияси» (1798) китобида бу функцияни унинг французча номидаги биринчи ҳарф орқали $y=E(x)$ деб белгилади.

$y=[x]$ белгилашни эса Гаусс (1808) киритган.

2. Бурчак $<$ белгини Эригон (1634) киритди. Отред «Тригонометрия» (1657) асарида бу белгини $\angle$ га алмаштирди. Эригон тўғри чизиқлар перпендикулярлигини $\perp$ белги билан белгилади. a ва b тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни $\widehat{a, b}$ билан белгилашни Бинс (1813), Мёбиус (1827), Фаваро (1879) киритганлар.

3. Вектор. Ҳарф устидаги чизиқ билан Арган (1806) йўналган кесмани белгилаган. Мёбиус векторни AB билан белгилаб, бунда A ва B векторнинг боши ва охирини билдиришини таклиф этган. Грассман векторларни «кесмалар» деб атаб, координата ўқлари бўйича йўналган бирлик векторларни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ва векторларнинг улар орқали ёйилмасини $x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ шаклда белгиланган. $\vec{i}, \vec{\gamma}, \vec{k}$ белгилашларни Гамильтон (1853) киритган. Гамильтон ва Тетлердан сўнг Гиббс векторларни юнон ҳарфлари билан белгилади. Векторларни қалин ҳарфлар билан белгилашни Хэвисайд (1891) таклиф этган. Буни Вильсон (1901) ўз ишларида давом эттирди. Векторнинг узунлиги учун $|AB|$ белгини Ганс (1905) киритган.

4. Градус — Птолемей градусларни «қисмлар» [$\mu o i \rho \alpha i$ (қисқача μ_0] ва минутларни штрихлар, секундларни иккита штрих («′» ва «″») белгилади. Ҳозирги белгилашларни Пелетье (1558) киритган. °, ′ ва ″ 1/60 касрнинг даражаларини билдирган.

5. Каср — Архимед даврида касрнинг махражи чизиқсиз, сурат устига ёзилар эди. Ҳозирги белгилашни ҳиндлар киритишган, уларда сурат махраж устида ёзилган. Уларни бўлиш учун чизиқни биринчи марта Леонард Пизанский (1202) киритган. Сўнгра бу ёзув йўқолиб, Видман (1489) томонидан қайта киритилган. Аммо XVII аср ўрталарига келиб, чизиқсиз ёзув учрайди (Мерсенн, 1644). Ўнли касрнинг бутун қисмини каср қисмидан вергул билан ажратишни Мажини (1529) ва Непер киритишган, уларгача вергул ўрнида қавсда ноль ёзилар эди. Масалан, 2,6=2/0/6 ёки 2/6 ёки турли хил сиёҳлар билан ёзилар эди. Масалан, бутун қисми қора, каср қисми қизил рангда ёзиларди.

6. Кўпайтма — дастлаб $|\underline{\quad}|$ белги ишлатилиб, тўғри тўртбурчакнинг юзи унинг икки ўлчов кўпайтмаси сифатида топилиши белгиси сифатида олинган. Кейинроқ кўпайтмани M (Multiplication сўзи бош ҳарфидан)

шаклда белгиланган, бундай белгилашни Штифель (1545), Стевин (1585) ишлатганлар. Кўпайтиришнинг × белгисини Отред (1631) киритган. Нуқта кўпайтириш белгиси сифатида Регномонтан, сўнгра Гарнотт (1631) ишларида учрайди. Бу белгилашни Лейбниц қабул қилди. Умумий тан олинишида Вольфнинг кўп марта нашр қилинган «Барча фанлар асослари» китоби (1710) муҳим роль ўйнади.

7. Косинус — ҳозир қўлланиладиган белгилашларни биринчи марта И. Бернулли Эйлерга хатида (1739) қўллаган. Эйлер уларни қулай деб ҳисоблаган.

8. Кўрсаткич — Декартгача Юм ва Эригонларнинг белгилашлари ҳозиргиларга яқин эди. Юм — 1635 йилда $5a^{\mathrm{IV}}$, Эригон эса 1634 йилда $5a4$ деб белгилашган. Декартда эса бу белгилаш $5a^4$ га айланди. Бу тезликда кенг тарқалди. XVIII асрда ҳам a^2 ўрнига $a \cdot a$ шаклдаги ёзувлар ҳам ишлатилган.

9. Логарифм — Непер логарифмлар билан ишлашда ҳеч қандай белгидан фойдаланмаган. Log, log, l белгиларини Кеплер, Бригге Отред уларни жиддий фарқламасдан ишлатганлар. Коши ўнли ва натурал логарифмлар учун турли белгилашлар ишлатган. Ҳозирги белгилашларга яқин белгиларни немис математиги Прингсхейм (1893) киритган.

10. Оралиқ — ҳозирги белгилашларни биринчи марта 1909 йилда Ковалевский киритган, (a, b) ва $<a, b>$ ҳамда $<a, b>$ ва $(a, b>$ кўринишларида учрайди. Сўнгра Хан (1921) уларни бироз ўзгартирди, яъни $< >$ ларни $|\ |$ белгиларга алмаштирди. [ ] ва] [белгилашлар Бурбаки томонидан (1956) киритилган.

11. Параллеллик — Папп бу тушунча учун = белгини ишлатган. Бу белгилаш XVIII асргача сақланиб келди. Рекорд томонидан тенглик белгиси ишлатила бошлагандан сўнг ‖ белгидан фойдалана бошладилар (Керси, 1637 йил; Вильсон, 1714 йил ва бошқалар).

12. Перпендикулярлик — Эригон (1634—1644) томонидан киритилган.

13. Қавслар — қавсларни ифодаловчи белгилар XV асрда пайдо бўлди. Шюке (1484) ишида қавсларга олинадиган ифода горизонтал чизиқ билан таъкидланади. Буни Бомбелли (1550) ҳам ишлатган. Кейин у ифода олдига L ҳарфини, охирига эса ⌋ белгини қўйди. Бундан квадрат қавслар вужудга келди. Қавслар ўрнида юқоридан чизиқ билан белгилаш Декарт, Ньютон, Ло-

питаль ишларида кўп учрайди. Доиравий қавслар Тарталья (1552), сўнгра Жирар (1629) ишларида учрайди. Виет (1593) асарида фигурали қавслар пайдо бўлди. XVIII асрнинг биринчи ярмига келиб қавслар кенг қўлланила бошлади. Шредер (1873) қавсларнинг арифметикадаги ўрнига оид асар ҳам ёзди.

14. Рақамлар — ҳинд рақамларини Европага француз олими Герберт тарқатган. Леонард Пизанский биринчи бўлиб араб рақамларини қабул қилди. Лекин 1299 йилдан уни қўллаш ман қилинди. XV асрнинг охирига келиб улар яна пайдо бўлди, бунгача рақамлар шакли ўзгармай қолди: 0 ва 1 ўзгармай келмоқда; 2 рақами ҳозирги шаклига яқин шаклларда ишлатилган 3 — эрамизгача бўлган II асрдан буён ўз шаклини сақлаб қолди; 4 — XVII асрда пайдо бўлди; 5 рақами 2 рақамига ўхшаш йўлни босиб ўтди; 6 рақами 500 йилдан бери ўзгармай келмоқда; 7 энг ёш рақам бўлиб, XV ва XVI асрдан киритилган; 8 ва 9 рақамлари 6 рақами каби 500 йилдан бери ўзгармасдан келмоқда.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ВА ИНТЕГРАЛ ҲИСОБНИНГ ЯРАТИЛИШ ТАРИХИ

Инсон тафаккури интеграл ҳисобда ўз фаолиятининг туганмас соҳасини топди.

О. Кант

XVII аср ярмигача кўплаб геометрик шаклларнинг юзлари ва ҳажмларини топиш инфинитезимал усуллар, яъни шаклни чексиз ингичка қатламларга бўлиб юз ёки ҳажмни топиш (лотинча инфинитум—чексиз маъносини англатади) ёки бўлинмас қисм тушунчасига асосланган усуллардан фойдаланиб топилган. Кўпгина шаклларнинг юзлари ва ҳажмлари, баъзи чизиқларга ўтказилган уринмалар ва бу чизиқлар узунликлари ана шундай усул билан топилди. Лекин айрим ҳолларда ҳажмларни ва узунликларни ҳисоблаш юзларни ҳисоблашга келтириши мумкинлиги аниқланди. Инглиз математиги Исаак Барроу (1630—1677) эса юзларни ҳисоблаш ва уринмалар ўтказиш, қўшиш ва айириш, кўпайтириш ва бўлиш каби муносабатда эканлигини аниқлади. Ўша даврда жуда кўп тадқиқотлар ўтказиллишига қарамасдан, ҳар хил масалалар турли усуллар билан ечилар эди. Бунда қуйидаги учта усул айниқса кўп қўлланилар эди.

Галилейнинг шогирди Бонавентура Кавальери (1598—1647) 1635 йилда нашр қилган «Узлуксизлик ёрдамида янги усулда баён этилган геометрия» китобида чексиз кичикларнинг қисқартирилган кўринишини яратди. У бунда чизиқлар, нуқталар, сиртлар—чизиқлар, жисмлар—сиртлар ҳаракати билан вужудга келиши тасаввурига таянди. Бу китобда юз ва ҳажмларни ҳисоблашнинг янги усули — бўлинмаслар усулини ишлаб чиқди. Бўлинмаслар деб, текис шаклнинг ўзаро параллел ватарлари ёки жисмнинг параллел текисликлари тушунилар эди. Кавальери иккита ўхшаш шаклнинг юзлари мос бўлинмаслар квадратларининг, ҳажмлари эса кублари нисбати каби бўлишлиги ҳақидаги теоремани исботлади. Шунингдек, учбурчак билан бир хил асос ва баландликка эга бўлган параллелограмм учун учбурчак барча бўлинмаслари квадратлари йиғиндисининг параллелограмм барча бўлинмаслари квадратлари йиғиндисига нисбати 1:3 каби бўлишини аниқлади. Кейинчалик, шунга ўхшаш муносабатларни бўлинмасларнинг кублари ва ҳ. к. тўққизинчи даражалари йиғиндиси учун ҳам топди. Ҳозирги математик тилда бу натижалар $\int_a^b x^n dx$ интегрални $n=2, 3, \ldots, 9$ лар учун ҳисоблашга мос келади. Унинг юз ва ҳажмларни ҳисоблаш усули кўпинча Кавальери принципи деб ҳам аталади. Бу принципга кўра агар жисмларнинг бир хил баландликдаги текис кесимлари бир хил юзларга эга бўлса, баландлиги тенг иккита жисм бир хил ҳажмга эга бўлади. Бундай принципни Кавальери юзларни таққослаш учун ҳам баён этди, бунда фақат кесимлар сифатида текис (текисликдаги) шаклларни эмас, балки кесмаларни олди. Умуман, Кавальерининг ишлари чексиз кичиклар ҳисобининг шаклланишида муҳим аҳамиятга эга бўлса-да, лекин интеграл ҳисоб усуллари бошқача йўл билан ривожлантирилди.

Швейцариялик математик Пауль Гульдин (Гюльден) (1577—1643) юз ва ҳажмларни ҳисоблашда оғирлик маркази хоссаларидан фойдаланди. Бунда у «айланма жисмнинг ҳажми айланаётган шаклнинг юзи билан унинг оғирлик марказининг айланишда босиб ўтган йўли узунлигига кўпайтмасига тенг, айланма жисм ҳажми эса айланаётган чизиқ узунлиги билан унинг оғирлик маркази чизиб ўтган айлана узунлиги кўпайтмасига тенг» деган хулосага келди. Мазкур соҳада у И. Кеплер ва Б. Кавальери ғояларини рад этар эди. Ўзининг «Оғирлик маркази ҳақида» (1635—43) номли асосий ишида айланма жисмлар сиртлари ва ҳажмларини аниқлашда қадимги юнон математиги П а п п (III асрнинг иккинчи ярми) ишларида исботсиз берилган теоремалардан фойдаланди. Бу теоремалар ҳозирда Гюльден теоремалари деб аталади.

Чексиз кичиклар ҳисобининг шаклланишида немис астрономи ва математиги И о г а н н К е п л е р (1572—1630) ишларини ҳам таъкидлаб ўтиш лозим. У 1609 йилда ёзилган «Янги астрономия» асарида чексиз кичиклардан фойдаланади, лекин ўз ғояларининг изчил баёнини 1615 йилда чоп этилган «Вино бочкалари стереометрияси» номли асарида берди. Гарчанд бу асар ҳалдан ташқари амалий, лекин тасодифий сабаб билан ёзилган бўлса ҳам у квадратуралар ва кубатуралар масаласига ёндошишда ўз вақтида янгича ғояни илгари сурди, яъни ясси шакл сони чексиз бўлган чексиз кичик элементларга ёйилиб, шу элементларнинг ўзидан (зарур бўлганда деформация қилиниб) юзи маълум бўлган шакл тузилади (жисмлар учун ҳам шу сингари иш кўрилади). Бочкаларнинг ҳажмини аниқлашнинг жуда қизиқ усулини таклиф этди, уни айланма жисмлар ҳажмларини аниқлаш умумий масаласи учун қўллади. Архимеднинг ишларидан маълум бўлган бўлинмаслар усули ғоясидан фойдаланиб, китобнинг «Архимедга илова» бўлимида 92 та айланма жисм ҳажмларини ҳисоблаб чиқди.

Кўриниб турибдики, XVII аср математиклари чексиз кичиклар таҳлилини яратишда катта ютуқларни қўлга киритдилар. Лекин бу ишларнинг дастлабки асосларини юнон математиги А р х и м е д (милод, авв. III аср) ишлаб чиққан эди. У ўзининг Э р а т о с ф е н (тахминан милод. авв. 276—194 йиллар)га юборган «Мактуб»ида (у бизгача етиб келган, унинг русча таржимаси бор) қўлга киритган илмий натижаларни ўзига хос усул ёрдамида эришганини ёзади; ташқаридан қараганда бу ерда ричагнинг мувозанатда бўлиш назарияси қўлланилгандек туюлади, лекин бунда шаклларнинг чизиқлардан, жисмларнинг эса текисликлардан барпо бўлиш ғояси илгари сурилган. «Мактуб» XVII аср математикларига маълум эмас эди, унинг матни асримиз бошида тасодифан топилиб қолди. Архимеднинг илмий натижаларини унинг сақланиб қолган бошқа асарларига асосланибгина тушуниб олйш мумкин. Айрим илмий ишларида тескарисидан исботлаш вақтида Архимед ясси шаклни (ёки жисмни) элементларга ажратиш усулидан фойдаланган, лекин бу элементларнинг сони ва ҳар бирининг қалинлиги чекли бўлган. Бунда у ички чизилган ва ташқи чизилган поғонали шакллар (жисмлар) ни тадқиқ қилган эди.

Француз математиги Пьер Ферма (1601—1665) хатларида Кавальери томонидан эришилган умумий натижани ундан бирмунча олдин топганлигини таъкидлаган. Француз математиги, физиги ва файласуфи Блез Паскаль (1623—1662) ва инглиз олими Жон Валлислар ҳам арифметик мулоҳазаларга асосланиб, интегрални ҳисоблаш ишини кетма-кет натурал сонларнинг n-даражалари йиғиндисини текшириш билан боғланган ҳолда олиб борар эдилар.

Аниқ интегралнинг ҳозирги замон тушунчасига ҳаммадан кўра Паскаль яқин эди ва унинг куч-қудратини баён қилган эди. Бунга Паскалнинг циклоидага боғлиқ масалаларни, турли юзларни, ҳажмларни, ёйлар узунлигини ҳисоблаш масалаларини ҳал этганлигини мисол қилиб келтириш мумкин. Улар «А. Деттонвилнинг геометриядаги турли кашфиётлар» номли китобида келтирилган.

Дифференциал ҳисоб бўйича ишларни бошлаб берган олимлардан бири Ферма бўлиб, у ушбу икки масала: энг катта ва энг кичик қийматларни топиш, уринмалар ўтказиш билан шуғулланган. Ферма бу масалаларни ечишда инфинитезимал характердаги усулларни ишлатган. Бу масалалар ечимлари 1679 йилда (унинг вафотидан кейин) чоп этилган «Энг катта ва энг кичик қийматларни топиш усули» номли ишида баён қилинган.

Энг катта ва энг кичик қийматларни топишнинг «Ферма қоидаси» функционал белгилашларда қуйидагича кўринишни олади: $f(A)$ ифодани энг катта ёки энг кичик қийматга эриштирувчи A миқдорни топиш учун Ферма дастлаб қуйидаги тақрибий тенгликларни қарайди:

$$f(A+E)=f(A) \text{ ёки } f(A+E)-f(A)=0.$$

Буни E га бўлиб,

$$\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0$$

тенглик ҳосил қилади. Тенгликдан E ни ўз ичига олиб турган ҳадларни йўқотади, яъни $E=0$ деб фараз қилади. У ҳолда

$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0$$

ҳосил бўлади, бу эса бизнинг белгилашларимизда $f'(A)=0$, бундан изланган A топилади. E миқдор бу мулоҳазаларда эркли ўзгарувчининг жуда ҳам кичик орттирмаси ролини ўйнайди.

Эгри чизиқларга уринмалар ўтказиш масаласини ҳам шу усул билан ечиш мумкинлигини кўрсатиб, у A орқали уринма остини ва E билан унинг орттирмасини белгилайди, эгри чизиқ тенгламасидан фойдаланиб, тақрибий тенглик тузади ва юқоридаги каби амалларни бажаради, натижада A ни аниқлаш тенглигини ҳосил қилади.

Мазкур икки масалани ҳал этишда бошқа олимлар Ферма қоидаларини такомиллаштирдилар ёки уларнинг қўлланиш соҳаларини кенгайтирдилар. Масалан, И. Барроу ўзининг «Оптика ва геометрия бўйича лекциялар» асарида уринмалар ўтказиш усулини такомиллаштириб, кичиклиги юқори тартибли бўлган ҳадлардан воз кечиш принципини баён этади. Р. Декарт эса эгри чизиқларга уринмалар ўтказишнинг умумий усулини яратди. У уринмани эгри чизиққа ўтказилган ва икки кесишиш нуқтаси бирлашиб кетган кесувчи сифатида қарайди. Декарт кесишиш нуқталарини топишни алгебраик тенгламаларни ечишга келтирганлиги туфайли, алгебраик тенгламанинг илдизлари қайси шартларда бирлашишини текшириш етарли эди. Шундай қилиб, ҳар қандай алгебраик чизиқларга уринмалар ўтказиш мумкин, лекин трансцендент (лотинча трансценденс — чегарадан чиқувчи маъносини беради) чизиқларга алгебраик усулларни қўллаш мумкин эмас эди. Бундай ҳолларда уринма ва тезликларни топиш учун кинематик мулоҳазалардан фойдаланилган, яъни агар нуқта ҳаракати иккита ҳаракатга ажралса, у ҳолда бу тузилган ҳаракатлардаги унинг оний тезликларини топиш етарли: сўнгра уларни параллелограмм қоидасига кўра қўшиш мумкин. Бунда ҳаракат илгарилама ва айланма ҳаракатларга ажралади. Бу ғояни ривожлантиришда француз математиги Жиль Персонн Роберваль (1602—1675) ва итальян физиги ва математиги Эванжелиста Торричелли (1608—1647) илмий ишлар олиб бордилар.

Барроунинг юқорида эслаб ўтилган китобининг ўнинчи ва ўн биринчи лекцияларида геометрик шаклда биринчи марта дифференциал ва интеграл ҳисобнинг иккита асосий масаласи—эгри чизиққа уринма ўтказиш ва эгри чизиқ квадратураси бир-бирига бевосита қарама-қарши масала сифатида қўйилган. Буни ҳозирги белгилашларда қуйидагича баён этиш мумкин:

агар $y = \int_0^x z dx$ бўлса, у ҳолда $\frac{dy}{dx} = z$;

агар $z = \frac{dy}{dx}$ бўлса, у ҳолда $\int_0^x z dx = y(x) = 0$ деб фараз қилиб, $y=0$ ни назарда тутилади.

XVII аср мобайнида «чексиз кичиклар анализи» соҳасида энг кўп натижалар интеграл ҳисоб бўйича эришилди, яъни квадратуралар, кубатуралар, ёйларни тўғрилаш, сиртларнинг юзларини ҳисоблаш ва огирлик марказларини аниқлашга доир кўп аниқ натижалар ҳамда улар орасидаги боғланиш ҳам топилди. Қатор содда интеграллар кўпинча геометрик усулда, баъзан арифметик усулда (Ферма, Валлис, Паскаль) ҳисоблаб чиқилди; бир турдаги интегралларни бошқа турдаги интегралларга алмаштирувчи турли-туман муносабатлар топилди (Ферма, Паскаль, Барроу). Дифференциал ҳисоб бўйича эса юқоридаги иккита масала тадқиқ қилинган бўлса-да, масалаларнинг асосида ётувчи асосий тушунчаларни ажратиб олиш имконияти вужудга келмаган эди. Янги ҳисобга замин тайёрланган бўлса-да, унинг асосий тушунчаларини умумий кўринишда аниқлаш ва уларнинг бир-бирига алоқасини ўрнатиш зарур эди. Шундан сўнг символика киритиб, ҳисоблаш учун алгоритмни яратиш керак эди. Бу муаммоларни бир-биридан бехабар равишда инглиз математиги ва физиги Исаак Ньютон ва немис математиги ва файласуфи Вильгельм Готфрид Лейбниц (1646—1716) ҳар бири ўз йўли билан ҳал этдилар.

Ньютон механика масалаларини ечишда ўзгармас куч ҳаракатланаётган нуқтага ўзгармас тезланиш беришини топди. Бундан эса ҳаракатланаётган нуқтага таъсир этувчи куч ва тезланишнинг пропорционал боғланишда эканлигини аниқлади. Шунинг учун берилган таъсир этувчи кучлар орқали тезланишни топиш мумкин, сўнгра тезланишдан тезликни ҳамда нуқтанинг ҳар бир вақт моментидаги ҳолатини топиш имконияти вужудга келади.

Тезлик, нуқта координатаси — ўзгарувчи миқдорлар бўлганлигини ҳисобга олиб, Ньютон бу масалани умумлаштирди. Шунинг учун у ўзининг «Флюксиялар ва чексиз қаторлар усули» (бу асар 1671 йилда ёзилган бўлса ҳам унинг вафотидан кейин 1736 йилда нашр қилинган) асарида вақт ўтиши билан ўзгарувчи миқдорларни флюэнталар (яъни «оқувчи», «ўзгарадиган») деб атайди ва лотин алифбосининг охирги ҳарфлари u, y, z, x лар билан белгилади. Флюэнтанинг ҳар бир вақт моментида оний тезлигини эса флюксия деб атади ва $\dot{u}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{x}$ каби белгилади, бунда флюксия флюэнтанинг вақт бўйича ҳосиласидир.

Ньютон дастлаб қуйидаги муаммони ечишга ҳаракат қилади: флюэнталар орасидаги берилган муносабатдан уларнинг флюксиялари орасидаги муносабатни келтириб чиқарилсин. У бу масалани фақат алгебраик тенгламаларга нисбатан ечди. Бунда у чегарасиз кичик миқдорни киритади (бу миқдор ноль бўлмасдан, балки вақтнинг «актуал» чексиз кичик орттирмасидир). Ўша замонда ва кейинчалик ҳам анча вақтгача чексиз ёки чегарасиз кичик миқдор деганда кўпинча ошкор равишда айтмасдан туриб, нолга тенг бўлмаган ва айни вақтда ҳар қандай чекли миқдордан (абсолют) кичик бўлган статик, яъни ўзгармайдиган миқдор тушунилар эди. «Актуал» чексиз кичик миқдор ҳақидаги бу тушунча сон ва фазо ҳақидаги концепциямизга зид эди ва ҳақиқатга тўғри келмас эди. Эндиликда унга «потенциал» чексиз кичик тушунчаси, яъни ўзининг ўзгариш жараёнидагина исталган чекли миқдордан (абсолют) кичик бўла оладиган ўзгарувчи миқдор қарама-қарши қўйилади.

Кейинчалик у иккинчи ва юқори тартибли флюксиялар тушунчаларини киритди. Ньютон флюксиялар ҳисобини татбиқ этиб, миқдорларнинг энг катта ва энг кичик қийматларини аниқлашда тўхташ принципидан фойдаланади: «Агар бирор миқдор юз бериши мумкин бўлган барча миқдорлар ичида энг каттаси ёки энг кичиги бўлса, бу моментда у на олдинга ва на орқага оқади». Бундан у флюксияни топгач, уни нолга тенглаштириш керак, деган қоидани келтириб чиқаради.

Ньютон биринчи асосий муаммога тескари масалани ҳам қарайди: таркибида флюксиялар бўлган тенглама бўйича флюэнталар орасидаги боғланиш топилсин. Бу масала оддий дифференциал тенгламани интеграллаш масаласидан иборат бўлиб, флюэнтани унинг флюксияси бўйича топиш, бошқача айтганда, бошланғич функция топишга қараганда умумийроқ ва қийиндир. Умумий масалани Ньютон чексиз қаторлар ёрдамида ҳал қилади. Бошлангич функцияни топиш масаласини у геометрия тилида ифодалаб — эгри чизиқ квадратураси сифатида қарайди. Бунда қуйидаги муҳим теоремага таянилади: ўзгарувчи юздан абсцисса бўйича олинган ҳосила ордината бўлади, демак, юзнинг ўзи ордината учун бошланғич функция бўлиб хизмат қилади.

1686—1687 йилларда босилиб чиққан Ньютоннинг «Натурал фалсафанинг математик негизлари»да механика, осмон механикасига асос солинган бўлса-да, «биринчи ва охирги нисбатлар» бўлимида икки миқдорнинг лимит нисбатлари ўрганилади. Бунда «вужудга келаётган», «йўқолиб бораётган» (чексиз кичик миқдорлар) нисбатлари кўриб ўтилади. Ньютон фикрича, ўзгарувчи миқдор ўзининг лимитига эришиб, бу лимит миқдор учун охирги («илк») қиймат бўлади. Ньютоннинг лимитлар назарияси геометрик мазмундаги ўн бир леммадан иборат бўлиб, уларда у «актуал» чексиз кичик тушунчаси ўрнига «потенциал» чексиз кичик миқдорлар, улар йиғиндилари ва нисбатларнинг лимитлари тушунчаларини киритди.

Лейбниц ҳам Ньютон билан бир вақтда бу масалалар билан шуғулланди. Унинг бу соҳа бўйича муҳим хизматларидан бири номлар ва белгилашлар мажмуасини ишлаб чиққанлигидир, чунки зарур символиканинг йўқлиги фан ривожига тўсиқ бўлади. Лейбницнинг дифференциал ва интеграл ҳисобидаги белгилашлари шундай ўйлаб топилган ва қулайки, ишнинг моҳиятига шундай мос келар эдики, ҳозирда ҳам улар муҳим ўзгаришларсиз кенг қўлланилмоқда.

Лейбницнинг чексиз кичик миқдорлар ҳисобига бағишланган илк мақоласи 1684 йилда «На каср, на иррационал миқдорлар тўсқинлик қила оладиган энг катта ва энг кичик қийматлар ҳамда уринмаларнинг янги усули ва унинг учун ўзига хос ҳисоб» номи билан босмадан чиқди. Бу мақолада биринчи марта дифференциал (лотинча differentia — айирма) сўзи қўлланилади. Бу тушунча геометрик жиҳатдан аниқланиб (дифференциалнинг геометрик маъноси), ўзгармас миқдорни, йиғиндини, айирмани, кўпайтмани, даражани, илдизни дифференциаллашга оид бўлган «ҳисоблаш қоидалари»ни келтиради. Шундай қилиб, Ньютон тезликни илк тушунча деб қараган бўлса, Лейбниц учун бошланғич тушунча бу ерда уринма тушунчаси бўлиб чиқади.

Лейбниц дифференциаллаш формулаларини топишда дифференциалларни чексиз кичик деб ҳисобласа-да, уни изоҳламади, лекин шундай шарт асосида

$$(u+du)(v+dv)-uv=udv+vdu+dudv$$

тенгликдан

$$d(uv)=udv+vdu$$

муносабатни келтириб чиқарди. Мана шундай алгоритмни уринмалар ўтказишга, максимум ва минимумларни топишга, функциянинг ботиқлик ва қавариқлигини текширишга, эгриликни аниқлашга ва ҳ. к. ларга татбиқ этди. Лейбниц ҳисоби бўйича v оний тезлик $v_{он}=\frac{dx}{dt}$, формула билан аниқланади. Уринмаларни ўтказишда, тезликларни ҳисоблашда иккита дифференциал нисбати пайдо бўлди, у эса чексиз кичик эмас эди, буни берилган функциядан ҳосил қилинган янги функция бўлгани учун ҳосила дейилади, y' ёки $f'(x)$ деб белгиланди.

Интеграл ҳисобга оид 1686 йилда нашр қилинган Лейбницнинг «О глубокой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных» асарида биринчи марта интеграл $\int$ белгиси учрайди (кичик s ҳарфи шаклида). У интегрални эгри чизиқли фигуранинг юзини асоси dx бўлган чексиз ингичка тўртбурчаклар юзлари йиғиндиси сифатида қарайди. Ҳар бир бу тик эгри тўртбурчаклар юзи $f(x)dx$ бўлгани учун бутун юз бундай ифодаларнинг чексизтаси йиғиндисига тенг. Бу чексиз кичикларнинг чексиз йиғиндисини Лейбниц интеграл (лотинча — интегер — бутун сўзидан олинган) деб атади ва

$$\int f(x)dx$$

белгилаш киритди ($\int$ — ишора лотинча summa сўзи биринчи ҳарфининг бошқача ёзилишидан иборат).

Шундай қилиб, интеграл ҳисобда Лейбниц учун асосий тушунча ролини «актуал» чексиз кичик бўлган тўғри тўртбурчаклар ydx нинг йиғиндиси ўйнайди, Ньютонда эса асос бошланғич функциядир.

Француз математиги Жан Лерон Даламбер (1717—1783) янги ҳисобни асослаш учун биринчилардан бўлиб ҳаракат қилди ва бунда Ньютоннинг биринчи ва охирги нисбатлар усулига таянди, уни лимитлар усули шаклида ривожлантирди. Дифференциал ҳисобни рационаллаштириб, лекин уни охиригача етказа олмади. К. Маркс «Математик қўлёзмалар»ида Даламбер ҳақида гапириб, «дифференциал ҳисобдан мистик либосни олиб, Даламбер олдинга улкан қадам қўйди» деб ёзади.

Даламбер функция орттирмасининг аргумент орттирмасига нисбатининг лимити тушунчасини тезлик асосида баён этишга қарши чиқди, чунки тезликнинг ўз ҳам текисмас ҳаракатда худди шундай лимит билан ифодаланади. У лимит тушунчасини ойдинлаштиришга ҳаракат қилди. Даламбер фикрича, «лимит ҳеч қачон у лимити бўлиб ҳисобланган миқдор билан устма-уст тушмайди ёки унга тенг бўлмайди». Бу билан у ўзгарувчи миқдорнинг лимитга монотон интилишини кўзда тутган эди. Даламбернинг лимит усули иккита миқдор учининси учун лимит бўлса, улар тенг, кўпайтманинг лимити лимитлар кўпайтмасига тенг бўлишига таянади. лекин бундай ғоялар у ва унинг маслакдошлари томонидан амалга оширилмай қолди. Бу фикрлар кейинчалик математик анализ ислоҳи учун асос бўлиб хизмат қилди.

Леонард Эйлер 1770 йилда ёзилган «Интеграл ҳисоб» асарида (III том) дифференциал ҳисобнинг асосий тушунчаси ҳосила эканлигини айтади, яъни функция йўқолиб борувчи кичик орттирмасининг аргумент йўқолиб борувчи кичик орттирмасига нисбати

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

деб фикр юритади. Кўп мулоҳазаларда Эйлер чексиз кичик миқдорларни нолга тенг деб қарайди. Шу билан бир пайтда, иккита «ноль»нинг нисбати, яъни функция чексиз кичик орттирмасининг аргумент мос орттирмасига нисбати аниқмас бўлмайди, дейди ва уларни турли символлар билан белгилашни таклиф этади, чунки улар турлича нисбатларга эга бўлиши мумкин. У ҳар бир мулоҳазани асослаш зарур деб ҳисобламайди, лимитлар назариясини муҳокама этмайди ва уни асосламайди, лекин чексиз кичиклар тартибини ҳисобга олади. Бу усул — қатъий исботлашлар мавжуд бўлмаган пайтда амалий қўллаш ва хатога йўл қўймаслик ҳисобланади.

Эйлер интеграл ҳисобда баъзи функцияларни интеграллаш усулларини топди: булар каср-рационал функцияларни оддий касрларга ажратиш усули; $\frac{}{ax^2+bx+c}$ ифодани ўз ичига олувчи интегрални айрим ўрнига қўйишлар усули билан ечиш, $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ биномиал дифференциални интеграллаш умумий усуллари.

Эйлернинг ишларини француз математиги Жозеф Луи Лагранж (1736—1813) давом эттирди. У математик анализнинг янги бўлими—вариацион ҳисобни ривожлантиришда муҳим натижаларга эришди.

Янги ҳисобни яратиш бўйича маълум ютуқларга эришилган ҳамда унинг кўплаб амалий масалалар ечишдаги татбиқлари топилган бўлса-да, унинг асосий тушунчалари — дифференциал ва интеграл ҳанузгача аниқмас бўлиб қолаётган эди. Шунингдек, агар дифференциал чексиз кичик ва нолдан фарқли бўлса, иккита дифференциал кўпайтмасини ташлаб юбориш мумкинми? Чексиз кичикларнинг чексиз сондаги йиғиндиси нимадан иборат? Агар улар нолга тенг бўлса, йиғиндиси нолга тенг; агар улар нолдан фарқли бўлса, йиғиндиси чексизга тенг бўлади. Умуман, чексиз кичикнинг ўзи нима? Бу каби саволлар жавобсиз эди.

Бу саволларга ижобий жавобни француз математиги Огюстен Луи Коши (1789—1857) топди. У асос қилиб чексиз кичик дифференциални эмас, балки иккита дифференциал нисбати $\frac{dy}{dx}$ ни, яъни функциянинг ҳосиласини танлади. Ҳосилага у геометрик нуқтаи назардан эмас, балки лимит тушунчаси нуқтаи назаридан қаради. Худди шундай, интегрални ҳам аниқлади. У чексиз кичик тушунчасини лимити нолга тенг миқдор деб тушунди. Коши бу илмий ишларини «Анализ курси» (1821), «Чексиз кичикларни ҳисоблаш бўйича маърузалар резюмеси» (1823) ҳамда «Анализнинг геометрияга татбиқлари бўйича маърузалар» (1826—28) каби асарларида баён этган.

Немис математиги Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815—1897) математик анализни мантиқий асослашда ўзи яратган ҳақиқий сонлар назариясига асосланди. Шунингдек, у лимит нуқталар ҳақидаги таълимотни ривожлантирди.

Коши ва Вейерштрасс ишларидан сўнг математикада дифференциал тушунчаси ўз жойини топди. Агар $y=f(x)$ функция ҳосилага эга бўлса, унинг орттирмасини $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$ шаклда ёзиш мумкин $(\Delta x\to 0,\ \alpha\to 0)$. $f'(x)\Delta x$ — функция дифференциали дейилади. Лейбниц давридаги каби Δx ўрнига dx деб ёзиб, $dy=f'(x)dx$ тенглик, бундан эса $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ кўринишдаги тенглик топилди.

Ҳозирги пайтда дифференциал ва интеграл ҳисоб математиканинг энг муҳим усулларидан бири бўлиб, математиканинг турли соҳаларини ривожлантириш учун асос бўлиб хизмат қилмоқда.

ЭҲТИМОЛЛАР НАЗАРИЯСИ ТАРИХИ

Ажаб, ўйинларни ўрганишдан бошланган фан инсон билимининг муҳим соҳаси даражасигача кўтарилди.

П. Лаплас

Эҳтимоллар назарияси қуйидаги масалаларни ечишда ривожлана борди:

1. Бир нечта ўйин соққасини ташлаганда тушиши мумкин бўлган турли ҳоллар сонини ҳисоблаш.

2. Ўйиннинг ярми тугаганда ютуқнинг ўйинчилар орасида тақсимланиши.

Учта соққани ташлаганда мумкин бўлган ҳоллар сонини Ричардо де Форниваль (1200—1250) ҳисоблашга ҳаракат қилган. У бундай ҳоллар 56 та эканлигини кўрсатади, учта соққани ташлаганда тенг имкониятли ҳоллар жами сони эса $6\cdot 1+$ $+30\cdot 3+20\cdot 6=216$ га тенг эканлигини топди. У учала соққада тушган очколар йиғиндисининг ҳосил бўлиши мумкин бўлган усуллари сони ҳисобланган жадвални тузади.

Уйғониш даврининг биринчи математика китобларидан бири италья́н математиги ва диндори Лука Пачоли (1445—1514) томонидан ёзилган «Арифметика, геометрия, нисбатлар ва пропорционалликлар бўйича билимлар йиғиндиси» (1494) китоби ҳисобланиб, унда «ажиб масалалар» бўлимида қуйидаги масалалар келтирилган эди:

1. Компания тўп ўйинида 60 очкогача ўйнайди ва 22 дукат ютуқ қўяди. Баъзи бир ҳолатларга асосан ўйин охирига етмасдан тугатилди, бунда бир томон 50, иккинчиси 30 очкога эга эди. Ҳар бир томон ютуқнинг қанча қисмини олиши керак?

2. Уч киши арбалет (пистолет)дан ўқ отишда мусобақалашяпти. Ким биринчи бўлиб 6 марта энг яхши нишонга теккизса, ютади. Ютуқ 10 дукат. Биринчиси 4 та, иккинчиси 3 та ва учинчиси 2 та энг яхши натижага эришганда отишни тўхтатдилар ва ютуқни адолатли тақсимлашга қарор қилдилар. Ҳар бирининг улуши қандай?

Пачоли таклиф этган ечим кўп баҳсга сабаб бўлди, чунки у хато ҳисобланган эди. У биринчи масалада ечимни қуйидагича топди: I ўйинчи ютуқнинг 5/8 қисмини, II ўйинчи 3/8 қисмини олиши керак, иккинчи масалада эса биринчиси 4 ва 4/9 дукат, иккинчиси 3 ва 3/9 дукат, учинчиси эса 2 ва 2/9 дукат олиши керак, деб топди.

Италъян математиги Жироламо Кардано (1501—1575) «Соққа ўйин ҳақида китоб» қўлёзмасида (1526 йил, сўнгра 1563 йилда босилиб чиққан) ўйин соққалари ташланганда уларда у ёки бу сондаги очколар сонининг чиқишига бағишланган кўплаб масалалар ечилган. У иккита ва учта соққани ташлаганда тушиши мумкин бўлган ҳоллар сонини тўғри ҳисоблайди. Масалан, иккита соққани ташлаш ҳақида қуйидаги мулоҳазани юритади: «Иккита соққани ташлаганда иккита бир хил сон 6 та ҳолда ва турли сондаги очколар тушиши 15 та ҳолда бўлиши мумкин, яъни бунда иккиланган ҳолларни қўшиб ҳисоблаганда 30 та ҳол. Демак, ҳамма мумкин бўлган ҳоллар 36 та». Иккиланган ҳоллар сифатида иккита соққада очколар ўрин алмашиши билан ҳосил бўлган ҳолларни тушунади. У ҳеч бўлмаганда битта соққада маълум сондаги очколар чиқиши мумкин бўлган ҳолларни 11 та эканлигини топди. Бу ҳолларни топишда эҳтимолнинг классик таърифидан — нисбатдан фойдаланди, бунда у 1/6 — бир соққани ташлаганда берилган сондаги очколар чиқиш эҳтимоли, 11/36 — ҳеч бўлмаганда битта соққада берилган сондаги очколар чикиш эҳтимолини топди. Лекин у эҳтимол тушунчасига яқин келса-да, имкон берувчи ҳоллар сонининг барча мумкин бўлган ҳоллар сонига нисбатига эътибор бермай, балки фақат мумкин бўлган ҳоллар сонини санашга ҳаракат қилди.

Итальян математиги Никколо Тарталья (1500—1557) «Ўлчов ва сон ҳақида рисола» (1556) асарида Пачолининг биринчи масаласи учун (ўзгартирилган шарт билан) қуйидаги ечимни таклиф этди: 10 очко тўплаган биринчи ўйинчи биринчидан бутун ютуқнинг ярмини иккинчидан, бутун ютуқнинг (10—6)/60 қисмини ёки 22/6 дукат, яъни ҳаммаси бўлиб 14 ва 2/3 дукат, иккинчиси эса 7 ва 1/3 дукат олиши керак. Бу ечим ҳам хато эди.

Галилео Галилейнинг (1564—1642) «Соққа ўйинда очколар чиқиши ҳақида» (1718 йилда босилиб чиққан) китоби учта соққани ташлаганда тушиши мумкин бўлган ҳоллар сонини ҳисоблашга бағишланган. Мумкин бўлган ҳоллар сони 6 ни (бир соққани ташлаганда тушиши мумкин бўлган ҳоллар сони) учинчи даражага кўтарди ва $6^3=216$ ни топди. У яна соққаларда тушган очколар йиғиндиси у ёки бу қийматга эга бўлишини ҳосил қилиш учун зарур усуллар сонини ҳисоблади.

Эҳтимоллар назарияси француз математиклари Блез Паскаль (1623—1662) ва Пьер Ферма (1601—1665) ёзишмаларида вужудга келди, деб ҳисоблаш мумкин. Бу ёзишмалардан Паскалнинг учта хати (29 июль, 24 август ва 27 октябрь, 1654 йил) ва Ферманинг тўртта хати (куни ёзилмаган хат, 9 август, 29 август, 25 сентябрь, 1654 йил) сақланиб қолган.

Паскаль ва Ферма хатларида эҳтимол тушунчаси йўқ ва уларнинг иккаласи ҳам ҳодисанинг рўй бериши учун имкониятлар сонини қараш билан чегараланганлар. Биринчи бўлиб улар ютуқни тақсимлаш ҳақидаги масалани тўғри ҳал қилдилар.

Паскалнинг эҳтимоллар назарияси масалаларига қизиқишига француз қироли саройи хизматчиси Шевалье де Мере (1607—1648) билан учрашувлари ва суҳбатлари сабаб бўлган. Мере фалсафа, адабиёт ҳамда қимор ўйинлари ишқибози бўлиб Паскалга қуйидаги саволларни беради:

1. Иккита соққани ташлаганда ҳеч бўлмаганда бир марта иккита олтилик чиқишига имкон берувчи ҳоллар

сони қандай ташлашда иккита олтилик бир вақтнинг ўзида чиқмаслик ҳоллари сонидан катта бўлиши учун бу соққаларни неча марта ташлаш керак?

2. Ютуқ чиққан зарур очколарни тўпламасдан ўйинни тўхтатганларида ўйинчилар ўртасида ютуқни қандай тақсимлаш керак?

Паскаль биринчи ўйинчи икки партияни ютиб, иккинчиси битта ҳам партияни ютмаган ҳамда биринчи ўйинчи битта партия ютгани, иккинчиси бирорта ютмаган ҳолларни кўриб чиқди. Биринчи ҳолда биринчи ўйинчи 56, иккинчиси 6 пистоль, иккинчи ҳолда ютуқлар мос равишда 44 ва 20 пистоль бўлиши кераклигини кўрсатди. Ферма эса бошқа мулоҳаза юритиб, икки ўйинчи орасидаги ютуқ 11 нинг 5 га нисбати каби тақсимланиши керак, деб хулоса чиқарди. У сўнгра уч ўйинчи бўлган ҳолда ҳам ютуқни бўлиш масаласини худди шундай мулоҳазалар орқали ечиш мумкинлигини кўрсатди. Голланд математиги Христиан Гюйгенс (1629—1695) «Математик этюдлар» (1656) китобига ёзилган қўшимчаларда 14 та мулоҳаза берган бўлиб, биринчи учтаси асосий принципларни ўз ичига олади, 4—9-мулоҳазалар ютуқни бўлиш масаласига бағишланган, 10—14-мулоҳазаларда соққаларни ташлаш билан боғлиқ турли масалаларни ечиш қаралган. У яна ютуқни тақсимлашда Паскалга ўхшаш мулоҳазалар юритган. Математик кутилиш тушунчасига яқин келган.

Умуман, Паскаль, Ферма ва Гюйгенс эҳтимол тушунчасига яқинлашдилар, лекин имкон берувчи ҳоллар сонининг барча мумкин бўлган ҳоллар сонига нисбатидан нари ўта олмадилар. Бу XVII асрда рўёбга чиқмасдан, балки XVIII асрда амалга оширилди. Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларини ривожлантиришда Жон Граунт (1620—1675) ва Уильям Петти (1623—1687) нинг демография бўйича тадқиқотлари муҳим аҳамиятга эга бўлди. Бу ишлар билан яна машҳур инглиз астрономи Эдмунд Галлей (1656—1742) ҳам шуғулланиб, ҳаётнинг давом этиш эҳтимоли тушунчасини киритди. Унинг ҳисобларида қўшиш ва кўпайтириш теоремалари асосида ётувчи принциплар, катта сонлар қонунига яқин мулоҳазалар ишлатилган.

Якоб Бернуллининг «Фаразлар санъати» (1713) асарида мукаммал бўлмаса-да эҳтимол тушунчаси киритилган. Бу тушунчанинг Граунт ва Петтилар частота тушунчаси ҳамда айрим ҳодисалар частоталарининг турғун бўлиши каби хулосалари билан ўзаро мувофиқлиги аниқланди.

Бернулли ўз асарида эҳтимолнинг икки: классик ва статистик таърифларини баён этган. Гарчи улар аниқ ифодаланмаган бўлса-да, муҳими улар киритилди ва қўлланилди. Бунда тасодифий ҳодисанинг эҳтимоли 0 ва 1 орасида жойлашган сон сифатида қаралди, муқаррар ҳодисага мумкин бўлган энг катта эҳтимол қиймати 1, мумкин бўлмаган ҳодисага эса энг кам — 0 қиймати мос қилинди. Эҳтимол икки хил усулда топилиши мумкинлиги кўрсатилди: ҳодисани рўёбга чиқарувчи тенг имкониятли ҳоллар ва барча мумкин бўлган ҳоллар нисбатини топиш; кўп сондаги бир-бирига боғлиқ бўлмаган синовларни ўтказиб, ҳодиса частотасини ҳисоблаш. Бернулли ўз асарини кўп йиллар — 20 йилча ўйлаб юрди, аммо у фақатгина 1713 йилда (муаллиф вафотидан 8 йилдан кейин) чоп этилди. Лекин шундай бўлса-да, қўлёзма ҳолида бу асар кўпчиликка маълум эди ва фойдаланиб келинди. Масалан, француз математиги Пьер Монмор (1678—1719) ва инглиз математиги Абрахам де Муавр (1667—1754) ҳам Бернуллининг таърифини қабул қилишди ва масалалар ечишга татбиқ этдилар. Муавр қуйидагича мисол келтиради: «Агар қандайдир ҳодиса 3 та рўёбга чиқарувчи ва 2 та рўёбга чиқармайдиган имкониятга эга бўлса, 3/5 каср ифода унинг рўй бериш эҳтимолини кўрсатади ва унинг ўлчови сифатида қаралиши мумкин».

Француз табиатшуноси Жорж Луи Леклерк Бюффон (1707—1788) чизиқлар билан бўлакларга ажратилган текисликка игнани ташлаш масаласини таклиф этди ва унинг ечимини баён этди. Шундай бўлса-да, унга қадар геометрик эҳтимолни топиш масаласи 1692 йилда X. Гюйгенснинг «Қимор ўйинларидаги ҳисоблар ҳақида» асарини инглизчага таржима қилишда инглиз математиги Жон Арбутнот (1667—1735) нинг қўшимчаларида учрайди: текисликка қирралари a, b ва c бўлган параллелепипед ташлаган. Параллелепипед ab ёғи билан қандай частотада тушиши мумкин? Унинг ўзи бу масалани ечмаган. Фақат инглиз математиги Томас Симпсон (1710—1761) «Табиат ва тасодиф қонунлари» (1740) асарида бу масалани ечган. Унда геометрик эҳтимол-ҳодисани рўёбга чиқарувчи ҳоллар тўплами ўлчовининг барча мумкин бўлган ҳоллар тўплами ўлчовига нисбати каби тушунилади.

Бюффон икки марта геометрик эҳтимол тўғрисида иш эълон қилди. 1733 йилда «Франк-карро ўйини ҳақида мемуар» асарида «геометрик эҳтимол эҳтимоллар назарияси соҳасида восита сифатида ишлатилиши мумкинлиги кўрсатилган». Франк-карро ўйини: полга бир хил шакллар чизилган, унга диаметри $2r$ бўлиб, шаклнинг ҳар бир томонидан кичик ва шакл ичига тўла жойлашувчи танга ташланади. Тасодифий ташланган танга шаклнинг бир ёки икки томонини кесиб ўтиш эҳтимоли топилсин.

Бюффондан кейин геометрик эҳтимоллар ўқув қўлланмаларига киритилди. Масалан, француз математиги Пьер Симон Лаплас (1749—1827) нинг «Эҳтимолларнинг аналитик назарияси», рус математиги Виктор Яковлевич Буняковский (1804—1889) нинг «Эҳтимоллар математик назарияси асослари» (1846), шулар жумласидандир.

Француз математиги Габриель Ламе (1795—1870) игна маркази тасодифан эллипс ёки мунтазам кўпбурчак марказига ташланган ҳолни кўриб чиқди. Инглиз математиги Жеймс Жозеф Сильвестр (1814—1897) эса тўртта нуқта ҳақидаги масалани ечди: қавариқ соҳа ичида тасодифан тўртта нуқта олинган. Бу нуқталарни учлари сифатида олиб, қавариқ тўртбурчак ясаш эҳтимоли нимага тенг?

Учрашув ҳақидаги масала биринчи марта Уайтвортнинг «Ганлаш ва имконият» (Лондон, 1886) асарида баён қилинган ва ҳал этилган: A ва B шахслар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда паркка қабулга борадилар. A шахс кундузи соат 3 ва 5 лар орасида, B шахс соат 4 ва 7 лар орасидаги тасодифан танланган вақтда қабулга боришади. Ҳар бири қабулда бир соат давомида бўлади. Улар қабулда ҳеч бўлмаганда бир дақиқа бирга бўлишлиги эҳтимоли нимага тенг? Изланган эҳтимол 1/3 га тенг.

Биринчи бўлиб эҳтимолларни қўшиш теоремалари инглиз математиги Томас Бейес (Байес) (1702—1761) нинг вафотидан сўнг икки йил ўтгач, 1763 йил 27 декабрда Лондон қироллик жамиятида ўқиб эшиттирилган ишида учрайди. У боғлиқ бўлмаган ҳодисаларда «зич бўлмаган» атамасидан фойдаланади.

Я. Бернулли ва Монмор эҳтимолларни кўпайтириш қоидаларидан фойдалансалар-да, уни ифодалай олмаганлар. Эҳтимолларни кўпайтириш теоремасини Муавр

«Имкониятлар доктринаси» (1718) асарида баён этган: иккита боғлиқ ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоли бирортасининг рўй бериш эҳтимолини агар биринчиси рўй берганда иккинчиси рўй бериш эҳтимолига кўпайтмасига тенг. Бу қоидани бир неча ҳодисалар учун ҳам умумлаштириш мумкин. Кўриниб турибдики, Муавр боғлиқ бўлмаган ҳодисалар, янги шартли эҳтимол ҳамда эҳтимолларни кўпайтириш тушунчаларини ифодалай олган. Муаврнинг бу формуласи Бейесга маълум эди. Фақат Бейес $P(B/A)$ эҳтимолни $P(AB)$ ва $P(A)$ эҳтимоллар бўйича ҳисоблаш тўғрисидаги натижани ифодалайди. Аслини олганда унинг номига қўйилган тўла эҳтимоллик формуласи унда йўқ эди. Бейес формуласи ҳозирги кўринишда Лапласнинг «Эҳтимоллар назарияси фалсафаси тажрибаси» асарида келтирилган. Х. Гюйгенс қуйидаги масалани таклиф қилган эди: A ва B 12 тангага эга, учта соққа билан қуйидаги шартлар асосида ўйнаяптилар: агар A 11 очко ташласа, у B га битта танга, агар 14 очко ташласа, B A га битта танга бериши керак. Қайси ўйинчи биринчи бўлиб барча тангаларни йиғиб олса, ютган ҳисобланади. Бу масала билан Я. Бернулли, Монмор, Муавр ва Лаплас шуғулландилар. Кейинчалик бу масала қуйидагича ифодаланди: A ва B ўйинчилар мос равишда a ва b франкка эга ва ҳар бир ўйинда бири иккинчисидан бир франк ютиб олади. A ўйинчининг ҳар бир ўйинда ютиш эҳтимоли p, B учун $q=1-p$. A ўйинчининг (мос равишда B ўйинчи) ўйинни ютиш эҳтимоллари p_a в аp_b нимага тенг?

Муавр қуйидагиларни топди (1711):

$$p_a = \frac{(q/p)^a - 1}{(q/q)^{a+в} - 1}, \quad p_b = \frac{(p/q)^b - 1}{(p/q)^{a+в} - 1}.$$

У, шунингдек, A ўйинчининг (B ўйинчининг) n ўйинда ютиш эҳтимоллари $p_{a,n}$ ($p_{b,n}$)ларни аниқлади. Монмор (1710) $p_{a,n}$, $p_{b,n}$ $p=q$ бўлган ҳолда бу формулаларни топди. Я. Бернулли $a=b=2$ ҳол учун ва умумий ҳолда масалани ечди.

Эҳтимоллар назариясининг кейинги ривожланишида Я. Бернуллининг масалаларнинг фақат аниқ ечимларини эмас, балки бирор параметрнинг асимптотикаларини ҳам қараш ғояси муҳим аҳамиятга эга бўлди. Бу соҳада Бернулли катта сонлар қонунини баён этди.

Муавр (1733) эҳтимоллар назариясининг айрим масалаларини ечиш учун $\sum_{m=1}^{k} p_n(m)$ биноминал тақсимот ҳадлари йиғиндисини n нинг катта қийматларида ҳисоблаш қийинлигини таъкидлади. У асимптотик формула излади. Асосий қийинчилик $m!$ ни баҳолаш эди: $m! = B\sqrt{m} \cdot e^{-m} \cdot m^m$ формула ҳосил қилди. B ўзгармас ва бунда

$$\ln B = 1 - 1/12 + 1/360 - 1/1260 + 1/1680 - \ldots$$

Муавр тахминан $B \approx 2{,}5074$ эканини топди, уни шотланд математиги Жеймс Стирлинг (1692—1770) топишни таклиф этди. Стирлинг $B \approx \sqrt{2\pi} \approx 2{,}506628$ эканлигини кўрсатди. Шундай қилиб, умуман катта сонлар учун факториални тақрибий ҳисоблаш формуласи Стирлинг номига қолди, умуман ё Муавр формуласи ёки Муавр-Стирлинг формуласи деб аталса тўғри бўлади. Бу формулани қўллаб, $p = q = 0{,}5$ бўлган ҳолда $(1/2 + 1/2)^n$ бином ўрта ҳади асимптотик $1/\sqrt{2\pi npq}$ га тенг эканлигини кўрсатди, локал теоремани исбот қилди, сўнгра $p \neq 0{,}5$ ҳол учун ҳам бу теоремани исбот қилди.

Эҳтимоллар назариясида тасодифий миқдор тушунчаси Пуассон томонидан 1832 йилда «Кузатишлар ўртача натижалари эҳтимоли тўғрисида»[1] асарида баён қилинган. Унда тасодифий миқдор атамаси йўқ бўлса-да «бирор нарса $a_1, a_2, \ldots, a_n$ қийматларини мос равишда $p_1, p_2, \ldots, p_n$ эҳтимоллар билан қабул қилади, деб ёзади. Шунингдек, у узлуксиз тасодифий миқдорлар ва уларнинг зичлик тақсимотларини қараган. Бу таърифлар математик таъриф эмас эди, у интуитив бўлиб, ҳаётий ва илмий тажрибалар асосидаги тавсиф эди. Унинг қатъий таърифи рус математиги Андрей Николаевич Колмогоров (1903—1987) томонидан «Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчалари» китобида берилган.

Я. Бернуллининг кузатишлар сони ошиши билан A ҳодиса эҳтимоли билан унинг рўй бериш частотаси орасидаги яқинлашиш ҳақидаги теоремани Пуассон томонидан 1837 йилда умумлаштирилди ҳамда «катта сонлар қонуни» атамаси киритилди.

Пуассон n та тажриба кетма-кетлигини олиб, унда A ҳодиса тажриба тартиб рақамига боғлиқ равишда p_i эҳтимол билан рўй бериши мумкинлигини кўриб чиқиб, агар μ_n A ҳодисанинг кетма-кет n та тажрибада рўй беришлар сони бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\varepsilon > 0$ да қуйидаги муносабат ўринли бўлишини топди:

$$n \to \infty \text{ да } P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n} - \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}{n}\right| < \varepsilon\right\} \to 0.$$

П. Л. Чебишёв (1867) «Ўрта миқдорлар тўғрисида» асарида тасодифий ҳодисалардан тасодифий миқдорларни текширишга ўтди.

Француз математиги Феликс Эдуард Жюстен Эмиль Борель (1871—1956) $p = 0{,}5$ учун (1909 йил) Бернулли схемасига қараганда кучлироқ мулоҳазани исботлади. 1917 йилда эса италья́н математиги Каптелли бу мулоҳазани ихтиёрий p учун татбиқ этди:

$$P\left\{\lim_{n \to \infty} \frac{\mu_n}{n} = p\right\} = 1$$

(бу кучайтирилган катта сонлар қонуни деб аталади). Бу қонунни А. Н. Колмогоров (1930) умумлаштирди.

Етарли ва зарурий шартларни рус математиги Юрий Васильевич Прохоров (1929 йилда тугилган) (1958—59 йиллар) топди.

Муаврнинг ҳар бирида A ҳодиса фақат битта p эҳтимол билан рўй бериши мумкин бўлган n та боғлиқ бўлмаган тажрибада рўй беришининг марказлашган ва нормаллашган сони тақсимотларининг нормал тақсимотга яқинлашиши ҳақидаги теоремаси кўп марта умумлаштирилди. Дастлаб Лаплас (1809), Пуассон (1837), сўнгра П. Л. Чебишёв (1887) томонидан моментлар усули ёрдамида келтириб чиқарилди. Сўнгра А. М. Ляпунов (1900—1901), фин математиги Яре Вальдемар Линдеберг (1876—1932), америкалик математик Уильям Герберт Феллер (1906—1970) нинг ишлари бу теореманинг яна ҳам умумлашишига олиб келди. Тақсимот функцияларининг нормал қонунига яқинлашиши масалалари ҳозирда ҳам тадқиқ этилмоқда.

Эҳтимоллар назарияси фанининг атоқли намоёндалари қаторига математиклар Борис Владимирович Гнеденко (унинг жуда кўплаб ишлари ва ўқув қўлланмалари эҳтимоллар назариясини ўқитишда кенг қўлланилмоқда, у бу назариянинг тарихчиси сифатида ҳам илмий ишлар ёзган, мазкур бўлим ҳам унинг бу ишлари асосида ёзилди), Александр Яковлевич Хинчин (1894—1959), Андрей Андреевич Марков (1856—1922) ва ўзбек математиклари Тошмуҳаммад Алиевич Саримсоқов (1915—1995), Саъди Ҳасанович Сирожиддинов (1921—1989) киради.

Ҳозирги даврда эҳтимоллар назарияси ривожланишида янги йўналишлар — тасодифий миқдорларни оптимал бошқариш, мартингаллар назарияси, тасодифий операторлар, алгебраик структураларда эҳтимоллик қонуниятлари вужудга келмоқда. Бу йўналишлар ҳам умумий назарий, ҳам амалий аҳамият касб этмоқда.

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ РИВОЖЛАНИШ ТАРИХИ

Барча математика фанлари ичида дифференциал тенгламалар назарияси энг муҳимдир... У вақт бўйича ўзгарувчи табиат ҳодисаларини тушунтиради.

С. Ли

Дифференциал тенгламалар назариясига оид дастлабки масалалар XVI—XVII асрлар чегарасида логарифмик жадвалларни тузишда пайдо бўлди. Шотланд математиги Жон Непер (1550—1617) ҳақиқий сонлар учун логарифм таърифини беришга асос қилиб иккита ўзаро боғлиқ узлуксиз тўғри чизиқли ҳаракатни олиб, шу орқали дифференциал тенглама билан аниқланувчи $y=10^7\cdot\ln\frac{10^7}{x}$ логарифмик функцияни топди.

Дифференциал тенгламаларга келувчи масалалар физика, оптика ва бошқа соҳаларда ҳам пайдо бўла бошлади. Масалан, бундай тенгламаларни Г. Галилей қаршиликсиз муҳитда оғир жисмнинг тушиши (1638 йил), Р. Декарт нурнинг синиш қонунларига асосланиб, «уринмаларга тескари масала» ни (1628 йил) тадқиқ этишда келтириб чиқардилар. Охирги масала, яъни берилган хоссаларга эга бўлган эгри чизиқларни топиш масаласи интеграл ҳисоб ва дифференциал тенгламалар назарияси тарихида муҳим аҳамиятга эга бўлди. Декартга француз математиги Флоримон де Бон (1601—

1652) бундай масалалардан бир нечтасини таклиф қилган эди. Декарт уни

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{a\sqrt{2}}$$

кўринишдаги тенгламани ечишга келтирди. Лекин логарифмик функция тушунчасига эга бўлмаганлиги сабабли кинематик усулдан фойдаланиб, иккита ҳаракатланаётган тўғри чизиқнинг кесишиш нуқталари сифатида тасвирлади. Бу тенгламани ўзгарувчилари ажраладиган тенглама квадратураси масаласига олиб келиш И. Б а р р о у г а (1669—1670 йиллар) насиб этди. У геометрик усулда уринма ости

$$\frac{S_z}{y} = \frac{f(y)}{\varphi(x)}$$

шарт билан аниқланувчи эгри чизиқнинг ўзи шу тенглама билан аниқланади деб кўрсатди, бу ҳозирги белгилашларда

$$\int f(y)\,dy = \int \varphi(x)\,dx$$

тенгликни билдиради.

И. Ньютон ва Г. Лейбницнинг ишлари билан дифференциал тенгламалар назарияси ривожининг илк даври бошланди (XVII аср охирги чораги ва XVIII аср). Нуқта ва қаттиқ жисм динамикаси муаммоларини ҳал этиш ҳамда баъзи геометрик масалаларнинг дифференциал ва интеграл ҳисоб усуллари ёрдамида ўрганилиши биринчи ва иккинчи тартибли оддий дифференциал тенгламаларнинг синфларга бўлинишига олиб келди.

XVIII асрнинг биринчи ярмида дифференциал тенгламалар фақатгина механикада эмас, балки дифференциал геометрия ва вариацион ҳисобда ҳам кенг қўллана бошлади. Бу давр охирига келиб математик физика масалалари, аввало торнинг тебраниши ҳақидаги масала хусусий ҳосилали дифференциал тенглама кўринишини олди. Мазкур асрда дифференциал тенгламалар назарияси дифференциал тенгламаларнинг турли конкрет типлари ҳақидаги таълимот сифатида ривожлантирилди. Шунингдек, асосий эътибор интеграллашнинг хусусий усулларига, ечимни оддий функциялар билан ифодалашга ва квадратураларга олиб келишга қаратилган бўлиб, ечим мавжуд, лекин бу квадратурага олиб келиб бўлмаган тақдирда тақрибий интеграллашга ҳаракат қилинар эди. Аммо асосий назарий муаммолар — ечимнинг мавжудлиги, интеграл чизиқларнинг жойлашиши, махсус нуқталарнинг хусусиятларини аниқлаш масалалари назардан четда қолаётган эди.

И. Ньютон «Натурал фалсафанинг математик негизлари» (1686) асарида бир қатор дифференциал тенгламаларни интеграллади. Масалан, у $\frac{d(mv)}{dt} = F$ (иккинчи қонунида ҳосил қилинган тенглама) тенгламани қуйидаги кўринишда ечди:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Бу асарда дифференциал тенгламалар ва уларнинг интеграллари ифодалари аналитик кўринишда берилмаган. Механика масалалари ечимларининг аналитик кўринишини биринчи бўлиб Л. Эйлер киритган. Дифференциал тенгламалар ошкора шаклда Ньютоннинг 1671 йилда ёзилган ва 1736 йилда босилиб чиққан «Флюксиялар ва чексиз қаторлар усули» асарида учрайди: $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ (M ва N — бутун рационал функциялар) тенгламанинг ечими квадратураларда берилган. Ечишнинг умумий усули — кетма-кет яқинлашишлар усули бўлиб, ечим эркли ўзгарувчининг мусбат ёки манфий даражалари бўйича чексиз даражали қатор шаклида ифодаланган. Бунга сабаб, айрим тенгламалар квадратураларда интегралланмас эди, кўпларида эса квадратуралар етарлича ўрганилмаган трансцендент функцияларга олиб келар эди.

Лейбниц (у 1676 йилда Ньютонга ёзган хатида, сўнгра 1684 йилда босилиб чиққан ишларида «дифференциал тенглама» атамасини киритди), унинг маслакдошлари швейцариялик математиклар сулоласи Б е р н у л л и л а р (бу сулола бошлиғи Я к о б Б. (1583 йилда вафот этган) Голландиядан бўлиб, унинг невараси Я к о б Б. (1598—1634) Базелга кўчиб келади. Унинг оиласи ва авлодларидан атоқли олим ва давлат арбоблари етишиб чиққан: Б е р н у л л и Я к о б I (1654—1705) — математик, чексиз кичиклар анализи, қаторлар назарияси, вариацион ҳисоб ва эҳтимоллар назарияси бўйича илмий ишлар олиб борган; Б е р н у л л и И о г а н н I (1667—1748) — математик, Бернулли Якоб I нинг укаси. Асосий ишлари: дифференциал ва интеграл ҳисоб, дифференциал тенгламалар назарияси, вариацион ҳисоб, геометрия ва механика бўйича; Б е р н у л-ли Николай I (1687—1759) — математик Якоб I ва Иоганн I Бернуллининг жияни, эҳтимоллар назарияси ва интеграл ҳисоб бўйича илмий иш олиб борган. Бернулли Николай II (1695—1726) — математик, Иоганн I Бернуллининг ўғли, Риккати тенгламаси билан шуғулланган. Бернулли Даниил (1700—1782) — физик ва математик. Иоганн I нинг ўғли ва Николай II нинг укаси. Асосий ишлари: алгебра, дифференциал тенгламалар назарияси, эҳтимоллар назарияси, қаторлар бўйича. Бернулли Иоганн II (1710—1790) — математик, Даниил ва Николай II нинг укаси. Бернулли Иоганн III (1744—1807) — астроном ва математик, даврий ўнли касрлар ва эҳтимоллар назарияси билан шуғулланган. Бернулли Якоб II (1759—1789) — математик ва механик, дифференциал тенгламалар ечишга даражали қаторлар ёйилмасини қўллаган бўлсалар-да, оддий дифференциал тенгламалар ва уларни квадратураларга олиб келиш йўли билан ечиш усулларини синфларга ажратдилар.

1696—97 йилларда Лейбниц ва ака-ука Бернуллилар

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{(n)}$$

кўринишдаги тенгламани ечдилар, бунда $y'^{\;n} = u$ алмаштириш орқали бу тенглама чизиқли тенгламага келтирилди. Бунгача (1693 йилда) Лейбниц бир жинсли чизиқли тенгламаларни $y = ux$ алмаштириш ёрдамида ечган эди, сўнгра эса чизиқли тенгламада y ни иккита u ва v функциялар кўпайтмасига алмаштириш мумкинлигини аниқлаган эди. 1700 йилда Иоганн I Бернулли x^p кўпайтувчи ёрдамида қуйидаги

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a\, y = 0$$

чизиқли тенгламанинг тартибини пасайтириш мумкинлигини кўрсатди, кейинчалик у Л. Эйлер номи билан аталган (1740 йилда у тенгламани $x = e^t$ алмаштириш билан ечиш усулини топди).

1697 йилда Иоганн I Бернулли траекториялар ҳақидаги масалани қўйди ва уни ечди. Ўзгарувчилардан бирортаси ошкора бўлмаган иккинчи тартибли тенгламалар учун Якоб I Бернулли $y' = p$ параметр киритиш йўли билан биринчи тартибли тенгламага келтириш усулини таклиф этди, лекин бу иш италиялик математик

Якопо Франческо Риккати (1676—1754) ўша усулни 1715 йилда эълон қилгандан кўп йил ўтгандан сўнггина босилиб чиқди.

Оддий дифференциал тенгламаларнинг кейинги ривожланишида XVIII асрнинг йирик математиклари Л. Эйлер, Алексис Клод Клеро (1713—1765), Ж. Даламбер ва Ж. Л. Лагранж катта ҳисса қўшдилар.

Механика, осмон механикаси, баллистика ва математик анализ масалаларини еча туриб, Эйлер дифференциал тенгламалар назариясини янада бойитди. 1743 йилда у ўзгармас коэффициентли исталган тартибли бир жинсли чизиқли тенгламани ечиш усулини баён этди, яъни $y=e^{\lambda x}$ алмаштиришдан, ҳақиқий каррали илдизлар ҳолида эса $y=ue^{k}$ алмаштиришдан фойдаланиб ечди. Шунингдек, у n-тартибли тенгламанинг умумий ечими n та хусусий ечим комбинациясидан иборат эканлигини кўрсатди ҳамда «хусусий ечим» ва «умумий ечим» тушунчаларини биринчи бўлиб киритди. 10 йилдан сўнг ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламани тартибини пасайтириш йўли билан ечиш усулини эълон қилди. Масалан, у $Ay+B\frac{dy}{dx}+C\frac{d^2y}{dx^2}=x$ тенгламани e^{mx} га кўпайтириб, ҳосил қилинган тенглама ечимини

$$e^{mx}\left(A_1y+B_1\frac{dy}{dx}\right)=\int xe^{mx}dx$$

шаклида фараз қилиб (бунда A_1 ва B_1 — аниқмас коэффициентлар), охирги тенгламанинг икки томонини кетма-кет дифференциаллаб ва уни берилган тенглама билан таққослаб A_1, B_1, m ни топди.

Даламбер (1766) бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечими унинг хусусий ечими билан ўша коэффициентлардаги мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими йиғиндисидан иборат эканлигини аниқлади.

Лагранж (1766—1777 йиллар) ўзгармасларни вариациялаш усулини ишлаб чиқди ва юқоридаги турдаги тенгламаларга татбиқ этди.

Л. Эйлер ва А. Клеро дифференциал ифодаларнинг интеграллануvчанлик шартларини текширдилар. $Mdx+Ndy$ ифода учун бу шартни Клеро (1740) ва Эйлер топдилар. 1741 йилда эса Клеро

$$Mdx+Ndy+Pdz$$

кўринишдаги ифоданинг интегралланувчанлик шартини ва тўлиқ дифференциаллаш усулини топди.

Интегралловчи кўпайтувчи усулини Л. Эйлер (1768—1769 йиллар) биринчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг бир қатор синфларига татбиқ этди. Бернулли ва Риккати умумий тенгламаси

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + ax^n$$

кўринишдаги тенгламани тадқиқ этдилар.

Биринчи тартибли тенгламанинг махсус ечими биринчи марта инглиз математиги ва файласуфи **Брук Тейлор** (1685—1731) нинг 1715 йилда босилиб чиққан ишида учрайди. У

$$4x^3 - 4x^2 = (1+z^2)^2 \cdot \left(\frac{dx}{dz}\right)^2$$

тенгламани $x = \frac{v}{y^2}$, $v = 1 + z^2$ алмаштиришлар орқали

$$y^2 - 2zyy' + vy'^2 = 1 \qquad (*)$$

кўринишга келтириб, уни дифференциаллади:

$$2y''(vy' - zy) = 0,$$

сўнгра иккинчи кўпайтувчини нолга тенглаб ва $y' = \frac{zy}{v}$ ни (*) тенгламага қўйиб, $y^2 = v$ ва $x = 1$ ечимларни олди. Бу ечимни «масаланинг баъзи махсус ечими» деб атади.

1736 йилда А. Клеро дифференциаллаш орқали

$$y = (x+1)\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

тенгламанинг махсус ва умумий ечимини топди. Даламбер (1750, 1772) бу усулни

$$y = x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) \text{ (Лагранж тенгламаси)}$$

тенгламага умумлаштирди. 1736 йилда Эйлер тенглама $\mu(x, y)$ кўпайтувчига эга бўлса, у ҳолда $\frac{1}{\mu(x, y)} = 0$ тенглик махсус ечимни беришини кўрсатди. Лагранж (1776) махсус ечимларни текшириб ва уни қандай қилиб бевосита тенгламадан ёки умумий ечимдан ўзгармасни дифференциаллаш йўли билан ҳосил қилиш мумкинлигини аниқлади. У махсус ечимни хусусий интеграл эгри чизиқлар оиласининг ўрамаси сифатидаги геометрик маъносини баён қилди.

Динамиканинг асосий тенгламаларини ечишда дифференциал тенгламалар системаси пайдо бўлди. Бу системаларни муфассал текширишни Даламбер (1750) бошлаб, ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли системаларни ечишга аниқмас кўпайтувчилар усулини қўллади. 1768 йилда дифференциал тенгламаларни тақрибий ечишнинг Эйлер усули кашф қилинди.

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар назарияси дастлаб торнинг тебраниши ҳақидаги масалани ечишдан бошлаб ривожлана бошлади. Б. Тейлор (1715) масаланинг ечимини математик жиҳатдан асослади, бунда у қуйидаги кўринишдаги тенгламага келди:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Баъзи чегаравий шартлар асосида Б. Тейлор масалани ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли оддий чизиқли тенгламаларга келтирди ва иккита учи бириктирилган тор учун ҳар қандай вақт моментида у синусоида шаклида эканлигини топди. Тебранувчи тор тенгламасини

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

шаклида Даламбер (1749) ифодалади ва унинг ечимини иккита ихтиёрий функция йиғиндиси шаклида, яъни $f(x+t)+\varphi(x-t)$ кўринишда топди.

Даламбер бир йилдан сўнг тор тебраниши тўла аниқланиши учун чегаравий шартлар билан бирга бошланғич шартлар берилиши кераклигини кўрсатди.

Д. Бернулли (1753) тор тебраниши унинг турли қисмларининг чексиз сондаги тебранишларидан иборат эканлигини топди ва ечим

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{a} + \beta \sin\frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin\frac{3\pi x}{a} + \dots$$

кўринишда бўлишлигини исботлади. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ коэффициентларни танлаш орқали тригонометрик қатор ҳар қандай чизиқни ифодалаши мумкинлигини кўрсатди. Аммо функция тушунчаси, узлуксизлик ва ҳ. к. тушунчалар аниқ бўлмаганлиги бу масала ечимини аниқ ифодалашга ҳамда тригонометрик қаторлар билан ифодаланувчи функциялар синфи ҳақидаги масалани ижобий ҳал қилишга имкон бермади.

Юқори тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар гидродинамика масалаларида (Эйлер, Даламбер, 1752 йил), мембрана тебраниши ҳақидаги масалада (Эйлер), потенциаллар назариясида (Лаплас тенгламаси, 1789 йил) ва ҳ. к. ларда пайдо бўлди. Натижада иккинчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг асосий турлари аниқланди.

Эйлер, Даламбер ва Лагранж дифференциал тенгламалар назариясининг аналитик ва ҳисоблаш нуқтаи назардан ривожлантирган бўлса, француз математиги Гаспар Монж (1746—1818) дифференциал тенгламалар геометрик назариясини асослади. У тенгламаларни интеграллаш жараёнининг кўргазмали геометрик тавсифини берди. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар умумий назарияси геометрик тавсифини баён этди.

XVIII аср охирида квадратураларда интегралланувчи оддий дифференциал тенгламалар синфларга ажратилди, тақрибий ечишнинг биринчи изчил усуллари яратилди, янги тушунчалар — умумий ва махсус ечим, хусусий ҳосилали тенгламаларнинг тўлиқ, умумий ва хусусий интеграллари киритилди. Хусусий ҳосилали тенгламалар геометрик назарияси, юқори тартибли хусусий ҳосилали тенгламаларнинг каноник кўринишлари яратилди. Дифференциал тенгламалар назарияси вариацион ҳисоб, дифференциал геометрия, комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, тригонометрик қаторлар, махсус функциялар ва эллиптик интеграллар назариялари билан алоқада ривожланди. Дифференциал тенгламалар бўйича XVIII асрнинг 80-йилларигача қўлга киритилган натижалар Эйлернинг «Интеграл ҳисоб» тўрт томлик асарида ўз аксини топган (1768—1770 йиллар, 4-том, 1794 йилда босилган).

XIX асрда математик физика муаммоларининг ҳал этилиши, математик анализнинг ислоҳи туфайли дифференциал тенгламаларнинг ечимлари мавжудлиги масаласи кўриб чиқила бошлади. 1820—1830 йилларда француз математиги О. Л. Коши биринчи тартибли $y'=f(x, y)$ оддий дифференциал тенгламанинг $x=x_0$, $y=y_0$ шартларда $f(x, y)$ ва $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ нинг узлуксизлик соҳасида ечимнинг мавжудлиги ва ягоналигини исботлади (1835 йил). Бу исботни немис математиги Рудольф Липшиц (1832—1903) такомиллаштирди ва

$\frac{\partial f}{\partial y}$ нинг узлуксизлик шартини унинг номи билан аталувчи (1876) кенгроқ шарт билан алмаштирди. Кейинроқ итальян математиги Жузеппе Пеано (1858—1932) $y'=f(x, y)$ тенгламанинг $x=x_0$, $y=y_0$ шартлар билан $f(x, y)$ нинг узлуксизлик соҳасида ҳеч бўлмаганда битта ечими мавжудлигини исботлади.

Коши кетма-кет яқинлашишлар усули ғоясини ишлаб чиқди, унинг ҳозирги кўринишдаги шакли француз математиги Шарль Эмиль Пикар (1856—1941) томонидан топилди:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\,dx, \ldots, y_k = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{k-1})\,dx.$$

С. В. Ковалевская (1850—1891) хусусий ҳосилали тенгламалар системалари учун ечимлар мавжудлигини текшириб, мазкур тенгламалар системасининг нормал шакли учун аналитик ечим мавжудлиги ҳақидаги теоремани (1874) исботлади. Мавжудлик теоремалари бир томондан, дифференциал тенгламалар назарияси усуллари қонунийлигини таъминласа, иккинчи томондан, бу теоремаларни исботлаш усуллари изланаётган ечимга ихтиёрий яқинлашиш (ихтиёрий аниқликда) га ва бу яқинлашиш аниқлигини баҳолашга имкон беради.

Махсус ечимлар бўйича француз математиги Франсуа Наполеон Мари Муаньо (1804—1884), француз математиги Антуан Августин Курно (1801—1877) маълум ишлар қилдилар. Сўнгра француз математиги Жан Гастон Дарбу (1842—1917), Пикар томонидан бу масала тўлиқ ишлаб чиқилди.

XIX асрнинг биринчи ярмида тенгламаларни квадратураларда интеграллаш бўйича француз математиги Жозеф Лиувилль (1809—1882) баъзи трансцендентал синфларга таяниб, Риккати махсус тенгламасини Д. Бернулли (1841) кўрсатган ҳолларда квадратураларда интегралланишини исботлади. Рус математиги Пафнутий Львович Чебишёв (1821—1894) ҳам турли иррационал функцияларни чекли кўринишда интеграллаш, хусусан. дифференциал биномни интеграллаш (1853) билан шуғулланди.

Квадратураларда интегралланувчи тенгламаларга немис математиги Карл Густав Якоб Якоби (1804—1851) номи билан аталувчи

$$(Ax+By+C)dx+(A_1x+B_1y+C_1)dy+$$
$$+(A_2x+B_2y+C_2)\ (xdy-ydx)=0$$

тенглама ҳам қўшилди. Унинг ечимини рус математиги Дмитрий Фёдорович Егоров (1869—1931) топди.

Рус математиги Михаил Васильевич Остроградский (1801—1862) Лиувилль (1838) билан биргаликда муҳим

$$W(x)=\mathrm{const}\cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x}p(x)dx}$$

формулани топди.

Француз математиги Жан Шарль Франсуа Штурм (1803—1855) ва Лиувиллнинг ишлари уларнинг номи билан аталувчи чегаравий масалалар назариясига асос солди; моҳияти

$$y''(x)+p(x)y'(x)+\lambda y(x)=0$$

тенгламани $y(x)$ ва $y'(x)$ лар бирор чизиқли комбинациясининг x ўқи икки нуқтасида берилган қийматларида ечишдан иборат. Бу чегаравий масаланинг ечими интеграл тенгламалар назарияси ва функцияларни фундаментал функциялар бўйича ёйиш назарияси билан боғлиқ. Ўзгарувчи коэффициентли иккинчи тартибли махсус чизиқли тенгламалар билан ўз вақтида Л. Эйлер ва Д. Бернулли шуғулланган бўлсалар, сўнгра немис астрономи Фридрих Васильевич Летников (1837—1888), рус математиги Николай Яковлевич Сонин (1849—1915) ва бошқалар давом эттирдилар, бу эса махсус функциялар назариясида—цилиндрик, шар ва ҳ. к. функцияларни ўрганишга имконият яратди.

Юқори тартибли хусусий ҳосилали тенгламалар назариясида чегаравий масалаларни ечишда яхши натижалар тригонометрик қаторлар, комплекс ўзгарувчи функциялар назариялари ҳамда вариацион ҳисобнинг кенг қўлланилиши туфайли эришилди. Бу тадқиқотларга француз математиги Жан Батист Жозеф Фурье (1768—1830) нинг иссиқлик ўтказиш назарияси бўйича ёзган иши (1822) асос бўлди. Иссиқлик ўтказиш тенгламаси

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

интеграллашнинг (турли чегаравий шартларда) изланаётган ечимни тригонометрик қатор шаклида тасвирлади.

Француз математиги Симеон Дени Пуассон (1781—1840) математик физиканинг баъзи чизиқли тенгламаларини текширган бўлса, унинг ишларини рус математиклари Александр Михайлович Ляпунов (1857—1918) ва Владимир Андреевич Стеклов (1864—1926) потенциал назария, статика ва гидродинамика соҳаларида давом эттирдилар.

XIX асрнинг иккинчи ярми ва XX аср бошларида дифференциал тенгламалар назарияси ривожланишида икки йўналиш асосий ўринни эгаллади: гуруҳлар назариясининг татбиқ этилиши, иккинчиси осмон механикаси ва астрономия масалаларининг ўрганилиши ҳисобланади. Норвегиялик математик Софус Мариус Ли (1842—1899) дифференциал тенгламаларни ечишга алмаштиришлар узлуксиз гуруҳини қўллади.

XIX асрнинг 70-йилларида янги соҳа — дифференциал тенгламалар сифатий назарияси вужудга келди. Бу назария француз математиги Анри Жюль Пуанкаре (1854—1912) ва А. М. Ляпунов томонидан бир вақтнинг ўзида яратилди. Пуанкаре қуйидаги масалани ечишни таклиф этди: дифференциал тенгламани интегралламасдан $y' = f(x, y)$ тенглама ёки

$$\frac{dx}{dt} = \varphi_1(x, y), \ \frac{dy}{dt} = \varphi_2(x, y)$$

тенгламалар системасининг интеграл чизиқлари оиласини фақат ўнг томондаги функциялар хоссаларига асосан текширишдан иборат. Пуанкаре (1878) уни ҳал қилиш бўйича анча ишлар қилди. Бу йўналишда у махсус нуқталар синфлари ва уларнинг аҳамиятини кўрсатди, интеграл чизиқларнинг махсус нуқталар атрофидаги хусусиятини текширди, лимитик цикл (ёпиқ интеграл чизиқ бўлиб, унга спираллар бўйича интеграл чизиқлар етарлича яқинлашади) тушунчасини киритди. Унинг ишларини швед математиги Ивар Отто Бендиксон (1861—1935) давом эттирди.

А. М. Ляпунов дастлаб П. Л. Чебишёв масаласи — суюқлик массасида эллипсоиддан фарқли мувозанат шакллар мавжудлигининг имкониятини топиш масаласи билан шуғулланиб, унинг ечимини 1903—1918 йилларда илмий нашрларда баён этди. Бу масаладан кейин у чекли сондаги параметрлар билан аниқланувчи механик система мувозанати ва ҳаракати турғунлиги тўғрисидаги муаммони ечишга ўтди (ечими унинг докторлик ишида акс эттирилган, 1892).

Америкалик математик Жорж Дейвид Биркгоф (1884—1944) ҳамда бошқа бир қатор олимлар динамик системалар умумий сифатий назарияси билан шуғулланиб, ечимни бутун мавжудлик соҳасида ҳамда махсус нуқталар атрофида ўргандилар. Эллиптик турдаги хусусий ҳосилали тенгламалар мавжудлик ва аналитиклигини рус математиги Сергей Натанович Бернштейн (1880—1968) тадқиқ этди.

Россияда дифференциал тенгламалар назариясини ривожлантиришда катта илмий ишлар амалга оширилди. Жумладан, Павел Сергеевич Александров (1896—1982) ва Виктор Владимирович Немицкий (1900—1967) Пеано теоремасининг янги исботини бердилар. Михаил Алексеевич Лаврентьев (1900—1980) ўнг томони бирор соҳада фақат узлуксизлик шартида ва унинг учун соҳанинг ҳеч қайси нуқтаси ечимнинг ягоналик нуқтаси бўлмайдиган биринчи тартибли тенглама мисолини тузди. Андрей Николаевич Тихонов (1906 йилда туғилган) кетма-кет яқинлашишларнинг янги усулини топди. Академик Иван Георгиевич Петровский баъзи чизиқли бўлмаган дифференциал тенгламалар системалари интеграл чизиқларининг махсус нуқталар атрофидаги хусусиятларини текширди. Александр Александрович Андронов (1901—1952) турли физик системалар автотебранишлари математик масалаларини тадқиқ этди. Чизиқли дифференциал тенгламалар чегаравий масалалари бўйича Марк Григорьевич Крейн (1907 йилда туғилган) илмий ишлар олиб борди.

Рус математиги Вячеслав Васильевич Степанов (1889—1950) дифференциал тенгламалар назарияси бўйича илмий ишлар олиб борди. шунингдек, В. В. Немицкий билан ҳамкорликда дифференциал тенгламалар назариясида сифат усулларининг қўлланилиши ҳақида «Дифференциал тенгламаларнинг сифатий назарияси» асарини ёзди. Унинг бу китоби оддий дифференциал тенгламалар назариясининг яратилишида ва ривожланишида катта роль ўйнади, китоб АҚШда босилиб чиқди. Б. В. Степановнинг «Дифференциал тенгламалар курси» ўқув қўлланмаси Давлат мукофотига сазовор бўлиб, ҳозирги кунда ҳам энг мукаммал ўқув қўлланмаларидан бири ҳисобланади. Мазкур дифференциал тенгламалар назарияси тарихи ҳам бу китобдаги тарихий маълумотлар асосида ёзилди.

Хусусий ҳосилали тенгламалар соҳаси бўйича Николай Максимович Гюнтер (1871—1941), Владимир Иванович Смирнов (1887—1974), М. А. Лаврентьев, А. Н. Тихонов, Николай Иванович Мусхелишвили (1891—1976), Илья Несторович Векуа (1907—1977) муҳим илмий натижаларга эришдилар. Сергей Львович Соболев (1908 йилда туғилган) математик физика ва сейсмология бўйича бир қатор масалаларни ҳал қилди.

ЧЕКСИЗ ҚАТОРЛАР ТАРИХИ

Мен математикага қўшилолмайман. Менинг фикримча, ноллар йиғиндиси — бу энг хавфли сон.

С. Е. Лец

Дифференциал ва интеграл ҳисобнинг яратилиши билан параллел равишда чексиз қаторлар қарала бошлади. 1668 йилда математик, астроном ва муҳандис Николаус Меркатор (1620—1687) логарифмларни ҳисоблаш усулларига бағишланган «Логарифмотехника» номли кичик бир асарнинг охирги бобларининг бирида, асимптоталарга нисбатан ёзилган $xy=1$ гиперболанинг квадратураси билан шуғулланади ва $x=1+a$ деб, гиперболанинг тенгламасини $y=\frac{1}{1+a}$ шаклда ёзади. Бўлиш йўли билан Меркатор геометрик прогрессия ёйилмасига эга бўлади:

$$\frac{1}{1+a}=1-a+a^2-a^3+\dots,$$

уни a бўйича ҳадма-ҳад интеграллаб, гиперболанинг юзи учун маълум бўлган

$$a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\dots$$

қаторни ҳосил қилади. У қаторнинг қўлланилиш соҳасини кўрсатмади.

Вильям Броукер (1620—1684)

$$\ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$$

хусусий формуланинг соф геометрик исботини берди.

Ньютон бундан бир оз олдинроқ чексиз қаторлар билан шуғулланиб, турли ифодаларни даражали қаторларга ёйиб, уларнинг флюксия ва флюэнталарини топишни даражалар устидаги амалларга олиб келди. У қаторни айлантиришга, яъни бир миқдорнинг иккинчи миқдорнинг даражалари бўйича ёйилмасидан иккинчисининг биринчи миқдорнинг даражалари бўйича ёйилмасини келтириб чиқаришга ҳаракат қилиб, логарифмик қатордан кўрсаткичли қаторни ҳосил қилди.

Ньютон чексиз қаторни алгебра тенгламаларини, дифференциал тенгламаларни ечиш учун ҳам қўллади. Бу қўлланган усул ўз моҳиятиға кўра аниқмас коэффициентлар усули эди.

Лейбниц ҳам 1693 йилда дифференциал тенгламаларни интеграллаш учун аниқмас коэффициентлар усулидан фойдаланган. $\frac{\pi}{4}$ сонини ифодаловчи

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

қатор ҳам биринчи марта 1682 йилда Лейбниц томонидан эълон қилинган. У И. Бернуллига ёзган хатларида йиғиндиларига «яқинлашадиган» қаторлар ҳақида сўзлайди, аммо шу билан бирга $1-1+1-1+\ldots$ қаторнинг йиғиндиси 1/2 га тенг деган фикрга қўшилади.

Чексиз қаторлар бўйича ака-ука Иоганн ва Якоб Бернуллилар шуғулланиб, Якоб (1689—1704) қаторлар бўйича қилинган ишлар баёнини берди. Иоганн, сўнгра Якоб

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

чексиз гармоник қаторнинг йиғиндиси чексизлигини исботладилар.

1715 йилда инглиз математиги Брук Тейлорнинг «Айирмалар усули, тўғри ва тескари» номли китоби чоп этилиб, унда чекли айирмалар қаралди ва сўнгра лимит ҳол деб чексиз кичик айирмаларга ва уларнинг нисбатига ўтилади, z нинг x функциясининг орттирилган қиймати учун z миқдорнинг v орттирмасининг даражалар бўйича ёйилмаси

$$x+\frac{v}{1}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{v^2}{1\cdot2}\cdot\frac{d^2x}{dz^2}+\frac{v^3}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{d^3x}{dz^3}+\dots$$

ни топади. Бу Тейлор қатори деб атала бошлади.

Маклорен 1742 йилда чоп этган «Флюксиялар ҳақида трактат» асарида бу формуланинг аҳамиятини очиб берди. Бу қаторни Маклорен бошқача усул билан келтириб чиқарди: у x нинг даражалари бўйича ёзилган, коэффицентлари аниқмас бўлган ёйилмани асос қилиб, уни такрор дифференциаллайди ва ҳар гал $z=0$ деб коэффицентларни кетма-кет аниқлайди. Шундай усулда биноминал қаторни келтириб чиқарди. Шунингдек, бу асарда: мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашувчи ва узоқлашувчи бўлишининг интеграл аломатини (геометрик шаклда, кейинроқ уни аналитик равишда Коши исботлаган); берилган кўринишдаги ҳадларнинг йиғиндисини бирор интегрални ҳисоблаш билан боғловчи Эйлер-Маклорен формуласини келтириб чиқарди (бу формулани у мустақил топган, Эйлер эса уни олдинроқ топган эди).

1730 йилдан бошлаб Эйлернинг қаторлар назарияси бўйича ажойиб ишлари босилиб чиқа бошлади. У биринчи бўлиб, лимитга ўтишни фараз қилиб, биномиал қатордан кўрсаткичли ва логарифмик қаторларни келтириб чиқарди. Ўша усул билан $\cos nz$ ва $\sin nz$ нинг маълум формулаларидан косинус ва синус учун қаторлар ҳосил қилди. У даражали қаторни кўпҳадга ўхшатиб кўпайтувчиларга ажратди, синус ва бошқа функцияларни чексиз кўпайтма кўринишда тасвирлади. Биринчи ҳадлари бир хил бўлган иккиҳадларни ўзаро кўпайтириш қоидасидан фойдаланиб,

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6};\quad 1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots=\frac{\pi^4}{90}$$

формулаларни ва шунга ўхшаш бошқа формулаларни топди.

Эйлер комплекс қаторларни ҳам текшириб, $\sin x$, $\cos x$, e^x лар учун қаторларини таққослаш орқали бу функцияларни боғловчи формулаларни келтириб чиқарди. Эйлер қаторларнинг фақат анализга эмас, балки алгебра, сонлар назариясига ва бошқа соҳаларга татбиқларини кўриб чиққан. Лекин қаторларнинг яқинлашиши масоҳаларига бепарволик билан қараган ва узоқлашувчи қаторларни бемалол қўллайверган, масалан,

$$\frac{n}{1-n} = n + n^2 + n^3 + \ldots, \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

ёйилмаларни қўшиб,

$$\ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + n^3 + \ldots$$

қатор 0 га тенг деган хулосага келади.

Узоқлашувчи қаторлардан фойдаланишга Даламбер қарши туриб, улар ёрдамида чиқарилган мулоҳазалар агар улар ҳақиқатга мос келса ҳам шубҳа билан қарар эди. Унингча, қатор аниқ бир жойгача яқинлашиб, фақат кейин узоқлаша бошлаши ва аксинча ҳам бўлиши мумкин.

Лагранж «Аналитик функциялар назарияси» (1797) асарида дифференциал ҳисобни «чекли миқдорларнинг алгебраик таҳлилига» келтиришга ҳаракат қилади, берилган $f(x)$ функция учун

$$f(x+i) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + \ldots$$

ёйилма ўринли деб фараз қилиб, бунда p, q, r, ... лар x нинг функциялари, «функциянинг кетма-кет ҳосилаларини» ушбу муносабатлардан фойдаланиб, ёйилманинг коэффициентлари орқали тўғридан-тўғри аниқлайди. Бу асарда Тейлор формуласининг қолдиқ ҳади учун формулани келтириб чиқарди, унинг вазифаси қаторнинг кейинги ҳадларини ҳисобга олмаслик натижасида ҳосил бўладиган хатони баҳолашни енгиллаштиришдан иборат.

Қаторнинг яқинлашишини Лагранж умумий ҳаднинг нолга интилишидан иборат деб тушунади, унда яқинлашувчи қатор йиғиндиси тушунчасининг таърифи йўқ. Француз математиги Фурье ўзининг «Иссиқликнинг аналитик назарияси» (1811 йил; 1822 йилда босилиб чиққан) асарида қаторнинг яқинлашишига ва унинг йиғиндисига тўғри таъриф берди, шу билан бирга қаторнинг яқинлашиши учун унинг ҳадлари нолгача «узлуксиз камайиши» мутлақо етарли эмаслигини таъкидлади.

1813 йилда Гауссниг

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \ldots$$

қаторга доир умумий текширишлар (бу «гипергеометрик» қатор деб аталади) асарида яқинлашиш аломатининг дастлабки тўғри таърифини берди ва келтирилган қаторнинг яқилашиши ҳақидаги масалани унинг ёрдамида ҳал этди.

Қатор йиғиндиси, унинг узоқлашувчи ёки яқинлашувчи бўлиши тушунчаларининг таърифлари лимит тушунчаларига асосланганн учун улар Больцано (1817 йил) ва Коши (1821 йил) ишларидан кейин вужудга келди. Улар қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи бўлишининг зарурий ва етарли шартини топдилар. Коши мусбат ҳадли қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун етарли бир неча содда ва қулай аломатлар топган. Сўнгра у Σa_n қаторнинг яқинлашишидан $\Sigma |a_n|$ қаторнинг яқинлашишини келтириб чиқарган. Бунда Коши ноабсолют яқинлашиш қаторнинг бошқа хоссаларига таъсир этишини аниқлаган.

Дирихле 1837 йилда абсолют яқинлашувчи қаторларда ўрин алмаштириш қонунининг борлигини таъкидлаган бўлса, Риман ноабсолют яқинлашувчи қатор бўлганда бундай алмаштириш натижасида яқинлашувчиликнинг бузилиши, йиғиндининг қиймати ўзгариши мумкинлиги каби хулосаларни тадқиқ этган.

Коши «Алгебраик анализ» (1821 йил) асарида ҳақиқий ва комплекс ўзгарувчили даражали қаторларни текшириб, яқинлашиш соҳаси, яқинлашиш радиуси ифодасини берди, асосламаган ҳолда у яқинлашиш оралигида қаторни ҳадма-ҳад дифференциаллайди. У функционал қаторлар соҳасида узлуксиз функциялардан тузилган яқинлашувчи қатор йиғиндиси узлуксиз эканини (1821) ва бундай қаторни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкинлигини (1823) қаторнинг яқинлашишига ҳеч қандай шарт қўймасдан исботламоқчи бўлади. Абель 1826 йилда

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots$$

қаторни мисол келтириб, Кошининг биринчи мулоҳазасини рад этади. Бу қатор x нинг ҳамма қийматларида яқинлашувчи, лекин унинг йиғиндиси $x = (2m + 1)\pi$ $(m \in Z)$ нуқталарда узилишга эга. Ҳадма-ҳад интеграллаш ҳақида (1845) П. Л. Чебишёв ҳам шубҳа билдириб, у фақат «хусусий ҳолларда» бўлиши мумкин деб фикр юритади.

Бу масалаларни чуқур ўрганишда 1841 йилда Вейерштрасс томонидан биринчи марта киритилган текис яқинлашиш тушунчаси катта роль ўйнади. Текис ва нотекис яқинлашишларнинг фарқ қилишини 1848 йилда немис математиги Филипп Людвиг Зайдель (1821—1896) ва 1849 йилда инглиз физиги ва математиги Жон Габриель Стокс (1819—1903) амалда кўрсатдилар.

Тригонометрик қаторлар механика масалаларини ечишда, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг ечимларини топиш жараёнида вужудга келди. Эйлер «Дифференциал ҳисоб» (1755 йил) асарида

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = \frac{\pi - x}{2}$$

ёйилмани келтиради. 1760 йили босилиб чиққан асарида

$$\frac{\cos x - a}{1 + a^2 - 2a\cos x} = \cos x + a\cos 2x + a^2\cos 3x + \ldots$$

ёйилмадан фойдаланиб ($a = \pm 1$ да),

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots = -\frac{1}{2},$$

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots = -\frac{1}{2}$$

қаторларни ҳосил қилди. Иккинчи қаторни ҳадма-ҳад интеграллаб, у

$$\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots = \frac{x}{2}$$

натижани ҳосил қилди.

Олдиндан берилган функция тригонометрик ёйилмасининг коэффициентларини топиш умумий масаласини Клеро (1757 йилда) баён этган. Бунда у 0 дан π гача оралиқда функцияни косинуслар қаторига ёйишни қарайди. Қаторнинг чекли n та ҳади билан чегараланиб, улар йиғиндисининг оралиқнинг n та тенг узоқликдаги нуқталарида функциянинг мос қийматларига тенг бўлишига эришди, бунда коэффициентлар маълум йиғиндилар кўринишида ҳосил бўлади. Сўнгра у «n ни чексиз деб олади» ва коэффициентларнинг интеграл ифодалар кўринишидаги «аниқ қийматларини топади». Худди шундай формулаларни 1777 йили Эйлер ҳадма-ҳад интеграллаш усули билан келтириб чиқарди. Лекин бу ишларда ихтиёрий функцияни шундай қаторга ёйиш мумкинми деган савол очиқ қолаётган эди.

Фурье 1822 йилда босилган «Иссиқликнинг аналитик назарияси» асарида Эйлер каби функциянинг тригонометрик ёйилмаси коэффициентлари учун интеграл формулаларни ҳадма-ҳад интеграллаш ёрдамида келтириб чиқарди, лекин Фурье ҳар қандай функцияни бундай ёйилмага ёйиш мумкин деган фикрга эга эди. Фурье жуфт $\cos x$ функцияни синуслар бўйича, тоқ $\sin x$ функцияни эса косинуслар бўйича қаторга ёйди.

Фурье функциянинг тригонометрик ёйилмаси тўғрилигини исботлашга уринган. Унинг чинакам жиддий исботини Дирихле (1829) берди. У, агар $f(x)$ функция $[-\pi, \pi]$ оралиқда аниқланган, чекли, бўлакли-узлуксиз ва бўлакли-монотон бўлса, унинг тригонометрик қатори

$$-\pi < x < \pi \text{ да } \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \text{ га,}$$

$$x = \pm\pi \text{ да эса } \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2} \text{ га}$$

яқинлашишлигини исбот қилди. 1834—35 йилларида Н. И. Лобачевский функцияга Дирихленикига қараганда бошқача шартлар қўйиб ёйиш теоремасини исботлади. У функцияни чекли сондаги сакраш нуқталаридан ҳамда функция ва унинг ҳосиласи у ёки бу томондан $\pm\infty$ га айланадиган чекли сондаги нуқталардан бошқа ҳамма ерда дифференциалланувчи ва асосий оралиқда интегралланувчи деб фараз қилади.

Тригонометрик қаторлар назарияси ривожида Риманнинг диссертацияси (1867 йилда нашр қилинган) муҳим аҳамиятга эга бўлди. У Фурье қаторларининг қўлланиш соҳасини кенгайтирди, яъни функциянинг узлуксиз бўлиш шарти керак эмаслиги аниқланди. Бу ишда Риман,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

тригонометрик қаторларни ўрганди ва 2π даврли ихтиёрий $f(x)$ функцияни шундай қатор сифатида тасвирлашнинг зарурий шартларини аниқлашга ҳаракат қилди. Риман юқоридаги қатор билан уни икки марта ҳадма-ҳад интеграллашдан ҳосил бўлган

$$\frac{a_0}{4}x^2 - \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

қаторни солиштириб, $a_n \to 0$ ва $b_n \to 0$ бўлса, кейинги қатор $(-\infty, +\infty)$ оралиқда текис яқинлашишини кўрсатди ва шу оралиқда узлуксиз $F(x)$ функцияни аниқлашини исботлади.

Энди функция тригонометрик ёйилмасининг ягоналиги масаласини ҳал қилиш лозим эди. Бу масала биринчи марта 1870 йили немис математиги Генрих Эдуард Гейне (1821—1881) томонидан қўйилди, ўша даврда Қантор уни тўла ҳал қилди. Қантор қуйидаги умумий теоремани исбот этди: агар $f(x)$ функцияни $[-\pi, \pi]$ оралиқда Фурье қаторига ёйиш мумкин бўлса, бундай ёйилма ягонадир.

Бу функциянинг ягона ёйилмаси коэффициентлари ҳамма вақт ҳам Фурье коэффициентларидан иборат бўлармикан деган саволга ижобий жавобни узлуксиз функциялар учун 1872 йилда итальян математиги Жулио Асколи (1843—1896) топган бўлса, 1874 йилда оддий маънода интеграллланувчи функциялар учун немис математиги Поль дю Буа-Реймон (1831—1889) топдилар. Кейинчалик бу натижа кенгроқ маънода интеграллланувчи функциялар учун ҳам исботланди.

Дирихленинг ҳар бир узлуксиз, даври 2π бўлган функция Фурье қаторига ёйилиши ҳақидаги масаласини 1876 йили дю Буа-Реймон ҳал қилишга уриниб, уни рад этувчи мисол тузди, бу шундай узлуксиз функция эдики, унинг Фурье қатори исталганча оралиқнинг чексиз кўп нуқталарида узоқлашувчи бўлади.

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА КЎП ЎЛЧОВЛИ ГЕОМЕТРИЯ

Алгебра ва геометрия — шундай ягона мамлакатларки, уларда жимлик ва тинчлик ҳукм суради.

М. Аньези

Чизиқли алгебра бўйича энг биринчи китоблардан бири Хитойда яратилган (милод. авв. 152 йилда Чжан Цан томонидан тузилган, сўнгра эрамизгача I асрда (Гэн Чоу-к), III асрда (Лю Хуэй), VI асрда (Чжень Луан) ва VII асрда (Ли Чуньфен), қайта ишланган ва тўлдирилган) (1957 йилда Э. И. Березкина русчага таржима қилган) «Тўққиз китобли математика» асари 246 та масала ва унинг ечимларини ўз ичига олиб, қуйидаги бўлимлардан ташкил топган:

1. Учишни ўлчаш.

2. Донли экинларнинг турлари орасидаги муносабат. (пропорционал бўлишга, сонларнинг тескари қийматларини топишга оид масалалар).

3. Зинапоялар усулида бўлиш.

4. Шао-гуан (тўғри тўртбурчакнинг берилган юзига ва томонига кўра унинг бошқа томонини аниқлаш).

5. Ишларни баҳолаш (деворлар қурилиши, дамба, миноралар қурилишидаги ҳисоблашлар).

6. Солиқларни адолатли тақсимлаш.

7. Ортиқча-камчилик (чизиқли тенгламалар, уларнинг системалари, ечиш усуллари) ва ҳ. к.

Бу бўлимда бешта чизиқли тенгламадан иборат системаларни ечиш усули берилган. Системаларни ечишда «фан-чэн» қоидасидан, яъни детерминантлар назарияси бўйича алмаштиришлар қўлланилган. Алмаштириш жараёнида матрицаларда манфий сонларни киритдилар. Қўшиш ва айириш учун «чжен-фу («плюс-минус)» қоидасидан фойдаланганлар. Ҳисоблашлар ҳисоб тахтасида олиб борилиб, манфий сонларни белгилаш учун бошқа рангдаги ёки шаклдаги ҳисоб таёқчаларн ишлатилган, ёзувда турли хил рангдаги иероглифлар қўлланилган.

Маълумки V—XII асрларда Ҳиндистонда математика фани тез суръатлар билан ривожланди. Бунда қуйидаги математиклар муҳим илмий натижаларни қўлга киритдилар: А р и а б х а т а I (476-тахминан 250 йил) (астроном ва математик, асосий асари «Ариабхатиам (499) да сонлардан квадрат ва куб илдиз чиқариш, тенгламаларни тузишга ва ечишга оид масалалар, хусусан, икки номаълумли бир тенглама, натурал сонларнинг кублари йиғиндиси ҳамда π нинг 3,1416 тақрибий қиймати келтирилган), Б р а м а г у п т а (Б р а х м а г у п т а) [598 — тахминан 660 йил) астроном ва математик, унинг асосий асари шеърий йўл билан ёзилган «Брама системасини қайта кўриб чиқиш» (628 йил) бўлиб, арифметика ва алгебрага бағишланган. Арифметик прогрессия таълимоти ва ҳақиқий ечимлар бўлган ҳолда (барча ҳоллар учун) квадрат тенгламаларни ечиш баён қилинган, аниқмас тенгламанинг бутун ечимларини билган, рационал томонларга эга бўлган тўғри бурчакли учбурчакларни тузиш қоидаси ҳамда π нинг $\pi\approx\approx\sqrt{10}$ шаклдаги тақрибий қиймати унга маълум бўлган], Магавира [(814/815—880) (математик, асосий асари «Математика қисқа китоби» бўлиб, унда сонни касрга бўлиш қоидаси биринчи марта учрайди, $ax+by=c$ шаклдаги аниқмас тенгламаларни мос бутун сонлар учлигини топиш қоидаси билан ечган, арифметик прогрессия ҳадларининг квадратлари ва кублари йиғиндисини топган, фоизга доир масалалар ечган ва ҳ. к.] Ариабхата II [(X аср) (астроном ва математик, унинг ишларида биринчи марта 9 сони билан кўпайтириш, қолдиқли бўлиш, квадрат ва куб илдизларни текшириш баёни берилган, тригонометрик жадваллар тузиш билан ҳам шуғулланган], Бхаскара II [(1114—1185) математик ва астроном, унинг асосий асари «Системанинг дурдонаси» (тахминан 1150 йил) бўлиб, унинг икки қисми «Лилавати» ва Виджаганити» математик жиҳатдан қизиқиш уйғотади: «Лилавати» 13 бўлимдан иборат: метрология, бутун ва касрлар устида амаллар ҳамда квадрат илдиз чиқариш, масалаларни ечишда тескарисини, бўлинмани топиш усули, турли масалалар, қатор йиғиндисини топиш, юз, турли ҳажмларни ҳисоблаш, чегараланмаган масалалар, тебранишлар масалалари.

«Виджаганити»: мусбат ва манфий сонлар устида амаллар; биринчи ва иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар; чизиқли алгебраик тенгламалар; квадрат тенгламалар; чизиқли тенгламалар системалари; иккинчи тартибли аниқмас тенгламалар]. Кўриниб турибдики, ҳинд математиклари ўз ишларида чизиқли алгебрани ривожлантиришда маълум натижаларга эришганлар.

Чизиқли алгебрани ривожлантиришда немис математиги Лейбницнинг хизматларини алоҳида таъкидлаб ўтиш мақсадга мувофиқ. Чизиқли тенгламалар системасини ёзишда у индекслардан фойдаланди, масалан, уч номаълумли учта чизиқли тенглама системасини қуйидагича ёзган:

$$\begin{cases} 10+11x+12y=0, \\ 20+21x+22y=0, \\ 30+31x+32y=0. \end{cases}$$

Шунингдек, у детерминант тушунчасини киритди ҳамда детерминантлар назариясига тааллуқли баъзи бир ғояларни таклиф этди.

Кейинчалик бу соҳада немис математиги Леопольд Кронеккер (1823—1891) иш олиб бориб, чизиқли тенгламалар системасини детерминантлар ёрдамида ечиш ва бунда индекслардан фойдаланиш йўлларини кўрсатди. Шунингдек, унинг номи билан ихтиёрий чизиқли тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш аломати аталади. Чизиқли тенгламалар системалари бўйича француз олими Этьенн Безу (1739—1783) «Гардемаринлар учун математика курси» асарида детерминантлар назариясини ривожлантириб, Эйлернинг йўқотиш усулини янада такомиллаштирди. У аниқмас кўпайтувчилар усулини тенгламалар системаларини ечишга татбиқ этди. Швейцариялик математик Габриель Крамер (1704—1752) 1750 йилда ҳарфий коэффициентли n та номаълумли n та чизиқли тенглама (чизиқли) системасини ечиш қоидаси (Крамер қоидаси)ни эълон қилди. Детерминантлар назариясига асос солди, лекин бунда ҳали у қулай белгилашлардан фойдаланмаган эди.

XIX асрда детерминантлар назарияси белгилашларини такомиллаштиришда француз математиги Александр Теофил Вандермонд (1735—1796) нинг хизматлари катта бўлди. У детерминант учун алоҳида белгилаш киритди ва бу билан мазкур назариянинг янада ривожланишига катта таъсир ўтказди. Француз математиги Огюстен Луи Коши (1789—1857) детерминантлар назариясини ривожлантирди, бунда детерминантларнинг асосий хоссаларини топди, хусусан, кўпайтириш теоремасини исботлади ва бу теоремани матрицаларга ҳам қўллади.

Париж академиясининг аъзоси Пьер Симон Лаплас (1749—1827) чизиқли тенгламалар системасини ечишда минорлар ва турли хил ўрин алмаштиришлардан фойдаланишни кўрсатди.

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) биринчи бўлиб детерминант атамасини киритди («Арифметика», 1801 йил). Немис математиги Карл Густав Якоб Якоби (1804—1851) детерминантлар назариясида баракали ижод қилиб, уни ривожлантиришда маълум ҳисса қўшди. Шунинг далолати сифатида унинг номи билан аталувчи матрица ва детерминантларни келтириш мумкин, функционал детерминантлардан ҳам у илмий ишларида кенг фойдаланди.

Чизиқли алгебранинг кейинги ривожи бевосита математик анализ ва гуруҳлар назариясининг қўлланиши билан боғлиқ.

Кўп ўлчовли геометриянинг асосий тушунчалари асосан Н. И. Лобачевский давридан бошлаб вужудга кела бошлади. Немис математиги Георг Фридрих Бернхард Риман (1826—1866) Лобачевский геометриясига асосланиб, уч ўлчовлидан зиёд бўлган фазонинг мавжудлигини исботлади.

Кейинчалик инглиз математиги Герман Гюнтер Грасман (1809—1877) «Узоқлик ҳақидаги таълимот» номли асарида кўп ўлчовли евклид фазолари ҳамда ихтиёрий векторларнинг скаляр кўпайтмасини киритди. Бошқача айтганда, у кўп ўлчовли фазода метрик муносабатларни ўрнатди.

Кўп ўлчовли фазонинг таърифини биринчи бўлиб инглиз математиги Артур Кэли (1821—1895) киритган бўлса, 1854 йилда Гёттинген университетида қилган машҳур маърузасида Риман кўп ўлчовли фазо ҳақидаги таълимотни янада ривожлантирди. Умумлашган риман фазоларининг киритилиши, янги риман геометриясининг пайдо бўлиши геометрия ривожида истиқболли йўлларни очиб берди.

Математиканинг муҳим бўлимларидан бири функционал анализ ҳам элементлари турли-туман табиатдаги объектлар, масалан, эгри чизиқлар ёки сиртлар, бир ёки бир неча ўзгарувчили узлуксиз функциялар, ҳақиқий сонларнинг чекли системалари ёки кетма-кетликлари бўлган фазолар билан иш кўриб, математикани назарий жиҳатдан такомиллаштиришда муҳим аҳамият касб этмоқда.

XIX асрнинг иккинчи ярмида физиканинг гуркираб ривожланиши ва техниканинг тараққиёти туфайли математика тез ривожланди. Геометрияда янги тушунчалар: вектор, тензор пайдо бўлди. Моддий системани характерлаш учун учтадан кўпроқ параметр талаб қилинади. Уч ўлчовли Евклид фазоси торлик қилиб қолди. Нисбийлик назариясида тўрт ўлчовли фазо қаралади, квант механикасида системанинг ҳолати чексиз ўлчовли миқдорлар билан ифодаланади. Математикада тўрт ўлчовли, n ўлчовли ва чексиз ўлчовли (функционал фазолар) фазоларни текширишга ўтилди.

АНАЛИТИК ВА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ

Декартнинг буюк иши—аналитик геометрияни яратиши алгебра ва геометрия орасида кўприк ясади.

С. И. Вавилов

Француз математиги ва ҳуқуқшуноси Пьер Ферма (1601—1665) аналитик геометрия асосчиси сифатида Декартга қараганда илгарироқ ва изчилроқ тўғри бурчакли координаталарни киритди, координаталар усулини баён қилди ва уни геометрияга татбиқ қилди, бунда тўғри чизиқ тенгламаси ва иккинчи тартибли эгри чизиқлар тенгламаларини келтириб чиқарди. 1636 йилда маълум бўлган «Текис ва фазовий ўринлар назариясига кириш» асарида қадимги юнон математиги Аполлоний Пергский ишларини давом эттириб, у тўғри чизиқларга биринчи даражали тенгламалар, коник кесимларга иккинчи тартибли тенгламалар мос келишини кўрсатди. У биринчи ва иккинчи даражали тенгламаларнинг умумий кўринишларини координаталарни алмаштиришлар орқали тадқиқ этди (координата бошини кўчириш ва ўқларни буриш). Агар тенгламада иккита номаълум миқдор қатнашса, у ҳолда улар геометрик ўринни ҳосил қилишини кўрсатди. Аполлонийнинг «Коник кесимлар» асаридаги иккинчи тартибли чизиқларни, масалан, $xy=2pl$ тенгламаларни ҳамда $p^2-(x+D)^2=$ $=(y+R)^2$ шаклдаги айлана тенгламаларини текширди.

Фермадан кейин аналитик геометриянинг асосчиларидан бири яна бир француз математиги Рене Декарт (1596—1650) ҳисобланади.

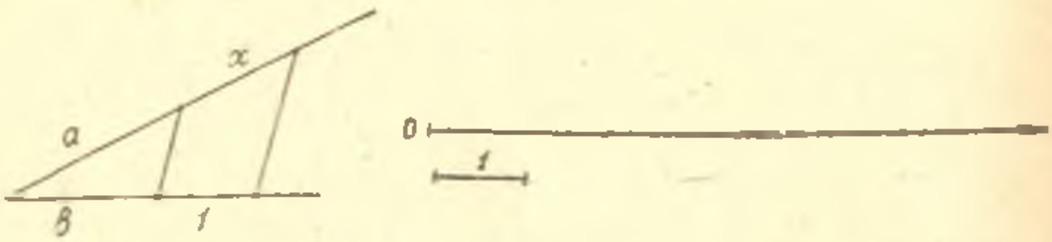
1637 йил голланд шаҳарчаси Лейденда 8 июнь куни Жан Мере босмахонасидан Р. Декартнинг «Метод ҳақида мулоҳаза» асари босилиб чиқди. Бу асарга учта илова: «Диоптрика», «Метеорлар» ва «Геометрия»ларни ёзиб, асарда илмий метод ҳақидаги мулоҳазаларни тушунтириш ва тавсифлашни улар орқали амалга оширишни кўзда тутган эди. «Диоптрика» да у икки муҳит чегарасида нурнинг синиш қонунини баён қилди ва уни асослади, унга таяниб камалак назариясини яратди. «Метеорлар»да эса у камалакнинг келиб чиқиш сабабларини тушунтирди, тажрибаларини баён қилди, шунингдек, булутлар, қор, дўл, чақмоқ ҳосил бўлиш қонунларини билишга, шамол табиатини текширишга ҳаракат қилди. Декартнинг асосий хизмати шундаки, у табиат ҳодисаларини фан ёрдамида тушунтирди.

«Геометрия» юқоридаги китобга учинчи илова бўлиб, олимнинг номини бошқа кашфиётларига қараганда кўпроқ шон-шуҳратга буркади. Декарт координаталар усулини яратди, унинг ёрдамида геометрия ва алгебра ўртасида мустаҳкам алоқа ўрнатди. Унинг алгебра масалаларини геометрия ёрдамида, ва аксинча, алгебра тенгламалари назариясини геометрик масалаларни ечишга қўллашга ўргатди.

«Геометрия»нинг асосий элементи кесма бўлиб ҳисобланади. Агар a кесмага b кесмани қўйсак, янги $a+b$ кесма ҳосил бўлади, бу a ва b кесмалар йиғиндисидан иборат. У ҳолда кесмалар кўпайтмаси ab ни қандай аниқлаш мумкин? Қадимги юнонларда ab томонлари a ва b бўлган тўғри тўртбурчак юзидан иборат эди.

Декарт бу кўп асрлик усулдан воз кечиб, ab — кесма эканлигини таъкидлайди, фақат бу кесма $x:a=b:1$ пропорциядан топилади. 23-расмда кўрсатилганидек, Декарт $x=ab$ кесмани ясади. Худди шундай, $x:1=a:b$ пропорциядан кўриниб турибдики, a кесмани b кесмага бўлиш мумкин.

Декарт абсциссалар ўқи — 0 саноқ боши ҳисобланган 0 нуқта белгиланган тўғри чизиқни киритиб, бирорта кесмани бирлик сифатида танлади, унинг ёрдамида ҳар қандай кесманинг узунлигини ўлчаш мумкинлигини кўрсатди. Демак, Декартда ҳар бир кесмага мусбат сон—

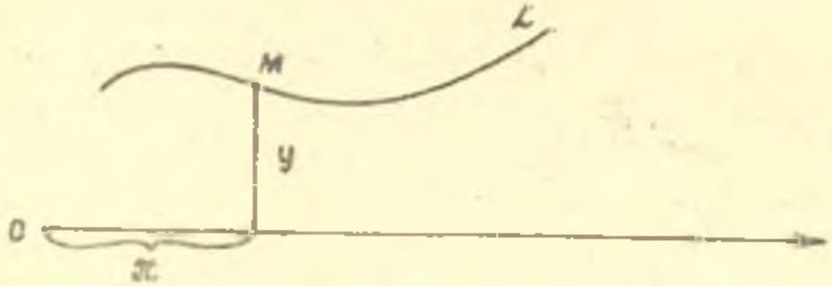


23-расм

унинг узунлиги мос қўйилади. У кесмалар устида амаллар бажарди, ўз моҳиятига кўра бу амаллар мусбат ҳақиқий сонлар устида бажарилаётган амаллар эди, яъни кесмалар узунликлари қўшилар, кўпайтирилар ҳамда бирининг узунлиги иккинчиси узунлигига бўлинар эди.

Абсциссалар ўқининг мавжудлиги чизиқлар ва тенгламалар ўртасида алоқа ўрнатишга имкон берди.

$F(x, y)=0$ алгебраик тенглама масалан, $3y-2x+3=0$ кўринишда бўлсин. Абсцисса ўқида узунлиги x га тенг бўлган кесмани қўямиз. $F(x, y)=0$ тенгламадан y нинг мос қийматини топамиз ва ўққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқда қўямиз. M нуқтани ҳосил қиламиз. x ва y лар M нуқтанинг координаталари деб аталади.



24-расм

Декарт хулоса қилади: агар x ўзгарса, унга мос y лар ҳам ўзгаради ва M нуқта ҳаракати давомида (24-расм) бирор L чизиқни ясайди, яъни $F(x, y)=0$, алгебраик тенгламага текисликда бирор L чизиқ мос келади.

Координаталар усули манфий сонларни геометрик тавсифлаш имконини яратди.

Декарт геометриясининг асосий ғояси шундан иборатки, чизиқларнинг геометрик хоссаларини уларнинг тенгламалари устида алгебраик алмаштиришларни бажариб ўрганиш мумкин.

«Геометрия»да Декарт ўзининг алгебраик тенгламалар назариясини баён қилди. У n-тартибли алгебраик тенглама n та илдизга эга деб таъкидлайди, бунда у мусбат, манфий ва комплекс («фараз қилинувчи») барча илдизларни ҳисобга киритади. Бу алгебранинг асосий теоремаси бўлиб, унгача XVII аср бошида П. Роте ва А. Жирар ҳам уни ифода қилишган эди.

Декартнинг бу китоби замондошлари томонидан қизиқиш билан кутиб олинди, лотин тилига таржима қилинди, қисқа муддат ичида тўрт марта қайта нашр қилинди. XVII асрда ҳар бир ижод билан шуғулланувчи математикнинг ўқув қўлланмасига айланди.

Декарт математика фақат алгебра тенгламалари билан берилган эгри чизиқлар билан шуғулланиши керак, чунки бошқа чизиқларни текшириш учун умумий усул мавжуд эмас деб ҳисоблар эди. Ваҳоланки, математикада алгебраик тенгламалар билан ифодаланмайдиган (трансцендент) чизиқлар: Архимед спирали, квадратриса, трактриса, циклоида ва бошқалар ҳам муҳим аҳамиятга эга.

Декартнинг бу чекланишини Ньютон ва Лейбниц бартараф этиб, XVII асрнинг иккинчи ярмида трансцендент чизиқларни текширишга умумий усулларни, шунингдек, координаталар усулини ҳам қўлладилар. Координаталар усули янада ривожланиб, сал кейинроқ, ординаталар ўқи пайдо бўлди, XVIII асрда стереометрия вужудга келди; XIX асрда «кўп ўлчовли» геометрия, XX асрда эса «чексиз» ўлчовли геометрия яратилди.

Геометрияни ўрганиш соҳасига Декарт шарнирли механизмлар ёрдамида бир ёки бир неча узлуксиз ҳаракатлари билан тасвирланадиган «геометрик» чизиқларни киритади, уларнинг кейинги ҳаракатлари олдингилари билан аниқланади. Трансцендент «механик» чизиқларни қарамайди, уларни ўрганиш учун усул йўқ деб ҳисоблайди. У текис чизиқларнинг бу икки синфининг кинематик тавсифини берди, «геометрик» чизиқлар тўғри бурчакли координаталар системасида алгебраик тенгламалар билан ифодаланишини аниқлади. У тенгламанинг даражаси координаталар системасининг танланишига боғлиқ эмаслигини кўрсатди. Шунингдек, Декарт ўз китобида текис чизиқларга нормаль ва уринмалар ўтказиш алгебраик усулини баён қилди ва 4-тартибли эгри чизиқларнинг баъзиларига қўллади. Унинг координаталар системаси мукаммал эмас эди, манфий абсциссалар қаралмаган эди. Уч ўлчовли фазонинг аналитик геометрияси деярли тадқиқ қилинмай қолди. Лекин шундай бўлса-да, унинг «Геометрия»си математика ривожига улкан таъсир ўтказиб, деярли 150 йил давомида алгебра ва аналитик геометрия Декарт кўрсатган йўналишлар бўйича ривожланди.

Декарт даврига келиб турли текис эгри чизиқлар тўғрисида жуда кўп маълумотлар тўпланди (текис эгри чизиқ ҳамма нуқталари битта ва фақат битта текисликка тегишли бўлган чизиқдир). Уларни синфларга ажратиш лозим эди. Декарт бу ишни бошлади. Коник кесимлар, шу жумладан, айлана иккинчи тартибли алгебраик тенгламалар билан ифодаланиши мумкин эканлиги аниқланди. Уларни шунинг учун иккинчи тартибли эгри чизиқлар деб атай бошлади.

Энди учинчи тартибли, сўнгра тўртинчи ва ҳ. к. тартибли тенгламаларни қараш навбати келган эди. Ньютон учинчи тартибли тенгламаларга мос келувчи барча эгри чизиқларни улар (72 турдан иборат бўлди) синфларга ажратди. Клод Алекси Клеро (1713—1765) ўн икки ёшлигида тўртинчи тартибли эгри чизиқларни синфларга ажратишга уринди ва бу ҳақда биринчи илмий ишини ёзди.

Бундан кейин аён бўлдики, барча мумкин бўлган текис чизиқлар — улкан тўплам, уларни синфларга ажратиш жуда қийин, ҳар бирини алоҳида ўрганиш эса умуман мумкин эмас. Бундан ташқари, жуда кўп маълум ва амалий зарур эгри чизиқларни декарт координаталарига нисбатан алгебраик тенгламалар билан ифодалаш мумкин эмас. Бундай чизиқларга тригонометрик функцияларнинг графиклари, квадратрисa, Архимед спирали ва ҳ. к. лар мисол бўла олади. Булар текис чизиқлар эди, фазовий чизиқлар учун бу иш яна ҳам қийинлашади. Декартнинг аналитик геометрияси эгри чизиқлар ва сиртларни ўрганиш учун етарлича умумий усулларни бера олмади, ундан кучлироқ бошқа восита топиш лозим бўлиб қолди, бу дифференциал бўлиб чиқди.

Дифференциаллар ёрдамида барча эгри чизиқлар ва сиртларни уларнинг маълум шартлар бажарилмайдиган нуқталаридан бошқа барча нуқталарида текшириш имконияти мавжуд. Лекин бу шартлар оғир. Аввало эгри чизиқ ва сиртларнинг дифференциалланувчи функциялар билан берилган қисмлари қаралар эди, маълумки, дифференциалланувчанлик шарти кўп ҳолларда, кўпинча, ҳатто оддий ҳолларда ҳам бузилади. Аммо бу шартлар етарли эмас. Агар эгри чизиқ ва сиртни вектор функциялар билан берсак, у ҳолда бу функцияларнинг биринчи ҳосилалари нолга тенг бўлмаслигини талаб қилишга тўғри келар эди ҳамда бу нуқталарни алоҳида қараш лозим. Бошқа чеклашлар ҳам пайдо бўлади. Балки бу усулдан оддийроқ усул мавжуддир деган савол туғилади.

Бу саволга Давид Гильберт ва Стефан Кон-Фоссен (1902—1943) нинг «Кўргазмали геометрия» асаридан жавоб топиш мумкин. Тўртинчи боб «Дифференциал геометрия» да дифференциал тушунчасини қўлламасдан эгри чизиқлар ва сиртларнинг кўп хоссалари баён этилган, бунда исботлар ўрнида у ёки бу даражадаги ишончли кўргазмали мулоҳазалар ишлатилган.

Дифференциал геометрияда «ҳаракатланувчи каноник «репер» атамаси мавжуд. Бунинг маъноси французча «репер», яъни «белги», ёки ўрганилаётган нарсада уларни бошқасидан ажратиш учун қўйиладиган белгидан иборат. Эгри чизиқда бундай белгини қандайдир координаталар системаси ўйнайди. У ҳар бир нуқта учун алоҳида мавжудлиги, яъни эгри чизиқ бўйича гўё ҳаракатланганн учун репер «ҳаракатланувчи» дейилади. «Каноник» сўзи эса юнонча «канон», яъни «қоида» маъносини беради. Бошқача айтганда, репер ҳамма вақт битта ва фақат битта геометрик қонуният асосида топилади: реперинг боши эгри чизиқнинг қаралаётган нуқтасида жойлашади, $\vec{l_1}$ вектор уринма бўйича, $\vec{l_2}$ — асосий нормаль бўйича, $\vec{l_3}$ — бинормаль бўйича йўналган бўлади. Каноник репер формулаларини бир вақтда француз математиги Жан Фредерик Френе (1816—1900) ва Жозеф Альфред Серре (1819—1885) топишган.

Москва Давлат университети профессори Сергей Павлович Фиников (1883—1964) ва Париж университети профессори Эли Жозеф Картан (1869—1951) ҳам дифференциал геометрия бўйича муҳим илмий натижаларга эришдилар. Картан математиканинг бошқа соҳалари бўйича шуғулланиб, катта ютуқларга эришиш билан бирга дифференциал геометрия муаммоларини ҳал қилиш учун ҳаракат қилган. Картан ва Фиников ишларида ҳаракатланувчи репер назарияси шундай ривожлантирилдики, уни нафақат эгри чизиқлар ва сиртларга татбиқ этибгина қолмай, балки мураккаб геометрик образлар учун ҳам қўллаш мумкин бўлиб қолди.

Ҳар бир фаннинг ижодкорлари бўлади, дифференциал геометрияда булар Л. Эйлер ва Г. Монж эди. Эйлернинг 800 дан зиёд илмий ишлари орасида махсус геометрияга бағишланганлари кўп эмас. «Чексизлар анализига кириш» асарининг иккинчи томи «Сиртлар ҳақида илова»да иккинчи тартибли сиртлар синфларга ажратилган. У биринчи бўлиб, уч фазовий координатага нисбатан иккинчи тартибли тенгламалар билан берилган ва конус бўлмаган барча сиртлар беш хил турга келтирилиши мумкинлигини кўрсатди, булар эллипсоид, гиперболоиднинг икки тури, эллиптик параболоид, гиперболик параболоидлардир. Эйлер бир системадан иккинчи декарт системасига ўтиш формулаларини киритиб, бу сиртлар тенгламаларини энг оддий усулда ёзиш мумкинлигини кўрсатди. 1760 йилда ёзилган «Сиртлар эгрилиги ҳақида тадқиқотлар» асарида энг умумий кўринишдаги сиртнинг ихтиёрий нуқтасидаги эгрилиги ҳақидаги масала кўриб чиқилган ва сиртнинг ички «хоссалари»ни кўрсатувчи инвариантни топишга ҳаракат қилинган, яъни шундай хоссаларики, улар сиртнинг берилиш усулига ва координаталар системасининг танланишига боғлиқ эмас.

Эйлердан кейинги қадамни француз математиги Гаспар Монж қўйди. У 1801 йилда босилиб чиққан «Император политехник мактабида қўллаш учун мўлжалланган анализнинг геометрияга татбиқи» асарида сиртни $z=z(x, y)$ тенглама кўринишида беради. Монж бу ишида бир вақтнинг ўзида ҳам сиртлар назариясини, ҳам дифференциал тенгламалар назариясини яратиш билан шуғулланади. Тенгламалар ва сиртларни бир вақтда синфларга ажратиш учун ҳаракат қилиб, ўзининг ички инвариант хоссаларига эга бўлган бир қатор сиртларни ва уларга мос келувчи дифференциал тенгламаларни топди. Масалан, $rt-s^2=0$ тенглама билан аниқланувчи сирт бирор фазовий эгри чизиқнинг барча уринмаларига тегишли бўлган нуқталар тўплами билан аниқланади. Бу сирт деб ҳам аталади. Монж сиртларнинг турли синфлари дифференциал тенгламаларини ҳосил қилди, ҳар бир синф хоссаларини баён қилди, лекин сиртларнинг умумий назариясини ярата олмади.

Монжнинг шогирдлари ва кўпгина математиклар эски усуллар ёрдамида сиртларни тадқиқ этишни давом эттирдилар, лекин янги бурилиш ясаш учун янги даҳо зарур эди. Бу Гаусс бўлиб чиқди.

XVIII асрни математиклар Эйлер асри деб аташади. XIX асрнинг биринчи ярмида математикада йўлбошчи бўлиб К а р л Ф р и д р и х Г а у с с (1777—1855) ҳисобланар эди. Уни кўпинча лотинча тахаллус билан «princeps mathematicorum», яъни «математиклар қироли» ҳам дейишар эди. Гаусс Гёттинген (Германиядаги кичик бир шаҳарча) университети профессори ва расадхонаси директори бўлиб ишлар эди. 1737 йилда ташкил этилган мазкур университет профессорлари орасида машҳур математиклар Б. Риман, Ф. Клейн, Д. Гильберт, Г. Вейль ҳам турли вақтларда ишлашган. 1828 йилда босилиб чиққан «Эгри сиртлар ҳақида умумий тадқиқотлар» асарида у сиртнинг эгрилиги тушунчасига биринчи марта тўғри таъриф берди, сиртда ётувчи чизиқлар эгриликлари билан унинг алоқасини боғланишини топди ва бу эгрилик ҳақида муҳим теоремани исботлади. Монжда сирт тенгламаси $M=0$ шаклда, бунда M—x, y, z ўзгарувчилар функцияси бўлса, Гауссда координаталар икки эркли ўзгарувчининг функцияси сифатида қаралади, бу эса сиртнинг $\overline{r}=\overline{r}(u, v)$ вектор-функция кўринишида берилиши билан тенг кучли. Лекин у пайтда ҳали на вектор ва на вектор функция тушунчалари яратилмаган эди, ҳақиқатда эса Гаусс уларда фойдаланиб, ихтиёрий сиртлар хоссаларини текширар эди.

Дифференциал геометрия ривожи амалиёт талаблари билан боғлиқ бўлиб, бу талаблардан дифференциал геометрияга таянувчи иккита фан — геодезия—ер сиртидаги ўлчашлар ва бу сиртнинг шакли ва ўлчамлари ҳақидаги фан, картография — ер сиртини текисликда барча ўлчамларини минимал қисқартириш орқали тасвирлаш ҳақидаги фан юзага келди. Гаусс ихтиёрий эгри сиртда ўлчашлар ҳақидаги масалани ечганлиги унинг геодезия билан шуғулланганлигидан далолат беради.

Гausсning ғояларини умумлаштириш Б. Риман томонидан унинг 1854 йилда ўқилган «Геометрия асосида ётувчи фаразлар ҳақида» номли маърузасида (кейинчалик бу маъруза 1868 йилда чоп этилган) амалга оширилди. Бизнинг давримизда Риман геометрияси ҳозирги замон дифференциал геометриясининг муҳим соҳаларидан ҳисобланади. Ҳозирги замон дифференциалланувчи кўпхилликлар назарияси асосида Риман ғоялари ётади, шунинг учун у сиртлар назарияси асосида ҳам ётади.

ЎЗБЕКИСТОНДА МАТЕМАТИКА РИВОЖИ

Ўзбекистонда математика фани ривожланиши Ўрта Осиё давлат университетининг очилиши билан бевосита боғлиқ, миллий мутахассисларнинг етишиб чиқишида бу масканни ташкил этишга ёрдамга келган рус математиклари ўз ҳиссаларини қўшдилар. Булар орасида Всеволод Иванович Романовский (1879—1954)нинг хизматлари алоҳида аҳамиятга эга. У эҳтимоллар назарияси ва математик статистика билан шуғулланиб, бу соҳа бўйича Марков занжирларини текширишда аналитик ва алгебраик усулларини қўллади. Шу билан бирга Тошкентда эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўйича мактаб яратилишига асос солди. Ўз шогирдлари билан математиканинг статистиканинг татбиқларига доир ишларни эълон қилди. Ўзбекистон Республикаси Фанлар академиясининг математика институти унинг номи билан аталади.

Республикамизда математиканинг ривожланишида биринчи ўзбек математикларидан бири Т о ш м у ҳ а м м а д Н и ё з о в и ч Қ о р и Н и ё з и й (1896—1970) муҳим ишларни амалга оширди. Ўзбек математика атамашунослигининг шаклланишига катта ҳисса қўшди. Ўзбек тилида математика бўйича ўқув қўлланмалари ёзди: «Математик анализнинг асосий курси» ва «Аналитик геометрия асосий курси» (1937) китобларидир.

Энди В. И. Романовскийнинг икки шогирди тўғрисида ҳикоя қиламиз. Ҳақиқатан, улар иккаласи ҳам Фарғона водийсида туғилиб ўсган ва ўзбек математикаси ривожланишига салмоқли ҳисса қўшган олимлардир. Булар Т о ш м у ҳ а м м а д А л и е в и ч С а р и м с о қ о в (1915—1995) ва С а ъ д и Ҳ а с а н о в и ч С и р о ж и д д и н о в (1921—1989).

Т. А. С а р и м с о қ о в Ўрта Осиё давлат университетини 1936 йилда тугатиб, 1942 йилда физика-математика фанлари доктори, профессор даражаларига эришди. ТошДУ ректори бўлиб, 1943—45 ва 1952—58 йилларда ишлади. 1946—52 йилларда Ўзбекистон ФА президенти ва 1959 йилдан маълум муддат олий ва ўрта махсус таълим вазири бўлиб ишлади. Кейинги йилларда ТошДУ профессори, математика институти профессори лавозимларида фаолият кўрсатиб келди. 75 йиллиги муносабати билан Меҳнат Қаҳрамони унвонига сазовор бўлди, 1943 йилдан академик, 1948 йилда Давлат мукофотига, 1967 йилда (М. Я. Антоновский ва В. Г. Болтянский билан биргаликда) Ўзбекистон Республикаси Беруний давлат мукофотига сазовор бўлган. Асосий ишлари эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўйича. Марков занжирлари ва унинг татбиқларини математик анализ масалаларини ҳал қилишда қўллади, В. И. Романовскийнинг текширишнинг матрица усулини чекли, саноқли ва ҳолатларнинг узлуксиз тўпламига эга бўлган Марков занжирларига қўллади. Топология бўйича ярим тартибланган топологик ҳалқалар, Буль алгебраси ва унинг татбиқлари бўйича илмий тадқиқотлар олиб борди. Топологик яриммайдонлар ва яриммайдонларни метрикалаштириш назариясини яратди. 1954 йилда унинг «Марков жараёнлари назарияси асослари» монографияси чоп этилган.

С. Х. Сирожиддинов 1942 йилда Ўрта Осиё давлат университетини тугатган, 1953 йилда физика-математика фанлари доктори, 1956 йилда профессор унвонларига эришган. 1954—56 йилларда МДУ да ишлади, 1956 йилда ТошДУда, 1957—67 йилларда Ўз ФА математика институти директори, 1966—70 йилларда ва 1983 йилдан ТошДУ ректори лавозимларида ишлади. 1970—83 йилларда Ўзбекистон Республикаси ФА вице-президенти бўлиб фаолият кўрсатди. Функциялар назарияси, эҳтимоллар назарияси ва математик статистика бўйича илмий ишлар олиб борган. Бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган Марков занжирлари назариясига катта ҳисса қўшган. Шунингдек, эҳтимоллар назариясининг амалий татбиқлари билан шуғулланган. 1956 йилдан Ўз-ФА мухбир аъзоси, 1966 йилдан эса ҳақиқий аъзо бўлиб фаолият кўрсатган. 1970 йилда Ўзбекистонда хизмат кўрсатган фан арбоби, 1973 йилда Беруний номли Давлат мукофотига сазовор бўлган.

Ўзбекистонда хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар, тақрибий ва сонли усулларни ривожлантиришда Маҳмуд Салоҳитдинович Салоҳитдинов (23.11. 1933 йилда туғилган)нинг илмий ишлари муҳим аҳамият касб этади. Кўп йиллар давомида (1967—85 йиллар) математика институти директори, Ўзбекистон Республикаси ФА президенти лавозимларида фаолият кўрсатди. 1974 йилда «Аралаш-мураккаб турдаги тенгламалар» монографияси босилиб чиқди ва бир нечта ўқув қўлланмалари муаллифи, айниқса, ўзбек тилида ёзилга «Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси» ўқув қўлланмаси (ҳамкорликда) математикларни тарбиялаб етиштиришда катта роль ўйнамоқда. 1974 йилда Беруний давлат мукофотига сазовор бўлган.

Ўзбекистонда кибернетикани ривожлантиришда академик Восил Қобулович Қобулов (1921 йил 5 сентябрда туғилган) нинг хизматлари улкан. У 1966 йилдан кибернетика институти ва ҲМ да директор бўлиб ишлаб келмоқда, республикада бу соҳа бўйича илмий кадрларни етиштириб чиқаришда муҳим ишларни амалга ошириб келмоқда. Асосий ишлари ҳисоблаш ва амалий математика. механика масалаларига бағишланган.

Тошкент Давлат университетида эҳтимоллар назарияси ва математик статистика ҳамда оптимал бошқариш ва дифференциал ўйинлар бўйича муҳим илмий натижаларга эришган Турсун Абдураҳимович Азларов (1938 йил 15 февралда туғилган) ва Нуъмон Юнусович Сотимов (1939 йил 15 декабрда туғилган) ўзбек математика фанини ривожлантиришда ва бу соҳалар бўйича миллий мутахассислар етиштириш бўйича самарали ишларни амалга ошириб келмоқдалар.

70- йиллардан сўнг ўзбек математикаси ривожида бир қатор ёш математикларнинг фанда эришган ютуқлари катта аҳамиятга эга бўлди. Булардан бири Шавкат Орифжонович Алимов (2.03.1945 йилда туғилган), 1968 йилда МДУ ни тугатган, 1973 йилда физика-математика фанлари доктори, 1974 йилда профессор унвонларига эришди. 1974—84 йилларда МДУ да ишлади, 1984—85 йилларда ТошДУ ва математика институтида, сўнгра эса 1985 йилдан СамДУ ректори, ТошДУ ректори ва республика олий ва ўрта махсус таълими вазири лавозимларида ишлади. Асосий ишлари операторлар спектрал назарияси ва математик физиканинг чегаравий масалаларига бағишланган. 1985 йилда Беруний номли давлат мукофотига сазовор бўлган.

Самарқанд давлат университети ҳам ўзбек математика мактабининг ривожланишида ва миллий математикларни тарбиялаб етиштиришда ўз ҳиссасини қўшиб келмоқда. Университетда математикадан илмий тадқиқотларни ривожлантиришда Ўзбекистон республикаси ФА мухбир аъзоси Исаак Самойлович Куклес (1905—1977) нинг хизматлари катта бўлди. У 1947 йилдан СамДУда ишлай бошлади ва Самарқандда дифференциал тенгламалар сифат назарияси бўйича мактаб яратди. У Самарқанд математика жамияти ташкилотчиси ва раиси эди. Ҳозирги кунда мазкур университетда Ш. Шарипов, А. Ортиқов, Ш. Ёрмуҳамедов, С. Лақаев, А. Ҳайдаров, А. Ҳотамов, С. Отақулов, Х. Худойназаров, Х. Нарзуллаев каби математика бўйича фан докторлари фаолият кўрсатмоқда.

Ал-Хоразмий ватани бўлмиш Ўзбекистон истиқлолга эришганидан сўнг мактаб ва олий ўқув юртларида математика таълимини ривожлантириш, фанни, жумладан математика фанини ривожлантириш бўйича катта ишлар амалга оширилмоқда. Бу ишларнинг меваси ўлароқ математика фанини юксалтириш учун ҳақиқий жонбозлик кўрсатадиган, улкан илмий натижаларга эришадиган атоқли математикларнинг етишиб чиқиши турган гап.

XX АСРДА МАТЕМАТИКА ЎҚИТИШ ҲАҚИДА

Математикани ўрганиш ўлмас худоларга яқинлаштиради

Платон

XX аср бошларида «Ягона меҳнат мактаб ҳақидаги Низом» ва «Ягона меҳнат мактаби асосий принциплари» ҳужжатлари бўйича ягона меҳнат мактаби икки босқичли: I—IV ва V—IX синфлар қилиб белгиланди. Ўша даврда ўрта мактабнинг янги кўриниши — ишчи факультетлари пайдо бўлди.

1924 йилда ўрта мактабнинг юқори босқичи (8 ва 9-синфлар) ҳунар-касбларга йўналтириш ишини бошлади.

1917—1920 йилларда меҳнат мактаби учун ягона дастур йўқ эди. 1920—1924 йилларда эса тахминий, мажбурий бўлмаган дастур нашр этилди. Улар жуда қийин бўлиб, жуда кўп материални ўз ичига олар эди. Дастурларнинг такомиллашмаганлиги, тажрибада синалмаган янги ўқитиш усуллари (лойиҳалар усули, бригада — лаборатория усули) нинг киритилиши ўқувчилар математик тайёргарлигининг умумий савиясига салбий таъсир кўрсатди.

Шу билан бирга янги умумий таълим мактабида математик таълимни ривожлантириш бўйича илмий ва методик ишлар олиб борилди. Масалан, 1923 йилда А. В. Ланковнинг I-босқич математика ўқитувчилари учун «Меҳнат мактабида математика», Н. А. Извольскийнинг «Геометрия методикаси», 1925 йилда А. М. Воронецнинг «Юқори босқичли мактабларда математика методикасидан очерклар», 1927 йилда М. И. Шохор-Троцкийнинг «Бошланғич математика курси методикаси» (1-қисм) китоблари босилиб чиқди. Киевда эса 1925 йилда К. Ф. Лебединцевнинг «Замонавий математика методикасига кириш» номли китобининг биринчи қисми нашр қилинди. Унда математика ўқитишда конкрет-дедуктив усулнинг муҳимлиги таъкидланади. А. Д. Астрябнинг бошланғич геометрик тасаввурларни шакллантиришга ҳамда геометрия дарсларида амалий ишларга бағишланган китоблари ҳам катта аҳамиятга эга бўлди.

Ўзбекистонда дастлаб биринчи, иккинчи, учинчи ва тўртинчи ўқув йили учун алоҳида «Ҳисоб» дарслikлари Қаҳҳор, Ислом, Мусовер Одилов томонидан яратилган. 1927 йилда «Табиатдан бир лавҳа» —, 1929 йилда Т. Н. Қори Ниёзийнинг «Тўғри чизиқли тригонометрия ва унинг космографияга татбиқи» дарслик-қўлланмалари чоп этилди.

1931 йил 25 августдаги «Бошланғич ва ўрта мактаб ҳақида» қарорда мактаб дастурларини кўриб чиқиш, шу асосда барқарор дастурлар ишлаб чиқиш таъкидланди.

1932—35 йилларда математикадан биринчи ўқув дастури ва барқарор дарсликлар қабул қилинди, шу асосда мактабларда математика ўқитила бошлади. Бу тадбир кўп йиллар давомида математик таълимнинг барқарор бўлишига олиб келди. Дастур умуман олганда ўқувчиларни олий мактабга киришга тайёрлаш мақсадини кўзда тутар эди. V синфда асосан касрлар ва геометрия бўйича бошланғич маълумотлар берилар эди. VI синфдан алгебра ва геометрия систематик курси ўргантила бошланган, у VII синфда давом эттирилган. VIII синф дастурига даражалар ва илдизлар, квадрат функция ва унинг графиги, биквадрат ва иррационал тенгламалар, иккинчи тартибли тенгламалар системалари ҳамда геометрия бўйича пропорционал кесмалар, ўхшашлик, учбурчакда ва айланада метрик муносабатлар, тўғри тўртбурчакли шакллар юзлари, ўткир бурчакнинг тригонометрик функциялари киритилган эди. IX синфда алгебра бўйича прогрессиялар, даражанинг умумлашган тушунчаси, логарифмлар, тақрибий маълумотлар устида арифметик амаллар ўрганилган бўлса, геометрияда айлана узунлиги ва доира юзи, тўғри чизиқлар ва текисликларнинг ўзаро жойлашиши ўрганилар эди, X синфда айланма жисмлар ва кўпёқлар сиртлари ва ҳажмлари формулаларини келтириб чиқариш киритилган эди. Алгебра бўйича бирлашмалар назарияси ва Ньютон биноми ўрганилар эди, комплекс сонлар ўрганиш киритилган эди, иккиҳадли ва қайтар тенгламалар ечилар эди. Тригонометрия бўйича учбурчакларни ечиш, тескари тригонометрик функциялар, тригонометрик тенгламалар, геометрия бўйича масалаларни тригонометрияни қўллаш орқали ечишни ўз ичига олар эди. Бу дастурда функцияларни ўрганишга эътибор берилмаган эди, олий математика элементлари киритилмаган, геометрик алмаштиришлар ғояси акс эттирилмаган эди.

1935 йил дастурига ўтиш барқарор дарсликлар ва уларга оид масалалар тўпламлари яратилишига олиб келди. V—VI синфлар учун арифметика бўйича И. Г. Поповнинг дарслиги ва Е. С. Березанскаянинг масалалар тўплами, алгебра бўйича А. П. Киселёвнинг дарслиги ва Н. А. Шапошников ва Н. К. Вальцев масалалар тўплами қабул қилинди. Геометрия бўйича барқарор дарслик бўлиб Ю. О. Гурвиц ва Р. В. Гангнуснинг китоби ва Н. А. Рибкиннинг масалалар тўплами қабул қилинган эди. 1938 йилда геометрия бўйича А. П. Киселёвнинг дарслиги қўллана бошлади. Арифметика бўйича ҳам А. П. Киселёв дарслиги қабул қилинди. Тригонометрия бўйича эса Н. А. Рибкиннинг дарслиги ва масалалар тўплами ишлатила бошланди.

30—40-йилларда ўқитувчилар касб тайёргарлигини ошириш мақсадида ўқитишнинг муҳим масалалари бўйича П. С. Александров, А. Н. Колмогоров, И. В. Арнольд, В. Л. Гончаров, Я. С. Дубнов, А. И. Маркушевич, Л. А. Люстерник Н. Ф. Четверухин ва бошқаларнинг китоб ва илмий мақолалари босилиб чиқди. Шунингдек, услубиётчилар И. И. Чистяков, В. М. Брадис, Н. Н. Никитин, А. И. Фетисов, П. А. Ларичев, И. А. Гибш ва бошқаларнинг мактабда математика ўқитиш тажрибасига бағишланган ишлари эълон қилинди.

Урушдан кейин 1952—1958 йилларда мактаб математика курси мазмунини қайта кўриб чиқиш, уни эскирган материаллардан халос қилиш бўйича ишлар амалга оширила борди. Таълимни ҳаёт билан алоқасини кучайтириш, ўқувчиларни амалий мазмундаги билим ва кўникмалар билан қуроллантириш бўйича изланишлар олиб борилди. Янги ўқув дастурларининг лойиҳалари ишлаб чиқилиб, тажрибадан ўтказилди. Мазкур дастурлар 1954—55 ўқув йилидан жорий этилди.

Бу дастурларнинг муҳим фарқли хусусияти арифметикадан бир хил турдаги масалаларнинг чиқарилиши, алгебра курсида функционал йўналишнинг кучайтирилганлигидир. Геометрияни ўқитишда ўқувчиларнинг ясаш кўникмаларини, фазовий тасаввурларини ривожлантиришга эътибор берилди. Ҳар бир синф бўйича амалий ишлар рўйхати берилди.

Барқарор дарсликлар сифатида 1954 йилдан бошлаб V—VI синфлар учун С. А. Пономарёв ва Н. И. Сирнев ларнинг масалалар тўплами ва 1956 йилдан бошлаб эса И. Н. Шевченконинг арифметика дарслиги қўлланила бошлади. Алгебра бўйича 1948/49 ўқув йилидан П. А. Ларичёвнинг масалалар тўплами ишлатила бошлади. 1956 йилдан VI—VIII синфларда алгебра бўйича А. Н. Барсуковнинг дарслиги, геометрия бўйича Н. Н. Никитин дарслиги ва Н. Н. Никитин, Г. Г. Маслов-ларнинг масалалар тўплами ўқитила бошлади. Юқори синфларда С. И. Новоселовнинг тригонометрия бўйича дарслиги ва П. В. Стратилатовнинг масалалар тўплами қабул қилинди.

1958 йилда математикадан ўқув дастурига ўзгартиришлар киритилди. Арифметика курсига «Тақрибий ҳисоблашлар» мавзуси киритилди, ўнли касрларни ўрганишга ажратилган вақт кўпайтирилди.

VI—VIII синфлар алгебра курсида функционал йўналиш кучайтирилди, VI синфга функция тушунчаси киритилди, VIII синфда эса логарифмик чизгич ўрганилар эди.

Бу синфлар геометрия курси анъанавий материал билан бирга оддий жисмлар сиртлари юзлари ва ҳажмларини ҳисоблашга доир масалаларни ўз ичига олган эди.

Юқори синфлар алгебра ва элементар функциялар курсида функциялар ҳаётий жараёнлар билан боғлиқ ҳолда ўрганилиб, уни текширишга ҳосила татбиқи кўриб чиқилар эди, шунингдек, биномиал формула, интеграл тушунчаси ва унинг баъзи шаклларнинг юз ва ҳажмларини ҳисоблашга қўлланилиши қараб чиқилар эди. Геометрия бўйича эса асосий ўринни геометрик алмаштиришлар эгаллар, учбурчакдаги метрик муносабатлар векторларнинг скаляр кўпайтмаси билан тўлдирилар. Н. Ф. Четверухин томонидан ишлаб чиқилган проекцион ясашга оид масалалар системаси стереометрия курсида кўриб чиқилар эди.

Ўқувчиларнинг математикага бўлган қизиқишларини ошириш, уларнинг математик қобилиятларини ривожлантириш мақсадида синфдан ташқари машғулотларга эътибор кучайтирилди. Бу соҳада мактабларда математика тўгараклари ва уларнинг янги кўринишлари ривожлантирилди.

Математикадан мактабдан ташқари уюштирилган тадбирлардан турли савияда ўтказиладиган математик олимпиадалар муҳим аҳамиятга эга бўлди. Бу муҳим ишда кўплаб математиклар фаол қатнашдилар.

1966 йилдан бошлаб мактабда математика таълимини фан, техника ва маданиятнинг ривожланиш талаблари билан мувофиқлаштириш, барча ўқитиш босқичларида фанларнинг узвий алоқадорлигини таъминлаш, ўқиш йилларига материални рационал тақсимлаш, IV синфдан фанларни ўқитишни бошлаш, ўқув режасини ва дастурини иккинчи даражали материаллардан халос этиш иши бошланди. Шунга кўра янги ўқув дастури ишлаб чиқилди.

IV—V синфларда арифметика ва геометрия бўйича бошланғич маълумотлар ҳамда манфий сонлар, ҳарфий белгилашлар, оддий тенгламаларни ечиш қаралар эди.

VI—VIII синфларда алгебра курси, IX—X синфларда алгебра ва анализ асослари курси ўрганиладиган бўлди. Геометрия курси VI синфдан бошлаб мунтазам ўрганила бошланди.

Янги дастур бўйича дарсликлар яратилди: IV—V синфларда математика ва VI—VIII синфларда алгебра А. И. Маркушевич таҳрири остидаги дарсликлар бўйича; геометрия бўйича VI—VIII синфлар учун геометрия, алгебра ва анализ асослари А. Н. Колмогоров таҳрири остидаги дарсликлар билан, IX—X синфлар геометрияси З. А. Скопец таҳрири остидаги дарсликлар бўйича ўқитила бошлади.

Мазкур дастурларга ўтиш 1970/71 ўқув йилидан бошлаб амалга оширилди. Кўпгина мактабларда янги дастурларга ўтиш 1974—75 ўқув йилида тугалланди.

1966 йил мактаб ислоҳининг асосий хусусиятларидан бири ўқув режаси соатларига VII—X синфлар ўқувчилари учун факультатив машғулотларнинг киритилиши бўлди. Бу курслар математикани чуқур ўрганиш ва ўрта мактаб баъзи тушунчаларини кенгроқ ўтишга мўлжалланган эди.

Янги дастурлар билан ўқитиш тажрибаси унинг умуман мувофиқлигини кўрсатган бўлса-да, асосан материалнинг кўплиги оқибатида вужудга келган камчиликлар мавжудлигини намоён қилди. Академик Л. С. Понтрягин раҳбарлигидаги комиссия иши натижалари бўйича дастурга янги ўзгаришлар киритилди. Чунончи, тўпламлар назарияси тушунчалари чиқариб ташланди. Геометриядан ўқув қўлланмаси сифатида VI—X синфлар учун А. В. Погореловнинг дарслиги қабул қилинди. Шунингдек, бошқа дарсликлар ҳам қайтадан ишлаб чиқилди. Лекин бу ишлар математика ўқитишдаги қийинчиликларни бартараф этишга олиб келмади.

1984 йилдан мактабда математик таълимни ривожлантириш ишининг мазмуни қайта кўриб чиқила бошлади. Шу асосда маълум тадбирлар амалга оширилди, математика бўйича базис ўқув режаси, мактабда математика таълими концепцияси ишлаб чиқилди ҳамда мактаблар учун параллел математика дарсликлари қабул қилинди.

Ўзбекистон мустақилликка эришганидан сўнг халқ таълими тизимини миллий истиқлол, республикамизнинг буюк келажагини яратувчи ҳозирги ёшларга пухта, жаҳон андозаларига мос билимлар бериш бўйича катта ишлар бошлаб юборилди, жумладан математика фани бўйича янги таълим концепцияси, янги дастур қабул қилиниб, Республикамизнинг кўп йиллик тарихий, илмий ва маданий меросига йўғрилган ва бугунги кун талабларига жавоб бера оладиган дарсликлар яратиш ва чоп этишга киришилди.

ҲОЗИРГИ ЗАМОН МАТЕМАТИКАСИ ЙЎНАЛИШЛАРИНИНГ ЯРАТИЛИШИ ҲАҚИДА

Элементар математикани агар ўзгармас миқдорлар математикаси, кейинги давр математикаси — ўзгарувчи миқдорлар математикаси деб ҳисобласак, ҳозирги замон математикаси имконлар, умуман олганда, ўзгарувчилар, миқдорий муносабатлар ва миқдорлар орасидаги ўзаро боғланишлар математикаси ҳисобланади

А. Д. Александров

Гуруҳлар назарияси

Гуруҳлар назариясининг яратилиши алгебраик тенгламаларни ечиш тарихи билан боғлиқ. Шунинг учун дастлаб учинчи ва тўртинчи даражали алгебраик тенгламаларни ечишга оид тарихий маълумотларни келтирамиз.

Италиялик монах Лука Пачоли 1494 йилда чоп этилган «Арифметика йиғиндиси» китобида арифметика, алгебра ва тригонометрия бўйича ўша даврдаги маълум бўлган билимларни баён қилиш билан бирга, $x^3+mx=n$, $x^3+n=mx$ кўринишдаги тенгламаларни ечиш фаннинг ҳозирги аҳволида доира квадратурасини ечиш сингари мумкин эмаслигини таъкидлаб ўтади. Шундан бошлаб Болонья университети математиклари бу муаммони ҳал қилишга киришдилар.

Юқоридаги тенгламаларни қуйидаги уч кўринишдаги

$$x^3+px=q, \qquad x^3=px+q, \qquad x^3+q=px$$

тенгламаларга олиб келиш мумкин, бунда p ва q — мусбат сонлар. Бу тенгламалар профессор Сципион дель Ферро томонидан батафсил текширилди ва уларнинг ечимлари топилди. У ўз ечимларини нашр этмади ва фақат бир нечта дўстига бу ҳақда сўзлаб берган эди. Унинг вафотидан (дель Ферро 1526 йилда вафот этган) кейин бу кашфиётлар венециялик уста Тарталья томонидан (1535 йил) қайта кашф қилинди. Олинган натижаларни эълон қилиб, у уларни қандай ҳосил қилганлигини сир сақлаб юрди. Ниҳоят, ўзининг мулоҳазаларини Миланлик доктор олим Иероним Карданога айтиб берди, Кардано эса ўз навбатида уни сир тутишга қасам ичди. Аммо, Карданонинг 1545 йилда босилиб чиққан «Буюк санъат» китобида кашфиёт муаллифи хизматларини баён қилган ҳолда Тартальянинг усули тўла очиб берилган эди. Икки томон ўртасида тортишув кетди. Карданонинг ҳимоячиси Людовик Феррари эди. Бу тўқнашув оқибатида бир нечта қизиқ ҳужжатлар дунёга келди, булар масалан, Тартальянинг «Саволлар» и (1546), Феррарининг «Чақирувлар»и (1547—1548 йиллар), бу ҳужжатлар машҳур кашфиётнинг бутун тарихини очишга имкон беради.

Ҳосил қилинган формула Кардано номи билан юргилади ва $x^3+px=q$ тенглама бўлган ҳолда қуйидаги кўринишга эга:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}-\frac{q}{2}}$$

Карданонинг «Буюк санъати» бошқа бир ажойиб кашфиётни: умумий кўринишдаги тўртинчи даражали тенгламани учинчи даражали тенгламага келтиришнинг Феррари усулини ҳам ўз ичига олган эди. Феррари тенгламаси $x^4+6x^2+36=60x$ кўринишда бўлиб, Кардано уни $y^3+15y^2+36y=450$ тенгламага келтиради. Кардано «келтириб бўлмайдиган ҳол» деб аталувчи илдизларни, яъни мавҳум илдизлар мавжуд бўлган ҳолларни қарай олмаган эди.

Бу қийинчилик ўн олтинчи аср болоньялик математикларининг энг охиргиси Рафаэл Бомбелли томонидан 1572 йилда босилиб чиққан «Алгебра» асарида ҳал қилинди. У мавҳум ва комплекс сонлар назариясини ишлаб чиқди, бу эса келтириб бўлмас ҳолларда ҳам тенгламаларни ечиш мумкинлигини исботлади.

Шундан кейин математиклар авлоди бешинчи тартибли тенгламаларни ечиш учун ҳаракат қилдилар. Норвег математиги Нильс Генрик Абель (1802—1829) шундай ҳаракатдан бошлаб, бу масала ечимга эга деган хато фикрга келади, сўнгра 1824 йилда бешинчи даражали тенгламалар радикалларда ечилиши мумкин эмаслигини исботлади. Бунда тенгламаларнинг коэффициентлари эркли ўзгарувчи миқдорлар деб фараз қилинади. Унинг усули шундан иборатки, радикаллардан тузилган умумий кўринишдаги ифодалар қаралади ва уларнинг ҳеч бири бешинчи даражали ихтиёрий тенгламани қаноатлантирмаслиги исботланади. Шунга қарамасдан, бу ечимни топиш ҳаракатлари тўхтамади. 1851 йилда вафот этган берлинлик педагог Мейер—Гирш бу соҳада ақлдан озган эди. Ҳозирги кунда ҳам бу ҳаракатлар тўхтаганича йўқ.

Бу йўналиш бўйича муҳим қадамни француз математиги Эварист Галуа (1811—1832) қўяди, у 1831 йилда эллиптик функциялар устида амалга ошириладиган бешинчи тартибли алмаштиришлар G_{60} гуруҳи бешинчи даражали тенгламаларга олиб келишлиги ҳақидаги теоремани исботлади, яъни ҳар қандай ҳолда ҳам модуляр функцияларда ечиладиган бешинчи даражали тенгламалар мавжудлигини кўрсатди.

1858 йилда Эрмит, сўнгра Кронекер элементар усуллар ёрдамида бешинчи даражали умумий кўринишдаги тенгламани эллиптик модуляр функцияларда ечиладиган кўринишга келтириш мумкинлигини кўрсатган бўлсалар, кейинроқ, 1861 йилда бу соҳада Кронекер яна ҳам муҳим натижаларни қўлга киритди. Риман ва

Ф. Клейнгина бешинчи даражли тенгламаларни ечишнинг моҳияти икосаэдр тенгламасида эканлигини аниқладилар (Бу ҳақда Ф. Клейннинг «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени» номли китобидан батафсил маълумот олиш мумкин).

Кўриниб турибдики, алгебраик тенгламаларни ечиш назариясининг ривожланиши тарихида гуруҳлар Галуа томонидан кенг қўлланилган эди. Лекин унгача гуруҳ тушунчасида амаллар қаралаётган тенгламанинг n та $x_1, x_2, \ldots, x_n$ илдизларидан тузилган n ўрин алмаштиришлари сифатида тушунилар эди. Лагранж биринчи бўлиб 1770 йилда иккинчи, учинчи, тўртинчи даражали тенгламаларни радикалларда ечиш чинакам тушунарли бўлиши учун икки, уч ва тўрт ҳарфлардан тузилган ўрин алмаштиришлар гуруҳи тузилишини билиш зарурлигини таъкидлаган эди. Лагранждан кейин Коши ҳам n та ҳарфдан иборат ўрин алмаштиришлар гуруҳлари билан шуғулланиб, бу ҳақда кўпгина ажойиб теоремаларни исбот қилди.

Галуанинг ишларидан сўнггина алгебраик тенгламалар назариясида гуруҳлар (группалар) назарияси марказий ўринлардан бирини эгаллади ва унинг ўзи «гуруҳ» атамасини биринчи бўлиб киритди.

Галуанинг асосий ютуғи шундан иборат эдики, у умумий ҳолда инвариант қисм гуруҳ тушунчасини ва учинчи, тўртинчи даражали тенгламалар учун Лагранж бажарган тадқиқотларни англади, уни ихтиёрий даражали тенгламаларни ечишнинг умумий назариясигача кенгайтирди.

Бу ишларга қарамасдан гуруҳлар назариясига умумий эътибор Камил Жорданнинг 1870 йилда босилиб чиққан «Ўринга қўйишлар ва алгебраик тенгламалар назарияси бўйича асар» китобидан сўнг янада авж олди. Бу китобда қаралаётган муаммо чуқур ва изчил баён этилган. Унда Жордан турли ўрин алмаштиришлар гуруҳларини излаб, алгебраик геометрия, сонлар назарияси ва функциялар назарияси масалаларини кўриб чиқди. Кейинчалик ўрин алмаштиришлар гуруҳлари назарияси мустақил фан сифатида ривожланди. Бу фан бўйича Кели, Силов, Дик, Гёльдер, Фробениус, Бернсайд каби математиклар, кейинги даврда кўплаб америкалик математиклар илмий ишлар олиб бордилар.

Гуруҳлар назариясини ривожлантиришда норвег математиги Софус Мариус Ли (1842—1899) ва немис олими Феликс Христиан Клейн (1849—1925) нинг хизматлари катта. Ли 1870 йилда узлуксиз гуруҳлар назариясига асос солди ҳамда унинг геометрия, механика ва топологияда синфларга ажратиш принципи сифатидаги аҳамиятини баён этди. Клейн эса 1872 йилда ёзилган «Янги геометрик тадқиқотлар таққосламаси» ёки «Эрланген дастури» ишида ҳар бир геометрик алмаштиришлар махсус гуруҳ инвариантлари назарияси ҳисобланишини кўрсатди, гуруҳни кенгайтириб, ёки қисқартириб, бирор геометрия туридан бошқасига ўтиш мумкинлигини аниқлади: Евклид геометрияси — метрик гуруҳ инвариантлари ҳақидаги фан бўлса, проектив геометрия проектив гуруҳ инвариантлари ҳақидаги фандир. Алмаштиришлар гуруҳини синфларга ажратиш геометрияларни синфларга ажратишга олиб келади. У дискрет гуруҳлар, уч ўлчовли фазо мунтазам кўпёқлар симметриялари гуруҳини тадқиқ этди. Умуман олганда бу икки математик гуруҳлар назариясининг математиканинг турли соҳаларидаги тутган ўрнини аниқлашда муҳим илмий натижаларга эришдилар.

Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси

Комплекс сонлар XVI асрда пайдо бўлган бўлса, фақат XVIII асрга келибгина Эйлер комплекс ўзгарувчили функциялар назариясини ишлаб чиқишга киришди. У даражали қаторлар, чексиз кўпайтмалардан фойдаланиб муҳим илмий натижаларга эришди. Бунда Эйлер кўрсаткичли ва тригонометрик функциялар орасидаги боғланиш формуласини келтириб чиқариш билан бирга, комплекс ўзгарувчи бўйича интеграллаш билан шуғулланиб, $\int f(z)dz = [M + Ni][dx + idy]$ функциядан олинган интеграл ушбу иккита $\int Mdx - Ndy$, $\int Ndx + Mdy$ интегрални ҳисоблашга келтирилишини таъкидлади. Бундан эса қуйидаги шартлар келиб чиқади: $\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial x}$. Шундай қилиб, комплекс ўзгарувчили функциянинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларидан олинган хусусий ҳосилалар орасидаги муносабатлар топилган эди.

Мазкур функциялар назариясини такомиллаштириш ва мустақил илмий соҳага айлантиришда Коши ва Риманнинг илмий хизматлари катта.

Коши бу соҳа бўйича қуйидаги муаммоларни ҳал қилишда асосий ишларни бажарди:

1. Комплекс соҳадаги ёпиқ эгри чизиқлар бўйича интеграллаш. Ёпиқ эгри чизиқ бўйича бир қийматли комплекс функциялардан олинган интеграл ҳақидаги машҳур Коши теоремаси $\int f(z)dz = 2\pi i\Sigma k$ (k — бунда C эгри чизиқ ичида ётган аналитиклик бузилган алоҳида нуқталардаги вичетлар) ни яратишда аввало у тўғри тўртбурчак томонлари бўйича интеграллашдан бошлаб, унинг қарама-қарши учларини туташтирувчи турли иккита йўлни қаради. Сўнгра берилган нуқталарни бирлаштирувчи ихтиёрий эгри чизиқ бўйича интеграллашни тадқиқ этди. Теореманинг охирги кўриниши 1840 йилда яратилди, лекин бу масалага оид натижалар 1825 йилда чиққан «Мавҳум чегаралар орасида олинган аниқ интеграллар тўғрисидаги мемуар»да эълон қилинган. Коши бу теореманинг аҳамиятини чуқур тушуниб, унинг кўплаб татбиқларини қараб чиқди.

2. Яқинлашиш оралиги ихтиёрий бўлган комплекс ўзгарувчили функцияни яқинлашиш оралиги энг яқин махсус нуқтагача бўлган масофага тенг даражали қаторга ёйиш. Бу теорема 1831 йилда «Турин мемуарлари»да босилиб чиқди. У 1837 йилда Кориолисга ёзган хатида бу ҳақда ёзган эди. Коши бу масалани ечиш жараёнида чекли йиғиндилар билан иш кўриб, уларни тақрибий формулалар сифатида қаради ҳамда қолдиқ ҳадни аниқ баҳолади. Теорема кейинчалик 1843 йилда Лоран (берилган соҳада ихтиёрий бир қийматли $f(x+iy)$ функция, соҳа иккита энг яқин махсус нуқтаси билан аниқланувчи чегаравий айланаларга эга бўлган ҳалқа ичидан иборат бўлса, у $x+iy$ аргументнинг мусбат ва манфий даражалари бўйича қаторга ёйилишини кўрсатди) ва 1850 йилда Пюизё «тармоқланиш нуқталари»да функция аргументнинг каср даражалари бўйича қаторга ёйилишини исботлади) томонидан янада умумлаштирилди.

Риманнинг бу соҳа бўйича асосий ишларига тўхталиб ўтайлик.

1) 1859 йилда босилиб чиққан «Берилган миқдордан ошмайдиган туб сонлар сони ҳақида» асарида риман дзета-функцияси ζ $(G+it)$ бирор аналитик ифода — чексиз кўпайтма билан берилади, сўнгра кўпайтма қандайдир аниқ интегралга алмаштирилади ҳамда унинг қиймати

интеграллаш йўлини силжитиш орқали топилади. Буларнинг ҳаммаси Кошининг функциялар назарияси доирасида бутунлай жойлашади.

2) «Абель функциялари» (1857 йил) асарининг иккинчи қисмида p та ўзгарувчили тэта-қаторларни киритди.

3) Риман ўзининг функциялар назариясида даражали қаторлар билан иш кўрди. Унгача Лагранж ўзининг «Аналитик функция назарияси» (1797) асарида қаторларни асос сифатида қараган, бунда у аналитик функция деб даржали қаторга ёйиш мумкин бўлган функцияларни атайди. Лекин у қаторлар билан формал равишда иш кўрар, уларнинг яқинлашишига эътибор қилмас эди.

Риман 1851 йилда ёзилган диссертацияси «Комплекс ўзгарувчили функциялар умумий назарияси асослари»да ҳамда абель функцияларига бағишланган ишида ва 1857 йилда босилиб чиққан «$F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ гаусс қатори билан тасвирланувчи функциялар назариясига доир» номли ишларида аввало комплекс ўзгарувчили $f(z)$ функция таърифини беради: агар узлуксизлик ва дифференциалланувчанлик шартларида қуйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

тенгликлар бажарилса, $w=u+iv$ миқдор $x+iy$ аргументнинг комплекс ўзгарувчили функцияси деб аталади, булардан $\Delta u=0, \Delta v=0$ келиб чиқади. Бу шартлар Коши-Риман шартлари ҳам деб аталади. Лекин улар Ф. Клейннинг фикрича, улардан олдинроқ ҳам маълум эди, масалан, Даламбер ишларида ҳам учрайди. Лекин Римаппинг асосий хизмати шундаки, бу формулаларни у математик физика ва геометрия масалаларини ечишга қўллади.

Риман аналитик функция деб, Коши—Риман шартларини ҳисобга олиб қандайдир бошланғич соҳадан узлуксиз давом эттиришдан ҳосил бўлган функцияни атайди.

Ўзгарувчининг фақат ва фақат битта қиймати $x+iy$ учун турли йўллар бўйича давом эттириш $u+iv$ га турли хил қийматлар берганлигидан ва конформ акслантиришлар мавжудлигидан Риман риман сирти деб аталувчи сирт тушунчаси (бу сирт текисликка ёки унинг бирор қисмига кўп марталаб тахланган қатламлардан иборат сиртдир)ни киритди. Бу тушунча орқали кўп қийматли функциялар соҳасидаги қийинчиликлар бартараф этилди. Энди соҳа сифатида қаралувчи риман сиртида (бу соҳада функция берилган) оддий текисликда бажариладиган барча амалларни бажариш имконияти вужудга келди, масалан, интеграллаш йўлларини силжитиш мумкин.

Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси бўйича Вейерштрасс аналитик функцияларни риман сиртида ўрганди, «аналитик образ» тушунчасини киритди. У текисликда яқинлашувчи даражали қатор билан берилган ва рационал бўлмаган бутун функцияларни тадқиқ этиб, $z=\infty$ нуқта атрофида чексиз сонда константага айланмайдиган ҳар қандай бутун функция чексиз сонда олдиндан берилган ихтиёрий қийматига етарлича яқинлашади деган теоремасини исботлади.

Математиканинг бу соҳаси тараққиётида рус математикларидан И. И. Привалов (1891—1941) (у Н. Н. Лузин билан биргаликда аналитик функциялар назариясининг чегаравий хоссалари ва чегаравий масалаларини тадқиқ этди, бир қатламли функциялар назариясини текширишга биринчи бўлиб асос солди, субгармоник функциялар бўйича илмий ишлар олиб борди, «Комплекс ўзгарувчили функциялар назариясига кириш» китоби муаллифи), Михаил Алексеевич Лаврентьев (1900—1980) (конформ акслантиришлар бўйича қатор теоремаларни исботлади, риман сиртлари синфларининг янги хоссаларини топди, конформ акслантиришларда вариацион принциплардан фойдаланиш соҳаси бўйича илмий ишлар бажарди, квазиконформ акслантириш тушунчасини киритди ва квазиконформ акслантиришлар назариясининг асосий теоремасини исботлади (1948)) ва Алексей Иванович Маркушевич (1908—1979) (аналитик функциялар назариясида функционал анализ усулларининг қўлланилишига доир илмий ишларни бажарди, «Аналитик функциялар назарияси» ва «Аналитик функциялар назарияси қисқача курси» китоблари муаллифи) маълум ишлар қилдилар.

Интеграл тенгламалар назарияси

Математикада интеграл тенгламаларни биринчилардан бўлиб норвег олими Абель тадқиқ этган. У 1826 йилда ёзилган «Трансцендент функцияларнинг фавқулодда кенг синфи тўғрисида мемуар» ишида Абель теоремасини баён этди. Бу теорема эллиптик интегралларни қўшиш теоремасининг умумлашмасидан иборат бўлиб, умумий гиперэллиптик ёки абель интеграллари деб аталувчи $R(x, y)dx$ интеграллардир, бунда x ва y ихтиёрий $F(x, y)=0$ алгебраик тенглама билан боғланган деб фараз қилинади. Бундай интеграллар йиғиндиси тўла аниқланган p та шундай интеграллар йиғиндиси билан ифодаланадики, бунда p шу $F(x, y)=0$ тенгламанинг табиатига боғлиқ бўлади. 1827—28 йилларда эълон қилинган «Эллиптик функциялар бўйича тадқиқотлари» да Абель биринчи тур эллиптик интеграллари $\int \frac{dx}{\sqrt{f_4(x)}}$ ни тескарилантириш муаммолари ечимларини баён этди ($f_4(x)$—4-тартибли кўпҳад).

Абелнинг ишларини ривожлантиришда академик Николай Яковлевич Сонининг (1849—1915) «Аниқ интегралларга тааллуқли баъзи тенгсизликлар ҳақида» асари муҳим аҳамиятга эга бўлди, Абелнинг ишлари умумлаштирилди.

1896 йилда итальян математиги Вито Вольтерра (1860—1940)

$$\int_a^x N(x, s)\varphi(s)ds = F(x), \quad \varphi(x) + \int_0^x N(x, s)\varphi(s)ds = F(x)$$

кўринишдаги интеграл тенгламаларнинг умумий назариясини яратувчи илмий ишларни эълон қила бошлади. Бу тенгламалар биринчи ва иккинчи тур «Вольтерра интеграл тенгламалари» деб ҳам атала бошлади, бунда $\varphi(x)$ изланаётган функция, $N(x, s)$, $F(x)$ функциялар эса маълум функциялардир. Турғунлик назарияси масалаларини еча туриб, интегро-дифференциал тенгламалар тузди ва уларнинг ечиш усулларини кўрсатди.

1900—1903 йилларда швед математиги Эрик Ивар Фредгольмнинг (1866—1927).

$$\int_a^b N(x, s)\varphi(s)ds = F(x), \quad \varphi(x) + \int_a^b N(x, s)\varphi(s)ds = F(x)$$

кўринишдаги тенгламаларни тадқиқ этган илмий ишлари пайдо бўлди. Улар Вольтерра тенгламаларидан интегралларда чегараларнинг иккаласи ҳам ўзгармас сонлардан иборат эканлиги билан фарқ қилади. Шундай қилиб, Фредгольм биринчилардан бўлиб интеграл тенгламаларни тадқиқ этишга киришди ва Фредгольм тенгламаларини ечишнинг умумий усулларини ишлаб чиқди.

Кейинги йилларда интеграл тенгламалар ҳамда интегро-дифференциал тенгламалар назарияси бўйича бошқа математиклар, маълум ишларни бажариб, бу соҳани ривожлантиришда ўз ҳиссаларини қўшиб келмоқдалар.

Ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назарияси

XIX асрнинг 70—80 йилларида Георг Кантор яратган чексиз тўпламлар назарияси математиканинг кўп соҳалари, айниқса, ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назариясини ривожлантиришда катта роль ўйнади. Бу назариянинг илмий соҳа сифатида шаклланишида француз математика мактаби вакиллари Эмиль Борель (1871—1956), Рене Бэр (1874—1932) ва Анри Лебег (1875—1941) катта ҳисса қўшдилар. Бунда Борель (1898) ва Лебег (1902) томонидан киритилган чизиқли нуқтали тўплам ўлчови тушунчаси ва аниқ интегралнинг Лебег томонидан умумлаштирилиши муҳим аҳамиятга эга бўлди.

Лебег интегралининг татбиқ доираси Риман интегралиникига қараганда кенгдир. Унинг ёрдамида бошланғич $F(x)$ функцияни чегараланган ҳосиласи $F'(x)$ бўйича ҳамма вақт қайта тиклаш мумкин, яъни $F(x) = (L) \int_a^x F'(x)\,dx + C$. Бу интеграл, шунингдек, чегараланмаган функциялар учун ҳам қўлланилиши мумкин, бунда интеграл абсолют яқинлашувчи бўлади.

Ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назариясининг ривожида Москва математика мактаби асосчилари Д. Ф. Егоров ва академик Н. Н. Лузиннинг ҳам хизматлари катта. Д. Ф. Егоровнинг 1911 йилда яратилган ўлчовли функцияларнинг текис яқинлашиши ҳақидаги теоремаси бу математика мактаби ишларининг бошланғич нуқтаси бўлиб хизмат қилди. Н. Н. Лузиннинг «Аналитик тўпламлар ва уларнинг татбиқлари ҳақида маърузалар» асарида ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назариясини ривожлантириш ғоялари акс эттирилган эди.

Нуқтали тўплам ўлчови тушунчаси асосидаги функциялар назарияси функцияларнинг метрик назарияси деб ҳам аталади. Тўпламларнинг дескриптив назариясига, яъни оралиқлардан (тўғри тўртбурчаклардан ва ҳ. к.) бир қатор содда амаллар бажариш натижасида ҳосил бўладиган нуқтали тўпламларнинг тобора мураккаблашиб борадиган синфларини ўрганадиган назариясига асосланган функцияларнинг дескриптив назариясига Бэр (1899) ва Лебег (1905) асос солиб, узлуксиз функцияларнинг тузилиши ва хоссалари уларнинг функциялардан кетма-кет лимитга ўтишлар ёрдамида ҳосил бўлишлари жиҳатидан ўргандилар. Бу назарияни ривожлантириш ва чуқурлаштиришда Н. Н. Лузиннинг шогирдлари М. Я. Суслин ва П. С. Александров билан ҳамкорликда қилган илмий-тадқиқотлари катта аҳамиятга эга бўлди.

Функцияларнинг конструктив назариясида функцияни турли аналитик аппаратлар (алгебраик ва тригонометрик кўпҳадлар бунга мисол бўлади) ёрдамида тақрибий ифода қилиш масалалари ўрганилади. Бу соҳада П. Л. Чебишёв қуйидаги масалани ҳал қилди: $P(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n$ кўринишдаги барча полиномлар ичидан $-h \leqslant x \leqslant h$ бўлганда нолдан энг кам узоқлашадиганини топди. Бу полиномлар эндиликда Чебишёв полиномлари деб ҳам юритилади. Унинг ишлари умуман олганда функцияларни кўпҳадлар билан энг яхши яқинлаштиришлар назариясини бойитишда маълум натижаларга олиб келди.

Вейерштрасс 1885 йилда кесмада берилган узлуксиз функцияни текис яқинлашувчи кўпҳадлар қаторига ёйиш мумкинлиги ҳақидаги теоремани исботлади.

Чебишёв П. Л. ва Вейерштрасс ғояларини рус математиги С. Н. Бернштейн (1880—1968) ва америкалик математик Данхем Жексон (1888—1946) давом эттирдилар. Масалан, бу борада Жексоннинг «Фурье қаторлари ва ортогонал полиномлар» китоби рус тилида 1948 йилда чоп этилган.

Функционал анализ

Математик анализнинг энг ёш тармоқларидан бири бўлган функционал анализ турли объектли чексиз ва чекли фазоларда функция тушунчасининг умумлашмаси — функционал операторлар билан шуғулланади. Бу фанни яратилишида поляк математиги Стефан Банах (1892—1945) нинг ҳам ҳиссаси бор. У тузған чизиқли фазолар (Банах фазоси) ҳозирги замон математикасида катта аҳамиятга эга. Унинг асосий асари—«Чизиқли амаллар назарияси» (1931) да асосий ишлари ёритилган. Банах Львов функционал анализ мактаби асосчиларидан бири бўлиб, у билан биргаликда функционал анализни ривожлантиришга Владислав Орлич (1903 йилда туғилган) (С. Мазур билан биргаликда чизиқли топологик фазолар назариясини ривожлантирди. Функционал фазолар назариясини (Орлич фазоси) яратди), Станислав Мазур (1905—1981) (функционал анализга геометрик усулларни киритди, Банах алгебралари назариясига асос солди) ҳам ўз ҳиссаларини қўшдилар.

Венгр математиги Сёкефалви — Надь Бела (1913 йилда туғилган) функционал анализни ривожлантириб, гильберт фазосида операторларни кенгайтириш назарияси бўйича илмий ишлар олиб борди. Унинг бир неча китоблари: «Функционал анализ бўйича маърузалар» (М., 1954 йилда Ф. Рис билан), «Гильберт фазосидаги операторлар гармоник анализи» (М., 1970, Ч. Фояш билан) рус тилида босилиб чиққан.

Давид Гильберт (1862—1943) томонидан яратилган симметрик ўзакли интеграл тенгламалар назарияси тушунчалари ҳозирги замон функционал анализи асосида, айниқса, чизиқли операторлар назариясининг асосида ётади. Унинг номи билан фазо, ҳалқа, резольвент айният ва ҳ. к. лар аталади.

Яна бир венгр математиги Фридьеш Рис (Рисс) (1880—1956) функционал анализ асосчиларидан бири бўлиб ҳисобланади. Интегралланувчи функциялар, чексиз сондаги номаълумли чизиқли тенгламалар системаларидан ташкил топган чизиқли фазоларни тадқиқ этишга катта ҳисса қўшди. Топологик фазолар назарияси асосчиларидан бири. Операторлардан тузилган функциялар назариясини яратди.

Икки француз математиги Морис Рене Фреше (1878—1973) ва Поль Пьер Леви (1886—1971) ҳам функционал анализ бўйича муҳим илмий ютуқларга эришганлар. Фреше функционал умумий тушунчасини киритди, чизиқли функционал ва дифференциал тушунчаси умумий кўринишини бериш усулини таклиф этди. Леви метрик фазо, компактлик, тўлалик, сепарабеллик тушунчаларини киритди, метрика турини топди, унинг «Функционал анализнинг конкрет муаммолари» номли китоби (М., 1972) рус тилида чоп этилган.

Немис математиклари Курт Отто Фридрихс (1901 йилда туғилган) ва Феликс Хаусдорф (1868—1942) ҳам функционал анализда ижод қилганлар. Хаусдорф умумий метрик ва топологик фазоларда тўпламлар назариясини ривожлантирди, топологик фазолар назариясини ва аксиоматикасини тузди (ҳар бир икки нуқтаси кесишмайдиган атрофларга эга бўлган фазо Хаусдорф фазоси деб аталади), «Тўпламлар назарияси» (1914) номли машҳур китоб муаллифи, борель тўпламлари қуввати муаммосини тўла ҳал қилди, кўп ўлчовли фазоларда ўлчов назариясини яратди, тартибланган тўпламлар назариясини ишлаб чиқди. Фридрихс функционал анализ бўйича ўз тадқиқотларида гильберг фазосида операторлар назарияси билан шуғулланган, унинг «Гилъберт фазосида спектрлар тўғрисидаги китоби» (1968) рус тилида чоп этилган.

Америкалик математиклар Хилле (Хилл) Эйнар (1894—1980), Ральф С. Филлипс (1913 йилда туғилган) ва Пауль Рихард Халмош (1916 йилда туғилган) ҳам функционал анализ бўйича илмий ишлар олиб борганлар. Масалан, уларнинг ишларидан Э. Хилл ва Р. Филлипснинг «Функционал анализ ва яримгуруҳлар» монографияси 1962 йилда босилиб чиққан. Халмош Будапештда туғилган. Мичиган университети профессори, унинг «Ўлчов назарияси» (1953), «Чекли ўлчовли вектор фазолар» (1963), «Гильберт фазолари масалаларда» (1970) китоблари нашр қилинган.

Рус математикларидан функционал анализ бўйича С. Л. Соболев (1908 йилда туғилган), Б. М. Левитан (1914 йилда туғилган), И. М. Гельфанд (1918 йилда туғилган), Ахиезер Н. И. (1901—1980), Қ. Т. Аҳмедов (1917—1975) ва бошқалар баракали илмий натижаларга эришдилар. С. Л. Соболев ўз ишларида умумлашган ҳосила, хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумлашган ечими, дифференциал оператор тушунчаларини киритди, умумлашган функциялар назариясини ривожлантирди, функционал фазоларни (Соболев фазосини) тадқиқ этди. Бошқа математиклардан Н. И. Ахиезернинг гильберт фазосида чизиқли операторлар назарияси соҳасидаги ишларини таъкидлаб ўтиш керак. Унинг И. И. Глазман билан ҳамкорликда ёзилган «Гильберт фазосида чизиқли операторлар назарияси» китоби функционал анализ бўйича энг мукаммал илмий-тадқиқотлардан бири ҳисобланади.

Тарихий масалалар

1. Хитой (милод. авв. 2000 йил). Агар учбурчакка ички чизилган квадратнинг томони катта катетга ясалиб, у билан умумий тўғри бурчак ҳосил қилса, квадрат томонининг узунлигини топинг. бунда катетлар мос равишда a ва b $(b > a)$ га тенг.

Жавоби. $\frac{ab}{a+b}$.

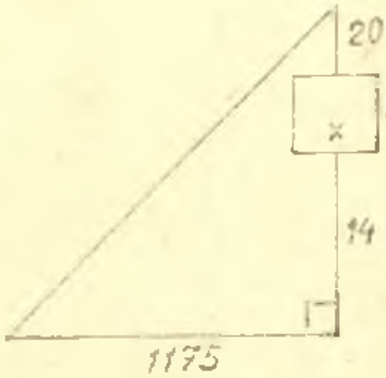
2. Томонлари a, b ва c га тенг тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусини топинг.

Жавоби. $\frac{ab}{a+b+c}$.

3. Вавилон (милод. авв. 2000 йил). «Мен юзани ва менинг квадратим томонининг 2/3 қисмини қўшиб, 35/60 ни ҳосил қилдим. Менинг квадратим томони қанчага тенг?»

Жавоби. $\frac{1}{2}$.

4. Хитой (милод. авв. 300 йил).



25-расм

25-чизмадаги берилганларга кўра x ни топинг.

Кўрсатма. Номаълум x^2+ $+34x-71000$ квадрат тенгламани ечиш билан топилади.

Жавоби. 250.

5. Миср (милод. авв. 2000 йил). Томонлари 50, 50 ва 60 га тенг бўлган учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

Жавоби. $25\frac{2}{3}$.

6. Архимед (милод. авв. 287—212 йиллар). Ердан юлдузларгача бўлган масофага тенг бўлган радиусли шарда қанча қум донаси мавжуд?

Ечиш. Архимед махсус ҳисоблаш системасини ишлаб чиқди, унинг бирлиги мириада, яъни 10 000 эди. У олган натижани тасаввур қилиш учун Ерга тенг бўлган шарда қанча қум донаси бўлишини ҳисоблаб чиқамиз, бу Архимед сферасига қараганда қум донаси кабидир. Ернинг ҳажми $V_p = 10^{27}$ см³. Ҳажми 250 см³ бўлган стакан ёрдамида Ерга тенг бўлган сферани қум билан тўлдириш учун уни $10^{27}:250 = 4 \cdot 10^{24}$ марта тўлдириш лозим. Агар биз бир секундда 1000 стаканга қум тўлдирадиган махсус асбоб ёрдами билан иш кўрсак, $4 \cdot 10^{21}$ стаканни тўлдириш учун $4 \cdot 10^{24} \cdot 1000 = 4 \cdot 10^{21}$ сек ёки $\approx 1 \cdot 10^{14}$ йил, яъни 100 триллион йил керак бўлади.

7. Иосиф Флавий (тахминан, 37 йилда туғилган). Иерусалимда яҳудийлар қўзғолони бостирилиб, у харобага айлантирилди. Рим жангчилари қўзғолончиларни тутиб олиб, уларни ўлдирар эдилар. Флавий 41 киши билан қочади ва ғорга яшириниб олишади. Ҳеч қандай иложлари қолмаганларидан кейин Флавий сўнгги кучларидан ҳам ҳориб тамом бўлаётган жангчиларга римликларга асир тушишни таклиф этди. Лекин жангчиларнинг бунга жаҳллари чиқиб, римликларга асирга тушишдан кўра бир-бирларини ўлдириш яхшироқ деб қарор қилдилар. Ҳеч қандай маслаҳат уларга кор қилмади. Жангчилар Флавийга бир-бирларини ўлдиришни ундан бошлаймиз деб дўқ қилдилар. Лекин доно Флавий бир йўлини топди. Флавий ўлдириш бошланадиган куни барча жангчиларни (шу билан бирга ўзи ва ўртоғини) бир қаторга турғазди ва чап томондан ҳар бир учинчи жангчи ўлдирилади деб эълон қилди. Биринчи, иккинчи, учинчи ва ҳ. к. ўлдиришлар олиб борилгандан сўнг Флавий ва ўртоғи омон қолди, улар қайси жойларда турган эди?

Жавоби. Иосиф Флавий ва унинг ўртоғи турган ўринлар тагига чизиб кўрсатилган:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14; 15; 16; 17; 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31; 32; 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41.

8. Ариабхата I (Ҳиндистон). Чопарлар ҳақидаги масала. Иккита осмон жисми бир-бирига қараб ёки бири иккинчисининг орқасидан ҳаракат қилди. Уларнинг учрашиш вақтини топинг.

Жавоби. $t=\frac{s_1+s_2}{v_1+v_2}$ (биринчи ҳолда);

$$t=\frac{s_1-s_2}{v_1-v_2} \text{ (иккинчи ҳолда)},$$

бунда s_1 ва s_2 — икки жисм орасидаги масофалар, v_1 ва v_2— уларнинг тезликлари.

9. Бхаскара II. «Эй, сонни билгувчи киши, айтчи, 12 га кўпайтирилганда ва ўзининг кубига кўтарилганда бу сон квадратининг 6 га кўпайтирилгани ва 35 йиғиндисига тенг бўлган сонни топ-чи?»

Жавоби. 5.

10. Магавири (Ҳиндистон). Агар филлар умумий сонининг 2/3 қисмидан илдизининг 9 таси билан қолганининг 3/5 қисми илдизи 6 таси билан қўшилиб, ўрмонда ишлаётгани ва яна 24 фил борлиги маълум бўлса, филлар сонини топинг.

Жавоби: 150 та.

Кўрсатма. Филлар умумий сонини x деб белгиласак,

$$9\sqrt{\frac{2}{3}x}+6\sqrt{\frac{3}{5}\left(x-9\sqrt{\frac{2}{3}x}\right)}+24=x$$

тенгламага келамиз. $y=x-9\sqrt{\frac{2}{3}x}$ белгилашни киритиб

$$y^2-6\sqrt{\frac{2}{5}y}=24$$

квадрат тенгламага келамиз.

11. Нарайана (Ҳиндистон, XIV аср). Сигир ҳар йили битта бузоқ беради, бузоқ уч ёшидан бошлаб бузоқ бера бошлайди. 20 йилдан сўнг битта сигирдан қанча мол олиш мумкин ва моллар сони қанча бўлади?

Жавоби. 2745 та сигир.

12. Анания Ширкаци (Арманистон. VII аср). Афина шаҳрида ҳовуз бўлиб, унга учта ариқ ўтказилган. Биринчи ариқ ҳовузни бир соатда, иккинчиси икки соатда, учинчиси уч соатда тўлдиради. Шундай қилиб, учала ариқ биргаликда бир соатда ҳовузнинг қандай қисмини тўлдиради?

Жавоби. 6/11 қисмини.

13. Ал-Қаражий (Абу Бакр ал-Ҳусайн ал-Қаражий, X—XI асрлар). Намунадан фойдаланиб, қуйидагиларни ҳисобланг:

$$\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{88\cdot 27}+3\sqrt[3]{27\cdot 27\cdot 8}+27+8}=$$
$$=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{1728}+3\sqrt[3]{5832}+27+8}=\sqrt[3]{6+54+27+8}=$$
$$=\sqrt[3]{125};$$

$$\sqrt[3]{54}\pm\sqrt[3]{2};\ \sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}.$$

14. Ибн ал-Бағдодий (Абдулло ал-Ҳасан ибн Муҳаммад ибн Хамса, Х аср охири XI-аср бошлари). Исботланг:

а) $\dfrac{40}{3\pm\sqrt{5}}=30\pm\sqrt{500};$

б) $\dfrac{40}{\sqrt{70}\pm\sqrt{50}}=\sqrt{280}\pm\sqrt{200};$

в) $\dfrac{\sqrt[4]{432}}{\sqrt[4]{192}+\sqrt[4]{48}}=\sqrt[4]{15552}-\sqrt[4]{3888};$

г) $\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{A}+\sqrt{A-B}}{2}}+\sqrt{\dfrac{\sqrt{A}-\sqrt{A-B}}{2}}$

15. А. Ф. Магницкийнинг «Арифметика» асаридан. Бир киши 106 аршин (1 аршин $\approx$ 71,12 см) уч хил газлама сотиб олди, бир газламадан иккинчисига қараганда 12 аршин ортиқ, иккинчисидан учинчисига қараганда 9 аршин ортиқ сотиб олди. У ҳар бир газламадан қанчадан сотиб олган?

Жавоби: I — $46\frac{1}{3}$ аршин, II — $34\frac{1}{3}$ аршин, III — $25\frac{1}{3}$ аршин.

ПАРАДОКСЛАР, ЖУМБОҚЛАР, МУКОФОТЛАР ВА БУЮК КАШФИЁТЛАР ЙИЛНОМАСИ

Ҳеч қандай фан математика сингари инсон тафаккурига бўлган ишончни мустаҳкамлай олмайди.

Г. Штейнгауз

Қадимги юнон файласуфи Элейский Зенон (эрамизгача бўлган тахминан 490—430 йилларда яшаб ижод этган) исботларсиз аниқланган ҳақиқатларни парадокс-далиллар ёрдамида шубҳа остига олади. У кўпхиллиликка, чексизликка ва ҳаракатга ҳамда континуум ҳақидаги тасаввурларга қарши қаратилган 45 та апорий (яъни парадокслар) баён этган. Шулардан бизгача 9 таси етиб келган бўлиб, 4 таси «ҳаракат апориялари» дир. Чексиз кичик қисмлардан ташкил топган чексиз тўпламдан узлуксиз миқдорларни ҳосил қилишга уриниш мантиқий парадоксларга олиб келди. Булардан учтасини келтирамиз:

1. Дихотомия, тенг иккига бўлиш парадокси, ҳаракатни амалга ошириб бўлмаслиги, чунки йўл чексизликкача бўлиниб борилади (тенг иккига, ва яна тенг иккига ва ҳ. к.), шунинг учун йўлнинг чексиз қисмларини кетма-кет босиб ўтишга тўғри келади. Математик жиҳатдан бу $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ ни рад қилишдир.

2. Ахиллес ва тошбақа парадокси. Ахиллес тошбақага ета олмайди, чунки у ҳозиргина тошбақа бўлган жойларни кетма-кет босиб ўтиши лозим, яъни йўлнинг чексиз кесмалар кетма-кетлигини ўтиши керак.

3. Ёйнинг ўқи учиши мумкин эмаслиги. Агар вақтни дискрет лаҳзалар йиғиндиси, йўлни дискрет нуқталар йиғиндиси деб ҳисобласак, юз беради, бошқача айтганда, учаётган ўқ тинчликда туради, чунки вақт алоҳида лаҳзалардан ташкил топган.

Энди математиканинг ривожланиши жараёнида вужудга келган классик муаммолар тўғрисида фикр юритамиз. Булар ичида эрамизгача бўлган V—IV асрларда Қадимги Юнонистонда циркуль ва чизғич ёрдамида бажариладиган ясашларга боғлиқ бўлган муаммолар алоҳида ўринни эгаллайди.

1. Кубни иккилантириш.
2. Бурчак трисекцияси.
3. Доира квадратураси.
4. Гиппократ ойчалари муаммоси.

Булар ҳақида юқоридаги мавзуларда ҳикоя қилинди.

5. Мунтазам кўпбурчаклар муаммоси. Бу мунтазам n бурчакни ясашга доир масала бўлиб,

1796 йилда К. Ф. Гаусс бу масала фақат n нинг барча тоқ туб кўпайтувчилари бир хил бўлмаганда ва $F_k = 2^{2^k} + 1$ [ферма туб сонлари] кўринишига эга бўлганда ечимга эгалигини исботлади. 17 ва 257 бурчакларни ясаш усуллари Гауссга маълум эди, аммо биринчи бўлиб бу натижалар 17 бурчак учун 1802 йилда К. Ф. Фон Пфейдерер томонидан, 257 бурчак учун эса 1822 йилда М. Г. Фон Пауккер томонидан эълон қилинган. Гёттинген университети кутубхонасида О. Гермеснинг 10 йиллик меҳнат натижаси бўлган қўлёзма сақланмоқда, унда 65 537 бурчакни ясаш усули баён қилинган.

6. Параллел чизиқлар муаммоси. Бу ҳақда «Геометрия аксиомалари» бўлимида ҳикоя қилинди.

7. Элементар геометрияни тўла аксиомалаштириш муаммоси. Бу муаммо Қадимги Юнонистонда пайдо бўлган бўлиб, шундай тўла аксиомалар системасини тузиш лозимки, элементар геометриянинг барча мулоҳазалари бу аксиомалардан шаклларнинг кўргазмалилигисиз аниқ мантиқий хулосалар асосида келиб чиқсин. Бундай аксиомалар системасини 1899 йилда Д. Гильберт яратди.

8. Бешинчи ва ундан юқори даражали тенгламалар муаммоси. 1530-йилларда Италияда 3 ва 4-тартибли тенгламаларни ечиш учун формулаларнинг топилиши муносабати билан вужудга келган масалалар:

а) n-даражали [$n \geqslant 5$] тенгламалар учун унинг илдизларини коэффициентлари орқали тўртта арифметик амал ва илдиз чиқариш ёрдамида ифодаловчи формулани топиш масаласи. 1826 йилда Н. Х. Абель 5-даражали тенгламалар учун умумий формула мавжуд эмаслигини исботлади. 1831 йилда Э. Галуа ихтиёрий берилган n-даражали тенглама учун бундай формулани топиш шартларини кўрсатди.

б) комплекс коэффициентли n-даражали тенглама ҳеч бўлмаганда битта комплекс илдизга эга эканлигини кўрсатиш масаласи. К. Ф. Гаусс 1799 йилда комплекс сонлар алгебрасининг асосий теоремасини исботлаб, бунинг исботини берди.

9. Ферма муаммоси [Ферманинг буюк теоремаси]. $x^n+y^n=z^n$ тенглама $n>2$ да бутун мусбат ечимларга эга эмас. Масала 1670 йилда П. Ферма томонидан эълон қилинган. Теорема ҳозирги кунгача исботланмаган, лекин етарлича катта n лар учун тўғрилиги кўрсатилган.

10. Тўртта ранг муаммоси. Сферада жойлашган ҳар қандай хаританинг ёй кўринишидаги умумий чегара қисмига эга бўлган икки ихтиёрий соҳасини турли рангда қилиб тўртта ранг билан бўяш мумкинлигини аниқлаш масаласи. Уни 1952 йилда Ф. Гюсри таклиф этган. 1976 йилда К. Аппель ва В. Хакен ҳар қандай харитани шундай бўяш мумкинлигини исботладилар.

11. Континуум муаммоси [Континуум — фараз]. Барча натурал сонлар тўпламидан қувватли, ҳақиқий сонлар тўпламидан эса кам қувватли бўлган тўплам мавжуд ёки мавжуд эмаслигини аниқлаш масаласи. Уни 1878 йилда Г. Кантор таклиф этган. 1938 йилда К. Гёдель ва 1963 йилда П. Коэн тўпламлар назарияси аксиомаларидан бундай тўпламнинг мавжудлиги ёки мавжуд эмаслигини келтириб чиқариб бўлмаслигини кўрсатдилар.

Математикларнинг фан оламида эришган катта ютуқлари учун турли хил мукофотлар ва олтин медаллар таъсис этилган.

Халқаро Фильдс мукофоти

Халқаро миқёсда математика бўйича энг обрўли мукофотлардан бири Фильдс мукофоти деб аталиб, ҳар тўрт йилда Халқаро математика конгресси 41 ёшга етмаган ва математика соҳасида муҳим илмий натижаларни қўлга киритган олимларга тақдим этади. Маълумки, Нобель мукофоти математикларга берилмайди, бунинг ўрнини тўлдириш мақсадида 1936 йилдан бошлаб бу мукофот бериладиган бўлди. Мукофот 1500 канада долларидан ва олтин медалдан иборат. Мукофот уни таъсис этиш ташкилотчиси канадалик математик Жон Чарльз Фильдс [1863—1962] номига қўйилган. Шу кунгача Фильдс мукофотига сазовор бўлган олимлар рўйхатини келтирамиз.

№	Мукофотни олган матема-тик олимлар	Берилган вақти, конгресс	Илмий ишларининг қисқача тавсифи
	1	2	3
1	Ларс Валериан Альфорс. (Финляндия). 1907 й. да туғилган.	1936, IX. Осло	Риман сиртлари бўйича ишлари учун, асосий ишлари комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, квазиконформ акслантиришлар.
2	Жесс Дуглас. (1897—1965). (АҚШ)	—«—	Аплато масаласини ечганлиги учун, асосий ишлари вариацион ҳисоб бўйича.
3	Атле Сельберг, 1917 й. да туғилган, (АҚШ).	1950, X. Кембридж [АҚШ]	Туб сонлар тақсимоти қонунини оддий исботлаш усулини топди [П. Эрдёш билан], такомиллашган ғалвир усулини ишлаб чиқди, математик анализ.
4	Лоран Шварц. 1915 й. да туғилган, (Франция).	—«—	Умумлашган функциялар назариясидаги ишлари учун [Шварц тақсимотлари назарияси]. Асосий ишлари — топология, гармоник, функционал анализ, математик физика.
5	Кунихико Кодаира. (Япония), 1915 йилда туғилган.	1954, XI. Амстердам	Топология, комплекс анализ, алгебра ва дифференциал геометрия.
6	Жан Пьер Серр. (Франция), 1926 й. да туғилган.	—«—	Алгебраик, топология ва алгебраик геометрия, сфералар гомотопик гуруҳини ҳисоблаш.
7	Клаус Фридрих Рот. (Буюк Британия), 1925 й. да туғилган	1958, XII. Эдинбург	Алгебра ва сонлар назарияси, алгебраик сонларни рационал сонлар билан яқинлаштириш ҳақидаги Туэ-Зигель

	1	2	3
			теоремаларидаги аниқ баҳони исботлагани учун.
8	Рене Фредерик Том. (Франция) 1923 й. да туғилган.	—»—	Алгебраик ва дифференциал топология, кобордизмлар назариясини яратгани учун. Ҳалокатлар назариясини ишлаб чиқди.
9	Жон Уиллард Милнор. 1931 й. да туғилган.	1962, XIII Стокгольм	Алгебраик ва дифференциал топология, (Милнор сфераси) 7-ўлчовли сферада 28 силлиқ турли структуралар мавжудлигини исботлади.
10	Ларс Хёрмандер. (Швеция), 1935 йилда туғилган.	—«—	Дифференциал операторлар назарияси ва хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар.
11	Майкл Фрэнсис Атья. (Буюк Британия), 1929.	1966, XIV. Москва	Алгебраик топология ва дифференциал тенгламалар. И. Зингер (АҚШ) билан индекс теоремасини исботлади (1963), аналитик топология асосчиси.
12	Александр Гротендик. 1928 й.	—«—	Топология, гомологикалар алгебраси, алгебраик геометрия.
13	Пол Жозеф Коэн (АҚШ). 1934 йилда туғилган.	—«—	1963 й. да континуум-фараз тўпламлар назарияси аксиомалари тузилишидан рад қилиниши мумкин эмаслигини исботлади.
14	Стефан Смейл (АҚШ). 1930 й. да туғилган.	—«—	Топология, динамик системалар назарияси, n-кобордизмнинг тўғри умумий теоремасини исботлади.
15	Алан Бейкер (Буюк Бри-	1970, XV. Ницца	Трансцендент сонлар назарияси. Диофант тенг-

	1	2	3
	тания). 1939 й.		ламалари ечимлари баҳосини аниқлаш усулини ишлаб чиқди.
16	Сергей Петрович Новиков (Россия). 1939 й. да туғилган.	—«—	Геометрик топология. Қатламлар ва кўп қийматли функциялар назариясини, космологик моделлар сифатий назариясини, чизиқли бўлмаган системалар чекли мавсумли ечимлари назариясини яратди.
17	Жон Григс Томпсон (АҚШ). 1932 йилда туғилган.	—«—	Алгебра, гуруҳлар назарияси, барча абель бўлмаган гуруҳлар жуфт тартибга эгалигини исботлади (В. Фейс билан).
18	Хейсуке Хиронака (Япония), 1931 й.		Алгебра. Алгебраик геометрия. Ноль характеристикали майдонлар устидаги алгебраик кўпхилликлар хусусиятларини ечиш муаммосини ҳал қилди.
19	Пьер Рене Делинь (Бельгия), 1944 й.	1978, XVII Хельсинки	Алгебраик геометрия, алгебраик сонлар назарияси. Чекли майдонлар устидаги функциялар тўғрисидаги Вейль фаразини исботлади.
20	Даниель Квиллен (АҚШ), 1940 й.	—«—	Гомологик алгебра ва алгебраик топология. К-назарияда Адамс фаразини исботлади, узлуксиз функциялар халқасидаги проектив модуляр тузилиши ҳақидаги Серр фаразини исботлади.
21	Григорий Александрович Моргулис (Россия),	—«—	Ли гуруҳлари назарияси, комбинаторика, дифференциал геометрия эр-

	1	2	3
	1946 й.		годик назарияси, динамик системалар назарияси.
22	Чарльз Луи Фефферман (АҚШ), 1949 й	—«—	Комплекс ўзгарувчили функциялар назарияси, гармоник анализ, дифференциал тенгламалар.
23	Энрико Бомбьери (Италия), 1940 й.	1974, XVI Ванкувер	Алгебраик сонлар назарияси, комплекс ва классик анализ, алгебра ва дифференциал геометрия.
24	Дейвид Брайант Мамфорд (АҚШ), 1937 й.	—«—	Алгебра, геометрия, эгри чизиқлар модуллари ва абель кўпхилликлар.
25	Ален Конн (Франция) 1947 й.	1983, XVIII Варшава	Умумий алгебра: С-алгебралар, К-назария. Оператор σ- алгебралари назарияси.
26	Уильям Тэрстон (АҚШ) 1949 й.	—«—	Топология, конструкция Кан ва Т., кўпхилликлар топологияси.
27	Шинтон Яу Яо (АҚШ), 1949 й.	—«—	Дифференциал тенгламалар, алгебраик топология, дифференциал геометрия.
28	Саймон Кёрдан Доналд (АҚШ), 1957 й.	1986, XIX Бёркли	Топология, R^7 да турли силлиқ структуралар мавжудлигини исботлади.
29	Герт Фалтингс (ГФР) 1954 й.	—«—	Диофант тенгламалар, алгебра, геометрия, 1983 й. да. Ферма муаммоси чекли сондаги ечимдан зиёд ечимга эга бўлмаслигини кўрсатди.
30	Майкл Фридман (АҚШ), 1951 й	—«—	Алгебраик топология бўйича ишлари учун.

Математика тарихидаги буюк кашфиётлар йилномаси

1. Милод. авв. 3000—2000 йиллар	— Биринчи саноқ системалари (Миср, Бобил)
2. Милод. авв. 1800 йил	Квадрат тенглама (Бобил)
3. Милод. авв. 600 йил	— Исбот қилувчи геометрия (Фалес Милетский)
4. Милод авв. 540 йил	— Тўғри бурчакли учбурчак томонлари орасидаги муносабат (Пифагор)
5. Милод. авв. 300 йил.	— Дедуктив геометриянинг изчил ишлаб чиқилиши (Евклид)
6. 595 йил	— Ўнли саноқ системаси (Ҳиндистон)
7. 630 йил	— Квадрат тенгламаларнинг систематик тадқиқ этилиши (Брахмагупта)
8. 820 йил	— Алгебра мустақил фан бўлиб шаклланди (Ал-Хоразмий)
9. 1580 йил	— Символик алгебранинг яратилиши (Ф. Виет)
10. 1614 йил	— Логарифмларнинг кашф этилиши (Ж. Непер, Й. Брюге)
11. 1617 йил	— Ўнли логарифмларнинг кашф этилиши (Г. Бригс).
12. 1635 ва 1637 йиллар	— Аналитик геометрия яратилди (П. Ферма ва Р. Декарт).
13. 1680 ва 1682 йиллар	— Дифференциал ва интеграл ҳисобнинг яратилиши (И. Ньютон ва Г. В. Лейбниц).

14. 1694 йил — Дифференциал тенгламалар (Я. Бернулли).

15. 1748 йил — Математик анализнинг систематик ишлаб чиқилиши (Л. Эйлер).

16. 1780 йил — Варнацион ҳисоб (Л. Лагранж).

17. 1799 йил — Алгебранинг асосий теоремаси (К. Ф. Гаусс).

18. 1823 йил — Математик анализ асосларининг яратилиши (О. Коши).

19. 1832 йил — Бешинчи ва юқори даражали тенгламалар муаммосининг ҳал қилиниши (Н. Абель, Э. Галуа).

20. 1826 йил — Ноевклид геометрия (Н. И. Лобачевский, Я. Больяи).

21. 1827 йил — Сиртларнинг ички геметрияси (К. Ф. Гаусс).

22. 1854 йил — *n* ўлчовли эгри фазолар назарияси (Б. Риман).

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЕТ

1. М. Аҳадова. Урта Осиёлик олимларнинг математикага доир ишлари. «Ўқитувчи», Т., 1984.
2. В. Ф. Асмус. Декарт. «Политиздат», М., 1956.
3. Э. Т. Белл. Творцы высшей математики. «Просвещение», М.,. 1979.
4. В. Беллюстин. Как постепенно люди дошли до настоящей арифметики, «Учпедгиз», М., 1940.
5. Э. И. Березкина. Математика Древного Китая. «Наука», М., 1980.
6. Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. Изд-во иностр. лит, М., 1963.
7. Б. Л. Ван-дер Ваден. Пробуждающая наука. Математика древного Египта, Вавилона и Греции. «Физматгиз:, М., 1959.
8. Г. Вилейтнер. История математики от Декарта до середины XIX столетия, «Наука», М., 1966.
9. А. И. Володарский. Очерки истории средневековой индийской математики, «Наука», М., 1977.
10. М. Я. Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире. «Наука», М., 1967.
11. С. С. Демидов. У истоков современной алгебры. «Знание», М., 1971.
12. И. Я. Депман. История арифметики. «Просвещение», М., 1965.
13. В. Ф. Қаган. Очерки по геометрии. Изд-во МГУ, М., 1963.
14. Ф. Клейн. Лекции о развитии математики в XIX столетии: В 2-х томах: Т. I. «Наука», М., 1989.
15. Э. Кольман. История математики в древности, «Физматгиз», М., 1961.
16. Л. Е. Майстров. Теория вероятностей: Ист. Очерк.
17. Г. П. Матвиевская. Учение о числе в средновековом Востоке. «Фан», Ташкент.
18. Г. П. Матвиевская, Б. А. Розенфельд. Математика и астрономы мусульманского средне-вековья и их труды.
19. В. Н. Молодший. Основы учения о числе в XIX—XVIII и начале XIX века. «Учпедгиз», М., 1963.
20. А. Реньи. Письма о вероятноети. «Мир», М., 1970.
21. Б. А. Розенфельд. История неевклидовой геометрии. «Наука», М., 1976.
22. Б. А. Розенфельд и др. Абу Райхон ал-Беруни. «Наука», М., 1973.
23. Б. А. Розенфельд, А. П. Юшкевич. Омар Хайям, «Наука», М., 1965.
24. К. А. Рыбников. История математики. «Наука», М., 1974.
25. К. А. Рыбников. Возникновение и развитие математической науки. Кн. для учител. «Просвещение», М., 1987.

26. А. В. Силин, Н. А. Шмакова. Открываем неевклидовую геометрию. «Просвещение», М., 1988.
27. С. Х. Сираждиддинов. Хорезми — выдающийся математик и астроном средневековья. «Просвещение», М., 1983.
28. Д. Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. «Наука», М., Гл. ред. физ-мат. лит., 1990.
29. А. Ф. Файзуллаев. Научное творчество Муҳаммад ал-Хорезми. «Фан», Т., 1983.
30. Л. С. Фрейман. Творцы высшей математики. «Наука», М., 1986.
31. Г. Г. Цейтен. История математики в XVI— и XVII века. «Гостехиздат», М—Л, 1938.
32. Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин. От проективной геометрии к неевклидовой. «Просвещение», М., 1979.
33. Р. Н. Щербаков, Л. Ф. Пичурин. Дифференциалы помогают геометрии. «Просвещение», М., 1982.
34. В. П. Шереметевский. Очерки по истории математики. «Учпедгиз», М., 1940.
35. А. П. Юшкевич. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия, в 3-томах. «Наука», М., 1970—1972.
36. А. П. Юшкевич. История математики в России до 1917. «Наука», М., 1968.

ҚЎШИМЧА АДАБИЁТ

1. П. Г. Булгаков. Жизнь и труды Беруни. «Фан», Т., 1972.
2. П. Г. Булгаков и др. Мухаммед ал-Хорезми. «Наука», М., 1983.
3. В. Ф. Қаган. Геометрические идеи Римана и их современное развитие. ОНТИ, М—Л, 1933.
4. Б. Н. Кедров. Б. А. Розенфельд. Абу Райхон Беруни. «Наука», М., 1973.
5. А. К. Кубесов. Математическое наследие ал-Фараби. «Наука», Алма-ата. 1974.
6. Ф. А. Медведев. Очерки истории функций дествительного переменного. «Наука», М., 1975.
7. Ф. А. Медведев. Развитие понятия интеграла. «Наука», М., 1974.
8. Ф. А. Медведев. Развитие теории множества в XIX в. «Наука», М., 1965.
9. О. Нейгебауэр. Точные науки в древности. «Наука», М., 1968.
10. В. А. Никифоровский. Из истории алгебрь XVI—XVII вв. «Наука», М., 1979.
11. А. Реньи. Диалоги о математике. «Мир», М., 1969.
12. С. Х. Сирожиддинов, Г. П. Матвиевская. Абу Райхон Беруни. «Просвещение», М., 1978.
13. М. М. Хайруллаев. Абу Наср ал-Фараби. «Наука», М., 1982.
14. Г. Г. Цейтен. История математики в древности и средние века. «Гостехоргиздат», М., 1932.

МУНДАРИЖА

Уластев Аброр,

НАЗАРОВ ХОЛИҚУЛ

ОСТОНОВ ҚУРБОН

МАТЕМАТИКА ТАРИХИ

Педагогика институтлари учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Таҳририят мудири *М. Пўла...*

Муҳаррир *У. Хусано...*
Бадиий муҳаррир *Т. Қаноатов*
Тех. муҳаррир *Ш. Бобохонова*
Мусаҳҳиҳ *М. Олимова*

ИБ № 6805

Теришга берилди 15.02.96 й. Босишга рухсат этилди 13.08.96 й. Формати 84×108¹/₃₂. Литературная гарнитураси. Тип. қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 7,98. Шартли кр.-отт. 8,19. Нашр. л. 7,6. Тиражи 4500. Буюртма 2378.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент-129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09-87-95.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг 1-босмахонасида босилди. 700002, Сағбон кўчаси, 1-берк кўча, 2-уй. 1996.

45c

УКИТУВЧИ