1-BOB: BOSHLANG‘ICH MA’LUMOTLAR

1.1-Mavzu: Kasrlar ustida amallar

Kasrlar ustida amallar ma’lum bir qoidalar asosida amalga oshiriladi. Ularga birma-bir qisqacha to‘xtalib o‘tamiz.

1.Kasrlarni qo‘shish.

Kasrlarni qo‘shishda yoki ayirishda ular umumiy maxrajga keltiriladi va sur’atlar qo‘shiladi yoki ayiriladi. Agar kasrlar maxrajlari o‘zaro tub bo‘lsa, umumiy maxraj ikkita kasr maxrajlarining ko‘paytmasiga teng bo‘ladi. Agar kasrlarning maxrajlari o‘zaro teng bo‘lsa, umumiy maxraj tanlash shart emas.

1) $\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}}$ 2) $\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$

2.Kasrlarni ayirish

1) $\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}}$ 2) $\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}}$

3.Kasrlarni ko‘paytirish.

Kasrlarni biri-biriga ko‘paytirganda maxrajlar maxrajlarga, sur’atlar sur’atlarga ko‘paytiriladi.

1) $\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$ 2) $\boxed{\frac{a}{b}\cdot c=c\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b}}$

4.Kasrlarni bo‘lish.

Kasrni kasrga bo‘lganda, birinchi kasr o‘z holida yozilib, ikkinchi kasrni esa sur’at va maxrajlari almashtirib, ko‘paytirish holida yoziladi. Agar kasrlardan birortasi son sifatida berilsa uni maxraji 1 ga teng bo‘lgan kasr deb olish mumkin bo‘ladi.

1) $\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$

2) $\boxed{\frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{b\cdot c}}$

3) $\boxed{c:\frac{a}{b}=c\cdot\frac{b}{a}=\frac{b\cdot c}{a}}$

4) $\boxed{1:\frac{a}{b}=1\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{a}}$

5) $\boxed{a:b=\frac{a}{1}:\frac{b}{1}=\frac{a}{1}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}}$

6) $\boxed{\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{a\cdot c}{b}}$

7) $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}}$

8) $\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$

1.2-Mavzu: Eng oddiy chiziqli tenglamada noma’lumni topish

Noma’lum son qatnashgan tenglikka ***tenglama*** deyiladi. Tenglamada noma’lum qatnashgan sonni aniqlashga ***tenglamani yechish*** deyiladi. Tenglamalar juda ham xilma-xil bo‘lib, biz ularning turlari va yechimlari bilan kelgusi boblarda batafsil birma-bir tanishib chiqamiz. Biz kundalik hayotda, oddiy hisob-kitoblarda eng ko‘p duch keladigan tenglama – bu oddiy chiziqli tenglamadir. Oddiy tenglamaning berilishiga qarab uni yechish qoidalari quyida keltirilgan.

1) $x+a=b;\ \Rightarrow\ x=b-a,$	5) $x\cdot a=b;\ \Rightarrow\ x=b:a,$
2) $a+x=b;\ \Rightarrow\ x=b-a,$	6) $a\cdot x=b;\ \Rightarrow\ x=b:a,$
3) $x-a=b;\ \Rightarrow\ x=a+b,$	7) $x:a=b;\ \Rightarrow\ x=a\cdot b,$
4) $a-x=b;\ \Rightarrow\ x=a-b,$	4) $a:x=b;\ \Rightarrow\ x=a:b.$

Yuqoridagi yechish qoidalarida tenglamada biror hadni yoki noma'lum son qatnashgan had ichidagi ko'paytuvchi yoki bo'luvchini tenglikning boshqa tarafiga o'tkazish qoidalari ko'rsatilgan.

1.3-Mavzu: Tub va murakkab, juft va toq sonlarning xossalari

Faqat 1 ga va o'ziga bo'linadigan sonlarga ***tub sonlar*** deyiladi. Eng kichik tub son 2 ga teng. Tub sonlar ro'yxati quyida keltirilgan:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, ...

Biror sonni tub songa tekshirish uchun uni 2, 3, 5, 7, 11, ... ketma-ketlikdagi tub sonlarga bo'lib tekshiriladi. Tekshirish toki kvadrati berilgan sondan katta bo'lmagan tub songacha davom ettiriladi. Boshqacha aytganda, tekshirishlar toki berilgan sonning ildizidan oshib ketmaguncha davom ettiriladi. Masalan, 997 sonini tub songa tekshirish toki $n \le \sqrt{997} \approx 31{,}57306...$, ya'ni $n=31$ gacha davom ettiramiz. Bunda har safar $\frac{997}{2}=448{,}5$, $\frac{997}{3}=332{,}33...$, $\frac{997}{5}=199{,}4$, $\frac{997}{7}=142{,}428...$, $\frac{997}{11}=90{,}636...$, $\frac{997}{13}=76{,}693...$, $\frac{997}{17}=58{,}647...$, $\frac{997}{19}=52{,}473...$, $\frac{997}{23}=43{,}347...$, $\frac{997}{29}=34{,}379...$ $\frac{997}{31}=32{,}161...$ butun bo'lmagan sonlar chiqadi. Shuning uchun berilgan 997 sonini tub son deb e'lon qilish mumkin.

Tub bo'lmagan sonlarni ***murakkab sonlar*** deyiladi. Murakkab sonning bo'luvchilar soni kamida 3ta bo'ladi, ya'ni 1 va berilgan sondan boshqa son ham bo'ladi. Masalan, 6 soni murakkab son. Chunki, 6 soni 1, 2, 3, va 6 sonlariga qoldiqsiz bo'linadi. Shuni ham eslatib o'tish kerakki, 2 sonidan boshqa har qanday juft son murakkab sondir. Demak, 2 dan boshqa barcha tub sonlar toq sonlardir.

Murakkab sonlarni tub sonlarning darajasi ko'rinishida ifodalash mumkin. Masalan, $188=2^2\cdot47,\ 336=2^4\cdot3\cdot7,\ 108=2^2\cdot3^3,\ 420=2^2\cdot3\cdot5\cdot7\ ...$ sonlarni misol keltirish mumkin. Berilgan biror sonni tub ko'paytuvchilarga ajratishda uni juft bo'lsa 2 ga, chiqqan son juft bo'lsa yana 2 ga va hokoza toq chiqquncha 2 ga bo'linadi. Toq chiqqach 3 ga bo'linadi, chiqqan son yana bo'linsa 3 ga bo'linadi, bo'linmasa keyingi tub sonlar 5, 7, 11, 13, 17, ... ga bo'linadi.

Eng oxirida berilgan sonni shu bo'lingan sonlar ko'paytmasi tarzida yoziladi. Rasmda 2520 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratish ketma-ketligi ko'rsatilgan. Demak berilgan sonni $2520=2^3\cdot3^2\cdot5\cdot7$ deb yozish mumkin.

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \\ 1260 & 2 \\ 630 & 2 \\ 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

1.3.1-rasm

Ba'zida ikki yoki bir nechta sonning umumiy bo'luvchisini aniqlash so'raladi. Masalan, 6 va 8 sonlari 1ga va 2ga bo'linadi, 12 va 18 sonlari 1ga, 2ga, 3ga va 6ga qoldiqsiz bo'linadi. Lekin shunday sonlar ham bo'ladiki, ularning 1 dan boshqa umumiy bo'luvchisi bo'lmaydi.

1dan boshqa umumiy bo'luvchisi bo'lmagan sonlarga ***o'zaro tub*** sonlar deyiladi. Lekin, berilgan sonlar tub sonlar bo'lishi ham bo'lmasligi ham mumkin. Masalan, 12 va 25, 11 va 15, 9 va 20 sonlari o'zaro tub sonlar, ammo berilgan sonlarning ko'pchiligi tub emas.

2 ga qoldiqsiz bo'linadigan natural sonlarga ***juft sonlar*** deyiladi. Ular o'sish ketma-ketligida 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, ...$2n$ bo'ladi. Bu erda $n-$hadning nomeri.

2 ga bo'lganda 1 qoldiq chiqadigan natural sonlarga ***toq sonlar*** deyiladi. Ular o'sish ketma-ketligida 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...$2n-1$ bo'ladi. Bu erda $n-$hadning nomeri. Boshqacha aytganda, juft bo'lmagan sonlar toq sonlardir. Demak, natural sonlar toq va juft sonlar ketma-ketligidan iborat ekan.

Juft va toq sonlar ustida amallar bajarganda uning ma'lum xossalaridan foydalaniladi. Agar juft sonlarni (J) bilan, toq sonlarni esa (T) bilan belgilasak, juft va toq sonlar uchun ushbu xossalarni yozishimiz mumkin:

$$\begin{cases}(J)+(J)=(J)\\(J)-(J)=(J)\\(J)\cdot(J)=(J)\end{cases}\qquad\begin{cases}(J)+(T)=(T)\\(J)-(T)=(T)\\(J)\cdot(T)=(J)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(T)+(T)=(J)\\(T)-(T)=(J)\\(T)\cdot(T)=(T)\end{cases}\qquad\begin{cases}(T)+(J)=(T)\\(T)-(J)=(T)\\(T)\cdot(J)=(J)\end{cases}$$

Masalan, ixtiyoriy juft (8) va toq (3) sonlar uchun $8+5=13$, $8-5=3$, $8\cdot5=40$ misollarni yozib ishonch hosil qilish mumkin.

1.4-Mavzu: EKUK va EKUB

Berilgan natural sonlarning eng kichik umumiy karralisi (EKUK) deb shu sonlarning har biriga bo'linuvchi eng kichik natural songa aytiladi. Ikkita sonning EKUKi bu sonlarning ikkalasidan ham katta bo'ladi yoki ularning kattasiga teng bo'ladi. Agar $a,b,c,..$ natural sonlari berilgan bo'lsa, uning EKUKi $EKUK(a,b,c,..)$ tarzida yoziladi. Berilgan natural sonlarning EKUKini topish uchun har bir sonni tub ko'paytuvchilarga ajratiladi, tub ko'paytuvchilarni $2^n\cdot3^m\cdot5^k\cdot7^p\cdot11^q\cdot13^t\cdot...$ ko'rinishdagi daraja ko'rinishda yoziladi, bir xil asosli darajali ko'paytuvchilardan darajasi kattalari olib chiqiladi.

Misol № 1: 126, 300 va 360 sonlarining EKUKini aniqlang.

Yechish: Bu berilgan sonlarning har birini tub ko'paytuvchilarga ajratsak, $126=2\cdot3^2\cdot7$, $300=2^2\cdot3\cdot5^2$, $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ ko'rinishga keladi. Berilgan sonlarning EKUKi $EKYK(126,300,360)=EKUK(2\cdot3^2\cdot7,\ 2^2\cdot3\cdot5^2,\ 2^3\cdot3^2\cdot5)=2^3\cdot3^2\cdot5^2\cdot7=12600$ kelib chiqadi.

Endi o'zaro tub bo'lgan ikkita natural son olib ularning EKUKini hisoblaylik.

Misol № 2: 15 va 26 sonlarining EKUKini aniqlang.

Yechish: Bu berilgan sonlarning har birini tub ko'paytuvchilarga ajratsak, $15=3\cdot5$, $26=2\cdot13$ ko'rinishga keladi. Berilgan sonlarning EKUKi $EKYK(15,26)=EKUK(3\cdot5,\ 2\cdot13)=2^1\cdot3^1\cdot5^1\cdot13^1=(3\cdot5)\cdot(2\cdot13)=15\cdot26=390$ kelib chiqadi.

2-misoldan ko'rinadiki, tub sonlarning EKUKi ularning ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

Berilgan bir nechta $a,b,c,...$ o'zaro tub bo'lgan sonlarning EKUKi shu sonlarning ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{EKUK(a,b,c,...)=a\cdot b\cdot c\cdot...}$$

Berilgan natural sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi (EKUB) deb shu sonlarning umumiy bo'luvchisi bo'lgan eng katta natural songa aytiladi. Ikkita sonning EKUBi bu sonlarning ikkalasidan ham kichik bo'ladi yoki ularning kichigiga teng bo'ladi. Agar $a,b,c,..$ natural sonlari berilgan bo'lsa, uning EKUBi $EKUB(a,b,c,..)$ tarzida yoziladi. Berilgan natural sonlarning EKUBini topish uchun har bir sonni tub ko'paytuvchilarga ajratiladi, tub ko'paytuvchilarni $2^n\cdot3^m\cdot5^k\cdot7^p\cdot11^q\cdot13^t\cdot...$ ko'rinishdagi daraja ko'rinishda yoziladi, bir xil asosli darajali ko'paytuvchilardan darajasi kichiklari olib chiqiladi.

Misol № 3: 126, 300 va 360 sonlarining EKUBini aniqlang.

Yechish: Bu berilgan sonlarning har birini tub ko'paytuvchilarga ajratsak, $126=2\cdot3^2\cdot7$, $300=2^2\cdot3\cdot5^2$, $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ ko'rinishga keladi. Berilgan sonlarning EKUBi $EKYB(126,300,360)=EKUB(2\cdot3^2\cdot7,\ 2^2\cdot3\cdot5^2,\ 2^3\cdot3^2\cdot5)=2\cdot3=6$ kelib chiqadi.

Endi o'zaro tub bo'lgan ikkita natural son olib ularning EKUBini hisoblaylik.

Misol № 4: 15 va 26 sonlarining EKUBini aniqlang.

Yechish: Bu berilgan sonlarning har birini tub ko'paytuvchilarga ajratsak, $15=3\cdot5$, $26=2\cdot13$ ko'rinishga keladi. Berilgan sonlarning EKUBi $EKYB(15,26)=EKUB(3\cdot5,\ 2\cdot13)=2^0\cdot3^0\cdot5^0\cdot13^0=1$ kelib chiqadi.

4-misoldan ko'rinadiki, tub sonlarning EKUBi har doim 1 ga teng bo'lar ekan.

Berilgan bir nechta $a,b,c,...$ o'zaro tub bo'lgan sonlarning EKUBi har doim 1 ga teng bo'ladi.

$$\boxed{EKUB(a,b,c,\ldots)=1}$$

Berilgan ikkita natural sonning EKUKini ularning EKUBiga ko'paytmasi har doim berilgan sonlarning ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{EKUK(a,b)\cdot EKUB(a,b)=a\cdot b}$$

Yuqoridagi formula faqat ikkita son uchun bajariladi. Endi ikkita sonlarning EKUK va EKUBlari ko'paytmasiga doir misol echib ko'raylik.

Misol № 5: 300 va 360 sonlarining EKUKini ularning EKUBiga ko'paytmasini aniqlang.

Yechish: Bu berilgan sonlarning har birini tub ko'paytuvchilarga ajratsak, $300=2^2\cdot3\cdot5^2$, $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ ko'rinishga keladi. Berilgan sonlarning EKUKi uchun $EKYK(300,360)=EKUK(2^2\cdot3\cdot5^2,\ 2^3\cdot3^2\cdot5)=2^3\cdot3^2\cdot5^2=1800$ va EKUBi uchun $EKYB(300,360)=EKUB(2^2\cdot3\cdot5^2,\ 2^3\cdot3^2\cdot5)=2^2\cdot3\cdot5=60$ natijalar kelib chiqadi. EKUB va EKUKlarni ko'paytirsak, $EKYK(300,360)\cdot EKYB(300,360)=1800\cdot60=108000$ natija chiqadi. Berilgan ikkita natural sonlarning ko'paytmasi $300\cdot360=108000$ bo'ladi. Demak, $EKYK(300,360)\cdot EKYB(300,360)=300\cdot360$ bo'lar ekan.

Kasr sonlar uchun EKUK va EKUB quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\boxed{\begin{aligned} EKUK\left(\frac{n_1}{m_1};\frac{n_2}{m_2};\frac{n_3}{m_3};\ldots\frac{n_k}{m_k}\right)&=\frac{EKUK(n_1;n_2;n_3;\ldots n_k)}{EKUB(m_1;m_2;m_3;\ldots m_k)}\\ EKUK\left(\frac{n_1}{m_1};\frac{n_2}{m_2};\frac{n_3}{m_3};\ldots\frac{n_k}{m_k}\right)&=\frac{EKUB(n_1;n_2;n_3;\ldots n_k)}{EKUK(m_1;m_2;m_3;\ldots m_k)}\end{aligned}}$$

1.5-Mavzu: Bo'linish belgilari

Berilgan sonni boshqa bir songa qoldiqsiz bo'lishning bir necha qoidalarini keltiramiz.

1) 2 ning natural darajasiga, ya'ni 2^nga qoldiqsiz bo'lish belgilari.
   1.1) Biror sonning oxirgi 1 ta raqami 2ga bo'linsa, bu son ham 2 ga bo'linadi. Boshqacha aytganda har qanday juft son 2 ga bo'linadi.
   1.2) Biror sonning oxirgi 2 ta raqami 4 ga bo'linsa, bu son ham 4 ga bo'linadi.
   1.3) Biror sonning oxirgi 3 ta raqami 8 ga bo'linsa, bu son ham 8 ga bo'linadi.
   1.4) Biror sonning oxirgi 4 ta raqami 16 ga bo'linsa, bu son ham 16 ga bo'linadi.
   1.5) Biror sonning oxirgi n ta raqami 2^n ga bo'linsa, bu son ham 2^n ga bo'linadi.
2) 5 ning natural darajasiga, ya'ni 5^n ga qoldiqsiz bo'lish belgilari.
   2.1) Biror sonning oxirgi 1ta raqami 5 yoki 0 raqami bilan tugasa, u holda bu son 5ga bo'linadi.
   2.2) Biror sonning oxirgi 2 ta raqami 25 ga bo'linsa yoki 2ta 0 raqami bilan tugasa, u holda bu son 25 ga bo'linadi.
   2.3) Biror sonning oxirgi n ta raqami 5^n ga bo'linsa yoki oxirgi n ta raqami 0 bilan tugasa, u holda bu son ham 5^n ga bo'linadi.
3) 10 ning natural darajasiga, ya'ni 10^n ga qoldiqsiz bo'lish belgilari.
   Biror sonning oxirgi n ta raqami 0 bilan tugasa, u holda bu son 10^n ga bo'linadi.
4) 3 ga bo'linish belgisi.
   Raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linadigan sonlarning o'zi ham 3 ga bo'linadi.
5) 9 ga bo'linish belgisi.
   Raqamlar yig'indisi 9 ga bo'linadigan sonlarning o'zi ham 9 ga bo'linadi.
6) 6 ga bo'linish belgisi.
   Raqamlar yig'indisi 3 ga bo'linadigan juft sonlar 6ga bo'linadi.
7) 11 ga bo'linish belgisi.
   Biror sonning juft o'rinda turgan raqamlar yig'indisidan toq o'rinda turgan raqamlar yig'indisi ayrilganda ayirma 0 chiqsa yoki ayirma 11 ga bo'linsa, u holda bu son 11 ga bo'linadi.

8) 15 ga bo'linish belgisi.

Bir vaqtda 3 ga va 5 ga bo'linadigan sonlar 15ga bo'linadi.

9) 18ga bo'linish belgisi.

Raqamlar yig'indisi 9 ga bo'linadigan juft sonlar 9ga bo'linadi.

10) 20 ga bo'linish belgisi.

Oxirgi 2ta raqami 20 ga bo'linadigan yoki 2ta raqami 0 bo'lgan sonlar 20ga bo'linadi.

1.5-Mavzu: Oxirgi raqam

Berilgan natural sonni boshqa bir natural songa darajaga ko'targanda hosil bo'lgan sonning oxirgi raqami nima bo'lishini aniqlash uchun bir necha qoidalarini keltiramiz.

1) Oxirgi raqami 0, 1, 5, 6 raqamlari bilan tugaydigan sonning har qanday natural darajasi yana shu 0, 1, 5, 6 raqamlari bilan tugaydi.

$$\boxed{(...0)^n = ...0, \quad (...1)^n = ...1, \quad (...5)^n = ...5, \quad (...6)^n = ...6}$$

Bu erda uchta nuqta $(...)-$ oxirgi raqami ma'lum bo'lgan ixtiyoriy son bo'lish mumkin. Masalan, $5^2 = 25,\ 15^2 = 225,\ 25^2 = 625,...\ (...5)^2 = ...5$ bo'ladi.

2) Oxirgi raqami 4 bilan tugaydigan sonni juft darajaga ko'targanda hosil bo'lgan sonning oxirgi raqami 6 bilan tugaydi, toq darajaga ko'targanda esa hosil bo'lgan sonning oxirgi raqami 4 bilan tugaydi.

$$\boxed{(...4)^{2n} = ...6, \quad (...4)^{2n+1} = ...4}$$

3) Oxirgi raqami 9 bilan tugaydigan sonni juft darajaga ko'targanda hosil bo'lgan sonning oxirgi raqami 1 bilan tugaydi, toq darajaga ko'targanda esa hosil bo'lgan sonning oxirgi raqami 9 bilan tugaydi.

$$\boxed{(...9)^{2n} = ...1, \quad (...9)^{2n+1} = ...9}$$

4) Oxirgi raqami 2, 3, 7, 8 raqamlari bilan tugaydigan sonlarni darajaga ko'targanda hosil bo'ladigan sonning oxirgi raqami 4 martada takrorlanuvchidir.

$$\begin{cases}(...2)^1 = (...2)^{4n+1} = ...2\\(...2)^2 = (...2)^{4n+2} = ...4\\(...2)^3 = (...2)^{4n+3} = ...8\\(...2)^4 = (...2)^{4n} = ...6\end{cases},\quad \begin{cases}(...3)^1 = (...3)^{4n+1} = ...3\\(...3)^2 = (...3)^{4n+2} = ...9\\(...3)^3 = (...3)^{4n+3} = ...7\\(...3)^4 = (...3)^{4n} = ...1\end{cases},\quad \begin{cases}(...7)^1 = (...7)^{4n+1} = ...7\\(...7)^2 = (...7)^{4n+2} = ...9\\(...7)^3 = (...7)^{4n+3} = ...3\\(...7)^4 = (...7)^{4n} = ...1\end{cases},\quad \begin{cases}(...8)^1 = (...8)^{4n+1} = ...8\\(...8)^2 = (...8)^{4n+2} = ...4\\(...8)^3 = (...8)^{4n+3} = ...2\\(...8)^4 = (...8)^{4n} = ...6\end{cases}$$

Yuqoridagi formulalarga doir bir necha misollar ishlaylik.

Misol № 1: 2002^{2002} son qanday raqam bilan tugaydi?

Yechish: Bu $(...2)^2 = (...2)^{4n+2}$ formulaga mos keladi. Shunga ko'ra $2002^{2002} = (...2)^{4\cdot 500+2} = (...2)^2 = ...4$ bo'ladi.

Misol № 2: 157^{368} son qanday raqam bilan tugaydi?

Yechish: Bu $(...7)^4 = (...7)^{4n}$ formulaga mos keladi. Shunga ko'ra $157^{368} = (...7)^{4\cdot 92} = (...7)^4 = ...1$ bo'ladi.

Misol № 3: $135^{782} - 132^{693}$ ayirma natijasi qanday raqam bilan tugaydi?

Yechish: Bunda birinchi had $(...5)^n = ...5$ formulaga, ikkinchi had esa $(...2)^1 = (...2)^{4n+1}$ formulaga mos keladi. SHunga ko'ra ayirma $135^{782} - 132^{693} = (...5)^n - (...2)^{4\cdot 173+1} = (...5) - (...2) = (...3)$ bo'ladi.

1.6-Mavzu: Protsentlar

Sonning yuzdan bir ulushini ***protsent*** deb ataladi va % belgisi bilan belgilanadi. Sonning yuzdan bir ulushi 1% ekan, yuzdan ikki ulushi 2%, yuzdan uch ulushi 3%, yuzdan to'rt qismi 4% va hokoza bo'ladi, ya'ni quyidagicha bo'ladi:

1% = 1/100 =0,01 ,	30% = 30/100 =0,30 ,	150% = 150/100 =1,50 ,
2% = 2/100 =0,02 ,	50% = 50/100 =0,50 ,	300% = 300/100 =3,00 ,
3% = 3/100 =0,03 ,	100% = 100/100 =1,00 ,	500% = 500/100 =5,00 .

Demak sonni protsentga aylantirish uchun uni yuzga ko‘paytirish kerak yoki aksincha protsentni songa aylantirish uchun esa uni yuzga bo‘lish kerak ekan.

Berilgan ixtiyoriy x sonning $p\%$i quyidagi y soniga teng bo‘ladi:

$$\boxed{y=\frac{p\cdot x}{100}}$$

Isboti: Bunda berilgan x sonni 100% deb, uning p% ini esa y deb olamiz va proporsiya tuzamiz. Natijada ushbu

$$\left|\begin{array}{l} x\ ---\ 100\% \\ y\ ---\ p\% \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad y=\frac{x\cdot p\%}{100\%}=\frac{p\cdot x}{100}$$ formula hosil bo‘ladi.

Agar x soni berilgan bo‘lsa va bu sonni $p\%$ ga oshirilsa, u holda qanday y soni hosil bo‘ladi? Bunda x soni qanday Δx miqdorga oshadi?

$$\boxed{y=(1+\frac{p}{100})\cdot x, \qquad \Delta x=\frac{p\cdot x}{100}}$$

Isboti: Bunda berilgan x sonni 100% deb, topilishi kerak bo‘lgan y va Δx sonlarni esa $(p+100)\%$ va $p\%$ deb olamiz va proporsiya tuzamiz. Natijada ushbu

$$\left|\begin{array}{l} x\ ---\ 100\% \\ y\ ---\ (p+100)\% \\ \Delta x---\ p\% \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} y=\frac{x\cdot(p+100)\%}{100\%}=(1+\frac{p}{100})\cdot x \\ \Delta x=\frac{p\%\cdot x}{100\%}=\frac{p\cdot x}{100} \end{array}$$

formula hosil bo‘ladi.

Agar x soni berilgan bo‘lsa va bu sonni $p\%$ ga kamaytirilsa, u holda qanday y soni hosil bo‘ladi? Bunda x soni qanday Δx miqdorga kamayadi?

$$\boxed{y=(1-\frac{p}{100})\cdot x, \qquad \Delta x=\frac{p\cdot x}{100}}$$

Isboti: Bunda berilgan x sonni 100% deb, topilishi kerak bo‘lgan y va Δx sonlarni esa $(p-100)\%$ va $p\%$ deb olamiz va proporsiya tuzamiz. Natijada ushbu

$$\left|\begin{array}{l} x\ ---\ 100\% \\ y\ ---\ (p-100)\% \\ \Delta x---\ p\% \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} y=\frac{x\cdot(p-100)\%}{100\%}=(1-\frac{p}{100})\cdot x \\ \Delta x=\frac{p\%\cdot x}{100\%}=\frac{p\cdot x}{100} \end{array}$$

formula hosil bo‘ladi.

Agar qandaydir noma’lum x sonning o‘zi berilmasdan, uning $p\%$i y ekanligi berilgan bo‘lsa, noma’lum x ni topish quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{x=\frac{100\cdot y}{p}}$$

Isboti: Bunda berilgan y sonni $p\%$ deb, 100% ni esa x deb olamiz va proporsiya tuzamiz. Natijada ushbu

$$\left|\begin{array}{l} p\%\ \ ---\ y \\ 100\%\ ---\ x \end{array}\right| \quad \rightarrow \quad x=\frac{100\%\cdot y}{p\%}=\frac{100\cdot y}{p}$$ formula hosil bo‘ladi.

Sonni bir necha bor har xil yoki bir xil protsentlarga oshirilsa yoki kamaytirilsa, bu jarayon oddiy protsent yoki murakkab protsent qoidasi bo‘yicha amalga oshiriladi.

Oddiy protsentga oshirish yoki kamaytirishda har safar dastlabki berilgan songa nisbatan oshirladi yoki kamaytiriladi.

Murakkab protsentga oshirish yoki kamaytirishda esa har safar eng oxirgi hosil bo‘lgan songa nisbatan oshirladi yoki kamaytiriladi.

Agar berilgan x sonini ketma-ket $p_1, p_2, p_3, \ldots\ p_n\%$ga oddiy protsentli oshirilsa, u holda hosil bo‘lgan y soni quyidagicha bo‘ladi:

$$y=\left(1+\frac{p_1+p_2+p_3+...+p_n}{100}\right)\cdot x$$

Agar berilgan x sonini ketma-ket n marta har safar bir xil $p\%$ ga oddiy protsentli oshirilsa, u holda hosil bo'lgan y soni quyidagicha bo'ladi:

$$y=\left(1+\frac{np}{100}\right)\cdot x$$

Agar berilgan x sonini ketma-ket $p_1, p_2, p_3, ...\ p_n\%$ga oddiy protsentli kamaytirilsa, u holda hosil bo'lgan y soni quyidagicha bo'ladi:

$$y=\left(1-\frac{p_1+p_2+p_3+...+p_n}{100}\right)\cdot x$$

Agar berilgan x sonini ketma-ket n marta har safar bir xil $p\%$ ga oddiy protsentli kamaytirilsa, u holda hosil bo'lgan y soni quyidagicha bo'ladi:

$$y=\left(1-\frac{np}{100}\right)\cdot x$$

Agar berilgan x sonini ketma-ket $p_1, p_2, p_3, ...\ p_n\%$ga murakkab protsentli oshirilsa, u holda hosil bo'lgan y soni quyidagicha bo'ladi:

$$y=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_3}{100}\right)\cdot ...\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right)\cdot x$$

Agar berilgan x sonini ketma-ket n marta har safar bir xil $p\%$ ga murakkab protsentli oshirilsa, u holda hosil bo'lgan y soni quyidagicha bo'ladi:

$$y=\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot x$$

Agar berilgan x sonini ketma-ket $p_1, p_2, p_3, ...\ p_n\%$ ga murakkab protsentli kamaytirilsa, u holda hosil bo'lgan y soni quyidagicha bo'ladi:

$$y=\left(1-\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p_2}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{p_3}{100}\right)\cdot ...\cdot\left(1-\frac{p_n}{100}\right)\cdot x$$

Agar berilgan x sonini ketma-ket n marta har safar bir xil $p\%$ ga murakkab protsentli kamaytirilsa, u holda hosil bo'lgan y soni quyidagicha bo'ladi:

$$y=\left(1-\frac{p}{100}\right)^n\cdot x$$

1.7-Mavzu: Sonli ifodalar, algebraik ifodalar, algebraik tenglik va formulalar haqida tushuncha

Sonli ifodalar deb sonlardan va matematik amallardan iborat ifodalarga aytiladi. Demak, sonli ifodada son hamda to'rtta matematik amallar (qo'shish $(+)$, ayirish $(-)$, ko'paytirish $(\cdot)$, va bo'lish $(:)$) qatnashar ekan. Masalan, $3\cdot(5+7)-8:2$; $\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\cdot 3$; $\frac{2{,}4\cdot 5-6}{3}$ ifodalar sonli ifodalardir.

Sonli ifodaning ***qiymati*** deb shu sonli ifodada ko'rsatilgan matematik amallarni bajarish natijasidan hosil bo'lgan songa aytiladi. Masalan, $(4{,}5-2{,}5)\cdot 4+2$ sonli ifodaning qiymati 10 ga teng, $\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\cdot 2$ sonli ifodaning qiymati $\frac{1}{2}$ ga teng bo'ladi.

Agar ikkita sonli ifoda teng belgisi $(=)$ bilan birlashtirilsa, sonli tenglik hosil bo'ladi. Bunda tenglikning chap va o'ng tomonlari bir xil son bo'lsa, u holda to'g'ri tenglik deyiladi. Masalan,

$\frac{17-7}{2}=2+3$ ifoda to‘g‘ri tenglik bo‘lib, tenglikning har ikkala tomonida amallar bajarilganda (sonli ifodalar echilganda) *5* soni hosil bo‘ladi.

Algebraik ifodalar deb sonlardan, harflardan va matematik amallardan iborat ifodalarga aytiladi. Demak, algebraik ifodada sonlar, harflar hamda to‘rtta matematik amallar (qo‘shish (+), ayirish (–) , ko‘paytirish (·) va bo‘lish (:)) qatnashar ekan. Masalan, $a\cdot(5+7b)-c:2$; $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}\cdot 3z$; $\frac{2m+4n\cdot 5k-6mn}{2m}$ ifodalar algebraik ifodalardir.

Agar algebraik ifodadagi harflar o‘rniga sonlar qo‘yilsa va matematik amallar bajarilsa, hosil bo‘lgan sonni algebraik ifodaning ***son qiymati*** deyiladi. Masalan, $a=3, b=5$ bo‘lganda $\frac{2a+3b}{7}$ algebraik ifodaning *3* ga teng bo‘ladi. Chunki $\frac{2a+3b}{7}=\frac{2\cdot 3+3\cdot 5}{7}=\frac{6+15}{7}=\frac{21}{7}=3$ bo‘ladi.

Algebraik tenglik deb sonlardan, harflardan, matematik amallardan va tenglik belgisidan iborat ifodalarga aytiladi. Demak, algebraik ifodada sonlar, harflar, tenglik hamda to‘rtta matematik amallar (qo‘shish (+), ayirish (-), ko‘paytirish (·) va bo‘lish (:)) qatnashar ekan. Masalan, $a\cdot(5+7b)=\frac{c}{2}$; $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}\cdot 3z$; $3x+5y=3xy$ ifodalar algebraik ifodalardir. Tenglamalar ham algebraik tenglikdir. Chunki, bunda harf o‘rnida noma’lum son – x ishtirok etadi. Masalan, $3\cdot\left(\frac{x}{2}-6\right)=12$ tenglama algebraik tenglikdir.

Biror bir qonuniyatni ifodalovchi algebraik tenglikka ***formula*** deyiladi. Formulada harflar biror kattalik bo‘lib, ular o‘zgaruvchi sonlar qabul qiladi. Masalan, juft sonlar uchun

$$\boxed{a=2n}$$

toq sonlar uchun

$$\boxed{b=2n-1}$$

formulalarini yozish mumkin. Bu erda: $n=1,2,3,4,...$– ixtiyoriy natural son.

Undan tashqari eni a, bo‘yi b bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetri va yuzasi uchun ushbu

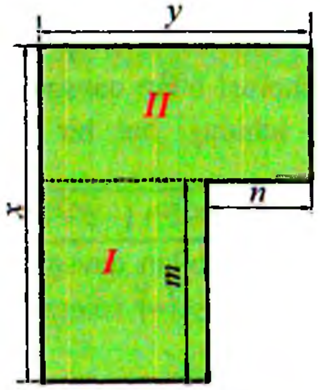
$$\boxed{p=2(a+b),\quad S=ab}$$

formulalarini yozish mumkin.

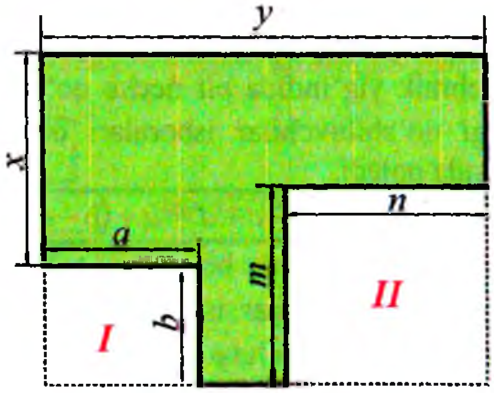
Misol № 1: 1.7.1-rasmda tasvirlangan shaklning perimetri va yuzini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.

Yechish: Rasmdagi shakl perimetrini topish uchun shakldagi tomonlar uzunliklarini qo‘shib chiqamiz. Unga ko‘ra $p=x+y+m+n$ bo‘ladi. Endi yuzani hisoblaymiz. Shakl yuzasi punktir chiziq bilan ajratilgan I va II to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalari yig‘indisiga teng bo‘ladi. Unga ko‘ra $S=S_I+S_{II}=m(y-n)+(x-m)\cdot y=my-mn+xy-my=xy-mn$ bo‘ladi.

Misol № 2: 1.7.2-rasmda tasvirlangan shaklning perimetri va yuzini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.



1.7.1-rasm



1.7.2-rasm

Yechish: Rasmdagi shakl perimetrini topish uchun shakldagi tomonlar uzunliklarini qo'shib chiqamiz. Unga ko'ra $p = y + x + a + b + (y - a - n) + m + n + (x + b - m) = 2x + 2y + 2b = 2(x + b + y)$ bo'ladi. Endi yuzani hisoblaymiz. Shakl yuzasi tomonlari $x + b$ va y bo'lgan katta to'g'ri to'rtburchak yuzasidan I va II to'g'ri to'rtburchaklar yuzalarini ayirib tashlash natijasiga teng bo'ladi. Unga ko'ra $S = (x + b) \cdot y - S_I - S_{II} = xy + by - ab - mn$ bo'ladi.

1.8-Mavzu: Arifmetik amallarning xossalari hamda qavslarni ochish qoidalari

Arifmetik amallarning xossalari bir necha qonunlar asosida o'rganiladi. Asosan bu qonunlar qo'shish va ko'paytirish amallarida bajariladi va ular quyidagilardan iborat:

1) O'rin almashtirish qonuni:

Yig'indi va ko'paytmada qo'shiluvchilar va ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirish bilan natija o'zgarmaydi.

$$\boxed{a + b = b + a, \quad ab = ba}$$

2) Guruhlash qonuni:

Yig'indida qaysi tartibda qo'shib chiqish yoki ko'paytmada qaysi tartibda ko'paytirib chiqish natijaga ta'sir etmaydi.

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c) = b + (a + c), \quad (ab)c = a(bc) = b(ac)}$$

3) Taqsimot qonuni:

Bir sonni ikki son yig'indisiga ko'paytirganda birinchi son qo'shiluvchilarning har biriga ko'paytiriladi va natijalar qo'shiladi.

$$\boxed{a(b + c) = ab + ac}$$

Ayirishni qarama-qarshi sonni qo'shish bilan almashtirish mumkin.

$$\boxed{a - b = a + (-b)}$$

Yuqoridagini inobatga olib taqsimot qonunini quyidagicha yozish mumkin.

Bir sonni ikki son ayirmasiga ko'paytirganda birinchi son ayirmadagi har bir songa ko'paytiriladi va natijalar ayiriladi.

$$\boxed{a(b - c) = ab - ac}$$

Algebraik yig'indi deb $(+)$ va $(-)$ ishoralari bilan birlashtirilgan bir necha ifodalarga aytiladi.

Algebraik yig'indida oldida $(+)$ ishora turgan qavsni ochganda qavs ichidagi qo'shiluvchilar ishoralari o'zgarmaydi, ya'ni qavs ichidagi har bir qo'shiluvi o'z ishorasida qoladi.

$$\boxed{a + (b + c) = a + b + c, \quad a + (b - c) = a + b - c}$$

Algebraik yig'indida oldida $(-)$ ishora turgan qavsni ochganda qavs ichidagi qo'shiluvchilar ishoralari qarama-qarshisiga o'zgaradi, ya'ni $(+)$ ishorali qo'shiluvchi $(-)$ ishoraga va aksincha o'zgaradi.

$$\boxed{-(-a) = a, \quad -(a + b) = -a - b, \quad a - (b + c) = a - b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c}$$

Qavsni ochishga teskari jarayon – qavs ichiga olishdir. Qavs ichga olish 2 xil usulda bajarilishi mumkin: 1) oldida $(+)$ ishorasi bilan qavsga olish; 2) oldida $(-)$ ishorasi bilan qavsga olish.

Algebraik yig'indida bir necha qo'shiluvchini oldida $(+)$ ishorasi bilan qavsga olganda qavs ichidagi qo'shiluvchilar ishoralari o'zgarmaydi, ya'ni qavs ichidagi har bir qo'shiluvi o'z ishorasida qoladi.

$$\boxed{a + b - c + d = a + (b - c + d) \quad yoki \quad a + b - c + d = a + b + (-c + d)}$$

Algebraik yig'indida bir necha qo'shiluvchini oldida $(-)$ ishorasi bilan qavsga olganda qavs ichidagi qo'shiluvchilar ishoralari qarama-qarshisiga o'zgaradi, ya'ni $(+)$ ishorali qo'shiluvchi $(-)$ ishoraga va aksincha o'zgaradi.

$$\boxed{a + b - c + d = a - (-b + c - d) \quad yoki \quad a + b - c + d = a + b - (c - d)}$$

Yuqorida sanab o'tilgan qonun va qoidalar kelgusida bizga juda asqotadi.

1.9-Mavzu: Natural ko‘rsatkichli daraja va uning xossalari

Bir xil sonlarni qo‘shishni ko‘paytirish amali bilan almashtirish mumkinligini bilamiz.

$$\underbrace{4+4+4+4+4}_{5\,marta}=4\cdot 5,\qquad \underbrace{4+4+4+...+4}_{n\,marta}=4\cdot n,\qquad \underbrace{a+a+a+a+a}_{n\,marta}=a\cdot n$$

Xuddi yuqoridagi kabi bir xil sonlarni ko‘paytirishni yangi amal, ya’ni darajaga ko‘tarish amali bilan almashtirish mumkin ekan.

$$\underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 4}_{5\,marta}=4^5,\qquad \underbrace{4\cdot 4\cdot 4\cdot ...\cdot 4}_{n\,marta}=4^n,\qquad \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{n\,marta}=a^n$$

Umuman olganda, n ta bir xil ko‘paytuvchini qisqacha qilib daraja ko‘rinishida yozish mumkin.

$$\boxed{\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{n\,marta}=a^n}$$

Bu erda: a – daraja asosi, n – daraja ko‘rsatkichi.

Masalan, $3^5=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=243$, $2^6=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=64$, $10^3=10\cdot 10\cdot 10=1000$, $0{,}1^2=0{,}1\cdot 0{,}1=0{,}01$.

Sonning o‘zini uning birinchi darajasi deb yozish mumkin.

$$\boxed{a=a^1}$$

Masalan, $6^1=6$, $0{,}3^1=0{,}3$, $25^1=25$, $\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{2}{5}$.

0 va 1 ning istalgan natural darajasi o‘ziga teng bo‘ladi.

$$\boxed{0^n=\underbrace{0\cdot 0\cdot 0\cdot ...\cdot 0}_{n\,marta}=0,\qquad 1^n=\underbrace{1\cdot 1\cdot 1\cdot ...\cdot 1}_{n\,marta}=1}$$

Darajaning asosi istalgan son bo‘lishi mumkin, ya’ni musbat, 0 va manfiy bo‘lishi mumkin.

Musbat sonni ixtiyoriy natural darajaga ko‘tarish natijasida yana musbat son hosil bo‘ladi.

$$\boxed{Agar\ a>0\ bo'lsa,\quad a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n\,marta}>0\ \ bo'ladi}$$

Masalan, $2^5=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=32>0$, $2^6=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2=64>0$.

Manfiy sonni juft darajaga ko‘targanda musbat son, toq darajaga ko‘targanda esa manfiy son hosil bo‘ladi.

$$\boxed{\begin{array}{l} Agar\ a<0\ bo'lsa,\quad a^{2n}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{juft\ marta}>0\ \ bo'ladi \\ Agar\ a>0\ bo'lsa,\quad a^{2n-1}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{toq\ marta}<0\ \ bo'ladi \end{array}}$$

Masalan, $(-2)^6=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=64>0$, $(-2)^5=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-32<0$.

Sonni darajaga ko‘tarish bir necha muhim xossalarga ega bo‘lib, bu xossalarga birma-bir to‘xtalib o‘tamiz.

1) Bir xil asosli darajalarni ko‘paytirishda asos o‘zgarmasdan qoladi, daraja ko‘rsatkichlari esa qo‘shiladi.

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$$

Isboti: Bunda $a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{m\,marta}$ va $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n\,marta}$ ekanligini e’tiborga olsak,

$a^m\cdot a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{m\,marta}\cdot\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n\,marta}=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{m+n\ marta}$ natija kelib chiqadi.

Masalan, $2^3\cdot 2^6=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2}_{3\,marta}\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{6\,marta}=\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}_{9\,marta}=2^9$.

2) Bir xil asosli darajalarni bo'lishda asos o'zgarmasdan qoladi, daraja ko'rsatkichlari esa ayriladi.

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n} \quad (m \geq n \ da)}$$

Isboti: Bunda $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta}$ va $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ marta}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$a^m : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta} : \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ marta} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \ marta}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ marta}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m-n \ marta} = a^{m-n}$ natija kelib chiqadi.

Masalan, $3^8 : 3^3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{8 \ marta} : \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \ marta} = \dfrac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}^{8 \ marta}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \ marta}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \ marta} = 3^5$.

Yuqoridagi formulalardan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

2.1) Agar $(m \leq n)$ bo'lsa, yuqoridagi formula quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad (m \leq n \ da)}$$

Isboti: Bunda $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta}$ va $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ marta}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$a^m : a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta} : \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ marta} = \dfrac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{m \ marta}}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \ marta}} = \dfrac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m \ marta}} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$ natija kelib chiqadi.

Masalan, $3^3 : 3^8 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}_{3 \ marta} : \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{8 \ marta} = \dfrac{\overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3}^{3 \ marta}}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{8 \ marta}} = \dfrac{1}{\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \ marta}} = \dfrac{1}{3^5}$.

2.2) Agar $m - n = -p$ desak, u holda quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

2.3) 0 dan farqli sonning *0*-darajasi har doim 1 ga teng bo'ladi.

$$\boxed{a^0 = 1}$$

Isboti: Bunda $a^m : a^n$ darajalarda $m = n$ desak, $a^0 = a^m : a^m = \dfrac{a^m}{a^m} = 1$ kelib chiqadi.

3) Darajani darajaga ko'tarishda asos o'zgarmasdan qoladi, daraja ko'rsatkichlari esa o'zaro ko'paytirilib yoziladi.

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Isboti: Bunda $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \ marta} = \underbrace{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta} \cdot \ldots \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \ marta}}_{n \ marta} = a^{m \cdot n}$$

kelib chiqadi.

Yuqoridagi formuladan quyidagi natijalarni osongina keltirib chiqarish mumkin:

$$\boxed{\left((a^m)^n\right)^p = a^{m \cdot n \cdot p} \quad yoki \quad \left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^t = a^{m \cdot n \cdot p \cdot t}}$$

4) Ko'paytmaning darajasi darajalar ko'paytmasiga teng.

$$\boxed{(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n}$$

Isboti: Bunda darajani $(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\ marta}$ deb yozib, ko'paytuvchilarning o'rin almashtirish xossasiga ko'ra $(a\cdot b)^n = \underbrace{(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)\cdot\ldots\cdot(a\cdot b)}_{n\ marta} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ marta}\cdot\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ marta} = a^n\cdot b^n$ natija hosil bo'ladi.

5) Bo'linmaning darajasi darajalar nisbatiga teng.

$$\boxed{(a:b)^n = a^n : b^n}$$

Isboti: Bunda darajani $(a:b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ marta}$ deb yozib, kasrlarni ko'paytirish xossasiga asosan $(a:b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ marta} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n\ marta}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n\ marta}} = \frac{a^n}{b^n} = a^n : b^n$ natija hosil bo'ladi.

1.10-Mavzu: Birhadlar va ko'phadlar

Sonlar bilan yozilgan ko'paytuvchiga sonli ko'paytuvchi, harflar bilan yozilgan ko'paytuvchiga harfiy ko'paytuvchi deyiladi. Masalan, $5b^2c$ ifodada birinchi ko'paytuvchi 5 soni, qolgan uchtasi b, b, c harfiy ko'paytuvchilar, jami to'rtta ko'paytuvchi bor.

Sonli va harfiy ko'paytuvchilar ko'paytmasidan iborat algebraik ifodaga birhad deyiladi. Boshqacha aytganda, birhadda sonlar, harflar hamda matematik amallarning ko'paytirish $(\cdot)$ va bo'lish $(:)$ amallari ishtirok etadi (eslang: algebraik ifodada to'rtala matematik amal ham ishtirok etar edi). Bo'lish $(:)$ amalini ko'paytirish $(\cdot)$ ko'rinishda ham yozish mumkin. Masalan, $\frac{a^2bcx^3}{4}$ birhadni $0{,}25\cdot a^2bcx^3$ ko'rinishda yozish ham mumkin. Bu ifodada bitta sonli va ettita harfiy ko'paytuvchi ishtirok etmoqda.

Birhadni standart ko'rinishda yozish uchun avval sonli ko'paytuvchini so'ngra esa harfiy ko'paytuvchilarni alfavit boshidan boshlab yozish kerak. Bunda bir xil ko'paytuvchilar daraja ko'rinishga keltiriladi. Maslan, $32ac(0{,}5)a(0{,}25)cb$ birhadni standart ko'rinishda $32ac(0{,}5)a(0{,}25)cb = (32\cdot 0{,}5\cdot 0{,}25)(a\cdot a)bc = 4a^2bc$ deb yoziladi.

Standart shaklda yozilgan birhadning son ko'paytuvchisini shu birhadning koeffitsienti deyiladi.

Birhadni birhadga ko'paytirish uchun sonlar sonlarga mos harflar mos harflarga ko'paytirib daraja ko'rinishda yoziladi. Masalan, ushbu uchta $(4a), (3am), (5xyn)$ birhadni ko'paytirganimizda $(4a)\cdot(3am)\cdot(5xyn) = (4\cdot 3\cdot 5)aamxyn = 60a^2mnxy$ bo'ladi.

Demak, birhadni birhadga ko'paytirganda yana birhad hosil bo'lar ekan. Nafaqat birhadni birhadga ko'paytirganda, balki bir necha birhadlarni o'zaro ko'paytirganda ham, birhadni ixtiyoriy natural darajaga ko'targanda ham yana birhad hosil bo'ladi. Masalan, $(5nx^2y^3z)^4 = 625n^4x^8y^{12}z^4$.

Birhadlarning yig'indisi yoki ayirmasidan iborat algebraik ifodaga ***ko'phad*** deyiladi. Masadan, ushbu $3a^2b - 5mn^2 - 9knm + 2abn$ ko'phadni $3a^2b$, $-5mn^2$, $-9knm$ va $2abn$ to'rtta birhadning yig'indisidan iborat deb hisoblash mumkin. Bunda ko'phadni tashkil etuvchi birhadlarni ***ko'phadning hadlari*** deyiladi.

Ko'phadning harfiy qismlari bir xil bo'lgan hadlarini ***o'xshash hadlar*** deyiladi. Ko'phad standart ko'rinishda bo'lishi uchun o'xshash hadlar ixchamlanishi kerak, ya'ni bitta ko'phadning ikkita o'xshash hadi bo'lmasligi kerak.

Ko'phadni ko'phadga qo'shish yoki ayirishda o'xshash hadlar ixchamlab, natija yana ko'phad ko'rinishida yoziladi.

Masalan, $5ab-2bc+8ac-ab+2bc+3ab-ac$ ko'phadda harfiy qismi ab bo'lgan uchta had, bc bo'lgan ikkita had va ac bo'lgan ikkita had bor. O'xshash hadlar $5ab-2bc+8ac-ab+4{,}5bc+3ab-ac=(5ab-ab+3ab)+(-2bc+4{,}5bc)+(8ac-ac)=8ab+2{,}5bc+7ac$ kabi ixchamlanadi.

Ko'phadni birhadga ko'paytirish uchun ko'phadning har bir hadini birhadga ko'paytirish va hosil bo'lgan hadlarni qo'shib chiqish kerak bo'ladi.

Masalan, $(2a+3b-8c)(3abc)$ ko'paytmada $2a+3b-8c$ ko'phad $3abc$ birhadga ko'paytirilmoqda. Bunda qavs ochib chiqilganda $(2a+3b-8c)\cdot(3abc)=2a\cdot 3abc+3b\cdot 3abc-8c\cdot 3abc=6a^2bc+9ab^2c-24abc^2$ ko'phad hosil bo'ladi. Ko'phadni birhadga ko'paytirganda ko'phadning hadlar soni nechta bo'lsa, ko'paytirish natijasida ham yana shuncha had hosil bo'ladi.

Ko'phadni ko'phadga ko'paytirish uchun birinchi ko'phadning har bir hadini ikkinchi ko'phadning har bir hadiga ko'paytirib chiqiladi va hosil bo'lgan hadlarni qo'shib chiqiladi, o'xshash hadlar ixchamlanadi.

Masalan, $(2a+3)(5a-4)=2a\cdot 5a+2a\cdot(-4)+3\cdot 5a+3\cdot(-4)=10a^2-8a+15a-12=10a^2+7a-12$.

Ko'phadni ko'phadga ko'paytirganda ko'phadning hadlar sonlari ko'paytmasiga teng sondagi had hosil bo'ladi. Masalan, uchhadni to'rthadga ko'paytirganda $3\cdot 4=12$ ta had hosil bo'ladi, so'ngra o'xshash hadlar ixchamlanadi.

1.11-Mavzu: Umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish. Guruhlash usuli

Ko'phadni ikki va undan ko'p hadlar ko'paytmasi shaklida yozishga ko'phadni ***ko'paytuvchilarga ajratish*** deyiladi.

Agar ko'phadning barcha hadlari son yoki harfdan iborat umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lsa, u holda ana shu ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish mumkin.

Masalan, $9ab-3b+15bc$ ko'paytuvchiga ajratish so'ralgan bo'lsa, uning hadlarini $9ab=3a\cdot 3b$, $-3b=(-1)\cdot 3b$, $15bc=5c\cdot 3b$ deb yozish mumkin. Ko'rinib turibdiki, har bir hadda mavjud bo'lgan umumiy ko'paytuvchi $3b$ bo'ladi. Ushbu umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarsak, $9ab-3b+15bc=3a\cdot 3b-1\cdot 3b+5c\cdot 3b=3b(3a-1+5c)$ bo'ladi.

Misol № 1: $4x^2y^4-2x^4y^2+6x^3y^3$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

<u>Yechish:</u> Bunda har bir haddagi umumiy ko'paytuvchi $2x^2y^2$ ekanligi ko'rinib turibdi. Ana shu umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarsak, $4x^2y^4-2x^4y^2+6x^3y^3=2x^2y^2(2y^2-x^2+3xy)$ natija chiqadi.

Misol № 2: $3n(m-3)+5m(m-3)$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

<u>Yechish:</u> Bunda har bir haddagi umumiy ko'paytuvchi $m-3$ ekanligi ko'rinib turibdi. Ana shu umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarsak, $3n(m-3)+5m(m-3)=(m-3)(3n+5m)$ natija chiqadi.

Ko'phadning hamma hadlarida bir xil umumiy ko'paytuvchi bo'lmagan hollarda guruhlash usulidan foydalaniladi.

Guruhlash usulida bir xil umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lgan hadlar aniqlanib, ular guruhlarga birlashtiriladi so'ngra umumiy ko'paytuvchi qavsdan tashqariga chiqariladi.

Misol № 3: $ac+bc-2ad-2bd$ ko'phadni guruhlash usulidan foydalanib, ko'paytuvchilarga ajrating.

<u>Yechish:</u> Bunda dastlabki ikkita had birinchi guruhga olinib, unda $ac+bc=c(a+b)$ ko'rinishga keladi, oxirgi ikkita had ikkinchi guruhga olinib, unda $-2ad-2bd=-2a(a+b)$ ko'rinishga keladi. Ikkala guruhda ham $(a+b)$ umumiy ko'paytuvchi bo'lgani uchun uni qavsdan tashqariga chiqariladi, ya'ni $ac+bc-2ad-2bd=c(a+b)-2a(a+b)=(a+b)(c-2a)$ natija chiqadi.

Misol № 4: $ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2$ ko'phadni guruhlash usulidan foydalanib, ko'paytuvchilarga ajrating.

Yechish: Bunda 1-, 3- va 6-hadlarni birinchi guruhga olinib, unda $ax^2-bx^2-cx^2=x^2(a-b-c)$ ko'rinishga keladi, 2-,4- va5-hadlar ikkinchi guruhga olinib, unda $-ay+cy+by=-y(a-b-c)$ ko'rinishga keladi. Ikkala guruhda ham $(a-b-c)$ umumiy ko'paytuvchi bo'lgani uchun uni qavsdan tashqariga chiqariladi, ya'ni $ax^2-ay-bx^2+cy+by-cx^2=x^2(a-b-c)-y(a-b-c)=$ $=(a-b-c)(x^2-y)$ natija chiqadi.

Misol № 5: $139\cdot15+18\cdot139+15\cdot261+18\cdot261$ sonli ko'phadni guruhlash usulidan foydalanib, ko'paytuvchilarga ajrating va hisoblang.

Yechish: Bunda dastlabki ikkita had birinchi guruhga olinib, unda $139\cdot15+18\cdot139=139\cdot(15+18)$ ko'rinishga keladi, oxirgi ikkita had ikkinchi guruhga olinib, unda $15\cdot261+18\cdot261=261\cdot(15+18)$ ko'rinishga keladi. Ikkala guruhda ham $(15+18)$ umumiy ko'paytuvchi bo'lgani uchun uni qavsdan tashqariga chiqariladi, ya'ni $139\cdot15+18\cdot139+15\cdot261+18\cdot261=139\cdot(15+18)+261\cdot(15+18)=$ $=(15+18)\cdot(139+261)=33\cdot400=13\,200$ natija chiqadi.

1.12-Mavzu: Qisqa ko'paytirish formulalari

Ko'pincha ko'phadlar bilan ishlayotganda, ko'phadni ko'paytuvchiga ajratishda yoki qavslarni ochishda qiyinchiliklarga duch kelamiz. Ko'phad bilan bog'liq misollarda ishimizni osonlashtirish uchun *qisqa ko'paytirish formulasi* deb ataladigan formulalardan foydalanishimiz lozim bo'ladi. Qisqa ko'paytirish formulalari 7 ta bo'lib, ulardan ularning har biridan yana natijaviy formulalar hosil qilish mumkin. Bu formulalarning har biriga batafsil to'xtalib o'tamiz.

1) Birhadlar yig'indisining kvadrati yoki yig'indining kvadrati:

Birhadlar yig'indisining kvadrati birinchi hadning kvadrati qo'shuv ikkala had ko'paytmasining ikkilanganligi qo'shuv ikkinchi hadning kvadratiga teng bo'ladi.

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

Isboti: Buni qavsni ochish qoidasi bo'yicha bajaramiz. Unga ko'ra $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$ natija kelib chiqadi.

Agar yuqoridagi formulada $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{y}$ deb almashtirsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz (ildiz va uning xossalari bilan keyingi boblarda batafsil tanishamiz):

$$\boxed{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=x+2\sqrt{xy}+y}$$

Yig'indianing kvadratiga doir bir necha misollar ishlaylik.

Misol № 1: $(3a+2b)^2$ ikkihadning kvadratini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar yig'indisining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(3a+2b)^2=(3a)^2+2\cdot3a\cdot2b+(2b)^2=9a^2+12ab+4b^2$ bo'ladi.

Misol № 2: $\left(\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}y^2\right)^2$ ikkihadning kvadratini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar yig'indisining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $\left(\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}y^2\right)^2=\left(\frac{3}{4}x^3\right)^2+2\cdot\frac{3}{4}x^3\cdot\frac{2}{3}y^2+\left(\frac{2}{3}y^2\right)^2=\frac{9}{16}x^6+x^3y^2+\frac{4}{9}y^4$ bo'ladi.

Misol № 3: 1003^2 ikkihadning kvadrati formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish: Buni birhadlar yig'indisining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $1003^2=(1000+3)^2=1000^2+2\cdot1000\cdot3+3^2=1000000+2000+9=1002009$ bo'ladi.

Misol № 4: $(-3a-2b)^2$ ikkihadning kvadratini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar yig'indisining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(3a-2b)^2=(-3a)^2+2\cdot(-3a)\cdot(-2b)+(-2b)^2=9a^2+12ab+4b^2$ bo'ladi. Bu javob 1-misolda $(3a+2b)^2$ ning javobi bilan bir xil chiqdi

Demak, 1- va 4-misoldan ushbu formulani yozishimiz mumkin ekan.

$$\boxed{(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}$$

Misol № 5: $12a^5b + 24a^4b + 12a^3b$ ko'phadni ko'paytuvchilarga ajrating.

Yechish: Bu ko'phadda dastlab hamma hadlar uchun umumiy ko'paytuvchi bo'lgan $12a^3b$ ni qavsdan chiqarib , so'ngra chiqarib birhadlar yig'indisining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $12a^5b + 24a^4b + 12a^3b = 12a^3b(a^2 + 2a + 1) = 12a^3b(a+1)^2$ bo'ladi.

2) Birhadlar ayirmasining kvadrati yoki ayirmaning kvadrati:

Birhadlar ayirmasining kvadrati birinchi hadning kvadrati ayiruv ikkala had ko'paytmasining ikkilanganligi qo'shuv ikkinchi hadning kvadratiga teng bo'ladi.

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Isboti: Buni qavsni ochish qoidasi bo'yicha bajaramiz. Unga ko'ra $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$ natija kelib chiqadi. Buni yig'indining kvadratidan ham isbot qilish mumkin. Unga ko'ra $(a-b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ natija kelib chiqadi.

Agar yuqoridagi formulada $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ deb almashtirsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$\boxed{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y}$$

Ayirmaning kvadratiga doir bir necha misollar ishlaylik.

Misol № 6: $(3z - 2t)^2$ ikkihadning kvadratini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar ayirmasining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(3z-2t)^2 = (3z)^2 - 2\cdot 3z \cdot 2t + (2t)^2 = 9z^2 + 12zt + 4t^2$ bo'ladi.

Misol № 7: $(0{,}4bx - 0{,}5cy)^2$ ikkihadning kvadratini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar ayirmasining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(0{,}4bx - 0{,}5cy)^2 = (0{,}4bx)^2 - 2\cdot 0{,}4bx \cdot 0{,}5cy + (0{,}5cy)^2 = 0{,}16b^2x^2 - 0{,}4bcxy + 0{,}25c^2y^2$ bo'ladi.

Misol № 8: 997^2 ikkihadning kvadrati formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish: Buni birhadlar ayirmasining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $997^2 = (1000-3)^2 = 1000^2 - 2\cdot 1000 \cdot 3 + 3^2 = 1000000 - 2000 + 9 = 998\ 009$ bo'ladi.

Misol № 9: $(2t - 3z)^2$ ikkihadning kvadratini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar ayirmasining kvadrati formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(2t-3z)^2 = (2t)^2 - 2\cdot 2t \cdot 3z + (3z)^2 = 4t^2 + 12zt + 9z^2$ bo'ladi. Bu javob 5-misolda $(3z-2t)^2$ ning javobi bilan bir xil chiqdi.

Demak, 6- va 9-misoldan ushbu formulani yozishimiz mumkin ekan.

$$\boxed{(b-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}$$

3) Birhadlar kvadratlarining ayirmasi yoki kvadratlar ayirmasi:

Birhadlar kvadlari ayirmasi birhadlar ayirmasini ular yig'indisining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

Isboti: Bunda tenglikning chap tomonidan qavslarni ochish yo'li bilan o'ng tomonini keltirib chiqaramiz. Unga ko'ra $(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2$ natija kelib chiqadi.

Agar yuqoridagi formulada $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt{y}$ deb almashtirsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz (ildiz va uning xossalari bilan keyingi boblarda batafsil tanishamiz).

$$\boxed{x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}$$

Kvadratlar ayirmasiga doir bir necha misollar ishlaylik.

Misol № 9: $(3m + n)\cdot(n - 3m)$ ifodada qavslarni oching.

Yechish: Buni birhadlar kvadrati ayirmasi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(3m+n)\cdot(n-3m) = (n-3m)\cdot(n+3m) = n^2 - (3m)^2 n^2 - 9m^2$ natija chiqadi.

Misol № 10: $\left(1{,}5c^2-\frac{3}{4}b\right)\cdot\left(\frac{3}{4}b+1{,}5c^2\right)$ ifodada qavslarni oching.

Yechish: Buni birhadlar kvadrati ayirmasidan formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $\left(1{,}5c^2-\frac{3}{4}b\right)\cdot\left(\frac{3}{4}b+1{,}5c^2\right)=\left(1{,}5c^2-\frac{3}{4}b\right)\cdot\left(1{,}5c^2+\frac{3}{4}b\right)=\left(1{,}5c^2\right)^2-\left(\frac{3}{4}b\right)^2=2{,}25c^4-\frac{9}{16}b^2$ natija kelib chiqadi.

Misol № 11: $(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ ifodani ko'phad shaklida yozing.

Yechish: Buni birhadlar kvadrati ayirmasi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)=(x^2+1)\cdot(x^2-1)=(x^2)^2-1^2=x^4-1$ natija kelib chiqadi.

Misol № 12: $4+(-x^2-2xy-y^2)$ ifodani ko'paytuvchilarga ajrating.

Yechish: Qavs ichidan (-) ishorani chiqarib olib, kvadratlar yig'indisi va kvadratlar ayirmasini formulalaridan foydalanib ishlaymiz. Unga ko'ra $4+(-x^2-2xy-y^2)=4-(x^2+2xy+y^2)=2^2-(x+y)^2=(2-(x+y))(2+x+y)=(2-x-y)(x+y+2)$ natija kelib chiqadi.

Misol № 13: $997\cdot1003$ ko'paytmani hisoblang.

Yechish: Buni birhadlar kvadrati ayirmasi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $997\cdot1003=(1000-3)\cdot(1000+3)=1000^2-3^2=1\,000\,000-9=999\,991$ natijaga ega bo'lamiz.

Misol № 14: $(3x-1)^2-(2x-3)^2=0$ tenglamani eching.

Yechish: Buni birhadlar kvadrati ayirmasi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(3x-1)^2-(2x-3)^2=0,\ \rightarrow\ ((3x-1)-(2x-3))\cdot((3x-1)+(2x-3))=0,\ \rightarrow\ (3x-1-2x+3)\cdot(3x-1+2x-3)=0,\ \rightarrow$ $\rightarrow\ (x+2)\cdot(5x-4)=0,\ \rightarrow\ x_1=-2\ va\ x_2=4/5$ bo'ladi.

4) Birhadlar yig'indisining kubi yoki yig'indining kubi:

Birhadlar yig'indisining kubi birinchi hadning kubi qo'shuv birinchi had kvadrati va ikkinchi had ko'paytmasining uchlanganligi qo'shuv birinchi had va ikkinchi had kvadrati ko'paytmasining uchlanganligi qo'shuvikkinchi hadning kubiga teng bo'ladi.

$$\boxed{(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

Isboti: Bunda yig'indining kvadratini ochganimiz kabi uchta qavsni ochib chiqiladi. Unga ko'ra $(a+b)^3=(a+b)^2\cdot(a+b)=(a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)=a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ natija kelib chiqadi.

Agar yuqoridagi formulada $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$ deb almashtirsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3=x+3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}+y}$$

Yig'indining kubiga doir misollar ishlaylik.

Misol № 15: $(3a+2b)^3$ ikkihadning kvadratini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar yig'indisining kubi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(3a+2b)^3=(3a)^3+3\cdot(3a)^2\cdot2b+3\cdot3a\cdot(2b)^2+(2b)^3=27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$ bo'ladi.

Misol № 16: $\left(\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}y^2\right)^3$ ikkihadning kubini ko'phad shakliga keltiring.

Yechish: Buni birhadlar yig'indisining kubi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $\left(\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{3}y^2\right)^3=\left(\frac{3}{4}x^3\right)^3+3\cdot\left(\frac{3}{4}x^3\right)^2\cdot\frac{2}{3}y^2+3\cdot\frac{3}{4}x^3\left(\frac{2}{3}y^2\right)^2+\left(\frac{2}{3}y^2\right)^3=\frac{27}{64}x^9+\frac{9}{8}x^6y^2+x^3y^4+\frac{8}{27}y^6$ natija kelib chiqadi.

Misol № 17: 1003^3 ikkihadning kubi formulasidan foydalanib hisoblang.

Yechish: Buni birhadlar yig'indisining kubi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $1003^3=(1000+3)^3=1000^3+3\cdot1000^2\cdot3+3\cdot1000\cdot3^2+3^3=1000\,000\,000+9\,000\,000+27\,000+27=1\,009\,027\,027$ bo'ladi.

5) Birhadlar ayirmasining kubi yoki ayirmaning kubi:

Birhadlar yig'indisining kubi birinchi hadning kubi ayiruv birinchi had kvadrati va ikkinchi had ko'paytmasining uchlanganligi qo'shuv birinchi had va ikkinchi had kvadrati ko'paytmasining uchlanganligi ayiruv ikkinchi hadning kubiga teng bo'ladi.

$$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$$

Isboti: Bunda ayirmaning kvadratini ochganimiz kabi uchta qavsni ochib chiqiladi. Unga ko'ra $(a-b)^3=(a-b)^2\cdot(a-b)=(a^2-2ab+b^2)\cdot(a-b)=a^3-a^2b-2a^2b+2ab^2+ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ natija kelib chiqadi. Buni yig'indining kubidan ham isbot qilish mumkin. Unga ko'ra $(a-b)^3=(a+(-b))^3=a^3+3a^2(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ natija kelib chiqadi.

Agar yuqoridagi formulada $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$ deb almashtirsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^3=x-3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}-y}$$

Ayirmaning kubiga doir misollar ishlaylik.

Misol № 18: $(3z-2t)^3$ ikkihadning kubini ko'phad shakliga keltiring.

<u>Yechish:</u> Buni birhadlar ayirmasining kubi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $(3z-2t)^3=(3z)^3-3\cdot(3z)^2\cdot2t+3\cdot3z\cdot(2t)^2-(2t)^3=27z^3-54z^2t+36zt^2-8t^3$ bo'ladi.

Misol № 19: $(0{,}4bx-0{,}5cy)^3$ ikkihadning kubini ko'phad shakliga keltiring.

<u>Yechish:</u> Buni birhadlar ayirmasining kubi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra misol yechimi $(0{,}4bx-0{,}5cy)^3=(0{,}4bx)^3-3\cdot(0{,}4bx)^2\cdot0{,}5cy+3\cdot0{,}4bx\cdot(0{,}5cy)^2-(0{,}5cy)^3=$
$=0{,}064b^3x^3-0{,}24b^2cx^2y+0{,}3c^2xy^2-0{,}125c^3y^3$ bo'ladi.

Misol № 20: 997^3 ifodani ikkihadning kubi formulasidan foydalanib hisoblang.

<u>Yechish:</u> Buni birhadlar ayirmasining kubi formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $997^3=(1000-3)^3=1000^3-3\cdot1000^2\cdot3+3\cdot1000\cdot3^2-3^3=1000000\,000-9000\,000+27000-27=991\,026\,973$ bo'ladi.

6) Birhadlar kublarining yig'indisi yoki kublar yig'indisi:

Birhadlar kublari yig'indisi birhadlar yig'indisini birinchi hadning kvadrati ayiruv birhadlar ko'paytmasi qo'shuv ikkinchi hadning kvadrati natijasiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi.

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

Isboti: Bunda tenglikning chap tomonidan qavslarni ochish yo'li bilan o'ng tomonini keltirib chiqaramiz. Unga ko'ra $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$ natija kelib chiqadi.

Agar yuqoridagi formulada $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$ deb almashtirsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$\boxed{x+y=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)}$$

Kublar yig'indisiga doir misollar ishlaylik.

Misol № 21: $4a^3+4$ ikkihadni ko'paytuvchilarga ajrating.

<u>Yechish:</u> Buni birhadlar kublari yig'indisining formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $4a^3+4=4(a^3+1^3)=4(a+1)(a^2-a+1)$ bo'ladi.

Misol № 22: $\frac{1}{8}m^2+m^5$ ikkihadni ko'paytuvchilarga ajrating.

<u>Yechish:</u> Buni birhadlar kublari yig'indisining formulasiga asosan yechamiz. Unga ko'ra $\frac{1}{8}m^2+m^5=m^2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+m^3\right)=m^2\left(\frac{1}{2}+m\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m+m^2\right)$ bo'ladi.

Misol № 23: $\dfrac{22{,}45^2-22{,}45\cdot27{,}55+27{,}55^2}{22{,}45^3+27{,}55^3}$ ifodani hisoblang.

<u>Yechish:</u> Agar $a=22{,}45$ va $b=27{,}55$ deb belgilash kiritsak, misolni kublar yig'indisi formulasiga asosan yechish mumkin bo'ladi. Unga ko'ra $\dfrac{22{,}45^2-22{,}45\cdot27{,}55+27{,}55^2}{22{,}45^3+27{,}55^3}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}=\dfrac{a^2-ab+b^2}{(a+b)\cdot(a^2-ab+b)}=\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{1}{22{,}45+27{,}55}=\dfrac{1}{50}=0{,}02$ bo'ladi.

7) Birhadlar kublarining ayirmasi yoki kublar ayirmasi:

Birhadlar kublari ayirmasi birhadlar ayirmasini birinchi hadning kvadrati qo'shuv birhadlar ko'paytmasi qo'shuv ikkinchi hadning kvadrati natijasiga ko'paytirilganiga teng bo'ladi.

$$\boxed{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

__Isboti:__ Bunda tenglikning chap tomonidan qavslarni ochish yo'li bilan o'ng tomonini keltirib chiqaramiz. Unga ko'ra $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$ natija kelib chiqadi.

Agar yuqoridagi formulada $a=\sqrt[3]{x}$, $b=\sqrt[3]{y}$ deb almashtirsak, ushbu formulaga ega bo'lamiz:

$$\boxed{x-y=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}$$

Kublar yig'indisiga doir misollar ishlaylik.

Misol № 24: $x^5y^2-x^2y^5$ ikkihadni nechta ko'paytuvchilarga ajratish mumkin?

__Yechish:__ Bunda dastlab hadlar uchun umumiy bo'lgan x^2y^2 ko'paytuchini qavsdan tashqariga chiqarib olib, so'ngra birhadlar kublari ayirmasining formulasiga qo'yamiz. Unga ko'ra $x^5y^2-x^2y^5=x^2y^2(x^3-y^3)=x^2y^2(x-y)(x^2-xy+y^2)$ bo'ladi. Demak, ko'phad jami $2+2+1+1=6$ ta ko'paytuvchiga ajralar ekan.

Misol № 25: $(3x-2)(9x^2-6x+4)-3x(9x^2-3)=28$ tenglamani eching.

__Yechish:__ Buni birhadlar kublari ayirmasining formulasidan foydalanib yechamiz. Unga ko'ra $(3x-2)(9x^2-6x+4)-3x(9x^2-3)=28, \rightarrow (3x)^3-2^3-27x^3+9x=28, \rightarrow 9x-8=28, \rightarrow x=\frac{36}{9}=4$ bo'ladi.

Misol № 26: a^3+a^2-a-1 ifodani ko'paytuvchilarga ajrating.

__Yechish:__ Dastlab ko'phadni guruhlab olamiz, so'ngra qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib ko'paytuvchiga ajratamiz. Unga ko'ra $a^3+a^2-a-1=a^3-1+a^2-a=(a-1)(a^2+a+1)+a(a-1)=$ $=(a-1)(a^2+a+1+a)=(a-1)(a+1)^2$ natijaga ega bo'lamiz.

Shunda qilib, qisqa ko'paytirish formulalari uchun ushbu ettita formulani yozamiz:

1). $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	4). $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
2). $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	5). $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
3). $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	6). $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
	7). $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

1.13-Mavzu: Algebraik kasrlar va ular ustida amallar

Kasrning surat va maxraji sonli ifodalar bo'lgan kasrni ***sonli kasr*** deb ataymiz. Sonli kasrda kasrda faqat sonlar va matematik amallar ishtirok etadi. Agar kasrning surat va maxraji algebraik ifodalar bo'lgan kasrni ***algebraik kasr*** deb ataymiz. Algebraik kasrda sonlar, harflar va matematik amallar ishtirok etadi. Masalan, ushbu

$$\frac{x}{y};\ \frac{x-y}{x+y};\ \frac{5}{mn+n^2};\ \frac{y(m-n)}{x(m+n)}$$

kasrlar algeraik kasrlardir.

Algebraik kasrda ham sonli kasrdagi kabi kasrning surati va maxrajini bir xil noldan farqli songa ko'paytirish yoki bo'lish bilan kasrning natijasi o'zgarmaydi.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c} \quad yoki \quad \frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}}$$

Berilgan $\frac{a}{b}$ kasrning suratidagi yoki maxrajidagi ishorani qarama-qarshisiga o'zgartirish natijasida berilgan kasrga qarama-qarshi ishorali kasr hosil bo'ladi.

$$\boxed{\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b} \quad yoki \quad \frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}}$$

Agar kasrning surat va maxrajida umumiy ko‘paytuvchilar bo‘lsa, u holda bu ko‘paytuvchilarni qisqartirish mumkin. Boshqa qisqarmaydigan holga kelgan algebraik kasrni kasrning ***standart ko‘rinishi*** deyiladi. Kasrni qisqartish natijasida u standart ko‘rinishga keladi.

Misol № 1: $\frac{12x^3y^2}{3xy^3}$ algebraik kasrni standart ko‘rinishga keltiring.

Yechish: Bu kasrning surat va maxrajidagi umumiy ko‘paytuvchi $3xy^2$ ga teng. Kasrni qisqartirish natijasida uni $\frac{12x^3y^2}{3xy^3}=\frac{3xy^2\cdot4x^2}{3xy^2\cdot y}=\frac{4x^2}{y}$ standart ko‘rinishga keltiramiz.

Agar kasrning surat va maxraji ko‘phadlar ko‘rinishida bo‘lsa, avval bu ko‘phadlar ko‘paytuvchilarga ajratiladi so‘ngra umumiy ko‘paytuvchilar qisqartiriladi.

Misol № 2: $\frac{18x^2-30xy}{30x^2-12xy}$ algebraik kasrni standart ko‘rinishga keltiring.

Yechish: Bu kasrning surat va maxrajidagi umumiy ko‘paytuvchi $6x$ ga teng. Umumiy ko‘paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, so‘ngra uni qisqartirish natijasida uni $\frac{18x^2-30xy}{30x^2-12xy}=\frac{6x\cdot(3x-5y)}{6x\cdot(5x-2y)}=\frac{3x-5y}{5x-2y}$ standart ko‘rinishga keltiramiz.

Misol № 3: $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2-25b}$ algebraik kasrni standart ko‘rinishga keltiring.

Yechish: Buning uchun avval kasrni surat va maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz, so‘ngra umumiy ko‘paytuvchilarni aniqlab qisqartiramiz. Misol ushbu $\frac{25b-49b^3}{49b^3-70b^2-25b}=\frac{b\cdot(5^2-(7b)^2)}{b\cdot(7b-5)^2}=\frac{(5-7b)\cdot(5+7b)}{(5-7b)^2}=\frac{5+7b}{5-7b}$ ketma-ketlikda bajariladi.

Matematikada bir necha algebraik kasrni umumiy maxrajga keltirish masalasi juda ahamiyatli bo‘lib, sonli kasrlarni umumiy maxrajga kltirishdan ko‘ra biroz murakkabroqdir.

Algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltirish ishlari ushbu ketma-ketlikda bajariladi:

a) berilgan kasrlar uchun umumiy bo‘lgan maxrajni aniqlash;

b) har bir kasr uchun qo‘shimcha ko‘paytuvchini aniqlash;

s) har bir kasrning suratini qo‘shimcha ko‘paytuvchiga ko‘paytirish;

d) har bir kasrni topilgan surat va umumiy maxraj bilan yozish.

Misol № 4: Ushbu $\frac{5a}{4b}, \frac{4}{ab}, \frac{4b}{3a}$ algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltiring.

Yechish: Bu uchala kasr uchun eng kichik umumiy maxraj $12ab$ ga teng. Qo‘shimcha ko‘paytuvchi birinchi kasr uchun $3a$, ikkinchi kasr uchun 12, uchinchi kasr uchun $4b$ ga teng. Kasrlarning surat va maxrajini ushbu ko‘paytuvchilarga ko‘paytirish natijasida $\frac{15a^2}{12ab}, \frac{48}{12ab}, \frac{16b^2}{12ab}$ natija chiqadi.

Misol № 5: Ushbu $\frac{x}{4x+4y}, \frac{2y}{8x-8y}, \frac{5xy}{6x^2-6y^2}$ algebraik kasrlarni umumiy maxrajga keltiring.

Yechish: Dastlab uchala kasrni ham ko‘paytuvchilarga ajratib ushbu $\frac{x}{4(x+y)}, \frac{3y}{8(x-y)}, \frac{5xy}{6(x-y)(x+y)}$ ko‘rinishda yozamiz. Bu uchala kasr uchun eng kichik umumiy maxraj $24(x-y)(x+y)$ ga, ya’ni $24(x^2-y^2)$ ga teng. Qo‘shimcha ko‘paytuvchi birinchi kasr uchun $8(x-y)$, ikkinchi kasr uchun $3(x+y)$, uchinchi kasr uchun 4ga teng. Kasrlarning surat va maxrajini ushbu ko‘paytuvchilarga ko‘paytirish natijasida $\frac{8x(x-y)}{24(x-y)(x+y)}, \frac{9y(x+y)}{24(x-y)(x+y)}, \frac{20xy}{24(x-y)(x+y)}$ natija chiqadi. Bu kasrlarni ko‘phad shaklida $\frac{8x^2-8xy}{24x^2-24y^2}, \frac{9xy+9y^2}{24x^2-24y^2}, \frac{20xy}{24x^2-24y^2}$ deb ham yozish mumkin.

Bir xil maxrajli algebraik kasrlarni qo‘shish yoki ayirish uchun bu kasrlarning saratlari qo‘shiladi yoki ayriladi, maxraji esa o‘zgartilmasdan yoziladi.

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}=\frac{a+b}{m}, \qquad \frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$$

Maxrajlari turlicha bo'lgan algebraik kasrlar uchun vaziyat boshqacharoq bo'ladi.

Turli xil maxrajli algebraik kasrlarni qo'shish yoki ayirish uchun dastlab bu kasrlar eng kichik umumiy maxrajga keltiriladi, so'ngra hosil bo'lgan kasrlar qo'shiladi yoki ayriladi.

Misol № 6: Ushbu $\frac{x}{x^2-x}$ va $\frac{5}{x^2-1}$ algebraik kasrlarni qo'shing.

Yechish: Dastlab maxrajlarni ko'paytuvchilarga ajratsak $\frac{x}{x(x-1)}$ va $\frac{5}{(x-1)(x+1)}$ bo'ladi. Ularga umumiy maxraj $x(x-1)(x+1)$ ga teng bo'lib, qo'shimcha ko'paytuvchi birinchi kasr uchun $(x+1)$, ikkinchi kasr uchun x ga teng. Qo'shimcha ko'paytuvchiga ko'paytirganda $\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$ va $\frac{5x}{x(x-1)(x+1)}$ bo'ladi. Ularni qo'shganimizda $\frac{x}{x^2-x}+\frac{5}{x^2-1}=\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}+\frac{5x}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+5x}{x(x^2-1)}=\frac{x^2+6x}{x^3-x}$ natija kelib chiqadi.

Misol № 7: Ushbu $\frac{7x}{5(x-3)}-\frac{2x}{3(x-3)}$ algebraik kasrlarni ayiring.

Yechish: Bu misolni umumiy maxrajga kltirish juda ham oson. Misolni ushbu $\frac{7x}{5(x-3)}-\frac{2x}{3(x-3)}=\frac{7x\cdot 3}{5(x-3)\cdot 3}-\frac{2x\cdot 5}{3(x-3)\cdot 5}=\frac{21x-10x}{15(x-3)}=\frac{11x}{15(x-3)}$ ketma-ketlikda ishlanadi.

Misol № 8: Ushbu $\frac{4a}{25-10a+a^2}+\frac{8}{a^2-25}$ algebraik kasrlarni qo'shing.

Yechish: Bu misolni yuqoridagi misollar kabi ushbu $\frac{4a}{25-10a+a^2}+\frac{8}{a^2-25}=\frac{4a}{(a-5)^2}+\frac{8}{(a-5)(a+5)}=$
$=\frac{4a\cdot(a+5)}{(a-5)^2\cdot(a+5)}+\frac{8\cdot(a-5)}{(a-5)(a+5)\cdot(a-5)}=\frac{4a^2+20+8a-40}{(a-5)^2(a+5)}=\frac{4a^2+8a-20}{(a-5)^2(a+5)}$ ketma-ketlikda ishlanadi.

Misol № 9: Ushbu $\frac{6x}{x^2-9}+\frac{3x+1}{3x-9}-\frac{2x-1}{2x+6}$ algebraik kasrlarni qo'shib ayiring.

Yechish: Bu misolni ham avvvalgilar kabi ushbu

$$\frac{6x}{x^2-9}+\frac{3x+1}{3x-9}-\frac{2x-1}{2x+6}=\frac{6x}{(x-3)(x+3)}+\frac{3x+1}{3(x-3)}-\frac{2x-1}{2(x+3)}=\frac{6x\cdot 6}{(x-3)(x+3)\cdot 6}+\frac{(3x+1)\cdot 2(x+3)}{3(x-3)\cdot 2(x+3)}-\frac{(2x-1)\cdot 3(x-3)}{2(x+3)\cdot 3(x-3)}=$$

$$=\frac{36x+2(3x+1)(x+3)-3(2x-1)(x-3)}{6(x^2-9)}=\frac{36x+6x^2+20x+6-6x^2+21x-3}{6(x^2-9)}=\frac{77x+3}{6(x^2-9)}$$

ketma-ketlikda ishlanadi.

Algebraik kasrlarni ko'paytirish va bo'lish qoidalari xuddi sonli kasrlarni ko'paytirish va bo'lish qoidalari kabi bajariladi.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Misol № 10: Ushbu $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^3}{a^5}$ algebraik kasrlarni ko'paytiring.

Yechish: Algebraik kasrlarni ko'paytirish qoidasiga binoan $\frac{a^3b}{c}\cdot\frac{c^3}{a^5}=\frac{a^3bc^3}{ca^5}=\frac{bc^2}{a^3}$ bo'ladi.

Misol № 11: Ushbu $\frac{15m}{n^2}:\frac{10m^3}{n}$ algebraik kasrlarni bo'ling.

Yechish: Algebraik kasrlarni bo'lishish qoidasiga binoan $\frac{15m}{n^2}:\frac{10m^3}{n}=\frac{15m}{n^2}\cdot\frac{n}{10m^3}=\frac{15mn}{n^2\cdot 10m^3}=\frac{3}{m^2n}$ bo'ladi.

Algebraik kasrni birhadga ko'paytiriganda yoki bo'lganda birhadni maxraji 1ga teng bo'lgan algebraik kasr deb olinadi.

$$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{1}=\frac{ac}{b},\qquad \frac{a}{b}:c=\frac{a}{b}:\frac{c}{1}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{c}=\frac{a}{bc}$$
$$c\cdot\frac{a}{b}=\frac{c}{1}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ac}{b}\qquad c:\frac{a}{b}=\frac{c}{1}:\frac{a}{b}=\frac{c}{1}\cdot\frac{b}{a}=\frac{bc}{a}$$

Misol № 12: Ushbu $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2\cdot acd$ algebraik kasrlarni ko'paytiring.

Yechish: Algebraik kasrlarni ko'paytirish qoidasiga binoan $\left(\frac{ab}{cd}\right)^2\cdot acd=\frac{a^2b^2}{c^2d^2}\cdot\frac{acd}{1}=\frac{a^2b^2acd}{c^2d^2}=\frac{a^4b^2}{cd}$ bo'ladi.

Misol № 13: Ushbu $\frac{126m^2n^4}{7k}:(9n^2)$ algebraik kasrlarni bo'ling.

Yechish: Algebraik kasrlarni bo'lishish qoidasiga binoan $\frac{126m^2n^4}{7k}:(9n^2)=\frac{126m^2n^4}{7k}\cdot\frac{1}{9n^2}=\frac{126m^2n^4}{7k\cdot 9n^2}=\frac{2m^2n^2}{k}$ bo'ladi.

Misol № 14: Ushbu $36x^2y:\frac{12a^4x^4}{11y^3b}$ algebraik kasrlarni bo'ling.

Yechish: Algebraik kasrlarni bo'lishish qoidasiga binoan $36x^2y:\frac{12a^4x^4}{11y^3b}=\frac{36x^2y}{1}\cdot\frac{11y^3b}{12a^4x^4}=\frac{36x^2y\cdot 11y^3b}{12a^4x^4}=\frac{33by^4}{a^4x^2}$ bo'ladi.

1.14-Mavzu: Sonlarning o'rta qiymatlari

Sonlarning o'rta qiymatini aniqlash asosan 5 xil usulda bajariladi: 1) Sonlarning o'rta arifmetigi; 2) Sonlarning o'rta geometrigi (proporsionali); 3) Sonlarning o'rta garmonigi; 4) Sonlarning o'rta kvadratigi; 5) Sonlarning o'rta vaznliligi.

Sonlarning o'rta qiymatlari quyidagilardan iborat:

1) $a_{o'r.arif}=\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i}{n}$, 2) $a_{o'r.geom}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots a_n}=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}a_i}$,

3) $a_{o'r.kvad}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{n}}$, 4) $\frac{1}{a_{o'r.garm}}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$

5) $a_{o'r.vazn}=\frac{a_1n_1+a_2n_2+a_3n_3+\ldots+a_kn_k}{n_1+n_2+n_3+\ldots+n_k}=\frac{\sum_{i=1}^{k}a_in_i}{\sum_{i=1}^{k}n_i}$

Xususan, 2 ta turli son uchun o'rta qiymat formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$a_{o'r.arif}=a_{o'r.vazn}=\frac{a_1+a_2}{2},\quad a_{o'r.geom}=\sqrt{a_1a_2},\quad a_{o'r.kvad}=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2}{2}},\quad a_{o'r.garm}=\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$$

Sonlarning o'rta qiymatlari uchun ushbu tengsizlik o'rinlidir:

$$a_{o'r.garm}<a_{o'r.geom}<a_{o'r.arif}=a_{o'r.vazn}<a_{o'r.kvad}$$

1.15-Mavzu: Sonni to'g'ri va teskari nisbatda bo'lish

Sonni to'g'ri proporsional nisbatda va teskari proporsional nisbatda bo'lish mumkin.

Bizga biror x soni berilgan bo'lib, bu sonni $n_1:n_2:n_3:\ldots:n_k$ sonlariga to'g'ri proporsional nisbatda bo'lishdan hosil bo'lgan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ sonlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k} \cdot x, \qquad x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k} \cdot x,$$

$$x_3 = \frac{n_3}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k} \cdot x, \quad \ldots \quad x_k = \frac{n_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k} \cdot x$$

Xususan, x sonini $n_1 : n_2$ sonlariga to'g'ri proporsional nisbatda bo'lishdan hosil bo'lgan x_1, x_2 sonlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \cdot x, \qquad x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \cdot x$$

Bizga biror x soni berilgan bo'lib, bu sonni $n_1 : n_2 : n_3 : \ldots : n_k$ sonlariga teskari proporsional nisbatda bo'lishdan hosil bo'lgan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ sonlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = \frac{1}{n_1\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_k}\right)} \cdot x, \qquad x_2 = \frac{1}{n_2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_k}\right)} \cdot x,$$

$$x_3 = \frac{1}{n_3\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_k}\right)} \cdot x, \quad \ldots \quad x_k = \frac{1}{n_k\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \ldots + \frac{1}{n_k}\right)} \cdot x$$

Xususan, x sonini $n_1 : n_2$ sonlariga teskari proporsional nisbatda bo'lishdan hosil bo'lgan x_1, x_2 sonlari quyidagicha bo'ladi:

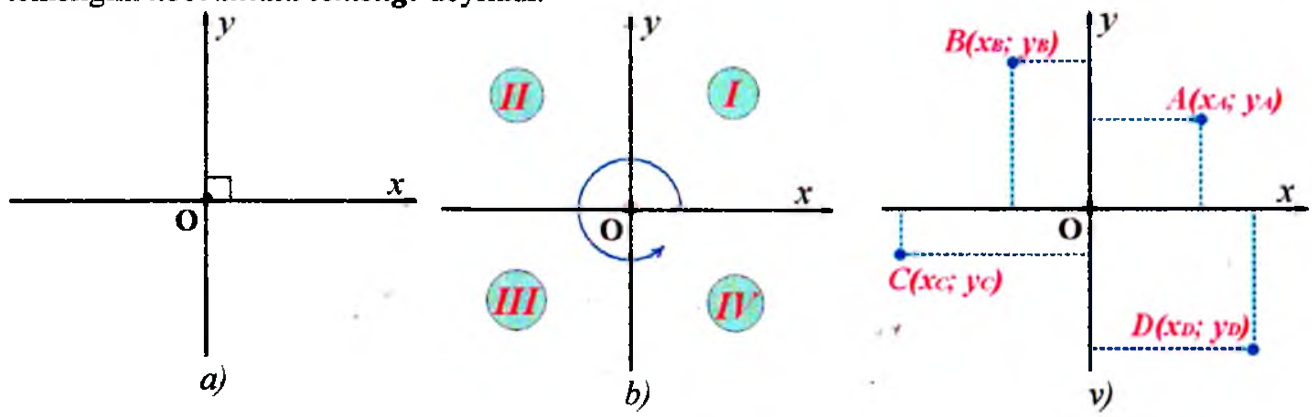
$$x_1 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \cdot x, \qquad x_2 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \cdot x$$

2-BOB: FUNKSIYA TUSHUNCHASI. CHIZIQLI FUNKSIYA, TENGLAMA VA TENGSIZLIK.

2.1-Mavzu: Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi

O‘zaro to‘g‘ri burchak ostida kesishuvchi vertikal va gorizontal o‘qlar o‘tkazaylik. Vertikal o‘qni y harfi bilan, gorizontal o‘qni esa x harfi bilan belgilaylik. O‘qlar kesishgan nuqtani esa O harfi bilan belgilaylik.

Ox o‘qni ***abssissalar o‘qi***, Oy o‘qni ***oordinatalar o‘qi*** va O nuqtani ***koordinatalar boshi*** deb ataymiz. To‘g‘ri burchak ostida kesishuvchi Ox va Oy o‘qlaridan tashkil topgan bunday sistemaga ***Dekart koordinatalar sistemasi*** deyiladi (2.1.1-a,rasm). Dekart koordinatalar tekisligini ***koordinata tekisligi*** deyiladi.

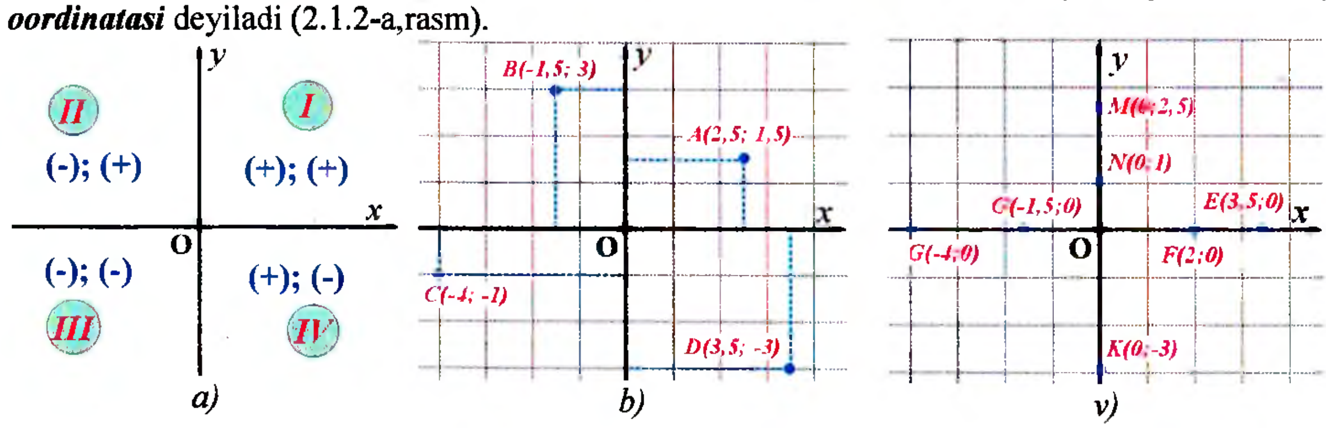


2.1.1-rasm

Ox va Oy o‘qlari kesishganda tekislikni to‘rtta chorakka bo‘ladi. Choraklar rim raqamlari bilan belgilanadi. Ox va Oy o‘qlarining musbat yo‘nalishida joylashgan chorakni I -chorak deymiz va shu chorakdan soat strelkasiga qarama-qarshi yo‘nalishda II, III, IV-choraklar keladi (2.1.1-b,rasm).

Koordinatalar sistemasida nuqtalar lotincha bosh harflar bilan belgilanadi va iziga qavs ichida avval Ox o‘qidagi qiymat, so‘ngra Oy o‘qidagi qiymat yoziladi (2.1.1-v,-rasm).

Nuqta koordinatasini aniqlash uchun bu nuqtadan koordinata o‘qlariga perpendikulyarlar tushiriladi. Perpendikulyarning asosidagi qiymat nuqtaning shu ***o‘qdagi koordinatasi*** deyiladi. Nuqtadan abssissa o‘qiga tushirilgan perpendikulyar asosidagi qiymatga ***nuqtaning abssissasi*** deyiladi. Nuqtadan oordinata o‘qiga tushirilgan perpendikulyar asosidagi qiymatga ***nuqtaning oordinatasi*** deyiladi (2.1.2-a,rasm).



2.1.2-rasm

Koordinata tekisligining turli choraklarida nuqtaning abssissasi va oordinatasi turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi. 2.1.2-a,rasmdan ko‘rinib turibdiki, nuqtalar I -chorakda $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$, II -chorakda $\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$, III-chorakda $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ va IV-chorakda $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ ishorali qiymatlarni qabul qilar ekan.

Buni qisqacha qilib I -chorakda $(+),(+)$, II -chorakda $(+),(-)$, III -chorakda $(-),(-)$ va IV -chorakda $(-),(+)$ ishoralarni qabul qiladi deyish mumkin (2.1.2-b,rasm).

Ox o'qida yotgan barcha nuqtalarning oordinatasi nolga teng $(y=0)$, Oy o'qda yotgan barcha nuqtalarning absissasi nolga teng $(x=0)$ bo'ladi (2.1.2-v,rasm).

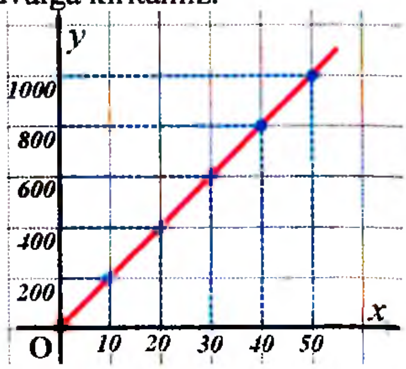
Dekart koordinatalar sistemasini rivojlangan g'arb davlatlarida *cartezian system* deyiladi. Koordinatalar sistemalari juda xilma-xil (masalan, afin koordinatalar sistemasi, qutb koordinatalar sistemasi, sferik koordinatalar sistemasi, slindrik koordinatalar sistemasi, umumlashgan koordinatalar sistemasi va hokoza) bo'lib, shulardan o'rganishga eng oson va qulay bo'lgani Dekart koordinatalar sistemasidir. Biz misol va masalalar ishlaganda asosan tekislikda berilgan Dekart koordinatalar sistemasiga duch kelamiz. Biz fazoda berilgan Dekart koordinatalar sistemasi bilan bog'liq misol va masalalarga kam duch kelamiz. Fazodagi Dekart koordinatalar sistemasi va boshqa koordinatalar sistemalari oliy o'quv yurtlarida batafsil o'rganiladi.

2.2-Mavzu: Funksiya tushunchasi

Sekundiga $20m$ yo'l bosadigan mashina $10s.$da, $20s.$da, $30s.$da va hokoza t sekundda qancha yo'l bosishini hisoblaylik.

Buning uchun $\vartheta=\frac{s}{t}\left[\frac{m}{s}\right]$ tezlik formulasidan $s=\vartheta t=20t$ $[м]$ formulasini keltirib chiqarib va yo'l formulasidan foydalanib, ixtiyoriy vaqt uchun yo'lni topib, uni jadvalga kiritamiz.

t [s]	0	5	10	15	20	25	30	35	40
s [m]	0	100	200	300	400	500	600	700	800



2.2.1-rasm

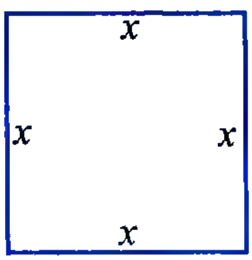
Keling t ni absissalar o'qiga va s ni oordinatalar o'qiga joylashtiraylik (2.2.1-rasm). Biz t ni ***erkli o'zgaruvchi***, s ni esa ***erksiz o'zgaruvchi*** deb ataymiz.

Agar erkli o'zgaruvchining har bir qiymatida erksiz o'zgaruvchida ham yagona bir qiymat mavjud bo'lsa, erksiz o'zgaruvchining erksiz o'zgaruvchiga bunday bog'lanishi ***funksiya*** deyiladi.

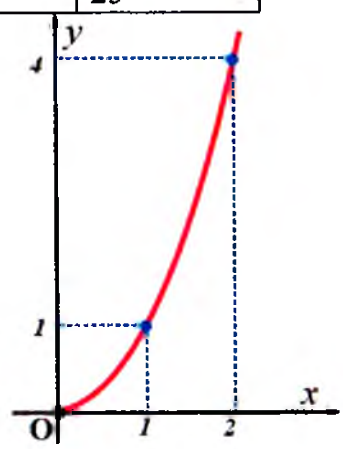
Tomoni x bo'lgan kvadrat berilgan bo'lsin (2.2.2-a,rasm). Uning yuzasini y harfi bilan belgilaylik. U holda yuzani topish formulasi $y=x^2$ ko'rinishda bo'ladi. Bunda x ga qiymatlar berib jadval tuzamiz.

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

Jadvaldan foydalanib, kvadrat yuzasining tomonga bog'liqlik grafigini quramiz (2.2.2-b,rasm).



a)



b)

2.2.2-rasm

Funksiya 3 xil ko'rinishda berilishi mumkin.

1.jadval ko'rinishida;

2.grafik ko‘rinishida;

3. $y = f(x)$-funksiya yoki formula ko‘rinishida.

Formula ko‘rinishida berilgan funksiyadan jadval ko‘rinishiga yoki grafik ko‘rinishiga o‘tish juda oson.

2.3-Mavzu: $y = k\,x$ -ko‘rinishidagi funksiya

Bizga eni k ga va bo‘yi x ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan bo‘lib, bizdan ana shu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzasi so‘ralgan bo‘lsin (2.3.1-rasm). Agar to‘rtburchak yuzasini y harfi bilan belgilasak, u holda to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

2.3.1-rasm

$$y = k\,x$$

Agar k berilgan bo‘lsa, va x ga turli qiymatlar berilsa, y holda y ning x ga bog‘liqlik funksiyasini hosil qilgan bo‘lamiz.

$y = k\,x$ ko‘rinishdagi funksiya quyidagi xossalarga ega:

a) $y = k\,x$ funksiya har doim koordinatalar boshidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqdir;

b) $y = k\,x$ funksiya grafigini yasash uchun ixtiyoriy bitta nuqtasini topib, bu nuqtani koordinatalar boshi bilan tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq o‘tkazish kifoya bo‘ladi;

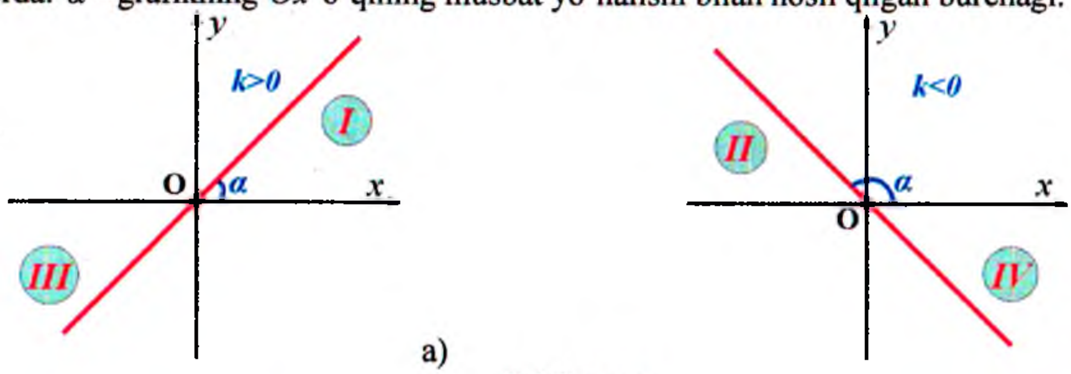
v) agar $k > 0$ bo‘lsa, funksiya grafigi toq choraklardan, ya’ni I - va III - choraklardan o‘tadi. Bunda funksiya grafigi Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak tashkil etadi, ya’ni $\alpha < 90^0$ bo‘ladi (2.3.2-a,rasm);

g) agar $k < 0$ bo‘lsa, funksiya grafigi juft choraklardan, ya’ni II - va IV choraklardan o‘tadi. Bunda funksiya grafigi Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan o‘tmas burchak tashkil etadi, ya’ni $\alpha > 90^0$ va bo‘ladi (2.3.2-b,rasm).

$y = k\,x$ ko‘rinishdagi funksiyada $k -$ proporsionallik koeffitsienti yoki burchak koeffitsienti deyiladi.

$$\boxed{k = tg\alpha}$$

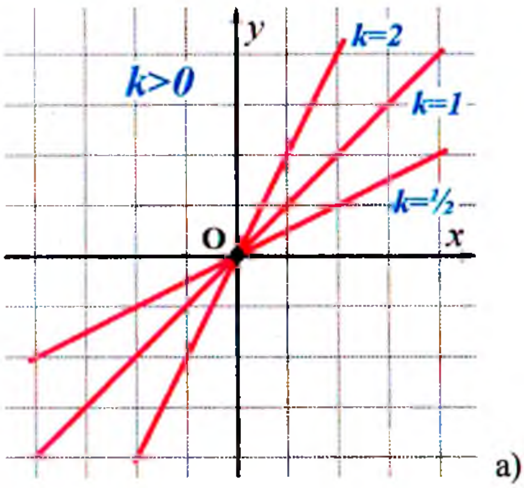
Bu erda: $\alpha -$ grafikning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi.

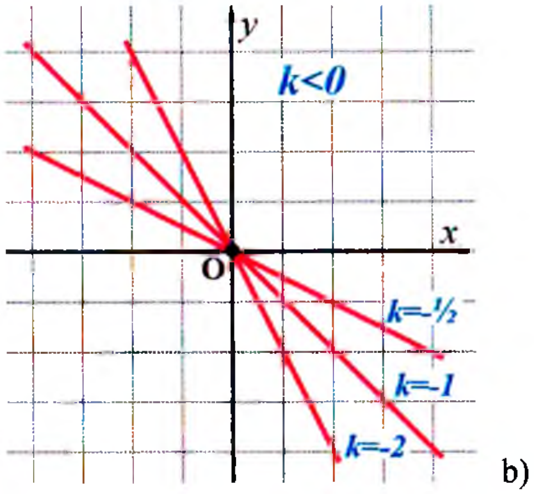


a) b)

2.3.2-rasm

$y = k\,x$ ko‘rinishdagi funksiyada burchak koeffitsienti k funksiya grafigini (to‘g‘ri chiziqni) koordinata boshi (O nuqta) atrofida burish vazifasini bajaradi. k ning qiymati miqdor jihatdan qancha kattalashib borsa, grafik tikkalashib Oy o‘qiga yaqinlashib boradi. k ning qiymati miqdor jihatdan qancha kichiklashib borsa, grafik yotiqlashib Ox o‘qiga yaqinlashib boradi. Fikrimizga 2.3.3-rasmga qarab ishonch hosil qilish mumkin. 2.3.3-a,rasmda $k = \frac{1}{2}, 1, 2$ bo‘lgan musbat qiymatlar uchun, 2.3.3-b,rasmda esa $k = -\frac{1}{2}, -1, -2$ bo‘lgan manfiy qiymatlar uchun grafiklar tasvirlangan.





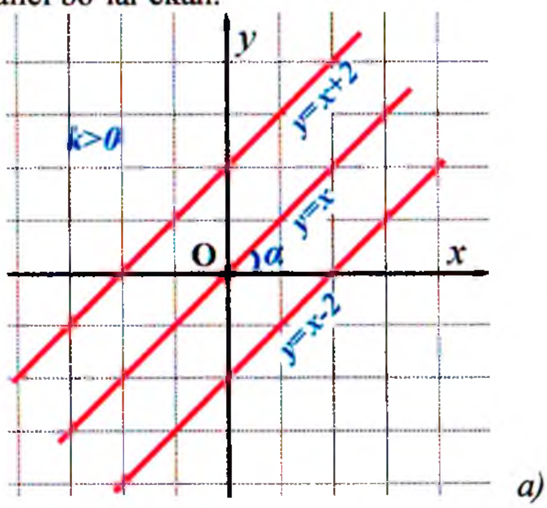
2.3.3-rasm

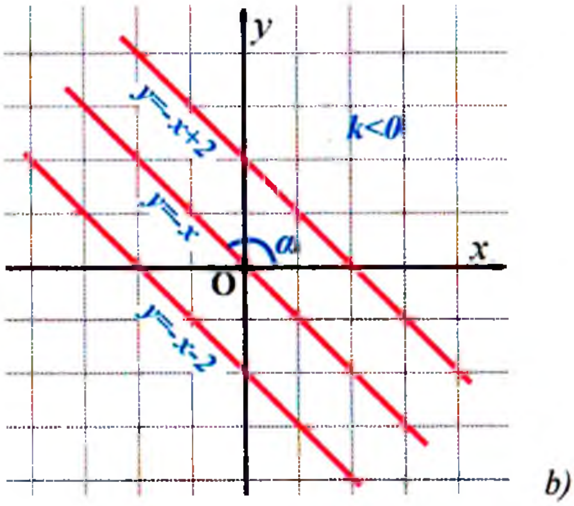
2.4-Mavzu: Chiziqli funksiya va uning grafigi

Biz oldingi mavzuda $y = kx$ funksiya grafigini qurish bilan tanishgan edik. Shunga o‘xshash $\begin{cases} y = x \\ y = x+2 \\ y = x-2 \end{cases}$ grafiklarini bitta koordinalar sistemasida qurib ko‘raylikchi, $y = x$ funksiya grafigi bilan o‘xshashlik bormikan. Buning uchun avval jadval tuzamiz.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x+2$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y = x-2$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3

Jadval asosida grafik qursak, 2.4.1-a,rasmdagi grafiklarga ega bo‘lamiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, $y = x$ funksiya grafigini 2 birlik yuqoriga ko‘tarish natijasida $y = x+2$ funksiya grafigiga, 2 birlik pastga tushrish natijasida esa $y = x-2$ funksiya grafigiga ega bo‘lar ekanmiz. Demak, $\begin{cases} y = x+2 \\ y = x-2 \end{cases}$ funksiyalar grafiklari ham to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib, ular $y = x$ funksiya grafigiga parallel bo‘lar ekan.





2.4.1-rasm

Endi, yuqoridagi misolga o‘xshash $\begin{cases} y = -x \\ y = -x+2 \\ y = -x-2 \end{cases}$ grafiklarini bitta koordinalar sistemasida qurib ko‘raylikchi, $y = -x$ funksiya grafigi bilan o‘xshashlik bormikan. Buning uchun avval jadval tuzamiz.

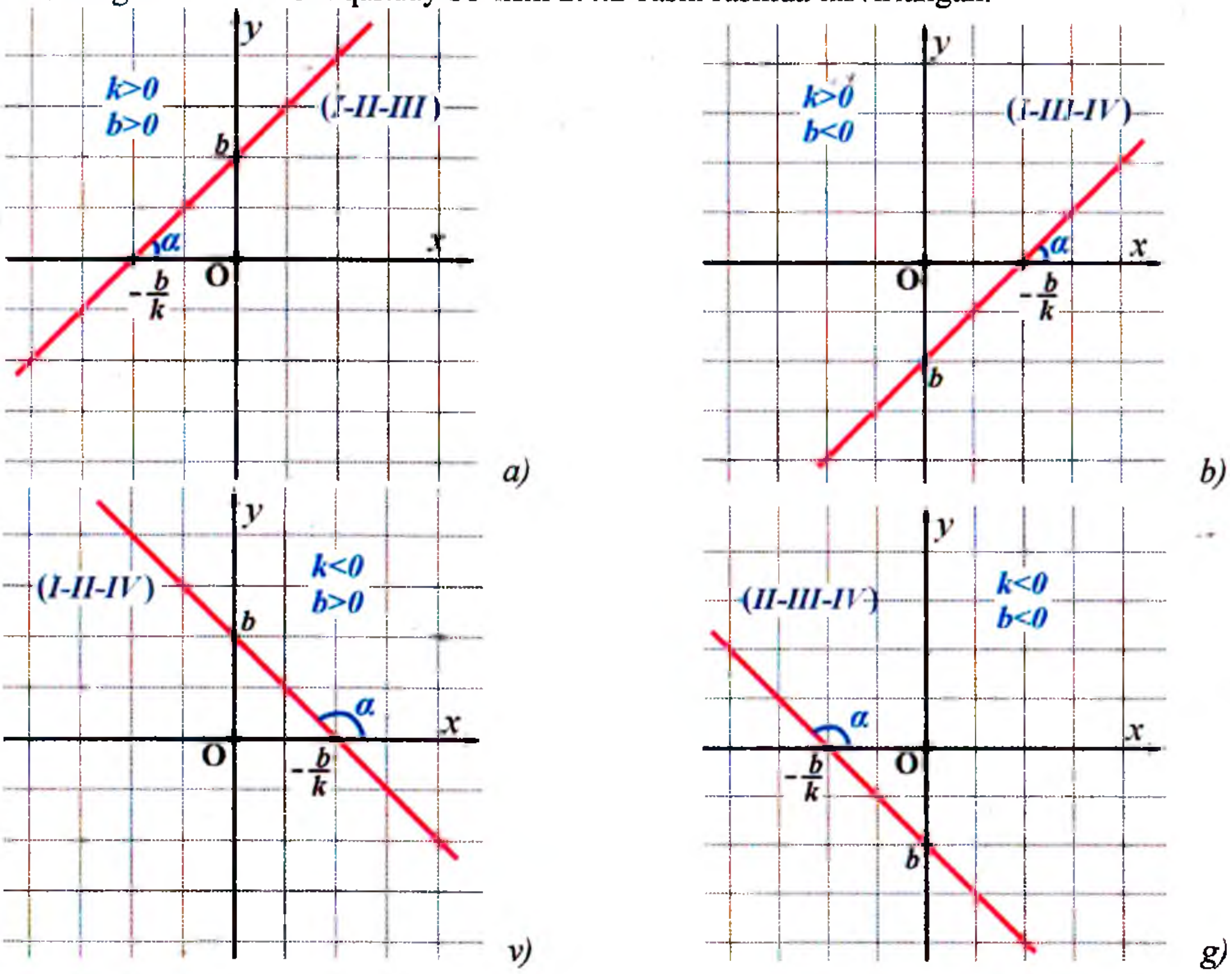
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=-x$	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
$y=-x+2$	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
$y=-x-2$	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7

Jadval asosida grafik qursak, 2.4.1-b,rasmdagi grafiklarga ega bo‘lamiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, $y=-x$ funksiya grafigini 2 birlik yuqoriga ko‘tarish natijasida $y=-x+2$ funksiya grafigiga, 2 birlik pastga tushrish natijasida esa $y=-x-2$ funksiya grafigiga ega bo‘lar ekanmiz. Demak, $\begin{cases} y=-x+2 \\ y=-x-2 \end{cases}$ funksiyalar grafiklari ham to‘g‘ri chiziqlar bo‘lib, ular $y=-x$ funksiya grafigiga parallel bo‘lar ekan.

$y=kx+b$ ko‘rinishdagi funksiya ***chiziqli funksiya*** deyiladi.

Bu erda: k – proporsionallik koeffitsienti yoki burchak koeffitsienti, b – ozod had.

Bu mavzuda $y=kx+b$ ko‘rinishdagi funksiya grafigida ham proporsionallik koeffitsient k oldingi mavzudagi kabi to‘g‘ri chiziqni burish vazifasini o‘taydi, ozod had b esa to‘g‘ri chiziqni yuqoriga va pastga parallel ko‘chirish vazifasini o‘taydi. k va b koeffitsientlarning turli ishoralarida grafik ko‘rinishi qanday bo‘lishi 2.4.2-rasm rasmda tasvirlangan.

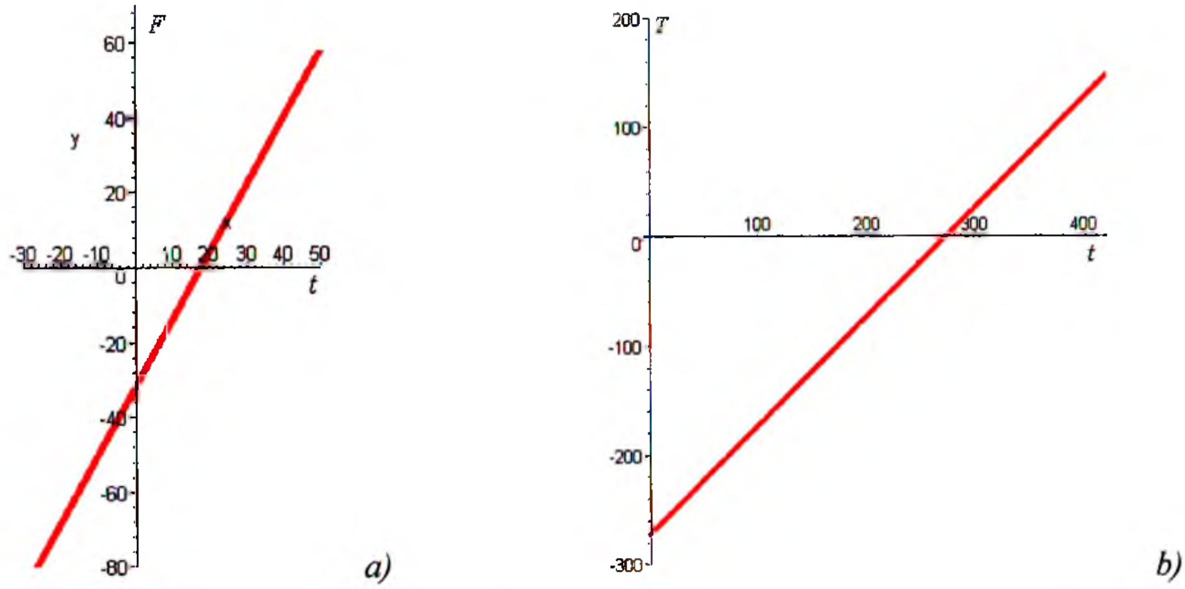


2.4.2-rasm

Masalan: Haroratni o‘lchashda ishlatiladigan Fahrangeyt va Selsiy shkalalari orasida hamda Kelvin va Selsiy shkalalari oralarida quyidagi

$$F=1{,}8t+32, \quad T=t+273$$

bog‘lanish mavjud bu funksiyalar grafiklarini xuddi $y=1{,}8x+32$ va $y=x+273$ chiziqli funksiyalar grafiklarini qurgandek quriladi. B u erda: t – erkli o‘zgaruvchi, F va T – erksiz o‘zgaruvchilardir (2.4.3-rasm).



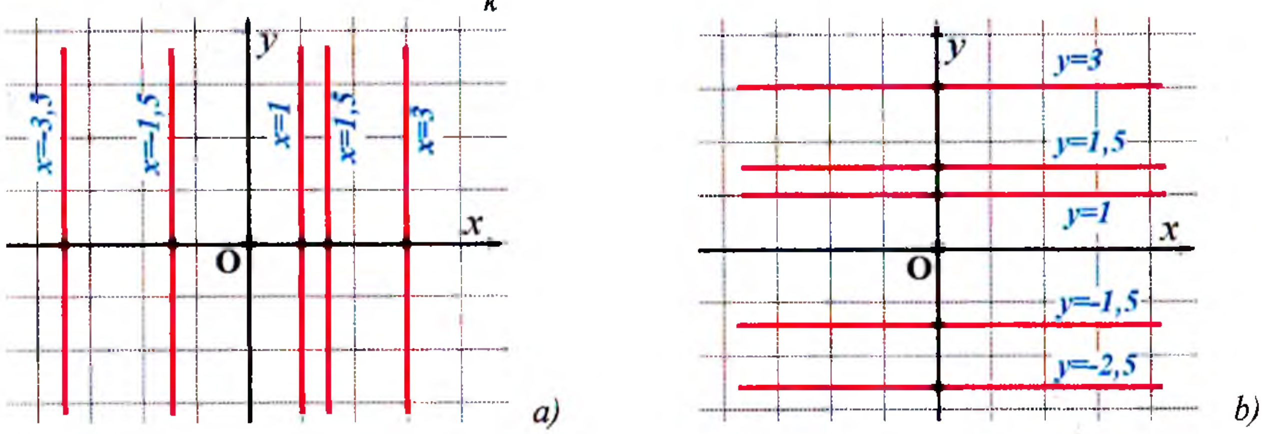
2.4.3-rasm

$y = kx + b$ ko‘rinishdagi funksiya quyidagi xossalarga ega:

a) $y = kx + b$ ko‘rinishdagi funksiya grafigini yasash uchun uning ikkita nuqtasini topish va bu nuqtalar orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazish kifoya;

b) Agar, $k > 0$ bo‘lsa, grafik Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi o‘tkir, ya’ni 90^0 dan kichik bo‘ladi. Agar $k < 0$ bo‘lsa, grafik Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagi o‘tmas, ya’ni 90^0 dan kichik bo‘ladi;

s) funksiya grafigi Ox o‘qi bilan $(-\frac{b}{k};\ 0)$ nuqtada, Oy o‘qi bilan esa (0 ; b) nuqtada kesishadi.

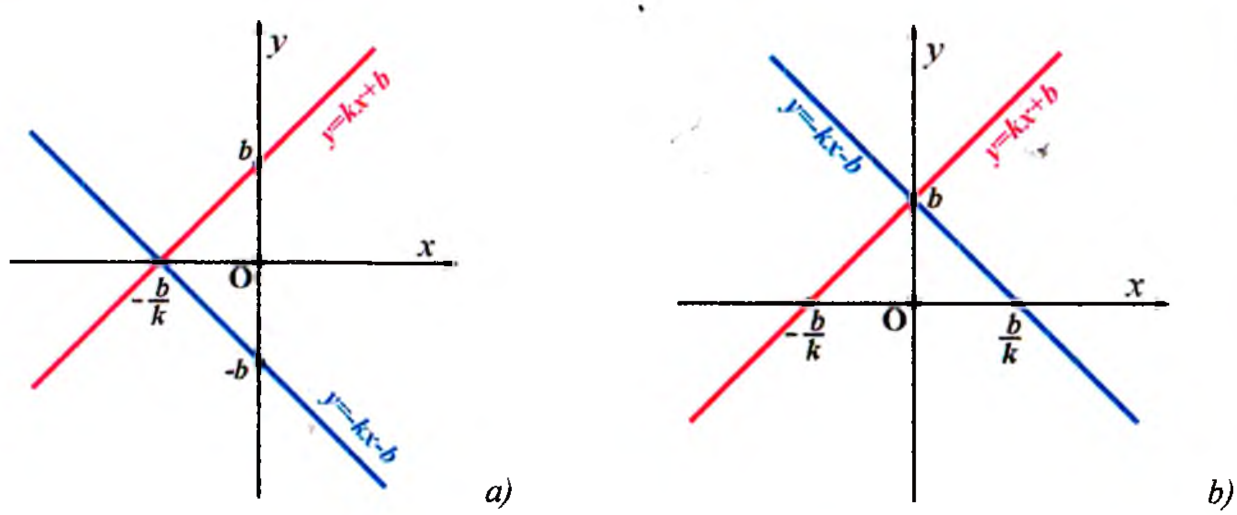


2.4.4-rasm

Agar $y = kx + b$ chiziqli funksiyada $k = 0$ bo‘lsa, u holda $y = b$ to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. b ning turli qiymatlarida Ox o‘qiga parallel bo‘lgan turli gorizontal chiziqlar hosil bo‘ladi (2.4.4-a,rasm). Agar $y = kx + b$ chiziqli funksiyada $k = \infty$ bo‘lsa, u holda y qatnashgan had yo‘q bo‘lib ketadi va $x = x_0$ to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. x_0 ning turli qiymatlarida Oy o‘qiga parallel bo‘lgan turli vertikal chiziqlar hosil bo‘ladi (2.4.4-b,rasm). Shuningdek, Ox o‘qini $y = 0$ chizig‘i deb, Oy o‘qini esa $x = 0$ chizig‘i deb atash mumkin.

Ko‘pincha misol va masalalar ishlaganda berilgan funksiyaning koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan funksiyasi so‘raladi. Biz quyida shularga to‘xtalamiz:

$y = kx + b$ va $y = -kx - b$ funksiya grafiklari Ox o‘qiga nisbatan simmetrikdir (2.4.5-a,rasm). $y = kx + b$ va $y = -kx + b$ funksiya grafiklari Oy o‘qiga nisbatan simmetrikdir (2.4.5-b,rasm)



2.4.5-rasm

2.5-Mavzu: Chiziqli funksiyaning berilish usullari. To‘g‘ri chiziqlar paralellik va perpendikulyarlik shartlari. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa va burchak

Chiziqli funksiya grafigi to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘lib, chiziqli funksiyalar uch xil usulda berilishi mumkin:

1) burchak koeffitsientli chiziqli funksiya – bu $y = kx + b$, ko‘rinishdagi funksiya;
2) umumiy holda yoki parametrik ko‘rinishda berilgan chiziqli funksiya – bu $Ax + By + C = 0$ ko‘rinishdagi funksiya;
3) kesmalarga nisbatan berilgan chiziqli funksiya – bu $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ ko‘rinishdagi funksiya.

Biz $y = kx + b$ ko‘rinishdagi funksiya bilan avvalgi mavzuda batafsil tanishdik. $Ax + By + C = 0$ ko‘rinishdagi parametrik funksiyada a, b, c –berilgan sonlar, koeffitsientlar bo‘lib, chiziqli funksiyaning ***parametrlari*** deyiladi. Parametrik funksiyadan burchak koeffitsientli funksiyaga o‘tish juda oson. $Ax + By + C = 0$ dan y ni topamiz, ya’ni y ni oshkor ko‘rinishga keltiramiz. Shunda $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ funksiya hosil bo‘ladi. Buni $y = kx + b$ funksiya bilan taqqoslasak, $\boxed{k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}}$ bog‘lanishni olamiz.

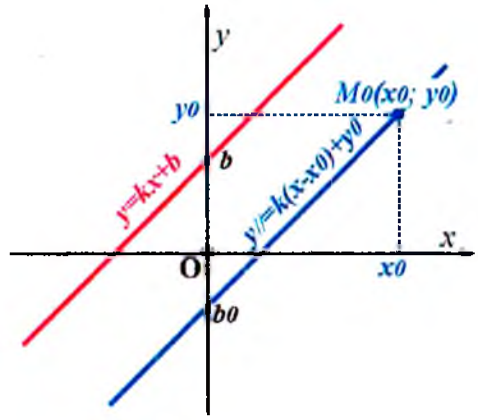
$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ ko‘rinishdagi kesmalarga nisbatan berilgan chiziqli funksiyada m va n– koeffitsientlar to‘g‘ri chiziqning mos holda Ox va Oy o‘qlarini kesib o‘tish nuqtalari. $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ funksiyadan $y = kx + b$ funksiyaga o‘tish juda oson. Buning uchun $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$dan y ni topamiz, ya’ni y ni oshkor ko‘rinishga keltiramiz. Shunda $y = -\frac{n}{m}x + n$ funksiya hosil bo‘ladi. Buni $y = kx + b$ funksiya bilan taqqoslasak, $\boxed{k = -\frac{n}{m},\ \ b = n}$ bog‘lanishni olamiz.

Endi ixtiyoriy berilgan nuqtadan berilgan funksiyaga parallel va perpendikulyar holda o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziqlarning tenglamasin keltirib chiqaramiz.

1.1) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo‘ladi (2.5.1-rasm):

$$\boxed{y_{//} = k(x - x_0) + y_0}$$

Isboti: Bunda parallel qilib o'tkaziladigan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti ham k ga teng bo'lib, bu to'g'ri chiziqning tenglamasi $y_{//}=kx+b_0$ bo'ladi. $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqta $y_{//}=kx+b_0$ to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgani uchun $y_0=kx_0+b_0$ bo'ladi. Bundan $b_0=y_0-kx_0$ ozod hadni topib olib, uni $y_{//}=kx+b_0$ funksiyaga qo'ysak, $y_{//}=kx+b_0=kx+y_0-kx_0=k(x-x_0)+y_0$ parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasiga ega bo'lamiz.



2.5.1-rasm

1.2) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqtadan $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqqa parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$$

Isboti: Burchak koeffitsientli va parametrik holda berilgan to'g'ri chiziq koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}$ larni avvalgi chiqarilgan $y_{//}=k(x-x_0)+y_0$ formulaga qo'ysak, $y_{//}=-\frac{A}{B}(x-x_0)+y_0,\ \rightarrow\ A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ natija chiqadi. Buni esa ixtiyoriy ko'rinishdagi to'g'ri chiziq tenglamasiga aylantirish mumkin.

1.3) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqtadan $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ to'g'ri chiziqqa parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

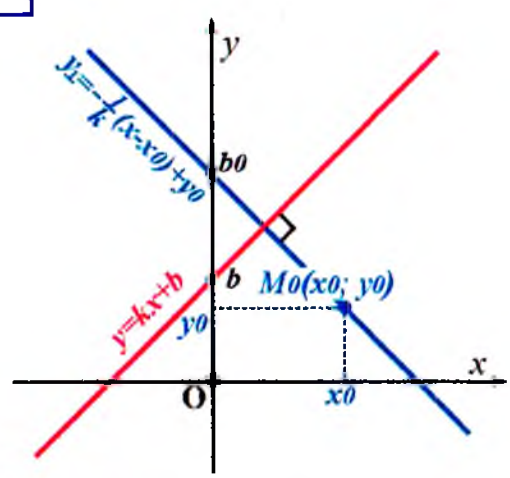
$$\boxed{n(x-x_0)+m(y-y_0)=0}$$

Isboti: Burchak koeffitsientli va ajratgan kesmalarga ko'ra berilgan to'g'ri chiziqlar koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{n}{m},\ b=n$ larni avvalgi chiqarilgan $y_{//}=k(x-x_0)+y_0$ formulaga qo'ysak, $y_{//}=-\frac{n}{m}(x-x_0)+y_0,\ \rightarrow\ n(x-x_0)+m(y-y_0)=0$ natija chiqadi. Buni esa ixtiyoriy ko'rinishdagi to'g'ri chiziq tenglamasiga aylantirish mumkin.

2.1) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqtadan $y=kx+b$ to'g'ri chiziqqa perpedikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi (2.5.2-rasm):

$$\boxed{y_{//}=-\frac{1}{k}(x-x_0)+y_0}$$

Isboti: Bunda perpendikulyar qilib o'tkaziladigan to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti ham $-\frac{1}{k}$ ga teng bo'lib, bu to'g'ri chiziqning tenglamasi $y_{\perp}=-\frac{1}{k}x+b_0$ bo'ladi. $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqta $y_{\perp}=-\frac{1}{k}x+b_0$ to'g'ri chiziqqa tegishli bo'lgani uchun $y_0=-\frac{1}{k}x_0+b_0$ bo'ladi. Bundan $b_0=y_0+\frac{1}{k}x_0$ ozod hadni topib olib, uni $y_{\perp}=-\frac{1}{k}x+b_0$ funksiyaga qo'ysak, $y_0=-\frac{1}{k}x+b_0=-\frac{1}{k}x+y_0+\frac{1}{k}x_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)+y_0$ parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasiga ega bo'lamiz.



2.5.2-rasm

2.2) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\ y_0)$ nuqtadan $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqqa perpedikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{B(x-x_0)-A(y-y_0)=0}$$

Isboti: Burchak koeffitsientli va parametrik holda berilgan to'g'ri chiziq koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ larni avvalgi chiqarilgan $y_{//}=-\frac{1}{k}(x-x_0)+y_0$ formulaga qo'ysak, $y_{//}=\frac{B}{A}(x-x_0)+y_0$, $\rightarrow$ $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$ natija chiqadi. Buni esa ixtiyoriy ko'rinishdagi to'g'ri chiziq tenglamasiga aylantirish mumkin.

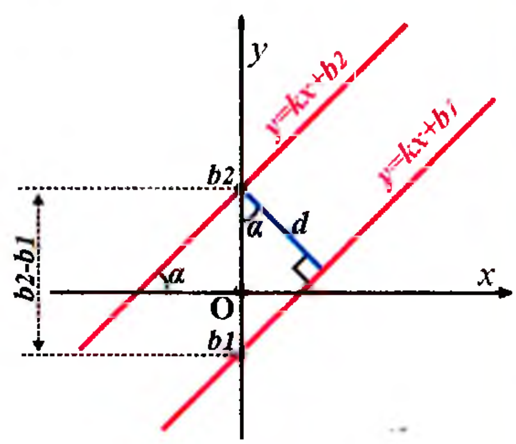
2.3) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\, y_0)$ nuqtadan $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ to'g'ri chiziqqa perpedikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{m(x-x_0)-n(y-y_0)=0}$$

Isboti: Burchak koeffitsientli va ajratgan kesmalarga ko'ra berilgan to'g'ri chiziqlar koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{n}{m}$, $b=n$ larni avvalgi chiqarilgan $y_{//}=-\frac{1}{k}(x-x_0)+y_0$ formulaga qo'ysak, $y_{//}=\frac{m}{n}(x-x_0)+y_0$, $\rightarrow$ $m(x-x_0)-n(y-y_0)=0$ natija chiqadi. Buni esa ixtiyoriy ko'rinishdagi to'g'ri chiziq tenglamasiga aylantirish mumkin.

3.1) Berilgan $\begin{cases} y=kx+b_1 \\ y=kx+b_2 \end{cases}$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa quyidagicha bo'ladi (2.5.3-rasm):

$$\boxed{d=\frac{|b_2-b_1|}{\sqrt{1+k^2}}}$$



2.5.3-rasm

Isboti: Bunda rasmdan ham ko'rinib turibdiki, parallel to'g'ri chiziqlar *Oy* o'qini kesadigan nuqtalar orasidagi masofa b_2-b_1 ga teng. Ikkala chiziqni almashtirib belgilaganda manfiy son chiqmaslik uchun miqdor jihatidan $|b_2-b_1|$ deb olamiz. α burchak kosinusidan yopishgan katet $d=|b_2-b_1|\cdot\cos\alpha=\frac{|b_2-b_1|}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\frac{|b_2-b_1|}{\sqrt{1+k^2}}$ bo'ladi.

3.2) Berilgan $\begin{cases} Ax+By+C_1=0 \\ Ax+By+C_2=0 \end{cases}$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{d=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Isboti: Burchak koeffitsientli va parametrik holda berilgan to'g'ri chiziq koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ larni avvalgi chiqarilgan $d=\frac{|b_2-b_1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|-\frac{C_2}{B}+\frac{C_1}{B}\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{A}{B}\right)^2}}=\frac{|C_2-C_1|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ formulaga qo'ysak,

$d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|y_0+\frac{A}{B}x_0+\frac{C}{B}\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{A}{B}\right)^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ natija chiqadi.

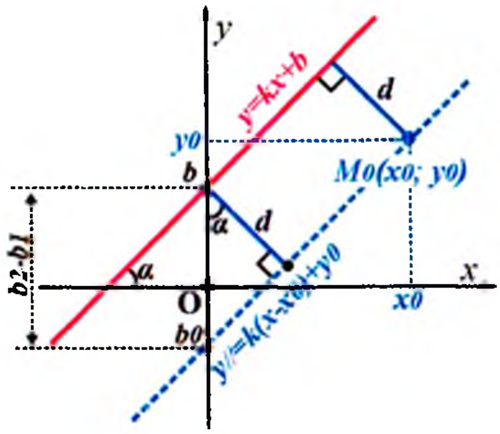
3.3) Berilgan $\begin{cases} \frac{x}{m_1}+\frac{y}{n_1}=1 \\ \frac{x}{m_2}+\frac{y}{n_2}=1 \end{cases}$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{d=\frac{|n_2-n_1|}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot m}$$

Isboti: Burchak koeffitsientli va ajratgan kesmalarga ko'ra berilgan to'g'ri chiziqlar koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{n}{m}$, $b=n$ formulaga qo'ysak, $d=\frac{|b_2-b_1|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|n_2-n_1|}{\sqrt{1+\left(-\frac{n}{m}\right)^2}}=\frac{|n_2-n_1|}{\sqrt{m^2+n^2}}\cdot m$ natija chiqadi.

4.1) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\, y_0)$ nuqtadan $y=kx+b$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa quyidagicha bo'ladi (2.5.4-rasm):

$$\boxed{d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}}$$



2.5.4-rasm

Isboti: Bunda $M_0(x_0;\, y_0)$ nuqtadan o'tkazilgan parallel to'g'ri chiziq $y_{//}=k(x-x_0)+y_0$ bo'lib, uning ozod hadi $b_0=y_0-kx_0$ ga teng. Berilgan $y=kx+b$ hamda parallel qilib o'tkazilgan $y_{//}=k(x-x_0)+y_0$ to'g'ri chiziq orasidagi masofa $d=\frac{|b_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}$ ga teng bo'ladi.

4.2) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\, y_0)$ nuqtadan $Ax+By+C=0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

Isboti: Burchak koeffitsientli va parametrik holda berilgan to'g'ri chiziq koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ larni avvalgi chiqarilgan $d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}$ formulaga qo'ysak,

$d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{\left|y_0+\frac{A}{B}x_0+\frac{C}{B}\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{A}{B}\right)^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ natija chiqadi.

4.3) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\, y_0)$ nuqtadan $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{d=\frac{|nx_0+my_0-mn|}{\sqrt{m^2+n^2}}}$$

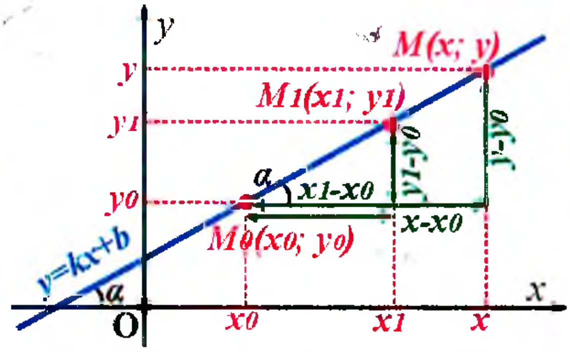
Isboti: Burchak koeffitsientli va ajratgan kesmalarga ko'ra berilgan to'g'ri chiziqlar koeffitsientlari orasidagi bog'lanish $k=-\frac{n}{m}$, $b=n$ larni avvalgi chiqarilgan $d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}$

formulaga qo'ysak, $d=\frac{\left|y_0+\frac{n}{m}x_0-n\right|}{\sqrt{1+\left(-\frac{n}{m}\right)^2}}=\frac{|nx_0+my_0-mn|}{\sqrt{m^2+n^2}}$ natija chiqadi.

5) Ixtiyoriy berilgan $M_0(x_0;\, y_0)$ va $M_1(x_1;\, y_1)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi (2.5.5-rasm):

$$\boxed{y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + y_0}$$

Isboti: $M_0(x_0;\ y_0)$ va $M_1(x_1;\ y_1)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti bir tomondan $k = tg\alpha$ bo'lsa, ikkinchi tomondan esa $\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\ tg\alpha = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} \end{cases}$ bo'ladi. Ularni tenglab $\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ tenglikni, undan esa $y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) + y_0$ tenglamani olamiz.

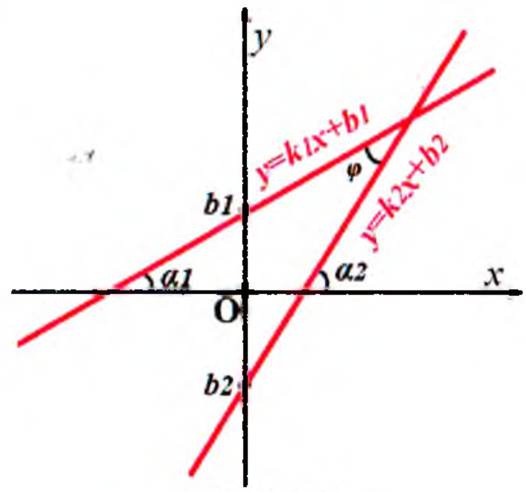


2.5.5-rasm

6) $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagicha aniqlanadi:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_2k_1}}$$

Isboti: $y = k_1x + b_1$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti $k_1 = tg\alpha_1$, $y = k_2x + b_2$ to'g'ri chiziqning burchak koeffitsienti esa $k_2 = tg\alpha_2$ ga teng. Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ bo'lib, bu burchakning tangensi esa $tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 \cdot tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$ bo'ladi. Bu kattalikni miqdor jihatidan $tg\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_2k_1}$ bo'ladi.



2.5.6-rasm

7.1) $\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{Agar \begin{cases} k_2 = k_1 & bo'lsa,\ parallel \\ k_2 = -\dfrac{1}{k_1} & bo'lsa,\ perpendikulyar \end{cases} bo'ladi}$$

Isboti: Agar to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'lsa, ular orasidagi burchak $\varphi = 0$ va demak, $tg\varphi = 0$ bo'ladi. Boshqa tomondan esa $tg\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_2k_1} = 0$ formulaga binoan, $k_2 = k_1$ bo'lganda bu shart bajariladi. Agar to'g'ri chiziqlar o'zaro perpendikulyar bo'lsa, ular orasidagi burchak $\varphi = 90^0$ va demak, $tg\varphi = \infty$ bo'ladi. Boshqa tomondan esa $tg\varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{1 + k_2k_1} = \infty$ formulaga binoan, kasrning maxraji nolga teng bo'lishi kerak, ya'ni $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ bo'lishi kerak.

7.2) $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari quyidagicha bo'ladi:

$$\text{Agar}\ \begin{cases} \dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1} & bo'lsa,\ parallel \\ A_1A_2+B_1B_2=0 & bo'lsa,\ perpendikulyar \end{cases} \quad bo'ladi$$

Isboti: $k=-\dfrac{A}{B}$ bog'lanishga ko'ra, $\begin{cases} k_1=-\dfrac{A_1}{B_1} \\ k_2=-\dfrac{A_2}{B_2} \end{cases}$ bo'ladi. Bu bog'lanishlardan paralellik sharti uchun

$k_1=k_1, \to -\dfrac{A_1}{B_1}=-\dfrac{A_2}{B_2}, \to \dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}$ munosobatni, perpendikulyarlik uchun esa

$k_1=-\dfrac{1}{k_1}, \to -\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{B_1}{A_1}, \to -A_1A_2=B_1B_2, \to A_1A_2+B_1B_2=0$ munosobatni olamiz.

7.3) $\begin{cases} \dfrac{x}{m_1}+\dfrac{y}{n_1}=1 \\ \dfrac{x}{m_2}+\dfrac{y}{n_2}=1 \end{cases}$ to'g'ri chiziqlarning paralellik va perpendikulyarlik shartlari quyidagicha bo'ladi:

$$\text{Agar}\ \begin{cases} \dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{n_2}{n_1} & bo'lsa,\ parallel \\ m_1m_2+n_1n_2=0 & bo'lsa,\ perpendikulyar \end{cases} \quad bo'ladi$$

Isboti: $k=-\dfrac{n}{m}$ bog'lanishga ko'ra, $\begin{cases} k_1=-\dfrac{n_1}{m_1} \\ k_2=-\dfrac{n_2}{m_2} \end{cases}$ bo'ladi. Bu bog'lanishlardan paralellik sharti uchun

$k_1=k_1, \to -\dfrac{n_1}{m_1}=-\dfrac{n_2}{m_2}, \to \dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{n_2}{n_1}$ munosobatni, perpendikulyarlik uchun esa

$k_1=-\dfrac{1}{k_1}, \to -\dfrac{n_2}{m_2}=\dfrac{m_1}{n_1}, \to -n_1n_2=m_1m_2, \to m_1m_2+n_1n_2=0$ munosobatni olamiz.

2.6-Mavzu: Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari

Ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi deb

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

ko'rinishdagi sistemaga aytiladi. Bu erda: a_1,b_1,c_1 va a_2,b_2,c_2 – birinchi va ikkinchi tenglamalar koffitsientlari bo'lib, ular ma'lum sonlardir. Tenglamalar sistemasini yechish deb sistemadagi noma'lum (x,y) sonlar juftligini aniqlashga aytiladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning 3 xil usuli bo'lib, ular quyidagilar:

I. o'rniga qo'yish usuli;
II. qo'shish usuli;
III. grafik usul.

Yuqorida sanab o'tilgan har bir usulga to'xtalib o'tamiz.

I) O'rniga qo'yish usulida sistemadagi tenglamalardan ixtiyoriy biridan ixtiyoriy bir noma'lumni (odatda bizga qulay bo'lganini) ikkinchisi orqali ifodalab olinadi. So'ngra uni ikkinchi tenglamadagi noma'lum o'rniga qo'yib bir noma'lumli tenglamaga aylantiriladi. Bu tenglamadagi noma'lum aniqlanilib, uni birinchi tenglamaga qo'yiladi va ikkinchi nomalum ham aniqlab olinadi.

Misol № 1: $\begin{cases} x-5y=14 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini o'rniga qo'yish usulida eching.

Yechish: Bunda sistemadagi 1-tenglamadan x ni topib olib, so'ngra uni 2-tenglamaga qo'yamiz. SHunda $\begin{cases} x=5y+14 \\ 3(5y+14)+2y=8 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x=5y+14 \\ 15y+42+2y=8 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x=5y+14 \\ 17y=-34 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x=5y+14 \\ y=-2 \end{cases}$ bo'ladi. Topilgan y ning qiymatini 1-tenglamaga qo'ysak, x ning son qiymati kelib chiqadi, ya'ni $\begin{cases} x=5\cdot(-2)+14 \\ y=-2 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-2 \end{cases}$ natija chiqadi. Demak, sistema yechimi $(4;\ -2)$ ekan.

Misol № 2: $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8 \\ \frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{4}=11 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini o'rniga qo'yish usulida eching.

Yechish: Avvalo sistemadagi har bir tenglamani eng kichik umumiy maxraj bo'lgan songa ko'paytiriladi va soddalashtiriladi. Bunda sistema ushbu $\begin{cases} \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8 & \big| \cdot 6 \\ \frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{4}=11 & \big| \cdot 12 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} 3(x+y)-2(x-y)=48 \\ 4(x+y)-3(x-y)=132 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} 3x+3y-2x+2y=48 \\ 4x+4y-3x+3y=132 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x+5y=48 \\ x+7y=132 \end{cases}$ sodda sistemaga aylanadi. Bunda sistemadagi 1-tenglamadan x ni topib olib, so'ngra uni 2-tenglamaga qo'yamiz. SHunda $\begin{cases} x=48-5y \\ 48-5y+7y=132 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x=48-5y \\ 2y=132-48 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x=48-5y \\ y=42 \end{cases}$ bo'ladi. Topilgan y ning qiymatini 1-tenglamaga qo'ysak, x ning son qiymati kelib chiqadi, ya'ni $\begin{cases} x=48-5\cdot 42 \\ y=42 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x=-162 \\ y=42 \end{cases}$ natija chiqadi. Demak, sistema yechimi $(42;\ -162)$ ekan.

II) Qo'shish usulida sistemadagi tenglamalarning har birini turli sonlarga ko'paytirish orqali noma'lumlardan birining ko'paytuvchi koeffitsientlari tenglashtirib olinadi. So'ngra hosil bo'lgan yangi tenglamalar sistemasidagi tenglamalar bir-biriga qo'shish yoki bir-biridan ayirish natijasida bir noma'lumli tenglama hosil qilinadi. Bu bir noma'lumli tenglamadan noma'lum aniqlanib, uning son qiymatini berilgan sistemaning ixtiyoriy bir tenglamasiga qo'yish natijasida ikkinchi noma'lum ham aniqlanadi.

Misol № 3: $\begin{cases} 2x+y=13 \\ 3x-y=7 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini qo'shish usulida eching.

Yechish: Bunda sistemadagi tenglamalarning ikkinchi hadi koeffitsientlari $+1$ va -1ga teng. Bu tenglamalarni qo'shib bir noma'lumli tenglamaga aylantiramiz. Ketma-ket amallar natijasida $\begin{cases} 2x+y=13 & (1) \\ 3x-y=7 & (2) \end{cases}, \rightarrow (1)+(2), \rightarrow 3x+2x=13+7, \rightarrow 5x=20, \rightarrow x=4$ noma'lumlardan birini aniqlab olinadi. Topilgan $x=4$ qiymatni (1) yoki (2) tenglamaning ixtiyoriy biriga qo'yishimiz mumkin. Keling $x=4$ qiymatni (1) tenglamaga qo'yamiz. Bunda $2\cdot 4+y=13, \rightarrow y=13-8=5$ natija chiqadi. SHunday qilib, sistema yechimi $(4;\ 5)$ ekan.

Misol № 4: $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=4 \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini qo'shish usulida eching.

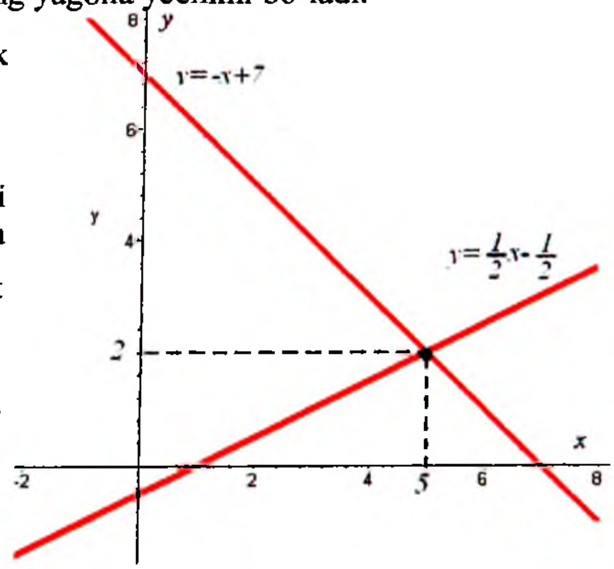
Yechish: Avvalo sistemadagi tenglamalarni eng kichik umumiy maxraj bo'lgan sonlarga ko'paytiramiiz. Bunda $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{4}=3 & \big| \cdot 4 \\ \frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1 & \big| \cdot 6 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x+y=12 \\ x-2y=6 \end{cases}$ bo'ladi. Tenglamalarning birinchi hadlari koeffitsientlari bir xil. Shuning uchun (1)-(2) amalini qo'llaymiz. Unga ko'ra $\begin{cases} x+y=12 & (1) \\ x-2y=6 & (2) \end{cases}, \rightarrow$ $\rightarrow (1)-(2), \rightarrow y+2y=12-6, \rightarrow 3y=6, \rightarrow y=2$ natija chiqadi. $y=2$ natijani (1) tenglamaga qo'ysak, $x+2=12, \rightarrow x=10$ natija chiqadi. Demak, sistema yechimi $(3;\ 10)$ ekan.

III) Tenglamalar sistemasini yechishning grafik usulida quyidagi ishlar bajariladi:

1) tenglamalar sistemasidagi ikkita tenglamani ham $y = kx + b$ funksiya ko'rinishiga keltiriladi, ya'ni bunda $\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$ funksiyalar hosil bo'ladi;
2) bitta Dekart koordinatalar sistemasida $\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$ funksiyalar grafiklari quriladi;
3) funksiyalar grafiklari kesishgan nuqtani topamiz va bu nuqtaning koordinatalarini aniqlaymiz;
4) topilgan nuqta bir vaqtda har ikki grafikka tegishli bo'lgani uchun bu nuqtaning koordinatalari berilgan tenglamalar sistemasining yagona yechimi bo'ladi.

Misol №5: $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = \frac{7}{4} \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik usul yordamida eching.

<u>Yechish:</u> Dastlab sistemadagi har bir tenglamani $y = kx + b$ funksiya ko'rinishiga keltiramiz. Bunda $\begin{cases} y_1 = -x + 7 \\ y_2 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \end{cases}$ chiziqli funksiyalari hosil bo'ladi. *Oxy* Dekart koordinatalar sistemasida har ikki funksiya grafigini quramiz (2.6.1-rasm). Grafikdan to'g'ri chiziqlar $(5;\ 2)$nuqtada, ya'ni ular kesishgan nuqta koordinatalari $x = 5,\ y = 2$ ekanini aniqlaymiz. Bu javobni berilgan sistema tenglamalariga qo'yib



2.6.1-rasm

tekshirib ko'ramiz. Bunda $\begin{cases} \frac{5}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5+2}{4} = \frac{7}{4} \\ \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5-4}{6} = \frac{1}{6} \end{cases}$ to'g'ri tenglik hosil bo'ldi. Demak, sistema yechimi $(5;\ 2)$ bo'lar ekan.

Endi tenglamalar sistemasining yechimga ega bo'lish shartlariga to'xtalamiz. Bunda tenglamalar sistemasi $\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases}$ funksiyalar ko'rinishiga keltirilgan.

1) Agar funksiyalarning burchak koeffitsientlari o'zaro teng bo'lmasa, u holda to'g'ri chiziqlar bitta nuqtada kesishgani uchun tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo'ladi.

$$\boxed{Agar\ \ k_1 \neq k_2\ \ bo'lsa,\ \ yagona\ \ yechimga\ \ ega}$$

2) Agar funksiyalarning burchak koeffitsientlari va ozod hadlari o'zaro teng bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqlar ustma-ust tushib qoladi, har bir nuqta bir vaqtda ikkita to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi. Shuning uchun, bu tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

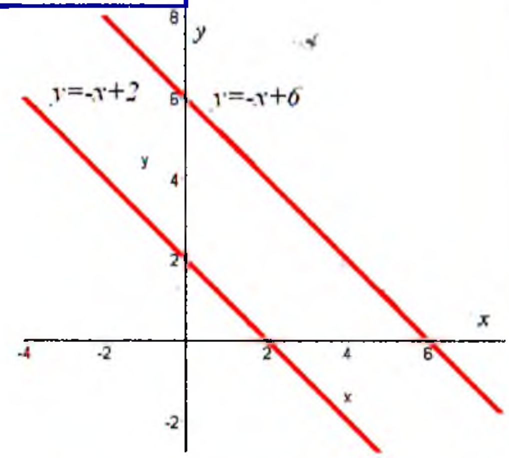
$$\boxed{Agar\ \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases} bo'lsa,\ \ cheksiz\ \ yechimga\ \ ega}$$

3) Agar funksiyalarning burchak koeffitsientlari o'zaro teng bo'lib, ozod hadlari o'zaro teng bo'lmasa, u holda to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi, bu parallel chiziqlar hech qanday umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi. Shuning uchun, bu tenglamalar sistemasi yechimga ega emas.

$$Agar \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases} bo'lsa, \ yechim \ \ mavjud \ emas$$

Misol №6: $\begin{cases} x+y=6 \\ 2x=4-2y \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik usul yordamida eching.

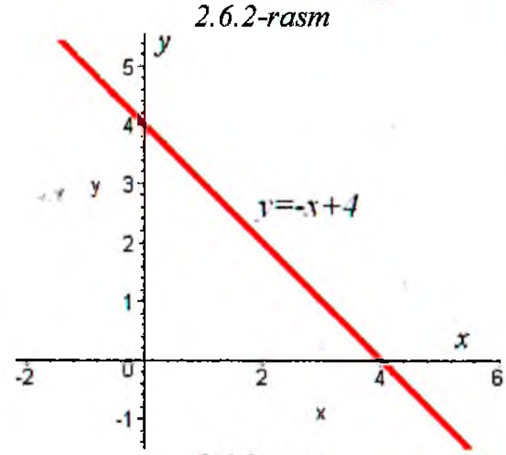
<u>Yechish:</u> Dastlab sistemadagi har bir tenglamani $y=kx+b$ funksiya ko'rinishiga keltiramiz. Bunda $\begin{cases} y_1=-x+6 \\ y_2=-x+2 \end{cases}$ chiziqli funksiyalari hosil bo'ladi. *Oxy* Dekart koordinatalar sistemasida har ikki funksiya grafigini quramiz (2.6.2-rasm). Grafiklardan ham ko'rinib turibdiki, ular o'zaro parallel ekan, ya'ni ularning umumiy kesishish nuqtasi yo'q. Shu sababli berilgan tenglamalar sistemasi yechimga ega emas.



2.6.2-rasm

Misol №6: $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x=8-2y \end{cases}$ tenglamalar sistemasini grafik usul yordamida eching.

<u>Yechish:</u> Dastlab sistemadagi har bir tenglamani $y=kx+b$ funksiya ko'rinishiga keltiramiz. Bunda $\begin{cases} y_1=-x+4 \\ y_2=-x+4 \end{cases}$ chiziqli funkitsyalari hosil bo'ladi. Dekart koordinatalar sistemasida har ikki funksiya grafigini quramiz (2.6.3-rasm). Ko'rinib turibdiki, grafiklar ustma-ust tushib qoldi, cheksiz ko'p umumiy nuqtalarga ega. Shuning uchun berilgan tenglamalar sistemasi cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.



2.6.3-rasm

2.7-Mavzu: Chiziqli parametrik tenglama

Chiziqli tenglama yechimining uning parametrlari (koeffitsientlari) bilan bog'liq holda o'zgarishiga ***chiziqli parametrik tenglama*** deyiladi. Parametrik chiziqli tenglama qanday ko'rinishda berlishidan qat'iy nazar uni

$$\boxed{Ax = B}$$

ko'rinishga keltiriladi. Quyidagi uch holatni qarab chiqamiz:

1) Yagona yechimga ega bo'lish sharti;

Agar $Ax=B$ tenglamada $A \neq 0$ bo'lsa, u holda $x=\frac{B}{A}$ degan yagoan yechim chiqadi.

2) Cheksiz ko'p yechimga ega bo'lish sharti;

Agar $Ax=B$ tenglamada $A=0$, $B=0$ bo'lsa, u holda cheksiz ko'p yechim chiqadi.

3) Yechimga ega bo'lmaslik sharti.

Agar $Ax=B$ tenglamada $A=0$, $B \neq 0$ bo'lsa, u holda yechim bo'lmaydi.

Misol №1: $kx-3=k+2x$ tenglamalar sistemasini grafik usul yordamida eching.

<u>Yechish:</u> Noma'lum qatnashgan hadlarni bir tomonga sonlarni boshqa tomonga o'tkazsak, $kx-2x=k+3$, $(k-2)x=k+3$ hosil bo'ladi. Buni $Ax=B$ bilan taqqoslasak, $A=k-2$, $B=k+3$ natija chiqadi. Yechimga ega bo'lmaslik $A=0$, $B\neq 0$ shartiga ko'ra $k=2$ bo'ladi.

3-BOB: SONLAR. TENGSIZLIK VA MODULNING XOSSALARI. MODULLI FUNKSIYALAR.

3.1-Mavzu: Sonlar

Biz o'rganadigan sonlar bir necha turlarga bo'linadi. Sonlar, ularning turlarini bilish katta ahamiyatga ega bo'lib, misol va masalalar yechish jarayonida bizga juda qo'l keladi. Biz ularning har biriga to'xtalib o'tamiz.

1) Natural sonlar.

Sanashda ishlatiladigan sonlarga ***natural sonlar*** deyiladi va N bilan belgilanadi.

Mas: 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; .....

2) Butun sonlar.

Natural sonlar, natural sonlarga qarama-qarshi ishorali sonlar va nol butun sonlar hisoblanadi va Z bilan belgilanadi.

Masalan: -5 ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; .....

3) Musbat sonlar.

Noldan katta barcha sonlar ***musbat sonlar*** hisoblanadi.

Mas: 0,1 ; 2,08 ; 3,(6) ; 4 /7 ; 5 ; 10 ; .....

4) Manfiy sonlar.

Noldan kichik barcha sonlar ***manfiy sonlar*** hisoblanadi.

Masalan: -0,1 ; -2,08 ; -3,(6) ; -4 /7 ; - 5 ; -10 ; .....

5) Ratsional sonlar.

$\frac{m}{n}$ ko'rinishida ifodalash mumkin bo'lgan sonlarga ***ratsional sonlar*** deyiladi va **Q** bilan belgilanadi. Bu erda: m – butun son, n – ratsional son.

Masalan: $0{,}1=\frac{1}{10};\ -5=\frac{-5}{1};\ -0{,}35=\frac{-35}{100};\ 0{,}5=\frac{1}{2};\ .....$

6) Davriy sonlar.

Chekli o'nli kasr shaklida ifodalab bo'lmay, nechtadir raqamning qayta-qayta takrorlanib kelaverishidan iborat sonlar ***davriy sonlar*** hisoblanadi.

Masalan: 0,35353535...= 0,(35) = 35 / 99 ;

0,126126126 ... = 0,(126) = 126 / 999

2,0424242 ... = 2,0(42) = 2 + 42 /990 = 2022 /990

7) Irratsional sonlar.

Chekli o'nli kasr shaklida ifodalab bo'lmaydigan va davriy bo'lmagan sonlar ***irratsional sonlar*** hisoblanadi va I bilan belgilanadi.

Masalan: $\sqrt{2}=1{,}41423562....$, $\sqrt{3}=1{,}732050808....$, $\pi=3{,}141592654....$.

8) Haqiqiy sonlar.

-∞ dan +∞ gacha bo'lgan barcha sonlar (biz yuqorida sanab o'tgan sonlarning hammasi) ***haqiqiy sonlar***ning ichiga kiradi va R bilan belgilanadi.

3.2-Mavzu: Musbat va manfiy sonlarning xossalari

Sonlarning quyida keltirilgan xossalaridan misol va masalalar yechishda ko'p foydalaniladi:

a) Ikkita musbat sonning yig'indisi, ko'paytmasi, bo'linmasi musbat son bo'ladi.

$$\text{Agar } \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } \begin{cases} a+b>0 \\ ab>0 \\ \frac{a}{b}>0 \end{cases} \text{ bo'ladi}$$

b) Ikkita manfiy sonning yig'indisi manfiy, ko'paytmasi va bo'linmasi musbat bo'ladi.

$$\text{Agar } \begin{cases} a<0 \\ b<0 \end{cases} \text{ bo‘lsa, u holda } \begin{cases} a+b<0 \\ ab>0 \\ \dfrac{a}{b}>0 \end{cases} \text{ bo‘ladi}$$

v) Musbat son bilan manfiy sonning ko‘paytmasi va bo‘linmasi manfiy son bo‘ladi.

$$\text{Agar } \begin{cases} a>0 \\ b<0 \end{cases} \text{ bo‘lsa, u holda } \begin{cases} ab<0 \\ \dfrac{a}{b}>0 \\ \dfrac{b}{a}>0 \end{cases} \text{ bo‘ladi}$$

g) Agar ikkita sonning ko‘paytmasi nolga teng bo‘lsa, bu sonlardan kamida bittasi nolga tengdir.

$$\text{Agar } a\cdot b=0 \text{ bo‘lsa, u holda } \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a\neq 0 \\ b=0 \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases} \text{ bo‘ladi}$$

d) Agar kasr nolga teng bo‘lsa, kasrning surati nolga teng bo‘lib, maxraji esa noldan farqli bo‘ladi.

$$\text{Agar } \frac{a}{b}=0 \text{ bo‘lsa, u holda } \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases} \text{ bo‘ladi}$$

3.3-Mavzu: Sonli tengsizliklar va uning asosiy xossalari

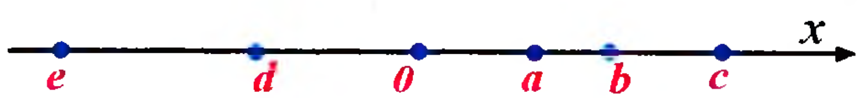
Sonlarni taqqoslashda agar ular teng bo‘lmasa ular orasiga katta $(>)$ yoki kichik $(<)$ ishorasi qo‘yiladi.

Agar a son b sondan katta bo‘lsa $a>b$ ko‘rinishda, agar a son b sondan kichik bo‘lsa $a<b$ ko‘rinishda ifodalanadi.

Agar $a-b>0$ bo‘lsa, u holda $a>b$ bo‘ladi.

Agar $a-b<0$ bo‘lsa, u holda $a<b$ bo‘ladi.

Sonlarni sonlar o‘qiga joylashtirganda eng katta son eng o‘ng tarafda, eng kichik son esa eng chap tarafda joylashadi, ya’ni sonlar chapdan o‘ngga qarab o‘sish tartibida joylashtiriladi (3.3.1-rasm).

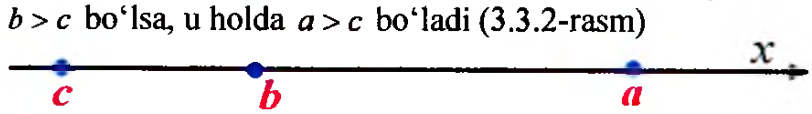


3.3.1-rasm

Rasmda $c-$ eng katta qiymat, $e-$ eng kichik qiymat bo‘lib, ular o‘sish tartibida $e<d<0<a<b<c$ ketma-ketligida bo‘ladi.

Misol va masalalar yechishda tengsizliklarning ushbu xossalaridan foydalanamiz:

a) Agar $a>b$ va $b>c$ bo‘lsa, u holda $a>c$ bo‘ladi (3.3.2-rasm)



3.3.2-rasm

b) Tengsizlikning har ikkala tarafiga ayni bir sonni qo‘shish yoki ayirish bilan tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi.

$$\text{Agar } a>b \text{ bo‘lsa, u holda } \begin{cases} a+c>b+c \\ \textit{yoki} \\ a-c>b-c \end{cases} \text{ bo‘ladi}$$

Bunga ushbu misol orqali ishonch hosil qilamiz. Tarozining ikki pallasida tosh va yuk turgan bo‘lsin. Aytaylik tosh og‘irroq bo‘lib $a=5kg$, yuk esa engilroq bo‘lib $b=4kg$ bo‘lsin. Har ikki pallaga $1kg$dan qo‘shimcha tosh qo‘yilganda pallalarda $a+1=6kg$ va $b+1=5kg$, $1kg$dan tosh olinganda esa pallalarda $a-1=4kg$ va $b-1=3kg$ massalar hosil bo'ladi. Demak, og'ir palla keyin ham og'irligicha qoladi.

v) Tengsizlikning har ikkala tomonini bir xil musbat songa ko'paytirish yoki bo'lish bilan tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.

$$\text{Agar } \begin{cases} a>b \\ c>0 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } \left[\begin{array}{l} a\cdot c>b\cdot c \\ yoki \\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c} \end{array}\right. \text{ bo'ladi}$$

Bunga ushbu misol orqali ishonch hosil qilamiz. Tarozining ikki pallasida tosh va yuk turgan bo'lsin. Aytaylik tosh og'irroq bo'lib $a=5kg$, yuk esa engilroq bo'lib $b=4kg$ bo'lsin. Har ikki pallaga o'zining og'irligicha yuk va tosh qo'yaylik. Bunda pallalarda $a\cdot 2=10kg$ va $b\cdot 2=8kg$ massalar hosil bo'ladi. Endi pallalardagi yuk va tosh massasini yarmini olib tashlaylik. Bunda pallalarda $\frac{a}{2}=2{,}5kg$ va $\frac{b}{2}=2kg$ massalar hosil bo'ladi. Demak, og'ir palla keyin ham og'irligicha qoladi.

g) Tengsizlikning har ikkala tomonini bir xil manfiy songa ko'paytiriganda yoki bo'lganda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.

$$\text{Agar } \begin{cases} a>b \\ c>0 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } \left[\begin{array}{l} a\cdot c<b\cdot c \\ yoki \\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c} \end{array}\right. \text{ bo'ladi}$$

Aytaylik, $a=5,\ b=4,\ c=-2$ bo'lsin. Bunda $5>4$, biroq $\begin{cases} 5>4 \ |\cdot(-2) \\ 5>4 \ |:(-2) \end{cases}$ amalidan keyin $\begin{cases} -10>-8 \\ -2{,}5>-2 \end{cases}$ bo'ladi. Demak, $a\cdot c<b\cdot c$ yoki $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$ bo'lar ekan.

d) Har ikkala tarafi ham musbat sonlar bo'lgan tengsizlik uchun quyidagi shart o'rinlidir:

$$\text{Agar } \begin{cases} a>b \\ a,\, b>0 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } \frac{1}{a}<\frac{1}{b} \text{ bo'ladi}$$

Haqiqatan ham $a=5,\ b=4$ bo'lsa, bunda $5>4$ lekin, $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$, $\rightarrow$ $0{,}2<0{,}25$ bo'ladi.

e) Har ikkala tarafi ham manfiy sonlar bo'lgan tengsizlik uchun quyidagi shart o'rinlidir:

$$\text{Agar } \begin{cases} a>b \\ a,\, b<0 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } \frac{1}{a}<\frac{1}{b} \text{ bo'ladi}$$

Haqiqatan ham $a=-4,\ b=-5$ bo'lsa, bunda $-4>-5$ lekin, $\frac{1}{-4}<\frac{1}{-5}$, $\rightarrow$ $-0{,}25<-0{,}2$ bo'ladi.

3.4-Mavzu: Sonli tengsizliklarni qo'shish va ko'paytirish. Qat'iy va noqat'iy tengsizliklar

Tengsizliklarni qo'shish va ko'paytirish qoidasini tariflaymiz va misol keltiramiz.

a) Bir xil ishorali tengsizliklar qo'shilganda xuddi shu ishorali tengsizlik hosil bo'ladi.

$$\text{Agar } \begin{cases} a>b \\ c<d \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } a+c>b+d \text{ bo'ladi}$$

Bunga ushbu misol orqali ishonch hosil qilamiz. Agar biror mashina 1-soatda $80km$ dan ko'p yo'l yurgan bo'lsa, 2-soatda esa $100km$ dan ko'p yo'l yurgan bo'lsa, u holda bu mashina 2 soat vaqt davomida jami $180km$ dan ko'p yo'l yurgan bo'ladi, ya'ni

$\begin{cases} S_1 > 80\ km \\ S_2 > 100 km \end{cases}$, umumiy yo'l $S = S_1 + S_2$ formulaga ko'ra $\begin{cases} S_1 + S_2 > 80\ km + 100\ km \\ S > 180\ \ km \end{cases}$ bo'ladi.

b) Har ikki tarafi ham musbat sonlar bo'lgan bir xil ishorali tengsizliklar ko'paytirilganda xuddi shu ishorali tengsizlik hosil bo'ladi.

> Agar $\begin{cases} a > b \\ c < d \\ a,b,c,d > 0 \end{cases}$ bo'lsa, u holda $a \cdot c > b \cdot d$ bo'ladi

Bunga ushbu misol orqali ishonch hosil qilamiz. Agar to'g'ri to'rtburchakning eni $3m$ dan katta, bo'yi esa $6m$ dan katta bo'lsa, uning yuzasi $18m^2$ dan katta bo'ladi, ya'ni

$\begin{cases} a > 3\ m \\ b > 6m \end{cases}$, yuza $S = a \cdot b$ formulaga ko'ra $\begin{cases} a \cdot b > 3m \cdot 6m \\ S > 18\ m^2 \end{cases}$ bo'ladi.

Tengsizliklarning qat'iy tengsizlik va noqat'iy tengsizlik kabi turlari bor.

$>, <$ – ishoralari qat'iy tengsizlik ishoralaridir. Masalan, $a > 5$ qat'iy tengsizlikda $a = 5{,}1$, $a = 5{,}01$, $a = 5{,}001$, $a = 5{,}0001, \ldots$ sonlarini qabul qilishi mumkin, lekin hech qachon $a = 5$ bo'la olmaydi. Chunki $a \neq 5$ deb qat'iy shart qo'yilgan. Xuddi shuningdek, $a < 5$ qat'iy tengsizlikda $a = 4{,}9$, $a = 4{,}99$, $a = 4{,}999$, $a = 4{,}9999, \ldots$ sonlarini qabul qilishi mumkin, lekin hech qachon $a = 5$ bo'la olmaydi. Chunki $a \neq 5$ deb qat'iy shart qo'yilgan. Bulardan tashqari $a > 0$ tengsizlikni *musbat* deb $a < 0$ tengsizlikni esa *manfiy* deb o'qiladi.

$\geq, \leq$ – ishoralari noqat'iy tengsizlik ishoralaridir. $\geq$ ishorasi *katta yoki teng* deb yoki *kichik bo'lmagan* deb o'qiladi. . $\leq$ ishorasi *kichik yoki teng* deb yoki *katta bo'lmagan* deb o'qiladi. Masalan, $a \geq 5$ noqat'iy tengsizlikda a son 5 va undan katta sonlarni qabul qiladi. Xuddi shuningdek, $a \leq 5$ qat'iy tengsizlikda a son 5 va undan kichik sonlarni qabul qiladi. Bulardan tashqari $a \geq 0$ tengsizlikni *noldan katta yoki teng* deb yoki *nomanfiy* deb o'qiladi. $a \leq 0$ tengsizlikni esa *noldan kichik yoki teng* deb yoki *nomusbat* deb o'qiladi.

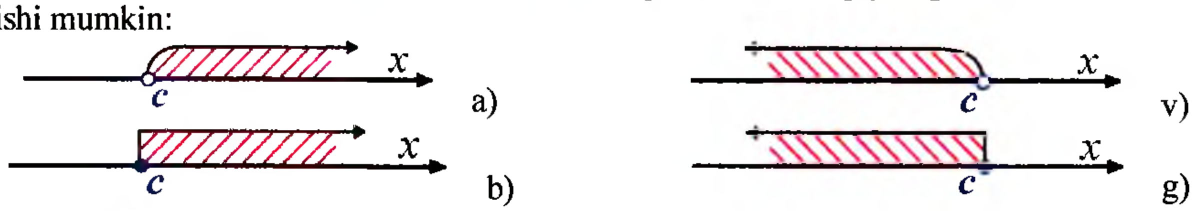
3.5-Mavzu: Bir noma'lumli tengsizlik. Bir noma'lumli tengsizliklar sistemalari. Sonli oraliqlar

Bir noma'lumli tengsizlik deb $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$ ko'rinishlardan biriga keltiriladigan tengsizlikka aytiladi.

Bir noma'lumli ***tengsizlikning yechimi*** deb, noma'lumning tengsizlikni to'g'ri sonli tengsizlikka aylantiradigan qiymatlar to'plamiga aytiladi.

Tengsizlikni yechish – uning hamma yechimlarini topish yoki yechimi yo'q ekanligini aniqlash deganidir.

Tengsizlining yechimi tengsizlik yoki sonli oraliq ko'rinishida quyidagi holatlardan biri bo'lib chiqishi mumkin:



3.5.1-rasm

1) $x > c$ bo'lganda yechim $x \in (c;\ \infty)$ bo'ladi (3.5.1-a,rasm).
2) $x \geq c$ bo'lganda yechim $x \in [c;\ \infty)$ bo'ladi (3.5.1-b,rasm).
3) $x < c$ bo'lganda yechim $x \in (-\infty;\ c)$ bo'ladi (3.5.1-v,rasm).
4) $x \leq c$ bo'lganda yechim $x \in (-\infty;\ c]$ bo'ladi (3.5.1-g,rasm).

Tengsizliklarni yechishda asosan quyidagi xossalarga tayanib ish ko'riladi:

1-xossa.

Tengsizlikning istalgan hadini uning bir qismidan ikkinchi qismiga hadning ishorasini qarama-qarshisiga o‘zgartirgan holda o‘tkazish mumkin. bunda tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi.

2-xossa.

Tengsizlikning ikkala qismini noldan farqli bir xil songa ko‘paytirish yoki bo‘lish mumkin. Bir xil musbat songa ko‘paytirganda yoki bo‘lganda tengsizlik ishorasi o‘zgarmaydi, bir xil manfiy songa ko‘paytirganda yoki bo‘lganda esa tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgaradi.

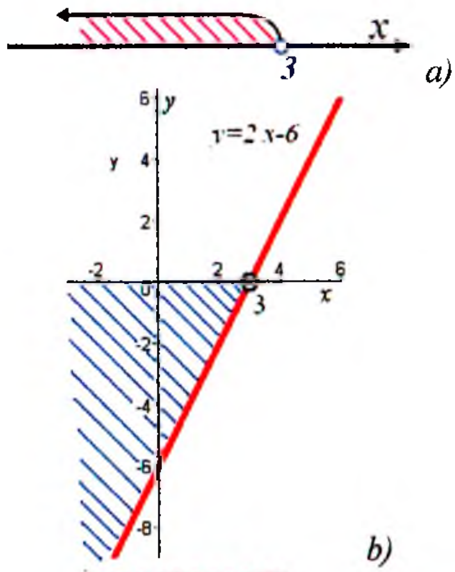
Misol № 1: $3(x-2)-6(x+1)>-5(x-3)-13$ tengsizlikni eching.

3.5.2-rasm

Yechish: Avval qavslarni ochib $3x-6-6x-6>-5x+15-13$ ifodani olamiz. Noma’lum qatnashgan hadlarni chap tomonga ma’lum sonlarni o‘ng tomonga o‘tkazamiz va soddalashtiramiz. Bunda $3x-6x+5x>15-13+6+6, \to 2x>14, \to x>7$ natija kelib chiqadi. Tengsizlik yechimi sonli oraliq ko‘rinishida $x\in(7;\ \infty)$ bo‘lib, bu javob sonlar o‘qida 3.5.2-rasmdagi kabi tasvirlanadi.

Misol № 2: $2x-6<0$ tengsizlikni eching.

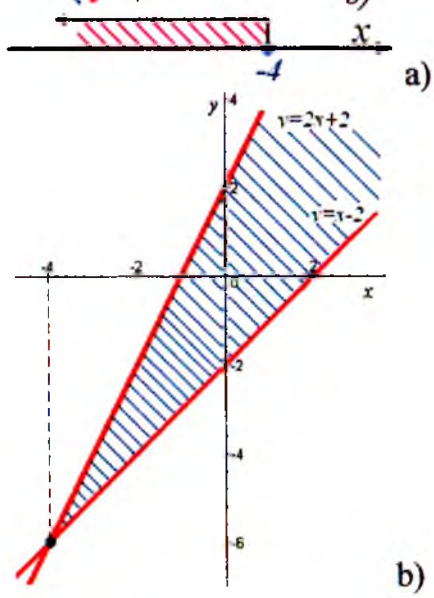
Yechish: Bunda ma’lum sonni o‘ng tomonga o‘tkazamiz va soddalashtiramiz. Bunda $2x-6<0, \to 2x<6, \to x<3$ natija kelib chiqadi. Tengsizlik yechimi sonli oraliq ko‘rinishida $x\in(-\infty;\ 3)$ bo‘lib, bu javob sonlar o‘qida 3.5.3-a,rasmdagi kabi tasvirlanadi. Agar berilgan tengsizlikni grafik ko‘rinishda ishlaydigan bo‘lsak, tengsizlikning chap va o‘ng tomonlarini $\begin{cases} y_1 = 2x-6 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ chiziqli funksiyalar ko‘rinishida olamiz. Bu erda $y_2 = 0$ funksiya bu Ox o‘qining o‘zidir. Bunda 1-funksiya 2-funksiyadan pastda $(y_1 < y_2)$ yotadigan sonli oraliq tengsizlikning yechimi bo‘ladi. 3.5.3-b,rasmdan tengsizlik yechimi $x\in(-\infty;\ 3)$ ekanligi ko‘rinib turibdi.



3.5.3-rasm

Misol № 3: $2(x-3)+4\ge x-2$ tengsizlikni eching.

Yechish: Avval qavsni ochsak va soddalashtirsak $2x+6-4\ge x-2, \to 2x+2\ge x-2$ bo‘ladi. Noma’lum qatnashgan hadlarni chap tomonga ma’lum sonlarni o‘ng tomonga o‘tkazamiz va soddalashtiramiz. Bunda $2x-x\ge -2-2, \to x\ge -4$ natija kelib chiqadi. Tengsizlik yechimi sonli oraliq ko‘rinishida $x\in[-4;\ \infty)$ bo‘lib, bu javob sonlar o‘qida 3.5.4-a,rasmdagi kabi tasvirlanadi. Agar berilgan tengsizlikni grafik ko‘rinishda ishlaydigan bo‘lsak, tengsizlikning chap va o‘ng tomonlarini soddalashtirib $\begin{cases} y_1 = 2x+2 \\ y_2 = x-2 \end{cases}$ chiziqli funksiyalar ko‘rinishiga keltiramiz. Bunda 1-funksiya 2-funksiyadan pastda bo‘lmagan $(y_1 \ge y_2)$ oraliqda yotadigan sonli oraliq tengsizlikning yechimi bo‘ladi. 3.5.4-b,rasmdagi grafiklardan tengsizlik yechimi $x\in(-\infty;\ -4]$ ekanligi ko‘rinib turibdi.



3.5.4-rasm

Ikki yoki undan ko‘p tengsizliklardan iborat sistemaga ***tengsizliklar sistemasi*** deyiladi. Tengsizliklar sistemasining ***yechimi*** deb sistemadagi har bir tengsizlikni to‘g‘ri tengsizlikka aylantiradigan sonlar to‘plamiga aytiladi.

Tengsizlik yechimi ushbu ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin:

1) tengsizliklar sistemasi ko‘rinishida;

2) qo‘shtengsizlik ko‘rinishida;
3) sonli oraliq ko‘rinishida;
4) sonlar o‘qida tasvirlanishi mumkin.

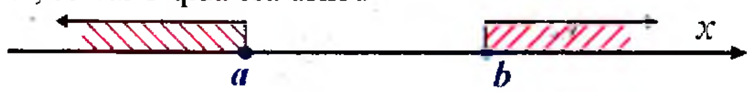
Yuqorida keltirilgan to‘rtala yechim ham o‘zaro teng kuchli bo‘lib, tengsizlklar sistemasi yechimi ulardan biri ko‘rinishida berilishi mumkin. Biz quyida keladigan ikkita holda barcha yechim ko‘rinishlarini beramiz:

a) Agar $a<b$ sonlar uchun tengsizliklar sistemasi $\begin{cases} x\ge a \\ x\le b \end{cases}$ ko‘rinishda berilsa, sistemaning yechimi qo‘shtengsizlik ko‘rinishida $a\le x\le b$ kabi, sonli oraliq ko‘rinishida $x\in[a;\ b]$ kabi, sonlar o‘qida esa ushbu

3.5.5-rasm

rasmdagi kabi beriladi.

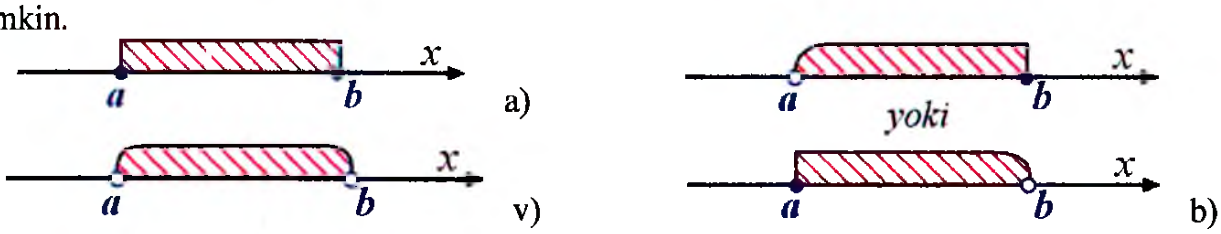
b) Agar $a<b$ sonlar uchun tengsizliklar sistemasi $\begin{cases} x\le a \\ x\ge b \end{cases}$ ko‘rinishda berilsa, sistemaning yechimi odatda qo‘shtengsizlik ko‘rinishida berilmaydi, sonli oraliq ko‘rinishida $x\in(-\infty;\ a]\cup[b;\ \infty)$ kabi, sonlar o‘qida esa ushbu



3.5.6-rasm

rasmdagi kabi beriladi.

Sonli oraliqning o‘zi ham 1) kesma, 2) yariminterval va 3) interval ko‘rinishlarda berilishi mumkin.



3.5.7-rasm

1) agar qo‘shtengsizlik $a\le x\le b$ ko‘rinishda berilsa, sonli oraliq $x\in[a;\ b]$ kabi bo‘lib, bu sonli oraliqni ***kesma*** deb ataladi (3.5.7-a,rasm).

2) agar qo‘shtengsizlik $a<x\le b$ yoki $a\le x<b$ ko‘rinishda berilsa, sonli oraliq $x\in(a;\ b]$ yoki $x\in[a;\ b)$ kabi bo‘lib, bu sonli oraliqni ***yariminterval*** deb ataladi (3.5.7-b,rasm).

3) agar qo‘shtengsizlik $a\le x<b$ ko‘rinishda berilsa, sonli oraliq $x\in(a;\ b)$ kabi bo‘lib, bu sonli oraliqni ***interval*** deb ataladi (3.5.7-v,rasm).

Misol № 4: $\begin{cases} 2(x-1)-5<5(2x-1)-7x \\ 3(x+1)-4\le 6(1-x)+9 \end{cases}$ tengsizliklar sistemasini eching va yechimini barcha ko‘rinishlarini yozing.

Yechish: Avval qavslarni ochib $\begin{cases} 2x-2-5<10x-5-7x \\ 3x+3-4\le 6x-6+9 \end{cases}$ ifodani, so‘ngra uni soddalashtirib $\begin{cases} 2x-7<3x-5 \\ 3x-1\le 6x+3 \end{cases}$ ifodani olamiz. Sistemadagi tengsizliklarda noma’lumlarni bir tomonga, ma’lumlarni bir tomonga o‘tkazsak va soddalashtirsak $\begin{cases} -7+5<3x-2x \\ -1-3\le 6x-3x \end{cases};\ \Rightarrow\ \begin{cases} -2<x \\ -4\le 3x \end{cases};\ \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\ge -4/3 \end{cases}$ natija kelib chiqadi. Bu sistemaning yechimi esa $x\ge -4/3$, ya’ni $x\in[-4/3;\ \infty)$ bo‘ladi. Sonlar o‘qida esa 3.5.8-rasmda tasvirlangani kabi bo‘ladi.

3.5.8-rasm

3.6-Mavzu: Sonning moduli. Modul qatnashgan tenglama va tengsizlik

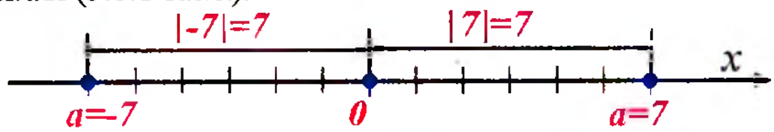
<u>I).</u> a sonning moduli deb $|a|$ deb belgilanadigan va qiymati

$$\boxed{|a|=\begin{cases} a, & agar \ \ a\ge 0 \ \ bo'lsa \\ -a, & agar \ \ a<0 \ \ bo'lsa \end{cases}}$$

bo‘lgan songa aytiladi.

Masalan, $|7|=7$, $|-7|=7$, $|0|=0$, $|-\pi|=\pi$. Bundan ko‘rinadiki, sonning moduli har doim musbat son bo‘lar ekan.

a son modulining geometrik ma’nosi sonlar o‘qida koordinata boshi 0 dan boshlab a gacha bo‘lgan masofani bildiradi (3.6.1-rasm).



3.6.1-rasm

<u>II).</u> $|x|=a$ ko‘rinishdagi tenglamaga ***oddiy modulli tenglama*** deyiladi.

Agar $|x|=a$ ko‘rinishdagi tenglamada $a>0$ bo‘lsa, tenglama yechimi ikkita bo‘lib, ular quyidagicha:

$$\boxed{\begin{cases} x_1=a \\ x_2=-a \end{cases}}$$

Agar $|x|=a$ ko‘rinishdagi tenglamada $a=0$ bo‘lsa, tenglama yagona yechimga ega.

$$\boxed{x=0}$$

Agar $|x|=a$ ko‘rinishdagi tenglamada $a<0$ bo‘lsa, tenglama yechimga ega emas. Chunki tenglamaning chap tomoni har doim musbat son, o‘ng tomoni esa manfiy. Musbat va manfiy sonlar hech qachon teng bo‘la olmaydi.

Misol № 1: $|x|=6$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> Modulning ta’rifiga binoan $\begin{cases} x_1=6 \\ x_2=-6 \end{cases}$ bo‘ladi.

Misol № 2: $|3x-2|=5$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> Modulning ta’rifiga binoan $\begin{cases} 3x-2=5 \\ 3x-2=-5 \end{cases}$, $\Rightarrow$ $\begin{cases} 3x=7 \\ 3x=-3 \end{cases}$; $\Rightarrow$ $\begin{cases} x_1=7/3 \\ x_2=-1 \end{cases}$ bo‘ladi.

Misol № 3: $|3-|2x+4||=8$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> Dastlab berilgan tenglamani $|8-|2x+4||=3$, $\rightarrow$ $|-(|2x+4|-8)|=3$, $||2x+4|-8|=3$ deb olamiz. Ta’rifiga binoan tashqaridagi birinchi modulni yechamiz. Bunda $\begin{cases} |2x+4|-8=3 \\ |2x+4|-8=-3 \end{cases}$, $\Rightarrow$ $\begin{cases} |2x+4|=11 \\ |2x+4|=5 \end{cases}$ modulli sistema hosil bo‘ladi. Sistemadagi har bir tenglamani yana modulning ta’rifiga binoan yechamiz. Bunda $\left[\begin{cases} 2x+4=11 \\ 2x+4=-11 \end{cases} \atop \begin{cases} 2x+4=5 \\ 2x+4=-5 \end{cases}\right.$; $\Rightarrow$ $\left[\begin{cases} 2x=7 \\ 2x=-15 \end{cases} \atop \begin{cases} 2x=1 \\ 2x=-9 \end{cases}\right.$; $\left[\begin{cases} x_1=3{,}5 \\ x_2=-7{,}5 \end{cases} \atop \begin{cases} x_3=0{,}5 \\ x_4=-4{,}5 \end{cases}\right.$ ildizlarga ega bo‘lamiz.

Endi modul qatnashgan turli tenglamalarni yechish qoidalari bilan tanishamiz.

1). Agar modulli tenglama $|f(x)|=f(x)$ ko'rinishda berilsa, $f(x)\geq 0$ deb ishlanadi.

2). Agar modulli tenglama $|f(x)|=-f(x)$ ko'rinishda berilsa, $f(x)\leq 0$ deb ishlanadi.

3). Agar modulli tenglama $|f(x)|=|g(x)|$ ko'rinishda berilsa, $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{cases}$ deb ishlanadi.

4). Agar modulli tenglama $|f(x)|=a(a\geq 0)$ ko'rinishda berilsa, $\begin{cases} f(x)=a \\ f(x)=-a \end{cases}$ deb ishlanadi.

Bu erda $f(x)$ va $g(x)$ – x o'zgaruvchi orqali berilgan turli ifodalar.

III). $|x|<a$ yoki $|x|>a$ ko'rinishdagi tengsizlikka ***oddiy modulli tengsizlik*** deyiladi.

Agar $|x|<a$ ko'rinishdagi tengsizlikda $a>0$ bo'lsa, tengsizlik yechimi quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi (3.6.2-rasm):

$$\boxed{\begin{cases} x_1<a \\ x_2>-a \end{cases} \quad yoki \quad -a<x<a \quad yoki \quad x\in(-a;\ a)}$$

3.6.2-rasm

Agar $|x|<a$ ko'rinishdagi tengsizlikda $a<0$ bo'lsa, tengsizlik yechimga ega emas, ya'ni $x\in\otimes$ bo'ladi. CHunki tengsizlikning chap tomoni musbat, o'ng tomoni esa manfiy son bo'lib, musbat son manfiy sondan kichik bo'la olmaydi.

Misol № 4: $|x|<4$ tengsizlikni eching.

Yechish: Modulning ta'rifiga ko'ra $\begin{cases} x<4 \\ x>-4 \end{cases}$ bo'ladi. Bu yechim qo'shtengsizlik ko'rinishida $-4<x<4$, sonli oraliq ko'rinishida esa $x\in(-4;\ 4)$ bo'ladi.

Misol № 5: $|3x-2|=5$ tengsizlikni eching.

Yechish: Modulning ta'rifiga ko'ra $\begin{cases} 3x-2<5 \\ 3x-2>-5 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} 3x<7 \\ 3x>-3 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} x<7/3 \\ x>-1 \end{cases}$ natija chiqadi. Bu yechim qo'shtengsizlik ko'rinishida $-1<x<\frac{7}{3}$, sonli oraliq ko'rinishida esa $x\in\left(-1;\ \frac{7}{3}\right)$ bo'ladi.

Misol № 6: $|x|<-3$ tengsizlikni eching.

Yechish: Tengsizlikning chap tomonida moduldan har doim musbat son chiqadi, o'ng tomon esa manfiy son. Musbat son manfiy sondan kichik bo'la olmagani uchun bu tengsizlik yechimga ega emas, ya'ni $x\in\otimes$ bo'ladi.

Agar $|x|>a$ ko'rinishdagi tengsizlikda $a>0$ bo'lsa, tengsizlik yechimi quyidagi ko'rinishlarda bo'ladi (3.6.3-rasm):

$$\boxed{\begin{cases} x_1>a \\ x_2<-a \end{cases} \quad yoki \quad x\in(-\infty;\ -a)\cup(a;\ \infty)}$$

3.6.3-rasm

Agar $|x|>a$ ko'rinishdagi tengsizlikda $a<0$ bo'lsa, tengsizlik yechimi barcha haqiqiy sonlar o'qi bo'ladi, ya'ni $x\in R$ *yoki* $x\in(-\infty;\ \infty)$ bo'ladi. Chunki tengsizlikning chap tomoni musbat, o'ng tomoni esa manfiy son bo'lib, musbat son manfiy sondan har doim kattadir.

Misol № 7: $|x|>8$ tenglamani eching.

Yechish: Modulning ta'rifiga ko'ra $\begin{cases} x > 8 \\ x < -8 \end{cases}$ bo'ladi. Bu yechim sonli oraliq ko'rinishida esa $x \in (-\infty;\ -8) \cup (8;\ \infty)$ bo'ladi.

Misol № 8: $|2x-6| > 4$ tenglamani eching.

Yechish: Modulning ta'rifiga ko'ra $\begin{cases} 2x-6 > 4 \\ 2x-6 < -4 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} 2x > 10 \\ 2x < 2 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x < 1 \end{cases}$ natija chiqadi. Bu yechim sonli oraliq ko'rinishida esa $x \in (-\infty;\ 1) \cup (5;\ \infty)$ bo'ladi.

Misol № 9: $|x| > -3$ tengsizlikni eching.

Yechish: Tengsizlikning chap tomonida moduldan har doim musbat son chiqadi, o'ng tomon esa manfiy son. Musbat son manfiy sondan har doim kattadir. SHuning uchun tengsizlik yechimi barcha haqiqiy sonlar o'qi bo'ladi, ya'ni $x \in R$ *yoki* $x \in (-\infty;\ \infty)$ bo'ladi.

Endi modul qatnashgan turli tengsizliklarni yechish qoidalari bilan tanishamiz.

1). Agar modulli tengsizlik $|f(x)| < a\ (a > 0)$ ko'rinishda berilsa, $\begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases}$ deb ishlanadi.

2) Agar modulli tengsizlik $|f(x)| < a\ (a < 0)$ ko'rinishda berilsa, $x \in \otimes$ bo'ladi.

3). Agar modulli tengsizlik $|f(x)| > a\ (a > 0)$ ko'rinishda berilsa, $\begin{cases} f(x) < -a \\ f(x) > a \end{cases}$ deb ishlanadi.

4) Agar modulli tengsizlik $|f(x)| > a\ (a < 0)$ ko'rinishda berilsa, $x \in D(f(x))$ deb ishlanadi

5). Agar modulli tengsizlik $|f(x)| < |g(x)|$ ko'rinishda berilsa, $f^2(x) < g^2(x), \rightarrow$
$\rightarrow\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) < 0$ deb ishlanadi.

Bu erda $f(x)$ va $g(x)$ – x o'zgaruvchi orqali berilgan turli ifodalar.

3.7-Mavzu: Modulning xossalari

Modul qatnashgan ifodalar uchun ushbu xossalar o'rinlidir:

1) Ko'paytmaning moduli modullar ko'paytmasiga teng.

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$$

Bunga a va b sonlar o'rniga turli sonlar qo'yib ishonch hosil qilish mumkin. Masalan, $\begin{cases} a = 5 \\ b = -4 \end{cases}$ bo'lganda formulaning o'ng tomoni $|a \cdot b| = |5 \cdot (-4)| = |-20| = 20$ ga, chap tomoni ham $|a| \cdot |b| = |5| \cdot |-4| = 5 \cdot 4 = 20$ ga, ya'ni tenglik to'g'ri bo'ladi. SHuningdek, sonlarning $\begin{cases} a = -5 \\ b = -4 \end{cases}, \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases}, \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$ juftlari uchun ham tenglikning har ikki tomoni *20*ga teng bo'ladi.

Yuqoridagi formuladan ushbu natijalar kelib chiqadi:

$$\boxed{\begin{array}{l} |-a-b| = |-(a+b)| = |-1| \cdot |a+b| = |a+b| \\ |b-a| = |-(a-b)| = |-1| \cdot |a-b| = |a-b| \end{array}}$$

2) Bo'linmaning moduli modullar nisbatiga teng $(b \neq 0)$.

$$\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}}$$

Bunga ham xuddi ko'paytmadagi kabi a va b sonlar o'rniga turli sonlar qo'yib ishonch hosil qilish mumkin. Masalan, $\begin{cases} a = \pm 5 \\ b = \pm 4 \end{cases}$ juftlikning ixtiyoriy ishorasida ham tenglikning har ikki tomoni *1,25* ga teng bo'ladi.

3) Darajaning moduli modulning darajasiga teng, ya'ni darajani moduldan tashqariga chiqarish mumkin.

$$\boxed{|a^n| = |a|^n}$$

4) Musbat sonlar yig'indisining moduli modullar yig'indisiga teng.

$$\boxed{Agar \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} bo'lsa, \ |a+b| = |a| + |b| \ bo'ladi}$$

Aytaylik, $\begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \end{cases}$ bo'lsin. U holda tenglikning o'ng tomoni $|a+b| = |5+4| = |9| = 9$ ga, chap tomoni ham $|a| + |b| = |5| + |4| = 5 + 4 = 9$ ga, ya'ni tenglik to'g'ri bo'ladi.

5) Manfiy sonlar yig'indisining moduli modullar yig'indisiga teng.

$$\boxed{Agar \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} bo'lsa, \ |a+b| = |a| + |b| \ bo'ladi}$$

Aytaylik, $\begin{cases} a = -5 \\ b = -4 \end{cases}$ bo'lsin. U holda tenglikning o'ng tomoni $|a+b| = |-5-4| = |-9| = 9$ ga, chap tomoni ham $|a| + |b| = |-5| + |-4| = 5 + 4 = 9$ ga, ya'ni tenglik to'g'ri bo'ladi.

6) Musbat va manfiy sonlar yig'indisining moduli modullar yig'indisidan ikchik bo'ladi.

$$\boxed{Agar \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} yoki \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} bo'lsa, \ |a+b| < |a| + |b| \ bo'ladi}$$

Aytaylik, $\begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases}$ bo'lsin. U holda tenglikning o'ng tomoni $|a+b| = |-5+4| = |-1| = 1$ ga, chap tomoni esa $|a| + |b| = |-5| + |4| = 5 + 4 = 9$ ga, ya'ni $1 < 9$ tengsizlik to'g'ri bo'ladi.

3.8-Mavzu: Modul qatnashgan chiziqli funksiyalar

Biz modulli funksiyani o'rganishda eng oddiy holdagi modulli funksiyadan boshlab umumiy holda berilgan modulli funksiyaga qadar boramiz.

I). $y = |x|$ funksiyaning grafigi va xossalari.

Eng avvalo, $y = |x|$ ko'rinishidagi eng oddiy modulli funksiya grafigi bilan tanishamiz. Grafigini qurish uchun jadval tuzamiz, so'ngra grafigini qurib xossalarini sanaymiz.

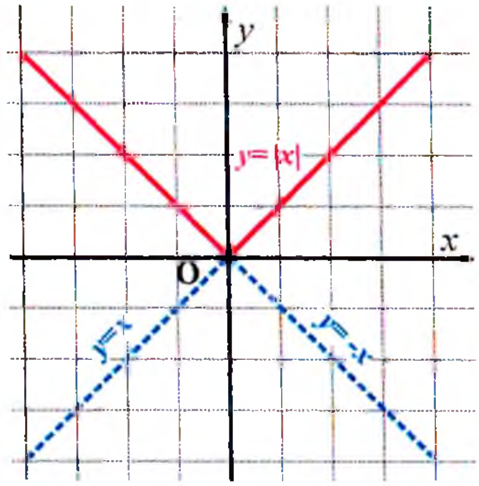
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = \|x\|$	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

Jadval asosida $y = |x|$ funksiya grafigini Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 3.8.1-rasmdagi siniq chiziq ko'rinishidagi shoxlari tepaga qaragan chizmaga ega bo'lamiz.

$y = |x|$ funksiyani moduldan yechish qoidasi bo'yicha ikkita funksiyaga tarqatib olib, so'ngra uning grafigini qurish mumkin. Unga ko'ra $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \ da \\ -x, & x < 0 \ da \end{cases}$ bo'ladi, ya'ni $x \geq 0$ bo'lganda $y = x$ funksiyaning, $x < 0$ bo'lganda $y = -x$ funksiyaning grafiklarini birlashtirsak, $y = |x|$ funksiya grafigi hosil bo'ladi.

Grafikning xossalarini sanab o'tamiz:

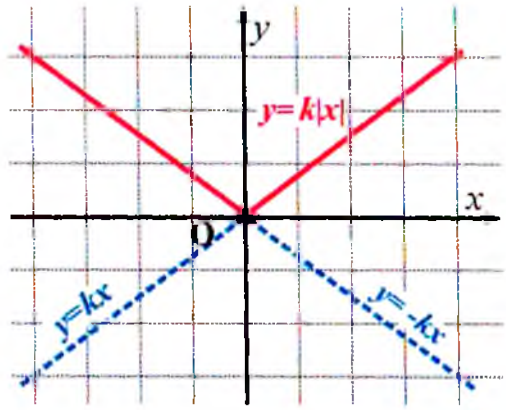
1) funksiya $x \in (-\infty; 0)$ oraliqda kamayadi;
2) funksiya $x \in (0; \infty)$ oraliqda o'sadi;
3) funksiya $(0; 0)$ nuqtada eng kichik qiymatga erishadi;
4) $x = 0$ chizig'i grafikning simmetriya chizig'idir;
5) juft funksiya, ya'ni funksiya grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik;
6) funksiya $x \in (-\infty; \infty)$ oraliqda nomanfiy qiymatlar qabul qiladi, ya'ni funksiya grafigi Ox o'qidan tepada joylashgan;



3.8.1-rasm

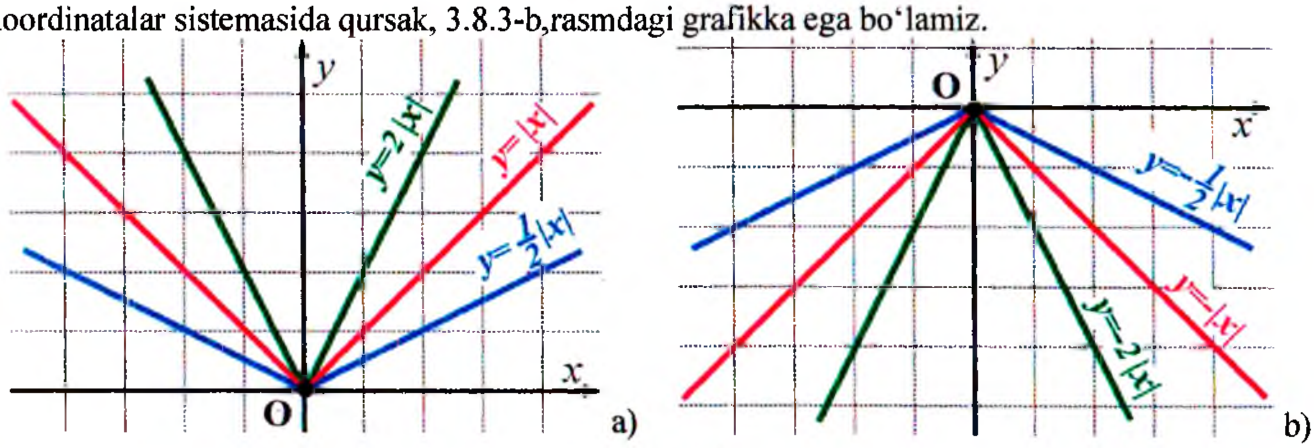
<u>II).</u> $y = k|x|$ funksiyaning grafigi va xossalari.

$y = k|x|$ funksiyani moduldan yechish qoidasi bo'yicha ikkita funksiyaga tarqatib olib, so'ngra uning grafigini qurish mumkin. Unga ko'ra $y = |x| = \begin{cases} kx, & x \geq 0 \ da \\ -kx, & x < 0 \ da \end{cases}$ bo'ladi, ya'ni $x \geq 0$ bo'lganda $y = kx$ funksiyaning, $x < 0$ bo'lganda $y = -kx$ funksiyaning grafiklarini birlashtirsak, $y = k|x|$ funksiya grafigi hosil bo'ladi (3.8.2-rasm).



3.8.2-rasm

Tasavvur shakllanishi uchun $y = k|x|$ funksiyaning grafigini k koeffitsientning bir nechta musbat qiymatlari uchun, aytaylik $k = 1$, $k = 2$, $k = \frac{1}{2}$ qiymatlar uchun bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 3.8.3-a,rasmdagi grafikka ega bo'lamiz. Endi k koeffitsientning bir nechta manfiy qiymatlari uchun, aytaylik $k = -1$, $k = -2$, $k = -\frac{1}{2}$ qiymatlar uchun bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 3.8.3-b,rasmdagi grafikka ega bo'lamiz.



3.8.3-rasm

Demak, y=|x| funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab k marta cho'zish yoki siqish natijasida y=k|x| funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan, ya'ni |k|>1 bo'lganda grafik cho'ziladi, |k|<1 bo'lganda esa grafik siqiladi. k>0 bo'lganda grafik shoxlari tepaga qaragan, a<0 bo'lganda esa grafik shoxlari pastga qaragan bo'ladi.

Yuqoridagi rasmdan foydalanib $y = k|x|$ funksiya xossalarni sanab o'tamiz:

1) $k>0$ bo‘lganda grafik shoxlari tepaga qaragan bo‘ladi, funksiya $x \in (-\infty; 0)$ oraliqda kamayadi, $x \in (0; \infty)$ oraliqda o‘sadi, funksiya $(0; 0)$ nuqtada eng kichik qiymatga erishadi, funksiya $x \in (-\infty; \infty)$ oraliqda nomanfiy qiymatlar qabul qiladi, ya’ni funksiya grafigi Ox o‘qidan tepada joylashgan;

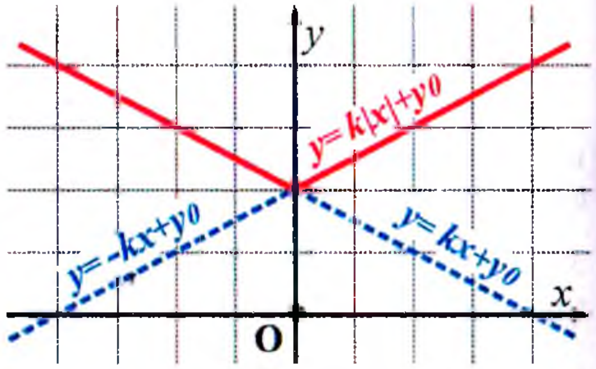
2) $k<0$ bo‘lganda grafik shoxlari pastga qaragan bo‘ladi, funksiya $x \in (-\infty; 0)$ oraliqda o‘sadi, $x \in (0; \infty)$ oraliqda kamayadi, funksiya $(0; 0)$ nuqtada eng katta qiymatga erishadi, funksiya $x \in (-\infty; \infty)$ oraliqda nomusbat qiymatlar qabul qiladi, ya’ni funksiya grafigi Ox o‘qidan pastda joylashgan;

3) $x=0$ chizig‘i funksiya grafigining simmetriya chizig‘idir;

4) juft funksiya, ya’ni funksiya grafigi Oy o‘qiga nisbatan simmetrik.

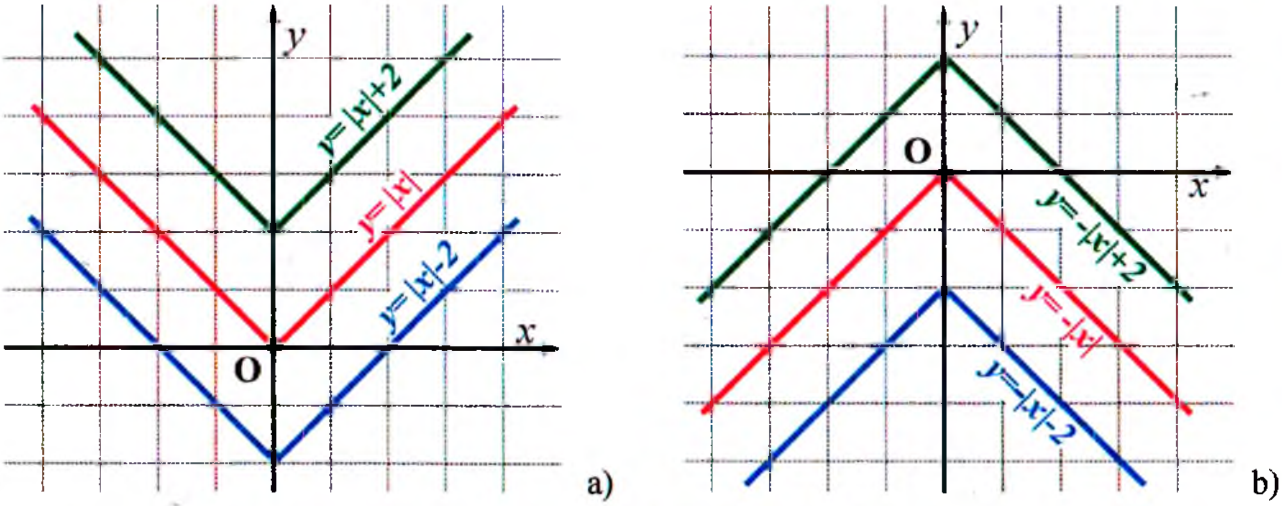
III). $y=k|x|+y_0$ funksiyaning grafigi va xossalari.

$y=k|x|+y_0$ funksiyani moduldan yechish qoidasi bo‘yicha ikkita funksiyaga tarqatib olib, so‘ngra uning grafigini qurish mumkin. Unga ko‘ra $y=|x|=\begin{cases} kx+y_0, & x\ge 0 \ da \\ -kx+y_0, & x<0 \ da \end{cases}$ bo‘ladi, ya’ni $x\ge 0$ bo‘lganda $y=kx+y_0$ funksiyaning, $x<0$ bo‘lganda $y=-kx+y_0$ funksiyaning grafiklarini birlashtirsak, $y=k|x|+y_0$ funksiya grafigi hosil bo‘ladi (3.8.4-rasm).



3.8.4-rasm

Tasavvur shakllanishi uchun misol tarzida $y=|x|$, $y=|x|+2$ va $y=|x|-2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 3.8.5-a,rasmdagi chizmaga ega bo‘lamiz. Rasmdan ko‘rinadiki, $y=|x|$ funksiya grafigini 2 birlik tepaga ko‘tarilganda $y=|x|+2$ funksiya grafigiga, 2 birlik pastga tushirilganda esa $y=|x|-2$ funksiya grafigiga ega bo‘lar ekanmiz.

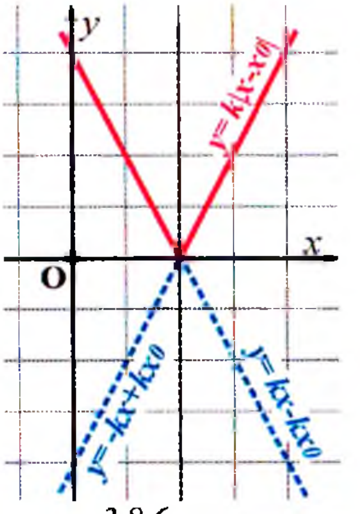


3.8.5-rasm

Endi xuddi yuqoridagi kabi $y=-|x|$, $y=-|x|+2$ va $y=-|x|-2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 3.8.5-b,rasmdagi chizmaga ega bo‘lamiz. Rasmdan ko‘rinadiki, $y=-|x|$ funksiya grafigini 2 birlik tepaga ko‘tarilganda $y=-|x|+2$ funksiya grafigiga, 2 birlik pastga tushirilganda esa $y=-|x|-2$ funksiya grafigiga ega bo‘lar ekanmiz.

Demak, y=a|x| funksiya grafigini Oy o‘qi bo‘ylab y_0 birlikka siljitish, ya’ni tepaga ko‘tarish yoki pastga tushirish natijasida y= a|x|+y_0 funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.

IV). $y = k|x - x_0|$ funksiyaning grafigi va xossalari.

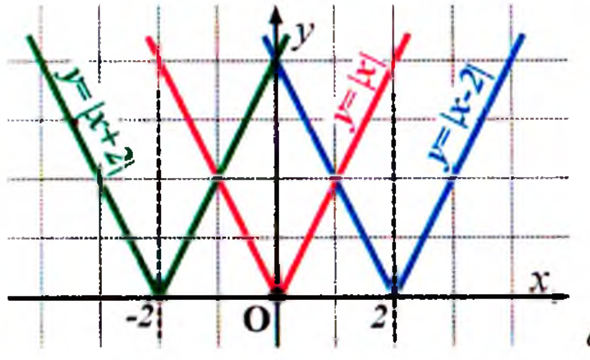


3.8.6-rasm

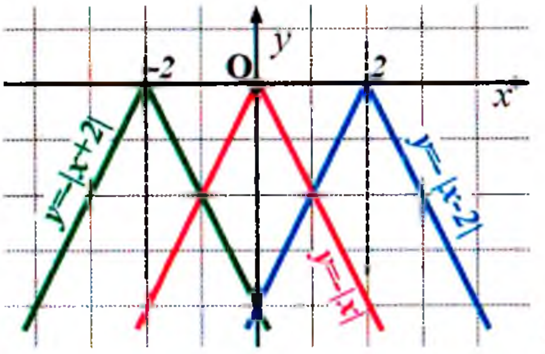
$y = k|x - x_0|$ funksiyani moduldan yechish qoidasi bo'yicha ikkita funksiyaga tarqatib olib, so'ngra uning grafigini qurish mumkin. Unga ko'ra $y = k|x - x_0| = \begin{cases} kx - kx_0, & x \ge 0 \ da \\ -kx + kx_0, & x < 0 \ da \end{cases}$ bo'ladi, ya'ni $x \ge 0$ bo'lganda $y = kx - ky_0$ funksiyaning, $x < 0$ bo'lganda $y = -kx + ky_0$ funksiyaning grafiklarini birlashtirsak, $y = k|x - x_0|$ funksiya grafigi hosil bo'ladi (3.8.6-rasm).

Tasavvur shakllanishi uchun misol tarzida $y = |x|$, $y = |x - 2|$ va $y = |x + 2|$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 3.8.7-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

Rasmdan ko'rinadiki, $y = |x|$ funksiya grafigini 2 birlik o'ngga surilganda $y = |x - 2|$ funksiya grafigiga, 2 birlik chapga surilganda esa $y = |x + 2|$ funksiya grafigiga ega bo'lar ekanmiz.



a)



b)

3.8.7-rasm

Endi xuddi yuqoridagi kabi $y = -|x|$, $y = -|x - 2|$ va $y = -|x + 2|$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 3.8.7-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinadiki, $y = -|x|$ funksiya grafigini 2 birlik o'ngga surilganda $y = -|x - 2|$ funksiya grafigiga, 2 birlik chapga surilganda esa $y = -|x + 2|$ funksiya grafigiga ega bo'lar ekanmiz.

Demak, y=k|x| funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab x_0 birlikka siljitish, ya'ni o'ngga yoki chapga surish natijasida y=k|x-x_0| funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.

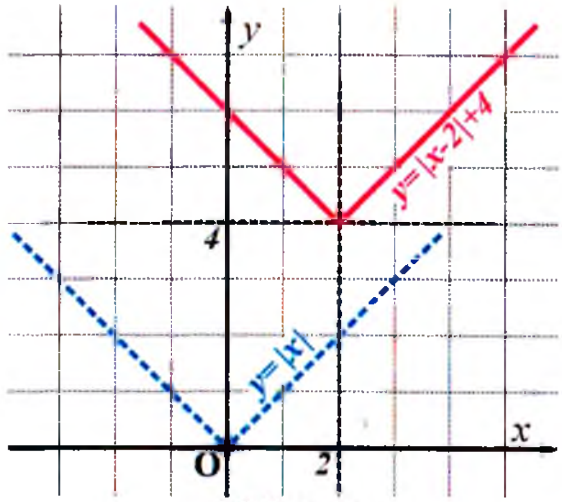
Biz funksiya grafigini faqat bitta o'q bo'ylab, ya'ni *Ox* o'qi bo'ylab yoki *Oy* o'qi bo'ylab surishni o'rgandik. Endi grafikni bir vaqtda ikkala o'q bo'ylab suriladigan eng umumiy hol bilan tanishamiz.

V). $y = k|x - x_0| + y_0$ funksiyaning grafigi va xossalari.

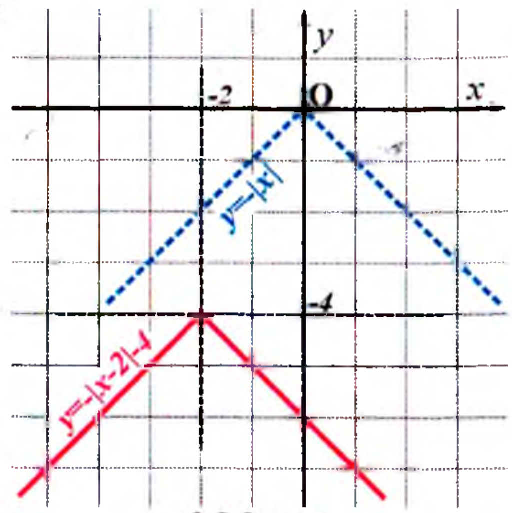
Bir vaqtda *Ox* va *Oy* o'qlari bo'ylab siljitishdan hosil qilinadigan funksiya grafigiga doir misollar ko'raylik.

Misol № 1: $y = |x - 2| + 4$ funksiya grafigini quring.

Yechish: Biz shu paytgacha $y = |x - 2|$ funksiya grafigini $y = |x|$ funksiya grafigini *Ox* o'qi bo'ylab $x_0 = 2$ birlik o'ngga surish natijasida qurilishini va $y = |x| + 4$ funksiya grafigini esa $y = |x|$ funksiya grafigini *Oy* o'qi bo'ylab $y_0 = 4$ birlik yuqoriga ko'tarish natijasida qurilishini ko'rgan edik. Hozirgi $y = |x - 2| + 4$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y = |x|$ funksiya grafigini *Ox* o'qi bo'ylab $x_0 = 2$ birlik o'ngga hamda *Oy* o'qi bo'ylab $y_0 = 4$ birlik yuqoriga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (3.8.8-rasm).



3.8.8-rasm

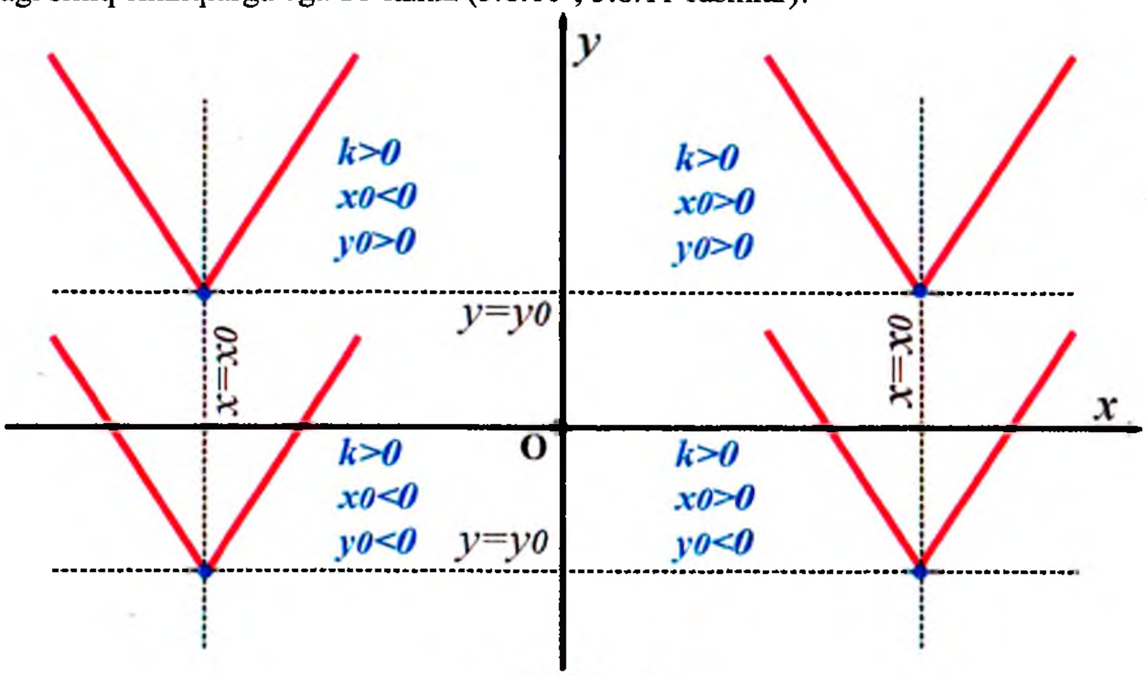


3.8.9-rasm

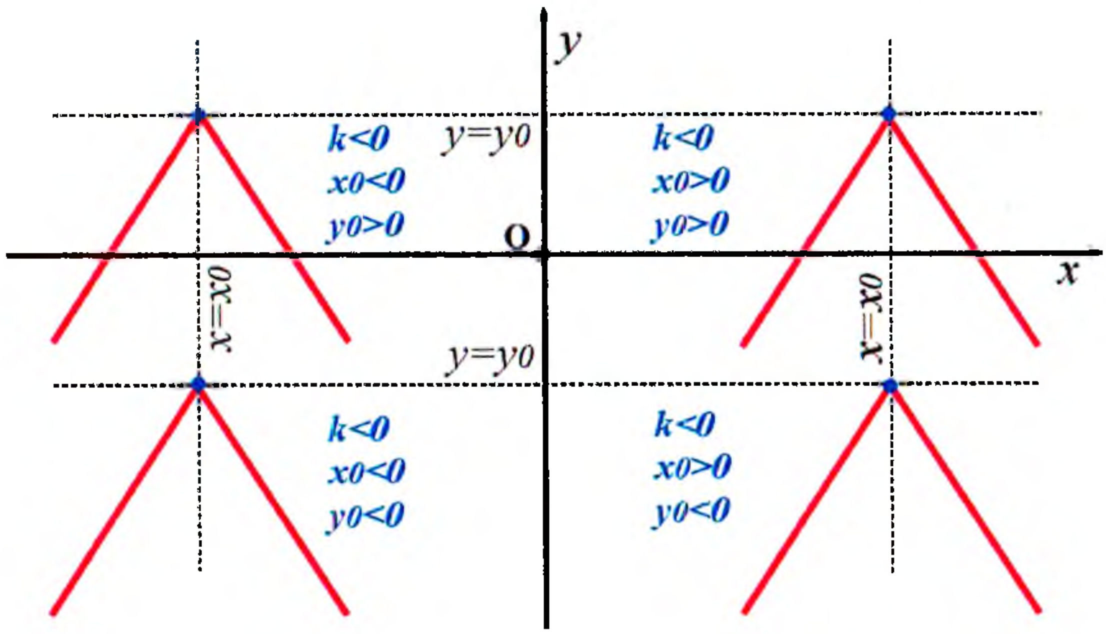
Misol № 2: $y = -|x+2| - 4$ funksiya grafigini quring.

<u>Yechish:</u> Biz shu paytgacha $y=-|x+2|$ funksiya grafigini $y=-|x|$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab $x_0 = -2$ birlik chapga surish natijasida qurilishini va $y = -|x| - 4$ funksiya grafigini esa $y=-|x|$ funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab $y_0 = -4$ birlik pastga tushirish natijasida qurilishini ko'rgan edik. Hozirgi $y = -|x+2| - 4$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y=-|x|$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab $x_0 = -2$ birlik chapga hamda Oy o'qi bo'ylab $y_0 = -4$ birlik pastga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (3.8.9-rasm).

$y = k|x|$ funksiya grafigini koordinata o'qlari bo'yicha x_0 va y_0 birlikka surish natijasida $y = k|x - x_0| + y_0$ funksiya grafigi hosil qilinadi. x_0 va y_0 kattaliklarning ishoralariga qarab turli shakldagi siniq chiziqlarga ega bo'lamiz (3.8.10-, 3.8.11-rasmlar):



3.8.10-rasm



3.8.11-rasm

$y = k|x - x_0| + y_0$ ko'rinishdagi modulli chiziqli funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $k > 0$ bo'lsa, funksiya $x \in (-\infty; x_0)$ oraliqda kamayadi, $x \in (x_0; \infty)$ oraliqda o'sadi. x_0 nuqtada eng kichik y_0 qiymatga erishadi.
2) Agar $k < 0$ bo'lsa, funksiya $x \in (-\infty; x_0)$ oraliqda o'sadi, $x \in (x_0; \infty)$ oraliqda kamayadi. x_0 nuqtada eng katta y_0 qiymatga erishadi.
3) Agar $y_0 = 0$ bo'lsa, funksiya faqat nomanfiy yoki faqat nomusbat qiymatlar qabul qiladi.
4) Agar $\begin{cases} a > 0 \\ y_0 > 0 \end{cases}$ bo'lsa, funksiya faqat musbat qiymatlar qabul qiladi.
5) Agar $\begin{cases} a < 0 \\ y_0 < 0 \end{cases}$ bo'lsa, funksiya faqat manfiy qiymatlar qabul qiladi.
6) Agar $\begin{cases} a > 0 \\ y_0 < 0 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} a < 0 \\ y_0 > 0 \end{cases}$ bo'lsa, funksiya Ox o'qini x_1 va x_2 nuqtalarda kesib o'tadi.

V). $y = k_1|x - x_1| + k_2|x - x_2|$ $(x_1 < x_2)$ *funksiyaning grafigi.*

Berilgan modulli funksiya ikkita modulli hadlardan iborat bo'lib, bu ko'riishdagi funksiya grafigini qurish uchun uning har bir hadini moduldan yechish qoidasi bo'yicha tarqatib chiqamiz va o'xshash hadlar ixchamlanganda yangi $y = kx + b$ chiziqli funksiya hosil bo'ladi. Moduldan yechishda $x \le x_1$, $x_1 < x \le x_2$, $x > x_2$ oraliqlar uchun alohida-alohida qarab chiqamiz.

a) $x \in (-\infty; x_1]$ oraliqda $y = -k_1(x - x_1) - k_2(x - x_2) = -(k_1 + k_2)x + (k_1x_1 + k_2x_2)$ bo'ladi.
b) $x \in [x_1; x_2]$ oraliqda $y = k_1(x - x_1) - k_2(x - x_2) = (k_1 - k_2)x + (k_2x_2 - k_1x_1)$ bo'ladi.
v) $x \in [x_2; \infty)$ oraliqda $y = k_1(x - x_1) + k_2(x - x_2) = (k_1 + k_2)x - (k_1x_1 + k_2x_2)$ bo'ladi.

Misol №3: $y = k_1|x - x_1| + k_2|x - x_2|$ $(x_1 < x_2)$ funksiya grafigini $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$ va $\begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$ bo'lgan 4 ta hol uchun quring.

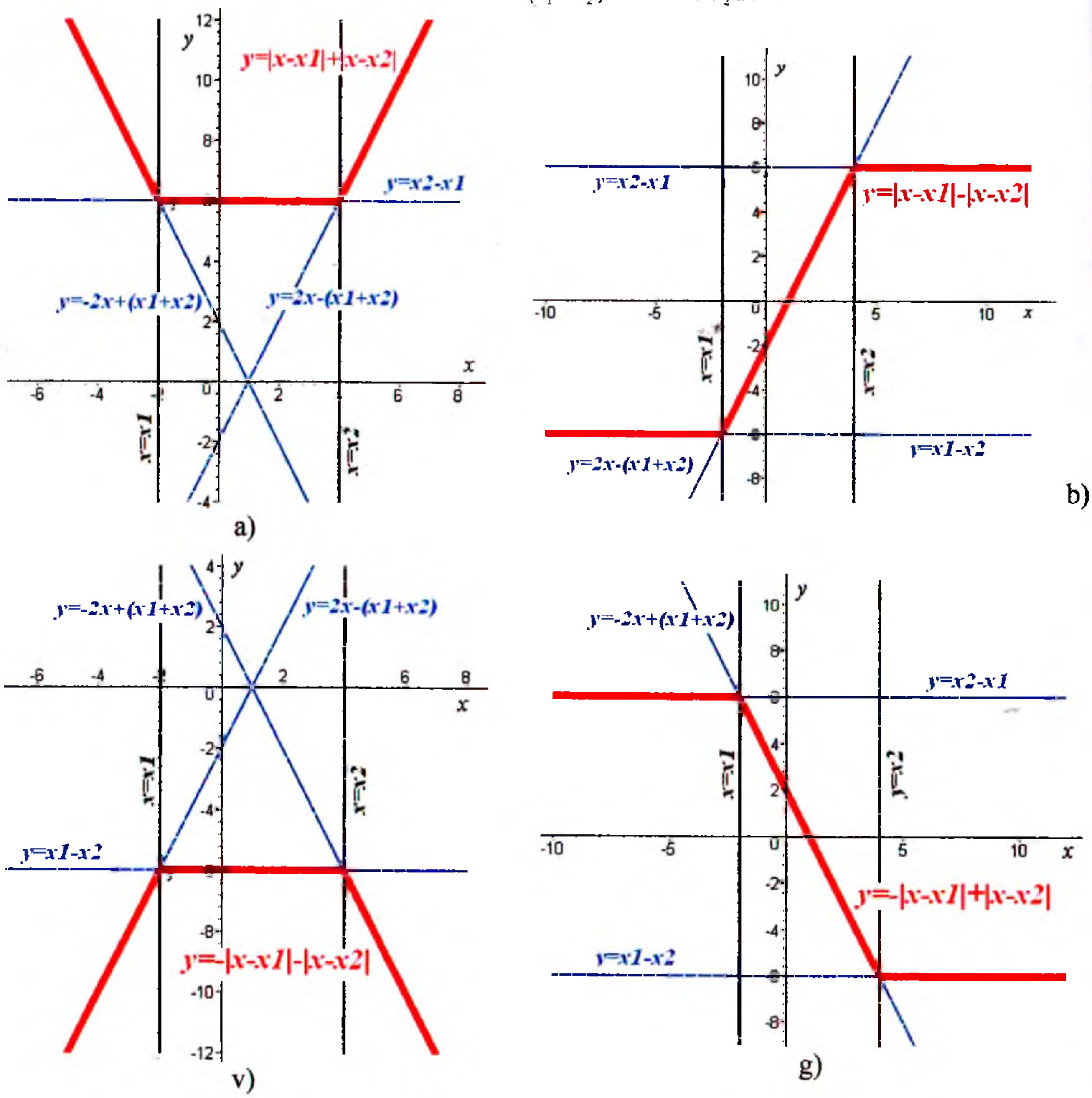
Yechish:

Dastlab $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$ bo'lgan holda $y = |x - x_1| + |x - x_2| = \begin{cases} -2x + (x_1 + x_2), x < x_1 \ da \\ x_2 - x_1, \quad x_1 < x < x_2 \ da \\ 2x - (x_1 + x_2), \quad x > x_2 \ da \end{cases}$ bo'ladi (3.8.12-a,rasm).

Endi $\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$ bo'lgan holda $y = |x - x_1| - |x - x_2| = \begin{cases} x_1 - x_2, & x < x_1\ da \\ 2x - (x_1 + x_2), & x_1 < x < x_2\ da \\ x_2 - x_1, & x > x_2\ da \end{cases}$ bo'ladi (3.8.12-b,rasm).

So'ngra $\begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$ bo'lgan holda $y = -|x - x_1| - |x - x_2| = \begin{cases} 2x - (x_1 + x_2), & x < x_1\ da \\ x_1 - x_2, & x_1 < x < x_2\ da \\ -2x + (x_1 + x_2), & x > x_2\ da \end{cases}$ bo'ladi (3.8.12-v,rasm).

Oxirgi $\begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 1 \end{cases}$ bo'lgan holda $y = -|x - x_1| + |x - x_2| = \begin{cases} x_2 - x_1, & x < x_1\ da \\ -2x + (x_1 + x_2), & x_1 < x < x_2\ da \\ x_1 - x_2, & x > x_2\ da \end{cases}$ bo'ladi (3.8.12-g,rasm).



3.8.12-rasm

4-BOB: KVADRAT FUNKSIYA, TENGLAMA VA TENGSIZLIK

4.1-Mavzu: Kvadrat ildiz va uning xossalari

Bizdan yuzi $100\,sm^2$ bo'lgan kvadratning tomoni necha ekanligi so'ralgan bo'lsin. Kvadratning yuzini topish $S = a^2$ formulasiga ko'ra $a^2 = 100\,sm^2$ bo'ladi. Endi kvadrat tomoni a ni topish uchun yangi $\sqrt{\ }$ ildiz belgisini kiritamiz. Unga ko'ra kvadrat tomoni $a = \sqrt{100\,sm^2} = 10\,sm$ bo'ladi.

<u>*Ta'rif:*</u> *a nomanfiy sonning kvadrat ildizi deb shunday nomanfiy b songa aytiladiki, bunda b sonning kvadrati a ga teng bo'ladi.*

$$\boxed{\sqrt{a} = b\ (a \ge 0,\ b \ge 0),\ \ bunda\ \ a = b^2}$$

Arifmetik kvadrat ildizni daraja ko'rinishida quyidagicha yoziladi:

$$\boxed{\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}}$$

Shuni aniq yodda tutish kerakki, kvadrat ildiz olinadigan son ham ildizdan chiqadigan son ham har doim nomanfiy bo'lishi kerak. Masalan,

$\sqrt{4} = 2,\ \sqrt{9} = 3,\ \sqrt{25} = 5,\ \sqrt{196} = 14,\ \sqrt{1024} = 32,\ \sqrt{784} = 28,\ \sqrt{0} = 0,\ \sqrt{1} = 1.$

Sonning darajasidan olingan kvadrat ildiz har doim nomanfiydir, ya'ni istalgan a soni uchun $\sqrt{a^2} = |a|$ bo'ladi. Modulning ta'rifiga ko'ra

$$\boxed{(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & agar\ a \ge 0 \\ -a, & agar\ a < 0 \end{cases}\ bo'lsa}$$

Masalan, $\sqrt{64} = \sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8,\ \ \sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5.$

Kvadrat ildizning bir necha xossalarini sanab o'tamiz.

1) Ko'paytmaning kvadrat ildizi ildizlar ko'paytmasiga teng.

$$\boxed{Agar\ \begin{cases} a \ge 0 \\ b \ge 0 \end{cases} bo'sa,\ \ \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\ \ bo'ladi}$$

2) Bo'linmaning kvadrat ildizi ildizlar nisbatiga teng.

$$\boxed{Agar\ \begin{cases} a \ge 0 \\ b > 0 \end{cases} bo'sa,\ \ \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\ \ bo'ladi}$$

3) Hadlari musbat sonlar bo'lgan tengsizlikdan kvadrat ildiz olinganda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi

$$\boxed{Agar\ \ a > b > 0\ \ bo'sa,\ \ \sqrt{a} > \sqrt{b} > 0\ \ bo'ladi}$$

4) Ikki turli sonning o'rta arifmetigi ularning o'rta geometrigidan katta bo'ladi.

$$\boxed{Agar\ \begin{cases} a \ne b \\ a > 0 \\ b > 0 \end{cases} bo'sa,\ \ \frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}\ \ bo'ladi}$$

<u>Isboti:</u> Formulani ikki tomonini 2 ga ko'paytirib so'ngra kvadratga ko'taramiz. Bunda

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}\ \Big|\cdot 2,\ \rightarrow\ a+b > 2\sqrt{a \cdot b}\ \Big|kvadrat,\ \rightarrow\ a^2 + 2ab + b^2 > 4ab,\ \rightarrow\ a^2 - 2ab + b^2 > 0,\ \rightarrow$

$(a-b)^2 > 0$ natija kelib chiqadi. Ko'rinib turibdiki, haqiqatan ham sonning kvadrati musbat bo'ladi.

4.2-Mavzu: Kvadrat tenglama. Chala kvadrat tenglama

Dastlab biz ushbu masala bilan tanishib chiqaylik. Yuzasi $32\,sm^2$ hamda bo'yi enidan $4\,sm$ ga uzun bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning tomonlar uzunliklari so'ralgan bo'lsin. Bu to'g'ri to'rtburchakning enini aytaylik qandaydir x deb, uning bo'yini esa $x+4$ deb olsak, eni va bo'yining ko'paytmasi to'g'ri to'rtburchak yuzasiga tengligidan $S = x\cdot(x+4) = x^2+4x=32$ degan tenglama hosil bo'ladi. Buni ketma-ket davom ettirsak,

$$x^2+4x=32, \to x^2+4x-32=0, \to x^2+8x-4x-32=0, \to x^2-4x+8x-32=0, \to$$

$\to x(x-4)-8(x-4)=0, \to (x-4)(x-8)=0, \to \begin{cases} x-4=0 \\ x-8=0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=8 \end{cases}$ natija kelib chiqadi.

Kvadratning kichik tomoni, ya'ni eni $4sm$ hamda uzun tomoni, ya'ni bo'yi $8sm$ga teng bo'lar ekan. Biz bu masalada $x^2+4x-32=0$ tenglamani tishlab chiqdik. Bu tenglamada noma'lumning eng katta darajasi 2 ga tengligidan uni kvadrat tenglama deb ataymiz.

$ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi tenglamaga ***kvadrat tenglama*** deyiladi.

Bu erda: $a-$bosh koeffitsient bo'lib, $a\neq 0$, $b-$ ikkinchi koeffitsient, $c-$ozod had.

Biz kvadrat tenglamani yechishda eng oddiy kvadrat tenglamadan boshlab umumiy holda berilgan kvadrat tenglamaga qadar boramiz.

Agar $d\geq 0$ bo'lsa, $x^2=d$ ko'rinishdagi kvadrat tenglamaning yechimlari

$$\boxed{\begin{cases} x_1=\sqrt{d} \\ x_2=-\sqrt{d} \end{cases}}$$

<u>Isboti:</u> Berilgan tenglamani $x^2=d, \to x^2-(\sqrt{d})^2=0, \to (x-\sqrt{d})(x+\sqrt{d})=0$ ko'paytma ko'rinshiga keltiramiz. Ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglab yechimlarni aniqlaymiz, ya'ni $\begin{cases} x-\sqrt{d}=0 \\ x+\sqrt{d}=0 \end{cases}, \to \begin{cases} x_1=\sqrt{d} \\ x_2=-\sqrt{d} \end{cases}$ bo'ladi.

Misol № 1: $x^2=225$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib $x^2=225, \to x^2-15^2=0, \to (x-15)(x+15)=0$ ko'paytma ko'rinishga keltiramiz. Ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglab $\begin{cases} x_1=15 \\ x_2=-15 \end{cases}$ ildizlarga ega bo'lamiz.

Misol № 2: $x^2=-81$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> Bunda $x^2=-81$, $x^2+81=0$ tenglamadan ikkita musbat sonning yig'indisi nolga teng bo'la olmasligi kelib chiqadi, ya'ni berilgan tenglama haqiqiy yechimga ega emas.

Agar $d<0$ bo'lsa, u holda $x^2=d$ ko'rinishdagi kvadrat tenglama haqiqiy ildizlarga ega ega bo'lmaydi. Chunki, haqiqiy sonning kvadrati manfiy son bo'lishi mumkin emas. Bunday tenglamalar va ularning yechimlari "Oliy matematika"ning "Kompleks sonlar nazariyasi" bo'limida o'rganiladi.

$ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglamning ikkinchi yoki uchinchi koeffitsientidan kamida bittasi nolga teng bo'lsa, hosil bo'lgan tenglamani ***chala kvadrat tenglama*** deyiladi.

Chala kvadrat tenglama bo'lishning quyidagi uchta sharti bor:

$$\boxed{\begin{cases} ax^2+bx=0, & \text{bunda } c=0, b\neq 0 \quad (1) \\ ax^2+c=0, & \text{bunda } c\neq 0, b=0 \quad (2) \\ ax^2=0, & \text{bunda } c=0, b=0 \quad (3) \end{cases}}$$

Bularning har biriga batafsil to'xtalib o'tamiz.

1) $ax^2+bx=0$ ko'rinishdagi chala kvadrat tenglamaning yechimlari quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\dfrac{b}{a} \end{cases}}$$

Isboti: Berilgan tenglamani $ax^2+bx=0, \to ax\left(x+\frac{b}{a}\right)=0 \ \Big|:a, \to x\left(x+\frac{b}{a}\right)=0$ ko'paytuvchiga ajratamiz. Ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglab $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-\frac{b}{a} \end{cases}$ ildizlarga ega bo'lamiz.

Demak, ozod hadi bo'lmagan kvadrat tenglama ildizlaridan biri nolga teng bo'lar ekan.

2) $ax^2+c=0$ ko'rinishdagi chala kvadrat tenglama $\frac{c}{a}<0$ bo'lganda quyidagi ikkita yechimga ega bo'ladi:

$$\boxed{\begin{cases} x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}}$$

Isboti: Berilgan tenglamani $ax^2+c=0 \ |:c, \to x^2+\frac{c}{a}=0$ ko'rinishga keltiramiz. Agar $\frac{c}{a}<0$ bo'lsa, qisqa ko'paytirish formulasi bo'yicha $x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0, \to x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=0, \to \left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0$ ko'paytuvchiga ajratish mumkin bo'ladi. Ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglab $\begin{cases} x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}} \\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{cases}$ ildizlarga ega bo'lamiz.

Demak, ikkinchi koeffitsienti bo'lmagan kvadrat tenglama qarama-qarshi ildizlarga ega bo'lar ekan.

3) $ax^2=0$ ko'rinishdagi chala kvadrat tenglamaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}}$$

Isboti: Berilgan tenglamani $ax^2=0 \ |:a, \to x^2=0$ ko'rinishga keltiramiz. Buni $x\cdot x=0$ deb va ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglab $\begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$ yechimlarga, ya'ni $x=0$ yechimga ega bo'lamiz.

4.3-Mavzu: Kvadrat tenglamaning yechimi

Ushbu $4x^2-8x+3=0$ tenglamani to'la kvadratni ajratish usuli ishlaylik. Ketma-ket amallardan keyin $(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 2+2^2-2^2+3=0, \to (2x-2)^2-4+3=0, \to (2x-2)^2-1^2=0$ ifoda kelib chiqadi. Buni qisqa ko'paytirish formulasi yordamida ko'paytuvchilarga ajratamiz, ya'ni $(2x-2-1)(2x-2+1)=0, (2x-3)(2x-1)=0$ bo'ladi. Ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglab $\begin{cases} x_1=1{,}5 \\ x_2=0{,}5 \end{cases}$ degan ildizlarga ega bo'lamiz.

Umumiy holda berilgan $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglamani yechimi ham xuddi yuqoridagi misoldagi kabi to'la kvadratga ajratish usuli bilan aniqlanadi. Bunda ushbu ketma-ketlikda ish bajariladi.

$$ax^2+bx+c=0 \ \Big|:a, \to x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0, \to x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0, \to$$

$$\to \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=0, \to \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0, \to \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0, \to$$

$$\to \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\cdot\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

Ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglab ildizlarni aniqlaymiz.

$$\begin{cases} x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \\ x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=-\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases}$$

Shunday qilib, umumiy holda berilgan kvadrat tenglamaning ildizlari quyidagicha bo'lar ekan:

$$\boxed{\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases} \quad yoki \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

Belgilash orqali diskriminant degan yangi kattalik kiritamiz.

$$\boxed{D=b^2-4ac}$$

Kvadrat tenglamaning ildizlari diskriminant orqali quyidagicha beriladi:

$$\boxed{\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \end{cases} \quad yoki \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}}$$

Kvadrat tenglama yechimga ega bo'lish yoki bo'lmasligi diskriminantga bog'liq.

1) Ikkita yechimga ega bo'lish sharti.

Agar diskriminant musbat $(D>0)$ bo'lsa, u holda berilgan kvadrat tenglama $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ va $x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ formula bilan aniqlanuvchi ikkita haqiqiy yechimlarga ega bo'ladi.

2) Yagona yechimga ega bo'lish sharti.

Agar diskriminant nolga teng $(D=0)$ bo'lsa, u holda berilgan kvadrat tenglama $x_1=\frac{-b+0}{2a}=-\frac{b}{2a}$ va $x_2=\frac{-b-0}{2a}=-\frac{b}{2a}$ formula bilan aniqlanuvchi ikkita o'zaro teng haqiqiy ildizlarga ega bo'ladi. Bunda ikkita ildiz ustma-ust tushib qolgani uchun ham yagona yechim deb ataladi. Diskriminanti nolga teng bo'lgan kvadrat tenglama $\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2=0$ ko'rinishdagi to'la kvadratga ajraladi.

3) Yechimga ega bo'lmaslik sharti.

Agar diskriminant nolga teng $(D<0)$ bo'lsa, u holda berilgan kvadrat tenglama haqiqiy yechimga ega bo'lmaydi. Chunki, kvadrat ildiz ostidagi manfiy sondan haqiqiy son emas, balki "Oliy matematika"da o'rganiladigan kompleks son chiqadi.

4.4-Mavzu: Keltirilgan kvadrat tenglama. Viet teoremasi va undan kelib chiqadigan natijalar

Umumiy holda berilgan $ax^2+bx+c=0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglamani har ikki tarafini bosh koeffitsient a ga bo'lsak, $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ teng kuchli tenglama hosil bo'ladi. Bunda $\frac{b}{a}=p$, $\frac{c}{a}=q$ deb belgilash kiritsak, $x^2+px+q=0$ yana teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

$x^2+px+q=0$ ko'rinishdagi kvadrat tenglamani ***keltirilgan kvadrat tenglama*** deyiladi.

Keltirilgan kvadrat tenglamasini Viet teoremasidan foydalanib ham yechish mumkin.

Viet teoremasi:

Keltirilgan kvadrat tenglama ildizlari yig'indisi teskari ishora bilan olingan ikkinchi koeffitsientga, ildizlar ko'paytmasi esa ozod hadga teng bo'ladi.

$$\boxed{\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}}$$

Isboti: Berilgan tenglama ildizlari $x_1 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ va $x_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ ni qo'shamiz. Bunga ko'ra $x_1 + x_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} + \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p$ kelib chiqadi. Endi ildizlarni ko'paytirsak $x_1 \cdot x_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} \cdot \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{\left(\sqrt{p^2-4q}-p\right)\cdot\left(-p-\sqrt{p^2-4q}\right)}{4} =$ $= -\frac{\left(\sqrt{p^2-4q}-p\right)\cdot\left(\sqrt{p^2-4q}+p\right)}{4} = -\frac{p^2-4q-p^2}{4} = q$ natija kelib chiqadi.

Viet teoremasidan misol va masalalar yechishda qo'l keladigan bir necha natijalar kelib chiqadi. Biz ularga birma-bir to'xtalib o'tamiz.

1). $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$

2). $x_1 - x_2 = \sqrt{p^2-4q} = D$ $\quad$ (*bu yerda* $x_1 > x_2$)

3). $x_1^2 - x_2^2 = -p \cdot \sqrt{p^2-4q}$ $\quad$ (*bu yerda* $x_1 > x_2$)

4). $x_1^3 - x_2^3 = \sqrt{p^2-4q} \cdot (p^2 - q)$ $\quad$ (*bu yerda* $x_1 > x_2$)

5). $x_1^3 + x_2^3 = 3pq - p^3$

6). $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{p}{q}$

7). $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{p^2-2q}{q^2}$

8). $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{p^2-2q}{q}$

Isboti: Berilgan formulalarni birma-bir isbotlaymiz.

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$.

2) $x_1 - x_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} - \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} = \sqrt{p^2-4q} = D$.

3) $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \sqrt{p^2-4q} \cdot (-p) = -p \cdot \sqrt{p^2-4q}$.

4) $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 - x_2)((x_1 + x_2)^2 - x_1x_2) = \sqrt{p^2-4q} \cdot (p^2 - q)$.

5) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) = -p(p^2 - 3q) = 3pq - p^3$.

6) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{p}{q}$.

7) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2} = \frac{p^2-2q}{q^2}$.

8) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{p^2-2q}{q}$.

4.5-Mavzu: Kvadrat tenglamaga keltiriladigan tenglamalar

Bir qarashda kvadrat tenglamaga o'xshamagan tenglamalarni ham ma'lum amallar bajarish orqali kvadrat tenglamaga keltirish mumkin. ana shulardan ba'zilari bilan tanishib o'tamiz.

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ ko'rinishdagi tenglamaga ***bikvadrat tenglama*** deyiladi. Bikvadrat termini qo'shkvadrat degan ma'noni beradi.

Bu tenglamani yechish uchun $x^2 = t\ (t \geq 0)$ deb belgilash kiritamiz. Bu erda $x^2 = t, \rightarrow x^2 - (\sqrt{t})^2 = 0, \rightarrow (x-\sqrt{t})(x+\sqrt{t}) = 0, \begin{cases} x_1 = \sqrt{t} \\ x_2 = -\sqrt{t} \end{cases}$ bo‘ladi. Bunda $at^2 + bt + c = 0$ yangi kvadrat tenglama hosil bo‘ladi. Bu kvadrat tenglamaning yechimlari $t_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ va $t_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ bo‘ladi $(t_1 < t_2)$. Topilgan t_1 va t_2 qiymatlardan faqat nomanfiy bo‘lganini olib $\begin{cases} x_1 = \sqrt{t} \\ x_2 = -\sqrt{t} \end{cases}$ formula bo‘yicha davom ettiriladi. Bunda ushbu shartlar bilan tanishamiz:

1) 4ta yechimga ega bo‘lish sharti.

Agar $\begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \end{cases}$ bo‘lsa, har biriga mos ikkita ildiz chiqadi, ya’ni t_1 ga mos $\begin{cases} x_{1.1} = \sqrt{t_1} \\ x_{1.2} = -\sqrt{t_1} \end{cases}$ javoblar va t_2 ga mos $\begin{cases} x_{2.1} = \sqrt{t_2} \\ x_{2.2} = -\sqrt{t_2} \end{cases}$ javoblar chiqadi.

2) 3ta yechimga ega bo‘lish sharti.

Agar $\begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 > 0 \end{cases}$ bo‘lsa, t_1 ga mos $\begin{cases} x_{1.1} = 0 \\ x_{1.2} = 0 \end{cases}$ javob va t_2 ga mos $\begin{cases} x_{2.1} = \sqrt{t_2} \\ x_{2.2} = -\sqrt{t_2} \end{cases}$ javoblar chiqadi

3) 2ta yechimga ega bo‘lish sharti.

Agar $\begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 > 0 \end{cases}$ bo‘lsa, t_1 ga mos haqiqiy ildiz mavjud emas va t_2 ga mos $\begin{cases} x_{2.1} = \sqrt{t_2} \\ x_{2.2} = -\sqrt{t_2} \end{cases}$ javoblar chiqadi.

4) *yagona yechimga ega bo‘lish sharti.*

Agar $\begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$ bo‘lsa, t_1 ga mos haqiqiy ildiz mavjud emas t_2 ga mos $\begin{cases} x_{2.1} = 0 \\ x_{2.2} = 0 \end{cases}$ javoblar chiqadi, ya’ni yagona $x = 0$ degan yechimga ega.

5) yechim bo‘lmaslik sharti.

Agar $\begin{cases} t_1 < 0 \\ t_2 < 0 \end{cases}$ bo‘lsa, u holda birorta ham haqiqiy yechim mavjud emas.

Misol № 1: $x^4 - 13x^2 - 36 = 0$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> $x^2 = t \geq 0$ deb belgilash kiritamiz. Shunda $t^2 - 13t + 36 = 0$ degan yangi kavadrat tenglama hosil bo‘ladi. Diskriminant $D = 13^2 + 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25 > 0$ bo‘lgani uchun ikkita $\begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 9 \end{cases}$ haqiqiy yechimlarga ega bo‘lamiz. Endi $\begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = 9 \end{cases}$ tenglamalarini ishlasak, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_4 = 3 \end{cases} \end{array}\right.$ degan 4ta ildiz chiqadi.

Berilgan $x^4 - 13x^2 - 36 = 0$ kvadrat tenglamani $(x^2-4)(x^2-9) = 0, \rightarrow (x-2)(x+2)(x-3)(x+3) = 0$ ko‘paytuvchilarga ajratish orqali ham yechish mumkin. Bunda har bir ko‘paytuvchini nolga tenglab $\begin{cases} x-2=0 \\ x+2=0 \\ x-3=0 \\ x+3=0 \end{cases}; \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = -3 \end{cases}$ 4ta ildizni chiqarishimiz mumkin.

Misol № 2: $x^6 - 65x^3 = -64$ tenglamani eching.

Yechish: $x^3 = t$ deb belgilash kiritamiz. Shunda $t^2 - 65t + 64 = 0$ degan yangi kavadrat tenglama hosil bo'ladi. Buni $(t-64)(t-1)=0$ ko'paytuvchilarga ajratsak, $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 64 \end{cases}$ yechimlarga ega bo'lamiz. Endi $\begin{cases} x^3 = 1 \\ x^3 = 64 \end{cases}$ tenglamalarini ishlab ikkita $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$ haqiqiy mldizlarga ega bo'lamiz.

Misol № 3: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x+\frac{1}{x}\right) - 3 = 0$ tenglamani eching.

Yechish: $x+\frac{1}{x}=t$ deb belgilash kiritamiz. Shunda $t^2-2t-3=0$ degan yangi kavadrat tenglama hosil bo'ladi. Buni $(t-3)(t+1)=0$ ko'paytuvchilarga ajratsak, $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$ yechimlarga ega bo'lamiz. Endi $x+\frac{1}{x}=3$ va $x+\frac{1}{x}=-1$ tenglamalarni echib chiqamiz. Har ikki tarafini x ga ko'paytirish natijasida $x^2-3x+1=0$ va $x^2+x+1=0$ kvadrat tenglamalarga keltiriladi. Birinchi tenglamada $D=9-4=5>0$ bo'lgani uchun ikkita $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ va $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ildizlarga ega bo'lamiz. Ikkinchi tenglamada esa $D=1-4=-3<0$ bo'lgani uchun haqiqiy ildizlar bo'lmaydi. Shunday qilib berilgan tenglama ikkita $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ va $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ haqiqiy ildizlarga ega ekan.

Misol № 4: $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x+\frac{1}{x}\right) + 5 = 0$ tenglamani eching.

Yechish: $x+\frac{1}{x}=t$ deb belgilash kiritsak, u holda $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$ bo'ladi. Shunda $t^2-4t+3=0$ degan yangi kavadrat tenglama hosil bo'ladi. Buni $(t-3)(t-1)=0$ ko'paytuvchilarga ajratsak, $\begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$ yechimlarga ega bo'lamiz. Endi $x+\frac{1}{x}=1$ va $x+\frac{1}{x}=3$ tenglamalarni echib chiqamiz. Har ikki tarafini x ga ko'paytirish natijasida $x^2-x+1=0$ va $x^2-3x+1=0$ kvadrat tenglamalarga keltiriladi. Birinchi tenglamada esa $D=1-4=-3<0$ bo'lgani uchun haqiqiy ildizlar bo'lmaydi. Ikkinchi tenglamada $D=9-4=5>0$ bo'lgani uchun ikkita $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ va $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ildizlarga ega bo'lamiz. Shunday qilib berilgan tenglama ikkita $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ va $x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ haqiqiy ildizlarga ega ekan.

4.6-Mavzu: $y=x^2$ ko'rinishdagi funksiya

$y=ax^2+bx+c$ ko'rinishdagi funksiyaga ***kvadrat funksiya*** deyiladi.

Bu erda: $a-$bosh koeffitsient bo'lib, $a \neq 0$, $b-$ikkinchi koeffitsient, $c-$ozod had. Bir so'z bilan aytganda $a,b,c-$berilgan haqiqiy sonlar. $x-$haqiqiy o'zgaruvchi.

Biz kvadrat funksiyani o'rganishda eng oddiy holdagi kvadrat funksiyadan boshlab umumiy holda berilgan kvadrat funksiyaga qadar boramiz.

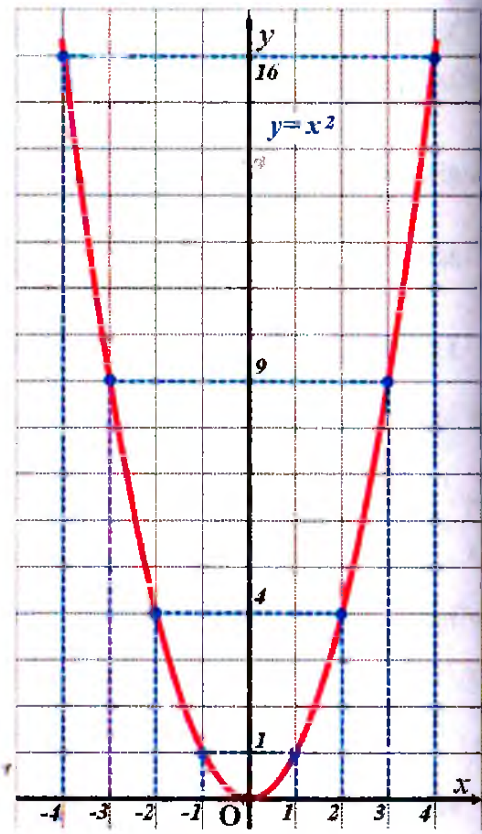
Eng avvalo, $y=x^2$ ko'rinishidagi eng oddiy kvadrat funksiya bilan uning grafigini qurish orqali tanishamiz. Grafigini qurish uchun jadval tuzamiz, so'ngra grafigini qurib xossalarini sanaymiz.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Jadval asosida $y=x^2$ funksiya grafigini Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 4.6.1-rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz. Bundan keyin biz kvadrat funksiyaning grafigini ***parabola*** deb ataymiz.

Parabolaning xossalarini sanab o'tamiz:

1) funksiya $x\in(-\infty;0)$ oraliqda kamayadi;
2) funksiya $x\in(0;\infty)$ oraliqda o'sadi;
3) funksiya $(0;0)$ nuqtada minimumga erishadi, bu nuqta parabola uchining koordinatalaridir;
4) $x=0$ chizig'i funksiya grafigining simmetriya chizig'idir;
5) juft funksiya, ya'ni funksiya grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik;
6) funksiya $x\in(-\infty;\infty)$ oraliqda nomanfiy qiymatlar qabul qiladi, ya'ni funksiya grafigi Ox o'qidan tepada joylashgan;
7) $A\left(0;\frac{1}{4}\right)$ nuqta parabola fokusi hisoblanadi.



4.6.1-rasm

4.7-Mavzu: $y=ax^2$ ko'rinishdagi funksiya

Oldingi mavzuda $y=x^2$ funksiya grafigi bilan tanishgan edik. Endi ozgina murakkabroq bo'lgan $y=ax^2$ funksiya grafigi bilan tanishamiz. Bu funksiyaning grafigini qurish uchun jadval tuzamiz, so'ngra grafigini qurib xossalarini sanaymiz. Bosh koeffitsientning bir nechta musbat qiymatlari uchun, aytaylik $a=1,\ a=2,\ a=\frac{1}{2}$ qiymatlar uchun jadval tuzamiz.

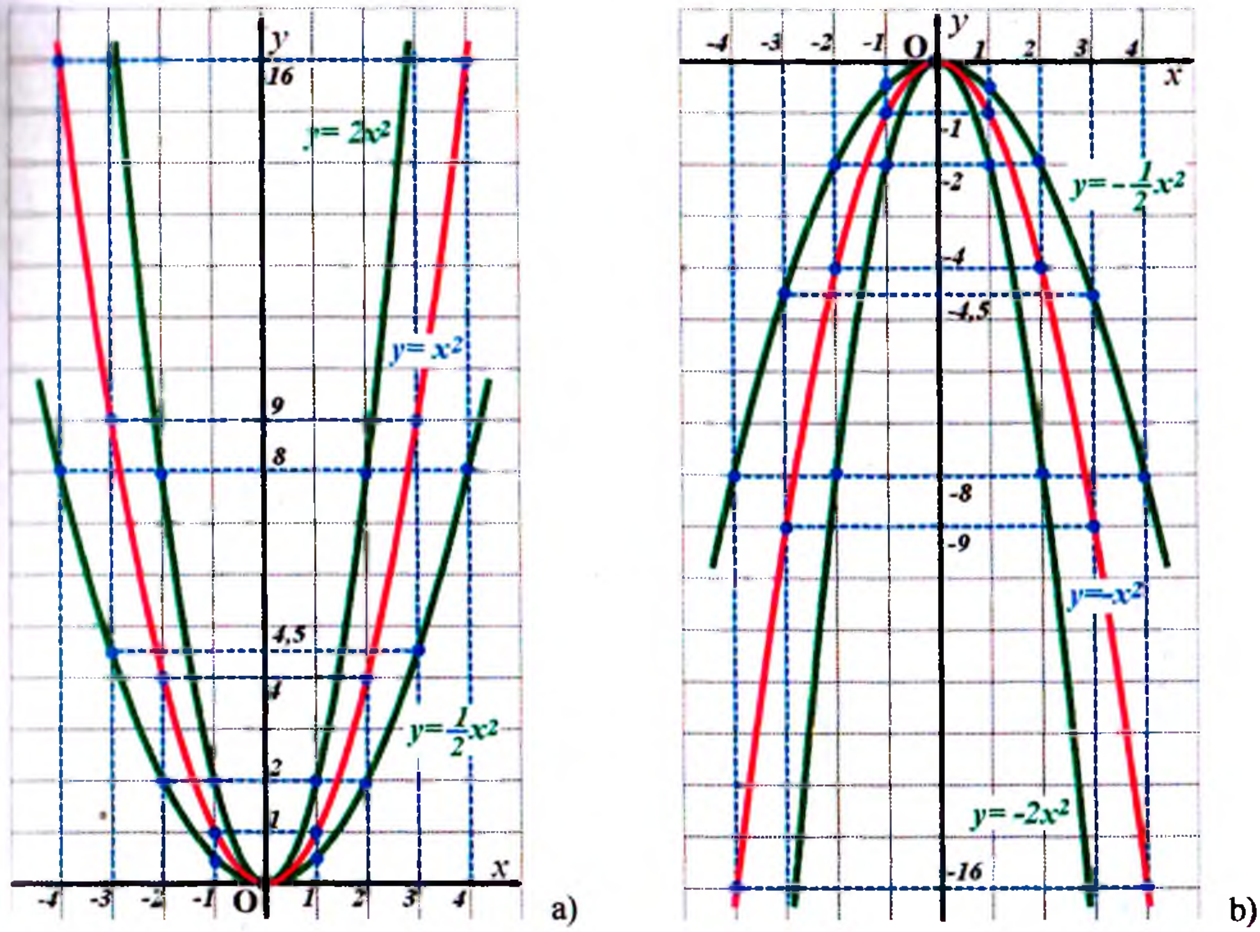
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$y=2x^2$	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50
$y=\frac{1}{2}x^2$	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5

Jadval asosida funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 4.7.1-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

Endi bosh koeffitsientning bir nechta manfiy qiymatlari uchun, aytaylik $a=-1,\ a=-2,\ a=-\frac{1}{2}$ qiymatlar uchun jadval tuzamiz.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=-x^2$	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25
$y=-2x^2$	-50	-32	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18	-32	-50
$y=-\frac{1}{2}x^2$	12,5	-8	-4,5	-2	-0,5	0	-0,5	-2	-4,5	-8	-12,5

Jadval asosida funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 4.7.1-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.



4.7.1-rasm

Demak, $y=x^2$ funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab a marta cho'zish yoki siqish $y=ax^2$ funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan, ya'ni $|a|>1$ bo'lganda grafik cho'ziladi, $|a|<1$ bo'lganda esa grafik siqiladi. $a>0$ bo'lganda parabola shoxlari tepaga qaragan, $a<0$ bo'lganda esa parabola shoxlari pastga qaragan bo'ladi.

Jadval va rasmdan foydalanib $y=ax^2$ funksiya uchun quyidagi xossalarni sanab o'tamiz:

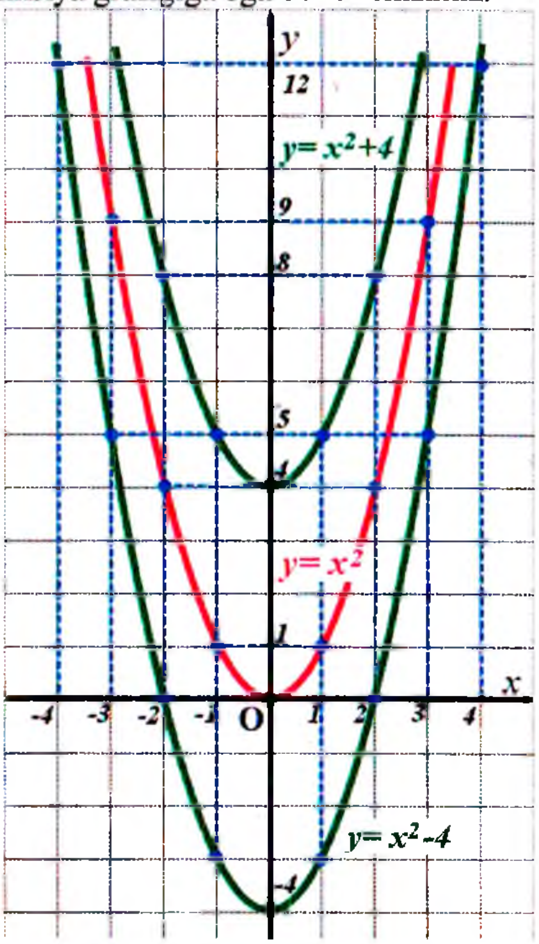
1) $a>0$ bo'lganda parabola shoxlari tepaga qaragan bo'ladi, funksiya $x\in(-\infty;0)$ oraliqda kamayadi, $x\in(0;\infty)$ oraliqda o'sadi, funksiya $(0;0)$ nuqtada minimumga erishadi, funksiya $x\in(-\infty;\infty)$ oraliqda nomanfiy qiymatlar qabul qiladi, ya'ni funksiya grafigi *Ox* o'qidan tepada joylashgan;
2) $a<0$ bo'lganda parabola shoxlari pastga qaragan bo'ladi, funksiya $x\in(-\infty;0)$ oraliqda o'sadi, $x\in(0;\infty)$ oraliqda kamayadi, funksiya $(0;0)$ nuqtada maksimumga erishadi, funksiya $x\in(-\infty;\infty)$ oraliqda nomusbat qiymatlar qabul qiladi, ya'ni funksiya grafigi *Ox* o'qidan pastda joylashgan;
3) $x=0$ chizig'i funksiya grafigining simmetriya chizig'idir;
4) juft funksiya, ya'ni funksiya grafigi *Oy* o'qiga nisbatan simmetrik.
5) $A\left(0;\frac{1}{4a}\right)$ nuqta parabola fokusi hisoblanadi.

4.8-Mavzu: $y=ax^2+y_0$ va $y=a(x-x_0)^2$ ko'rinishdagi funksiyalar

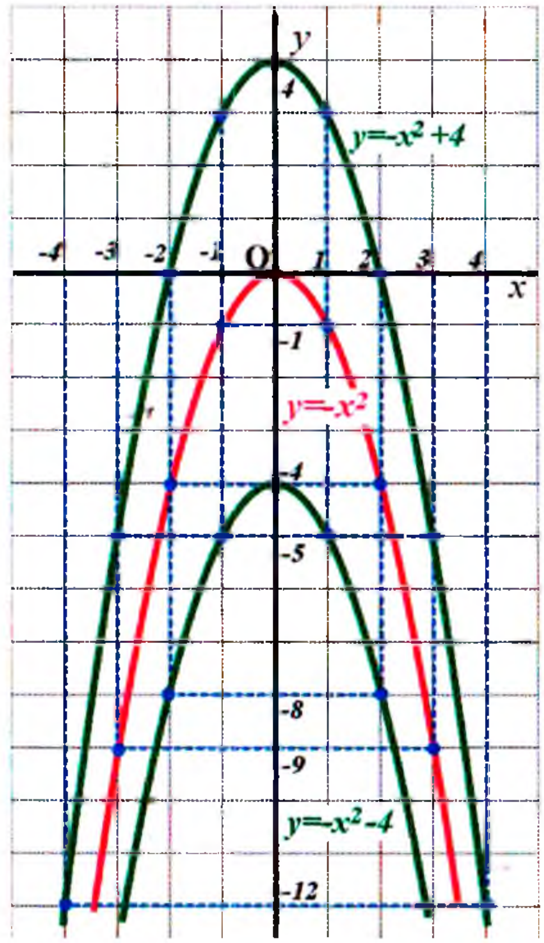
Keling, $y=x^2$ kvadrat funksiyadan biroz murakkabroq bo'lgan funksiyani o'rganaylik, ya'ni ozod had bo'lgan holni ko'rib chiqaylik. Misol tarzida $y=x^2$, $y=x^2+4$ va $y=x^2-4$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qurib, bu grafiklar orasida qandaydir bog'lanish yoki o'xshashlik borligini aniqlaymiz. Grafiklarni qurish uchun dastlab jadval tuzamiz.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$y=x^2+4$	29	20	13	8	5	4	5	8	13	20	29
$y=x^2-4$	21	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12	21

Jadval asosida funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 4.8.1-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinadiki, $y=x^2$ funksiya grafigini 4 birlik tepaga ko'tarilganda $y=x^2+4$ funksiya grafigiga, 4 birlik pastga tushirilganda esa $y=x^2-4$ funksiya grafigiga ega bo'lar ekanmiz.



a)



b)

4.8.1-rasm

Endi xuddi yuqoridagi kabi $y=-x^2$, $y=-x^2+4$ va $y=-x^2-4$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qurib, bu grafiklar orasida qandaydir bog'lanish yoki o'xshashlik borligini aniqlaymiz. Grafiklarni qurish uchun dastlab jadval tuzamiz.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=-x^2$	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25
$y=-x^2+4$	-21	-12	-5	0	3	4	3	0	-5	-12	-21
$y=-x^2-4$	-29	-20	-13	-8	-5	-4	-5	-8	-13	-20	-29

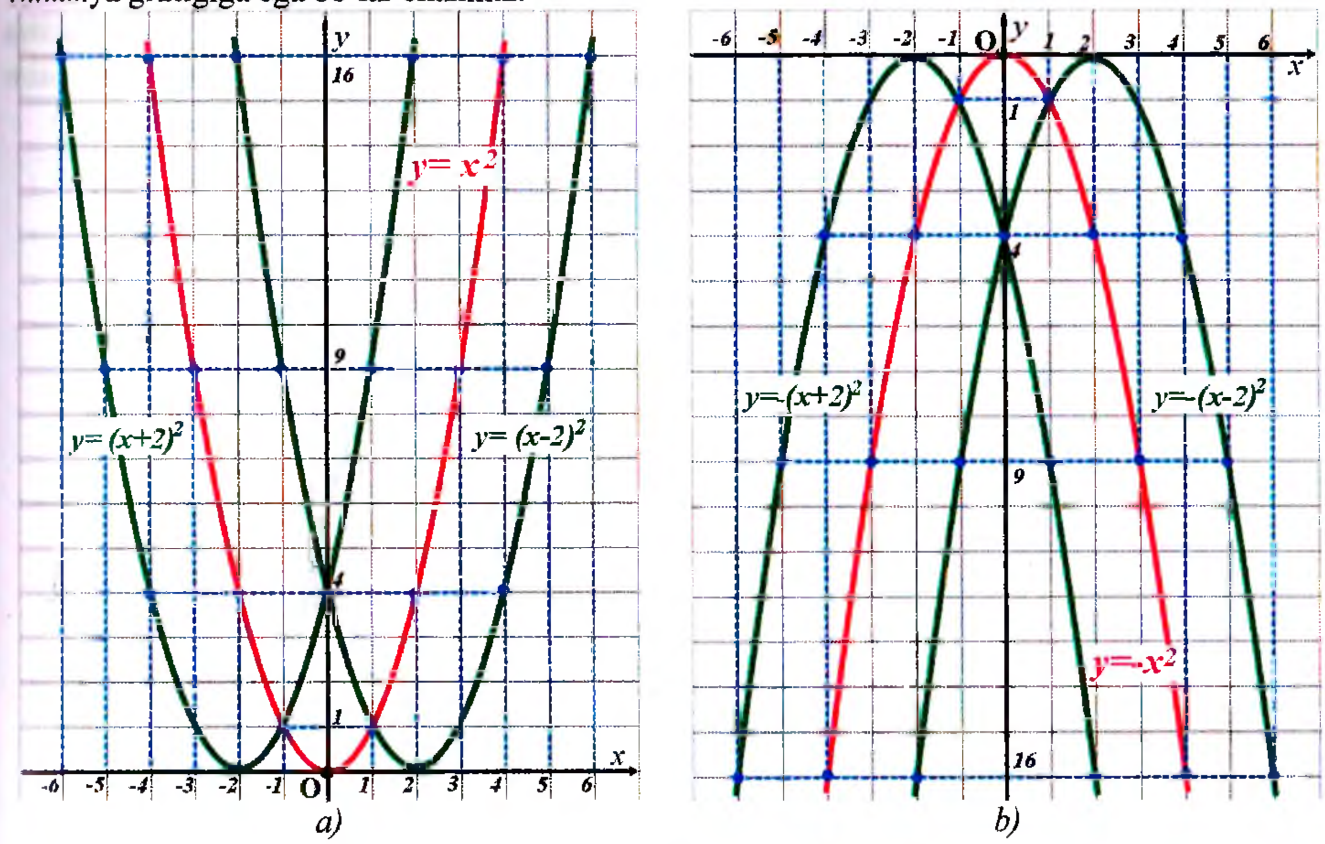
Jadval asosida funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 4.8.1-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinadiki, $y=-x^2$ funksiya grafigini 4 birlik tepaga ko'tarilganda $y=-x^2+4$ funksiya grafigiga, 4 birlik pastga tushirilganda esa $y=-x^2-4$ funksiya grafigiga ega bo'lar ekanmiz.

Demak, $y=ax^2$ funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab y_0 birlikka siljitish, ya'ni tepaga ko'tarish yoki pastga tushirish natijasida $y=ax^2+y_0$ funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.

Keling, $y=x^2$ kvadrat funksiyadan biroz murakkabroq bo'lgan funksiyani o'rganaylik, ya'ni to'la kvadratli holni ko'rib chiqaylik. Misol tarzida $y=x^2$, $y=(x-2)^2$ va $y=(x+2)^2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qurib, bu grafiklar orasida qandaydir bog'lanish yoki o'xshashlik borligini aniqlaymiz. Grafiklarni qurish uchun dastlab jadval tuzamiz.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=x^2$	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25
$y=(x-2)^2$	49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	9
$y=(x+2)^2$	9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	49

Jadval asosida funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 4.8.2-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinadiki, $y=x^2$ funksiya grafigini 2 birlik o'ngga surilganda $y=(x-2)^2$ funksiya grafigiga, 2 birlik chapga surilganda esa $y=(x+2)^2$ funksiya grafigiga ega bo'lar ekanmiz.



4.8.2-rasm

Endi xuddi yuqoridagi kabi $y=-x^2$, $y=-(x-2)^2$ va $y=-(x+2)^2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qurib, bu grafiklar orasida qandaydir bog'lanish yoki o'xshashlik borligini aniqlaymiz. Grafiklarni qurish uchun dastlab jadval tuzamiz.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y=-x^2$	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25
$y=-(x-2)^2$	-49	-36	-25	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$y=-(x+2)^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16	-25	-36	-49

Jadval asosida funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 4.8.2-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinadiki, $y=-x^2$ funksiya grafigini 2 birlik o'ngga surilganda $y=-(x-2)^2$ funksiya grafigiga, 2 birlik chapga surilganda esa $y=-(x+2)^2$ funksiya grafigiga ega bo'lar ekanmiz.

Demak, $y=ax^2$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab x_0 birlikka siljitish, ya'ni o'ngga yoki chapga surish natijasida $y=a(x-x_0)^2$ funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.

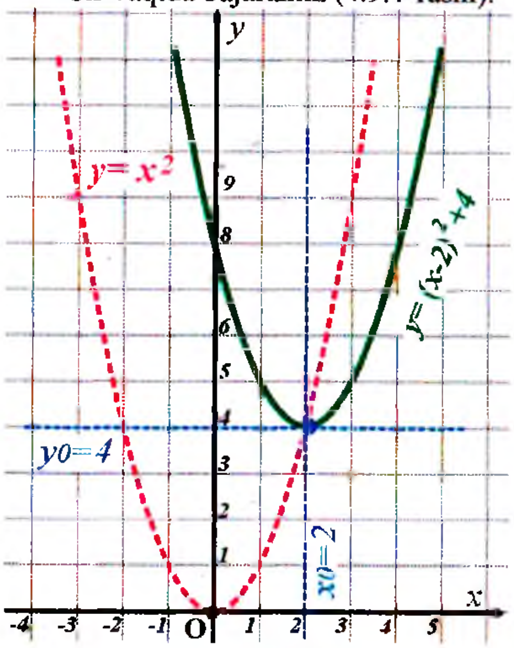
Biz ushbu mavzuda funksiya grafigini faqat bitta o‘q bo‘ylab, ya’ni Ox o‘qi bo‘ylab yoki Oy o‘qi bo‘ylab surishni o‘rgandik. Keyingi mavzuda grafikni bir vaqtda ikkala o‘q bo‘ylab suriladigan eng umumiy hol bilan tanishamiz.

4.9-Mavzu: Kvadrat funksiyaning grafigi va xossalari

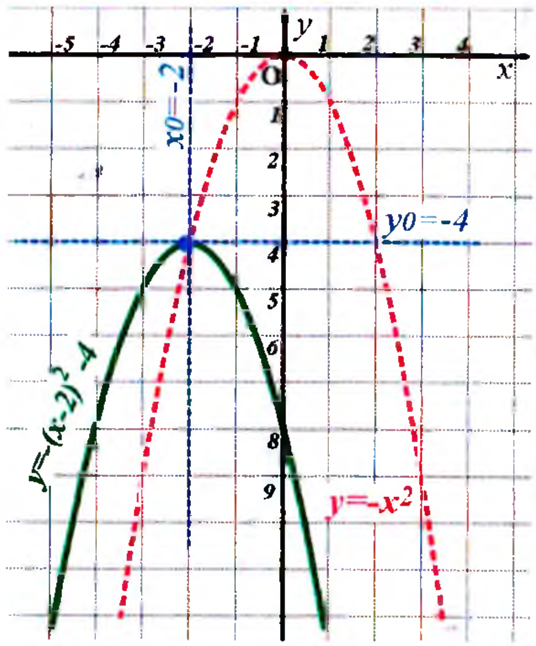
Bir vaqtda Ox va Oy o‘qlari bo‘ylab siljitishdan hosil qilinadigan funksiya grafigiga doir misollar ko‘raylik.

Misol № 1: $y=(x-2)^2+4$ funksiya grafigini quring.

<u>Yechish:</u> Biz oldingi mavzuda $y=(x-2)^2$ funksiya grafigini $y=x^2$ funksiya grafigini Ox o‘qi bo‘ylab $x_0=2$ birlik o‘ngga surish natijasida qurilishini va $y=x^2+4$ funksiya grafigini esa $y=x^2$ funksiya grafigini Oy o‘qi bo‘ylab $y_0=4$ birlik yuqoriga ko‘tarish natijasida qurilishini ko‘rgan edik. Hozirgi $y=(x-2)^2+4$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y=x^2$ funksiya grafigini Ox o‘qi bo‘ylab $x_0=2$ birlik o‘ngga hamda Oy o‘qi bo‘ylab $y_0=4$ birlik yuqoriga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (4.9.1-rasm).



4.9.1-rasm



4.9.2-rasm

Misol № 2: $y=-(x+2)^2-4$ funksiya grafigini quring.

<u>Yechish:</u> Biz oldingi mavzuda $y=-(x+2)^2$ funksiya grafigini $y=-x^2$ funksiya grafigini Ox o‘qi bo‘ylab $x_0=-2$ birlik chapga surish natijasida qurilishini va $y=-x^2-4$ funksiya grafigini esa $y=-x^2$ funksiya grafigini Oy o‘qi bo‘ylab $y_0=-4$ birlik pastga tushirish natijasida qurilishini ko‘rgan edik. Hozirgi $y=-(x+2)^2-4$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y=-x^2$ funksiya grafigini Ox o‘qi bo‘ylab $x_0=-2$ birlik chapga hamda Oy o‘qi bo‘ylab $y_0=-4$ birlik pastga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (4.9.2-rasm).

Endi umumiy holda berilgan $y=ax^2+bx+c$ ko‘rinishdagi funksiyaning grafigini qurish haqida so‘z yuritamiz. Buning uchun to‘la kvadratni ajratish usulidan foydalanamiz.

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)+c=$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a\left(x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=a(x-x_0)^2+y_0.$$

Shunday qilib, $y=ax^2+bx+c$ ko‘rinishdagi funksiyaning grafigini qurish uchun uni quyidagi ko‘rinishga keltirar ekanmiz:

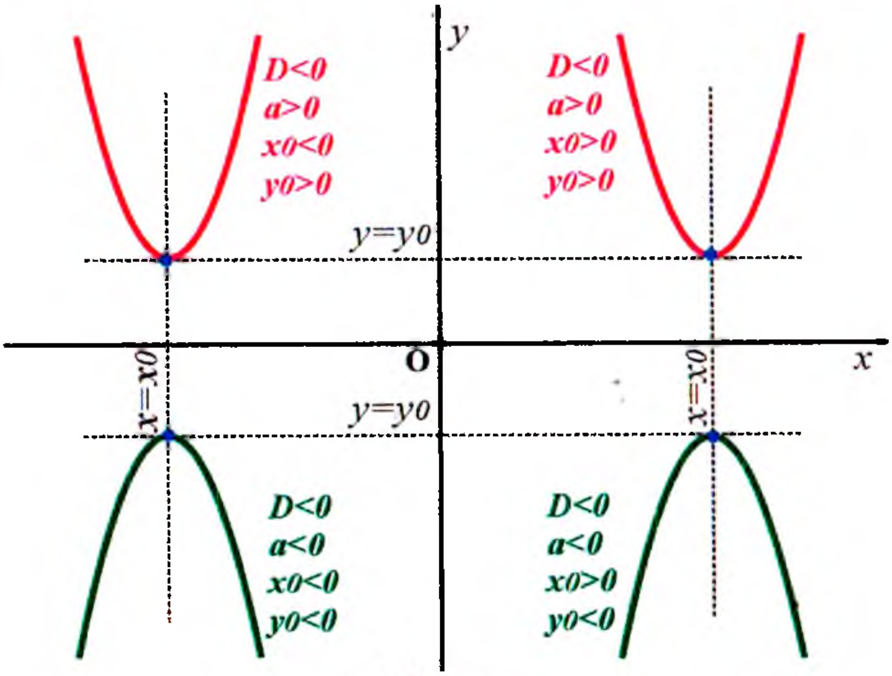
$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}=a(x-x_0)^2+y_0$$

Bu erda:

$x_0=-\dfrac{b}{2a}$ – parabolaning simmetriya chizig'ining koordinatasi yoki ekstremum nuqta (maksimum yoki minimum nuqta);

$y_0=-\dfrac{b^2-4ac}{4a}=\dfrac{D}{4a}$ – parabola uchining Oy o'qdagi koordinatasi yoki funksiya ekstremumi (minimumi yoki maksimumi).

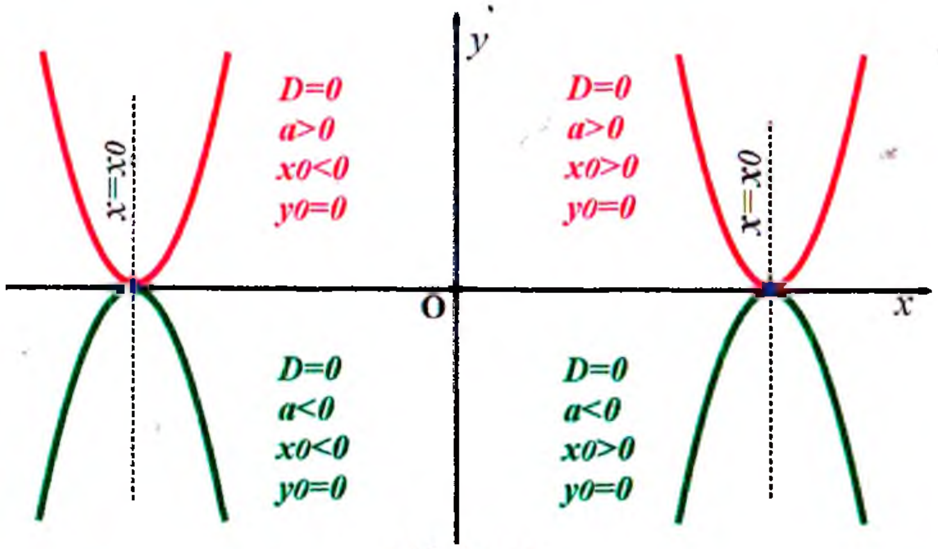
Shunday qilib, $y=ax^2+bx+c$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigini qurish uchun x_0 va y_0 kattaliklarning son qiymatini aniqlab olamiz va $y=ax^2$ funksiya grafigini koordinata o'qlari bo'yicha x_0 va y_0 birlikka surish natijasida $y=a(x-x_0)^2+y_0$ funksiya grafigi hosil qilinadi.



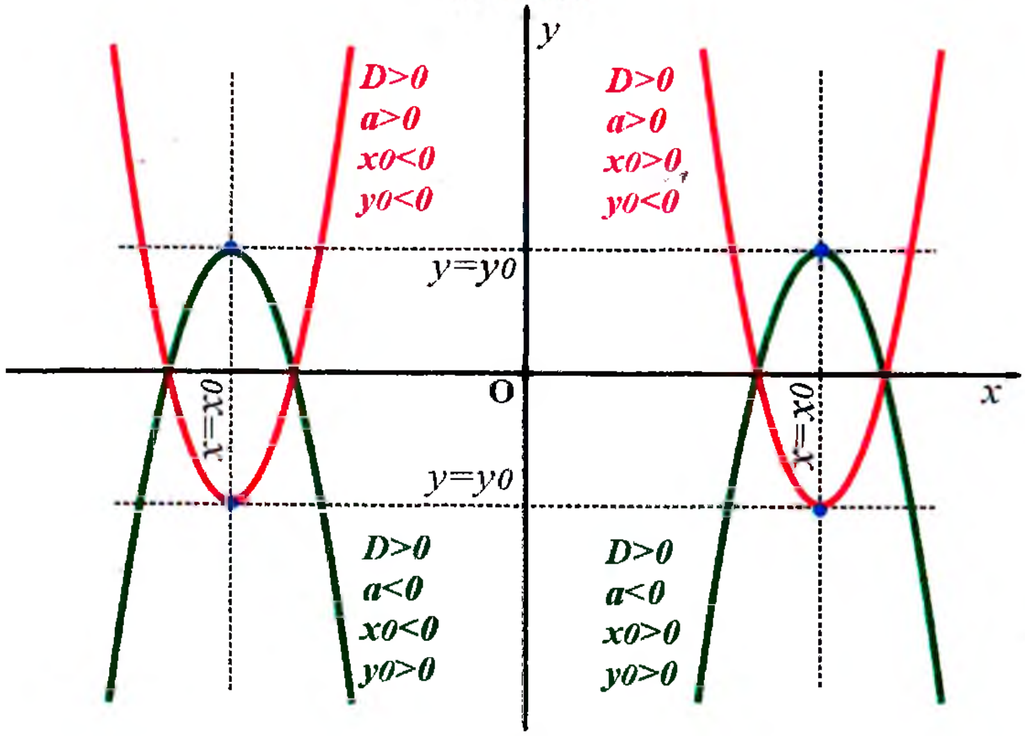
4.9.3-rasm

$y=ax^2+bx+c$ ko'rinishdagi funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $a>0$ bo'lsa, funksiya $x\in(-\infty;\,x_0)$ oraliqda kamayadi, $x\in(x_0;\,\infty)$ oraliqda o'sadi. x_0 nuqtada minimumga erishadi, y_0 nuqta funksiya minimumi bo'ladi.
2) Agar $a<0$ bo'lsa, funksiya $x\in(-\infty;\,x_0)$ oraliqda o'sadi, $x\in(x_0;\,\infty)$ oraliqda kamayadi. x_0 nuqtada maksimumga erishadi, y_0 nuqta funksiya maksimumi bo'ladi.
3) Agar $D>0$ bo'lsa, funksiya grafigi Ox o'qini x_1 va x_2 nuqtada kesib o'tadi (4.9.5-rasm).
   Agar $a>0$ bo'lsa, funksiya $x\in(-\infty;\,x_1)\cup(x_2;\,\infty)$ oraliqda musbat qiymatlar, $x\in(x_1;\,x_2)$ oraliqda esa manfiy qiymatlar qabul qiladi.
   Agar $a<0$ bo'lsa, funksiya $x\in(x_1;\,x_2)$ oraliqda musbat qiymatlar, $x\in(-\infty;\,x_1)\cup(x_2;\,\infty)$ oraliqda esa manfiy qiymatlar qabul qiladi.
4) Agar $D=0$ bo'lsa, funksiya grafigi Ox o'qiga x_0 nuqtada urinadi (4.9.4-rasm).
   Agar $a>0$ bo'lsa, funksiya faqat nomanfiy qiymatlar qabul qiladi.
   Agar $a<0$ bo'lsa, funksiya faqat nomusbat qiymatlar qabul qiladi.
5) Agar $D<0$ bo'lsa, funksiya grafigi Ox o'qi bilan kesishmaydi (4.9.3-rasm).
   Agar $a>0$ bo'lsa, funksiya faqat musbat qiymatlar qabul qiladi.
   Agar $a<0$ bo'lsa, funksiya faqat manfiy qiymatlar qabul qiladi.



4.9.4-rasm



4.9.5-rasm

Kvadrat funksiya 3 xil usulda berilishi mumkin:

1) $y = ax^2 + bx + c$ – umumiy ko‘rinishdagi kvadrat funksiya;

2) $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ – parabola uchi koordinatalari orqali berilgan kvadrat funksiya;

3) $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ – ildizlar orqali berilgan kvadrat funksiya.

4.10-Mavzu: Keltirilgan parametrik kvadrat tenglamaning xossalari

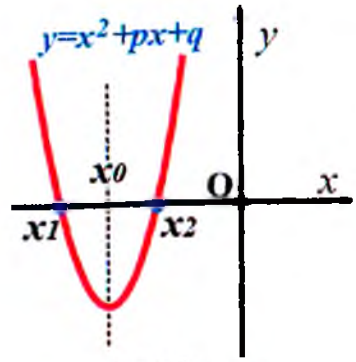
Parametrik tenglama deb tenglama yechimining parametrlar(koeffitsientlar)ga bog‘liq holda o‘zgarishiga aytiladi. Biz $x^2 + px + q = 0$ keltirilgan kvadrat tenglamaning parametrik xossalarini sanab o‘tamiz, bunda $y = x^2 + px + q$ ko‘rinishdagi funksiya grafigidan foydalanamiz.

1). Ikkita manfiy, haqiqiy ildizlarga ega bo‘lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} q > 0 \\ p > 0 \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases}}$$

Isboti: Ikkita haqiqiy yechimga ega bo'lish uchun $D = p^2 - 4q > 0$ bo'lishi kerak. Ikkala ildizi ham manfiy bo'lishi uchun esa ulardan kattasi $x_2 < 0$ bo'lishi etarlidir. Bunda

$$x_2 = \frac{\sqrt{p^2-4q}-p}{2} < 0, \to \sqrt{p^2-4q} < p, \Rightarrow \begin{cases} q > 0 \\ p > 0 \end{cases}$$ natija chiqadi.



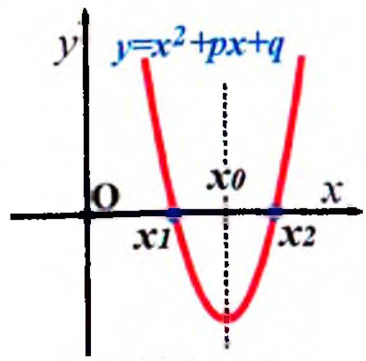
4.10.1-rasm

2). Ikkita musbat, haqiqiy ildizlarga ega bo'lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} q > 0 \\ p < 0 \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases}}$$

Isboti: Ikkita haqiqiy yechimga ega bo'lish uchun $D = p^2 - 4q > 0$ bo'lishi kerak. Ikkala ildizi ham musbat bo'lishi uchun esa ulardan kichigi $x_1 > 0$ bo'lishi etarlidir. Bunda

$$x_1 = \frac{\sqrt{p^2-4q}+p}{2} < 0, \to \sqrt{p^2-4q} < -p, \Rightarrow \begin{cases} q > 0 \\ p < 0 \end{cases}$$ natija chiqadi.

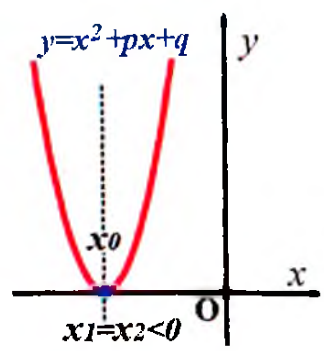


4.10.2-rasm

3). Ikkita teng manfiy, haqiqiy ildizga ega bo'lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} p > 0 \\ p^2 - 4q = 0 \end{cases}}$$

Isboti: Ikkala ildizi o'zaro teng bo'lishi uchun $D = p^2 - 4q = 0$ bo'lishi kerak. Ildizi manfiy bo'lishi uchun esa $x_1 = x_2 = x_0 < 0$ bo'lishi kerak, ya'ni $x_0 = -\frac{p}{2} < 0, \to p > 0$ bo'lishi kerak.

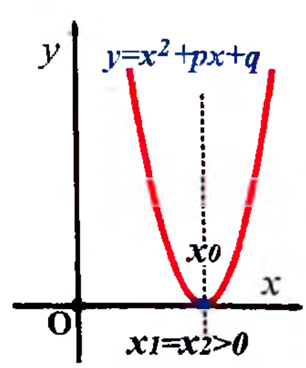


4.10.3-rasm

4). Ikkita teng musbat, haqiqiy ildizlarga ega bo'lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} p < 0 \\ p^2 - 4q = 0 \end{cases}}$$

Isboti: Ikkala ildizi o'zaro teng bo'lishi uchun $D = p^2 - 4q = 0$ bo'lishi kerak. Ildizi musbat bo'lishi uchun esa $x_1 = x_2 = x_0 > 0$ bo'lishi kerak, ya'ni $x_0 = -\frac{p}{2} > 0, \to p < 0$ bo'lishi kerak.

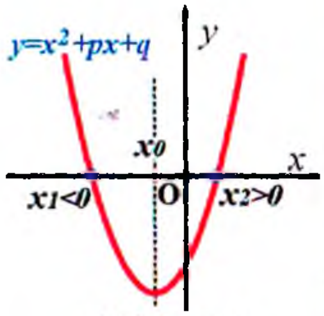


4.10.4-rasm

5). Turli ishorali, haqiqiy ildizlarga ega bo'lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} q < 0 \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases}}$$

Isboti: Ikkita haqiqiy yechimga ega bo‘lish uchun $D = p^2 - 4q > 0$ bo‘lishi kerak. Ildizlari turli ishorali bo‘lishi uchun esa $x_1 \cdot x_2 = q < 0$ bo‘lishi kerak.

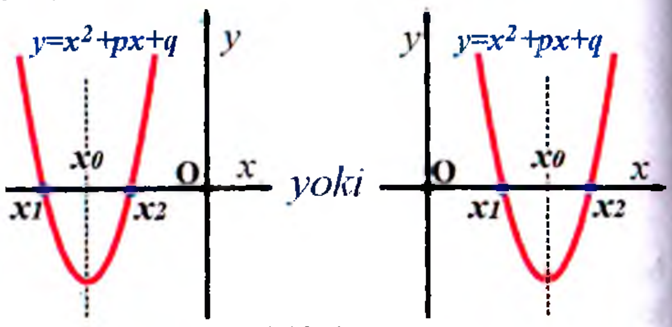


4.10.5-rasm

6). Bir xil ishorali, haqiqiy ildizlarga ega bo‘lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} q > 0 \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases}}$$

Isboti: Ikkita haqiqiy yechimga ega bo‘lish uchun $D = p^2 - 4q > 0$ bo‘lishi kerak. Ildizlari bir xil ishorali bo‘lishi uchun esa $x_1 \cdot x_2 = q > 0$ bo‘lishi kerak.

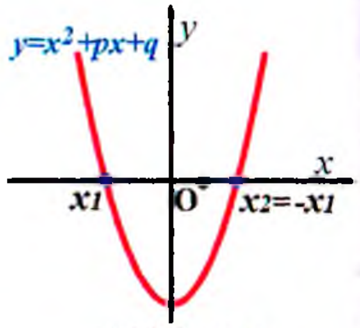


4.10.6-rasm

7). O‘zaro qarama-qarshi va haqiqiy ildizlarga ega bo‘lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} q > 0 \\ p^2 - 4q > 0 \end{cases}}$$

Isboti: O‘zaro qarama-qarshi ildizlarga ega bo‘lish uchun berilgan $y = x^2 + px + q$ funksiya juft bo‘lishi kerak. Buning uchun esa $p = 0$ bo‘lishi kerak. Ildizlari haqiqiy bo‘lishi uchun esa $D = p^2 - 4q > 0$ bo‘lishi kerak. Bunda $D = p^2 - 4q = 0 - 4q = -4q > 0, \to q < 0$ degan natija kelib chiqadi.



4.10.7-rasm

8) O‘zaro teskari va haqiqiy ildizlarga ega bo‘lish sharti.

$$\boxed{\begin{cases} q = 1 \\ (p-2)(p+2) > 0 \end{cases}}$$

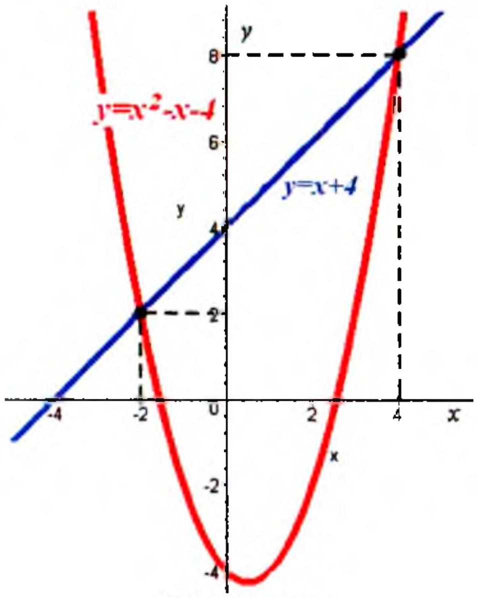
Isboti: O‘zaro teskari ildizlarga ega bo‘lish uchun $x_2 = \frac{1}{x_1}$ yoki $x_1 \cdot x_2 = q = 1$ shart bajarilishi kerak. Ildizlari haqiqiy bo‘lish uchun esa $D = p^2 - 4q > 0$ bo‘lishi kerak. Bunda $D = p^2 - 4q = p^2 - 4 > 0, \to (p-2)(p+2) > 0, \; p \in (-2;\; 2)$ degan natija kelib chiqadi.

4.11-Mavzu: Kvadrat tenglamalarni grafik usulda yechish

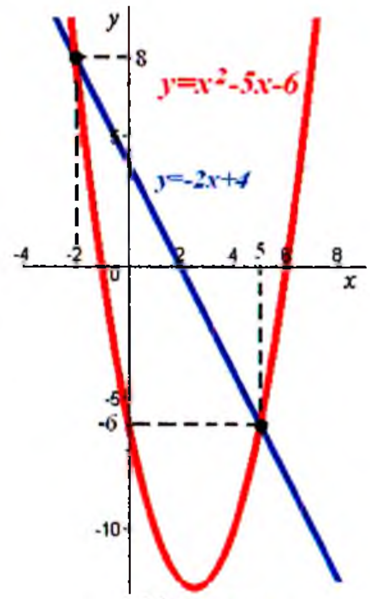
Kvadrat tenglamalarni grafik yo‘li bilan ham yechish mumkin. Buning uchun berilgan tenglamaning o‘ng va chap tomonlarini funksiyalar deb olib, bu funksiyalar grafiklari quriladi va grafiklarning kesishgan nuqtalari belgilanadi. Bu kesishish nuqtalarining koordinatalari berilgan tenglamaning yechimlari bo‘ladi. Keling, kvadrat tenglmani grafik usulda yechishga doir bir necha misol echaylik.

Misol № 1: $x^2 - x - 4 = x + 4$ tenglamani grafik usulda eching.

Yechish: Bu tenglamaning har ikkala tomonini ham $\begin{cases} y = x^2 - x - 4 \\ y = x + 4 \end{cases}$ funksiyalar ko‘rinishiga keltirib, ularning grafigini qursak, 4.11.1-rasmdagi grafikka ega bo‘lamiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, grafiklarning kesishish nuqtalari $(-2;\, 2)$ va $(4;\, 8)$ nuqtalardir. Demak, tenglama yechimlari $x_1 = -2$ va $x_2 = 4$ bo‘ladi.



4.11.1-rasm



4.11.2-rasm

Misol № 1: $x^2-5x-6=-2x+4$ tenglamani grafik usulda eching.

Yechish: Bu tenglamaning har ikkala tomonini ham $\begin{cases} y=x^2-5x-6 \\ y=-2x+4 \end{cases}$ funksiyalar ko'rinishiga keltirib, ularning grafigini qursak, 4.11.2-rasmdagi grafikka ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinib turibdiki, grafiklarning kesishish nuqtalari $(-2;\,8)$ va $(5;\,-6)$ nuqtalardir. Demak, tenglama yechimlari $x_1=-2$ va $x_2=5$ bo'ladi.

4.12-Mavzu: Kvadrat tengsizliklarni yechish. Oraliq usuli

$ax^2+bx+c>0$ yoki $ax^2+bx+c<0$ ko'rinishdagi tengsizlikka ***kvadrat tengsizlik*** deyiladi.

Kvadrat tengsizlikni grafik usulda yechish uchun $y=ax^2+bx+c$ funksiya grafigi chiziladi, grafikdan uning nollari aniqlanadi hamda grafikning musbat yoki manfiy oraliqlarini *Ox* o'qidan tepada yoki pastda ekanligidan aniqlanadi.

Misol № 1: $x^2-3x-4\ge 0$ tengsizlikni grafik usulda eching.

Yechish: Tengsizlikni ko'paytuvchiga ajratsak, $(x+4)(x-1)\ge 0$ bo'ladi.Berilgan tengsizlikning yechimi $y=x^2-3x-4$ funksiyaning *Ox* o'qidan tepada yotgan oralig'idir (4.12.1-rasm). Rasmdan ko'rinib turibdiki, yechim $x\in(-\infty;\,-1]\cup[4;\,\infty)$ bo'ladi.

Misol № 2: $x^2+3x<3x+4$ tengsizlikni grafik usulda eching.

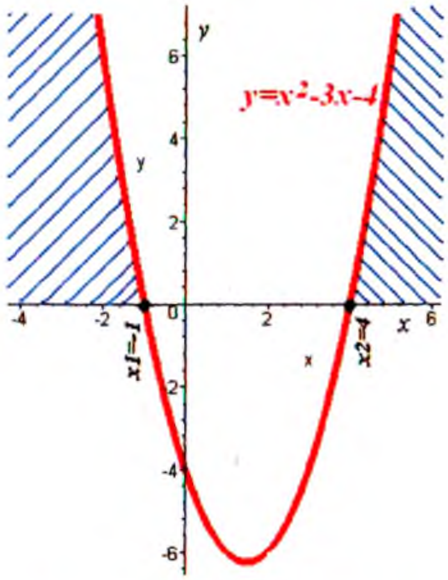
Yechish: Bu tenglamaning har ikkala tomonini ham $\begin{cases} y=x^2+3x \\ y=3x+4 \end{cases}$ funksiyalar ko'rinishiga keltirib, ularning grafigini qursak, 4.12.2-rasmdagi grafikka ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinib turibdiki, grafiklar $(-2;\,-2)$ va $(2;\,10)$ nuqtalarda kesishadi. Tengsizlik yechimi $x\in(-2;\,2)$ oraliq bo'lib, bu oraliqda parabola nuqtalari to'g'ri chiziq nuqtalaridan pastda bo'ladi.

Misol № 3: $x^2-4x\le 2x-9$ tengsizlikni grafik usulda eching.

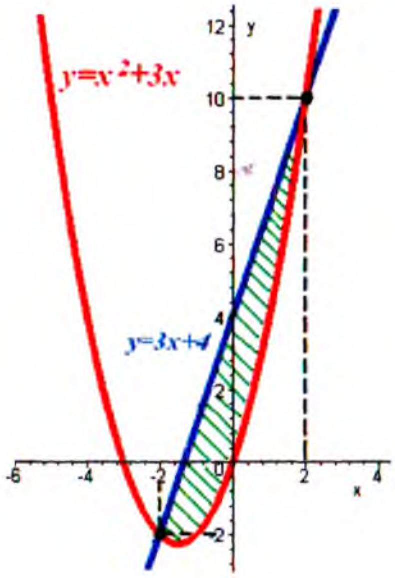
Yechish: Bu tenglamaning har ikkala tomonini ham $\begin{cases} y=x^2-4x \\ y=2x-9 \end{cases}$ funksiyalar ko'rinishiga keltirib, ularning grafigini qursak, 4.12.3-rasmdagi grafikka ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinib turibdiki, grafiklar faqat bitta $(3;\,-3)$ nuqtada urinadi. Parabola birorta ham to'g'ri chiziqdan pastda yotgan nuqtasi bo'lmagani uchun tengsizlik yechimi faqat ana shu $x=3$ urinish nuqtasi bo'ladi.

Misol № 4: $-2x^2+6x-4{,}5>0$ tengsizlikni grafik usulda eching.

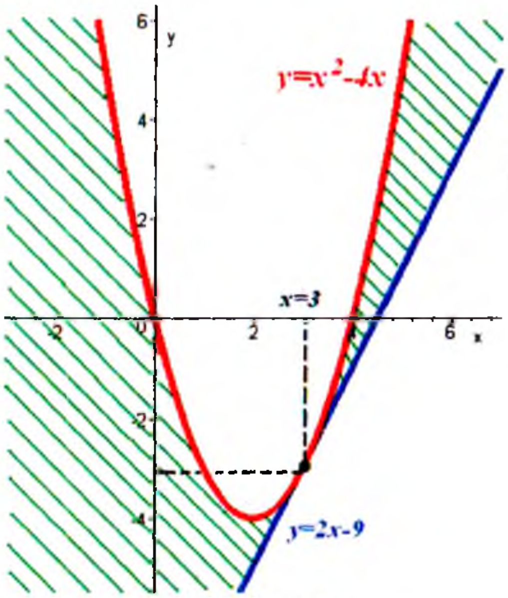
Yechish: Berilgan tengsizlikning yechimi $y=-2x^2+6x-4{,}5=-2(x-1{,}5)^2$ funksiyaning *Ox* o'qidan tepada yotgan oralig'idir (4.12.3-rasm). Rasmdan ko'rinib turibdiki, x ning barcha qiymatlarida funksiya grafigi *Ox* o'qidan pastda yotibdi. Shuning uchun yechim $x\in\otimes$ bo'ladi.



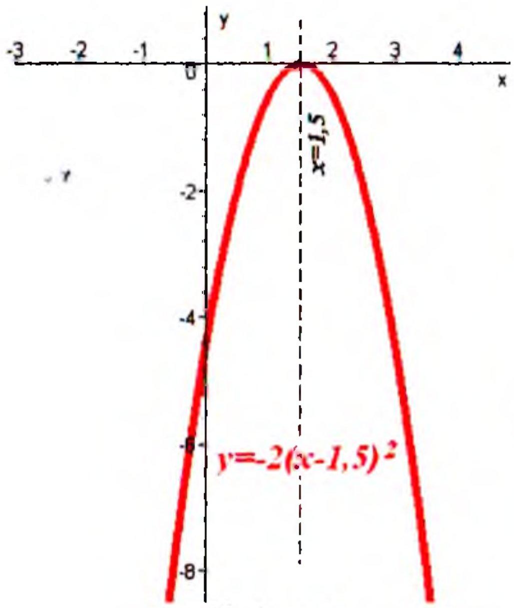
4.12.1-rasm



4.12.2-rasm



4.12.3-rasm



4.12.4-rasm

Agar ixtiyoriy tartibda $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...>0$ berilgan ko'phadli tengsizlikni $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...(x-x_n)>0$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratish mumkin bo'lsa, bunday tengsizlik ***oraliqlar usuli*** yordamida echiladi. Oraliqlar usuliga doir misollar yechish orqali bilimlarimizni mustahkamlaymiz.

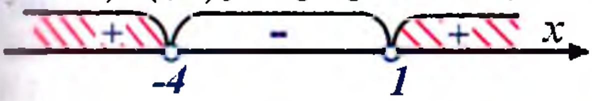
Misol № 5: $x(x+1)(x+2)(x+3)\le 24$ tengsizlikni eching.

Yechish: Berilgan tengsizlikni ketma-ket almashtirishlar natijasida $x(x+1)(x+2)(x+3)\le 24, \rightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)-24\le 0, \rightarrow (x^2+3x)^2+2(x^2+3x)-24\le 0, \rightarrow$ $\rightarrow (x^2+3x+6)(x^2+3x-4)\le 0, \rightarrow \left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right)(x+4)(x-1)\le 0$ kelib chiqadi. Bunda birinchi qavs faqat musbat qiymatlar qabul qilgani uchun bu ko'paytuvchi tengsizlik ishorasiga ta'sir etmaydi. Natijada, ikkinchi va uchinchi qavslar qoladi, ya'ni $(x+4)(x-1)\le 0$ bo'ladi. Buni oraliqlar usuli bo'yicha echib $x\in[-4;\ 1]$ javobga ega bo'lamiz (4.12.5-rasm).

Misol № 6: $(x^2+3x)^2>16$ tengsizlikni eching.

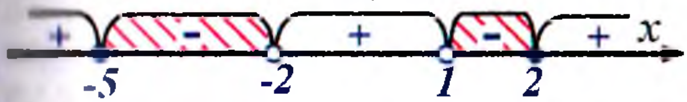
Yechish: Berilgan tengsizlikni almashtirishlar orqali $(x^2+3x)^2>16, \rightarrow (x^2+3x-4)(x^2+3x+4)>0, \rightarrow (x+4)(x-1)\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right)>0$ ko'rinishga keltiramiz.

Oxirgi qavs ko‘paytuvchi har doim musbat bo‘lgani uchun u tengsizlik ishorasiga ta’sir etmaydi. SHuning uchun dastlabki ikkita $(x+4)(x-1)>0$ ko‘paytuvchi qoladi. Buni oraliqlar usuli bo‘yicha echib $x\in(-\infty;\,-4)\cup(1;\,\infty)$ javobga ega bo‘lamiz (4.12.6-rasm).



4.12.5-rasm

4.12.6-rasm



4.12.7-rasm

4.12.8-rasm

Misol № 7: $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\le 0$ tengsizlikni eching.

Yechish: Berilgan tengsizlikni $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\le 0,\ \to\ \dfrac{(x+5)(x-2)}{(x+2)(x-1)}\le 0$ ko‘rinishga keltiramiz. Tengsizlikning har ikkala tarafini maxrajning kvadratiga ko‘paytirib, kasrdan xalos bo‘lamiz, ya’ni $\left.\dfrac{(x+5)(x-2)}{(x+2)(x-1)}\le 0\ \right|\cdot(x+2)^2(x-1)^2,\ \to\ (x+5)(x-2)(x+2)(x-1)\le 0$ bo‘ladi. Bunda maxraj nolga teng bo‘lmasligidan $x\ne-2,\ x\ne 1$ shartlarini kiritamiz. Hosil bo‘lgan $(x+5)(x-2)(x+2)(x-1)\le 0$ tengsizlikni oraliqlar usuli bo‘yicha echib $x\in[-5;\,-2)\cup(1;\,2]$ javobga ega bo‘lamiz (4.12.7-rasm).

Misol № 8: $\dfrac{x^2-7x-8}{x^2-64}\le 0$ tengsizlikni eching.

Yechish: Berilgan tengsizlikni ko‘paytuvchilarga ajratib, $\dfrac{x^2-7x-8}{x^2-64}\le 0,\ \dfrac{(x-8)(x+1)}{(x-8)(x+8)}\le 0$ ni hosil qilamiz. $x\ne 8$ degan shart bilan kasrning bir xil ko‘paytuvchilarini qisqartirib, $\dfrac{x+1}{x+8}\le 0$ ni hosil qiamiz. $x\ne-8$ degan shart bilan tengsizlikning har ikkala tomonini maxrajning kvadratiga ko‘paytirib $\left.\dfrac{x+1}{x+8}\le 0\ \right|\cdot(x+8)^2,\ \to\ (x+1)(x+8)\le 0$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Buni oraliqlar usuli bo‘yicha echib $x\in(-8;\,-1]$ javobga ega bo‘lamiz (4.12.8-rasm).

5-BOB: DARAJALI FUNKSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI. IRRATSIONAL TENGLAMA VA TENGSIZLIKLAR.

5.1-Mavzu: Butun ko'rsatkichli daraja va arifmetik ildizning xossalari. Sonli tengsizliklarni darajaga ko'tarish.

Natural ko'rsatkichli daraja va uning xossalari bilan tanishgan 1.9-mavzuda agar $a \neq 0$ va $n > m$ bo'lsa, darajalar nisbati uchun $a^n : a^m = a^{n-m}$ formula bilan tanishgan edik. Agar $n \leq m$ bo'lsa, $n-m$ daraja ko'rsatkich manfiy yoki nol bo'ladi. Bunda ham formula o'z kuchini saqlab qoladimi degan savol tug'iladi. Hisob-kitoblarga ko'ra darajalar nisbati formulasi nafaqat $n > m$ bo'lganda, balki $n \leq m$ bo'lganda ham bajarilar ekan.

Masalan, $n = 3, m = 5$ bo'lsa, bir tomondan $a^{n-m} = a^{3-5} = a^{-2}$ ga, boshqa tomondan esa $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^2}$ ga teng bo'ladi. Demak, bu mislodan $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ degan xulosa kelib chiqadi.

Agar $a \neq 0$ va $n \in N$ bo'lsa, u holda

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

bo'ladi.

Endi misol tarzida $n = 3, m = 3$ bo'lgan holni ko'rsak, bir tomondan $a^{n-m} = a^{3-3} = a^0$ ga, ikkinchi tomondan esa $a^n : a^m = \frac{a^n}{a^m} = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = 1$ ga teng bo'ladi. Demak, bu mislodan $a^0 = 1$ degan xulosa kelib chiqadi.

Agar $a \neq 0$ bo'lsa, u holda

$$\boxed{a^0 = 1}$$

bo'ladi.

Natural ko'rsatkichli darajalarning barcha xossalari istalgan butun ko'rsatkichli darajalar uchun ham to'g'ri bo'ladi. Boshqacha aytganda istalgan $a \neq 0$, $b \neq 0$ va $n \in Z$ sonlar uchun ushbu tengliklar o'rinlidir.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	4. $\left((a^n)^m\right)^k = a^{nmk}$
2. $a^n : a^m = a^{n-m}$	5. $(ab)^n = a^n b^n$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$	6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Biz 4.1-mavzuda istalgan nomanfiy $a \geq 0$ sonning arifmetik kvadrat ildizi va kvadrat ildizning xossalari bilan tanishgan edik. Endi ushbu mavzuda yuqori tartibli arifmetik ildiz va uning xossalari bilan tanishamiz.

$a \geq 0$ nomanfiy sonning $n \geq 2$ natural ko'rsatkichli arifmetik ildizi deb, n-darajasi a ga teng bo'lgan biror $b \geq 0$ nomanfiy songa aytiladi.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b, \quad bunda \ \ a = b^n}$$

a sonning n-darajali arifmetik ildizi $\sqrt[n]{a}$ deb belgilanadi. a son ildiz ostidagi ifoda deyiladi. Agar $n = 2$ bo'lsa, u holda 2 soni yozilmasdan $\sqrt[2]{a}$ o'rniga $\sqrt{a}$ yoziladi.

Arifmetik ildizning ta'rifidan $a \geq 0$ nomanfiy bo'lganda

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, \qquad \sqrt[n]{a^n} = a}$$

bo'lishi kelib chiqadi

Yuqoridagi formulalarda nomanfiy sondan istalgan tartibli $n \geq 2$ ildiz olganda yana nomanfiy son chiqishi aytib o'tildi. Agar manfiy sondan ildiz olinsa nima bo'ladi degan savol tug'iladi.

Manfiy sondan toq ildiz olish mumkin, bunda yana manfiy son chiqadi, ya'ni $a<0$, $n=2k+1$ bo'lganda $\sqrt[2k+1]{a}<0$ bo'ladi.

Manfiy sondan juft ildiz olinsa, haqiqiy son chiqmasdan, balki kompleks son chiqadi. Kompleks sonlar nazariyasi esa "Oliy matematika"da o'rganiladi.

Endi n-darajali arifmetik ildizning xossalarini sanab o'tamiz.

Agar $a \geq 0, b>0$ va n,m natural sonlar bo'lib, $n \geq 2, m \geq 2$ bo'lsa, u holda quyidagi tengliklar to'g'ri bo'ladi.

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n\cdot m]{a}$

Aytaylik, bizdan ushbu $\sqrt[5]{4^{15}}$ missolni hisoblash so'ralgan bo'lsin. Bunda $4^{15}=4^{3\cdot5}=\left(4^3\right)^5$ bo'lgani uchun berilgan arifmetik ildizni $\sqrt[5]{4^{15}}=\sqrt[5]{4^{3\cdot5}}=\sqrt[5]{\left(4^3\right)^5}=4^3=64$ deb olishimiz mumkin. Boshqa tomondan buni $\sqrt[5]{4^{15}}=4^{\frac{15}{5}}=4^3=64$ deb olsak ham o'sha natijaga ega bo'lamiz.

Musbat asosli natural ko'rsatkichli darajaning barcha xossalari musbat asosli istalgan ratsionalr ko'rsatkichli daraja uchun o'rinlidir.

Istalgan musbat $a>0, b>0$ asos va istalgan ratsional $p,q,t \in Q$ uchun ushbu tengliklar o'rinli bo'ladi:

1. $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$	4. $\left(\left(a^p\right)^q\right)^t=a^{pqt}$
2. $a^p:a^q=a^{p-q}$	5. $(ab)^p=a^pb^p$
3. $\left(a^p\right)^q=a^{pq}$	6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^p=\dfrac{a^p}{b^p}$

3.4-mavzuda har ikki tarafi ham musbat sonlar bo'lgan bir xil ishorali tengsizliklar ko'paytirilganda xuddi shu ishorali tengsizlik hosil bo'lishini ko'rgan edik. Bundan hadlari musbat sonlar bo'lgan tengsizlikni o'z-o'ziga ko'paytirish, ya'ni kvadratga oshirish, o'z-o'ziga uch marta ko'paytirish, ya'ni kubga oshirish va hokoza o'z-o'ziga n marta ko'paytirish, ya'ni natural n- darajaga ko'targanda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi degan xulosa kelib chiqadi.

Agar $a>b>0$ bo'lsa, u holda $a^n>b^n$ bo'ladi

Misol № 1: $\left(\dfrac{33}{5}\right)^3$ va $\left(\dfrac{20}{3}\right)^3$ sonlarini taqqoslang.

Yechish: Kasrlarni o'nli kasr shakliga keltiramiz. Bunda $\frac{33}{5}=6{,}6$ va $\frac{20}{3}=6{,}66666....$ bo'lib, ularning kublari esa $6{,}6^3=287{,}496$ va $6{,}66666....^3=296{,}296296...$ bo'ladi. Demak, ko'rinib turibdiki, $\frac{33}{5}<\frac{20}{3}$ va $\left(\frac{33}{5}\right)^3<\left(\frac{20}{3}\right)^3$ ekan.

Yuqoridagi formulani yanada umumlashtirib quyidagi ta'riflarni keltirish mumkin:

Hadlari musbat bo'lgan sonlarni istalgan musbat ratsional darajaga ko'targanda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi.

Agar $a>b>0, r>0$ bo'lsa, u holda $a^r>b^r$ bo'ladi

Hadlari musbat bo'lgan sonlarni istalgan manfiy ratsional darajaga ko'targanda tengsizlik ishorasi qarama-qarshisiga o'zgaradi.

$$\boxed{\text{Agar } a>b>0,\ r<0 \text{ bo‘lsa, u holda } a^r<b^r \text{ bo‘ladi}}$$

Bu erda: $r\in Q$ – ratsional son.

Misol № 2: $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^2}$ va $\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^2}$ sonlarini taqqoslang.

Yechish: Sonlarni shakl almashtirish orqali $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{5}}$ va $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)^{\frac{2}{5}}$ ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

Bunda $a=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$, $r=\frac{2}{5}=0{,}4>0$ va $a>b$ bo‘lgani uchun $\left(\frac{1}{6}\right)^{0,4}>\left(\frac{1}{12}\right)^{0,4}$ bo‘ladi.

5.2-Mavzu: Funksiyaning uzluksizligi va uzilish nuqtalari.

Funksiyalarning xossalarini o‘rganishda ularni uzluksizlikka tekshirish yoki uzilishga ega bo‘lsa uzilish nuqtalarini aniqlash juda muhim o‘rin tutadi. Ushbu mavzuda biz funksiyaning ana shu xossalar haqida so‘z yuritamiz.

Funksiyani uzluksizlikka quyidagi ikkita ta’rif bo‘yicha tekshiriladi:

1-ta’rif: Agar $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti funksiyaning $x=a$ dagi qiymatiga teng. ya’ni

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

bo‘lsa, u holda berilgan $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

2-ta’rif: Agar $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada aniqlangan bo‘lsa va argumentning cheksiz orttirmasiga funksiyaning cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya’ni

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0}$$

bo‘lsa, u holda berilgan $f(x)$ funksiya $x=a$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Endi funksiya uzluksizligini aniıılashga doir bir necha misol yechish orqali mavzuni mustahkamlaymiz.

Misol № 1: Ushbu $y=x^2-2$ funksiyani uzluksizligini tekshiring.

Yechish: Berilgan funksiya ixtiyoriy x_0 nuqtada $y_0=f(x_0)=x_0^2-2$ qiymatga, boshqa bir kichik $x=x_0+\Delta x$ orttirma olgan nuqtada esa $y=f(x)=f(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2-2=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-2$ qiymatni qa’bul qiladi. Bunda funksiya orttirmasi $\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-2-(x_0^2-2)=2x_0\Delta x+\Delta x^2$ bo‘ladi. 2-ta’rifga asosan, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[2x_0\Delta x+\Delta x^2\right]=0$ kelib chiqadi. Demak, berilgan funksiya butun sonlar o‘qida, ya’ni $x\in R$ da uzluksiz ekan.

Misol № 2: Ushbu $y=3x^2-2x$ funksiyani uzluksizligini tekshiring.

Yechish: Berilgan funksiya ixtiyoriy x_0 nuqtada $y_0=f(x_0)=3x_0^2-2x_0$ qiymatga, boshqa bir kichik $x=x_0+\Delta x$ orttirma olgan nuqtada esa $y=f(x)=f(x_0+\Delta x)=3(x_0+\Delta x)^2-2(x_0+\Delta x)=$ $=3x_0^2+6x_0\Delta x+\Delta x^2-2x_0-2\Delta x=3x_0^2-2x_0+(6x_0-2)\Delta x+\Delta x^2$ qiymatni qa’bul qiladi. Bunda funksiya orttirmasi $\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=3x_0^2-2x_0+(6x_0-2)\Delta x+\Delta x^2-(3x_0^2-2x_0)=$ $=(6x_0-2)\Delta x+\Delta x^2$ bo‘ladi. 2-ta’rifga asosan, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[(6x_0-2)\Delta x+\Delta x^2\right]=0$ kelib chiqadi. Demak, berilgan funksiya butun sonlar o‘qida, ya’ni $x\in R$ da uzluksiz ekan.

Agar $y=f(x)$ funksiya biror $x=a$ nuqtada uzilishga ega bo‘lsa, u holda uzilish xarakterini aniqlash uchun $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi chap limit $\left(\lim\limits_{x\to a-}\right)$ va o‘ng limit $\left(\lim\limits_{x\to a+}\right)$ larini topish kerak bo‘ladi.

Uzilish nuqtasining yaqin atrofida funksiya o‘zini tutish xarakteriga qarab uzilishning ikki turi mavjud.

I tur uzilish – uzilish nuqtasining o'ng va chap tomonlarida $\lim\limits_{x\to a-}$ va $\lim\limits_{x\to a+}$ chekli limitlar mavjud bo'ladigan uzilish.

II tur uzilish – uzilish nuqtasining o'ng va chap tomonlarida $\lim\limits_{x\to a-}$ va $\lim\limits_{x\to a+}$ limitlardan hech bo'lmaganda biri mavjud bo'lmaydi yoki cheksiz bo'ladi.

Misol № 3: Ushbu $y=\dfrac{x}{x-3}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va uning xarakterini aniqlang.

<u>Yechish:</u> Berilgan funksiya x ning 3dan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan. Bu $x=3$ nuqta funksiyaning yagona uzilish nuqtasidir. Uzilish xarakterini aniqlash uchun $x\to 3$ dagi chap va o'ng limitlarni aniqlaymiz. Bunda $\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{x}{x-3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{x}{x-3}=+\infty$ bo'ladi. Demak, $y=\dfrac{x}{x-3}$ funksiya $x=3$ nuqtada cheksiz uzilishga ega ekan, ya'ni $x=3$ nuqta – *II* tur uzilish nuqtasi ekan.

Misol № 4: Ushbu $y=\dfrac{1}{x^2-5x+4}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va uning xarakterini aniqlang.

<u>Yechish:</u> Oldingi misodagidek mulohaza yuritib, maxraj nolga aylanadigan $x=1$ va $x=4$ nuqtalari uzilish nuqtalari ekanini aniqlaymiz. Har bir nuqtada chap limit $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{1}{x^2-5x+4}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 4-}\dfrac{1}{x^2-5x+4}=-\infty$ va o'ng limit $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{1}{x^2-5x+4}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+}\dfrac{1}{x^2-5x+4}=+\infty$ ekanini aniqlaymiz. Demak, berilgan funksiya uchun $x=1$ va $x=4$ nuqtalari – *II* tur uzilish nuqtasi ekan.

Misol № 5: Ushbu $y=4^{\frac{1}{x}}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va uning xarakterini aniqlang.

<u>Yechish:</u> Funksiya x ning $x=0$ dan boshqa barcha qiymatlarida aniqlangan. Funksiyaning $x\to 0$dagi chap va o'ng limitlari $\lim\limits_{x\to -0}4^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to +0}4^{\frac{1}{x}}=+\infty$ bo'ladi. Demak, funksiya $x=0$ nuqtaga chap tomondan intilganda chekli limitga, o'ng tomondan intilganda esa cheksiz limitga ega bo'lgani uchun $x=0$ nuqta – *II* tur uzilish nuqtasi ekan.

Misol № 6: Ushbu $y=\dfrac{5}{4+3^{\frac{1}{x-2}}}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va uning xarakterini aniqlang.

<u>Yechish:</u> Bu misolda ham yagona uzilish nuqtasi – maxraj nolga aylanadigan $x=2$ nuqtasidir. Funksiyaning $x=2$ nuqtadagi chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz. Unga ko'ra $\lim\limits_{x\to 2-}\dfrac{5}{4+3^{\frac{1}{x-2}}}=1$, $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{5}{4+3^{\frac{1}{x-2}}}=0$ bo'ladi. Demak, $x=2$ nuqta – funksiyaning *I* tur uzilish nuqtasi bo'lar ekan.

5.3-Mavzu: Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi.

Funksiyaning xossalarini o'rganishda uning aniqlanish sohasi va qiymatlar sohasi alohida ahamiyatga ega. Biz hozir funksiyaning ana shu xossalari haqida to'xtalamiz.

Funksiyaning ***aniqlanish sohasi*** deb argument (x) ning qa'bul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamiga aytiladi. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ bilan belgilanadi.

Funksiyaning aniqlanish sohasini aniqlash uchun bir necha qoidalar mavjud bo'lib, funksiya qanchalik murakkab ko'rinishda bo'lmasin, ana shu qoidalarga amal qilinadi. Bu qoidalar quyidagilardan iborat:

1). Agar funksiyada juft ildiz qatnashsa, ildiz ostidagi ifoda nomanfiy deb ishlanadi.

$$\boxed{Agar\quad y=\sqrt[2n]{u}\ \ bo'lsa,\ \ u\geq 0\ \ deb\ \ ishlanadi}$$

2). Agar funksiyada kasr qatnashsa, kasrning maxraji noldan farqli deb ishlanadi.

$$\boxed{Agar\quad y=\frac{1}{u}\ \ bo'lsa,\ \ u\neq 0\ \ deb\ \ ishlanadi}$$

3). Agar funksiyada juft ildizli ifoda kasrning maxrajida kelsa, ildiz ostidagi ifodani musbat deb ishlanadi.

$$Agar \quad y=\frac{1}{\sqrt{u}} \quad bo'lsa, \; u>0 \quad deb \; ishlanadi$$

4). Agar funksiyada logarifm qatnashsa, logarifm ostidagi ifoda musbat deb, logarifm asosi esa musbat va *1* dan farqli deb ishlanadi.

$$Agar \quad y=\log_u \vartheta \; bo'lsa, \; \begin{cases} \begin{cases} u>0 \\ u\neq 1 \end{cases} & deb \; ishlanadi \\ \vartheta>0 \end{cases}$$

Bu erda: $U=U(x)$, $V=V(x)-x$ orqali berilgan turli funksiyalar. Logarifm va logarifmlarning xossalari haqida 12-bobda batafsil bilib olamiz. Shuni ham alohida eslatib o'tish kerakki, funksiya qanday turda va qanday ko'rinishda bo'lmasin, kasr maxraji nolga aylanadigan nuqtada har doim funksiya grafigi uzilishga uchraydi, kasr maxraji nolga aylanadigan nuqtadan funksiyaning vertikal asimptotasi o'tadi. ***Vertikal asimptota*** – bu funksiya grafigi cheksiz yaqinlashib borib, uni kesmaydigan to'g'ri chiziqdir.

Misol № 1: $y=\sqrt[4]{2x+6}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Juft ildiz ostidagi ifoda nomanfiy bo'lishi kerak. Unga ko'ra $2x+6\geq 0, \rightarrow x\geq -3, \; x\in[-3;\,\infty)$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=[-3;\,\infty)$ bo'ladi.

Misol № 2: $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Ildizli ifoda kasr maxrajida bo'lgani uchun maxrajni noldan farqli deb ishlaymiz. SHunga ko'ra $\dfrac{1}{x^2-5x+6}\neq 0, \rightarrow (x-2)(x-3)\neq 0, \rightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 3 \end{cases}$ bo'ladi. Demak, sonlar o'qidan *2* va *3* sonlarini chiqarib tashlar ekanmiz. berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(-\infty;\,2)\cup(2;\,3)\cup(3;\,\infty)$ bo'ladi.

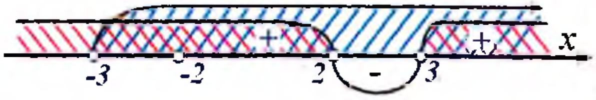
Misol № 3: $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Juft ildizli ifoda kasr maxrajida kelsa, ildiz ostidagi ifodani nomanfiy deb tishlanish kerak. Shunga ko'ra $x^2-5x+6>0,\; (x-2)(x-3)>0, \begin{cases} x<2 \\ x>3 \end{cases}$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=(-\infty;\,2)\cup(3;\,\infty)$ bo'ladi.

5.3.1-rasm

Misol № 4: $y=\log_{(x+3)}(x^2-5x+6)$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: Bunda logarifm ostidagi ifodani musbat deb, logarifm asosini esa musbat va 1 dan farqli deb ishlanadi. Shunga ko'ra



5.3.2-rasm

$$\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ \begin{cases} x+3>0 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x-2)\cdot(x-3)>0 \\ \begin{cases} x>-3 \\ x\neq -2 \end{cases} \end{cases}$$

bo'ladi. Bundan esa aniqlanish sohasi $D(f)=(-3;\,-2)\cup(-2;\,2)\cup(3;\,\infty)$ deb olinadi.

Misol № 5: $y=\sqrt{x+4}+\dfrac{1}{x}-\sqrt{6-x}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

Yechish: bu funksiya uch haddan iborat bo'lib, har bir hadning aniqlanish sohasi uchun qo'yiladigan shartlar kesishmasi berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini beradi. Shunga ko'ra

5.3.3-rasm

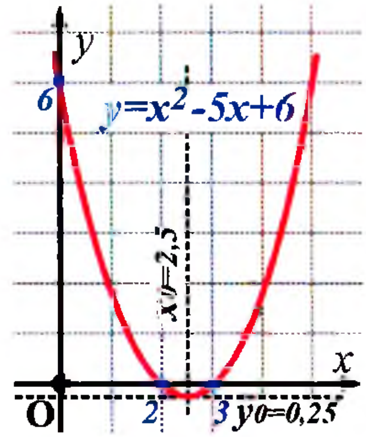
$$\begin{cases} x+4\geq 0 \\ 6-x\geq 0 \\ x\neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 6 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

bo'ladi. Bundan esa aniqlanish sohasi $D(f)=[-4;\ 0)\cup(0;\ 6]$ deb olinadi.

Funksiyaning ***qiymatlar sohasi*** deb oordinata y ning qa'bul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamiga aytiladi. Funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f)$ bilan belgilanadi.

Funksiyaning qiymatlar sohasini topish uchun funksiya grafigi chiziladi va grafikdan foydalanib topiladi.

Misol № 6: $y = x^2 - 5x + 6$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.



5.3.4-rasm

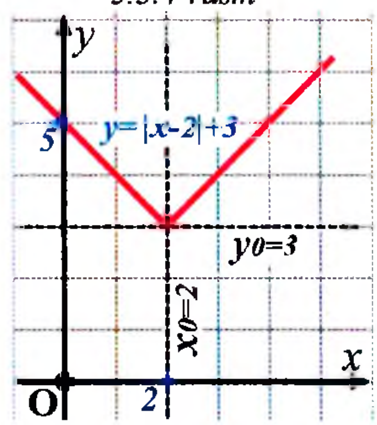
Yechish: Dastlab parabola uchi koordinatalari topiladi.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2\cdot 1} = 2{,}5$$

$$y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot 1\cdot 6-25}{4\cdot 1} = -0{,}25$$

Demak, funksiya grafigi shoxlari yuqoriga qaragan paraboladan iborat bo'lib, funksiyaning minimumi $y_{min} = y_0 = -0{,}25$ bo'lar ekan. Rasmdan ko'rinib turibdiki, grafik nuqtalari funksiya minimumidan yuqorida yotibdi. Shunga ko'ra funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f)=[y_0;\ \infty)=[-0{,}25;\ \infty)$ bo'ladi.

Misol № 7: y = | x – 2 | + 3 funksiyaning qiymatlar sohasini toping.



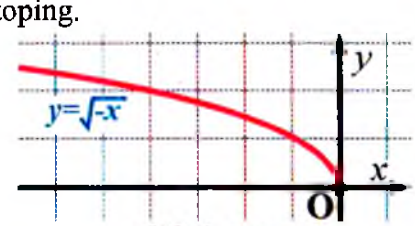
5.3.5-rasm

Yechish: Funksiyani moduldan yechish qoidasiga ko'ra 2 ta funksiyaga tarqatib olib, so'ng grafik quriladi.

$$y=|x-2|+3=\begin{cases} x-2+3=x+1, & agar\ x\geq 2\ bo'lsa \\ -(x-2)+3=-x+5, & agar\ x\geq 2\ bo'lsa \end{cases}$$

Demak, funksiya grafigi y = | x | funksiya grafigini $|x_0|=2$ birlik o'ngga va $|y_0|=3$ birlik yuqoriga siljitishlardan kelib chiqadi. Funksiya grafigi esa shoxlari yuqoriga qaragan siniq chiziqdan iborat. Funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f)=[y_0;\ \infty)=[-0{,}25;\ \infty)$ bo'ladi.

Misol № 8: $y=\sqrt{-x}$ funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohasini toping.



5.3.6-rasm

Yechish: Juft ildiz ostidagi funksiya nomanfiy ekanligidan $-x\geq 0,\ \rightarrow x\leq 0,\ \rightarrow\ D(f)=(-\infty;\ 0]$ bo'ladi.

Ildiz ostidan har doim nomanfiy son chiqqani uchun qiymatlar sohasi $E(f)=[0;\ \infty)$ bo'ladi.

5.4-Mavzu: Funksiyaning o'sishi va kamayishi

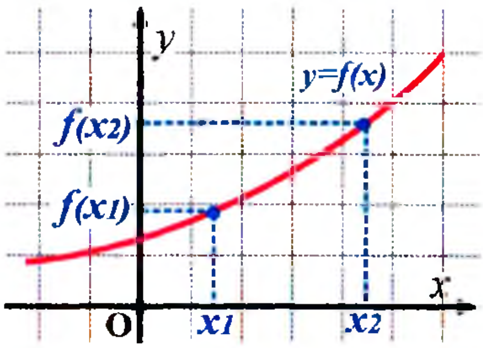
Funksiyaning xossalaridan yana bir uning o'sish va kamayish oraliqlaridir. Biz hozir funksiyaning ana shu xossalari haqida to'xtalamiz.

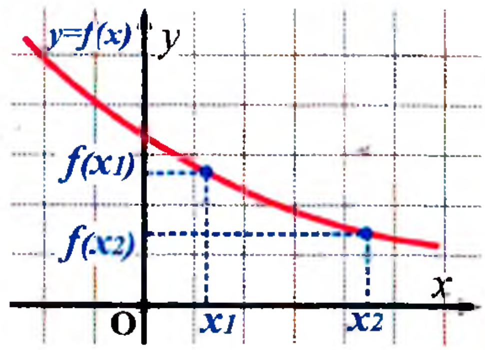
Agar x to'plamning biror aniqlangan oralig'ida kattaroq x qiymatga kattaroq y qiymat to'g'ri kelsa, berilgan oraliqda funksiya ***o'suvchi*** deyiladi.

$$\boxed{Agar\ \ x_2 > x_1\ \partial a\ \ f(x_2) > f(x_1)\ \ bo'lsa,\ \ o'suvchi\ \ bo'ladi}$$

Agar x to'plamning biror aniqlangan oralig'ida kattaroq x qiymatga kichikroq y qiymat to'g'ri kelsa, berilgan oraliqda funksiya kamayuvchi deyiladi.

$$\boxed{Agar\ \ x_2 > x_1\ \partial a\ \ f(x_2) < f(x_1)\ \ bo'lsa,\ \ kamayuvchi\ \ bo'ladi}$$



a)


b)

5.4.1-rasm

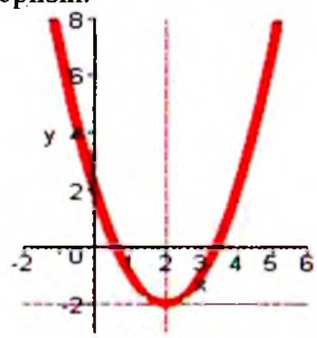
Funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlarini aniqlash uchun x erkli o‘zgaruvchiga mayda qadamlar bilan juda ko‘p qiymatlar berilib, so‘ng hisob-kitob asosida funksiyaning qiymatlari aniqlanadi va jadval quriladi.Shu jadval asosida funksiyaning aniq grafigi chiziladi. Grafikdan funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari aniqlanadi. Funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlariga doir bir necha misollar yechish orqali mavzuni mustahkamalaymiz.

Misol № 1: $y = x^2 - 4x + 2$ funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari topilsin.

Yechish: Funksiya grafigini quramiz. Parabola uchi koordinalarini aniqlaymiz.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\cdot 1} = 2, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot 1\cdot 2 - 16}{4\cdot 1} = -2.$$

Funksiya grafigi shoxlari tepaga qaragan paraboladan iborat. Parabola xossasidan foydalanamiz, ya’ni simmetriya chizig‘igacha kamayib, so‘ngra o‘sadi. SHunga ko‘ra funksiya $x \in (-\infty;\ 2]$ oraliqda kamayadi, $x \in [2;\ \infty)$ oraliqda esa o‘sadi.



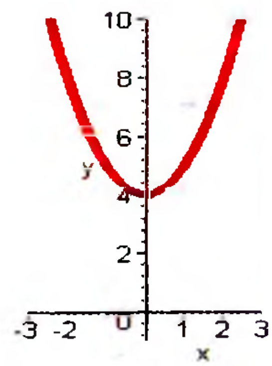
5.4.2-rasm

5.5-Mavzu: Funksiyaning juft-toqligi

Funksiyaning yana bir muhim xossasi uning juft yoki toq funksiya bo‘lishidir. Ushbu mavzuda biz shu haqda fikr yuritamiz.

Agar funksiyada $f(-x) = -f(x)$ shart bajarilsa, berilgan $f(x)$ funksiyani ***juft funksiya*** deyiladi.

Juft funksiyalar har doim Oy o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘ladi. Boshqacha aytganda, juft funksiyalarning Oy o‘qdan o‘ng tomonining grafigini qurib, o‘qqa nisbatan buklaganda chap tomonining grafigi hosil bo‘ladi.



5.5.1-rasm

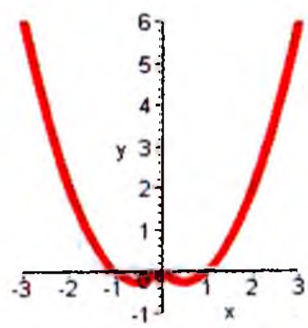
Endi juft funksiyaga doir bir necha misollar echaylik.

Misol № 1: $y = x^2 + 4$ qanday funksiya?

Yechish: Funksiyani juftlik sharti, ya’ni $f(-x) = f(x)$ shart bo‘yicha tekshiramiz. Unga ko‘ra $f(-x) = (-x)^2 + 4 = x^2 + 4 = f(x)$ bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya juft funksiya ekan.

Misol № 2: $y = x^2 - |x|$ qanday funksiya?

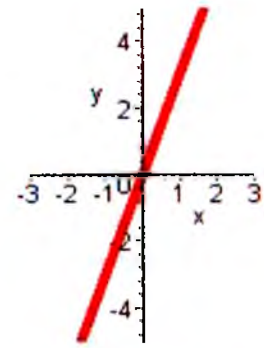
Yechish: Funksiyani juftlik sharti, ya’ni $f(-x) = f(x)$ shart bo‘yicha tekshiramiz. Unga ko‘ra $f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$ bo‘ladi. Demak, berilgan funksiya juft ekan.



5.5.2-rasm

Agar funksiyada $f(-x) = -f(x)$ shart bajarilsa, berilgan $f(x)$ funksiyani ***toq funksiya*** deyiladi.

Toq funksiyalar har doim koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Boshqacha aytganda, toq funksiyalarning Oy o'qdan o'ng tomonining grafigini qurib, Oy va Ox o'qlariga nisbatan buklashlardan so'ng chap tomonining grafigi hosil bo'ladi. Ko'p hollarda toq funksiyalar koordinatalar boshidan o'tadi.



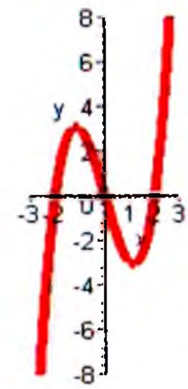
5.5.3-rasm

Misol № 3 $y = 3x$ funksiya qanday funksiya?

<u>Yechish:</u> Funksiyani toqlik sharti, ya'ni $f(-x) = -f(x)$ shart bo'yicha tekshiramiz. Unga ko'ra $f(-x) = 3\cdot(-x) = -3x = -f(x)$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya toq ekan.

Misol № 4: $y = x^3 - 4x$ funksiya qanday funksiya?

<u>Yechish:</u> Funksiyani toqlik sharti, ya'ni $f(-x) = -f(x)$ shart bo'yicha tekshiramiz. Unga ko'ra $f(-x) = (-x)^3 - 4\cdot(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -f(x)$ bo'ladi. Demak, berilgan funksiya toq funksiya ekan.



5.5.4-rasm

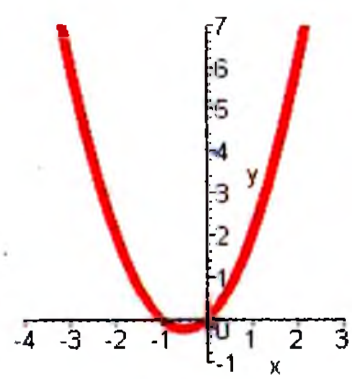
Agar funksiyada $\begin{cases} f(-x) \neq f(x) \\ f(-x) \neq -f(x) \end{cases}$ shart bajarilsa, berilgan $f(x)$ funksiya ***juft ham toq ham emas*** deyiladi, ya'ni bunda funksiyaning juftlik ham toqlik ham shartlari bajarilmaydi.

Juft ham toq ham bo'lmagan funksiyalar Oy o'qiga ham, koordinata boshiga ham nisbatan simmetrik emas. Boshqacha aytganda juft ham toq ham bo'lmagan funksiya grafigining o'ng tomon va chap tomonlar umuman bir-biriga o'xshamaydi.

Misol № 5: $y = x^2 + x$ qanday funksiya?

<u>Yechish:</u> Berilgan funksiyani juft-toqlikka tekshiramiz. Bunda $f(-x) = (-x)^2 - x = x^2 - x \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$ bo'ladi.

Na juft va na toqlik sharti bajarilmagan funksiyalarni toq ham juft ham bo'lmagan funksiya deb e'lon qilamiz. Demak berilgan funksiya juft ham, toq ham emas ekan.



5.5.5-rasm

Turli funksiyalar ustida amallar bajarilganda ular turli xossalarni namoyon qiladi.

Agar juft funksiyani (J) deb, toq funksiyani (T) deb, juft ham toq ham bo'lmagan funksiyani $(J.T.E)$ deb belgilasak, juft-toqlik uchun quyidagi xossalar o'rinlidir:

1.
$$(J)+(J)=(J)$$
$$(J)+(J)=(J)$$
$$(J)\cdot(J)=(J)$$
$$(J):(J)=(J)$$

2.
$$(T)+(T)=(T)$$
$$(T)-(T)=(T)$$
$$(T)\cdot(T)=(J)$$
$$(T):(T)=(J)$$

3.
$$(J)+(T)=(J.T.E)$$
$$(J)-(T)=(J.T.E)$$
$$(J)\cdot(T)=(T)$$
$$(J):(T)=(T)$$

Undan tashqari juft va toq funksiyalar ildizlar bo'yicha ushbu xossalarga ham ega:

1). juft funksiyaning ildizlari yig'indisi har doim nolga teng bo'ladi;

2). toq funksiyaning ildizlari yig'indisi har doim nolga teng bo'ladi;

3). juft ham toq ham bo'lmagan funksiyalarning ildizlari yig'indisi aksariyat hollarda noldan farqli bo'ladi.

5.6-Mavzu: Funksiyaning asimptotalari

Funksiya grafigi cheksiz yaqinlashib boradigan, lekin uchrashmaydigan to‘g‘ri chiziqqa asimptota chizig‘i deyiladi. Asimptota chiziqlari 3 xil bo‘lib ular quyidagilar:

1). Vertikal asimptota;

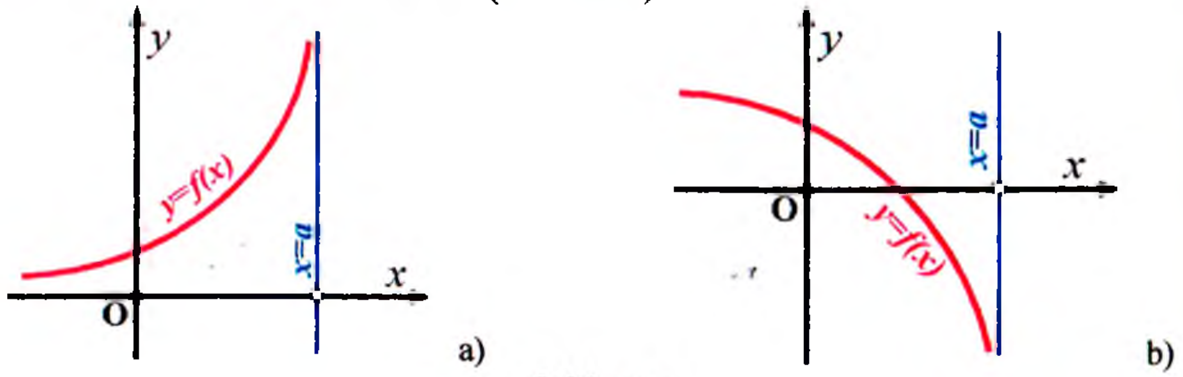
2). Gorizontal asimptota;

3) Og‘ma asimptota.

Asimptotalarning har bir turiga alohida-alohida to‘xtalib o‘tamiz va ularga doir misollar yechamiz. .

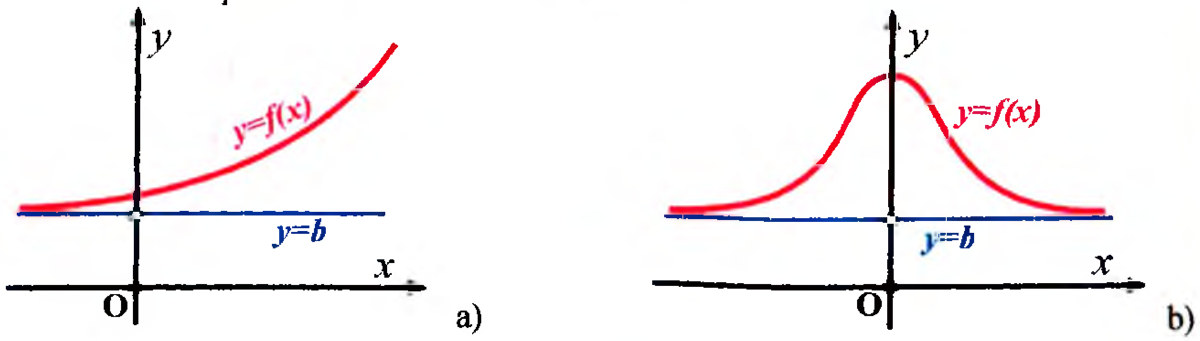
1). Vertikal asimptotalar.

Agar $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ bo‘lsa, u holda funksiya grafigi $x \to a$ da vertikal asimptotaga ega bo‘ladi. Bunda $x = a$ nuqta *II* tur uzilish nuqtasi bo‘ladi. Vertikal asimptota tenglamasi esa $x = a$ ko‘rinishida bo‘ladi (5.6.1-rasm).



5.6.1-rasm

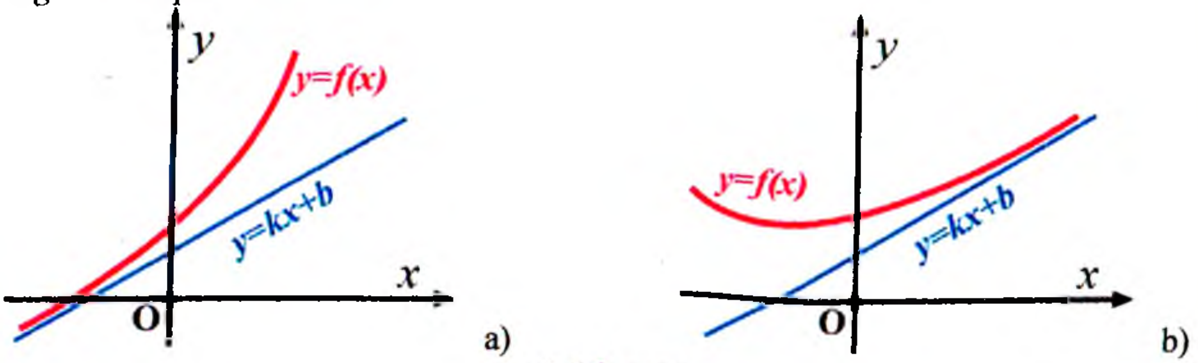
2). Gorizontal asimptotalar.



5.6.2-rasm

Agar $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = b_1$ yoki $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b_2$ bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya grafigi $x \to -\infty$ yoki $x \to +\infty$da gorizontal asimptotaga ega bo‘ladi. Bunda limitlarning biri chekli bo‘lganda funksiya grafigi bitta gorizontal asimtotaga ega bo‘ladi, limitlarning hech biri chekli bo‘lmaganda esa birorta ham gorizontal asimptotaga ega bo‘lmaydi. Gorizontal asimptota grafigi $y = b$ ko‘rinishida bo‘ladi (5.6.2-rasm).

3) Og‘ma asimptotalar.



5.6.3-rasm

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya grafigi $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lsin (5.6.3-rasm). Bunda berilgan funksiya va uning og'ma asimptotasi orasidagi farq kamayib, nolga intilib boradi.

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(kx+b)]=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx-b]=0$$

x ni qavsdan tashqariga chiqarib, ushbu ifodani hosil qilamiz:

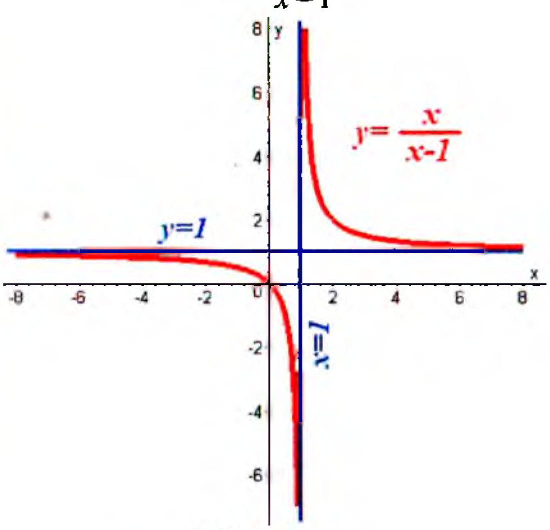
$$\lim_{x\to\pm\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{b}{x}=0$ bo'lgani uchun bu erdan k va b ni topish formulalarini hosil qilamiz.

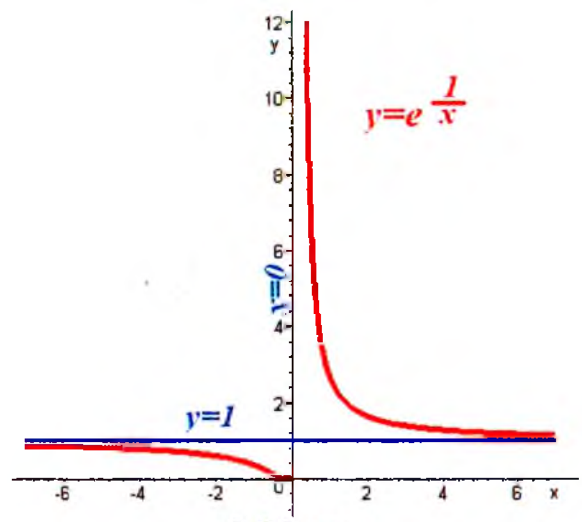
$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\quad \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=b}$$

Bunda $x\to-\infty$ va $x\to+\infty$ hollarni alohida-alohida qarab chiqish kerak bo'ladi.
Endi funksiya asimptotalarini aniqlashga doir bir necha misollar ishlaylik.

Misol № 1: Ushbu $y=\dfrac{x}{x-1}$ funksiyaning asimptotalarini aniqlang.



5.6.4-rasm



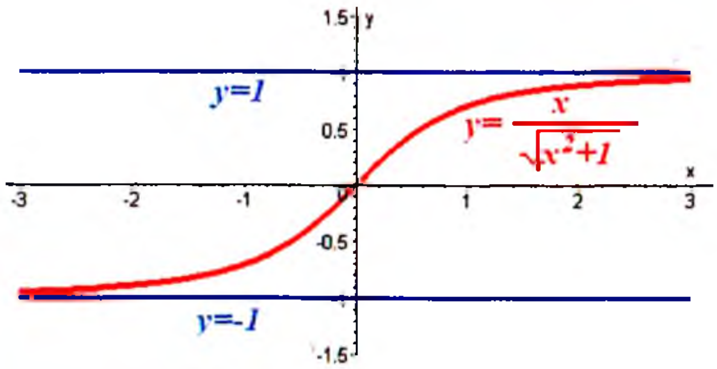
5.6.5-rasm

Yechish: Funksiya maxraj nolga aylanadigan $x=1$ nuqtada uzilishga uchraydi. Bu nuqtaga chap va o'ng tomondan cheksiz yaqinlashib kelganda funksiya turli ishorali qiymatlar qa'bul qiladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to1-}\frac{x}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+}\frac{x}{x-1}=+\infty$ bo'ladi. Demak, $x=1$ nuqta – II tur uzilish nuqtasi ekan. $x=1$ to'g'ri chiziq esa vertikal asimptota tenglamasidir. Endi gorizontal asimptotani topamiz. Bunda $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1$ hosil bo'ladi. Demak, $y=1$ to'g'ri chiziq gorizontal asimptota tenglamasi ekan. Asimptotalar 5.6.4-rasmda tasvirlangan.

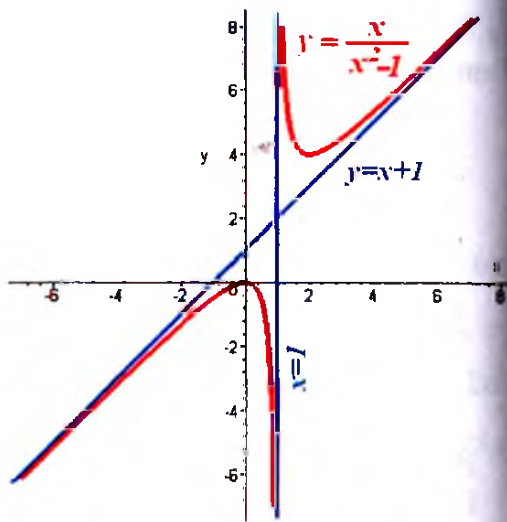
Misol № 2: Ushbu $y=e^{\frac{1}{x}}$ funksiyaning asimptotalarini aniqlang.

Yechish: Bunda $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$ bo'lgani uchun gorizontal asimptota $y=1$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. $\lim\limits_{x\to-0}e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to+0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ limitlardan vertikal asimptota $x=0$ to'g'ri chiziq ekanligi ayon bo'ladi. Asimptotalar 5.6.5-rasmda tasvirlangan.

Misol № 3: Ushbu $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ funksiyaning asimptotalarini aniqlang.



5.6.6-rasm



5.6.7-rasm

Yechish: Bunda avval gorizontal asimptotani topamiz.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+1/x^2}}=-1.$$

$x\to\infty$ da asimptota $y=1$ to‘g‘ri chiziqdan, $x\to-\infty$ da asimptota $y=-1$ to‘g‘ri chiziqdan iborat bo‘ladi. Funksiyada x ning birorta qiymatida ham maxraj nolga aylanmagani uchun berilgan funksiya vertikal asimptotaga ega emas. Gorizontal asimptota 5.6.6-rasmda tasvirlangan.

Misol № 4: Ushbu $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ funksiyaning asimptotalarini aniqlang.

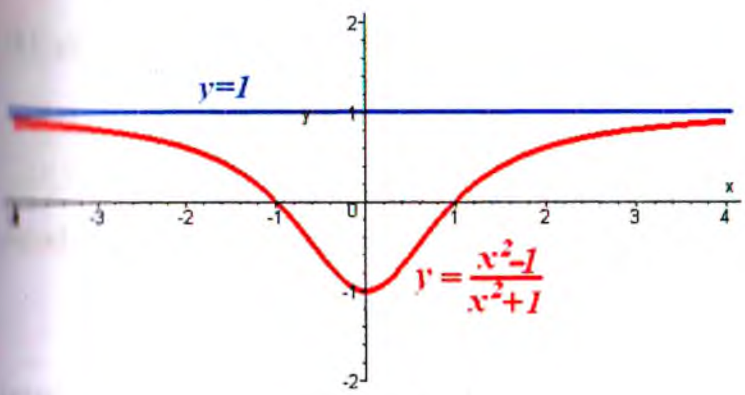
Yechish: Berilgan funksiya maxraji nolga aylanadigan $x=1$ nuqtada uzilishga uchraydi. Bu nuqtaga chap va o‘ng tomondan cheksiz yaqinlashib kelganda funksiya turli ishorali qiymatlar qa’bul qiladi, ya’ni $\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{x^2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{x^2}{x-1}=+\infty$ bo‘ladi. Demak, $x=1$ nuqta – *II* tur uzilish nuqtasi ekan. $x=1$ to‘g‘ri chiziq esa vertikal asimptota tenglamasidir. Endi og‘ma asimptotani topamiz:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=1,\ b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-1\cdot x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=$$

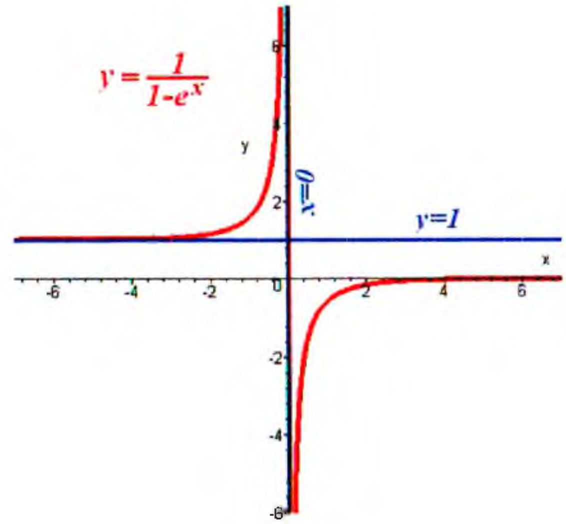
$=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)=1$. Shunday qilib, $k=1$, $b=1$ ga teng bo‘lib, $x\to\pm\infty$ da funksiya grafigi $y=x+1$ og‘ma asimptotaga intiladi. Funksiyaning vertikal va og‘ma asimptotalari 5.6.7-rasmda tasvirlangan.

Misol № 5: Ushbu $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ funksiyaning asimptotalarini aniqlang.

Yechish: Berilgan funksiyada x ning birorta qiymatida ham maxraj nolga aylanmagani uchun berilgan funksiya vertikal asimptotaga ega emas. Funksiyani $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-2}{x^2+1}=1-\dfrac{2}{x^2+1}$ deb o‘zgartirsak, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2+1}\right)=1$ bo‘ladi. Demak, funksiyaning gorizontal asimptotasi $y=1$ to‘g‘ri chiziq bo‘lar ekan. Asimptotalar 5.6.8-rasmda tasvirlangan.



5.6.8-rasm



5.6.9-rasm

Misol № 6: Ushbu $y=\dfrac{1}{1-e^x}$ funksiyaning asimptotalarini aniqlang.

Yechish: Berilgan funksiya maxraji nolga aylanadigan $x=0$ nuqtada uzilishga uchraydi. Bu nuqtaga chap va o'ng tomondan cheksiz yaqinlashib kelganda funksiya turli ishorali qiymatlar qa'bul qiladi, ya'ni $\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{1-e^x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{1-e^x}=-\infty$ bo'ladi. Demak, $x=1$ nuqta – *II* tur uzilish nuqtasi ekan. $x=0$ to'g'ri chiziq, ya'ni Oy o'qi esa vertikal asimptota tenglamasidir. Endi gorizontal asimptotani topamiz: Bunda $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1-\infty}=0$, $=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{1}{1-e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{1-0}=1$ bo'ladi. Demak, funksiyaning gorizontal asimptotasi ikkita bo'lib, $x\to-\infty$ da asimptota $y=1$ to'g'ri chiziqdan, $x\to+\infty$ da asimptota $y=0$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi. Asimptotalar 5.6.9-rasmda tasvirlangan.

5.7-Mavzu: Funksiyani to'la tekshirish shartlari

Biz ushbu bobda tanishib chiqqan funksiyaning barcha xossalarini bitta funksiyada ko'rib chiqish – funksiyani to'la tekshirish hisoblanadi. Umumiy holda funksiyani tekshirish shartlariga quyidagilar kiradi:

1.1. Funksiyaning aniqlanish sohasi;
1.2. Funksiyaning qiymatlar sohasi;
2.1. Funksiyaning juft-toqligi;
2.2. Funksiyaning davriyligi;
3.1. Funksiyaning o'sish oralig'i;
3.2. Funksiyaning kamayish oralig'i;
4.1. Funksiyaning musbat oralig'i;
4.2. Funksiyaning manfiy oralig'i;
5.1. Funksiyaning Ox o'qi bilan kesishish nuqtasi;
5.2. Funksiyaning Oy o'qi bilan kesishish nuqtasi;
6.1. Funksiyaning maksimum nuqtasi;
6.2. Funksiya maksimumi;
6.3. Funksiyaning minimum nuqtasi;
6.4. Funksiya minimumi.

Yuqorida sanab o'tilgan xossalardan tashqari qo'shimcha holda quyidagi xossalarni ham sanab o'tish mumkin:

7.1. Funksiyaning vertikal asimptotasi;
7.2. Funksiyaning gorizontal asimptotasi;
7.3. Funksiyaning og'ma asimptotasi;
8.1. Funksiyaning burilish nuqtasi;
8.2. Funksiyaning burilish nuqtadagi qiymati;

8.3. Funksiyaning botiqlik oraliqlari;

8.4. Funksiyaning qavariqlik oraliqlari;

Funksiyaning burilish nuqtasi hamda botiqlik va qavariqlik oraliqlari haqida ma'lumotlar 13-bobda batafsil beriladi.

5.8-Mavzu: $y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$ ko'rinishdagi funksiya

Biz bu funksiyani o'rganishda eng oddiy holdagi funksiyalardan boshlab umumiy holda berilgan funksiyaga qadar boramiz.

I). $y = \dfrac{1}{x}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.

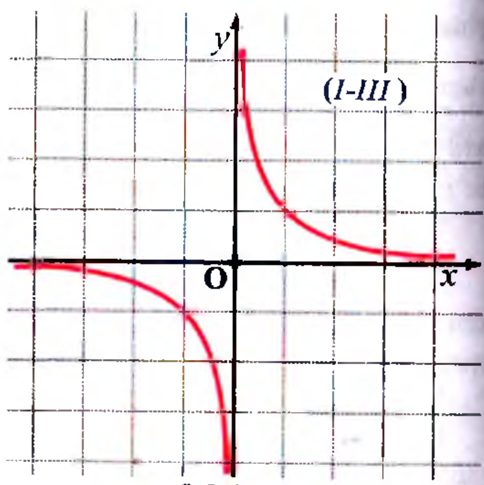
Bu funksiyaning grafigini qurish uchun jadval tuzamiz, so'ngra grafigini qurib xossalarini sanaymiz.

x	-5	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4	5	10
$y = \dfrac{1}{x}$	-0,2	-0,25	-0,5	-1	-2	2	1	0,5	0,25	0,2	0,1

Jadval asosida funksiya grafigini Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.8.1-rasmdagi egri chiziqqa ega bo'lamiz. Rasmdan ko'rinib turibdiki, funksiya grafigi koordinata o'qlarini kesmayapti, ya'ni koordinata o'qlari gorizontal va vertikal asimptota vazifasini bajaryapti. Ushbu grafikni bundan keyin ***giperbola*** deb ataymiz.

Grafikning xossalarini sanab o'tamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$;
2) funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$;
1) funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida kamayuvchi, ya'ni $x \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$ oraliqda kamayadi;
2) funksiya $x \in \otimes$ da o'sadi;
3) $x = 0$ chizig'i, ya'ni Oy o'qi funksiyaning vertikal asimptotasi;
4) $y = 0$ chizig'i ,ya'ni Ox o'qi funksiyaning vertikal asimptotasi;
5) toq funksiya, ya'ni funksiya grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik;

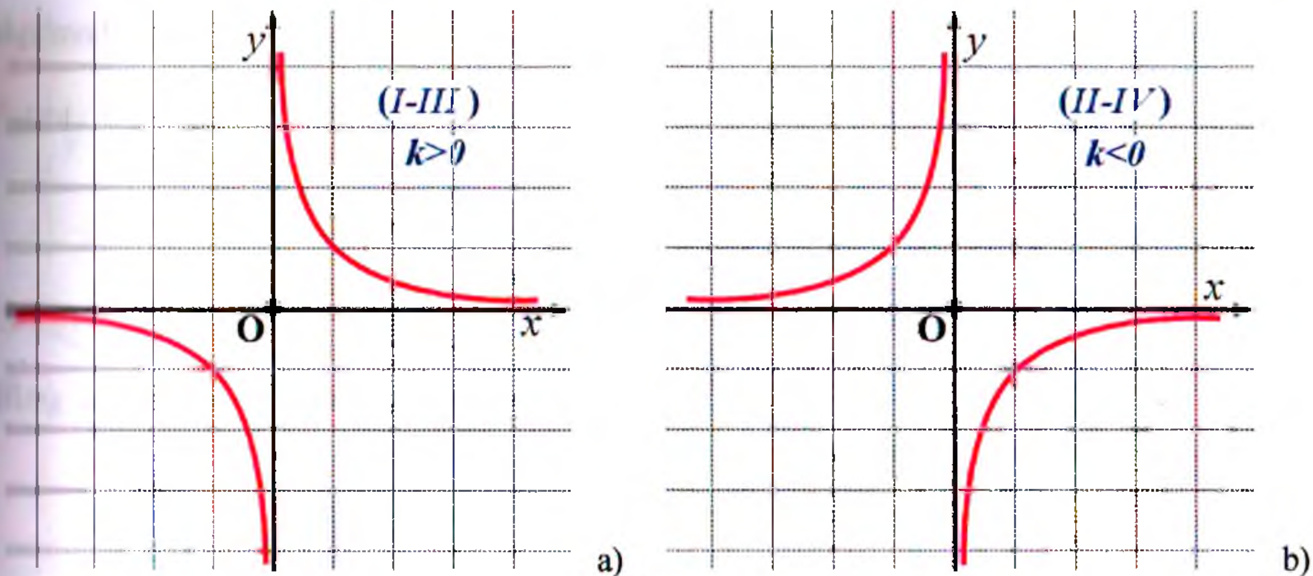


5.8.1-rasm

6) funksiya $x \in (-\infty;\ 0)$ oraliqda manfiy, $x \in (0;\ \infty)$ oraliqda musbat qiymatlar qabul qiladi;

II). $y = \dfrac{k}{x}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.

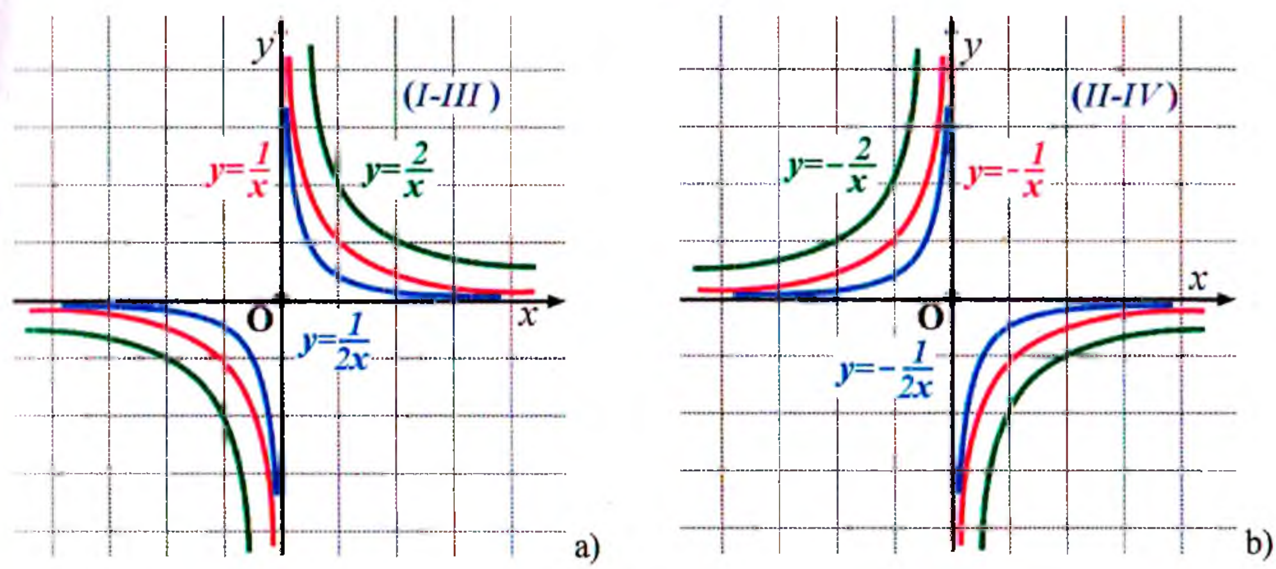
k koeffitsientning ishorasiga qarab grafik koordinata tekisligining turli choraklarida keladi. Agar $k > 0$ bo'lsa, grafik koordinata tekisligining toq choraklarida joylashadi (5.8.2-a,rasm). Agar $k < 0$ bo'lsa grafik koordinata tekisligining juft choraklarida joylashadi (5.8.2-b,rasm).



5.8.2-rasm

Tasavvur shakllanishi uchun $y=\frac{k}{x}$ funksiyaning grafigini k koeffitsientning bir nechta musbat qiymatlari uchun, aytaylik $k=1,\ k=2,\ k=\frac{1}{2}$ qiymatlar uchun bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.8.3-a,rasmdagi grafikka ega bo‘lamiz. Endi k koeffitsientning bir nechta manfiy qiymatlari uchun, aytaylik $k=-1,\ k=-2,\ k=-\frac{1}{2}$ qiymatlar uchun bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.8.3-b,rasmdagi grafikka ega bo‘lamiz.

Demak, k koeffitsient miqdor jihatidan qancha katta bo‘lsa, grafik koordinata o‘qlaridan shuncha uzoqlashib borar ekan.



5.8.3-rasm

YUqoridagi rasmdan foydalanib $y=k|x|$ funksiyaning xossalarni sanab o‘tamiz:

1) $k>0$ bo‘lganda grafik koordinata o‘qlarining toq choraklarida bo‘ladi, funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida kamayadi, ya’ni $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$ oraliqda kamayadi, o‘sish oralig‘i bo‘lmaydi, funksiya $x\in(-\infty;\,0)$ oraliqda manfiy qiymatlar va $x\in(0;\,\infty)$ oraliqda musbat qiymatlar qabul qiladi;
2) $k<0$ bo‘lganda grafik koordinata o‘qlarining juft choraklarida bo‘ladi, funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida o‘sadi, ya’ni $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$ oraliqda o‘sadi, kamayish

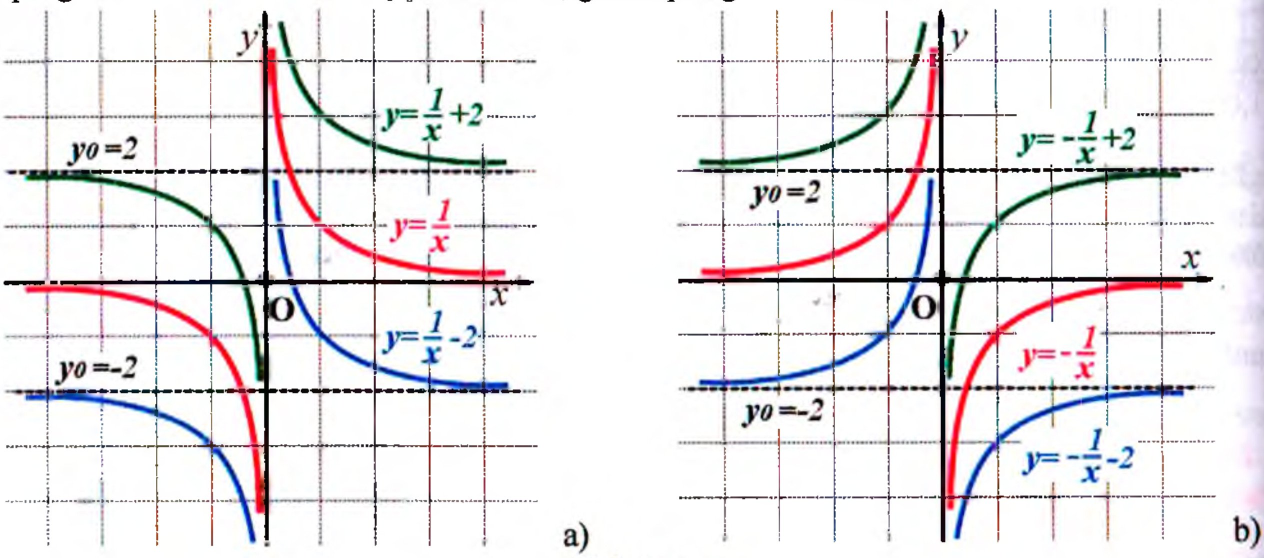
oralig'i bo'lmaydi, funksiya $x \in (-\infty; 0)$ oraliqda musbat qiymatlar va $x \in (0; \infty)$ oraliqda manfiy qiymatlar qabul qiladi;

3) funksiya grafigining $x = 0$ chizig'i vertikal asimptota chizig'i hamda $y = 0$ chizig'i gorizontal chizig'idir;

4) toq funksiya, ya'ni funksiya grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik.

__III).__ $y = \frac{k}{x} + y_0$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.

Biz yuqorida tanishgan $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigini Oy o'qi bo'ylab y_0 birlik yuqoriga ko'tarish yoki tushirishdan $y = \frac{k}{x} + y_0$ funksiya grafigi hosil bo'ladi. Agar $y_0 > 0$ bo'lsa, grafik yuqoriga ko'tariladi, aksincha $y_0 < 0$ bo'lsa, grafik pastga tushiriladi.



3.8.4-rasm

Tasavvur shakllanishi uchun misol tarzida $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x} + 2$ va $y = \frac{1}{x} - 2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.8.4-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

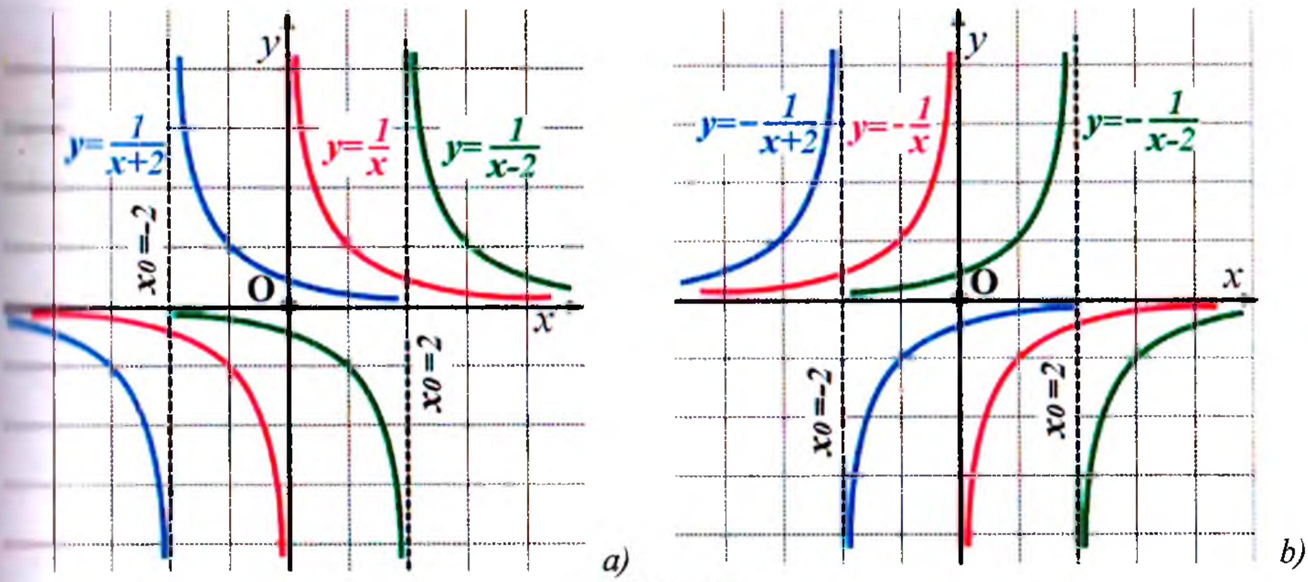
Endi xuddi yuqoridagi kabi $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x} + 2$ va $y = -\frac{1}{x} - 2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.8.4-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

Demak, y=k/x funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab y_0 birlikka siljitish, ya'ni tepaga ko'tarish yoki pastga tushirish natijasida y= k/x+y_0 funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.

__IV).__ $y = \frac{k}{x - x_0}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.

Biz yuqorida tanishgan $y = \frac{k}{x}$ funksiyaning grafigini Ox o'qi bo'ylab x_0 birlik chapga yoki o'ngga surishdan $y = \frac{k}{x - x_0}$ funksiya grafigi hosil bo'ladi. Agar $x_0 > 0$ bo'lsa, grafik o'ngga suriladi, aksincha $x_0 < 0$ bo'lsa, grafik chapga suriladi.

Tasavvur shakllanishi uchun misol tarzida $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x-2}$ va $y = \frac{1}{x+2}$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.8.5-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.



5.8.5-rasm

Endi xuddi yuqoridagi kabi $y=-\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x-2}$ va $y=-\frac{1}{x+2}$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.8.5-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

Demak, y=k/x funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab x_0 birlikka siljitish, ya'ni o'ngga yoki chapga surish natijasida y= k/(x-x_0) funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.

Biz funksiya grafigini faqat bitta o'q bo'ylab, ya'ni *Ox* o'qi bo'ylab yoki *Oy* o'qi bo'ylab surishni o'rgandik. Endi grafikni bir vaqtda ikkala o'q bo'ylab suriladigan eng umumiy hol bilan tanishamiz.

<u>*V).*</u> $y=\frac{k}{x-x_0}+y_0$ *ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.*

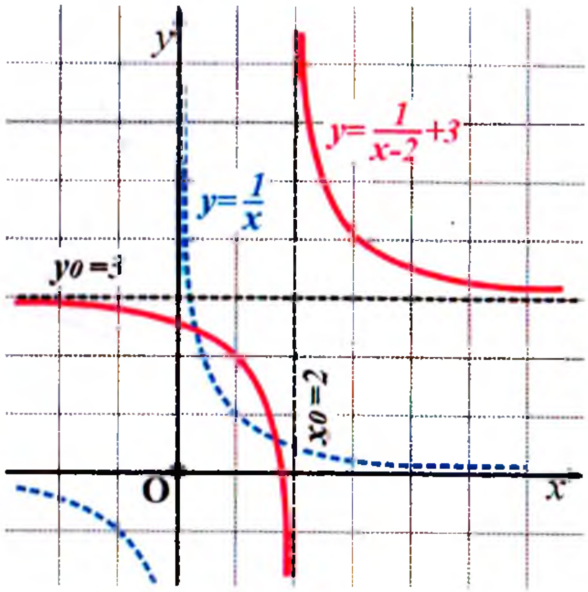
Bir vaqtda *Ox* va *Oy* o'qlari bo'ylab siljitishdan hosil qilinadigan funksiya grafigiga doir misollar ko'raylik.

Misol № 1: $y=\frac{1}{x-2}+3$ funksiya grafigini quring.

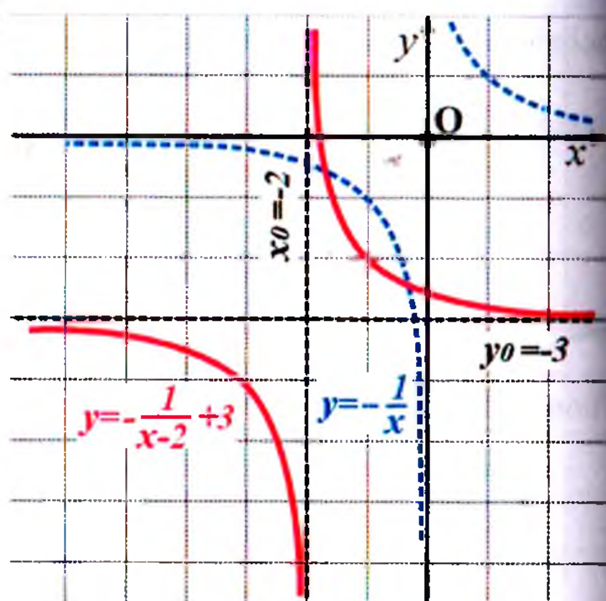
<u>Yechish:</u> Biz shu paytgacha $y=\frac{1}{x-2}$ funksiya grafigini $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigini *Ox* o'qi bo'ylab $x_0=2$ birlik o'ngga surish natijasida qurilishini va $y=\frac{1}{x}+3$ funksiya grafigini esa $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigini *Oy* o'qi bo'ylab $y_0=3$ birlik yuqoriga ko'tarish natijasida qurilishini ko'rgan edik. Hozirgi $y=\frac{1}{x-2}+3$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigini *Ox* o'qi bo'ylab $x_0=2$ birlik o'ngga hamda *Oy* o'qi bo'ylab $y_0=3$ birlik yuqoriga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (5.8.6-rasm).

Misol № 2: $y=-\frac{1}{x+2}-3$ funksiya grafigini quring.

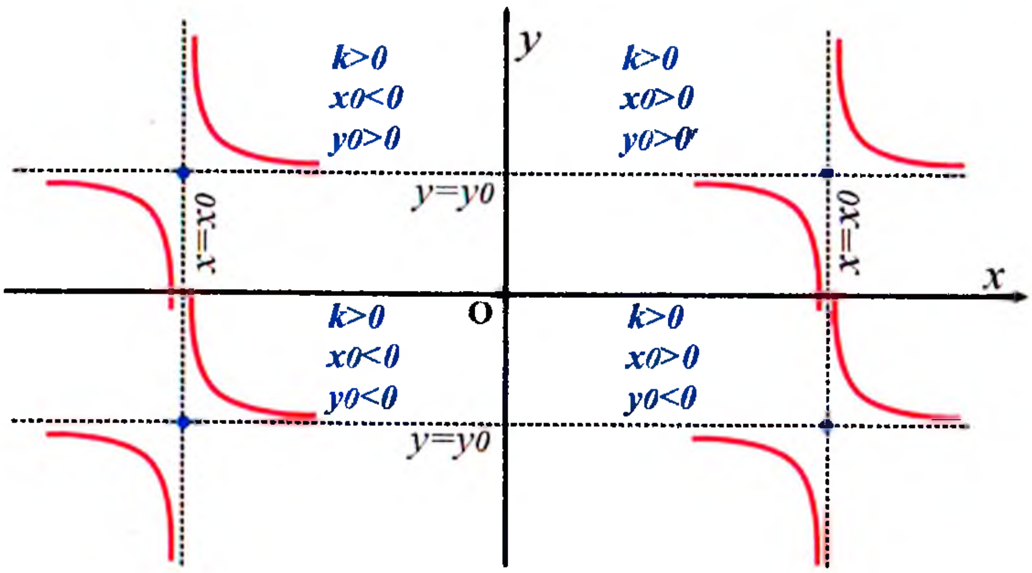
<u>Yechish:</u> Biz shu paytgacha $y=-\frac{1}{x+2}$ funksiya grafigini $y=-\frac{1}{x}$ funksiya grafigini *Ox* o'qi bo'ylab $x_0=-2$ birlik chapga surish natijasida qurilishini va $y=-\frac{1}{x}-3$ funksiya grafigini esa $y=-\frac{1}{x}$ funksiya grafigini *Oy* o'qi bo'ylab $y_0=-3$ birlik pastga tushirish natijasida qurilishini ko'rgan edik. Hozirgi $y=-\frac{1}{x+2}-3$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y=-\frac{1}{x}$ funksiya grafigini *Ox* o'qi bo'ylab $x_0=-2$ birlik chapga hamda *Oy* o'qi bo'ylab $y_0=-3$ birlik pastga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (5.8.7-rasm).



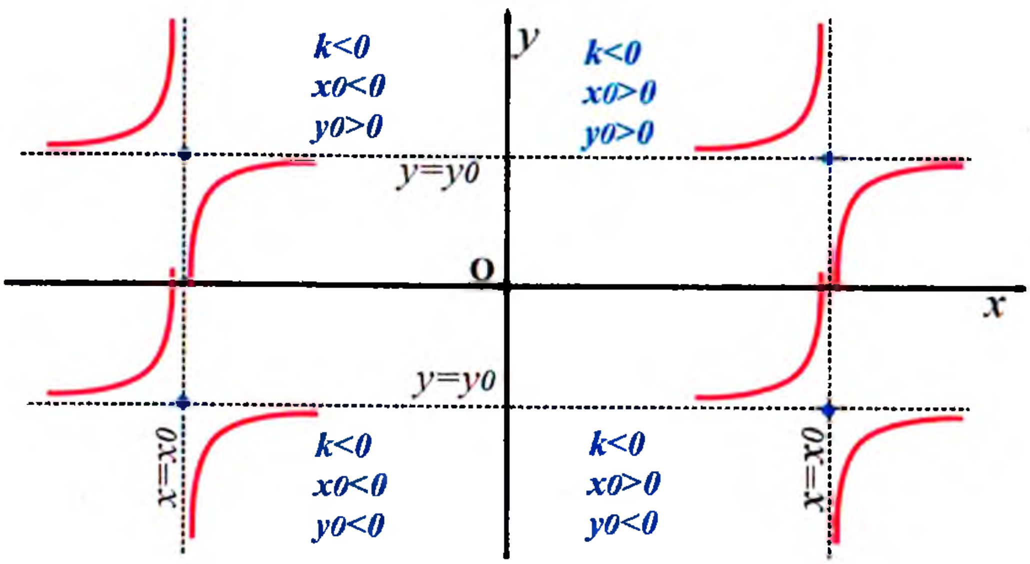
5.8.6-rasm



5.8.7-rasm



5.8.8-rasm



5.8.9-rasm

$y=\frac{k}{x}$ funksiya grafigini koordinata o'qlari bo'yicha x_0 va y_0 birlikka surish natijasida $y=\frac{k}{x-x_0}+y_0$ funksiya grafigi hosil qilinadi. x_0 va y_0 kattaliklarning ishoralariga qarab turli shakldagi chizmalarga ega bo'lamiz (5.8.8- va 5.8.9-rasmlar):

$y=\frac{k}{x-x_0}+y_0$ ko'rinishdagi funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) $k>0$ bo'lganda funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida kamayadi, ya'ni $x\in(-\infty;\,x_0)\cup(x_0\,;\,\infty)$ oraliqda kamayadi, o'sish oralig'i bo'lmaydi;

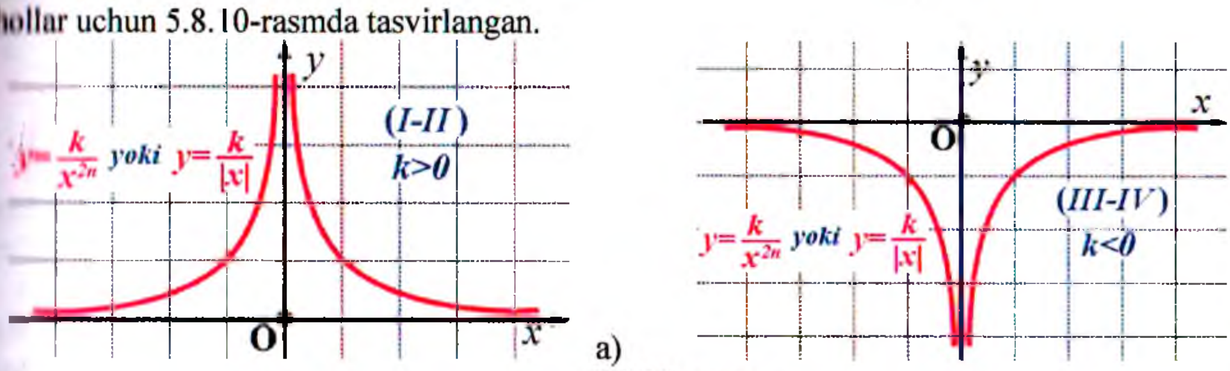
2) $k<0$ bo'lganda funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida o'sadi, ya'ni $x\in(-\infty;\,x_0)\cup(x_0\,;\,\infty)$ oraliqda o'sadi, kamayish oralig'i bo'lmaydi;

3) funksiya grafigining $x=x_0$ chizig'i vertikal asimptota chizig'i hamda $y=y_0$ chizig'i gorizontal asimptota chizig'idir;

VD. $y=\frac{k}{|x-x_0|}+y_0$, $y=\frac{k}{(x-x_0)^{2n}}+y_0$, $y=\frac{k}{(x-x_0)^{2n-1}}+y_0$ *ko'rinishdagi funksiyalarning grafiklari.*

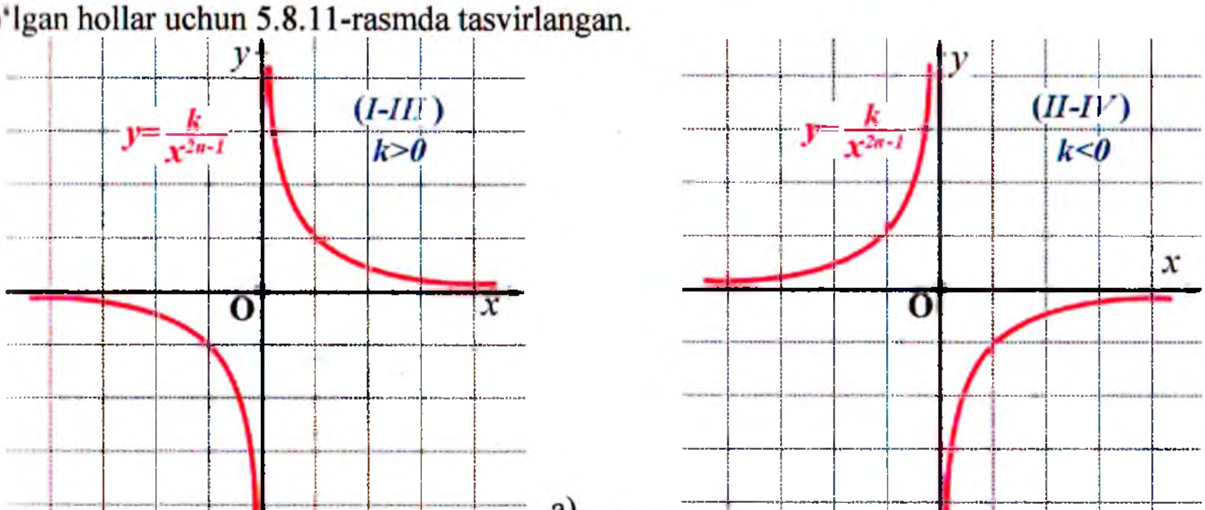
Bu funksiyalarning grafiklari ham $y=\frac{1}{|x|}$, $y=\frac{1}{x^{2n}}$, $y=\frac{1}{x^{2n-1}}$ funksiyalarning shablon grafiklarini koordinata o'qlari bo'ylab parallel ko'chirishlardan hosil qilinadi. SHulardan ba'zilarining grafiklarini misol sifatida tasvirlaymiz.

$y=\frac{k}{|x|}$ va $y=\frac{1}{x^{2n}}$ funksiyalarning grafiklari o'xshash bo'lib, ular $k>0$ va $k<0$ bo'lgan hollar uchun 5.8.10-rasmda tasvirlangan.



5.8.10-rasm

$y=\frac{1}{x^{2n-1}}$ funksiyaning grafigi $y=\frac{1}{x}$ funksiya grafigiga o'xshash bo'lib, ular $k>0$ va $k<0$ bo'lgan hollar uchun 5.8.11-rasmda tasvirlangan.



5.8.11-rasm

5.9-Mavzu: $y = k\sqrt{x-x_0} + y_0$ ko‘rinishdagi funksiya

Biz bu funksiyani o‘rganishda eng oddiy holdagi funksiyalardan boshlab umumiy holda berilgan funksiyaga qadar boramiz.

__I).__ $y=\sqrt{x}$ ko‘rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.

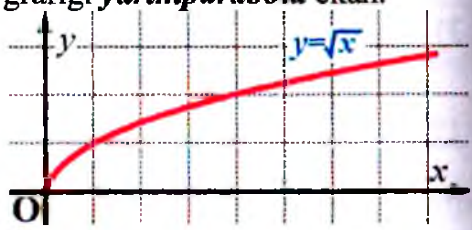
Bu funksiyaning grafigini qurish uchun jadval tuzamiz, so‘ngra grafigini qurib xossalarini sanaymiz.

x	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
$y=\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Jadval asosida funksiya grafigini Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.9.1-rasmdagi egri chiziqqa ega bo‘lamiz. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, funksiya grafigi ***yarimparabola*** ekan.

Grafikning asosiy xossalarini sanab o‘tamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=[0;\ \infty)$;
2) funksiyaning qiymatlar sohasi $E(f)=[0;\ \infty)$;
3) funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida o‘suvchi, ya’ni $x\in[0;\ \infty)$ oraliqda o‘sadi;

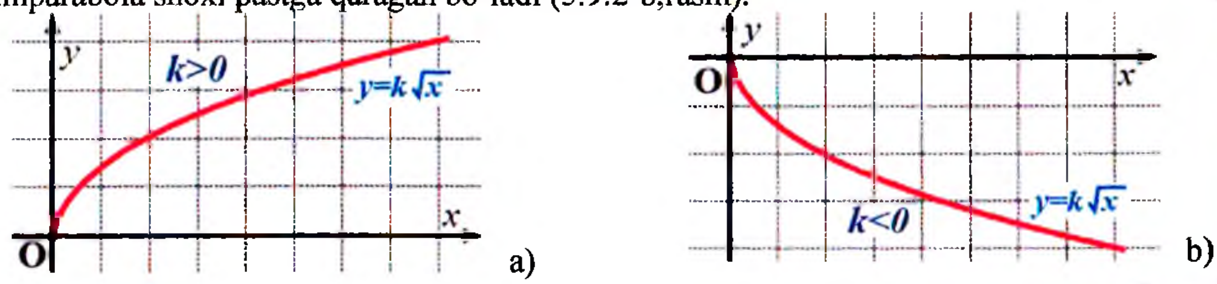


5.9.1-rasm

4) funksiya $x\in\otimes$ da kamayadi;
5) funksiya $x\in[0;\ \infty)$ oraliqda nomanfiy qiymatlar qabul qiladi;

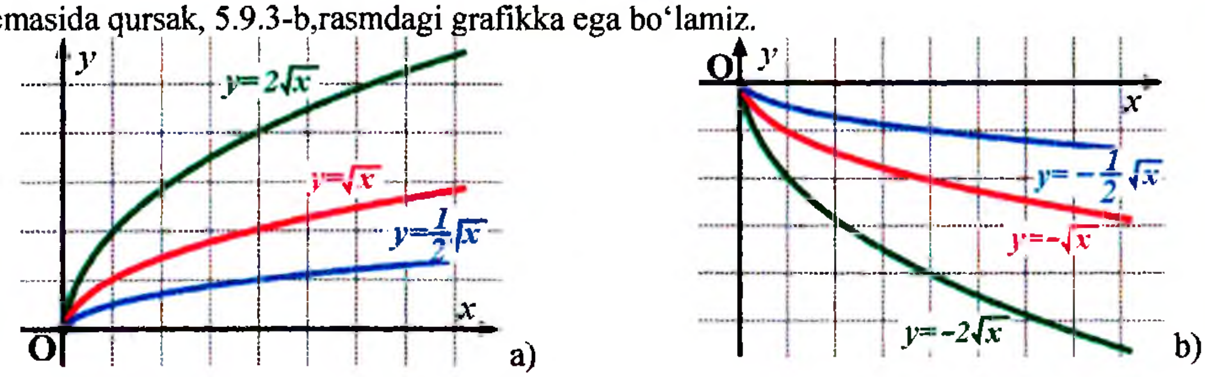
__II).__ $y=k\sqrt{x}$ funksiyaning grafigi va xossalari.

k koeffitsientning ishorasiga qarab yarimparabola shoxi tepaga yoki pastga qargan bo‘ladi. Agar $k>0$ bo‘lsa, yarimparabola shoxi tepaga qaragan bo‘ladi (5.9.2-a,rasm). Agar $k<0$ bo‘lsa, yarimparabola shoxi pastga qaragan bo‘ladi (5.9.2-b,rasm).



5.9.2-rasm

Tasavvur shakllanishi uchun $y=k\sqrt{x}$ funksiyaning grafigini k koeffitsientning bir nechta musbat qiymatlari uchun, aytaylik $k=1,\ k=2,\ k=\frac{1}{2}$ qiymatlar uchun bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.9.3-a,rasmdagi grafikka ega bo‘lamiz. Endi k koeffitsientning bir nechta manfiy qiymatlari uchun, aytaylik $k=-1,\ k=-2,\ k=-\frac{1}{2}$ qiymatlar uchun bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.9.3-b,rasmdagi grafikka ega bo‘lamiz.



5.9.3-rasm

Demak, k koeffitsient miqdor jihatidan qancha katta bo‘lsa, yarimparabola shoxi shuncha yoyilib borar ekan.

Yuqoridagi rasmdan foydalanib, $y = k\sqrt{x}$ funksiyaning asosiy xossalarni sanab o'tamiz:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=[0;\ \infty)$;

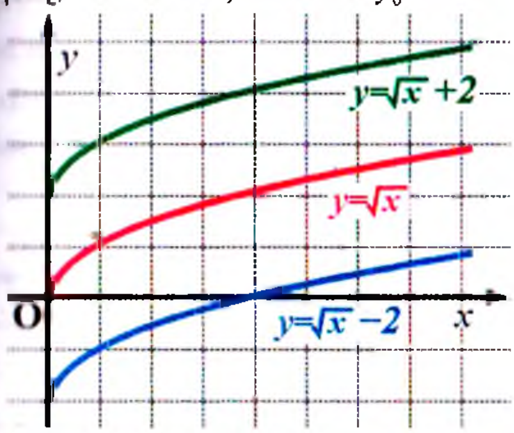
2) funksiyaning qiymatlar sohasi $k>0$ bo'lganda $E(f)=[0;\ \infty)$, $k>0$ bo'lganda $E(f)=(-\infty;\ 0]$;

3) $k>0$ bo'lganda grafik koordinata o'qlarining I choragida bo'ladi, funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida o'sadi, ya'ni $x\in[0;\ \infty)$ oraliqda o'sadi, kamayish oralig'i bo'lmaydi, funksiya faqat nomanfiy qiymatlar qabul qiladi;

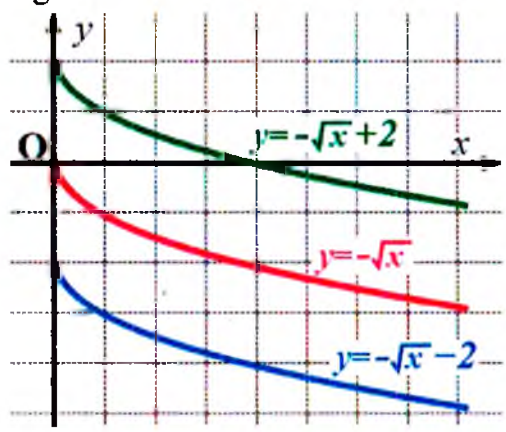
4) $k<0$ bo'lganda grafik koordinata o'qlarining IV choragida bo'ladi, funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida kamayadi, ya'ni $x\in[0;\ \infty)$ oraliqda kamayadi, o'sish oralig'i bo'lmaydi, funksiya nomusbat qiymatlar qiymatlar qabul qiladi;

III). $y=k\sqrt{x}+y_0$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.

Biz yuqorida tanishgan $y=k\sqrt{x}$ funksiyaning grafigini Oy o'qi bo'ylab y_0 birlik yuqoriga ko'tarish yoki tushirishdan $y=k\sqrt{x}+y_0$ funksiya grafigi hosil bo'ladi. Agar $y_0>0$ bo'lsa, grafik yuqoriga ko'tariladi, aksincha $y_0<0$ bo'lsa, grafik pastga tushiriladi.



a)



b)

5.9.4-rasm

Tasavvur shakllanishi uchun misol tarzida $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+2$ va $y=\sqrt{x}-2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.9.4-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

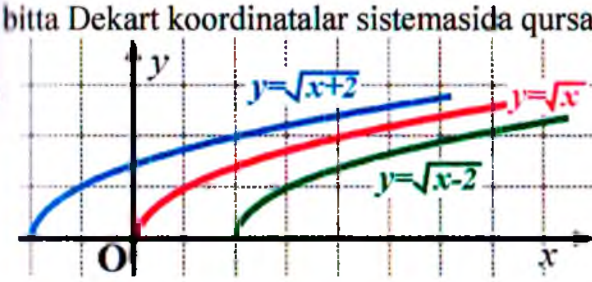
Endi xuddi yuqoridagi kabi $y=-\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}+2$ va $y=-\sqrt{x}-2$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.9.4-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

Demak, $y=k\sqrt{x}$ funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab y_0 birlikka siljitish, ya'ni tepaga ko'tarish yoki pastga tushirish natijasida $y=k\sqrt{x}+y_0$ funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.

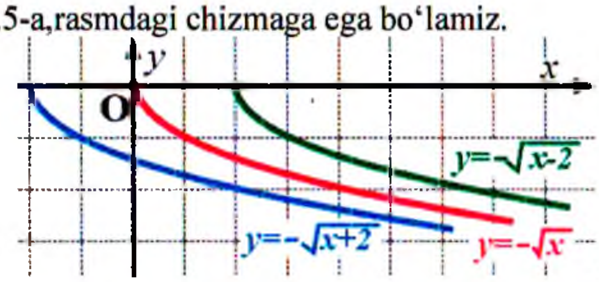
IV). $y=k\sqrt{x-x_0}$ ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.

Biz yuqorida tanishgan $y=k\sqrt{x}$ funksiyaning grafigini Ox o'qi bo'ylab x_0 birlik chapga yoki o'ngga surishdan $y=k\sqrt{x-x_0}$ funksiya grafigi hosil bo'ladi. Agar $x_0>0$ bo'lsa, grafik o'ngga suriladi, aksincha $x_0<0$ bo'lsa, grafik chapga suriladi.

Tasavvur shakllanishi uchun misol tarzida $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x-2}$ va $y=\sqrt{x+2}$ funksiyalar grafiklarini bitta Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.9.5-a,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.



a)



b)

5.9.5-rasm

Endi xuddi yuqoridagi kabi $y=-\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x-2}$ va $y=-\sqrt{x+2}$ funksiyalar grafiklarini birga Dekart koordinatalar sistemasida qursak, 5.9.5-b,rasmdagi chizmaga ega bo'lamiz.

Demak, $y=k\sqrt{x}$ ***funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab*** x_0 ***birlikka siljitish, ya'ni o'ngga yoki chapga surish natijasida*** $y=k\sqrt{x-x_0}$ ***funksiya grafigini hosil qilish mumkin ekan.***

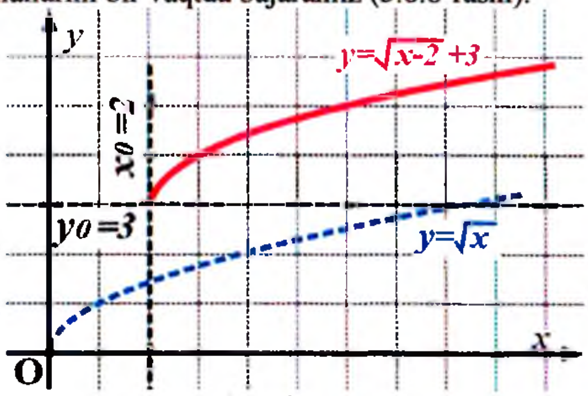
Biz funksiya grafigini faqat bitta o'q bo'ylab, ya'ni Ox o'qi bo'ylab yoki Oy o'qi bo'ylab surishni o'rgandik. Endi grafikni bir vaqtda ikkala o'q bo'ylab suriladigan eng umumiy hol bilan tanishamiz.

V). $y=k\sqrt{x-x_0}+y_0$ *ko'rinishdagi funksiyaning grafigi va xossalari.*

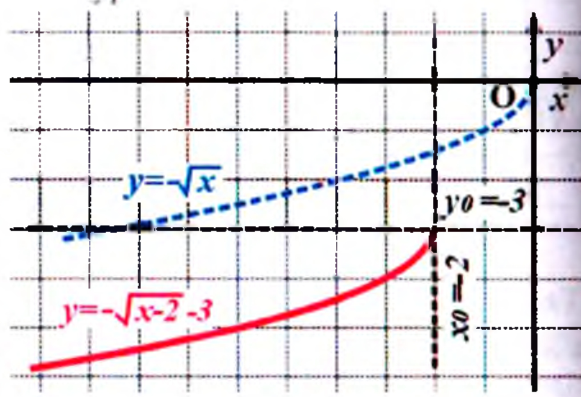
Bir vaqtda Ox va Oy o'qlari bo'ylab siljitishdan hosil qilinadigan funksiya grafigiga doir misollar ko'raylik.

Misol № 1: $y=\sqrt{x-2}+3$ funksiya grafigini quring.

Yechish: Biz shu paytgacha $y=\sqrt{x-2}$ funksiya grafigini $y=\sqrt{x}$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab $x_0=2$ birlik o'ngga surish natijasida qurilishini va $y=\sqrt{x}+3$ funksiya grafigini esa $y=\sqrt{x}$ funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab $y_0=3$ birlik yuqoriga ko'tarish natijasida qurilishini ko'rgan edik. Hozirgi $y=\sqrt{x-2}+3$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y=\sqrt{x}$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab $x_0=2$ birlik o'ngga hamda Oy o'qi bo'ylab $y_0=3$ birlik yuqoriga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (3.8.8-rasm).



5.9.6-rasm

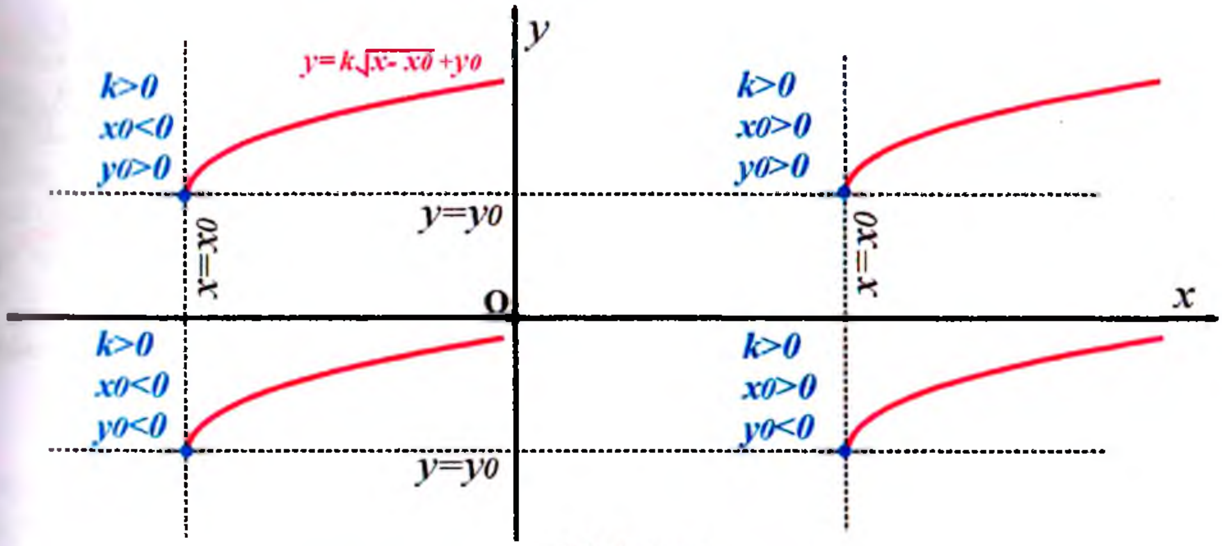


5.9.7-rasm

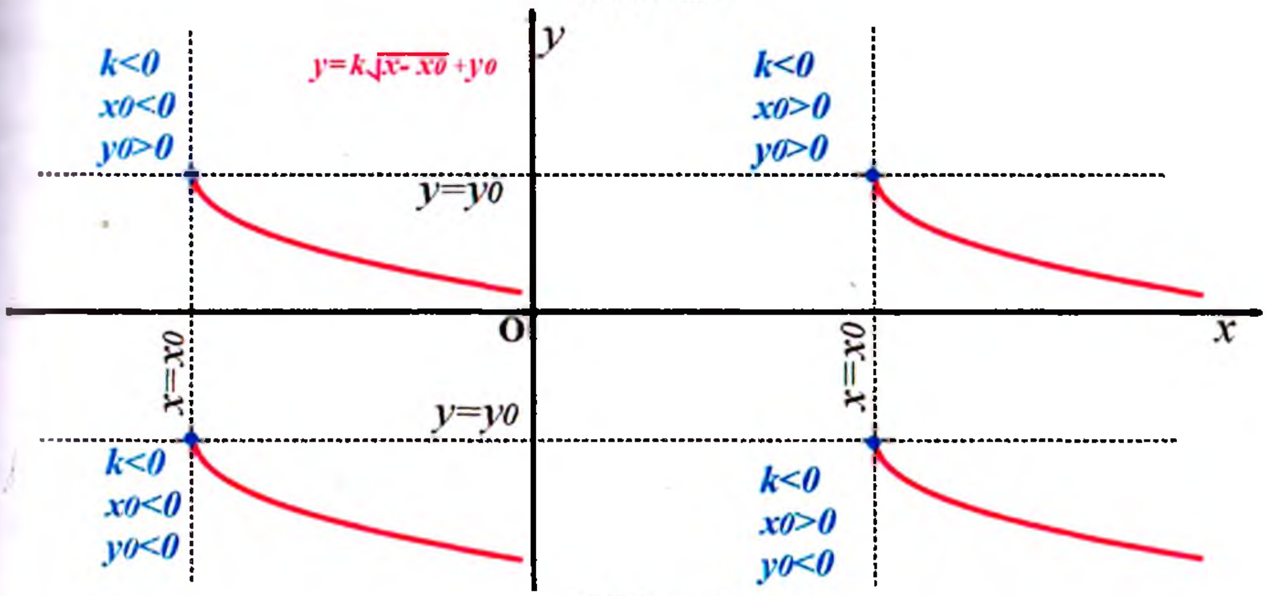
Misol № 2: $y=-\sqrt{x+2}-3$ funksiya grafigini quring.

Yechish: Biz shu paytgacha $y=-\sqrt{x+2}$ funksiya grafigini $y=-\sqrt{x}$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab $x_0=-2$ birlik chapga surish natijasida qurilishini va $y=-\sqrt{x}-3$ funksiya grafigini esa $y=-\sqrt{x}$ funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab $y_0=-3$ birlik pastga tushirish natijasida qurilishini ko'rgan edik. Hozirgi $y=-\sqrt{x+2}-3$ funksiya grafigini qurish uchun ana shu shablon qilib olingan $y=-\sqrt{x}$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab $x_0=-2$ birlik chapga hamda Oy o'qi bo'ylab $y_0=-3$ birlik pastga surish amallarini bir vaqtda bajaramiz (5.9.7-rasm).

$y=k\sqrt{x}$ funksiya grafigini koordinata o'qlari bo'yicha x_0 va y_0 birlikka surish natijasida $y=k\sqrt{x-x_0}+y_0$ funksiya grafigi hosil qilinadi. x_0 va y_0 kattaliklarning ishoralariga qarab turli shakldagi chizmalarga ega bo'lamiz (5.9.8- va 5.9.9-rasmlar):



5.9.8-rasm



5.9.9-rasm

$y = k\sqrt{x - x_0} + y_0$ ko‘rinishdagi funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = [x_0\,;\ \infty)$;

2) funksiyaning qiymatlar sohasi $k > 0$ bo‘lganda $E(f) = [y_0\,;\ \infty)$, $k > 0$ bo‘lganda $E(f) = (-\infty;\ y_0]$;

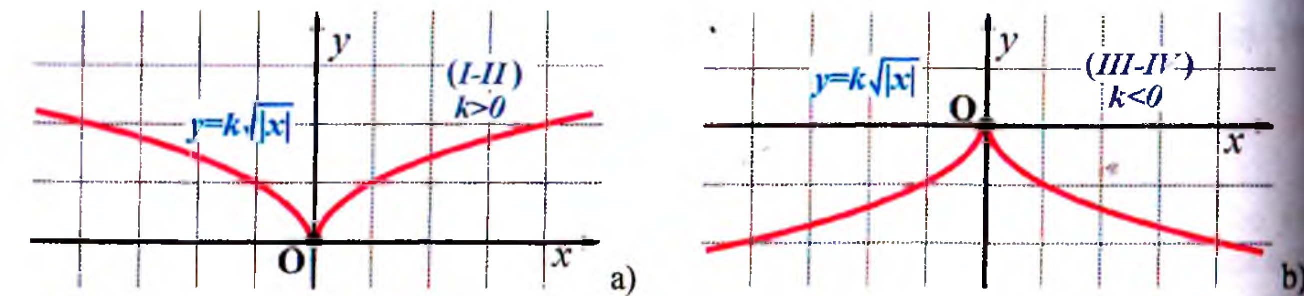
3) $k > 0$ bo‘lganda funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida o‘sadi, ya’ni $x \in [x_0\,;\ \infty)$ oraliqda o‘sadi, kamayish oralig‘i bo‘lmaydi;

4) $k < 0$ bo‘lganda funksiya aniqlanish sohasining barcha qiymatlarida kamayadi, ya’ni $x \in [x_0\,;\ \infty)$ oraliqda kamayadi, o‘siish oralig‘i bo‘lmaydi;

<u>*VI).*</u> $y = k\sqrt{|x - x_0|} + y_0$, $y = k\sqrt[2n]{x - x_0} + y_0$, $y = k\sqrt[2n+1]{x - x_0} + y_0$ *ko‘rinishdagi funksiyalar.*

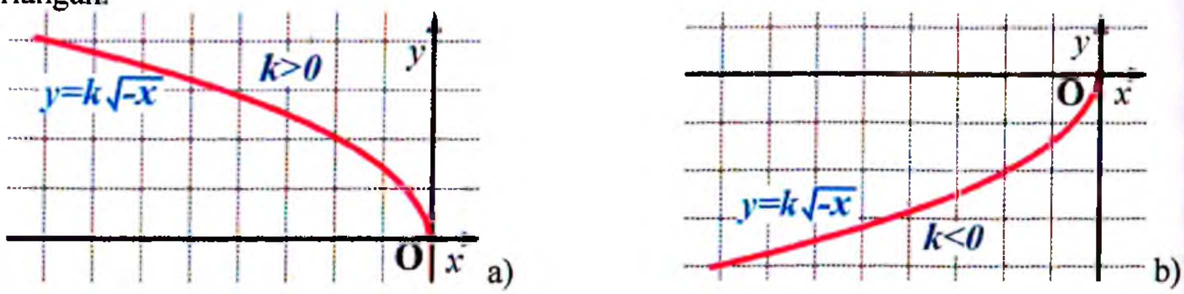
Bu funksiyalarning grafiklari ham $y = \sqrt{|x|}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt[2n]{x}$, $y = \sqrt[2n-1]{x}$ funksiyalarning shablon grafiklarini koordinata o‘qlari bo‘ylab parallel ko‘chirishlardan hosil qilinadi. SHulardan ba’zilarining grafiklarini misol sifatida tasvirlaymiz.

$y = k\sqrt{|x|}$ funksiyaning grafigini $k > 0$ va $k < 0$ bo‘lgan hollar uchun 5.8.10-rasmda tasvirlangan.



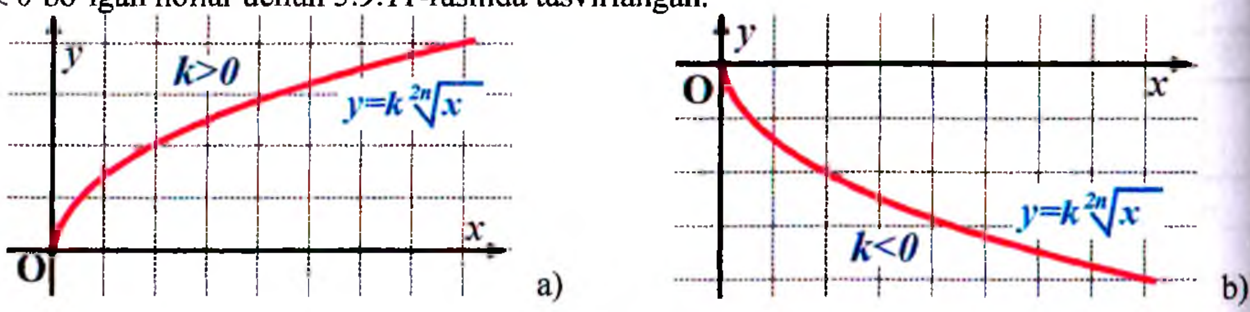
5.9.10-rasm

$y = k\sqrt{-x}$ funksiyaning grafigini $k > 0$ va $k < 0$ bo'lgan hollar uchun 5.8.10-rasmda tasvirlangan.



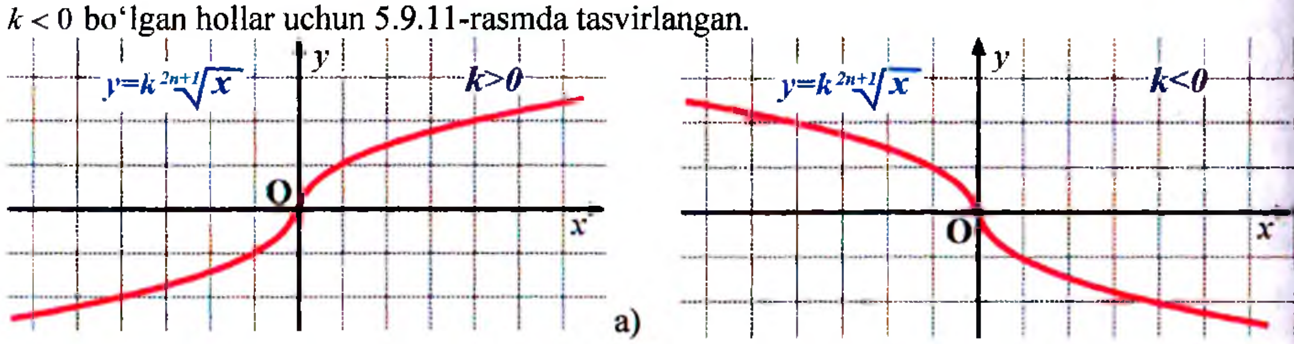
5.9.11-rasm

$y = k\sqrt[2n]{x}$ funksiyaning grafigi $y = k\sqrt{x}$ funksiya grafigiga o'xshash bo'lib, ular $k > 0$ va $k < 0$ bo'lgan hollar uchun 5.9.11-rasmda tasvirlangan.



5.9.12-rasm

$y = k\sqrt[2n-1]{x}$ funksiyaning grafigi $y = k\sqrt[3]{x}$ funksiya grafigiga o'xshash bo'lib, ular $k > 0$ va $k < 0$ bo'lgan hollar uchun 5.9.11-rasmda tasvirlangan.



5.9.13-rasm

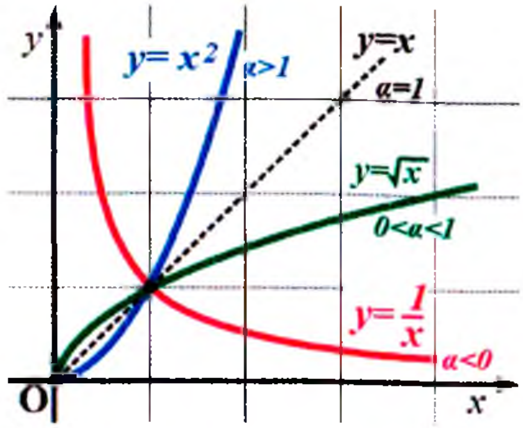
5.10-Mavzu: Darajali funksiyalar

Biz shu paytgacha tanishgan grafigi to'g'ri chiziq, parabola, giperbola bo'lgan funksiyalar bir so'z bilan aytganda ***darajali funksiya*** deb ataladigan funksiyaning turli xususiy hollaridir. Ushbu mavzuda biz shu haqda so'z yuritamiz.

$y = x^{\alpha}$ ko'rinishdagi funksiyaga ***darajali funksiya*** deyiladi.

Xususan, $\alpha = 1$da chiziqli funksiya, $\alpha = 2$da kvadrat funksiya, $\alpha = 3$da kubik funksiya,

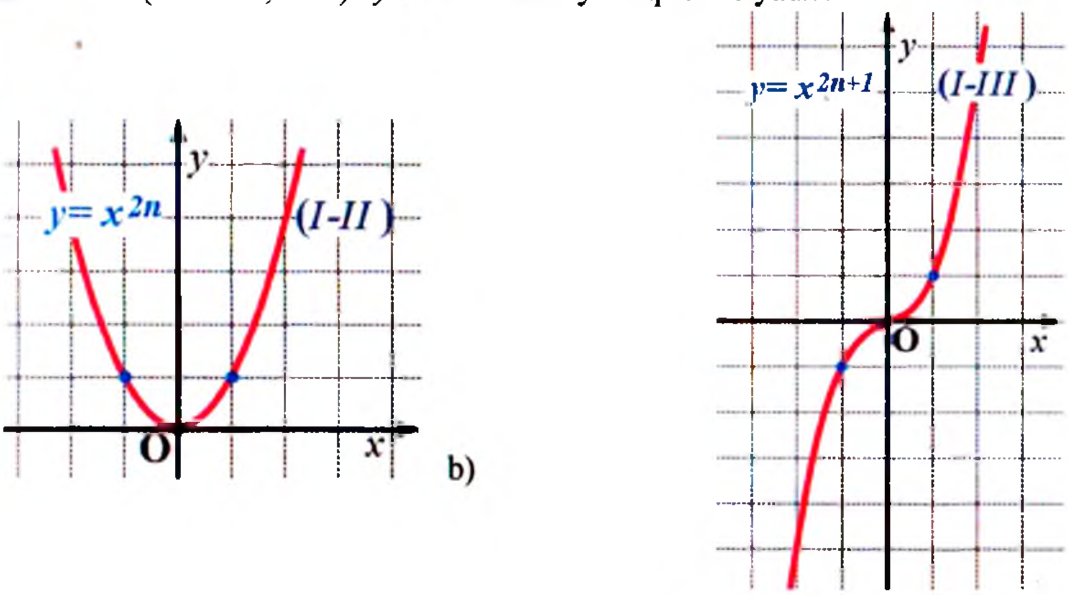
$\alpha = -1$ da giperbolik funksiya, $\alpha = \frac{1}{2}$ da ildizli funksiya va boshqalar hosil bo‘ladi. YAnada tushunarliroq qilib aytganda, funksiya grafigi $\alpha = 1$ bo‘lganda to‘g‘ri chiziqni, $\alpha > 1$ va $0 < \alpha < 1$ bo‘lganda turli shakldagi parabolalarni, $\alpha < 0$ bo‘lganda esa turli shakldagi giperbolalarni hosil qiladi. Chiziqli funksiya va barcha ko‘rinishdagi parabolalar $(0; 0)$ va $(1; 1)$ nuqtalardan o‘tuvchi bo‘ladi. Barcha ko‘rinishdagi giperbolalar esa $(1; 1)$ nuqtadan o‘tuvchi bo‘ladi (5.10.1-rasm).



5.10.1-rasm

Agar daraja birdan katta va juft bo‘lsa $(\alpha = 2, 4, 6, \ldots 2n)$, u holda funksiya grafigi xuddi $y = x^2$ funksiya grafigi kabi shoxlari tepaga qaragan paraboladan iborat bo‘ladi. Bunda grafik $(-1; 1)$, $(0; 0)$ va $(1; 1)$ nuqtalardan o‘tuvchi bo‘ladi (5.10.2-a,rasm). $y = x^{2n}$ funksiya juft funksiyadir.

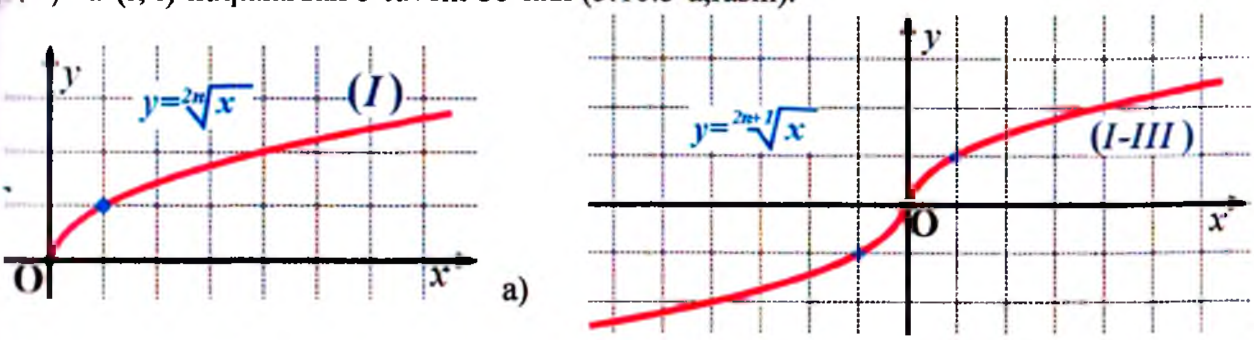
Agar daraja birdan katta va toq bo‘lsa $(\alpha = 3, 5, 7, \ldots 2n+1)$, u holda funksiya grafigi xuddi $y = x^3$ funksiya grafigi kabi paraboladan iborat bo‘ladi. Bunda grafik $(-1; -1)$, $(0; 0)$ va $(1; 1)$ nuqtalardan o‘tuvchi bo‘ladi (5.10.2-b,rasm). $y = x^{2n+1}$ funksiya toq funksiyadir.



b) a)

5.10.2-rasm

Agar funksiya juft ildiz ostida, ya’ni $y = \sqrt{x}, \sqrt[4]{x}, \sqrt[6]{x}, \ldots \sqrt[2n]{x}$ bo‘lsa $\left(\alpha = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots \frac{1}{2n}\right)$, u holda funksiya grafigi xuddi $y = \sqrt{x}$ funksiya grafigi kabi yarimparaboladan iborat bo‘ladi. Bunda grafik $(0; 0)$ va $(1; 1)$ nuqtalardan o‘tuvchi bo‘ladi (5.10.3-a,rasm).

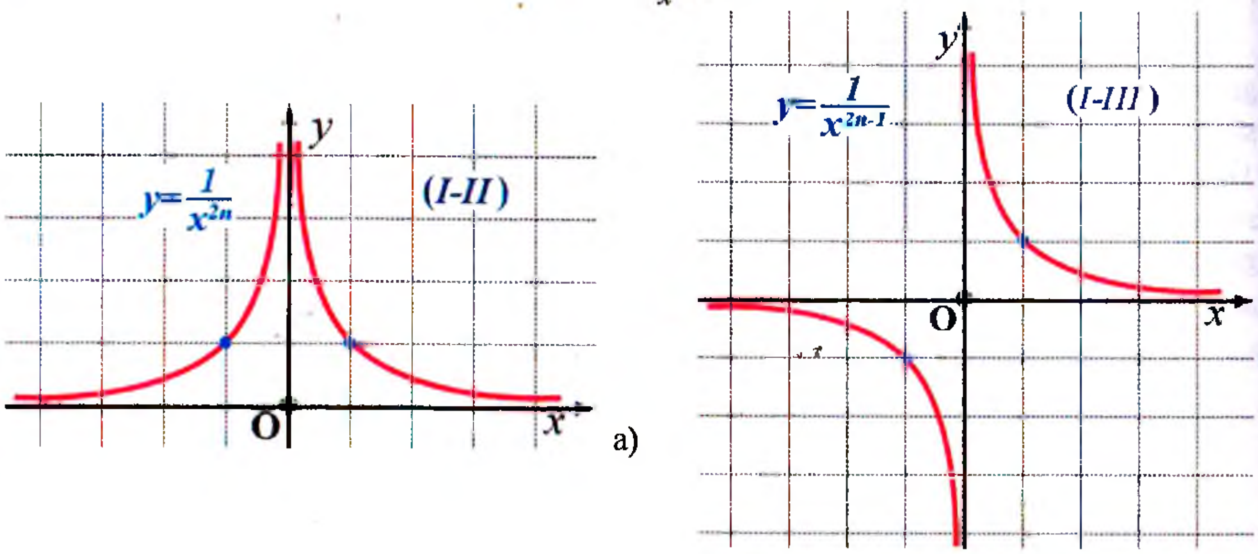


a) b)

5.10.3-rasm

Agar funksiya toq ildiz ostida, ya'ni $y=\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[7]{x}, \dots \sqrt[2n+1]{x}$ bo'lsa $\left(\alpha=\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots \frac{1}{2n+1}\right)$, u holda funksiya grafigi xuddi $y=\sqrt[3]{x}$ funksiya grafigi kabi paraboladan iborat bo'ladi. Bunda grafik $(-1;-1)$, $(0;0)$ va $(1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi bo'ladi (5.10.3-b,rasm). $y=\sqrt[2n+1]{x}$ funksiya toq funksiyadir.

Agar daraja manfiy va toq bo'lsa $(\alpha=-1,-3,-5,\dots-(2n-1))$, u holda funksiya grafigi xuddi $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$ funksiya grafigi kabi giperboladan iborat bo'ladi. Bunda grafik $(-1;-1)$ va $(1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi bo'ladi (5.1.9-a,rasm). $y=\frac{1}{x^{2n-1}}$ funksiya toq funksiyadir.



5.10.4-rasm

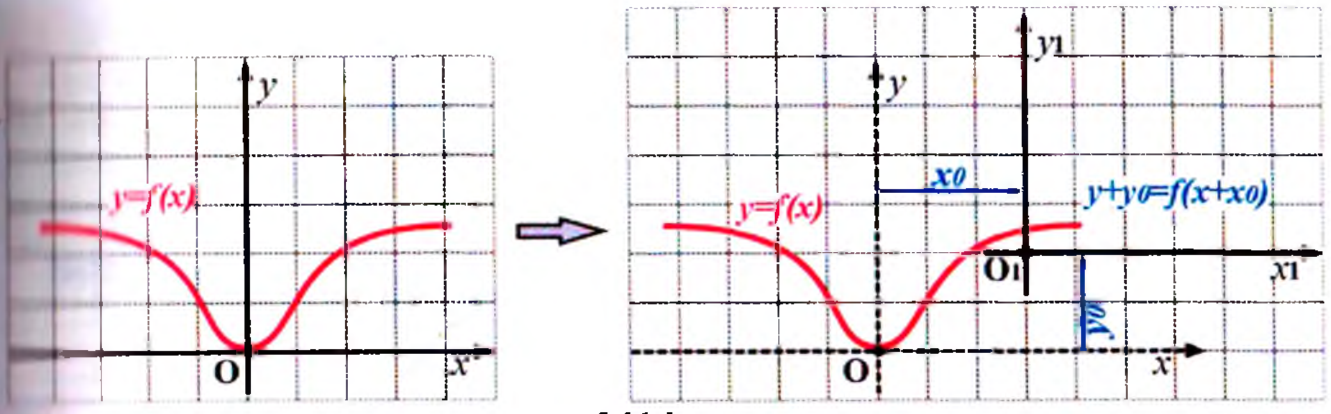
Agar daraja manfiy va juft bo'lsa $(\alpha=-2,-4,-6,\dots-2n)$, u holda funksiya grafigi xuddi $y=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ funksiya grafigi kabi giperboladan iborat bo'ladi. Bunda grafik $(-1;1)$ va $(1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi bo'ladi (5.7.9-b,rasm). $y=\frac{1}{x^{2n}}$ funksiya juft funksiyadir.

5.11-Mavzu: Funksiyani va koordinatalar sistemasini o'zgartirish

O'zgartirish deganda koordinatalar o'qi bo'ylab parallel ko'chirish yoki koordinata o'qlari bo'yicha siqish yoki cho'zish amallaridan birini tushunaylik. Bunda funksiya va koordinata sistemasidan biri o'zgartirilib ikkinchisi o'zgarishsiz qoldirilganda hosil bo'lgan yangi funksiya tenglamasi aniqlanadi.

1.1) $y=f(x)$ funksiyani o'zgartirmasdan Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'qi bo'ylab x_0 birlikka, Oy o'qi bo'ylab y_0 birlikka surishdan hosil bo'lgan yangi $O_1x_1y_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan funksiya quyidagi ko'rinishni oladi (5.11.1-rasm):

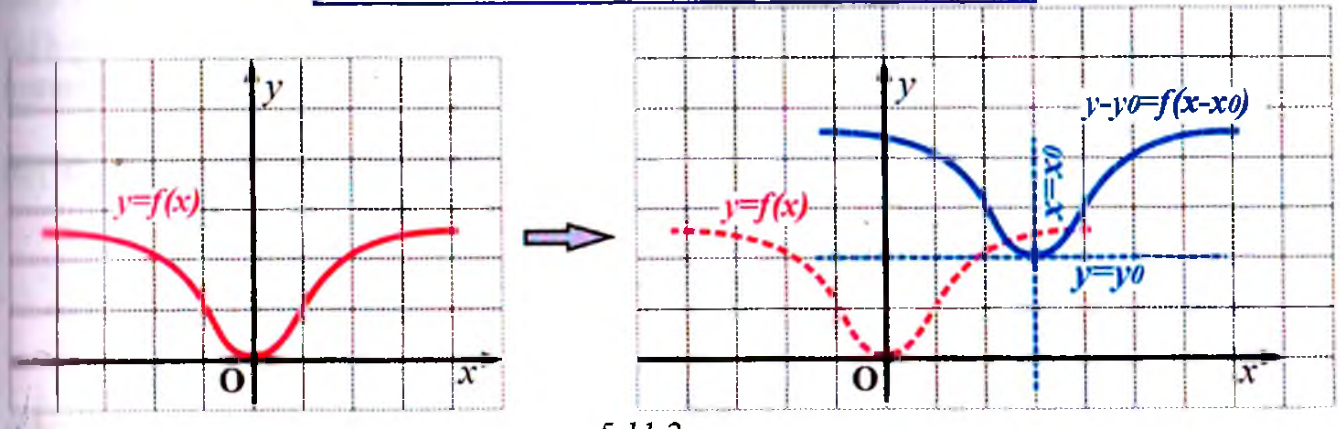
$$\boxed{y+y_0=f(x+x_0) \quad yoki \quad y=f(x+x_0)-y_0}$$



5.11.1-rasm

1.2) Oxy koordinatalar sistemasini o'zgartirmasdan $y=f(x)$ funksiyani Ox o'qi bo'ylab x_0 birlikka, Oy o'qi bo'ylab y_0 birlikka surishdan hosil bo'lgan yangi funksiya ko'rinishi quyidagicha bo'ladi (5.11.2-rasm):

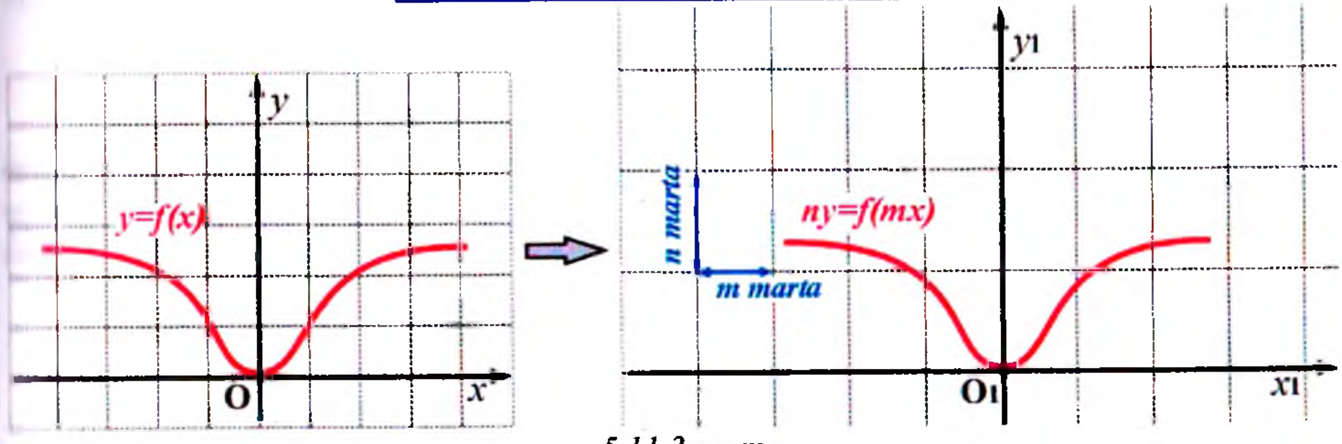
$$\boxed{y-y_0=f(x-x_0) \quad yoki \quad y=f(x-x_0)+y_0}$$



5.11.2-rasm

2.1) $y=f(x)$ funksiyani o'zgartirmasdan Oxy koordinatalar sistemasining Ox o'qini m marta, Oy o'qini n marta cho'zishdan hosil bo'lgan yangi $O_1x_1y_1$ koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan funksiya quyidagi ko'rinishni oladi (5.11.3-rasm):

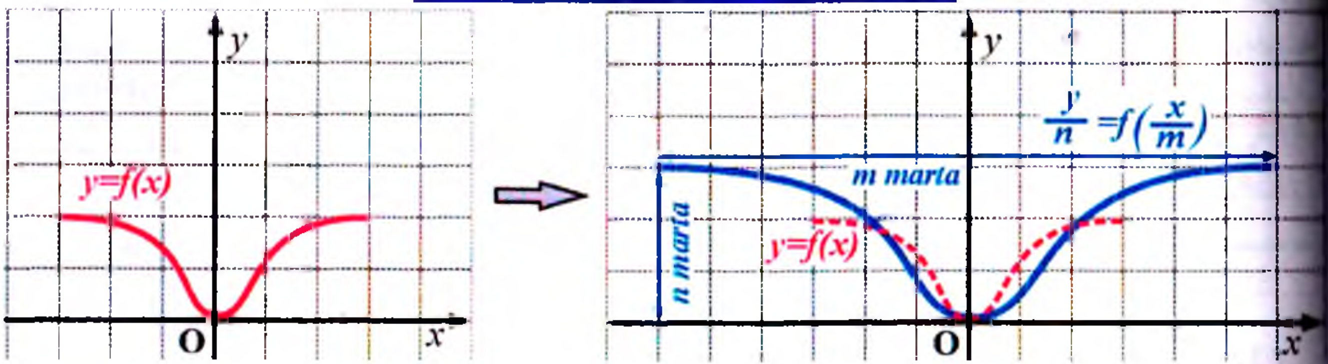
$$\boxed{ny=f(mx) \quad yoki \quad y=\frac{1}{n}\cdot f(mx)}$$



5.11.3-rasm

2.2) Oxy koordinatalar sistemasini o'zgartirmasdan $y=f(x)$ funksiyani Ox o'qi bo'ylab m marta, Oy o'qini n marta cho'zishdan hosil bo'lgan yangi funksiya ko'rinishi quyidagicha bo'ladi (5.11.4-rasm):

$$\boxed{\frac{y}{n}=f\left(\frac{x}{m}\right) \quad yoki \quad y=n\cdot f\left(\frac{x}{m}\right)}$$



5.11.4-rasm

5.12-Mavzu: Irratsional tenglamalar

Ildiz ostida berilgan ifodalarga ***irratsional ifodalar*** deyiladi. Masalan, $\sqrt{3x-5}$, $\sqrt[3]{x^5-3x^2-2x}$, $\sqrt[4]{\sin^2 x-\lg x}$,... va hokoza. Agar tenglamada irratsional ifoda ishtirok etsa, bunday tenglamani ***irratsional tenglama*** deyiladi. Boshqacha aytganda, $A(x)=B(x)$ tenglamadagi $A(x)$ yoki $B(x)$ ifodalardan birortasi irratsional ifoda bo‘lsa, bunday tenglamani ***irratsional tenglama*** deyiladi.

Aytaylik, $A(x)=B(x)$ ko‘rinishidagi tenglamada $A(x)$ ifoda irratsional bo‘lsin. Bunda juft ildiz yoki toq ildiz ostida turganiga qarab tenglama echilish yo‘li farq qiladi.

$\sqrt[2n]{f(x)}=g(x)$ ko‘rinishdagi tenglama quyidagicha echiladi:

$$\boxed{\begin{cases} f(x)=[g(x)]^{2n} \\ g(x)\geq 0 \end{cases}}$$

Bunda berilgan tenglamaning har ikkala tarafi ham juft $(2n)$ darajaga ko‘tariladi. Undan tashqari, juft ildiz ostidan chiquvchi $g(x)$ ifodaning nomanfiylik sharti bajarilish kerak.

$\sqrt[2n+1]{f(x)}=g(x)$ ko‘rinishdagi tenglama quyidagicha echiladi:

$$\boxed{f(x)=[g(x)]^{2n+1}}$$

Bunda berilgan tenglamaning har ikkala tarafi ham toq $(2n+1)$ darajaga ko‘tarilishi kifoya. Toq ildiz ostidan chiquvchi $g(x)$ ifoda musbat qiymatlar ham manfiy ham qiymatlar qabul qilishi mumkin.

Misol №1:

$\sqrt{x^3-2x^2-4x}=x$ irratsional tenglamaning ildizlari yig‘indisini toping.

Yechish: Juft ildiz ostidagi ifoda bo‘lgani uchun $x\geq 0$ bo‘lishi kerak. Tenglamani har ikkala tomonini ham kvadratga ko‘taramiz. $x^3-2x^2-4x=x^2$, $\to x^3-3x^2-4x=0$, $x(x-4)(x+1)=0$ dan $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=4$ yechimlar kelib chiqadi. Ildizlarni tekshirib ko‘rilganda uchalasi ham qanoatlantirishi ma’lum bo‘ladi. Ildizlar yig‘indisi $x_1+x_2+x_3=-1+0+4=3$ bo‘ladi.

Misol №2:

$\sqrt{x+2}+x=0$ irratsional tenglamani eching.

Yechish: Tenglamani aniqlanish sohasiga e’tibor beramiz, har ikkala tarafini kvadratga ko‘tarib, hosil bo‘lgan kvadrat tenglamani echib chiqsak, ushbu

$$\sqrt{x+2}+x=0, \to \sqrt{x+2}=-x, \begin{cases} x+2=x^2 \\ x\leq 0 \end{cases}; \to \begin{cases} x^2-x-2=0 \\ x\leq 0 \end{cases}; \to \begin{cases} (x-2)(x+1)=0 \\ x\leq 0 \end{cases}; \to \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=2 \\ x\leq 0 \end{cases}$$

yechimlar hosil bo‘ladi. Yechimlardan $x_2=2$ javob yechim bo‘ladi.

5.13-Mavzu: Irratsional tengsizliklar

Agar tengsizlikda irratsional ifoda ishtirok etsa, bunday tengsizlikni ***irratsional tengsizlik*** deyiladi.

Aytaylik, $A(x) > B(x)$ yoki $A(x) < B(x)$ ko'rinishidagi tengsizlikda $A(x)$ ifoda irratsional bo'lsin. Bunda ifodaning juft ildiz yoki toq ildiz ostida turganiga qarab tengsizlik echilish yo'li farq qiladi.

$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$ ko'rinishdagi tengsizlik quyidagicha echiladi:

$$\boxed{\begin{cases} f(x) > [g(x)]^{2n} \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}}$$

$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$ ko'rinishdagi tengsizlik quyidagicha echiladi:

$$\boxed{\begin{cases} f(x) < [g(x)]^{2n} \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}}$$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$ ko'rinishdagi tengsizlik quyidagicha echiladi:

$$\boxed{f(x) > [g(x)]^{2n+1}}$$

$\sqrt[2n+1]{f(x)} < g(x)$ ko'rinishdagi tengsizlik quyidagicha echiladi:

$$\boxed{f(x) < [g(x)]^{2n+1}}$$

Irratsional tengsizlik yuqorida sanab o'tilgan to'rtta formula bo'yicha echiladi.

Misol №1:

$\sqrt{x+78} < x+6$ irratsional tengsizlikni eching.

Yechish: Bu erda $\begin{cases} x+6 \geq 0 \\ x+78 \geq 0 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} x \geq -6 \\ x \geq -78 \end{cases}$ shartlarni e'tiborga olsak, $x \geq -6$ bo'lishi kerak. Tengsizlikni har ikkala tarafini kvadratga ko'tarib echib chiqamiz. Bunda $x+78 < x^2+12x+36, \rightarrow x^2+11x-42 > 0, \rightarrow (x+14)(x-3) > 0, \begin{cases} x < -14 \\ x > 3 \end{cases}$ yechim chiqadi. Buning $x \geq -6$ tengsizlik bilan kesishmasi $x > 3$ bo'lad. SHunday qilib, berilgan tengsizlikning yechimi $x \in (3;\ \infty)$ bo'lar ekan.

Misol №2:

$\sqrt{2x+4} > x+3$ irratsional tengsizlikni eching.

Yechish: Bunda aniqlanish sohasi $D(f) = [-2;\ \infty)$ bo'ladi. Tengsizlikni har ikkala tarafini kvadratga ko'tarib echib chiqamiz. Bunda $2x+4 > x^2+6x+9, \rightarrow x^2+4x-5 < 0, \rightarrow (x+5)(x-1) < 0, \begin{cases} x > -5 \\ x < 1 \end{cases}$ yechim chiqadi. Buning aniqlanish sohasi bilan kesishmasi $x \in [-2;\ 1)$ bo'ladi.

Misol №3:

$\sqrt{x^2-4x} > x-4$ irratsional tengsizlikni eching.

Yechish: $\begin{cases} x^2-4 > [x-4]^2 \\ x-4 \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2-4 \geq 0 \\ x-4 < 0 \end{cases}; \rightarrow \begin{cases} x > 2{,}5 \\ x \geq 4 \end{cases} \cup \begin{cases} (x-2)(x+2) \geq 0 \\ x < 4 \end{cases}$. Demak, tengsizlik yechimi $x \in [-2;\ 2] \cup [4;\ \infty)$ bo'lar ekan.

6-BOB: SONLI KETMA-KETLIK. PROGRESSIYALAR.

6.1-Mavzu: Sonli ketma-ketlik.

Sonlardan tuzilgan ketma-ketlik ***sonli ketma-ketlik*** deyiladi. Ketma-ketlikdagi sonlar ketma-ketlikning ***hadlari*** deyiladi.Ketma-ketlikning boshidagi son uning ***1- hadi*** deyiladi va undan keyin 2-hadi, 3-hadi va hokoza hadlari keladi. Oxirgi hadni ***n-hadi*** deyiladi.

Masalan:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... – Natural sonlar ketma-ketligi
2, 4, 6, 8, 10, 12, ... – Juft sonlar ketma-ketligi
1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, ... – Toq sonlar ketma-ketligi

Ketma-ketlik hadlari odatda lotincha a harfi bilan belgilanib, had nomeri uning indeksiga yoziladi, ya'ni quyidagicha belgilanadi.

$$\boxed{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\ldots, a_n}$$

Dastlabki 2ta hadi berilib, 3-hadidan boshlab avvalgi 2 ta hadi yig'indisidan iborat ketma-ketlik ***fibbonachi sonlar*** deyiladi.

Misol №1: Fibbonachi sonlarning dastlabki 2ta hadi $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ ekanligi ma'lum bo'lsa, keyingi 5ta hadi topilsin.

Yechish:

$a_1 = 1, a_2 = 3$
$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 3 = 4$
$a_4 = a_3 + a_2 = 4 + 3 = 7$
$a_5 = a_4 + a_3 = 7 + 4 = 11$
$a_6 = a_5 + a_4 = 11 + 7 = 18$
$a_7 = a_6 + a_5 = 18 + 11 = 29$

Dastlabki bir yoki bir nechta hadi berilib, keyingi hadlarini dastlabki hadlar ustida bajariladigan amallardan hosil qilinadigan ketma-ketlik ***rekurrent sonlar*** deyiladi.

Misol №2: Rekurrent sonlar ketma-ketligining dastlabki hadi $a_1 = 256$ va rekurrentlik formulasi $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$ berilgan. Keyingi 3ta hadini toping.

Yechish:

$a_1 = 256$,
$a_2 = \sqrt{a_1} = \sqrt{256} = 16$, $a_3 = \sqrt{a_2} = \sqrt{16} = 4$, $a_4 = \sqrt{a_3} = \sqrt{4} = 2$

Misol №3: Rekurrent sonlar ketma-ketligining dastlabki 2ta hadi $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ va rekurrentlik formulasi $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}$ berilgan. Keyingi 3ta hadini toping.

Yechish:

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$,
$a_3 = a_2 \cdot a_1 = 1 \cdot 3 = 3$, $a_4 = a_3 \cdot a_2 = 3 \cdot 3 = 9$, $a_5 = a_4 \cdot a_3 = 9 \cdot 3 = 27$

Misol №4: Rekurrent sonlar ketma-ketligining dastlabki 2ta hadi $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ va rekurrentlik formulasi $a_n = (a_{n-1} - a_{n-2})^2$ berilgan. Keyingi 3ta hadini toping.

Yechish:

$a_1 = 1$, , $a_2 = 3$,
$a_3 = (a_2 - a_1)^2 = (3-1)^2 = 4$, $a_4 = (a_3 - a_2)^2 = (4-3)^2 = 1$, $a_5 = (a_4 - a_3)^2 = (1-4)^2 = 9$.

6.2-Mavzu: Arifmetik progressiya

Ikkinchi hadidan boshlab keyingi hadlarini hosil qilish uchun avvalgi hadiga ayni bir sonni qo'shishdan hosil qilinadigan ketma-ketlik ***arifmetik progressiya*** deyiladi.

Masalan:

3 ; 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; 23 ; 27 ; 31 ; 35 ; ....

Bu erda: $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 11$, $a_4 = 15$, $a_5 = 19$, $a_6 = 23$, $a_7 = 27$, $a_8 = 31$, $a_9 = 35$, ...

Keyingi hadni hosil qilish uchun qo'shilayotgan ayni bir sonni arifmetik progressiyaning ***hadlar ayirmasi*** deyiladi va **d** harfi bilan belgilanadi. Hadlar ayirmasi quyidagicha:

$$\boxed{d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1}}$$

Agar $d > 0$ bo'lsa, progressiya hadlari o'suvchi, $d < 0$ bo'lsa, progressiya hadlari kamayuvchi bo'ladi.

Misol №1:

5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; . . . . . progressiyaning n-hadini chiqaring

Yechish:

$a_1 = 5$, d = 5

$a_2 = a_1 + d = 5 + 5 = 10$;

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d = 5 + 2 \cdot 5 = 15$;

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d = 5 + 3 \cdot 5 = 20$;

$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d = 5 + 4 \cdot 5 = 25$;

$a_6 = a_5 + d = a_1 + 5d = 5 + 5 \cdot 5 = 30$;

. . . .

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5 + (n - 1) \cdot 5 = 5n$

SHunday qilib, arifmetik progressiyaning n-hadini topish formulasi quyidagicha:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

Arifmetik progressiyaning n- hadi formulasidan yana quyida keltirilgan formulalarni keltirib chiqarish mumkin bo'ladi:

Arifmetik progressiyaning dastlabki hadini topish formulasi quyidagicha:

$$\boxed{a_1 = a_n - (n-1)d}$$

Arifmetik progressiyaning hadlar ayirmasini topish formulasi quyidagicha:

$$\boxed{d = \frac{a_n - a_1}{n-1}}$$

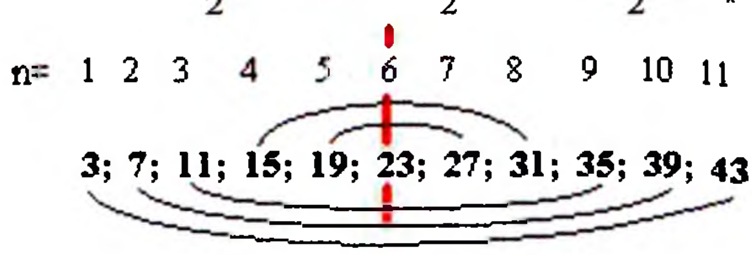
Arifmetik progressiyaning hadlar sonini topish formulasi quyidagicha:

$$\boxed{n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1}$$

Arifmetik progressiyaning hohlagan k -hadi, shu hadga qo'shni bo'lgan $k-1$ va $k+1$ - hadlarning o'rta arifmetigiga teng bo'ladi.

$$\boxed{a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}}$$

<u>**Isboti:**</u> Progressiya ta'rifidan $\frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a_k - d + a_k + d}{2} = \frac{2a_k}{2} = a_k$ kelib chiqadi.



6.2.1-rasm

Arifmetik progressiyaning hohlagan k-hadi, shu hadga simmetrik bo'lgan $k-\ell$ va $k+\ell$- hadlarning o'rta arifmetigiga teng (6.2.1-rasm).

$$\boxed{a_k = \frac{a_{k-\ell} + a_{k+\ell}}{2}}$$

Isboti: Progressiya ta'rifidan $\frac{a_{k-\ell}+a_{k+\ell}}{2}=\frac{a_k-\ell\cdot d+a_k+\ell\cdot d}{2}=\frac{2a_k}{2}=a_k$ natija kelib chiqadi.

6.3-Mavzu: Arifmetik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisi

Mavzuni misol orqali boshlaylik. Bizdan *1* dan *100* gacha bo'lgan barcha natural sonlar yig'indisi so'ralgan bo'lsin. Bu sonlarni ikki marta, ya'ni o'sish va kamayish tartibida qo'shib chiqaylik.

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100 \qquad (1)$$
$$+ \quad + \quad + \quad + \quad + \qquad + \quad + \quad + \quad + \quad +$$
$$S_n = 100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \ldots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \qquad (2)$$

Endi yuqoridagi ifodalardan *(1)* + *(2)* amalini bajaramiz. Bunda

$$2S_n = \underbrace{(1+100)+(1+100)+(1+100)+\ldots+(1+100)}_{100ta} = (1+100)\cdot 100$$

$$S_n = \frac{1+100}{2}\cdot 100 = 101\cdot 50 = 5050$$ natija kelib chiqadi.

Demak , arifmetik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig'indisini topish formulasi quyidagicha bo'lar ekan:

$$\boxed{S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}$$

Yuqoridagi formulani dastlabki had a_1 va hadlar ayirmasi d orqali ifodalash mumkin. Bunda

$$\boxed{S_n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n}$$

formula kelib chiqadi.

6.4-Mavzu: Geometrik progressiya

Ikkinchi hadidan boshlab har bir hadini hosil qilish uchun avvalgi hadni ayni bir songa ko'paytirishdan hosil qilinadigan ketma-ketlik ***geometrik progressiya*** deyiladi.

Masalan:

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; ....

Bu erda: $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=4$, $b_4=8$, $b_5=16$, $b_6=32$, $b_7=64$, $b_8=128$, $b_9=256$, ...

Keyingi hadni hosil qilish uchun ko'paytiriladigan ayni bir son geometrik progressiyaning ***maxraji*** deyiladi va q bilan belgilanadi. Progressiya maxraji quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\frac{b_4}{b_3}=\ldots=\frac{b_n}{b_{n-1}}}$$

Agar $q>0$ bo'lsa, progressiya hadlari bir xil ishorali, $q<0$ bo'lsa, progressiya hadlari har xil ishorali bo'ladi.

Agar $|q|>1$ bo'lsa, progressiya hadlari o'suvchi (ya'ni uzoqlashuvchi), $|q|<1, q\neq 0$ bo'lsa, progressiya hadlari kamayuvchi (ya'ni yaqinlashuvchi) bo'ladi.

Agar $q=1$ bo'lsa, progressiyaning barcha hadlari o'zaro teng bo'ladi.

Masalan:

$b_1=-1$, $q=2$ bo'lsa, progressiya hadlari -1, -2, -4, -8, -16, -32, -64, ... bo'ladi.

$b_1=-1$, $q=-2$ bo'lsa, progressiya hadlari -1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, ... bo'ladi

Misol №1:

1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; ..... progressiyaning n-hadini chiqaring

Yechish:

$b_1=1$, q = 2

$b_2 = b_1 \cdot q = 1 \cdot 2 = 2$;
$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q^2 = 1 \cdot 2^2 = 4$;
$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3 = 1 \cdot 2^3 = 8$;
$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^4 = 1 \cdot 2^4 = 16$;
$b_6 = b_5 \cdot q = b_1 \cdot q^5 = 1 \cdot 2^5 = 32$;
. . . .
$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

Shunday qilib, geometrik progressiyaning n-hadini topish formulasi quyidagicha bo‘lar ekan:

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$$

Geometrik progressiyaning n-hadi formulasidan yana quyida keltirilgan formulalarni keltirib chiqarish mumkin bo‘ladi:
Geometrik progressiyaning dastlabki hadini topish formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{b_1 = \frac{b_n}{q^{n-1}}}$$

Geometrik progressiyaning maxrajini topish formulasi quyidagicha:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} Agar \;\; n = 2k \quad bo'lsa, \quad q = \sqrt[n-1]{\dfrac{b_n}{b_1}} \\ Agar \;\; n = 2k+1 \;\; bo'lsa, \quad q = \pm\sqrt[n-1]{\dfrac{b_n}{b_1}} \end{array}\right. \quad bo'ladi}$$

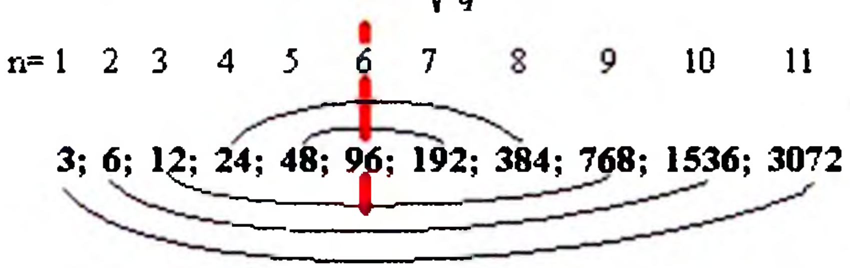
Geometrik progressiyaning hadlar sonini topish formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{n = \log_q\left(\frac{b_n}{b_1}\right) + 1}$$

Geometrik progressiyaning hohlagan k-hadi, shu hadga qo‘shni bo‘lgan $k-1$ va $k+1$-hadlarning o‘rta geometrigiga teng.

$$\boxed{b_k = \sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}}}$$

Isboti: Progressiya ta’rifiga asosan $\sqrt{b_{k-1} \cdot b_{k+1}} = \sqrt{\dfrac{b_k}{q} \cdot b_k \cdot q} = \sqrt{b_k^2} = b_k$ natija kelib chiqadi.



6.4.1-rasm

Geometrik progressiyaning hohlagan k-hadi, shu hadga simmetrik bo‘lgan $k-\ell$ va $k+\ell$-hadlarning o‘rta geometrigiga teng (6.4.1-rasm).

$$\boxed{b_k = \sqrt{b_{k-\ell} \cdot b_{k+\ell}}}$$

Isboti: Progressiya ta’rifiga asosan $\sqrt{b_{k-\ell} \cdot b_{k+\ell}} = \sqrt{\dfrac{b_k}{q^\ell} \cdot b_k \cdot q^\ell} = \sqrt{b_k^2} = b_k$ natija kelib chiqadi.

6.5-Mavzu: Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig‘indisi

Geometrik progressiyaning dastlabki n ta hadi yig‘indisi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}}$$

Isboti: $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n = \sum b_i$

$$\begin{cases} S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n \\ q \cdot S_n = b_1 \cdot q + b_2 \cdot q + b_3 \cdot q + ... + b_{n-1} \cdot q + b_n \cdot q \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_n = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_{n-1} + b_n & (1) \\ q \cdot S_n = b_2 + b_3 + b_4 + ... + b_{n-1} + b_n + b_n \cdot q & (2) \end{cases}$$

Endi $(2)-(1)$ amalini bajaramiz.

$q \cdot S_n - S_n = b_n \cdot q - b_1, \rightarrow S_n \cdot (q-1) = b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - b_1, \rightarrow S_n \cdot (q-1) = b_1 \cdot (q^n - 1)$

Demak, n ta had yig'indisi $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1}$ ga teng bo'lar ekan.

6.6-Mavzu: Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya va uning hadlari yig'indisi

Agar geometrik progressiyaning maxraji $|q| < 1$ | (yoki $q \in (-1; 0) \cup (0; 1)$) bo'lsa, bunday progressiya ***cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya*** deyiladi.

Masalan:

32 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1 ; 1/2 ; 1/4 ; 1/8 ; 1/16 ; .... bu erda: q = 1/2

32 ; -16 ; 8 ; -4 ; 2 ; -1 ; 1/2 ; -1/4 ; 1/8 ; -1/16 ; ...... bu erda: q = -1/2

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig'indisi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1}{1-q}}$$

Isboti: $S_n = \dfrac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} = \dfrac{b_1 \cdot (q^\infty - 1)}{q-1} = \dfrac{b_1 \cdot (0-1)}{q-1} = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Misol №1:

32 ; 16 ; 8 ; 4 ; 2 ; 1; ..... ketma-ketlikning barcha hadlari yig'indisi topilsin.

Yechish:

Bu erda: b_1=32 , q = 1/2 , shuning uchun $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{b_1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{b_1}{\frac{1}{2}} = 2b_1 = 64.$

Misol №2:

32 ; -16 ; 8 ; -4 ; 2 ; -1; ..... ketma-ketlikning barcha hadlari yig'indisi topilsin.

Yechish:

Bu erda: b_1=32 , q = -1/2 , shuning uchun $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{b_1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{b_1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3} \cdot b_1 = \dfrac{64}{3} = 21\dfrac{1}{3}.$

Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisi formulasidan foydalanib, davriy sonlarni oddiy kasrga aylantirish mumkin.

Misol №3:

0,(3) sonini oddiy kasr shaklida yozing.

Yechish:

0,(3) = 0,3333333...... = 0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + ...

Bu erda: b_1=0,3 , q = 1/10, shuning uchun $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{0{,}3}{1-0{,}1} = \dfrac{0{,}3}{0{,}9} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}.$

Misol №4:

0,(27) sonini oddiy kasr shaklida yozing.

Yechish:

$0,(27) = 0,2727272727\ldots\ldots = 0,27 + 0,0027 + 0,000027 + 0,00000027 + 0,0000000027 + \ldots\ldots$

Bu erda: $b_1 = 0,27$, $q = 1/100$, shuning uchun $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{0,27}{1-0,01} = \dfrac{0,27}{0,99} = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$.

Misol №5:

$0,0(27)$ sonini oddiy kasr shaklida yozing.

Yechish:

$$0,0(27) = \frac{0.(27)}{10} = \frac{1}{10}\cdot(0,27 + 0,0027 + 0,000027 + 0,00000027 + \ldots\ldots).$$

Bu erda: $b_1 = 0,27$, $q = 1/100$, shuning uchun

$$S = \frac{1}{10}\cdot\frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{10}\cdot\frac{0,27}{1-0,01} = \frac{1}{10}\cdot\frac{0,27}{0,99} = \frac{1}{10}\cdot\frac{27}{99} = \frac{27}{990} = \frac{3}{110}.$$

Misol №6:

$1,(12)$ sonini oddiy kasr shaklida yozing.

Yechish:

$1,(12) = 1,121212121212\ldots\ldots = 1 + 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + 0,00000012 + \ldots\ldots$

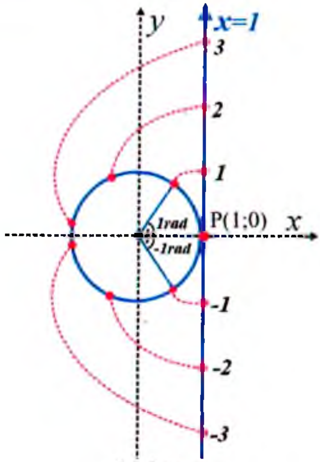
Bu erda: $b_1 = 0,12$; $q = 1/100$;

shuning uchun $S = 1 + \dfrac{b_1}{1-q} = 1 + \dfrac{0,12}{1-0,01} = 1 + \dfrac{0,12}{0,99} = 1 + \dfrac{27}{99} = \dfrac{99+27}{99} = \dfrac{126}{99} = \dfrac{14}{11}$.

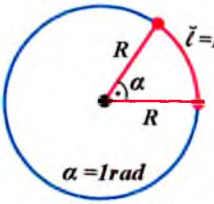
7-BOB: TRIGONAMETRIYA ELEMENTLARI.

7.1-Mavzu: Burchak o'lchovi.

Koordinatalar boshida radiusi $R=1$ bo'lgan aylana chizamiz va unda $P(1;0)$ nuqtani belgilaymiz. $P(1;0)$ nuqtaga urinadigan qilib vertikal o'q o'tkazamiz va bu o'qda uzunlik birliklariga mos nuqtalarni belgilab chiqamiz. O'qni aylana atrofida o'raymiz va o'qda belgilangan nuqtalarning aylana yoyiga mos kelgan nuqtalarini ham belgilaymiz (7.1.1-rasm).



7.1.1-rasm



7.1.2-rasm

Boshqa nuqtalar kabi radius uzunligiga teng bo'lgan nuqta ham belgilaymiz. Bu nuqta va $P(1;0)$ nuqtani tutashtiruvchi radiuslar orasidagi hosil bo'lgan burchak $1\,rad$ (radian) burchak deyiladi (7.1.2-rasm).

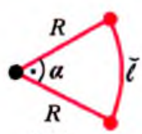
Radius uzunligiga teng bo'lgan yoyni tutib turuvchi markaziy burchak 1 rad burchak deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifdan shunday xulosa kelib chiqadi: Agar $1\,rad$ burchak radius uzunligiga teng bo'lgan yoyni tutib tursa, $2\,rad$ burchak ikki radius uzunligiga teng yoyni tutib turadi, $3\,rad$ burchak esa uch radius uzunligigateng tutib turadi va hokoza.

Demak, yoy uzunligi yoyni tutib turuvchi burchakka to'g'ri proporsional, ya'ni $\breve{\ell} \sim \alpha^r$ bo'lar ekan

Markaziy burchagi α^r ga teng bo'lgan yoyning uzunligini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\ell = \alpha^r R}$$

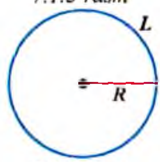


7.1.3-rasm

To'la aylanani tutib turuvchi markaziy burchak 2π ekanini e'tiborga olsak, aylana uzunligini aniqlash mumkin bo'ladi.

Aylana uzunligini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{L = 2\pi R}$$

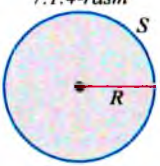


7.1.4-rasm

Doira sektori yuzini aniqlash formulasidan foydalanib, doira yuzasini aniqlash formulasini hosil qilish mumikn bo'ladi.

Doiraning yuzini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

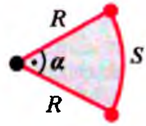
$$\boxed{S = \pi R^2}$$



7.1.5-rasm

Doira sektorining yuzini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\alpha^r R^2}$$



7.1.6-rasm

Bir aylanani 360 ta teng yoyga bo'lamiz. Hosil bo'lgan yoylardan bittasini tutib turuvchi markaziy burchak 1^0 burchak deyiladi. 1^0 burchakning $1/60$ qismiga teng burchakni $1'$ (minut) burchak deyiladi. $1'$ burchakning $1/60$ qismiga teng bo'lgan burchakni $1''$ (sekund) burchak deyiladi

$$\boxed{1^0=60'=3600''}$$

Radiandan gradusga o'tish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\alpha^0=\frac{180^0}{\pi}\alpha^r}$$

Gradusdan radianga o'tish formulasi quyidagicha bo'ladi :

$$\boxed{\alpha^r=\frac{\pi}{180^0}\alpha^0}$$

7.2-Mavzu: Nuqtani koordinatalar boshi atrofida burish

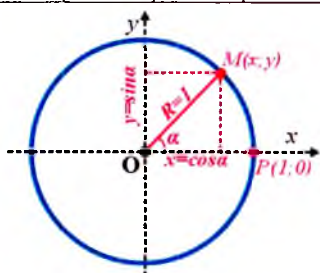
Dekart koordinatalar boshini markaz qilib radiusi bir birlik qilib aylana chizayli va bu aylanada $P(1;0)$ nuqtani belgilaylik. $P(1;0)$ nuqtani koordinatalar boshi atrofida **α** burchakka burganda qanday $M(x;y)$ nuqta hosil bo'ladi (musbat aylanish yo'nalishi deb soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalish qabul qilingan)?

Quyidagi jadvalda $M(x;y)$ nuqta koordinatalari berilgan.

α^r	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
α^0	0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

α^r	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π
α^0	180	210^0	225^0	240^0	270^0	300^0	315^0	330^0	360^0
x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

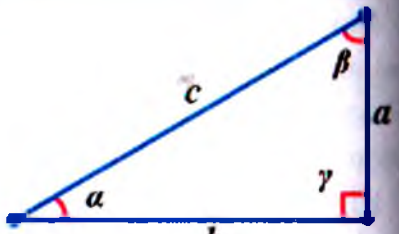
$P(1;0)$ nuqtani koordinatalar boshi atrofida α burchakka burganda $M(x;y)$ nuqta hosil bo'lsa, $\alpha+2\pi k$ $(k\in Z)$ burchakka burganda ham $M(x;y)$ nuqta hosil bo'ladi, ya'ni α burchakka burgandan k marta ko'proq aylanib yana o'sha nuqtaga keladi (7.2.1-rasm).



7.2.1-rasm

7.3-Mavzu: Burchakning sinusi, kosinusi, tangensi va kotengensiga ta'riflar.

Katetlari a va b, gipotenuzasi c bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak chizaylik. α burchak qarshisidagi katetni a deb belgilaylik. Mana shu to'g'ri burchakli uchburchak uchun bir nechta ta'riflar keltiramiz.



7.3.1-rasm

α burchakning sinusi deb α burchak qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$$

α burchakning kosinusi deb α burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$$

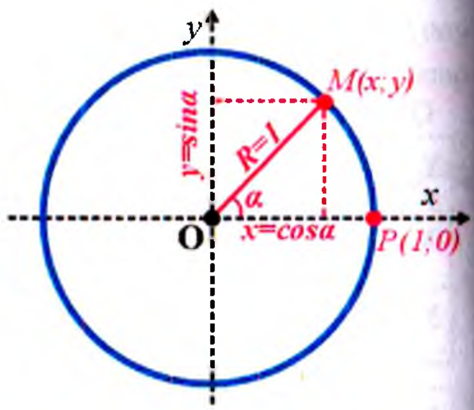
α burchakning tangensi deb α burchakka qarshisidagi katetning yopishgan katetga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{tg\alpha = \frac{a}{b}}$$

α burchakning kotangensi deb α burchakka yopishgan katetning burchak qarshisidagi katetga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{b}{a}}$$

Koordinataalr sistemasi boshini markaz qilib, radiusi $R=1$ bo'lgan aylana chizib, unda $P(1;0)$ nuqtani belgilaylik. Bu nuqtani koordinatalar boshi atrofida α burchakka burganda qanday $M(x;y)$ nuqta hosil bo'ladi. Mana shu birlik aylanada bir nechta ta'riflar keltiramiz.



7.3.2-rasm

α burchakning sinusi deb birlik aylanadan olingan $P(1;0)$ nuqtani α burchakka burganda hosil bo'lgan $M(x;y)$ nuqtaning oordinatasiga aytiladi (7.3.2-rasm).

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{R} = y}$$

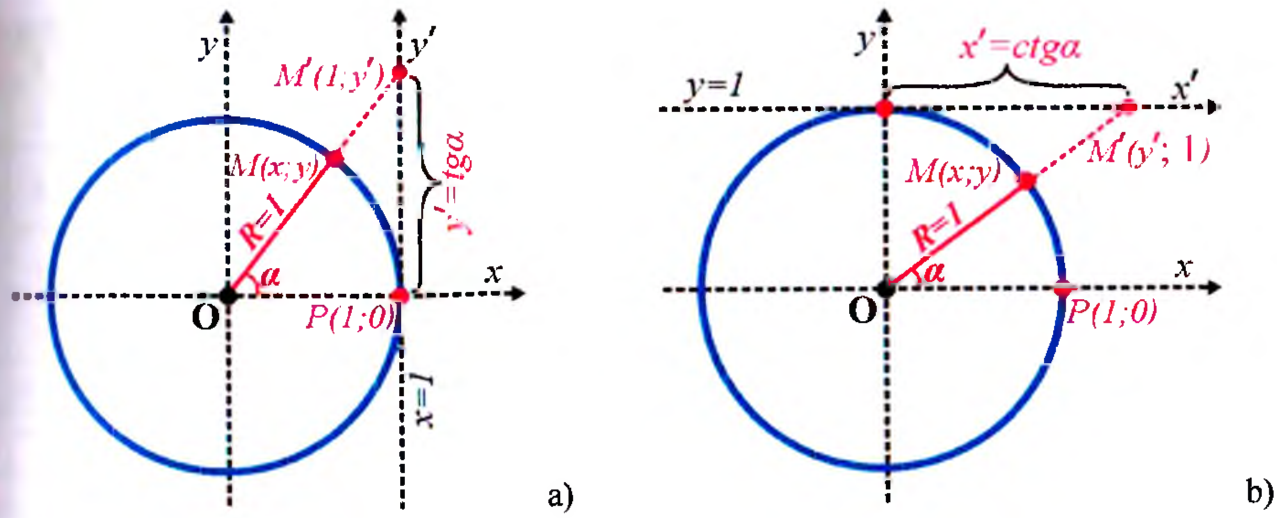
Shuning uchun ham Oy o'qini ***sinuslar chizig'i*** deyiladi.

α burchakning kosinusi deb birlik aylanadan olingan $P(1;0)$ nuqtani α burchakka burganda hosil bo'lgan $M(x;y)$ nuqtaning abssissasiga aytiladi (7.3.2-rasm).

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{R} = x}$$

Shuning uchun ham Ox o'qini ***kosinuslar chizig'i*** deyiladi.

Endi tangenslar va kotangenslar chizig'iga ta'rif beramiz. $P(1;0)$ nuqtadan vertikal holda o'tuvchi $x=1$, ya'ni y' chizig'ini ***tangenslar chizig'i*** deyiladi. $(0;1)$ nuqtadan gorizontal holda o'tuvchi $y=1$, ya'ni x' chizig'ini ***kotangenslar chizig'i*** deyiladi.



7.3.3-rasm

α burchakning tangensi deb birlik aylanadan olingan $P(1;0)$ nuqtani α burchakka burganda hosil bo'lgan $M(x;y)$ nuqtani radius bo'ylab tagenslar chizig'igacha davom ettirishdan hosil bo'lgan $(1;y')$ nuqtaning oordinatasiga aytiladi (7.3.3-a,rasm).

$$\boxed{tg\alpha = \frac{y'}{R} = y'}$$

α burchakning kotangensi deb birlik aylanadan olingan $P(1;0)$ nuqtani α burchakka burganda hosil bo'lgan $M(x;y)$ nuqtani radius bo'ylab kotagenslar chizig'igacha davom ettirishdan hosil bo'lgan $(x';1)$ nuqtaning absissasiga aytiladi (7.3.3-b,rasm).

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{x'}{R} = x'}$$

α burchak tangensi va kotangensiga yana quyidagicha ta'rif ham berish mumkin:

α burchakning tangensi deb burchak sinusining burchak kosinusiga nisbatiga α aytiladi.

$$\boxed{tg\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

α burchakning kotangensi deb burchak kosinusining burchak sinusiga α aytiladi.

$$\boxed{ctg\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

7.4-Mavzu: Trigonometrik ayniyatlar va ulardan kelib chiqadigan ayniyatlar

To'g'ri burchakli uchburchak va birlik aylanadan foydalanib burchak sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi uchun bir necha ta'riflarni kiritdik. Ana shu kattaliklar bilan bog'liq bir necha formulalar borki, ularni trigonometrik ayniyatlar deyb yuritiladi. Trigonatmetrik ayniyatlar metematik analiz va goemetriyada juda muhim ahamiyatga ega. Trigonometrik ayniyatlar quyidagicha bo'ladi:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
2. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	5. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
3. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	6. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Isboti: Ayniyatlarni pifagor teoremasidan foydalanib isbotlaymiz.

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1;$

2. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{a}{b} = tg\alpha$; 3. $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b/c}{a/c} = \frac{b}{a} = ctg\alpha$; 4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a} = 1;$

5. $1+tg^2\alpha=1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

6. $1+ctg^2\alpha=1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Quyidagi formula ham trigonametrik ayniyatdan kelib chiqadi:

$$(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=1\pm\sin 2\alpha,\qquad \cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$$
$$\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin 2\alpha,\qquad \cos^6\alpha-\sin^6\alpha=\cos 2\alpha-\frac{1}{8}\sin 4\alpha$$

Trigonametrik ayniyatlardan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1. $\begin{cases}\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ \sin\alpha=\pm\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\\ \sin\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}\end{cases}$

2. $\begin{cases}\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}\\ \cos\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}\\ \cos\alpha=\pm\dfrac{ctg\alpha}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}\end{cases}$

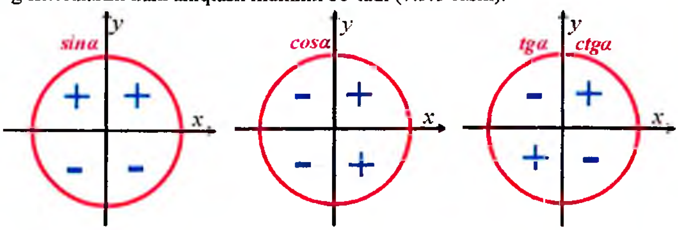
3. $\begin{cases}tg\alpha=\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\\ tg\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\\ tg\alpha=\dfrac{1}{ctg\alpha}\end{cases}$

4. $\begin{cases}ctg\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\\ ctg\alpha=\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\\ ctg\alpha=\dfrac{1}{tg\alpha}\end{cases}$

Yuqoridagi har bir formulada qatnashgan **±** ishora dekart koordinatalar choragiga qarab + yoki – ishora qa'bul qilishini bildiradi.

7.5-Mavzu: Burchak sinusi, kosinusi, tangensi, kotangensining ishoralari va qiymatlari

7.3-mavzuda burchak sinusi, kosinusi, tangensi, kotangenslariga ta'riflar bergan edik. Ana shu ta'riflardan kelib chiqib, burchak sinusi, kosinusi, tangensi, kotangenslarining Dekart koordinatasining turli choraklaridagi ishoralarini aniqlash mumkin bo'ladi. Masalan, $\sin\alpha=y$ bo'lgani uchun uning ishorasi I, II choraklarda musbat, III, IV choraklarda esa manfiy bo'ladi. Xuddi shuningdek, $\cos\alpha=y$ bo'lgani uchun uning ishorasi I, IV choraklarda musbat, II, III choraklarda esa manfiy bo'ladi. $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ formaulalardan foydalanib, $tg\alpha$ va $ctg\alpha$ larning ishoralarini ham aniqlash mumkin bo'ladi (7.5.1-rasm).



7.5.1-rasm

Burchak sinusi, kosinusi, tangensi, kotangensining qiymatlar jadvali quyidagicha:

α	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$	$7\pi/12$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$11\pi/12$	π
α^0	0	15^0	30^0	45^0	60^0	75^0	90^0	105^0	120^0	135^0	150^0	165^0	180^0
sin	0	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	1	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	0	$-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	-1
tg	0	$2-\sqrt3$	$1/\sqrt3$	1	$\sqrt3$	$2+\sqrt3$	$\pm\infty$	$-(2+\sqrt3)$	$-\sqrt3$	-1	$-1/\sqrt3$	$-(2-\sqrt3)$	0
ctg	$\pm\infty$	$2+\sqrt3$	$\sqrt3$	1	$1/\sqrt3$	$2-\sqrt3$	0	$-(2-\sqrt3)$	$-1/\sqrt3$	-1	$-\sqrt3$	$-(2+\sqrt3)$	$\pm\infty$

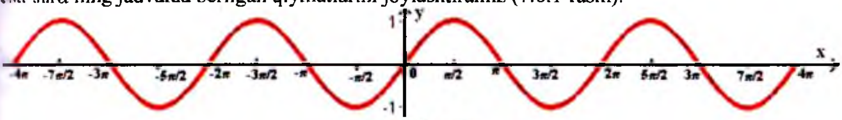
****

α	π	$13\pi/12$	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$17\pi/12$	$3\pi/2$	$19\pi/12$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	$23\pi/12$	2π
α^0	180	195^0	210^0	225^0	240^0	255^0	270^0	285^0	300^0	315^0	330^0	345^0	360^0
sin	0	$-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	-1	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	$-\frac{\sqrt3}{2}$	$-\frac{\sqrt2}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	0	$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt2}{2}$	$\frac{\sqrt3}{2}$	$\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$	1
tg	0	$2-\sqrt3$	$1/\sqrt3$	1	$\sqrt3$	$2+\sqrt3$	$\pm\infty$	$-(2+\sqrt3)$	$-\sqrt3$	-1	$-1/\sqrt3$	$-(2-\sqrt3)$	0
ctg	$\pm\infty$	$2+\sqrt3$	$\sqrt3$	1	$1/\sqrt3$	$2-\sqrt3$	0	$-(2-\sqrt3)$	$-1/\sqrt3$	-1	$-\sqrt3$	$-(2+\sqrt3)$	$\pm\infty$

Bu erda: $\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$, $\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}=\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}$ bo'ladi.

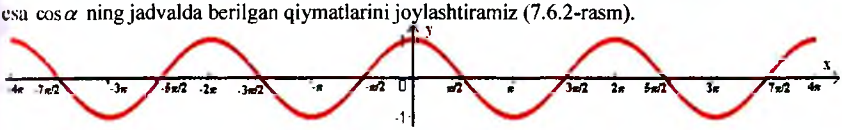
7.6-Mavzu: Trigonometrik funksiyalarning grafiklari. α va -α burchakning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi.

$y=\sin x$ funksiyaning grafigini qurish uchun Ox o'qiga aylana yoyi uzunligini, Oy o'qiga esa $\sin\alpha$ ning jadvalda berilgan qiymatlarini joylashtiramiz (7.6.1-rasm).



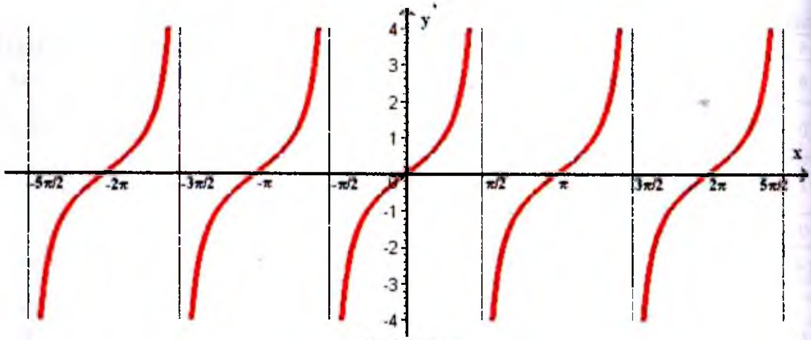
7.6.1-rasm

$y=\cos x$ funksiyaning grafigini qurish uchun Ox o'qiga aylana yoyi uzunligini, Oy o'qiga esa $\cos\alpha$ ning jadvalda berilgan qiymatlarini joylashtiramiz (7.6.2-rasm).



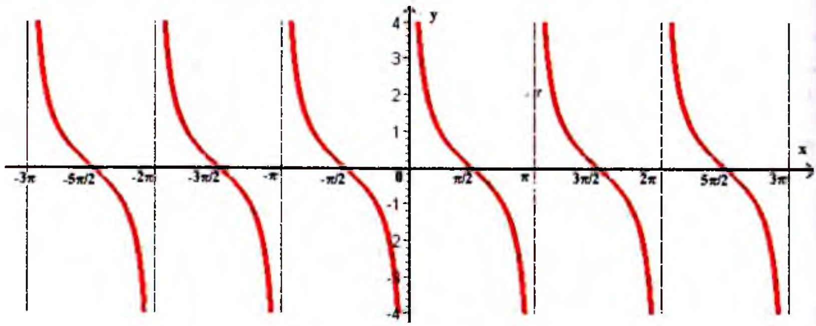
7.6.2-rasm

$y=tgx$ funksiyaning grafigini qurish uchun Ox o'qiga aylana yoyi uzunligini, Oy o'qiga esa $tg\alpha$ ning jadvalda berilgan qiymatlarini joylashtiramiz (7.6.3-rasm).



7.6.3-rasm

$y = ctgx$ funksiyaning grafigini qurish uchun Ox o'qiga aylana yoyi uzunligini, Oy o'qiga esa $ctg\alpha$ ning jadvalda berilgan qiymatlarini joylashtiramiz (7.6.4-rasm).



7.6.4-rasm

7.6.1-rasmdan ko'rinib turibdiki, $y = \sin x$ funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik ekan. Shuning uchun $y = \sin x$ funksiya toq funksiyadir, ya'ni $\sin(-x) = -\sin x$ bo'ladi.

7.6.2-rasmdan ko'rinib turibdiki, $y = \cos x$ funksiyaning grafigi Oy o'qiga nisbatan simmetrik ekan. SHuning uchun $y = \cos x$ funksiya juft funksiyadir, ya'ni $\cos(-x) = \cos x$ bo'ladi.

7.6.3-rasmdan ko'rinib turibdiki, $y = tgx$ funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik ekan. Shuning uchun $y = tgx$ funksiya toq funksiyadir, ya'ni $tg(-x) = -tgx$ bo'ladi.

7.6.4-rasmdan ko'rinib turibdiki, $y = ctgx$ funksiyaning grafigi koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik ekan. Shuning uchun $y = ctgx$ funksiya toq funksiyadir, ya'ni $ctg(-x) = -ctgx$ bo'ladi.

Yuqoridagi fikrlarni e'tiborga olgan holda quyidagilarni yozishimiz mumkin:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ *chunki* $y = \sin x$ *toq funksiya*
2. $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ *chunki* $y = \cos x$ *juft funksiya*
3. $tg(-\alpha) = -tg\alpha$ *chunki* $y = tgx$ *toq funksiya*
4. $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$ *chunki* $y = ctgx$ *toq funksiya*

7.7-Mavzu: Qo'shish formulalari

Qo'shish formulalari deb $\sin(\alpha \pm \beta)$, $\cos(\alpha \pm \beta)$, $tg(\alpha \pm \beta)$ va $ctg(\alpha \pm \beta)$ larni α va β burchaklarning sinus, kosinus, tangens vakotangenslari orqali ifodalovchi formulalarga aytiladi.

Qo'shish formulalari quyidagicha bo'ladi:

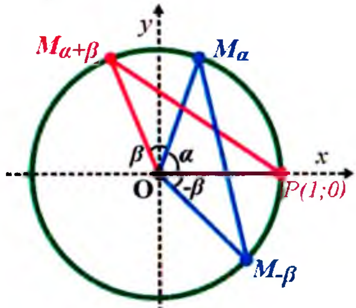
1. $\begin{cases} \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta \end{cases}$

2. $\begin{cases} \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta \end{cases}$

3. $\begin{cases} tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta} \\ tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta} \end{cases}$

4. $\begin{cases} ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta} \\ ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha} \end{cases}$

Isboti: Dastlab birlik aylanadan foydalanib $\cos(\alpha+\beta)$ni isbotlaylik (7.7.1-rasm). Birlik aylanadan olingan $P(1;0)$ nuqtani koordinatalar boshi atrofida α, $-\beta$ hamda $\alpha+\beta$ radian burchaklarga burganda mos holda $M_\alpha, M_{-\beta}$ hamda $M_{\alpha+\beta}$ nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni koordinatalari bilan birgalikda $M_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $M_{-\beta}(\cos(-\beta);\ \sin(\beta))$ hamda $M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta);\ \sin(\alpha+\beta))$ deb yozish mumkin. $\angle POM_{\alpha+\beta}=\angle M_{-\beta}OM_\alpha$ bo'lgani uchun $\Delta POM_{\alpha+\beta}$ va $\Delta M_{-\beta}OM_\alpha$ teng yonli uchburchaklar o'zaro tengdir, ularning $PM_{\alpha+\beta}$ va $M_{-\beta}M_\alpha$ asoslari ham o'zaro tengdir.



7.7.1-rasm

Shuning uchun $(PM_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2$ bo'ladi. Bu asoslarning har birini ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasi va qisqa ko'paytirish formulasidan foydalansak,

$(PM_{\alpha+\beta})^2=(M_{-\beta}M_\alpha)^2$, $\rightarrow$ $(1-\cos(\alpha+\beta))^2+(\sin(\alpha+\beta))^2=(\cos(-\beta)-\cos\alpha)^2+(\sin(-\beta)-\sin\alpha)^2$, $\rightarrow$

$1-2\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha+\beta)=\cos^2\beta-2\cos\beta\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\beta\sin\alpha+\sin^2\alpha$

$2-2\cos\cos(\alpha+\beta)=2-2\cos\alpha\cos\beta+2\sin\alpha\sin\beta$ ifoda hosil bo'ladi. Buni soddalashtirish natijasida esa $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$ qo'shish formulasini olamiz.

Agar $\alpha-\beta$ ni $\alpha+(-\beta)$ deb olish mumkinligidan foydalansak, u holda $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cdot\cos(-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin(-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ natija kelib chiqadi.

Agar $\sin\alpha=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ keltirish formulasidan foydalansak, u holda

$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ natija kelib chiqadi.

Agar $\alpha-\beta$ ni $\alpha+(-\beta)$ deb olish mumkinligidan foydalansak, u holda $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cdot\cos(-\beta)-\cos\alpha\cdot\sin(-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ natija kelib chiqadi.

$tg(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$ ifodani sur'at va maxrajini $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ ga bo'lsak,

$tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$ natija kelib chiqadi.

Agar $\alpha-\beta$ni $\alpha+(-\beta)$ deb olish mumkinligidan foydalansak, u holda

$tg(\alpha-\beta)=tg(\alpha+(-\beta))=\dfrac{tg\alpha+tg(-\beta)}{1-tg\alpha\cdot tg(-\beta)}=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$ natija kelib chiqadi.

$ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$ ifodani sur'at va maxrajini $\sin\alpha\cdot\sin\beta$ ga bo'lsak,

$ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$ natija kelib chiqadi.

Agar $\alpha-\beta$ni $\alpha+(-\beta)$ deb olish mumkinligidan foydalansak, u holda

$$ctg(\alpha-\beta)=ctg(\alpha+(-\beta))=\frac{ctg\alpha\cdot ctg(-\beta)-1}{ctg\alpha+ctg(-\beta)}=\frac{-ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha-ctg\beta}=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$$ natija kelib chiqadi

Qo'shish formulalaridan quyida keltirilgan formulalarni hosil qilish mumkin.

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\\ \sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=-2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\\ \sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}\qquad \begin{cases}\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\\ \sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=-2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}$$

7.8-Mavzu: Ikkilangan va uchlangan burchakning sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensi

Oldingi mavzuda isbot qilingan qo'shish formulalaridan foydalanib, $\beta=\alpha$ bo'lgan hol uchun ikkilangan burchakning sinus, kosinus, tangensi va kotangensi uchun ajoyib formulalarni olishimiz mumkin bo'ladi.

Ikkilangan burchakning sinus, kosinus, tangensi va kotangensi quyidagicha bo'ladi:

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\begin{cases}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ 2\cos^2\alpha-1\\ 1-2\sin^2\alpha\end{cases}$
3. $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg2\alpha=\dfrac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$

Isboti: Formulalarni qo'shish formulalaridan foydalanib hisoblaymiz.

1). $\sin 2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2). $\begin{cases}\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cos^2\alpha-1\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha.\end{cases}$

3). $tg2\alpha=tg(\alpha+\alpha)=\dfrac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha\cdot tg\alpha}=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$. 4). $ctg2\alpha=ctg(\alpha+\alpha)=\dfrac{1-ctg\alpha\cdot ctg\alpha}{ctg\alpha+ctg\alpha}=\dfrac{1-ctg^2\alpha}{2ctg\alpha}$.

Uchlangan burchakning sinus, kosinus, tangensi va kotangensi quyidagicha bo'ladi:

1. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$
2. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
3. $tg3\alpha=\dfrac{tg^3\alpha-3tg\alpha}{3tg^2\alpha-1}$
4. $ctg3\alpha=\dfrac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}$

Isboti: Formulalarni qo'shish formulalaridan foydalanib hisoblaymiz.

1). $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+$
$+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

2). $\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha=$
$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

3). $tg3\alpha=\dfrac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha}=\dfrac{(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha):(4\cos^3\alpha)}{(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha):(4\cos^3\alpha)}=\dfrac{\dfrac{3tg\alpha}{4\cos^2\alpha}-tg^3\alpha}{1-\dfrac{3}{4\cos^2\alpha}}=\dfrac{\dfrac{3tg\alpha}{4}(1+tg^2\alpha)-tg^3\alpha}{1-\dfrac{3}{4}(1+tg^2\alpha)}\cdot\dfrac{4}{4}=$

$=\dfrac{3tg\alpha+3tg^3\alpha-4tg^3\alpha}{4-3-3tg^2\alpha}=\dfrac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}=\dfrac{tg^3\alpha-3tg\alpha}{3tg^2\alpha-1}.$

4). $ctg3\alpha=\dfrac{\cos 3\alpha}{\sin 3\alpha}=\dfrac{(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha):(4\sin^3\alpha)}{(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha):(4\sin^3\alpha)}=\dfrac{ctg^3\alpha-\dfrac{3ctg\alpha}{4\sin^2\alpha}}{\dfrac{3}{4\sin^2\alpha}-1}=\dfrac{ctg^3\alpha-\dfrac{3ctg\alpha}{4}(1+ctg^2\alpha)}{\dfrac{3}{4}(1+ctg^2\alpha)-1}\cdot\dfrac{4}{4}=$

$=\dfrac{4ctg^3\alpha-3ctg\alpha-3ctg^3\alpha-}{3+3ctg^2\alpha-4}=\dfrac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}.$

7.9-Mavzu: Keltirish formulalari

Qo'shish formulalarining ajoyib xususiyatlaridan biri shundaki, bu formulalardan ***keltirish formulalari*** deb ataladigan ko'plab formulalarni keltirib chiqarish mumkin. Keltirish formulalari yordamida sinus, kosinus, tangensi va kotangenslari uchun burchakning *II*, *III*, *IV* choraklaridan *I* chorakka osongina o'tish mumkin bo'ladi.

Keltirish formulalari quyidagilar:

$$\begin{cases}\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha\\ \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \sin(3\pi/2-\alpha)=-\cos\alpha\\ \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha\\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \sin(3\pi/2+\alpha)=-\cos\alpha\\ \sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha\end{cases}$$

* * *

$$\begin{cases}\cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \cos(3\pi/2-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}\cos(\pi/2+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\\ \cos(3\pi/2+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha\end{cases}$$

* * *

$$\begin{cases}tg(\pi/2-\alpha)=ctg\alpha\\ tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha\\ tg(3\pi/2-\alpha)=ctg\alpha\\ tg(2\pi-\alpha)=-tg\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}tg(\pi/2+\alpha)=-ctg\alpha\\ tg(\pi+\alpha)=tg\alpha\\ tg(3\pi/2+\alpha)=-ctg\alpha\\ tg(2\pi+\alpha)=tg\alpha\end{cases}$$

* * *

$$\begin{cases}ctg(\pi/2-\alpha)=tg\alpha\\ ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha\\ ctg(3\pi/2-\alpha)=tg\alpha\\ ctg(2\pi-\alpha)=-ctg\alpha\end{cases}\qquad \begin{cases}ctg(\pi/2+\alpha)=-tg\alpha\\ ctg(\pi+\alpha)=ctg\alpha\\ ctg(3\pi/2+\alpha)=-tg\alpha\\ ctg(2\pi+\alpha)=ctg\alpha\end{cases}$$

* * *

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha\pm 2\pi k)&=\sin\alpha\\ \cos(\alpha\pm 2\pi k)&=\cos\alpha\end{aligned}\right\}T=2\pi,\ k\in Z\qquad \left.\begin{aligned}tg(\alpha\pm\pi k)&=tg\alpha\\ ctg(\alpha\pm\pi k)&=ctg\alpha\end{aligned}\right\}T=\pi,\ k\in Z$$

Bu erda: T – eng kichik musbat davr

7.10-Mavzu: Sinuslar va kosinuslar yig'indisi va ayirmasi formulalari

Yig'indidan ko'paytmaga va aksincha ko'paytmadan yig'indiga o'tish sinuslar va kosinuslar yig'indisi va ayirmasi formulalari yordamida amalga oshiriladi.

Sinuslar va kosinuslar yig'indisi va ayirmasi formulalari quyidagilar:

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$	4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

Isboti:

Avval belgilash kiritib olamiz, so'ngra ularni burchaklar orqali ifodalab olamiz.

$$\begin{cases} x+y=\alpha & (1) \\ x-y=\beta & (2) \end{cases}; \rightarrow \begin{cases} x=\frac{(1)+(2)}{2} \\ y=\frac{(1)-(2)}{2} \end{cases}; \rightarrow \begin{cases} x=\frac{\alpha+\beta}{2} \\ y=\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}.$$

1). $\sin\alpha+\sin\beta=\sin(x+y)+\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y+\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=$
$=2\sin x\cdot\cos y=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

2). $\sin\alpha-\sin\beta=\sin(x+y)-\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y-\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y=$
$=2\sin y\cdot\cos x=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$

3). $\cos\alpha+\cos\beta=\cos(x+y)+\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=$
$=2\cos x\cdot\cos y=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

4). $\cos\alpha-\cos\beta=\cos(x+y)-\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y-\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y=$
$=-2\sin x\cdot\sin y=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

7.11-Mavzu: Sinuslar va kosinuslar ko'paytmalarining formulalari

Ba'zi hollarda sinuslar va kosinuslar ko'paytmasini ularning yig'indisiga keltirish zarurati tug'iladi. Masalan, sinuslar ko'paytmasidan integral olish juda murakkablik tug'diradi. Ularni yig'indiga keltirganda esa ish juda engillashadi.

Sinuslar va kosinuslar ko'paytmalarini formulalari quyidagicha bo'ladi:

1. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$
2. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$
3. $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$

Isboti: Formulalarni birma-bir isbotlaymiz.

1. $\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}\cdot[\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta]=\sin\alpha\cdot\sin\beta$.
2. $\frac{1}{2}\cdot[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}\cdot[\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta]=\cos\alpha\cdot\cos\beta$.
3. $\frac{1}{2}\cdot[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]=\frac{1}{2}\cdot[\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta]=\sin\alpha\cdot\cos\beta$.

7.12-Mavzu: Yarim argument formulalari

Ikkilangan burchak formulalari hamda trigonametrik ayniyatlardan foydalanib yarim argument formulalarini hosil qilish mumkin.

YArim argument formulalari quyidagilar:

$$1.\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad 2.\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

$$3.\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad 4.\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

$$5.\quad tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$6.\quad tg\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$7.\quad ctg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$8.\quad ctg\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}=\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$$

Isboti: Formulalarni ikkilangan burchak formulalaridan foydalanib isbotlaymiz.

2). $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha, \rightarrow \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \rightarrow \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}.$

1). $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \rightarrow \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$

4) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1, \rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}.$

3). $\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1, \rightarrow \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}, \rightarrow \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$

5). Bunda $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ yoki $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ yoki $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$ bo'ladi.

6). Bunda $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$ yoki $\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$ yoki $\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}}=\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ bo'ladi.

7). Bunda $tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ yoki $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{1-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ yoki $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$ bo'ladi.

8). Bunda $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}}=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$ yoki $\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}}{1-\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$ yoki $\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}=\frac{1+\cos 2\alpha}{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}}=\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$ bo'ladi.

8-BOB: TRIGONOMETRIK TENGLAMALAR VA TENGSIZLIKLAR

8.1-Mavzu: Oddiy trigonometrik tenglamalar

Oddiy trigonometrik tenglamalar deb $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$ ko'rinishdagi tenglamalarga aytiladi. Ushbu mavzuda mana shu oddiy tenglamalar va ularning yechilish yo'llari haqida so'z yuritamiz.

1. sinx = a ko'rinishdagi tenglama:

a sonning arksinusi deb $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ kesmaga tegishli shunday b songa aytiladiki, bunda b sonning sinusi a ga teng bo'ladi.

$$\arcsin a = b, \quad \Rightarrow \quad a = \sin b$$

$$bu\ yerda: a \in [-1;1] - qiymat, son;\ b \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] - burchak$$

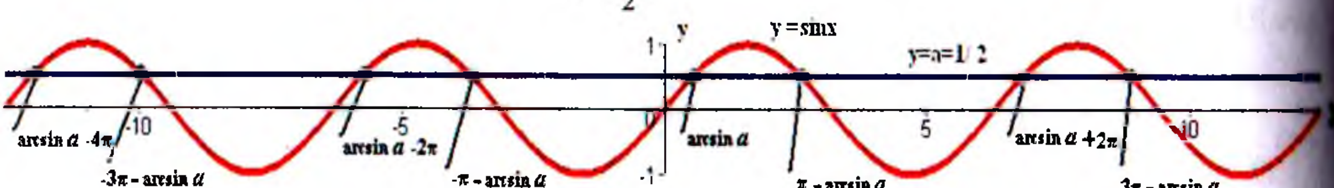
Masalan:

$\arcsin\frac{1}{2} = 30^0$, *chunki* $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, *chunki* $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arcsin 1 = 90^0$, *chunki* $\sin 90^0 = 1$.

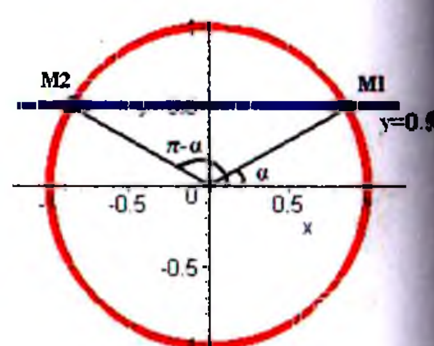
Misol №1: $\sin x = \frac{1}{2}$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.

Yechish: Bu tenglamaning yechimi $\begin{cases} y = \sin x \\ y = 1/2 \end{cases}$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.1.1-rasm). Birlik aylanaga ko'ra esa, sinuslar chizig'i oordinatalar o'qi bo'lgani uchun $\sin x = \frac{1}{2}$ tenglamaning yechimi birlik aylana va $y = \frac{1}{2}$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari bo'ladi (8.1.2-rasm). Rasmlardan ham ko'rinib turibdiki, $y = \sin x$ funksiya va $y = \frac{1}{2}$ to'g'ri chiziq bir davrda 2



8.1.1-rasm

marta, ya'ni M_1 va M_2 nuqtalarda kesishadi. M_1 nuqtada $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n$ burchaklarda va M_2 nuqtada esa $x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n$ burchaklarda kesishadi. Bu javoblarni alohida-alohida yoki birlashtirib yozish mumkin.



8.1.2-rasm

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n \\ x_2 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n = -\arcsin\frac{1}{2} + (2n+1)\pi \end{cases} \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k$$

$$\begin{cases} Agar\ \ k = 2n\ - jufi\ son\ bo'lsa,\ x_1 = (-1)^{2m}\arcsin\frac{1}{2} + \pi \cdot 2n = \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n\ \ bo'ladi \\ Agar\ \ k = 2n+1\ - toq\ son\ bo'lsa,\ x_1 = (-1)^{2m+1}\arcsin\frac{1}{2} + \pi \cdot (2n+1) = \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n\ \ bo'ladi. \end{cases}$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi $x = (-1)^k\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(k \in Z)$ bo'lar ekan.

Misol №2: $2\sin x + \sqrt{3} = 0$ tenglamani eching.

Yechish: Formuladan foydalanib ishlasak,

$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \rightarrow \; x = (-1)^k \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \pi k = (-1)^k(-\frac{\pi}{3}) + \pi k = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + \pi k, \; (k \in Z)$ bo'ladi.

Yuqorida tishlangan misollarga asoslangan holda $\sin x = a$ ko'rinishdagi tenglamaning umumiy yechimini yozishimiz mumkin bo'ladi.

Shunday qilib, $\sin x = a$ ko'rinishdagi tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad (bu\ yerda: k \in Z, |a| < 1)}$$

$a = -1, 0, 1$ bo'lgan xususiy hollarda esa alohida formulalar keltirish mumkin.

Xususiy hollar:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin x = -1, & \rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ \sin x = 0, & \rightarrow \quad x = \pi n \\ \sin x = 1; & \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}}$$

2. cosx = a ko'rinishdagi tenglama:

a sonning arkkosinusi deb $[0; \pi]$ kesmaga tegishli shunday b songa aytiladiki, bunda b sonning kosinusi a ga teng bo'ladi.

$$\boxed{\begin{array}{c} \arccos a = b, \quad \Rightarrow \quad a = \cos b \\ bu\ yerda: a \in [-1;1] - qiymat, son;\ b \in [0;\pi] - burchak \end{array}}$$

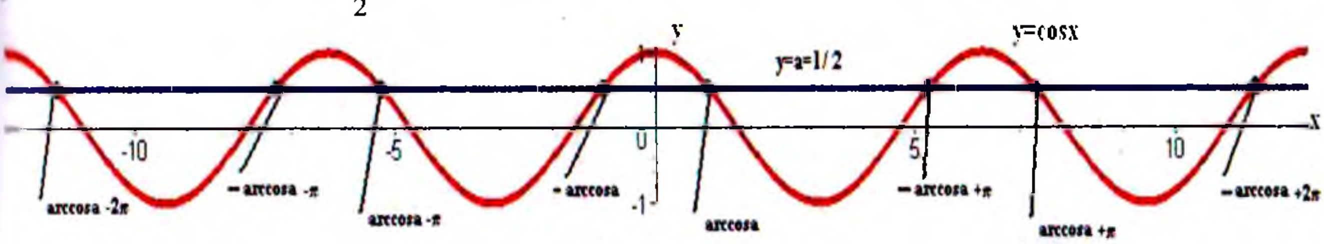
Masalan:

$\arcsin\frac{1}{2} = 60^0$, *chunki* $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$. $\qquad \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{3\pi}{4}$, *chunki* $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\arccos 1 = 0^0$, *chunki* $\cos 0^0 = 1$. $\qquad \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$, *chunki* $\cos(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

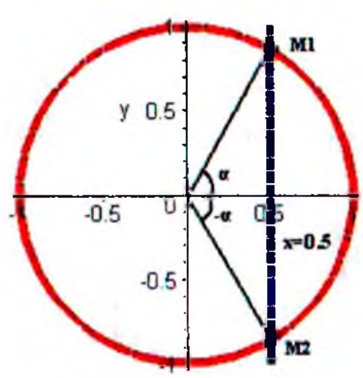
Misol №3: $\cos x = \frac{1}{2}$ funksiyaning barcha yechimlarini toping

<u>Yechish:</u> Bu tenglamaning yechimi $\begin{cases} y = \cos x \\ y = 1/2 \end{cases}$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.1.3-rasm). Birlik aylanaga ko'ra esa, kosinuslar chizig'i absissalar o'qi bo'lgani uchun $\cos x = \frac{1}{2}$ tenglamaning yechimi birlik aylana va $x = \frac{1}{2}$ to'g'ri chiziqning kesishish nuqtalari bo'ladi (8.1.4-rasm).



8.1.3-rasm

Rasmlardan ham ko'rinib turibdiki, $y = \cos x$ funksiya va $y = \frac{1}{2}$ to'g'ri chiziq bir davrda 2 marta, ya'ni M_1 va M_2 nuqtalarda kesishadi. M_1 nuqtada $x_1 = \arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$ burchaklarda va M_2 nuqtada esa $x_2 = -\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$ burchaklarda kesishadi. Bu javoblarni alohida-alohida yoki birlashtirib yozish mumkin.



8.1.4-rasm

$$\begin{cases} x_1 = \arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi n \\ x_2 = -\arccos\dfrac{1}{2} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \quad x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi $x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ (n \in Z)$ bo'ladi.

Misol №4: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$ tenglamani eching.

Yechish: Formuladan foydalanib ishlasak,

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \rightarrow \quad x = \pm\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi n = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\,,\ (n \in Z)$$ bo'ladi.

Yuqorida ishlangan misollarga asoslangan holda $\sin x = a$ ko'rinishdagi tenglamaning umumiy yechimini yozishimiz mumkin bo'ladi.

$\cos x = a$ ko'rinishdagi tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad (bu\ yerda: n \in Z, |a| < 1)}$$

$a = -1,\ 0,\ 1$ bo'lgan xususiy hollarda esa alohida formulalar keltirish mumkin.

Xususiy hollar:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos x = -1, & \rightarrow & x = \pi + 2\pi n \\ \cos x = 0, & \rightarrow & x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ \cos x = 1, & \rightarrow & x = 2\pi n \end{array}}$$

3. tgx = a ko'rinishdagi tenglama:

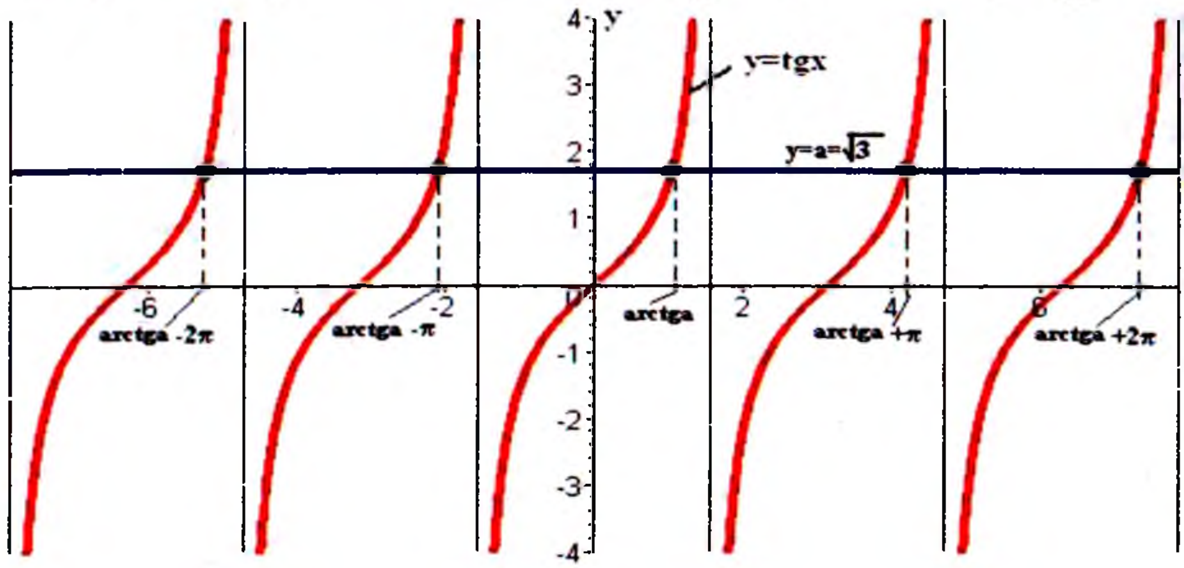
a sonning arktangensi deb $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ intervalga tegishli shunday b songa aytiladiki, bunda b sonning tangensi a ga teng bo'ladi.

$$\boxed{\begin{array}{l} arctg\, a = b, \quad \Rightarrow \quad a = tg\, b \\ bu\ \ yerda: a - haqiqiy\ \ son,\ b \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right) - burchak \end{array}}$$

Masalan:

$arctg(-\sqrt{3}) = -60^0$, *chunki* $tg(-60^0) = -\sqrt{3}$. $\quad arctg\,(2+\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{12}$, *chunki* $tg(\frac{5\pi}{12}) = 2+\sqrt{3}$.

$arctg\,1 = \frac{\pi}{4}$, *chunki* $tg\frac{\pi}{4} = 1$. $\quad arctg\,(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{\pi}{6}$, *chunki* $tg(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.



8.1.5-rasm

Misol №5: $tgx = \sqrt{3}$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.

Yechish: Bu tenglamaning yechimi $\begin{cases} y = tgx \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.1.5-rasm). Rasmdan ham ko‘rinib turibdiki, $y = tgx$ funksiya va $y = \sqrt{3}$ to‘g‘ri chiziq bir davrda faqat bir marta, ya'ni $arctga + \pi n = arctg\sqrt{3} + \pi n$ burchaklarda kesishadi.

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi $x = arctg\sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ (n \in Z)$ bo‘lar ekan.

Yuqorida ishlangan misolga asoslangan holda $tgx = a$ ko‘rinishdagi tenglamaning umumiy yechimini yozishimiz mumkin bo‘ladi.

$tgx = a$ ko‘rinishdagi tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{x = arctga + \pi n, \quad (bu\ yerda: n \in Z,\ a - haqiqiy\ \ son)}$$

$a = -1,\ 0,\ 1$ bo‘lgan xususiy hollarda esa alohida formulalar keltirish mumkin.

Xususiy hollar:

$$\boxed{\begin{array}{lll} tgx = -1, & \rightarrow & x = -\frac{\pi}{4} + \pi n \\ tgx = 0, & \rightarrow & x = \pi n \\ tgx = 1, & \rightarrow & x = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{array}}$$

4. $ctgx = a$ ko‘rinishdagi tenglama:

a sonning arkkotangensi deb $(0;\pi)$ intervalga tegishli shunday b songa aytiladiki, bunda b sonning tangensi a ga teng bo‘ladi.

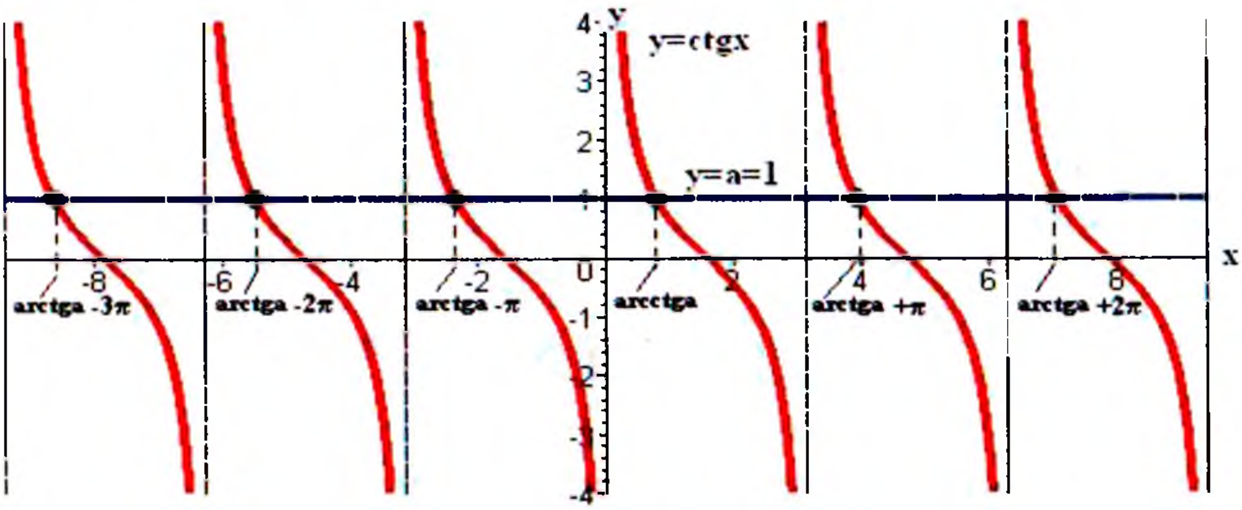
$$\boxed{\begin{array}{l} arcctg\, a = b, \quad \Rightarrow \quad a = ctg\, b \\ bu\ \ yerda: a - haqiqiy\ \ son,\ \ b \in (0;\ \pi) - burchak \end{array}}$$

Masalan:

$arcctg(-\sqrt{3}) = 150^0$, *chunki* $ctg(150^0) = -\sqrt{3}$. $\qquad arcctg\,(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{12}$, *chunki* $ctg(\frac{\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$.

$arcctg\,1 = \frac{\pi}{4}$, *chunki* $ctg\,\frac{\pi}{4} = 1$. $\qquad arcctg\,(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2\pi}{3}$, *chunki* $ctg(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Misol: $ctgx = 1$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.



8.1.6-rasm

Yechish: Bu tenglamaning yechimi $\begin{cases} y = ctgx \\ y = 1 \end{cases}$ funksiyalar grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.1.6-rasm). Rasmdan ham ko‘rinib turibdiki, $y = ctgx$ funksiya va $y = 1$ to‘g‘ri chiziq bir davrda faqat bir marta, ya'ni $arcctga + \pi n = arcctg1 + \pi n$ burchaklarda kesishadi. Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi $x = arcctg1 + \pi n = \frac{\pi}{4} + \pi n;\ (n \in Z)$ bo‘lar ekan.

Yuqorida ishlangan misolga asoslangan holda $tgx = a$ ko'rinishdagi tenglamaning umumiy yechimini yozishimiz mumkin bo'ladi.

$ctgx = a$ ko'rinishdagi tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x = arcctga + \pi n, \quad (bu\ yerda: n \in Z,\ a - haqiqiy\ son)}$$

$a = -1, 0, 1$ bo'lgan xususiy hollarda esa alohida formulalar keltirish mumkin.

Xususiy hollar:

$$\boxed{\begin{array}{lll} ctgx = -1, & \rightarrow & x = \dfrac{3\pi}{4} + \pi n \\ ctgx = 0, & \rightarrow & x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ ctgx = 1, & \rightarrow & x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{array}}$$

8.2-Mavzu: Turli trigonametrik tenglamalar

Ushbu mavzuda biz oddiy trigonametrik tenglamalardan farq qiluvchi va maxsus yo'llar bilan echiladigan ba'zi trigonametrik tenglamalar va ularning yechilish yo'llari bilan tanishamiz.

1. Kvadrat tenglamaga keltiriladigan tenglamalar:

Ba'zi trigonametrik tenglamalarni kvadrat tenglamaga keltirish orqali yechish mumkin. ana shularga doir bir necha misollar yechib ko'raylik.

Misol №1: $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

Yechish: Bu tenglamada $\cos x = t$ deb belgilash kiritadigan bo'lsak, u holda $t^2 + t - 2 = 0$ kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. Bunda diskriminant $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$ bo'lib, yechim $t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 1}$, $\rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$ kelib chiqadi. Bu yechimlarni $\cos x$ ga tenglab $\begin{cases} \cos x \neq -2 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ ifodalarni, ulardan esa $x = 2\pi n$ degan javobni olamiz.

Misol №2: $tgx - 2ctgx + 1 = 0$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

Yechish: Bu tenglamada $ctgx = \frac{1}{tgx}$ ekanligidan $tgx - \frac{2}{tgx} + 1 = 0$ tenglama, bu tenglamani ikkala tarafini ham $tgx \neq 0$ $(x \neq \pi n)$ ga ko'paytirish natijasida $tg^2 x + tgx - 2 = 0$ kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. $tgx = t$ deb belgilash kiritadigan bo'lsak, u holda $t^2 + t - 2 = 0$ 1-misoldagi kabi kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Uni yechish natijasida $\begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$ va $\begin{cases} tgx = -2 \\ tgx = 1 \end{cases}$ hosil bo'ladi. Demak, berilgan tenglama yechimi $\begin{cases} x_1 = -arctg2 + \pi n \\ x_2 = \dfrac{\pi}{4} + \pi n \end{cases}$ bo'ladi.

2. asinkx+bcoskx=s ko'rinishdagi tenglama:

$a \sin kx + b \cos kx = c$ ko'riishdagi tenglamaning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{2}{k} arctg\left(\frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{b + c}\right) + \frac{2\pi n}{k}, \quad x \neq \frac{\pi}{k} + \frac{2\pi n}{k}}$$

Isboti: Ikkilangan burchak formulalaridan foydalanib, $\sin kx = 2\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2}$, $\cos kx = \cos^2\frac{kx}{2} - \sin^2\frac{kx}{2}$ va $1 = \sin^2\frac{kx}{2} + \cos^2\frac{kx}{2}$ deb yozamiz. Shunda berilgan tenglama ushbu $2a\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2} + b\cos^2\frac{kx}{2} - b\sin^2\frac{kx}{2} = c\sin^2\frac{kx}{2} + c\cos^2\frac{kx}{2}$, $\rightarrow$ $(b + c)\sin^2\frac{kx}{2} + (c - b)\cos^2\frac{kx}{2} - 2a\sin\frac{kx}{2}\cos\frac{kx}{2} = 0$ tenglama hosil bo'ladi. Uning har ikkala tarafini ham $\cos^2\frac{kx}{2}$ ga bo'lsak, $(b + c)tg^2\frac{kx}{2} - 2atg\frac{kx}{2} + c - b = 0$

tenglama hosil bo'ladi. $\cos^2\frac{kx}{2}$ ga bo'lganda $\cos\frac{kx}{2}\neq 0,\ \rightarrow\ x\neq\frac{\pi}{k}+\frac{2\pi n}{k}$ ekanligini e'tiborga olishimiz kerak. Diskriminant $D=4a^2-4(b+c)(c-b)=4(a^2+b^2-c^2)$ bo'ladi. Tenglama yechimlari

$$tg\frac{kx}{2}=\frac{2a\pm\sqrt{4(a^2+b^2-c^2)}}{2(b+c)}=\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c},\ \rightarrow\ x_{1,2}=\frac{2}{k}arctg\left(\frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}\right)+\frac{2\pi n}{k}$$ bo'ladi.

$a\sin kx+b\cos kx=c$ ko'riishdagi tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda ham bo'lishi mumkin:

$$\boxed{x_{1,2}=\frac{1}{k}\left(arctg\frac{a}{b}\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+\frac{2\pi n}{k}}$$

Isboti: Bunda koeffitsientlarni $\begin{cases}a=A\sin\alpha & (1)\\ b=A\cos\alpha & (2)\end{cases}$ deb belgilash kiritamiz. Bunda (1) va (2) tenglamalarni kvadratga oshirib qo'shsak, $a^2+b^2=A^2$ ifodaga, (1) va (2) tenglamalarni nisbati esa $tg\alpha=\frac{a}{b}$ ifodaga ega bo'lamiz. Bulardan esa $\begin{cases}A=\sqrt{a^2+b^2}\\ \alpha=arctg\frac{a}{b}\end{cases}$ natija hosil bo'ladi. (1) va (2) tenglamalarni berilgan tenglamaga qo'ysak, $a\sin kx+b\cos kx=c,\rightarrow A\sin kx\sin\alpha+A\cos kx\cos\alpha=c,\rightarrow$ $A\cos(kx-\alpha)=c$ tenglamaga ga bo'lamiz. Undan esa $kx-\alpha=\pm\arccos\frac{c}{A}+2\pi n,\ \rightarrow\ x=\frac{1}{k}\left(\alpha\pm\arccos\frac{c}{A}\right)+\frac{2\pi n}{k}$ yechim kelib chiqadi. Bu yechimni $x=\frac{1}{k}\left(arctg\frac{a}{b}\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)+\frac{2\pi n}{k}$ deb ham yozish mumkin.

$a\sin kx+b\cos kx=c$ ko'riishdagi tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda ham bo'lishi mumkin:

$$\boxed{x_{1,2}=\pm\frac{1}{k}\arccos\left(\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}\right)+\frac{2\pi n}{k}}$$

Isboti: Bunda tenglamani $a\sin kx=c-b\cos kx$ ko'rinishga keltirib, so'ngra uni kvadratga oshirsak, $a^2\sin^2kx=c^2-2bc\cos kx+b^2c\cos^2kx$ hosil bo'ladi. Ketma-ket algebraik almashtirishlar natijasida $a^2-a^2\cos^2kx=c^2-2bc\cos kx+b^2\cos^2kx,\ \rightarrow\ (a^2+b^2)\cos^2kx-2bc\cos kx+c^2-a^2=0$ kvadrat tenglama hosil bo'ladi. Diskriminantni hisoblaganda $D=4b^2c^2-4(a^2+b^2)(c^2-a^2)=4(a^4+a^2b^2-a^2c^2)=4a^2(a^2+b^2-c^2)$ ifodani olamiz. Tenglama yechimi uchun $\cos kx=\frac{2bc\pm2a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{2(a^2+b^2)}=\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2},\ \rightarrow\ x_{1,2}=\pm\frac{1}{k}\arccos\left(\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}\right)+\frac{2\pi n}{k}$ ifoda kelib chiqadi. Shuni ham eslatib o'tish kerakki, bu usulda kvadratga oshirganimizda chet ildiz paydo bo'ladi. Chiqqan javoblarni berilgan tenglamaga qo'yib tekshirish orqali yechimlar ichidan to'g'rilarini ajratib olish kerak.

3. Sinuslar, kosinuslar, tangenslar va kotangenslar ayirmasiga keltiriladigan tenglamalar:

$\sin x=\sin y,\ (x>y)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\begin{cases}x-y=2\pi n\\ x+y=\pi+2\pi n\end{cases}}$$

Isboti: Sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanamiz. Unga ko'ra

$$\sin x-\sin y=0,\ \rightarrow\ 2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}=0,\ \rightarrow\ \begin{cases}\sin\frac{x-y}{2}=0\\ \cos\frac{x+y}{2}=0\end{cases},\ \rightarrow\ \begin{cases}\frac{x-y}{2}=\pi n\\ \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{cases},\ \rightarrow\ \begin{cases}x-y=2\pi n\\ x+y=\pi+2\pi n\end{cases}$$ bo'ladi.

$\cos x=\cos y,\ (x>y)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x-y=2\pi n \\ x+y=2\pi n \end{cases}$$

Isboti: Sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanamiz. Unga ko'ra

$\cos x-\cos y=0, \rightarrow -2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\sin\frac{x+y}{2}=0, \rightarrow \begin{cases} \sin\frac{x-y}{2}=0 \\ \sin\frac{x+y}{2}=0 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} \frac{x-y}{2}=\pi n \\ \frac{x+y}{2}=\pi n \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} x-y=2\pi n \\ x+y=2\pi n \end{cases}$ bo'ladi.

$\sin x=\cos y$, $(x>y)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n \end{cases}$$

Isboti: Sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanamiz. Unga ko'ra

$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=0, \rightarrow 2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+y}{2}\cdot\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-y}{2}=0, \rightarrow \begin{cases} \sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+y}{2}=0 \\ \cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-y}{2}=0 \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} \frac{x-\frac{\pi}{2}+y}{2}=\pi n \\ \frac{x+\frac{\pi}{2}-y}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n \end{cases}, \rightarrow \begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2}+2\pi n \\ x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n \end{cases}$

bo'ladi.

$tgx=tgy$, $(x>y)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x-y=\pi n, \quad \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \end{cases}$$

Isboti: Tangenslarni sinus va kosinuslar nisbati ko'rinishida ifodalab, kasrlarga umumiy maxraj beramiz. So'ngra sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanamiz. Unga ko'ra $tgx-tgy=0, \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=0, \rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}=0$ bo'ladi. Kasrning sur'atini nolga tenglab, maxrajini esa noldan farqli deb ishlaymiz. SHunda $x-y=\pi n, \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \\ y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \end{cases}$ natija kelib chiqadi.

$ctgx=ctgy$, $(x>y)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x-y=\pi n, \quad \begin{cases} x\neq\pi n \\ y\neq\pi n \end{cases}$$

Isboti: Kotangenslarni sinus va kosinuslar nisbati ko'rinishida ifodalab, kasrlarga umumiy maxraj beramiz. So'ngra sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanamiz. Unga ko'ra $ctgx-ctgy=0, \rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\cos y}{\sin y}=0, \rightarrow \frac{-\sin(x-y)}{\sin x\cdot\sin y}=0$ bo'ladi. Kasrning sur'atini nolga tenglab, maxrajini esa noldan farqli deb ishlaymiz. SHunda $x-y=\pi n, \begin{cases} x\neq\pi n \\ y\neq\pi n \end{cases}$ natija kelib chiqadi.

$tgx=ctgy$, $(x>y)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$x-y=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \\ y\neq\pi n \end{cases}$$

Isboti: Avvala keltirish formulasidan foydalanib kotangensni tangensga aylantiramiz. Tangenslarni sinus va kosinuslar nisbati ko'rinishida ifodalab, kasrlarga umumiy maxraj beramiz. So'ngra sinuslar ayirmasi formulasidan foydalanamiz. Unga ko'ra

$\dots\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=0, \rightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=0, \rightarrow \frac{\sin x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=0, \rightarrow \frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{2}+y\right)}{\cos x\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}=0$ bo'ladi.

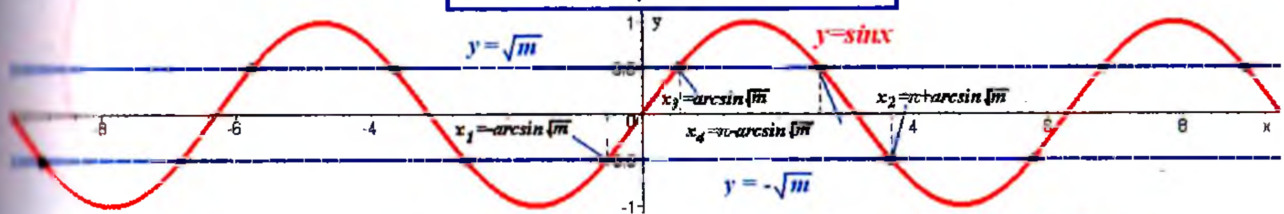
...ning sur'atini nolga tenglab, maxrajini esa noldan farqli deb ishlaymiz. SHunda

$\dots y=\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad \begin{cases} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n \\ y\neq\pi n \end{cases}$ natija kelib chiqadi.

4. Kvadrati nomanfiy son bo'lgan tenglamalar:

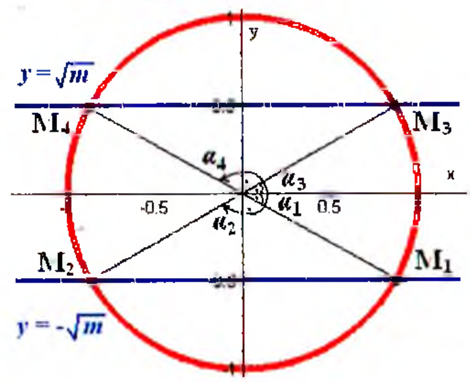
$\sin^2 x=m$ $(0\leq m\leq 1)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x=\pm\arcsin\sqrt{m}+\pi n, \quad n\in Z}$$



a)

Isboti: Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tenglamani $(\sin x-\sqrt{m})(\sin x+\sqrt{m})=0$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratamiz. Ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglash orqali $\begin{cases}\sin x=-\sqrt{m}\\ \sin x=\sqrt{m}\end{cases}$ ni olamiz. Berilgan tenglamaning yechimi $\begin{cases}y=\sin x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ va $\begin{cases}y=\sin x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.2.1-a,rasm). $\begin{cases}y=\sin x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar



b)

8.2.1-rasm

$x=(-1)^k\arcsin(-\sqrt{m})+\pi n, \Rightarrow \begin{cases}x_1=-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\\ x_2=\pi+\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda, $\begin{cases}y=\sin x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar esa

$x=(-1)^k\arcsin\sqrt{m}+\pi n, \Rightarrow \begin{cases}x_3=\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\\ x_4=\pi-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda kesishadi. x_1 va x_4 larni birgalikda

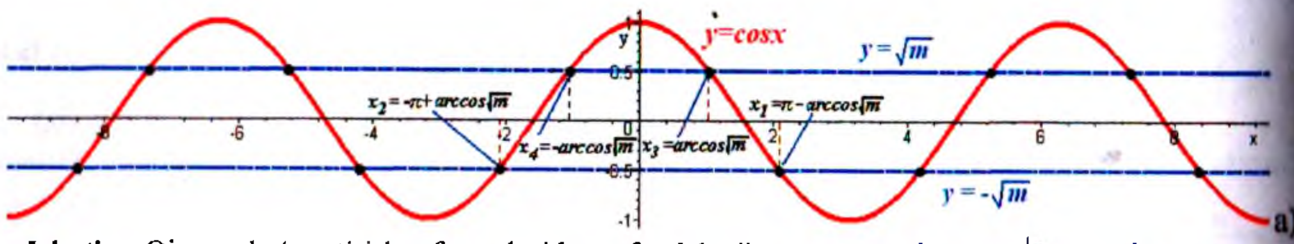
$\begin{cases}x_1=-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\\ x_4=\pi-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}; \Rightarrow x_{1,4}=-\arcsin\sqrt{m}+\pi n$ deb, x_2 va x_3 larni birgalikda

$\begin{cases}x_2=\pi+\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\\ x_3=\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}; \Rightarrow x_{2,3}=\arcsin\sqrt{m}+\pi n$ deb olish mumkin. $x_{1,4}$ va $x_{2,3}$ larni birga umumlashtirib eng umumiy javob $x_{1,2,3,4}=\pm\arcsin\sqrt{m}+\pi n$ ni olamiz.

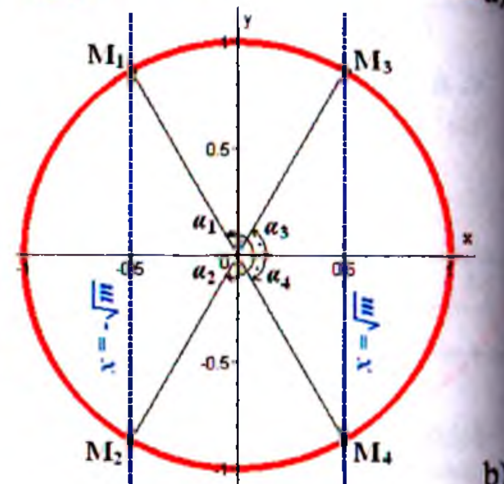
Berilgan tenglamani birlik aylanadan foydalanib ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko'ra esa, sinuslar chizig'i oordinatalar o'qi bo'lgani uchun $\sin x=-\sqrt{m}$ tenglamaning yechimi birlik aylana va $y=-\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqning M_1 va M_2 kesishish nuqtalari bo'ladi. $\sin x=\sqrt{m}$ tenglamaning yechimi esa birlik aylana va $y=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqning M_3 va M_4 kesishish nuqtalari bo'ladi (8.2.1-b,rasm). Bu to'rtta nuqtaning koordinatalarini birlashtirib ham $x_{1,2,3,4}=\pm\arcsin\sqrt{m}+\pi n$ javobni chiqarish mumkin.

$\cos^2 x=m$ $(0\leq m\leq 1)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x=\pm\arccos\sqrt{m}+\pi n, \quad n\in Z}$$



Isboti: Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tenglamani $(\cos x-\sqrt{m})(\cos x+\sqrt{m})=0$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratamiz. Ko'pytuvchilarning har birini nolga tenglash orqali $\begin{cases}\cos x=-\sqrt{m}\\ \cos x=\sqrt{m}\end{cases}$ ni olamiz. Berilgan tenglamaning yechimi $\begin{cases}y=\cos x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ va $\begin{cases}y=\cos x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.2.2-a,rasm). $\begin{cases}y=\cos x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar



8.2.2-rasm

$x=\pm\arccos\left(-\sqrt{m}\right)+2\pi n,\ \Rightarrow$

$\begin{cases}x_1=\arccos\left(-\sqrt{m}\right)+2\pi n=\pi-\arccos\sqrt{m}+2\pi n\\ x_2=-\arccos\left(-\sqrt{m}\right)+2\pi n=-\pi+\arccos\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda,

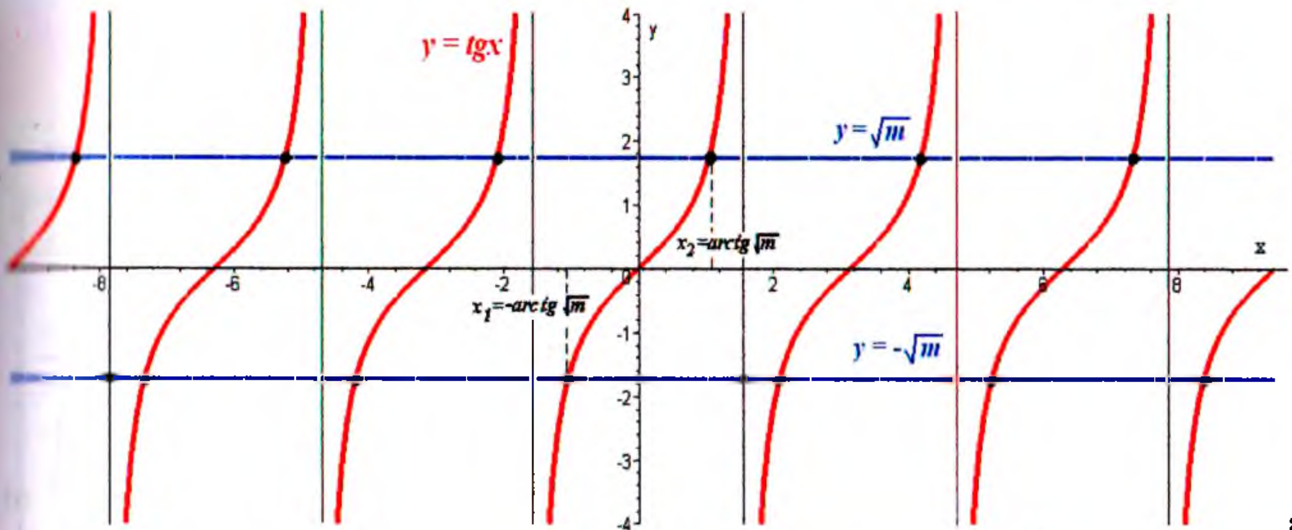
$\begin{cases}y=\cos x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar esa $x=\pm\arccos\sqrt{m}+2\pi n,\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_3=\arccos\sqrt{m}+2\pi n\\ x_4=-\arccos\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda kesishadi. x_1 va x_4 larni birgalikda $\begin{cases}x_1=\pi-\arccos\sqrt{m}+2\pi n\\ x_4=-\arccos\sqrt{m}+2\pi n\end{cases};\ \Rightarrow\ x_{1,4}=-\arccos\sqrt{m}+\pi n$ deb, x_2 va x_3 larni birgalikda $\begin{cases}x_2=-\pi+\arccos\sqrt{m}+2\pi n\\ x_3=\arccos\sqrt{m}+2\pi n\end{cases};\ \Rightarrow\ x_{2,3}=\arccos\sqrt{m}+\pi n$ deb olish mumkin. $x_{1,4}$ va $x_{2,3}$larni birga umumlashtirib eng umumiy javob $\alpha_{1,2,3,4}=\pm\arccos\sqrt{m}+\pi n$ ni olamiz.

Berilgan tenglamani birlik aylanadan foydalanib ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko'ra esa, sinuslar chizig'i oordinatalar o'qi bo'lgani uchun $\cos x=-\sqrt{m}$ tenglamaning yechimi birlik aylana va $x=-\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqning M_1 va M_2 kesishish nuqtalari bo'ladi. $\sin x=\sqrt{m}$ tenglamaning yechimi esa birlik aylana va $x=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqning M_3 va M_4 kesishish nuqtalari bo'ladi (8.2.2-b,rasm). Bu to'rtta nuqtaning koordinatalarini birlashtirib ham $\alpha_{1,2,3,4}=\pm\arccos\sqrt{m}+\pi n$ javobni chiqarish mumkin.

$tg^2x=m\ (m\geq 0)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

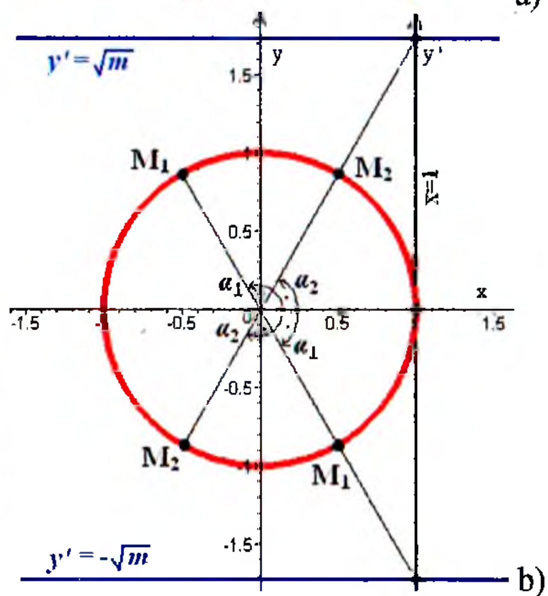
$$\boxed{x=\pm arctg\sqrt{m}+\pi n,\quad n\in Z}$$

Isboti: Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tenglamani $(tgx-\sqrt{m})(tgx+\sqrt{m})=0$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratamiz. Ko'pytuvchilarning har birini nolga tenglash orqali $\begin{cases}tgx=-\sqrt{m}\\ tgx=\sqrt{m}\end{cases}$ ni olamiz. Berilgan tenglamaning yechimi $\begin{cases}y=tgx\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ va $\begin{cases}y=tgx\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.2.3-a,rasm). $\begin{cases}y=tgx\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar $x_1=arctg\left(-\sqrt{m}\right)+\pi n=-arctg\sqrt{m}+\pi n$ nuqtalarda,



$\begin{cases} y = tgx \\ y = \sqrt{m} \end{cases}$ grafiklar esa $x_2 = arctg\sqrt{m} + \pi n$ nuqtalarda kesishadi. x_1 va x_2 larni birgalikda $\begin{cases} x_1 = -arctg\sqrt{m} + \pi n \\ x_2 = arctg\sqrt{m} + \pi n \end{cases}$; $\Rightarrow$ $x_{1,2} = \pm arctg\sqrt{m} + \pi n$ deb olish mumkin.

Berilgan tenglamani birlik aylanadan foydalanib ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko'ra esa, tangenslar chizig'i $x = 1$, ya'ni y' o'qi bo'lgani uchun $tgx = -\sqrt{m}$ tenglamaning yechimi tangenslar chizig'i va $y' = -\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqning M_1 kesishish nuqtasi bo'ladi. $tgx = \sqrt{m}$ tenglamaning yechimi esa tangenslar chizig'i va $y' = \sqrt{m}$ to'g'ri chiziqning M_2 kesishish nuqtasi bo'ladi (8.2.3-b,rasm). Bu ikkala nuqtaning koordinatalarini



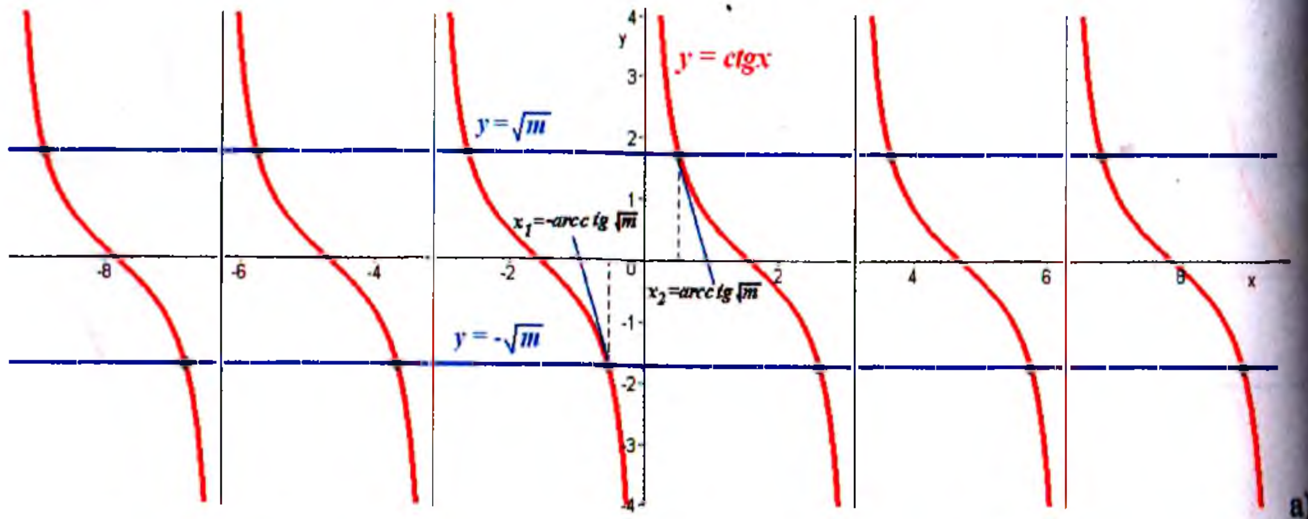
8.2.3-rasm

birlashtirib ham $\alpha_{1,2} = \pm arctg\sqrt{m} + \pi n$ javobni chiqarish mumkin.

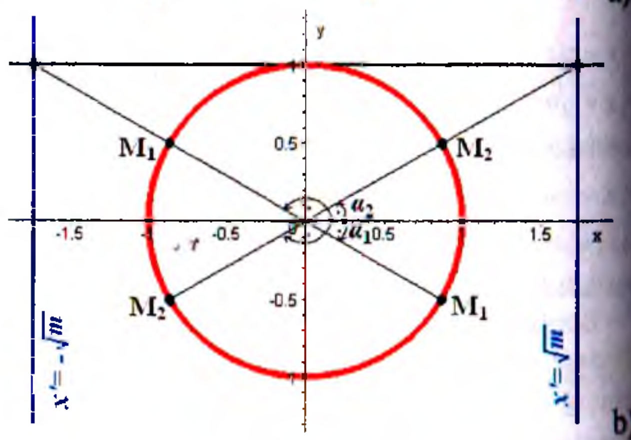
$ctg^2 x = m$ $(m \geq 0)$ ko'rinishdagi tenglamning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x = \pm arcctg\sqrt{m} + \pi n, \quad n \in Z}$$

Isboti: Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tenglamani $(ctgx - \sqrt{m})(ctgx + \sqrt{m}) = 0$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratamiz. Ko'pytuvchilarning har birini nolga tenglash orqali $\begin{cases} ctgx = -\sqrt{m} \\ ctgx = \sqrt{m} \end{cases}$ ni olamiz. Berilgan tenglamaning yechimi $\begin{cases} y = ctgx \\ y = -\sqrt{m} \end{cases}$ va $\begin{cases} y = ctgx \\ y = \sqrt{m} \end{cases}$ grafiklarining kesishish nuqtalaridir (8.2.4-a,rasm). $\begin{cases} y = ctgx \\ y = -\sqrt{m} \end{cases}$ grafiklar $x_1 = arcctg(-\sqrt{m}) + \pi n = \pi - arcctg\sqrt{m} + \pi n = -arcctg\sqrt{m} + \pi n$ nuqtalarda, $\begin{cases} y = ctgx \\ y = \sqrt{m} \end{cases}$ grafiklar esa $x_2 = arcctg\sqrt{m} + \pi n$ nuqtalarda kesishadi. x_1 va x_2 larni birgalikda $\begin{cases} x_1 = -arcctg\sqrt{m} + \pi n \\ x_2 = arcctg\sqrt{m} + \pi n \end{cases}$; $\Rightarrow$ $x_{1,2} = \pm arcctg\sqrt{m} + \pi n$ deb olish mumkin.



Berilgan tenglamani birlik aylanadan foydalanib ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko‘ra esa, kotangenslar chizig‘i $y=1$, ya’ni x' o‘qi bo‘lgani uchun $ctgx=-\sqrt{m}$ tenglamaning yechimi kotangenslar chizig‘i va $x'=-\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqning M_1 kesishish nuqtasi bo‘ladi. $ctgx=\sqrt{m}$ tenglamaning yechimi esa kotangenslar chizig‘i va $x'=\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqning M_2 kesishish nuqtasi bo‘ladi (8.2.4-b,rasm). Bu ikkala nuqtaning koordinatalarini birlashtirib ham $\alpha_{1,2}=\pm arcctg\sqrt{m}+\pi n$ javobni chiqarish mumkin.

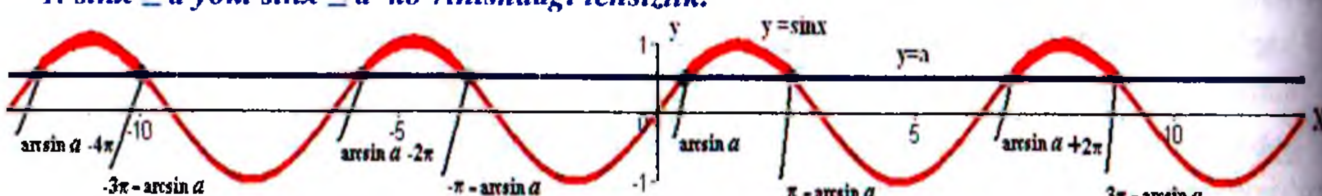


8.2.4-rasm

8.3-Mavzu: Oddiy trigonametrik tengsizliklar

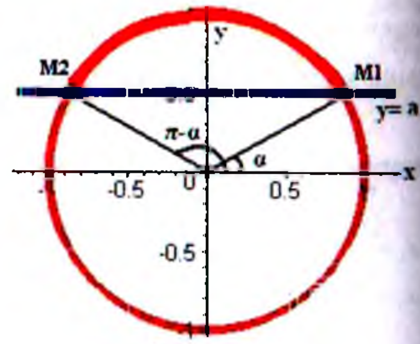
Oddiy trigonametrik tengsizliklar deb $\sin x \geq a$, $\sin x \leq a$, $\cos x \geq a$, $\cos x \leq a$, $tgx \geq a$, $tgx \leq a$, $ctgx \geq a$, $ctgx \leq a$ ko‘rinishdagi tengsizliklarga aytiladi. Ushbu mavzuda mana shu oddiy tengsizliklar va ularning yechilish yo‘llari haqida so‘z yuritamiz.

1. $sinx \geq a$ yoki $sinx \leq a$ ko‘rinishdagi tensizlik:



8.3.1-rasm

Dastlab, $y=\sin x$ va $y=a$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz (8.3.1-rasm). 8.3.1-rasmdan ham ko‘rinib turibdiki, $\sin x \geq a$ yoki $\sin x \leq a$ tengsizliklarning yechimi $y=\sin x$ funksiya grafigining $y=a$ to‘g‘ri chiziqdan tepadagi yoki pastdagi nuqtalari bo‘lar ekan. Birlik aylanaga ko‘ra esa, sinuslar chizig‘i oordinatalar o‘qi bo‘lgani uchun $\sin x \geq a$ yoki $\sin x \leq a$ tengsizliklarning yechimi birlik aylananing $y=a$ to‘g‘ri chiziqdan tepadagi yoki pastdagi nuqtalari bo‘lar ekan (8.3.2-rasm).



8.3.2-rasm

$\sin x \geq a$ *yoki* $\sin x \leq a$ ko‘rinishdagi tengcizliklar quyidagicha echiladi:

$$\begin{cases} \sin x \ge a; \to & \arcsin a + 2\pi n \le x \le \pi - \arcsin a + 2\pi n \\ \sin x \le a; \to & -\pi - \arcsin a + 2\pi n \le x \le \arcsin a + 2\pi n \end{cases}$$

$$(bu\ yerda: a \in [-1;1],\ \ n \in Z)$$

Xususiy hollar:

Agar $\begin{cases} \sin x \ge a \\ a > 1 \end{cases}$ *bo'lsa, yechim* $x \in \otimes$ *bo'ladi*

Agar $\sin x \ge 1$ *bo'lsa, yechim* $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ *bo'ladi*

Agar $\sin x > 1$ *bo'lsa, yechim* $x \in \otimes$ *бўлади*

Agar $\sin x \ge -1$ *bo'lsa, yechim* $x \in (-\infty;\infty)$ *bo'ladi*

Agar $\sin x > -1$ *bo'lsa, yechim* $x \ne -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ *bo'ladi*

Agar $\begin{cases} \sin x \ge a \\ a < -1 \end{cases}$ *bo'lsa, yechim* $x \in (-\infty;\infty)$ *bo'ladi*

Agar $\begin{cases} \sin x \le a \\ a > 1 \end{cases}$ *bo'lsa, yechim* $x \in (-\infty;\infty)$ *bo'ladi*

Agar $\sin x \le 1$ *bo'lsa, yechim* $x \in (-\infty;\infty)$ *bo'ladi*

Agar $\sin x < 1$ *bo'lsa, yechim* $x \ne \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ *bo'ladi*

Agar $\sin x \le -1$ *bo'lsa, yechim* $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$ *bo'ladi*

Agar $\sin x < -1$ *bo'lsa, yechim* $x \in \otimes$ *bo'ladi*

Agar $\begin{cases} \sin x \le a \\ a < -1 \end{cases}$ *bo'lsa, yechim* $x \in \otimes$ *bo'ladi*

Misol №1: $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) \ge \frac{1}{2}$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.

Yechish: $\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n \le 2x - \frac{\pi}{6} \le \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi n, \ \to \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n + \frac{\pi}{6} \le 2x \le \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n + \frac{\pi}{6},$

$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \pi + 2\pi n, \ \to \ \frac{\pi}{6} + \pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + \pi n.$

Demak, tengsizlikning umumiy yechimi quyidagicha bo'lar ekan:

$x \in [\frac{\pi}{6} + \pi n; \ \frac{\pi}{2} + \pi n].$

Misol №2: $\sin(-2x) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.

Yechish: $-\sin(2x) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}, \to \ \sin(2x) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \ \to \ -\pi - \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi n \le 2x \le \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi n$

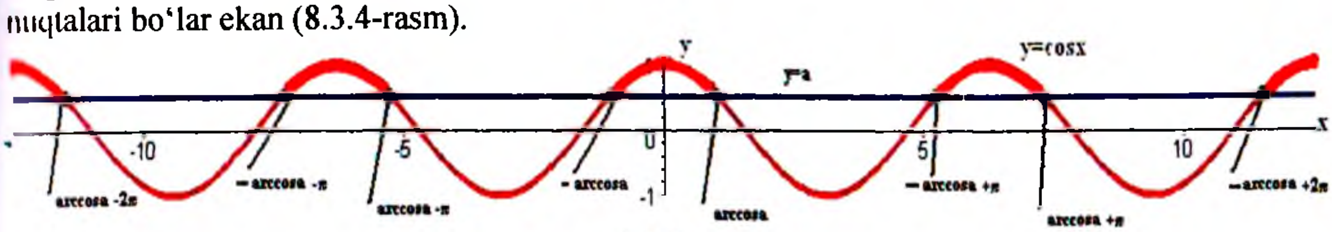
$-\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ \to \ -\frac{\pi}{3} + \pi n \le x \le -\frac{\pi}{6} + \pi n.$

Demak, tengsizlikning umumiy yechimi quyidagicha bo'lar ekan:

$x \in [-\frac{\pi}{3} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n].$

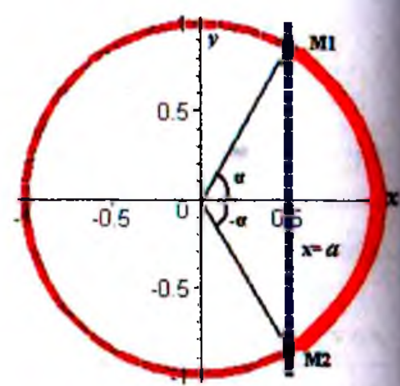
2. $\cos x \ge a$ yoki $\cos x \le a$ ko'rinishdagi tensizlik:

Dastlab, $y = \cos x$ va $y = a$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz (8.3.3-rasm). 8.3.3-rasmdan ham ko'rinib turibdiki, $\cos x \ge a$ yoki $\cos x \le a$ tengsizliklarning yechimi $y = \cos x$ funksiya grafigining $y = a$ to'g'ri chiziqdan tepadagi yoki pastdagi nuqtalari bo'lar ekan. Birlik aylanaga ko'ra esa, kosinuslar chizig'i absissalar o'qi bo'lgani uchun $\cos x \ge a$ yoki $\cos x \le a$ tengsizliklarning yechimi birlik aylananing $x = a$ to'g'ri chiziqdan o'ngdagi yoki chapdagi nuqtalari bo'lar ekan (8.3.4-rasm).



8.3.3-rasm

$\cos x \ge a$ *yoki* $\cos x \le a$ ko‘rinishdagi tengcizliklar quyidagicha echiladi:



8.3.4-rasm

$$\begin{cases}\cos x \ge a; \to & -\arccos a + 2\pi n \le x \le \arccos a + 2\pi n \\ \cos x \le a; \to & \arccos a + 2\pi n \le x \le 2\pi - \arccos a + 2\pi n\end{cases}$$
$$(bu\ \ yerda: a \in [-1;1],\ \ n \in Z)$$

Xususiy hollar:

$Agar \begin{cases}\cos x \ge a \\ a > 1\end{cases} bo'lsa, yechim\ \ x \in \otimes\ bo'ladi$

$Agar\ \cos x \ge 1\ bo'lsa, yechim\ \ x = 2\pi n\ bo'ladi$

$Agar\ \cos x > 1\ bo'lsa, yechim\ \ x \in \otimes\ bo'ladi$

$Agar\ \cos x \ge -1\ bo'lsa, yechim\ \ x \in (-\infty;\infty)$ *бўлади*

$Agar\ \cos x > -1\ bo'lsa, yechim\ \ x \ne \pi + 2\pi n\ bo'ladi$

$Agar \begin{cases}\cos x \ge a \\ a < -1\end{cases} bo'lsa, yechim\ \ x \in (-\infty;\infty)\ bo'ladi$

$Agar \begin{cases}\cos x \le a \\ a > 1\end{cases}$ *бўлса, ечим* $x \in (-\infty;\infty)$ *bo'ladi*

$Agar\ \cos x \le 1$ *бўлса, ечим* $x \in (-\infty;\infty)$ *bo'ladi*

$Agar\ \cos x < 1$ *бўлса, ечим* $x \ne 2\pi n$ *bo'ladi*

$Agar\ \cos x \le -1$ *бўлса, ечим* $x = \pi + 2\pi n$ *bo'ladi*

$Agar\ \cos x < -1$ *бўлса, ечим* $x \in \otimes$ *bo'ladi*

$Agar \begin{cases}\cos x \le a \\ a < -1\end{cases}$ *бўлса, ечим* $x \in \otimes$ *bo'ladi*

Misol №3: $\sin(\frac{x}{4}-1) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.

Yechish:

$$\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n \le \frac{x}{4} - 1 \le 2\pi - \arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + 2\pi n, \to \frac{3\pi}{4} + 1 + 2\pi n \le \frac{x}{4} \le 2\pi - \frac{3\pi}{4} + 1 + 2\pi n,$$

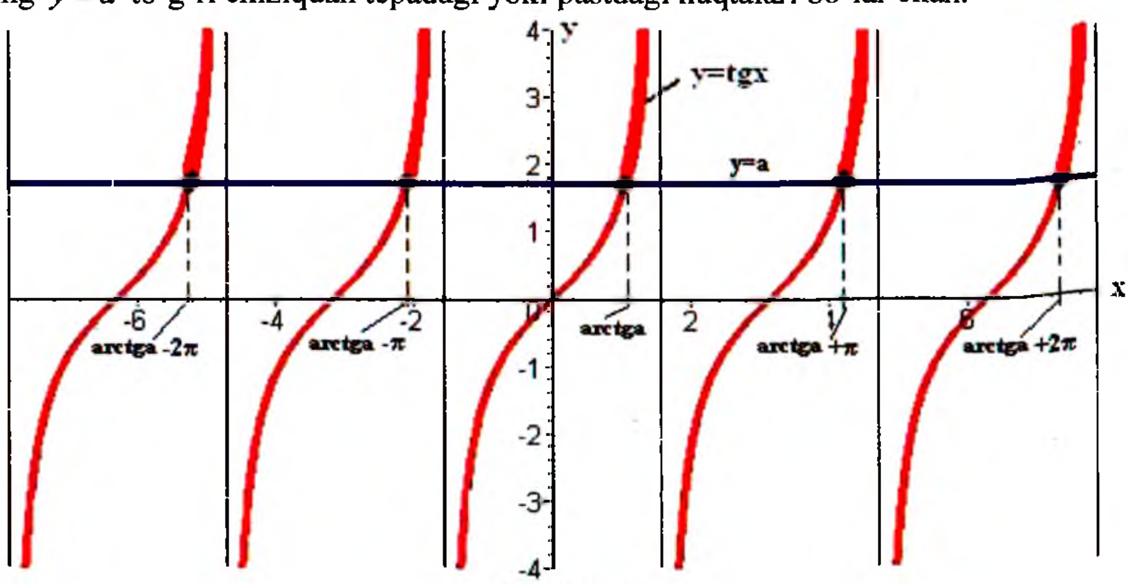
$$3\pi + 4 + 8\pi n \le x \le 8\pi - 3\pi + 4 + 8\pi n, \to 3\pi + 4 + 8\pi n \le x \le 5\pi + 4 + 8\pi n.$$

Demak, tengsizlikning umumiy yechimi quyidagicha bo‘lar ekan:

$x \in [3\pi + 4 + 8\pi n;\ 5\pi + 4 + 8\pi n\ ].$

3. $tgx \ge a$ yoki $tgx \le a$ ko‘rinishdagi tensizlik:

Dastlab, $y = tgx$ va $y = a$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz (8.3.3-rasm). 8.3.3-rasmdan ham ko‘rinib turibdiki, $tgx \ge a$ yoki $tgx \le a$ tengsizliklarning yechimi $y = tgx$ funksiya grafigining $y = a$ to‘g‘ri chiziqdan tepadagi yoki pastdagi nuqtalari bo‘lar ekan.



8.3.5-rasm

$tgx \ge a$ *yoki* $tgx \le a$ ko‘rinishdagi tengcizliklar quyidagicha echiladi:

$$\begin{cases} tgx \geq a, & \rightarrow \quad arctga + \pi n \leq x < \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ tgx \leq a, & \rightarrow \quad -\dfrac{\pi}{2} + \pi n < x \leq arctga + \pi n \end{cases} \qquad (bu\ yerda: a \in (-\infty;\infty),\ \ n \in Z)$$

Misol №4: $tg(\frac{\pi}{3} - 2x) \geq -1$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.

Yechish: $-tg(2x - \frac{\pi}{3}) \geq -1; \rightarrow tg(2x - \frac{\pi}{3}) \leq 1, \rightarrow -\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x - \frac{\pi}{3} \leq arctg1 + \pi n, \rightarrow$

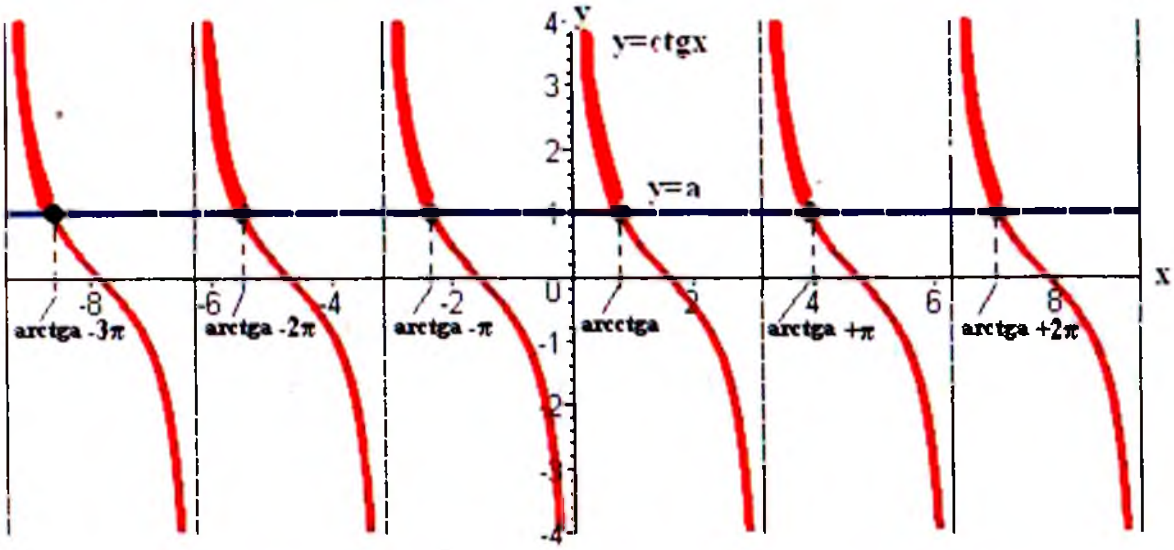
$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi n < 2x \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi n, \rightarrow -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x \leq \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}.$

Demak tengsizlikning umumiy yechimi quyidagicha bo'lar ekan:

$x \in (-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}].$

4. $ctgx \geq a$ yoki $ctgx \leq a$ ko'rinishdagi tensizlik:

Dastlab, $y = ctgx$ va $y = a$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz (8.3.3-rasm). 8.3.3-rasmdan ham ko'rinib turibdiki, $ctgx \geq a$ yoki $ctgx \leq a$ tengsizliklarning yechimi $y = tgx$ funksiya grafigining $y = a$ to'g'ri chiziqdan tepadagi yoki pastdagi nuqtalari bo'lar ekan.



8.3.6-rasm

$ctgx \geq a$ *yoki* $ctgx \leq a$ ko'rinishdagi tengcizliklar quyidagicha echiladi:

$$\begin{cases} ctgx \geq a, & \rightarrow \quad \pi n < x \leq arcctga + \pi n \\ ctgx \leq a, & \rightarrow \quad arcctga + \pi n \leq x < \pi + \pi n \end{cases} \qquad (bu\ yerda: a \in (-\infty;\infty),\ \ n \in Z)$$

Misol №5: $ctg(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}) \geq -1$ funksiyaning barcha yechimlarini toping.

<u>Yechish:</u> $-ctg(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) \geq -1, \rightarrow ctg(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) \leq 1, \rightarrow arcctg1 + \pi n \leq \frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} < \pi + \pi n, \rightarrow$

$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \pi n \leq \frac{x}{2} < \pi + \frac{\pi}{3} + \pi n, \rightarrow \frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x \leq \frac{8\pi}{3} + 2\pi n.$

Demak, tengsizlikning umumiy yechimi quyidagicha bo'lar ekan:

$x \in (\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{8\pi}{3} + 2\pi n].$

8.4-Mavzu: Turli trigonometrik tengsizliklar

Ushbu mavzuda biz oddiy trigonometrik tengsizlklardan farq qiluvchi va maxsus yo'llar bilan echiladigan ba'zi trigonometrik tengsizlklar va ularning yechilish yo'llari bilan tanishamiz.

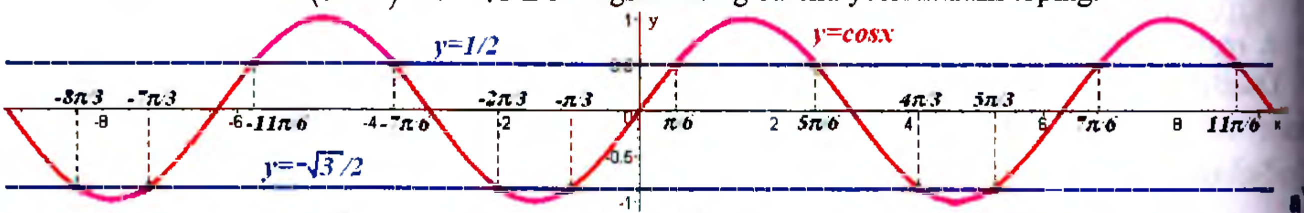
1. Kvadrat tengsizlikka keltiriladigan tengsizliklar:

Ba'zi trigonometrik tengsizliklarni kvadrat tengsizlikka keltirish orqali yechish mumkin. An shularga doir bir necha misollar yechib ko'raylik.

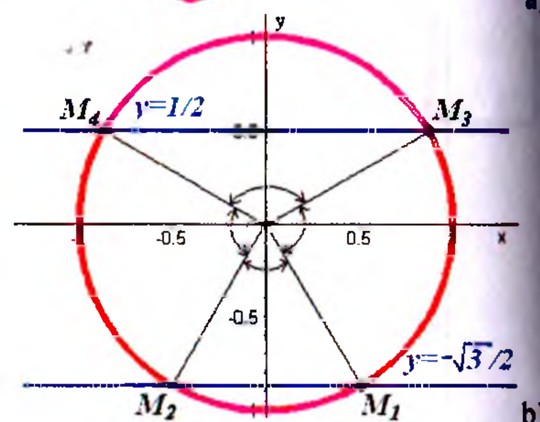
Misol №1: $\cos^2 x + \cos x - 2 \geq 0$ tengsizlikni barcha yechimlarini toping.

Yechish: Bu tengsizlikda $\cos x = t$ deb belgilash kiritadigan bo'lsak, u holda $t^2 + t - 2 \geq 0$ kvadrat tengsizlikka ega bo'lamiz. Bunda diskriminant $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$ bo'lib, ildizlar $t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{2 \cdot 1}$, $\rightarrow \begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$ kelib chiqadi. Bu ildizlarga $\cos x$ ni qo'yib, berilgan tengsizlikni $(\cos x + 2)(\cos x - 1) \geq 0$ ko'rinishda yozamiz. $(\cos x + 2)$ ko'paytuvchi har doim musbat bo'lgani uchun uni tashlab yuborishda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. Natijada $\cos x - 1 \geq 0$, $\rightarrow$ $\cos x \geq 1$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Kosinusning 1 dan katta qiymati bo'lmagani uchun $\cos x \geq 1$ tengsizlik yechimi $\cos x = 1$ tenglama yechimi bo'ladi. Bunda $x = 2\pi n$ degan javbga ega bo'lamiz.

Misol №2: $4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} \geq 0$ tengsizlikning barcha yechimlarini toping.



Yechish: Tengsizlikni $4\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0$ ko'paytma ko'rinishiga keltiramiz. Buni ushbu $\left[\begin{array}{l} \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x \geq \frac{1}{2} \end{array}\right.$ sistema ko'rinishiga keltiramiz. Buning uchun $\begin{cases} y = \sin x \\ y = -\sqrt{3}/2 \\ y = 1/2 \end{cases}$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz va ularning kesishish nuqtalarini belgilaymiz (8.4.1-a,rasm). grafik usuldan foydalanib ishlaymiz. Berilgan tengsizlik yechimi $y = \sin x$ trigonometrik funksiya grafigining $y = -\sqrt{3}/2$ to'g'ri chiziqdan pastda va $y = 1/2$ to'g'ri chiziqdan yuqorida yotgan nuqtalari bo'ladi. Natijada, berilgan tengsizlik yechimi $x \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$ bo'ladi.



8.4.1-rasm

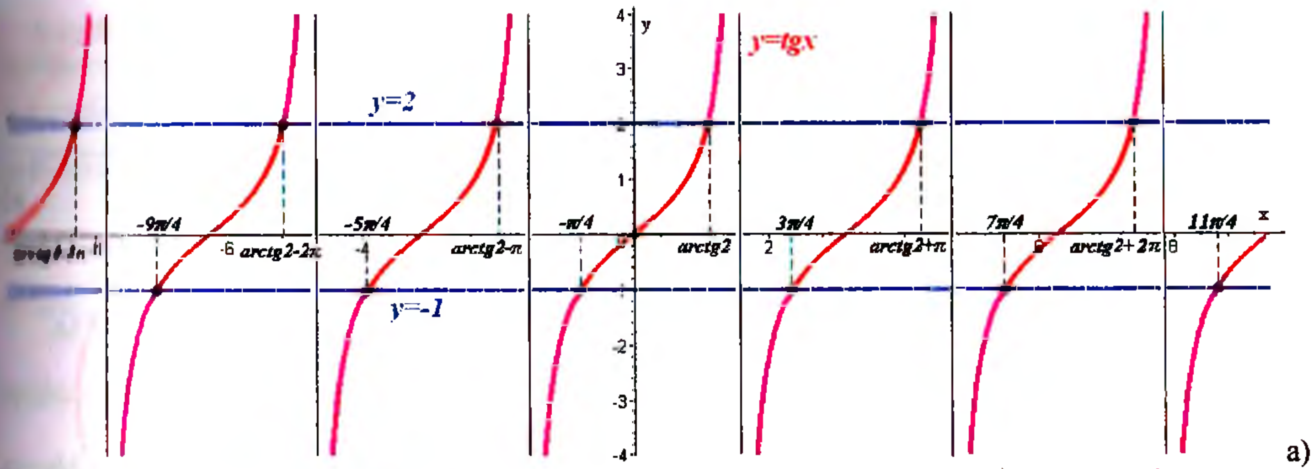
Bu tengsizlikni birlik aylanadan foydalanib ham ishlash mumkin (8.4.1-b,rasm). Bunda tengsizlik yechimi $\breve{M_1 M_2}$ quyi yoy hamda $\breve{M_3 M_4}$ yuqori yoylarni tutib turuvchi markaziy burchaklar bo'ladi. Bu yoylarga mos kelgan burchaklar esa $\alpha \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right]$ bo'ladi.

Misol №3: $4\sin^2 x + 2(\sqrt{3} - 1)\sin x - \sqrt{3} \leq 0$ tengsizlikning barcha yechimlarini toping.

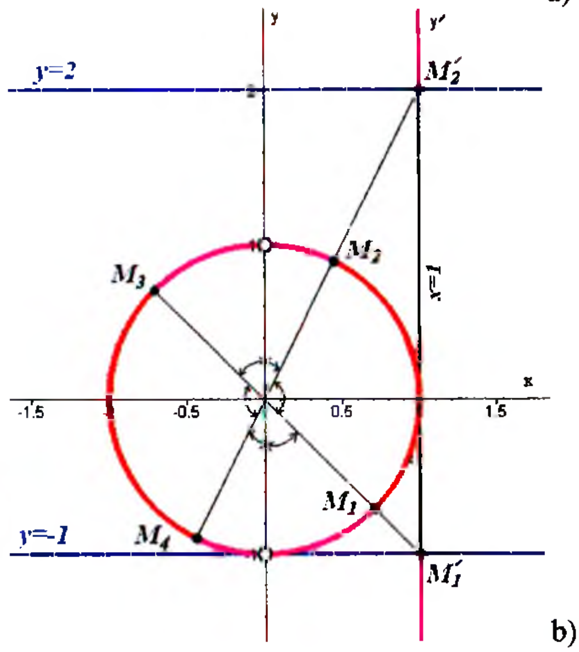
Yechish: Avvalgi tengsizlikning yechilish yo'lidan foydalansak, berilgan tengsizlik yechimi $y = \sin x$ trigonometrik funksiya grafigining $y = -\sqrt{3}/2$ to'g'ri chiziqdan yuqorida va $y = 1/2$ to'g'ri chiziqdan pastda yotgan nuqtalari bo'ladi. Natijada, berilgan tengsizlik yechimi $x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$ bo'ladi (8.4.1-a,rasm).

Birlik aylanadan foydalanganda ham tengsizlik yechimi $\breve{M_1 M_3}$ o'ng yoy hamda $\breve{M_4 M_1}$ chap yoylarni tutib turuvchi markaziy burchaklar bo'ladi. Bu yoylarga mos kelgan burchaklar esa $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right]$ bo'ladi (8.4.1-b,rasm).

Misol №4: $tgx - tgx - 2 \geq 0$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.



Yechish: Tengsizlikni ko‘paytuvchiga ajratsak, $(tgx-2)(tgx+1)\geq 0$ bo‘ladi. Bundan $\begin{cases} tgx \leq -1 \\ tgx \geq 2 \end{cases}$ sistema hosil bo‘ladi. Buni grafik usuldan foydalanib ishlaymiz. Buning uchun $\begin{cases} y = tgx \\ y = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz va ularning kesishish nuqtalarini belgilaymiz (8.4.2-a,rasm). Berilgan tengsizlik yechimi $y = tgx$ trigonometrik funksiya grafigining $y=-1$ to‘g‘ri chiziqdan pastda va $y=2$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida yotgan nuqtalari bo‘ladi. Natijada, berilgan tengsizlik yechimi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right] \cup \left[arctg2+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ bo‘ladi.



8.4.2-rasm

Bu tengsizlikni birlik aylanadan foydalanib ham ishlash mumkin (8.4.2-b,rasm). Bunda tengsizlik yechimi tangenslar chizig‘ida M_1' nuqtadan quyi hamda M_2' nuqtadan yuqori nuqtalarga mos markaziy burchaklar bo‘ladi.Ularga mos kelgan burchaklar esa $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n\right] \cup \left[arctg2+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ bo‘ladi.

Misol №5: $tgx - tgx - 2 \leq 0$ tenglamaning barcha yechimlarini toping.

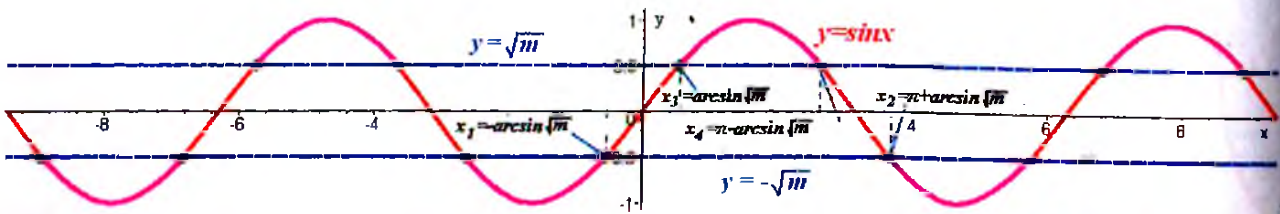
Yechish: Avvalgi misolning chizmalaridan foydalansak, berilgan tengsizlik yechimi $y = tgx$ trigonometrik funksiya grafigining $y=-1$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida va $y=2$ to‘g‘ri chiziqdan pastda yotgan nuqtalari bo‘ladi (8.4.2-a,rasm). Natijada, berilgan tengsizlik yechimi $x \in \left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ arctg2+\pi n\right]$ bo‘ladi.

Bu tengsizlikni birlik aylanadan foydalanib ham ishlash mumkin (8.4.2-b,rasm). Bunda tengsizlik yechimi tangenslar chizig‘ida M_1' nuqtadan yuqori hamda M_2' nuqtadan quyi nuqtalarga mos markaziy burchaklar bo‘ladi. Ularga mos kelgan burchaklar esa $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ arctg2+\pi n\right]$ bo‘ladi.

2. Kvadrati nomanfiy son bo‘lgan tengsizliklar:

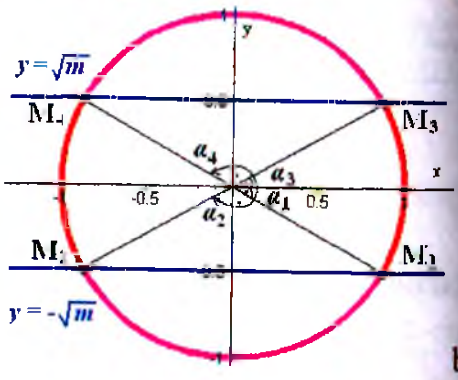
$\sin^2 x \geq m$ yoki $\sin^2 x \leq m$ $(0 \leq m \leq 1)$ ko‘rinishdagi tengsizlikning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} \sin^2 x \geq m, & \to \quad \arcsin\sqrt{m}+\pi n \leq x \leq \pi - \arcsin\sqrt{m}+\pi n \\ \sin^2 x \leq m, & \to \quad -\arcsin\sqrt{m}+\pi n \leq x \leq \arcsin\sqrt{m}+\pi n \end{cases} ; \quad n \in Z$$



a)

Isboti: Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tengsizliklarni $\left(\sin x-\sqrt{m}\right)\left(\sin x+\sqrt{m}\right)\geq 0$ yoki $\left(\sin x-\sqrt{m}\right)\left(\sin x+\sqrt{m}\right)\leq 0$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bundan ushbu $\begin{cases}\sin x\leq-\sqrt{m}\\ \sin x\geq\sqrt{m}\end{cases}$ yoki $\begin{cases}\sin x\geq-\sqrt{m}\\ \sin x\leq\sqrt{m}\end{cases}$ sistemani olamiz. Berilgan tengsizliklarni yechish uchun $\begin{cases}y=\sin x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ va $\begin{cases}y=\sin x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ funksiyalarning grafiklari kesishadigan nuqtalarini aniqlaymiz (8.4.3-a,rasm).



b)

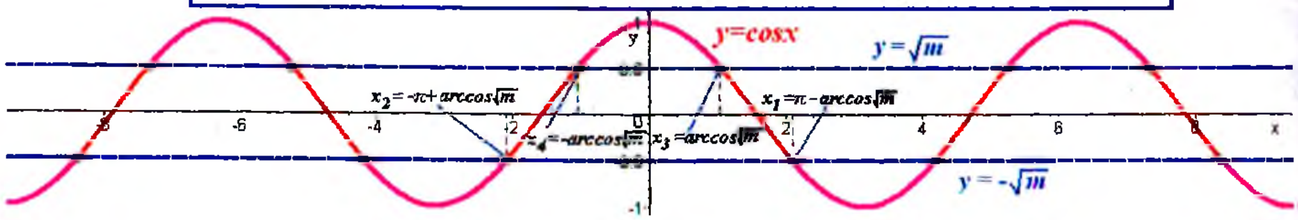
8.4.3-rasm

$\begin{cases}y=\sin x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar $x=(-1)^k\arcsin\left(-\sqrt{m}\right)+\pi n,\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_1=-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\\ x_2=-\pi+\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda, $\begin{cases}y=\sin x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar esa $x=(-1)^k\arcsin\sqrt{m}+\pi n,\ \Rightarrow\ \begin{cases}x_3=\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\\ x_4=\pi-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda kesishadi. $\left(\sin x-\sqrt{m}\right)\left(\sin x+\sqrt{m}\right)\geq 0$ tengsizlikning yechimi $y=\sin x$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan pastda hamda $y=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan yuqorida yotgan nuqtalar to'plami bo'ladi. Unga ko'ra $x\in\left[-\pi+\arcsin\sqrt{m}+2\pi n;-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\right]\cup\left[\arcsin\sqrt{m}+2\pi n;\pi-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\right]$ bo'ladi. Bu yechimlarni birlashtirib $x\in\left[\arcsin\sqrt{m}+\pi n;\pi-\arcsin\sqrt{m}+\pi n\right]$ deb yozish mumkin. $\left(\sin x-\sqrt{m}\right)\left(\sin x+\sqrt{m}\right)\leq 0$ tengsizlikning yechimi esa $y=\sin x$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan yuqorida hamda $y=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan pastda yotgan nuqtalar to'plami bo'ladi. Unga ko'ra $x\in\left[-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n;\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\right]\cup\left[\pi-\arcsin\sqrt{m}+2\pi n;\pi+\arcsin\sqrt{m}+2\pi n\right]$ bo'ladi. Bu yechimlarni birlashtirib $-\left[\arcsin\sqrt{m}+\pi n;\arcsin\sqrt{m}+\pi n\right]$ deb yozish mumkin.

Berilgan tengsizliklarni birlik aylanadan foydalanib ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko'ra esa, sinuslar chizig'i oordinatalar o'qi bo'lgani uchun birlik aylana va $y=-\sqrt{m}$, $y=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqlarining M_1 va M_2 hamda M_3 va M_4 kesishish nuqtalarini belgilaymiz (8.4.3-b,rasm). $\left(\sin x-\sqrt{m}\right)\left(\sin x+\sqrt{m}\right)\geq 0$ tengsizlikning yechimi birlik aylananing quyi $\breve{M_2M_1}$ hamda yuqori $\breve{M_3M_4}$ yoylarini tutib turuvchi markaziy burchagi, ya'ni $\alpha\in\left[\arcsin\sqrt{m}+\pi n;\pi-\arcsin\sqrt{m}+\pi n\right]$ bo'ladi. $\left(\sin x-\sqrt{m}\right)\left(\sin x+\sqrt{m}\right)\leq 0$ tengsizlikning yechimi birlik aylananing o'ng $\breve{M_1M_3}$ hamda chap $\breve{M_4M_2}$ yoylarini tutib turuvchi markaziy burchagi, ya'ni $\alpha\in\left[-\arcsin\sqrt{m}+\pi n;\arcsin\sqrt{m}+\pi n\right]$ bo'ladi.

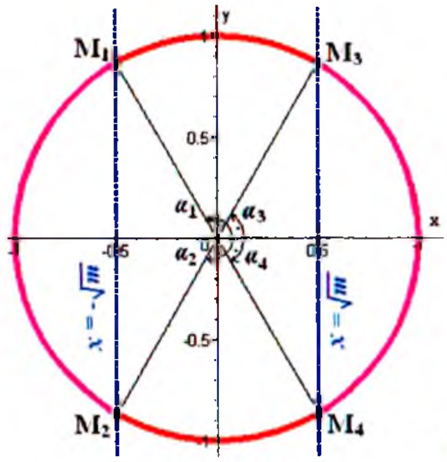
$\cos^2 x\geq m$ yoki $\cos^2 x\leq m$ $(0\leq m\leq 1)$ ko'rinishdagi tengsizlikning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases}\cos^2 x\geq m, & \to\quad -\arccos\sqrt{m}+\pi n\leq x\leq\arccos\sqrt{m}+\pi n\\ \cos^2 x\leq m, & \to\quad \arccos\sqrt{m}+\pi n\leq x\leq\pi-\arccos\sqrt{m}+\pi n\end{cases},\quad n\in Z$$



a)

Isboti: Qisqa ko‘paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tengsizliklarni $(\cos x-\sqrt{m})(\cos x+\sqrt{m})\geq 0$ yoki $(\cos x-\sqrt{m})(\cos x+\sqrt{m})\leq 0$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchilarga ajratamiz. Bundan ushbu $\begin{cases}\cos x\leq-\sqrt{m}\\ \cos x\geq\sqrt{m}\end{cases}$ yoki $\begin{cases}\cos x\geq-\sqrt{m}\\ \cos x\leq\sqrt{m}\end{cases}$ sistemani olamiz. Berilgan tengsizliklarni yechish uchun $\begin{cases}y=\cos x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ va $\begin{cases}y=\cos x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ funksiyalarning grafiklari kesishadigan nuqtalarini aniqlaymiz (8.4.4-a,rasm). $\begin{cases}y=\cos x\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ funksiyalar grafiklari



b)

8.4.4-rasm

$\begin{cases}x_1=\arccos(-\sqrt{m})+2\pi n=\pi-\arccos\sqrt{m}+2\pi n\\ x_2=-\arccos(-\sqrt{m})+2\pi n=\pi+\arccos\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda, $\begin{cases}y=\sin x\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar esa $\begin{cases}x_3=\arccos\sqrt{m}+2\pi n\\ x_4=-\arccos\sqrt{m}+2\pi n\end{cases}$ nuqtalarda kesishadi. $(\cos x-\sqrt{m})(\cos x+\sqrt{m})\geq 0$ tengsizlikning yechimi $y=\cos x$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqdan pastda hamda $y=\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida yotgan nuqtalar to‘plami bo‘ladi. Unga ko‘ra tengsizlik yechimi $x\in[-\arccos\sqrt{m}+2\pi n;\ \arccos\sqrt{m}+2\pi n]\cup$ $\cup[\pi-\arccos\sqrt{m}+2\pi n;\ \pi+\arccos\sqrt{m}+2\pi n]$ bo‘ladi. Bu yechimlarni birlashtirib $x\in[-\arccos\sqrt{m}+\pi n;\ \arccos\sqrt{m}+\pi n]$ deb yozish mumkin. $(\cos x-\sqrt{m})(\cos x+\sqrt{m})\leq 0$ tengsizlikning yechimi esa $y=\cos x$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida hamda $y=\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqdan pastda yotgan nuqtalar to‘plami bo‘ladi. Unga ko‘ra $x\in[-\pi+\arccos\sqrt{m}+2\pi n;\ -\arccos\sqrt{m}+2\pi n]\cup[\arccos\sqrt{m}+2\pi n;\ \pi-\arccos\sqrt{m}+2\pi n]$ bo‘ladi. Bu yechimlarni birlashtirib $x\in[\arccos\sqrt{m}+\pi n;\ \pi-\arccos\sqrt{m}+\pi n]$ deb yozish mumkin.

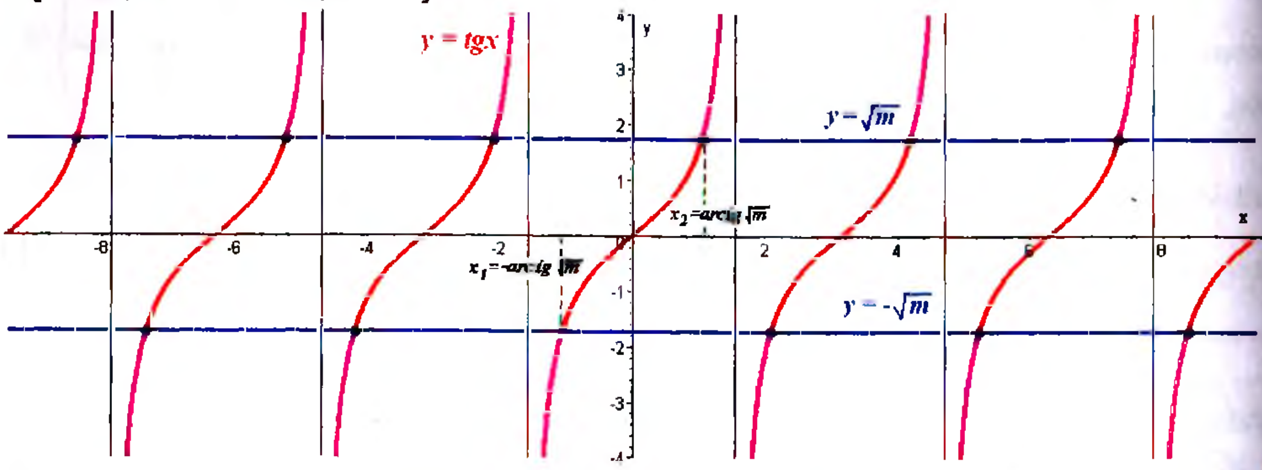
Berilgan tengsizliklarni birlik aylanadan foydalanib ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko‘ra esa, kosinuslar chizig‘i absissalar o‘qi bo‘lgani uchun birlik aylana va $x=-\sqrt{m}$, $x=\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqlarining M_1 va M_2 hamda M_3 va M_4 kesishish nuqtalarini belgilaymiz (8.4.4-b,rasm). $(\cos x-\sqrt{m})(\cos x+\sqrt{m})\geq 0$ tengsizlikning yechimi birlik aylananing chap $\breve{M_1M_2}$ hamda o‘ng $\breve{M_4M_3}$ yoylarini tutib turuvchi markaziy burchagi, ya’ni $\alpha\in[-\arccos\sqrt{m}+\pi n;\ \arccos\sqrt{m}+\pi n]$ bo‘ladi. $(\cos x-\sqrt{m})(\cos x+\sqrt{m})\leq 0$ tengsizlikning yechimi birlik aylananing quyi $\breve{M_2M_4}$ hamda yuqori $\breve{M_3M_1}$ yoylarini tutib turuvchi markaziy burchagi, ya’ni $\alpha\in[\arccos\sqrt{m}+\pi n;\ \pi-\arccos\sqrt{m}+\pi n]$ bo‘ladi.

$tg^2x\geq m$ yoki $tg^2x\leq m$ $(m\geq 0)$ ko‘rinishdagi tengsizlikning yechimi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases}tg^2x\geq m, & \rightarrow\ -\dfrac{\pi}{2}+\pi n<x\leq-arctg\sqrt{m}+\pi n\ \cup\ arctg\sqrt{m}+\pi n\leq x<\dfrac{\pi}{2}+\pi n\\ tg^2x\leq m, & \rightarrow\ -arctg\sqrt{m}+\pi n\leq x\leq arctg\sqrt{m}+\pi n\end{cases},\quad n\in Z$$

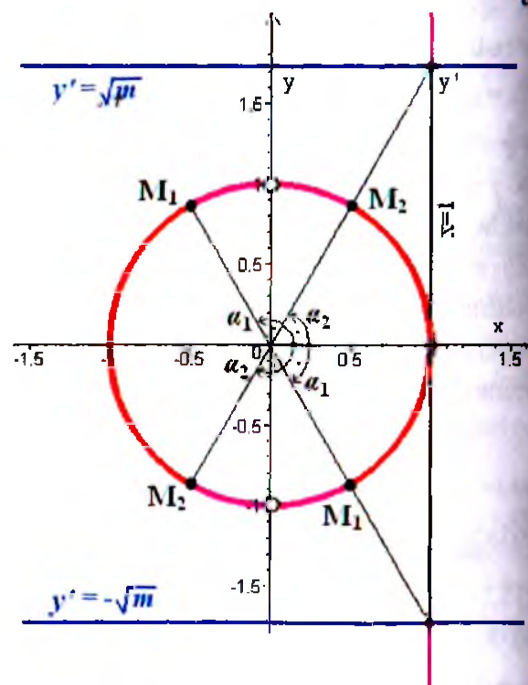
Isboti: Qisqa ko‘paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tengsizliklarni $(tgx-\sqrt{m})(tgx+\sqrt{m})\geq 0$ yoki $(tgx-\sqrt{m})(tgx+\sqrt{m})\leq 0$ ko‘rinishdagi ko‘paytuvchilarga ajratamiz. Bundan ushbu $\begin{cases}tgx\leq-\sqrt{m}\\ tgx\geq\sqrt{m}\end{cases}$ yoki $\begin{cases}tgx\geq-\sqrt{m}\\ tgx\leq\sqrt{m}\end{cases}$ sistemani olamiz. Berilgan tengsizliklarni yechish uchun $\begin{cases}y=tgx\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ va $\begin{cases}y=tgx\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ funksiyalarning grafiklari kesishadigan nuqtalarini aniqlaymiz (8.4.5-a,rasm). $\begin{cases}y=tgx\\ y=-\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar $x_1=arctg(-\sqrt{m})+\pi n=-arctg\sqrt{m}+\pi n$ nuqtalarda, $\begin{cases}y=tgx\\ y=\sqrt{m}\end{cases}$ grafiklar $x_2=arctg\sqrt{m}+\pi n$ nuqtalarda kesishadi. $(tgx-\sqrt{m})(tgx+\sqrt{m})\geq 0$ tengsizlikning yechimi $y=tgx$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqdan pastda hamda $y=\sqrt{m}$ to‘g‘ri chiziqdan yuqorida yotgan nuqtalar to‘plami bo‘ladi. Unga ko‘ra tengsizlik yechimi

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -arctg\sqrt{m}+\pi n\right] \cup \left[arctg\sqrt{m}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ bo'ladi. $(tgx-\sqrt{m})(tgx+\sqrt{m}) \le 0$ tengsizlikning yechimi $y=tgx$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan yuqorida hamda $y=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan pastda yotgan nuqtalar to'plami bo'ladi. Unga ko'ra tengsizlik yechimi $x \in \left[-arctg\sqrt{m}+\pi n;\ arctg\sqrt{m}+\pi n\right]$ bo'ladi.



a)

Berilgan tengsizliklarni birlik aylanadan foydalanib ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko'ra esa, tangenslar chizig'i y' o'qi, ya'ni $x=1$ chizig'i bo'lgani uchun birlik aylana va $y'=-\sqrt{m}$, $y'=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqlarining M_1 va M_3 hamda M_2 va M_4 kesishish nuqtalarini belgilaymiz (8.4.5-b,rasm). $(tgx-\sqrt{m})(tgx+\sqrt{m}) \ge 0$ tengsizlikning yechimi tangenslar chizig'ida M_1' nuqtadan quyida hamda M_2' nuqtadan yuqorida bo'lgan nuqtalarga mos markaziy burchaklar bo'ladi. Ularga mos kelgan burchaklar esa $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -arctg\sqrt{m}+\pi n\right] \cup \left[arctg\sqrt{m}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ bo'ladi. $(tgx-\sqrt{m})(tgx+\sqrt{m}) \le 0$ tengsizlikning yechimi tangenslar chizig'ida M_1' nuqtadan yuqori hamda M_2' nuqtadan pastda bo'lgan nuqtalarga mos markaziy burchaklar bo'ladi.Ularga mos kelgan burchaklar esa $\alpha \in \left[-arctg\sqrt{m}+\pi n;\ arctg\sqrt{m}+\pi n\right]$ bo'ladi.



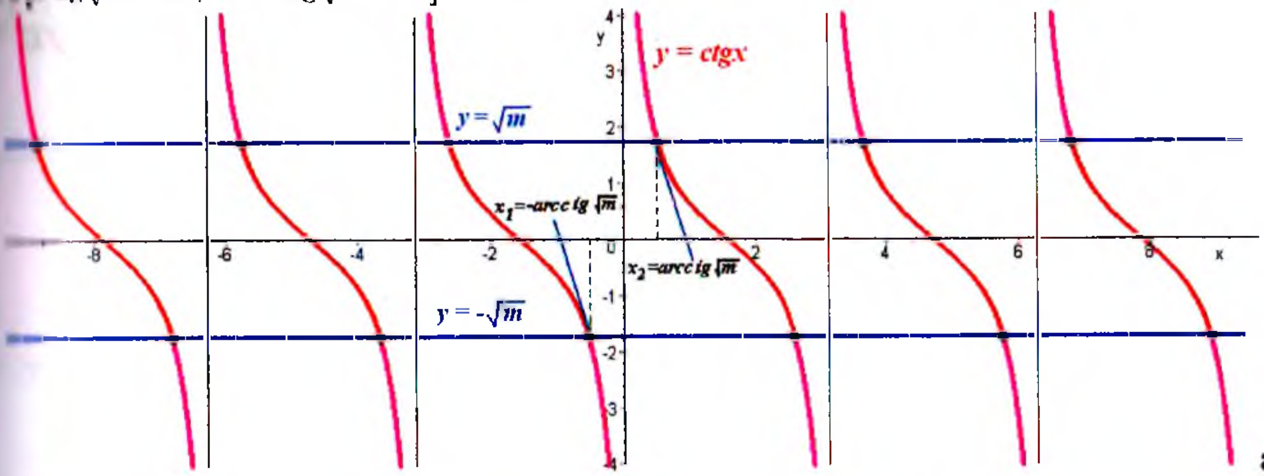
b)

8.4.5-rasm

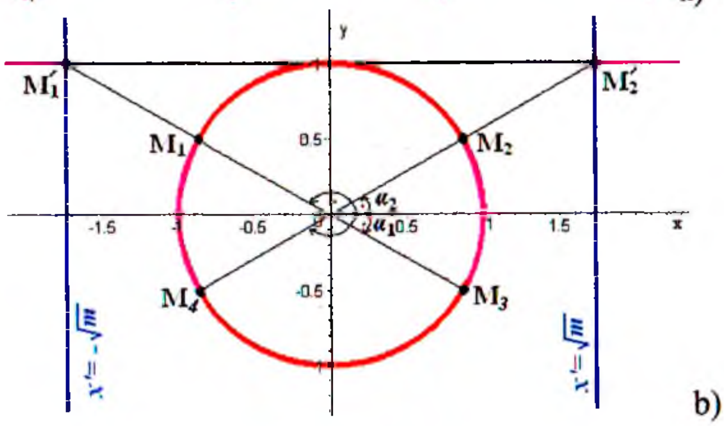
$ctg^2x \ge m$ yoki $ctg^2x \le m$ $(m \ge 0)$ ko'rinishdagi tengsizlikning yechimi quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{cases} ctg^2x \ge m, & \to \ \pi n < x \le arcctg\sqrt{m}+\pi n \ \cup \ \pi - arcctg\sqrt{m}+\pi n \le x < \pi+\pi n \\ ctg^2x \le m, & \to \ arcctg\sqrt{m}+\pi n \le x \le \pi - arcctg\sqrt{m}+\pi n \end{cases}, \quad n \in Z$$

Isboti: Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib, berilgan tengsizliklarni $(ctgx-\sqrt{m})(ctgx+\sqrt{m}) \ge 0$ yoki $(ctgx-\sqrt{m})(ctgx+\sqrt{m}) \le 0$ ko'rinishdagi ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bundan ushbu $\begin{cases} ctgx \le -\sqrt{m} \\ ctgx \ge \sqrt{m} \end{cases}$ yoki $\begin{cases} ctgx \ge -\sqrt{m} \\ ctgx \le \sqrt{m} \end{cases}$ sistemani olamiz. Berilgan tengsizliklarni yechish uchun $\begin{cases} y = ctgx \\ y = -\sqrt{m} \end{cases}$ va $\begin{cases} y = ctgx \\ y = \sqrt{m} \end{cases}$ funksiyalarning grafiklari kesishadigan nuqtalarini aniqlaymiz (8.4.6-a,rasm). $\begin{cases} y = ctgx \\ y = -\sqrt{m} \end{cases}$ grafiklar $x_1 = arcctg(-\sqrt{m})+\pi n = \pi - arctg\sqrt{m}+\pi n$ nuqtalarda, $\begin{cases} y = ctgx \\ y = \sqrt{m} \end{cases}$ grafiklar esa $x_2 = arcctg\sqrt{m}+\pi n$ nuqtalarda bo'ladi. $(ctgx-\sqrt{m})(ctgx+\sqrt{m})\geq 0$ tengsizlikning yechimi $y=ctgx$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan pastda hamda $y=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan yuqorida yotgan nuqtalar to'plami bo'ladi. Unga ko'ra tengsizlik yechimi $x\in(\pi n;\ arctg\sqrt{m}+\pi n]\cup[\pi-arctg\sqrt{m}+\pi n;\ \pi+\pi n)$ bo'ladi. $(ctgx-\sqrt{m})(ctgx+\sqrt{m})\leq 0$ tengsizlikning yechimi $y=ctgx$ funksiya grafigining $y=-\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan yuqorida hamda $y=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqdan pastda yotgan nuqtalar to'plami bo'ladi. Unga ko'ra tengsizlik yechimi $x\in[arctg\sqrt{m}+\pi n;\ \pi-arctg\sqrt{m}+\pi n]$ bo'ladi.



Berilgan tengsizliklarni birlik aylanadan foydalanib, ham yechish mumkin. Birlik aylanaga ko'ra esa, kotangenslar chizig'i x' o'qi, ya'ni $y=1$ chizig'i bo'lgani uchun birlik aylana va $x'=-\sqrt{m}$, $x'=\sqrt{m}$ to'g'ri chiziqlarining M_1 va M_3 hamda M_2 va M_4 kesishish nuqtalarini belgilaymiz (8.4.6-b.rasm). $(ctgx-\sqrt{m})(ctgx+\sqrt{m})\geq 0$ tengsizlikning yechimi tangenslar chizig'ida M_1' nuqtadan chapda hamda M_2' nuqtadan o'ngda bo'lgan



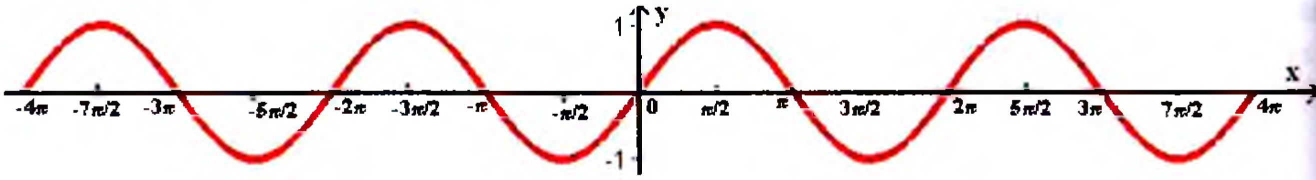
8.4.6-rasm

nuqtalarga mos markaziy burchaklar bo'ladi. Ularga mos kelgan burchaklar esa $\alpha\in(\pi n;\ arctg\sqrt{m}+\pi n]\cup[\pi-arctg\sqrt{m}+\pi n;\ \pi+\pi n)$ bo'ladi. $(ctgx-\sqrt{m})(ctgx+\sqrt{m})\leq 0$ tengsizlikning yechimi esa tangenslar chizig'ida M_1' nuqtadan o'ngda hamda M_2' nuqtadan chapda bo'lgan nuqtalarga mos markaziy burchaklar bo'ladi. Ularga mos kelgan burchaklar esa $\alpha\in[arctg\sqrt{m}+\pi n;\ \pi-arctg\sqrt{m}+\pi n]$ bo'ladi.

9-BOB: TRIGONOMETRIK VA TESKARI TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNING ASOSIY XOSSALARI

9.1-Mavzu: *y=sinx* funksiyaning asosiy xossalari

$y = \sin x$ funksiya grafigi asosida funksiya xossalarini sanab o'tamiz.



9.1.1-rasm

1.1. Funksiyaning aniqlanish sohasi	$D(f) = (-\infty;\ \infty)$
1.2. Funksiyaning qiymatlar sohasi	$E(f) = [-1;\ 1]$
2.1. Juft-toqligi	Toq funksiya, $\sin(-x) = -\sin x$
2.2. Davriyligi, eng kichik musbat davri	Davriy, $T = 2\pi$
3.1. Funksiyaning o'sish oralig'i	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ da $\uparrow\uparrow\uparrow$
3.2. Funksiyaning kamayish oralig'i	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$ da $\downarrow\downarrow\downarrow$
4.1. Funksiyaning musbat ishorali oralig'i	$2\pi n < x < \pi + 2\pi n$ da y>0
4.2. Funksiyaning manfiy ishorali oralig'i	$-\pi + 2\pi n < x < 2\pi n$ da y<0
5.1. *Ox* o'qini kesish nuqtalari	$x = \pi n$ *yoki* $(\pi n;\ 0)$ nuqtalar
5.2. *Oy* o'qini kesish nuqtasi	$(0;0)$ nuqta
6.1. Minimum nuqtalari	$x_{min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$
6.2. Funksiya minimumlari	$y_{min} = -1$
6.3. Maksimum nuqtalari	$x_{max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$
6.4. Funksiya maksimumlari	$y_{max} = 1$

Misol №1: $y = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ funksiyani to'la tekshiring.

<u>Yechish:</u>

1.1. $D(f) = (-\infty;\ \infty)$

1.2. $E(f) = [-1;\ 1]$

2.1. Juft ham, toq ham emas

2.2. Davriy, eng kichik musbat davri $2T = 2\pi, \ \rightarrow\ T = \pi$

3.1. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 2x - \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ \rightarrow\ -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} 2\pi n$

$$-\frac{\pi}{12} + \pi n \le x \le \frac{5\pi}{12} + \pi n \ \text{ da } \uparrow\uparrow\uparrow$$

3.2. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le 2x - \frac{\pi}{3} \le \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \ \rightarrow\ \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 2x \le \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$$\frac{5\pi}{12} + \pi n \le x \le \frac{11\pi}{2} + \pi n \ \text{ da } \downarrow\downarrow\downarrow$$

4.1. $2\pi n < 2x - \frac{\pi}{3} < \pi + 2\pi n, \ \rightarrow\ 2\pi n + \frac{\pi}{3} < 2x < \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$$\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n \ \text{ da y>0 bo'ladi.}$$

4.2. $-\pi + 2\pi n < 2x - \frac{\pi}{3} < 2\pi n, \ \rightarrow\ -\pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \pi n + \frac{\pi}{3}$

$-\frac{\pi}{3}+\pi n<2x<\frac{\pi}{6}+\pi n$ da y<0 bo'ladi.

5.1. $2\sin(2x-\frac{\pi}{3})=0, \rightarrow 2x-\frac{\pi}{3}=\pi n, \rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$

Demak, funksiya Ox o'qni $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$ yoki $(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2};0)$ nuqtalarda kesadi.

5.2. $y=2\sin(2\cdot 0-\frac{\pi}{3})=2\sin(-\frac{\pi}{3})=2\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{2})=-\sqrt{3}$

Demak, funksiya Oy o'qni $y=-\sqrt{3}$ yoki $(0;-\sqrt{3})$ nuqtada kesadi.

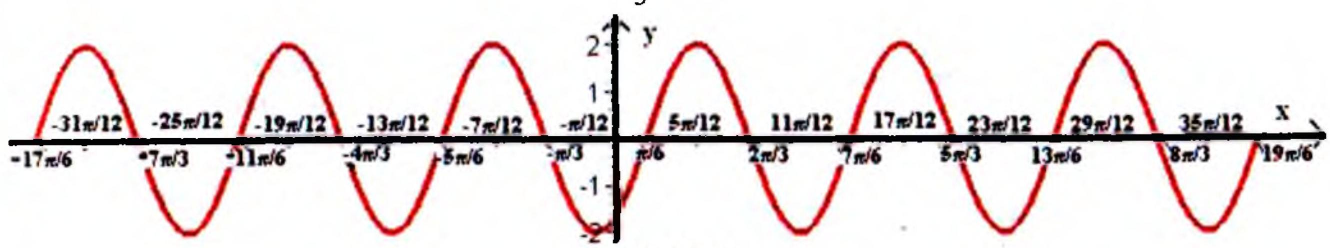
6.1. $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \rightarrow x_{min}=-\frac{\pi}{12}+\pi n$

6.2. $y_{min}=-2$

6.3. $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, \rightarrow x_{max}=\frac{5\pi}{12}+\pi n$

6.4. $y_{max}=2$

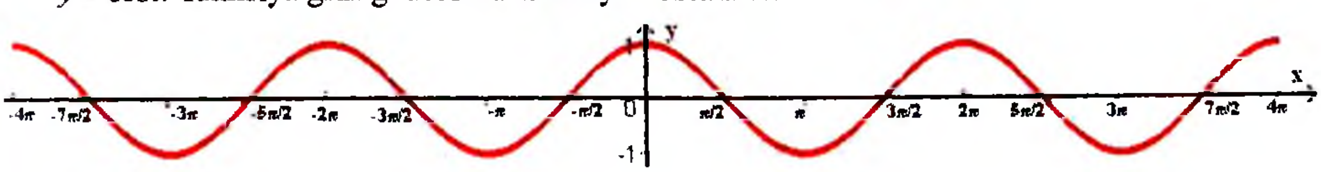
Yuqoridagi tekshirishlardan so'ng $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$ funksiyaning grafigini quramiz (9.1.2-rasm).



9.1.2-rasm

9.2-Mavzu: *y=cosx* funksiyaning asosiy xossalari

$y=\cos x$ funksiya grafigi asosida funksiya xossalarini sanab o'tamiz.



9.2.1-rasm

1.1. Funksiyaning aniqlanish sohasi	$D(f)=(-\infty;\infty)$
1.2. Funksiyaning qiymatlar sohasi	$E(f)=[-1;1]$
2.1. Juft-toqligi	Juft funksiya , $\cos(-x)=\cos x$
2.2. Davriyligi, eng kichik musbat davri	Davriy , $T=2\pi$
3.1. Funksiyaning o'sish oralig'i	$-\pi+2\pi n\le x\le 2\pi n$ da ↑↑↑
3.2. Funksiyaning kamayish oralig'i	$2\pi n\le x\le\pi+2\pi n$ da ↓↓↓
4.1. Funksiyaning musbat ishorali oralig'i	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$ da y>0
4.2. Funksiyaning manfiy ishorali oralig'i	$\frac{\pi}{2}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$ da y<0
5.1. Ox o'qini kesish nuqtalari	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ *yoki* $(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ 0)$ nuqtalar
5.2. Oy o'qini kesish nuqtasi	$(0;1)$ nuqta
6.1. Minimum nuqtalari	$x_{min}=\pi+2\pi n$
6.2. Funksiya minimumlari	$y_{min}=-1$
6.3. Maksimum nuqtalari	$x_{max}=2\pi n$
6.4. Funksiya maksimumlari	$y_{max}=1$

Misol №1: $y=-2\cos(2x-\frac{2\pi}{3})$ funksiyani to‘la tekshiring.

<u>Yechish:</u> Bu erda $A<0$, ya’ni $A=-2$ bo‘lgani uchun funksiyaning o‘sish va kamayish oraliqlari, musbat va manfiy ishorali oraliqlari, maksimum va minimum nuqtalari o‘rin almashadi.

1.1. $D(f)=(-\infty;\ \infty)$

1.2. $E(f)=[-2;\ 2]$

2.1. Juft ham, toq ham emas

2.2. Davriy, eng kichik musbat davri $2T=2\pi$, $\to$ $T=\pi$

3.1. $2\pi n<2x-\frac{2\pi}{3}<\pi+2\pi n$, $\to$ $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<2x<\pi+\frac{2\pi}{3}+2\pi n$

$\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$ da $\uparrow\uparrow\uparrow$

3.2. $-\pi+2\pi n\le 2x-\frac{2\pi}{3}\le 2\pi n$, $\to$ $-\pi+\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le 2x\le\frac{2\pi}{3}+2\pi n$

$-\frac{\pi}{6}+\pi n\le x\le\frac{\pi}{3}+\pi n$ da $\downarrow\downarrow\downarrow$

4.1. $\frac{\pi}{2}+2\pi n<2x-\frac{2\pi}{3}<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $\to$ $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+2\pi n$

$\frac{7\pi}{12}+\pi n<x<\frac{13\pi}{12}+\pi n$ da y>0 bo‘ladi.

4.2. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n<2x-\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\to$ $-\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+2\pi n<2x<\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}+2\pi n$

$\frac{\pi}{12}+\pi n<x<\frac{7\pi}{21}+\pi n$ da y<0 bo‘ladi.

5.1. $-2\cos(2x-\frac{2\pi}{3})=0$, $\to$ $2x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\to$ $2x=\frac{7\pi}{6}+\pi n$

Demak Ox o‘qni $x=\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ yoki $(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};0)$ nuqtalarda kesadi.

5.2. $y=-2\cos(2\cdot 0-\frac{2\pi}{3})=2\cos(-\frac{2\pi}{3})=2\cdot(-\frac{1}{2})=1$

Demak Oy o‘qni $y=1$ yoki $(0;1)$ nuqtada kesadi.

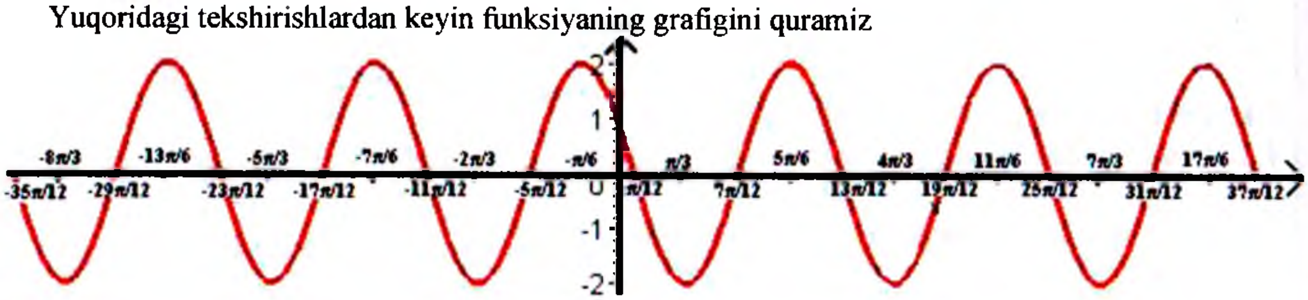
6.1. $2x-\frac{2\pi}{3}=2\pi n$, $\to$ $x_{min}=\frac{\pi}{3}+\pi n$

6.2. $y_{min}=-2$

6.3. $2x-\frac{2\pi}{3}=\pi+2\pi n$, $\to$ $x_{max}=\frac{5\pi}{6}+\pi n$

6.4. $y_{max}=2$

Yuqoridagi tekshirishlardan keyin funksiyaning grafigini quramiz

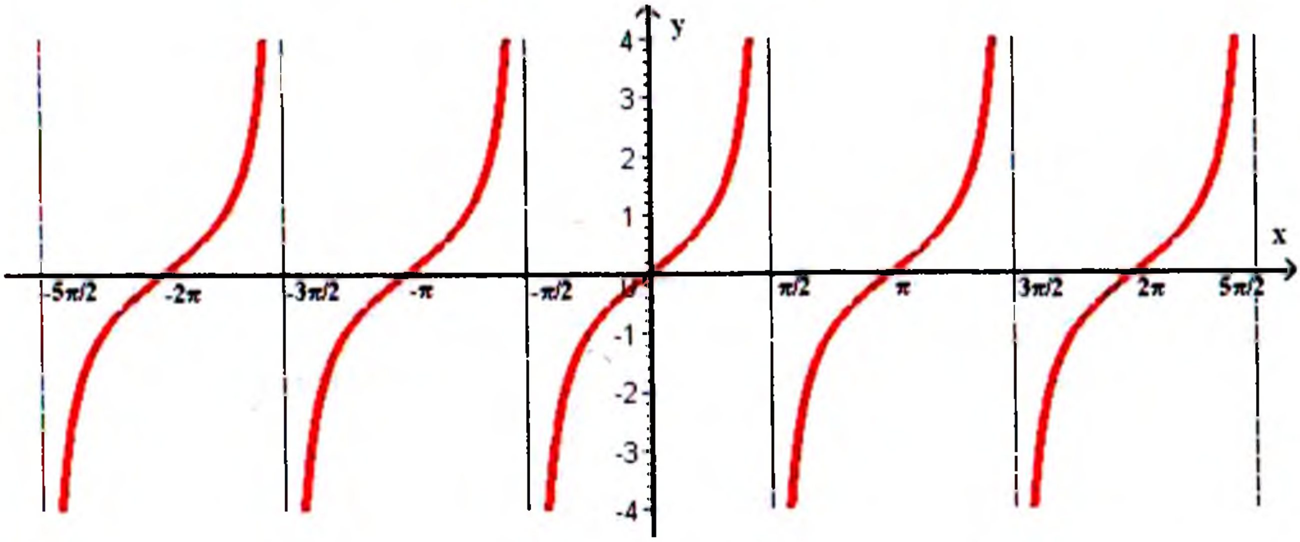


9.2.2-rasm

YUqorida berilgan funksiyani keltirish formulalaridan foydalanib, $A>0$, ya’ni $A=2$ holatga keltirish mumkin. Bunda $y=-2\cos(2x-\frac{2\pi}{3})=2\cos(2x-\frac{2\pi}{3}+\pi)=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ berilgan funksiyaga teng kuchli funksiya hosil bo‘ladi.

9.3-Mavzu: $y=tgx$ funksiyaning asosiy xossalari

$y = tgx$ funksiya grafigi asosida funksiya xossalarini sanab o'tamiz.



9.3.1-rasm

1.1. Funksiyaning aniqlanish sohasi	$D(f)=(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n)$ *yoki* $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$
1.2. Funksiyaning qiymatlar sohasi	$E(f)=(-\infty;\ \infty)$
2.1. Juft-toqligi	Toq funksiya, $tg(-x)=-tgx$
2.2. Davriyligi, eng kichik musbat davri	Davriy, $T=\pi$
3.1. Funksiyaning o'sish oralig'i	$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$ da ↑↑↑
3.2. Funksiyaning kamayish oralig'i	$x\in\otimes$ da ↓↓↓
4.1. Funksiyaning musbat ishorali oralig'i	$\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$ da y>0
4.2. Funksiyaning manfiy ishorali oralig'i	$-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\pi n$ da y<0
5.1. *Ox* o'qini kesish nuqtalari	$x=\pi n$ *yoki* $(\pi n;\ 0)$ nuqtalar
5.2. *Oy* o'qini kesish nuqtasi	$(0;0)$ nuqta
6.1. Minimum nuqtalari	Yo'q
6.2. Funksiya minimumlari	Yo'q
6.3. Maksimum nuqtalari	Yo'q
6.4. Funksiya maksimumlari	Yo'q

Misol №1: $y=tg(x+\frac{\pi}{3})$ funksiyani to'la tekshiring

Yechish:

1.1. $x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n;\rightarrow x\neq\frac{\pi}{6}+\pi n$ *yoki* $D(f)=(-\frac{5\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n)$

1.2. $E(f)=(-\infty;\ \infty)$

2.1. Juft ham toq ham emas

2.2. Davriy, $T=\pi$

3.1. $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+\pi n.\ \rightarrow\ -\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+\pi n$

$-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$ da ↑↑↑

3.2. $x\in\otimes$ da ↓↓↓

4.1. $\pi n<x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \rightarrow\ \pi n-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ \rightarrow$

$-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{6}+\pi n$ da y>0 bo‘ladi.

4.2. $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x+\frac{\pi}{3}<\pi n, \rightarrow \quad -\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<-\frac{\pi}{3}+\pi n, \rightarrow$

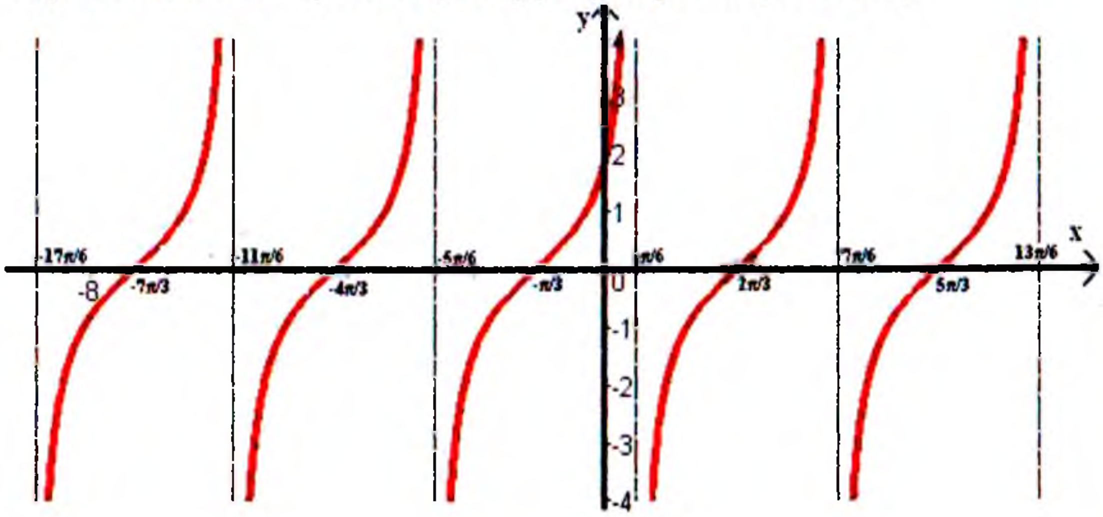
$-\frac{5\pi}{6}+\pi n<x<-\frac{\pi}{3}+\pi n$ da y<0 bo‘ladi.

5.1. $x+\frac{\pi}{3}=\pi n; \rightarrow x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$. Demak Ox o‘qni $x=-\frac{\pi}{3}+\pi n$ *yoki* $(-\frac{\pi}{3}+\pi n\,;\,0)$ nuqtalarda kesadi

5.2. $y=tg(0+\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}$. Demak, Oy o‘qni $y=\sqrt{3}$; yoki $(0;\sqrt{3})$ nuqtada kesadi.

6. Yo‘q

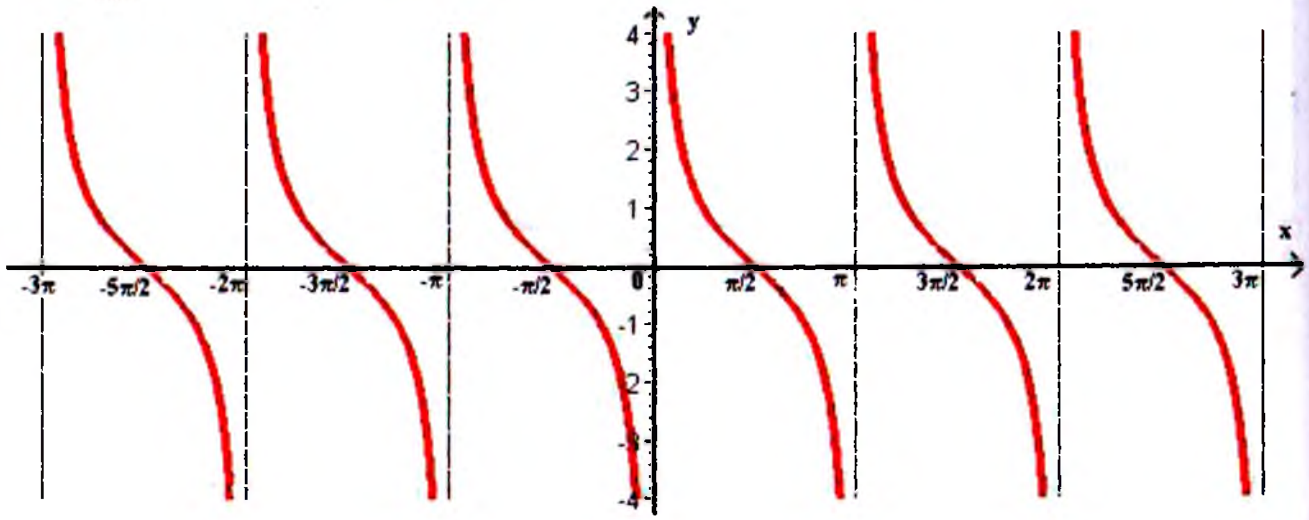
Yuqoridagi tekshirishlardan keyin funksiyaning grafigini quramiz (9.3.2-rasm).



9.3.2-rasm

9.4-Mavzu: *y=ctgx* funksiyaning asosiy xossalari

$y=ctgx$ funksiya grafigi asosida fuknsiya xossalarini sanab o‘tamiz.



9.4.1-rasm

1.1. Funksiyaning aniqlanish sohasi	$D(f)=(\pi n;\ \pi+\pi n)$ *yoki* $x\neq\pi n$
1.2. Funksiyaning qiymatlar sohasi	$E(f)=(-\infty;\ \infty)$
2.1. Juft-toqligi	Juft funksiya , $\cos(-x)=\cos x$
2.2. Davriyligi, eng kichik musbat davri	Davriy , $T=\pi$
3.1. Funksiyaning o‘sish oralig‘i	$x\in\otimes$ da ↑↑↑
3.2. Funksiyaning kamayish oralig‘i	$\pi n\leq x\leq\pi+\pi n$ da ↓↓↓

4.1. Funksiyaning musbat ishorali oralig‘i	$\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ da y>0
4.2. Funksiyaning manfiy ishorali oralig‘i	$\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \pi + \pi n$ da y<0
5.1. *Ox* o‘qini kesish nuqtalari	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ *yoki* $(\frac{\pi}{2} + \pi n;\ 0)$ nuqtalar
5.2. *Oy* o‘qini kesish nuqtasi	Kesmaydi
6.1. Minimum nuqtalari	Yo‘q
6.2. Funksiya minimumlari	Yo‘q
6.3. Maksimum nuqtalari	Yo‘q
6.4. Funksiya maksimumlari	Yo‘q

Misol №1: $y = -ctg(2x - \frac{\pi}{3})$ funksiyani to‘la tekshiring.

Yechish:

1.1. $2x - \frac{\pi}{3} \neq \pi n; \to x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2};$ *yoki* $D(f) = (\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi n}{2})$. 1.2. $E(f) = (-\infty;\ \infty)$.

2.1. Juft ham toq ham emas. 2.2. Davriy, $2T = \pi; \to T = \frac{\pi}{2}$.

3.1. $\pi n \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + \pi n, \to \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$ da ↑↑↑

3.2. $x \in \otimes$ da ↓↓↓

4.1. $\frac{\pi}{2} + \pi n < 2x - \frac{\pi}{3} < \pi + \pi n, \to \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi n < 2x < \pi + \frac{\pi}{3} + \pi n, \to$

$\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$ da y>0 bo‘ladi.

4.2. $\pi n < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} + \pi n, \to \frac{\pi}{3} + \pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi n, \to$

$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ da y<0 bo‘ladi.

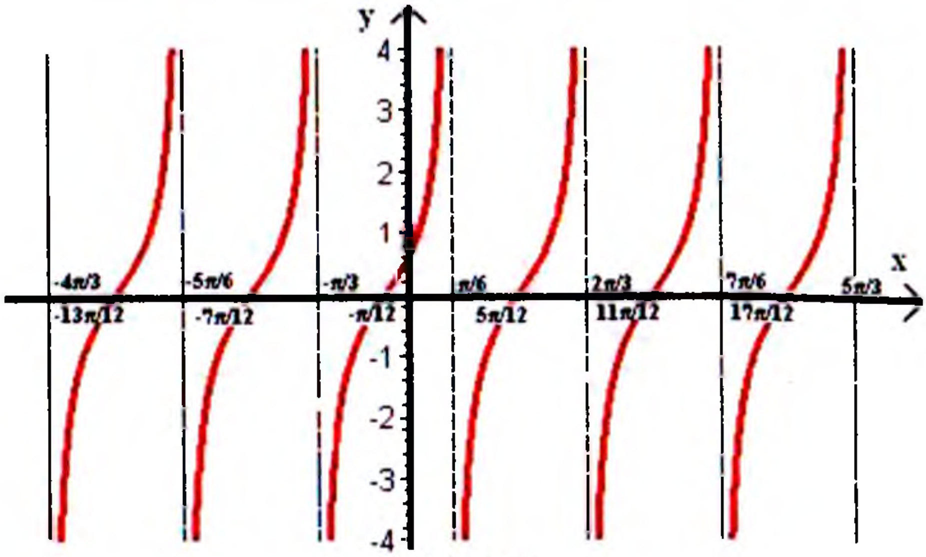
5.1. $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \to 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \pi n, \to x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$

Demak, *Ox* o‘qni $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ *yoki* $(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2};\ 0)$ nuqtalarda kesadi

5.2. $y = -ctg(0 - \frac{\pi}{3}) = -(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Demak, *Oy* o‘qni $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$; yoki $(0; \frac{1}{\sqrt{3}})$ nuqtada kesadi.

6. Yo‘q.

Yuqoridagi tekshirishlardan keyin funksiyaning grafigini quramiz (9.4.2-rasm).

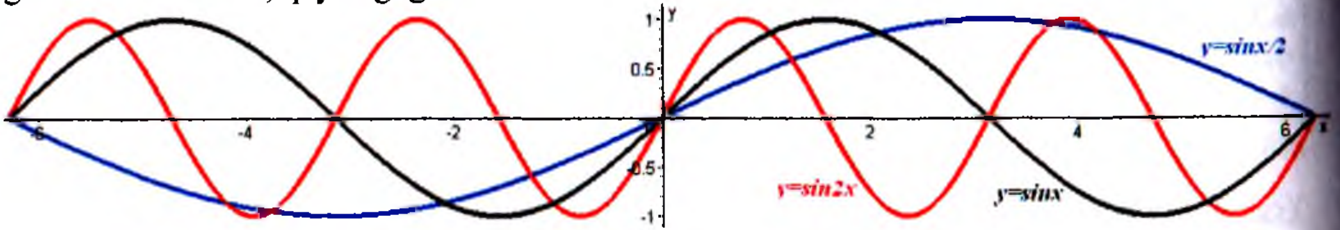


9.4.2-rasm

9.5-Mavzu: Turli trigonometrik funksiyalarning grafiklari

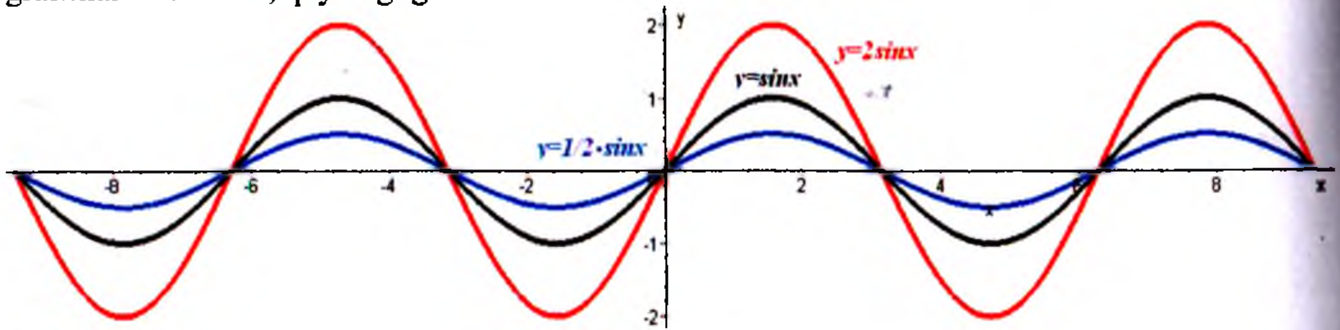
Agar trigonometrik funksiya $y = A\sin kx$, $y = A\cos kx$, $y = A\,tgkx$, $y = A\,ctgkx$ ko'rinishlardagi funksiyalardan biri bo'lsa, funksiyadagi A va k koeffitsientlarning qanday rol o'ynashini ko'rsatamiz.

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin\frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



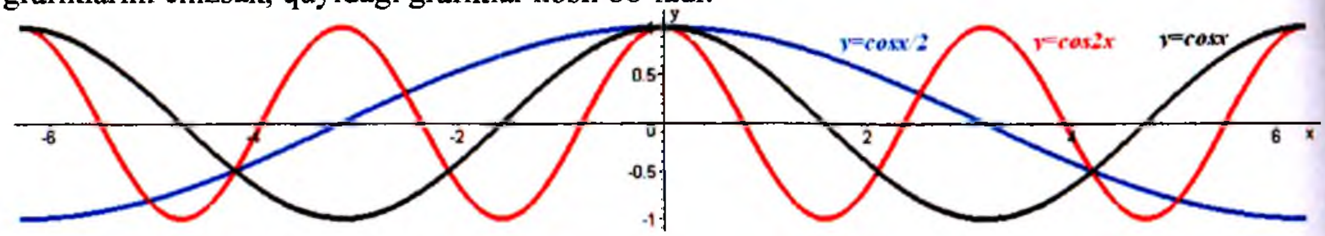
9.5.1-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \frac{1}{2}\sin x$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



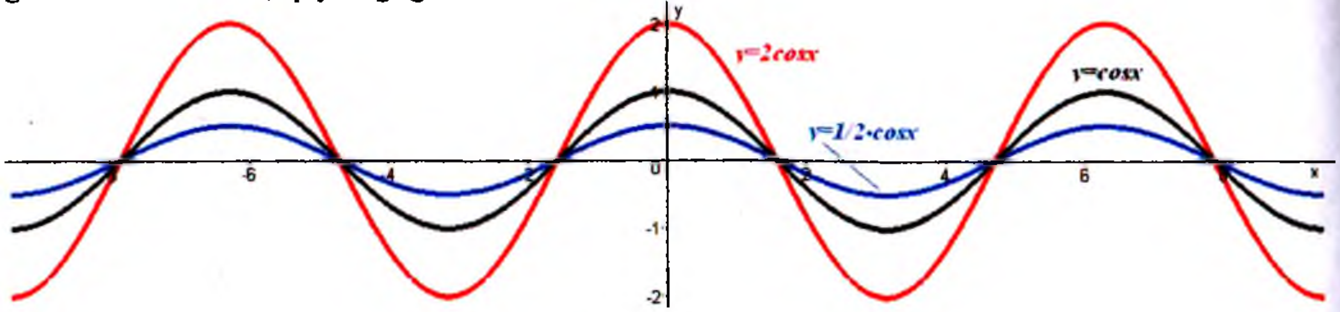
9.5.2-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = \cos x$, $y = \cos 2x$, $y = \cos\frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



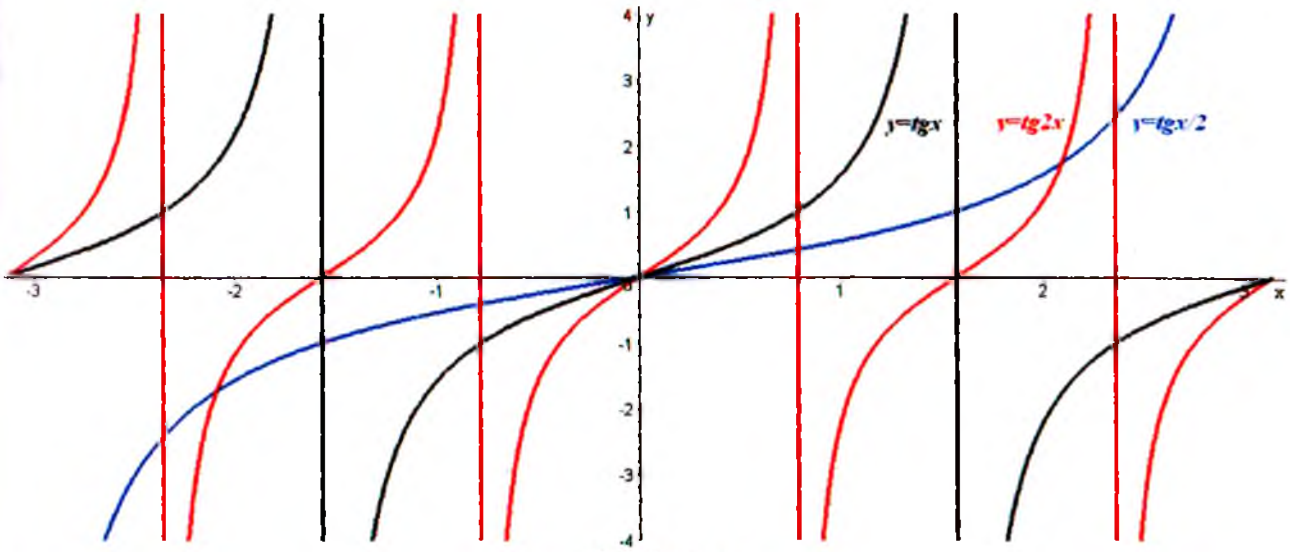
9.5.3-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = \cos x$, $y = 2\cos x$, $y = \frac{1}{2}\cos x$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



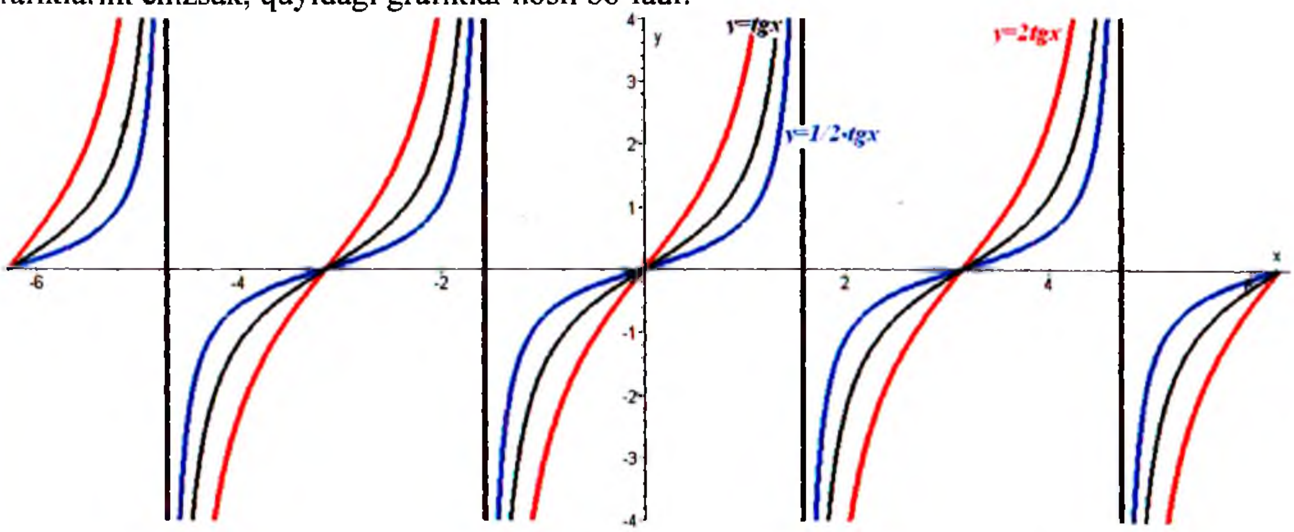
9.5.4-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = tgx$, $y = tg2x$, $y = tg\frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



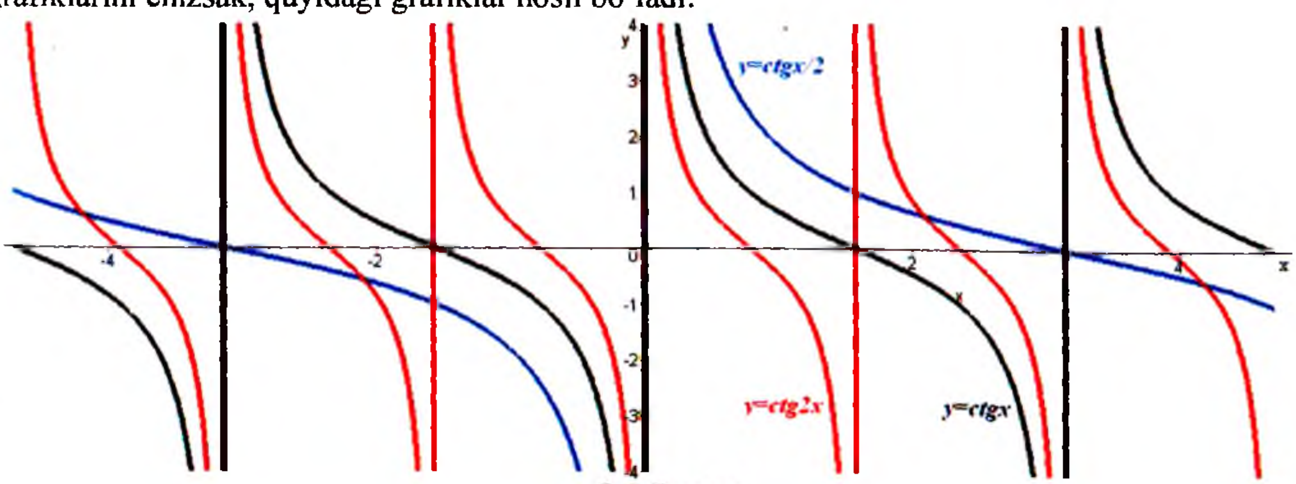
9.5.5-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = tgx$, $y = 2tgx$, $y = \frac{1}{2}tgx$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



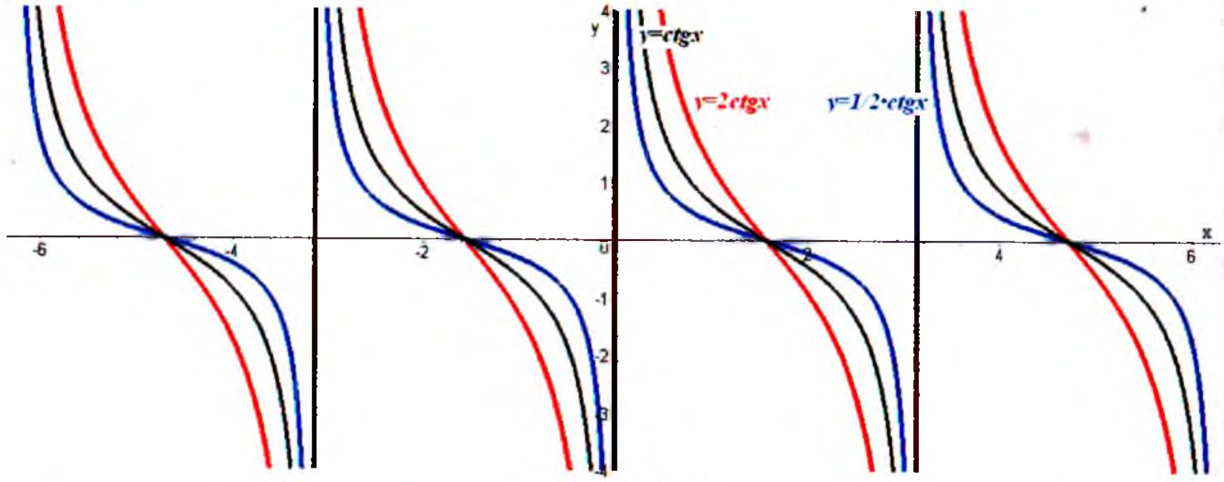
9.5.6-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = ctgx$, $y = ctg2x$, $y = ctg\frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



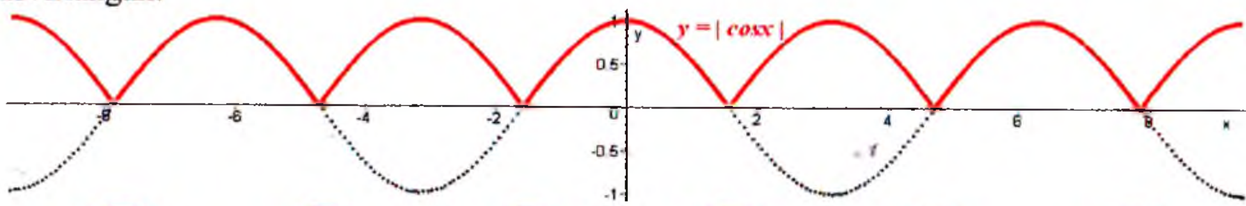
9.5.7-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y = ctgx$, $y = 2ctgx$, $y = \frac{1}{2}ctgx$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:

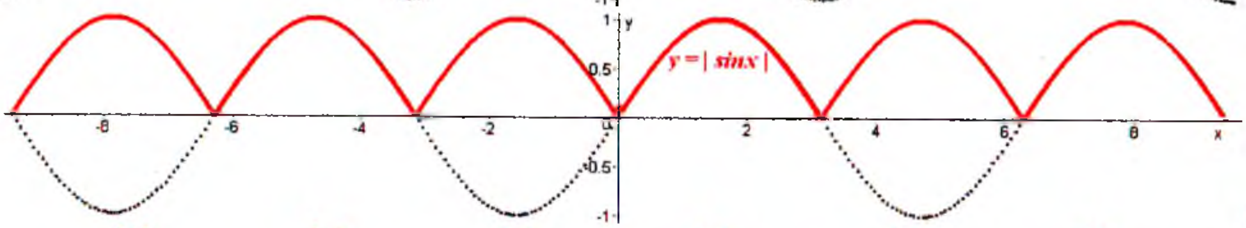


9.5.8-rasm

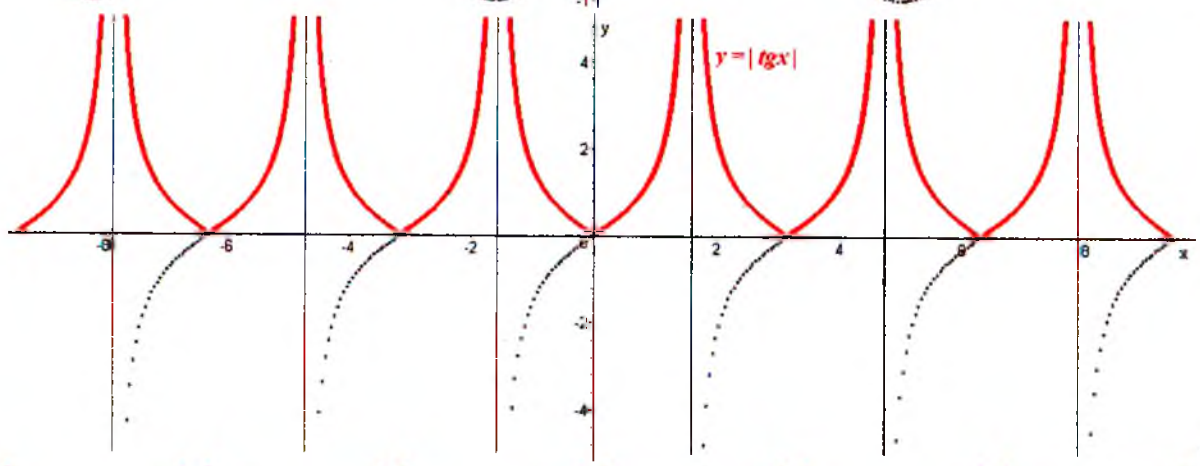
Quyidagi rasmda esa $y=|\sin x|,\ y=|\cos x|,\ y=|tgx|,\ y=|ctgx|$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan:



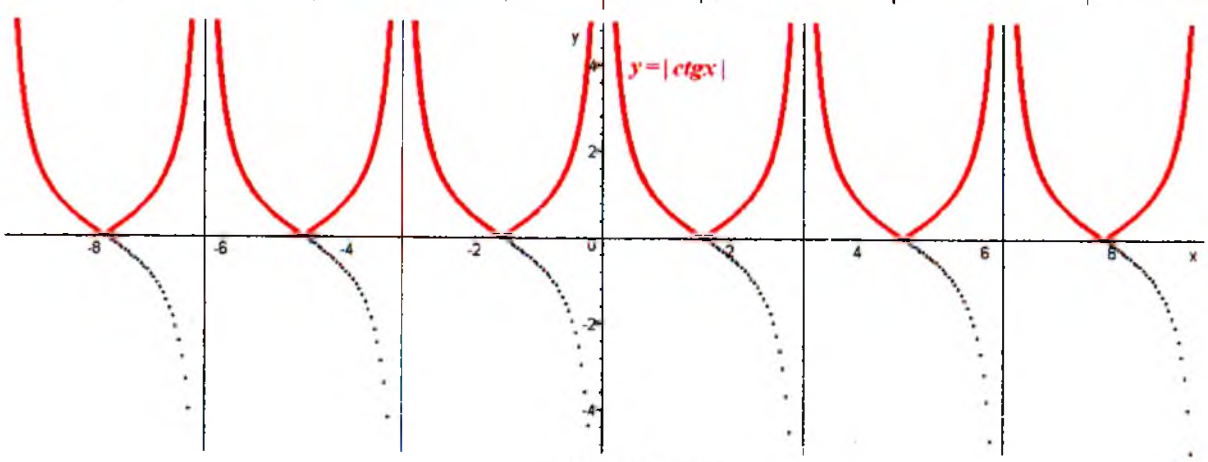
a)



b)



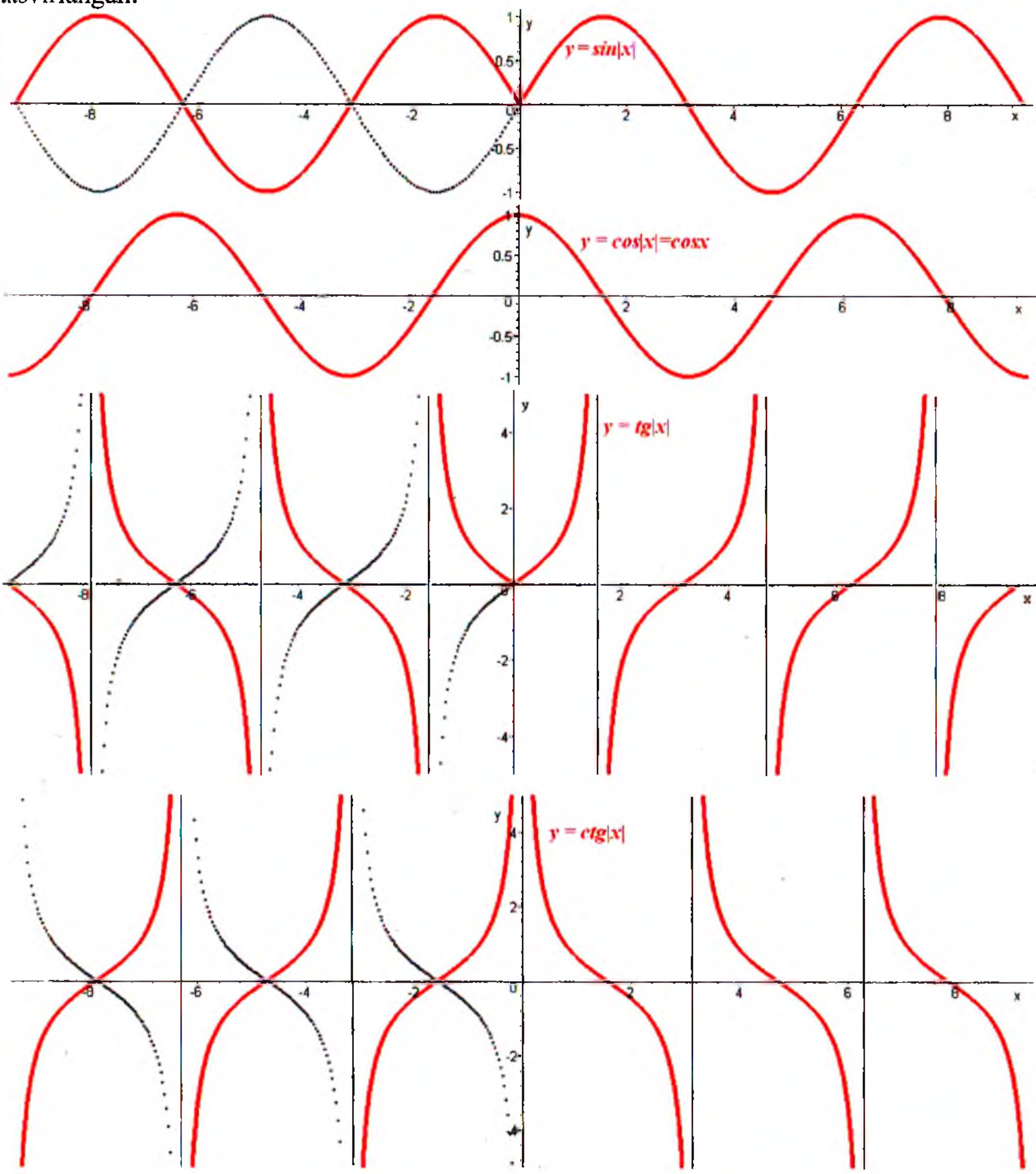
v)



g)

9.5.9-rasm

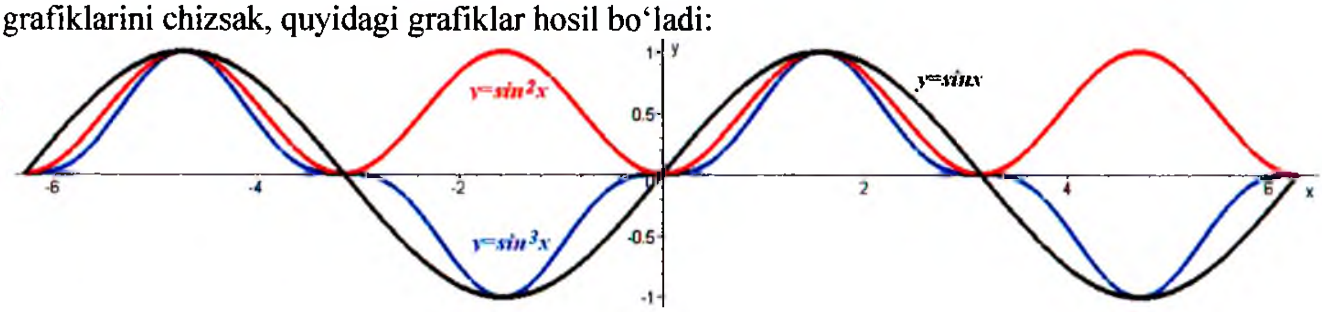
Quyidagi rasmda esa $y=\sin|x|$, $y=\cos|x|$, $y=tg|x|$, $y=ctg|x|$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan:



a) b) v) g)

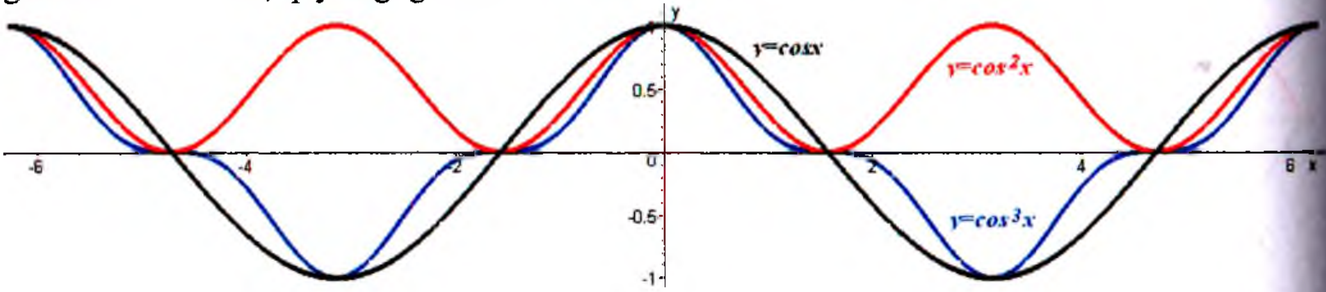
9.5.10-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y=\sin x, y=\sin^2 x, y=\sin^3 x$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



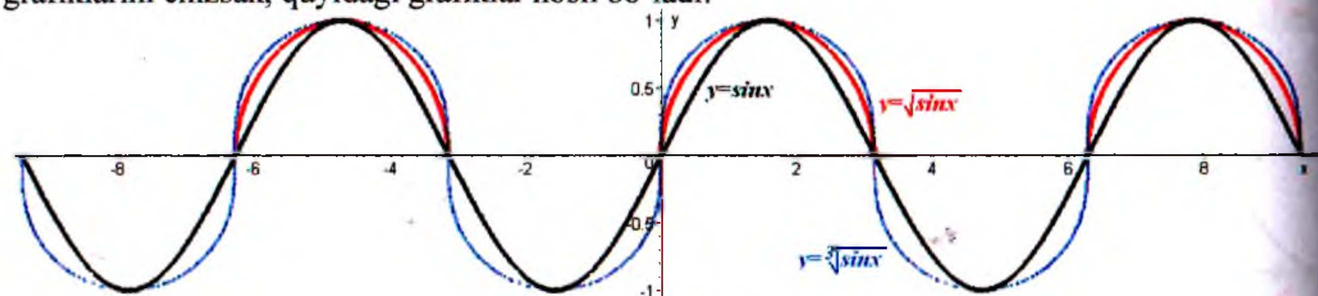
9.5.11-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y=\cos x, y=\cos^2 x, y=\cos^3 x$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



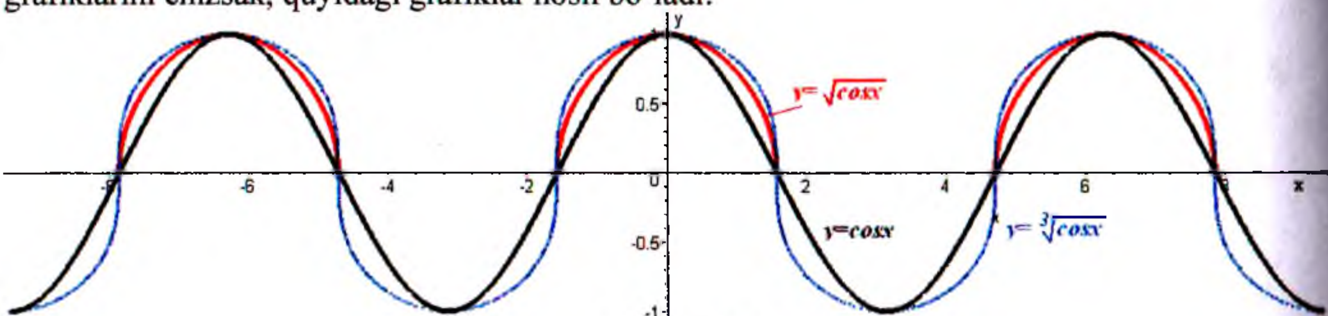
9.5.12-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y=\sin x$, $y=\sqrt{\sin x}$, $y=\sqrt[3]{\sin x}$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



9.5.13-rasm

Agar bitta Dekart koordinatalar sistemasida $y=\cos x$, $y=\sqrt{\cos x}$, $y=\sqrt[3]{\cos x}$ funksiyalarning grafiklarini chizsak, quyidagi grafiklar hosil bo'ladi:



9.5.14-rasm

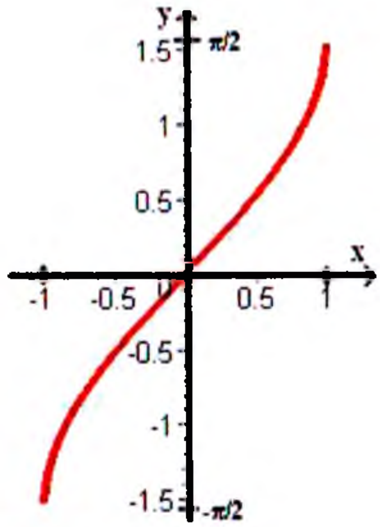
9.6-Mavzu: Teskari trigonometrik funksiyalarning asosiy xossalari

Trigonometrik funksiyalarga teskari funksiyalarni ***teskari trigonometrik funksiyalar*** deyiladi. Teskari funksiya haqida keyingi boblarda batafsil o'rganamiz. Ushbu mavzuda biz teskari trigonometrik funksiyalar va ularning asosiy xossalari bilan birma-bir tanishamiz.

1. y=arcsinx funksiyaning xossalari:

$y=\arcsin x$ funksiya $y=\sin x$ funksiyaning teskari funksiyasi bo'lib, bu erda x – qiymatlar $(x\in[-1;\ 1])$, y – burchaklar $(y\in[-\pi/2;\ \pi/2])$.

$y = \arcsin x$ funksiyaning asosiy xossalari (9.6.1-rasm):



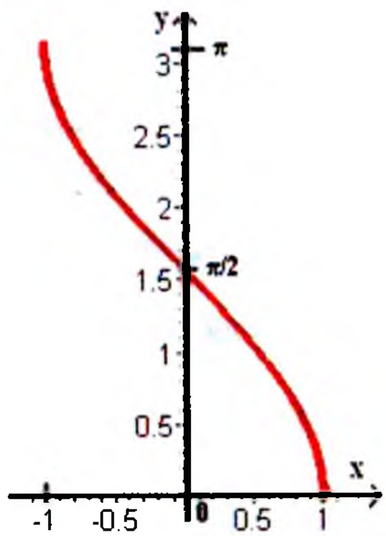
9.6.1-rasm

1. Aniqlanish sohasi
$$D(f) = [-1; 1]$$
2. Qiymatlar sohasi
$$E(f) = [-\pi/2;\ \pi/2]$$
3. Juft-toqligi:
toq funksiya, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
4. O‘sish-kamayish oraliqlari:
Aniqlanish sohasida faqat o‘suvchi
Agar $x_2 > x_1$ *bo'lsa*, $\arcsin(x_2) > \arcsin(x_1)$ *bo'ladi*
5. O‘zgarmas ishoralik oraliqlari:
$$\begin{cases} x \in [-1;\ 0)\partial a \quad y < 0 \quad bo'ladi \\ x \in (0;\ 1]\ \partial a \quad y > 0 \quad bo'ladi \end{cases}$$

2. y=arccosx funksiyaning xossalari:

$y = \arccos x$ funksiya $y = \cos x$ funksiyaning teskari funksiyasi bo‘lib, bu erda x – qiymatlar $(x \in [-1;\ 1])$, y – burchaklar $(y \in [-\pi/2;\ \pi/2])$.

$y = \arccos x$ funksiyaning asosiy xossalari (9.6.2-rasm):



9.6.2-rasm

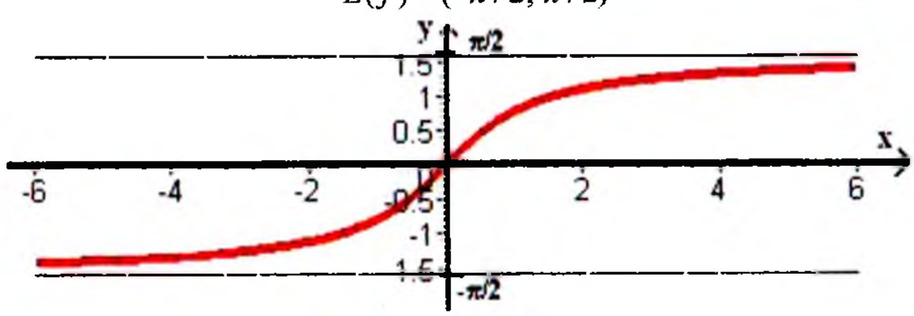
1. Aniqlanish sohasi:
$$D(f) = [-1; 1]$$
2. Qiymatlar sohasi:
$$E(f) = [-\pi/2;\ \pi/2]$$
3. Juft-toqligi:
juft ham toq ham emas funksiya, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
4. O‘sish-kamayish oraliqlari:
Aniqlanish sohasida faqat kamayuvchi
Agar $x_2 > x_1$ *bo'lsa*, $\arccos(x_2) < \arccos(x_1)$ *bo'ladi*
5. O‘zgarmas ishoralik oraliqlari:
faqat nomanfiy qiymatlar qa’bul qiladi,
$$\begin{cases} x \in [-1;\ 1)\, da \quad y > 0 \quad bo'ladi \\ x \in \otimes \quad da \quad y < 0 \quad bo'ladi \end{cases}$$

3. y=arctgx funksiyaning xossalari:

$y = arctgx$ funksiya $y = tgx$ funksiyaning teskari funksiyasi bo‘lib, bu erda x – qiymatlar $(x \in (-\infty;\ \infty))$, y – burchaklar $(y \in (-\pi/2;\ \pi/2))$.

$y = arctgx$ funksiyaning asosiy xossalari (9.6.3-rasm):

1. Aniqlanish sohasi:
$$D(f) = (-\infty; \infty)$$
2. Qiymatlar sohasi:
$$E(f) = (-\pi/2;\ \pi/2)$$



9.6.3-rasm

3. Juft-toqligi:

Toq funksiya, $arctg(-x) = -arctgx$

4. O‘sish-kamayish oraliqlari:

Aniqlanish sohasida faqat o‘suvchi,

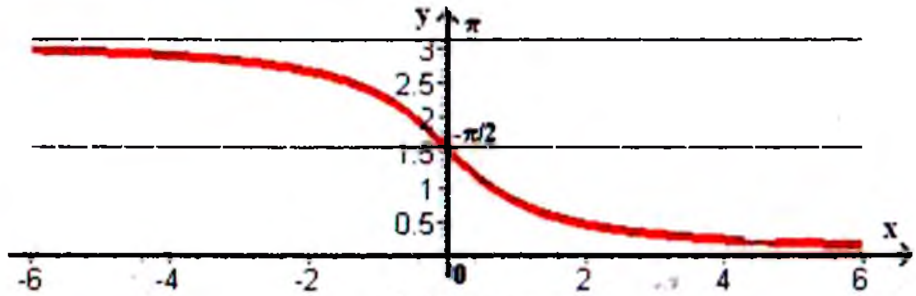
$Agar\ x_2 > x_1\ bo'lsa,\ \ arctg(x_2) > arctg(x_1)\ bo'ladi$

5. O‘zgarmas ishoralik oraliqlari:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;\ 0)\partial a\ \ y < 0\ \ bo'ladi \\ x \in (0;\ \infty)\ \ \partial a\ \ y > 0\ \ bo'ladi \end{cases}$$

4. y=arcctgx funksiyaning xossalari:

$y = arcctgx$ funksiya $y = ctgx$ funksiyaning teskari funksiyasi bo‘lib, bu erda x – qiymatlar $(x \in (-\infty;\ \infty))$, y – burchaklar $(y \in (0;\ \pi))$.



9.6.4-rasm

$y = arcctgx$ funksiyaning asosiy xossalari (9.6.4-rasm):

1. Aniqlanish sohasi:

$$D(f) = (-\infty;\infty)$$

2. Qiymatlar sohasi:

$$E(f) = (0;\ \pi)$$

3. Juft-toqligi:

juft ham toq ham emas funksiya, $arcctg(-x) = -arcctgx$

4. O‘sish-kamayish oraliqlari:

Aniqlanish sohasida kamayuvchi,

$Agar\ x_2 > x_1\ bo'lsa,\ \ arcctg(x_2) < arcctg(x_1)\ bo'ladi$

5. O‘zgarmas ishoralik oraliqlari:

faqat nomanfiy qiymatlar qa’bul qiladi,

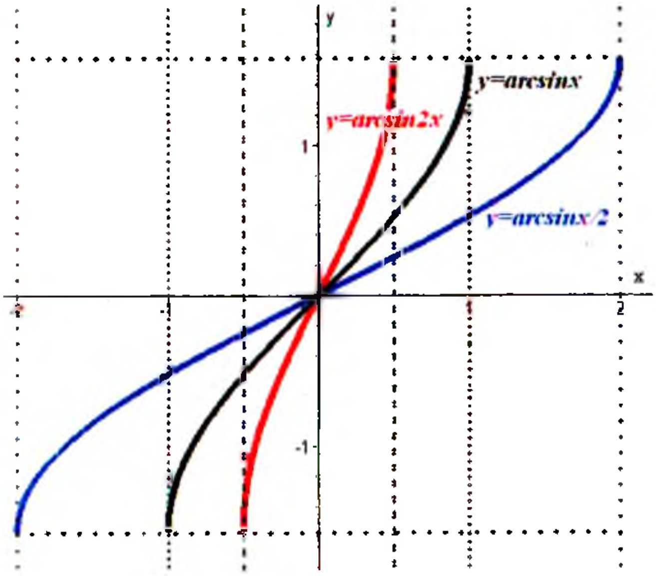
$$\begin{cases} x \in (-\infty;\infty)\ da\ \ y > 0\ \ bo'ladi \\ x \in \otimes\ \ da\ \ y < 0\ \ bo'ladi \end{cases}$$

9.7-Mavzu: Turli teskari trigonametrik funksiyalarning grafiklari

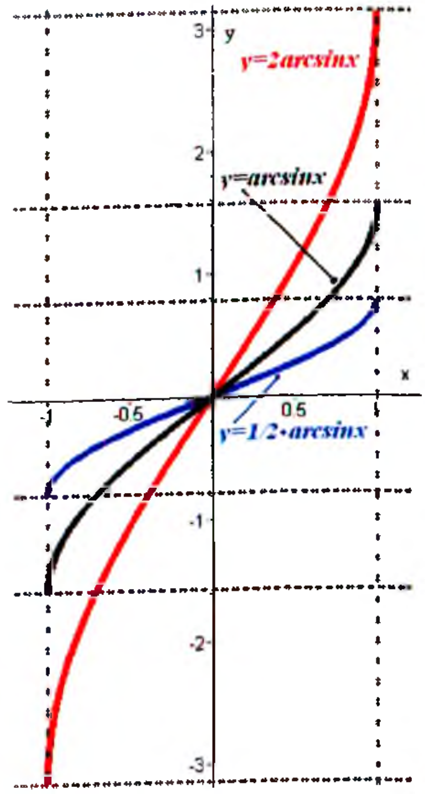
Agar trigonametrik funksiya $y = A\arcsin kx$, $y = A\arccos kx, y = A\,arctgkx, y = A\,arcctgkx$ ko‘rinishlardagi funksiyalardan biri bo‘lsa, funksiyadagi A va k koeffitsientlarning qanday rol o‘ynashini ko‘rsatamiz.

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = \arcsin x$, $y = \arcsin 2x, y = \arcsin\frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklari 9.7.1-rasmda tasvirlangan.

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = \arcsin x$, $y = 2\arcsin x, y = \frac{1}{2}\arcsin x$ funksiyalarning grafiklari 9.7.2-rasmda tasvirlangan.



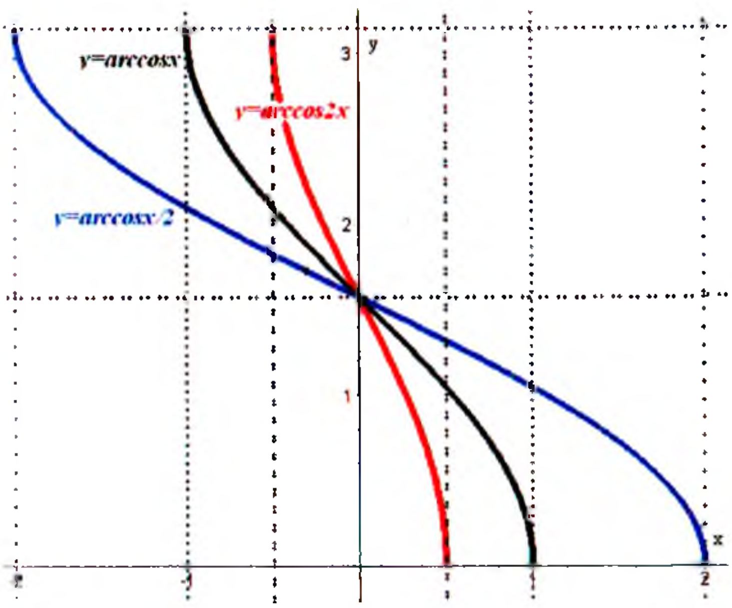
9.7.1-rasm



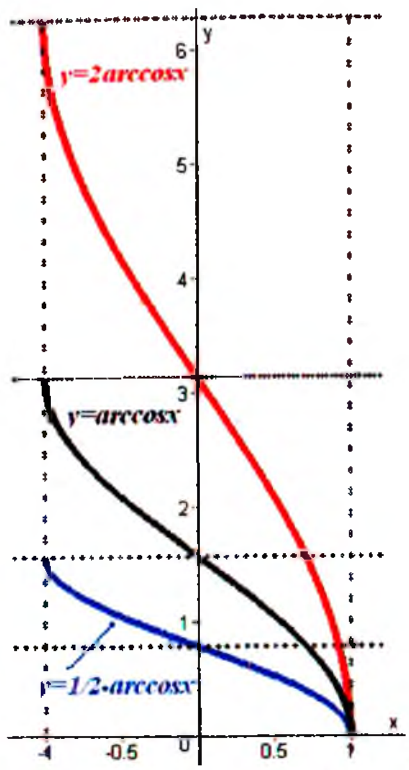
9.7.2-rasm

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = \arccos x$, $y = \arccos 2x$, $y = \arccos \frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklari 9.7.3-rasmda tasvirlangan.

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = \arccos x$, $y = 2\arccos x$, $y = \frac{1}{2}\arccos x$ funksiyalarning grafiklari 9.7.4-rasmda tasvirlangan.

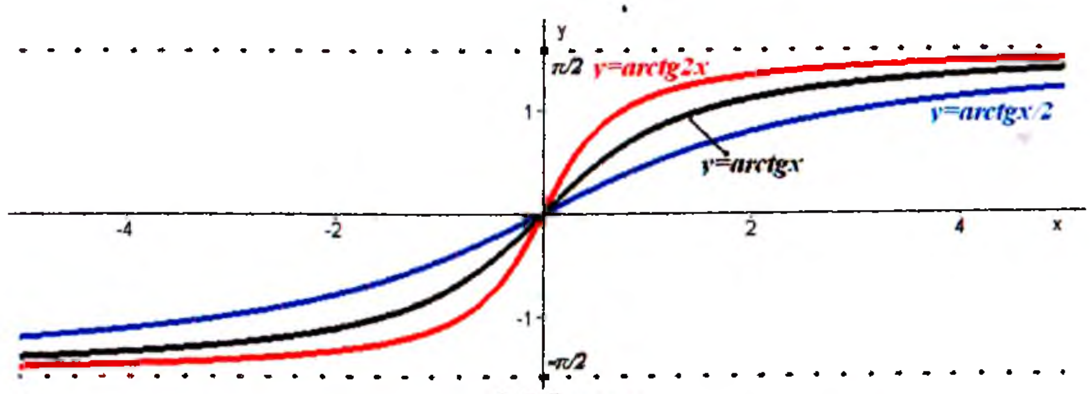


9.7.3-rasm



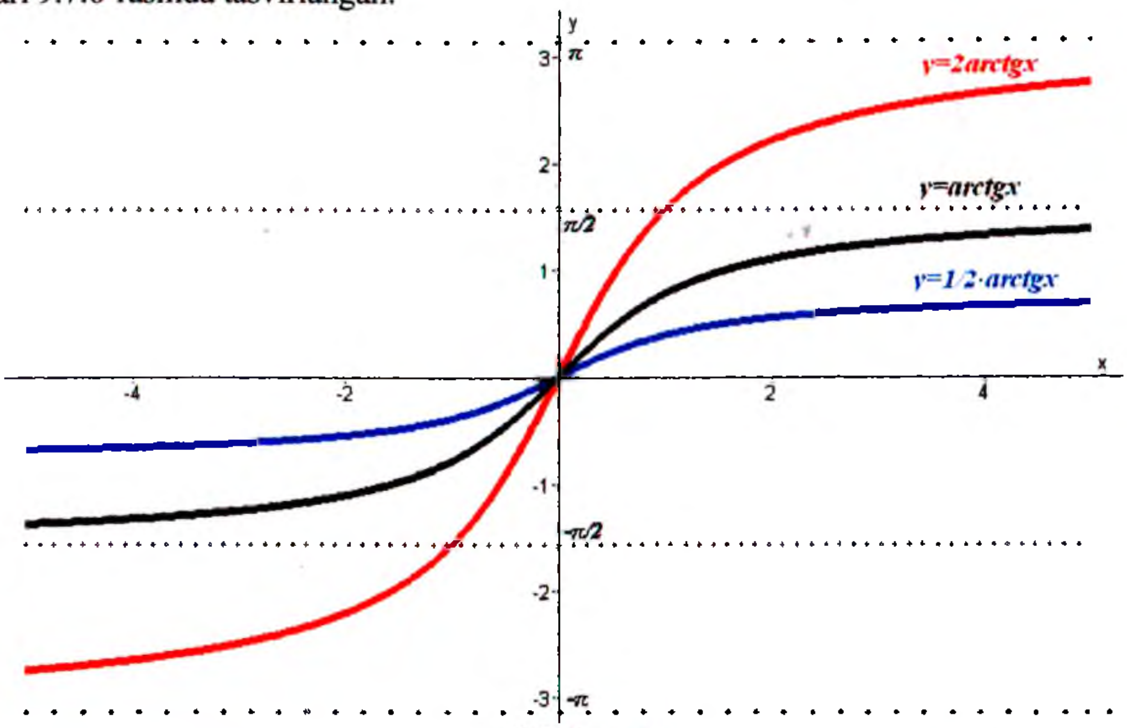
9.7.4-rasm

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = arctgx$, $y = arctg2x$, $y = arctg\frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklari 9.7.5-rasmda tasvirlangan.



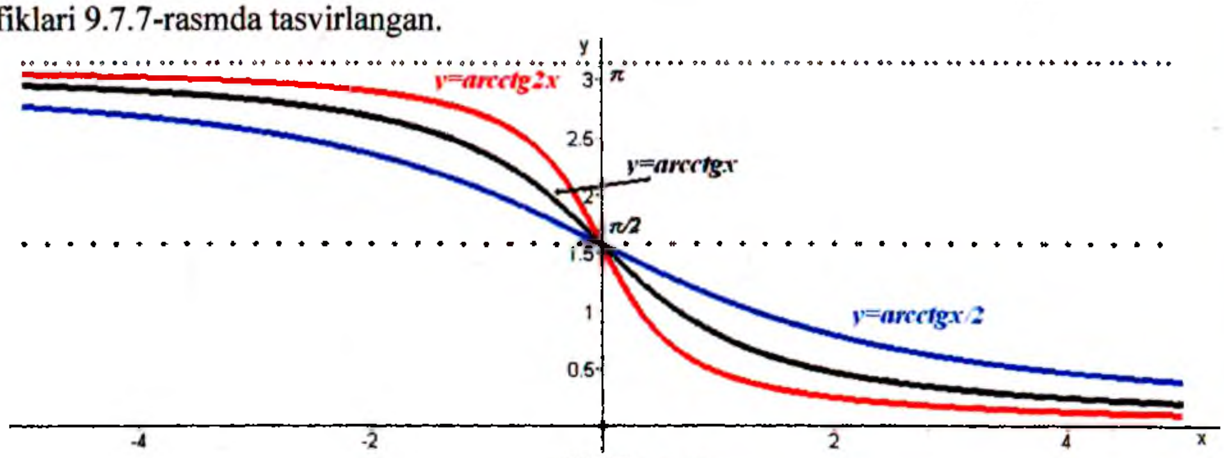
9.7.5-rasm

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = arctgx$, $y = 2arctgx$, $y = \frac{1}{2}arctgx$ funksiyalarning grafiklari 9.7.6-rasmda tasvirlangan.



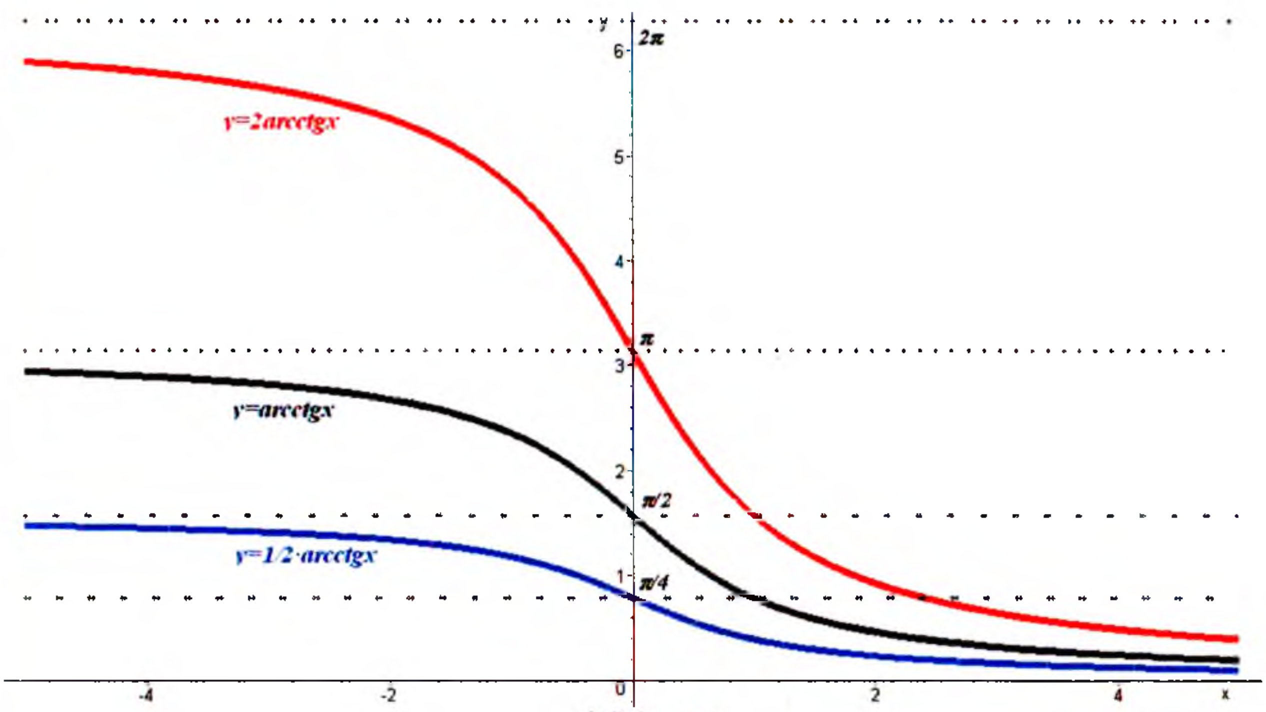
9.7.6-rasm

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = arcctgx$, $y = arcctg\,2x$, $y = arcctg\,\frac{x}{2}$ funksiyalarning grafiklari 9.7.7-rasmda tasvirlangan.



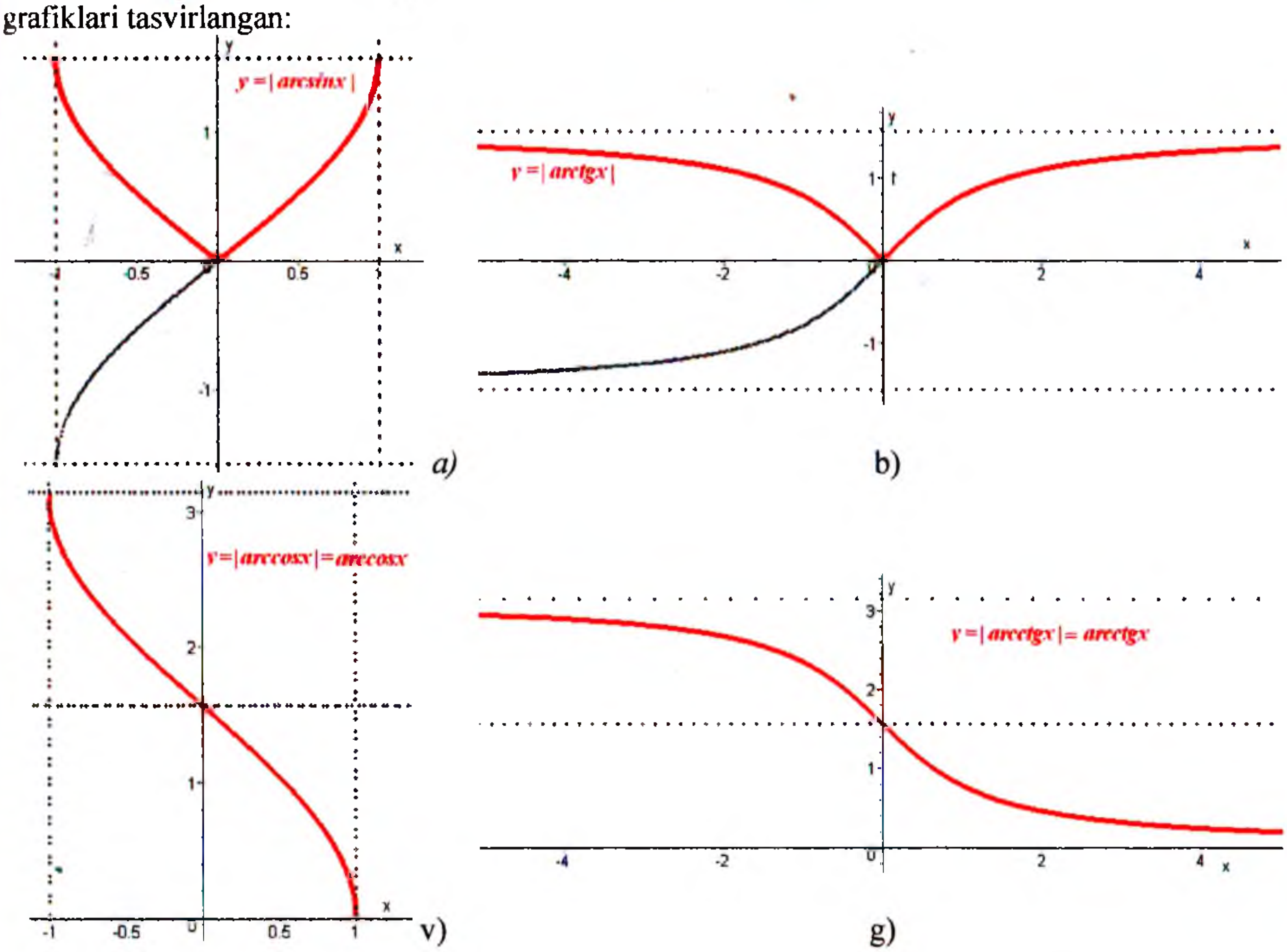
9.7.7-rasm

Bitta Dekart koordinatalar sistemasidagi $y = arcctgx$, $y = 2arcctgx$, $y = \frac{1}{2}arcctgx$ funksiyalarning grafiklari 9.7.7-rasmda tasvirlangan.



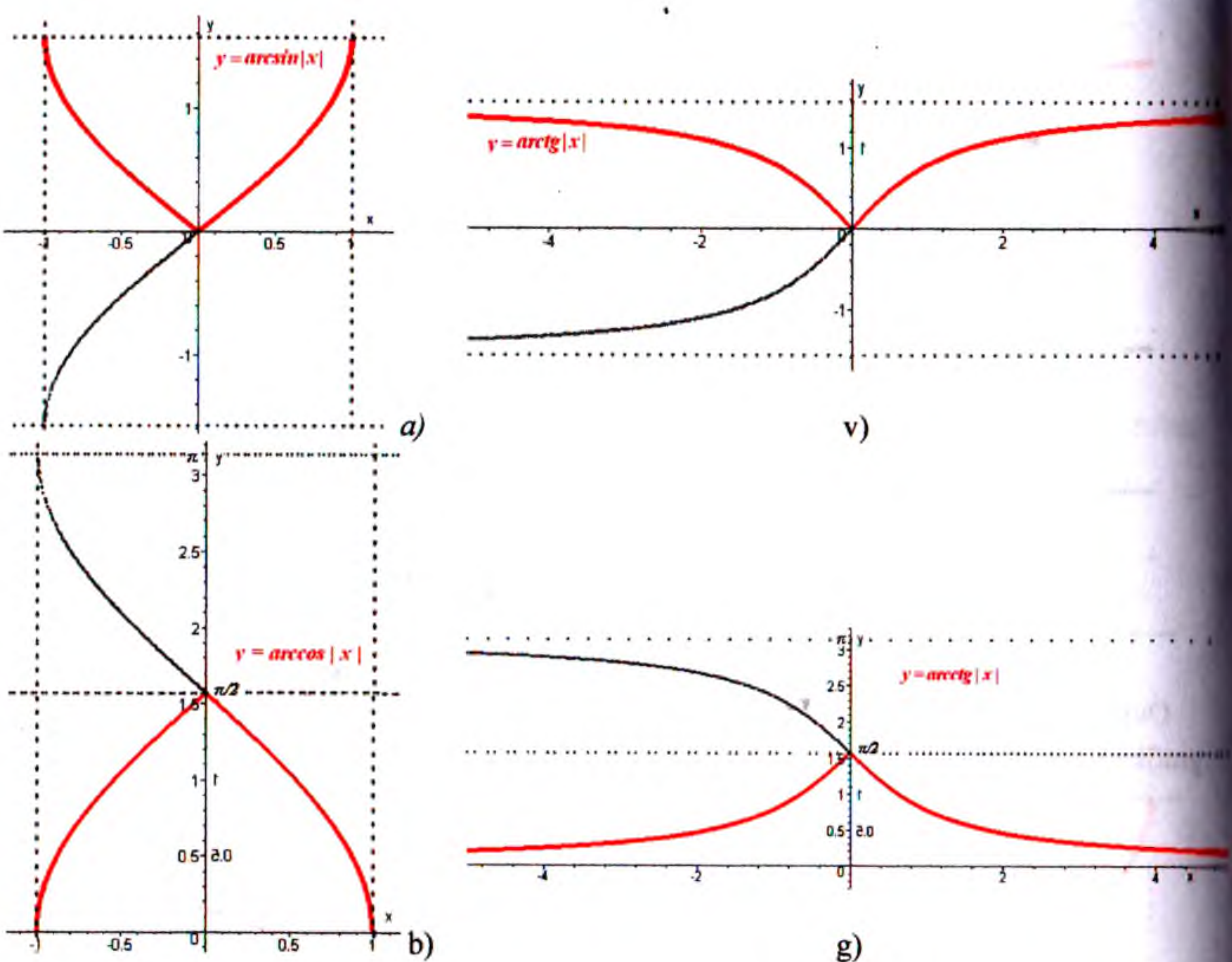
9.7.8-rasm

Quyidagi rasmda esa $y=|\arcsin x|$, $y=|\arccos x|$, $y=|arctgx|$, $y=|arcctgx|$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan:



9.7.9-rasm

Quyidagi rasmda esa $y=\arcsin|x|$, $y=\arccos|x|$, $y=arctg|x|$, $y=arcctg|x|$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan:



9.7.10-rasm

9.8-Mavzu: Teskari trigonametrik ifodalar

Teskari trigonametrik kattaliklar va ular ustida bajariladigan turli amallardan iborat ifodalarga ***teskari trigonametrik ifodalar*** deyiladi. Ushbu mavzuda turli teskari ifodalarni guruhlarga bo'lgan holda tanishamsiz.

1). Trigonametrik ayniyatlardan kelib chiqadigan teskari trigonametrik ifodalar:

Quyida keltirilgan ifodalarni trigonametrik ayniyatlardan osongina keltirib chiqarish mumkin:

$$\begin{cases} \sin(\arcsin x) = x \\ \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \\ \sin(arctgx) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(arcctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \\ \cos(\arccos x) = x \\ \cos(arctgx) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \cos(arcctgx) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ tg(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ tg(arctgx) = x \\ tg(arcctgx) = \dfrac{1}{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} ctg(\arcsin x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ ctg(\arccos x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ ctg(arctgx) = \dfrac{1}{x} \\ ctg(arcctgx) = x \end{cases}$$

2). Teskari trigonametrik ifodalarni qo'shish va ayirish:

Teskari trigonometrik ifodalarni qo'shish va ayirish amallarini sinuslar, kosinuslar, tangenslar va kotangenslar yig'indisi va ayirmasi formulalaridan osongina keltirib chiqarish mumkin:

$$\begin{cases} \arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin(x \cdot \sqrt{1-y^2} \pm y \cdot \sqrt{1-x^2}) \\ \arcsin x \pm \arcsin y = \arccos(\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} \mp x \cdot y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \arccos x \pm \arccos y = \arccos(x \cdot y \mp \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2}) \\ \arccos x \pm \arccos y = \arcsin(\sqrt{1-x^2} \cdot y \pm x \cdot \sqrt{1-y^2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} arctgx \pm arctgy = arctg\left(\dfrac{x \pm y}{1 \mp x \cdot y}\right) \\ arcctgx \pm arcctgy = arcctg\left(\dfrac{x \cdot y \mp 1}{x \pm y}\right) \end{cases}$$

3). Teskari trigonometrik ifodalarni birini boshqasi orqali ifodalash:

Teskari trigonometrik ifodalardan birini boshqa bir teskari trigonometrik ifoda orqali ifodalash ham trigonometrik ayniyatlardan keltirib chiqariladi:

$$\begin{cases} \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - arccocx = \arccos \sqrt{1-x^2} \\ \arcsin x = arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \\ \arcsin x = arcctg\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} \arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x = \arcsin \sqrt{1-x^2} \\ \arccos x = arctg\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \\ \arccos x = arcctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} arctgx = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ arctgx = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ arctgx = \dfrac{\pi}{2} - arcctgx \end{cases} \qquad \begin{cases} arcctgx = \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ arcctgx = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ arcctgx = \dfrac{\pi}{2} - arctgx \end{cases}$$

4). Teskari trigonometrik funksiyalarning juft-toqligi:

Teskari trigonometrik funksiyalarning juft-toqligi hafida 9.6-mavzuda aytib o'tilgan. Ularni qisqacha quyidagicha yozishimiz mumkin bo'ladi:

$$\begin{array}{lll} \arcsin(-x) = -\arcsin x; & chunki \;\; y = \arcsin x & toq \;\; funksiya \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x; & y = \arccos x & J.T.E.\, funksiya \\ arctg(-x) = -arctgx\,; & chunki \;\; y = arctgx & toq \;\; funksiya \\ arcctg(-x) = \pi - arcctgx\,; & y = arccctgx & J.T.E.\, funksiya \end{array}$$

5). Teskari trigonometrik tengsizliklar:

Teskari trigonometrik tengsizliklarni yechish uchun ularning o'suvchi yoki kamayuvchi funksiya ekanligidan foydalaniladi. Teskari trigonometrik tengsizliklarni yechish quyidagi qoidalar asosida amalga oshiriladi:

Agar $\arcsin a > \arcsin b$ bo'lsa, yechim $\begin{cases} a > b \\ b \geq -1 \\ a \leq 1 \end{cases}$ bo'ladi.

Agar $\arccos a > \arccos b$ bo'lsa, yechim $\begin{cases} a < b \\ a \geq -1 \\ b \leq 1 \end{cases}$ bo'ladi.

Agar $arctga > arctgb$ bo'lsa, yechim $a > b$ bo'ladi.

Agar $arcctga > arcctgb$ bo'lsa, yechim $a < b$ bo'ladi.

6). Teskari trigonometrik ifodalar orqali berilgan ikkilangan va uchlangan burchak formulalari:

Teskari trigonometrik ifodalarni soddalashtirish va shu kabi misollar yechishda ikkinlangan va uchlangan burchaklar teskari trigonometrik kattaliklar orqali ham berilishi mumkin. SHunday hollarda quyida keltirilgan formulalardan foydalanish mumkin:

$$\begin{cases} \sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} \\ \sin(2\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2} \\ \sin(2arctgx) = \dfrac{2x}{1+x^2} \\ \sin(2arcctgx) = \dfrac{2x}{1+x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos(2\arcsin x) = 1-2x^2 \\ \cos(2\arccos x) = 2x^2-1 \\ \cos(2arctgx) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2} \\ \cos(2arcctgx) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} tg(2\arcsin x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2} \\ tg(2\arccos x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1} \\ tg(2arctgx) = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ tg(2arcctgx) = \dfrac{2x}{x^2-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} ctg(2\arcsin x) = \dfrac{1-2x^2}{2x\sqrt{1-x^2}} \\ ctg(2\arccos x) = \dfrac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}} \\ ctg(2arctgx) = \dfrac{1-x^2}{2x} \\ ctg(2arcctgx) = \dfrac{x^2-1}{2x} \end{cases}$$

$$\sin(3\arcsin x) = 3x-4x^3 \qquad \cos(3\arccos x) = 4x^3-3x$$

$$tg(3arctgx) = \frac{x^3-x}{3x^2-1} \qquad ctg(3arcctgx) = \frac{x^3-x}{3x^2-1}$$

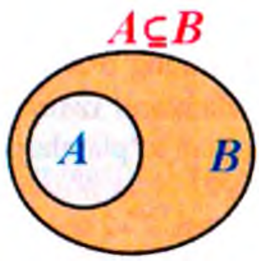
10-BOB: TO‘PLAMLAR VA MANTIQ ELEMENTLARI

10.1-Mavzu: To‘plam tushunchasi.

To‘plam tushunchasi matematikaning asosiy boshlang‘ich tushunchalaridan biri bo‘lib , uni misollar yordamida tushuntiriladi. U chekli yoki cheksiz ko‘p ob’ektlar (narsalar, buyumlar, shaxslar, sonlar, harflar va hokoza) ni bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi. To‘plam ixtiyoriy tabiatli ob’ektlardan tashkil topgan bo‘lishi mumkin. Masalan, Osiyo qit’asidagi barcha tog‘lar yoki Toshkent shahridagi barcha ko‘chalar yoki Respublikadagi barcha daryolar va hokozalar to‘plam bo‘lishi mumkin. To‘plamni tashkil qiluvchi ob’ektlar ***to‘plam elementlari*** deyiladi. To‘plamlar lotincha bosh harflar $A, B, C, D, E, \ldots$ bilan belgilanadi. Masalan, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ – natural sonlar to‘plami, $Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ – butun sonlar to‘plami, $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, \ldots\}$ – lotin alifbosining kichik harflar to‘plami.

Agar biror a ob’ekt A to‘plamning elementi bo‘lsa $a \in A$ deb belgilaymiz, aksincha a ob’ekt A to‘plamning elementi bo‘lmasa $a \notin A$ deb belgilaymiz.

Agar A to‘plamning har bir elementi B to‘plamning ham elementi bo‘lsa, $A \subseteq B$ orqali belgilanadi va A to‘plam B to‘plamning ***to‘plamostisi*** yoki ***qism to‘plami*** deyiladi (10.1.1-rasm). Bunday holni “A to‘plam B to‘plamda yotadi” deb ham aytish mumkin. Masalan, Surxondaryo viloyati aholisi O‘zbekiston Respublikasi aholisi tarkibiga kiradi. Shuning uchun, Surxondaryo viloyati aholisini O‘zbekiston Respublikasi aholisining to‘plamostisi deyishimiz mumkin. Yana bir misol, ushbu $A = \{3, 4, 5\}$ va $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ to‘plamlar uchun ham $A \subseteq B$ deyish mumkin. Chunki, A to‘plamning barcha elementlari B to‘plamda mavjud.



10.1.1-rasm

Bir xil elementlardan tashkil topgan to‘plamlar teng to‘plamlar deyiladi. Agar A va B to‘plamlar teng bo‘lsa, $A = B$ ko‘rinishida belgilaymiz. A va B to‘plamlar teng bo‘lishi uchun $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lishi etarlidir.

Biz narsalar, buyumlardan iborat to‘plam bilan emas, balki sonlardan iborat to‘plamlar bilan shug‘ullanamiz. Barcha elementlari faqat sonlardan iborat bo‘lgan to‘plamga ***sonli to‘plam*** deyiladi.

To‘plamdagi elementlar sonini $n(A)$ bilan belgilanadi. Masalan, $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ bo‘lsa, uning elementlar soni $n(A) = 7$ bo‘ladi.

Elementlar soniga ko‘ra to‘plamlar chekli va cheksiz bo‘lishi mumkin. Elementlari soni cheksiz ko‘p bo‘lgan to‘plamni ***cheksiz to‘plam*** deyiladi. Elementlar soni chekli bo‘lgan to‘plamni esa ***chekli to‘plam*** deyiladi. Masalan, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ – natural sonlar to‘plamining elementlar soni cheksizdir, ya’ni $n(N) = \infty$ bo‘ladi.

Bitta ham elementi yo‘q to‘plamni ***bo‘sh to‘plam*** deymiz va $\otimes$ ko‘rinishida belgilaymiz. Bo‘sh to‘plam ham chekli to‘plam bo‘lib, uning elementlar soni $n(\otimes) = 0$ ga teng.

Faqat to‘plamga tegishli elementlargina qanoatlantiradigan shartlar sistemasiga shu to‘plamning ***xarakteristik xossasi*** deyiladi. Agar biror x element P xossaga ega bo‘lsa, uni $P(x)$ deb yoziladi. P xossaga ega bo‘lgan barcha elementlar to‘plamini esa $\{x \mid P(x)\}$ ko‘rinishida yoziladi. Masalan, ratsional sonlar to‘plamini $Q = \left\{ r \mid r = \frac{m}{n},\ m \in Z,\ n \in N \right\}$ deb, kvadrat tenglamaning ildizlaridan iborat to‘plamni esa $X = \{x \mid ax^2 + bx + c = 0\}$ ko‘rinishida yozish mumkin. Yana bir misol, -3dan kichik bo‘lmagan hamda 5 dan katta bo‘lmagan barcha butun sonlar to‘plamini $A = \{x \mid -3 \le x \le 5,\ x \in Z\}$ ko‘rinishida yozish mumkin. Buni boshqacharoq, ya’ni $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ deb ifodalash ham mumkin. Bunda A to‘plamdagi elementlar soni $n(A) = 9$ bo‘ladi.

Misol № 1: Ushbu $A=\{x|-2\le x<7,\ x\in Z\}$ va $B=\{x|-2\le x<7,\ x\in R\}$ to'plamlar qanday o'qiladi? Bu to'plamlarning elementlarini yozib chiqing hamda ulardagi elementlar sonini toping.

Yechish: Dastlab har ikkala to'plamning ham o'qilishini aytamiz. A to'plamni "-2 dan kichik bo'lmagan hamda 7dan kichik bo'lgan butun sonlar to'plami " deb, B to'plamni esa "-2 dan kichik bo'lmagan hamda 7dan kichik bo'lgan haqiqiy sonlar to'plami " deb o'qiladi.

Endi to'plamlar elementlarini yozib chiqamiz. A to'plamni elementlarini $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$ deb, A to'plamni elementlarini esa $B=[-2;\ 7)$ deb yoziladi.

Endi to'plamlardagi elementlar soni topamiz. Bunda $n(A)=9$ va $n(B)=\infty$ bo'ladi.

Misol № 2: Ushbu $A=\{x|\,x<4,\ x\in N\}$ va $B=\{(x-1)(x-2)(x-3)=0\}$ to'plamlari o'zaro tengmi yoki yo'q?

Yechish: Dastlab A to'plamni elementlarini $A=\{1,2,3\}$ deb yozamiz. B to'plamdagi tenglama yechimlari $x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3$ bo'lgani uchun B to'plamni ham $B=\{1,2,3\}$ deb yozishimiz mumkin. Demak, ikkala to'plamlar bir xil elementlarga ega ekan. SHuning uchun, $A=B$ deyish mumkin.

Bizga chekli elementlarga ega bo'lgan A to'plami berilgan bo'lsin. Bo'sh to'plam ham, A to'plamning o'zi ham berilgan to'plamning qism-to'plamlaridir, ya'ni $\otimes\subset A,\ A\subset A$. Bu qism-to'palamlarni ***xosmas qism to'plamlar*** deyiladi. A to'plamning qolgan barcha qism-to'plamlarini xos qism to'plamlari deyiladi.

Agar A to'plamning elementlar soni n(A)=m bo'lsa, bu to'plamning 2 ta xosmas qism-to'plami, 2^m-2 ta xos qism-to'plami va 2^m ta qism-to'plami bo'ladi.

Misol № 3: Ushbu $A=\{x|\,2\le x<5,\ x\in N\}$ barcha qism-to'plamlarini yozing..

Yechish: Dastlab bu to'plam elementlarini $A=\{2,3,4\}$ deb noma-nom yozamiz. Demak, A to'plam $n(A)=3$ ta elementdan iborat ekan. Endi bu to'plamdan qism-to'plamlar hosil qilamiz. Ular $\otimes,\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{3,4\},\{2,4\},\{2,3,4\}$ to'plamlari bo'lib, bu to'plamlarning jami soni $2^m=2^3=8$ ta ekan. SHulardan 2 tasi, ya'ni $\otimes$ va $\{2,3,4\}$ to'plamlari xosmas qism-to'plamlaridir.

10.2-Mavzu: To'plamlar ustida amallar.

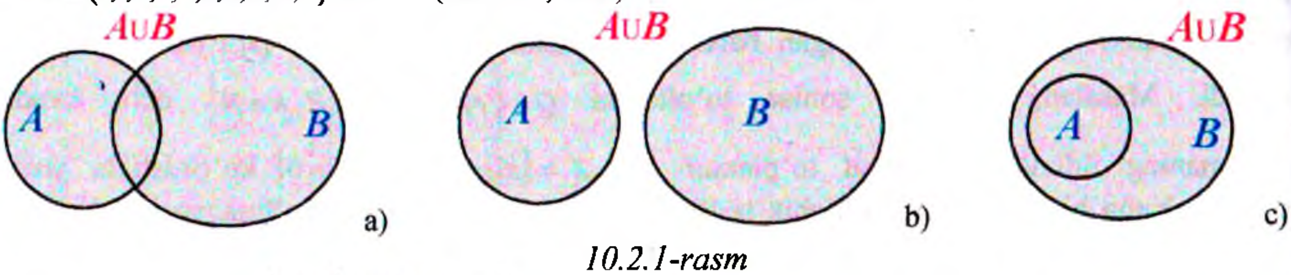
To'plamlar ustida bir necha amallar bajarish mumkin. Ular quyidagilar: 1) to'plamlar birlashmasi; 2) to'plamlar kesishmasi; 3) to'plamlar ayirmasi; 4) to'plamlarning simmetrik ayirmasi. Shularning har biriga batafsil to'xtalib o'tamiz hamda ularga doir misollar echamiz. Misollarni esa elementlari sonlar va harflardan iborat bo'lgan to'plamlar ustidagi amallar bilan tushuntiramiz.

1) to'plamlar birlashmasi:

A va B to'plamlarning kamida biriga tegishli bo'lgan barcha elementlardan tashkil topgan to'plamga A va B to'plamlarning ***birlashmasi*** yoki ***yig'indisi*** deyiladi va $A\cup B$ ko'rinishida belgilanadi.

Misol № 1: Ushbu $\begin{cases}A=\{0;1;2;7;a;w;x\}\\ B=\{0;1;3;8;9;a;x\}\end{cases}$ to'plamlarning birlashmasini toping.

Yechish: Ta'rifga ko'ra ikkala to'plamning kamida bittasida mavjud elementlarni olamiz. Unga ko'ra $A\cup B=\{0;1;2;3;7;8;9;a;w;x\}$ bo'ladi (10.2.1-a,rasm).



10.2.1-rasm

Misol № 2: Ushbu $\begin{cases}A=\{13;15;21;a;b;c\}\\ B=\{8;10;20;x;y;z\}\end{cases}$ to'plamlarning birlashmasini toping.

Yechish: Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, to'plamlar umuman kesishmaydi, ya'ni birining elementi boshqasiga tegishli emas. Ta'rifga ko'ra ikkala to'plamning kamida bittasida mavjud elementlarni olamiz. Unga ko'ra $A \cup B = \{8;10;13;15;20;21;a;\ b;c;x;y;z\}$ bo'ladi (10.2.1-b,rasm).

Misol № 3: Ushbu $\begin{cases} A = \{0;1;\ 2;\ 7;\ a;\ b;\ c\} \\ B = \{0;1;\ 2;\ 7;\ a;\ b;\ c;\ 3;\ 8;\ 9;x;\ y;\ z;\ w;12;18\} \end{cases}$ to'plamlarning birlashmasini toping.

Yechish: Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, A to'plam B to'plamning qism to'plami $(A \subseteq B)$, ya'ni A to'plamning barcha elementlari B to'plamda mavjud. Shuning uchun bu to'plamlarning birlashmasi B to'plamning o'ziga tengdir, ya'ni $A \cup B = B = \{0;1;\ 2;\ 7;\ a;\ b;\ c;\ 3;\ 8;\ 9;x;\ y;\ z;\ w;\ 12;\ 18\}$ bo'ladi (10.2.1-c,rasm).

Yuqoridagi 3-misoldan bir to'plam ikkinchi to'plamning qism to'plami bo'lganda ularning birlashmasi uchun ushbu formulani yozish mumkin.

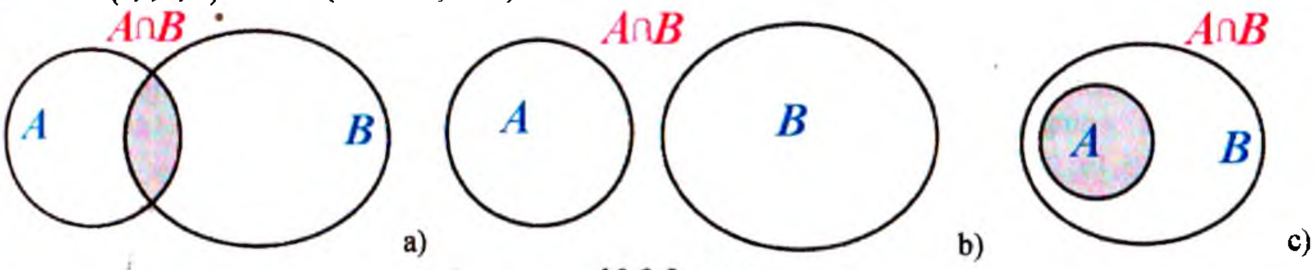
Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$ bo'ladi

2) to'plamlar kesishmasi:

A va B to'plamlarning A ga ham B ga ham tegishli umumiy elementlaridan tashkil topgan to'plamga A va B to'plamlarning ***kesishmasi*** deyiladi va $A \cap B$ ko'rinishida belgilanadi.

Misol № 4: Ushbu $\begin{cases} A = \{0;1;2;7;a;b;c\} \\ B = \{0;1;3;8;9;a;c\} \end{cases}$ to'plamlarning kesishmasini toping.

Yechish: Ta'rifga ko'ra ikkala to'plamning har ikkalasida mavjud elementlarni olamiz. Unga ko'ra $A \cup B = \{0;1;a;\ c\}$ bo'ladi (10.2.2-a,rasm).



10.2.2-rasm

Misol № 5: Ushbu $\begin{cases} A = \{13;15;\ 21;\ a;\ b;\ c\} \\ B = \{8;10;\ 20;\ x;\ \ y;\ z\} \end{cases}$ to'plamlarning kesishmasini toping.

Yechish: Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, to'plamlar umuman kesishmaydi, ya'ni birining elementi boshqasiga tegishli emas. Ta'rifga ko'ra har ikkala to'plamda ham mavjud bo'lgan elementlar yo'q. Shunga ko'ra umumiy elementlari yo'q to'plamlarning kesishmasi bo'sh to'plam bo'ladi, ya'ni $A \cap B = \otimes$ bo'ladi (1.7.2-b,rasm).

Misol № 6: Ushbu $\begin{cases} A = \{0;1;\ 2;\ 7;\ a;\ b;\ c\} \\ B = \{0;1;\ 2;\ 7;\ a;\ b;\ c;\ 3;\ 8;\ 9;x;\ y;\ z;\ u;\ w\} \end{cases}$ to'plamlarning kesishmasini toping.

Yechish: Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, A to'plam B to'plamning qism to'plami $(A \subseteq B)$, ya'ni A to'plamning barcha elementlari B to'plamda mavjud. Shuning uchun bu to'plamlarning kesishmasi A to'plamning o'ziga tengdir, ya'ni $A \cap B = A = \{0;1;\ 2;\ 7;\ a;\ b;\ c\}$ bo'ladi (1.7.3-c,rasm).

Yuqoridagi 6-misoldan bir to'plam ikkinchi to'plamning qism to'plami bo'lganda ularning kesishmasi uchun ushbu formulani yozish mumkin.

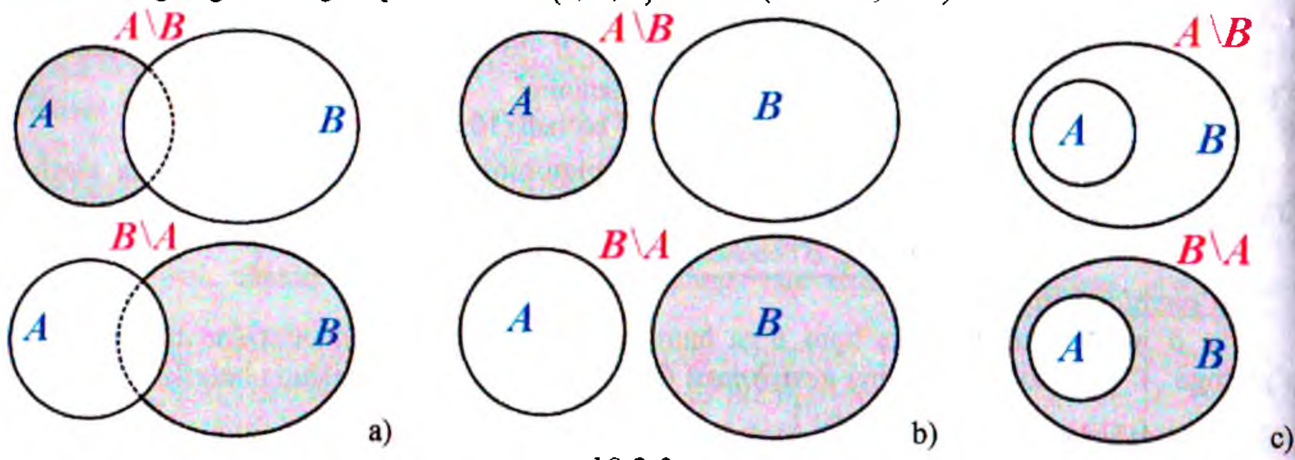
Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda $A \cap B = A$ bo'ladi

3) to'plamlar ayirmasi:

A to'plamning B to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plamga A va B ***to'plamning ayirmasi*** deyiladi va $A \setminus B$ ko'rinishida belgilanadi. Xuddi shuningdek, B to'plamning A to'plamga kirmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plamga B va A ***to'plamning ayirmasi*** deyiladi va $B \setminus A$ ko'rinishida belgilanadi.

Misol № 7: Ushbu $\begin{cases} A=\{0;1;2;7;x;y;z\} \\ B=\{0;1;3;8;9;x;z\} \end{cases}$ to'plamlar uchun A ning B ga kirmagan qismi $(A\setminus B)$ hamda B ning A ga kirmagan qismi $(B\setminus A)$ni toping.

<u>Yechish:</u> Misolni yechish juda oddiydir. Ta'rifga ko'ra A ning B ga kirmagan qismi $A\setminus B=\{2;\ 7;\ y\}$ hamda B ning A ga kirmagan qismi $B\setminus A=\{3;\ 8;\ 9\}$ bo'ladi (10.2.3-a,rasm).



10.2.3-rasm

Misol № 8: Ushbu $\begin{cases} A=\{13;15;\ 21;\ x;\ y;\ z\} \\ B=\{8;10;\ 20;\ a;\ b;\ c\} \end{cases}$ to'plamlar uchun A ning B ga kirmagan qismi $(A\setminus B)$ hamda B ning A ga kirmagan qismi $(B\setminus A)$ni toping.

<u>Yechish:</u> Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, to'plamlar umumiy elementlarga ega emas. Ta'rifga ko'ra A ning B ga kirmagan qismi $A\setminus B=\{13;15;\ 21;\ x;\ y;\ z\}=A$ hamda B ning A ga kirmagan qismi $B\setminus A=\{8;10;\ 20;\ a;\ b;\ c\}=B$ bo'ladi (1.7.4-b,rasm).

Yuqoridagi 8-misoldan ko'rinib turibdiki, A va B to'plamlar umumiy elementlarga ega bo'lmasa, ularning ayirmasi bu to'plamlardan biri bo'lar ekan.

$$\boxed{Agar\ \ A\cap B=\otimes\ \ bo'lsa,\ \ \begin{cases} A\setminus B=A \\ B\setminus A=B \end{cases}\ \ bo'ladi}$$

Misol № 9: Ushbu $\begin{cases} A=\{0;1;\ 2;\ 7;\ x;\ y;\ z\} \\ B=\{0;1;\ 2;\ 7;\ x;\ y;\ z;\ 3;\ 8;\ 9;m;\ n;\ p;\ a;\ b;\ c\} \end{cases}$ to'plamlar uchun A ning B ga kirmagan qismi $(A\setminus B)$ hamda B ning A ga kirmagan qismi $(B\setminus A)$ni toping.

<u>Yechish:</u> Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, A to'plam B to'plamning qism to'plami $(A\subseteq B)$, ya'ni A to'plamning barcha elementlari B to'plamda mavjud. Shuning uchun A ning B ga kirmagan qismi bo'sh to'plam, ya'ni $A\setminus B=\otimes$ hamda B ning A ga kirmagan qismi $B\setminus A=\{3;\ 8;\ 9;m;\ n;\ p;\ a;\ b;\ c\}$ bo'ladi (10.2.2-c,rasm).

Yuqoridagi 9-misoldan A to'plam B to'plamning qism to'plami bo'lganda ularning ayirmasi uchun ushbu formulani yozish mumkin.

$$\boxed{Agar\ \ A\subseteq B\ \ bo'lsa,\ u\ holda\ \ \ A\setminus B=\otimes\ \ \ bo'ladi}$$

<u>4) to'plamlarning simmetrik ayirmasi:</u>

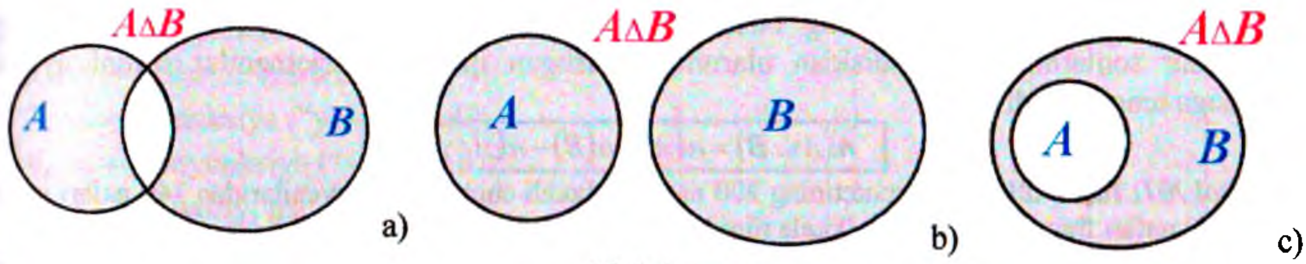
A va B to'plamlarning ***simmetrik ayirmasi*** deb A va B to'plamlarning umumiy bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A\Delta B$ ko'rinishida belgilanadi.

A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi A ning B ga kirmagan qismi hamda B ning A ga kirmagan qismidan iborat.

$$\boxed{A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)}$$

Yoki A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi bu to'plamlarning birlashmasi va kesishmasining ayirmasiga tengdir.

$$\boxed{A\Delta B=(A\cup B)\setminus(B\cap A)}$$



10.2.4-rasm

Misol № 10: Ushbu $\begin{cases} A=\{0;1;2;7;x;y;z\} \\ B=\{0;1;3;8;9;x;z\} \end{cases}$ to'plamlarning simmetrik ayirmasini toping.

<u>Yechish:</u> Ta'rifga ko'ra ikkala to'plamning umumiy bo'lmagan qismidagi mavjud elementlarni olamiz. Unga ko'ra $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{2;7;y\}\cup\{3;8;9\}=\{2;7;y;3;8;9\}$ bo'ladi (10.2.4-a,rasm).

Misol № 11: Ushbu $\begin{cases} A=\{13;15;21;a;b;c\} \\ B=\{8;10;20;m;n;p\} \end{cases}$ to'plamlarning simmetrik ayirmasini toping.

<u>Yechish:</u> Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, to'plamlar umumiy elementlarga ega emas. Ta'rifga ko'ra ikkala to'plamning kesishmagan qismidagi mavjud elementlarni olamiz. Kesishgan qismi esa bo'sh to'plam, ya'ni $A\cap B=\otimes$ bo'ladi. Shuning uchun A va B to'plamdagi barcha elementlar olinadi. Shunga ko'ra to'plamlarning simmetrik ayirmasi

$$A\Delta B=\{13;15;21;a;b;c\}\cup\{8;10;20;m;n;p\}=\{13;15;21;a;b;c;8;10;20;m;n;p\}=A\cup B$$

bo'ladi (1.7.5-b,rasm).

Yuqoridagi 11-misoldan ko'rinib turibdiki, A va B to'plamlar kesishuvchi bo'lmasa, ularning simmetrik ayirmasi bu to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lar ekan.

Agar $A\cap B=\otimes$ bo'lsa, $A\Delta B=A\cup B$ bo'ladi

Misol № 12: Ushbu $\begin{cases} A=\{0;1;2;7;a;b;c\} \\ B=\{0;1;2;7;a;b;c;3;8;9;m;n;p;x;y;z\} \end{cases}$ to'plamlarning simmetrik ayirmasini toping.

<u>Yechish:</u> Misolning berilishidan ham ko'rinib turibdiki, A to'plam B to'plamning qism to'plami $(A\subseteq B)$, ya'ni A to'plamning barcha elementlari B to'plamda mavjud. Shuning uchun bu to'plamlarning simmetrik ayirmasini B to'plamning A to'plamga kirmagan qismidan iborat bo'ladi, ya'ni $A\Delta B=B\setminus A=\{3;8;9;m;n;p;x;y;z\}$ bo'ladi (10.2.4-c,rasm).

Yuqoridagi 12-misoldan bir to'plam ikkinchi to'plamning qism to'plami bo'lganda ularning simmetrik ayirmasi uchun ushbu formulani yozish mumkin.

Agar $A\in B$ bo'lsa, u holda $A\Delta B=B\setminus A$ bo'ladi

10.3-Mavzu: To'plamlar soni bilan bog'liq masalalar.

Ko'pincha masalalar yechishda to'plam elementlari bilan emas, balki to'plamdagi elementlar soni bilan bog'liq masalalarga duch kelamiz. Bundan tashqari bir necha to'plamlarning elementlar soni bilan bog'liq masalalarga ham duch kelamiz. Biror A to'plam aynan bir turdagi elementlardan iborat bo'lsin, masalan, faqat sonlardan yoki faqat harflardan iborat bo'lsin. Bunda to'plamning elementlarini yozmasdan, qisqacha elementlar sonini $n(A)$ deb yozish qulay bo'ladi.

Kesishmaydigan A va B to'plamlarning birlashmasidagi elementlar soni A va B to'plamlardagi elementlar sonlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Agar $A\cap B=\otimes$ bo'lsa, u holda $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$ bo'ladi

Yuqoridagi formulani juft-juft bo'lib kesishmaydigan bir necha to'plamlar uchun ham yozish mumkin.

$n(A\cup B\cup C\cup D\cup E\cup....)=n(A)+n(B)+n(C)+n(D)+n(E)+...$

Agar to'plamlar kesishsa, vaziyat biroz boshqacharoq bo'ladi.

Ixtiyoriy A va B to'plamlarning birlashmasidagi elementlar soni A va B to'plamlardagi elementlar sonlarining yig'indisidan ularning kesishgan qismidagi elementlar sonini ayirish natijasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)}$$

Misol №1: Jahon tillari universitetining 200 nafar malakali chet tili o'qituvchilaridan 140 nafari ingliz tilini, 110 nafari fransuz tilini bilsa, ikkala tilni biladigan o'qituvchilar nea nafar?

Yechish: Ingliz tilini biladigan o'qituvchilardan iborat to'plamni A bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(A)=140$ taga teng. Fransuz tilini biladigan o'qituvchilardan iborat to'plamni B bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(B)=110$ taga teng. A va B to'plamlar birlashmasidan iborat to'plamdagi elementlar soni $n(A\cup B)=200$ ta teng. Ushbu $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ formulaga binoan, $200=140+110-n(A\cap B)$, $\rightarrow$ $n(A\cap B)=140+110-200=50$ bo'ladi. Demak, 50 nafar o'qituvchilar ham ingliz, ham fransuz tilini bilar ekan.

Misol №2: Sinfdagi 34 nafar o'quvchining 16tasi basketbol seksiyasiga 20tasi voleybol seksiyasiga, 10tasi esa ikkala seksiyaga ham qatnashadi. Qolganlari shaxmat to'garagiga qatnashsa, ularning soni necha nafar?

Yechish: Basketbol seksiyasiga qatnashuvchi o'quvchilardan iborat to'plamni A bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(A)=16$ taga teng. Voleybol seksiyasiga qatnashuvchi o'quvchilardan iborat to'plamni B bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(B)=20$ taga teng. Ikkala seksiyaga boradigan o'quvchilar soni A va B to'plamlar kesishmasidan iborat to'plamdagi elementlar soni $n(A\cap B)=10$ ta bo'ladi. Shaxmat to'garagiga qatnashadigan o'quvchilardan iborat to'plamni C bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(C)$ taga teng bo'lib, ana shuni topish so'ralgan. Jami o'quvchilar soni A, B, C to'plamlar birlashmasidan iborat to'plamdagi elementlar soniga tengdir, ya'ni $n(A\cup B\cup C)=34$ taga teng. Bunda so'ralgan kattalik ushbu $n(A\cup B\cup C)=n(A\cup B)+n(C)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)$ formulaga ko'ra $34=16+20-10+n(C)$, $\rightarrow$ $n(C)=34+10-16-20=8$ taga teng chiqadi. Demak, 8 nafar o'quvchilar shaxmat to'garagiga borar ekan.

Misol №3: 100 gacha bo'lgan naturla sonlar ichida 2ga ham 3ga ham bo'linmaydiganlari nechta?

Yechish: 100 gacha bo'lgan natural sonlar to'plami U universal to'plamni hosil qilib, uning elementlari soni $n(U)=100$ ta. 2ga bo'linadigan sonlardan iborat to'plamni A bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(A)=50$ taga teng. 3ga bo'linadigan sonlardan iborat to'plamni B bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(B)=33$ taga teng. Bir vaqtda 2ga ham 3ga ham bo'linadigan sonlar A va B to'plamlar kesishmasidan iborat to'plamdagi elementlar soni $n(A\cap B)=16$ ta bo'ladi. 2ga ham 3ga ham bo'linadigan sonlarni C bilan belgilasak, bu to'plam elementlar soni $n(C)$ taga teng bo'lib, ana shuni topish so'ralgan. A, B, C to'plamlar birlashmasi universal to'plamni hosil qiladi, ya'ni $U=A\cup B\cup C$ yoki $n(U)=n(A\cup B\cup C)=n(A\cup B)+n(C)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)$ bo'ladi. SHunga ko'ra so'ralgan $100=50+33-16+n(C)$, $\rightarrow$ $n(C)=100+16-50-33=33$ ta bo'lar ekan. Demak, 33ta son 2ga ham 3ga ham bo'linmas ekan.

10.4-Mavzu: Matematik mantiq elementlari.

Matematik mantiq matematikaning bir bo'limi bo'lib, bu bo'limda turli "mulohaza"lar va ular ustidagi bajariladigan mantiqiy elementlar o'rganiladi. *Rost* yoki *yolg'on*ligi haqida fikr yuritiladigan har qanday darak gapni ***mulohaza*** deyiladi. So'roq gap yoki buyruq gap hamda shaxsning munosobatini bildiruvchi darak gap mulohaza bo'la olmaydi. Masalan: Ushbu "Toshkent – O'zbekiston Respublikasining poytaxtidir" gapi mulohazadir. Mulohaza bir qiymatli yoki rost-yolg'oniga qarab ikkit qiymatli bo'lishi mumkin. Kimgadir rost bo'lgan mulohaza boshqa bir kishiga yolg'on mulohaza bo'lishi mumkin. Masalan: Ushbu "Oq rang yoqimlidir" mulohazasi kimgadir rost, kimgadir yolg'on mulohoza bo'lishi mumkin.

Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy elementlarni maxsus belgilar bilan ifodalanadi. Bu belgilar quyidagilardir:

1) $\Leftrightarrow$ – teng kuchlilik;

2) $\Rightarrow$ – ...dan ... kelib chiqadi;

3) $\vee$ – dizunksiya ("yoki" amali);

4) $\wedge$ – konyunksiya ("va" amali);

5) $\forall$ – ixtiyoriy, har qanday;

6) $\exists$ – mavjud;

7) $\neg$ – emas, inkor. Masalan, $\neg p$ belgisi " p emas" yoki " p ni inkori" deb o'qiladi.

Dizunksiya, konyunksiya va inkor mulohazalari bog'lovchi mulohazalar bo'lib, ular murakkabroq mulohazalar tuzishda ishtirok etadi. Bularning har biriga to'xtalib o'taylik.

Agar ikkita mulohaza "va" so'zi bilan bog'lansa, hosil bo'lgan yangi mulohazani berilgan mulohazalar konyunksiyasi deyiladi.

Masalan:

p : *Mansur muxandislik diplomiga ega;*

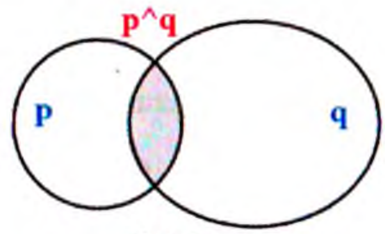
q : *Mansur o'qituvchilik diplomiga ega.*

Ushbu mulohazalarning konyunksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$p\wedge q$: *Mansur muxandislik va o'qituvchilik diplomiga ega.*

Bu erda ikkita mulohazaning konyunksiyasi har bir mulohaza rost bo'lganda rost bo'ladi. p va q mulohazalarning konyunksiyasi uchun rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

p	q	$p\wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F



10.4.1-rasm

10.4.1-rasmda p va q mulohazalar konyunksiyasi uchun diagramma keltirilgan.

Misol №1: Berilgan mulohazalarning konyunksiyasini yozing.

a) p : hozir havo bulutli; q : hozir yomg'ir yog'moqda.

b) p : x soni 7 dan katta ; q : x soni 23 dan kichik.

Yechish: Ushbu mulohazalarning konyunksiyasi quyidagicha bo'ladi:

a) $p\wedge q$: hozir havo bulutli va yomg'ir yog'moqda.

b) $p\wedge q$: x soni 7 dan katta va 23 dan kichik.

Agar ikkita mulohaza "yoki" so'zi bilan bog'lansa, hosil bo'lgan yangi mulohazani berilgan mulohazalar dizyunksiyasi deyiladi.

Masalan:

p : *Mansur muxandislik diplomiga ega;*

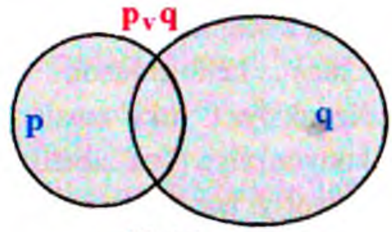
q : *Mansur o'qituvchilik diplomiga ega.*

Ushbu mulohazalarning konyunksiyasi quyidagicha bo'ladi:

$p\vee q$: *Mansur muxandislik yoki o'qituvchilik diplomiga ega.*

Bu erda ikkita mulohazaning dizyunksiyasi mulohazalardan biri rost bo'lganda rost bo'ladi. Agar p va q mulohazalardan har ikkisi ham yolg'on bo'lsa, u holda $p\vee q$ mulohaza yolg'on bo'ladi. p va q mulohazalarning dizyunksiyasi uchun rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

p	q	$p\vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F



10.4.2-rasm

10.4.2-rasmda p va q mulohazalar dizyunksiyasi uchun diagramma keltirilgan.

Misol №2: Berilgan mulohazalarning dizyunksiyasi rost yoki yolg'on ekanini aniqlang.

a) p : 4 va 9 sonlarining o'rta geometrigi 6 ga teng; q : 6 va 14 sonlarining o'rta arifmetigi 10 ga teng.

b) p : $(3+6)\cdot 2-8=10$; q : $(13+7):2-8=3$.

v) p : ikita turli musbat sonlarning o'rta arifmetigi bu sonlarning o'rta geometrigidan har doim kichik; q : qavariq to'rtburchakning uchta diagonali bor.

<u>Yechish:</u> Ushbu mulohazalarning dizyunksiyasining rost yoki yolg'onligi quyidagicha bo'ladi:

a) p uchun $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6-$ rost; q uchun $\frac{6+14}{2}=10$ – rost. Demak, har ikkala mulohaza rost bo'lgani uchun $p\wedge q$ mulohaza ham rost bo'ladi.

b) p uchun $(3+6)\cdot 2-8=9\cdot 2-8=18-8=10-$ rost; q uchun $(13+7):2-8=20:2-8=$ $=10-8=2\neq 3-$ yolg'on. Demak, har ikkala mulohazadan biri rost, biri yolg'on bo'lgani uchun $p\wedge q$ mulohaza ham rost bo'ladi.

v) p uchun aytaylik ikkita a va b sonlari uchun har doim $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ bo'ladi, shuning uchun p mulohaza – yolg'on; q uchun *qavariq to'rtburchakning ikkita diagonali bor, shuning uchun q* mulohaza – yolg'on. Demak, har ikkala mulohaza ham yolg'on bo'lgani uchun $p\wedge q$ mulohaza ham yolg'on bo'ladi

p mulohaza uchun "p emas" yoki "p ekani yolg'on" shaklidagi mulohazani p ning inkori deyiladi.

Masalan:

p :bu yil yangi yilni qorsiz nishonladik. Bu mulohazaning inkori, $\neg p$: bu yil yangi yilni qor bilan nishonladik.

p :bugun darsga bordim. Bu mulohazaning inkori, $\neg p$: bugun darsga bormadim.

Demak, p mulohaza rost bo'lsa, $\neg p$ mulohaza yolg'on va aksincha p mulohaza yolg'on bo'lsa, $\neg p$ mulohaza rost bo'lar ekan. Buning uchun rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

p	$\neg p$
T	F
F	T

11-BOB: KO‘RSATKICHLI FUNKSIYA, TENGLAMA VA TENGSIZLIK. LOGARIFMIK FUNKSIYA, TENGLAMA VA TENGSIZLIK.

Biz oldingi boblarda darajali funksiyaning chiziqli funksiya, kvadrat funksiya, kubik funksiya va boshqa turlari bilan tanishgan edik. Ushbu bobda esa avval ko‘rsatkichli va logarifmik funksiya va ularning xossalariga batafsil to‘xtalib o‘tamiz.

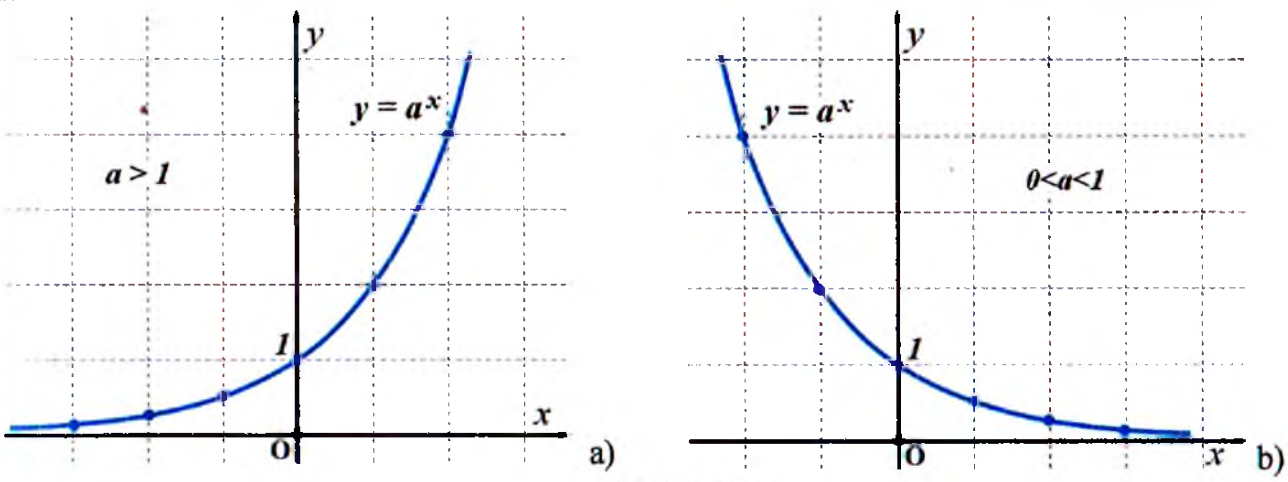
11.1-Mavzu: Ko‘rsatkichli funksiya va uning xossalari.

$y = a^x$ ko‘rinishdagi funksiyaga ***ko‘rsatkichli funksiya*** deyiladi.

Bu erda: a – asos bo‘lib, asos uchun har doim $a > 0, a \neq 1$ shart bajarilishi kerak. $a > 1$ da funksiya o‘suvchi va $0 < a < 1$ da esa funksiya kamayuvchi bo‘ladi. Bunga $a = 2$ va $a = 1$ bo‘lgan hollar uchun jadval tuzish orqali ishonch hosil qilishimiz mumkin.

1-jadval

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	16	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16



11.1.1-rasm

Ko‘rsatkichli funksiyaniing barcha xossalari $a > 1$ va $0 < a < 1$ hollar uchun quyidagi jadvalda keltirilgan.

2-jadval

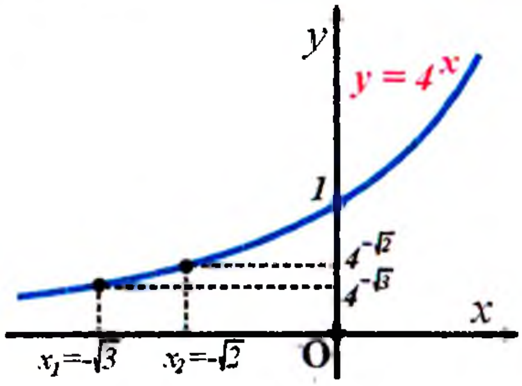
$a > 1$	$0 < a < 1$
1.1.Aniqlanish sohasi – $D(f) = (-\infty; \infty)$ *1.2.Qiymatlar sohasi* – $E(f) = (0; \infty)$ *2.1.Juft-toqligi* – juft-toq emas *2.2.Davriyligi* – davriy emas *3.1.O‘sish oralig‘i* – $x \in (-\infty; \infty)$ da $\uparrow$ *3.2.Kamayish oralig‘i* – $x \in \otimes$ da $\downarrow$ *4.1.Musbat oralig‘i* – $x \in (-\infty; \infty)$ da $y > 0$ *4.2.Manfiy oralig‘i* – $x \in \otimes$ da $y < 0$ *5.1. Ox o‘qini kesish nuqtasi* – kesmaydi *5.2. Oy o‘qini kesish nuqtasi* – $(0;1)$ nuqtada *6.1.Maksimum nuqtasi* – yo‘q *6.2.Funksiya maksimumi* – yo‘q *6.3.Minimum nuqtasi* – yo‘q *6.4.Funksiya minimumi* – yo‘q	*1.1.Aniqlanish sohasi* – $D(f) = (-\infty; \infty)$ *1.2.Qiymatlar sohasi* – $E(f) = (0; \infty)$ *2.1.Juft-toqligi* – juft-toq emas *2.2.Davriyligi* – davriy emas *3.1.O‘sish oralig‘i* – $x \in \otimes$ da $\uparrow$ *3.2.Kamayish oralig‘i* – $x \in (-\infty; \infty)$ da $\downarrow$ *4.1.Musbat oralig‘i* – $x \in \otimes$ da $y > 0$ *4.2.Manfiy oralig‘i* – $x \in (-\infty; \infty)$ da $y < 0$ *5.1. Ox o‘qini kesish nuqtasi* – kesmaydi *5.2. Oy o‘qini kesish nuqtasi* – $(0;1)$ nuqtada *6.1.Maksimum nuqtasi* – yo‘q *6.2.Funksiya maksimumi* – yo‘q *6.3.Minimum nuqtasi* – yo‘q *6.4.Funksiya minimumi* – yo‘q

Ko'rsatkichli funksiyaning o'suvchi yoki kamayuvchi ekanligidan foydalanib, bir xil asosli turli sonlarni taqqoslash mumkin.

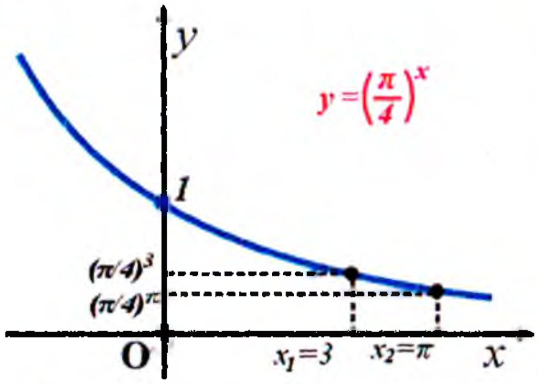
Misol №1:

$4^{-\sqrt{3}}$ va $4^{-\sqrt{2}}$ sonlarni taqqoslang.

<u>Yechish:</u> Berilgan misolni yechish uchun $y = 4^x$ funksiyaning sxematik ravishda grafigi (eskizi) chiziladi. Grafikdan $x_1 = -\sqrt{3}$ va $x_2 = -\sqrt{2}$ nuqtalari belgilanadi. $y = 4^x$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun kattaroq argument (x)ning qiymatiga kattaroq funksiya (y)ning qiymati mos keladi. Boshqacha aytganda, $x_2 > x_1$ bo'lgani uchun $f(x_2) > f(x_1)$ bo'ladi, ya'ni $4^{-\sqrt{2}} > 4^{-\sqrt{3}}$ bo'ladi. 11.1.2-a,rasmdagi grafikda ham $f(x_2) = f(-\sqrt{2}) = 4^{-\sqrt{2}}$ nuqta $f(x_1) = f(-\sqrt{3}) = 4^{-\sqrt{3}}$ nuqtadan tepada yotganligi ko'rinib turibdi.



a)



b)

11.1.2-rasm

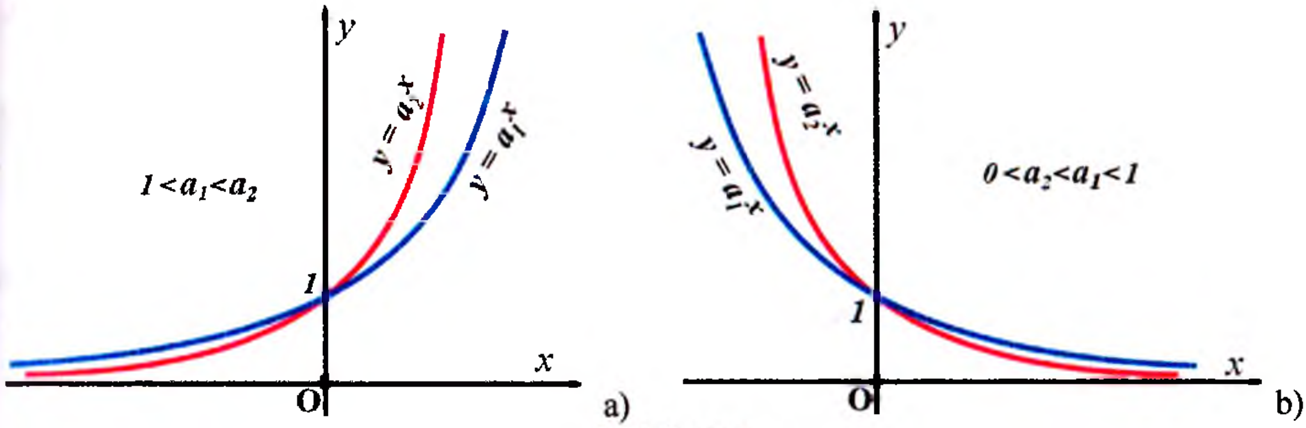
Misol №2:

$\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$ va $\left(\frac{\pi}{4}\right)^\pi$ sonlarni taqqoslang.

<u>Yechish:</u> Avalo $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ funksiyaning sxematik ravishda grafigi (eskizi) chiziladi. Grafikdan $x_1 = 3$ va $x_2 = \pi$ nuqtalari belgilanadi. $\frac{\pi}{4} < 1$ bo'lgani uchun $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ funksiya kamayuvchi bo'ladi. Bunda kattaroq argument (x) ning qiymatiga kichikroq funksiya (y) ning qiymati mos keladi. Boshqacha aytganda, $x_2 > x_1$ bo'lgani uchun $f(x_2) < f(x_1)$ bo'ladi, ya'ni $\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 < \left(\frac{\pi}{4}\right)^\pi$ bo'ladi. 11.1.2-b,rasmdagi grafikda ham $f(x_2) = f(\pi) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^\pi$ nuqta $f(x_1) = f(3) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^3$ nuqtadan pastda yotganligi ko'rinib turibdi.

Ba'zida bizni turli asosli funksiyalarning grafiklari bitta Dekart koordinatalar sistemasida qanday qurilishi qiziqtiradi. Masalan, $y = 2^x$ va $y = 3^x$ funksiyalar grafiklarini bitta koordinata tekisligida qurganda 3^xniing qiymati 2^xning qiymatidan ko'ra tezroq o'suvchan bo'ladi. Shuning uchun ham $y = 3^x$ funksiya grafigi $y = 2^x$ funksiyaga qaraganda koordinata o'qlariga yaqinroq turadi. Xuddi shuningdek, $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ning qiymati $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ning qiymatidan tezroq kamayuvchan bo'lgani uchun $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ funksiya grafigi $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ funksiyaga qaraganda koordinata o'qlariga yaqinroq turadi.

11.1.3-a,rasmda turli 1dan katta asoslar $(1 < a_1 < a_2)$ uchun hamda 11.1.3-b,rasmda esa turli 1dan kichik $(0 < a_2 < a_1 < 1)$ asoslar uchun ko'rsatkichli funksiyalar grafiklari berilgan.



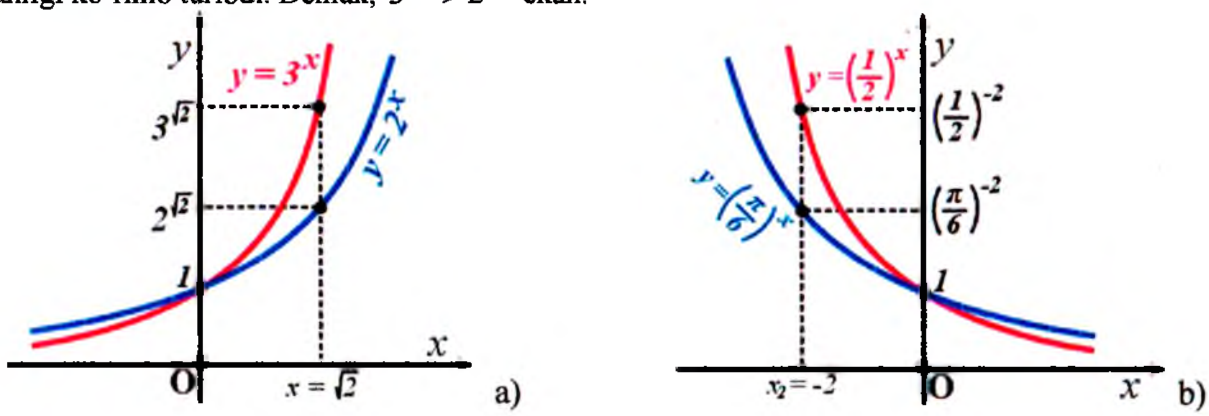
11.1.3-rasm

Yuqoridagi rasmlardan foydalanib, asoslari har xil, daraja ko‘rsatkichlari bir xil bo‘lgan sonlarni taqqoslash mumkin.

Misol №3:

$2^{\sqrt{2}}$ va $3^{\sqrt{2}}$ sonlarni taqqoslang.

Yechish: Bunda $y=2^x$ va $y=3^x$ funksiyaning sxematik ravishda grafiklari bitta koordinatalar tekisligida chiziladi. Grafiklardan foydalanib, funksiyalarning $x=\sqrt{2}$ nuqtadagi qiymatlari $f_1(x)=2^{\sqrt{2}}$ va $f_2(x)=3^{\sqrt{2}}$ nuqtalari belgilanadi. 11.1.4-a,rasmdan ham $f_2(x)=3^{\sqrt{2}}$ nuqta $f_1(x)=2^{\sqrt{2}}$ nuqtadan tepada yotganligi ko‘rinib turibdi. Demak, $3^{\sqrt{2}}>2^{\sqrt{2}}$ ekan.



11.1.4-rasm

Misol №4:

$(\arcsin 0{,}5)^{-2}$ va $(0{,}5)^{-2}$ sonlarni taqqoslang.

Yechish: Avalo asoslarni aniqlaymiz. Bunda $a_1=\arcsin 0{,}5=\frac{\pi}{6}\approx 0{,}5236$ va $a_2=0{,}5$ bo‘lib, $a_1>a_2$. $y=a_1^x=0{,}5236^x$ va $y=a_2^x=0{,}5^x$ funksiyalarning sxematik ravishda grafiklari bitta koordinatalar tekisligida chiziladi. Grafiklardan foydalanib, funksiyalarning $x=-2$ nuqtadagi qiymatlari $f_1(x)=0{,}5236^{-2}$ va $f_2(x)=0{,}5^{-2}$ nuqtalari belgilanadi. 11.1.4-b,rasmdan $f_2(x)=0{,}5^{-2}$ nuqta $f_1(x)=0{,}5236^{-2}$ nuqtadan tepada yotganligi ko‘rinib turibdi. Demak, $(\arcsin 0{,}5)^{-2}<(0{,}5)^{-2}$ ekan.

11.2-Mavzu: Ko‘rsatkichli tenglama va unga doir misollar.

$a^x=b$ ko‘rinishga keltiriladigan tenglamalarga ko‘rsatkichli tenglama deyiladi.

Bu erda: a – asos bo‘lib, asos uchun har doim $a>0, a\neq 1$ shart bajarilishi kerak.

Yuqoridagi tenglamani ishlash uchun b sonini ham a sonli asos orqali ifodalaymiz. Asoslar teng bo‘lgani uchun ko‘rsatkichlari ham teng bo‘ladi. Tenglamani ishlashga yo‘l ko‘rsatkichlarni tenglashdan boshlanadi. Fikrimizni misollar yechish orqali oydinlashtiramiz.

Misol №1:

$2^x=256$ tenglamani eching.

Yechish: $2^x=256, \rightarrow 2^x=2^8, \rightarrow x=8.$

Misol №2:

$27^x = \frac{1}{3}$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> $27^x = \frac{1}{3}, \rightarrow 3^{3x} = 3^{-1}, \rightarrow 3x = -1, \rightarrow x = -\frac{1}{3}$.

Misol №3:

$3^{x+4} + 3\cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$ tenglamani eching.

<u>Yechish:</u> Dastlab har bitta hadni ko'rsatkichi eng kichik bo'lgan daraja shaklida yozamiz, so'ngra o'xshash hadlarni ixchamlashtiramiz va bir xil asos shakliga keltiramiz. $3\cdot 3^{x+3} + 3\cdot 5^{x+3} = 5\cdot 5^{x+3} + 3^{x+3}, \rightarrow 3\cdot 3^{x+3} - 3^{x+3} = 5\cdot 5^{x+3} - 3\cdot 5^{x+3}, \rightarrow 2\cdot 3^{x+3} = 2\cdot 5^{x+3}, \rightarrow$

$3^{x+3} = 2\cdot 5^{x+3} / : (5^{x+3}), \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = 1, \rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^0, \rightarrow x+3=0, \rightarrow x=-3.$

Misol №4:

$\begin{cases} 5^x - 5^y = 100 \\ 5^{x-1} + 5^{y-1} = 30 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini eching.

<u>Yechish:</u> Tenglamalar sistemasini quyidagi ketma-ketlikda ishlaymiz.

$$\begin{cases} 5^x - 5^y = 100 \\ \frac{5^x}{5} + \frac{5^y}{5} = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x - 5^y = 100 \quad (1) \\ 5^x + 5^y = 150 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2)+(1) \\ (2)-(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 5^x = 250 \\ 2\cdot 5^y = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^x = 5^3 \\ 5^y = 5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}.$$

11.3-Mavzu: Ko'rsatkichli tengsizlik va unga doir misollar yechish.

$a^u > a^{\vartheta}$ yoki $a^u < a^{\vartheta}$ ko'rinishga keltiriladigan tengsizliklarga ***ko'rsatkichli tengsizlik*** deyiladi.

Bu erda: a – asos bo'lib, asos uchun har doim $a > 0, a \neq 1$ shart bajarilishi kerak.

$u = u(x)$, $\vartheta = \vartheta(x)$ – erkli o'zgaruvchi x orqali ifodalangan turli funksiyalar.

$a^u > a^{\vartheta}$ ko'rinishdagi tengsizlik quyidagicha echiladi:

Agar $a > 1$ bo'lsa, $u > \vartheta$ deb ishlanadi
Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, $u < \vartheta$ deb ishlanadi

Endi ko'rsatkichli tengsizliklarga doir bir necha misollar yechib ko'ramiz.

Misol №1:

$5^{x-1} \leq \sqrt{5}$ tengsizlikni eching.

<u>Yechish:</u> $5^{x-1} \leq 5^{1/2}$ da asos 1dan katta bo'lagani uchun asosni tashlab yuborishda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. Shuning uchun $x-1 \leq \frac{1}{2}, \rightarrow x \leq \frac{3}{2}$, $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$ bo'ladi.

Misol №2:

$\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \frac{121}{169}$ tengsizlikni eching.

<u>Yechish:</u> Tengsizlikning har ikkala tomoni ham bir xil asosga keltiriladi. Hosil bo'lgan $\left(\frac{13}{11}\right)^{x^2-3x} < \left(\frac{13}{11}\right)^{-2}$ tengsizlik asosi 1dan katta bo'lagani uchun asosni tashlab yuborishda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. Shuning uchun $x^2 - 3x < -2, \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0, \rightarrow (x-1)(x-2) < 0, \rightarrow x \in (1; 2)$ bo'ladi.

Misol №3:

$2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$ tengsizlikni eching.

<u>Yechish:</u> Tengsizlikning har bitta hadini eng kichik daraja ko'rsatkichiga keltiriladi va hadlar qo'shib chiqiladi. Natijada $4\cdot 2^{2x-3} + 2\cdot 2^{2x-3} + 1\cdot 2^{2x-3} \geq 448, \rightarrow 7\cdot 2^{2x-3} \geq 448, \rightarrow 2^{2x-3} \geq 64, \rightarrow 2^{2x-3} \geq 2^6$ hosil bo'ladi. Bunda tengsizlik asosi 1dan katta bo'lagani uchun asosni tashlab yuborishda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. Shuning uchun javob $2x-3 \geq 6, \rightarrow x \geq \frac{9}{2}, \rightarrow x \in \left(\frac{9}{2}; \infty\right)$ bo'ladi.

11.4-Mavzu: Logarifm va uning xossalari.

b sonning a asos bo'yicha logarifmi deb shunday c songa aytiladiki, bunda b sonini hosil qilish uchun a sonni c darajaga ko'tarish kerak bo'ladi.

$$\boxed{\log_a b = c, \ \rightarrow \ b = a^c}$$

Bu erda: a – asos bo'lib, asos uchun har doim $a > 0, a \neq 1$ shart bajarilishi kerak.

Masalan: $\log_2 64 = 8$, chunki $2^8 = 64$; $\log_{0,1} 10000 = -4$, chunki $0{,}1^{-4} = 10000$;

$\log_5 125 = 3$, chunki $5^3 = 125$; $\log_8 8 = 1$, chunki $8^1 = 8$;

$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$, chunki $4^{-2} = \frac{1}{16}$; $\log_{15} 1 = 0$, chunki $15^0 = 1$.

Agar logarifm asosi 10ga teng $(a = 10)$ bo'lsa, bunday logarifmga o'nli logarifm deyiladi.

$$\boxed{\log_{10} b = \lg b}$$

Agar logarifm asosi e ga teng $(a = e = 2{,}71828182....)$ bo'lsa, bunday logarifmga naturallogarifm deyiladi.

$$\boxed{\log_e b = \ln b}$$

Bu erda: $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828182....$ yoki $e = \lim\limits_{n\to 0}(1+n)^{\frac{1}{n}} = 2{,}71828182....$ yoki

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = 2{,}71828182....$ – naturallogarifm asosi deyiladi.

Logarifmning eng asosiy xususiyatlaridan biri logarifmik ayniyatdir.

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Masalan: $2^{\log_2 32} = 2^5 = 32$ yoki $3^{\log_3 243} = 3^5 = 243$ va hokoza.

Endi, biz misollar yechishda mushkulimizni oson qiladigan logarifmning asosiy xossalarini sanab o'tamiz.

1) $\log_a 1 = 0$;	6) $\log_{(a^q)} 1 = \frac{1}{q} \cdot \log_a b$;
2) $\log_a a = 1$;	7) $\log_a b = \log_{(a^p)}(b^p)$;
3) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;	8) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$; $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a}$;
4) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$;	9) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;
5) $\log_a(b^p) = p \cdot \log_a b$;	10) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

Isboti: 1) $\log_a 1 = 0$, chunki $a^0 = 1$ bo'ladi; 2) $\log_a a = 1$, chunki $a^1 = a$ bo'ladi;

3) $x \cdot y = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$, $\rightarrow \log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$;

4) $\frac{x}{y} = x : y = a^{\log_a x} : a^{\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y}$, $\rightarrow \log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right)$;

5) $\log_a(b^p) = \log_a\left(\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot ... \cdot b}_{p \text{ marta}}\right) = \underbrace{\log_a b + \log_a b + \log_a b + ... + \log_a b}_{p \text{ marta}} = p \cdot \log_a b$;

6) $\log_{(a^q)} b = \frac{1}{\log_b(a^q)} = \frac{1}{q \cdot \log_b a} = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\log_b a} = \frac{1}{q} \cdot \log_a b$;

7) $\log_a b = \frac{p}{p}\cdot\log_a b = p\cdot\frac{1}{p}\cdot\log_a b = \log_{(a^p)}(b^p)$;

8) asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra $\log_a b = \log_{c^{\log_c a}} c^{\log_c b} = \frac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\log_c c = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ bo'ladi, shuningdek, $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{\lg b}{\lg a}$ deb ham yozish mumkin;

9) Yuqoridagi xossaga asosan $c = b$ deb olsak, $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a}$ bo'ladi;

10) asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib isbot qilamiz. Unga ko'ra $a^{\log_b c} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_b c} = b^{\log_b a\cdot\log_b c} = \left(b^{\log_b c}\right)^{\log_b a} = c^{\log_b a}$ kelib chiqadi.

Endi logarifmlarga doir bir necha misollar yechib ko'raylik.

Misol №1:

$\frac{\log_2 729}{\log_2 9}$ ifodani hisoblang.

Yechish: $\frac{\log_2 729}{\log_2 9} = \frac{\log_2 9^3}{\log_2 9} = \frac{3\cdot\log_2 9}{\log_2 9} = 3$.

Misol №2:

$\frac{\lg 8 + \lg 18}{2\lg 2 + \lg 3}$ ifodani hisoblang.

Yechish: $\frac{\lg 8+\lg 18}{2\lg 2+\lg 3} = \frac{\lg(8\cdot 18)}{\lg(2^2+3)} = \frac{\lg 144}{\lg 12} = \log_{12} 144 = 2$.

Misol №3:

$\log_9 17\cdot\log_{17} 7\cdot\log_7 3$ ifodani hisoblang.

Yechish: $\log_9 17\cdot\log_{17} 7\cdot\log_7 3 = \frac{1}{2}\log_3 17\cdot\log_{17} 7\cdot\frac{\log_{17} 3}{\log_{17} 7} = \frac{1}{2}\log_3 17\cdot\log_{17} 3 = \frac{1}{2}$.

Misol №4:

$\log_{128}\left((0{,}25)^{\log_{16}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right)}\right)$ ifodani hisoblang.

Yechish: Hisoblashni eng ichki qismdan boshlaymiz. CHeksiz geometrik progressiya bo'lgani uchun $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$ bo'ladi. $\log_{16}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right) = \log_{16}\frac{1}{2} = -4$ ni berilgan ifodaga qo'ysak, $\log_{128}\left((0{,}25)^{\log_{16}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots\right)}\right) = \log_{128}\left((0{,}25)^{-4}\right) = \log_{(2^7)}(4^4) = \log_{(2^7)}(2^8) = \frac{8}{7}$ bo'ladi.

Misol №5:

$\frac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - \log_3 2\cdot\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18}$ ifodani hisoblang.

Yechish: $\log 2 = t$ deb belgilash kiritsak, $\log_3 18 = \log_3(2\cdot 3^2) = \log_3 2 + 2 = t+2$ va $\log_3^2 18 = (t+2)^2$ bo'ladi. Berilgan ifoda $\frac{2\log_3^2 2 - \log_3^2 18 - \log_3 2\cdot\log_3 18}{2\log_3 2 + \log_3 18} = \frac{2t^2 - (t+2)^2 - t(t+2)}{2t + t + 2} = \frac{2t^2 - t^2 - 4t - 4 - t^2 - 2t}{3t+2} = -\frac{6t+4}{3t+2} = -2$ natija kelib chiqadi.

Misol №6:

Agar $\log_2 3 = a$ bo'lsa, $\log_8 0{,}75$ ni toping.

Yechish: $\log_8 0{,}75 = \log_{(2^3)}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}(\log_2 3 - \log_2 4) = \frac{1}{3}(a-2)$.

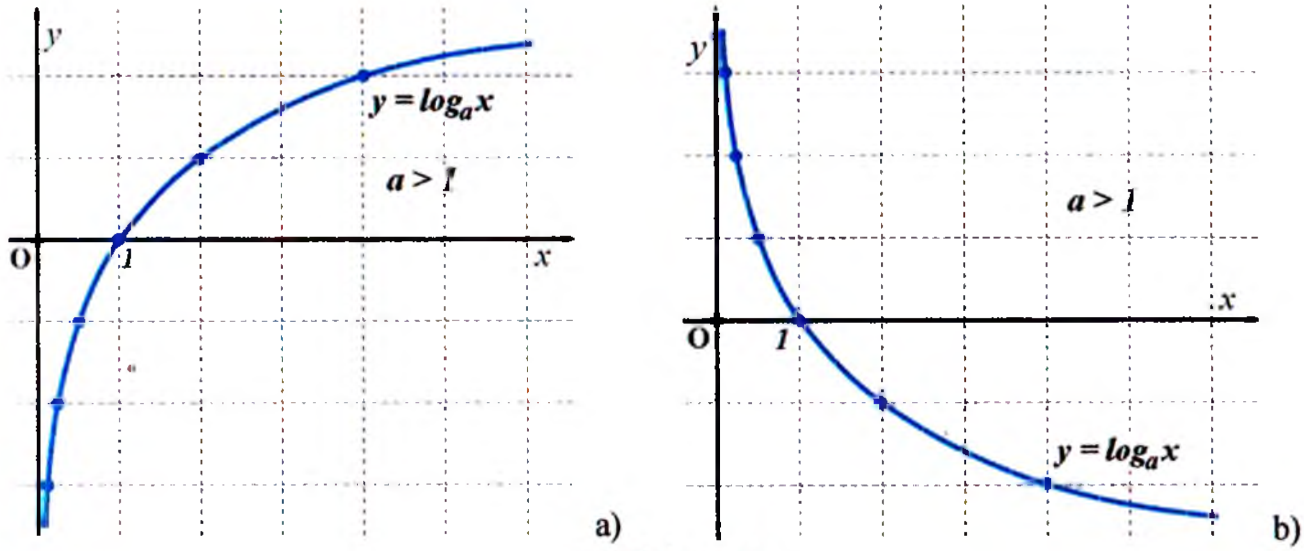
11.5-Mavzu: Logarifmik funksiya va uning xossalari.

$y=\log_a x$ ko‘rinishdagi funksiyaga logarifmik funksiya deyiladi.

Bu erda: $a-$ asos bo‘lib, asos uchun har doim $a>0, a\neq 1$ shart bajarilishi kerak. $a>1$ da funksiya o‘suvchi va $0<a<1$ da esa funksiya kamayuvchi bo‘ladi. Bunga $a=2$ va $a=1$ bo‘lgan hollar uchun jadval tuzish orqali ishonch hosil qilishimiz mumkin.

1-jadval

x	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	1/16
$y=\log_2 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=\log_{\frac{1}{2}} x$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4



11.5.1-rasm

Ko‘rsatkichli funksiyaniing barcha xossalari $a>1$ va $0<a<1$ hollar uchun quyidagi jadvalda keltirilgan.

2-jadval

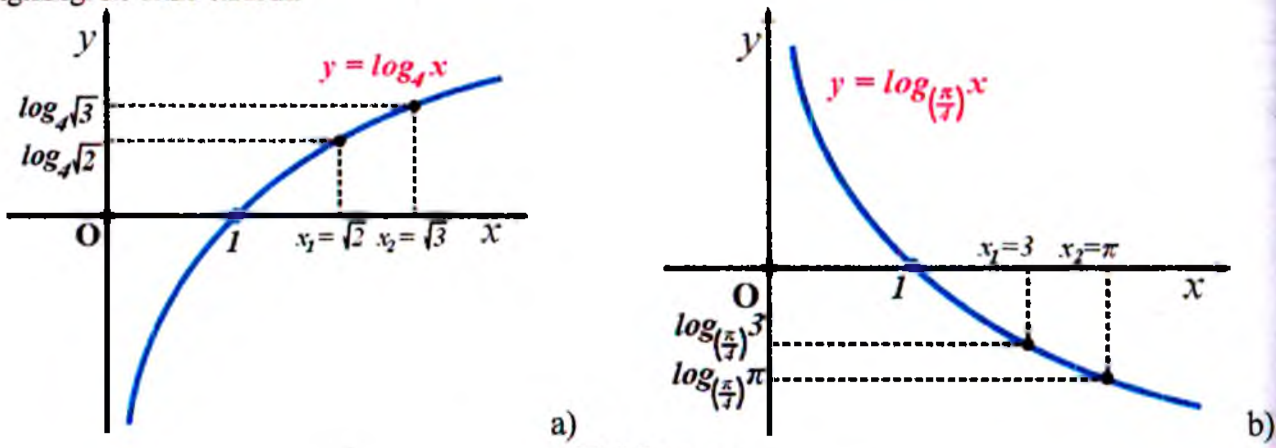
$a>1$	$0<a<1$
1.1.Aniqlanish sohasi – $D(f)=(0;\infty)$	*1.1.Aniqlanish sohasi* – $D(f)=(0;\infty)$
1.2.Qiymatlar sohasi – $E(f)=(-\infty;\infty)$	*1.2.Qiymatlar sohasi* – $E(f)=(-\infty;\infty)$
2.1.Juft-toqligi – juft-toq emas	*2.1.Juft-toqligi* – juft-toq emas
2.2.Davriyligi – davriy emas	*2.2.Davriyligi* – davriy emas
3.1.O‘sish oralig‘i – $x\in(0;\infty)$da ↑	*3.1.O‘sish oralig‘i* – $x\in\otimes$da ↑
3.2.Kamayish oralig‘i – $x\in\otimes$ da ↓	*3.2.Kamayish oralig‘i* – $x\in(0;\infty)$da ↓
4.1.Musbat oralig‘i – $x\in(1;\infty)$ da $y>0$	*4.1.Musbat oralig‘i* – $x\in(0;1)$ da $y>0$
4.2.Manfiy oralig‘i – $x\in(0;1)$ da $y<0$	*4.2.Manfiy oralig‘i* – $x\in(1;\infty)$ da $y<0$
5.1. Ox o‘qini kesish nuqtasi – $(0;1)$ nuqtada	*5.1. Ox o‘qini kesish nuqtasi* – $(0;1)$ nuqtada
5.2. Oy o‘qini kesish nuqtasi – kesmaydi	*5.2. Oy o‘qini kesish nuqtasi* – kesmaydi
6.1.Maksimum nuqtasi – yo‘q	*6.1.Maksimum nuqtasi* – yo‘q
6.2.Funksiya maksimumi – yo‘q	*6.2.Funksiya maksimumi* – yo‘q
6.3.Minimum nuqtasi – yo‘q	*6.3.Minimum nuqtasi* – yo‘q
6.4.Funksiya minimumi – yo‘q	*6.4.Funksiya minimumi* – yo‘q

Logarifmik funksiyaning o‘suvchi yoki kamayuvchi ekanligidan foydalanib, bir xil asosli turli sonlarni taqqoslash mumkin.

Misol №1:

$\log_4\sqrt{2}$ va $\log_4\sqrt{3}$ sonlarni taqqoslang.

Yechish: Berilgan misolni yechish uchun $y=\log_4 x$ funksiyaning sxematik ravishda grafigi (eskizi) chiziladi. Grafikdan $x_1=\sqrt{2}$ va $x_2=\sqrt{3}$ nuqtalari belgilanadi. $y=\log_4 x$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun kattaroq argument (x)ning qiymatiga kattaroq funksiya (y)ning qiymati mos keladi. Boshqacha aytganda, $x_2>x_1$ bo'lgani uchun $f(x_2)>f(x_1)$ bo'ladi, ya'ni $\log_4\sqrt{3}>\log_4\sqrt{2}$ bo'ladi. 11.5.2-a,rasmdagi grafikda ham $f(x_2)=f(\sqrt{3})=\log_4\sqrt{3}$ nuqta $f(x_1)=f(\sqrt{2})=\log_4\sqrt{2}$ nuqtadan tepada yotganligi ko'rinib turibdi.



11.5.2-rasm

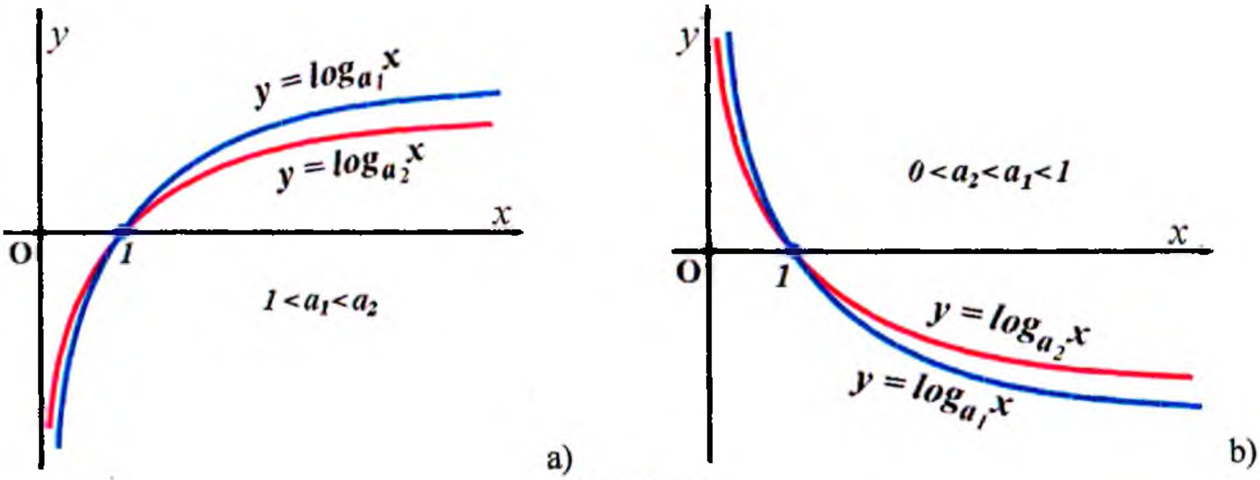
Misol №2:

$\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}3$ va $\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}\pi$ sonlarni taqqoslang.

Yechish: Avalo $y=\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}x$ funksiyaning sxematik ravishda grafigi (eskizi) chiziladi. Grafikdan $x_1=3$ va $x_2=\pi$ nuqtalari belgilanadi. $\frac{\pi}{4}<1$ bo'lgani uchun $y=\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}x$ funksiya kamayuvchi bo'ladi. Bunda kattaroq argument (x) ning qiymatiga kichikroq funksiya (y) ning qiymati mos keladi. Boshqacha aytganda, $x_2>x_1$ bo'lgani uchun $f(x_2)<f(x_1)$ bo'ladi, ya'ni $\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}\pi<\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}3$ bo'ladi. 11.5.2-b,rasmdagi grafikda ham $f(x_2)=f(\pi)=\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}\pi$ nuqta $f(x_1)=f(3)=\log_{\left(\frac{\pi}{4}\right)}3$ nuqtadan pastda yotganligi ko'rinib turibdi.

Ba'zida bizni turli asosli funksiyalarning grafiklari bitta Dekart koordinatalar sistemasida qanday qurilishi qiziqtiradi. Masalan, $y=\log_2 x$ va $y=\log_3 x$ funksiyalar grafiklarini bitta koordinata tekisligida qurganda $\log_2 x$ niing qiymati $\log_3 x$ ning qiymatidan ko'ra tezroq o'suvchan bo'ladi. Shuning uchun ham $y=\log_3 x$ funksiya grafigi $y=\log_2 x$ funksiyaga qaraganda koordinata o'qlariga yaqinroq turadi. Xuddi shuningdek, $\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}x$ ning qiymati $\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}x$ ning qiymatidan tezroq kamayuvchan bo'lgani uchun $y=\log_{\left(\frac{1}{3}\right)}x$ funksiya grafigi $y=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}x$ funksiyaga qaraganda koordinata o'qlariga yaqinroq turadi.

11.5.3-a,rasmda turli 1dan katta asoslar $(1<a_1<a_2)$ uchun hamda 11.1.3-b,rasmda esa turli 1dan kichik $(0<a_2<a_1<1)$ asoslar uchun ko'rsatkichli funksiyalar grafiklari berilgan.



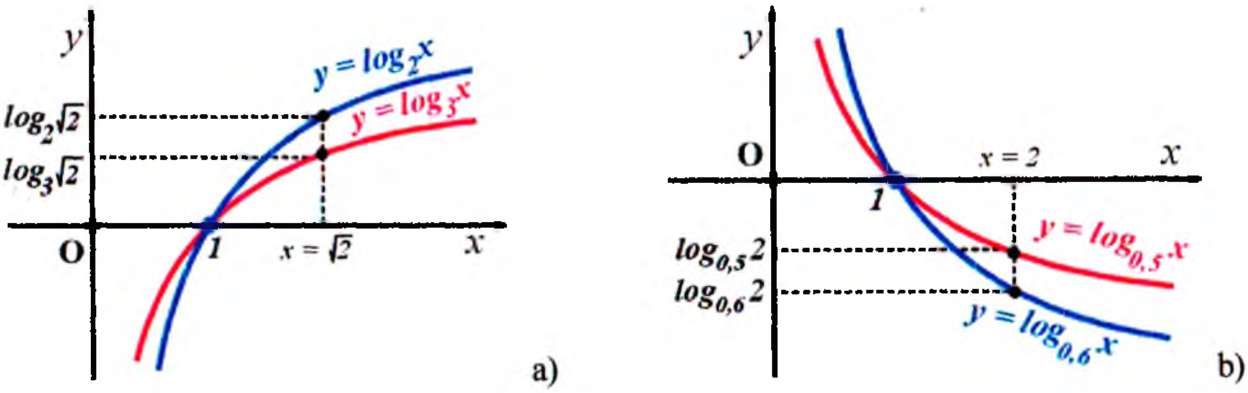
11.5.3-rasm

Yuqoridagi rasmlardan foydalanib, asoslari har xil, logarifm ostidagi qiymatlari bir xil bo'lgan sonlarni taqqoslash mumkin.

Misol №3:

$\log_2\sqrt{2}$ va $\log_3\sqrt{2}$ sonlarni taqqoslang.

<u>Yechish:</u> Bunda $y=\log_2 x$ va $y=\log_3 x$ funksiyaning sxematik ravishda grafiklari bitta koordinatalar tekisligida chiziladi. Grafiklardan foydalanib, funksiyalarning $x=\sqrt{2}$ nuqtadagi qiymatlari $f_1(x)=\log_2\sqrt{2}$ va $f_2(x)=\log_3\sqrt{2}$ nuqtalari belgilanadi. 11.5.4-a,rasmdan ham $f_2(x)=\log_2\sqrt{2}$ nuqta $f_1(x)=\log_3\sqrt{2}$ nuqtadan tepada yotganligi ko'rinib turibdi. Demak, $\log_2\sqrt{2}>\log_3\sqrt{2}$ ekan.



11.5.4-rasm

Misol №4:

$\log_{0,6}2$ va $\log_{0,5}2$ sonlarni taqqoslang.

<u>Yechish:</u> Avalo asoslarni aniqlaymiz. Bunda $a_1=0{,}6$ va $a_2=0{,}5$ bo'lib, $a_1>a_2$. $y=\log_{a_1}x=\log_{0,6}x$ va $y=\log_{a_2}x=\log_{0,5}x$ funksiyalarning sxematik ravishda grafiklari bitta koordinatalar tekisligida chiziladi. Grafiklardan foydalanib, funksiyalarning $x=2$ nuqtadagi qiymatlari $f_1(x)=\log_{0,6}2$ va $f_2(x)=\log_{0,5}2$ nuqtalari belgilanadi. 11.1.4-b,rasmdan $f_2(x)=\log_{0,5}2$ nuqta $f_1(x)=\log_{0,6}2$ nuqtadan tepada yotganligi ko'rinib turibdi. Demak, $\log_{0,6}2<\log_{0,5}2$ ekan.

11.6-Mavzu: Logarifmik tenglama va unga doir misollar.

$\log_a x=b$ ko'rinishga keltiriladigan tenglamalarga logarifmik tenglama deyiladi.

Bu erda: a – asos bo'lib, asos uchun har doim $a>0, a\neq 1$ shart bajarilishi kerak.

Yuqoridagi tenglamani ishlash uchun b sonni ham a asosli logarifmga keltiriladi. Asoslar teng bo'lgani uchun logarifm ostidagi ifodalar ham teng bo'ladi. Logarifmga doir bir nechta misollar yechish orqali mavzuni mustahkamlaymiz.

Misol №1:

$\log_2(x^2+4x+3)=3$ tenglamani eching.

Yechish: 3 sonini ham 2 asosli logarifmga aylantiramiz. Logarifmlarni tashlab yuborish orqali tenglamani echamiz. Natijada, $\log_2(x^2+4x+3)=\log_2 8$, $\to$ $x^2+4x+3=8$, $\to$ $x^2+4x-5=0$, $\to$ $(x+5)(x-1)=0$, $\to$ $\begin{cases} x_1=-5 \\ x_2=1 \end{cases}$ yechimlarga ega bo'lamiz.

Misol №2:

$\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$ tenglamani eching.

Yechish: Asoslar teng bo'lgani uchun logarifm ostidagi ifodalar ham teng bo'ladi. Bundan $2x+3=x+1$, $\to$ $x=-2$ javobga ega bo'lamiz. Bu javobni berilgan tenglamaga qo'yganimizda logarifm ostidagi ifodalar musbat bo'lishi kerak. Bundan $\log_5(2\cdot(-2)+3)=\log_5(-2+1)$, $\to$ $\log_5(-1)=\log_5(-1)$ ko'rinadiki, logarifm ostidagi ifoda manfiy ekan. shuning uchun berilgan tenglama yechimga ega emas, ya'ni $x\in\otimes$ bo'ladi.

Misol №3:

$\log_x(x^2-2x+2)=1$ tenglamani eching.

Yechish: Dastlab tenglamaning aniqlanish sohasini topamiz. Logarifm asosi $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ bo'lishi, logarifm ostidagi ifoda esa $x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ har doim musbatdir. Shuning uchun aniqlanish sohasi $D(f)=(0;1)\cup(1;\infty)$ bo'ladi. Endi tenglamani echamiz. Bunda $\log_x(x^2-2x+2)=\log_x x$, $\to$ $x^2-2x+2=x$, $\to$ $x^2-3x+2=0$, $\to$ $(x-1)(x-2)=0$, $\to$ $\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=2 \end{cases}$

chiqqan javoblardan faqat $x_2=2$ javob aniqlanish sohasida yotadi.

Misol №4:

$\log_5^2 x-\log_{\sqrt5} x-3=0$ tenglamani eching.

Yechish: Tenglamani $\log_5^2 x-2\log_5 x-3=0$ ko'rinishga keltiramiz. Bu kvadrat tenglamaga keltiriladigan tenglamadir. $\log_5 x=t$ deb belgilash kiritamiz. Hosil bo'lgan $t^2-2t-3=0$ tenglamani $(t-3)(t+1)=0$ ko'paytuvchilarga ajratganimizada $\begin{cases} t_1=3 \\ t_2=-1 \end{cases}$ ildizlar hosil bo'ladi. Bundan esa

$\begin{cases} \log_5 x=3 \\ og_5 x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=5^3=125 \\ x_2=5^{-1}=\frac{1}{5} \end{cases}$ javoblar kelib chiqadi.

11.7-Mavzu: Logarifmik tengsizlik va unga doir misollar yechish

$\log_a u>\log_a \vartheta$ yoki $\log_a u<\log_a \vartheta$ ko'rinishga keltiriladigan tengsizliklarga ko'rsatkichli tengsizlik deyiladi.

Bu erda: a – asos bo'lib, asos uchun har doim $a>0, a\neq 1$ shart bajarilishi kerak.

$u=u(x)$, $\vartheta=\vartheta(x)$ – erkli o'zgaruvchi x orqali ifodalangan turli funksiyalar.

$a^u>a^\vartheta$ ko'rinishdagi tengsizlik quyidagicha echiladi:

Agar $a>1$ bo'lsa, $\begin{cases} u>\vartheta \\ \vartheta\geq 0 \end{cases}$ deb ishlanadi
Agar $0<a<1$ bo'lsa, $\begin{cases} u<\vartheta \\ u\geq 0 \end{cases}$ deb ishlanadi

Endi ko'rsatkichli tengsizliklarga doir bir necha misollar yechib ko'ramiz.

Misol №1:

$\log_3(x-1)\leq 2$ tengsizlikni eching.

Yechish: 2ni ham 3 asosli logarifm shakliga keltiramiz. $\log_3(x-1)\leq\log_3 8$ ifodada logarifm asosi $a=3>1$ bo'lgani uchun logarifmni tashlab yuborishda tengsizlik ishorasi o'zgarmaydi. Bundan esa $x-1\leq 8$, $\to$ $x\leq 9$, $\to$ $x\in(1;9)$ bo'ladi.

Misol №2:

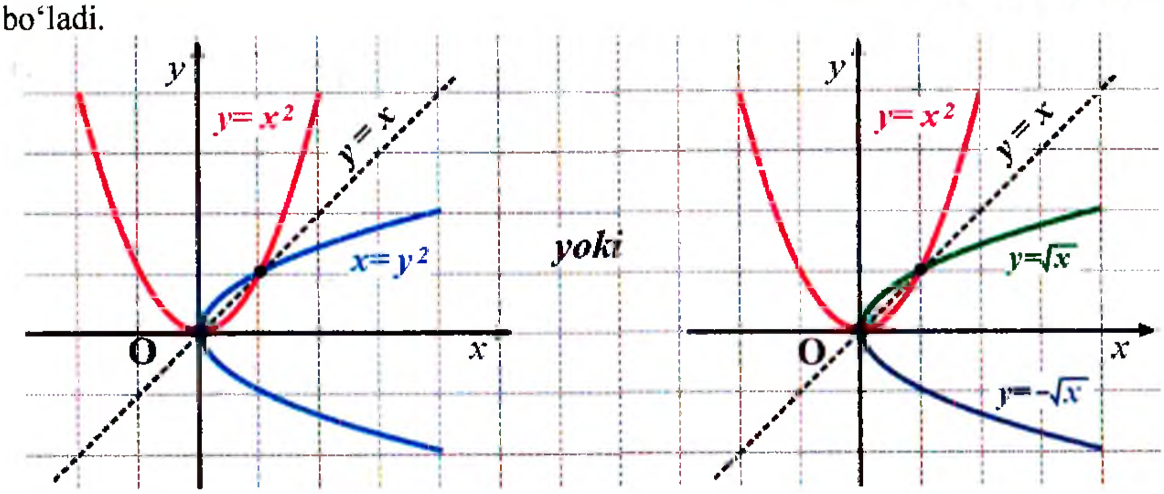
$\log_{\frac{1}{5}}(x-10)-\log_{\frac{1}{5}}(x+2)\geq -1$ tengsizlikni eching.

Yechish: Eng avvalo tengsizlikning aniqlanish sohasini topamiz. Unga ko'ra aniqlanish sohasi $\begin{cases} x-10\geq 0 \\ x+2\geq 0 \end{cases}$, $\rightarrow$ $\begin{cases} x\geq 10 \\ x\geq -2 \end{cases}$, $D(f)=(10;\infty)$ bo'ladi. Tengsizlikning har ikkala tomoni ham bir xil asosga keltiriladi. $\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\geq \log_{\frac{1}{5}}5$ ifodada asos 1dan kichik bo'lgani uchun logarifmni tashlab yuborishda tengsizlik ishorasi qarma-qarshi tomonga o'zgaradi. $\frac{x-1}{x+2}\leq 5$, $\rightarrow$ $\frac{x-1}{x+2}-5\leq 0$, $\rightarrow$ $\frac{x-1-5x-10}{x+2}\leq 0$, $\rightarrow$ $\frac{-4x-11}{x+2}\leq 0$, $|:(-4)$, $\frac{x+3{,}75}{x+2}\geq 0$, $\rightarrow$ $(x+3{,}75)(x+2)\geq 0$, $\rightarrow$ $x\in(-\infty;-3{,}75)\cup(-2;\infty)$ tenglama yechimi va aniqlanish sohasi $D(f)$ ning kesishgan qismi berilgan logarifmik tengsizlikning natijaviy yechimi bo'ladi. Demak, kesishgan soha $x\in(10;\infty)$ bo'ladi.

11.8-Mavzu: Teskari funksiya va unga doir misollar

Agar biror $f(x)$ funksiya uchun $f(a)=b$ va boshqa bir $g(x)$ funksiya uchun $g(b)=a$ shart bajarilsa, u holda $g(x)$ funksiyani $f(x)$ funksiyaning ***teskari funksiyasi*** deyiladi. Teskari funksiyani $^{-1}$ bilan belgilanadi. Masalan, $f^{-1}(x)=g(x)$ va $g^{-1}(x)=f(x)$ bo'ladi. O'zaro teskari bo'lgan funksiyalar har doim $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrikdir.

Ixtiyoriy berilgan $y=f(x)$ funksiyaning teskari funksiyasini aniqlash uchun koordinatalarning o'rni almashtiriladi, ya'ni $x=f(y)$ deb yoziladi. Hosil bo'lgan $x=f(y)$ funksiya x oshkor etilgan funksiyadir. Boshqacha aytganda $y=f(x)$ funksiyaning x oshkor etilgan teskari funksiyasi $x=f(y)$ bo'ladi. Bundan y ni oshkor etib olinsa, u holda $y=f^{-1}(x)=g(x)$ funksiya hosil bo'ladi.

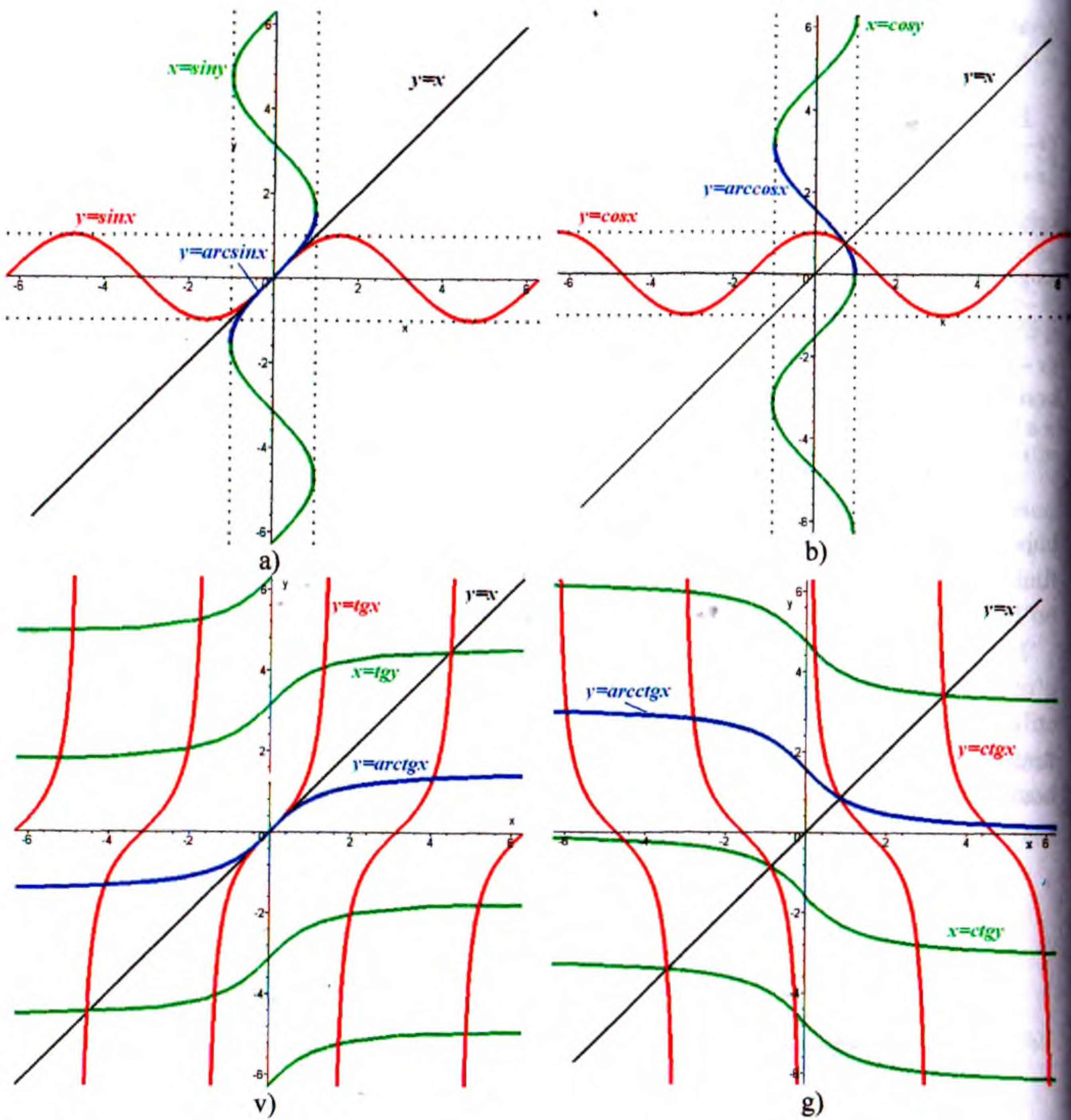


11.8.1-rasm

Masalan: $y=x^2$ funksiyaning x oshkor etilgan teskari funksiyasi $x=y^2$ funksiya bo'lib, bundan y ni oshkor etsak, $\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=-\sqrt{x} \end{cases}$ funksiyalar hosil bo'ladi (11.8.1-rasm).

Eslatib o'tamiz:

y oshkor etilgan funksiyalar $y=f(x)$ ko'rinishda bo'lib, bunda x to'plamning aniqlangan har bir qiymatiga y to'plamda yagona bitta qiymat mos keladi, ya'ni ixtiyoriy $x=a$ to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiyani ko'pi bilan bir marta kesadi. Xuddi shuningdek, x oshkor etilgan funksiyalar $x=f(y)$ ko'rinishda bo'lib, bunda y to'plamning aniqlangan har bir qiymatiga x to'plamda yagona bitta qiymat mos keladi, ya'ni ixtiyoriy $y=b$ to'g'ri chiziq $x=f(y)$ funksiyani ko'pi bilan bir marta kesadi.



11.8.2-rasm

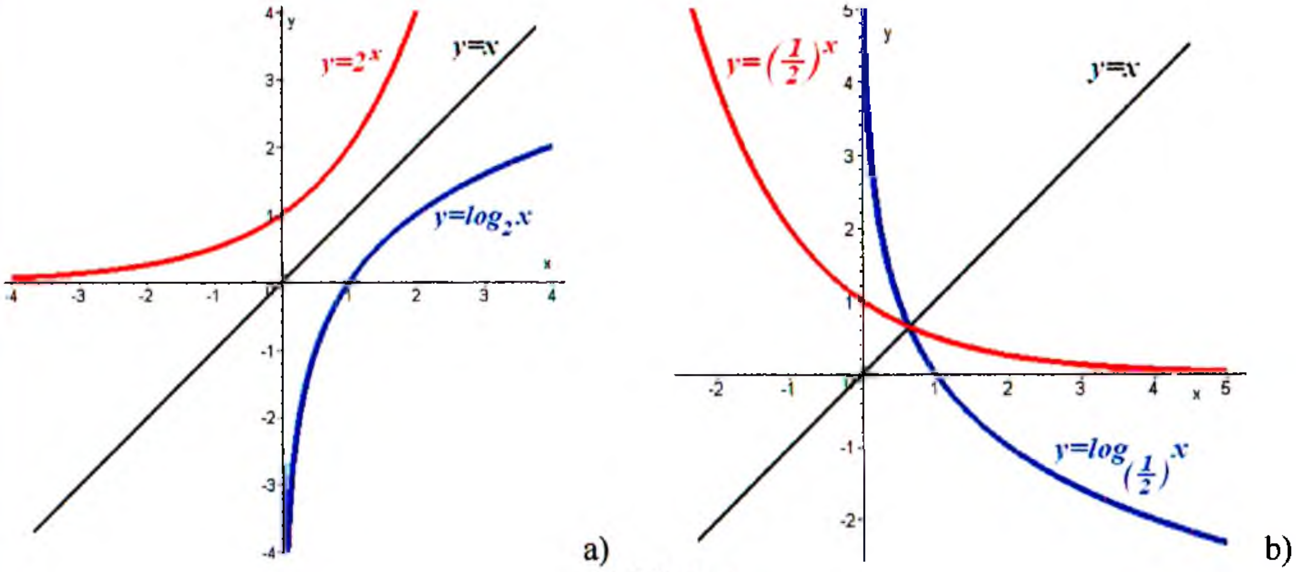
Endi trigonometrik funksiyalarning teskari funksiyalari haqida so‘z yuritamiz.

$y=\sin x$ funksiyaning x oshkor etilgan teskari funksiyasi $x=\sin y$ funksiya bo‘lib, bundan y ni oshkor etsak $y=\arcsin x$ funksiya hosil bo‘ladi (11.8.2-a,rasm).

$y=\cos x$ funksiyaning x oshkor etilgan teskari funksiyasi $x=\cos y$ funksiya bo‘lib, bundan y ni oshkor etsak $y=\arccos x$ funksiya hosil bo‘ladi (11.8.2-b,rasm).

$y=tgx$ funksiyaning x oshkor etilgan teskari funksiyasi $x=tgy$ funksiya bo‘lib, bundan y ni oshkor etsak $y=arctgx$ funksiya hosil bo‘ladi (11.8.2-v,rasm).

$y=ctgx$ funksiyaning x oshkor etilgan teskari funksiyasi $x=ctgy$ funksiya bo‘lib, bundan y ni oshkor etsak $y=arcctgx$ funksiya hosil bo‘ladi (11.8.2-g,rasm).



11.8.3-rasm

Xuddi shuningdek, $y=a^x$ va $y=\log_a x$ funksiyalar, $y=e^x$ va $y=\ln x$ funksiyalar, $y=10^x$ va $y=\lg x$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar bo'lib, ular ham $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrikdir. Masalan, 11.8.3-rasmda o'zaro teskari bo'lgan $y=2^x$ va $y=\log_2 x$ o'suvchi funksiyalar hamda $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ va $y=\log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$ kamayuvchi funksiyalar tasvirlangan bo'lib, ularning $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik ekanligi ko'rinib turibdi.

Funksiyaning teskari funksiyasini aniqlashga doir bir necha misollar echaylik.

Misol №1:

$y=2x-4$ funksiyaga teskari funksiyani toping.

<u>Yechish:</u> Berilgan funksiyadan $x$ni aniqlab olamiz. $y=2x-4$, $\rightarrow$ $x=\frac{y+4}{2}=\frac{1}{2}y+2$ da o'zgaruvchilar o'rnini almashtirsak, $y=\frac{1}{2}x+2$ hosil bo'ladi. Demak, izlanayotgan teskari funksiya $g(x)=y^{-1}=\frac{1}{2}x+2$ bo'lar ekan.

Misol №2:

$y=x^3-5$ funksiyaga teskari funksiyani toping.

<u>Yechish:</u> Berilgan funksiyadan $x$ni aniqlab olamiz. $y=x^3-5$, $\rightarrow$ $x=\sqrt[3]{y+5}$ da o'zgaruvchilar o'rnini almashtirsak, $y=\sqrt[3]{y+5}$ hosil bo'ladi. Demak, izlanayotgan teskari funksiya $g(x)=y^{-1}=\sqrt[3]{y+5}$ bo'lar ekan.

Misol №3:

Agar $f(x-3)=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyani aniqlang.

<u>Yechish:</u> Berilgan funksiyani soddalashtirib $f(x-3)=(x-3)^3$ deb yozamiz. Agar $\varphi(x)=x-3$ desak, u holda $\varphi^{-1}(x)=x+3$ bo'ladi. Shunga ko'ra $f(x)=f\left(\varphi^{-1}(x)\right)=\left(\varphi^{-1}(x)-3\right)^3=(x+3-3)^3=x^3$ bo'ladi.

Misol №4:

$y=x^2-4x+7$ funksiyaga $x\in(-\infty;\,2]$ oraliqda teskari funksiyani toping.

<u>Yechish:</u> Berilgan funksiyadan x ni noma'lum deb uni topamiz. Bunda $y=x^2-4x+7$, $\rightarrow$ $x^2-4x+7-y=0$, $\rightarrow$ $D=16-4(7-y)=y-12$, $\rightarrow$ $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{y-12}}{2}$ natija kelib chiqadi. Bu $x_1=\frac{4-\sqrt{y-12}}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{y-12}+2$ va $x_2=\frac{4+\sqrt{y-12}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{y-12}+2$ javoblardan teskari funksiyalar uchun $g_1=y_1^{-1}=\frac{4-\sqrt{y-12}}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{y-12}+2$ va $g_2=y_2^{-1}=\frac{4+\sqrt{y-12}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{y-12}+2$ ifodalarni

olamiz. Bu ikki teskari funksiyadan $g_1 = y_1^{-1} = \frac{4-\sqrt{y-12}}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{y-12}+2$ funksiya berilgan $y = x^2 - 4x + 7$ funksiyaning $x \in (-\infty; 2]$ oraliqda teskari funksiyasi bo'ladi.

11.9-Mavzu: Murakkab funksiyalar va ularning grafiklariga doir misollar

Biz shu vaqtgacha tanishib chiqqan barcha turdagi funksiyalar oddiy funksiyalardir. Ushbu mavzuda murakkab funksiya haqida so'z yuritamiz va ba'zi murakkab funksiyalarning grafiklarini o'rganamiz.

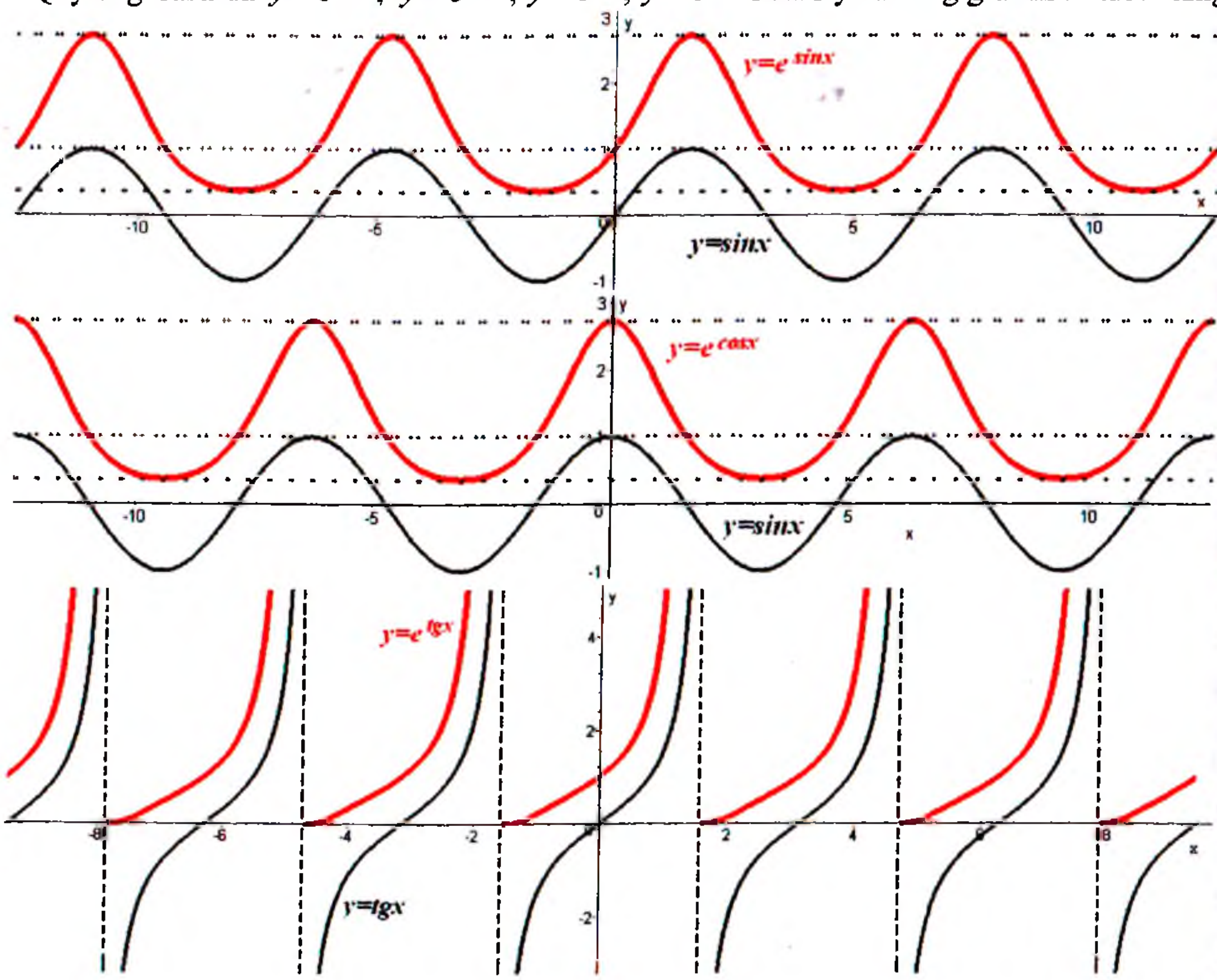
Agar x erkli o'zgaruvchi biror g funksiyaga mos qo'yilsa va g funksiya esa boshqa bir f funksiyaga mos qo'yilsa, u holda g va f funksiyalardan iborat y funksiyaga ***murakkab funksiya*** deyiladi.

$$\boxed{y = f(g(x))}$$

Masalan, $g(x) = \sin x$ va $y = 2^x$ funksiyalar– oddiy funksiyalar, $y = 2^{g(x)} = 2^{\sin x}$ funksiya – murakkab funksiyadir.

Endi murakkab funksiyalar va ularning grafiklariga doir misollar keltiramiz.

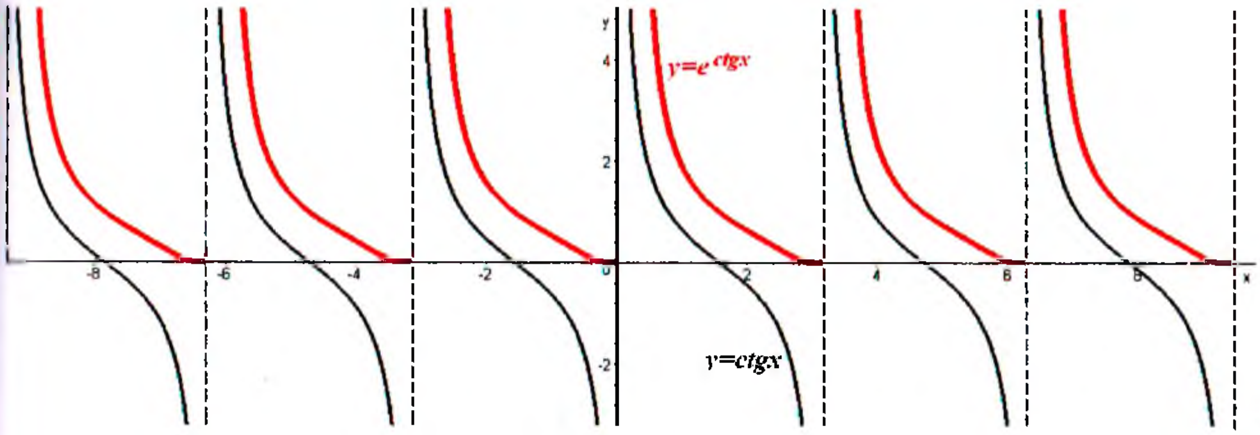
Quyidagi rasmda $y = e^{\sin x}$, $y = e^{\cos x}$, $y = e^{tgx}$, $y = e^{ctgx}$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



a)

b)

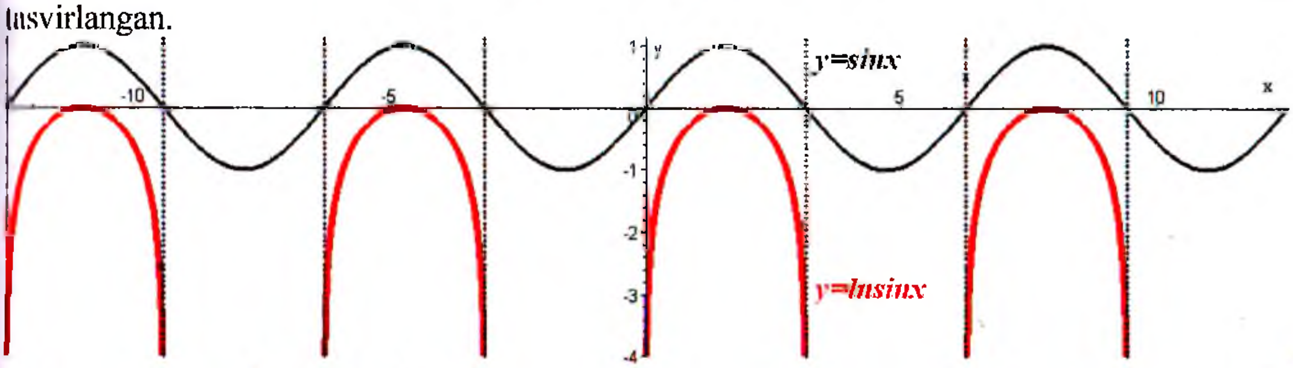
v)



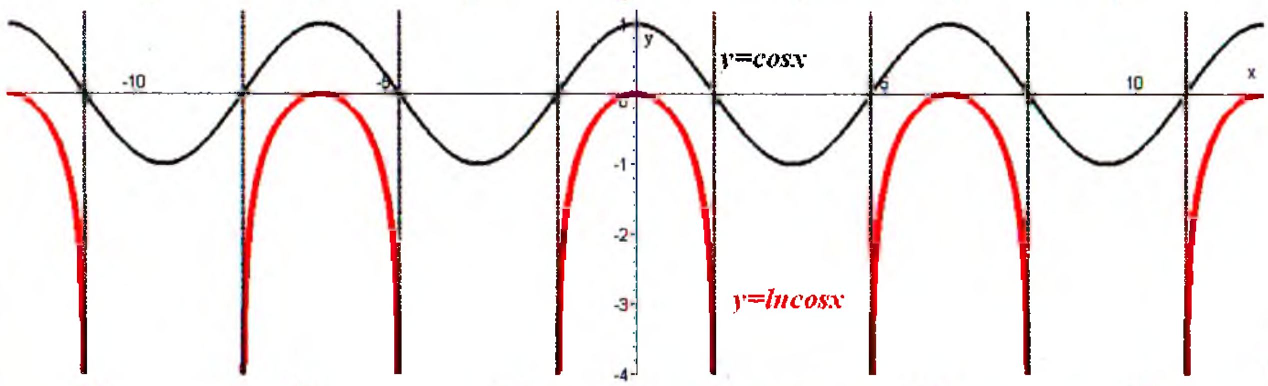
g)

11.9.1-rasm

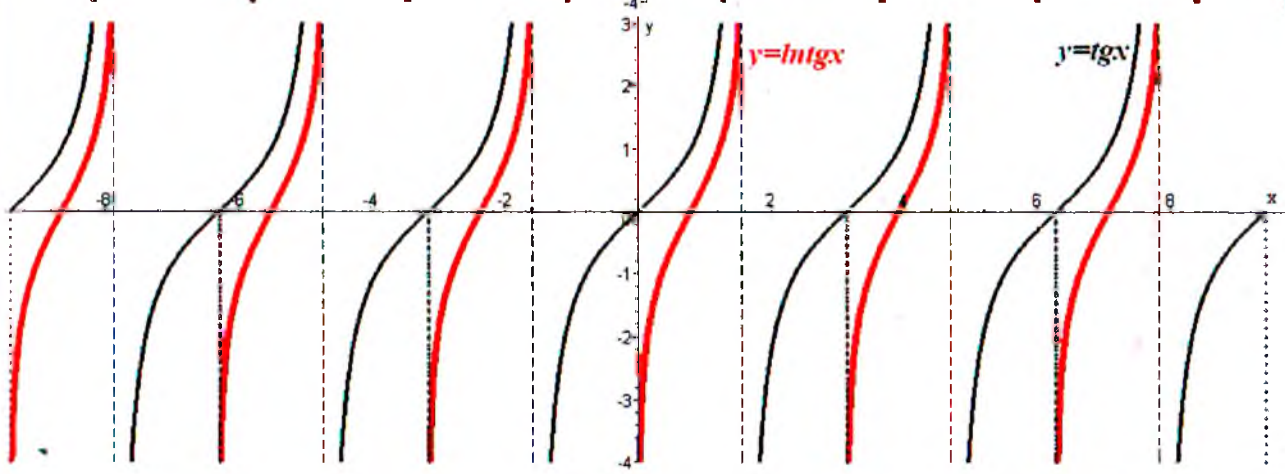
Quyidagi rasmda $y=\ln\sin x$, $y=\ln\cos x$, $y=\ln tgx$, $y=\ln ctgx$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



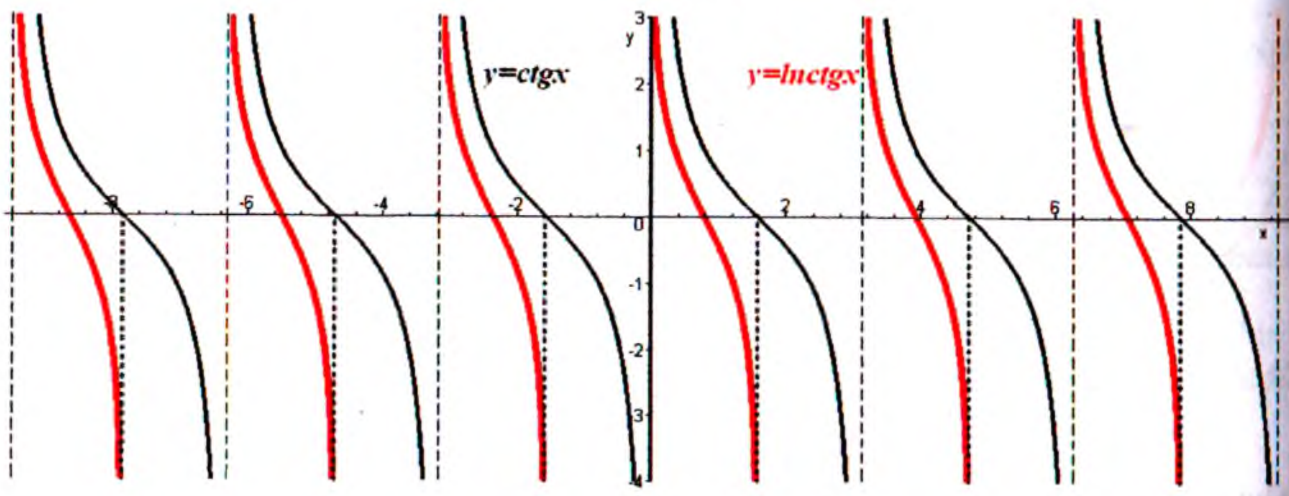
a)



b)



v)

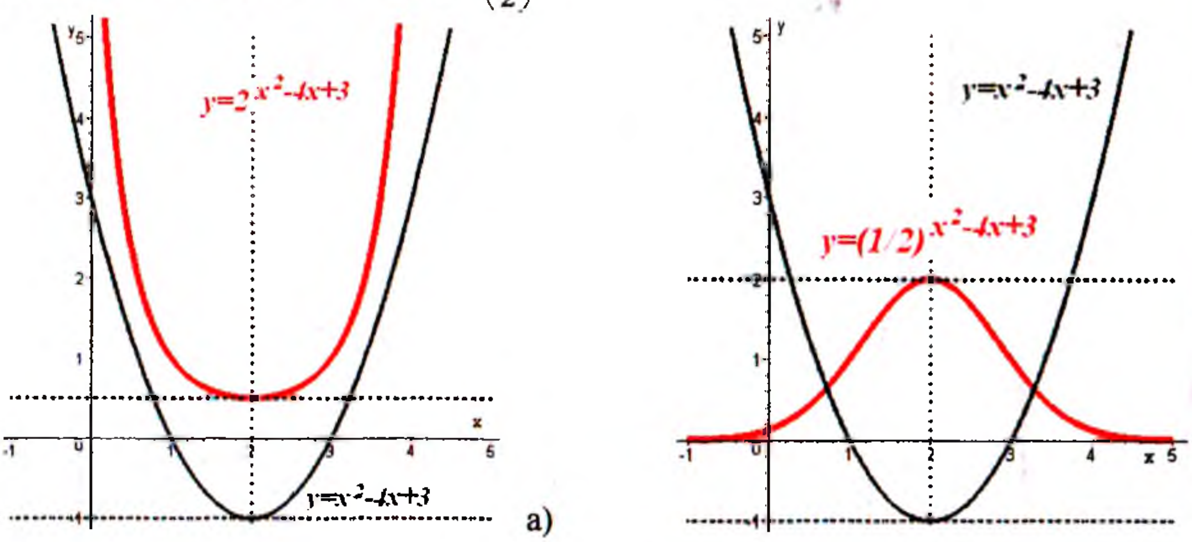


g)

11.9.2-rasm

Endi daraja ko‘rsatkichida kvadrat funksiya bo‘lgan murakkab funksiya grafiklarini tasvirlaymiz. Bunda parabola shoxi tepaga va pastga qaragan hamda diskriminant musbat, nolga teng va manfiy bo‘lgan hollar uchun alohida-alohida to‘xtalamiz.

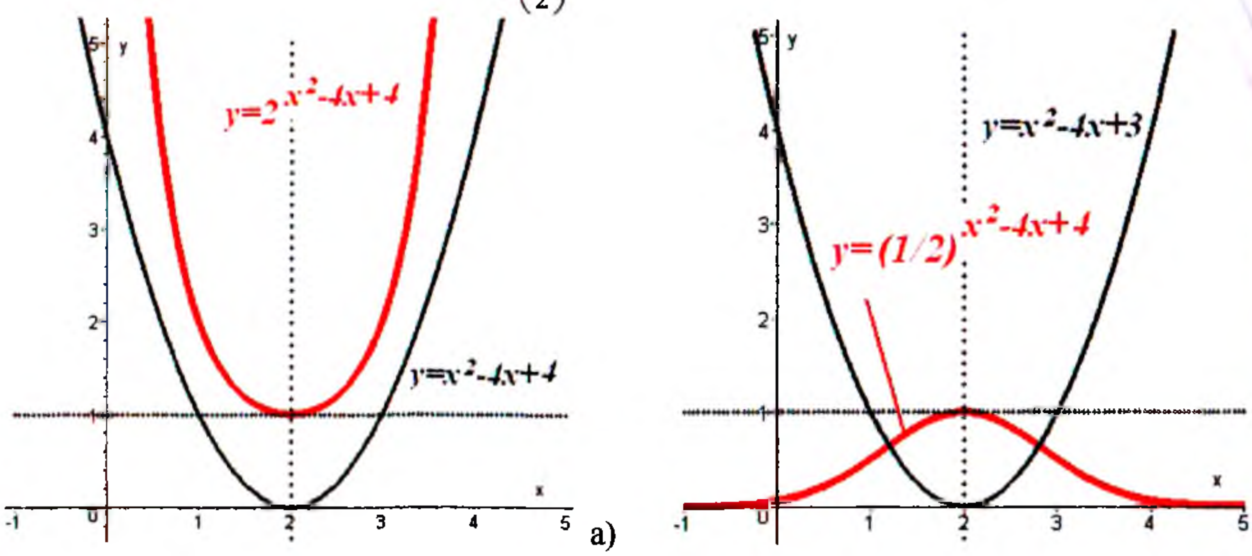
Quyidagi rasmda $y = 2^{x^2-4x+3}$ va $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+3}$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



a) b)

11.9.3-rasm

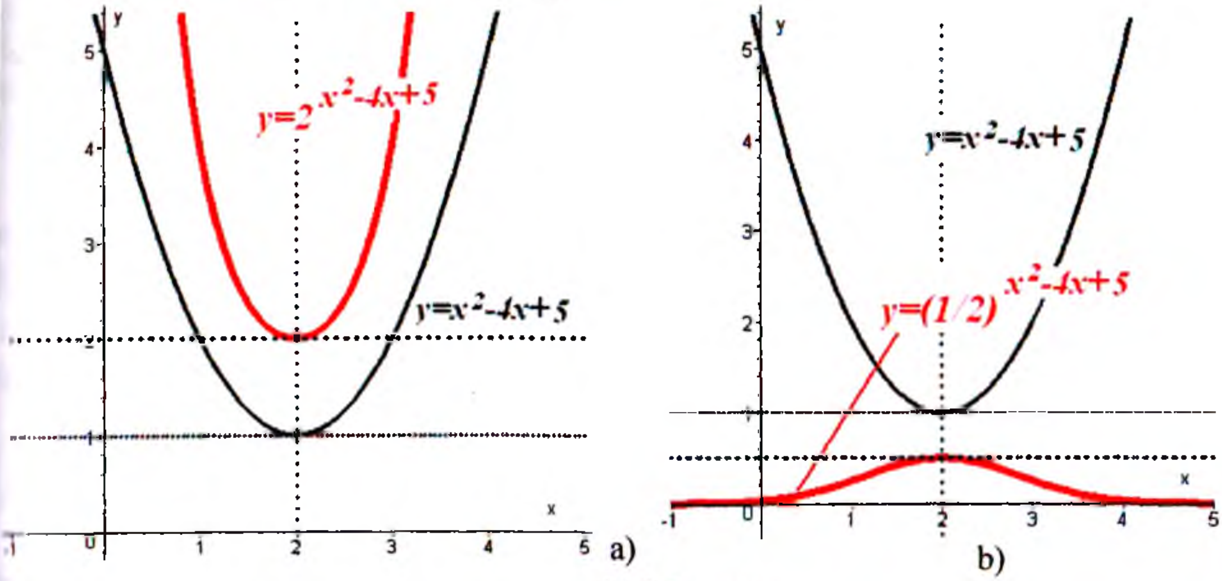
Quyidagi rasmda $y = 2^{x^2-4x+4}$ va $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+4}$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



a) b)

11.9.4-rasm

Quyidagi rasmda $y = 2^{x^2-4x+5}$ va $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x+5}$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.

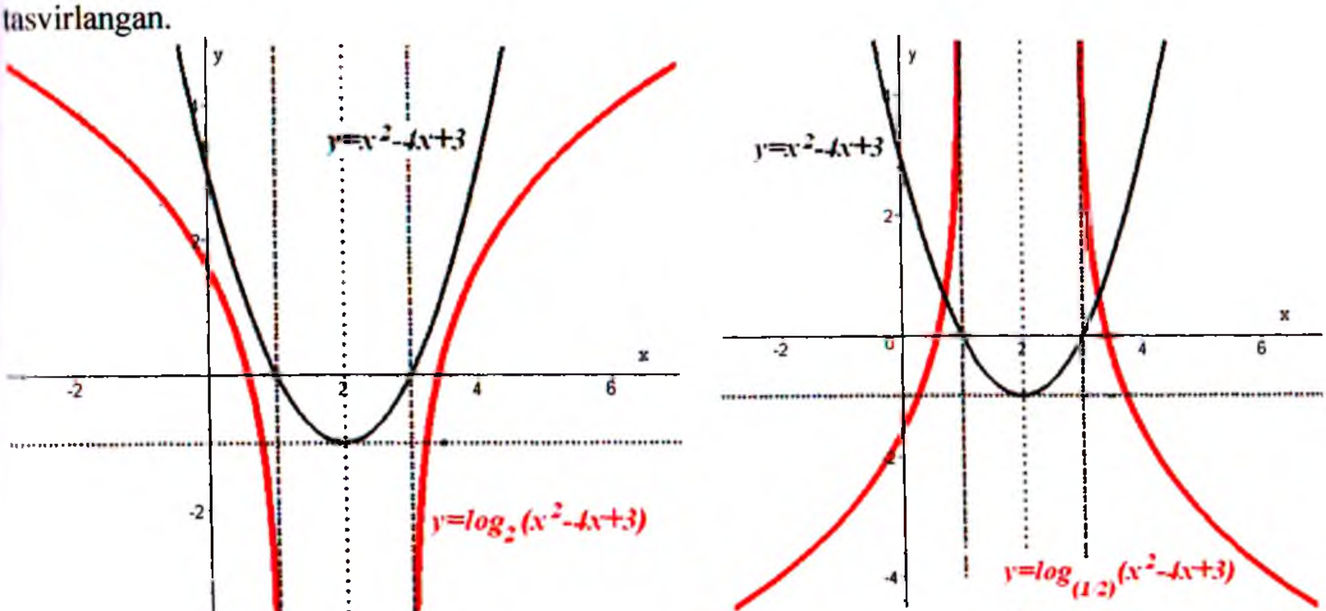


a) b)

11.9.5-rasm

Endi daraja logarifm ostida kvadrat funksiya bo‘lgan murakkab funksiya grafiklarini tasvirlaymiz. Bunda parabola shoxi tepaga va pastga qaragan hamda diskriminant musbat, nolga teng va manfiy bo‘lgan hollar uchun alohida-alohida to‘xtalamiz.

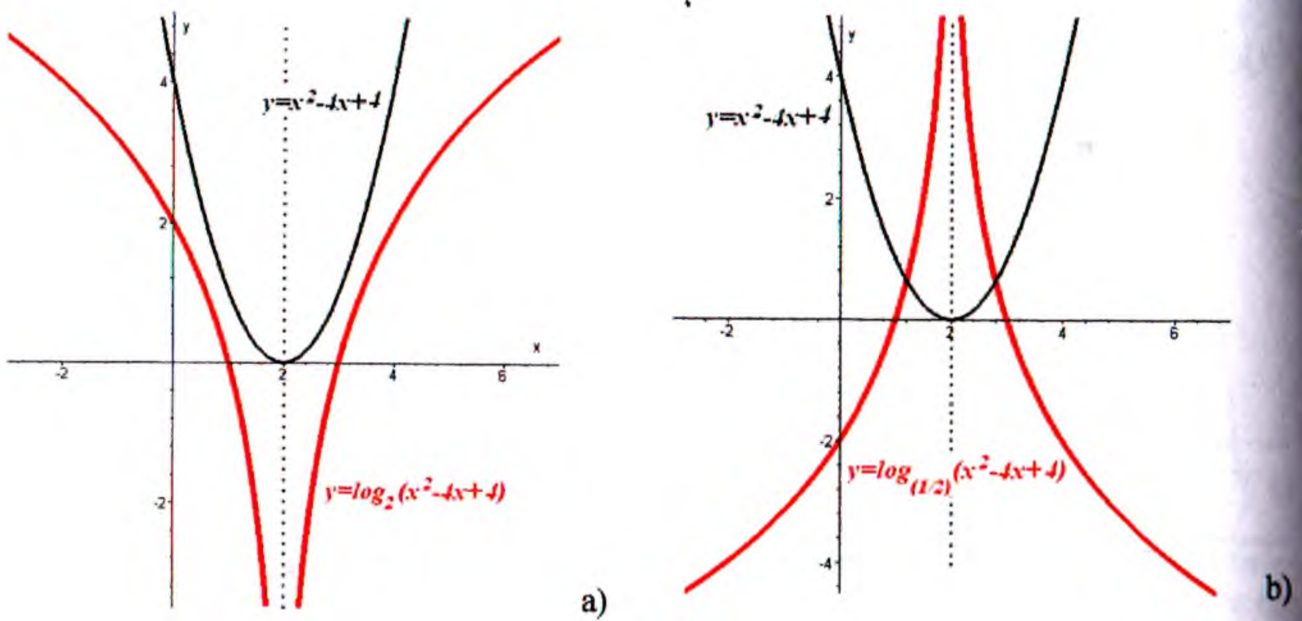
Quyidagi rasmda $y = \log_2(x^2 - 4x + 3)$ va $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2 - 4x + 3)$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



a) b)

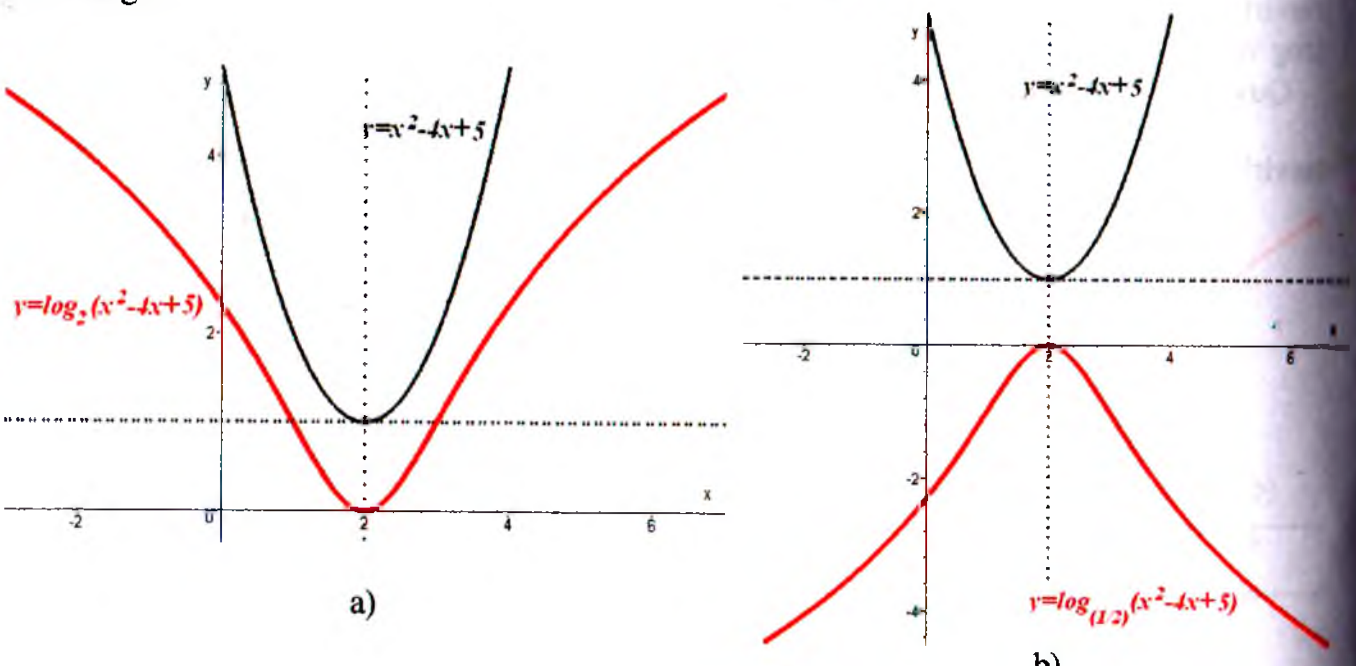
11.9.6-rasm

Quyidagi rasmda $y = \log_2(x^2 - 4x + 4)$ va $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^2 - 4x + 4)$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



11.9.7-rasm

Quyidagi rasmda $y = \log_2\left(x^2 - 4x + 5\right)$ va $y = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(x^2 - 4x + 5\right)$ funksiyalarning grafiklari tasvirlangan.



11.9.8-rasm

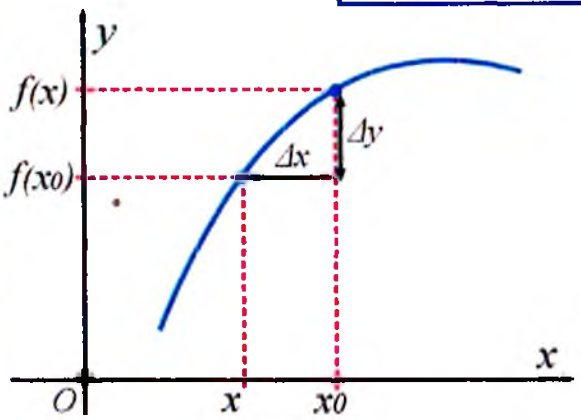
12-BOB: HOSILA VA UNING QO‘LLANILISHI

Hosila funksiyalarning turli xossalarini o‘rganishda keng qo‘llaniladi. Masalan, funksiyaning o‘sish va kamayishi, ekstremumlari, burilish nuqtalari, qavariqligi va botiqligi va shu boshqalar hosila yordamida o‘rganiladi. Hozirgi kundagi barcha sohadagi fan-texnika yutuqlarini hosilasiz umuman tasavvur etish qiyin.

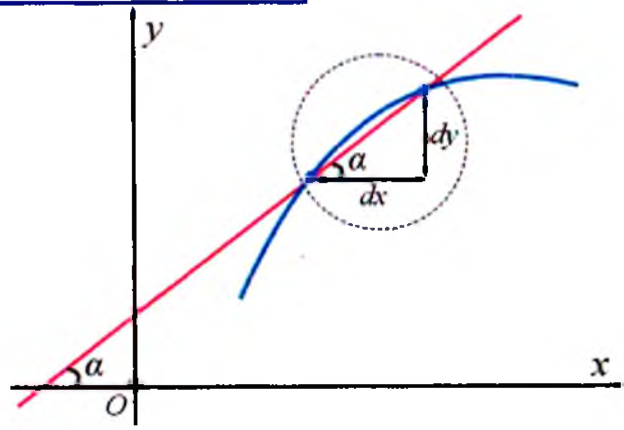
12.1-Mavzu: Hosila tushunchasi va uning geometrik ma’nosi.

Bizga $y = f(x)$ funksiya berilib, uning x_0 nuqtadagi qiymati so‘ralgan bo‘lsin. Lekin, biz ozgina xatolikka yo‘l qo‘yib x_0 nuqta o‘rniga boshqa x qiymatni tanladik. Natijada, funksiyaning $y_0 = f(x_0)$ qiymati o‘rniga $y = f(x)$ qiymatiga ega bo‘ldik (12.1.1-rasm). Bizning Ox o‘qi bo‘yicha yo‘l qo‘ygan xatomiz Δx ni argument orttirmasi deb, Oy o‘qi bo‘yicha yo‘l qo‘ygan xatomiz Δy ni esa funksiya orttirmasi deb ataymiz. Bu orttirmalar quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \Delta x = x - x_0 & - & \text{arg}\textit{ument orttirmasi} \\ \Delta y = y - y_0 & - & \textit{funksiya orttirmasi} \end{array}}$$



12.1.1-rasm



12.1.2-rasm

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi olingan hosilasi deb argumant orttirmasi juda kichik bo‘lganda $(\Delta x \to 0)$ funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatiga teng kattalikka aytiladi. Funksiya hosilasining umumiy formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Endi, hosilaga geometrik ma’no beraylik. $y = f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 nuqtasidan funksiya grafigiga urinuvchi urinma o‘tkazaylik. Urinuvchi $(x_0; y_0)$ nuqtani mikroskop yoki lupa ostida kattalashtirib qaraganimizda urinmaning funksiya grafigini ozgina kesib o‘tganiga guvoh bo‘lamiz. Natijada, elementar argument orttirmasi dx va elementar funksiya orttirmasi dy ga ega bo‘lamiz (12.1.2-rasm).

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi olingan hosilasi geometrik nuqtai-nazardan funksiya grafigiga x_0 nuqtada o‘tkazilgan urinmaning Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensini ifodalar ekan.

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = tg\alpha}$$

12.2-Mavzu: Turli funksiyalarning hosilalarini keltirib chiqarish.

Endi yuqorida hosila uchun chiqarilgan umumiy formulaning tatbiqlari bilan tanishamiz. Bir necha oddiy funksiyalar uchun hosila tatbiqlari bilan misollar yechish tarzida tanishamiz.

Misol №1:

$y = x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$.

Misol №2:

$y=kx+b$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{k(x_0+\Delta x)-kx_0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{k\Delta x}{\Delta x}=k$.

Misol №3:

$y=x^2$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2-x_0^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=2x_0$.

Misol №4:

$y=x^3$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^3+3x_0^2\Delta x+3x_0\Delta x^2+\Delta x^3-x_0^3}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2)=3x_0^2$.

Misol №5:

$y=x^4$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish:

$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^4-x_0^4}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^4+4x_0^3\Delta x+6x_0^2\Delta x^2+4x_0\Delta x^3+\Delta x^4-x_0^4}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(4x_0^3+6x_0^2\Delta x+4x_0\Delta x^2+\Delta x^3)=4x_0^3$.

Shunday qilib, yuqorida ko‘rilgan 1–5 misollardan xulosa qilgan holda quyidagi formulalarni yozish mumkin:

$$\boxed{(kx+b)'=k,\qquad C'=0,\qquad x'=1,\qquad (x^n)'=nx^{n-1}}$$

Misol №6:

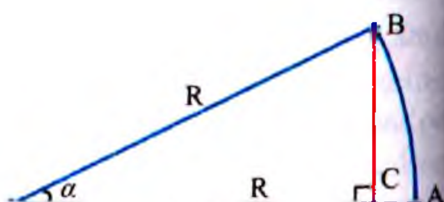
$y=\sin x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: Misolni yechishdan oldin birinchi ajoyib limit $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$ bo‘lishini isbotlaymiz. Buning uchun markazi O nuqtada bo‘lgan R radiusli $\breve{AB}$ yoy olamiz (12.2.1-rasm). Trigonometrik formulalarga asosan $\breve{AB}=\alpha^r\cdot R$ va $AC=\sin\alpha\cdot R$ bo‘ladi. Bu ikki kattaliklar nisbati

$$\frac{AC}{\breve{AB}}=\frac{\sin\alpha\cdot R}{\alpha^r\cdot R}=\frac{\sin\alpha}{\alpha^r}$$

bo‘ladi. α burchakning kichik qiymatlarida AC balandlik va $\breve{AB}$ yoy bir-biriga ustma-ust tushib tenglashib ketadi. SHuning uchun bu kattaliklarning nisbati 1 ga teng bo‘ladi. Birinchi ajoyib limit formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$



12.2.1-rasm

Endi α ning kichikroq bir necha qiymatlari uchun $\alpha^r, \sin\alpha, tg\alpha$ kattaliklarning qiymatlarini keltiramiz.

$\alpha=6^0$	$\alpha=5^0$	$\alpha=4^0$	$\alpha=3^0$
$\alpha^r=\frac{\pi}{30}=0{,}1047197$	$\alpha^r=\frac{\pi}{36}=0{,}0872665$	$\alpha^r=\frac{\pi}{45}=0{,}0698131$	$\alpha^r=\frac{\pi}{60}=0{,}0523599$
$\sin\alpha=\sin 6^0=0{,}1045284$	$\sin\alpha=\sin 5^0=0{,}0871557$	$\sin\alpha=\sin 4^0=0{,}0697564$	$\sin\alpha=\sin 3^0=0{,}0523359$
$tg\alpha=tg6^0=0{,}1051042$	$tg\alpha=tg5^0=0{,}0874887$	$tg\alpha=tg4^0=0{,}0699268$	$tg\alpha=tg3^0=0{,}0524078$

Yuqoridagi jadvaldan ko‘rib birinchi ajoyib limitning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish mumkin. Endi $y=\sin x$ funksiyaning hosilasini topa olamiz.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x_0\cdot\cos\Delta x+\cos x_0\cdot\sin\Delta x-\sin x_0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x_0\cdot 1+\cos x_0\cdot\sin\Delta x-\sin x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos x_0\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)=\cos x_0\cdot 1=\cos x_0$$

Misol №7:

$y=\cos x$ funksiyaning hosilasini toping.

__Yechish:__ Birinchi ajoyib limit xossasidan foydalanib savolga javob beramiz.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x_0+\Delta x)-\cos x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x_0\cdot\cos\Delta x-\sin x_0\cdot\sin\Delta x-\cos x_0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x_0\cdot 1-\sin x_0\cdot\sin\Delta x-\cos x_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(-\sin x_0\cdot\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)=-\sin x_0\cdot 1=-\sin x_0\,.$$

Navbatdagi trigonometrik funksiyalarga o'tish uchun ko'paytma va bo'linmaning hosilasini bilishimiz kerak bo'ladi. x erkli o'zgaruvchi orqali bog'langan turli $u=u(x)$ va $\vartheta=\vartheta(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Ushbu funksiyalar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasidan olingan hosilalar quyidagicha bo'ladi:

1.	$(u+\vartheta)'=u'+\vartheta'$	– *yig'indi*
2.	$(u-\vartheta)'=u'-\vartheta'$	– *ayirma*
3.	$(u\cdot\vartheta)'=u'\cdot\vartheta+\vartheta'\cdot u$	– *ko'paytma*
4.	$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'=\frac{u'\cdot\vartheta-\vartheta'\cdot u}{\vartheta^2}$	– *bo'linma*

__Isboti:__ Argument Δx orttirma olganda u va ϑ funksiyalar mos holda Δu va $\Delta\vartheta$ orttirmalar oladi. Argument orttirmasi nolga intilganda esa funksiya orttirmalari elementar du va $d\vartheta$ funksiya orttirmalariga aylanib ketadi, ya'ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x=dx$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=du$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta\vartheta=d\vartheta$ bo'ladi. YUqoridagi funksiyaning har birini hosila ta'rifiga asoslanib isbot qilamiz.

1) $$(u+\vartheta)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u_0+\Delta u+\vartheta_0+\Delta\vartheta)-(u_0+\vartheta_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_0+\Delta u+\vartheta_0+\Delta\vartheta-u_0-\vartheta_0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta\vartheta}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}=\frac{du}{dx}+\frac{d\vartheta}{dx}=u'+\vartheta';$$

2) $$(u-\vartheta)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{((u_0+\Delta u)-(\vartheta_0+\Delta\vartheta))-(u_0-\vartheta_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_0+\Delta u-\vartheta_0-\Delta\vartheta-u_0+\vartheta_0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u-\Delta\vartheta}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}-\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}=\frac{du}{dx}-\frac{d\vartheta}{dx}=u'-\vartheta';$$

3) $$(u\cdot\vartheta)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{((u_0+\Delta u)\cdot(\vartheta_0+\Delta\vartheta))-(u_0\cdot\vartheta_0)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u_0\cdot\vartheta_0+u_0\cdot\Delta\vartheta+\vartheta_0\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta\vartheta-u_0\cdot\vartheta_0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u+\Delta\vartheta}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u_0\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}+\vartheta_0\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}+\frac{\Delta u\cdot\Delta\vartheta}{\Delta x}\right)=$$

$$=u_0\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}+\vartheta_0\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u\cdot\Delta\vartheta}{\Delta x}=u_0\frac{d\vartheta}{dx}+\vartheta_0\frac{du}{dx}+0=u\cdot\vartheta'+\vartheta\cdot u';$$

4) $$\left(\frac{u}{\vartheta}\right)'=\left(u\cdot\vartheta^{-1}\right)'=u'\cdot\vartheta^{-1}+\left(\vartheta^{-1}\right)'\cdot u=\frac{u'}{\vartheta}-\frac{\vartheta'}{\vartheta^2}\cdot u=\frac{u'\cdot\vartheta-\vartheta'\cdot u}{\vartheta^2}.$$

Misol №8:

$y=tgx$ funksiyaning hosilasini toping.

__Yechish:__ Misolni bo'linmaning hosilasidan foydalanib echamiz.

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-(\cos x)'\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Misol №9:

$y=ctgx$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: Misolni bo'linmaning hosilasidan foydalanib echamiz.
$$(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\cdot\sin x-(\sin x)'\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Shunday qilib, 6–9 misollardan biz trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun quyidagi formulalarga ega bo'ldik:

$$\boxed{(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,\quad (tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad (ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Bundan keyingi formulalarni keltirib chiqarishda funksiya hosilasi va uning teskari funksiyasi hosilasi orasidagi bog'lanishni bilish kerak bo'ladi.

Funksiya hosilasi va uning teskari funksiyasi hosilasi orasidagi bog'lanish quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\boxed{y'(x)=\frac{1}{x'(y)}}$$

Isboti: So'ralgan munosobat $y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{x'(y)}$ bo'ladi.

Misol №10:

$y=\arcsin x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y=\arcsin x$ funksiyaning teskari funksiyasi $x=\sin y$ funksiyadir. YUqoridagi formulaga asosan $y'(x)=(\arcsin x)'_x=\frac{1}{(\sin y)'_y}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'ladi.

Misol №11:

$y=\arccos x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y=\arccos x$ funksiyaning teskari funksiyasi $x=\cos y$ funksiyadir. YUqoridagi formulaga asosan $y'(x)=(\arccos x)'_x=\frac{1}{(\cos y)'_y}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bo'ladi.

Misol №12:

$y=arctgx$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y=arct$ funksiyaning teskari funksiyasi $x=tgy$ funksiyadir. YUqoridagi formulaga asosan $y'(x)=(arctgx)'_x=\frac{1}{(tgy)'_y}=\frac{1}{1/\cos^2 y}=\cos^2 y=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ bo'ladi.

Misol №13:

$y=arcctgx$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y=arcct$ funksiyaning teskari funksiyasi $x=ctgy$ funksiyadir. YUqoridagi formulaga asosan $y'(x)=(arcctgx)'_x=\frac{1}{(ctgy)'_y}=\frac{1}{-1/\sin^2 y}=\sin^2 y=-\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ bo'ladi.

Shunday qilib, 10–13 misollardan teskari trigonometrik funksiyalarning hosilalari quyidagicha bo'lar ekan:

$$\boxed{\begin{array}{ll}(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (arctgx)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\\ (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (arcctgx)'=-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\end{array}}$$

Misol №14:

$y=e^x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: Hisob-kitoblarga asosan, $y=e^x$ funksiya grafigiga $x_0=0$ nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan aniq $\alpha=45^0$ burchak hosil qilar ekan. Demak funksiyadan o'sha nuqtadan hosila $f'(0)=tg45^0=1$ bo'ladi. Buni hosilaning ta'rifidan foydalanib $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{0+\Delta x}-e^0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$ deyish mumkin. Endi ixtiyoriy x_0 nuqtadagi hosilani aniqlaymiz.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0+\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x_0}\cdot e^{\Delta x}-e^{x_0}}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{0+\Delta x}-1}{\Delta x}=e^{x_0}\cdot 1=e^{x_0}.$$

Misol №15:

$y=e^{kx}$ funksiyaning hosilasini toping.

<u>*Yechish:*</u> Hisob-kitoblarga asosan, $y=e^x$ funksiya grafigiga $x_0=0$ nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan aniq $\alpha=45^0$ burchak hosil qilishi va o'sha nuqtadagi hosila $f'(0)=tg45^0=1$ bo'lishi hamda $f'(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{0+\Delta x}-e^0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$ ekanligi ma'lum edi. Endi shundan foydalanib $y=e^{kx}$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 nuqtadagi hosilani aniqlaymiz.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{k\cdot(x_0+\Delta x)}-e^{k\cdot x_0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{k\cdot x_0}\cdot e^{k\cdot\Delta x}-e^{k\cdot x_0}}{\Delta x}=e^{k\cdot x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{k\cdot\Delta x}-1}{\Delta x}=$$

$$=k\cdot e^{k\cdot x_0}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{k\cdot\Delta x}-1}{k\cdot\Delta x}=e^{x_0}\cdot 1=k\cdot e^{k\cdot x_0}.$$

Misol №16:

$y=a^x$ funksiyaning hosilasini toping.

<u>*Yechish:*</u> Asosiy logarifmik ayniyatga asosan $a^x=e^{\ln a^x}=e^{\ln a\cdot x}$ bo'ladi. Bundan foydalanib $(a^x)'=(e^{\ln a\cdot x})'=\ln a\cdot e^{\ln a\cdot x}=\ln a\cdot a^x$ ekanligini aniqlaymiz.

Misol №17:

$y=\ln x$ funksiyaning hosilasini toping.

<u>*Yechish:*</u> $y=\ln x$ funksiyaning teskari funksiyasi $x=e^y$ funksiyadir. Teskari funksiya xossasidan $(\ln x)'_x=\frac{1}{(e^y)'_y}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}$ ekanligini aniqlaymiz.

Misol №18:

$y=\ln(kx)$ funksiyaning hosilasini toping.

<u>*Yechish:*</u> $y=\ln(kx)$ funksiyaning teskari funksiyasi $x=\frac{1}{k}e^y$ funksiyadir. Teskari funksiya xossasidan $(\ln(kx))'_x=\frac{1}{\left(\frac{1}{k}e^y\right)'_y}=\frac{k}{e^y}=\frac{k}{kx}=\frac{1}{x}$ ekanligini aniqlaymiz.

Misol №19:

$y=\log_a x$ funksiyaning hosilasini toping.

<u>*Yechish:*</u> Logarifm xossasiga ko'ra $y=\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$ bo'ladi. Uning hosilasi esa $(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\cdot\ln a}$ bo'ladi.

Shunday qilib, 14–19 misollardan ko'rsatkichli va logarifmik funksiyalarning quyidagi hosilalariga ega bo'ldik:

$$
\begin{array}{ll}
(e^x)' = e^x, & (\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \\
(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}, & (\ln(kx))' = \dfrac{1}{x}, \\
(a^x)' = e^x \cdot \ln a, & (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}.
\end{array}
$$

Misol №20:

$y = x^x$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y = x^x$ funksiyani asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra $y = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \cdot \ln x}$ deb olish mumkin. Bundan foydalanib so'ralgan hosilani topa olamiz. Natijada, $(x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = (x \cdot \ln x)' \cdot e^{x \ln x} = (1 + \ln x) \cdot x^x$ kelib chiqadi.

Misol №21:

$y = x^{x^x}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y = x^{x^x}$ funksiyani asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra $y = x^{x^x} = e^{\ln x^{x^x}} = e^{x^x \cdot \ln x}$ deb olish mumkin. Bundan va oldingi masala natijasidan foydalanib so'ralgan hosilani topa olamiz. Natijada,

$$\left(x^{x^x}\right)' = \left(e^{x^x \cdot \ln x}\right)' = \left(x^x \cdot \ln x\right)' \cdot e^{x^x \cdot \ln x} = \left[(1 + \ln x) \cdot \ln x \cdot x^x + \frac{1}{x} \cdot x^x\right] \cdot x^{x^x} =$$

$$= \left[\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right] \cdot x^x \cdot x^{x^x}$$ kelib chiqadi.

SHunday qilib, 20–21 misollardan ushbu natijaga ega bo'ldik:

$$(x^x)' = (1 + \ln x) \cdot x^x, \qquad \left(x^{x^x}\right)' = \left[\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right] \cdot x^x \cdot x^{x^x}$$

Misol №22:

Agar $u = u(x)$ – x orqali berilgan funksiya bo'lsa, u holda $y = u^x$ murakkab funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y = u^x$ funksiyani asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra $y = u^x = e^{\ln u^x} = e^{x \cdot \ln u}$ deb olish mumkin. Bundan foydalanib so'ralgan hosilani topa olamiz. Natijada, $(u^x)' = (e^{x \cdot \ln u})' = (x \cdot \ln u)' \cdot e^{x \cdot \ln u} = \left(\dfrac{xu'}{u} + \ln u\right) \cdot u^x$ kelib chiqadi.

Misol №23:

Agar $u = u(x)$ – x orqali berilgan funksiya bo'lsa, u holda $y = u^u$ murakkab funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y = u^u$ funksiyani asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra $y = u^u = e^{\ln u^u} = e^{u \cdot \ln u}$ deb olish mumkin. Bundan va oldingi masala natijasidan foydalanib so'ralgan hosilani topa olamiz. Natijada, $(u^u)' = (e^{u \cdot \ln u})' = (u \cdot \ln u)' \cdot e^{u \cdot \ln u} = \left(u' \cdot \ln u + u \cdot \dfrac{u'}{u}\right) \cdot u^u = u'(1 + \ln u) u^u$ kelib chiqadi.

Misol №24:

Agar $u = u(x)$ va $\vartheta = \vartheta(x)$ – x orqali berilgan turli funksiyalar bo'lsa, u holda $y = u^\vartheta$ murakkab funksiyaning hosilasini toping.

Yechish: $y = u^\vartheta$ funksiyani asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra $y = u^\vartheta = e^{\ln u^\vartheta} = e^{\vartheta \cdot \ln u}$ deb olish mumkin. Bundan va oldingi masala natijasidan foydalanib so'ralgan hosilani topa olamiz. Natijada, $(u^\vartheta)' = (e^{\vartheta \cdot \ln u})' = (\vartheta \cdot \ln u)' \cdot e^{\vartheta \cdot \ln u} = \left(\vartheta' \cdot \ln u + \vartheta \cdot \dfrac{u'}{u}\right) \cdot u^\vartheta = \left(\vartheta' \cdot \ln u + \dfrac{\vartheta u'}{u}\right) u^\vartheta$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, 22–24 misollardan ushbu natijaga ega bo‘ldik:

$$\left(u^{x}\right)'=\left(x\frac{u'}{u}+\ln u\right)\cdot u^{x},\qquad \left(u^{u}\right)'=u'(1+\ln u)u^{u},\qquad \left(u^{\vartheta}\right)'=\left(\vartheta'\cdot\ln u+\frac{\vartheta u'}{u}\right)u^{\vartheta}$$

12.3-Mavzu: Murakkab funksiyaning hosilasi va unga doir misollar. Hosila jadvali.

Oldingi mavzuda biz oddiy funksiyalarning hosilalarini keltirib chiqargan edik. Ushbu mavzuda murakkab funksiyalarning hosilalarini o‘rganamiz.

11.9-mavzudan ma’lumki, murakkab funksiya quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\boxed{y=f(g(x))}$$

Masalan, $g(x)=\sin x$ va $y=2^{x}$ funksiyalar– oddiy funksiyalar, $y=2^{g(x)}=2^{\sin x}$ funksiya – murakkab funksiyadir.

Agar g funksiya x_0 nuqtada hosilaga, f funksiya esa $g(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda $y(x)=f(g(x))$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada hosilaga ega bo‘ladi va u quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\boxed{y'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)}$$

Oddiy va murakkab funksiyalar hosilalari quyidagi jadvalda keltirilgan:

1-jadval

Oddiy funksiyalar	Murakkab funksiyalar
$(kx+b)'=k$	$(ku+b)'=ku'$
$(x^{n})'=n\cdot x^{n-1}$	$(u^{n})'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^{2}}$	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^{2}}\cdot u'$
$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
$(tgx)'=\frac{1}{\cos^{2}x}$	$(tgu)'=\frac{1}{\cos^{2}u}\cdot u'$
$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^{2}x}$	$(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^{2}u}\cdot u'$
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'$
$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^{2}}}\cdot u'$
$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^{2}}$	$(arctgu)'=\frac{1}{1+u^{2}}\cdot u'$
$(arcctgx)'=-\frac{1}{1+x^{2}}$	$(arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^{2}}\cdot u'$
$(e^{x})'=e^{x}$	$(e^{u})'=e^{u}\cdot u'$
$(a^{x})'=a^{x}\cdot\ln a$	$(a^{u})'=a^{u}\cdot\ln a\cdot u'$
$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$
$(\log_{a}x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$(\log_{a}u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$

Bu jadvalda $u=u(x)$– x erkli o‘zgaruvchi orqali berilgan biror funksiya.

Endi murakkab funksiya hosilasiga doir bir necha misollar qarab chiqaylik.

Misol №1:

$y=(2x+4)^6$ murakkab funksiyaning hosilasini toping.

<u>*Yechish:*</u> Bu erda $u=2x+4$ deb belgilash kiritsak, berilgan funksiyani $y=u^6$ deb yozish mumkin. Murakkkab funksiya hosilasi $y'=\left((2x+4)^6\right)_x'=\left(u^6\right)_u'\cdot u_x'=6u^5\cdot(2x+4)_x'=12u^5=12(2x+4)^5$ bo'ladi.

Misol №2:

$y=\sqrt{x^2-5x+6}$ funksiyaning hosilasini toping.

<u>*Yechish:*</u> Bu erda $u=x^2-5x+6$ deb belgilash kiritsak, berilgan funksiyani $y=\sqrt{u}$ deb yozish mumkin. Murakkkab funksiya hosilasi $y'=\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)_x'=\left(\sqrt{u}\right)_x'=\left(\sqrt{u}\right)_u'\cdot u_x'=$ $=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\left(x^2-5x+6\right)_x'=\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+6}}$ bo'ladi.

Misol №3:

$y=\sin^2 x$ murakkab funksiyaning hosilasini toping.

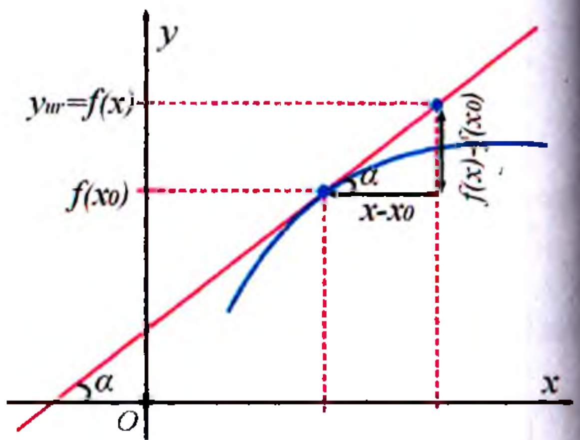
<u>*Yechish:*</u> Bu ham $u=\sin x$ deb belgilash kiritsak, berilgan funksiyani $y=u^2$ deb yozish mumkin. Murakkkab funksiya hosilasi $y'=\left(\sin^2 x\right)'=\left(u^2\right)_x'=\left(u^2\right)_u'\cdot u_x'=2u\cdot(\sin x)_x'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$ bo'ladi.

12.4-Mavzu: Hosilaning turli tadbiqlari.

Hosila yordamida funksiyaning turli xossalarini yaxshiroq o'rganish mumkin. Hosila yordamida turli matematik-fizik masalalar, mexanikada harakat, kuch va ishga oid masalalarni echiladi.Ushbu mavzuda biz hosilaning turli tatbiqlari bilan yaqindan tanishamiz.

1). Urinma tenglamasi:

Bizga $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lib, uning ixtiyoriy x_0 nuqtasidan urinma o'tkazilgan bo'lsin. Urinma to'g'ri chiziq bo'lgani uchun uning tenglamasi $y=kx+b$ ko'rinishida bo'ladi. Biz ana shu urinma tenglamasini hosila yordamida keltirib chiqaramiz. Urinish nuqtasi berilgan funksiyaga ham o'tkazilgan urinmaga ham tegishli. Shu bois, funksiyaning va urinmaning x_0 nuqtadagi qiymatlari bir xil va $f(x_0)$ ga teng bo'ladi. 12.4.1-rasmdagi to'g'ri burchakli uchburchakdan burchak tangensi



12.4.1-rasm

$tg\alpha=\frac{y_{ur}-f(x_0)}{x-x_0}$ dan $y_{ur}=tg\alpha\cdot(x-x_0)+f(x_0)$ bo'ladi. Boshqa tomondan funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi o'tkazilgan urinmaning absissa o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchak tangensiga teng, ya'ni $f'(x_0)=tg\alpha$ bo'ladi. Ana shularni hisobga olib, urinma tenglamasini quyidagicha yozamiz:

$$\boxed{y_{ur}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$$

Urinma tenglamasini $y=kx+b$ ko'rinishida yozamiz.

$$\boxed{y_{ur}=f'(x_0)x+f(x_0)-f'(x_0)x_0\,,\quad \begin{cases}k=f'(x_0)\\ b=f(x_0)-f'(x_0)x_0\end{cases}}$$

Misol №1:

$y=x^2$ funksiyaga $x_0=2$ nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasini tuzing.

Yechish: Funksiyaning $x_0 = 2$ nuqtagi qiymati $f(x_0) = f(2) = 2^2 = 4$ ga, shu nuqtadagi funksiya hosilasi esa $f'(x_0) = f'(2) = 2x = 4$ ga teng bo'ladi. Urinma tenglamasi $y_{ur} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 4 \cdot (x-2) + 4 = 4x - 4$ ko'rinishda bo'ladi.

2). Taqribiy hisoblashlar:

Urinma tenglamasi formulasidan sonlarni taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkin. Urinish nuqtasining yaqin atrofidagi funksiya qiymatini taxminan urinma to'g'ri chizig'i qiymati deb olish mumkin, ya'ni urinish nuqtasi yaqin atrofidagi egri chiziqni to'g'ri chiziq bilan almashtirish mumkin.

Ixtiriy x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiyaning grafigi nolga yaqin Δx larda urinma y_{ur} ga yaqin bo'ladi.

$$\boxed{f(x) \approx y_{ur} = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x}$$

Bu formulani ***funksiyani taqribiy hisoblash*** formulasi deyiladi.

Masalan, $\sqrt{4{,}08}$ ildizni hisoblash so'ralgan bo'lsin. Bunda funksiyani $f(x) = \sqrt{x}$ deb, nuqtani $x_0 = 4$ deb, argument orttirmasini $\Delta x = 0{,}08$ deb olsak, u holda $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ va $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ bo'ladi. Bularni hisoblasak, $f(4) = \sqrt{4} = 2$, $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ bo'ladi. Yuqoridagi formuladan foydalansak, $\sqrt{4{,}08} = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}08 = 2 + 0{,}02 = 2{,}02$ bo'ladi. Buni aniq javob $\sqrt{4{,}08} = 2{,}019901$ bilan solishtirsak, absalyut xatolik $\Delta f = 0{,}000099$ ga, nisbiy xatolik esa $\varepsilon = \frac{\Delta f}{f} = \frac{0{,}000099}{2{,}02} = 0{,}0049\%$ ga teng chiqadi. Ko'rinib turibdiki, sonlarni bu usulda taqribiy hisoblash ancha ishonchli bo'lar ekan.

Yuqoridagi formuladan darajalarni taqribiy hisoblashlarni keltirib chiqarish mumkin. Bizga $f(x) = x^n$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0) = x_0^n$ ga, kichik argument orttirma Δx $(\Delta x << x_0)$ olgandagi qiymati $f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^n$ ga hamda x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0) = n x_0^{n-1}$ teng bo'ladi. Taqribiy hisoblash formulasiga binoan,

$$\boxed{(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^n + n x_0^{n-1}\Delta x}$$

darajalarni taqribiy hisoblash formulasi kelib chiqadi. Bundan yana xususiy formulalar keltirib chiqarish mumkin.

$$\boxed{\begin{array}{c} n = 2 \text{ da } (x_0 + \Delta x)^2 \approx x_0^2 + 2x_0\Delta x \text{ bo'ladi.} \\ n = 3 \text{ da } (x_0 + \Delta x)^3 \approx x_0^3 + 3x_0^2\Delta x \text{ bo'ladi.} \\ n = 4 \text{ da } (x_0 + \Delta x)^4 \approx x_0^4 + 4x_0^3\Delta x \text{ bo'ladi.} \\ x_0 = 1 \text{ da } (1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x \text{ bo'ladi.} \end{array}}$$

Misol №2:

Ushbu $4{,}012^3$ ifodaning taqribiy qiymatini toping.

Yechish: Bu misolda $x_0 = 4$, $n = 3$, $\Delta x = 0{,}012$ desak, yuqoridagi xususiy formulaga binoan, $(4 + 0{,}012)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot 0{,}012 = 64 + 48 \cdot 0{,}012 = 64{,}576$ taqribiy hisob chiqadi. Bu taqribiy 64,576 hisob haqiqiy $4{,}012^3 = 64{,}577729728$ hisobdan juda kam farq qiladi.

Misol №3:

Ushbu $0{,}975^4$ ifodaning taqribiy qiymatini toping.

Yechish: Bu misolda $x_0 = 1$, $n = 4$, $\Delta x = -0{,}025$ desak, yuqoridagi xususiy formulaga binoan, $(1 - 0{,}025)^4 = 1 - 4 \cdot 0{,}025 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$ taqribiy hisob chiqadi. Bu taqribiy 0,9 hisob haqiqiy $0{,}975^4 = 0{,}903688$ hisobdan juda kam farq qiladi.

Taqribiy hisoblash formulasidan ildizlarni taqribiy hisoblashlarni ham keltirib chiqarish mumkin. Bizga $f(x)=\sqrt[n]{x}$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)=\sqrt[n]{x_0}$ ga, kichik argument orttirma Δx $(\Delta x << x_0)$ olgandagi qiymati $f(x_0+\Delta x)=\sqrt[n]{x_0+\Delta x}$ ga hamda x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}$ teng bo'ladi. Taqribiy hisoblash formulasiga binoan,

$$\boxed{\sqrt[n]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[n]{x_0}+\frac{\Delta x}{n\sqrt[n]{x_0^{n-1}}}}$$

ildizlarni taqribiy hisoblash formulasi kelib chiqadi. Bundan yana xususiy formulalar keltirib chiqarish mumkin.

$n=2$ da $\sqrt{x_0+\Delta x}\approx\sqrt{x_0}+\dfrac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}}$ bo'ladi.

$n=3$ da $\sqrt[3]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x_0}+\dfrac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x_0^2}}$ bo'ladi.

$n=4$ da $\sqrt[4]{x_0+\Delta x}\approx\sqrt[4]{x_0}+\dfrac{\Delta x}{4\sqrt[4]{x_0^3}}$ bo'ladi.

$x_0=1$ da $\sqrt[n]{1+\Delta x}\approx 1+\dfrac{\Delta x}{n}$ bo'ladi.

Misol №4:

Ushbu $\sqrt{1{,}006}$ ildizning taqribiy qiymatini toping.

Yechish: Bu misolda $x_0=1$, $n=2$, $\Delta x=0{,}06$ desak, yuqoridagi xususiy formulaga binoan, $\sqrt{1+0{,}006}=1+\dfrac{0{,}006}{2}=1+0{,}003=1{,}003$ taqribiy hisob chiqadi. Bu taqribiy 0,9 hisob haqiqiy $\sqrt{1{,}006}=1{,}0029955134$ hisobdan juda kam farq qiladi.

Misol №5:

Ushbu $\sqrt{24{,}84}$ ildizning taqribiy qiymatini toping.

Yechish: Bu misolda $x_0=25$, $n=2$, $\Delta x=-0{,}16$ desak, yuqoridagi xususiy formulaga binoan, $\sqrt{25-0{,}16}=\sqrt{25}-\dfrac{0{,}16}{2\sqrt{25}}=5-0{,}016=4{,}984$ taqribiy hisob chiqadi. Bu taqribiy 4,984 hisob haqiqiy $\sqrt{24{,}84}=4{,}98397431$ hisobdan juda kam farq qiladi.

Taqribiy hisoblash formulasidan teskari kattaliklarni taqribiy hisoblashlarni keltirib chiqarish mumkin. Bizga $f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$ ga, kichik argument orttirma Δx $(\Delta x << x_0)$ olgandagi qiymati $f(x_0+\Delta x)=\dfrac{1}{x_0+\Delta x}$ ga hamda x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)=-\dfrac{1}{x_0^2}$ teng bo'ladi. Taqribiy hisoblash formulasiga binoan,

$$\boxed{\frac{1}{x_0+\Delta x}\approx\frac{1}{x_0}-\frac{\Delta x}{x_0^2}}$$

Teskari ifodani taqribiy hisoblash formulasi kelib chiqadi. Bundan yana xususiy formulalar keltirib chiqarish mumkin.

$\Delta x<0$ da $\dfrac{1}{x_0-\Delta x}\approx\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{\Delta x}{x_0^2}$ bo'ladi.

$x_0=1$, $\Delta x>0$ da $\dfrac{1}{1+\Delta x}\approx 1-\Delta x$ bo'ladi.

$$\boxed{x_0 = 1,\ \Delta x < 0 \text{ da } \frac{1}{1-\Delta x} \approx 1+\Delta x \text{ bo'ladi.}}$$

Misol №6:

Ushbu $\frac{1}{1{,}005^2}$ ifodaning taqribiy qiymatini toping.

<u>*Yechish:*</u> Darajani taqribiy hisoblash bo'yicha kasr maxraji $1{,}005^2 = 1+2\cdot 0{,}005 = 1{,}01$ bo'ladi. Endi hosil bo'lgan $\frac{1}{1{,}01}$ teskari ifodada $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}01$ desak, yuqoridagi xususiy formulaga binoan, $\frac{1}{1+0{,}01} = 1-0{,}01 = 0{,}99$ taqribiy hisob chiqadi. Bu taqribiy 0,99 hisob haqiqiy $\frac{1}{1{,}005^2} = 0{,}9900745$ hisobdan juda kam farq qiladi.

Misol №7:

Ushbu $\frac{1}{1{,}98}$ ifodaning taqribiy qiymatini toping.

<u>*Yechish:*</u> Bu misolda $x_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}02$ desak, yuqoridagi xususiy formulaga binoan, $\frac{1}{1{,}98} = \frac{1}{2-0{,}02} = \frac{1}{2} + \frac{0{,}02}{2^2} = 0{,}5 + 0{,}005 = 0{,}505$ taqribiy hisob chiqadi. Bu taqribiy 0,505 hisob haqiqiy $\frac{1}{1{,}98} = 0{,}50505050...$ hisobdan juda kam farq qiladi.

3). Funksiyaning o'sishi va kamayishi:

Funksiya o'suvchi bo'lgan oraliqning istalgan nuqtasida funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan o'tkir burchak $(0 < \alpha < 90^0)$ burchak tashkil etadi. Funksiya kamayuvchi bo'lgan oraliqda esa bu burchak o'tmas $(90^0 < \alpha < 180^0)$ bo'ladi. Hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra o'suvchi oraliqda funksiya hosilasi $f'(x_0) = tg\alpha > 0$ va kamayuvchi oraliqda esa $f'(x_0) = tg\alpha < 0$ bo'ladi degan xulosa kelib chiqadi.

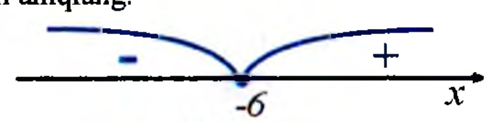
Funksiya hosilasi musbat bo'lgan oraliqlarda funksiya o'suvchi, manfiy bo'lgan oraliqlarda esa kamayuvchi bo'ladi.

$$\boxed{\begin{cases} f'(x) > 0 \ \ da \ \ funksiya \ \ o'suvchi \\ f'(x) < 0 \ \ da \ \ funksiya \ \ kamayuvchi \end{cases}}$$

Yuqoridagi ta'rif va formulalar funksiya o'sish yoki kamayishining etarli alomatidir. Funksiyaning o'sish va kamayish oralig'ini aniqlashga doir misollar echamiz.

Misol №8:

$y = x^2 + 12x - 10$ funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini aniqlang.

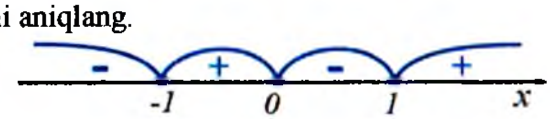


12.4.2-rasm

<u>*Yechish:*</u> Funksiya o'suvchi bo'lganda uning hosilasi $f'(x) = (x^2+12x-10)' = 2x+12 > 0$ bo'ladi. Bundan $x > -6$ bo'lganda funksiya o'suvchi degan xulosa chiqadi. Kamayuvchi orlig'i esa $x < -6$ bo'ladi. $x = -6$ nuqtada funksiya grafigi uzilishga ega emas. Shuning uchun kamayish oralig'i $x \in (-\infty;\ -6]$ va o'sish oralig'i $x \in [6;\ \infty)$ bo'ladi.

Misol №9:

$y = x^4 - 2x^2$ funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini aniqlang.



12.4.3-rasm

<u>*Yechish:*</u> Funksiya o'suvchi bo'lganda uning hosilasi $f'(x) = (x^4 - 2x^2)' = 4x^3 - 4x > 0$ bo'ladi. Bu tengsizlikni ko'paytuvchilarga ajratsak, $x(x-1)(x+1) > 0$ni olamiz. Oraliqlar usulidan foydalanib berilgan funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini aniqlaymiz (12.4.3-rasm). Funksiya hosilasi nolga aylanadigan $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ nuqtalarda funksiya grafigi uzilishga

ega emas. Shuning uchun kamayish oraliqlari $x \in (-\infty; -1] \cup [0;\ 1]$ va o‘sish oraliqlari $x \in [-1;\ 0] \cup [1;\ \infty)$ bo‘ladi.

4). Funksiyaning ekstremumlari va statsionar nuqtalari:

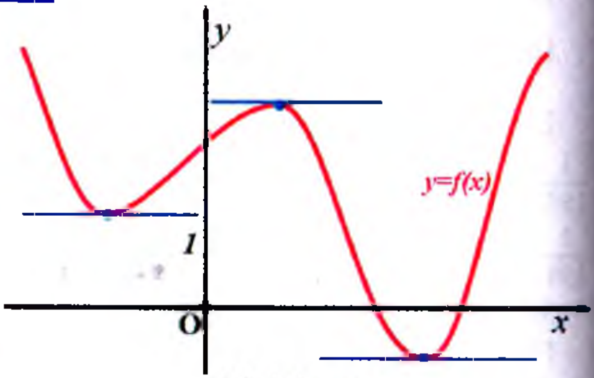
Hosilaning geometrik ma’nosiga ko‘ra funksiyaning biror nuqtadagi hosilasi funksiya grafigiga shu nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak tagensiga teng. Funksiyaning shunday nuqtalari mavjudki, bu nuqtalarda o‘tkazilgan urinma Ox o‘qiga parallel, ya’ni gorizontal bo‘ladi. Bunda funksiya hosilasi $f'(x_0) = tg\alpha = tg0^0 = 0$ bo‘ladi. Bu nuqtalar ko‘p hollarda o‘sishdan kamayishga va kamayishdan o‘sishga o‘tish chegaralarida yotgan nuqtalardir.

Funksiya hosilasi nolga teng bo‘ladigan nuqtalarga funksiyaning ekstremum nuqtalari deyiladi.

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Funksiyaning minimum va maksimum nuqtalarini bir so‘z bilan ***ekstremum nuqta*** deb ataladi. Funksiya grafigiga ekstremum nuqtalarda o‘tkazilgan urinmalar Ox o‘qiga parallel, ya’ni gorizontal bo‘ladi (12.4.4-rasm).

Agar x_0 nuqta atrofida o‘sishdan kamayishga o‘tsa, u holda bu nuqta ***maksimum nuqta***, ya’ni $x_0 = x_{max}$ bo‘ladi. Funksiyaning maksimum nuqtadagi qiymatiga ***funksiya maksimumi*** deyiladi va y_{max} deb belgilanadi.



12.4.4-rasm

Agar x_0 nuqta atrofida kamayishdan o‘sishga o‘tsa, u holda bu nuqta ***minimum nuqta***, ya’ni $x_0 = x_{min}$ bo‘ladi. Funksiyaning minimum nuqtadagi qiymatiga ***funksiya minimumi*** deyiladi va y_{min} deb belgilanadi.

Funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlashga doir misollar qarab chiqamiz.

Misol №10:

$y = x^4 - 4x^3$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlang (12.4.5-rasm).

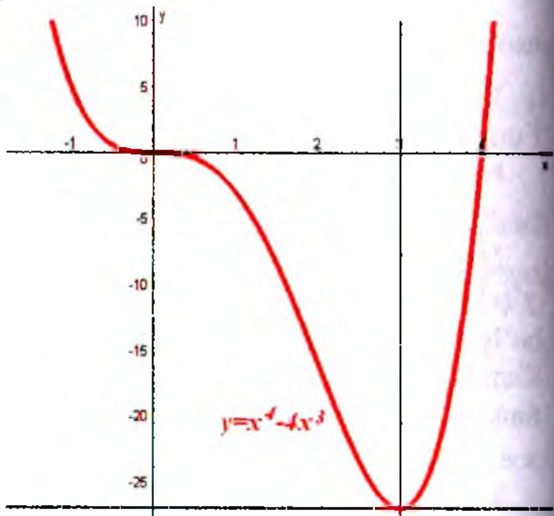
Yechish: Funksiyaning hosilasini olib, uni nolga tenglab ishlaymiz. Bunda

$$y' = (x^4 - 4x^3)' = 4x^3 - 12x^2 = 0, \rightarrow 4x^2(x-3) = 0, \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

yyechimlar kelib chiqadi. Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari

$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 = 0$, $f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 = 81 - 108 = -27$

bo‘ladi. $x_1 = 0$ nuqtada hosila nolga aylangani bilan bu ekstremum nuqta bo‘la olmaydi. Chunki, bu nuqta atrofida funksiya kamayishdan yana kamayishga o‘tmoqda, ya’ni funksiya hosilasining ishorasi o‘zgarmayapti. Funksiya hosilasi nolga aylanadigan, lekin ekstremum bo‘lmagan bunday nuqta statsionar nuqta yoki kritik nuqta hisoblanadi. $x_2 = 3$ nuqta funksiyaning



12.4.5-rasm

minimum nuqtasidir, ya’ni $x_{min} = x_2 = 3$. Chunki, bu nuqta atrofida funksiya kamayishdan o‘sishga o‘tmoqda, ya’ni funksiya hosilasining ishorasi o‘zgarayapti.

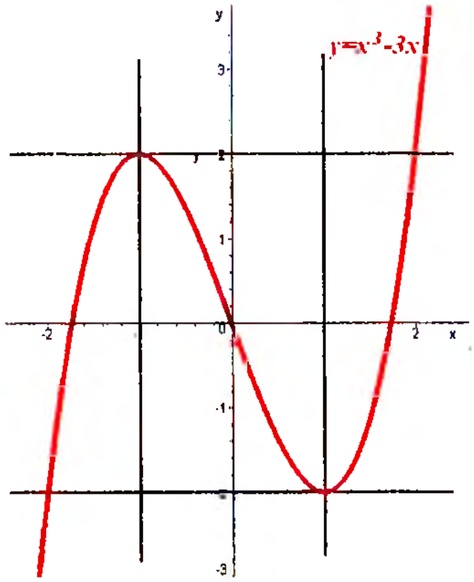
Misol №11:

$y = x^3 - 3x$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini aniqlang (12.4.6-rasm).

<u>*Yechish:*</u> Funksiyaning hosilasini olib, uni nolga tenglab ishlaymiz. Bunda

$$y' = (x^3 - 3x)' = 3x^2 - 3 = 0, \to 3(x-1)(x+1) = 0, \to \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

yyechimlar kelib chiqadi. Funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari $f(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) = 2$, $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 = -2$ bo'ladi. $x_1 = -1$ nuqta funksiyaning maksimum nuqtasidir, ya'ni $x_{max} = x_1 = -1$. Chunki, bu nuqta atrofida funksiya o'sishdan kamayishga o'tmoqda, ya'ni funksiya hosilasining ishorasi o'zgarayapti. $x_2 = 1$ nuqta funksiyaning minimum nuqtasidir, ya'ni $x_{min} = x_2 = 1$. Chunki, bu nuqta atrofida funksiya kamayishdan o'sishga o'tmoqda, ya'ni funksiya hosilasining ishorasi o'zgarayapti.



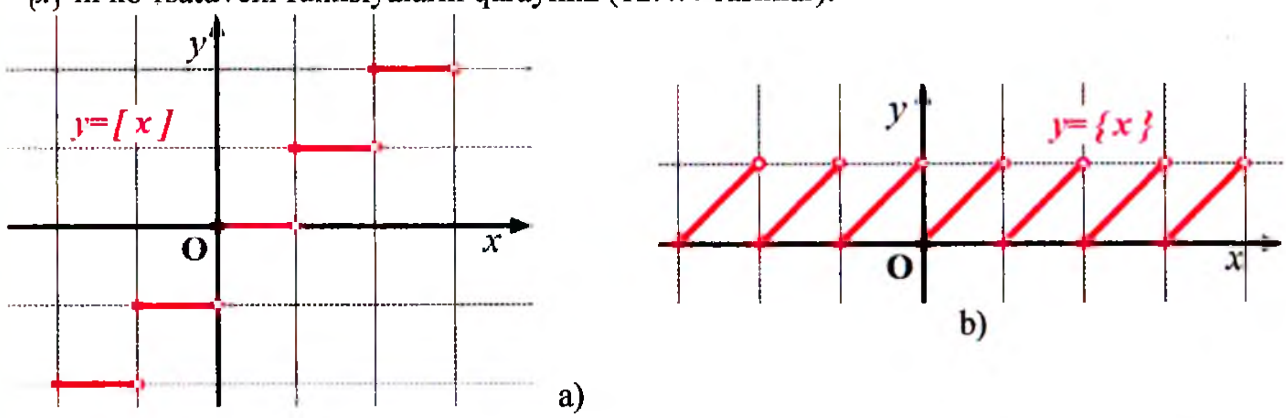
12.4.6-rasm

Shunday qilib nuqta ekstremum bo'lishi uchun 2ta shart bajarilishi kerak ekan:

a) bu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo'lishi kerak;

b) bu nuqta atrofida funksiya hosilasining ishorasi o'zgarishi kerak.

Shu paytgacha uzluksiz funksiyalar va ularning hosilasi bilan tanishdik. Endi uzilishga ega bo'lgan holni ham qarab ko'raylik. Misol tariqasida sonning butun qismi $y = [x]$ va kasr qismi $y = \{x\}$ ni ko'rsatuvchi funksiyalarni qaraymiz (12.4.4-rasmlar).



12.4.7-rasm

12.4.7-a,rasmda $x = Z$ butun sonlarda funksiya uzilishga ega va bu nuqtalarda funksiya differensiallanuvchi bo'la olmaydi. Funksiya grafigi uzuq-uzuq gorizontal chiziqlardan iborat. Shuning uchun butun sonlardan boshqa barcha nuqtalarda funksiya hosilasi $f'(x) = tg0^0 = 0$ bo'ladi.

12.4.7-b,rasmda ham $x = Z$ butun sonlarda funksiya uzilishga ega va bu nuqtalarda funksiya differensiallanuvchi bo'la olmaydi. Funksiya grafigi 45^0 qiyalikdagi uzuq-uzuq chiziqlardan iborat. Shuning uchun butun sonlardan boshqa barcha nuqtalarda funksiya hosilasi $f'(x) = tg45^0 = 1$ bo'ladi. Bu funksiya davriy bo'lib, uning davri $T = 1$ga teng, ya'ni $\{x+1\} = \{x\}$ yoki $\{x+n\} = \{x\}$ bo'ladi. Bu erda $n-$butun son.

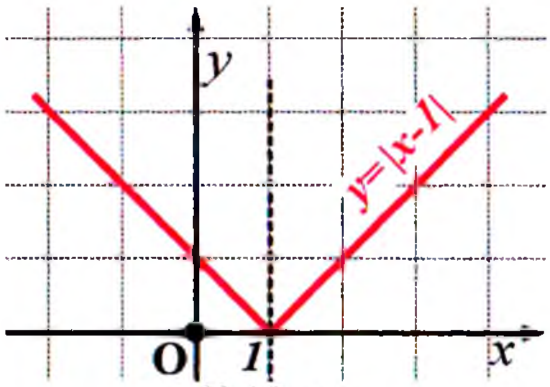
Shunday funksiyalar borki, ular berilgan nuqtada uzluksiz, lekin differensiallanuvchi emas, ya'ni hosilasi mavjud emas. Misol tariqasida $f(x) = |x-1|$ funksiyani qaraylik (12.4.8-rasm). Bu funksiya moduldan yechish qoidasi bo'yicha

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 0 \text{ bo'lsa} \\ -x+1, & x < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

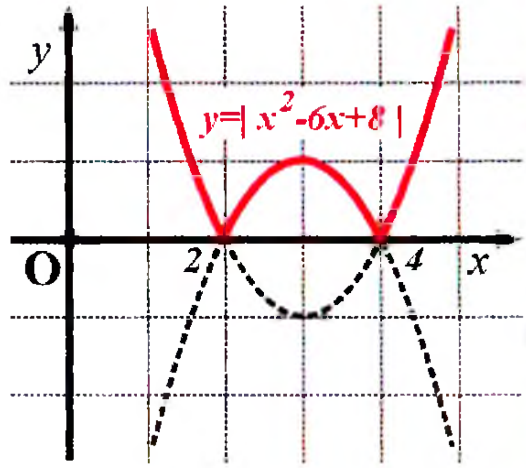
bo'ladi. Funksiya hosilasi esa

$$f'(x)=(|x-1|)'=\begin{cases}(x-1)'=1, & x>0 \text{ bo'lsa}\\(-x+1)'=-1, & x<0 \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

bo‘ladi. Berilgan $f(x)=|x-1|$ funksiya $x=1$ nuqtada hosilaga ega emas. Rasmdan ham ko‘rinib turibdiki, $x=1$ nuqtada funksiya grafigi singan, buklangan. Bunday nuqtalarda funksiya differensiallanuvchi bo‘lmaydi, hosilaga ega emas.



12.4.8-rasm



12.4.9-rasm

Xuddi yuqoridagi kabi 12.4.9-rasmda ham $f(x)=|x^2-6x+8|$ funksiyani ham qarab ko‘raylik. Moduldan yechish qoidasi bo‘yicha

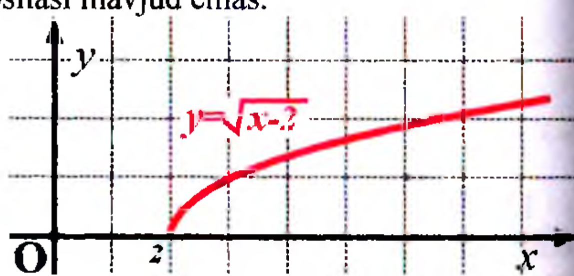
$$f(x)=|x^2-6x+8|=\begin{cases}x^2-6x+8, & x\le 2,\ x\ge 4 \text{ bo'lsa}\\-x^2+6x-8, & 2<x<4 \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

bo‘ladi. Funksiya hosilasi esa

$$f'(x)=(|x^2-6x+8|)'=\begin{cases}(x^2-6x+8)'=2x-6, & x<2,\ x>4 \text{ bo'lsa}\\(-x^2+6x-8)'=-2x+6, & 2<x<4 \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

bo‘ladi. $f(x)=|x^2-6x+8|$ funksiya $x_1=2$ va $x_2=4$ nuqtalarda buklanishlar bo‘lgani uchun, bu nuqtalarda funksiya differensiallanuvchi emas va hosilasi mavjud emas.

Ushbu $f(x)=\sqrt{x-2}$ funsiyani ham qarab chiqaylik (12.4.10-rasm). Bu funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)=[2;\ \infty)$ bo‘lsa-da, lekin bu funksiya $x=2$ nuqtada hosilaga ega emas va bu nuqtada differensiallanuvchi ham bo‘la olmaydi. Chunki, bu funksiya hosilasi $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}$ bo‘lib,



12.4.10-rasm

bu $x\in(2;\ \infty)$ oraliqda o‘rinlidir.

Yuqorida batafsil tanishib chiqqan ekstremum shartlari va hosilaning mavjud emaslik hollarini birlashtirib ushbu qoidani keltiramiz:

Funksiyaning hosilasi nolga aylanadigan yoki hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalarni funksiyaning statsionar nuqtalari yoki funksiyaning kritik nuqtalari deyiladi.

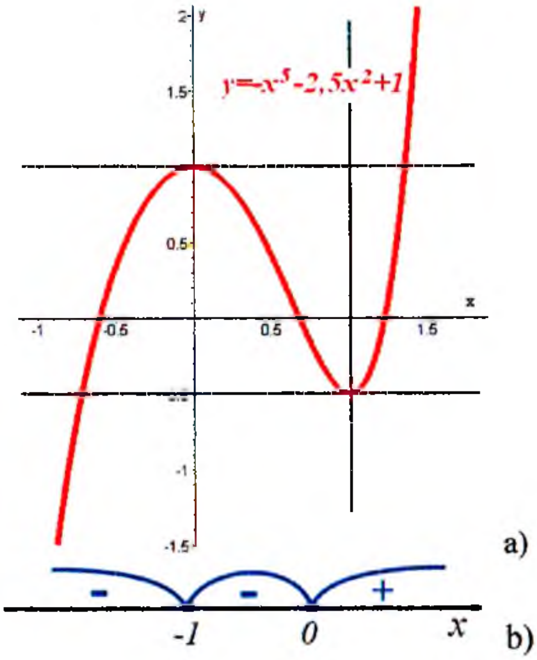
Ekstremum nuqta statsionar nuqtadir, lekin statsionar nuqta ekstremum nuqta bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin.

5). Hosila yordamida funksiya grafiklarini yasash:

Hosila yordamida ixtiyoriy funksiyani to‘la tekshirish va uning grafigini qurish mumkin. Fikrimizni ushbu misolda isbotlaymiz.

Misol №12:

$f(x) = -x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 1$ funksiyaning grafigini yasang.



12.4.11-rasm

Yechish: Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f) = (-\infty;\ \infty)$ bo'lib, bu oraliqning barcha nuqtalarida berilgan funksiya differensiallanuvchidir. Funksiya hosilasi $f'(x) = -5x^4 - 5x$ ga teng bo'lib, $f'(x) = -5x^4 - 5x = 0$ deb ishlasak, funksiya $x_1 = -1$ va $x_2 = 0$ nuqtalarda hosila nolga aylanadi. Lekin hali bu nuqtalarning maksimum yoki minimum nuqta ekanligini bilmaymiz. Buning uchun avval funsiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini aniqlab olishimiz kerak. O'sish va kamayish oraliqlarini aniqlash uchun

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \ da\ \uparrow \\ f'(x) < 0 \ da\ \downarrow \end{cases}$$

shartdan foydalanamiz. Bunda

$$f'(x) = -5x^4 - 5x > 0 \ da\ \uparrow, \quad \Rightarrow -5x(x+1)(x^2 - x + 1) > 0 \ da\ \uparrow, \quad \Rightarrow \quad x(x+1) < 0 \ da\ \uparrow$$

chiqqan natijani oraliqlar usuliga qo'ysak, o'sish oralig'i $x \in [-1;\ 0]$ va kamayish oralig'i $x \in (-\infty;\ -1] \cup [0;\ \infty)$ bo'ladi (12.4.11-a,rasm). Hosila nol bo'lgan nuqtalardagi funksiya qiymatlarini topamiz.

$$f(-1) = -(-1)^5 - \frac{5}{2}\cdot(-1)^2 + 1 = 1 - \frac{5}{2} + 1 = -\frac{1}{2}, \quad f(0) = -0^5 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 + 1 = 1$$

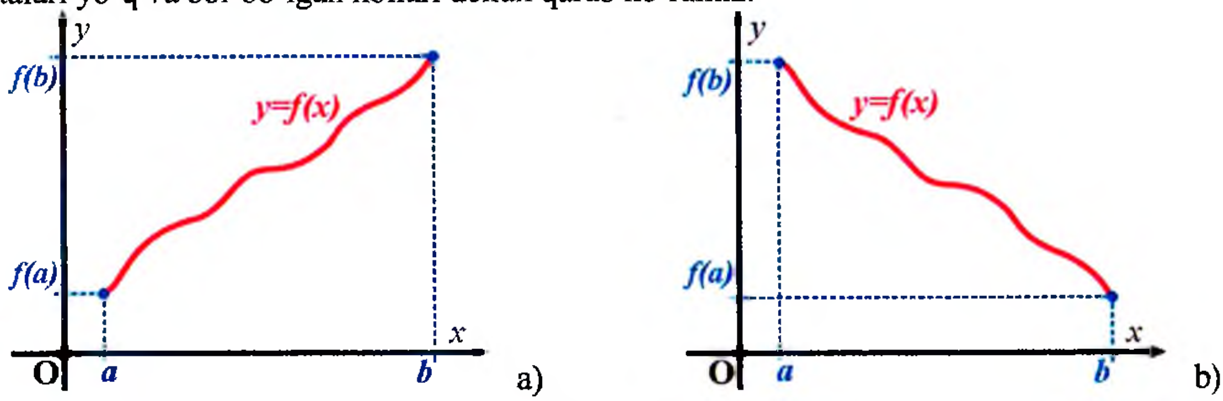
Topilgan kattaliklarga asoslanib jadval tuzamiz.

x	$(-\infty;\ -1)$	-1	$(-1;\ 0)$	0	$(0;\ \infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\downarrow$	$-\frac{1}{2}$	$\uparrow$	1	$\downarrow$

Jadvaldan foydalanib, $x_{min} = -1$, $y_{min} = -\frac{1}{2}$ va $x_{max} = 0$, $y_{max} = 1$ ekanini aniqlash mumkin. Jadval asosida qurilgan grafik 12.4.11-b,rasmda tasvirlangan.

6). Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari:

Bizdan $[a;\ b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiyaning shu kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlash so'ralgan bo'lsin. Savolni funksiyaning $[a;\ b]$ kesmada kritik nuqtalari yo'q va bor bo'lgan hollari uchun qarab ko'ramiz.



12.4.12-rasm

Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada kritik nuqtalariga ega bo'lmasa, u holda berilgan funksiya shu oraliqda yoki faqat o'suvchi (12.4.12-a,rasm) yoki faqat kamayuvchi (12.4.12-b,rasm) bo'ladi. Bu holda $f(x)$ funksiyaning $[a;\ b]$ kesmàdagi eng katta va eng kichik qiymatlari kesma uchlaridagi qiymatlarga, ya'ni $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlarga teng bo'ladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a;\ b]$ kesmada chekli sondagi kritik nuqtalariga ega bo'lsa, u holda berilgan funksiyaning bu oraliqda o'sib kamayadigan yoki kamayib o'sadigan chekli sondagi oraliqlari bo'ladi. Bu holda $f(x)$ funksiyaning $[a;\ b]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning kesma chegaralaridagi $f(a)$ va $f(b)$ hamda kritik nuqtalardagi qiymatlari orasidan taqqoslash orqali aniqlanadi.

Endi funksiyaning eng kiatta va eng kichik qiymatlarini aniqlashga doir bir necha misollar echaylik.

Misol №13:

$f(x)=x^4-6x^2-4$ funksiyaning $[-1;\ 1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlang.

<u>Yechish:</u> Funksiyaning kesma chegaralaridagi qiymatlari $f(-1)=1-6-4=-9$, $f(1)=1-6-4=-9$ bo'ladi. Endi funksiya hosilasi nolga aylanadigan nuqtalarni aniqlaymiz. Unga ko'ra

$f'(x)=\left(x^4-6x^2-4\right)'=4x^3-12x=0,\ \to\ x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0,\ \begin{cases} x_1=-\sqrt{3} \\ x_2=0 \\ x_3=\sqrt{3} \end{cases}$ bo'ladi. Bu uchta nuqtadan faqat $x_2\in[-1;\ 1]$ bo'ladi. Shuning uchun funksiyaning ana shu $x_2=0$ kritik nuqtasidagi qiymatini topamiz, qolgan ikkitasini hisoblash shart emas. $f(0)=-4$. SHunday qilib, berilgan funksiyaning $[-1;\ 1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari quyidagilar bo'lar ekan:

$$\max_{[-1;\ 1]} f(x)=f(0)=-4,\quad \min_{[-1;\ 1]} f(x)=f(-1)=f(1)=-9$$

Misol №14:

$f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$ funksiyaning $[-4;\ -1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini aniqlang.

<u>Yechish:</u> Funksiyaning kesma chegaralaridagi qiymatlari $f(-4)=\dfrac{16+4}{-4}=-5$, $f(-1)=\dfrac{1+4}{-1}=-5$ bo'ladi. Endi funksiya hosilasi nolga aylanadigan nuqtalarni aniqlaymiz. Unga ko'ra $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+4}{x}\right)'=\left(x+\dfrac{4}{x}\right)'=1-\dfrac{4}{x^2}=0,\ \to\ \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=2 \end{cases}$ bo'ladi. Bu ikkita nuqtadan faqat $x_1\in[-1;\ 1]$ bo'ladi. Shuning uchun funksiyaning ana shu $x_1=-2$ kritik nuqtasidagi qiymatini topamiz, qolgan ikkinchisini hisoblash shart emas. $f(-2)=\dfrac{4+4}{-2}=-4$. Shunday qilib, berilgan funksiyaning $[-4;-1]$ kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari quyidagilar bo'lar ekan:

$$\max_{[-1;\ 1]} f(x)=f(-2)=-4,\quad \min_{[-1;\ 1]} f(x)=f(-4)=f(-1)=-5$$

Misol №15:

Ikkita musbat sonning yig'indisi a ga teng. Agar bu sonlarning kublarining yig'indisi eng kichik bo'lsa, bu sonlarni toping.

<u>Yechish:</u> Aytaylik, qandaydir m va n musbat sonlarining yig'indisi $m+n=a$ bo'lsin. Bu sonlar kublarining yig'indisini $m^3+n^3=(m+n)\left(m^2-mn+n^2\right)=(m+n)\left((m+n)^2-3mn\right)=$ $=(m+n)^3-3mn(m+n)=a^3-3m(a-m)a=-3ma^2+3m^2a+a^3$ bir noma'lumli ko'rinishga keltirdik. Buni esa $g(m)=3am^2-3a^2m+a^3$ bir o'zgaruvchili kvadrat funksiya deb olishimiz mumkin. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi hosilalari nolga aylanishini hisobga olib, $g'(m)=\left(3am^2-3a^2m+a^3\right)'_m=6am-3a^2=0,\to\ m=\dfrac{a}{2}$ ni topamiz. Bundan $n=a-m=\dfrac{a}{2}$ va

$g_{\min}=m^3+n^3=\left(\dfrac{a}{2}\right)^3+\left(\dfrac{a}{2}\right)^3=\dfrac{a^3}{4}$ kelib chiqadi. Demak, $m=n=\dfrac{a}{2}$, $g_{\min}=m^3+n^3=\dfrac{a^3}{4}$ bo'lar ekan.

Misol №16:

Ikkita musbat sonning ko'paytmasi a ga teng. Agar bu sonlarning yig'indisi eng kichik bo'lsa, bu sonlarni toping.

Yechish: Aytaylik, qandaydir m va n musbat sonlarining ko'paytmasi $m\cdot n=a$ bo'lsin. Bu sonlar yig'indisini $m+n=m+\dfrac{a}{m}$ bir noma'lumli ko'rinishga keltirdik. Buni esa $g(m)=m+\dfrac{a}{m}$ bir o'zgaruvchili funksiya deb olishimiz mumkin. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi hosilalari nolga aylanishini hisobga olib, $g'(m)=\left(m+\dfrac{a}{m}\right)'_m=1-\dfrac{a}{m^2}=0,\ \to\begin{cases}m_1=-\sqrt{a}\\ m_2=\sqrt{a}\end{cases}$ ni topamiz. Bundan $m=m_2=\sqrt{a}$ musbat yechimni tanlab, undan $n=\dfrac{a}{m}=\sqrt{m}$ ni aniqlaymiz. Bu sonlar yig'indisi eng kamida $g_{min}=m+n=2\sqrt{a}$ bo'lishi kelib chiqadi.

Misol №17:

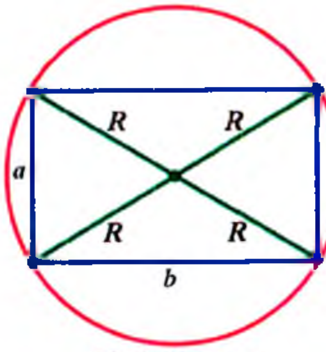
Agar $a\le x\le y\le z\le t\le b$ tengsizlikda $a,b-$ sonlar va $x,y,z,t-$ o'zgaruvchilar bo'lsa, u holda $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{t}$ ifodaning eng kichik qiymatini aniqlang.

Yechish: Bizga ma'lumki, kasrning natijasi kichik bo'lishi uchun mumkin qadar uning suratini kichik qilib, maxrajini esa katta qilib tanlash kerak. Shundan kelib chiqqan holda $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{t}$ ifodada $x\to a,\ t\to b,\ y=z$ deb yozamiz. Natijada, $\dfrac{x}{y}+\dfrac{z}{t}=\dfrac{a}{y}+\dfrac{y}{b}$ bir noma'lumli ko'rinishga keltirdik. Buni esa $g(y)=\dfrac{a}{y}+\dfrac{y}{b}$ bir o'zgaruvchili funksiya deb olishimiz mumkin. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi hosilalari nolga aylanishini hisobga olib, $g'(y)=\left(\dfrac{a}{y}+\dfrac{y}{b}\right)'_y=-\dfrac{a}{y^2}+\dfrac{1}{b}=0,\ \to\ y^2=ab,\ \to\begin{cases}y_1=-\sqrt{ab}\\ y_2=\sqrt{ab}\end{cases}$ ni topamiz. Bundan $y=y_2=\sqrt{ab}$ musbat yyechimni tanlab, undan esa $g_{min}=g(\sqrt{ab})=\dfrac{a}{\sqrt{ab}}+\dfrac{\sqrt{ab}}{b}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{a}{b}}=2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ natija kelib chiqadi.

Misol №18:

Radiusi R bo'lgan doiraga ichki chizilgan barcha to'g'ri to'rtburchaklar ichidan eng katta yuzaga ega bo'lganini toping (12.4.13-rasm).

Yechish: To'g'ri to'rtburchakning a,b tomonlari o'zgaruvchan bo'lib, unga tashqi chizilgan aylana radiusi R o'zgarmas bo'ladi. Pifagor teoremasiga asosan $a^2+b^2=4R^2,\ b=\sqrt{4R^2-a^2}$ bo'ladi. To'g'ri to'rtburchak yuzasini $S=ab=a\cdot\sqrt{4R^2-a^2}$ bir noma'lumli ko'rinishga keltirdik. Buni esa $S(a)=a\cdot\sqrt{4R^2-a^2}$ bir o'zgaruvchili funksiya deb olishimiz mumkin. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi hosilalari nolga aylanishini hisobga olib, $S'(a)=\left(a\cdot\sqrt{4R^2-a^2}\right)'_a=1\cdot\sqrt{4R^2-a^2}-\dfrac{a}{\sqrt{4R^2-a^2}}\cdot a=0,\ \to\ 4R^2-2a^2=0,\ \to$



12.4.13-rasm

$\to\ a=\sqrt{2}R$ ni topamiz. Bundan $b=\sqrt{4R^2-a^2}=\sqrt{4R^2-2R^2}=\sqrt{2}R$ ni aniqlaymiz. Eng katta yuza $S_{max}=S(\sqrt{2}R)=a\cdot\sqrt{4R^2-a^2}=\sqrt{2}R\cdot\sqrt{4R^2-2R^2}=2R^2$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, tanlangan to'g'ri to'rtburchaklar ichidan eng katta yuzaga ega bo'lgani kvadrat ekan.

Misol №19:

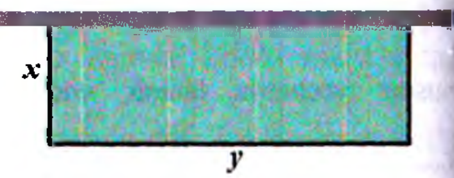
Perimetri $2p$ bo'lgan barcha to'g'ri to'rtburchaklar ichidan diagonali eng kichik bo'lganini toping.

Yechish: Tomonlar yig'indisi perimetrga tengligidan $2p=2a+2b,\ a+b=p$ ni olamiz. Pifagor teoremasiga ko'ra diagonalni $d=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(p-a)^2}=\sqrt{a^2+p^2-2pa+a^2}=\sqrt{2a^2-2pa+p^2}$ bir noma'lumli ko'rinishga keltirdik. Buni esa $g(a)=\sqrt{2a^2-2pa+p^2}$ bir o'zgaruvchili funksiya deb olishimiz mumkin. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi hosilalari nolga aylanishini hisobga olib, $g'(a)=\left(\sqrt{2a^2-2pa+p^2}\right)'_a=\dfrac{2a-p}{\sqrt{2a^2-2pa+p^2}}=0,\ \to\ a=\dfrac{p}{2}$ ni topamiz. Bundan $b=p-a=\dfrac{p}{2}$ ni aniqlaymiz.

Demak, $a=b=\frac{p}{2}$ bo‘lgani uchun bu to‘g‘ri to‘rtburchak kvadrat ekanligi kelib chiqadi. Eng kichik uzunlikdagi diagonal $d_{\min}=d\left(\frac{p}{2}\right)=\sqrt{2\left(\frac{p}{2}\right)^2-2p\left(\frac{p}{2}\right)+p^2}=\sqrt{\frac{p^2}{2}}=\frac{p}{\sqrt{2}}$ kelib chiqadi.

Misol №20:

Cho‘pon bozordan uzunligi $\ell=60\,m$ bo‘lgan setka sotib oldi. Cho‘pon qo‘shnining devoridan foydalanib, uch tomoniga setka o‘radi va to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi qo‘raxona yasadi. Qo‘raxonanaing eni va bo‘yi qanday bo‘lganda uning ichiga eng ko‘p qo‘y sig‘adi? Bunda ko‘pi bilan qancha yuza hosil qilish mumkin (12.4.14-rasm)?



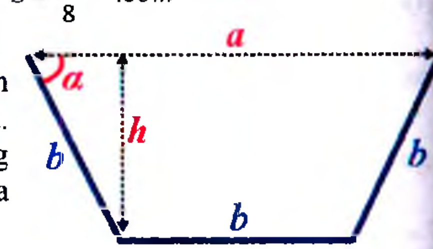
12.4.14-rasm

<u>*Yechish:*</u> To‘g‘ri to‘rtburchakning enini x, bo‘yini y deb belgilasak, $\ell=2x+y, \rightarrow y=\ell-2x$ bo‘ladi. To‘rtburchak yuzasini $S=xy=x(\ell-2x)=-2x^2+\ell x$ bir noma’lumli ko‘rinishga keltirdik. Buni esa $S(x)=-2x^2+\ell x$ bir o‘zgaruvchili funksiya deb olishimiz mumkin. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi hosilalari nolga aylanishini hisobga olib, $S'(x)=\left(-2x^2+\ell x\right)'_x=-4x+\ell=0, \rightarrow x=\frac{\ell}{4}$ ni topamiz.

Bundan $y=\ell-2x=\frac{\ell}{2}$ ni aniqlaymiz. Eng katta yuza $S_{\max}=S\left(\frac{\ell}{4}\right)=-2x^2+\ell x=-2\left(\frac{\ell}{4}\right)^2+\ell\left(\frac{\ell}{4}\right)=-\frac{\ell^2}{8}+\frac{\ell^2}{4}=\frac{\ell^2}{8}$ bo‘ladi. Shunday qilib, so‘ralgan kattaliklar $x=\frac{\ell}{4}=15\,m,\ \ y=\frac{\ell}{2}=30\,m,\ \ S=\frac{\ell^2}{8}=450\,m^2$ bo‘ladi.

Misol №21:

Katta asosi ochiq bo‘lgan tarnovning kesimi kichik asosi va yon tomonlari b ga teng bo‘lgan teng yonli trapetsiyadan iborat. Tarnovning katta asosidagi o‘tkir burchagi qanday bo‘lganda uning suv o‘tkazish qobiliyati eng katta bo‘ladi? Eng kattta yuza nimaga teng (12.4.13-rasm)?



12.14.15-rasm

<u>*Yechish:*</u> Trapetsiyaning katta asosi $a=b+2b\cos\alpha=b(1+2\cos\alpha)$ ga, balandligi $h=b\sin\alpha$ ga, yuzasi esa $S=\frac{a+b}{2}h=\frac{b(1+2\cos\alpha)+b}{2}\cdot b\sin\alpha=(1+\cos\alpha)\sin\alpha\cdot b^2$ ga teng bo‘ladi. Buni $S(b)=(1+\cos\alpha)\sin\alpha\cdot b^2$ bir o‘zgaruvchili funksiya deb olishimiz mumkin. Funksiyaning ekstremum nuqtalardagi hosilalari nolga aylanishini hisobga olib,

$$S'(b)=b^2\cdot\left[(1+\cos\alpha)\sin\alpha\right]'_\alpha=\left[(1+\cos\alpha)'\sin\alpha+(\sin\alpha)'(1+\cos\alpha)\right]\cdot b^2=\left[-\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha\right]\cdot b^2=$$

$$=\left[\cos\alpha+\cos2\alpha\right]\cdot b^2=0, \rightarrow\ 2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0, \rightarrow\ D=1+8=9, \rightarrow \left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_1=\frac{-1-3}{4}=-1\\ \cos\alpha_2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$$ javoblardan

$\cos\alpha=\cos\alpha_2=\frac{1}{2}$ musbat javobni olamiz. Bundan $\alpha=60^0$ ekanligi kelib chiqadi. Trapetsiyaning eng katta yuzasi $S_{\max}=S\left(60^0\right)=(1+\cos\alpha)\sin\alpha\cdot b^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot b^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot b^2$ kelib chiqadi.

7). Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlari, burilish nuqtasi:

Funksiyalarning xossalarini o‘rganish va ularning grafiklarini qurishda ikkinchi tartibli hosila alohida o‘rin tutadi. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasining ishorasiga va nolligiga qarab funksiyaning ba’zi xossalari aytib beriladi. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlari hamda burilish nuqtalari ana shular jumlasidandir.

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi musbat bo‘lgan oraliqlarini botiqlik oraliqlari deyiladi. Botiqlik oralig‘ida funksiya grafigi nuqtalari grafikka o‘tkazilgan urinma nuqtalaridan yuqorida yotadi.

Botiqlik sharti quyidagicha bo‘ladi:

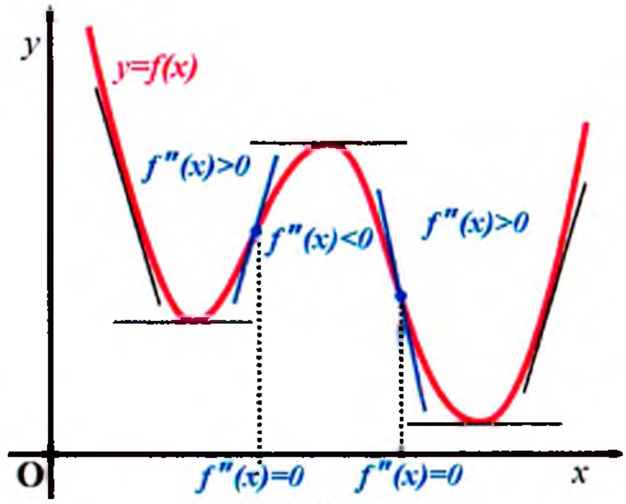
$$\boxed{f''>0}$$

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi manfiy bo'lgan oraliqlarini qavariqlik oraliqlari deyiladi. Qavariqlik oralig'ida funksiya grafigi nuqtalari grafikka o'tkazilgan urinma nuqtalaridan pastda yotadi.

Qavariqlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{f'' < 0}$$

Botiqlik va qavariqlik oraliqlarining biridan boshqasiga o'tish chegarasida funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasining ishorasi o'zgaradi, ya'ni bu nuqtada ikkinchi tartibli hosila nolga aylanadi.



12.4.16-rasm

Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi nolga aylanadigan nuqtani burilish nuqtasi deyiladi. Burilish nuqtasida urinma grafikning tagidan tepasiga yoki aksincha tepasidan tagiga o'tadi.

Burilish sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{f'' = 0}$$

12.4.16-rasmda funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlari hamda burilish nuqtalari ko'rsatilgan.

Misol №22:

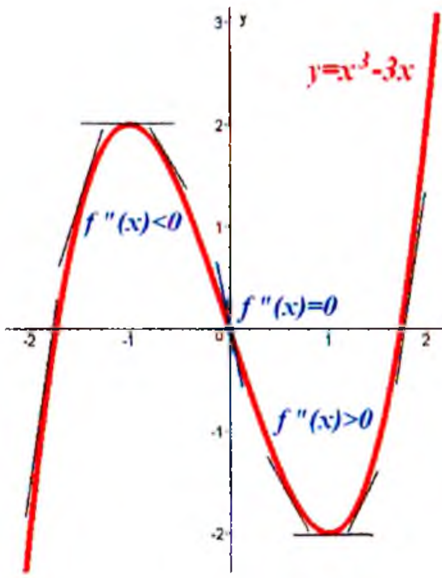
$f(x) = x^3 - 3x$ funksiyaning botiqlik, qavariqlik oraliqlari hamda burilish nuqtalarini aniqlang (12.4.17-rasm).

<u>*Yechish:*</u> Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x) = (x^3 - 3x)'' = (3x^2 - 3)' = 6x$ bo'ladi. Osongina aniqlash mumkinki, bunda burilish nuqtasi $x = 0$ nuqta bo'lib, qavariqlik oralig'i $x < 0$ va botiqlik oralig'i $x > 0$ bo'ladi.

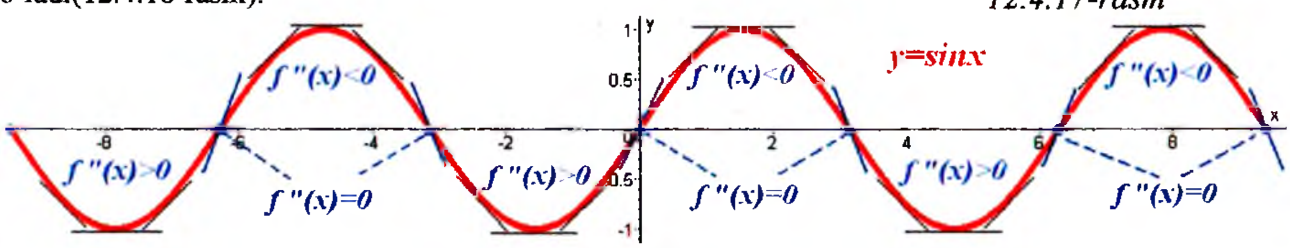
Misol №23:

$f(x) = \sin x$ funksiyaning botiqlik, qavariqlik oraliqlari hamda burilish nuqtalarini aniqlang.

<u>*Yechish:*</u> Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x) = (\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$ bo'ladi. $\sin x = 0$ bo'ladigan $x = \pi n$ nuqtalar funksiyaning burilish nuqtalari bo'ladi. $\sin x < 0$ bo'lganda $f''(x) > 0$ bo'ladi va bunda botiqlik oraliqlari kelib chiqadi. Shuningdek, $\sin x > 0$ bo'lganda $f''(x) < 0$ bo'ladi va bunda qavariqlik oraliqlari kelib chiqadi. Botiqlik oralig'i $x \in (-\pi + 2\pi n;\ 2\pi n)$ va qavariqlik oralig'i $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n)$ bo'ladi(12.4.18-rasm).



12.4.17-rasm



12.4.18-rasm

13-BOB: BOSHLANG‘ICH FUNKSIYA VA UNING QO‘LLANILISHI

Biz oldingi bobda hosila va uning tatbiqlari bilan tanishib chiqgan edik. Ushbu bobda esa hosilaga teskari jarayon – boshlang‘ich funksiya va uning turli tatbiqlari bilan tanishamiz.

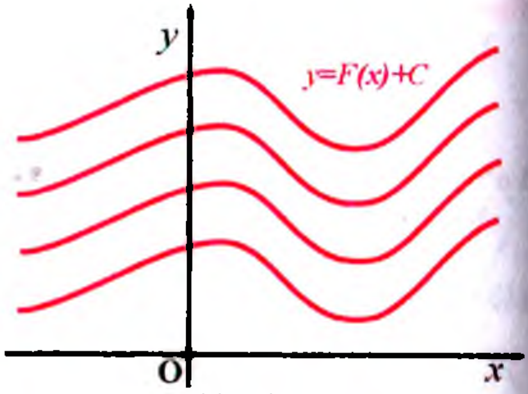
13.1-Mavzu: Boshlang‘ich funksiya tushunchasi.

Biror aniqlangan oraliqdagi barcha x lar uchun $F'(x)=f(x)$ bo‘lsa, u holda shu oraliqda $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning ***boshlang‘ich funksiyasi*** deyiladi.

Boshlang‘ich funksiya hosilaga teskari jarayondir, ya’ni u hosila olishdan oldingi holatni anglatadi. Masalan, $F(x)=\sin x$ funksiya $f(x)=\cos x$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasidir. Chunki, $(\sin x)'=\cos x$ bo‘ladi.

Ushbu $F(x)=x^3$, $F(x)=x^3+5$, $F(x)=x^3-2$ funksiyalarining hosilasi yagona $f(x)=3x^2$ funksiya bo‘ladi. Chunki, uchala funksiya hosilasi ham $F'(x)=(x^3)'=3x^2$, $F'(x)=(x^3+5)'=3x^2$, $F'(x)=(x^3-2)'=3x^2=f(x)$ bo‘ladi. Bundan shunday xulosa kelib chiqadi:

$F(x)$ funksiya biror aniqlangan oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang‘ich funksiyalari $F(x)+C$ ko‘rinishda yoziladi. Bu erda: C – o‘zgarmas son. Demak, boshlang‘ich funksiyalar to‘plami Oy o‘qi bo‘ylab siljitilgan har xil kesishmaydigan bir xil egri chiziqlar bo‘lar ekan (13.1.1-rasm). O‘zgarmas son C ni tanlash bilan cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiyalardan berilgan nuqta orqali o‘tuvchi bitta boshlang‘ich funksiyani tanlagan bo‘lamiz.



13.1.1-rasm

Misol №1:

$f(x)=x^2$ funksiyaning $M(3;\,6)$ nuqtadan o‘tuvchi boshlang‘ich funksiyasini toping.

<u>Yechish:</u> Umumiy boshlang‘ich funksiya $F(x)=\frac{x^3}{3}+C$ bo‘ladi. $M(3;\,6)$ nuqtani boshlang‘ich funksiyaga qo‘yilsa, o‘zgarmas son $6=\frac{3^3}{3}+C,\ \to\ 6=9+C,\ \to\ C=-3$ bo‘ladi. Demak, berilgan nuqtadan o‘tuvchi boshlang‘ich funksiya $F(x)=\frac{x^3}{3}-3$ bo‘ladi.

Misol №2:

$f(x)=e^{3x}-\cos 3x$ funksiyaning umumiy boshlang‘ich funksiyasini toping.

<u>Yechish:</u> Umumiy boshlang‘ich funksiya $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{1}{3}\sin 3x+C$ bo‘ladi. Bunga hosila olib ishonch hosil qilish mumkin.

Misol №3:

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ funksiyaning umumiy boshlang‘ich funksiyasini toping.

<u>Yechish:</u> Bunda berilgan funksiyani soddalashtirib $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}=\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}=\frac{1}{x+2}$ ko‘rinisha keltiramiz. Boshlang‘ich funksiya $F(x)=\ln|x+2|+C$ bo‘ladi.

Boshlang‘icha funksiyani aniqlashning uchta qoidasini keltiramiz.

<u>1-qoida:</u> Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya, $G(x)$ funksiya esa $g(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich funksiya bo‘lsa, u holda $F(x)\pm G(x)$ funksiya $f(x)\pm g(x)$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi.

$$\boxed{(F(x)\pm g(x))'=F'(x)\pm g'(x)=f(x)\pm g(x)}$$

2-qoida: Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya, k esa o'zgarmas son bo'lsa, u holda $kF(x)$ funksiya $kf(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

$$\boxed{(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)}$$

3-qoida: Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya, $k(k \neq 0)$ va b o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda $\frac{1}{k}F(kx+b)$ funksiya $f(kx+b)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

$$\boxed{\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b) = f(kx+b)}$$

Funksiya va uning boshlang'ich funksiyasi uchun quyidagi jadvalni keltirish mumkin:

1-jadval

Funksiya, $f(x)$	Boshlang'ich funksiya, $F(x)$
$x^p,\ p \neq -1$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}+C$
$(kx+b)^p,\ p \neq -1,\ k \neq 0$	$\frac{(kx+b)^{p+1}}{k(p+1)}+C$
$\frac{1}{x},\ x \neq 0$	$\ln\|x\|+C$
$\frac{1}{kx+b},\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}\ln\|kx+b\|+C$
e^x	e^x+C

Funksiya, $f(x)$	Boshlang'ich funksiya, $F(x)$
$e^{kx+b},\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}e^{kx+b}+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\sin(kx+b),\ k \neq 0$	$-\frac{1}{k}\cos(kx+b)+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
$\cos(kx+b),\ k \neq 0$	$\frac{1}{k}\sin(kx+b)+C$

Misol №4:

$f(x)=2x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ funksiyaning umumiy boshlang'ich funksiyasini toping.

Yechish: Har bir had uchun alohida-alohida boshlang'ich funksiyalarni aniqlaymiz. $2x$ ning boshlang'ich funksiyasi x^2, $\frac{1}{x}$ ning boshlang'ich funksiyasi $\ln x$, $-\frac{1}{x^2}$ ning boshlang'ich funksiyasi $\frac{1}{x}$ va $-\frac{1}{x^3}$ ning boshlang'ich funksiyasi $\frac{1}{x^2}$ bo'ladi. Shularni hisobga olgan holda berilgan $f(x)=2x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$ funksiyaning umumiy boshlang'ich funksiyasi $F(x)=x^2+\ln x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+C$ deb yozish mumkin bo'ladi.

13.2-Mavzu: Aniqmas integral.

Ko'pincha funksiyaning *boshlang'ich funksiyasini aniqlash* iborasi o'rniga *funksiyani integrallash* iborasi, boshlang'iya funksiya o'rniga esa *integral* iborasi ishlatiladi. Demak, funksiyaning boshlang'ich funksiyasini integrallash amali natijasida aniqlanar ekan. Integrallash amali esa $\int$ belgisi yordamida amalga oshiriladi. $\int$ belgisini aniqmas integral belgisi deyiladi.

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, buni integral belgisi yordamida quyidagicha yoziladi:

$$\boxed{F(x)=\int f(x)dx+C}$$

Misol №1:

$\int 3x^2dx$ integralni toping.

Yechish: Bunda $\int 3x^2dx = x^3+C$ bo'ladi. Chunki, $(x^3+C)'=3x^2$ bo'ladi.

Misol №2:

$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ integralni toping.

Yechish: Bunda $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$ bo'ladi. CHunki, $(tgx + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ bo'ladi.

Aniqmas integrallar jadvali quyida keltirilgan:

1-jadval

Oddiy funksiya	Murakkab funksiya
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{kx+b}} = \frac{2}{k}\cdot\sqrt{kx+b} + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot\sin(kx+b) + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2(kx+b)} = \frac{1}{k}\cdot tg(kx+b) + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2(kx+b)} = -\frac{1}{k}\cdot ctg(kx+b) + C$
$\int tgx\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$	$\int tg(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cdot\ln\|\cos(kx+b)\| + C$
$\int ctgx\, dx = \ln\|\sin x\| + C$	$\int ctg(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot\ln\|\sin(kx+b)\| + C$
$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\cdot\ln\|kx+b\| + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx+b} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sin(kx+b)} = \frac{1}{k}\cdot\ln\left\|tg\frac{kx+b}{2}\right\| + C$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\cos(kx+b)} = \frac{1}{k}\cdot\ln\left\|tg\left(\frac{kx+b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

Qo'shimcha holda yana quyida jadvaldagi formulalarni ham keltirish mumkin:

2-jadval

$$\int \frac{dx}{\sin x\cdot\cos x} = \ln|tgx| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx = a\cdot\arccos\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{x(a-x)} + C$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C$$

$$\int \arcsin x\,dx = x\cdot\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int \arccos x\,dx = x\cdot\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int arctgx\,dx = x\cdot arctgx - \frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) + C$$

$$\int arcctgx\,dx = x\cdot arcctgx + \frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right) + C$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$\int e^x \sin x\,dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$$

$$\int \sin x\cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1} + C$$

$$\int \sin^n x\cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1}x}{n+1} + C$$

Endi aniqmas integrallarga doir misollar echamiz.

Misol №3:

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}}$ integralni toping.

Yechish: Bu $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ integralga binoan $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-3^2}\right| + C$ bo‘ladi.

Misol №4:

$\int \frac{dx}{x^2-9}$ integralni toping.

Yechish: Bu $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$ formulaga binoan, $\int \frac{dx}{x^2-3^2} = \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$ bo‘ladi.

Misol №5:

$\int \frac{dx}{4x^2+25}$ integralni toping.

Yechish: Bu misol yyechimi $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + C$ formulaga binoan, $\int \frac{dx}{4x^2+25} = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{dx}{x^2+(5/2)^2} =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5/2}\cdot arctg\frac{x}{5/2} + C = \frac{1}{10}\cdot arctg\frac{2x}{5} + C$ bo‘ladi.

Misol № 6:

$\int x^3\cos^4 x\,dx$ integralni toping.

Yechish: Bu misolni ko'paytuvchilardan birini differensialning tagiga kiritish yo'li bilan ishlaymiz.

$\int x^3\cos x^4\,dx=\frac{1}{4}\int\cos x^4\,d(x^4)=\frac{1}{4}\int\cos u\,d(u)=\frac{1}{4}\sin u=\frac{1}{4}\sin x^4.$

Misol № 7:

$\int\sin^2 x\,dx$ integralni toping.

Yechish: Bu misolni darajani pasaytirish formulasidan foydalanib ishlaymiz.

$\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C.$

Misol № 8:

$\int\cos^4 x\,dx$ integralni toping.

Yechish: Bu misolni darajani pasaytirish formulasidan foydalanib ishlaymiz.

$\int\cos^4 x\,dx=\int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$

$=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{x}{8}+\frac{1}{16}\sin 2x+C=\frac{3}{4}x-\frac{3}{16}\sin 2x+C.$

Misol № 9:

$\int tg^2x\,dx$ integralni toping.

Yechish: Bu integralni trigonametrik ayniyatdan foydalanib ishlaymiz.

$\int tg^2x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tgx-x+C.$

Misol № 10:

$\int ctg^4x\,dx$ integralni toping.

Yechish: Bu misolni trigonametrik ayniyatdan foydalanib ishlaymiz.

$\int ctg^4x\,dx=\int ctg^2x\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx=\int\frac{ctg^2x}{\sin^2 x}dx-\int ctg^2x\,dx=-\int ctg^2x\,d(ctg\,x)-\int ctg^2x\,dx=$

$=-\frac{1}{3}ctg^3x-(-ctgx-x)+C=\frac{1}{3}ctg^3x+ctgx+x+C.$

13.3-Mavzu: Bo'laklab integrallash

Ko'paytmaning hosilasini eslaylik. Unga ko'ra

$$(u\vartheta)'=u'\vartheta+\vartheta'u\;\frac{d(u\cdot\vartheta)}{dx}\text{ yoki }\frac{d(u\vartheta)}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot\vartheta+\frac{d\vartheta}{dx}\cdot u$$

edi. Buni har ikkala tarfini dx ga ko'paytirsak, ko'paytmaning differensiali hosil bo'ladi.

$$\boxed{d(u\vartheta)=u\,d\vartheta+\vartheta\,du}$$

Buni har ikkala tarfini integrallasak va algebraik almashtirishlar bajarsak,

$$\int d(u\cdot\vartheta)=\int u\,d\vartheta+\int\vartheta\,du,\;\rightarrow\;u\vartheta=\int u\,d\vartheta+\int\vartheta\,du,\;\rightarrow\;\int u\,d\vartheta=u\vartheta-\int\vartheta\,du$$

hosil bo'ladi. Bunda biz bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqardik.

$$\boxed{\int u\,d\vartheta=u\,\vartheta-\int\vartheta\,du}$$

Bu formula yordamida $\int u\,d\vartheta$ integralni $\int\vartheta\,du$ integralga keltiriladi. Boshqacha aytganda, bo'laklab integrallash formulasidan integral tagidagi ko'paytuvchilardan birining hosilasi ma'lum, lekin boshlang'ich funksiyasi noma'lum bo'lgan hollarda foydalaniladi. Bo'laklab integrallashga doir bir necha misollar echaylik.

Misol №1:

$\int x\sin x\,dx$ integralni toping.

Yechish: Bunda $x=u$, $\sin x\,dx=d\vartheta$ deb belgilasak, $du=dx$, $\vartheta=-\cos x$ hosil bo'ladi. Buni bo'laklab integrallashga qo'yamiz. $\int x\sin x\,dx=u\vartheta-\int\vartheta\,du=-x\cos x-\int-\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.$

Misol №2:

$\int x e^x \, dx$ integralni toping.

Yechish: Bunda $x = u$, $e^x dx = d\vartheta$ deb belgilasak, $du = dx$, $\vartheta = e^x$ hosil bo'ladi. Buni bo'laklab integrallashga qo'yamiz. $\int x e^x \, dx = u\vartheta - \int \vartheta \, du = x\,e^x - \int e^x \, dx = x\,e^x - e^x + C$.

Misol №3:

$\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ integralni toping.

Yechish: Bunda $\ln x = u$, $\frac{dx}{x^3} = d\vartheta$ deb belgilasak, $du = \frac{dx}{x}$, $\vartheta = -\frac{1}{2x^2}$ hosil bo'ladi. Buni bo'laklab integrallashga qo'yamiz. Bunda

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = u\vartheta - \int \vartheta \, du = \ln x \cdot \left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \int -\frac{1}{2x^2} \cdot \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C = -\frac{2\ln x + 1}{4x^2} + C$$

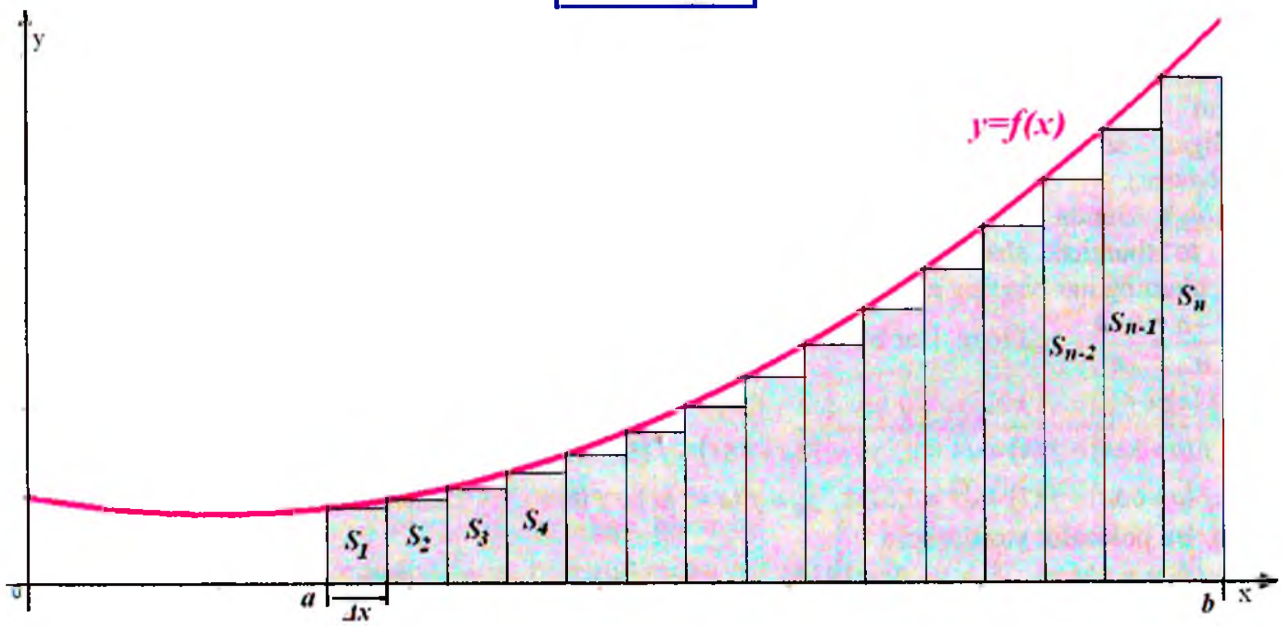
natija kelib chiqadi.

13.4-Mavzu: Egri chiziqli trapetsiya yuzini topish uchun Nyuton-Leybnits formulasi. Aniq integral.

Quyidan Ox o'qining $[a;\,b]$ kesmasi bilan, yuqoridan musbat qiymatli $y = f(x)$ egri chiziqli funksiya grafigi bilan, yonlaridan $x = a$ va $x = b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan figuraga ***egri chiziqli trapetsiya*** deyiladi (13.4.1-rasm).

Bizdan rasmda ko'rsatilgan ana shu egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish so'ralgan bo'lsin. Berilgan $[a;\,b]$ kesmani teng n ta qismga bo'lamiz. Har bir bo'lak kesmasining uzunligi teng va quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$



13.4.1-rasm

Bunda $y = f(x)$ egri chiziqli funksiya grafigi tagida balandligi (bo'yi) turlicha va eni bir xil Δx ga teng bo'lgan n ta to'g'ri to'rtburchak polosalari hosil bo'ladi. To'g'ri to'rtburchaklarning balandliklari

$$y_1 = f(a),\ y_2 = f(a + \Delta x),\ y_3 = f(a + 2\Delta x),\ y_4 = f(a + 3\Delta x), ...,\ y_n = f(a + (n-1)\Delta x) = f(b - \Delta x)$$

bo'ladi. To'g'ri to'rtburchak polosalarining yuzalari esa quyidagicha bo'ladi:

$$S_1 = y_1\Delta x,\ S_2 = y_2\Delta x,\ S_3 = y_3\Delta x,\ S_4 = y_4\Delta x,\ ....,\ S_n = y_n\Delta x$$

Endi shu yuzalarni qo'shib chiqamiz.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \Delta x \sum_{i=1}^{n} y_i = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (n-1)\Delta x\right)$$

Topilgan bu to‘g‘ri to‘rtburchaklar yuzalarining yig‘indisi grafik tagidagi, ya’ni egri chiziqli trapetsiyaning taqribiy yuzasini beradi. Shunday qilib, egri chiziqli trapetsiyaning taqribiy yuzasi quyidagi formuladan topilar ekan:

$$\boxed{S = \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x \quad yoki \quad S = \Delta x \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (n-1)\Delta x\right)}$$

Egri chiziqli trapetsiyasining aniq yuzasini topish uchun $[a; b]$ kesmani cheksiz ko‘p sondagi bo‘laklarga teng bo‘lishimiz kerak. Bunda bitta polosa eni Δx elementar dx kattalikka aylanib ketadi.

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \Delta x = \lim_{n \to \infty} \frac{a-b}{n} = dx}$$

Bundan tashqari $\sum$ belgisi ham $\int$ belgisiga aylanib ketadi.

$$\boxed{S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} S_i = \int_a^b dS}$$

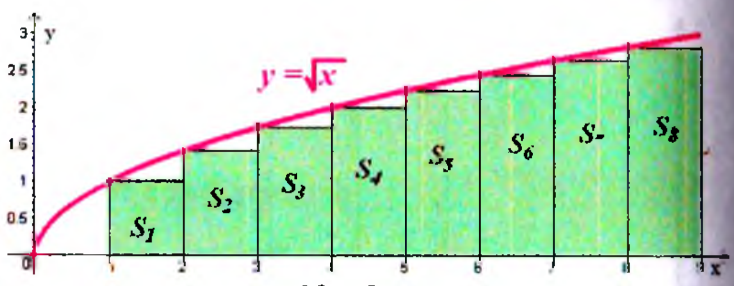
Ana shunda egri chiziqli trapetsiyaning aniq yuzasi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\boxed{S = \int_a^b dS = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Topilgan bu formulani egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblash uchun ***Nyuton-Leybnits formulasi*** deyiladi.

Misol №1:

$f(x) = \sqrt{x}$ funksiyani $x \in [1; 9]$ kesmada $n = 8$ ta bo‘lakka bo‘lib, uning taxminiy yuzasini toping. Buni integrallashdan chiqadigan aniq yuza bilan taqqoslang (13.4.2-rasm).



13.4.2-rasm

Yechish: Bunda funksiya grafigi tagida 8ta to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi polosa hosil bo‘lib, ularning har birining eni $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{9-1}{8} = 1$ ga teng. Har bir to‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yi

$y_1 = f(a) = f(1) = \sqrt{1} = 1$, $y_2 = f(a + \Delta x) = f(2) = \sqrt{2} \approx 1{,}4142$, $y_3 = f(a + 2\Delta x) = f(3) = \sqrt{3} \approx 1{,}7320$,

$y_4 = f(a + 3\Delta x) = f(4) = \sqrt{4} = 2$, $y_5 = f(a + 4\Delta x) = f(5) = \sqrt{5} \approx 2{,}2361$, $y_6 = f(a + 5\Delta x) = f(6) = \sqrt{6} = 2{,}4495$.

$y_7 = f(a + 6\Delta x) = f(7) = \sqrt{7} \approx 2{,}6458$, $y_8 = f(a + 7\Delta x) = f(8) = \sqrt{8} \approx 2{,}8284$

bo‘ladi. Bu polosalar yuzalari esa

$S_1 = y_1 \cdot \Delta x = 1$, $S_2 = y_2 \cdot \Delta x \approx 1{,}4142$, $S_3 = y_3 \cdot \Delta x \approx 1{,}7320$, $S_4 = y_4 \cdot \Delta x = 2$, $S_5 = y_5 \cdot \Delta x \approx 2{,}2361$,

$S_6 = y_6 \cdot \Delta x = 2{,}4495$, $S_7 = y_7 \cdot \Delta x \approx 2{,}6458$, $S_8 = y_8 \cdot \Delta x \approx 2{,}8284$

bo‘ladi. Bu polasalar yuzalrining yig‘indisi funksiya grafigi tagidagi taxminiy yuzani beradi.

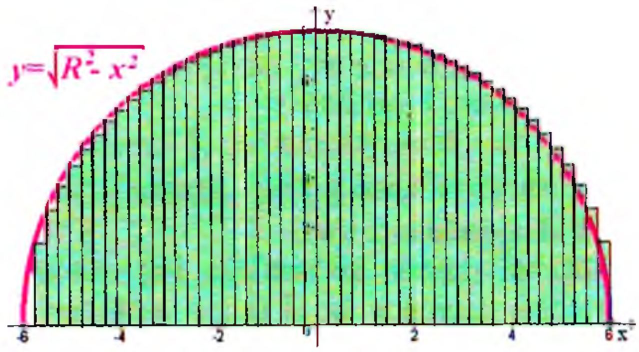
$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_8 = 1 + 1{,}4142 + 1{,}7320 + 2 + 2{,}2361 + 2{,}4495 + 2{,}6458 + 2{,}8284 \approx 16{,}3060$

Endi aniq yuzani hisoblaymiz. U $S = \int_1^9 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x}\Big|_1^9 = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 = 18$ ga teng bo‘ladi. Demak, bunda absalyut xatolik $\Delta S = 18 - 16{,}306 = 1{,}694$ ga, nisbiy xatolik esa $\varepsilon = \frac{\Delta S}{S} = \frac{1{,}694}{18} \approx 0{,}09411 = 9{,}411\%$ ga teng. Bo‘laklar soni n oshirish yo‘li bilan xatolikni kamaytiriladi.

Misol №2:

Aylana yuzasini aniqlash formulasi $S = \pi R^2$ ni integrallash orqali keltirib chiqaring(13.4.3-rasm).

Yechish: Aylana tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ formulasidan y ni oshkor etsak, $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ – yuqorigi yarim aylana hamda $y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$ – quyi yarim aylana hosil bo'ladi. Shulardan birini, aytaylik yuqorigi yarim aylanani olib, uni $x \in [-R, R]$ kesmada intagrallasak,



13.4.3-rasm

yarimdoira yuzasi kelib chiqadi, uni 2 ga ko'paytirib to'la doira yuzasiga ega bo'lamiz.

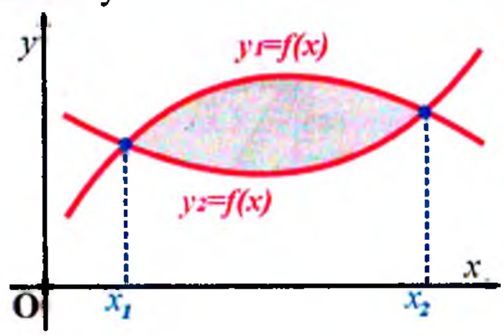
$$S = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \frac{R^2}{2}\cdot \arcsin\frac{x}{R} + \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}\Bigg|_{-R}^{R} = 2\left(\frac{R^2}{2}\cdot \arcsin\frac{R}{R} + \frac{R}{2}\sqrt{R^2 - R^2}\right) - 2\left(\frac{R^2}{2}\cdot \arcsin\frac{-R}{R} + \frac{-R}{2}\sqrt{R^2 - (-R)^2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 0\right) - 2\left(\frac{R^2}{2}\cdot\frac{-\pi}{2}\right) = \pi R^2$$ natija kelib chiqadi.

Biz yuqorida keltirib chiqargan formula tepadan $y = f(x)$ funksiya bilan, pastdan Ox o'qi bilan hamda ikki yondan $x = a$ va $x = b$ vertikal chiziqlar bilan chegaralangan figura – egri chiziqli trapetsiya yuzasini aniqlash masalasi edi. Bu umumiy hol bo'lib, ikkita funksiya bilan chegaralangan holatlar ham uchraydi. Endi ana shular haqida fikr yuritamiz.

Yuqoridan $y_1 = f(x)$ funksiya bilan, quyidan $y_2 = f(x)$ funksiya bilan hamda ikki yondan bu funksiyalarning x_1 va x_2 kesishish nuqtalari bilan chegaralangan soha yuzasi quyidagicha bo'ladi (13.4.4-rasm):

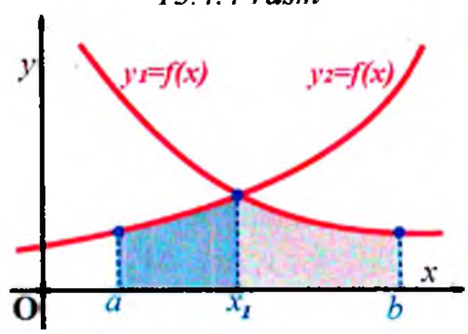
$$\boxed{S = \int_{x_1}^{x_2} (y_1 - y_2)\,dx}$$



13.4.4-rasm

Agar $y_1 = f(x)$ va $y_2 = f(x)$ funksiyalar $x = a$ va $x = b$ vertikal chiziqlar oralig'ida, biror $x = x_1$ nuqtada kesishsa, u holda $[a; b]$ kesmada bu funksiyalar bilan chegaralangan soha yuzasi quyidagicha bo'ladi (13.4.5-rasm):

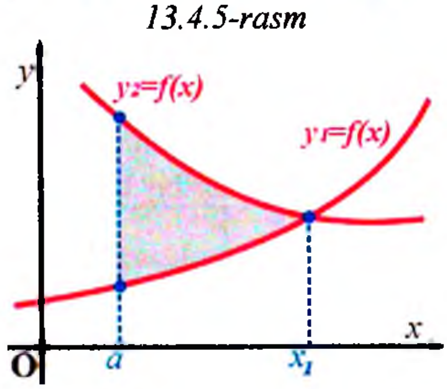
$$\boxed{S = \int_{a}^{x_1} y_1\,dx + \int_{x_1}^{b} y_2 dx}$$



13.4.5-rasm

Agar $y_1 = f(x)$ va $y_2 = f(x)$ funksiyalar biror $x = x_1$ nuqtada kesishsa, u holda $[a; x_1]$ kesmada bu funksiyalar bilan chegaralangan soha yuzasi quyidagicha bo'ladi (13.4.6-rasm):

$$\boxed{S = \int_{a}^{x_1} (y_2 - y_1)\,dx}$$



13.4.6-rasm

13.5-Mavzu: Integralning turli tadbiqlari.

Oldingi mavzuda integral yordamida egri chiziqli trapetsiya yuzini aniqlashni o'rgandik.

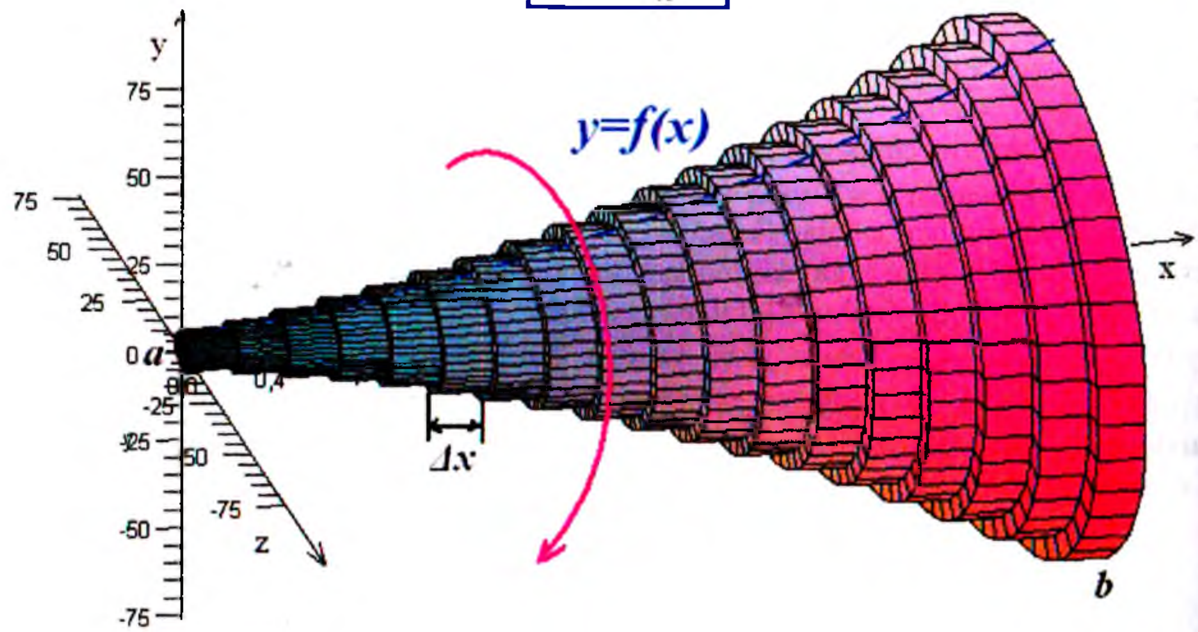
Ushbu mavzuda esa integral yordamida yana nimalar qilish mumkinligi haqida so'z yuritiladi, ya'ni integralning turli tatbiqlarini o'rganamiz.

1). Hajmni hisoblash:

$y = f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmasini olib, uni Ox o'qi atrofida aylantirganda fazoviy aylanish jismi hosil bo'ladi. Bunda grafikning nuqtalari Ox o'qi atrofida $r = y = f(x)$ radiusli turli xil aylanalar chizadi.

Bizdan rasmda ko'rsatilgan ana shu aylanish jismining hajmini topish so'ralgan bo'lsin. Aylanish jismining $[a;b]$ kesma oralig'ini teng n ta qismga bo'lamiz. Har bo'lak kesmasining uzunligi teng va quyidagicha bo'ladi (13.5.1-rasm):

$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$



13.5.1-rasm

Har bir bo'lak jism balandligi Δx va radiusi $r = y = f(x)$bo'lgan kichik slindrdan iborat. Bu slindrlarning balandliklari bir xil bo'lib, radiuslari o'zgaruvchan bo'ladi. Kichik slindrlarning radiuslari quyidagicha bo'ladi:

$r_1 = y_1 = f(a)$, $r_2 = y_2 = f(a+\Delta x)$, $r_3 = y_3 = f(a+2\Delta x)$, ..., $r_n = y_n = f(a+(n-1)\Delta x) = f(b-\Delta x)$ bo'ladi. Slindrlarning hajmlari esa quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta V_1 = \pi y_1^2 \Delta x,\ \ \Delta V_2 = \pi y_2^2 \Delta x,\ \ \Delta V_3 = \pi y_3^2 \Delta x,\ \ \Delta V_4 = \pi y_4^2 \Delta x,\ \ ....,\ \ \Delta V_n = \pi y_n^2 \Delta x$$

Endi shu hajmlarni qo'shib chiqamiz.

$$V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + ... + \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_n = \Delta x \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \pi \Delta x \sum_{i=1}^{n} f^2(a+(n-1)\Delta x)$$

Topilgan bu to'g'ri slindrlar hajmlarining aylanish jismining taqribiy hajmini beradi. SHunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $[a;b]$ kesmasini Ox o'qi atrofida aylantirganda hosil bo'lgan aylanish jismining taqribiy hajmi quyidagi formuladan topilar ekan:

$$\boxed{V = \pi \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \Delta x \quad yoki \quad V = \pi \Delta x \sum_{i=1}^{n} f^2(a+(n-1)\Delta x)}$$

Aylanish jismining aniq hajmini topish uchun $[a;b]$ kesmani cheksiz ko'p sondagi bo'laklarga teng bo'lishimiz kerak. Bunda bitta slindr balandligi Δx elementar dx kattalikka aylanib ketadi.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \Delta x = \lim_{n\to\infty} \frac{a-b}{n} = dx}$$

Bundan tashqari $\sum$ belgisi ham $\int$ belgisiga aylanib ketadi.

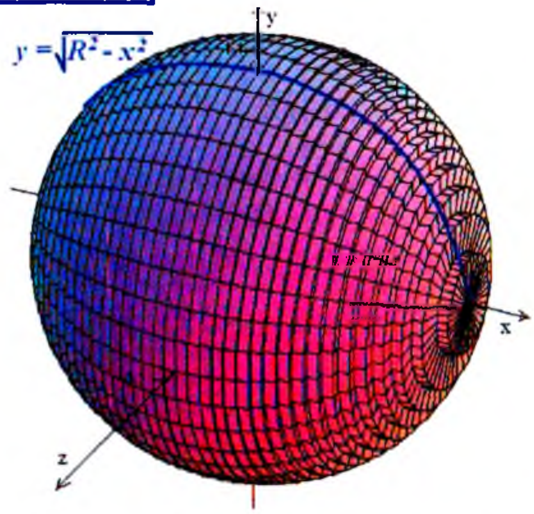
$$\boxed{V = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} V_i = \int_a^b dV}$$

Ana shunda aylanish jismining aniq hajmi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\boxed{V = \int_a^b dV = \pi\int_a^b f^2(x)dx = \pi\int_a^b y^2\,dx}$$

Misol №1:

SHar hajmini aniqlash formulasi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ni integrallash orqali keltirib chiqaring (13.5.2-rasm).



13.5.2-rasm

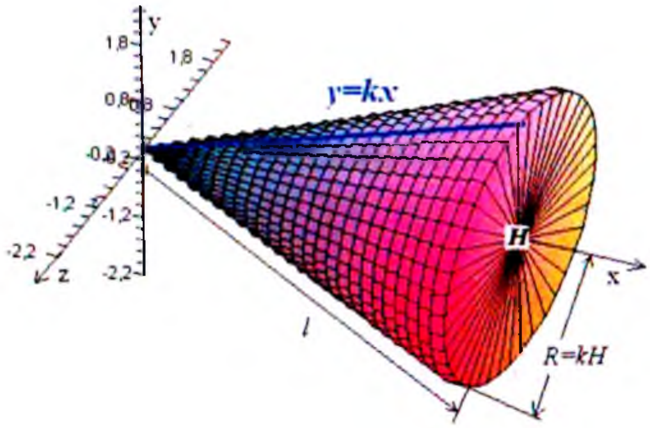
__Yechish:__ Doira tenglamasi $x^2 + y^2 \le R^2$ formulasidan y ni oshkor etsak, $y_1 \le \sqrt{R^2 - x^2}$ – yuqorigi yarim doira hamda $y_2 \ge -\sqrt{R^2 - x^2}$ – quyi yarim doira hosil bo'ladi. Shulardan birini, aytaylik yuqorigi yarim doirani olib, uni Ox o'qi atrofida bir aylantirsak, shar hosil bo'ladi. Yuqorgi yarim doirani $x \in [-R, R]$ kesmada intagrallasak, shar hajmi kelib chiqadi. Bunda

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) -$$

$$-\pi\left(R^2(-R) - \frac{(-R)^3}{3}\right) = \frac{2\pi R^3}{3} + \frac{2\pi R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3$$ natija kelib chiqadi.

Misol №2:

Konus hajmini aniqlash formulasi $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ ni integrallash orqali keltirib chiqaring (13.5.3-rasm).



13.5.3-rasm

__Yechish:__ $y = kx$ chiziqli funksiyani Ox o'qi atrofida $x = [0; H]$ kesmada aylantirishdan konus hosil bo'ladi. Bunda $f(H) = kH = R$ konus asosi radiusi vazifasin bajaradi. Endi konus hajmini hisoblab topamiz. Bunda

$$V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_0^H k^2x^2\,dx = \pi\frac{k^2x^3}{3}\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{\pi k^2}{3}H^3 - \frac{\pi k^2}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}\pi(kH)^2H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$ natija kelib chiqadi.

2). Egri chiziq uzunligini hisoblash:

Bizga $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ egri chiziqli funksiya berilgan bo'lsin. Bizdan ana shu egri chiziq liniyasining $[a; b]$ kesmadagi uzunligini topish so'ralgan bo'lsin. Berilgan $[a; b]$ kesmani teng n ta qismga bo'lamiz. Har bir bo'lak kesmasining uzunligi teng va quyidagicha bo'ladi (13.5.4-rasm):

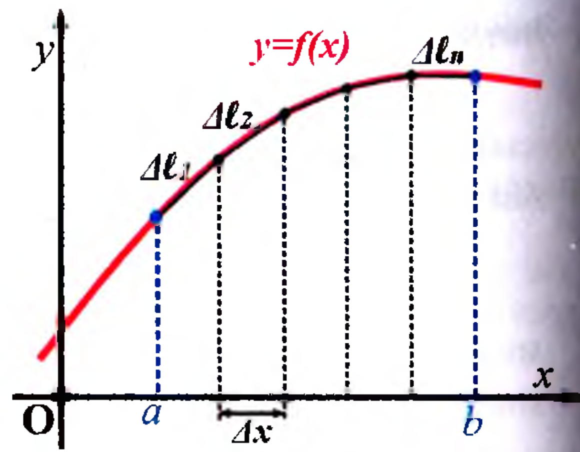
$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

Funksiya grafigining bo‘linish nuqtalarini belgilab, ularni ketma-ket tutashtirib chiqamiz. Bunda $y = f(x)$ egri chiziqli funksiya grafigi tagida balandligi turlicha va eni bir xil Δx ga teng bo‘lgan n ta to‘g‘ri burchakli ensiz polosali kichik trapetsiyalar hosil bo‘ladi. Bu trapetsiyalarning asoslari uzunliklari

$y_1 = f(a),\ y_2 = f(a+\Delta x),\ y_3 = f(a+2\Delta x),$

$y_4 = f(a+3\Delta x), \ldots,\ y_n = f(a+(n-1)\Delta x) = f(b-\Delta x)$

bo‘ladi. Qo‘shni asoslar uzunliklari orasidagi farq quyidagicha bo‘ladi:



13.5.4-rasm

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1 = f(a+\Delta x) - f(a),\ \ \Delta y_2 = y_3 - y_2 = f(a+2\Delta x) - f(a+\Delta x),\ \ \Delta y_3 = y_4 - y_3 = f(a+3\Delta x) - f(a+2\Delta x),$$

$$\Delta y_4 = y_5 - y_4 = f(a+4\Delta x) - f(a+3\Delta x),\ \ldots,\ \Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(a+n\Delta x) - f(a+(n-1)\Delta x) = f(b) - f(b-\Delta x).$$

Siniq chiziqlar, ya’ni egri chiziq yoyi bo‘laklari uzunliklari quyidagicha bo‘ladi:

$$\Delta\ell_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_1^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x,\quad \Delta\ell_2 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_2^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x,\quad \Delta\ell_3 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_3^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x,$$

$$\Delta\ell_4 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_4^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_4}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x,\ \ldots,\ \Delta\ell_n = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_n^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x.$$

Bu siniq chiziqlar uzunliklari yig‘indisi $[a;\, b]$ kesmada $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan berilgan egri chiziq yoyining taxminiy uzunligini beradi.

$$L = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 + \Delta\ell_3 + \ldots + \Delta\ell_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta\ell_i = \Delta x\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$$

Shunday qilib, egri chiziq liniyasining taqribiy uzunligi quyidagi formuladan topilar ekan:

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{n}\Delta\ell_i \quad yoki \quad L = \Delta x\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}}$$

Egri chiziqli liniyasining aniq uzunligini topish uchun $[a;\, b]$ kesmani cheksiz ko‘p sondagi bo‘laklarga teng bo‘lishimiz kerak. Bunda bitta polosa eni Δx elementar dx kattalikka aylanib ketadi.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\Delta x = \lim_{n\to\infty}\frac{a-b}{n} = dx}$$

Bundan tashqari $\sum$ belgisi ham $\int$ belgisiga aylanib ketadi.

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta\ell_i = \int_a^b d\ell}$$

Ana shunda egri chiziq liniyasining aniq yuzasi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\boxed{L = \int_a^b d\ell = \int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy_i}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

Misol №3:

Aylana uzunligini hisoblash uchun $L = 2\pi R$ formulani keltirib chiqaring.

Yechish: Aylana tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ formulasidan y ni oshkor etsak, $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ – yuqorigi yarim aylana hamda $y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$ – quyi yarim aylana hosil bo‘ladi. Shulardan birini, aytaylik yuqorigi yarim aylanani olib, uni $x \in [-R,\, R]$ kesmada intagrallasak, yuqorigi yarim aylana uzunligi kelib chiqadi, uni 2 ga ko‘paytirib to‘la aylana uzunligini olamiz. Buning uchun eng avvalo funksiya hosilasini aniqlaymiz. Hosila $y' = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ bo'ladi. Endi formulada ishtirok etadigan ildizni hisoblaymiz.

Ildiz $\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$ bo'ladi. Endi integrallash orqali so'ralgan formulani aniqlaymiz. Shunda

$L = 2\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = 2\int_{-R}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx = 2R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R} = 2R(\arcsin 1 - \arcsin(-1)) = 2R\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\pi R$ natija kelib chiqadi.

3). Aylanish jismining yon sirtini hisoblash:

$y = f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmasini olib, uni Ox o'qi atrofida aylantirganda fazoviy aylanish jismi hosil bo'ladi. Bunda grafikning nuqtalari Ox o'qi atrofida $r = y = f(x)$ radiusli turli xil aylanalar chizadi.

Bizdan rasmda ko'rsatilgan ana shu aylanish jismining yon sirtini topish so'ralgan bo'lsin. Aylanish jismining $[a; b]$ kesma oralig'ini teng n ta qismga bo'lamiz. Har bo'lak kesmasining uzunligi teng va quyidagicha bo'ladi (13.5.5-rasm):

$$\boxed{\Delta x = \frac{b-a}{n}}$$

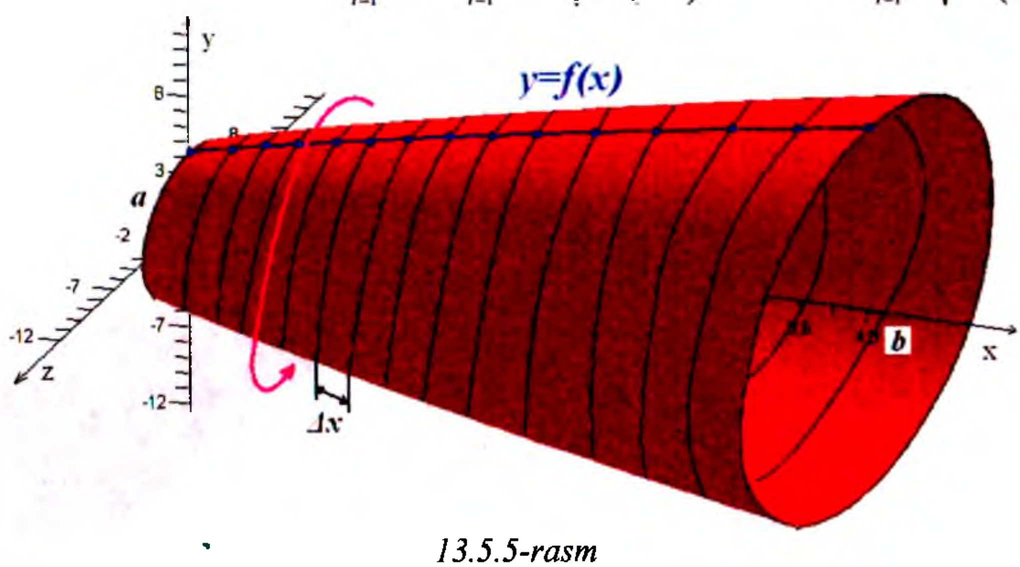
Har bir qismda funksiya egri chiziq yoyi uzunligi va slindr asos aylanasining uzunligi ko'paytmasi bitta qism slindrning yon sirtini beradi.

$$\Delta S_1 = 2\pi y_1 \Delta\ell_1 = 2\pi y_1 \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x}\right)^2}\Delta x,\quad \Delta S_2 = 2\pi y_2 \Delta\ell_2 = 2\pi y_2 \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_2}{\Delta x}\right)^2}\Delta x,\quad \Delta S_3 = 2\pi y_3 \Delta\ell_3 = 2\pi y_3 \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_3}{\Delta x}\right)^2}\Delta x,$$

$$\Delta S_4 = 2\pi y_4 \Delta\ell_4 = 2\pi y_4 \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_4}{\Delta x}\right)^2}\Delta x,\ \ldots,\ \Delta S_n = 2\pi y_n \Delta\ell_n = 2\pi y_n \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x.$$

Endi shu yuzalarni qo'shib chiqamiz.

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \ldots + \Delta S_n = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_n = \sum_{i=1}^{n} 2\pi y_i \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x = 2\pi\Delta x\sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}$$



13.5.5-rasm

Topilgan bu yuza aylanish jismining taqribiy yon sirtini beradi. SHunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmasini Ox o'qi atrofida aylantirganda hosil bo'lgan aylanish jismining taqribiy yon sirti quyidagi formuladan topilar ekan:

$$\boxed{S_{yon} = 2\pi\sum_{i=1}^{n} y_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2}\Delta x}$$

Aylanish jismining aniq hajmini topish uchun $[a; b]$ kesmani cheksiz ko'p sondagi bo'laklarga teng bo'lishimiz kerak. Bunda bitta qism slindr balandligi Δx elementar dx kattalikka aylanib ketadi.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\Delta x=\lim_{n\to\infty}\frac{a-b}{n}=dx}$$

Bundan tashqari $\sum$ belgisi ham $\int$ belgisiga aylanib ketadi.

$$\boxed{S_{yon}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i=\int_a^b dS}$$

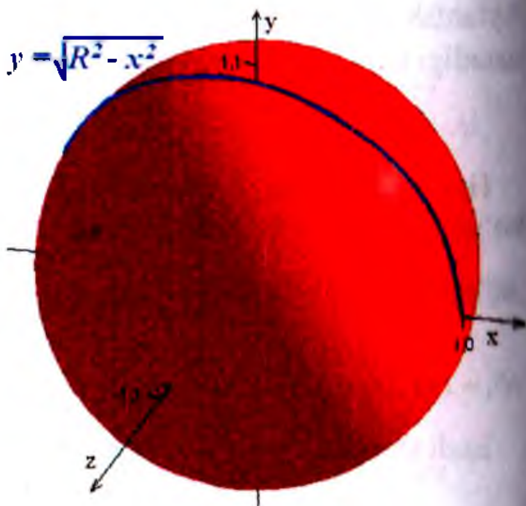
Ana shunda aylanish jismining aniq yon sirti quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\boxed{S_{yon}=\int_a^b dS=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx}$$

Misol №4:

Sfera sirtini aniqlash formulasi $S=4\pi R^2$ni integrallash orqali keltirib chiqaring (13.5.2-rasm).

<u>*Yechish:*</u> Aylana tenglamasi $x^2+y^2=R^2$ formulasidan y ni oshkor etsak, $y_1=\sqrt{R^2-x^2}$ – yuqorigi yarim aylana hamda $y_2=-\sqrt{R^2-x^2}$ – quyi yarim aylana hosil bo'ladi. Shulardan birini, aytaylik yuqorigi yarim aylanani olib, uni Ox o'qi atrofida bir aylantirsak, sfera hosil bo'ladi. Yuqorgi yarim aylanani $x\in[-R,\,R]$ kesmada intagrallasak, sfera sirtii kelib chiqadi. Buning uchun eng avvalo funksiya hosilasini aniqlaymiz. Hosila $y'=\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)'_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$ bo'ladi. Endi formulada ishtirok etadigan ildizni hisoblaymiz. Ildiz



13.5.6-rasm

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}$ bo'ladi. Endi integrallash orqali so'ralgan yuzani aniqlaymiz. SHunda

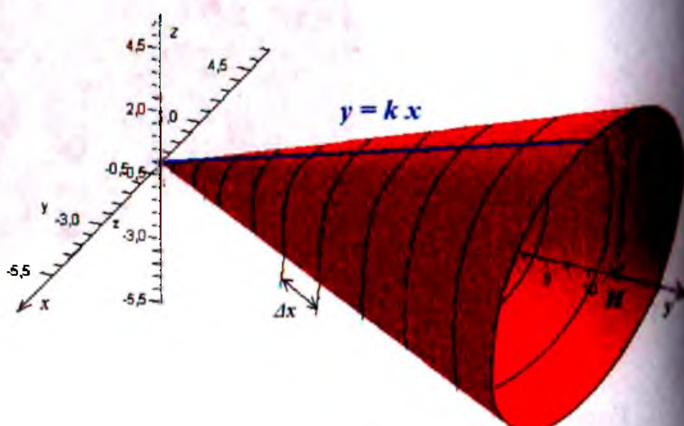
$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=2\pi R\int_{-R}^{R}dx=2\pi R\,x\Big|_{-R}^{R}=2\pi R^2-(-2\pi R^2)=4\pi R^2$$

natija kelib chiqadi.

Misol №5:

Konus yon sirtini aniqlash formulasi $S_{yon}=\pi R\ell$ni integrallash orqali keltirib chiqaring (13.5.3-rasm).

<u>*Yechish:*</u> $y=kx$ chiziqli funksiyaning $x=[0;\,H]$ kesmasini Ox o'qi atrofida aylantirishdan konus hosil bo'ladi. Bunda $f(H)=kH=R$ konus asosini radiusi vazifasini bajaradi. Konus yasrvchisi esa $\ell=\sqrt{H^2+R^2}=H\sqrt{1+k^2}$ bo'ladi. Endi konus yon sirtini hisoblab topamiz. Buning uchun integrallash amalidan foydalanamiz.



13.5.7-rasm

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_0^H kx\sqrt{1+k^2}\,dx=\pi k\sqrt{1+k^2}\,x^2\Big|_0^R=\pi k\sqrt{1+k^2}H^2=\pi kR\sqrt{1+k^2}H=\pi R\ell$$

formula kelib chiqadi.

14-BOB: KOMBINATORIKA VA EHTIMOLLIK NAZARIYASI ELEMENTLARI

Ehtimollar nazariyasi asosida boshqa bo'limlardagi kabi boshlang'ich tushuncha va ta'riflar yotadi. Bunda ishlatiladigan asosiy tushunchalardan biri hodisadir. Hodisa deb sinov va tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan har qanday faktni aytish mumkin. Ehtimollar nazariyasini o'rganish uchun kombinatorika va uning asosiy qoidalarini bilish juda muhimdir.

14.1-Mavzu: Kombinatorika va uning asosiy formulalari.

Biror qoida bo'yicha chekli sondagi elementlardan tuzilishi mumkin bo'lgan barcha turli hil kombinatsiyalarni hisoblashga doir bo'lgan masalalarni *kombinatorika masalalari* deyiladi. Matematikaning bunday masalalar bilan shug'ullanadigan bo'limiga *kombinatorika* deyiladi.

Kombinatorika masalalari berilishga qarab bir necha turlarga bo'linadi. Ushbu mavzuda ana shular haqida so'z yuritiladi.

1). Ko'paytmani topish qoidasi:

Ushbu misolni ko'raylik. Bizga ikkita to'plam berilgan bo'lib, bu to'plamlar $X=\{1,2\}$ va $Y=\{a,b,c,d\}$ elementlaridan tashkil topgan bo'lsin. Bu to'plamlar elementlari ishtirokida shunday juftliklar tuzaylikki, bunda har bir to'plam elementi bir marta ishtirok etsin. Shunda jami juftliklar soni 8ta bo'ladi.

$$2ta\ \ satr\begin{cases}(1,a),\ (1,b),\ (1,c),\ (1,d)\\ (2,a),\ (2,b),\ (2,c),\ (2,d)\end{cases}$$
$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{4ta\ \ ustun}$$

X va Y to'plamlar elementlar sonini mos holda $n(X)$ va $n(Y)$ deb, juftliklar sonini esa $n(X\times Y)$ deb belgilasak, yuqoridagi misolda $n(X\times Y)=n(X)\cdot n(Y)=2\cdot 4=8$ ekanligi ko'rinib turibdi.

Shunday qilib, X va Y chekli to'plamlar elementlaridan tuzilgan juftliklar soni shu to'plamlar elementlar sonining ko'paytmasiga teng bo'lar ekan.

$$\boxed{n(X\times Y)=n(X)\cdot n(Y)}$$

Misol №1:

5ta matematika kitobi va 4ta fizika kitobidan nechta juftliklar tuzish mumkin?

Yechish: Matematika kitoblarini $X=\{1,2,3,4,5\}$ raqamlar bilan, fizika kitobini esa $Y=\{a,b,c,d\}$ harflar bilan belgilasak, u holda 5ta satrli va 4ta ustunli juftliklar hosil bo'ladi, ya'ni $n(X)=5$ va $n(Y)=4$ bo'ladi. Juftliklar soni esa $n(X\times Y)=n(X)\cdot n(Y)=5\cdot 4=20$ta bo'ladi.

Misol №2:

1-savatda 6ta olma, 2-savatda 4ta anor va 3-savatda 3ta behi bo'lsa, savatlardan bittadan olib necha xil uchtalik mevalar tuzish mumkin bo'ladi?

Yechish: 1-savatdaggi olmalarni $X=\{1,2,3,4,5\}$ raqamlar bilan, 2-savatdagi anorlarni $Y=\{a,b,c,d\}$ harflar bilan va 3-savatdagi behilarni $Z=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ harflar bilan belgilasak, u holda 6ta satrli, 4ta ustunli va 3ta qatlamli uchtaliklar hosil bo'ladi. Bu uchliklarning jami soni $n(X\times Y\times Z)=n(X)\cdot n(Y)\cdot n(Z)=6\cdot 4\cdot 3=72$ta bo'ladi.

2). Takrorsiz o'rinlashtirishlar:

Aytaylik $n=4$ ta elementli $X=\{1,2,3,4\}$ to'plam elementlaridan ikki xonali juftliklar tuzaylik. 12, 13, 14, 23, 24, 21, 34, 31, 32, 41, 42, 43. Bular tartiblangan qism to'plamlardan iborat bo'lib, ularning jami sonini A_4^2 deb belgilanadi va " 4 elementdan 2tadan olib tuzilgan o'rinlashtirishlar soni" deb o'qiladi. Bunda $A_4^2=4\cdot 3=12$ bo'ldi.

Endi $X=\{1,2,3,4\}$ to'plam elementlaridan uch xonali juftliklar tuzaylik. 123, 321, 231, 132, 312, 213; 124, 241, 412, 421, 214, 142; 234, 243, 342, 324, 423, 432; 231, 213, 312, 321, 123, 132; 341, 314, 413, 431, 134, 143; 342, 324, 423, 432, 234, 243; 412, 421, 214, 241, 124, 142; 413, 431, 314, 341, 143, 134. Bunda tartiblangan qism to'plamlarning jami soni A_4^3 bilan belgilanib uni “ 4 elementdan 3tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlar soni” deb o‘qiladi. Bunda $A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ bo‘ldi.

Endi yuqoridagi misollardan kelib chiqib fikrimizni umumlashtiramiz.

n ta elementli X to‘plam elementlaridan m tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlar soni deb, m uzunlikdagi tartiblangan qism to‘plamlar soniga aytiladi, bunda m≤n bo‘ladi.

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(n-m+1)}$$

Bu formulani quyidagi ko‘rinishda ham yozishimiz mumkin:

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

Yuqoridagi formulalar takrorsiz o‘rinlashtirishlar sonini topish formulalaridir. Chunki har bir tartiblangan qism to‘plamda to‘plam elementi faqat bir marta ishlatiladi.

Misol №3:

10ta raqamdan nechta turli xil to‘rttaliklar tuzish mumkin?

Yechish: Bunda dastlabki raqam 10 xil usul bilan, keyingisi 9 xil usul bilan, keyingisi 8 xil usul bilan va oxirgisi 7 xil usul bilan tanlanadi. Shunda jami $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ marta tanlov bo‘ladi. YOki $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040$ bo‘ladi.

Misol №4:

28 ta lotin alifbosidan nechta turli xil uchtaliklar tuzish mumkin?

Yechish: Bunda dastlabki harf 28 usul bilan, keyingisi 27 xil usul va oxirgisi 26 xil usul bilan tanlanadi. Shunda jami $A_{28}^3 = 28 \cdot 27 \cdot 26 = 19656$ marta tanlov bo‘ladi. Yoki $A_{28}^3 = \frac{28!}{(28-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dots 23 \cdot 24 \cdot 25} = 26 \cdot 27 \cdot 28 = 19656$ bo‘ladi.

Misol №5:

10 ta elementdan 5 tadan tuzilgan barcha takrorsiz o‘rinlashtirishlar sonini aniqlang.

Yechish: $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 30240.$

Agar yuqoridagi formulada $n = m$ bo‘lsa, u holda takrorsiz o‘rinlashtirishlar soni takrorsiz o‘rin almashtirishlar soniga aylanib qoladi.

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n! = P_n}$$

3). Takrorli o‘rinlashtirishlar:

Aytaylik $n = 4$ ta elementli $X = \{1, 2, 3, 4\}$ to‘plam elementlaridan ikki xonali elementlari takrorlanadigan juftliklar tuzaylik. 11, 12, 13, 14, 22, 23, 24, 21, 33, 34, 31, 32, 41, 42, 43, 44. Jami 4^2 =16ta juftlik hosil bo‘ldi. Bular tartiblangan takrorlanuvchi qism to‘plamlardan iborat bo‘lib, ularning jami sonini $\overline{A}_4^2$ deb belgilanadi va “ 4 elementdan 2tadan olib tuzilgan takrorli o‘rinlashtirishlar soni” deb o‘qiladi. Bunda $\overline{A}_4^2 = 4^2 = 16$ bo‘ldi.

Endi yuqoridagi misoldan kelib chiqib fikrimizni umumlashtiramiz.

n ta elementli X to‘plam elementlaridan tuzilgan va komponentalari takrorlanadigan m taliklarni n elementdan m tadan olib tuzilgan takrorli o‘rinlashtirishlar soni deyiladi, bunda m≤n bo‘ladi.

$$\boxed{\overline{A}_n^m = n^m}$$

Misol №6:

1, 2, 3, 4, 5, 6 7, 8, 9 raqamlaridan nechta uch xonali sonlar tuzish mumkin?

Yechish: Bu sonlar $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ to‘plam elementlari qatnashadigan uchtaliklardan iborat bo‘ladi. Agar raqamlarni takrorlanuvchi deb olinganda $\overline{A}_9^3=9^3=729$ va takrorlanmaydi deb olganda esa $A_{10}^4=\frac{9!}{(9-3)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=7\cdot8\cdot9=648$ bo‘ladi.

4). Takrorsiz o‘rin almashtirishlar:

Aytaylik bizdan $n=3$ ta elementli $X=\{a, b, c\}$ to‘plam elementlarini necha xil usul bilan o‘rini almashtirib yozish mumkinligi so‘ralgan bo‘lsin. Buni $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ ko‘rinishlarda yozish mumkin. Bunda jami $3\cdot2\cdot1=6$ ta o‘rin almashtirishlar bo‘ldi. Misolimizda elementlar takrorlanmasdan, faqat ularning o‘rni almashmoqda.

n ta elementdan tuzilgan takrorsiz o‘rin almashtirishlar soni deb, shu elementlardan olingan n tadan olib tuzilgan o‘rin almashtirishlarga aytiladi va P_n bilan belgilanadi.

$$\boxed{P_n=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n=n!}$$

Misol №7:

12 ta sinf xonasini 12 ta kuratorga necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

Yechish: $P_{12}=12!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot11\cdot12=479\ 001\ 600$.

Misol №8:

a, b, c, d harflarini necha xil usul bilan takrorsiz o‘rin almashtirib yozish mumkin?

Yechish: Elementlar soni 4ta bo‘lgani uchun $P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ bo‘ladi.

5). Takrorli o‘rin almashtirishlar:

Aytaylik bizdan $n=6$ta elementli $X=\{a, a, a, b, c, c\}$ to‘plam elementlarini necha xil usul bilan o‘rnini almashtirib yozish mumkinligi so‘ralgan bo‘lsin. Bunda a harfi $m_1=3$ marta, b harfi $m_2=1$ marta va c harfi $m_3=2$ marta takrorlanmoqda. X to‘plamdagi jami elementlar soni $n=m_1+m_2+m_3=3+1+2=6$ taga teng. Bunda jami o‘rin almashtirishlar sonini $P(m_1;m_2;m_3)$ deb, ya’ni $P(3;1;2)$ deb belgilaymiz.

Takrorli o‘rin almashtirish deb tarkibida a harfi m_1 marta, b harfi m_2 marta, c harfi m_3 marta va hokoza qandaydir a_k harfi m_k marta qatnashadigan $n=m_1+m_2+m_3+\ldots+m_k$ uzunlikdagi har qanday n talikka aytiladi.

Endi $P(m_1;m_2;m_3;\ldots m_k)$ takrorli o‘rin almashtirishlar sonini aniqlash formulasini keltirib chiqaramiz. n talik tarkibidagi m_1 ta o‘ringa a harfini $C_n^{m_1}$ usul bilan o‘rin almashtirish orqali yozish mumkin. U holda qolgan $n-m_1$ ta o‘ringa b harfini $C_{n-m_1}^{m_2}$ usul bilan o‘rin almashtirib yoziladi. Shu yo‘sinda, c harfini $C_{n-m_1-m_2}^{m_3}$ usul bilan o‘rin almashtirib yoziladi va hokoza. Jami o‘rin almashtirishlar sonini ko‘paytirish qoidasiga asosan aniqlanadi.

$$\boxed{P(m_1;m_2;m_3;\ldots m_k)=C_n^{m_1}\cdot C_{n-m_1}^{m_2}\cdot C_{n-m_1-m_2}^{m_3}\cdot\ \ldots\ \cdot C_{n-m_1-m_2-\ldots-m_{k-1}}^{m_k}}$$

Yuqoridagi formula o‘rniga kombinatsiyalar sonini qo‘yib, so‘ngra soddalashtrilsa, ajoyib natijaga ega bo‘lamiz.

$$P(m_1;m_2;m_3;\ldots m_k)=\frac{n!}{m_1!\cdot(n-m_1)!}\cdot\frac{(n-m_1)!}{m_2!\cdot(n-m_1-m_2)!}\cdot\frac{(n-m_1-m_2)}{m_3!\cdot(n-m_1-m_2)}\cdot\ldots=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot m_3!\cdot\ldots\cdot m_k!}$$

Shunday qilib, takrorli o‘rin almashtirishlar sonini aniqlash formulasi quyidagicha bo‘lar ekan:

$$\boxed{P(m_1;m_2;m_3;\ldots m_k)=\frac{n!}{m_1!\cdot m_2!\cdot m_3!\cdot\ldots\cdot m_k!}}$$

Demak, yuqorida berilgan $X=\{a, a, a, b, c, c\}$ to‘plam elementlarini $P(3;1;2)=\frac{6!}{3!\cdot1!\cdot2!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot1\cdot2}=60$ xil usul bilan takrorli o‘rin almashtirish bajarish mumkin ekan.

Misol №9:

15 ta qalamni 3 ta har xil qutiga 5 tadan necha xil usul bilan joylash mumkin?

<u>*Yechish:*</u> Bunda $n=15,\ m_1=m_2=m_3=5,\ k=3$ bo'ladi. Shunda jami joylashlar soni $P(5;\ 5;\ 5)=\frac{15!}{5!\cdot5!\cdot5!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)^3}=\frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=756\ 756$ bo'lar ekan.

Misol №10:

"Algebra" so'zidan harflarning o'rnini almashtirish orqali nechta so'z hosil qilish mumkin?

<u>*Yechish:*</u> Bunda harflar soni $n=7$ ta bo'lib, shulardan faqat "a" harfi $m_1=2$ marta takrorlangan, qolgan harflar esa $m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=1$ marta takrorlangan. Shuning uchun "Algebra" so'zidagi jami takrorlanishlar soni $P(2;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1)=\frac{7!}{2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!\cdot1\cdot1!}==\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{1\cdot2\cdot1^5}=2520$ ta bo'lar ekan.

Misol №11:

"Arifmetika" so'zidan harflarning o'rnini almashtirish orqali nechta so'z hosil qilish mumkin?

<u>*Yechish:*</u> Bunda harflar soni $n=10$ta bo'lib, shulardan "a" harfi $m_1=2$ marta takrorlangan, "i" harfi $m_2=2$ marta takrorlangan, qolgan harflar esa $m_5=m_6=m_7=m_8=m_9=m_{10}=1$ marta takrorlangan. Shuning uchun "Arifmetika" so'zidagi jami takrorlanishlar soni $P(2;\ 2;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1)=\frac{10!}{2!\cdot2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!\cdot1!\cdot1\cdot1!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1^6}=907\ 200$ ta bo'lar ekan.

Misol №11:

"Muqarrar" so'zidan harflarning o'rnini almashtirish orqali nechta so'z hosil qilish mumkin?

<u>*Yechish:*</u> Bunda harflar soni $n=8$ta bo'lib, shulardan "r" harfi $m_1=3$ marta takrorlangan, "a" harfi $m_2=2$ marta takrorlangan, qolgan harflar esa $m_6=m_7=m_8=1$ marta takrorlangan. Shuning uchun "Muqarrar" so'zidagi jami takrorlanishlar soni $P(3;\ 2;\ 1;\ 1;\ 1)=\frac{8!}{3!\cdot2!\cdot1!\cdot1!\cdot1!}=$

$=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot1^3}=3\ 360$ ta bo'lar ekan.

Agar takrorli o'rin almashtirishlarda $m_1=m_2=m_3=...=m_k=1$ bo'lsa, u holda takrorsiz o'rin almashtirish formulasi kelib chiqadi.

$$\boxed{P(1;1;1;...1)=\frac{n!}{1!\cdot1!\cdot1!\cdot...\cdot1!}=n!=P_n}$$

6). Takrorsiz kombinatsiyalar yoki gruppalashlar:

Endi X to'plam elementlaridan m taliklar emas, balki qism to'plamlar tuzaylik. Aytaylik $n=5$ta elementli $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ to'plam elementlaridan uch xonali turli raqamlardan iborat bo'lgan kombinayiyalar tuzaylik. 123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345. Kombinatsiyalar soni jami 10 ta bo'lib, lekin har bir kombinatsiyaning o'zida 6ta o'rin almashtirishlar bajarish mumkin. Masalan, 123, 132, 231,213, 312, 321. Agar har biridagi o'rin almashtirishlarni ham hisobga olganda jami $A_5^3=5\cdot4\cdot3=60$ ta takrorsiz o'rinlashtirishlar hosil bo'lardi. Lekin har kombinatsiyaning ichida $P_3=3!=1\cdot2\cdot3=6$ ta o'rin almashtirishlarni chiqarib tashlasak, kombinatsiyalar soni $\frac{A_5^3}{P_3}=\frac{60}{6}=10$ta ekani kelib chiqadi. Bu kombinatsiyalar sonini C_5^3 deb belgilanadi va " 5 elementdan 3tadan olib tuzilgan takrorsiz kombinatsiyalar soni" deb o'qiladi.

n ta elementdan iborat chekli to'plamning m ($m\leq n$) elementdan iborat har qanday qism to'plamini m tadan gruppalash deyiladi yoki n elementdan m tadan olib tuzilgan takrorsiz kombinatsiyalar deyiladi.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Misol №12:

24 ta o'quvchidan 4 tasini olimpiada musobaqasiga yuborish kerak. Bunda o'quvchilarni necha usul bilan saralash kerak bo'ladi?

Yechish: Bu misolni 24 elementdan 4 tadan olib tuzilgan takrorsiz kombinatsiyalar sonini aniqlash masalasi yoki 24 tadan qism to'plamlarni 4 tadan gruppalash sonini aniqlash masalasi deb ataymiz. Shunda $C_{24}^4 = \frac{A_{24}^4}{P_4} = \frac{24!}{4!(24-4)!} = \frac{24!}{4!\cdot 20!} = \frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 21\cdot 22\cdot 23 = 10\ 626$ ta kombinatsiyalar soni yoki gruppalashlar soni kelib chiqadi.

Misol №13:

Bir aylanada yotgan 6 ta nuqtadan nechta vatar o'tkazish mumkin?

Yechish: Bu misolni 6 elementdan 2 tadan olib tuzilgan takrorsiz kombinatsiyalar sonini aniqlash masalasi yoki 6 tadan qism to'plamlarni 2tadan gruppalash sonini aniqlash masalasi deb ataymiz. Shunda $C_n^2 = \frac{A_6^2}{P_2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15$ ta kombinatsiyalar soni yoki gruppalashlar soni kelib chiqadi. Demak, 15 ta vatar o'tkazish mumkin ekan.

Misol №14:

Bir aylanada yotgan 6 ta nuqtadan nechta uchburchak yasash mumkin?

Yechish: Bu misolni 6 elementdan 3tadan olib tuzilgan takrorsiz kombinatsiyalar sonini aniqlash masalasi yoki 6 tadan qism to'plamlarni 3tadan gruppalash sonini aniqlash masalasi deb ataymiz. Shunda $C_n^3 = \frac{A_6^3}{P_3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20$ ta kombinatsiyalar soni yoki gruppalashlar soni kelib chiqadi. Demak, 20ta uchburchak yasash mumkin ekan.

7). Takrorli kombinatsiyalar:

n ta elementdan $m(0 < m \le n)$ tadan qaytariladigan guruhlashlar soni yoki takrorli kombinatsiyalar soni quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\overline{C}_m^k = C_{k+m-1}^k = \frac{(k+m-1)!}{k!(m-1)!}$$

Misol №15:

5 xil kitobdan necha usul bilan 8 kitobdan iborat to'plam yozish mumkin?

Yechish: Bunda izlanayotgan son $\overline{C}_5^8 = C_{8+5-1}^8 = C_{12}^8 = \frac{12!}{8!\cdot(12-8)!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 495$ ga teng bo'ladi.

Misol №16:

Tomonlari 4, 5, 6, 7 bo'lishi mumkin bo'lgan uchburchaklardan nechtasini yasash mumkin?

Yechish: Bunda izlanayotgan son $\overline{C}_3^7 = C_{7+3-1}^7 = C_9^7 = \frac{9!}{7!\cdot(9-7)!} = \frac{8\cdot 9}{1\cdot 2} = 36$ ga teng bo'ladi.

14.2-Mavzu: Binomning natural darajasi uchun Nyuton formulasi.

Ikki hadlar ko'paytmasidan iborat ko'paytuvchilarni binomlar deyiladi. Faqat ikkinchi hadlari bilan farqlanadigan binomlar ko'paytmasini ochib chiqqish formulasi quyidagicha yoziladi:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_{n-1})(x+a_n) = x^n + S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} + S_3x^{n-3} + \dots + S_{n-2}x^{n-1} + S_{n-1}x^n + S_n$$

Bu erda:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_3 + \dots + a_{n-2}a_n + a_{n-1}a_n$$
$$S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \dots + a_{n-2}a_{n-1}a_n$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = a_1a_2a_3a_4\dots a_{n-2}a_{n-1}a_n$$

Yig'indi ikkihadning ixtiyoriy natural darajasini topish uchun Nyuton formulasidan foydalaniladi.

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-2} a^2 b^{n-2} + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n}$$

Bu erda: ixtiyoriy C_n^k koeffitsientlarni *binomial koeffitsientlar* deyiladi.

Nyuton formulasining asosiy xossalarini sanab o'tamiz.

1. n-darajali binom yoyilmasida $n+1$ta had bo'ladi.
2. YOyilmada $a$ning darajalari $n$dan 0gacha 1tadan kamayib boradi, $b$ning darajalari esa 0 dan $n$gacha 1tadan oshib boradi.
3. YOyilmaning koeffitsientlari $C_n^0 = 1$, C_n^1, C_n^2, C_n^3, ..., C_n^{n-1}, $C_n^n = 1$ bo'lib, ulardan ixtiyoriy k-hadi C_n^{k-1} ga teng bo'ladi.
4. YOyilmaning chetlaridan bir xil uzoqlikda turgan binomial koeffitsientlar o'zaro tengdir. Boshqacha aytganda binomial koeffitsientlar simmetriyaga ega.
5. Agar binom darajasi juft $(n = 2k)$ bo'lsa, yoyilmaning o'rtasidagi hadning binomial koeffitsienti eng katta bo'ladi. Agar binom darajasi toq $(n = 2k-1)$ bo'lsa, yoyilmaning o'rtasida ikkita hadning binomial koeffitsientlari o'zaro teng va eng katta bo'ladi
6. YOyilmaning ixtiyoriy k-hadi $T_k = C_n^{k-1} a^{n-k+1} b^{k-1}$ formula bilan hisoblanadi.
7. Barcha binomial koeffitsientlarining yig'indisi $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ ga teng bo'ladi.
8. Juft o'rinda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisi toq o'rinda turgan binomial koeffitsientlar yig'indisiga teng bo'ladi.

Binomial koeffitsientlarini tez fursatda hisoblash uchun ushbu Paskal uchburchagidan foydalanish tavsiya etiladi.

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
$n=9$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
$n=10$	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Endi mavzuga doir bir necha misollar echaylik.

Misol №1:

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ binomlarning ko'paytmasini aniqlang.

<u>*Yechish:*</u> Bunda koeffitsientlar uchun

$S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1+2+3+4 = 10$

$S_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4 = 1\cdot2 + 1\cdot3 + 1\cdot4 + 2\cdot3 + 2\cdot4 + 3\cdot4 = 35$

$S_3 = a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4 = 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot2\cdot4 + 1\cdot3\cdot4 + 2\cdot3\cdot4 = 6+8+12+24 = 50$

$S_4 = a_1a_2a_3a_4 = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$

bo'ladi. Ko'phad esa $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ bo'ladi.

Misol №2:

$(x+y)^{12}$ binom yoyilmasidagi 7-hadning binomial koeffitsientini va shu hadning o'zini aniqlang.

Yechish: Bunda 7-hadning binomial koeffitsienti $C_n^{k-1} = C_{12}^{7-1} = C_{12}^6 = \frac{12!}{6!\cdot(12-6)!} = \frac{12!}{(6!)^2} = 924$ ga, 7-hadi esa $T_7 = C_n^{k-1}a^{n-k-1}b^{k-1} = C_{12}^{7-1}a^{12-7+1}b^{7-1} = 924a^6b^6$ ga teng bo'ladi.

Misol №3:

Agar $(x+y)^n$ binom yoyilmasida binomial koeffitsientlar yig'indisi 512 ga teng bo'lsa, binom darajasi va yoyilmaning 5-hadi nimaga teng bo'ladi?

Yechish: Bunda binom darajasi $2^n = 512$ dan $n=9$ bo'ladi. Yoyilmaning 5-hadi esa $T_k = C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$ formulaga asosan, $T_5 = C_9^{5-1}a^{9-5+1}b^{5-1} = \frac{9!}{4!\cdot(9-4)!}a^5b^4 = \frac{9!}{4!\cdot 5!}a^5b^4 = 126a^5b^4$ ga teng bo'ladi.

Misol №4:

Agar $(x+y)^n$ binom yoyilmasining 3-hadining koeffitsienti 231 ga teng bo'lsa, yoyilmaning daraja ko'rsatkichini toping.

Yechish: Bunda 3-hadning binomial koeffitsienti C_n^{k-1} formulaga ko'ra $C_n^{3-1} = C_n^2 = \frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 231, \to n^2 - n - 462 = 0,\ (n-22)(n+21) = 0$ bo'ladi. Bundan $n = 22$ javobni tanlaymiz.

14.3-Mavzu: Hodisalar, hodisalar ustida amallar. Hodisalarning xossalari.

Har qanday hodisani kuzatish yoki tajriba tariqasida o'rganish ma'lum sinovlarni o'tkazish orqali amalga oshiriladi. Sinovning har qanday natijasi yoki oqibatini ***hodisa*** deyiladi. Hodisalar lotin alifbosining bosh harflari bilan, masalan $A, B, C, \ldots$ kabi belgilanadi.

Agar berilgan shartlarda hodisa ro'y berishi ham ro'y bermasligi ham mumkin bo'lsa, bunday hodisani ***tasodifiy hodisa*** deyiladi. Albatta sodir bo'ladigan hodisaga ***muqarrar hodisa*** deyiladi. Ro'y bermasligi oldindan ma'lum bo'lgan hodisaga ***mumkin bo'lmagan hodisa*** deyiladi. Tajribaning har qanday natijasiga ***elementar hodisa*** deyiladi.

Agar bir hodisaning ro'y berishi boshqa bir hodisani keltirib chiqarmasa yoki boshqa hodisalarning ro'y berishini yo'qqa chiqarsa, bunday hodisalar ***birgalikda bo'lmagan hodisalar*** deyiladi. Bunda har gal bitta hodisa sodir bo'ladi.

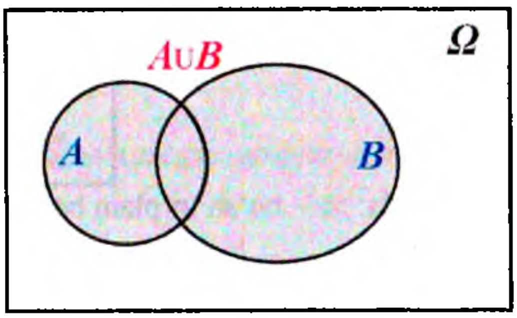
Agar bir hodisaning ro'y berishi boshqa bir hodisani keltirib chiqarsa, bunday hodisalar ***birgalikda bo'lgan hodisalar*** deyiladi.

Barcha hodisalar ro'y beradigan sohani hodisalar fazosi deyiladi va Ω bilan belgilanadi. Ω fazosi muqarrar hodisadir.

Endi hodisalar ustida bo'ladigan munosobatlarga to'xtalamiz. Hodisalar ustida bajariladigan amallar xuddi to'plamlar ustida bajariladigan amallarga o'xshab ketadi.

A va B hodisalarning yig'indisi deb, ularning kamida bittasida, ya'ni yoki A hodisada yoki B hodisada yoki A va B hodisada ro'y beradigan hodisaga aytiladi (14.3.1-rasm).

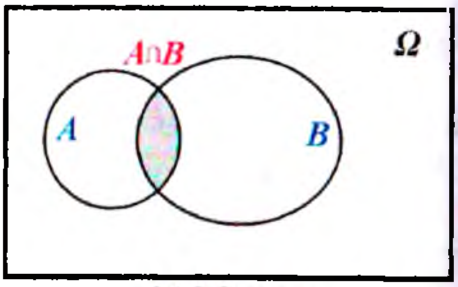
$$\boxed{C = A \cup B \quad \text{yoki} \quad C = A + B}$$



14.3.1-rasm

A va B hodisalarning ko'paytmasi deb, ularning ikkalasida ham, ya'ni A va B hodisalarning har birida bir vaqtda ro'y beradigan hodisaga aytiladi (14.3.2-rasm).

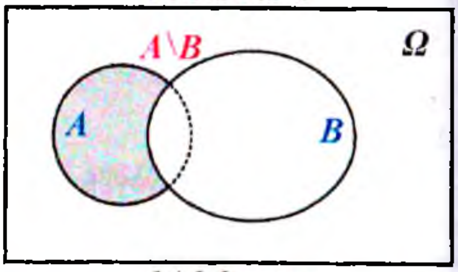
$$\boxed{C = A \cap B \quad yoki \quad C = A \cdot B}$$



14.3.2-rasm

A hodisadan B hodisaning ayirmasi deb, A hodisa ro'y berib, B hodisa ro'y bermasligidan iborat hodisaga aytiladi (14.3.3-rasm).

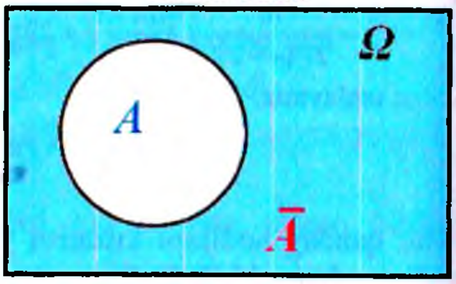
$$\boxed{C = A \setminus B \quad yoki \quad C = A - B}$$



14.3.3-rasm

A hodisaga qarama-qarshi hodisa faqat va faqat A hodisa ro'y bermaganda ro'y beradigan $\overline{A}$ hodisadir (14.3.4-rasm).

Agar A hodisa ro'y berishidan B hodisaning ham ro'y berishi kelib chiqsa, u holda A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A \subseteq B$ kabi yoziladi.



14.3.4-rasm

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo'lsa, u holda A va B hodisalar teng kuchli hodisalar deyiladi va $A = B$ ko'rinishida yoziladi.

Hodisalar uchun o'rin almashtirish, guruhlash va taqsimot xossalari o'rinlidir.

$A + B = B + A,$	$A \cdot B = B \cdot A$
$(A + B) + C = A + (B + C),$	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$	

Bulardan tashqari hodisa, qarama-qarshi hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa va muqarrar hodisalar orasida quyidagi amallar o'rinlidir:

$A + A = A,$	$A \cdot A = A$
$A + \Omega = \Omega,$	$A \cdot \Omega = A$
$A + \otimes = A,$	$A \cdot \otimes = \otimes$
$A + \overline{A} = A,$	$A \cdot \overline{A} = \otimes$
$\overline{\otimes} = \Omega$	$\overline{\Omega} = \otimes,$
$\overline{\overline{A}} = A$	$A - B = A \cdot \overline{B}$

Bu erda: $\otimes$ – bo'sh to'plam belgisi.

Misol №1:

$(A + B) \cdot (\overline{A} + B)$ ifodani soddalashtiring.

<u>Yechish:</u> Bunda qavsni osib chiqib, so'ngra yuqorida sanab o'tilgan xossalardan foydalanamiz.
$(A + B) \cdot (\overline{A} + B) = A \cdot \overline{A} + A \cdot B + B \cdot \overline{A} + B \cdot B = \otimes + B \cdot (A + \overline{A}) + B = B \cdot \Omega + B = B + B = B.$

Misol №2:

$(A + B) \cdot (A - B)$ ifodani soddalashtiring.

<u>Yechish:</u> Bunda qavsni osib chiqib, so'ngra yuqorida sanab o'tilgan xossalardan foydalanamiz.
$(A + B) \cdot (A - B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B = A + \otimes - B = A - B = A \setminus B.$

14.4-Mavzu: Ehtimollik va uning ta'riflari.

Hodisalarni o'rganar ekanmiz, uning ro'y berishi qanchalik haqiqatga yaqinligin baholovchi kattalik kirgizamiz. Bu kattalikni *ehtimollik* deb ataladi. Ehtimollikning qanchalik katta yoki kichikligiga qarab biror hodisani ro'y berish yoki bermasligini oldindan taxmin qilish yoki bashorat qilish mumkin bo'ladi.

Ehtmimollikka 3 xil ta'rif keltiriladi. Ushbu mavzuda ana shu ta'riflarga alohida-alohida to'xtalamiz.

1). Ehtimollikning klassik ta'rifi:

A hodisaning ehtimoli deb, bu hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradigan natijalar soni m ning barcha natijalar soni n ga nisbatiga aytiladi.

$$\boxed{P(A)=\frac{m}{n}}$$

Har qanday hodisaning ehtimoli 0 va 1 oraliqda yotadi, ya'ni $0\le P(A)\le 1$ bo'ladi. Bu oraliqdan chiqib ketishi mumkin emas. Mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli $P(A)=0$ va muqarrar hodisaning ehtimoli $P(A)=1$ bo'ladi.

Misol №1:

Ichida 17 ta oq va 8 ta qora shar bo'lgan yashikdan tavakkaliga 3 ta shar olindi. Olingan uchala shar ham qora bo'lish ehtimoli nechaga teng?

Yechish: Uchta qora shar chiqish hodisasini A bilan, uning ehtimolini esa $P(A)$ bilan belgilaymiz. Mumkin bo'lgan hollarning umumiy n soni 25 dan 3 tadan tuzilgan gruppalashlar (takrorsiz kombinatsiyalar) soniga teng bo'ladi.

$$C_{25}^{3}=\frac{25!}{3!\cdot(25-3)!}=\frac{23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3}=2300$$

A hodisaga imkon yaratuvchi hollar soni m esa 8 dan 3 tadan tuzilgan gruppalashlar (takrorsiz kombinatsiyalar) soniga teng bo'ladi.

$$C_{8}^{3}=\frac{8!}{3!\cdot(8-3)!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}=56$$

Ehtimollikning klassik ta'rifi bo'yicha uchta qora shar chiqish ehtimolini topamiz.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{56}{2300}=\frac{14}{575}$$

Misol №2:

50 ta lampochkadan 5 tasi kuyganligi ma'lum. Tavakkaliga bir vaqtda olingan 2 ta lampochkaning ikkalasi ham kuygan lampochkalar bo'lib chiqish ehtimolini aniqlang.

Yechish: Ikkita kuygan lampochka chiqish hodisasini A bilan, uning ehtimolini esa $P(A)$ bilan belgilaymiz. Mumkin bo'lgan hollarning umumiy n soni 50 dan 2 tadan tuzilgan gruppalashlar (takrorsiz kombinatsiyalar) soniga teng bo'ladi.

$$C_{50}^{2}=\frac{50!}{2!\cdot(50-2)!}=\frac{49\cdot 50}{1\cdot 2}=1225$$

A hodisaga imkon yaratuvchi hollar soni m esa 5 dan 2 tadan tuzilgan gruppalashlar (takrorsiz kombinatsiyalar) soniga teng bo'ladi.

$$C_{5}^{2}=\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}=10$$

Ehtimollikning klassik ta'rifi bo'yicha ikkita kuygan lampochka chiqish ehtimolini topamiz.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{1225}=\frac{1}{245}$$

Misol №3:

Abonent telefon raqamini terayotganda oxirgi uchta raqamni eslay olmadi. Lekin, raqamlar bir xillari yo'qligini biladi. Barcha terishlardan to'g'ri nomerni terish ehtimoli nimaga teng bo'ladi?

Yechish: To'g'ri raqamni terish hodisasini A bilan, uning ehtimolini esa $P(A)$ bilan belgilaymiz. Oxirgi uchta raqamni A_{10}^{3} usul bilan terish mumkin. Shunda jami sinovlar soni

$n = A_{10}^3 = \dfrac{10!}{(10-3)!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ ga teng bo'ladi. Izlanayotgan nomer bitta bo'lgani uchun A hodisaning elementi faqat $m=1$ ta bo'ladi. Ehtimollikning klassik ta'rifi bo'yicha $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{720} \approx 0{,}1389\%$ bo'ladi.

Misol №4:

Kiyim tikish fabrikasida tikilgan $N = 100$ ta kostyumdan $M = 8$ tasi yaroqsiz ekani ma'lum. Tavakkaliga $n = 15$ ta tanlangan kostyumdan $k = 3$ tasi yaroqsiz bo'lib chiqish ehtimoli nimaga teng?

<u>*Yechish:*</u> Barcha tanlanadigan natijalar soni N dan n tadan tuzilgan gruppalashlar soni C_N^n ga teng bo'ladi.

Bunda A hodisa k tasi yaroqsiz bo'lgan n ta kostyumni olishdir. A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradigan natija shunday n ta kostyumdan iborat gruppaki, bu gruppada $n-k$ ta yaroqli va k ta yaroqsiz kostyum bor. Bunday gruppalar soni $C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}$ taga teng. CHunki, k ta yaroqsiz kostyumlarni C_M^k usul bilan, $n-k$ ta yaroqli kostyumlarni C_{N-M}^{n-k} usul bilan tuzish mumkin. Bunda yaroqsiz kostyumlarning istalgan gruppasi yaroqsiz kostyumlarning istalgan gruppasi bilan kombinatsiyalarda birga kelishi mumkin.

A hodisaning biz izlayotgan ehtimoli bu hodisa ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi natijalar sonining barcha elementar natijalar soniga nisbatiga teng bo'ladi.

$$P(A) = \frac{C_M^k \cdot C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{\dfrac{M!}{k!\cdot(M-k)!} \cdot \dfrac{(N-M)!}{(n-k)!\cdot(N-M-n+k)!}}{\dfrac{N!}{n!\cdot(N-n)!}} = \frac{\dfrac{8!}{3!\cdot 5!} \cdot \dfrac{92!}{12!\cdot 80!}}{\dfrac{100!}{15!\cdot 85!}} = \frac{20318345928572328}{253338471349988640}$$

$\approx 0{,}0802 = 8{,}02\ \%$.

2). Ehtimollikning statistik ta'rifi:

Agar biror A hodisani kuzatish uchun N marta sinov o'tkazilgan bo'lib, bu sinovlarning M $(M < N)$ tasida A hodisa ro'y bergan bo'lsa, u holda ro'y berishlar soni M ni absayut chastota deb, M/N nisbatga esa nisbiy chastota deb ataladi.

$$\boxed{W(A) = \frac{M}{N}}$$

Ehtimollikni bunday hisoblash tartibi ehtimollikka *statistik yondashish* hisoblanadi. Statistik yondashishda albatta tajriba o'tkazilish kerak bo'ladi. Tajriba natijalariga qarab ehtimollik aniqlanadi. Shuni alohida takidab o'tish kerakki, statistik yondashuvda biror hodisaning ro'y berish ehtimoli aniq bir songa teng bo'lmasdan qandaydir bir son atrofida tebranib turadi. Misol tariqasida quyida 1-jadvalda tanga tashlashlar soni, bunda gerbli tomon tushishlar soni va ehtimollik (nisbiy chastota) berilgan.

1-jadval

Tajribalar soni, N	Tushgan gerblar soni, M	Nisbiy chastota, M/N
4 040	2 048	0,5080
12 000	6 019	0,5016
24 000	12 012	0,5005

Jadvaldan ko'rinadiki, tajribalar soni juda katta bo'lganda nisbiy chastota aniq bir songa intilar ekan, ya'ni statistik ehtimollik klassik ehtimollikka intilar ekan.

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} W(A) \approx P(A)}$$

Muqarrar hodisa uchun $M = N$, mumkin bo'lmagn hodisa uchun esa $M = 0$ bo'ladi.

Misol №5:

Natural sonlar qatorining dastlabuki 4000 ta soni ichidan 551 tasi tub son ekanligi ma'lum bo'lsa, tub son chiqish chastotasini aniqlang.

Yechish: Bu erda tub son chiqish hodisasini A bilan, uning nisbiy chastotasini esa $W(A)$ bilan belgilaymiz. O'tkazilgan jami sinovlar soni $N = 4000$ ga, absalyut chastota $M = 551$ ga teng. Nisbiy chastota $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{551}{4000} = 0{,}13775 = 13{,}775\%$ ga teng bo'ladi.

Misol №6:

Yil davomida O'zbekiston Respublikasida 560 000 ta chaqaloq tug'ilib, shulardan 300 000 tasi qiz bolalar bo'lsa, o'g'il bola tug'ilish chastotasi nimaga teng?

Yechish: Bu erda o'g'il bola tug'ilish hodisasini A bilan, uning nisbiy chastotasini esa $W(A)$ bilan belgilaymiz. Tug'ilgan jami chaqaloqlar soni $N = 560\ 000$ ga, shulardan o'g'il bolalar soni $M = 560\ 000 - 300\ 000 = 260\ 000$ ga teng. Nisbiy chastota $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{260\ 000}{560\ 000} = \frac{13}{28} = 46{,}429\%$ ga teng bo'ladi.

Misol №7:

Nishonga tekizish musobaqasida mergan 100 ta o'qdan 78 tasini nishonga tekkizgan bo'lsa, nishonga tekkizish chastotasi nimaga teng bo'ladi?

Yechish: Bu erda sinovlar soni $N = 100$ ga, absalyut chastota $M = 78$ ga teng. Nisbiy chastota $W(A) = \frac{M}{N} = \frac{78}{100} = 0{,}78 = 78\%$ ga teng bo'ladi.

3). Ehtimollikning geometrik ta'rifi:

Barcha nuqtalari teng imkoniyatga ega bo'lgan biror soha (chiziq yoki yuza yoki hajm) berilgan bo'lib, bu sohaga tashlangan nuqtaning unga tushishi muqarrar bo'lsin. Shu berilgan sohadan kichkina sohacha (chiziqcha yoki yuzacha yoki hajmcha) ajrataylik. Sohaga tashlangan nuqtaning ajratilgan sohachaga tushish ehtimoli so'ralgan bo'lsin. Ajratilgan sohacha qancha katta bo'lsa tushish ehtimoli ham kattalashib boradi, sohacha sohaga tenglashganda esa tushish ehtimoli muqarrar hodisaga aylanadi. Demak, tashlangan nuqtaning sohachaga tushish ehtimoli sohacha kattaligiga to'g'ri proporsional bo'lib, uni geometrik nuqtai nazardan talqin qilish kerak bo'ladi. Bu joyda ehtimollikning klassik yoki statistik ta'riflaridan foydalanish unchalik to'g'ri emas. Bunday hollarda ehtimollikning geometrik ta'rifidan foydalanish qulaydir.

Agar tashlangan nuqtaning Ω sohaga tushishi muqarrar bo'lsa, u holda bu nuqtaning shu sohadan ajratilgan ω sohachaga tushish ehtimoli ω sohachaning Ω sohaga nisbatiga teng bo'ladi.

$$\boxed{P(A) = \frac{\omega}{\Omega}}$$

Agar Ω sohani L chiziq va ω sohachani ℓ chiziqcha deb olsak, L chiziqqa tashlangan nuqtaning ℓ chiziqchaga tushish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{P(A) = \frac{\ell}{L}}$$

Agar Ω sohani S yuza va ω sohachani s yuzacha deb olsak, S yuzaga tashlangan nuqtaning s yuzachaga tushish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{P(A) = \frac{s}{S}}$$

Agar Ω sohani V hajm va ω sohachani ϑ hajmcha deb olsak, V hajmga tashlangan nuqtaning' ϑ hajmchaga tushish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

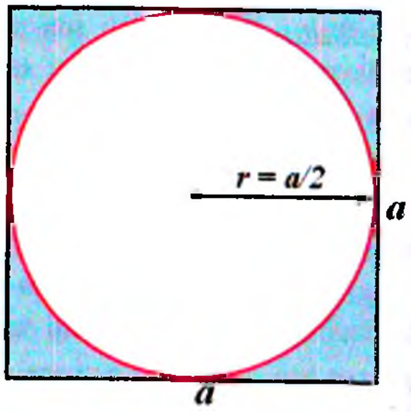
$$\boxed{P(A) = \frac{\vartheta}{V}}$$

Geometrik ta'rifdan vaqtga nisbatan ham foydalanish mumkin. Agar voqea T vaqt ichida sodir bo'lishi muqarrar bo'lsa, bu voqeaning τ vaqt ichida sodir bo'lish ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{P(A) = \frac{\tau}{T}}$$

Misol №8:

Kvadratga ichki doira chizilgan. Kvadratga tavakkaliga otilgan nuqtaning doira tashqarisidagi kvadrat yuzasiga tushish ehtimoli topilsin.



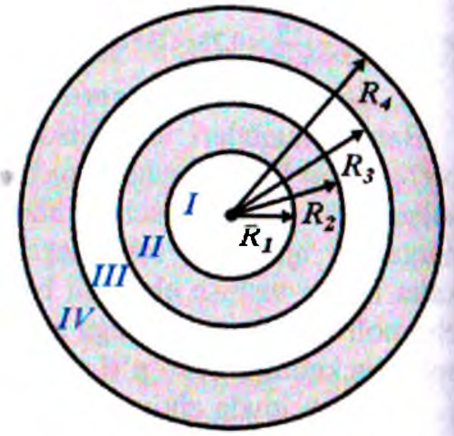
14.4.1-rasm

Yechish: Tomoni a bo'lgan kvadrat yuzasi a^2 ga, unga ichki chizilgan doiraning yuzasi $\pi r^2 = \frac{\pi a^2}{4}$ ga va kvadratning doira tashqarisidagi qism yuzasi esa $a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \frac{4-\pi}{4}a^2$ ga teng. Ehtimollikning geometrik ta'rifiga ko'ra $P(A) = \frac{s}{S} = \frac{\frac{4-\pi}{4}a^2}{a^2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 21{,}46$ % ga teng bo'ladi.

Misol №9:

Nishon radiuslari $R_1 = r$, $R_2 = 2r$, $R_3 = 3r$, $R_4 = 4r$ arifmetik progressiya hosil qiluvchi to'rtta doiradan iborat (14.4.1-rasm). Agar nayzaning nishonga tegishi muqarrar bo'lsa, u holda nayzaning har bir sohaga tushish ehtimolini aniqlang.

Yechish: Nishonning to'la yuzasi $S = \pi R_4^2 = 16\pi r^2$ ga teng. Bunda har bir soha yuzasini aniqlaymiz. I soha yuzasi $s_1 = \pi R_1^2 = \pi r^2$, II soha yuzasi $s_2 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2 = 3\pi r^2$, III soha yuzasi $s_3 = \pi R_3^2 - \pi R_2^2 = 5\pi r^2$ va IV soha yuzasi $s_4 = \pi R_4^2 - \pi R_3^2 = 7\pi r^2$ gateng bo'ladi. Ehtimollikning geometrik ta'rifidan foydalanib, nayzaning har bir sohaga tushish ehtimolliklarini aniqlaymiz.



14.4.2-rasm

$$P(A_1) = \frac{s_1}{S} = \frac{\pi r^2}{16\pi r^2} = \frac{1}{16}, \quad P(A_2) = \frac{s_2}{S} = \frac{3\pi r^2}{16\pi r^2} = \frac{3}{16},$$

$$P(A_3) = \frac{s_3}{S} = \frac{5\pi r^2}{16\pi r^2} = \frac{5}{16}, \quad P(A_4) = \frac{s_4}{S} = \frac{7\pi r^2}{16\pi r^2} = \frac{7}{16}$$

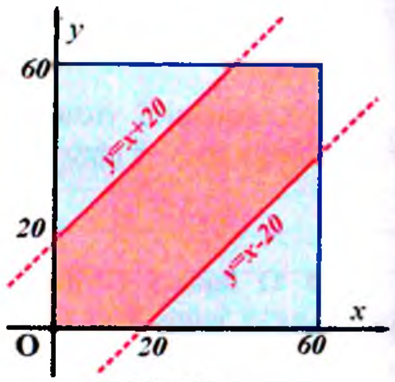
Misol №10:

Uchrashmoqchi bo'lgan ikkita A va B kishi biror tayinli joyda soat 11 bilan 12 orasida ushrashishga ahdlashib olishdilar. Lekin, har bir kishi uchrashuv joyiga kelib 20 minut kutib, so'ngra ketgan bo'lsa, u holda bu kishilarning urashish ehtimolligini toping.

Yechish: Bunda har bir kishining kelish vaqti tasodifiy va bir-biriga bog'liqmas bo'ladi. A kishining kelish vaqtini x bilan, B kishining kelish vaqtini esa y bilan belgilasak, u holda ular uchrashishi uchun

$$|x-y| \le 15 \text{ minut}$$

bo'lishi kerak. x va y ni Dekart koordinatalar sistemasi o'qlari deb hamda masshtab birligi sifatida 1 minutni olamiz. U holda barcha mumkin bo'lgan imkoniyatlar tomoni 60 ga teng bo'lgan kvadratga teng bo'ladi (14.4.3-rasm). Bunda $S = 60^2 = 3600 = T$ bo'ladi. Uchrashuvga qulaylik tug'diruvchi imkoniyatlar $|x-y| \le 20$ tenglamaga ko'ra $\begin{cases} y \ge x-20 \\ y \le x+20 \end{cases}$ sohada, ya'ni $y = x-20$ to'g'ri chiziqdan yuqorida va $y = x+20$ to'g'ri chiziqdan pastda yotgan yuzada bo'ladi. Bu imkoniyatlar yuzasi esa $s = 60^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 40^2 = 3600 - 1600 = 2000 = \tau$ ga teng bo'ladi.



14.4.3-rasm

Ehtimollikning geometrik ta'rifiga ko'ra kishilarning bir-birini uchratish ehtimolligi $P(A) = \frac{\tau}{T} = \frac{2000}{3600} = \frac{5}{9} = 45{,}4545$ % ga teng bo'ladi.

14.5-Mavzu: Ehtimollarni qo'shish teoremalari

Ehtimollarni qo'shish qoidalari, birgalikda va birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun alohida-alohida keltiriladi.

1). Birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish:

Bir tajribada hodisalarning birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor etsa, ya'ni biri ro'y berganda ikkinchisi ro'y bermasa, bunday hodisalar *birgalikda bo'lmagan hodisalar* deyiladi.

1-teorema: Ikkita birgalikda bo'lmagan A va B hodisalar yig'indisining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari yig'indisiga teng bo'ladi.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$$

2-teorema: Agar $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ hodisalarning har ikkitasi birgalikda bo'lmagan hodisalarni tashkil etsa, u holda bu hodisalar yig'indisining ehtimoli ularning ehtimollari yig'indisiga tengdir.

$$\boxed{P(A_1+A_2+A_3+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\dots+P(A_n)}$$

1- va 2-teoremalardan ushbu natijalar kelib chiqadi.

1-natija: Agar $A_1, A_2, A_3, \dots A_n$ hodisalar barcha hodisalarning to'la guruhini tashkil etsa, u holda quyidagi ifoda o'rinli bo'ladi:

$$\boxed{P(A_1+A_2+A_3+\dots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\dots+P(A_n)=1 \quad yoki \quad P\left(\sum A_i\right)=\sum P(A_i)=1}$$

2-natija: A va $\overline{A}$ qarama-qarshi hodisalraning yig'indisi 1 ga teng bo'ladi.

$$\boxed{P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1}$$

Ko'pincha $P(A)=p$ va $P(\overline{A})=q$ deb belgilanadi. Ular orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{p+q=1}$$

Misol №1:

8ta oq va 4ta qora shar solingan tavakkaliga 3ta shar olindi. Olingan sharlar ichida hech bo'lmaganda bitta qora shar bo'lish ehtimoli nimaga teng?

Yechish: Olingan 3ta shar ichida hech bo'lmaganda bittasi qora shar bo'lish hodisasini A bilan belgilaymiz. U holda $\overline{A}$ olingan sharlar ichida bitta ham qora shar chiqmaslik hodisasini belgilanadi. Bizdan $P(A)$ni topish so'ralgan. Mavjud sharlar ichidan 5ta sharni C_{12}^3ta usul bilan olish mumkin. 8ta oq shardan 3ta sharni C_8^3ta usul bilan olish mumkin. SHuning uchun

$$P(\overline{A})=\frac{C_8^3}{C_{12}^3}=\frac{\dfrac{8!}{3!\cdot(8-3)!}}{\dfrac{12!}{3!\cdot(12-3)!}}=\frac{48}{240}=\frac{1}{5}=0,2$$

bo'ladi. Izlanayotgan ehtimollik $P(A)=1-P(\overline{A})=1-0,2=0,8$ bo'ladi.

2). Birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimollarini qo'shish:

Bitta tajribada bir hodisaning ro'y berishi ikkinchisining ro'y berishini inkor etmasa, bunday hodisalarni *birgalikdagi hodisalar* deyiladi.

1-teorema: Ikkita birgalikdagi hodisadan hech bo'lmaganda birining ro'y berish ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimolligini ayirish natijasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)}$$

Uchta birgalikdagi hodisalar yig'indisining ehtimolligi quyidagi formula bo'yicha hisoblanadi:

$$\boxed{P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(B\cdot C)-P(A\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C)}$$

Misol №2:

Birinchi fermer xo'jaligining rejani bajarish ehtimoli 0,85 ga, ikkinchisiniki 0,92 ga teng. Ulardan birining rejani bajarishi ikkinchisiga bog'liq emas. Ulardan hech bo'lmasa birining rejani bajarish ehtimoli nimaga teng?

Yechish: Bu masalada 1-fermer xo'jaligining rejani bajarish hodisasini A bilan, 2-fermer xo'jaligining rejani bajarish hodisasini esa B bilan ularning ehtimolliklarini $P(A)$ va $P(B)$ bilan belgilaymiz. A va B bog'liqmas hodisalar bo'lgani uchun ularning ko'paytmasi $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}85\cdot 0{,}92=0{,}782$ bo'ladi. Hech bo'lmaganda bitta fermer xo'jaligining rejani bajarish ehtimolligi $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)=0{,}85+0{,}92-0{,}782=0{,}988$ bo'lar ekan.

14.6-Mavzu: Ehtimollarni ko'paytirish teoremalari

Ehtimollarni ko'paytirish qoidalari, birgalikda va birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun alohida-alohida keltiriladi.

1). Bog'liqmas hodisalar ehtimollarini ko'paytirish:

Agar ikkita hodisadan birining ro'y berishi ikkinchisining ro'y berish ehtimolligini o'zgartirmasa, bu hodisalar *bog'liqmas hodisalar* deb ataladi.

1-teorema: Ikkita bog'liqmas A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimolligi bu hodisalar ehtimolliklari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)}$$

Bir necha hodisalardan istalgan biri qolganlarining istalgan to'plamining ko'paytmasiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu hodisalarni *birgalikda bog'liqmas hodisalar* deb ataladi.

2-teorema: Agar $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ birgalikda bog'liqmas hodisalar bo'lsa, u holda bu hodisalar ko'paytmasining ehtimoli ularning ehtimollari ko'paytmasiga tengdir.

$$\boxed{P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot\ldots\cdot P(A_n)}$$

Xususiy holda agar $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ birgalikda bog'liqmas hodisalar bir xil p ehtimollikka ega bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasining ehtimoli quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot\ldots\cdot A_n)=p^n}$$

Misol №1:

Ikkita tankdan bitta nishonga qarata o'q uzildi. Birinchi tankdan otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,7 ga, ikkinchi tankdan otilgan o'qning nishonga tegish ehtimoli esa 0,8 ga teng. Ikkita o'qning ham nishonga tegish ehtimoli nimaga teng?

Yechish: Bunda $P(A)=0{,}7$ va $P(B)=0{,}8$ ga teng. $P(A\cdot B)-$ ikkita o'qning nishonga tegish ehtimoli. A va B hodisalar bog'liqmas hodisalar bo'lgani uchun $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56$ bo'ladi.

Misol №2:

Sistemada uchta mexanizm bo'lib, ulardan har birining ishonchli ishlash ehtimoli $p_1=0{,}95$, $p_2=0{,}92$, $p_3=0{,}9$ ga teng bo'lib, ulardan birining ishi boshqasiga ta'sir etmasa, bu sistemaning buzilib qolish ehtimoli nimaga teng?

Yechish: Uchta mexanizmning buzilmasdan ishlashi ehtimoli $P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}95\cdot 0{,}92\cdot 0{,}9=0{,}7866$ bo'ladi. Sistemaning buzilib qolish ehtimoli esa bu ko'paytmaning ehtimoligi qarma-qarshi ehtimollikdir, ya'ni $P(\overline{A\cdot B\cdot C})=1-0{,}7866=0{,}2134$ bo'ladi.

2). Bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish:

A va B hodisalar har birining ro'y berish ehtimoli ikkinchisining ro'y berish yoki ro'y bermasligidan qat'iy nazar bog'liq bo'lsa, bu hodislar o'zaro *bog'liq hodisalar* deyiladi.

A hodisa ro'y bergan sharoitda hisoblab topiladigan B hodisaning ehtimolligiga A hodisa ro'y bergandagi B hodisaning *shartli ehtimoli* deyiladi va bu shartli ehtimollik $P(A/B)$ ko'rinishda belgilanadi.

A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimolligi bu hodisalardan birining ehtimolligini ikkinchi hodisaning birinchi hodisa ro'y bergan sharoitdagi shartli ehtimolligiga ko'paytmasiga teng.

$$\boxed{P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)\ =P(B)\cdot P(A/B)}$$

Misol №3:

Idishda 4 ta oq 8 ta qora shar bor. Tavakkaliga ketma-ket 2 ta shar olindi. Birinchi shar oq rangda bo'lsa, ikkinchi sharning qora rangda bo'lish ehtimolligini aniqlang.

Yechish: Bunda birinchi shar oq rangda bo'lish hodisasini A bilan, ikkinchi shar qora rangda bo'lish hodisasini B bilan, ularning ehtimolliklarini esa $P(A)$ va $P(B)$ bilan belgilaymiz. Jami 12 ta shardan 4ta oq bo'lgani uchun A hodisaning ro'y berish ehtimoli $P(A)=4/12=1/3$ bo'ladi. A hodisa ro'y bergandan so'ng idishda 3 ta oq, 8 ta qora shar qoldi. SHuning uchun $P(B/A)=8/11$ bo'ladi. SHartli ehtimollik formulasidan $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{11}=\frac{8}{33}$ bo'ladi.

Misol №4:

Yig'uvchida 4 ta konussimon va 8 ta ellipssimon valik bor. Yig'uvchi tavakkaliga avval bitta valikni, so'ngra esa ikkinchi valikni oldi. Birinchi valik konussimon, ikkinchisi esa ellipssimon bo'lib chiqishining ehtimolligi topilsin.

Yechish: Bunda Birinchi valik konussimon ekanligi (A hodisa)ning ehtimolligi $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ga teng. Ikkinchi valik ellipssimon ekanligi (V hodisa)ning birinchi valik konussimon degan faraz-da hisoblangan shartli ehtimolligi $P(B/A)=\frac{8}{11}$ ga teng. U holda bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish qoidasiga ko'ra $P(AB)=P(B/A)\cdot P(A)=\frac{8}{11}\cdot\frac{1}{3}=\frac{8}{33}$ bo'ladi.

15-BOB: KOMPLEKS SONLAR

Boshlang'ich sinflarda o'quvchi faqat sanashni, ya'ni natural sonlarni va ular orasida matematik amallarni o'rganadi. So'ngra nolni va manfiy sonlarni kiritishga extiyoj tug'ilgani bois, sonlar to'plami yana kengaytiriladi. Yuqori sinflarda esa barcha haqiqiy sonlar to'plami va uning butun sonlar, davriy sonlar, ratsional sonlar, irratsional sonlar kabi tarkibiy qismlari o'rganiladi. Ushbu bobda barcha sonlar to'plamini o'z ichiga olgan kompleks sonlar to'plamini kiritamiz.

15.1-Mavzu: Kompleks sonlar haqida tushuncha.

Bilamizki, kvadrat tenglama diskriminant manfiy bo'lganda haqiqiy yyechimga ega bo'lmasligi ham mumkin. Bunga eng sodda misol $x^2+1=0$ tenglamadir. Agar $x^2+1=0$ tenglama ildizga ega bo'lishi kerak bo'lsa, u $\begin{cases} x_1=-\sqrt{-1} \\ x_2=\sqrt{-1} \end{cases}$ bo'lishi kerak. Bu kvadrat tenglama ildizga ega bo'lishi uchun haqiqiy sonlarni ham o'z ichiga qamragan *kompleks sonlar to'plami* (Complex numbers) deb ataladigan to'plam kirgizamiz. Bu ildiz i soni bilan belgilanadi va ***mavhum birlik*** deyiladi.

Mavhum birlik i deb shunday songa aytiladiki, bu sonning kvadrati minus birga teng bo'ladi yoki bu son minus birdan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng.

$$\boxed{i^2=-1 \quad yoki \quad i=\sqrt{-1}}$$

Mavhum birlikning turli natural darajalari uchun quyidagi formula o'rinli.

$$\boxed{i^{4n}=i^0=1, \quad i^{4n+1}=i^1=i, \quad i^{4n+2}=i^2=-1, \quad i^{4n+3}=i^3=-i}$$

Demak, mavhum birlik darajasini 4ga bo'lganda chiqadigan qoldiqqa qarab natija aniqlanar ekan.

Misol №1:

i^{1999} mavhum birlikning darajasi nimaga teng?.

<u>*Yechish:*</u> Bunda darajadan $i^{1999}=i^{1996+3}=i^{1996}\cdot i^3=\left(i^2\right)^{998}\cdot i^2\cdot i=(-1)^{998}\cdot(-1)\cdot i=-i$ natija chiqadi.

Misol №2:

i^{18} mavhum birlikning darajasi nimaga teng?.

<u>*Yechish:*</u> Bunda darajadan $i^{18}=i^{16+2}=i^{16}\cdot i^2=\left(i^2\right)^8\cdot i^2=(-1)^8\cdot(-1)=-1$ natija chiqadi.

Yana ham umumiyroq qilib aytganda kompleks sonlar $a+bi$ ko'rinishda bo'lib, $a-$ kompleks sonning haqiqiy qismi, $b-$kompleks sonning mavhum qismi deyiladi. Masalan, $3+4i$ kompleks sonining haqiqiy qismi 3ga, mavhum qismi esa 4ga tengdir.

Kompleks son deb a+bi ko'rinishidagi ifodaga aytiladi, bunda a, b – sonlar, i – mvhum birlik.

$a+bi$ ko'rinishdagi kompleks sonning mavhum qismi nolga teng bo'lsa $(b=0)$, u holda sof haqiqiy son hosil bo'ladi. Masalan, $3+0\cdot i=3$, $5+0\cdot i=5$, $-4+0\cdot i=-4$. Demak, haqiqiy sonlar to'plami kompleks sonlar to'plamining qism to'plami ekan. Agar kompleks sonlar to'plamini C bilan belgilasak, u holda $R\subset C$ bo'ladi.

$a+bi$ ko'rinishdagi kompleks sonning haqiqiy qismi nolga teng bo'lsa $(a=0)$, u holda sof mavhum son hosil bo'ladi. Masalan, $0+5\cdot i=5i$, $0+8\cdot i=8i$, $0-4\cdot i=-4i$.

Agar ikkita kompleks sonning haqiqiy qismlari ham o'zaro teng va mavhum qismlari ham o'zaro teng bo'lsa, bu kompleks sonlari o'zaro teng deyiladi. Boshqacha aytganda a_1+b_1i va a_2+b_2i ikkita turli kompleks sonlar bo'lib, bu sonlar uchun $\begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{cases}$ shart bajarilsa, berilgan kompleks sonlar *o'zaro teng* bo'ladi.

Agar ikkita kompleks sonning haqiqiy qismlari o'zaro teng va mavhum qismlari o'zaro qarama-qarshi bo'lsa, bu kompleks sonlari o'zaro qo'shma deyiladi. Boshqacha aytganda a_1+b_1i

va $a_2+b_2 i$ ikkita turli kompleks sonlar bo'lib, bu sonlar uchun $\begin{cases} a_1=a_2 \\ b_1=-b_2 \end{cases}$ shart bajarilsa, berilgan kompleks sonlar *o'zaro qo'shma* bo'ladi.

15.2-Mavzu: Kompleks noma'lumli kvadrat tenglama.

4-bobda $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamaning diskriminanti manfiy $(D>0)$ bo'lganda uning haqiqiy yyechimlari yo'q deb aytganmiz. Lekin, bu uning umuman yyechimi yo'q degani emas. Diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglama kompleks sonlar to'plamida 2ta yyechimga egadir. Kvadrat tenglama diskriminanti $D=b^2-4ac<0$ bo'lar ekan, u holda $-D=4ac-b^2>0$ bo'ladi. Shuni e'tiborga olib, diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglama yyechimi formulasini

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-1}\cdot\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\frac{-b\pm i\cdot\sqrt{-D}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-D}}{2a}i$$

deb yozishimiz mumkin bo'ladi. Biz kompleks sonlarni x bilan emas, balki z bilan belgilaymiz. Shuni hisobga olgan holda diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglamaning kompleks yyechimlarini quyidagi ko'rinishda ifodalashimiz mumkin bo'ladi:

$$\boxed{z_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-D}}{2a}i, \qquad z_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-D}}{2a}i}$$

Demak, yyechimlar haqiqiy qismi $\operatorname{Re} z_1=\operatorname{Re} z_2=-\frac{b}{2a}$ va mavhum qismi $\operatorname{Im} z_1=\frac{\sqrt{-D}}{2a}$, $\operatorname{Im} z_2=-\frac{\sqrt{-D}}{2a}$ bo'lgan o'zaro qo'shma sonlar bo'lar ekan. Kelgusi mavzularda bu yyechimlarning C tekisligida haqiqiy sonlar o'qiga nisbatan simmetrik ekanini ko'ramiz.

Endi diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglamaga doir bir necha misollar echaylik.

Misol №1:

$x^2+36=0$ kvadrat tenglamani eching.

<u>*Yechish:*</u> Bu tenglamani qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib $x^2-(-36)=0$, $(x+\sqrt{-36})(x-\sqrt{-36})=0$, $(x+6i)(x-6i)=0$ deb yozish mumkin. Bu ko'paytuvchilarning har birini nolga tenglash orqali $\begin{cases} x_1=-6i \\ x_2=6i \end{cases}$ yyechimlarga ega bo'lamiz. Faqat yyechim kompleks son ekanligini e'tiborga olgan holda uni $\begin{cases} z_1=-6i \\ z_2=6i \end{cases}$ deb belgilashimiz maqsadga muvofiq bo'ladi. Demak, diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglamaning 2-koeffitsienti nolga teng $(b=0)$ bo'lganda ildizlar o'zaro qarama-qarshi (yoki o'zaro qo'shma) bo'lgan ikkita sof mavhum bo'lar ekan.

Misol №2:

Ushbu $4z^2+8z+5=0$ kvadrat tenglamani eching.

<u>*Yechish:*</u> Bunda diskriminant $D=b^2-4ac=64-4\cdot4\cdot5=64-80=-16<0$. Shuning uchun berilgan tenglama ikkita kompleks ildizlarga ega. Kvadrat tenglama yyechimlari formulasiga binoan yyechimlar $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-8\pm\sqrt{-16}}{2\cdot4}=\frac{-8\pm4i}{8}=-1\pm\frac{1}{2}i$ bo'ladi.

Misol №3:

$z^4+5z^2-36=0$ bikvadrat tenglamani eching.

<u>*Yechish:*</u> Buni ko'paytuvchilarga ajratamiz. Bunda $z^4+5z^2-36=0, \rightarrow (z^2+9)(z^2-4)=0, \rightarrow (z+3i)(z-3i)(z-2)(z+2)=0$ hosil bo'ladi. Har bir ko'paytuvchilarni nolga tenglash orqali yyechimlarni aniqlaymiz. Natijada $\begin{cases} z_1=-3i \\ z_2=3i \end{cases}$ 2ta sof mavhum va $\begin{cases} z_3=-2 \\ z_4=2 \end{cases}$ 2ta sof haqiqiy ildizlar kelib chiqadi.

15.3-Mavzu: Kompleks sonlar ustida matematik amallar. Kompleks sonlarning xossalari

Kompleks sonlarni biror z harfi bilan belgilasak, u holda ixtiyoriy kompleks sonini $z=a+bi$ ko'rinishda yozish mumkin. Ko'pchilik adabiyotlarda bu kompleks sonining $z=x+yi$ ko'rinishida ham ifodalanishini ham uchratishimiz mumkin. $z=a+bi$ ko'rinishda yoki $z=x+yi$ ko'rinishda ifodalangan kompleks sonlarni *algebraik shakldagi* kompleks son deb ataladi. Keling, bundan keyin biz kompleks sonlarni $z=x+yi$ ko'rinishda ifodalaymiz (shunday qilsak, kelgusida ularni C tekislikda ifodalash qulay bo'ladi).

Bizga $z=x+yi$ kompleks soni berilgan bo'lsin.

x haqiqiy songa z kompleks sonining haqiqiy qismi deyilib, u $\mathrm{Re}\, z$ kabi yoziladi.

$$\boxed{x=\mathrm{Re}\, z}$$

Re– lotincha *realis* – "haqiqiy" degan ma'noni anglatadi.

y haqiqiy songa z kompleks sonining mavhum qismi deyilib, u $\mathrm{Im}\, z$ kabi yoziladi.

$$\boxed{x=\mathrm{Re}\, z}$$

Im– lotincha *imaginarins* – "mavhum" degan ma'noni anglatadi.

Masalan, $z=5+8i$ kompleks soni uchun $\mathrm{Re}\, z=5$, $\mathrm{Im}\, z=8$ bo'ladi. Demak kompleks sonni quyidagi ko'rinishda ham ifodalash mumkin ekan:

$$\boxed{z=x+yi=\mathrm{Re}\, z+\mathrm{Im}\, z\cdot i}$$

$x=0$ bo'lganda $z=yi$ sof mavhum, $y=0$ bo'lganda esa $z=x$ sof haqiqiy son hosil bo'ladi.

Agar $x=0,\ y=0$ bo'lsa, u holda $z=0$ bo'ladi.

$z=x+yi$ kompleks sonining qo'shmasi deb $\bar{z}$ bilan belgilanadigan $\bar{z}=x-yi$ songa aytiladi. Masalan, $z=5+8i$ kompleks sonining qo'shmasi $\bar{z}=5-8i$ bo'ladi.

Endi kompleks sonlar ustida matematik amallar qanday bajarilishi haqida to'xtalamiz.

Ikkita $z_1=x_1+y_1 i$ va $z_2=x_2+y_2 i$ sonlarining yig'indisi z_1+z_2 ko'rinishda belgilanadi va u quyidagicha:

$$\boxed{z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$$

Ikkita $z_1=x_1+y_1 i$ va $z_2=x_2+y_2 i$ sonlarining ayirmasi z_1-z_2 ko'rinishda belgilanadi va u quyidagicha:

$$\boxed{z_1+z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)}$$

Ikkita $z_1=x_1+y_1 i$ va $z_2=x_2+y_2 i$ sonlarining ko'paytmasi $z_1\cdot z_2$ ko'rinishda belgilanadi va u quyidagicha:

$$\boxed{z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)}$$

<u>Isboti:</u> Bunda ko'paytmada haqiqiy sonlar kabi qavslarni ochib chiqamiz va $i^2=-1$ ekanini e'tiborga olamiz. Natijada

$$z_1\cdot z_2=(x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i)=x_1x_2+x_1y_2i+x_2y_1i+y_1y_2i^2=x_1x_2-y_1y_2+(x_1y_2+x_2y_1)i$$

hosil bo'ladi. Bu sonning haqiqiy qismi $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2)=x_1x_2-y_1y_2$ va mavhum qismi $\mathrm{Im}(z_1\cdot z_2)=x_1y_2+y_1x_2$ bo'ladi.

Ikkita $z_1=x_1+y_1 i$ va $z_2=x_2+y_2 i$ sonlarining bo'linmasi $\frac{z_1}{z_2}$ ko'rinishda belgilanadi va u quyidagicha:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}$$

Isboti: Bunda kasrning surat va maxrajini maxrajning qo'shmasiga, ya'ni $\bar{z}_2 = x_2 - i\,y_2$ ga ko'paytirib, maxrajni haqiqiy songa aylantiriladi. Natijada

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} = \frac{x_1x_2 - x_1y_2 i + y_1x_2 i - y_1y_2 i^2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + (y_1x_2 - x_1y_2)i}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i$$

ifoda hosil bo'ladi. Bu sonning haqiqiy qismi $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ va mavhum qismi $\operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$ bo'ladi.

Yig'indisi nolga teng bo'lgan kompleks sonlar o'zaro qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi. Ixtiyoriy $z = x + yi$ kompleks soniga qarma-qarshi bo'lgan yagona kompleks son mavjud bo'lib, u $-z = -x - yi$ kompleks sonidir.

Ko'paytmasi birga teng bo'lgan kompleks sonlarga o'zaro teskari kompleks sonlar deyiladi. Ixtiyoriy $z = x + yi$ $(z \neq 0)$ kompleks soniga teskari bo'lgan yagona kompleks son mavjud bo'lib, u $z \cdot w = 1$ shartidan topiladigan $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} \cdot \frac{x - yi}{x - yi} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$ kompleks sonidir.

Kompleks sonlar ham xuddi haqiqiy sonlar kabi o'rin almashtirish (kommutativlik), guruhlash (assotsiativlik) va taqsimot (distributivlik) xossalariga ega

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	2) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	4) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$
5) $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$	

Ikkita kompleks son yig'indisining qo'shmasi ularning qo'shmalari yig'indisiga tengdir.

$$\boxed{\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2}$$

Isboti: Agar kompleks sonlar $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ bo'lsa, ularning qo'shmalari $\bar{z}_1 = x_1 - y_1 i$, $\bar{z}_2 = x_2 + y_2 i$ bo'ladi. U holda $z_1 + z_2 = x_1 + y_1 i + x_2 + y_2 i = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ va $\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = x_1 - y_1 i + x_2 - y_2 i = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i = \overline{z_1 + z_2}$ bo'ladi.

Ikkita kompleks son ko'paytmasining qo'shmasi ularning qo'shmalari ko'paytmasiga tengdir.

$$\boxed{\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}$$

Isboti: Bunda Agar kompleks sonlar $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ bo'lsa, ularning qo'shmalari $\bar{z}_1 = x_1 - y_1 i$, $\bar{z}_2 = x_2 + y_2 i$ bo'ladi. U holda $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i$ va $\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - y_1 i) \cdot (x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + y_1x_2) = \overline{z_1 \cdot z_2}$ bo'ladi.

YUqoridagi ikkita formuladan ixtiyoriy n ta kompleks sonlar uchun

$$\boxed{\begin{gathered}\overline{z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \ldots + \bar{z}_n \\ \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{z}_n\end{gathered}}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi kompleks sonlar ustida matematik amallarga doir bir necha misollar echaylik.

Misol №1:

$z = -4{,}1 + 2i$ kompleks sonning haqiqiy va mavhum qismlarini hamda qo'shmasini aniqlang.

Yechish: Bunda berilgan kompleks sonning haqiqy qismi $\operatorname{Re} z = -4{,}1$ va mavhum qismi $\operatorname{Im} z = 2$ bo'ladi. Berilgan kompleks sonning qo'shmasi $\bar{z} = -4{,}1 - 2i$ bo'ladi.

Misol №2:

Ushbu $z_1 = 1 + i\sqrt{2}$ va $z_1 = 1 - i\sqrt{2}$ sonlarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatini aniqlang.

Yechish: Bunda sonlar yig'indisi $z_1 + z_2 = 1 + i\sqrt{2} + 1 - i\sqrt{2} = 2$, ayirmasi $z_1 - z_2 = 1 + i\sqrt{2} - 1 + i\sqrt{2} = i2\sqrt{2}\,i$, ko'paytmasi $z_1 \cdot z_2 = (1 + i\sqrt{2}) \cdot (1 - i\sqrt{2}) = 1^2 - (i\sqrt{2})^2 = 1 + 2 = 3$ va bo'linmasi $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{2}} \cdot \frac{1 + i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot i\sqrt{2} + (i\sqrt{2})^2}{1^2 - (i\sqrt{2})^2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}i - 2}{1 + 2} = \frac{-1 + 2\sqrt{2}i}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3}i$ bo'ladi.

Misol №3:

$(4+2i)(-2-3i)+5-8i+i^9$ ifodani hisoblang.

Yechish:

$$(4+2i)(-2-3i)+5-8i+i^9=-8-12i-4i+6i^2+5-8i+\left(i^2\right)^4\cdot i=-8-16i-6+5-8i+i=-14-23i.$$

Misol №4:

$\dfrac{(3-2i)(2+i)}{(3-2i)(1+i)}\cdot i^3$ ifodani hisoblang.

Yechish: Buni matematik amallardan foydalanib echamiz. Unga ko'ra

$$\frac{(3-2i)(2+i)}{(3-2i)(1+i)}\cdot i^3=\frac{6+3i-4i-2i^2}{3+3i-2i-2i^2}\cdot i^2\cdot i=\frac{8-i}{5+i}\cdot(-i)=\frac{-8i+i^2}{5+i}=\frac{-1-8i}{5+i}\cdot\frac{5-i}{5-i}=\frac{-5+i-40i+8i^2}{25-i^2}=$$

$=\dfrac{-13-39i}{26}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$ natija kelib chiqadi.

Misol №5:

$\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3$ ifodani hisoblang.

Yechish: Qisqa ko'paytirish formulasidan foydalanib qavsni ochmiz. Bunda

$$\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}i\right)^3=-\frac{1}{8}\left(1+3\cdot1\cdot\sqrt{3}i+3\cdot1\cdot3i^2+3\sqrt{3}i^3\right)=-\frac{1}{8}\left(1+3\sqrt{3}i-9-3\sqrt{3}i\right)=-\frac{1}{8}(-8)=1$$

haqiqiy son kelib chiqadi.

Misol №6:

$\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^{-8}$ ifodani hisoblang.

Yechish: Buni matematik amallar va darajaning xossalaridan foydalanib echamiz.

$$\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^{-8}=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-8}=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^8=16\cdot\left(\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)^8=16\cdot\left(\frac{1-i}{1-i^2}\right)^8=(1-i)^8=\frac{1}{16}\left(1-2i+i^2\right)^4=\frac{1}{16}(-2i)^4=\frac{1}{16}(-2)^4\cdot i^4=1\cdot$$

15.4-Mavzu: Kompleks sonlarni tasvirlash.

To'g'ri burchakli Oxy Dekart koordinatalar sistemasida $z=x+yi$ kompleks sonining haqiqiy qismini Ox (absissalar) o'qiga, mavhum qismini esa Oy (oordinatalar) o'qiga joylashtiraylik. Bu tekislikni C tekislik deb ataladi. Bunda

$$z=x+yi$$

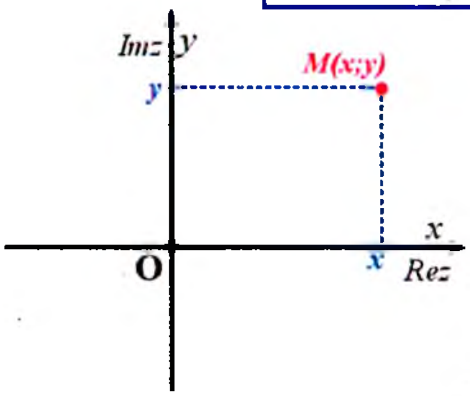
kompleks son C teksilikda koordinatalari x va y bo'lgan $M(x;\,y)$ nuqtani tasvirlaydi. SHu $M(x;\,y)$ nuqtaga $z=x+yi$ kompleks sonning geometrik tasviri deyiladi (15.3.1-a,rasm). Har bir kompleks son C teksilikda bitta nuqtani tasvirlaydi va aksincha, har bir nuqtaga bitta kompleks son mos keladi. Koordinalar boshi $O(0;\,0)$ nuqtani $M(x;\,y)$ nuqta bilan tutashtiruvchi $\overline{OM}$ vektorga $M(x;\,y)$ nuqtaning *radius-vektori* deyilib, bu vektorning uzunligi r ni esa $z=x+yi$ kompleks sonining moduli deyiladi (15.3.1-b,rasm). Pifagor teoremasiga asosan kompleks sonning moduli

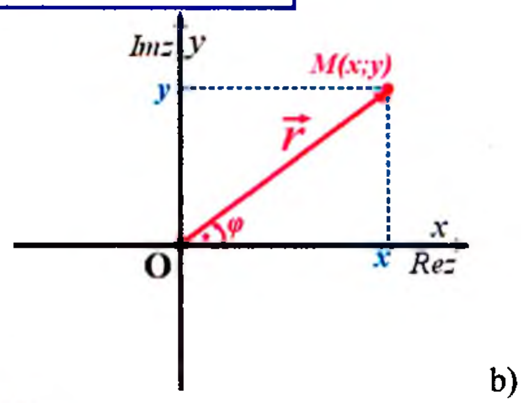
$$\boxed{|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}}$$

bo'ladi.

Radius-vektor $\vec{r}=\overline{OM}$ bilan absissa o'qining musbat yo'nalishi $\overline{Ox}$ vektor orasidagi φ burchakka $z=x+yi$ kompleks sonining argumenti deyiladi va $\varphi=\arg z$ tarzida yoziladi. Kompleks sonning argumenti φ burchak tangensidan aniqlanib, u $M(x;\,y)$ nuqtaning qaysi chorakda ekaniga bog'liqdir.

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & agar\ x \ge 0,\ y \ge 0\ \ bo'lsa \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & agar\ x < 0\ \ bo'lsa \\ arctg\dfrac{y}{x} + 2\pi, & agar\ x \ge 0,\ y < 0\ \ bo'lsa \end{cases}$$





15.4.1-rasm

15.3.1-b,rasmdan

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

ekanligidan

$$z = x + yi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ifodaga ega bo'lamiz. SHunday qilib, z kompleks sonining *trigonametrik shakli* deb ataluvchi ifoda quyidagicha bo'lar ekan:

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Bu trigonametrik shakldagi qavsning ichini $e^{i\varphi}$ga teng bo'lishini "Oliy matematika" kursining "Qatorlar" isbot qilinadi va uni *Eyler formulasi* deb yuritiladi. Demak, Eyler formulasi quyidagicha bo'lar ekan:

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

Eyler formulasidan z kompleks sonining z kompleks sonining *eksponensial shakli* kelib chiqadi va uquyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

z kompleks sonini ixtiyoriy n-darajaga ko'targanimizda

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

natija kelib chiqadi. Bu formulani Muavr formulasi deyiladi va u quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

Muavr formulasidan shu narsa ko'rinadiki, kompleks sonni darajaga ko'targanda uning moduli ham darajaga ko'tariladi hamda argumenti esa darajasiga ko'paytirilar ekan. Darajaga ko'tarish natijasida hosil bo'lgan yangi $z^n = w$ kompleks sonining moduli ρ va argumenti ψ quyidagicha bo'lar ekan:

$$\boxed{\rho = |w| = |z^n| = r^n, \qquad \psi = \arg(w) = \arg(z^n) = n\varphi}$$

Muavr formulasidan sonlarni darajaga ko'tarishdan tashqari turli ildizlar olish va ratsional darajaga ko'tarishdaham foydalaniladi. Muavr formulasidan ushbu natijalar keladi:

1) Ikkita z_1 va z_2 kompleks sonlar ko'paytmasining moduli shu kompleks sonlar modullarining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|}$$

2) Ikkita z_1 va z_2 kompleks sonlar ko'paytmasining argumenti shu kompleks sonlar argumentlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

$$\boxed{\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2}$$

3) Ikkita z_1 va z_2 kompleks sonlarning nisbati uchun

$$\boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2}$$

Endi yuqorida keltirib chiqarilgan formulalarga doir misollar echaylik.

Misol №1:

$z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i$ kompleks sonning moduli hamda argumentini aniqlang hamda uni trigonametrik shaklga keltiring.

<u>*Yechish:*</u> Bunda $x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bo'ladi. Unda berilgan sonning moduli $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ bo'ladi. Berilgan kompleks sonda $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$ bo'lgani uchun uning argumenti $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} + 2\pi = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$ bo'ladi. Berilgan kompleks sonining trigonametrik shakli $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ bo'ladi.

Misol №2:

Ushbu $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ trigonametrik shaklga keltiring.

<u>*Yechish:*</u> Bunda $x = -\frac{1}{2},\ y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ bo'ladi. Unda berilgan sonning moduli $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ bo'ladi. Berilgan kompleks sonda $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$ bo'lgani uchun uning argumenti $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ bo'ladi. Berilgan kompleks sonining trigonametrik shakli $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 1 \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ bo'ladi.

Misol №3:

Muavr formulasidan foydalanib $(1 + i\sqrt{3})^3$ ifodani darajaga oshiring. Hosil bo'lgan kompleks sonning moduli va argumentini aniqlang hamda uni trigonametrik shaklda ifodalang.

<u>*Yechish:*</u> Bunda $z = 1 + i\sqrt{3}$ deb olsak, u uchun $x = 1,\ y = \sqrt{3},\ r = \sqrt{1+3} = 2,\ \varphi = \arg z = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$ bo'lishini inobatga olib, uni $z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ trigonametrik shaklda yozamiz. Eyler formulsiga asosan uni $z = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ deb yozamiz va uni kubinchi darajaga ko'tarsak, $w = z^3 = \left(2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 2^3 \cdot e^{i\pi} = 8 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi) = -8$ hosil bo'ladi. Demak, $(1 + i\sqrt{3})^3 = 8 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$ bo'lib, uning moduli $\rho = |w| = 8$ hamda argumenti $\arg w = \pi$ bo'lar ekan.

Misol №4:

Agar $\sqrt{-1} = i$ mavhum birlik bo'lar ekan, u holda $\sqrt{i}$ va $\sqrt[4]{i}$ nimaga teng bo'ladi?

Yechish: Bunda i mavhum birlikni $z=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$ deb yozish mumkin. U holda $\sqrt{i}$ ni $w_1=z^{\frac{1}{2}}$ deb, $\sqrt[4]{i}$ esa $w_2=z^{\frac{1}{4}}$ deb yozish mumkin bo‘ladi. Bunda $w_1=z^{\frac{1}{2}}=\left(1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}=$ $=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ va $w_2=z^{\frac{1}{4}}=\left(1\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=1^{\frac{1}{4}}\cdot e^{i\frac{\pi}{8}}=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ bo‘ladi.

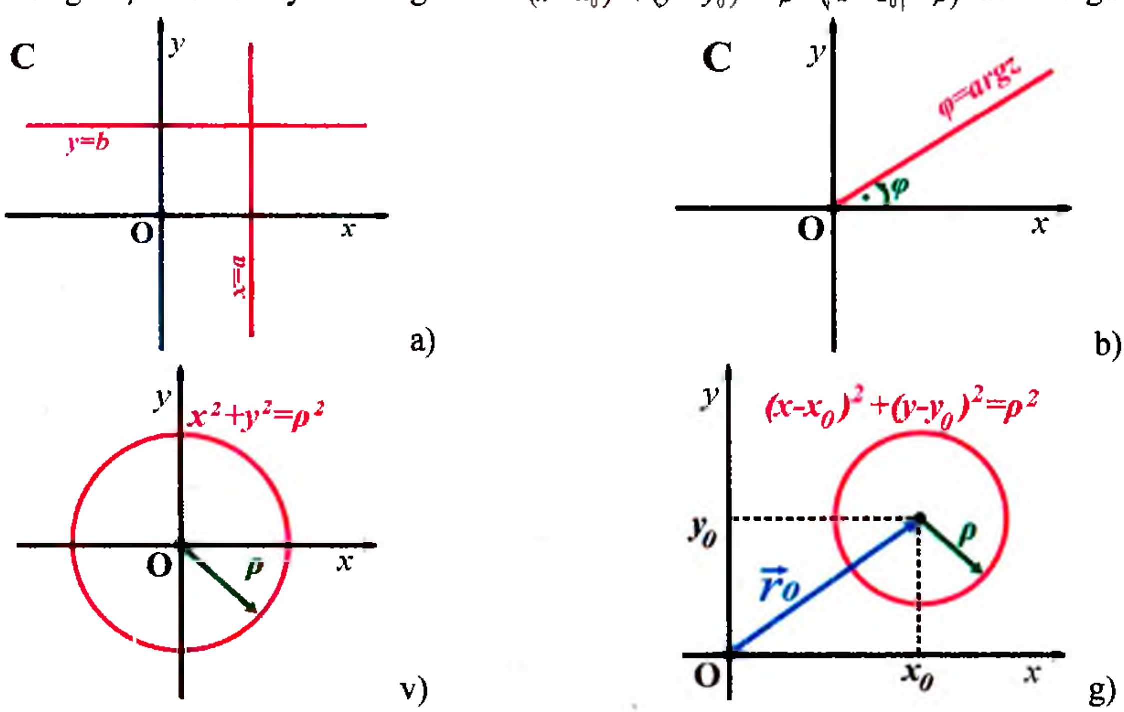
SHunday qilib, $\sqrt{i}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ va $\sqrt[4]{i}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ bo‘lar ekan.

15.5-Mavzu: Kompleks sonlar tekisligida chiziq va soha.

Oldingi mavzuda kompleks sonlarni kompleks (C) tekisligida juddi haqiqiy sonlarni Dekart tekisligida tasvirlagani kabi tasvirlashni o‘rgandik. Biror chiziq yoki sohani kompleks tekisligida qanday tasvirlanadi degan savol tug‘ilishi tabiiy. Ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq yoki egri chiziq yoki biror sohani ham xuddi haqiqiy sonlarni Dekart tekisligida tasvirlagani kabi tasvirlagandek tasvirlanadi. Faqat har doim shuni yodimizda tutishimiz kerakki, Ox o‘qida kompleks sonning sof haqiqiy qismi $(\operatorname{Re} z)$ hamda Oy o‘qida kompleks sonning sof mavhum qismi $(\operatorname{Im} z)$ turibdi.

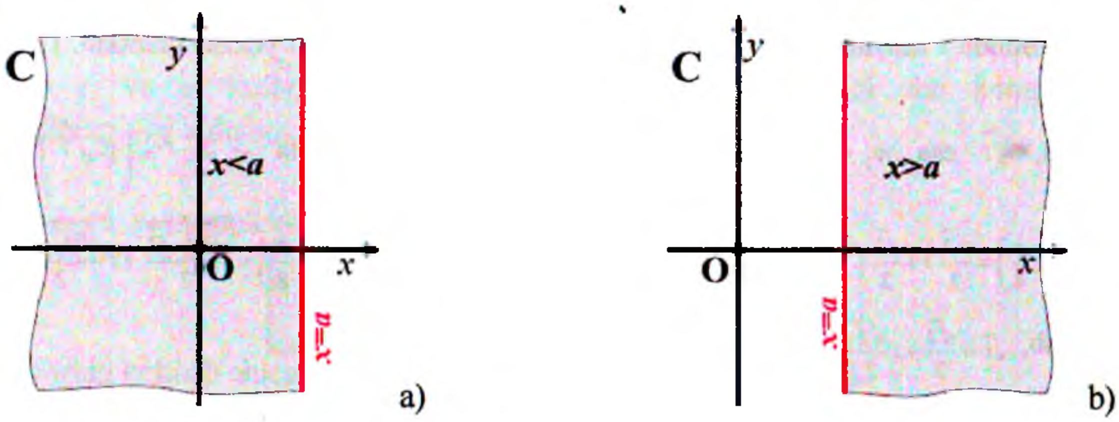
Eni biz turli hollar uchun chiziq va sohaga doir namunalar keltiramiz.

15.5.1-a,rasmda $x=a(\operatorname{Re} z=a)$ vertikal va $y=b(\operatorname{Im} z=b)$ gorizontal chiziqlar ko‘rsatilgan. 15.5.1-b,rasmda $\varphi=\arg z$ nur ko‘rsatilgan. Bunda nur koordinata boshidan biror φ burchak bo‘yicha chiqib cheksizlikkacha davom etadi. 15.5.1-v,rasmda markazi koordinata boshida bo‘lgan va ρ radiusli aylana tenglamasi $x^2+y^2=\rho^2$ $(|z|=\rho)$ tasvirlangan. Bu aylana markazi siljitilganda esa aylana tenglamasi ham o‘zgaradi. 15.5.1-g,rasmda aylana markazi $z_0=x_0+i\,y_0$ nuqtada bo‘lgan ρ radiusli aylana tenglamasi $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$ $(|z-z_0|=\rho)$ tasvirlangan.



15.5.1-rasm

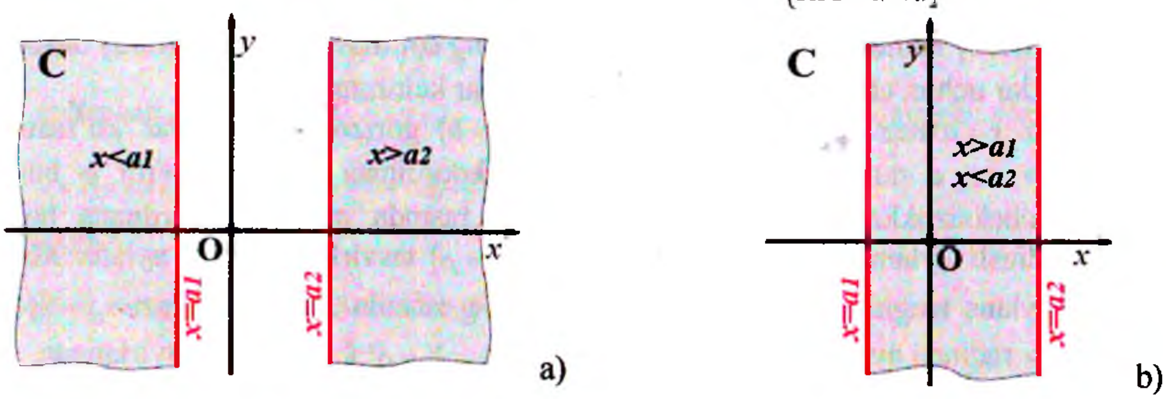
15.5.2-a,rasmda kompleks sonning haqiqiy qismi biror sondan kichik $(\operatorname{Re} z=x<a)$ soha tasvirlangan. 15.5.2-b,rasmda esa kompleks sonning haqiqiy qismi biror sondan katta $(\operatorname{Re} z=x>a)$ soha tasvirlangan.



15.5.2-rasm

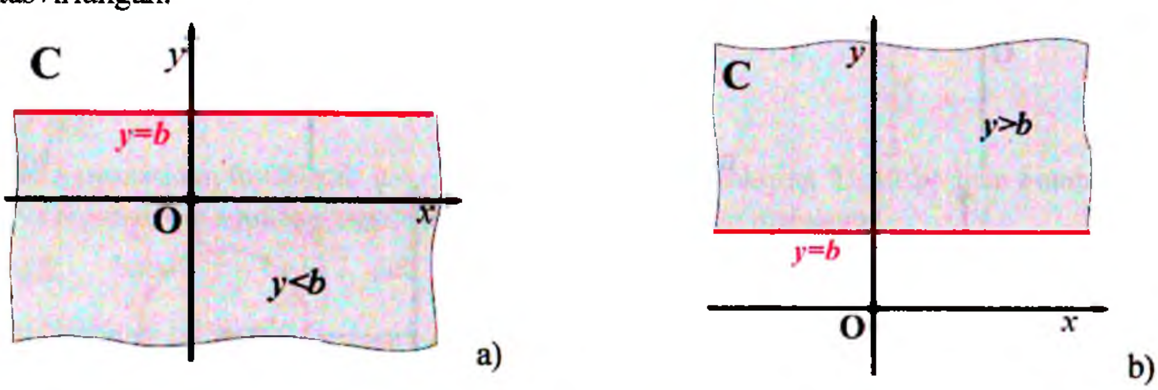
15.5.3-a,rasmda kompleks sonning haqiqiy qismi uchun $\begin{cases} \operatorname{Re} z = x < a_1 \\ \operatorname{Re} z = x > a_2 \end{cases}$ soha tasvirlangan.

15.5.3-b,rasmda esa kompleks sonning haqiqiy qismi uchun $\begin{cases} \operatorname{Re} z = x > a_1 \\ \operatorname{Re} z = x < a_2 \end{cases}$ soha tasvirlangan.



15.5.3-rasm

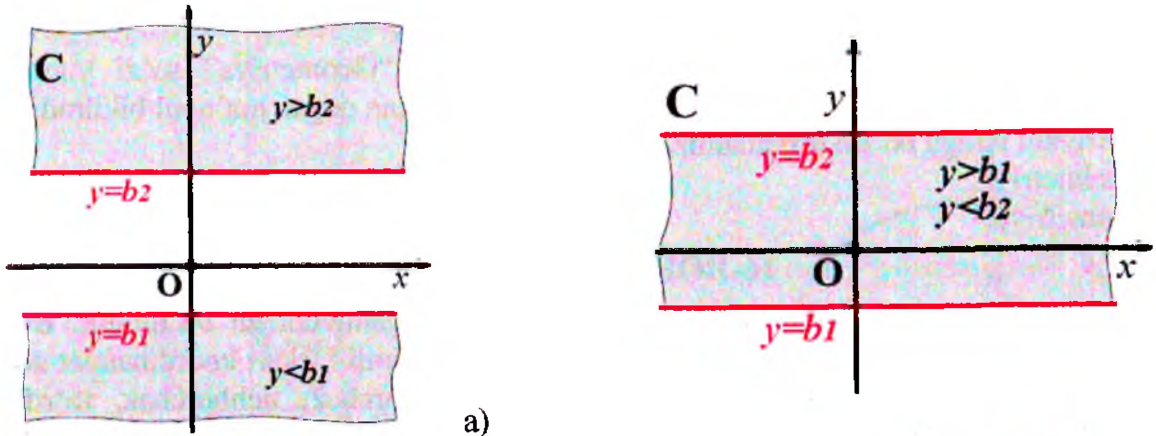
15.5.4-a,rasmda kompleks sonning mavhum qismi biror sondan kichik $(y < b)$ soha tasvirlangan. 15.5.4-b,rasmda esa kompleks sonning mavhum qismi biror sondan katta $(y > b)$ soha tasvirlangan.



15.5.4-rasm

15.5.5-a,rasmda kompleks sonning mavhum qismi uchun $\begin{cases} \operatorname{Im} z = y < b_1 \\ \operatorname{Im} z = y > b_2 \end{cases}$ soha tasvirlangan.

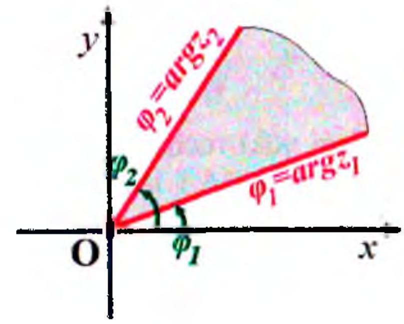
15.5.5-b,rasmda esa kompleks sonning mavhum qismi uchun $\begin{cases} \operatorname{Im} z = y > b_1 \\ \operatorname{Im} z = y < b_2 \end{cases}$ soha tasvirlangan.



a) b)

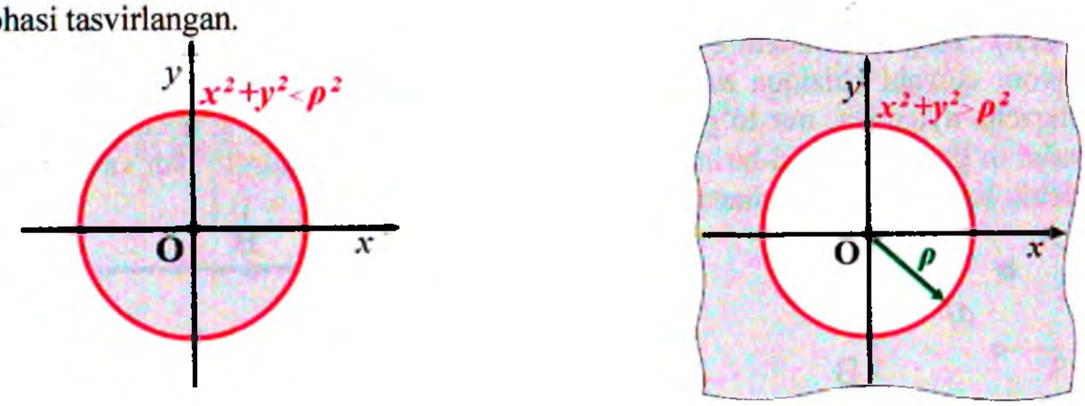
15.5.5-rasm

15.5.6-rasmda kompleks sonning argumenti uchun $\begin{cases} \varphi > \arg z_1 \\ \varphi < \arg z_2 \end{cases}$ soha tasvirlangan.



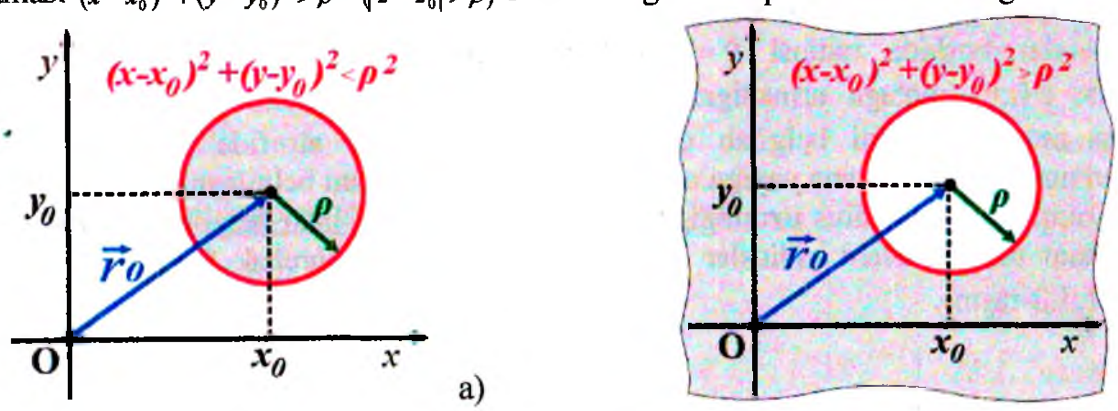
15.5.6-rasm

15.5.7-a,rasmda kompleks sonning markazi koordinata boshida bo‘lgan ρ radiusli doira tenglamasi $x^2 + y^2 < \rho^2$ $(|z| < \rho)$ bilan berilgan ichki sohasi tasvirlangan. 15.3.7-b,rasmda esa kompleks sonning markazi koordinata boshida bo‘lgan ρ radiusli doira tenglamasi $x^2 + y^2 > \rho^2$ $(|z| > \rho)$ bilan berilgan tashqi sohasi tasvirlangan.



15.5.7-rasm

15.5.8-a,rasmda kompleks sonning markazi $z_0 = x_0 + i\,y_0$ nuqtada bo‘lgan ρ radiusli doira tenglamasi $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$ $(|z - z_0| < \rho)$ bilan berilgan ichki sohasi tasvirlangan. 15.5.8-b,rasmda esa kompleks sonning markazi $z_0 = x_0 + i\,y_0$ nuqtada bo‘lgan ρ radiusli doira tenglamasi $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > \rho^2$ $(|z - z_0| > \rho)$ bilan berilgan tashqi sohasi tasvirlangan.



a) b)

15.5.8-rasm

GEOMETRIYA

Geometriya – figuralarning xossalari haqidagi fandir. "Geometriya" so'zi yunonchadan "Geos–yer" hamda "Metros–o'lchayman", ya'ni yer o'lchayman degan ma'noni bildiradi.

Geometriyani ikkiga bo'lib o'rganamiz.

1) Planeimetriya;

2) Streometriya.

16-BOB: PLANIMETRIYA

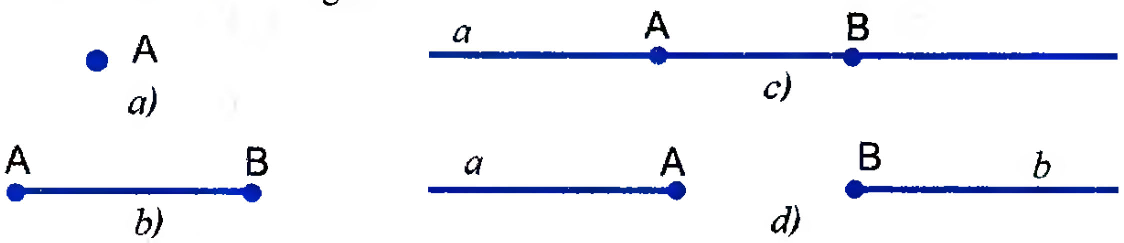
Planimertiya – geomertiyaning tekislikdagi shakllarni o'rganuvchi bir bo'limidir. Bunda bir o'lchamli chiziqlar va ikki o'lchamli tekis shakllar, ikki o'lchamli Dekart koordinatalar sistemasi, ya'ni kesma, to'g'ri chiziq, nur kabi chiziqlar hamda burchak, uchburchak, to'rtburchak, ko'pburchak, aylana va doiralar kabi tekis figuralar va ular bilan bog'liq masalalar o'rganiladi.

16.1-Mavzu: Nuqta, kesma, to'g'ri chiziq va nur tushunchalari. Burchak tushunchasi, burchakning o'lchov birligi va turlari.

Qalam yoki ruchkaning uchini oq qog'ozga qattiq bosganimizda qog'ozda qolgan izni ***nuqta*** deb ataymiz (16.1.1-a,rasm). Nuqta ko'zimizga biror o'lchamga egadek ko'rinsada, biz uni o'lchamsiz deb qabul qilamiz. Nuqtalar lotincha katta harflar bilan belgilanadi.

Ikki nuqtani tutashtiruvchi eng qisqa chiziqqa ***kesma*** deyiladi. Bu nuqtalar orasidagi masofa uzunligiga esa ***kesma uzunligi*** deyiladi (16.1.1-b,rasm). Kesmalar boshi va oxiridan iborat lotincha katta harflar bilan belgilanadi. Masalan, A va B nuqtalarni tutashtiruvchi AB kesma ko'rinishida belgilanadi.

Ikki nuqtadan o'tuvchi chiziqqa, ya'ni kesmadan o'tuvchi chiziqqa ***to'g'ri chiziq*** deyiladi (16.1.1-v,rasm). To'g'ri chiziqning boshi ham oxiri ham bo'lmaydi. Bir nuqtadan boshlanib cheksiz davom etuvchi chiziqqa ***nur*** deyiladi(16.1.1-g,rasm). Nurning boshi boru, lekin oxiri yo'q. Boshqacha aytganda, nur to'g'ri chiziqning yarmidir. Nuqta to'g'ri chiziqni ikkita nurga ajratadi, ya'ni to'g'ri chiziq biri-birining davomlari bo'lgan ikkita nurdir. Nur va to'g'ri chiziqlar lotincha kichik harflar bilan belgilanadi.

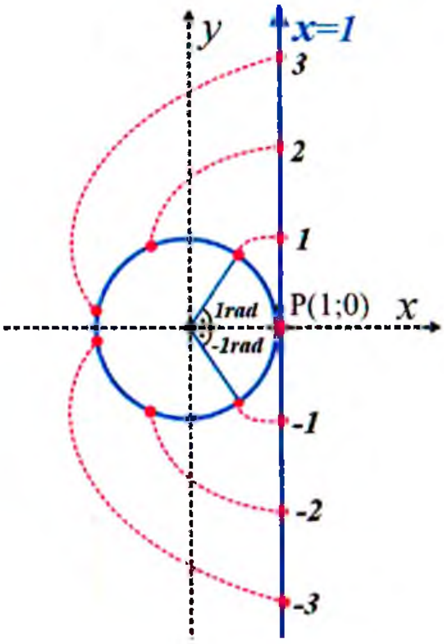


16.1.1-rasm

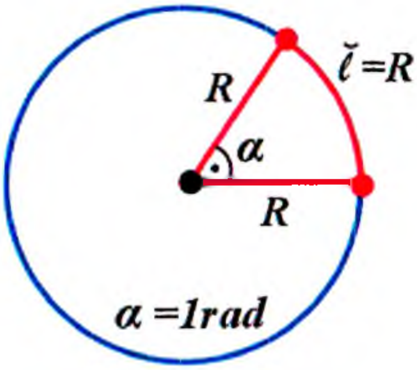
Bir nuqtadan chiquvchi ikkita nurning orasidagi kattalikni baholovchi tushunchaga ***burchak*** deyiladi. Bir nuqtadan chiquvchi nurlar qanchalik bir-biridan tez uzoqlashsa, nurlar orasidagi burchak ham shuncha katta bo'ladi. Burchak o'lchovining *radian* va *gradus* o'lchov birliklari mavjud bo'lib, ularga birma-bir to'xtalib o'tamiz.

Koordinatalar boshida radiusi $R=1$ bo'lgan aylana chizamiz va unda $P(1;0)$ nuqtani belgilaymiz. $P(1;0)$ nuqtaga urinadigan qilib vertikal o'q o'tkazamiz va bu o'qda uzunlik birliklariga mos nuqtalarni belgilab chiqamiz. O'qni aylana atrofida o'raymiz va o'qda belgilangan nuqtalarning aylana yoyiga mos kelgan nuqtalarini ham belgilaymiz (16.1.2-rasm).

Boshqa nuqtalar kabi radius uzunligiga teng bo'lgan nuqtani ham belgilaymiz. Bu nuqta va $P(1;0)$ nuqtani tutashtiruvchi radiuslar orasidagi hosil bo'lgan burchak $1\,rad$ (radian) burchak deyiladi (16.1.3-rasm).



16.1.2-rasm



16.1.3-rasm

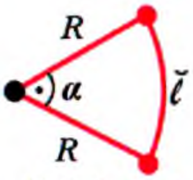
Radius uzunligiga teng bo'lgan yoyni tutib turuvchi markaziy burchak 1 rad burchak deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifdan shunday xulosa kelib chiqadi: Agar $1rad$ burchak radius uzunligiga teng bo'lgan yoyni tutib tursa, $2rad$ burchak ikki radius uzunligiga teng yoyni tutib turadi, $3rad$ burchak esa uch radius uzunligiga teng yoyni tutib turadi va hokoza.

Shunday qilib, yoy uzunligi yoyni tutib turuvchi burchakka to'g'ri proporsional ekan.

Markaziy burchagi α^r ga teng bo'lgan yoyning uzunligini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

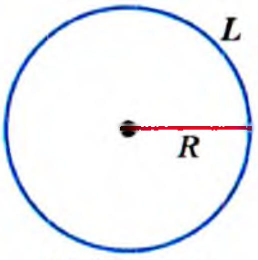
$$\boxed{\breve{\ell} = \alpha^r \cdot R}$$



15.1.4-rasm

Aylana uzunligini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{L = 2\pi \cdot R}$$

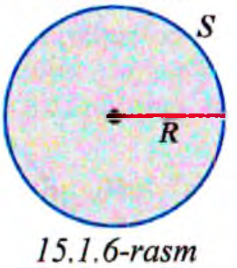


15.1.5-rasm

Doiraning yuzini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{S = \pi \cdot R^2}$$

Biz bu haqda keyinroq batafsil to'xtalamiz.

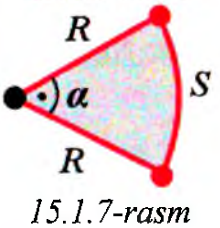


15.1.6-rasm

Doira sektori yuzini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\alpha^r \cdot R^2}$$

Biz bu haqda keyinroq batafsil to'xtalamiz.



15.1.7-rasm

Bir aylanani 360 ta teng yoyga bo'lamiz. Hosil bo'lgan yoylardan bittasini tutib turuvchi markaziy burchak 1^0 burchak deyiladi. 1^0 burchakning $1/60$ qismiga teng burchakka $1'$ (minut) burchak deyiladi. 1' burchakning 1/60 qismiga teng bo'lgan burchak 1'' (sekund) burchak deyiladi.

$$\boxed{1^0 = 60' = 3600''}$$

Hozirgi kunda burchak o'lchovining radian va gradus o'lchovlari butun dunyoda keng qo'llaniladi. Ularni biri ma'lum bo'lganda ikkinchisini aniqlash mumkin.

Radiandan gradusga o'tish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\alpha^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha^r}$$

Isboti: 2π radian burchak 360^0 burchakka tengligi hamda α^r burchak α^0 burchakka tengligidan proporsiya tuzamiz. $\left|\begin{matrix} 2\pi & - & 360^0 \\ \alpha^r & - & \alpha^0 \end{matrix}\right|$ dan mos o'lchamlar nisbati ham teng bo'ladi. $\frac{2\pi}{\alpha^r} = \frac{360^0}{\alpha^0}$ dan $\alpha^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \alpha^r$ kelib chiqadi.

Gradusdan radianga o'tish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\alpha^r = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha^0}$$

Isboti: Buni oldingi formuladan osongina keltirib chiqarish mumkin.

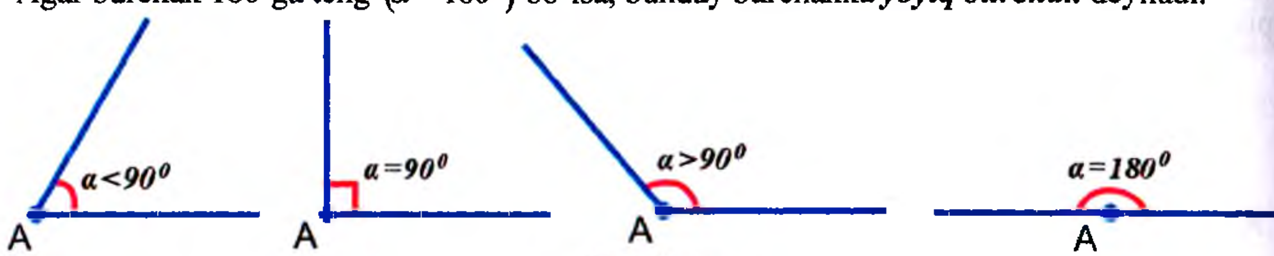
Burchakning kattaligiga qarab bir necha turlarga bo'linadi (16.1.8-rasm).

Agar burchak 90^0dan kichik $(\alpha < 90^0)$ bo'lsa, bunday burchakka ***o'tkir burchak*** deyiladi.

Agar burchak 90^0ga teng $(\alpha = 90^0)$ bo'lsa, bunday burchakka ***to'g'ri burchak*** deyiladi.

Agar burchak 90^0dan katta $(\alpha > 90^0)$ bo'lsa, bunday burchakka ***o'tmas burchak*** deyiladi.

Agar burchak 180^0ga teng $(\alpha = 180^0)$ bo'lsa, bunday burchakka ***yoyiq burchak*** deyiladi.



16.1.8-rasm

Yuqoridagilardan tashqari o'zaro qo'shni va o'zaro vertikal bo'lgan burchaklar ham mavjuddir.

Agar ikkita burchakning bir tomoni umumiy bo'lib, qolgan tomonlari esa biri-birlarining davomlari bo'lsalar, bunday burchaklarga ***o'zaro qo'shni burchaklar*** deyiladi (-rasm).

16.1.9-rasm

1-Masala: Nisbati $\frac{2}{3}$ ga teng bo'lgan o'zaro qo'shni burchaklarni toping.

Yechish:

1-usul

Burchaklarni α va β harflari bilan belgilab, ularning nisbatini $\frac{2}{3}$ ga tenglaymiz. Tenglamalar sistemasining ikkinchi tenglamasi sifatida qo'shni burchaklar yig'indisi olinadi.

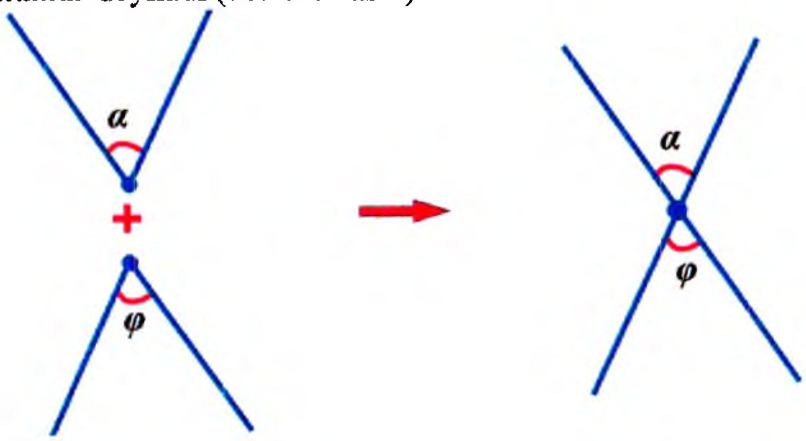
$$\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{2}{3}\\ \alpha+\beta=180^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{3}\beta\\ \dfrac{2}{3}\beta+\beta=180^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{3}\beta\\ \dfrac{5}{3}\beta=180^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{2}{3}\beta=\dfrac{2}{3}\cdot108^0=72^0\\ \beta=\dfrac{3}{5}\cdot180^0=108^0\end{cases}$$

2-usul

Burchaklarni $\alpha=2x$ va $\beta=3x$ deb olish orqali ishlash mumkin.

$\begin{cases}\alpha=2x\\ \beta=3x\end{cases}$, $\Rightarrow$ $\alpha+\beta=5x=180^0$, $\Rightarrow x=36^0$. Demak, $\alpha=2x=72^0$ va $\beta=3x=180^0$ ekan.

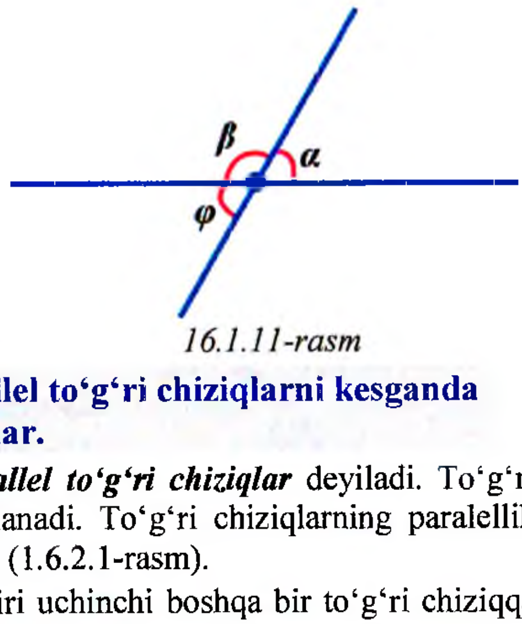
Agar ikkita burchakning tomonlari biri-birlarining davomlari bo‘lsalar, bunday burchaklarga ***o‘zaro vertikal burchaklar*** deyiladi (16.1.10-rasm).



16.1.10-rasm

2-Masala: Ikki to‘g‘ri chiziqni kesishishidan hosil bo‘lgan burchaklardan biri 40^0 ga teng bo‘lsa, qolgan burchaklarni toping (16.1.11-rasm).

<u>*Yechish:*</u> Aytaylik $\alpha=40^0$ bo‘lsin. U holda o‘zaro vertikal bo‘lgani uchun $\varphi=\alpha=40^0$, o‘zaro qo‘shni bo‘lgani uchun $\beta=\pi-\alpha=180^0-40^0=140^0$ bo‘ladi. SHunday qilib, ikkita to‘g‘ri chiziq kesishganda o‘zaro vertikal burchaklar bo‘lgan ikkita 40^0 va ikkita 140^0 burchaklar bor ekan.

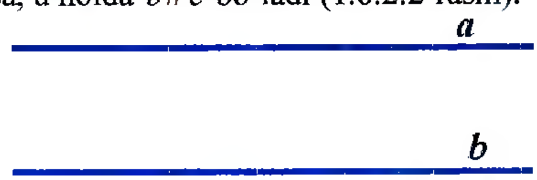


16.1.11-rasm

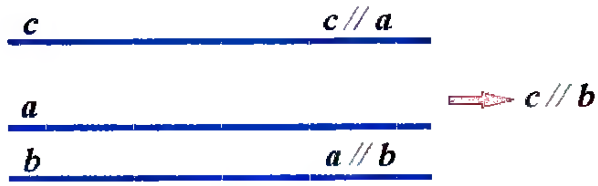
16.2-Mavzu: Parallel to‘g‘ri chiziqlar. Parallel to‘g‘ri chiziqlarni kesganda hosil bo‘lgan burchaklar.

Tekislikda kesishmaydigan ikki to‘g‘ri chiziqqa ***parallel to‘g‘ri chiziqlar*** deyiladi. To‘g‘ri chiziqlarni lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi. To‘g‘ri chiziqlarning paralellik belgisi // bilan belgilanadi, masalan $a//b$ kabi belgilanadi (1.6.2.1-rasm).

Agar o‘zaro parallel bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziqning biri uchinchi boshqa bir to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, ikkinchisi ham o‘sha to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi, ya’ni agar $a//b$ va $a//c$ bo‘lsa, u holda $b//c$ bo‘ladi (1.6.2.2-rasm).



16.2.1-rasm

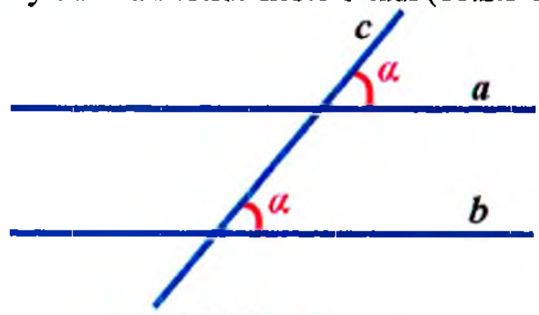


16.2.2-rasm

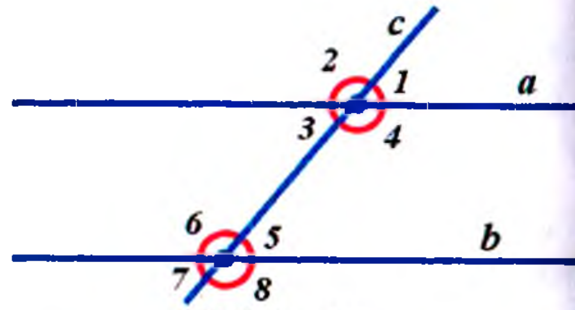
Tekislikda o‘zaro parllel bo‘lmagan to‘g‘ri chiziqlar albatta kesishuvchi bo‘ladi.

Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka ularning ***kesishish burchagi*** deyiladi.

Agar o‘zaro parallel bo‘lgan ikki to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvchi uchinchi to‘g‘ri chiziq parallel to‘g‘ri chiziqlardan birini qanday burchak ostida kesib o‘tsa, u holda ikkinchisini ham xuddi shunday burchak ostida kesib o‘tadi (16.2.3-rasm).



16.2.3-rasm



16.2.4-rasm

Aytaylik a va b to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lib, c to‘g‘ri chiziq esa ularni kesuvchi bo‘lsin. c to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqni kesganda $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ burchaklar, c to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqni kesganda esa $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$ burchaklar hosil bo‘ladi (16.2.4-rasm).

Hosil bo‘lgan 8ta burchakdan parallel to‘g‘ri chiziqlar orasida yotgan burchaklarga ***ichki burchaklar***, parallel to‘g‘ri chiziqlar tashqarisida yotgan burchaklarga esa ***tashqi burchaklar*** deyiladi.

$\angle 3$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ – ichki burchaklar

$\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 7$, $\angle 8$ – tashqi burchaklar

Hosil bo‘lgan 8ta burchakdan kesuvchi to‘g‘ri chiziqning bir tarafida yotgan burchaklarga ***bir yoqli burchaklar***, kesuvchi to‘g‘ri chiziqning turli tarafida yotgan burchaklarga esa ***almashinuvchi burchaklar*** deyiladi.

$\angle 1$, $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 8$ yoki $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 6$, $\angle 7$ – bir yoqli burchaklar

$\angle 1$, $\angle 3$, $\angle 5$, $\angle 7$ yoki $\angle 2$, $\angle 4$, $\angle 6$, $\angle 8$ – almashinuvchi burchaklar

Hosil bo‘lgan 8ta burchakdan kesuvchi to‘g‘ri chiziqning bir tarafida va parallel to‘g‘ri chiziqlar orasida yotgan burchaklarga ***ichki bir yoqli burchaklar***, kesuvchi to‘g‘ri chiziqning bir tarafida va parallel to‘g‘ri chiziqlar tashqarisida yotgan burchaklarga esa ***tashqi bir yoqli burchaklar*** deyiladi.

$\angle 4$ va $\angle 5$ yoki $\angle 3$ va $\angle 6$ – ichki bir yoqli burchaklar

$\angle 1$ va $\angle 8$ yoki $\angle 2$ va $\angle 7$ – tashqi bir yoqli burchaklar

Ichki bir yoqli burchaklar yig‘indisi 180^0ga teng, xuddi shuningdek tashqi bir yoqli burchaklar yig‘indisi ham 180^0ga teng.

$$\angle 4+\angle 5=180^0 \text{ yoki } \angle 3+\angle 6=180^0$$

$$\angle 1+\angle 8=180^0 \text{ yoki } \angle 2+\angle 7=180^0$$

Hosil bo‘lgan 8ta burchakdan kesuvchi to‘g‘ri chiziqning turli tarafida va parallel to‘g‘ri chiziqlar orasida yotgan burchaklarga ***ichki almashinuvchi burchaklar***, kesuvchi to‘g‘ri chiziqning turli tarafida va parallel to‘g‘ri chiziqlar tashqarisida yotgan burchaklarga esa ***tashqi almashinuvchi burchaklar*** deyiladi.

$\angle 3$ va $\angle 5$ yoki $\angle 4$ va $\angle 6$ – ichki bir yoqli burchaklar

$\angle 1$ va $\angle 7$ yoki $\angle 2$ va $\angle 8$ – tashqi bir yoqli burchaklar

Ichki almashinuvchi burchaklar o‘zaro teng, xuddi shuningdek tashqi almashinuvchi burchaklar ham o‘zaro tengdir.

$$\angle 3=\angle 5 \text{ yoki } \angle 4=\angle 6$$

$$\angle 1=\angle 7 \text{ yoki } \angle 2=\angle 8$$

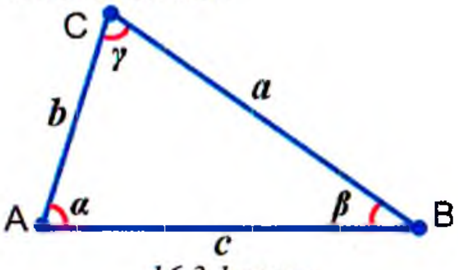
UCHBURCHAKLAR

16.3-Mavzu: Uchburchak. Uchburchakning tomonlari, perimetri, ichki va tashqi burchaklari.

Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtani tutashtiruvchi kesmalardan iborat figuraga ***uchburchak*** deyiladi. Uchta nuqtani ***uchburchak uchlari***, bu nuqtalarni tutashtiruvchi kesmalarni esa ***uchburchak tomonlari*** deyiladi.

Uchburchak uchlarini lotincha katta A, B, C harflar bilan, bu uchlardagi burchaklarni grekcha α, β, γ harflar bilan, bu burchaklar qarshisidagi tomonlar esa lotincha kichik a, b, c harflar bilan belgilanadi (16.3.1-rasm). Tomonlar va burchaklar quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\boxed{\begin{cases} \angle A = \alpha \\ \angle B = \beta \\ \angle C = \gamma \end{cases}, \quad \begin{cases} BC = a \\ AC = b \\ AB = c \end{cases}}$$

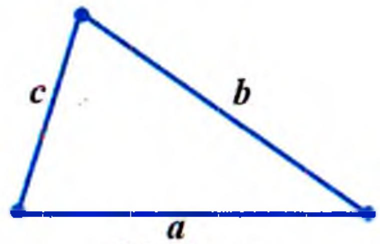


16.3.1-rasm

Uchburchakning katta burchagi qarshisida katta tomon yotadi, kichik burchagi qarshisida kichik burchak yotadi, teng burchaklari qarshisida esa teng tomonlar yotadi.

Uchburchakning barcha tomonlar uzunliklari yig'indisi uning ***perimetri*** deyiladi. Uchburchak perimetri quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{p = a + b + c}$$



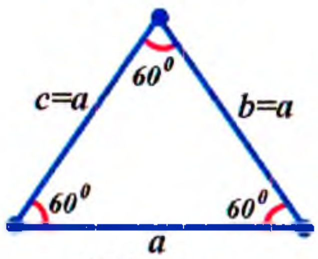
16.3.2-rasm

Uchburchak ixtiyoriy ikki tomoni yig'indisi har doim uchinchi tomondan katta bo'ladi.

$$\boxed{\begin{array}{c} a + b \geq c \\ b + c \geq a \\ a + c \geq b \end{array}}$$

Barcha tomonlari teng bo'lgan uchburchakka ***muntazam uchburchak*** deyiladi. Muntazam uchburchakning uchala burchaklari o'zaro teng bo'lib, ular 60^0ga tengdir.

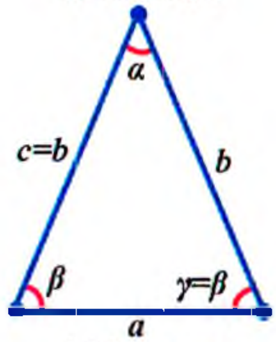
$$\boxed{\begin{array}{l} a = b = c \\ \alpha = \beta = \gamma = 60^0 \\ p = 3a \end{array}}$$



16.3.3-rasm

Ikkita tomoni o'zaro teng bo'lgan uchburchakka ***teng yonli uchburchak*** deyiladi. O'zaro teng tomonlarni yon tomonlar, uchinchi tomonni esa uchburchak asosi deyiladi.

$$\boxed{\begin{array}{l} b = c \\ \beta = \gamma, \ \alpha = 90^0 - \beta \\ p = a + 2b \end{array}}$$



16.3.4-rasm

Barcha ichki burchaklari o'tkir bo'lgan uchburchakni o'tkir burchakli uchburchak deyiladi (16.3.5-a,rasm).

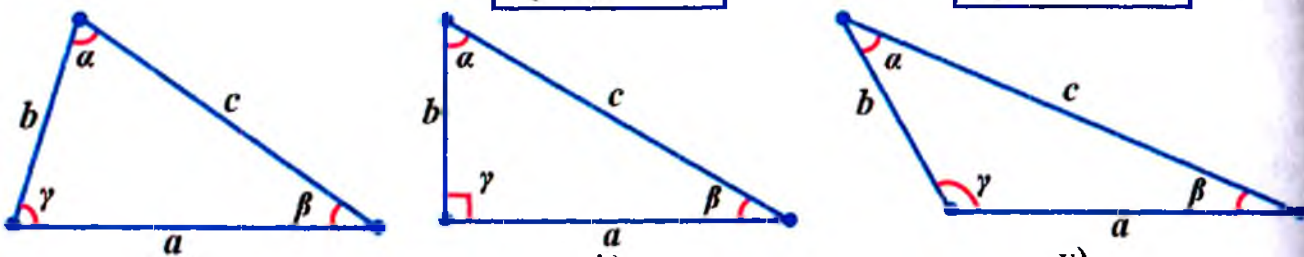
Agar uchburchakning birorta ichki burchagi 90^0ga teng bo'lsa, bunday uchburchakka to'g'ri burchakli uchburchak deyiladi. Bunda to'g'ri burchak qarshisidagi tomonni gipotenuza, qolgan tomonlarni esa katetlar deyiladi (16.3.5-b,rasm).

Agar uchburchakning birorta ichki burchagi 90^0dan katta bo‘lsa, bunday uchburchakni o‘tmas burchakli uchburchak deyiladi (16.3.5-v,rasm).

$$\boxed{\alpha,\beta,\gamma<90^0}$$

$$\boxed{\begin{cases}\gamma=90^0\\ \alpha+\beta=90^0\end{cases}}$$

$$\boxed{\begin{cases}\gamma>90^0\\ \alpha+\beta<90^0\end{cases}}$$



a) b) v)

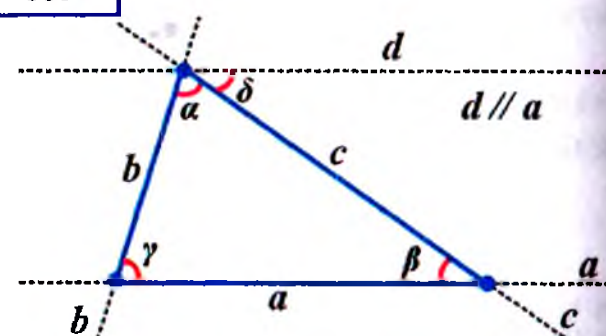
16.3.5-rasm

Uchburchakda bittadan ortiq o‘tmas burchak bo‘lishi mumkin emas. Ixtiyoriy uchburchakda katta burchak qarshisida katta katta tomon, kichik burchak qarshisida kichik tomon va teng burchaklar qarshisida teng tomonlar yotadi.

Uchburchakning ichki burchaklari yig‘indisi har doim 180^0ga teng bo‘ladi.

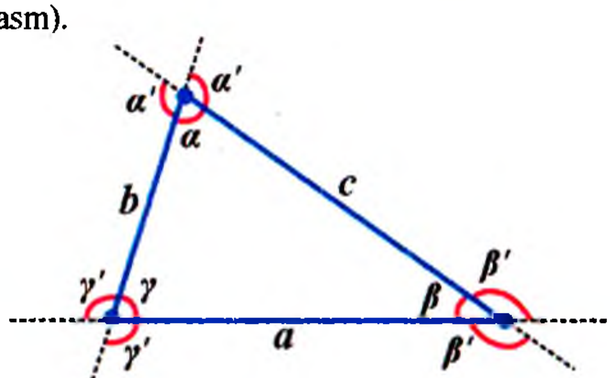
$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma=180^0}$$

Isboti: Tomonlar orqali a,b,c to‘g‘ri chiziqlar va A uch orqali $d\,//\,a$ to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. δ va β burchaklar o‘zaro ichki almashinuvchi burchaklar bo‘lgani uchun ular o‘zaro teng, ya’ni $\delta=\beta$. $\angle(\alpha+\delta)$ va γ burchaklar ichki bir yoqli burchaklar bo‘lgani uchun ularning yig‘indisi 180^0 ga teng. Bundan $\angle(\alpha+\delta)+\angle\gamma=180^0$, $\rightarrow$ $\alpha+\delta+\gamma=180^0$, $\rightarrow$ $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ kelib chiqadi.

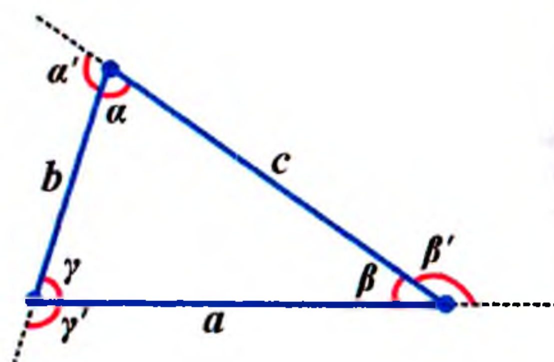


16.3.6-rasm

Uchburchakning ixtiyoriy uchidagi ichki burchagiga qo‘shni bo‘lgan burchakka o‘sha uchidagi ***tashqi burchak*** deyiladi. Uchburchakning har bir uchida ikkitadan tashqi burchak bor (16.3.7-rasm).



16.3.7-rasm



16.3.8-rasm

Uchburchakning ixtiyoriy uchidagi tashqi burchagi qolgan ikkita ichki burchagi yig‘indisiga tengdir (16.3.8-rasm).

$$\boxed{\alpha'=\beta+\gamma,\qquad \beta'=\alpha+\gamma,\qquad \gamma'=\alpha+\beta}$$

Uchburchakning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklari yig‘indisi har doim 360^0ga teng bo‘ladi.

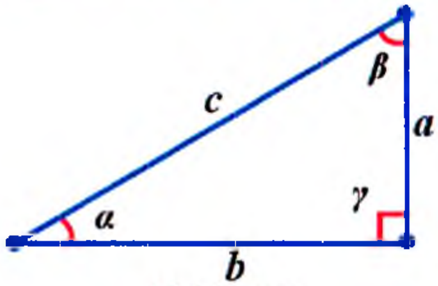
$$\boxed{\alpha'+\beta'+\gamma'=360^0}$$

Isboti: Uchburchakning har bir uchidagi ichki va tashqi burchagi o‘zaro qo‘shni burchaklar bo‘lgani uchun ular yig'indisi 180^0ga teng. Shuning uchun $\begin{cases} \alpha+\alpha'=180^0 \\ \beta+\beta'=180^0, \\ \gamma+\gamma'=180^0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha'+\beta'+\gamma')=3\cdot180^0.$

Bundan $\alpha'+\beta'+\gamma'=3\cdot180^0-(\alpha+\beta+\gamma)=3\cdot180^0-180^0=2\cdot180^0=360^0$ kelib chiqadi.

16.4-Mavzu: Burchak sinusi, kosinusi, tangensi va kotangensiga ta'riflar.

Katetlari a va b, gipotenuzasi c bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak chizaylik. a burchak qarshisidagi katetni α deb belgilaylik. Mana shu to'g'ri burchakli uchburchak uchun bir nechta ta'riflar keltiramiz.



16.4.1-rasm

***α* burchakning sinusi** deb α burchak qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{a}{c}}$$

Burchak sinusi o'lchamsiz kattalik bo'lib, burchak qarshisidagi katet gipotenuzaning qanday qismini tashkil etishini bildiradi.

***α* burchakning kosinusi** deb α burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{b}{c}}$$

Burchak kosinusi o'lchamsiz kattalik bo'lib, burchakka yopishgan katet gipotenuzaning qanday qismini tashkil etishini bildiradi.

***α* burchakning tangensi** deb α burchakka qarshisidagi katetning yopishgan katetga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{tg\alpha=\frac{a}{b}}$$

Burchak tangensi o'lchamsiz kattalik bo'lib, burchak qarshisidagi katet yopishgan katetning qanday qismini tashkil etishini bildiradi.

***α* burchakning kotangensi** deb α burchakka yopishgan katetning burchak qarshisidagi katetga nisbatiga teng bo'lgan kattalikka aytiladi.

$$\boxed{ctg\alpha=\frac{b}{a}}$$

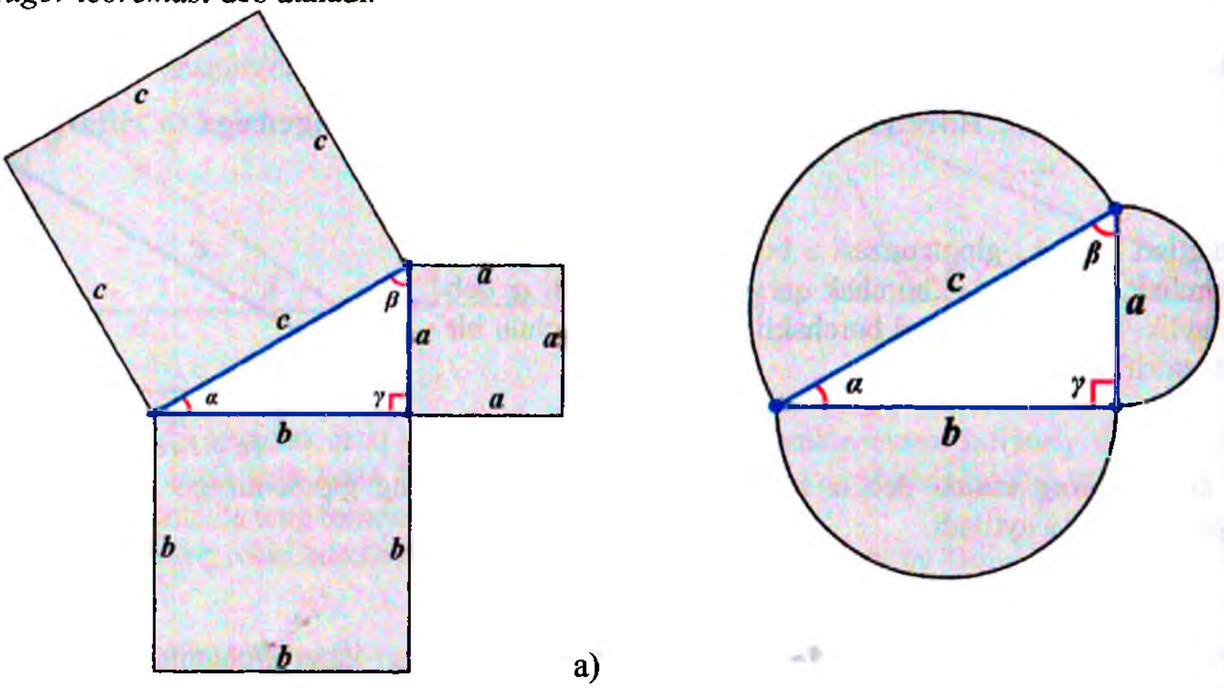
Burchak kotangensi o'lchamsiz kattalik bo'lib, burchakka yopishgan katet burchak qarshisidagi katetning qanday qismini tashkil etishini bildiradi.

16.5-Mavzu: To'g'ri burchakli uchburchak. Pifagor teoremasi. Gipotenuzaga tushirilgan balandlik.

Ta'rif: Agar uchburchakning burchaklaridan biri 90^0 ga teng bo'lsa, bunday uchburchakka *to'g'ri burchakli uchburchak* deyiladi.

To'g'ri burchakli uchburchakda to'g'ri burchak qarshisidagi tomonga *gipotenuza*, qolgan tomonlarni esa *katetlar* deyiladi. Gipotenuza eng katta tomon bo'lib, u to'g'ri burchak qarshisida yotadi. Katetlar har doim gipotenuzadan kichik bo'ladi, shuning uchun katetlar qarshisidagi burchaklar har doim o'tkir burchaklar bo'ladi, ya'ni $\alpha<90^0, \beta<90^0$ bo'ladi.

To‘g‘ri burchakli uchburchak gipotenuzasi va katetlari orasidagi bog‘lanish qadimgi yunon faylasufi Pifagor tomonidan aniqlangan bo‘lib, bu bog‘lanishni hozirgi kungacha uning sharafiga *Pifagor teoremasi* deb ataladi.



a) b)

16.5.1-rasm

Pifagor teoremasi:

Katetlar kvadratlarining yig‘indisi gipotenuzaning kvadratiga tengdir.

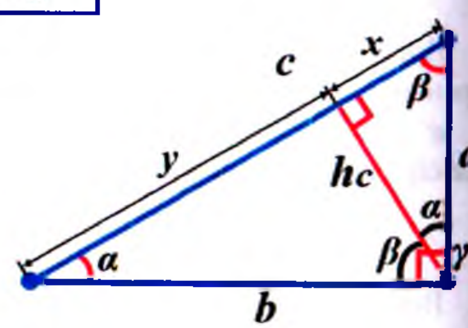
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Bu teoremadan katetlarga qurilgan kvadratlar yuzalarining yig‘indisi gipotenuzaga qurilgan kvadrat yuzasiga tengligi kelib chiqadi (16.5.1-a,rasm). Undan tashqari katetlarga qurilgan yarimdoiralar yuzalarining yig‘indisi gipotenuzaga qurilgan yarimdoira yuzasiga tengligini ham oddiy hisob-kitobdan keltirib chiqarish mumkin (16.5.1-b,rasm).

Pifagor teoremasidan foydalanib, noma’lum katetni ham aniqlash mumkin.

$$\boxed{a = \sqrt{c^2 - b^2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

Gipotenuzaga tushirilgan balandlikni h_c bilan, bu balandlikning gipotenuzadan ajratgan kesmalarini esa x va y deb belgilaylik (16.5.2-rasm). Bu erda x ni a katetning gipotenuzadagi proeksiyasi deb, y ni esa b katetning gipotenuzadagi proeksiyasi deb ham atashimiz mumkin.



16.5.2-rasm

h_c balandlikning gipotenuzadan ajratgan kesmalari x va y quyidagicha topiladi:

$$\boxed{x = \frac{a^2}{c}, \qquad y = \frac{b^2}{c}}$$

Isboti: Uchburchakning α burchak sinusidan foydalanib x ni topamiz.

$$\left|\begin{aligned} &\sin\alpha = \frac{a}{c} \\ &\sin\alpha = \frac{x}{a} \end{aligned}\right., \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{a} = \frac{a}{c}, \quad \rightarrow \quad x = \frac{a^2}{c}.$$

Uchburchakning α burchak kosinusidan foydalanib y ni topamiz.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{b}{c} \\ \cos\alpha = \dfrac{y}{b} \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{b} = \frac{b}{c}, \quad \to \quad y = \frac{b^2}{c}.$$

Katetlarning gipotenuzadagi proeksiyalari nisbati katetlar nisbatining kvadratiga teng, ya'ni burchak tangensi kvadratiga teng bo'ladi.

$$\boxed{\frac{x}{y} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = tg^2\alpha}$$

Isboti: Bundan oldingi topilgan formulalar nisbatidan foydalanamiz. Unga ko'ra $\frac{x}{y} = \frac{a^2/c}{b^2/c} = \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = tg^2\alpha$ bo'ladi.

Yuqoridagi formuladan shunday xulosa qilish mumkinki, agar katetlar nisbati 2ga teng bo'lsa, katetlarning gipotenuzadagi proeksiyalari nisbati esa $2^2 = 4$ ga teng bo'ladi.

Gipotenuzaga tushirilgan balandlik h_c ushbu formulalardan aniqlanadi:

$$\boxed{h_c = \frac{ab}{c} \quad yoki \quad h_c = \sqrt{xy}}$$

Isboti: 15.5.2-rasmdan ko'rinib turibdiki, gipotenuzaga tushirilgan balandlikni aniqlash uchun $h_c^2 = a^2 - x^2$ yoki $h_c^2 = b^2 - y^2$ dan foydalanamiz. Natijada, $h_c = \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2}{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2c^2 - a^4}{c^2}} = \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - a^2} = \frac{ab}{c}$ ekanligi kelib chiqadi. Agar $h_c = \frac{ab}{c}$ formulada $a = \sqrt{xc}$ va $b = \sqrt{yc}$ ekanini e'tiborga olsak, u holda biz $h_c = \frac{ab}{c} = \frac{\sqrt{xc}\cdot\sqrt{yc}}{c} = \sqrt{xy}$ formulaga ega bo'lamiz.

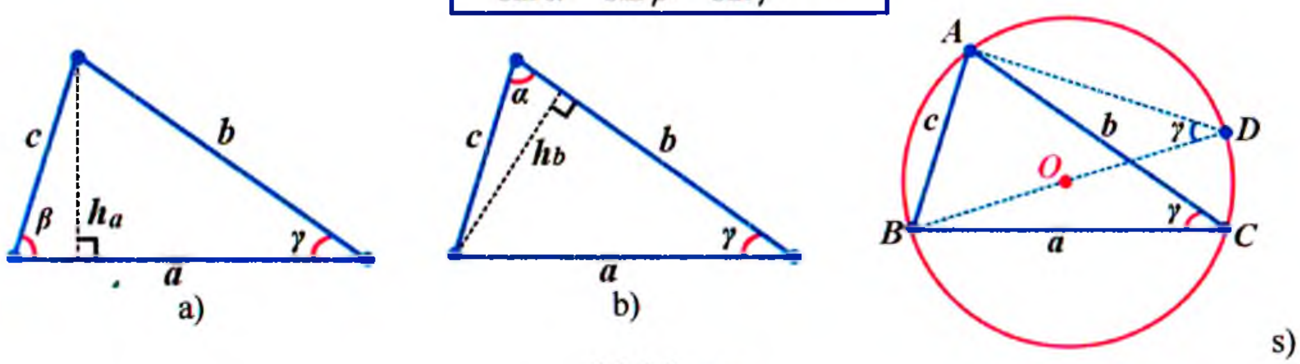
16.6-Mavzu: Sinuslar va kosinuslar teoremasi.

Ixtiyoriy berilgan uchburchakning noma'lum tomoni yoki noma'lum burchagini aniqlash masalasi asosan ikkita teoremadan – sinuslar va kosinuslar teoremasidan hal qilinadi.

Sinuslar teoremasi:

Uchburchak ixtiyoriy tomonining shu tomon qarshisidagi burchak sinusiga nisbati berilgan uchburchak uchun o'zgarmas kattalik bo'lib, bu kattalik shu aylanaga chizilgan tashqi aylananing diametriga tengdir.

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$



16.6.1-rasm

Isboti: a tomonga tushirilgan balandlik h_a ni burchak sinuslari orqali ifodalaymiz va ushbu $\begin{cases} h_a = c\cdot\sin\beta \\ h_a = b\cdot\sin\gamma \end{cases}, \Rightarrow c\cdot\sin\beta = b\cdot\sin\gamma, \to \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$ ga ega bo'lamiz (16.6.1-a,rasm). b tomonga tushirilgan balandlik h_b ni burchak sinuslari orqali ifodalaymiz va ushbu $\begin{cases} h_a = c \cdot \sin\beta \\ h_a = b \cdot \sin\gamma \end{cases}$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$, $\rightarrow$ $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ ga ega bo'lamiz (16.6.1-b,rasm). Demak h_a va h_b lardan foydalanib $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ ekanligini aniqladik. Endi ana shu nisbatlarning uchburchakka tashqi chizilgan aylana diametriga tengligini isbotlashimiz kerak bo'ladi. Buni 15.6.1-s,rasmdan foydalanib aniqlaymiz. AB vatarga aylananing katta yoyining ixtiyoriy nuqtasidan turib qaraganda bir xil γ burchak ostida ko'rinadi, shuningdek C va D nuqtalardan turib qaraganda ham. BD kesma markazdan o'tgani uchun diametr hisoblanadi va bu diametr to'g'ri burchakli ΔABDning gipotenuzasi ham hisoblanadi. Shuning uchun γ burchak sinusi $\sin\gamma = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{c}{2R}$ bo'ladi va bundan $\dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ ga tengligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ ekanligi isbotlandi.

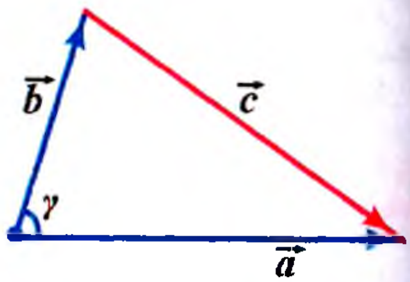
Shuni ham eslatib o'tish kerakki, vatarning aylana yoyidan qaragandagi ko'rinma burchagi va uchburchakka tashqi chizilgan aylana mavzularini hali o'tmagan bo'lsak-da teoremani isbotlashda bu mavzulardan foydalandik. Ushbu mavzularni kelgusi mavzularda batafsil yoritamiz.

Kosinuslar teoremasi:

Uchburchak ixtiyoriy tomonining kvadrati qolgan ikkita tomonlari kvadratlarining yig'indisidan shu tomonlar va ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasining ikkilanganligini ayirish natijasiga tengdir.

$$\boxed{\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}}$$

Isboti: Teoremani isbotlashdan oldin kelgusida vektor va ular ustida amallar mazusida o'tiladigan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi va vektorlar ayirmasi haqida qisqacha to'xtalib o'tamiz. Ixtiyoriy ikki $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb ushbu $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ formula bilan hisoblab topiladigan skalyar kattalikka aytiladi. Ikki vektorning ayirmasi deb esa $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ deb belgilanadigan va



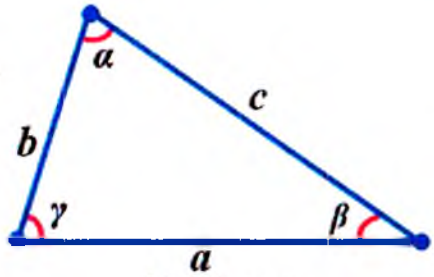
15.6.2-rasm

uzunligi $|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma}$ formuladan aniqlanadigan vektor kattalikka aytiladi. Demak, $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ayirma vektorning har ikkala tarafini kvadratga oshirsak, $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$ kelib chiqadi bundan esa $|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$ olamiz. Buni qisqacha $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ deb ham yozish mumkin. Teorema isbotlandi.

Kosinuslar teoremasini uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchak ma'lum bo'lganda uchinchi tomonni aniqlash formulasidir deb ham aytish mumkin.

Kosinuslar teoremasidan foydalanib uchburchakning uchta tomoni berilganda uchta burchakni ham aniqlash mumkin bo'ladi.

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$



16.6.3-rasm

Kosinuslar teoremasidan foydalanib uchburchakning qachon o‘tkir burchakli, qachon to‘g‘ri burchakli va qachon o‘tmas burchakli bo‘lishi haqida aytish mumkin. Agar γ burchak uchburchakning eng katta burchagi deb hisoblasak, u holda uchburchakning o‘tkir burchakli, to‘g‘ri burchakli va o‘tmas burchakli bo‘lish shartlari quyidagicha bo‘ladi.

$$\begin{cases} c^2<a^2+b^2 \;\; da \;\; o'tkir\, burchakli \\ c^2=a^2+b^2 \;\; da \;\; to'g'ri\, burchakli \\ c^2>a^2+b^2 \;\; da \;\; o'tmas\, burchakli \end{cases}$$

Sinuslar va kosinuslar teoremasidan foydalanib ixtiyoriy uchburchakning noma’lum burchagi va noma’lum tomonini aniqlash mumkin. Bu haqda keyingi mavzuda gap boradi.

16.7-Mavzu: Uchburchaklarni yechish.

Uchburchaklarni Yechish masalasi asosan quyidagi 4 xil ko‘rinishda hal etiladi:

1) uburchakning bir tomoni va ikkita burchagi berilgan;
2) uburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi berilgan;
3) uchburchakning ikki tomoni va bu tomonlardan birining qarshisidagi burchak berilgan;
4) uchburchakning uchta tomoni berilgan.

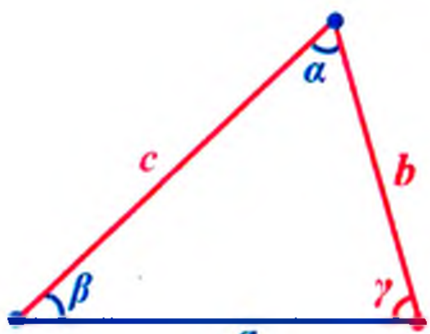
Yuqorida keltirilgan 4ta holning har biriga misollar Yechish orqali to‘xtalib o‘tamiz.

1-Masala: Uchburchakning bitta tomoni $a=32$ va ikkita burchagi $\alpha=64^0, \beta=42^0$ ga teng. Bu uchburchakning qolgan ikkita b va c tomonlari hamda uchinchi burchagi γ ni aniqlang.

Yechish:

Uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 180^0 ga tengligidan γ burchakni topamiz. Unga ko‘ra $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)=180^0-(64^0+42^0)=74^0$ bo‘ladi. Sinuslar teoremasi $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ dan foydalanib b va c tomonlarini aniqlaymiz. Unga ko‘ra noma’lum tomonlar $b=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}a=\frac{\sin 42^0}{\sin 64^0}a=\frac{0{,}66913}{0{,}89879}\cdot 32=23{,}823$ va

$c=\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}a=\frac{\sin 74^0}{\sin 64^0}a=\frac{0{,}96126}{0{,}89879}\cdot 32=34{,}224$ bo‘ladi.



16.7.1-rasm

2-Masala: Uchburchakning ikkita tomoni $a=24, c=18$ va bu tomonlar orasidagi burchagi $\beta=25^0$ ga teng. Bu uchburchakning uchinchi b tomonini hamda qolgan ikkita α va γ burchaklarini aniqlang.

Yechish:

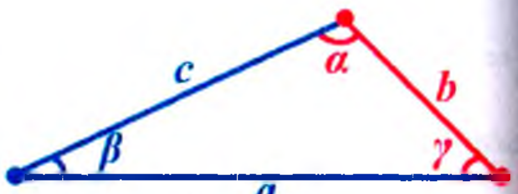
Kosinuslar teoremasidan foydalanib b tomonini aniqlaymiz. Unga ko‘ra $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta=24^2+18^2-2\cdot 24\cdot 18\cdot\cos 25^0=576+324-783=117, \rightarrow$ $b=\sqrt{117}=10{,}814$ bo‘ladi. Sinuslar teoremasi $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ dan foydalanib α va γ burchaklarni aniqlaymiz.

Unga ko'ra noma'lum burchaklar

$\sin\alpha = \frac{a}{b}\sin\beta = \frac{24}{10{,}814}\sin 25^0 = 0{,}93794, \rightarrow \alpha = 110{,}295^0$ va

$\sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta = \frac{18}{10{,}814}\sin 25^0 = 0{,}70345, \rightarrow \gamma = 44{,}705^0$

bo'ladi. Topilgan burchaklardan ichki burchaklar



16.7.2-rasm

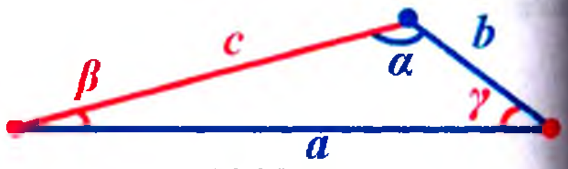
yig'indisi $\alpha + \beta + \gamma = 110{,}295^0 + 25^0 + 44{,}705^0 = 180^0$ ekaniga ishonch hosil qilish mumkin.

3-Masala: Uchburchakning ikkita tomoni $a = 27, b = 9$ va bu tomonlardan birining qarshisidagi burchak $\alpha = 128^0$ ga teng. Bu uchburchakning qolgan ikkita β va γ burchaklari hamda uchinchi tomoni c ni aniqlang.

Yechish:

Sinuslar teoremasi $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ dan foydalanib β burchakni aniqlaymiz. Unga ko'ra

$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{9}{27}\sin 128^0 = 0{,}26267, \rightarrow \beta = 15{,}2286^0$



16.7.3-rasm

bo'ladi. Uchburchak ichki burchaklari yig'indisi 180^0 ga tengligidan γ burchakni topamiz. Unga ko'ra $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) = 180^0 - (128^0 + 15{,}2286^0) = 36{,}7714^0$ bo'ladi. Uchinchi c tomonni kosinuslar teoremasidan topamiz. Unga ko'ra $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 27^2 + 9^2 - 2\cdot 27\cdot 9\cdot\cos 36{,}7714^0 =$ $= 729 + 81 - 389{,}3 = 420{,}7$, $\rightarrow$ $c = \sqrt{420{,}7} = 20{,}51$ bo'ladi.

4-Masala: Uchburchakning uchta tomoni $a = 16, b = 26, c = 18$ ekani ma'lum bo'lsa, qolgan uchta burchaklarini aniqlang.

Yechish:

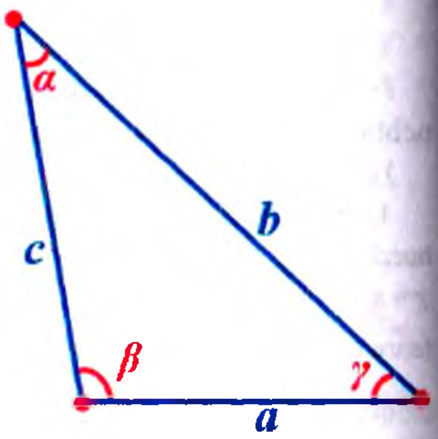
Kosinuslar teoremasidan foydalanib uchta burchakni ham aniqlaymiz. Unga ko'ra

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{26^2 + 18^2 - 16^2}{2\cdot 26\cdot 18} = \frac{676 + 324 - 256}{2\cdot 26\cdot 18} = \frac{744}{2\cdot 26\cdot 18} = 0{,}79487$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{16^2 + 18^2 - 26^2}{2\cdot 16\cdot 18} = \frac{256 + 324 - 676}{2\cdot 16\cdot 18} = \frac{-96}{2\cdot 16\cdot 18} = -0{,}16667$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{16^2 + 26^2 - 18^2}{2\cdot 16\cdot 26} = \frac{256 + 676 - 324}{2\cdot 16\cdot 26} = \frac{608}{2\cdot 16\cdot 26} = 0{,}73077$$

Bulardan burchaklar $\alpha = \arccos 0{,}79487 = 37{,}357^0$, $\beta = \arccos(-0{,}16667) = 99{,}594^0$, $\gamma = \arccos 0{,}73077 = 43{,}049^0$ bo'ladi. Topilgan burchaklardan ichki burchaklar yig'indisi $\alpha + \beta + \gamma = 37{,}357^0 + 99{,}594^0 + 43{,}049^0 = 180^0$ ekaniga ishonch hosil qilish mumkin.



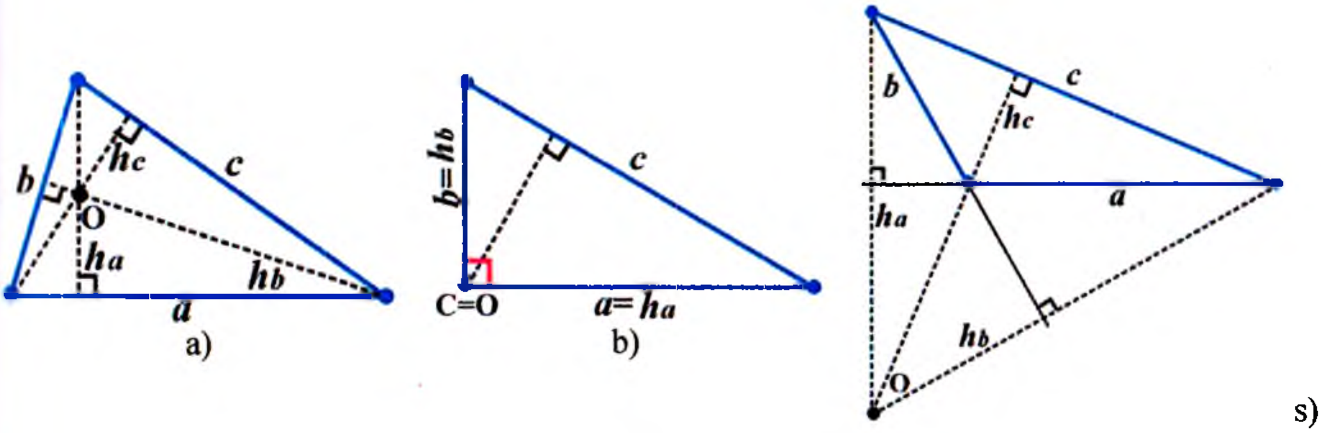
16.7.4-rasm

16.8-Mavzu: Uchburchak balandligi va uning xossalari.

Uchburchakning ixtiyoriy uchidan chiqib qarshisidagi tomonga 90^0 burchak ostida tutashuvchi kesmaga o'sha tomonga tushirilgan ***balandlik*** deyiladi.

Tomonlari a, b, c bo'lgan uchburchak tomonlariga tushirilgan balandliklar mos holda h_a, h_b, h_c bo'ladi.

Uchburchak qanday bo'lmasin, uchta tomonga tushirilgan balandliklar har doim bitta nuqtada kesishadi. Bu balandliklar kesishish nuqtasi o'tkir burchakli uchburchakda uchburchak ichida, to'g'ri burchakli uchburchakda to'g'ri burchakning o'zida va o'tmas burchakli uchburchakda esa uchburchak tashqarisida bo'ladi (16.8.1-rasm).



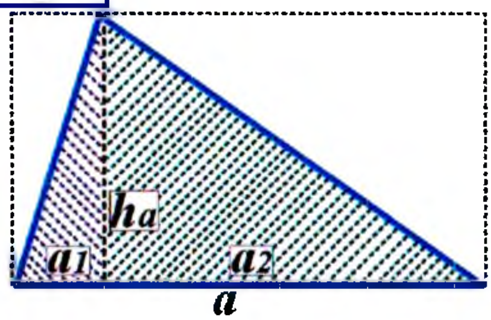
16.8.1-rasm

Balandlikni uchburchak yuzasi orqali ifodalash mumkin, lekin biz uchburchak yuzasi mavzusi bilan hali tanish emasmiz. Bu mavzusiga kelgusida batafsil to'xtalamiz.

Uchta tomonga tushirilgan balandliklarni uchburchak yuzasi orqali ifodalash formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{h_a = \frac{2S}{a},\quad h_b = \frac{2S}{b},\quad h_c = \frac{2S}{c}}$$

<u>Isboti:</u> Aytaylik balandlik uchburchakning ixtiyoriy a tomoniga tushirilgan bo'lsin. Tushirilgan h_a balandlik a asosni ikkita a_1 va a_2 kesmalarga, uchburchakni esa ikkita to'g'ri burchakli uchburchakka ajratadi. Har bir to'g'ri burchakli uchburchak yuzasi bu to'g'ri burchakli uchburchakni qamragan to'g'ri to'rtburchak yuzasining yarmiga teng, ya'ni $S_\Delta = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a_1h_a + \frac{1}{2}a_2h_a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)h_a = \frac{1}{2}ah_a$ bo'ladi.



16.8.2-rasm

Uchburchakning qolgan b va c tomonlariga tushirilgan balandliklari h_b va h_c larni ham h_a balandlikni topgandagi kabi aniqlanadi.

Uchburchakning uchta tomoni uzunliklari ham ma'lum bo'lganda uchta tomonga tushirilgan balandlikni topish formulalari quyidagicha bo'ladi:

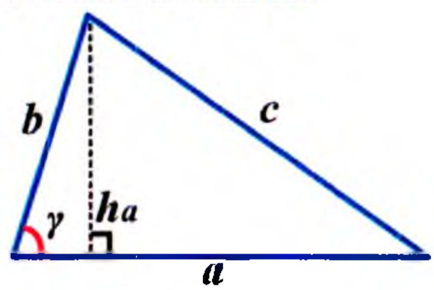
$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

Bu erda: $\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2} = 4S$ bo'lib, bunga kelgusi mavzularda to'xtalamiz.

<u>Isboti:</u> Bitta tomonga tushirilgan balandlik formulasini keltirib chiqarishimiz etarlidir. a tomonga tushirilgan balandlik $h_a = b\sin\gamma = b\sqrt{1 - co^2\gamma} = b\sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2} =$ $= b\sqrt{\frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2}} = \frac{1}{2a}\sqrt{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$ bo'ladi. Qolgan balandliklar ham xuddi shu yo'sinda hisoblab topiladi.

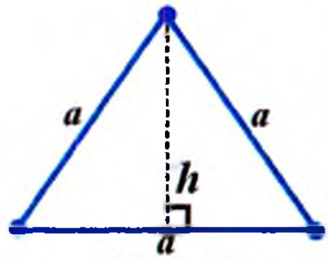


16.8.3-rasm

Yuqorida topilgan formulalarni muntazam, teng yonli va to'g'ri burchakli uchburchak kabi xususiy hollarga tatbiq etishimiz mumkin.

Tomoni a ga teng bo‘lgan muntazam uchburchakning uchta balandligi ham o‘zaro teng va quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{h=\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$



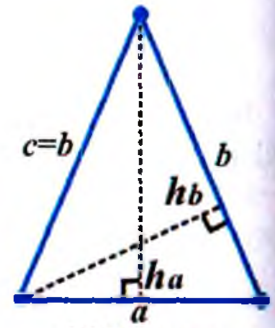
16.8.4-rasm

Isboti: Muntazam uchburchakda $a=b=c$ hamda $h_a=h_b=h_c=h$ bo‘ladi. Balandlik esa

$$h=\frac{1}{2a}\sqrt{(2aa)^2-\left(a^2+a^2-a^2\right)^2}=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^4-a^4}=\frac{\sqrt{3}a^2}{2a}=\frac{\sqrt{3}a}{2}$$ bo‘ladi.

Asosi a ga, yon tomonlari b ga teng bo‘lgan teng yonli uchburchakning asosiga va yon tomoniga tushirilgan balandliklari quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{h_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2},\qquad h_b=\frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}}$$



16.8.5-rasm

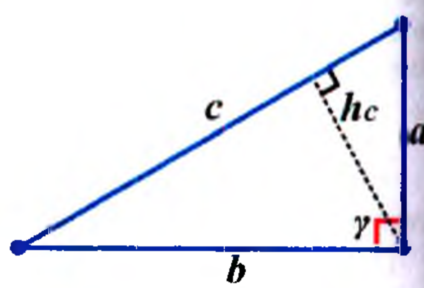
Isboti: Teng yonli uchburchakda $b=c$ hamda $h_b=h_c$ bo‘ladi. a tomonga tushirilgan balandlik $h_a=\frac{1}{2a}\sqrt{(2ab)^2-\left(a^2+b^2-b^2\right)^2}=\frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2-a^4}=$

$=\frac{a}{2a}\sqrt{4b^2-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$ bo‘ladi. b tomonga tushirilgan balandlik

$$h_b=\frac{1}{2b}\sqrt{(2ab)^2-\left(a^2+b^2-b^2\right)^2}=\frac{1}{2b}\sqrt{4a^2b^2-a^4}=\frac{a}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}\ne\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}$$ bo‘ladi.

Katetlari a va b ga hamda gipotenuzasi c ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlariga va gipotenuzasiga tushirilgan balandliklari quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{h_a=b,\quad h_b=a,\quad h_c=\frac{ab}{c}}$$



16.8.6-rasm

Isboti: Bunda Pifagor teoremasidan foydalanib ildiz ostidagi ifoda $\sqrt{(2ab)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}=2ab$ ekanligini bilgan holda so‘ralgan kattaliklarni aniqlaymiz. SHunga ko‘ra $h_a=\frac{1}{2a}2ab=b$, $h_b=\frac{1}{2b}2ab=a$, $h_c=\frac{1}{2c}2ab=\frac{ab}{c}$ formulalarni hosil qilamiz.

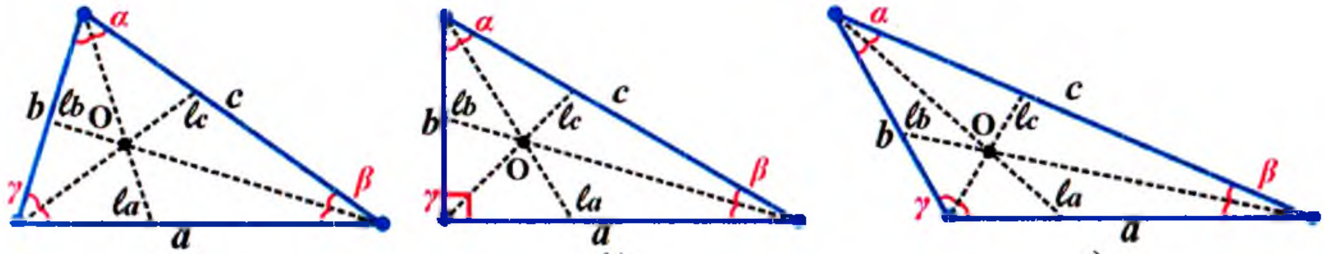
Umumiy holda uchta tomonga tushirilgan balandliklar uzunliklari uch xil bo‘ladi. Eng katta tomonga tushirilgan balandlik eng qisqa va eng qisqa tomonga tushirilgan balandlik eng uzun bo‘ladi. Agar tomonlar uzunliklari $a<b<c$ bo‘lsa, u holda shu tomonga tushirilgan balandliklar $h_a>h_b>h_c$ bo‘ladi.

15.9-Mavzu: Uchburchak bissektrisasi va uning xossalari.

Uchburchakning ixtiyoriy uchidan chiqib burchakni teng ikkiga bo‘luvchi va qarshisidagi tomonga tutashuvchi kesmaga o‘sha tomonga tushirilgan ***bissektrisa*** deyiladi.

Tomonlari a,b,c bo‘lgan uchburchak tomonlariga tushirilgan balandliklar mos holda ℓ_a,ℓ_b,ℓ_c bo‘ladi.

Uchburchak qanday bo‘lmasin, uchta tomonga tushirilgan bissektrisalar har doim bitta nuqtada kesishadi va bu kesishish nuqtasi har doim uchburchak ichida yotadi (16.9.1-rasm).

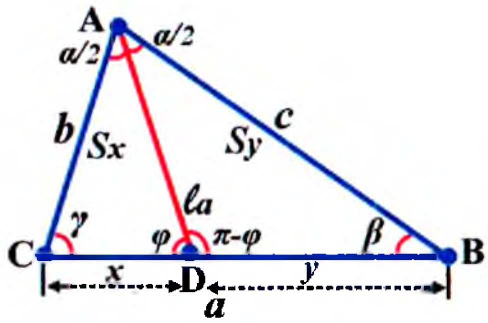


a) b) s)

16.9.1-rasm

a tomonga tushirilgan bissektrisa ℓ_a shu tomonni x va y kesmalarga, uchburchakning to'la yuzasini esa S_x va S_y yuzalarga ajratadi (15.9.2-rasm). Bunda bissektrisa ajratgan kesmalar nisbati mos yon tomonlar nisbatiga yoki mos ajratgan yuzalar nisbatiga teng bo'ladi.

$$\boxed{\frac{x}{y}=\frac{b}{c}=\frac{S_x}{S_y}}$$



16.9.2-rasm

Isboti: ΔACD dan $\frac{x}{\sin\alpha/2}=\frac{b}{\sin\varphi}$ va ΔABD dan $\frac{y}{\sin\alpha/2}=\frac{c}{\sin(\pi-\varphi)}=\frac{c}{\sin\varphi}$ bo'ladi. Ularning nisbati $\frac{x}{y}=\frac{b}{c}$ kelib chiqadi. Bissektrisa ajratgan yuzalar $S_x=\frac{1}{2}b\,\ell_a\sin\alpha/2$ va $S_y=\frac{1}{2}c\,\ell_a\sin\alpha/2$ bo'ladi. Ularning nisbati $\frac{S_x}{S_y}=\frac{b}{c}$ hosil bo'ladi. Shunday qilib, $\frac{x}{y}=\frac{b}{c}=\frac{S_x}{S_y}$ bo'lar ekan.

a tomonga tushirilgan bissektrisaning asosdan ajratgan kesma uzunliklari quyidagi formula orqali topiladi:

$$\boxed{x=\frac{ab}{b+c},\qquad y=\frac{ac}{b+c}}$$

Isboti: Bissektrisa ajratgan kesmalar nisbatini oldingi formuladan aniqlagan edik. Bu kesmalar uzunliklari yig'indisi esa a tomon uzunligini beradi. SHu kattaliklarni sistema qilib ishlasak, so'ralgan kattaliklar

$$\begin{cases}\frac{x}{y}=\frac{b}{c}\\ x+y=a\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{c}{b}x\\ x+\frac{c}{b}x=a\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{c}{b}x\\ \frac{b+c}{b}x=a\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{c}{b}x=\frac{ac}{b+c}\\ x=\frac{ab}{b+c}\end{cases}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Uchburchakning uchta tomoni uzunliklari ham ma'lum bo'lganda uchta tomonga tushirilgan bissektrisani topish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\begin{aligned}\ell_a&=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}\\ \ell_b&=\frac{1}{a+c}\sqrt{ac\left((a+c)^2-b^2\right)}\\ \ell_c&=\frac{1}{a+b}\sqrt{ab\left((a+b)^2-c^2\right)}\end{aligned}}$$

Isboti: 15.9.2-rasmda ΔACD dan kosinuslar teoremasidan foydalanamiz. Bunda

$$\ell_a^2=b^2+x^2-2bx\cos\gamma=b^2+\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2-2b\cdot\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{(b+c)^2}\left[b^2(b+c)^2+a^2b^2-b(b+c)(a^2+b^2-c^2)\right]=$$

$$= \frac{1}{(b+c)^2}\left[b^4+2b^3c+b^2c^2+a^2b^2-b\left(a^2b+b^3-bc^2+a^2c+b^2c-c^3\right)\right] = \frac{1}{(b+c)^2}\cdot$$

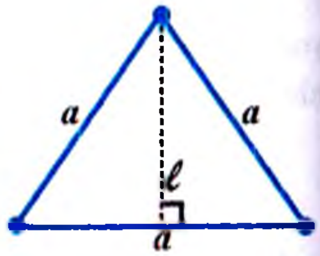
$$\cdot\left[b^4+2b^3c+b^2c^2+a^2b^2-a^2b^2-b^4+b^2c^2-a^2bc-b^3c+bc^3\right] = \frac{1}{(b+c)^2}\left[2b^2c^2+b^3c+bc^3-a^2bc\right]=$$

$= \frac{1}{(b+c)^2}\left[bc\left((b+c)^2-a^2\right)\right]$ kelib chiqadi. Bundan ildiz olsak $\ell_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}$ hosil bo'ladi. Qolgan bissektrisalar ham xuddi shu yo'sinda hisoblab topiladi.

Yuqorida topilgan formulalarni muntazam, teng yonli va to'g'ri burchakli uchburchak kabi xususiy hollarga tatbiq etishimiz mumkin.

Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam uchburchakning uchta bissektrisasii ham o'zaro teng va quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\ell = \frac{\sqrt{3}}{2}a = h}$$



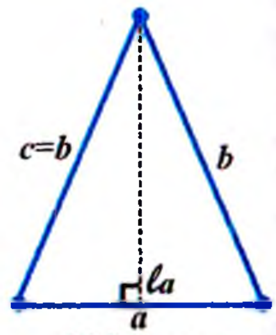
16.9.3-rasm

Isboti: Muntazam uchburchakda $a=b=c$ hamda $\ell_a=\ell_b=\ell_c=\ell$ bo'ladi. Bissektrisa esa formuladan $\ell=\ell_a=\frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}=$

$= \frac{1}{a+a}\sqrt{aa\left((a+a)^2-a^2\right)} = \frac{1}{2a}\sqrt{a^2\left(4a^2-a^2\right)} = \frac{1}{2a}\sqrt{3a^4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = h$ ga tengligi kelib chiqadi.

Asosi a ga, yon tomonlari b ga teng bo'lgan teng yonli uchburchakning asosiga tushirilgan balandliklari quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\ell_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2} = h_a}$$

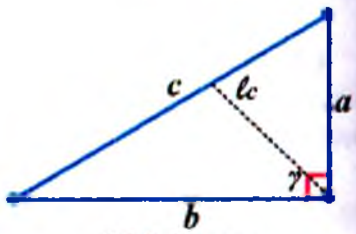


16.9.4-rasm

Isboti: Teng yonli uchburchakda $b=c$ hamda $\ell_b=\ell_c$ bo'ladi. a tomonga tushirilgan bissektrisa esa formulaga asosan $\ell_a = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\left((b+c)^2-a^2\right)} = \frac{1}{b+b}\sqrt{bb\left((b+b)^2-a^2\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2} = h_a$ ga teng ekanligi kelib chiqadi.

Katetlari a va b ga hamda gipotenuzasi c ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga tushirilgan bissektrisa quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\ell_c = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}}$$



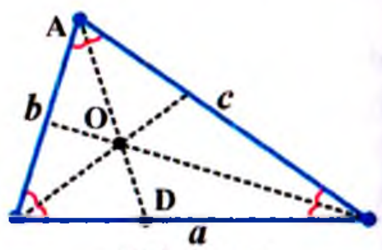
16.9.5-rasm

Isboti: Bunda Pifagor teoremasidan foydalansak,

$\ell_c = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\left((a+b)^2-c^2\right)} = \frac{1}{a+b}\sqrt{ab\left(a^2+b^2+2ab-c^2\right)} = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ ga teng bo'ladi.

Bissektrisalar kesishish nuqtasi burchak uchidan boshlab hisoblaganda quyidagi nisbatda bo'linadi:

$$\boxed{\frac{AO}{OD} = \frac{b+c}{a}}$$

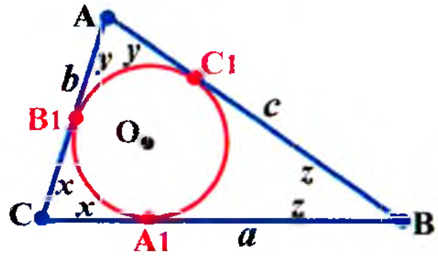


16.9.6-rasm

Bissektrisalar kesishish nuqtasi uchburchakka ichki chizilgan aylana markazida yotadi. Uchburchakka ichki chizilgan aylana tomonlarga uringanda tomonlarni kesmalarga ajratadi. Bu kesma uzunliklari quyidagicha bo'ladi (15.9.7-rasm):

$$\boxed{x = \frac{a+b-c}{2}, \qquad y = \frac{b+c-a}{2}, \qquad z = \frac{a+c-b}{2}}$$

Isboti: Bunda ushbu sistemalardan foydalanib so'ralgan kattaliklarni aniqlaymiz. Ushbu $\begin{cases} CA_1 = CB_1 = x \\ AB_1 = AC_1 = y \\ BC_1 = BA_1 = z \end{cases}$ va $\begin{cases} a = x+z \\ b = x+y \\ c = y+z \end{cases}$ sistemalardan noma'lum uzunliklar



16.9.7-rasm

$x = a - z = a-(c-y) = a-c+y = a-c+b-x$, $2x = a+b-c$, $x = \frac{a+b-c}{2}$

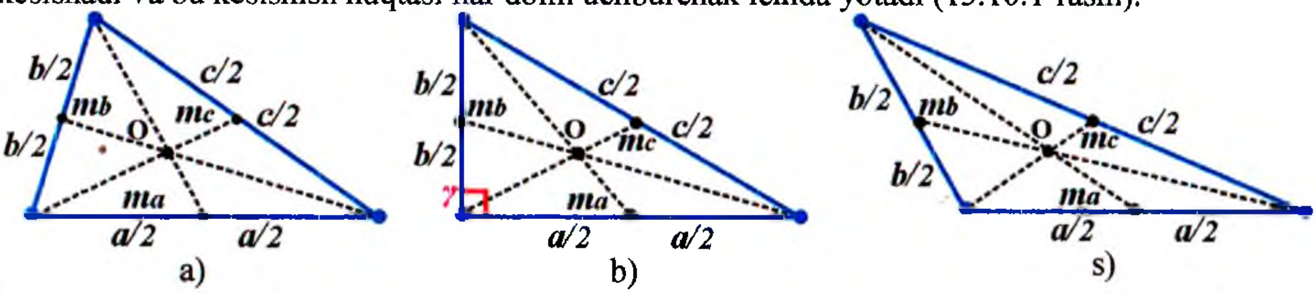
$y = b - x = b - \frac{a+b-c}{2} = \frac{b+c-a}{2}$ va $z = c - y = b - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a+c-b}{2}$ ga tengligi kelib chiqadi.

16.10-Mavzu: Uchburchak medianasi va uning xossalari.

Uchburchakning ixtiyoriy uchidan chiqib qarshisidagi tomonning o'rtasiga tutashuvchi kesmaga o'sha tomonga tushirilgan ***mediana*** deyiladi.

Tomonlari a, b, c bo'lgan uchburchak tomonlariga tushirilgan medianalarlar mos holda m_a, m_b, m_c bo'ladi.

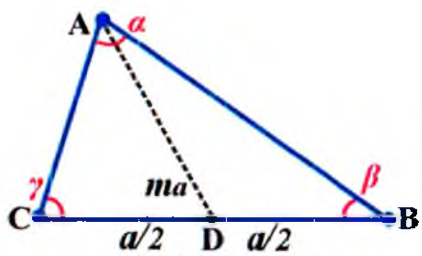
Uchburchak qanday bo'lmasin, uchta tomonga tushirilgan medianalar har doim bitta nuqtada kesishadi va bu kesishish nuqtasi har doim uchburchak ichida yotadi (15.10.1-rasm).



16.10.1-rasm

Uchburchakning uchta tomoni uzunliklari ham ma'lum bo'lganda uchta tomonga tushirilgan medianalarni topish formulalari quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \\ m_b &= \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} \\ m_c &= \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2} \end{aligned}}$$



16.10.2-rasm

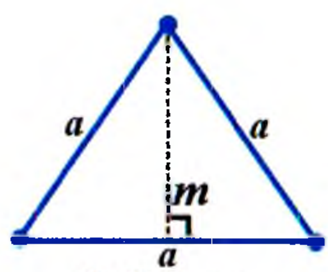
Isboti: 15.10.2-rasmda ΔACD dan kosinuslar teoremasidan foydalanamiz. Bunda $m_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2b\frac{a}{2}\cos\gamma = b^2 + \frac{a^2}{4} - ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1}{4}\left[4b^2+a^2-2a^2-2b^2+2c^2\right] = \frac{1}{4}\left[2b^2+2c^2-a^2\right]$ dan ildiz olsak,

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$ kelib chiqadi. Qolgan medianalar ham xuddi shu yo'sinda hisoblab topiladi.

Yuqorida topilgan formulalarni muntazam, teng yonli va to'g'ri burchakli uchburchak kabi xususiy hollarga tatbiq etishimiz mumkin.

Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam uchburchakning uchta medianasi ham o'zaro teng va quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{m = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \ell = h}$$

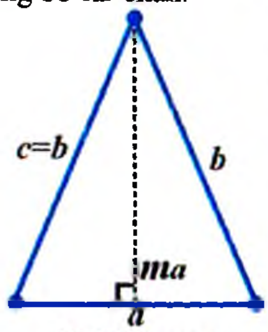


16.10.3-rasm

Isboti: Muntazam uchburchakda $a = b = c$ hamda $m_a = m_b = m_c = m$ bo'ladi. mediana esa formuladan $\ell = \ell_a = m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} =$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+a^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a=\ell=h$ ga tengligi kelib chiqadi. Demak, muntazam uchburchakning asosga tushirilgan balandligi, bissektrisasi va medianasi o'zaro teng bo'lar ekan.

Asosi a ga, yon tomonlari b ga teng bo'lgan teng yonli uchburchakning asosiga hamda yon tomoniga tushirilgan medianalari quyidagicha bo'ladi:

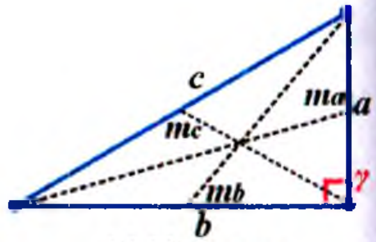


16.10.4-rasm

$$\boxed{m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}=\ell_a=h_a,\qquad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+b^2}}$$

Isboti: Teng yonli uchburchakda $b=c$ hamda $m_b=m_c$ bo'ladi. a tomonga tushirilgan mediana esa formulaga asosan $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2-a^2}=\ell_a=h_a$ ga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak, teng yonli uchburchakning asosga tushirilgan balandligi, bissektrisasi va medianasi o'zaro teng bo'lar ekan. Yon tomonga tushirilgan medina esa $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+b^2}$ ga teng ekanligi kelib chiqadi.

Katetlari a va b ga hamda gipotenuzasi c ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va katetlariga tushirilgan medianalar quyidagicha bo'ladi:



16.10.5-rasm

$$\boxed{m_c=\frac{c}{2}=R,\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2},\quad m_a=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}}$$

Isboti: Bunda Pifagor teoremasidan foydalansak,

$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2-c^2}=\frac{c}{2}=R$ ga teng bo'ladi. Gipotenuzaga tushirilgan mediana uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusiga tengligini kelgusi mavzularda ko'ramiz. a katetga tushirilgan mediana $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2+b^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2}$ va b katetga tushirilgan mediana $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+a^2+b^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$ ga teng bo'ladi.

To'g'ri burchakli uchburchakning katetlariga tushirilgan medianalari m_a va m_b ma'lum bo'lsa, gipotenuzaga tushirilgan mediana m_c quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{m_c=\sqrt{\frac{m_a^2+m_b^2}{5}}}$$

Isboti: Bunda Pifagor teoremasidan foydalansak, $\begin{cases} m_a^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2=\frac{a^2}{4}+b^2 \\ m_a^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2=a^2+\frac{b^2}{4}\end{cases}$ bo'ladi. Bu ikkala tenglamani bir-biriga qo'shsak, $m_a^2+m_b^2=\frac{5}{4}a^2+\frac{5}{4}b^2=\frac{5}{4}(a^2+b^2)=\frac{5}{4}c^2$ kelib chiqadi. Bundan gipotenuza uzunligi $c=2\sqrt{\frac{m_a^2+m_b^2}{5}}$ hosil bo'ladi. Gipotenuzaga tushirilgan mediana esa gipotenuza uzunligining yarmiga teng, ya'ni $m_c=\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{m_a^2+m_b^2}{5}}$ bo'ladi.

Medianalar va tomonlar orasidagi bog'lanish ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\boxed{m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)}$$

Isboti: Yuqorida topilgan mediana formulalarini kvadratga oshirib qo'shib chiqamiz.

Natijada $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+\frac{1}{4}\left(2a^2+2c^2-b^2\right)+\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)=\frac{1}{4}\cdot(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+$ $+2a^2+2c^2-b^2)=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right)$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar uchburchakning uchta medianasi ma'lum bo'lsa, u holda uchta medianasini aniqlash mumkin. Tomonlarning medianalar orqali berilishi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\begin{aligned} a&=\frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2+m_c^2\right)-m_a^2}\\ b&=\frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2+m_c^2\right)-m_b^2}\\ c&=\frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2+m_b^2\right)-m_c^2}\end{aligned}}$$

<u>Isboti:</u> Medianani topish formulalarini kvadratga oshirib, so'ngra uch noma'lumli tenglamalar sistemasini ishlaymiz.

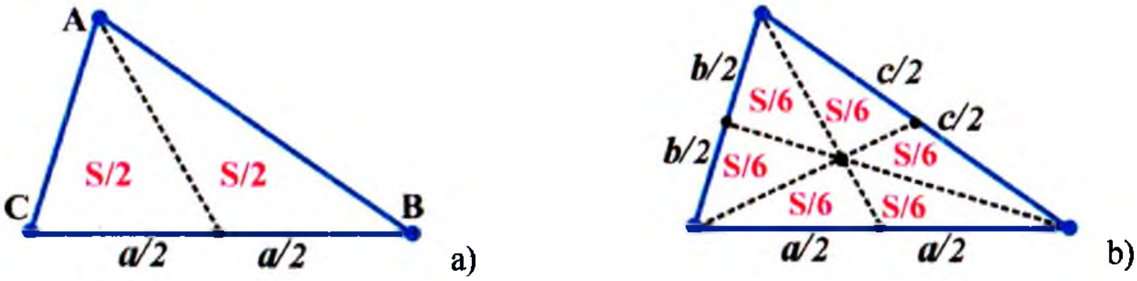
$$\begin{cases} m_a^2=\frac{1}{4}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2\\ m_b^2=\frac{1}{4}\left(2a^2+2c^2-b^2\right)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}b^2\\ m_c^2=\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{4}c^2\end{cases};\Rightarrow \begin{cases} c^2=2m_a^2+\frac{1}{2}a^2-b^2 \quad (*)\\ m_b^2=\frac{1}{2}a^2+m_a^2+\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{4}b^2=m_a^2+\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{4}b^2\\ m_c^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2-\frac{1}{2}m_a^2-\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{4}b^2=-\frac{1}{2}m_a^2+\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{8}a^2\end{cases};\Rightarrow$$

$$\begin{cases} m_b^2-m_a^2=\frac{3}{4}a^2-\frac{3}{4}b^2 \quad (**)\\ m_c^2+\frac{1}{2}m_a^2=\frac{3}{4}b^2+\frac{3}{8}a^2 \quad (***)\end{cases};\Rightarrow (**)+(***),\ \rightarrow\ m_b^2-m_a^2+m_c^2+\frac{1}{2}m_a^2=\frac{9}{8}a^2,\ \rightarrow\ \frac{1}{2}\left(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2\right)=\frac{9}{8}a^2,\ \rightarrow$$

$\rightarrow a^2=\frac{4}{9}\left(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2\right)$ hosil bo'ladi. Buni (**)ga qo'ysak $m_b^2-m_a^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9}\left(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2\right)-\frac{3}{4}b^2,\rightarrow$

$m_b^2-m_a^2=\frac{2}{3}m_b^2+\frac{2}{3}m_c^2-\frac{1}{3}m_a^2-\frac{3}{4}b^2,\rightarrow\ \frac{1}{3}m_b^2-\frac{2}{3}m_c^2-\frac{2}{3}m_a^2=-\frac{3}{4}b^2,\rightarrow\ b^2=\frac{4}{9}\left(2m_a^2+2m_c^2-m_b^2\right)$

ifodani, (*)ga qo'ganda esa $c^2=2m_a^2+\frac{1}{2}a^2-b^2=2m_a^2+\frac{2}{9}\left(2m_b^2+2m_c^2-m_a^2\right)-\frac{4}{9}\left(2m_a^2+2m_c^2-m_b^2\right)=$ $=\frac{4}{9}\left(\frac{9}{2}m_a^2+m_b^2+m_c^2-\frac{1}{2}m_a^2-2m_a^2-2m_c^2+m_b^2\right)=\frac{4}{9}\left(2m_a^2+2m_b^2-m_c^2\right)$ hosil bo'ladi. Bulardan kvadrat ildiz olinsa, izlanayotgan $a=\frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_b^2+m_c^2\right)-m_a^2}$, $b=\frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2+m_c^2\right)-m_b^2}$, $c=\frac{2}{3}\sqrt{2\left(m_a^2+m_b^2\right)-m_c^2}$ formulalar hosil bo'ladi.

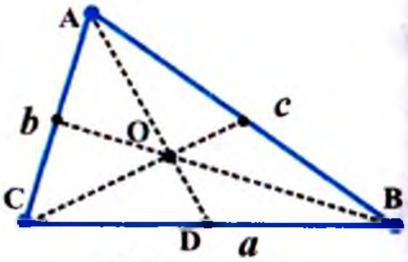


16.10.6-rasm

Uchburchak tomoniga tushirilgan mediana uchburchakni ikkita teng yuzali uchburchaklarga ajratadi (16.10.6-a,rasm). Uchburchakning uchta tomoniga tushirilgan medianalar uchburchakni oltita teng yuzali uchburchaklarga ajratadi (16.10.6-b,rasm). Shuning uchun ham uchburchak medianalar kesishgan nuqtasi uning og'irlik markazi hisoblanadi. Boshqacha aytganda, uchburchakni medianalar kesishgan nuqtasidan osib qo'yilganda biror tomonga og'masdan gorizontal holda turadi.

Medianalar kesishish nuqtasi burchak uchidan boshlab hisoblaganda 2 : 1 nisbatda bo‘linadi.

$$\boxed{\frac{AO}{OD}=2}$$



16.10.7-rasm

Agar uchburchak uchlarining Dekart koordinatalar sistemasidagi koordinatalari $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$ ma’lum bo‘lsa, medianalar kesishish nuqtasining koordinatasini aniqlash mumkin.

$$\boxed{x_O=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\qquad y_O=\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\qquad x_O=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}}$$

Isboti: Avval D nuqtaning koordinatasini kesma o‘rtasini topish formulasiga asosan aniqlaymiz. Unga ko‘ra $x_D=\frac{x_B+x_C}{2}$, $y_D=\frac{y_B+y_C}{3}$, $x_D=\frac{z_B+z_C}{3}$ bo‘ladi. Endi kesmani ixtiyoriy λ nisbatda bo‘luvchi nuqta koordinatasini topish formulasiga asosan O nuqtaning koordinatasini aniqlaymiz. Unga ko‘ra $\frac{AO}{OD}=\lambda=2$ bo‘lsa, $x_O=\frac{x_A+\lambda x_D}{1+\lambda}=\frac{x_A+2\cdot\frac{x_B+x_C}{2}}{1+2}=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}$,

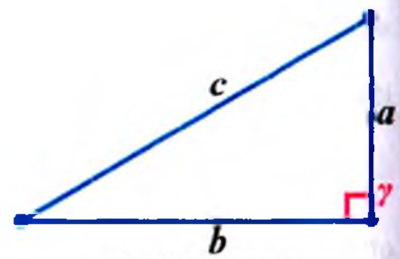
$$y_O=\frac{y_A+\lambda y_D}{1+\lambda}=\frac{y_A+2\cdot\frac{y_B+y_C}{2}}{1+2}=\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\quad z_O=\frac{z_A+\lambda z_D}{1+\lambda}=\frac{y_A+2\cdot\frac{z_B+z_C}{2}}{1+2}=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$ bo‘ladi.

16.11-Mavzu: Uchburchak yuzasi.

Uchburchak yuzasini aniqlay olish turmushda juda ham zarurdir. Uchburchaklar umumiy holda yoki xususiy holda berilishi mumkin. Endi uchburchak yuzasini aniqlash uchun bir necha formulalar keltirib chiqaramiz.

Katetlari a va b ga hamda gipotenuzasi c ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning yuzasini aniqlash formulalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{\begin{array}{ll} S=\frac{1}{2}ab & S=\frac{1}{2}a\sqrt{c^2-a^2} \\ S=\frac{1}{2}c\sqrt{xy} & S=\frac{1}{2}b\sqrt{c^2-b^2} \end{array}}$$



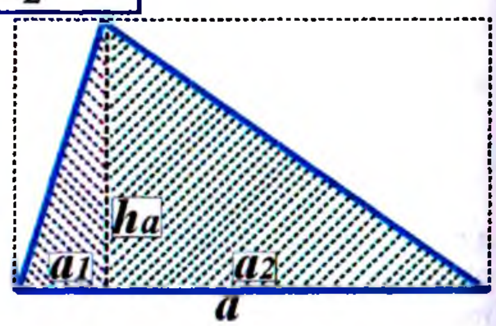
16.11.1-rasm

Uchburchak yuzasini tomon va tomonga tushirilgan balandlik orqali ifodalash formulalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ah_a,\quad S=\frac{1}{2}bh_b,\quad S=\frac{1}{2}ch_c}$$

Isboti: Aytaylik balandlik uchburchakning ixtiyoriy a tomoniga tushirilgan bo‘lsin. Tushirilgan h_a balandlik a asosni ikkita a_1 va a_2 kesmalarga, uchburchakni esa ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchakka ajratadi. Har bir to‘g‘ri burchakli uchburchak yuzasi bu to‘g‘ri burchakli uchburchakni qamragan to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasining yarmiga teng, ya’ni

$$S_\Delta=S_1+S_2=\frac{1}{2}a_1h_a+\frac{1}{2}a_2h_a=\frac{1}{2}(a_1+a_2)h_a=\frac{1}{2}ah_a$$ bo‘ladi.



16.11.2-rasm

Uchburchakning yuzasini qolgan b va c tomonlariga tushirilgan balandliklari h_b va h_c lar orqali topish ham xuddi yuqoridagi kabi aniqlanadi.

Uchburchak yuzasini ikki tomon va ular orasidagi burchak orqali aniqlash formulalari quyidagicha bo‘ladi:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\quad S=\frac{1}{2}ac\sin\beta,\quad S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

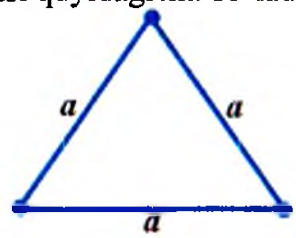
16.11.3-rasm

Isboti: a tomoniga tushirilgan h_a balandlikni $h_a=b\sin\gamma$ yoki $h_a=c\sin\beta$ deb ifodalaymiz. Bundan oldingi chiqarilgan formuladan foydalansak, $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ yoki $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ac\sin\beta$ formulalar hosil bo'ladi. Shuningdek b tomoniga tushirilgan h_b balandlikni $h_b=a\sin\gamma$ yoki $h_a=c\sin\alpha$

deb ifodalash orqali $S=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ yuzani chiqarish mumkin.

Tomoni a bo'lgan muntazam uchburchakning yuzasini topish formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$m=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$



16.11.4-rasm

Isboti: Muntazam uchburchakda $a=b=c$ hamda $\alpha=\beta=\gamma=60^0$ bo'ladi. Ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra uchburchak yuzasi $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}aa\sin60^0=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ bo'ladi.

Uchburchak yuzasini topish uchun Geron formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Bu erda: $p=\frac{a+b+c}{2}$ – yarimperimetr.

Isboti: Bu masalani kosinuslar teoremasi hamda ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra uchburchak yuzasini topish formulalaridan foydalanib hal qilamiz. Unga ko'ra yuza uchun

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{2}ab\sqrt{\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\cdot\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)}=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{2ab}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)\cdot\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{\left(c^2-(a-b)^2\right)\cdot\left((a+b)^2-c^2\right)}=\frac{1}{4}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{(c-a+b)\cdot(c+a-b)\cdot(a+b-c)\cdot(a+b+c)}=\frac{1}{4}\sqrt{2(p-a)\cdot2(p-b)\cdot2(p-c)\cdot2p}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

formula hosil bo'ladi.

Uchburchak yuzasini tomonlariga ko'ra aniqlash formulasi quyidagicha bo'ladi:

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}$$

Isboti: Bu masalani kosinuslar teoremasi hamda ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra uchburchak yuzasini topish formulalaridan foydalanib hal qilamiz. Unga ko'ra yuza uchun

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{1}{2ab}\sqrt{(2ab)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}=$$

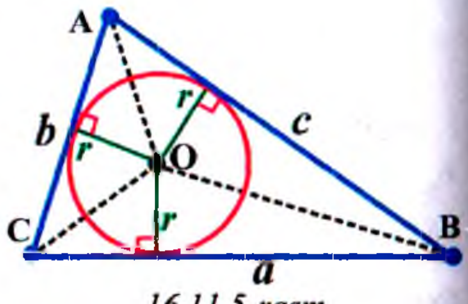
$=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2}$ formula hosil bo'ladi.

Masalalar ishlaganda tomonlar uzunliklari ancha katta sonlar bo'lganda Geron formulasidan foydalanish, tomonlar uzunliklarida irratsional sonlar qatnashganda esa yuqoridagi formuladan foydalanish ancha qulaydir.

Agar uchburchak perimetri va bu uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi ma'lum bo'lsa, uchburchak yuzasini quyidagicha aniqlash mumkin (16.11.5-rasm):

$$S=\frac{1}{2}pr=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

Isboti: Uchta bissektrisa uchrashadigan O nuqta uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi hamdir. Bissektrisalar O nuqtada uchrashganda berilgan ΔABC uchburchakni uchta $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COA$ uchburchakka ajratadi. Ichki chizilgan aylana radiusi r bu uchta uchburchakka O nuqtadan tushirilgan balandlik vazifasini ham o'taydi. Bu uchburchaklar yuzalari $S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot r = \frac{1}{2}cr$, $S_{BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot r = \frac{1}{2}ar$, $S_{COA} = \frac{1}{2}CA \cdot r = \frac{1}{2}br$



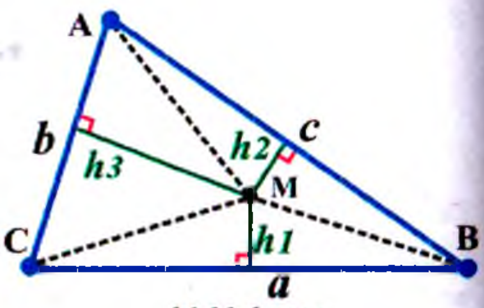
16.11.5-rasm

bo'ladi. Bu uchta uchburchak yuzasi yig'indisi berilgan ΔABC uchburchak yuzasini beradi, ya'ni $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$ bo'ladi. Shunga ko'ra uchburchak yuzasi $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}pr$ bo'ladi.

Agar uchburchak ichida olingan ixtiyoriy nuqtadan tomonlargacha bo'lgan masofalar h_1, h_2, h_3 hamda uchburchak tomonlari ma'lum bo'lsa, uchburchak yuzasini topish formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (16.11.6-rasm):

$$\boxed{S = \frac{1}{2}(ah_1 + bh_2 + ch_3)}$$

Isboti: Uchburchak ichida olingan M nuqtani uchburchak uchlari bilan tutashtirish natijasida uchta $\Delta MAB, \Delta MBC, \Delta MCA$ uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchak yuzalari mos holda $S_{MAB} = \frac{1}{2}ah_1, S_{MBC} = \frac{1}{2}bh_2, S_{MCA} = \frac{1}{2}ch_3$ ga teng bo'ladi. Bu uchburchaklar yuzalarining yig'indisi esa berilgan ABC uchburchak yuzasiga teng bo'ladi, ya'ni $S = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + \frac{1}{2}ch_3 = \frac{1}{2}(ah_1 + bh_2 + ch_3)$



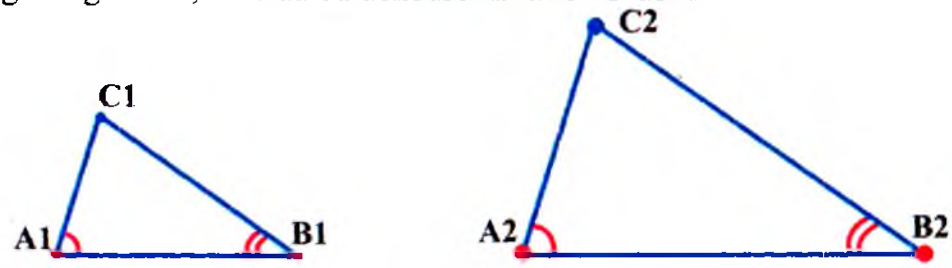
16.11.6-rasm

bo'ladi. Agar M nuqta uchburchakka ichki chizilgan aylana markazida olinsa, u holda bu nuqtadan uchala tomongacha bo'lgan masofa ham uchburchakka ichki chizilgan aylana markaziga teng bo'ladi, ya'ni $h_1 = h_2 = h_3 = r$ bo'ladi. Bunda uchburchak yuzasi uchun yuqoridagi $S = \frac{1}{2}pr$ formula hosil bo'ladi.

16.12-Mavzu: Uchburchaklarning o'xshashlik alomatlari.

Uchburchaklar o'xshashligining uchta alomati bor: 1) ikkita burchakka ko'ra, 2) ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra, 3) uchta tomonga ko'ra. Bularning har biriga alohida-alohida to'xtalib o'tamiz.

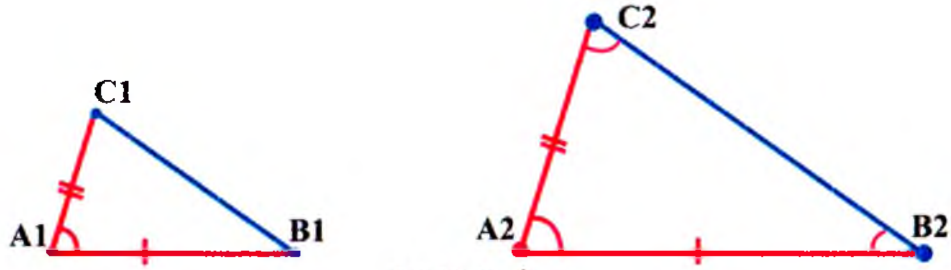
1-alomat: Agar bir uchburchakning ikkita burchagi mos holda ikkinchi bir uchburchakning ikkita burchagiga teng bo'lsa, u holda bu uchburchaklar o'xshashdir.



16.12.1-rasm

$$\boxed{Agar \begin{cases} \angle A_1 = \angle A_2 \\ \angle B_1 = \angle B_2 \end{cases} bo'lsa,\ u\ holda\ \Delta A_1B_1C_1 \propto \Delta A_2B_2C_2\ bo'ladi}$$

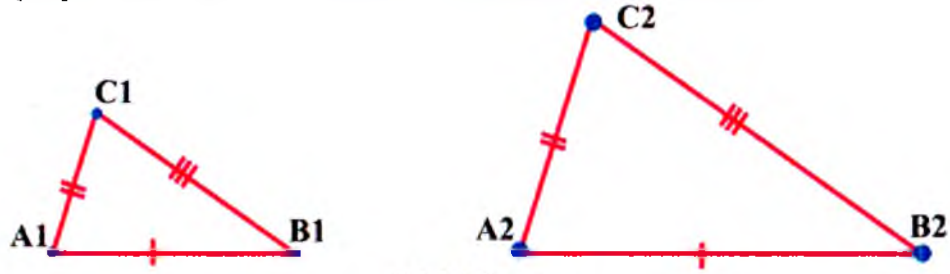
2-alomat: Agar bir uchburchakning ikkita tomoni mos holda ikkinchi uchburchakning ikkita tomoniga proporsional bo'lib, ular orasidagi burchaklar o'zaro teng bo'lsa, u holda bu uchburchaklar o'xshashdir.



16.12.2-rasm

$$\text{Agar } \begin{cases} A_2B_2 = k \cdot A_1B_1 \\ A_2C_2 = k \cdot A_1C_1 \\ \angle A_2 = \angle A_1 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } \Delta A_1B_1C_1 \propto \Delta A_2B_2C_2 \text{ bo'ladi}$$

3-alomat: Agar bir uchburchakning uchta tomoni mos holda ikkinchi bir uchburchakning uchta tomoniga proporsional bo'lsa, u holda bu uchburchaklar o'xshashdir.



16.12.3-rasm

$$\text{Agar } \begin{cases} A_2B_2 = k \cdot A_1B_1 \\ A_2C_2 = k \cdot A_1C_1 \\ B_2C_2 = k \cdot B_1C_1 \end{cases} \text{ bo'lsa, u holda } \Delta A_1B_1C_1 \propto \Delta A_2B_2C_2 \text{ bo'ladi}$$

Uchinchi alomatdan quyidagi natija kelib chiqadi:

Agar ikkita uchburchakning tomonlari, perimetrlari va yuzalari ma'lum bo'lsa, u holda quyidagi munosobatlar o'rinlidir.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = \frac{p_2}{p_1} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}} = k \quad yoki \quad \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 = \left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 = k^2$$

Bu erda: k – proporsionallik koeffitsienti bo'lib, uni o'xshashlik koeffitsienti deb yuritiladi. O'xshashlik koeffitsienti bir uchburchakning ixtiyoriy chiziqli o'lchami (tomon, ichki chizilgan radius, tashqi chizilgan radius, balandlik, bissektrisa, mediana va h.) boshqa uchburchakning shunga mos chiziqli o'lchamidan necha marta farq qilishini bildiradi.

Xususiy hollarni qarab chiqamiz:

1) Bir muntazam uchburchak ikkinchi muntazam uchburchakka o'xshashdir. Boshqacha aytganda muntazam uchburchaklar o'xshash bo'lishi uchun shart qo'yilmaydi.

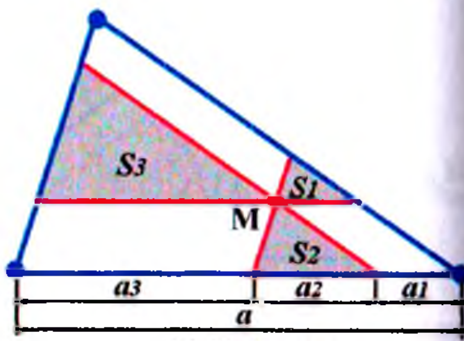
2) Teng yonli uchburchaklar o'xshash bo'lishi uchun ularning uchidagi burchaklari teng bo'lishi kifoyadir.

3) To'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshash bo'lishi uchun bu uchburchaklarning ixtiyoriy bitta o'tkir burchaklari teng bo'lishi kifoyadir.

Agar ixtiyoriy uchburchakning ichidan olingan M nuqtadan uchburchak tomonlariga o'tkazilgan parallel to'g'ri chiziqlar yuzalari S_1, S_2, S_3 bo'lgan uchburchaklar ajratsa, berilgan uchburchak yuzasi quyidagicha bo'ladi (16.12.4-rasm):

$$S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}\right)^2$$

Isboti: Hosil bo'lgan uchta uchburchak berilgan katta uchburchakka o'xshash uchburchaklardir. Berilgan uchburchakning asosi a ga, hosil bo'lgan uchburchaklarning asoslari esa mos holda a_1, a_2, a_3 ga teng. Hosil bo'lgan uchburchaklarning berilgan uchburchaklar bilan o'xshashlik koeffitsientlari mos holda $k_1=\sqrt{\frac{S_1}{S}}=\frac{a_1}{a}$, $k_2=\sqrt{\frac{S_2}{S}}=\frac{a_2}{a}$, $k_3=\sqrt{\frac{S_3}{S}}=\frac{a_3}{a}$ ga teng. O'xshash uchburchaklar asoslari $a_1=\sqrt{\frac{S_1}{S}}a$, $a_2=\sqrt{\frac{S_2}{S}}a$, $a_3=\sqrt{\frac{S_3}{S}}a$ bo'ladi. Berilgan uchburchak asosi hosil bo'lgan uchta o'xshash uchburchaklar asoslarining yig'indisiga teng, ya'ni $a=a_1+a_2+a_3$ bo'ladi. Bundan esa



16.12.4-rasm

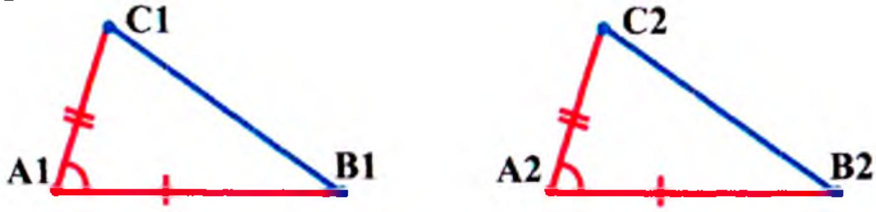
$$a=\sqrt{\frac{S_1}{S}}a+\sqrt{\frac{S_1}{S}}a+\sqrt{\frac{S_1}{S}}a=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)\cdot\frac{a}{\sqrt{S}}, \rightarrow \sqrt{S}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}, \rightarrow S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$$

formula kelib chiqadi.

16.13-Mavzu: Uchburchaklarning tenglik alomatlari.

Uchburchaklar tengligining uchta alomati bor: 1) ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra, 2) bir tomon va unga yopishgan ikkita burchakka ko'ra, 3) uchta tomonga ko'ra. Bularning har biriga alohida-alohida to'xtalib o'tamiz.

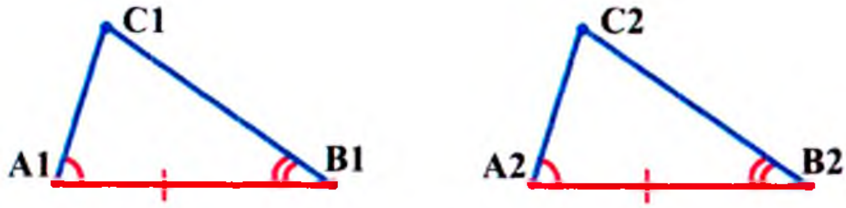
1-alomat: Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi mos holda ikkinchi bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga teng bo'lsa, u holda bu uchburchaklar tengdir.



16.13.1-rasm

$$Agar \begin{cases} A_1B_1=A_2B_2 \\ A_1C_1=A_2C_2 \\ \angle A_1=\angle A_2 \end{cases} bo'lsa,\ u\ holda\ \Delta A_1B_1C_1=\Delta A_2B_2C_2\ bo'ladi$$

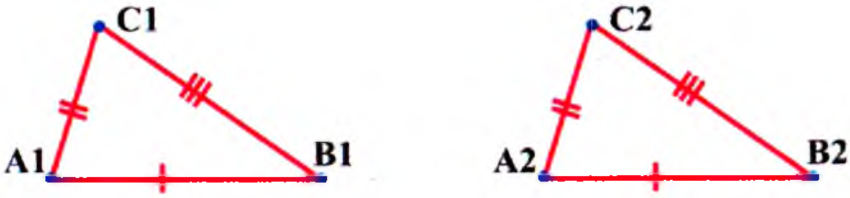
2-alomat: Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan burchaklari boshqa bir uchburchakning mos tomoni va unga yopishgan burchaklariga teng bo'lsa, u holda bu uchburchaklar tengdir.



16.13.2-rasm

$$Agar \begin{cases} A_1B_1=A_2B_2 \\ \angle A_1=\angle A_2 \\ \angle B_1=\angle B_2 \end{cases} bo'lsa,\ u\ holda\ \Delta A_1B_1C_1=\Delta A_2B_2C_2\ bo'ladi$$

3-alomat: Agar bir uchburchakning uchta tomoni mos holda ikkinchi bir uchburchakning uchta tomoniga teng bo'lsa, u holda bu uchburchaklar tengdir.



16.13.3-rasm

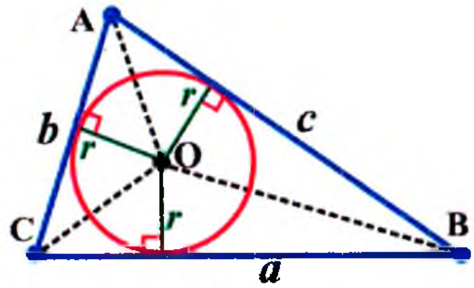
$$Agar \begin{cases} A_1B_1 = A_2B_2 \\ A_1C_1 = A_2C_2 \\ B_1C_1 = B_2C_2 \end{cases} bo'lsa,\ u\ holda\ \Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2\ bo'ladi$$

16.14-Mavzu: Uchburchakka ichki chizilgan aylana.

Uchburchakning barcha tomonlariga urinuvchi aylanaga uchburchakka ***ichki chizilgan aylana*** deyiladi. Uchburchak har qanday bo'lmasin, unga ichki aylana chizish mumkin. Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi uchburchak uchlaridan chiquvchi bissektrisalarning kesishish chizig'ida yotadi. Uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi – O nuqta uchburchakning barcha tomonlaridan bir xil r masofada yotadi (16.14.1-rasm). Bu masofa esa ichki chizilgan aylana radiusidir.

Uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{r = \frac{2S}{a+b+c}}$$



16.14.1-rasm

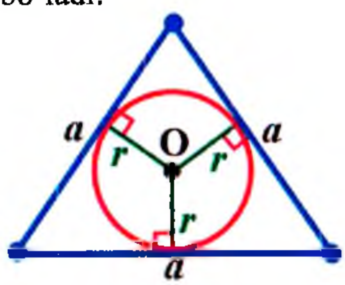
Isboti: Uchta bissektrisa uchrashadigan O nuqta uchburchakka ichki chizilgan aylana markazi hamdir. Bissektrisalar O nuqtada uchrashganda berilgan ΔABC uchburchakni uchta $\Delta AOB, \Delta BOC, \Delta COA$ uchburchakka ajratadi. Ichki chizilgan aylana radiusi r bu uchta uchburchakka O nuqtadan tushirilgan balandlik vazifasini ham o'taydi. Bu uchburchaklar yuzalari $S_{AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot r = \frac{1}{2}cr,\ S_{BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot r = \frac{1}{2}ar,\ S_{COA} = \frac{1}{2}CA \cdot r = \frac{1}{2}br$ bo'ladi. Bu uchta uchburchak yuzasi yig'indisi berilgan ΔABC uchburchak yuzasini beradi, ya'ni $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}$ bo'ladi. SHunga ko'ra uburchak yuzasi $S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}pr$ bo'ladi. Bundan ichki chizilgan aylana radiusi $r = \frac{2S}{p} = \frac{2S}{a+b+c}$ hosil bo'ladi.

Yuqoridagi formuladan foydalanib, xususiy hollarni qarab chiqamiz.

Muntazam uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{2} = \frac{h}{3}}$$

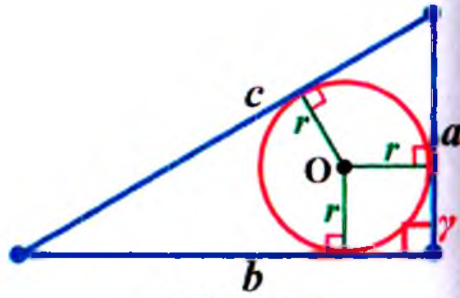
Isboti: Formuladan $r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}{3a} = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{R}{2} = \frac{h}{3}$ ekanligi kelib chiqadi.



16.14.2-rasm

To'g'ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$



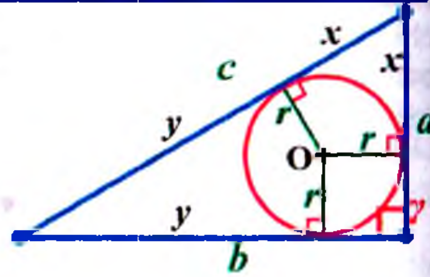
16.14.3-rasm

Isboti: Ichki chizilgan aylana radiusini topish formulasi va Pifagor teoremasidan foydalanamiz. SHunga ko'ra

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}ab}{a+b+c}\cdot\frac{a+b-c}{a+b-c}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}=$$
$$=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+2ab+b^2-c^2}=\frac{ab(a+b-c)}{2ab}=\frac{a+b-c}{2}$$ bo'ladi.

Agar to'g'ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylana gipotenuzani urinish nuqtasida x va y kesmalarga ajratsa, u holda uchburchakning katetlari a va b, yuzasi S hamda ichki chizilgan aylana radiusi r quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$\boxed{a=\frac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}+x-y}{2},\quad b=\frac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}+y-x}{2},\quad r=\frac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}-x-y}{2},\quad S=xy}$$



16.14.4 -rasm

Isboti: Pifagor teoremasidan foydalanamiz. Unga ko'ra

$$(x+y)^2=(x+r)^2+(y+r)^2,\to x^2+2xy+y^2=x^2+2xr+r^2+y^2+2yr+r^2,\to$$
$$r^2+(x+y)r-xy=0,\to D=(x+y)^2+4xy,\to r=\frac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}-x-y}{2}$$

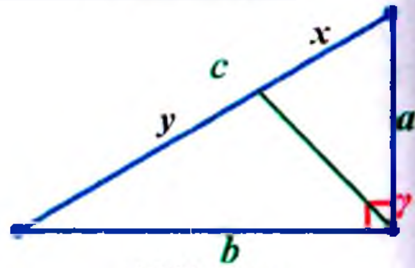
bo'ladi. Katetlar $a=r+x=\dfrac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}+x-y}{2}$ va

$a=r+y=\dfrac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}+y-x}{2}$ bo'ladi. Uchburchak yuzasi esa

$$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}+x-y}{2}\cdot\frac{\sqrt{(x+y)^2+4xy}-(x-y)}{2}=\frac{1}{8}\left[(x+y)^2+4xy-(x-y)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{8}\left[x^2+6xy+y^2-x^2+2xy-y^2\right]=xy$$ bo'ladi.

Agar to'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasiga tushirilgan bissektrisa gipotenuzani x va y kesmalarga ajratsa, u holda uchburchakning katetlari a va b, yuzasi S hamda ichki chizilgan aylana radiusi r quyidagi formulalar orqali aniqlanadi:

$$\boxed{a=\frac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad b=\frac{y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad r=\frac{x+y}{2}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right),\quad S=\frac{xy(x+y)^2}{2(x^2+y^2)}}$$



16.14.4 -rasm

Isboti: Bunda α burchak tangensi va sinusidan foydalanamiz. Unga ko'ra $tg\alpha=\dfrac{a}{b}=\dfrac{x}{y}$, $\sin\alpha=\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ bo'ladi. Katet

$a=(x+y)\sin\alpha=(x+y)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ hamda katet

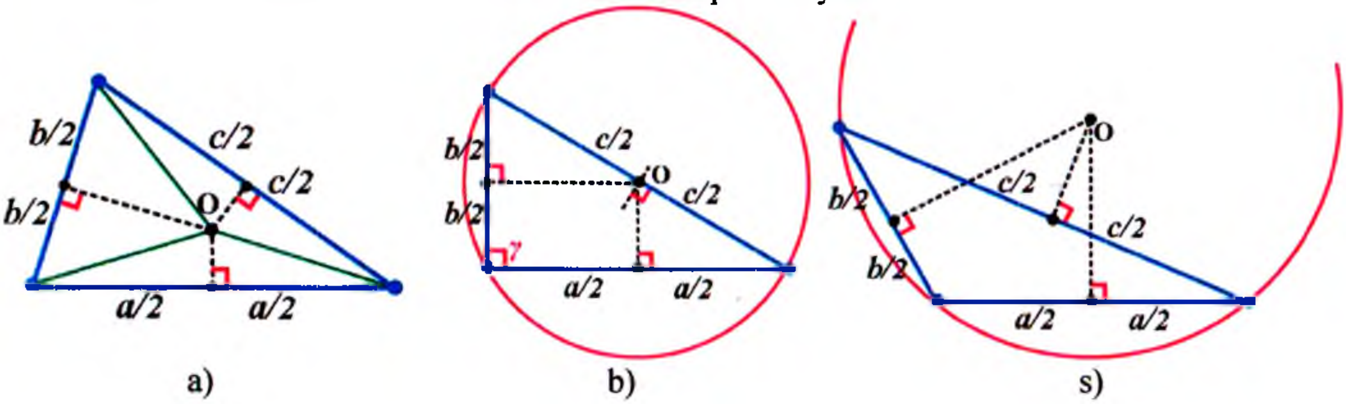
$b=\dfrac{a}{tg\alpha}=a\dfrac{y}{x}=\dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{y}{x}=\dfrac{y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ bo'ladi. Uchburchak yuzasi esa

$S=\dfrac{ab}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{xy(x+y)^2}{2(x^2+y^2)}$ bo'ladi. Ichki chizilgan aylana radiusi to'g'ri burchakli uchburchak uchun $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ ekanini e'tiborga olsak, $r=\dfrac{x+y}{2}\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)$ natija kelib chiqadi.

16.15-Mavzu: Uchburchakka tashqi chizilgan aylana.

Uchburchakning uchlariga urinuvchi aylanaga uchburchakka ***tashqi chizilgan aylana*** deyiladi. Uchburchak har qanday bo'lmasin, unga tashqi aylana chizish mumkin.

Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi tomonlar o'rtalaridan perpendikulyar holda chiqarilgan o'rta perpendikulyarlarning kesishish nuqtasida yotadi. Bu nuqta uchburchak uchlaridan bir xil R masofada joylashgan. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi o'tkir burchakli uchburchakda uchburchak ichida, to'g'ri burchakli uchburchakda gipotenuza o'rtasida, o'tmas burchakli uchburchakda esa uchburchak tashqarisida yotadi.



16.15.1-rasm

Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

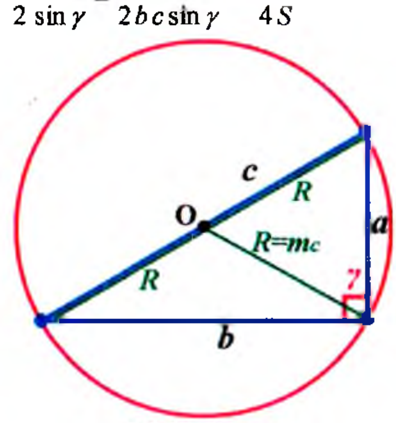
$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Isboti: Sinuslar teoremasidan $\frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ ekanini bilamiz. SHundan $R = \frac{1}{2}\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2bc\sin\gamma} = \frac{abc}{4S}$ hosil bo'ladi.

To'g'ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi gipotenuzaning yarmiga yoki gipotenuzaga tushirilgan mediana uzunligiga tengdir.

$$\boxed{R = \frac{c}{2} = m_c}$$

Isboti: Formuladan $R = \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4 \cdot \frac{1}{2}ab} = \frac{c}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

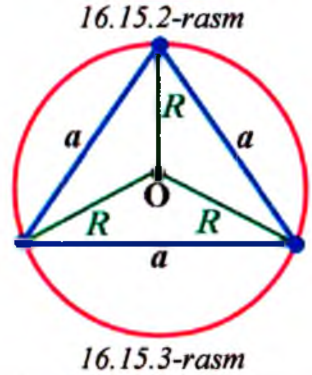


16.15.2-rasm

Muntazam uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{R = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2r = \frac{2}{3}h}$$

Isboti: Formuladan $R = \frac{abc}{4S} = \frac{a^3}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{a}{\sqrt{3}} = 2r = \frac{2}{3}h$ ekanligi kelib chiqadi.



16.15.3-rasm

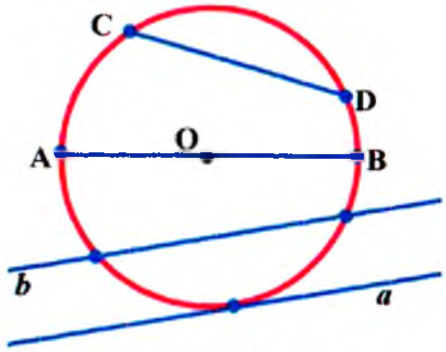
AYLANA VA DOIRA

16.16-Mavzu: Aylana elementlari.

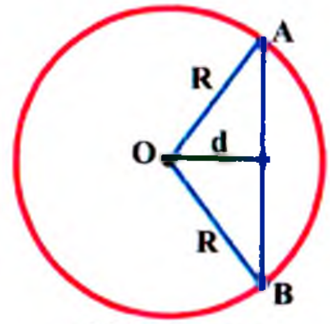
Tekislikdan olingan nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga ***aylana*** deyiladi. Aylana bo'yicha quyidagi ta'riflarni keltirish mumkin:

1) tekislikdan olingan nuqtani ***aylana markazi*** deyiladi;
2) aylana markazidan aylanagacha bo'lgan masofaga ***aylana radiusi*** deyiladi va R bilan belgilanadi;
3) aylananing ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmaga ***vatar*** deyiladi;
4) aylana markazidan o'tuvchi vatarga diametr deyiladi va D bilan belgilanadi. Diametr radiusning ikkilanganiga teng, ya'ni $D = 2R$. Diametr eng katta vatardir;

5) agar to‘g‘ri chiziqning bitta nuqtasi aylanaga tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqga ***urinma*** deyiladi;
6) agar to‘g‘ri chiziqning ikkita nuqtasi aylanaga tegishli bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziqga ***kesuvchi*** deyiladi.



16.16.1-rasm



16.16.2-rasm

16.16.1-rasmda aylana elementlari tasvirlangan.

Agar uzunligi ℓ bo‘lgan AB vatar radiusi R bo‘lgan aylanaga tiralgan bo‘lsa, aylana markazidan vatargacha bo‘lgan masofa quyidagicha bo‘ladi (16.6.2-rasm):

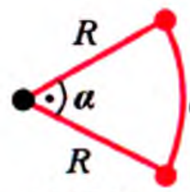
$$\boxed{d=\sqrt{R^2-\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}}$$

16.17-Mavzu: Aylana va aylana yoyi uzunligi.

Aylanadan ajratilgan egri chiziqli qismga aylana yoyi deyiladi. Aylanadan radius uzunligiga teng uzunlikdagi yoy ajratuvchi markaziy burchakning kattaligiga $1rad$ burchak deyilishini bilamiz. Aylana yoyi uzunligi markaziy burchakka proporsional ekanini 15.1-mavzuda aytib o‘tgan edik. Shunga ko‘ra $\breve{\ell}\sim R,\ \rightarrow\ \breve{\ell}=\alpha^r R$ bo‘ladi.

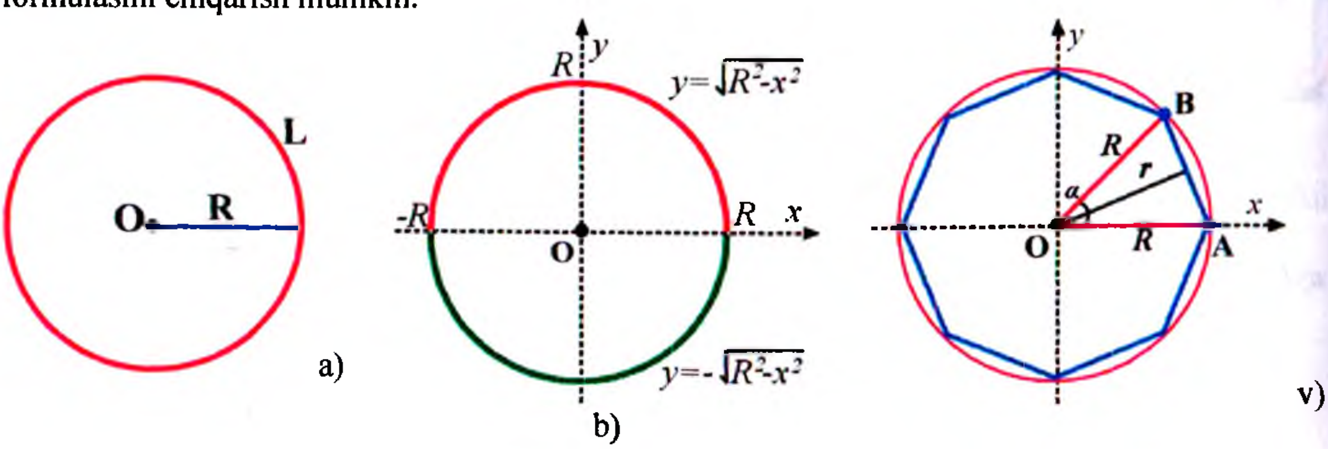
Markaziy burchagi α^r ga teng bo‘lgan yoyning uzunligini topish formulasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{\breve{\ell}=\alpha^r R}$$



16.17.1-rasm

Aylana uzunligini uning diametriga nisbati 3dan biroz kattaroq, ya’ni $\frac{L}{2R}=\pi\approx 3{,}1415926...$ bo‘lishini qadimda Yunoniston mutafakkirlari ham bilishgan. Bu kattalik ixtiyoriy o‘lchamdagi katta-kichik aylanalar uchun bajarilishi isbotlangan. Shunga ko‘ra aylana uzunligini aniqlash formulasini chiqarish mumkin.



16.17.2-rasm

Aylana uzunligini topish formulasi quyidagicha bo‘ladi (16.17.2-a,rasm):

$$\boxed{L = 2\pi R}$$

Isboti: Formulani ikki xil usulda isbot qilish mumkin:

1-usul (integrallash usuli)

Bu usulda 15.17.2-b,rasmdan foydalanamiz. Aylana tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ ni oshkor funksiyalar ko'rinishida $\begin{cases} y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$ yozamiz. Shu oshkor funksiyalardan bittasini, aytaylik yuqorigi yarimaylana $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ni olib uning liniya uzunligini hisoblaymiz. Chiqqan natijani 2 ga ko'paytirsak, to'liq aylana uzunligi hosil bo'ladi. Liniya uzunligini topish uchun ushbu $\ell = \int_a^b d\ell = \int_a^b \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$ formuladan foydalanamiz. Yuqorigi yarimaylana funksiya hosilasi $y' = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)_x' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ ga teng bo'ladi. Aylana uzunligi

$$L = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\, dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 2R\int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_{-R}^{R} =$$

$= 2R\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi R + \pi R = 2\pi R$ ga teng bo'ladi.

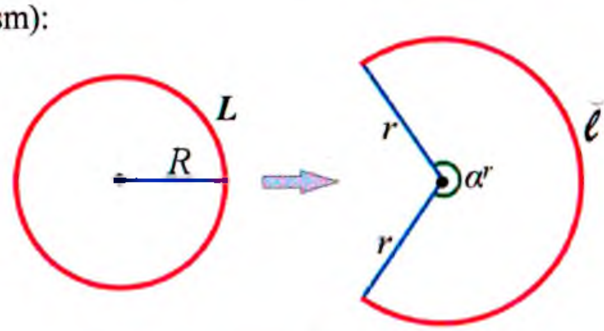
2-usul (ko'pburchak usuli)

Bu usulda 16.17.2-v,rasmdan foydalanamiz. Bunda ΔOAB teng yonli uchburchak uchidagi burchak $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ga teng bo'ladi. Ko'pburchak tomoni $AB = a$ ni unga tashqi chizilgan aylana radiusi R orqali ifodalasak, u $a = 2R\sin\frac{\alpha}{2} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$ ga teng bo'ladi. Ko'rburchak perimetri tomonlar yig'indisiga teng, ya'ni $p = na = n \cdot 2R\sin\frac{\pi}{n} = 2Rn\sin\frac{\pi}{n}$ ga teng bo'ladi. Ko'pburchak tomonlari cheksiz ko'p bo'lganda ko'pburchak va aylana orasida farq yo'qolib boradi. Bunda ko'pburchak perimetri taxminan aylana uzunligiga teng bo'ladi. Demak, $\lim_{n\to\infty} p = L$ yoki $L = \lim_{n\to\infty}\left(2Rn\sin\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi R \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right)$ bo'ladi. Endi biz $\frac{\pi}{n} = \varphi$ deb belgilash kiritsak hamda 1-ajoyib limit $\lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) = 1$ ekanini e'tiborga olsak, u holda aylana uzunligi uchun $L = 2\pi R \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right) = 2\pi R \lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\sin\varphi}{\varphi}\right) = 2\pi R \cdot 1 = 2\pi R$ natija kelib chiqadi.

Uzunligi L bo'lgan aylanani yoyib markaziy burchagi α^r bo'lgan yoy shakliga keltirilsa, hosil bo'lgan yoy radiusi quyidagicha bo'ladi (16.17.3-rasm):

$$\boxed{r = \frac{L}{\alpha^r} = \frac{2\pi}{\alpha^r} R}$$

Isboti: Aylana uzunligi L yoy uzunligi $\breve{\ell} = \alpha^r \cdot r$ ga teng bo'ladi, ya'ni $\breve{\ell} = \alpha^r \cdot r = L, \rightarrow r = \frac{L}{\alpha^r} = \frac{2\pi R}{\alpha^r}$ bo'ladi.

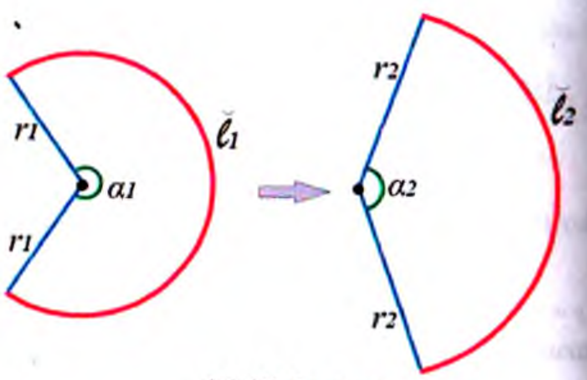


16.17.3-rasm

Markaziy burchagi α_1, radiusi r_1 bo‘lgan birinchi yoyni markaziy burchagi α_2, radiusi r_2 bo‘lgan yoy shakliga keltirilsa, berilgan kattaliklarni bog‘lovchi ifoda quyidagicha bo‘ladi (16.17.4-rasm):

$$\boxed{\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2}$$

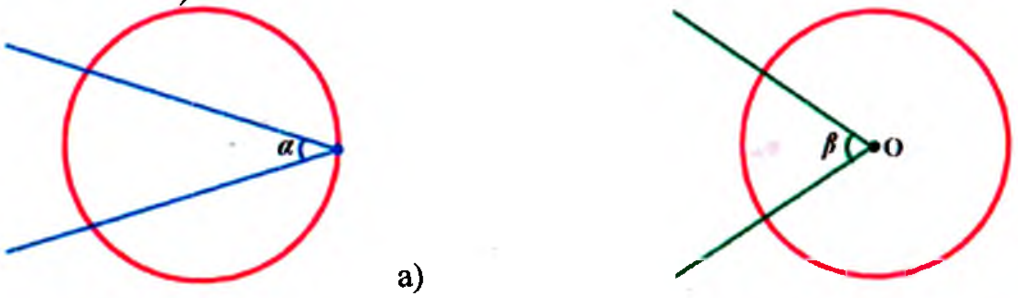
Isboti: Ikkala yoyning ham uzunliklari bir xil, ya'ni $\breve{\ell}_1 = \breve{\ell}_2$ bo‘ladi. SHunga ko‘ra $\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$ bo‘ladi.



16.17.4-rasm

16.18-Mavzu: Markaziy va ichki chizilgan burchak. Urinma va vatar orasidagi burchak.

Uchi aylanada yotuvchi va tomonlari aylanani kesib o‘tuvchi burchakka aylanaga ***ichki chizilgan burchak*** deyiladi. Uchi aylana markazida yotuvchi burchakka ***markaziy burchak*** deyiladi (16.18.1-rasm).

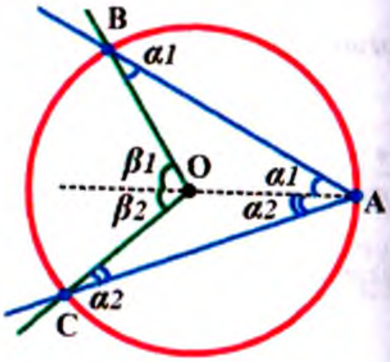


16.18.1-rasm

Ichki chizilgan burchak unga mos markaziy burchakning yarmiga teng (16.18.2-rasm).

$$\boxed{\alpha = \frac{\beta}{2}}$$

Isboti: Rasmda $OA = OB = OC = R$. ΔAOB teng yonli uchburchak bo‘lgani uchun $\angle ABO = \angle OAB = \alpha_1$ va ΔAOC teng yonli uchburchak bo‘lgani uchun $\angle ACO = \angle OAC = \alpha_2$ bo‘ladi. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchagi yig‘indisi uchinchi tashqi burchagiga teng ekanligini bilgan holda $\begin{cases}\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_1 = 2\alpha_1 \\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_2 = 2\alpha_2\end{cases}$ deb yozish mumkin. $\angle BOC = \beta$ ekanligidan $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \; = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$ kelib chiqadi. Demak $\alpha = \frac{\beta}{2}$ bo‘lar ekan.

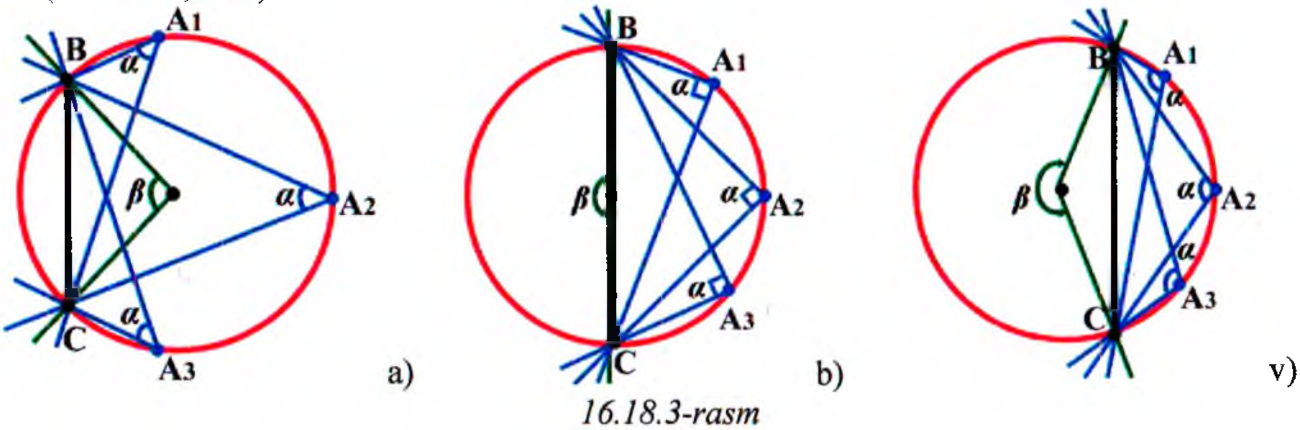


16.18.2-rasm

Yuqoridagi formuladan shunday xulosa kelib chiqadiki, BC vatarga aylanadagi A nuqtadan qaralgandagi ko‘rinma burchak aylana markazi O nuqtadan qaraldgandagi ko‘rinma burchakning yarmiga teng bo‘lar ekan. Hisob-kitoblar shuni ko‘rsatadiki, BC vatarning bir tomonidagi yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham markaziy burchakning yarmiga teng bo‘lgan bir xil burchak ostida ko‘rinar ekan. Jumladan BC vatarga aylananing katta yoyidan, kichik yoyidan turib hamda diametrga qaralgan hollarni ko‘rib chiqamiz.

- BC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan, shuningdek A_1, A_2, A_3 nuqtalardan qaralganda bir xil o‘tkir burchak ostida ko‘rinadi, ya'ni bunda $\alpha < \pi/2$, $\beta < \pi$ bo‘ladi (16.18.3-a,rasm).
- BC diametrga yarimaylananing ixtiyoriy nuqtasidan, shuningdek A_1, A_2, A_3 nuqtalardan qaralganda bir xil to‘g‘ri burchak ostida ko‘rinadi, ya'ni bunda $\alpha = \pi/2$, $\beta = \pi$ bo‘ladi (16.18.3-b,rasm).

- BC vatarga kichik yoyning ixtiyoriy nuqtasidan, shuningdek A_1, A_2, A_3 nuqtalardan qaralganda bir xil o'tmas burchak ostida ko'rinadi, ya'ni bunda $\alpha > \pi/2$, $\beta > \pi$ bo'ladi (16.18.3-v,rasm).

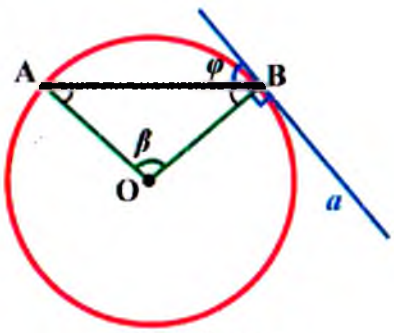


16.18.3-rasm

Urinma va vatar orasidagi burchak vatarni tutib turuvchi markaziy burchakning yarmiga teng (16.18.2-rasm).

$$\boxed{\varphi = \frac{\beta}{2}}$$

Isboti: Aylana ixtiyoriy AB vatarining B nuqtasidan a urinma o'tkazilgan bo'lsin. Rasmda $OA = OB = R$. Shuning uchun ΔAOB teng yonli uchburchak bo'lib uning asosidagi burchaklari $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\pi - \beta}{2}$ ga teng. Urinma radiusga har doim perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun $\angle OBA + \varphi = \frac{\pi}{2}$, bundan vatar va urinma orasidagi burchak $\varphi = \frac{\pi}{2} - \angle OBA = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \beta}{2} = \frac{\beta}{2}$ ga teng bo'ladi.



16.18.4-rasm

15.19-Mavzu: Kesishuvchi vatarlar.

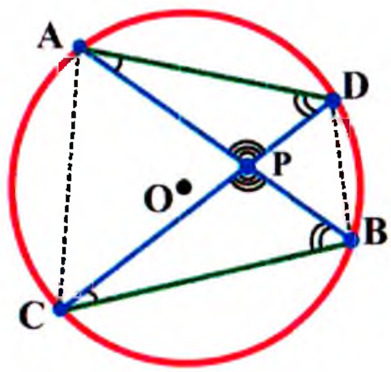
AB va CD vatarlar aylana ichida P nuqtada kesishsin (16.19.1-rasm). Bu erda quyidagilarni eslatib o'tamiz:

1) P – vatarlar kesishish nuqtasi;
2) PA va PB – birinchi AB vatarning kesishgandagi qismlari (kesmalari);
3) PC va PD – ikkinchi CD vatarning kesishgandagi qismlari (kesmalari);

Ikki vatar aylana ichida kesishganda hosil bo'lgan kesmalardan birinchi vatar kesmalarining ko'paytmasi ikkinchi vatar kesmalarining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

Isboti: BD vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham bir xil burchak ostida ko'rinadi, shuningdek A va C nuqtalardan qaralganda ham shunday. Demak, $\angle DAP = \angle BCP$ ekan. AC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham bir xil burchak ostida ko'rinadi, shuningdek B va D nuqtalardan qaralganda ham. Demak, $\angle ADP = \angle CBP$ ekan. O'zaro vertikal bo'lgani uchun $\angle APD = \angle CPB$ bo'ladi. SHunday qilib, $\Delta ADP \sim \Delta CBP$ ekan. Demak, bu o'xshash uchburchaklarning mos tomonlari proporsional bo'lishi kerak. Ya'ni $\frac{PD}{PB} = \frac{PA}{PC} = \frac{AD}{BC}$, $\rightarrow$ $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ bo'ladi.

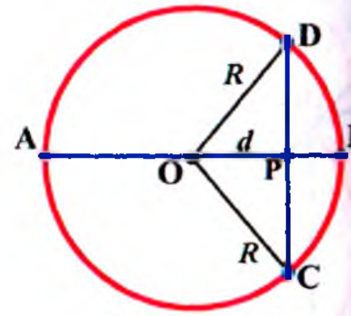


16.19.1-rasm

Agar vatarlardan biri, aytaylik AB vatar aylana diametri bo'lsa, u holda AB vatar CD vatarga perpendikulyar bo'lib, CD vatarni teng ikkiga bo'ladi. Agar bu vatarlar kesishish nuqtasi P

nuqta R radiusli aylana markazidan biror d masofada joylashgani ma'lum bo'lsa, u holda vatarlar uzunliklari quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{AB = 2R, \quad CD = 2\sqrt{R^2 - d^2}}$$



16.19.2-rasm

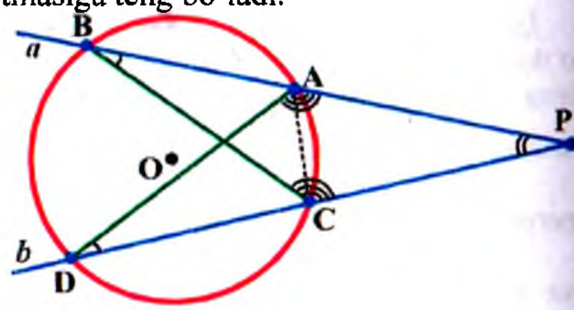
Isboti: AB vatar markazdan o'tgani uchun u diametr hisoblanadi. SHuning uchun uning uzunligi $AB = 2R$ bo'ladi. Rasmdan $OA = OB = OC = OD = R,\ PA = R + d,\ PB = R - d, PC = PD$ bo'ladi. Kesishuvchi vatarlar formulasiga binoan $PA \cdot PB = PC \cdot PD, \to (R + d)(R - d) = PC^2, \to R^2 - d^2 = PC^2, \to$ $\to PC = \sqrt{R^2 - d^2}$ bo'ladi. Bundan esa $CD = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ formula kelib chiqadi.

15.20-Mavzu: Urinma va kesuvchi.

Aylanadan tashqarida ixtiyoriy P nuqta olaylik. Bu nuqtadan aylanani kesib o'tuvchi ikkita a va b nurlar o'tkazaylik. Aylanani a nur A va B nuqtalarda, b nur esa C va D nuqtalarda kesib o'tsin.

Birinchi kesuvchining aylanani birinchi kesish nuqtasigacha va ikkinchi kesish nuqtasigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi ikkinchi kesuvchining aylanani birinchi kesish nuqtasigacha va ikkinchi kesish nuqtasigacha bo'lgan masofalar ko'paytmasiga teng bo'ladi.

$$\boxed{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

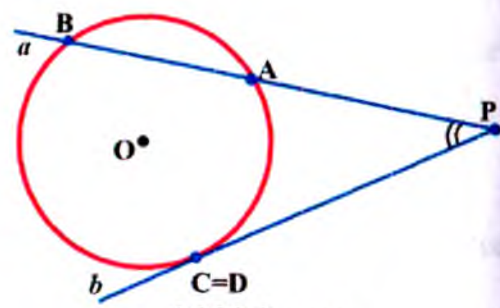


16.20.1-rasm

Isboti: AC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham bir xil burchak ostida ko'rinadi, shuningdek B va D nuqtalardan qaralganda ham shunday. Demak, $\angle ADP = \angle CBP$ ekan. Umumiy bo'lgani uchun $\angle APD = \angle CPB$ bo'ladi. Ikkita burchagi teng bo'lgach uchinchi burchaklari ham teng bo'ladi, ya'ni $\angle DAP = \angle BCP$ bo'ladi. Shunday qilib, $\Delta DPA \sim \Delta BPC$ ekan. Demak, bu o'xshash uchburchaklarning mos tomonlari proporsional bo'lishi kerak. Bundan esa $\frac{PA}{PC} = \frac{DA}{BC} = \frac{PD}{PB}, \ \to \ PA \cdot PB = PC \cdot PD$ natija kelib chiqadi.

Agar P nuqtadan chiquvchi b nur aylanaga urinib o'tsa, u holda C va D nuqtalar bitta nuqtaga tushib qoladi. Bunda formula quyidagi ko'rinishni oladi:

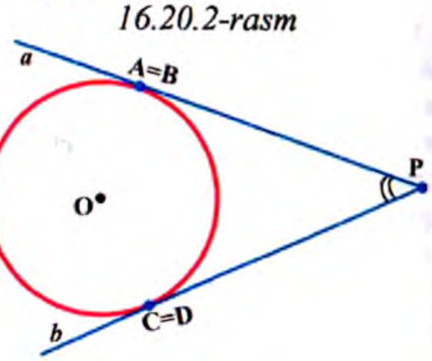
$$\boxed{PA \cdot PB = PC^2 \ yoki \ PC = \sqrt{PA \cdot PB}}$$



16.20.2-rasm

Isboti: C va D nuqtalar bitta nuqtaga tushgani uchun $PC = PD$ bo'ladi. Shuning uchun $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PC^2$ bo'ladi. Bundan $PC = \sqrt{PA \cdot PB}$ kelib chiqadi.

Agar a nur ham aylanaga urinib o'tsa, u holda A va B nuqtalar ham bitta nuqtaga tushib qoladi. Bunda yuqoridagi formulalardan $PA = PC$ kelib chiqadi. Demak, aylanadan tashqarida olingan nuqtadan aylanaga faqat ikkita urinma o'tkazish mumkin ekan, hamda bu nuqtadan urinish nuqtalarigacha bo'lgan masofalar o'zaro teng bo'lar ekan.

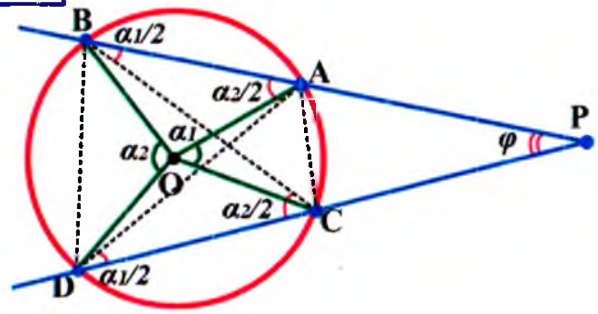


16.20.3-rasm

Agar P uchi aylanadan tashqarida bo'lgan burchak tomonlari aylanani kesuvchi bo'lib, aylananing burchak ichida yotgan yoylarini tutib turuvchi markaziy burchaklar α_1 va α_2 ma'lum bo'lsa, burchak kattaligi φ quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\varphi = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}}$$

Isboti: AC vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham shu vatarga mos markaziy burchakning yarmiga teng bo'lgan bir xil burchak ostida ko'rinadi, shuningdek B va D nuqtalardan qaralganda ham shunday. Demak, $\angle ADP = \angle CBP = \frac{\alpha_1}{2}$ ekan. BD vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasidan qaralganda ham shu vatarga mos markaziy burchakning yarmiga teng bo'lgan bir xil burchak ostida ko'rinadi, shuningdek A va C



15.20.4-rasm

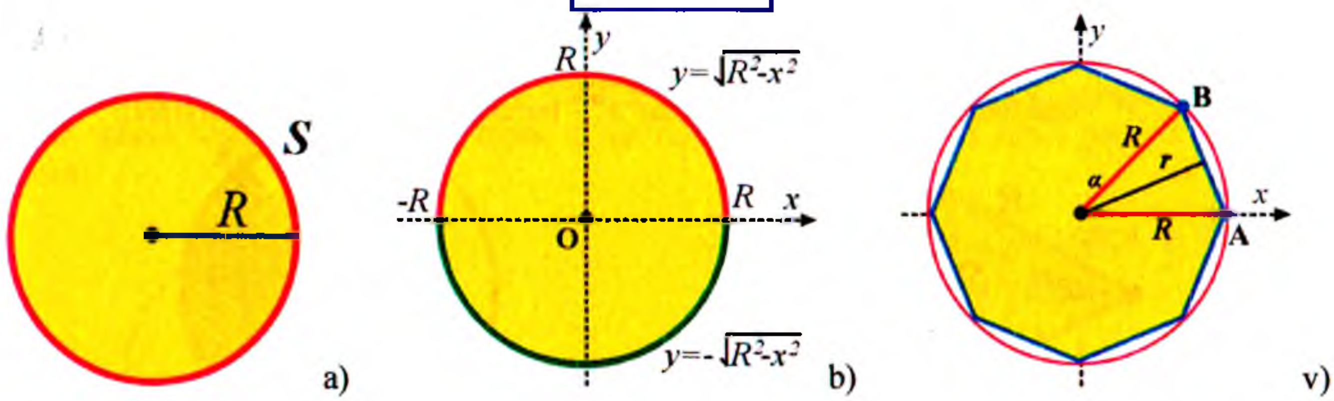
nuqtalardan qaralganda ham shunday. Demak, $\angle BAD = \angle DCA = \frac{\alpha_2}{2}$ ekan. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchagi yig'indisi uchinchi tashqi burchagiga teng. Shunga ko'ra ΔPAD dan $\angle APD + \angle ADP = \angle BAD$, $\rightarrow$ $\varphi + \frac{\alpha_1}{2} = \frac{\alpha_2}{2}$, $\rightarrow$ $\varphi = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$ formula kelib chiqadi.

16.21-Mavzu: Doira va uning yuzi.

Tekislikda olingan bitta nuqtadan ma'lum masofagacha bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga ***doira*** deyiladi.

Doira yuzini topish formulasi quyidagicha bo'ladi (16.21.1-a,rasm):

$$\boxed{S = \pi R^2}$$



16.21.1-rasm

Isboti: Formulani ikki xil usulda isbot qilish mumkin:

1-usul (integrallash usuli)

Bu usulda 16.21.1-b,rasmdan foydalanamiz. Aylana tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ ni oshkor funksiyalar ko'rinishida $\begin{cases} y = \sqrt{R^2 - x^2} \\ y = -\sqrt{R^2 - x^2} \end{cases}$ yozamiz. SHu oshkor funksiyalardan bittasini, aytaylik yuqorigi yarimaylana $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ni olib uning Ox o'qi bilan chegaralangan yarimdoira yuzasini hisoblaymiz. Chiqqan natijani 2 ga ko'paytirsak, to'liq doira yuzasi hosil bo'ladi. Yuzani topish uchun ushbu $\ell = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ Nyuton-Leybnits formulasidan foydalanamiz. Doira yuzasi

$$S = 2\int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\left[\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2}\right]\Bigg|_{-R}^{R} = 2\left[\frac{R^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{R}{2}\cdot 0\right] -$$

$$-2\left[\frac{R^2}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{R}{2}\cdot 0\right]=\frac{\pi R^2}{2}-\left(-\frac{\pi R^2}{2}\right)=\pi R^2$$ ga teng bo‘ladi.

2-usul (ko‘pburchak usuli)

Bu usulda 15.21.1-v,rasmdan foydalanamiz. Bunda ΔOAB teng yonli uchburchak uchidagi burchak $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘ladi. ΔOAB teng yonli uchburchakning yuzasi ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi orqali $S_{OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot AB\cdot\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{2}R^2\cdot\sin\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘ladi. Ko‘pburchak yuzasi ΔOAB yuzasidan n tasining yuziga teng, ya'ni $S=n\cdot S_{OAB}=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}$ bo‘ladi. Ko‘pburchak tomonlari cheksiz ko‘p bo‘lganda ko‘pburchak va doira yuzalari orasidagi farq yo‘qolib boradi. Bunda ko‘pburchak yuzasi taxminan doira yuzasiga teng bo‘ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{ko'pburch}=S_{doira}$ yoki

$$S_{doira}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}R^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\pi R^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right)$$ bo‘ladi. Endi biz $\frac{2\pi}{n}=\alpha$ deb belgilash kiritsak hamda 1-ajoyib limit $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=1$ ekanini e’tiborga olsak, u holda doira yuzasi

$$S=\pi R^2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right)=\pi R^2\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)=\pi R^2\cdot 1=\pi R^2$$ natija kelib chiqadi.

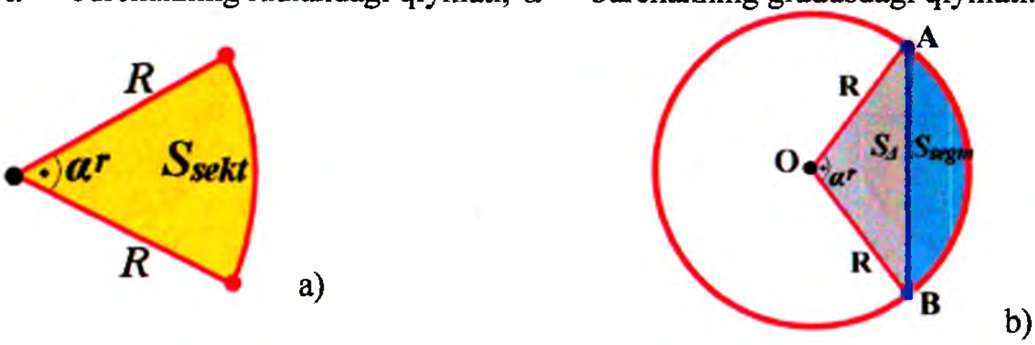
16.22-Mavzu: Doira sektori va segmentining yuzi.

Doiradan markaziy burchak hosil qilib kesib olingan kesismga ***doira sektori*** deyiladi.

Sektor yuzasi markaziy burchakka to‘g‘ri proporsional bo‘lib, u radian yoki gradusda ushbu ko‘rinishda ifodalanadi (15.22.1-a,rasm):

$$\boxed{S_{sektor}=\frac{1}{2}\alpha^r R^2 \quad yoki \quad S_{sektor}=\frac{\pi}{360^0}\alpha^0 R^2}$$

Bu erda: α^r – burchakning radiandagi qiymati, α^0 – burchakning gradusdagi qiymati.



16.22.1-rasm

Doiradan vatar ajratgan kesimga doira segmenti deyiladi. Doira sektori yuzi segment va unga mos uchburchak yuzalari yig‘indisiga teng bo‘ladi (16.22.1-b,rasm).

$$\boxed{S_{sertor}=S_{segment}+S_\Delta}$$

Segment yuzasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{segment}=S_{sertor}-S_\Delta=\frac{1}{2}R^2\left(\alpha^r-\sin\alpha^r\right)}$$

<u>Isboti:</u> Formulani isbotlash uchun 16.22.1-b,rasmdan foydalanamiz. Bunda $S_{sektor}=\frac{1}{2}\alpha^r R^2$ hamda $S_\Delta=\frac{1}{2}R^2\sin\alpha^r$ yuzalarni ayirganda segment yuzasi hosil bo‘ladi. Natijada,

$S_{segment} = S_{sertor} - S_{\Delta} = \frac{1}{2}R^2 = \frac{1}{2}R^2\alpha^r - \frac{1}{2}R^2 \sin\alpha^r = \frac{1}{2}R^2(\alpha^r - \sin\alpha^r)$ formulaga ega bo'lamiz.

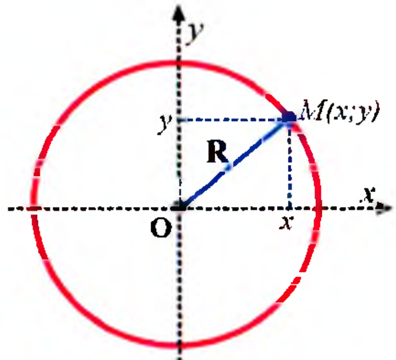
16.23-Mavzu: Aylana tenglamasi. Aylana tenglamasining oshkor va oshkormas funksiya ko'rinishida berilishi.

Ma'lumki, tekislikda olingan nuqtadan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga aylana deyiladi. Demak, aylananing ixtiyoriy nuqtasidan aylana markazigacha bo'lgan masofa bir xil, ya'ni aylana radiusiga teng ekan. Ana shundan foydalanib, aylana tenglamasini yozishimiz mumkin.

Markazi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan R radiusli aylana tenglamasi quyidagicha bo'ladi (16.23.1-rasm):

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$$

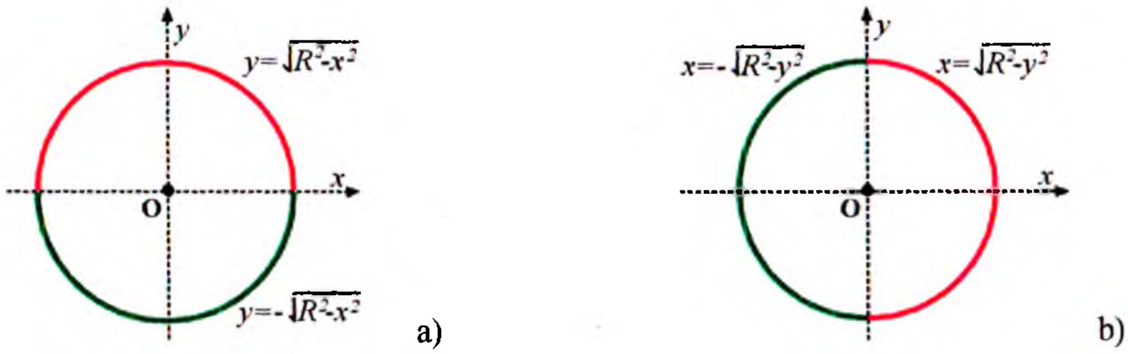
Isboti: Formulani Pifagor teoremasidan foydalanib osongina isbotlash mumkin. Aylananing ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtasining x va y koordinatalari to'g'ri burchakli uchburchak katetlarini R radius esa gipotenuzani beradi. Boshqacha aytganda, $x = a$, $y = b$, $R = c$ desak va $a^2 + b^2 = c^2$ Pifagor teoremasiga qo'ysak, natijada $x^2 + y^2 = R^2$ aylana tenglamasi kelib chiqadi.



16.23.1-rasm

Agar funksiyada argument x va funksiya y lardan birortasi ajratib–oshkor etib yozilmagan bo'lmasa, u holda bu funksiya ***oshkormas funksiya*** deyiladi. Yuqoridagi isbotlangan formula oshkormas funksiya ko'rinishda berilgan aylana tenglamasidir. Agar oshkormas funksiyadan funksiya y ni ajratib–oshkor etib yozilsa, hosil bo'lgan funksiyaga y oshkor etilgan funksiya deyiladi. Agar oshkormas funksiyadan argument x ni ajratib–oshkor etib yozilsa, hosil bo'lgan funksiyaga x oshkor etilgan funksiya deyiladi.

Yuqoridagi aylana tenglamasi oshkor funksiya ko'rinishida ikkita funksiyaga ajralib ketadi. Har bir funksiya bitta yarimaylana tenglamasini beradi. Agar biz aylana tenglamasidan y ni oshkor etsak, u holda yuqorigi va quyi yarimaylanalar hosil bo'ladi (16.23.2-a,rasm). Agar biz aylana tenglamasidan x ni oshkor etsak, o'ng va chap yarimaylanalar hosil bo'ladi (16.23.2-b,rasm).

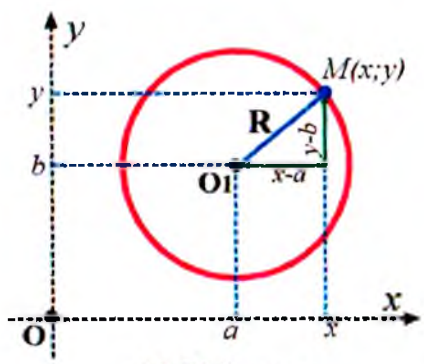


16.23.2-rasm

Markazi $O_1(a;b)$ nuqtada bo'lgan R radiusli aylana tenglamasi quyidagicha bo'ladi (15.23.1-rasm):

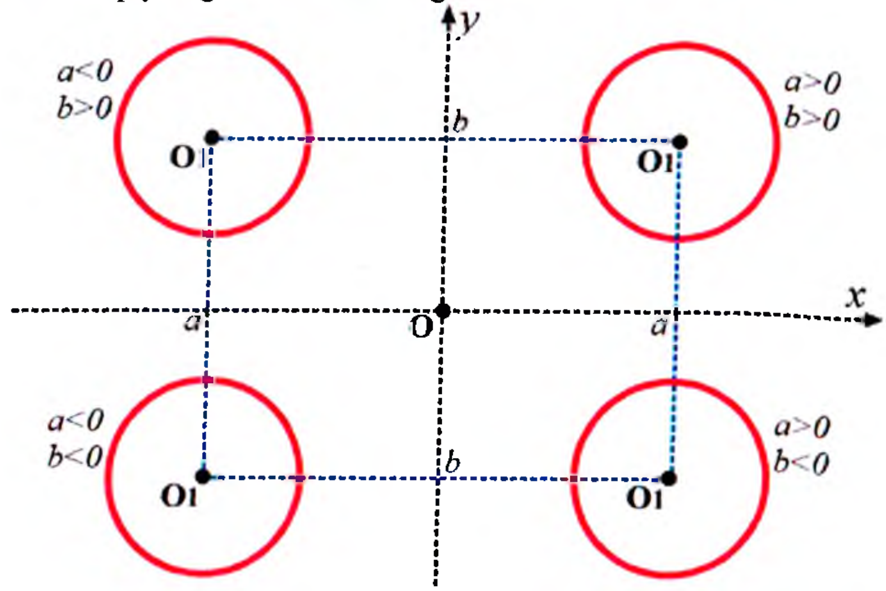
$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Isboti: Rasmdan ko'rinib turibdiki $|x-a|$ va $|y-b|$ ayirmalar to'g'ri burchakli uchburchakning katetlarini R radius esa gipotenuzani beradi. Pifagor teoremasini qo'llab $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ tenglamani osongina chiqarish mumkin.



16.23.1-rasm

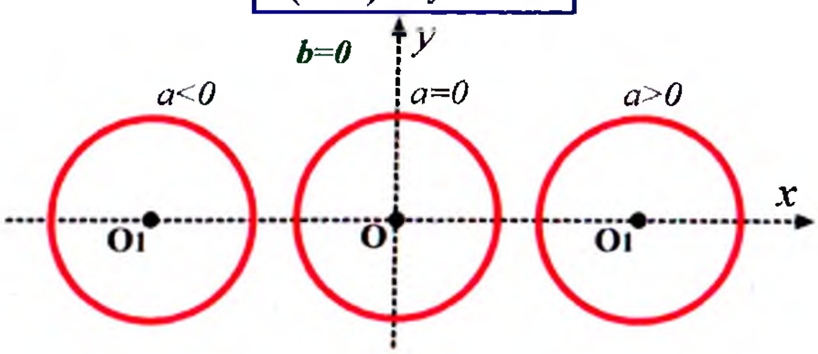
Markazi Dekart koordinatalar sistemasining to'rtta choragida bo'lgan aylanalar uchun a va b koeffitsientlar ishoralari quyidagi rasmda keltirilgan:



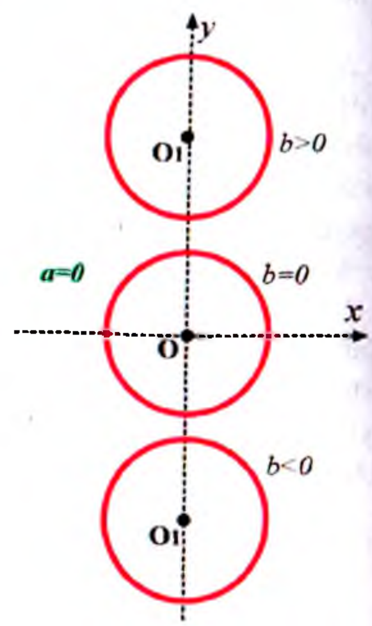
16.23.4-rasm

Markazi Ox o'qida yotuvchi aylana tenglamasi quyidagicha bo'ladi (16.23.5-rasm):

$$\boxed{(x-a)^2+y^2=R^2}$$



16.23.5-rasm



16.23.6-rasm

Markazi Oy o'qida yotuvchi aylana tenglamasi quyidagicha bo'ladi (16.23.5-rasm):

$$\boxed{x^2+(y-b)^2=R^2}$$

Tekislikda olingan nuqtadan ma'lum masofagacha bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rniga doira deyilishini bilamiz. Ana shundan foydalanib, doira tenglamasini yozishimiz mumkin.

Markazi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan R radiusli doira tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x^2+y^2\le R^2}$$

Markazi $O_1(a;b)$ nuqtada bo'lgan R radiusli doira tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2}$$

Markazi Ox o'qida yotuvchi doira tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{(x-a)^2+y^2\le R^2}$$

Markazi Oy o'qida yotuvchi doira tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x^2+(y-b)^2\le R^2}$$

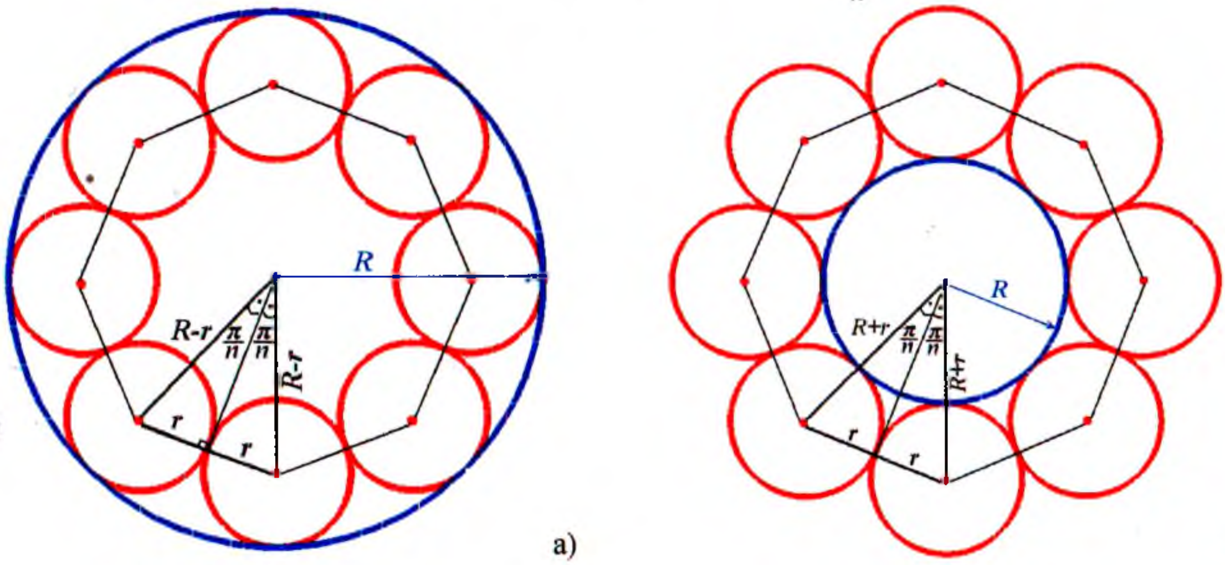
Aylanaga bir nechta bir xil aylanalar ichki yoki tashqi chizilgan bo'lib, bu aylanalarning radiusi so'ralgan bo'lsin. Biz shu shart uchun formula chiqaramiz.

R radiusli aylanaga bir xil n ta aylana ichki chizilgan bo‘lsa, bu aylanalarning radiusi r quyidagi formuladan topiladi (16.23.7-a,rasm):

$$\boxed{r=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}R}$$

Isboti: Aylana markazlarini tutashtirib chiqilganda n burchakli muntazam ko‘pburchak hosil bo‘ladi. Berilgan aylana va unga ichki chizilgan ikkita qo‘shni aylana markazi tutashtirilganda asosi $2r$, yon tomoni $R-r$ bo‘lgan teng yonli uchburchak hosil bo‘ladi. Bu teng yonli uchburchak uchidagi burchak $\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘lib, bu uchdan asosga balandlik tushirilganda uchidagi burchak ikkita $\frac{\pi}{n}$ burchakka ajraladi. Bu burchak sinusidan foydalanib so‘ralgan kattalikni aniqlaymiz. Unga ko‘ra

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r}{R-r}, \rightarrow R\sin\frac{\pi}{n}-r\sin\frac{\pi}{n}=r, \rightarrow R\sin\frac{\pi}{n}=\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)r, \rightarrow r=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}R$$ bo‘ladi.



a) b)

16.23.7-rasm

R radiusli aylanaga bir xil n ta aylana tashqi chizilgan bo‘lsa, bu aylanalarning radiusi r quyidagi formuladan topiladi (15.23.7-b,rasm):

$$\boxed{r=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}R}$$

Isboti: Aylana markazlarini tutashtirib chiqilganda n burchakli muntazam ko‘pburchak hosil bo‘ladi. Berilgan aylana va unga ichki chizilgan ikkita qo‘shni aylana markazi tutashtirilganda asosi $2r$, yon tomoni $R+r$ bo‘lgan teng yonli uchburchak hosil bo‘ladi. Bu teng yonli uchburchak uchidagi burchak $\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘lib, bu uchdan asosga balandlik tushirilganda uchidagi burchak ikkita $\frac{\pi}{n}$ burchakka ajraladi. Bu burchak sinusidan foydalanib so‘ralgan kattalikni aniqlaymiz. Unga ko‘ra

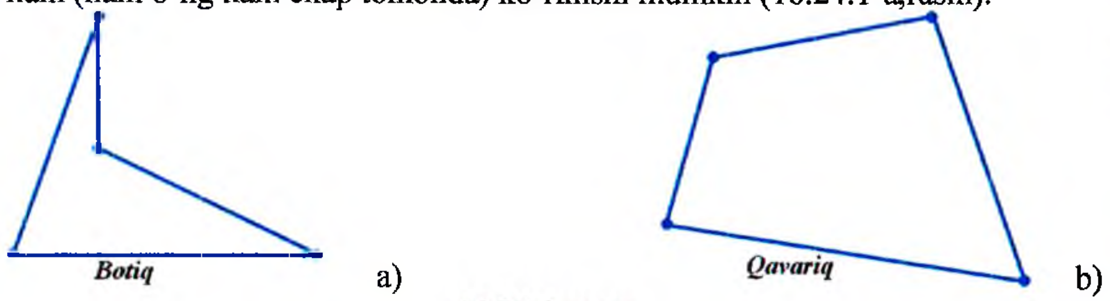
$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r}{R+r}, \rightarrow R\sin\frac{\pi}{n}+r\sin\frac{\pi}{n}=r, \rightarrow R\sin\frac{\pi}{n}=\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)r, \rightarrow r=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}R$$ bo‘ladi.

TO‘RTBURCHAKLAR

16.24-Mavzu: To‘rtburchak.

Uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan tekislikdagi to‘rtta nuqtani ketma-ket tutashtirishdan hosil bo‘lgan geometrik figuraga ***to‘rtburchak*** deyiladi.

Agar to‘rtburchak tomoni orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziq to‘rtburchak tomonini kessa, bunday to‘rtburchakka ***botiq to‘rtburchak*** deyiladi. Botiq to‘rtburchakni aylanib chiqishda tomonlar turli tomonda ham (ham o‘ng ham chap tomonda) ko‘rinishi mumkin (16.24.1-a,rasm).



16.24.1-rasm

Agar to‘rtburchak tomoni orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziq to‘rtburchak tomonini kesmasa, bunday to‘rtburchakka ***qavariq to‘rtburchak*** deyiladi. Qavariq to‘rtburchakni aylanib chiqishda tomonlar faqat bir tomonda (yoki o‘ng yoki chap tomonda) ko‘rinishi mumkin (16.24.1-a,rasm).

Bizni ko‘proq faqat qavariq to‘rtburchak qiziqtirgani bois, shunga oid masalalar bilan shug‘ullanamiz.

To‘rtburchakning uchlarini lotincha katta harflar bilan belgilanadi. Uning tomonlarini esa uchlarini ifadalovchi katta harflar yoki lotincha kichik harflar bilan belgilanadi.

To‘rtburchakning bitta uchida tutashuvchi tomonlarga ***qo‘shni tomonlar*** deyiladi. Umumiy uchga ega bo‘lmagan tomonlarga ***qarama-qarshi tomonlar*** deyiladi. Umumiy tomonga ega bo‘lgan burchaklarga ***qo‘shni burchaklar*** deyiladi. Umumiy tomonga ega bo‘lgan burchaklarga ***qarama-qarshi burchaklar*** deyiladi (16.24.1-rasm).

1) qo‘shni tomonlar;

$$a-b,\ b-c,\ c-d,\ d-a$$

2) qarama-qarshi tomonlar;

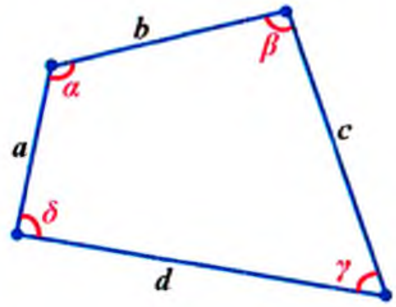
$$a-c,\quad b-d$$

3) qo‘shni burchaklar;

$$\alpha-\beta,\ \beta-\gamma,\ \gamma-\delta,\ \delta-\alpha$$

4) qarama-qarshi burchaklar;

$$\alpha-\gamma,\quad \beta-\delta$$



16.24.2-rasm

To‘rtburchak tomonlar uzunliklari yig‘indisiga to‘rtburchak ***perimetri*** deyiladi. Umumiy holda to‘rtburchak perimetri quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

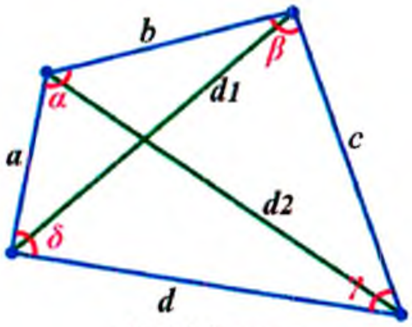
$$\boxed{p=a+b+c+d}$$

To‘rtburchakning qarama-qarshi uchlarini tutashtiruvchi kesmaga uning ***diagonali*** deyiladi. To‘rtburchak ikkita diagonalga ega bo‘lib, umumiy holda berilgan to‘rtburchaklar diagonallari turlicha uzunlikka ega bo‘ladi.

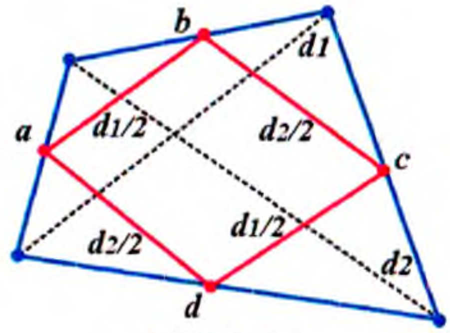
Agar to‘rtburchakning tomonlari va ixtiyoriy ikkita qo‘shni burchaklari ma’lum bo‘lsa, uning diagonallarini aniqlash mumkin (16.24.3-rasm).

$$\begin{cases} d_1=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha} \\ d_2=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\beta} \end{cases} \quad yoki \quad \begin{cases} d_1=\sqrt{c^2+d^2-2cd\cos\gamma} \\ d_2=\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\delta} \end{cases}$$

Umumiy holda berilgan to‘rtburchakning tomonlar o‘rtalarini tutashtiruvchi kesmalardan iborat figura pallelogramni hosil qiladi. Bu parallelogram tomonlari to‘rtburchak diagonallariga parallel bo‘lib, diagonal uzunliklarining yarmiga teng bo‘ladi, yuzasi ham berilgan parallelogram yuzasining yarmiga teng bo'ladi (15.24.4-rasm). Biz parallelogram haqida kelgusida batafsil to'xtalamiz.



16.24.3-rasm



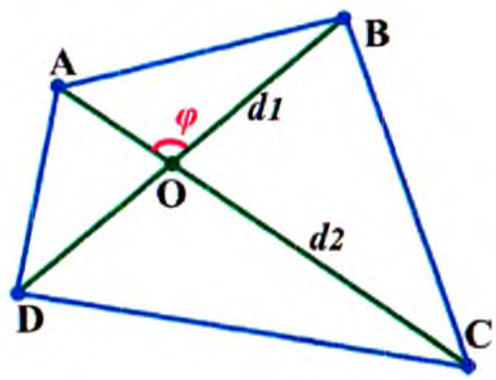
16.24.4-rasm

To'rtbo'rchak diagonallari va diagonallar orasidagi burchak ma'lum bo'lsa, to'rtburchak yuzasini aniqlash mumkin.

$$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi}$$

Bu erda: $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOB = \varphi$.

Isboti: Diagonallar O nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida berilgan to'rtburchakni to'rtta ΔAOB, ΔBOC, ΔCOD, ΔDOA uchburchaklarga ajratadi. Ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra shu uchburchaklar yuzalarini aniqlaymiz.



16.24.5-rasm

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin\varphi,$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin(\pi - \varphi) = \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin\varphi,$$

$$S_{COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\varphi,$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin(\pi - \varphi) = \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin\varphi$$

To'rtta uchburchak yuzasi yig'indisi berilgan to'rtburchak yuzasini beradi. Natijada,

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin\varphi + \frac{1}{2} OD \cdot OA \cdot \sin\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \cdot (OA \cdot OB + OB \cdot OC + OC \cdot OD + OD \cdot OA) = \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi((OA + OC) \cdot OB + (OC + OA) \cdot OD) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \cdot (OA + OC) \cdot (OB + OD) = \frac{1}{2} \cdot \sin\varphi \cdot AC \cdot BD = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$$ formula kelib chiqadi.

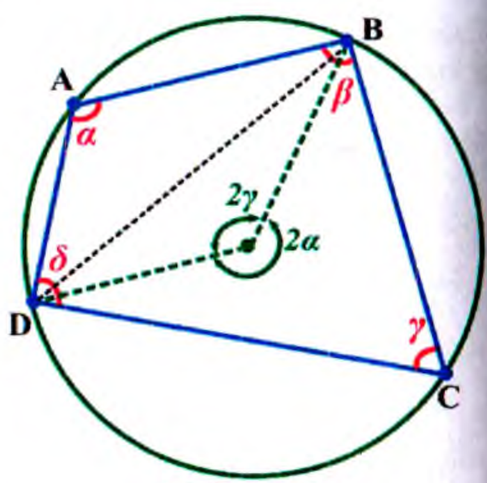
16.25-Mavzu: To'rtburchakka ichki va tashqi chizilgan aylana.

To'rtburchak uchlariga urinadigan aylanaga to'rtburchakka ***tashqi chizilgan aylana*** deyiladi. Umumiy holda berilgan hamma to'rtburchaklarga ham tashqi aylana chizib bo'lavermaydi. Buning uchun ma'lum bir shartlar bajarilish kerak.

Agar to'rtburchakning qarama-qarshi burchaklari yig'indisi 180^0 ga teng bo'lsa, bunday to'rtburchakka tashqi aylana chizish mumkin.

$$\boxed{\begin{cases} \alpha + \gamma = 180^0 \\ \beta + \delta = 180^0 \end{cases}}$$

Isboti: BD vatarga kichik yoyning ixtiyoriy nuqtasida turib qaralganda bir xil α burchak ostida ko'rinadi, shuningdek A nuqtadan qaralganda ham. Bunga mos markaziy burchak 2α ga teng. BD vatarga katta yoyning ixtiyoriy nuqtasida turib qaralganda bir xil γ burchak ostida ko'rinadi, shuningdek C nuqtadan qaralganda ham. Bunga mos markaziy burchak 2γ ga teng. Bir aylana 2π ga tengligidan $2\alpha + 2\gamma = 2\pi$ kelib chiqadi. Bundan esa qarma-qarshi burchaklar yig'indisi $\alpha + \gamma = \pi$ ga tengligi kelib chiqadi.



16.25.1-rasm

Xuddi shuningdek AC vatarga katta va kichik yoylardan qaralganda ko'rinma burchaklardan $\beta + \delta = \pi$ ekanligi kelib chiqadi.

To'rtburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi quyidagicha aniqlanadi:

$$\boxed{x^2 = \frac{ab\left(c^2 + d^2\right) + cd\left(a^2 + b^2\right)}{ab + cd}, \qquad R = \frac{abx}{\sqrt{(2ab)^2 - \left(a^2 + b^2 - x^2\right)^2}}}$$

Isboti: Diagonal $d_1 = x$ deb belgilash kiritamiz. Kosinuslar qonuni va $\alpha + \gamma = \pi$ ga ko'ra

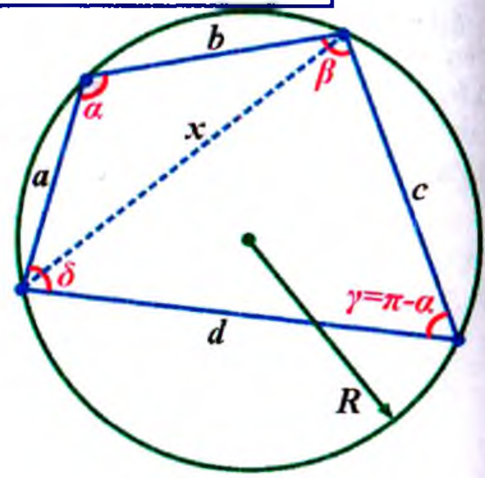
$$\begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \\ x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - \gamma) = c^2 + d^2 + 2cd\cos\gamma \end{cases}$$ bo'ladi.

Bundan $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\gamma \rightarrow$

$\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - \left(c^2 + d^2\right)}{2(ab + cd)}$ kelib chiqadi. Bundan

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\frac{a^2 + b^2 - \left(c^2 + d^2\right)}{2(ab + cd)} =$$

$$= \frac{ab\left(a^2 + b^2\right) + cd\left(a^2 + b^2\right) - ab\left(a^2 + b^2\right) + ab\left(c^2 + d^2\right)}{ab + cd} =$$



16.25.2-rasm

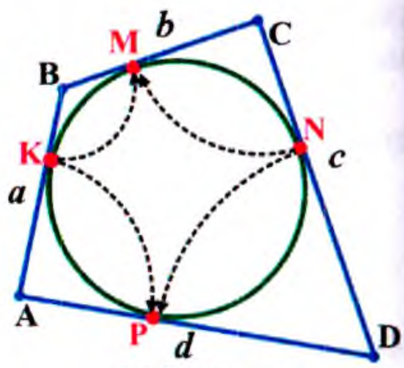
$= \dfrac{ab\left(c^2 + d^2\right) + cd\left(a^2 + b^2\right)}{ab + cd}$ ifoda hosil bo'ladi. $abcd$ to'rtburchakka tashqi chizilgan aylana bir vaqtda abx hamda cdx uchburchaklarga ham tashqi chizilgan aylanadir. SHuning uchun tashqi chizilgan aylana radiusi $R = \dfrac{abx}{4S} = \dfrac{abx}{\sqrt{(2ab)^2 - \left(a^2 + b^2 - x^2\right)^2}}$ yoki $R = \dfrac{cdx}{4S} = \dfrac{cdx}{\sqrt{(2cd)^2 - \left(c^2 + d^2 - x^2\right)^2}}$ bo'ladi.

Umumiy holda berilgan hamma to'rtburchaklarga ham tashqi aylana chizib bo'lmaydi. Buning uchun ma'lum bir shartlar bajarilish kerak.

Agar to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari yig'indisi o'zaro teng bo'lsa, bunday to'rtburchakka ichki aylana chizish mumkin.

$$\boxed{a + c = b + d}$$

Isboti: Aylanadan tashqaridagi nuqtadan aylanaga 2ta urinma o'tkazish mumkin va urinish nuqtasigacha masofalar o'zaro teng bo'ladi. SHunga ko'ra $AK = AP, BK = BM, CM = CN, DN = DP$ bo'ladi. Bundan esa
$a + c = AB + CD = (AK + BK) + (CN + DN) = (AP + BM) + (CM + DP) =$
$= (AP + DP) + (BM + CM) = AD + BC = d + b$ kelib chiqadi.



16.25.3-rasm

Faqat tomonlar uzunliklari ma'lum bo'lganda to'rtburchakka ichki chizilgan aylana radiusini aniqlab bo'lmaydi. Bunda burchaklarni o'zgartirib turli to‘rtburchaklar hosil qilish mumkin.Bu to‘rtburchaklarga esa turli aylanalar ichki chizish mumikn. To‘tburchakka ichki chizilgan aylana radiusini aniqlash uchun to‘rtala tomondan tashqari yana bitta burchak berilgan bo‘lishi kerak bo‘ladi.

16.26-Mavzu: Parallelogram.

Qarama-qarshi tomonlari teng va parallel bo‘lgan to‘rtburchakka ***parallelogram*** deyiladi (16.26.1-rasm). Parallelogramning uchlarini lotincha katta harflar bilan, tomonlarini esa uchlarini ifadalovchi katta harflar yoki lotincha kichik harflar bilan belgilanadi.

$$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases}, \quad \begin{cases} BC \parallel AD \\ BC = AD \end{cases}$$

16.26.1-rasm

Parallelogramning qarama-qarshi uchidagi burchaklari o‘zaro teng bo‘ladi.

$$\begin{cases} \angle A = \angle C \\ \angle B = \angle D \end{cases}$$

Parallelogramning qo‘shni uchidagi burchaklari yig‘indisi 180^0 ga teng bo‘ladi.

$$\angle A + \angle B = 180^0, \quad \angle B + \angle C = 180^0, \quad \angle C + \angle D = 180^0, \quad \angle D + \angle A = 180^0$$

Tomonlari a va b bo‘lgan parallelogramning perimetri quyidagicha bo‘ladi:

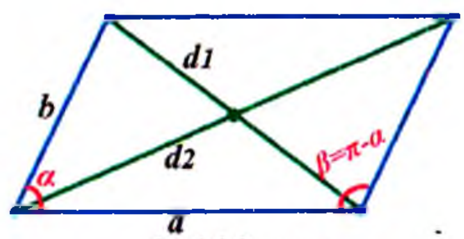
$$\boxed{p = 2(a+b)}$$

16.26.2-rasm

Qarama-qarshi uchlarini tutashtiruvchi kesmaga uning ***diagonali*** deyiladi. Parallelogramlar ikkita diagonalga ega bo‘lib umumiy holda bu diagonalllar o‘zaro teng emas.

Parllelogramning a va b tomonlari orasidagi o‘tkir burchagi α ekani ma’lum bo‘lsa, u holda parallelogramning kichik diagonali d_1 va katta diagonali d_2 kosinuslar teoremasidan hisoblab topiladi (16.26.3-rasm).

$$\boxed{\begin{cases} d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} \\ d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma} \end{cases}}$$



16.26.3-rasm

__Isboti:__ Kosinuslar teoremasidan d_1 diagonalni osongina aniqlash mumkin. Qo‘shni burchaklar yig‘indisi π ga tengligidan hamda $\cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ ekanidan d_2 diagonalni aniqlash mumkin bo‘ladi.

Parallelogram diagonallari va tomonlari orasida quyidagi bog‘lanish mavjud:

$$\boxed{d_2^2 + d_1^2 = 2(a^2 + b^2), \qquad d_2^2 - d_1^2 = 4ab\cos\gamma}$$

__Isboti:__ Yuqorida topilgan formulalardan foydalanamiz. Bunda $\begin{cases} d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma & (1) \\ d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma & (2) \end{cases}$ sistemada $(2)+(1)$ amalini bajarsak, u holda $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 2(a^2 + b^2)$ natija, $(2)-(1)$ amalini bajarsak, u holda $d_2^2 - d_1^2 = 4ab\cos\gamma$ natija kelib chiqadi.

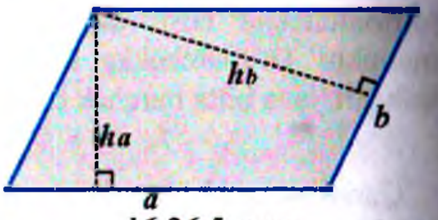
Parallelogram yuzasini tomonlar va ular orasidagi burchakka ko‘ra aniqlash quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S = ab\sin\alpha}$$

16.26.4-rasm

Parallelogram yuzasini tomon va tomonga tushirilgan balandlikka ko'ra aniqlash quyidagicha bo'ladi:

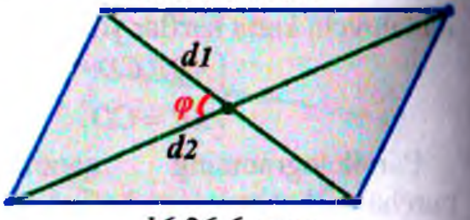
$$\boxed{S = ah_a \quad yoki \quad S = bh_b}$$



16.26.5-rasm

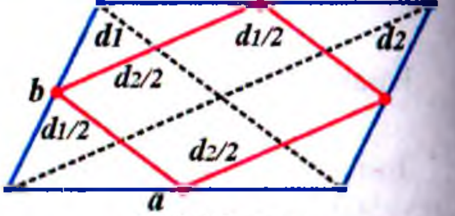
Parallelogram yuzasini diagonallar va diagonallar orasidagi burchakka ko'ra aniqlash quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi}$$



16.26.6-rasm

Parallelogram tomonlari o'rtalarini tutashtirish natijasida yana parallelogram hosil bo'ladi. Bu parallelogramning tomonlari berilgan parallelogram diagonallarining yarmiga teng bo'ladi, yuzasi esa berilgan parallelogram yuzasining yarmiga teng bo'ladi (16.26.7-rasm).



16.26.7-rasm

Agar paralleogramning qo'shni tomonlar va qo'shni burchaklar o'zaro teng bo'lmasa $(a \neq b, \alpha \neq \beta)$, bu parallelogramga umumiy holda berilgan parallelogaram deyiladi. Umumiy holda berilgan parallelogramga tashqi aylana ham, ichki aylana ham chizib bo'lmaydi.

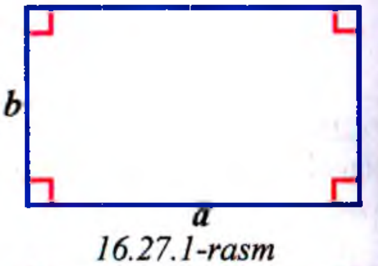
Agar parallelogram umumiy holda berilmagan bo'lsa, xususiy hollar uchun parallelogramni `to'g'ri to'rtburchak, romb, kvadrat` kabi nomlar bilan ataladi. Keyingi mavzularda biz ularga alohida-alohida to'xtalib o'tamiz.

16.27-Mavzu: To'g'ri to'rtburchak.

Hamma burchaklari to'g'ri (90^0) bo'lgan to'rtburchakka ***to'g'ri to'rtburchak*** deyiladi.

Tomonlari a va b bo'lgan to'g'ri to'rtburakning perimetri quyidagicha bo'ladi (16.27.1-rasm):

$$\boxed{p = 2(a+b)}$$

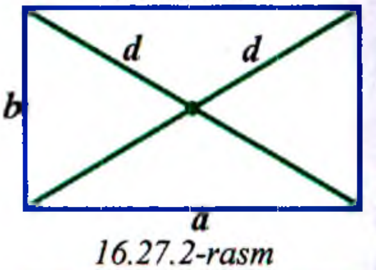


16.27.1-rasm

To'g'ri to'rtburchakning ikkita diagonali ham o'zaro tengdir. Diagonallar kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

To'g'ri to'rtburchak diagonali va tomonlari orasida quyidagi bog'lanish mavjud (16.27.2-rasm):

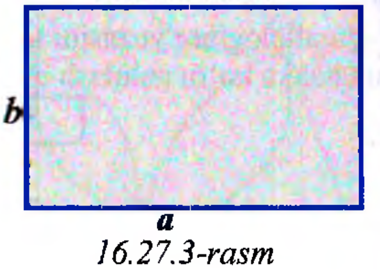
$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$$



16.27.2-rasm

To'g'ri to'rtburchak tomonlari ma'lum bo'lsa, yuzasini quyidagicha aniqlash mumkin bo'ladi (16.27.3-rasm):

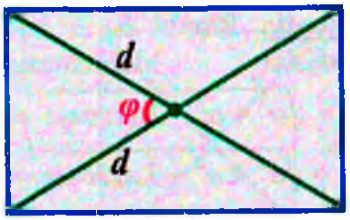
$$\boxed{S = ab}$$



16.27.3-rasm

Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonali va diagonallar orasidagi burchak berilgan bo‘lsa, uning yuzasi quiydagicha bo‘ladi (16.27.4-rasm):

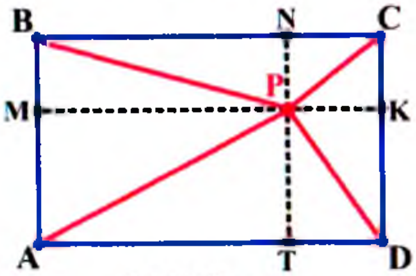
$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\varphi$$



16.27.4-rasm

ABCD to‘g‘ri to‘rtburchakning ichida olingan ixtiyoriy *P* nuqtadan to‘rtburchakning uchlarigacha masofalar quyidagi formula yordamida bog‘lanadi (16.27.5-rasm):

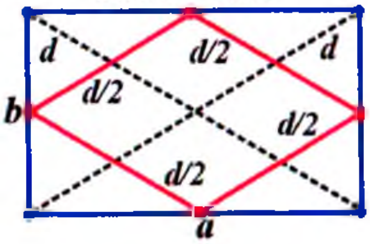
$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$



16.27.5-rasm

Isboti: Pifagor teoremasidan foydalanamiz. Unga ko‘ra $PA^2 = AM^2 + PM^2 = PT^2 + PM^2 = (PD^2 - PK^2) + (PB^2 - PN^2) = PD^2 + PB^2 - (PK^2 + PN^2) = PD^2 + PB^2 - PC^2$ bo‘ladi. Bundan esa $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$ natija kelib chiqadi.

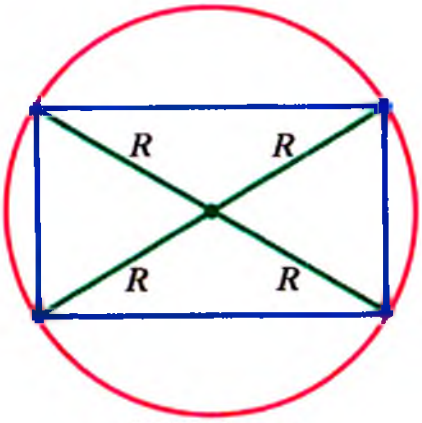
To‘g‘ri to‘rtburchak tomonlari o‘rtalarini tutashtirilganda parallelogram hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan parallelogram tomoni to‘rtburchak diagonalining yarmiga teng bo‘ladi, yuzasi esa to‘rtburchak yuzasining yarmiga teng bo‘ladi.



16.27.6-rasm

To‘g‘ri to‘rtburchak uchlariga urinuvchi aylanaga unga tashqi chizilgan aylana deyiladi. To‘g‘ri to‘rtburchak diagonali unga tashqi chizilgan aylana diametri bilan mos tushadi. Boshqacha aytganda tashqi chizilgan aylana radiusi uning diagonali yarmiga teng bo‘ladi (16.27.7-rasm).

$$R = \frac{d}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$



16.27.7-rasm

Rasmdan ko‘rinib turibdiki, to‘g‘ri to‘rtburchak diagonali uni ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchakka ajratadi. Shundan ham ko‘rish mumkinki, to‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazi har doim gipotenuza markazida yotar ekan.

Umumiy holda berilgan to‘g‘ri to‘rtburchakka $(a \neq b)$ ichki aylana chizib bo‘lmaydi.

16.28-Mavzu: Romb.

Hamma tomonlari teng bo‘lgan parallelogramga ***romb*** deyiladi.

Rombning parimetri quyidagicha bo‘ladi:

$$p = 4a$$

Rombning diagonallari 90^0 burchak ostida kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.

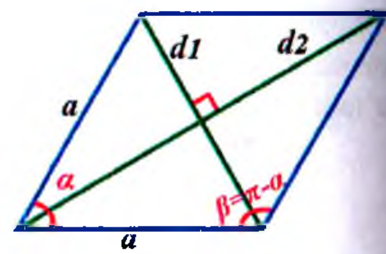
Tomonlar orasidagi o‘tkir burchagi α bo‘lgan rombning kichik diagonali d_1 va katta diagonali d_2 quyidagicha bo‘ladi (15.28.1-rasm):

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{2(1 - \cos\alpha)} \cdot a \\ d_2 = \sqrt{2(1 + \cos\alpha)} \cdot a \end{cases}$$

Isboti: Romb $b=a$ bo'lgan parallelogram bo'lgani uchun kosinuslar teoremasidan diagonallar uchun

$$\begin{cases} d_1=\sqrt{a^2+a^2-2aa\cos\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}\cdot a \\ d_2=\sqrt{a^2+a^2+2aa\cos\alpha}=\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\cdot a \end{cases}$$

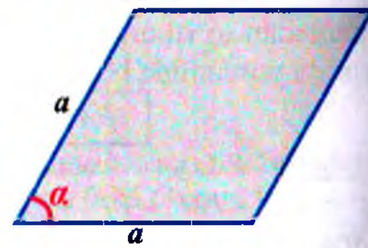
formulalar osongina kelib chiqadi.



16.28.1-rasm

Romb yuzini tomon va tomonlar orasidagi burchakka ko'ra aniqlash quyidagicha bo'ladi (16.28.2-rasm):

$$\boxed{S=a^2\sin\alpha}$$



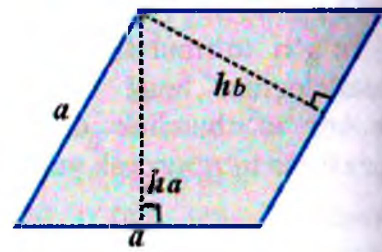
16.28.2-rasm

Rombning ikkala tomoniga tushirilgan balandligi ham o'zaro teng va quyidagicha bo'ladi (15.28.3-rasm):

$$\boxed{h=a\sin\alpha}$$

Romb yuzini tomon va balandlikka ko'ra aniqlash quyidagicha bo'ladi (16.28.2-rasm):

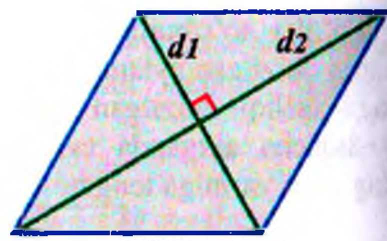
$$\boxed{S=ah}$$



16.28.3-rasm

Romb yuzini diagonallariga ko'ra aniqlash quyidagicha bo'ladi (16.28.4-rasm):

$$\boxed{S=\frac{1}{2}d_1d_2}$$

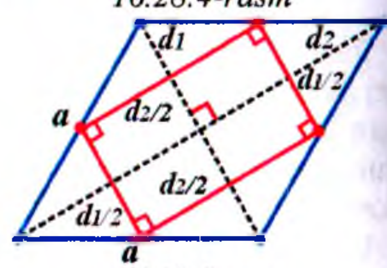


16.28.4-rasm

Isboti: To'rtburchak yuzasi uchun $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$ formulada

$\varphi=90^0$ bo'lgani uchun $S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin 90^0=\frac{1}{2}d_1d_2$ natija kelib chiqadi.

Romb tomonlari o'rtalarini tutashtirilganda to'g'ri to'rtburchak hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan to'g'ri to'rtburchak tomonlari romb diagonallarining yarmiga teng bo'ladi, yuzasi esa romb yuzasining yarmiga teng bo'ladi (16.28.5-rasm).



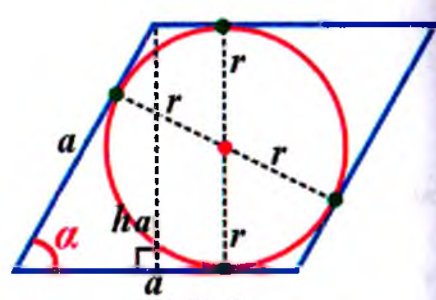
16.28.5-rasm

Rombga tashqi aylana chizib bo'lmaydi.

Romb tomonlariga urinadigan aylanaga ***ichki chizilgan aylana*** deyiladi. Rombga ichki chizilgan aylana radiusi romb balandligining yarmiga teng bo'ladi (16.28.6-rasm).

$$\boxed{r=\frac{h}{2}=\frac{1}{2}a\sin\alpha}$$

Isboti: Rombning balandligi unga ichki chizilgan aylana diametri bilan mos tushadi. Shuning uchun $2r=h$ yoki $r=\frac{h}{2}=\frac{1}{2}a\sin\alpha$ bo'ladi.



16.28.6-rasm

16.29-Mavzu: Kvadrat.

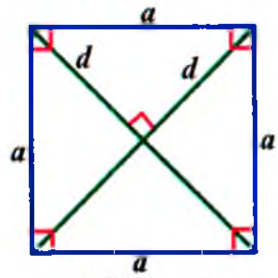
To'rtta tomoni ham to'rtta burchagi ham o'zaro teng bo'lgan parallelogramga ***kvadrat*** deyiladi.

Kvadratning perimetri rombning parimetri kabi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{p = 4a}$$

Kvadratning diagonallari 90^0 burchak ostida kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi. Kvadratning ikkita diagonali ham o‘zaro teng va quyidagicha bo‘ladi (16.29.1-rasm):

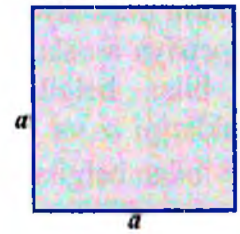
$$\boxed{d = \sqrt{2}\,a}$$



16.29.1-rasm

Kvadrat yuzasi quyidagicha bo‘ladi (16.29.2-rasm):

$$\boxed{S = a^2}$$

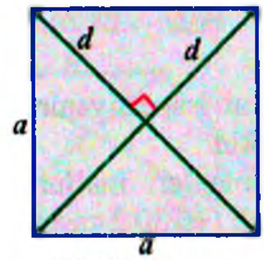


16.29.2-rasm

Kvadrat yuzasi diagonal orqali quyidagicha aniqlanadi (16.29.3-rasm):

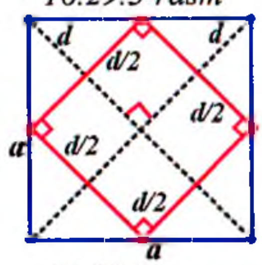
$$\boxed{S = \frac{1}{2}d^2}$$

Isboti: Tq‘rtburchak yuzasi $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi = \frac{1}{2}d \cdot d \cdot \sin 90^0 = \frac{1}{2}d^2$ bo‘ladi.



16.29.3-rasm

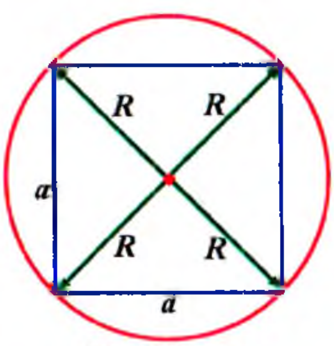
Kvadrat tomonlari o‘rtalarini tutashtirilganda yana kvadrat hosil bo‘ladi. Hosil bo‘lgan kvadrat tomoni berilgan kvadrat diagonalining yarmiga teng bo‘ladi, yuzasi esa berilgan kvadrat yuzasining yarmiga teng bo‘ladi (16.29.4-rasm).



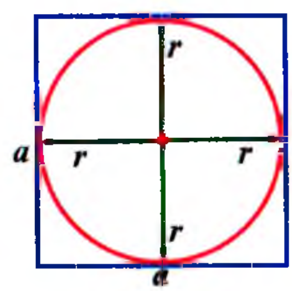
16.29.4-rasm

Kvadrat uchlariga urinadigan aylanaga kvadratga ***tashqi chizilgan aylana*** deyiladi. Kvadratga tashqi chizilgan aylananing diametri kvadrat diagonaliga tengdir (16.29.5-rasm).

$$\boxed{R = \frac{d}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}}$$



16.29.5-rasm



16.29.6-rasm

Kvadrat tomonlariga urinadigan aylanaga kvadratga ***ichki chizilgan aylana*** deyiladi. Kvadratga ichki chizilgan aylananing diametri kvadrat tomoniga tengdir (16.29.6-rasm).

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$

Kvadratga tashqi va ichki chizilgan aylana radiuslari o‘zaro quyidagicha bog‘lanadi:

$$\boxed{R = \sqrt{2}\,a}$$

Isboti: Kvadratga tashqi va ichki chizilgan aylana radiuslaridan foydalanib aniqlaymiz. Unga ko'ra

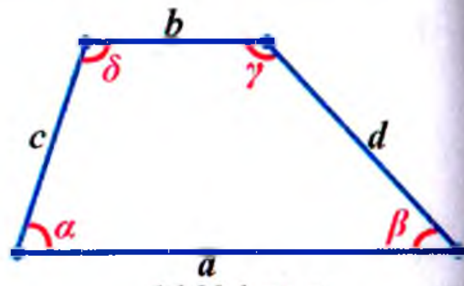
$\begin{cases} R = \dfrac{a}{\sqrt{2}} \\ r = \dfrac{a}{2} \end{cases}, \rightarrow \dfrac{R}{r} = \dfrac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \rightarrow R = \sqrt{2}a$ natija kelib chiqadi.

16.30-Mavzu: Trapetsiya. Trapetsiya elementlari.

A) Umumiy trapetsiya:

Ikkita parallel tomonga ega bo'lgan qavariq to'rtburchakka ***trapetsiya*** deyiladi. Parallel tomonlarni trapetsiya ***asoslari***, qolgan tomonlarni esa trapetsiyaning ***yon tomonlari*** deyiladi.

Trapetsiya asoslarini a va b bilan, yon tomonlarni esa c va d bilan belgilanadi. Trapetsiyaning katta asosidagi burchaklarini α va β bilan, kichik asosidagi burchaklarini γ va δ bilan belgilanadi. Trapetsiya ichki burchaklari uchun ushbu ifoda o'rinlidir (16.30.1-rasm).



16.30.1-rasm

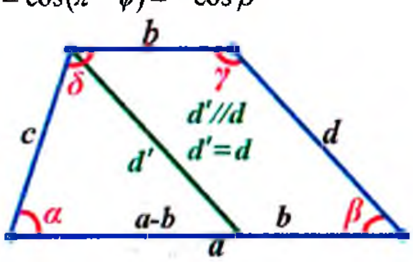
$$\begin{cases} \alpha + \delta = 180^0 \\ \beta + \gamma = 180^0 \end{cases}$$

Agar trapetsiyaning to'rtala tomoni ham berilgan bo'lsa, uning ichki burchaklarini aniqlash mumkin.

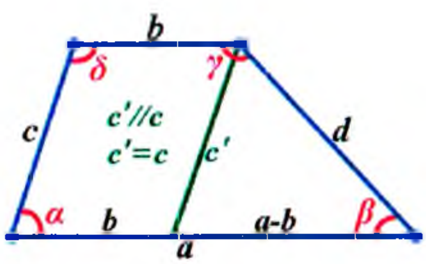
Tomonlari ma'lum bo'lgan trapetsiyaning burchaklarini aniqlash formulalari quyidagicha bo'ladi (16.30.2-rasm):

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2(a-b)c} \\ \cos\beta = \dfrac{(a-b)^2 + d^2 - c^2}{2(a-b)d} \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\delta = -\cos\alpha \\ \cos\gamma = -\cos\beta \end{cases}$$

Isboti: Trapetsiyaning δ burchagidan $d' // d$ kesma o'tkazamiz (16.30.2-a,rasm). Bunda $d' = d$ bo'lgani uchun kosinuslar teoremasidan $d'^2 = (a-b)^2 + c^2 - 2(a-b)c\cos\alpha$ foydalanib $\cos\alpha = \dfrac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2(a-b)c}$ ni aniqlaymiz. Trapetsiyaning γ burchagidan $c' // c$ kesma o'tkazamiz (16.30.2-b,rasm). Bunda $c' = c$ bo'lgani uchun kosinuslar teoremasidan $c'^2 = (a-b)^2 + d^2 - 2(a-b)d\cos\beta$ foydalanib $\cos\beta = \dfrac{(a-b)^2 + d^2 - c^2}{2(a-b)d}$ ni aniqlaymiz. $\begin{cases} \alpha + \delta = 180^0 \\ \beta + \gamma = 180^0 \end{cases}$ ekanligidan foydalansak, $\begin{cases} \cos\delta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \\ \cos\gamma = \cos(\pi - \phi) = -\cos\beta \end{cases}$ ekanligi kelib chiqadi.



a)



b)

16.30.2-rasm

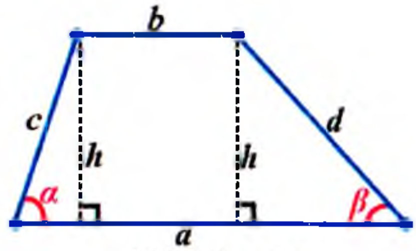
Trapetsiya asoslari orasidagi eng yaqin masofaga trapetsiya ***balandligi*** deyiladi. Trapetsiya balandligi har doim asoslarga perpendikulyar bo'ladi.

Trapetsiya balandligi quyidagi formula yordamida hisoblanadi (16.30.3-rasm):

$$\begin{cases} h = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\ h = d \cdot \sin\beta = d \cdot \sqrt{1 - \cos^2\beta} \end{cases}$$

Isboti: α va β burchaklar sinusidan foydalanamiz. Bunda

$$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{h}{c}\\ \sin\beta=\dfrac{h}{d}\end{cases},\rightarrow\begin{cases}h=c\cdot\sin\alpha=c\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}\\ h=d\cdot\sin\beta=d\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta}\end{cases}\text{ bo'ladi.}$$

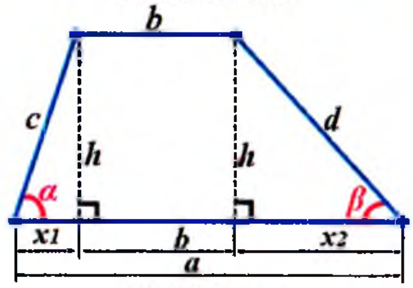


16.30.3-rasm

Natija hosil bo'ladi. Oldingi formulada $\cos\alpha$ va $\cos\beta$ ni tomonlar orqali aniqlashni ko'rib o'tgan edik.

Yon tomonlarning katta asosdagi proeksiyalari hamda asoslar orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi (16.30.4-rasm):

$$\boxed{\begin{cases}x_1=c\cdot\cos\alpha\\ x_2=d\cdot\cos\beta\end{cases},\quad a=b+x_1+x_2}$$

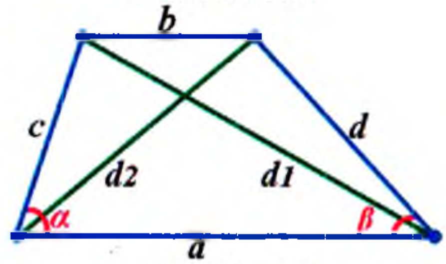


16.30.4-rasm

Isboti: To'g'ri burchakli uchburchakda burchak kosinusidan foydalanib, osongina topish mumkin.

Kosinuslar teoremasidan foydalanib trapetsiyaning diagonallarini aniqlash mumkin (16.30.5-rasm).

$$\boxed{\begin{cases}d_1=\sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\alpha}\\ d_1=\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\beta}\end{cases}}$$

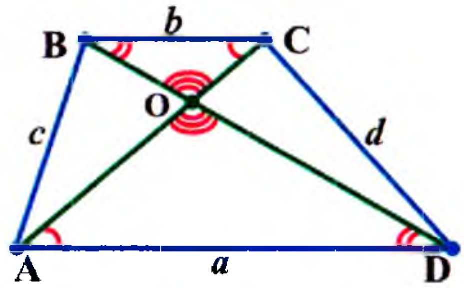


16.30.5-rasm

Trapetsiya diagonallari kesishganda parallelogram kabi teng ikkiga bo'linmaydi. Diagonallar kesishganda ma'lum bir nisbatda bo'linadi.

Diagonallar kesishishidan hosil bo'lgan kesmalardan katta kesmaning kichik kesmaga nisbati katta asosining kichik asosga nisbatiga tengdir (16.30.6-rasm).

$$\boxed{\frac{AO}{OC}=\frac{DO}{OB}=\frac{a}{b}}$$



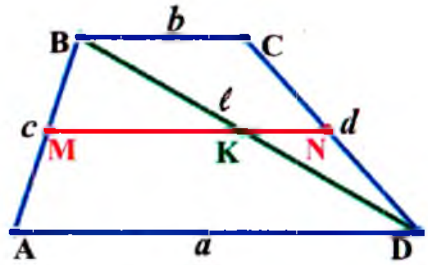
16.30.6-rasm

Isboti: Uchburchaklar o'xshashligidan foydalanamiz. Bunda ichki almashinuvchi bo'lgani uchun $\angle OAD=\angle OCB$ va $\angle ADO=\angle CBO$ hamda o'zaro vertikal bo'lgani uchun $\angle AOD=\angle COB$ bo'ladi. Demak, $\Delta ADO\sim\Delta CBO$, ya'ni uchburchaklar o'xshash ekan. O'xshash uchburchaklarning mos tomonlari proporsional bo'ladi, ya'ni $\frac{DO}{BO}=\frac{AO}{CO}=\frac{AD}{BC}=\frac{a}{b}$ bo'ladi.

Trapetsiya yon tomonlari o'rtalarini tutashtiruvchi kesmaga trapetsiyaning ***o'rta chizig'i*** deyiladi. Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslarga parallel bo'lib, berilgan trapetsiyani ikkita trapetsiyachalarga ajratadi.

Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslar yig'indisining yarmiga teng. (15.30.7-rasm).

$$\boxed{\ell=\frac{a+b}{2}}$$



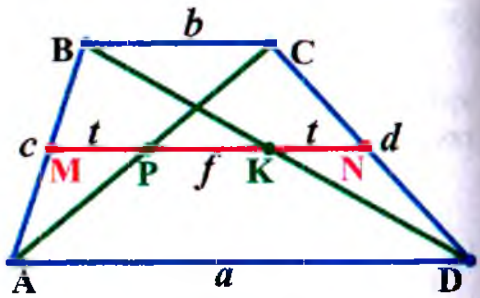
15.30.7-rasm

Isboti: Rasmda $ABCD$ trapetsiyaga BD diagonal o'tkazamiz. Bu diagonal trapetsiyani ABD va BCD uchburchaklarga ajratadi. BD diagonal $\ell=MN$ o'rta chiziqni K nuqtada kesib o'tadi. MK kesma ABD uchburchak uchun, KN kesma esa BCD uchburchak

Uchun o'rta chiziqdir. Shunga asosan o'rta chiziq uchburchak asosiga parallel va uning uzunligining yarmiga teng, ya'ni $\begin{cases} MK \parallel a \\ MK = AD/2 = a/2 \end{cases}$ va $\begin{cases} KN \parallel b \\ KN = BC/2 = b/2 \end{cases}$ bo'ladi. Trapetsiya o'rta chizig'i $\ell = MN = MK + KN = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$ ekanligi kelib chiqadi.

Trapetsiyaning o'rta chizig'i diagonallarni kesganda o'rta chiziqni uchta kesmaga ajratadi. Bu kesmalar uzunliklari quyidagicha bo'ladi (16.30.8-rasm):

$$\boxed{t = \frac{b}{2}, \quad f = \frac{a-b}{2}}$$



16.30.8-rasm

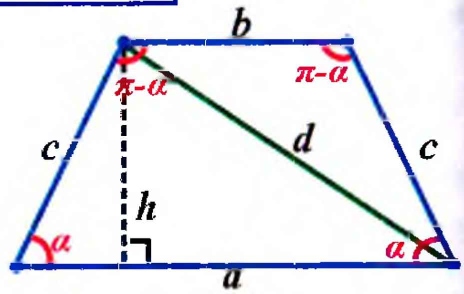
Isboti: Rasmdan ko'rinib turibdiki, $t = MP$ kesma ABC uchburchakka va $t = KN$ kesma esa BCD uchburchakka o'rta chiziq bo'ladi. Shuning uchun $t = \frac{BC}{2} = \frac{b}{2}$ bo'ladi. Trapetsiya o'rta chizig'ini uchta kesma uzunliklari yig'indisi tashkil etadi, ya'ni $\ell = 2t + f$ bo'ladi. Bundan esa $f = PK = \ell - 2t = \frac{a+b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2}$ kelib chiqadi.

B) Teng yonli trapetsiya:

Yon tomonlari o'zaro teng bo'lgan trapetsiyaga ***teng yonli trapetsiya*** deyiladi. Teng yonli trapetsiyaning katta asosidagi ikkita o'tkir burchagi ham kichik asosidagi ikkita o'tmas burchagi ham o'zaro tengdir.

Tomonlari ma'lum bo'lgan teng yonli trapetsiyaning o'tkir burchagi, diagonali va balandliklarni aniqlash formulalari quyidagicha bo'ladi (16.30.9-rasm):

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a-b}{2c}, \quad h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}, \quad d = \sqrt{ab + c^2}}$$



16.30.9-rasm

Isboti: Teng yonli trapetsiyada yon tomonlar o'zaro teng, ya'ni $c = d$ bo'ladi. Bunda o'tkir burchak kosinusi $\cos\alpha = \frac{(a-b)^2 + c^2 - d^2}{2(a-b)c} = \frac{(a-b)^2}{2(a-b)c} = \frac{a-b}{2c}$, asosga tushirilgan balandlik $h = c \cdot \sin\alpha = c\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$, diagonal

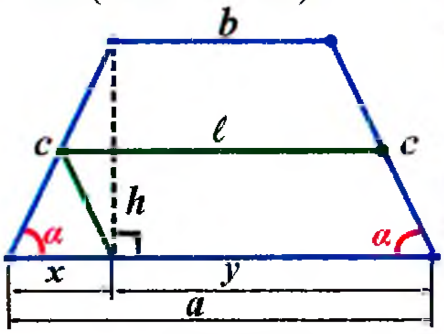
$$d = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\frac{a-b}{2c}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + c^2 - a^2 + ab} = \sqrt{ab + c^2}$$ ga teng bo'ladi.

Teng yonli trapetsiyaning katta asosi a ga tushirilgan balandligi asosni x va y kesmalarga ajratadi.

Balandlikning katta asosdan ajratgan kesmalari quyidagicha bo'ladi (15.30.10-rasm):

$$\boxed{x = \frac{a-b}{2}, \quad y = \frac{a+b}{2} = \ell}$$



16.30.10-rasm

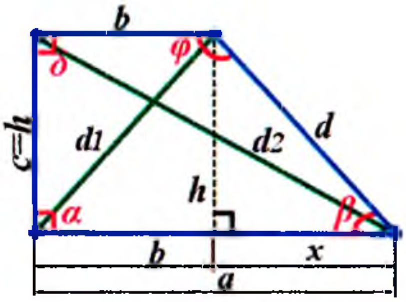
Isboti: Bunda kichik kesma x ni $a = 2x + b$ dan foydalanib topsak, $x = \frac{a-b}{2}$ bo'ladi, yoki burchak sinusidan foydalansak ham $x = c \cdot \cos\alpha = c \cdot \frac{a-b}{2c} = \frac{a-b}{2}$ ifodani olamiz. Katta kesma esa $a = x + y$ dan $y = a - x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = \ell$ ga teng bo'ladi.

C) To'g'ri burchakli trapetsiya:

Bitta yon tomoni asoslariga perpendikulyar bo‘lgan trapetsiyaga ***to‘g‘ri burchakli trapetsiya*** deyiladi. To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning ikkita burchagi to‘g‘ri burchak bo‘ladi, ya’ni $\alpha = \delta = 90^0$ bo‘ladi. Undan tashqari bu trapetsiyaning bitta yon tomoni balandligiga teng bo‘ladi, ya’ni $h = c$ bo‘ladi (16.30.11-rasm).

To‘g‘ri burchakli trapetsiyada noma’lum kattaliklar quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{\begin{cases} x = \sqrt{d^2 - c^2} \\ \cos\beta = \dfrac{x}{d} = \dfrac{\sqrt{d^2-c^2}}{d} \end{cases}, \qquad \begin{cases} d_1 = \sqrt{b^2 + c^2} \\ d_2 = \sqrt{b^2 + d^2 + 2bd\cos\beta} \end{cases}}$$



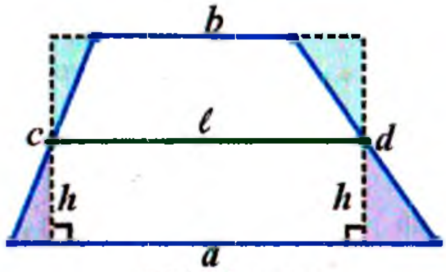
16.30.11-rasm

Isboti: Bunda $c = h$, $\cos\varphi = -\cos\beta$ hamda kosinuslar va Pifagor teoremasidan foydalanib formulalarni isbot qilish mumkin.

16.31-Mavzu: Trapetsiya yuzasi.

Trapetsiyaning yuzi trapetsiya o‘rta chizig‘i bilan balandlikning ko‘paytmasiga teng.

$$\boxed{S = \ell h = \frac{a+b}{2}h}$$

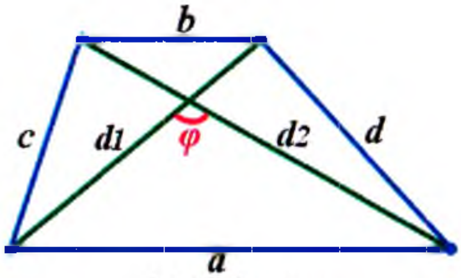


16.31.1-rasm

Isboti: Bunda trapetsiyaga o‘rta chiziq o‘tkazamiz va o‘rta chiziqning yon tomonlari bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz. Bu kesishish nuqtalari orqali balandliklar o‘tkazib to‘g‘ri burchakli uchburchaklar yasaymiz. Bu uchburchaklarning bitta katetlari $h/2$ ga, ikkinchi katetlari esa $\frac{1}{2}c\cdot\cos\alpha$ va $\frac{1}{2}d\cdot\cos\beta$ ga teng. Pastdagi to‘g‘ri burchakli uchburchak yuzalari mos holda yuqoridagi to‘g‘ri burchakli uchburchak yuzalariga teng. Shuning uchun pastdagi yuzalarni kesib olib uni tepaga joylashtirilsa, eni h ga bo‘yi esa $\ell = \frac{a+b}{2}$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak hosil bo‘ladi. To‘g‘ri to‘rtburchak eni va bo‘yini ko‘paytmasi uning yuzini beradi, ya’ni $S = \ell h = \frac{a+b}{2}h$ bo‘ladi.

Agar trapetsiyaning diagonallari d_1 va d_2 hamda diagonallar orasidagi φ burchak ma’lum bo‘lsa, trapetsiya yuzasi quyidagicha bo‘ladi.

$$\boxed{S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi}$$



16.31.2-rasm

Isboti: Bu formulaning isboti bilan 12.24-mavzuda barcha qavariq to‘rtburchaklar uchun umumiy holda tanishib chiqqanmiz.

Agar trapetsiyaning asoslari a va b hamda yuzasi S ma’lum bo‘lsa, diagonallar kesishishidan hosil bo‘lgan uchburchaklar yuzalarini aniqlash mumkin.

$$\boxed{\begin{gathered} S_1 = \frac{a^2}{(a+b)^2}S, \qquad S_2 = \frac{b^2}{(a+b)^2}S, \qquad S_2 = S_4 = \frac{ab}{(a+b)^2}S \\ S_2 = S_4 = \sqrt{S_1 S_3}, \qquad S = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_3}\right)^2 \end{gathered}}$$

Isboti: Har bir uchburchak yuzasini ikki tomon va tomonlar orasidagi burchakka ko‘ra ifodalaymiz.

$$S_1 = \frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\varphi, \quad S_2 = \frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin(\pi-\varphi) = \frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\varphi,$$

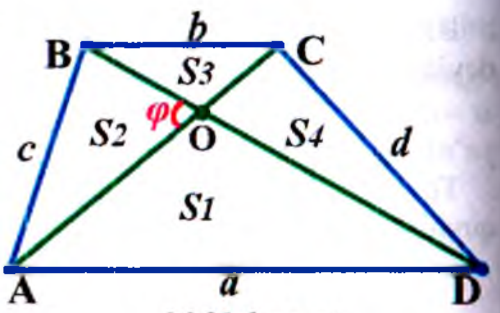
$$S_3 = \frac{1}{2}CO\cdot OD\cdot\sin\varphi, \quad S_2 = \frac{1}{2}DO\cdot OA\cdot\sin(\pi-\varphi) = \frac{1}{2}DO\cdot OA\cdot\sin\varphi$$

Bunda uchburchaklar o‘xshashligidan foydalanamiz.

$$\frac{S_1}{S_3}=\frac{\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\varphi}{\frac{1}{2}CO\cdot OD\cdot\sin\varphi}=\frac{OB}{OD}\cdot\frac{AO}{OC}=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^2,$$

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\varphi}{\frac{1}{2}BO\cdot OC\cdot\sin\varphi}=\frac{AO}{OC}=\frac{a}{b},$$

$$\frac{S_1}{S_4}=\frac{\frac{1}{2}AO\cdot OB\cdot\sin\varphi}{\frac{1}{2}AO\cdot OD\cdot\sin\varphi}=\frac{OB}{OD}=\frac{a}{b}.$$

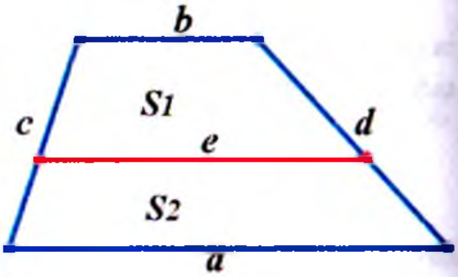


16.31.3-rasm

Yuzalarni S_1 orqali ifodalasak, $S_2=\frac{b}{a}S_1$, $S_3=\left(\frac{b}{a}\right)^2S_1$, $S_4=\frac{b}{a}S_1$ bo‘ladi. To‘rtta uchburchak yuzalari yig‘indisi trapetsiya yuzasini beradi, ya’ni $S_1+S_2+S_3+S_4=S$ bo‘ladi. Shunga ko‘ra $S_1+\frac{b}{a}S_1+\left(\frac{b}{a}\right)^2S_1+\frac{b}{a}S_1=S$, $\to$ $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2}S_1=S$, $\to$ $S_1=\frac{a^2}{(a+b)^2}S$ kelib chiqadi. Qolgan yuzalar ham $S_2=\frac{b}{a}S_1=\frac{ab}{(a+b)^2}S$, $S_3=\left(\frac{b}{a}\right)^2S_1=\frac{b^2}{(a+b)^2}S$, $S_4=\frac{b}{a}S_1=\frac{ab}{(a+b)^2}S$ kabi bo‘ladi. Demak, $S_2=S_4=\frac{ab}{(a+b)^2}S$ ekan. S_2 yoki S_4 yuza S_1 va S_3 yuzalarning o‘rta geometrigidan ham kelib chiqadi, ya’ni $\sqrt{S_1\cdot S_3}=\sqrt{\frac{a^2}{(a+b)^2}S\cdot\frac{b^2}{(a+b)^2}S}=\frac{ab}{(a+b)^2}S=S_2=S_4$ bo‘ladi. Trapetsiya yuzasini $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}\right)^2=S$ dan ham keltirib chiqarish mumkin. Haqiqatan ham kvadratga ko‘tarsak, $\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}\right)^2=S_1+2\sqrt{S_1S_3}+S_3=S_1+2S_2+S_3=S_1+S_2+S_4+S_3=S$ kelib chiqadi.

Trapetsiya asoslariga parallel qilib shunday e kesma o‘tkazaylikki, bu kesma trapetsiya yuzasini teng ikkiga bo‘lsin. Ana shu kesma uzunligi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$$



16.31.4-rasm

Isboti: Trapetsiyalarning yuzlari $\begin{cases}S_1=\frac{b+e}{2}h_1=\frac{S}{2}\\ S_2=\frac{a+e}{2}h_2=\frac{S}{2}\end{cases}$ ga teng.

Bundan $(a+e)h_2=(b+e)h_1$, $\to$ $h_2=\frac{b+e}{a+e}h_1$ bo‘ladi. Bundan $h_1+h_2=h$, $\to$ $h_1+\frac{b+e}{a+e}h_1=h$, $\to$ $h=\frac{a+b+2e}{a+e}h_1$ ni olamiz. Trapetsiyalar yuzalari yig‘indisi berilgan trapetsiya yuzasiga teng. Hisob-kitoblar natijasida $S_1+S_2=S$, $\to$ $2S_1=S$, $\to$ $(b+e)h_1=\frac{a+b}{2}h$, $\to$

$$\to\ (b+e)h_1=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a+b+2e}{a+e}h_1,\ \to\ 2(b+e)(a+e)=(a+b)(a+b+2e),\ \to\ 2ab+2be+2ae+2e^2=$$

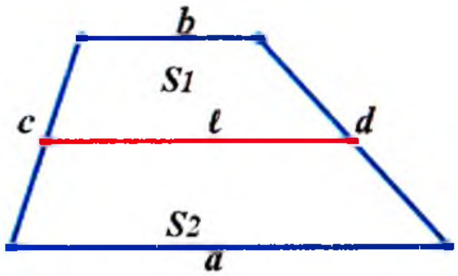
$$=a^2+ab+2ae+ab+b^2+2be,\ \to\ 2e^2=a^2+b^2,\ \to\ e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ formulani hosil qilamiz.

Asoslari a va b, yuzi S bo‘lgan trapetsiya o‘rta chizig‘i trapetsiya yuzini quyidagi qismlarga ajratadi:

$$\boxed{S_1=\frac{a+3b}{4(a+b)}S,\quad S_2=\frac{3a+b}{4(a+b)}S}$$

Isboti: O‘rta chiziq ajratgan trapetsiyalarning yuzalari

$\begin{cases} S_1 = \dfrac{b+\ell}{2}\cdot\dfrac{h}{2} = \dfrac{a+3b}{8}h \\ S_2 = \dfrac{a+\ell}{2}\cdot\dfrac{h}{2} = \dfrac{3a+b}{8}h \end{cases}$ ga teng. Tarpetsiya yuzasi esa $S = \dfrac{a+b}{2}h$ ga teng. Bundan esa $\dfrac{S_1}{S} = \dfrac{a+3b}{4(a+b)}$ hamda $\dfrac{S_2}{S} = \dfrac{3a+b}{4(a+b)}$ ni olamiz. Natijada $S_1 = \dfrac{a+3b}{4(a+b)}S$ hamda $S_2 = \dfrac{3a+b}{4(a+b)}S$ ifodalar hosil bo‘ladi.



16.31.5-rasm

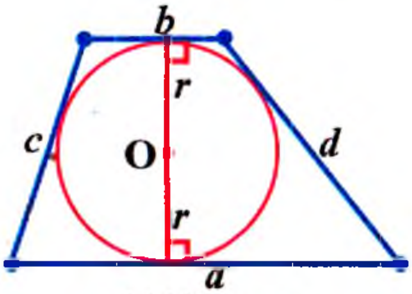
16.32-Mavzu: Trapetsiyaga ichki va tashqi chizilgan aylana.

Trapetsiya tomonlariga urinuvchi aylanaga tapetsiyaga ***ichki chizilgan aylana*** deyiladi. Hamma trapetsiyalarga ham ichki aylana chizib bo‘lmaydi. Buning uchun 15.25-mavzuda o‘rganilgan shart bajarilish kerak. Shundan kelib chiqib shunday deyish mumkin:

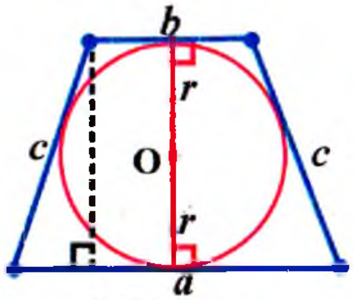
Trapetsiyaga ichki aylana chizish uchun trapetsiya asoslarining yig‘indisi yon tomonlar yig‘indisiga teng bo‘lishi kerak (16.32.1-rasm).

$$\boxed{a+b=c+d}$$

Bu erda: a, b – trapetsiya asoslari, c, d – trapetsiya yon tomonlari.



16.32.1-rasm



16.32.2-rasm

Trapetsiyaga ichki chizilgan aylana trapetsiya balandligining yarmiga teng.

$$\boxed{r=\frac{h}{2}}$$

Trapetsiya balandligini topish formulasi 16.30-mavzuda o‘tilgan edi.

$$\boxed{\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{(a-b)^2+c^2-d^2}{2(a-b)c} \\ \cos\beta = \dfrac{(a-b)^2+d^2-c^2}{2(a-b)d} \end{cases}, \quad \begin{cases} h = c\cdot\sin\alpha = c\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ h = d\cdot\sin\beta = d\cdot\sqrt{1-\cos^2\beta} \end{cases}}$$

Teng yonli trapetsiyaga ichki aylana chizish uchun trapetsiya yon tomoni uning o‘rta chizig‘iga teng bo‘lishi kerak.

$$\boxed{c=\ell=\frac{a+b}{2}}$$

Isboti: Bunda trapetsiya asoslar yig‘indisi yon tomonlar yig‘indisiga teng ekanligidan $a+b=c+c, \to a+b=2c, \to c=\dfrac{a+b}{2}=\ell$ natija kelib chiqadi.

Asosolari a va b bo‘lgan teng yonli trapetsiyaga ichki chizilgan aylana radiusi va balandlik quyidagicha bo‘ladi (16.32.2-rasm):

$$\boxed{h=\sqrt{ab}, \quad r=\frac{1}{2}\sqrt{ab}}$$

Isboti: Bunda yon tomonning katta asosdagi proeksiyasi 15.30-mavzuda o‘tilganidek $x=\dfrac{a-b}{2}$, yon tomon esa $c=\dfrac{a+b}{2}$ ga teng bo‘ladi. Pifagor teoremasiga ko‘ra trapetsiya balandligi

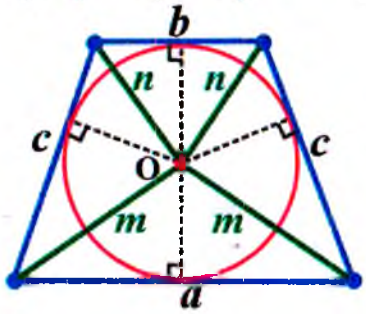
$h^2=c^2-x^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2}{4}=\frac{4ab}{4}=ab, \to h=\sqrt{ab}$ ga teng bo'ladi. Ichki chizilgan radiusi esa $r=\frac{h}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ bo'ladi.

Teng yonli trapetsiyaga ichki chizilgan aylana markazidan trapetsiya uchlarigacha bo'lgan masofalar m va n quyidagicha bo'ladi (15.32.3-a,rasm):

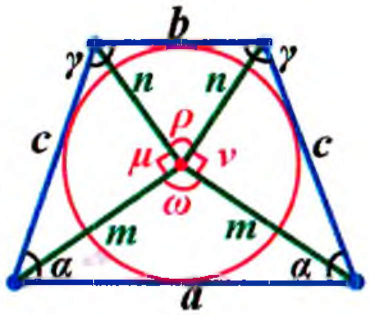
$$\boxed{m=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+ab}, \quad n=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+ab}}$$

Isboti: Bunda Pifagor teoremasidan foydalanamiz. Unga ko'ra

$$\begin{cases} m^2=r^2+\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}ab+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+ab}{4} \\ n^2=r^2+\frac{a^2}{4}=\frac{1}{4}ab+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2+ab}{4} \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} m=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+ab} \\ n=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+ab} \end{cases}$$ bo'ladi.



a)



b)

16.32.3-rasm

Teng yonli trapetsiyaga ichki chizilgan aylana markazidan trapetsiya uchlarigacha bo'lgan masofalar m va n orasidagi burchaklar quyidagicha bo'ladi (15.32.3-b,rasm):

$$\boxed{\mu=\nu=90^0, \quad \cos\rho=\frac{a-b}{a+b}, \quad \cos\omega=\frac{b-a}{b+a}=-\cos\rho, \quad \begin{cases}\omega=\gamma \\ \rho=\alpha\end{cases}}$$

Isboti: Agar $m^2+n^2=c^2$ shart bajarilsa, u holda $\mu=\nu=90^0$ bo'ladi. Tekshirib ko'rilganda $m^2+n^2 * c^2, \to \frac{a^2+ab}{4}+\frac{b^2+ab}{4} * \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Big| \cdot 4, \to a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ haqiqatan ham to'g'ri tenglik hosil bo'ldi.

Demak, $\mu=\nu=90^0$ ekan. n va n orasidagi burchakni kosinuslar teoremasidan foydalanib aniqlasak, $\cos\rho=\frac{n^2+n^2-b^2}{2nn}=\frac{2n^2-b^2}{2n^2}=\frac{\frac{b^2+ab}{2}-b^2}{\frac{b^2+ab}{2}}=\frac{ab-b^2}{ab+b^2}=\frac{a-b}{a+b}$ bo'ladi. Bundan $a>b$ bo'lgani uchun burchakning o'tkir $(\rho<90^0)$ ekanligi kelib chiqadi. m va m orasidagi burchakni kosinuslar teoremasidan foydalanib aniqlasak, $\cos\omega=\frac{m^2+m^2-a^2}{2mm}=\frac{2m^2-b^2}{2m^2}=\frac{\frac{a^2+ab}{2}-a^2}{\frac{a^2+ab}{2}}=\frac{ab-a^2}{ab+a^2}=\frac{b-a}{b+a}=-\cos\rho$ bo'ladi. Bundan $a>b$ bo'lgani uchun burchakning o'tmas $(\rho>90^0)$ ekanligi kelib chiqadi. Endi trpetsiyaning katta asosidagi burchak kosinusini hisoblasak, u $\cos\alpha=\frac{x}{c}=\frac{\frac{a-b}{2}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{a-b}{a+b}=\cos\rho$ bo'ladi. Bundan $\alpha=\rho$ ekanligi kelib chiqadi. SHuningdek $\cos\gamma=-\cos\alpha=\frac{b-a}{b+a}=\cos\omega$ dan $\gamma=\omega$ ekanligi kelib chiqadi.

Teng yonli trapetsiyaga ichki chizilgan aylana markazidan trapetsiya uchlarigacha bo'lgan masofalar m va n ma'lum bo'lsa, bu trapetsiya yon tomoni, o'rta chizig'i, trapetsiyaga ichki chizilgan aylana radiusi hamda trapetsiya yuzasini aniqlash mumkin bo'ladi (16.32.3-a,rasm):

$$\boxed{c=\ell=\sqrt{n^2+m^2}\,,\quad r=\frac{nm}{\sqrt{n^2+m^2}},\quad S=2nm}$$

Isboti: m va n orasidagi burchak $\mu=\nu=90^0$ ekanligidan m va n lar to‘g‘ri burchak katetlari, c yon tomon esa gipotenuza ekanligi kelib chiqadi. Demak gipotenuza $c=\sqrt{n^2+m^2}=\ell$ bo‘ladi. To‘g‘ri burchak uchidan gipotenuzaga tushirilgan balandlik katetlar ko‘paytmasining gipotenuzaga nisbatiga teng bo‘lishini 15.5-mavzudan bilamiz. Shunga ko‘ra $r=\frac{mn}{c}=\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ga teng bo‘ladi. Trapetsiya yuzasi esa

$S=\ell\cdot h=c\cdot 2r=\sqrt{n^2+m^2}\cdot 2\cdot\frac{mn}{\sqrt{m^2+n^2}}=2mn$ ekanligi kelib chiqadi.

Har qanday teng yonli trapetsiyaga tashqi aylana chizish mumkin. Demak, trapetsiyaga tashqi aylana chizish uchun u teng yonli bo‘lishi kerak ekan.

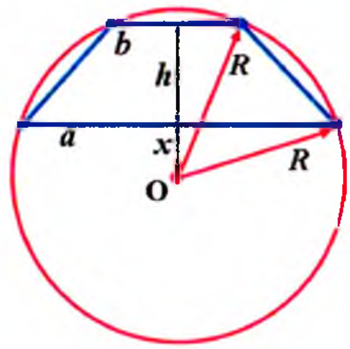
Trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana radiusini aniqlash uchun avvalo aylana markazidan katta asosgacha bo‘lgan x masofani aniqlash lozimdir (16.32.4-rasm). Bu masofa quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{x=\frac{a^2-b^2}{8h}-\frac{h}{2}}$$

Isboti: Pifagor teoremasidan foydalanamiz. Unga ko‘ra

$$\begin{cases} R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2 & (1)\\ R^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2+(h+x)^2 & (2)\end{cases},\ (1)=(2),\ \Rightarrow \frac{a^2}{4}+x^2=\frac{b^2}{4}+h^2+2hx+x^2,\rightarrow$$

$$\frac{a^2-b^2}{4}-h^2=2hx\,\Big|:2h,\ \rightarrow\ x=\frac{a^2-b^2}{8h}-\frac{h}{2}$$ formula kelib chiqadi.



16.31.4-rasm

Trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana radiusi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2-b^2}{8h}-\frac{h}{2}\right)^2}}$$

Isboti: Pifagor teoremasidan foydalanamiz. Unga ko‘ra trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana radiusi $R^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2,\rightarrow\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+x^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a^2-b^2}{8h}-\frac{h}{2}\right)^2}$ bo‘ladi.

Quyidagi shart bajarilganda trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana radiusi katta asosning o‘rtasida yotadi.

$$\boxed{h=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}}$$

Isboti: Buni yuqorida topilgan x masofa uchun $x=0$ shartdan keltirib chiqarish mumkin.

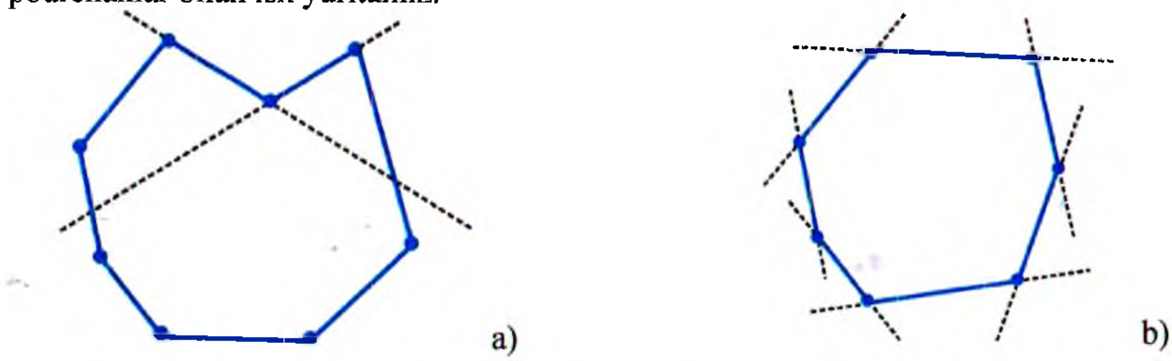
Asos uzunliklari va trapetsiya balandligining qiymatlariga qarab trapetsiyaga tashqi chizilgan aylana markazi asoslardan bir tarafda yoki asoslar orasida bo‘lishi mumkin. Buning uchun quyidagi shartlar bajrilishi kerak bo‘ladi:

$$\boxed{\begin{array}{l} h<\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\quad \textit{da asoslar bir tarafda}\\ h>\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\quad \textit{da asoslar turli tarafda}\end{array}}$$

Isboti: Bularni yuqorida topilgan x masofa uchun $x>0$ yoki $x<0$ shartdan keltirib chiqarish mumkin.

16.33-Mavzu: Ko‘pburchaklar.

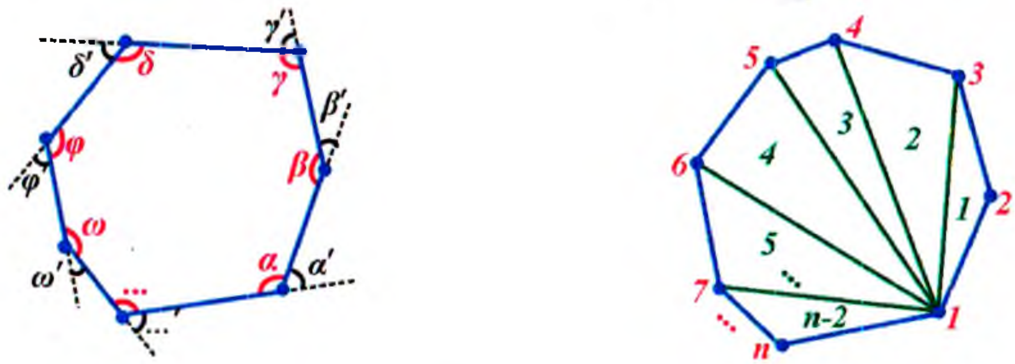
Uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan tekislikdagi nuqtalarni ketma-ket tutashtirishdan hosil bo‘lgan yassi figuraga ***ko‘pburchak*** deyiladi. Agar ko‘pburchak orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq ko‘pburchakning biror tomonini kessa, u holda bunday ko‘pburchakga ***botiq ko‘pburchak*** deyiladi. Botiq ko‘pburchakni aylanib chiqishda ko‘burchak tomonlari turli tomonlarda (o‘ngda ham chapda ham) ko‘rinadi. Boshqacha aytganda botiq ko‘pburchakda 180^0 dan katta ichki burchak ham mavjud bo‘ladi. (16.33.1-a,rasm). Agar ko‘pburchak orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq ko‘pburchakning birorta ham tomonini kesmasa, u holda bunday ko‘pburchakga ***qavariq ko‘pburchak*** deyiladi. Qavariq ko‘pburchakni aylanib chiqishda ko‘burchak tomonlari faqat bir tomonda (yoki o‘ngda yoki chapda) ko‘rinadi. Boshqacha aytganda qavariq ko‘pburchakning barcha ichki burchaklari 180^0 dan kichik bo‘ladi. (16.33.1-b,rasm). Biz faqat qavariq ko‘pburchaklar bilan ish yuritamiz.



16.33.1-rasm

Qavariq ko‘burchakning ichki burchaklari yig‘indisi quyidagi formula orqali aniqlanadi (16.33.2-rasm):

$$\boxed{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varphi+\omega+\rho+...=(n-2)\pi}$$



16.33.2-rasm

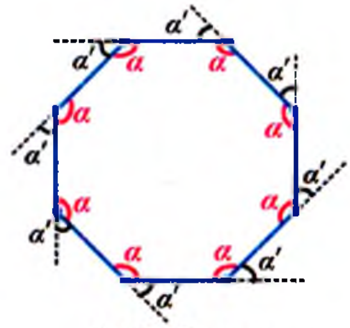
Isboti: Ko‘pburchakning ixtiyoriy bitta uchidan boshqa uchlariga diagonallar o‘tkazib tutashtiramiz. Agar ko‘pburchak tomomlari soni n ga teng bo‘lsa, u holda bitta uchdan o‘tkazilgan diagonallar soni $n-3$ ta bo‘ladi. Bu diagonallar esa berilgan n burchakli qavariq ko‘pburchakni $n-2$ ta uchburchaklarga ajratib tashlaydi. Ko‘pburchakning ichki burchaklari yig‘indisi $n-2$ ta uchburchakning ichki burchaklar yig‘indisiga teng, ya’ni $\sum\alpha_i=(n-2)\pi$ bo‘ladi.

Qavariq ko‘burchakning ichki burchagiga qo‘shni bo‘lgan burchakka shu uchdagi tashqi burchak deyiladi. Ko‘pburchakning har bir uchida ikkitadan tashqi burchak bo‘ladi. Qavariq ko‘pburchakning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklari yig‘indisi har doim 2π ga teng bo‘ladi (16.33.2-a,rasm):

$$\boxed{\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'+\varphi'+\omega'+\rho'+...=2\pi}$$

Isboti: Ko‘pburchakning tomonlari bo‘ylab aylanib chiqishda har bir uchida tashqi burchakka teng burchakka buriladi. Qavariq ko‘pburchak necha burchakli bo‘lmasin barcha uchidagi burilish burchaklari qo‘shilib bir aylanani beradi. Bir aylana esa 360^0 yoki 2π burchak deganidir.

Agar qavariq ko'pburchakning barcha tomonlari uzunliklari teng bo'lsa, bunday ko'pburchakka ***muntazam qavariq ko'pburchak*** deyiladi (16.33.3-rasm). Muntazam ko'pburchakning barcha uchidagi ichki burchaklari ham tashqi burchaklari ham o'zaro teng bo'ladi.



16.33.3-rasm

Muntazam qavariq ko'pburchakning har bir uchidagi ichki burchagi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\boxed{\alpha = \frac{n-2}{n}\pi}$$

Muntazam qavariq ko'pburchakning har bir uchidagi tashqi burchagi quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\boxed{\alpha' = \frac{2\pi}{n}}$$

Quyidagi jadvalda ba'zi muntazam ko'pburchaklar uchun ichki burchaklar yig'indisi, ichki burchak hamda tashqi burchaklarning qiymatlari keltirilgan.

№ n	3	4	5	6	8	9	10	12	15	18	24
$\sum \alpha_i$	180^0	360^0	540^0	720^0	1080^0	1260^0	1440^0	1800^0	2340^0	2880^0	3960^0
α	60^0	90^0	108^0	120^0	135^0	140^0	144^0	150^0	156^0	160^0	165^0
α'	120^0	90^0	72^0	60^0	45^0	40^0	36^0	30^0	24^0	20^0	15^0

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, muntazam ko'pburchak tomonlar soni ko'payib borgan sari $(n \to \infty)$ ichki burchak 180^0 ga, tashqi burchak esa 0^0 ga intilib borar ekan.

Uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan tekislikdan olingan ixtiyoriy n ta nuqtani tutashtiruvchi kesmalar soni k quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{k = \frac{n(n-1)}{2}}$$

<u>**Isboti:**</u> Bunda 1-nuqtani qolgan nuqtalar bilan tutashtirilganda $n-1$ ta, 2-nuqtani qolgan nuqtalar bilan tutashtirilganda $n-2$ ta, 3-nuqtani qolgan nuqtalar bilan tutashtirilganda $n-3$ ta va hokoza kesmalar hosil bo'ladi. Bundagi kesmalar soni 1 dan $n-1$ gacha bo'lgan arifmetik progressiyaning hadlari yig'indisidir, ya'ni $S_n = \frac{a_1+a_n}{2}n$ dan foydalanamiz. Bu erda $a_1 = 0, a_n = n-1$, $d = 1$, $n = n-1$, $S_n = k$ ekanini e'tiborga olsak, $k = \frac{0+n-1}{2}n = \frac{n(n-1)}{2}$ natija kelib chiqadi.

n burchakli qavariq ko'pburchakning diagonallar soni k quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{k = \frac{n(n-3)}{2}}$$

<u>**Isboti:**</u> Bunda n ta nuqtani tutashtiruvchi kesmalar soni $\frac{n(n-1)}{2}$ dan n ta tomonni ayirib tashlansa, diagonallar soni kelib chiqadi, ya'ni $k = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$ bo'ladi.

n burchakli prizmaning diagonallar soni k quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{k = n(n-3)}$$

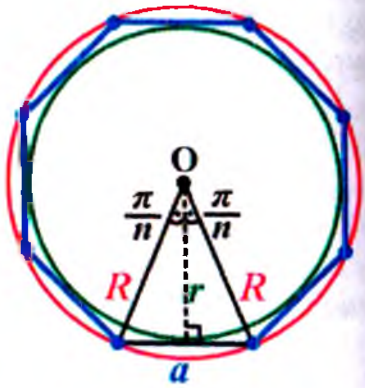
<u>**Isboti:**</u> Bunda n burchakli prizmaning diagonallar soni n burchakli ko'pburchak diagonallar sonidan 2 marta katta bo'ladi, ya'ni $k = n(n-3)$ bo'ladi. Prizma mavzusi stereometriya bobida to'la yoritiladi.

16.34-Mavzu: Ko'pburchak va aylana.

Ko'pburchak tomonlariga urinuvchi aylanaga ko'pburchakka ***ichki chizilgan aylana*** deyiladi. Ko'pburchak uchlariga urinuvchi aylanaga ko'pburchakka ***tashqi chizilgan aylana*** deyiladi.

Muntazam ko'purakka ham ichki ham tashqi aylana chizish mumkindir. Tomoni a bo'lgan muntazam ko'pburchakka ichki chizilgan aylana radiusi r va tashqi chizilgan aylana radiusi R quyidagicha bo'ladi (16.34.1-rasm).

$$r=\frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}},\quad R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$$



16.34.1-rasm

Isboti: Bunda ko‘pburchak markazini uning tomoni bilan tutashtirilganda yon tomonlari R ga, asosi a ga teng bo‘lgan teng yonli uchburchak hosil bo‘ladi. Bu teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi $\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘lib, uchidan asosiga tushirilgan balandlik bu burchakni $\frac{\pi}{n}$ ga teng bo‘lgan ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchaklarga ajratadi. Bu balandlik ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana radiusidir, ya’ni $h_a=r$. To‘g‘ri burchakli uchburchak tangensi va sinusidan foydalanib so‘ralgan kattaliklarni osongina aniqlash mumkin. Unga ko‘ra so‘ralgan

kattaliklar $\begin{cases} tg\frac{\pi}{n}=\frac{a/2}{r}=\frac{a}{2r} \\ \sin\frac{\pi}{n}=\frac{a/2}{R}=\frac{a}{2R} \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} r=\frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}} \\ R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} \end{cases}$ bo‘ladi.

Muntazam ko‘pburchak tomonini ko‘pburchakka ichki va tashqi chizilgan aylana radiuslari orqali ifodalash mumkin.

$$a=2r\,tg\frac{\pi}{n},\quad a=2R\sin\frac{\pi}{n}$$

Muntazam ko‘pburchakga ichki va tashqi chizilgan aylana radiuslari orasidagi bog‘lanish quyidagicha bo‘ladi.

$$r=R\cos\frac{\pi}{n}$$

Muntazam qavariq ko‘pburchak yuzini R,r,a kattaliklar orqali ifadalash quyidagicha bo‘ladi:

$$S_R=\frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot R^2,\quad S_r=n\cdot tg\frac{\pi}{n}\cdot r^2,\quad S_a=\frac{n}{4}\cdot ctg\frac{\pi}{n}\cdot a^2$$

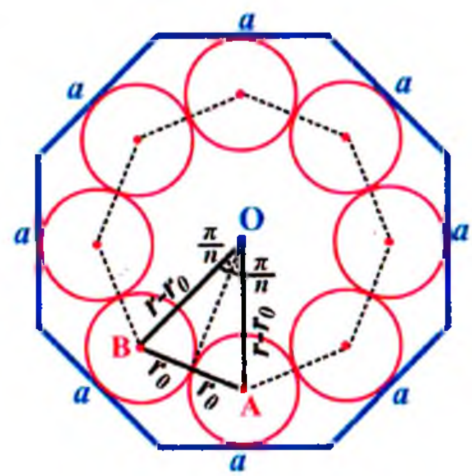
Isboti: 15.34.1-rasmdagi teng yonli uchburchak yuzasi ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko‘ra $S_0=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot R^2$ ga teng bo‘ladi. Ko‘pburchak yuzasi bundan n marta katta, ya’ni $S=nS_0=\frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot R^2$ bo‘ladi. Ko‘pburchak yuzini r orqali ifadalash uchun $R=r/\cos\frac{\pi}{n}$ formuladan foydalanib $S=\frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\left(\frac{r}{\cos\frac{\pi}{n}}\right)^2=\frac{n}{2}\cdot2\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{n}}=S_r=n\cdot tg\frac{\pi}{n}\cdot r^2$ formulani keltirib chiqaramiz. Bunga esa $r=\frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}}$ formulani qo‘yish natijasida $S_a=n\cdot tg\frac{\pi}{n}\cdot\left(\frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}}\right)^2=\frac{n}{4}\cdot ctg\frac{\pi}{n}\cdot a^2$ formulani olamiz.

Quyidagi jadvalda masalalar esishda ko‘p duch keladigan ba’zi muntazam ko‘pburchaklar uchun R,r,S_R,S_r,S_a kattaliklarning qiymatlari keltirilgan.

n	№	R	r	S_R	S_r	S_a
3		$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\frac{a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$	$3\sqrt{3}r^2$	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$
4		$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$\frac{a}{2}$	$2R^2$	$4r^2$	a^2
5		a	$\frac{\sqrt{3}}{2}a$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$	$2\sqrt{3}r^2$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

Tomoni a bo‘lgan muntazam n burchakli ko‘pburchak tomonlari o‘rtalariga va o‘zaro urinuvchi n ta ichki chizilgan aylana radiusini hisoblab topaylik. U quyidagi formula yordamida aniqlanadi (15.34.2-rasm):

$$\boxed{r_0 = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\cdot r = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a}$$



15.34.2-rasm

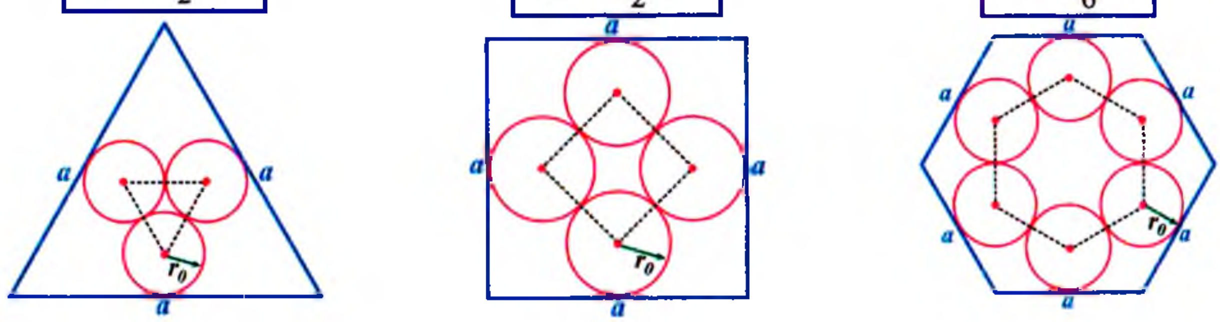
Isboti: Ichki chizilgan aylanalar markazlari tutashtirib chiqilsa, yana berilgan ko‘pburchakka o‘xshash kichikroq ko‘pburchak hosil bo‘ladi. Bu ko‘pburchak tomoni ichki chizilgan aylana diametriga teng bo‘lishi rasmdan ham ko‘rinib turibdi, ya’ni $AB = 2r_0$. Berilgan ko‘pburchak markazini ikkita urinuvchi qo‘shni aylanalar markazlari bilan tutashtirilganda teng yonli uchburchak hosil bo‘ladi. Bu teng yonli aylana asosi $AB = 2r_0$ ga, yon tomoni esa $OA = OB = r - r_0$ ga teng bo‘ladi. Bu erda r_0 – topishimiz kerak bo‘lgan ichki chizilgan aylana radiusi, r – berilgan tomoni a bo‘lgan muntazam n burchakli muntazam ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana radiusi bo‘lib, uning qiymati $r = \frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}}$ ga teng bo‘ladi. Bu teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi $\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘lib, uchidan asosiga tushirilgan balandlik bu burchakni $\frac{\pi}{n}$ ga teng bo‘lgan ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchaklarga ajratadi. Bu to‘g‘ri burchakli uchburchak sinusidan foydalanib so‘ralgan kattalikni osongina aniqlash mumkin. Unga ko‘ra so‘ralgan kattalik

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{r_0}{r-r_0}, \rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\cdot r - \sin\frac{\pi}{n}\cdot r_0 = r_0, \rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\cdot r = \left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)r_0, \rightarrow r_0 = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\cdot r = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xususiy holda ba’zi ko‘pburchaklar uchun radiuslar quyida keltirilgan (15.34.3-rasm):

$$\boxed{r_0 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}a} \qquad \boxed{r_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}a} \qquad \boxed{r_0 = \frac{\sqrt{3}}{6}a}$$

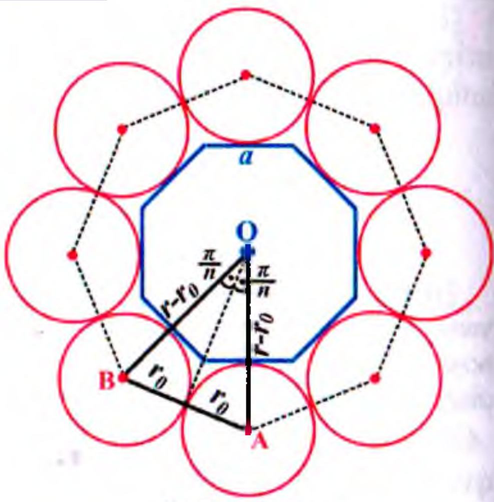


16.34.3-rasm

Tomoni a bo‘lgan muntazam n burchakli ko‘pburchak tomonlari o‘rtalariga va o‘zaro urinuvchi n ta tashqi chizilgan aylana radiusini hisoblab topaylik. U quyidagi formula yordamida aniqlanadi (16.34.4-rasm):

$$\boxed{r_0 = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}\cdot r = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a}$$

Isboti: Ichki chizilgan aylanalar markazlari tutashtirib chiqilsa, yana berilgan ko‘pburchakka o‘xshash kattaroq ko‘pburchak hosil bo‘ladi. Bu ko‘pburchak tomoni ichki chizilgan aylana diametriga teng bo‘lishi rasmdan ham ko‘rinib turibdi, ya’ni $AB = 2r_0$. Berilgan ko‘pburchak markazini ikkita urinuvchi qo‘shni aylanalar markazlari bilan tutashtirilganda teng yonli uchburchak hosil bo‘ladi. Bu teng yonli aylana asosi $AB = 2r_0$ ga, yon tomoni esa $OA = OB = r + r_0$ ga teng bo‘ladi. Bu erda r_0 – topishimiz kerak bo‘lgan ichki chizilgan aylana radiusi, r – berilgan tomoni a bo‘lgan muntazam n burchakli muntazam ko‘pburchakka ichki chizilgan aylana radiusi bo‘lib, uning qiymati $r = \dfrac{a}{2tg\frac{\pi}{n}}$ ga teng bo‘ladi. Bu teng yonli



16.34.4-rasm

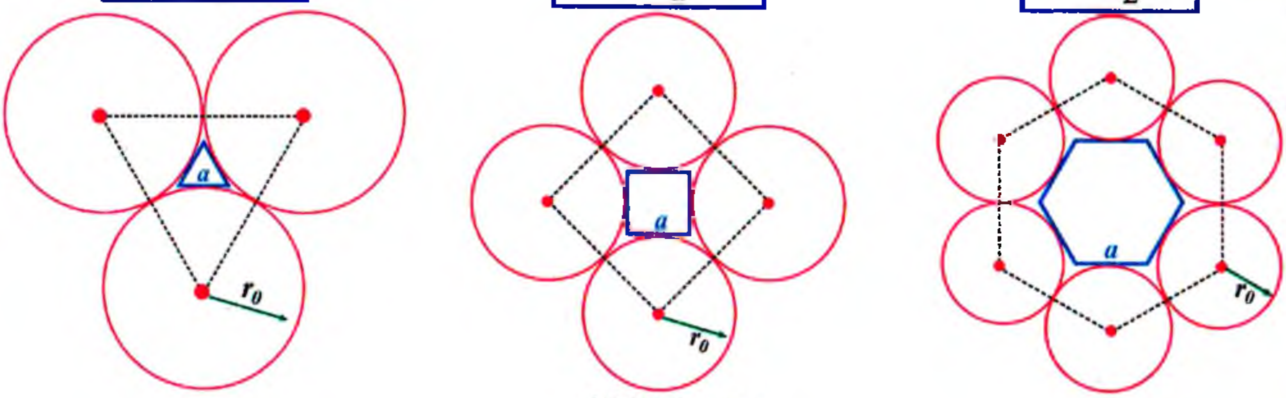
uchburchakning uchidagi burchagi $\dfrac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘lib, uchidan asosiga tushirilgan balandlik bu burchakni $\dfrac{\pi}{n}$ ga teng bo‘lgan ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchaklarga ajratadi. Bu to‘g‘ri burchakli uchburchak sinusidan foydalanib so‘ralgan kattalikni osongina aniqlash mumkin. Unga ko‘ra so‘ralgan kattalik

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{r_0}{r+r_0},\ \rightarrow\ \sin\frac{\pi}{n}\cdot r + \sin\frac{\pi}{n}\cdot r_0 = r_0,\ \rightarrow\ \sin\frac{\pi}{n}\cdot r = \left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)r_0,\ \rightarrow\ r_0 = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}\cdot r = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{2\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xususiy holda ba’zi ko‘pburchaklar uchun radiuslar quyida keltirilgan (16.34.5-rasm):

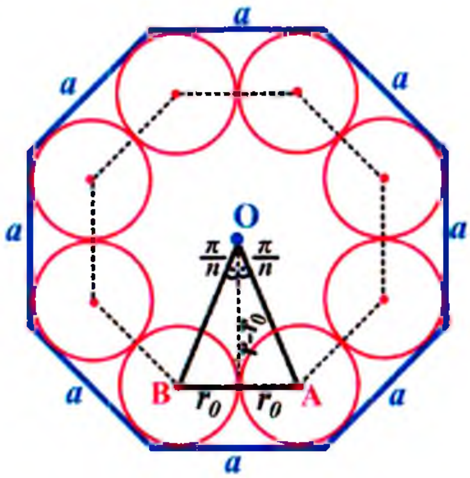
$$\boxed{r_0 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}a} \qquad \boxed{r_0 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}a} \qquad \boxed{r_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$



16.34.5-rasm

Tomoni a bo‘lgan muntazam n burchakli ko‘pburchak burchak tomonlariga va o‘zaro urinuvchi n ta ichki chizilgan aylana radiusini hisoblab topaylik. U quyidagi formula yordamida aniqlanadi (16.34.6-rasm):

$$r_0=\frac{tg\frac{\pi}{n}}{1+tg\frac{\pi}{n}}\cdot r=\frac{1}{2\left(1+tg\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a$$



16.34.6-rasm

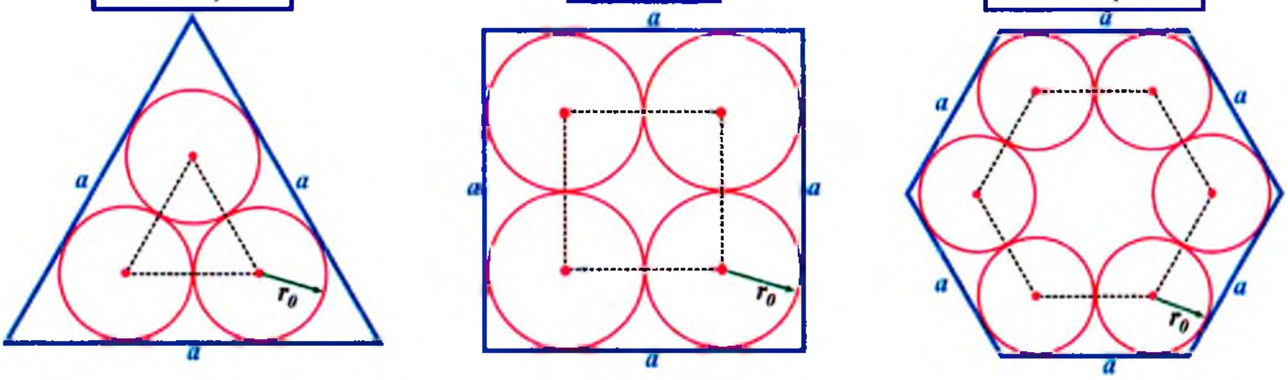
Isboti: Ichki chizilgan aylanalar markazlari tutashtirib chiqilsa, yana berilgan ko'pburchakka o'xshash kichikroq ko'pburchak hosil bo'ladi. Bu ko'pburchak tomoni ichki chizilgan aylana diametriga teng bo'lishi rasmdan ham ko'rinib turibdi, ya'ni $AB=2r_0$. Berilgan ko'pburchak markazini ikkita urinuvchi qo'shni aylanalar markazlari bilan tutashtirilganda teng yonli uchburchak hosil bo'ladi. Bu teng yonli aylana asosi $AB=2r_0$ ga, yon tomoni esa $OA=OB$ ga teng bo'ladi. Bu erda r_0 – topishimiz kerak bo'lgan ichki chizilgan aylana radiusi, r – berilgan tomoni a bo'lgan muntazam n burchakli muntazam ko'pburchakka ichki chizilgan aylana radiusi bo'lib, uning qiymati $R=\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ ga teng bo'ladi. Bu teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi $\frac{2\pi}{n}$ ga teng bo'lib, uchidan asosiga tushirilgan balandlik bu burchakni $\frac{\pi}{n}$ ga teng bo'lgan ikkita to'g'ri burchakli uchburchaklarga ajratadi. Bu to'g'ri burchakli uchburchak tangensidan foydalanib so'ralgan kattalikni osongina aniqlash mumkin. Unga ko'ra so'ralgan kattalik

$$tg\frac{\pi}{n}=\frac{r_0}{r-r_0},\ \to\ tg\frac{\pi}{n}\cdot r-tg\frac{\pi}{n}\cdot r_0=r_0,\ \to\ tg\frac{\pi}{n}\cdot R=\left(1+tg\frac{\pi}{n}\right)r_0,\ \to$$

$$\to\ r_0=\frac{tg\frac{\pi}{n}}{1+tg\frac{\pi}{n}}\cdot r=\frac{tg\frac{\pi}{n}}{1+tg\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{a}{2tg\frac{\pi}{n}}=\frac{1}{2\left(1+tg\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a$$ ekanligi kelib chiqadi.

Xususiy holda ba'zi ko'pburchaklar uchun radiuslar quyida keltirilgan (15.34.7-rasm):

$$r_0=\frac{\sqrt{3}-1}{4}a \qquad r_0=\frac{1}{4}a \qquad r_0=\frac{3-\sqrt{3}}{4}a$$

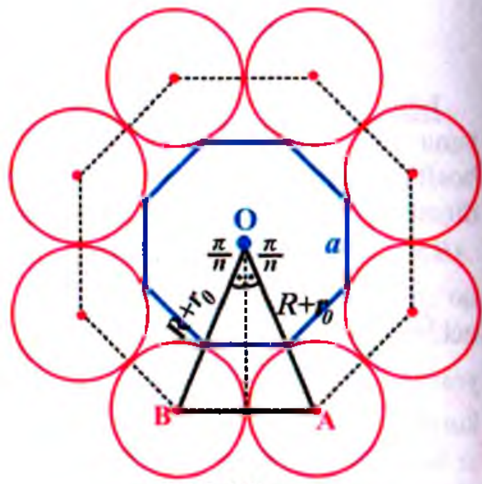


16.34.7-rasm

Tomoni a bo'lgan muntazam n burchakli ko'pburchak burchaklariga va o'zaro urinuvchi n ta tashqi chizilgan aylana radiusini hisoblab topaylik. U quyidagi formula yordamida aniqlanadi (16.34.6-rasm):

$$r_0=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}\cdot R=\frac{1}{2\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a$$

Isboti: Ichki chizilgan aylanalar markazlari tutashtirib chiqilsa, yana berilgan ko‘pburchakka o‘xshash kichikroq ko‘pburchak hosil bo‘ladi. Bu ko‘pburchak tomoni ichki chizilgan aylana diametriga teng bo‘lishi rasmdan ham ko‘rinib turibdi, ya’ni $AB = 2r_0$. Berilgan ko‘pburchak markazini ikkita urinuvchi qo‘shni aylanalar markazlari bilan tutashtirilganda teng yonli uchburchak hosil bo‘ladi. Bu teng yonli aylana asosi $AB = 2r_0$ ga, yon tomoni esa $OA = OB = R + r_0$ ga teng bo‘ladi. Bu erda r_0 – topishimiz kerak bo‘lgan ichki chizilgan aylana radiusi, R – berilgan tomoni a bo‘lgan muntazam n burchakli muntazam ko‘pburchakka tashqi chizilgan aylana radiusi bo‘lib, uning qiymati $R = \dfrac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}}$ ga teng bo‘ladi. Bu teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi $\dfrac{2\pi}{n}$ ga teng bo‘lib, uchidan



16.34.8-rasm

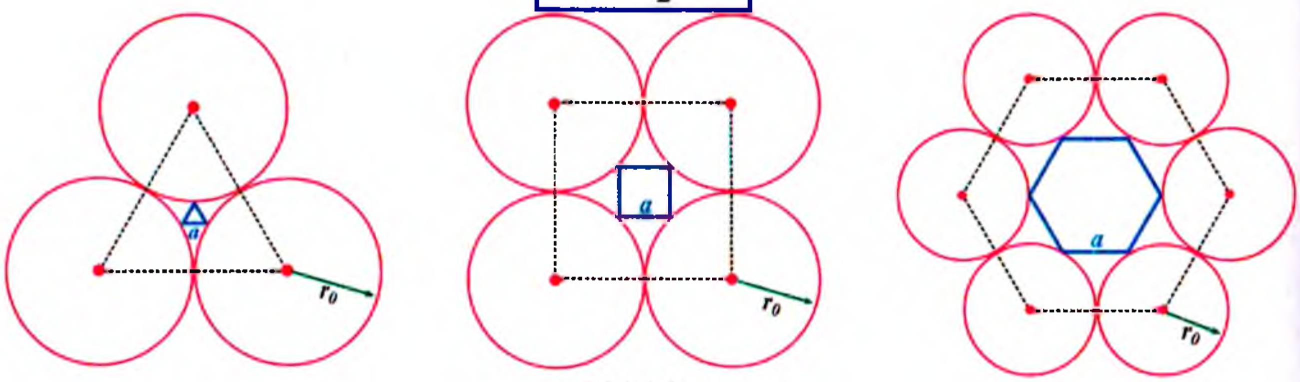
asosiga tushirilgan balandlik bu burchakni $\dfrac{\pi}{n}$ ga teng bo‘lgan ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchaklarga ajratadi. Bu to‘g‘ri burchakli uchburchak sinusidan foydalanib so‘ralgan kattalikni osongina aniqlash mumkin. Unga ko‘ra so‘ralgan kattalik

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{r_0}{R + r_0}, \rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\cdot R + \sin\frac{\pi}{n}\cdot r_0 = r_0, \rightarrow \sin\frac{\pi}{n}\cdot R = \left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\right) r_0, \rightarrow$$

$$\rightarrow r_0 = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}}\cdot R = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{a}{2\sin\frac{\pi}{n}} = \frac{1}{2\left(1 - \sin\frac{\pi}{n}\right)}\cdot a$$ ekanligi kelib chiqadi.

Xususiy holda ba’zi ko‘pburchaklar uchun radiuslar quyida keltirilgan (15.34.9-rasm):

$\boxed{r_0 = \left(2 + \sqrt{3}\right)a}$ $\boxed{r_0 = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{2}a}$ $\boxed{r_0 = a}$

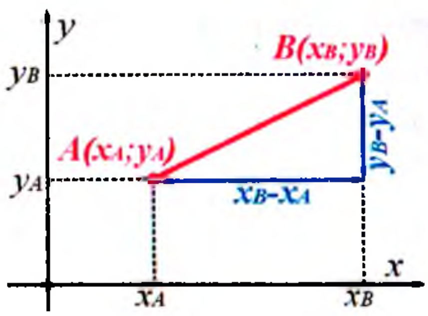


16.34.9-rasm

16.35-Mavzu: Koordinatalar sistemasi.

Tekislikda berilgan $A(x_A; y_A)$ va $B(x_B; y_B)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagicha bo‘ladi (16.35.1-rasm):

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$



Isboti: Pifagor teoremasidan foydalanib aniqlaymiz. Unga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchak katetlari vazifasini $a = y_B - y_A$ va $b = x_B - x_A$ kesmalar gipotenuza vazifasini esa $c = AB$ o‘taydi.

16.35.1-rasm

Fazoda berilgan $A(x_A;y_A;z_A)$ va $B(x_B;y_B;z_B)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}}$$

Tekislikda uchlari $A(x_A;y_A)$ va $B(x_B;y_B)$ nuqtalar bilan berilgan AB kesmani $\frac{AC}{CB}=\lambda$ nisbatda bo‘luvchi $C(x_C;y_C)$ nuqtaning koordinatalari quyidagi formula yordamida aniqlanadi (16.35.2-rasm):

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}}$$

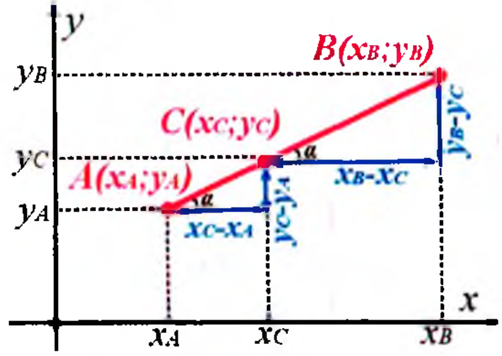
Isboti: Burchak kosinusidan foydalanamiz. Unga ko‘ra

$$\begin{cases}\cos\alpha=\dfrac{x_C-x_A}{AC}\\ \cos\alpha=\dfrac{x_B-x_C}{BC}\end{cases},\Rightarrow\ \frac{x_C-x_A}{AC}=\frac{x_B-x_C}{BC},\rightarrow x_C-x_A=(x_B-x_C)\cdot\frac{AC}{BC},\rightarrow$$

$$x_C-x_A=(x_B-x_C)\cdot\lambda,\ \rightarrow\ x_C-x_A=\lambda x_B-\lambda x_C,\rightarrow\ (1+\lambda)x_C=x_A+\lambda x_B,\rightarrow$$

$x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}$ bo‘ladi. Burchak kosinusidan foydalansak,

$$\begin{cases}\sin\alpha=\dfrac{y_C-y_A}{AC}\\ \sin\alpha=\dfrac{y_B-y_C}{BC}\end{cases},\Rightarrow\ \frac{y_C-y_A}{AC}=\frac{y_B-y_C}{BC},\rightarrow y_C-y_A=(y_B-y_C)\cdot\frac{AC}{BC},\rightarrow$$



16.35.2-rasm

$y_C-y_A=(y_B-y_C)\cdot\lambda,\ \rightarrow\ y_C-y_A=\lambda y_B-\lambda y_C,\rightarrow\ (1+\lambda)y_C=y_A+\lambda y_B,\ \rightarrow y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}$ bo‘ladi.

Xususan, $\lambda=1$ bo‘lganda $C(x_C;y_C)$ nuqta AB kesmaning o‘rtasi bo‘ladi va u quyidagicha:

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}}$$

Fazoda uchlari $A(x_A;y_A;z_A)$ va $B(x_B;y_B;z_B)$ nuqtalar bilan berilgan AB kesmani $\frac{AC}{CB}=\lambda$ nisbatda bo‘luvchi $C(x_C;y_C;z_C)$ nuqtaning koordinatalari quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda},\quad y_C=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda},\quad z_C=\frac{z_A+\lambda z_B}{1+\lambda}}$$

Xususan, $\lambda=1$ bo‘lganda $C(x_C;y_C;z_C)$ nuqta AB kesmaning o‘rtasi bo‘ladi va u quyidagicha:

$$\boxed{x_C=\frac{x_A+x_B}{2},\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2},\quad z_C=\frac{z_A+z_B}{2}}$$

Ba’zan masalalar Yechishda fazoda ixtiyoriy berilgan nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtaning koordinatalari so‘raladi. Fazoda nuqtalar 1) koordinata boshiga nisbatan, 2) koordinata o‘qlariga nisbatan, 3) koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik bo‘lishi mumkin.

Fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x;y;z)$ nuqtaga koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqta koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{A'(-x;-y;-z)}$$

Fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x;y;z)$ nuqtaga koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtalar koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{\begin{cases}A'(x;-y;-z)\ -\ Ox\ \textit{o'qga nisbat.}\\ A'(-x;y;-z)\ -\ Oy\ \textit{o'qga nisbat.}\\ A'(-x;-y;z)\ -\ Oz\ \textit{o'qga nisbat.}\end{cases}}$$

Fazoda berilgan ixtiyoriy $A(x;y;z)$ nuqtaga koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik bo‘lgan nuqtalar koordinatalari quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} A'(x;y;-z) \ - \ xy \ \ tek.ga \ nisbat. \\ A'(-x;y;z) \ - \ yz \ \ tek.ga \ nisbat. \\ A'(x;-y;z) \ - \ xz \ \ tek.ga \ nisbat. \end{cases}$$

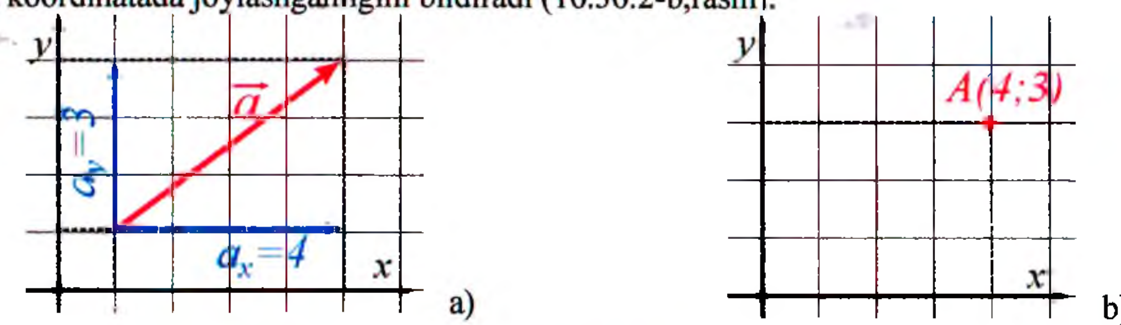
VEKTORLAR

16.36-Mavzu: Vektorlar va uning ustida amallar.

Yo'nalishga ega bo'lgan kesma ***vektor*** deyiladi. Vektorlarni lotincha kichkina harflar bilan yoki boshi va oxiridan iborat katta harflar bilan ham belgilanishi mumkin (16.36.1-rasm).

16.36.1-rasm

Vektorning biror o'qdagi proeksiyasi uning shu o'qdagi ***koordinatasi*** deyiladi. Nuqtaning koordinatasidan farqli ravishda vektorning koordinatasi uzunlikka ega. Masalan, $\vec{a}(4;3)$ vektorning Ox o'qdagi proeksiyasi 4 birlik, Oy o'qdagi proeksiyasi 3 birlik uzunlikka ega (15.36.2-a,rasm). Agar $A(4;3)$ nuqta bo'lsa, bu nuqta Ox o'q bo'yicha 4 birlik, Oy o'q bo'yicha 3 birlik koordinatada joylashganligini bildiradi (16.36.2-b,rasm).



16.36.2-rasm

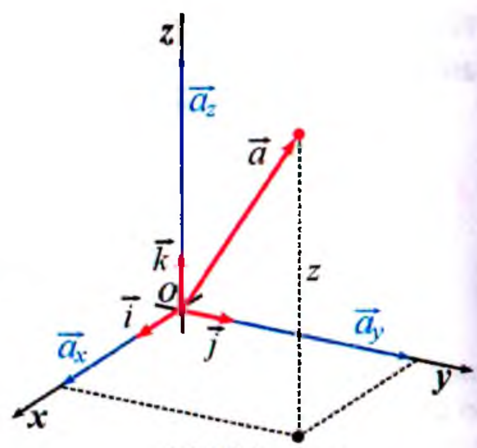
Nuqtani $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ ko'rinishda yozilsa, vektorni esa $\vec{a}(a_x;\ a_y;\ a_z)$ ko'rinishda yoziladi. Koordinata o'qi bo'ylab yo'nalgan va 1 birlik uzunlikka ega bo'lgan vektorga ***bazis vektor*** yoki ***ort*** deyiladi.

$$\boxed{|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1, \quad \vec{i}\perp\vec{j}\perp\vec{k}}$$

$\vec{a}(a_x;\ a_y;\ a_z)$ vektorni ortlar orqali quyidagi ko'rinishda ham ifodalash mumkin (15.36.3-rasm):

$$\boxed{\vec{a}(a_x;\ a_y;\ a_z)=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}=\vec{a}_x+\vec{a}_y+\vec{a}_z}$$

Bu erda: $a_x, a_x, a_x - \vec{a}$ vektorning koordinatalari,



16.36.3-rasm

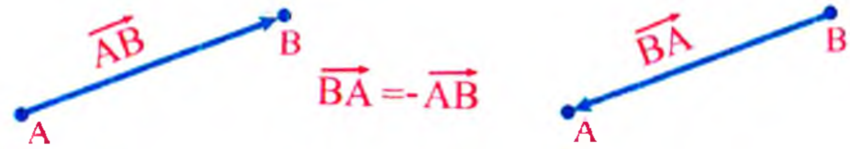
$\vec{a}_x=a_x\cdot\vec{i},\ \vec{a}_y=a_y\cdot\vec{j},\ \vec{a}_z=a_z\cdot\vec{k}$ – o'qlar bo'ylab yo'nalgan proeksiya vektorlar.

Agar vektorning boshi $A(x_A;y_A;z_A)$ va oxirgi $B(x_B;y_B;z_B)$ nuqtalari koordinatalari ma'lum bo'lsa, u holda A dan B ga yo'nalgan vektor quyidagicha yoziladi:

$$\boxed{\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A)=(x_B-x_A)\cdot\vec{i}+(y_B-y_A)\cdot\vec{j}+(z_B-z_A)\cdot\vec{k}}$$

$\overrightarrow{AB}$ vektor hamda $\overrightarrow{BA}$ vektorlar o'zaro teskari vektorlardir. Ular orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi (16.36.4-rasm):

$$\boxed{\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}}$$



16.36.4-rasm

B dan A ga yo'nalgan $\overrightarrow{BA}$ vektor quyidagicha yoziladi:

$$\boxed{\overrightarrow{BA}(x_A - x_B;\ y_A - y_B;\ z_A - z_B) = (x_A - x_B)\cdot\vec{i} + (y_A - y_B)\cdot\vec{j} + (z_A - z_B)\cdot\vec{k}}$$

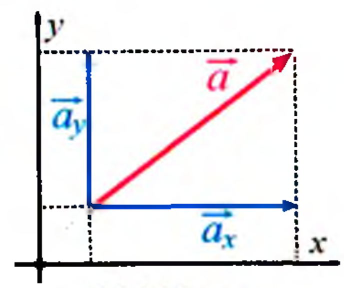
Vektorning moduli deb vektor kesmasining uzunligiga aytiladi va $|\vec{a}|$ yoki $|\overrightarrow{AB}|$ ko'rinishda belgilanadi. Agar boshi $A(x_A;y_A;z_A)$ va oxirgi $B(x_B;y_B;z_B)$ nuqtalari ma'lum bo'lgan $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektor berilgan bo'lsa, bu vektorning moduli quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad yoki \quad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

Bu erda: $a_x = x_B - x_A, a_y = y_B - y_A, a_z = z_B - z_A -$ kattaliklar $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalaridir.

Tekislikdagi vektor modulining koordinatalarga bog'lanishi quyidagicha bo'ladi (16.36.5-rasm):

$$\boxed{|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2}$$



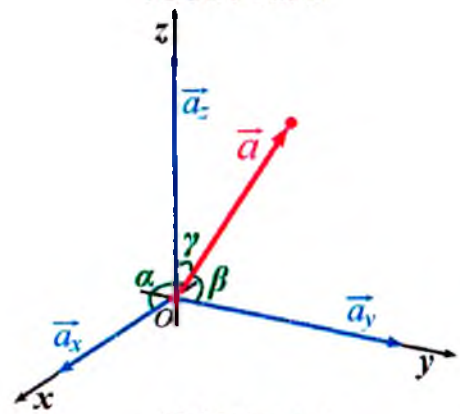
16.36.5-rasm

Fazodagi vektor modulining koordinatalarga bog'lanishi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{|\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Vektor va uning koordinatasi orasidagi burchak kosinusiga vektorning ***yo'naltiruvchi kosinusi*** deyiladi. Ixtiyoriy $\vec{a}(a_x;\ a_y;\ a_z)$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari quyidagicha bo'ladi (16.36.6-rasm):

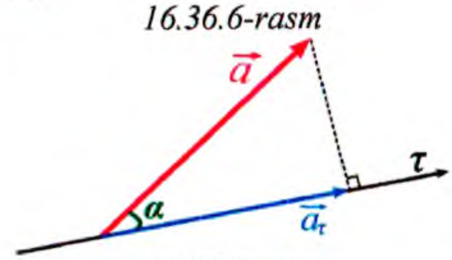
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}}$$



16.36.6-rasm

Vektorning ixtiyoriy τ o'qqa proeksiyasi bu vektorning shu o'q bilan hosil qilgan burchak kosinusi orqali bog'lanadi (16.36.7-rasm).

$$\boxed{a_\tau = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi}$$



16.36.7-rasm

Ikki vektor orasidagi burchak deb ularning boshlari bir nuqtaga parallel ko'chirib keltirib qo'yilganda (vektorlarning ta'sir chiziqlari kesishganda) hosil qilgan burchakka aytiladi (16.36.8-rasm).

16.36.8-*rasm*

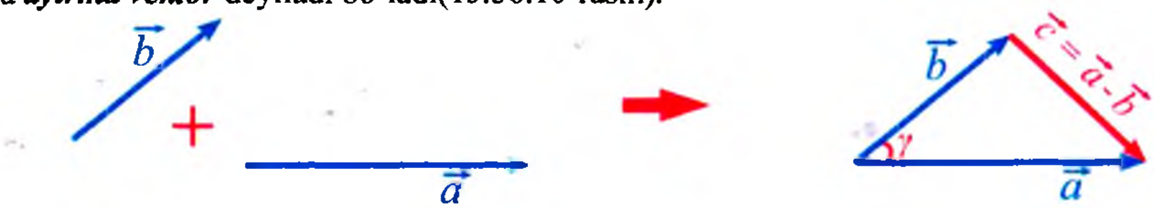
Bir vektorga ikkinchi vektorni qo'shish uchun birinchi vektorning oxiriga ikkinchi vektorning boshi parallel ko'chirib keltirib qo'yiladi va birinchi vektorning boshidan ikkinchi vektorning oxiriga yo'nalgan kesma ***yig'indi vektor*** deyiladi (16.36.9-rasm).

16.36.9-rasm

Yig'indi vektor va uning moduli quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}\,,\qquad |\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma}$$

Bir vektordan ikkinchi vektorni ayirish uchun ikkita vektorning ham boshlari bir nuqtaga parallel ko'chirib keltiriladi va ikkinchi vektorning oxiridan birinchi vektorning oxiriga yo'nalgan kesma ***ayirma vektor*** deyiladi bo'ladi(15.36.10-rasm).

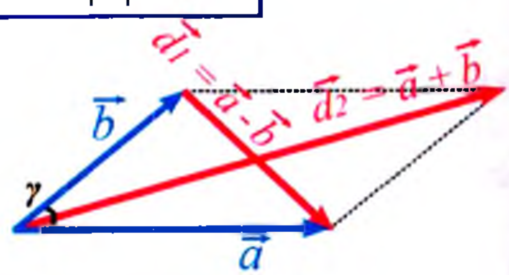


16.36.10-rasm

Ayirma vektor va uning moduli quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}\,,\qquad |\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma}$$

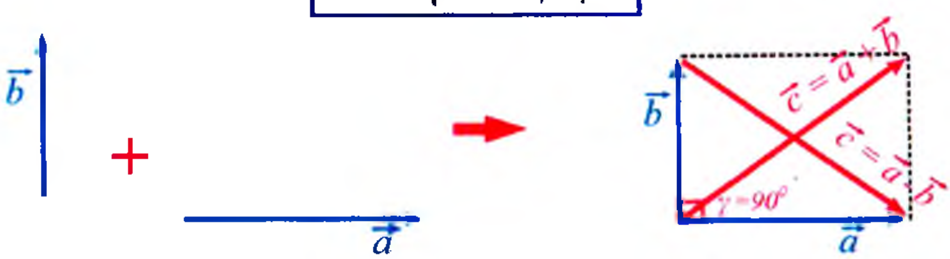
Vektorlarni yuqoridagi kabi qo'shish yoki ayirish usuli vektorlarni qo'shish yoki ayirishning ***uchburchak usuli*** deyiladi. Bundan tashqari vektorlarni qo'shish yoki ayirishning ***parallelogramm usuli*** ham mavjud. Bu usulda vektorlar parallelogramning qo'shni tomonlari, yig'indi va ayirma vektorlar esa bu parallelogramning ikkita diagonali vazifasini o'taydi (16.36.11-rasm).



16.36.11-rasm

Agar vektorlar orasidagi burchak $\gamma=90^0$ bo'lsa, yig'indi vektor va ayirma vektorlarning modullari (uzunliklari) o'zaro teng va quyidagicha bo'ladi (16.36.11-rasm):

$$|\vec{c}|=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}$$



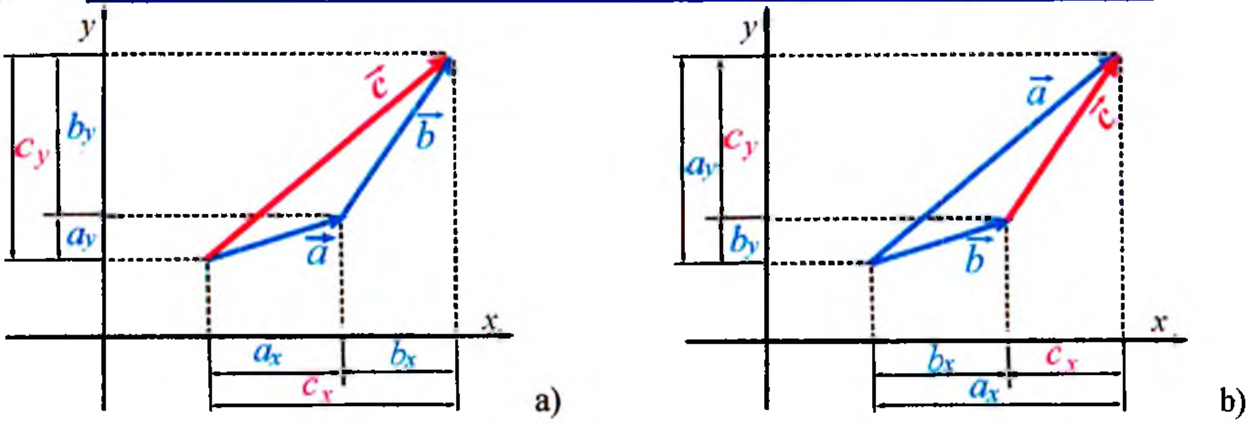
16.36.12-rasm

Ikki vektorni qo'shganda koordinatalari ham mos holda qo'shiladi (16.36.12-a,rasm).

$$\text{Agar}\quad \vec{a}(a_x;a_y)+\vec{b}(b_x;b_y)=\vec{c}(c_x;c_y)\quad \text{bo'lsa,}\quad \begin{cases} c_x=a_x+b_x \\ c_y=a_y+b_y \end{cases}\quad \text{bo'ladi}$$

Ikki vektorni ayirganda koordinatalari ham mos holda ayiriladi (16.36.12-b,rasm).

$$Agar\quad \vec{a}(a_x;a_y)-\vec{b}(b_x;b_y)=\vec{c}(c_x;c_y)\quad bo'lsa,\quad \begin{cases} c_x = a_x - b_x \\ c_y = a_y - b_y \end{cases}\quad bo'ladi$$

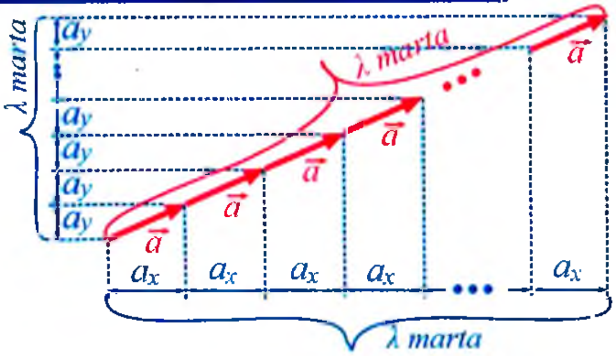


16.36.13-rasm

$\vec{a}$ vektorni λ songa ko‘paytirganda $\vec{b}$ vektor hosil bo‘lsa, $\vec{b}$ vektorning koordinatalari $\vec{a}$ vektorning koordinatalaridan λ marta katta bo‘ladi (15.36.13-rasm).

$$Agar\quad \lambda\cdot\vec{a}(a_x;a_y;a_z)=\vec{b}(b_x;b_y;a_z)\quad bo'lsa,\quad \begin{cases} b_x = \lambda\cdot a_x \\ b_y = \lambda\cdot a_y \\ b_z = \lambda\cdot a_z \end{cases}\quad bo'ladi$$

Isboti: Vektorni $\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a}=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}+...+\vec{a}}_{\lambda\ marta}$ ko‘rinishda yozamiz. Vektorlarni qo‘shganda mos koordinatalar ham qo‘shilishini bilamiz. SHunga ko‘ra $\begin{cases} b_x = a_x + a_x + a_x + ... + a_x = \lambda\cdot a_x \\ b_y = a_y + a_y + a_y + ... + a_y = \lambda\cdot a_y \\ b_z = a_z + a_z + a_z + ... + a_z = \lambda\cdot a_z \end{cases}$ bo‘ladi.



15.36.14-rasm

Agar $\lambda>0$ bo‘lsa, $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ vektorga parallel, agar $\lambda<0$ bo‘lsa, $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ vektorga antiparallel bo‘ladi.

Agar $\lambda=1$ bo‘lsa, $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ vektorga tengdosh parallel, agar $\lambda=-1$ bo‘lsa, $\vec{b}$ vektor $\vec{a}$ vektorga tengdosh antiparallel bo‘ladi.

Agar $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor bilan $\vec{c}=\lambda\cdot\vec{a}\pm\mu\cdot\vec{b}$ ko‘rinishdagi bog‘lanishga ega bo‘lsa, u holda vektorlarning mos koordinatalari ham xuddi shunday ko‘rinishdagi bog‘lanishga ega bo‘ladi.

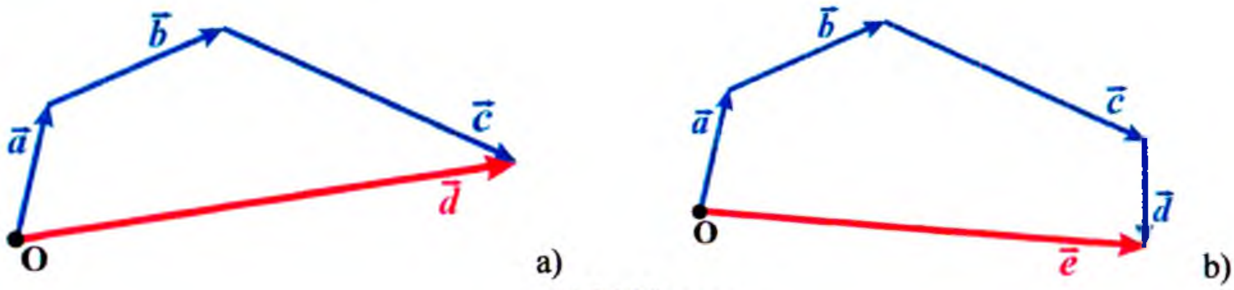
$$c_x=\lambda\cdot a_x\pm\mu\cdot b_x,\quad c_y=\lambda\cdot a_y\pm\mu\cdot b_y,\quad c_z=\lambda\cdot a_z\pm\mu\cdot b_z$$

Bir necha vektorlarni qo‘shish uchun vektorlarni biri-birining iziga parallel ko‘chirib joylashtirib ketiladi. Eng boshidan eng oxiriga yo‘nalgan vektor berilgan vektorlarning yig‘indi vektori hisoblanadi.

Aytaylik, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ uchta vektorni qo‘shish natijasida biror $\vec{d}$ vektor hosil bo‘lsa, $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarni qo‘shish uchun 16.36.15-a,rasmdagi kabi vektorlar izma-iz joylashtiriladi. $\vec{a}$ vektorning boshidan $\vec{c}$ vektorning oxiriga yo‘nalgan kesmaga $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ yig‘indi vektor deyiladi.

Aytaylik, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ to‘rtta vektorni qo‘shish natijasida biror $\vec{e}$ vektor hosil bo‘lsa, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ vektorlarni qo‘shish uchun 16.36.15-b,rasmdagi kabi vektorlar izma-iz joylashtiriladi. $\vec{a}$

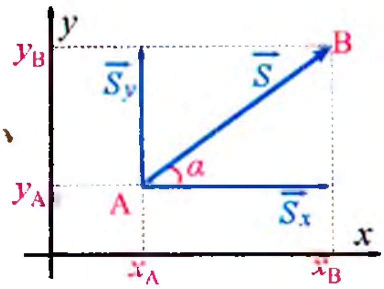
vektorning boshidan $\vec{d}$ vektorning oxiriga yo‘nalgan kesmaga $\vec{e}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ yig‘indi vektor deyiladi.



16.36.15-rasm

Agar biror jism Dekart koordinatalar sistemasida $A(x_A;y_A)$ nuqtadan $B(x_B;y_B)$ nuqtaga ko‘chgan bo‘lsa, ko‘chish va uning o‘qlardagi proeksiyalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi (15.36.16-rasm):

$$\begin{cases} \vec{S}=\vec{AB} \\ S_x=x_B-x_A \\ S_y=y_B-y_A \end{cases} \qquad \begin{cases} |\vec{S}|=\sqrt{S_x^2+S_y^2} \\ S_x=S\cdot\cos\alpha \\ S_y=S\cdot\sin\alpha \end{cases}$$



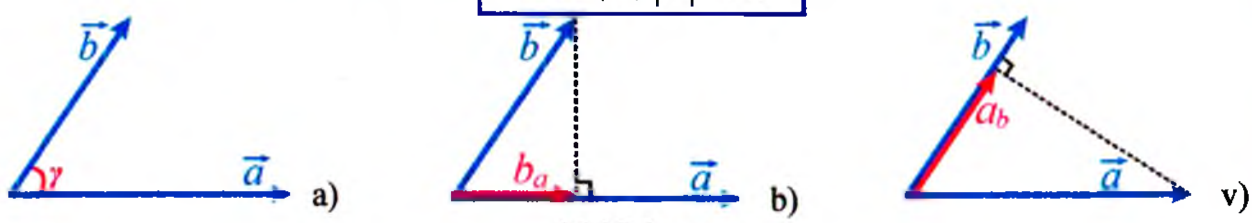
Bu erda: α – ko‘chishning gorizont bilan hosil qilgan burchagi.

16.36.16-rasm

16.37-Mavzu: Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi. Ikki vektor orasidagi burchak.

Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi deb bu vektorlar modullari va ular orasidagi burchak kosinusi ko‘paytmasiga teng bo‘lgan skalyar kattalikka aytiladi (16.37.1-a,rasm).

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma}$$



16.37.1-rasm

Boshqacha aytganda, ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi bu vektorlardan birining modulini ikkinchi vektorning birinchi vektorga proeksiyasiga ko‘paytmasiga teng bo‘lar ekan (16.37-b,v,rasm).

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a\cdot b_a \qquad yoki \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=b\cdot a_b}$$

YUqoridagi rasm va formulalardan ham ko‘rinib turibdiki, agar $\gamma=90^0$ bo‘lsa, vektorlar biri-biriga proeksiya bermaydi, ya’ni ularning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi. SHuning uchun, ortlarning birini boshqasiga skalyar ko‘paytirish natijasi nolga teng bo‘ladi.

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{j}=1\cdot1\cdot\cos90^0=0, \quad \vec{j}\cdot\vec{k}=1\cdot1\cdot\cos90^0=0, \quad \vec{k}\cdot\vec{i}=1\cdot1\cdot\cos90^0=0}$$

Vektorning o‘zi bilan o‘zi orasidagi burchak 0^0ga teng. Shuning uchun vektorning kvadrati uning modulining kvadratiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{\vec{a}^2=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos0^0=|\vec{a}|^2}$$

Yuqoridagi formuladan ortlarning o‘z-o‘ziga ko‘paytmasi birga teng bo‘ladi deb xulosa qilish mumkin ekan.

$$\boxed{\vec{i}\cdot\vec{i}=1\cdot1\cdot\cos0^0=1, \quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1\cdot1\cdot\cos0^0=1, \quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1\cdot1\cdot\cos0^0=1}$$

Ikki vektorning skalyar ko'paytmasini koordinataalr orqali ifodalanishi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}$$

Isboti: Vektorlarni ortlar ko'rinishida yozib, so'ngra qavslarni ochib chiqamiz. Natijada,

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\right)=a_x b_x\cdot\vec{i}\cdot\vec{i}+a_x b_y\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+a_x b_z\cdot\vec{i}\cdot\vec{k}+a_y b_x\cdot\vec{j}\cdot\vec{i}+$
$+a_y b_y\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}+a_y b_z\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}+a_z b_x\cdot\vec{k}\cdot\vec{i}+a_z b_y\cdot\vec{k}\cdot\vec{j}+a_z b_z\cdot\vec{k}\cdot\vec{k}=a_x b_x\cdot1+a_x b_y\cdot0+a_x b_z\cdot0+a_y b_x\cdot0+$
$+a_y b_y\cdot1+a_y b_z\cdot0+a_z b_x\cdot1+a_z b_y\cdot0+a_z b_z\cdot1=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$ hosil bo'ladi.

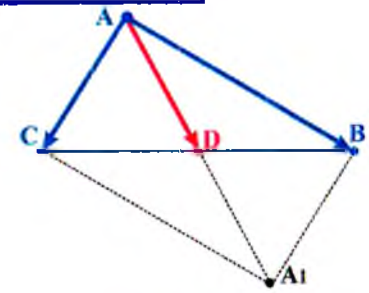
Vektorlarning skalyar ko'paytmasidan foydalanib, ikki vektor orasidagi burchakni aniqlash mumkin bo'ladi.

$$\boxed{\cos\gamma=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\quad yoki\quad \cos\gamma=\frac{a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}$$

ABC uchburchakning *AD* medianasini topish formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi (16.37.2-rasm):

$$\boxed{\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)}$$

Isboti: *AD* Mediana vektorlarga qurilgan parallelogrammning *A* uchidan chiqquvchi diagonalining yarmiga teng. *A* uchidan chiqquvchi diagonali esa $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ yig'indi vektorga teng.

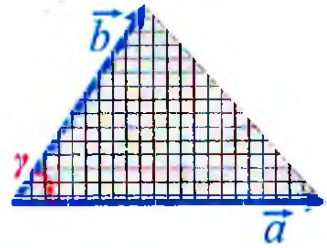


16.37.2-rasm

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vetorlarga qurilgan uchburchakning yuzi quyidagicha bo'ladi (16.37.3-rasm):

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot tg\alpha}$$

Isboti: Ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra $S=\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha\cdot tg\alpha=\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot tg\alpha$ bo'ladi.

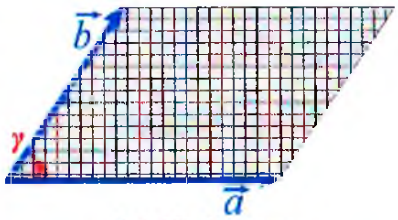


16.37.3-rasm

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogrammning yuzi quyidagicha bo'ladi (16.37.4-rasm):

$$\boxed{S=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot tg\alpha}$$

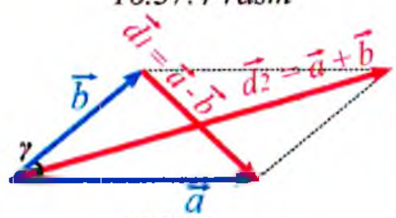
Isboti: Ikki tomon va ular orasidagi burchakka ko'ra $S=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha\cdot tg\alpha=\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot tg\alpha$ bo'ladi.



16.37.4-rasm

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar, $\vec{a}+\vec{b}$ yig'indi vektor hamda $\vec{a}-\vec{b}$ ayirma vektorlar orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi (16.37.5-rasm):

$$\boxed{\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right),\quad \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}}$$



16.37.5-rasm

Isboti: Bu bog'lanishni 16.26-mavzuda parallelogramm tomonlari hamda diagonallari orasidagi bog'lanishdan aniqlaymiz. Bunda $\vec{a}-\vec{b}=\vec{d}_1$ bo'lsa, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}_2$ bo'ladi. SHunga ko'ra $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right)$ hamda $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}$ bo'ladi.

15.38-Mavzu: Vektorlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

Endi ikki vektorning parallel yoki perpendikulyar bo'lish sharti bilan tanishamiz.

Agar ikki vektor o'zaro parallel chiziqlarda yotsa, ular ***parallel vektorlar*** deyiladi.

$\vec{a}(a_x;\ a_y;\ a_z)$ va $\vec{b}(b_x;\ b_y;\ b_z)$ vektorlarning parallel bo'lishi uchun ularning mos koordinatalari nisbati bir xil bo'lishi kerak.

$$\boxed{\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda}$$

Isboti: 15.37-mavzuda $\vec{a}$ vektorni ixtiyoriy λ songa ko'paytirganda hosil bo'lgan $\vec{b}$ vektorning koordinatalari $\vec{a}$ vektorning mos koordinatalaridan λ marta farq qilishi bilan tanishgan edik. SHunga ko'ra agar $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{b}$ bo'lsa, $\lambda\cdot a_x=b_x$, $\lambda\cdot a_y=b_y$, $\lambda\cdot a_z=b_z$ bo'ladi. Bundan esa $\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}=\lambda$ nisbat kelib chiqadi. Agar $\lambda>0$ bo'lsa, vektorlar parallel, $\lambda<0$ bo'lsa, vektorlar antiparallel bo'ladi.

Vektorlarning parallelligi bu vektorlarning parallel chiziqda yotishini bildirsa, kollinear degan so'z esa vektorlarning yoki parallel chiziqda yoki bir chiziqda yotishini bildiradi. Shuning uchun ham vektorlarning kollinearligi degan ibora vektorlarning paralleligi degan iboradan ko'ra umumiyroqdir.

Agar ikki vektor o'zaro perpendikulyar chiziqlarda yotsa, ular ***perpendikulyar vektorlar*** deyiladi. Ikki vektor o'zaro perpendikulyar bo'lishi uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi kerak.

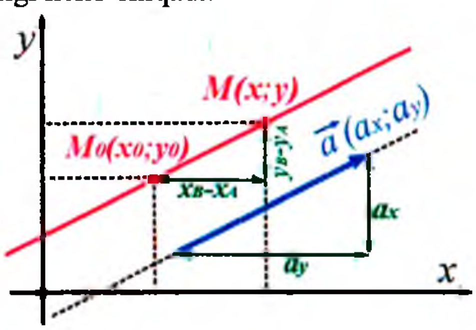
$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \quad yoki \quad a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0}$$

Bunga $\gamma=90^0$ da $\cos 90^0=0$ bo'lishidan ishonch hosil qilish mumkin.

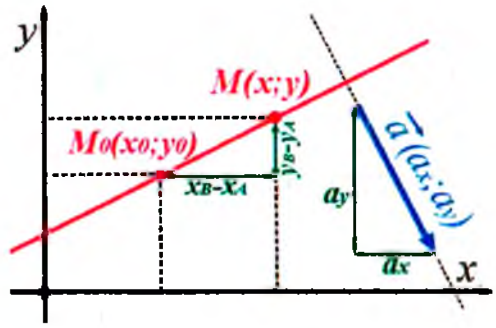
Ixtiyoriy $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan $\vec{a}(a_x;a_y)$ vektorga parallel holda o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi (15.38.1-a,rasm):

$$\boxed{y=\frac{a_y}{a_x}(x-x_0)+y_0}$$

Isboti: $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan berilgan vektorga parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olaylik. $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan $M(x;y)$ nuqtaga yo'nalgan vektor $\overline{M_0M}=(x-x_0)\cdot\vec{i}+(y-y_0)\cdot\vec{j}$ bo'ladi. Bu vektor berilgan $\vec{a}(a_x;a_y)=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}$ vektorga parallel bo'lgani uchun $\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\lambda$ bo'ladi. Bundan so'ralgan to'g'ri chiziq tenglamasi $y=\frac{a_y}{a_x}(x-x_0)+y_0$ ekanligi kelib chiqadi.



a)



b)

16.38.1-rasm

Ixtiyoriy $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan $\vec{a}(a_x;a_y)$ vektorga perpendikulyar holda o'tkazilgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha bo'ladi (16.38.1-b,rasm):

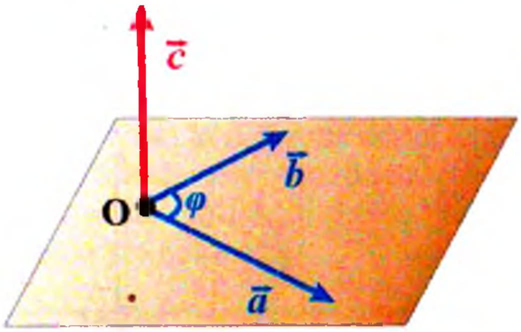
$$\boxed{y=-\frac{a_x}{a_y}(x-x_0)+y_0}$$

Isboti: $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan berilgan vektorga perpendikulyar qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olaylik. $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan $M(x;y)$ nuqtaga yo'nalgan vektor $\overline{M_0M}=(x-x_0)\cdot\vec{i}+(y-y_0)\cdot\vec{j}$ bo'ladi. Bu vektor berilgan $\vec{a}(a_x;a_y)=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}$ vektorga perpendikulyar bo'lgani uchun ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi, ya'ni $a_x(x-x_0)+a_y(y-y_0)=0$ bo'ladi. Bundan so'ralgan to'g'ri chiziq tenglamasi $y=-\frac{a_x}{a_y}(x-x_0)+y_0$ ekanligi kelib chiqadi.

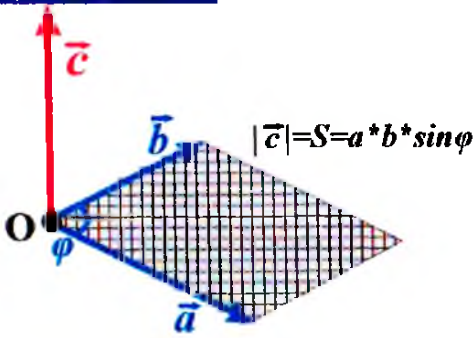
16.39-Mavzu: Vektorlarning vektorli ko'paytmasi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektorli ko'paytmasi $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ vektor kattalik bo'lib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar yo'naladi va bu vektorning uchidan qaraganda $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorning ustiga tushirish uchun soat miliga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak (16.39.1-a,rasm). Vektor ko'paytmaning miqdori esa $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$ ga teng bo'ladi, ya'ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramning yuziga teng bo'ladi (16.39.1-b,rasm).

$$\boxed{\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}, \qquad |\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi}$$



a)



b)

16.39.1-rasm

Agar vektorlar $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}$ ko'rinishda ortlar orqali berilgan bo'lsa, ularning vektorli ko'paytmasi determinant ko'rinishda quyidagicha bo'ladi:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=(a_yb_z-a_zb_y)\cdot\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\cdot\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\cdot\vec{k}=c_x\cdot\vec{i}+c_y\cdot\vec{j}+c_z\cdot\vec{k}$$

Shuni alohida eslatib o'tish kerakki, determinantlar to'g'risidagi ma'lumotlar oliy matematikada batafsil yoritib beriladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar vektorli ko'paytirish natijasida hosil bo'lgan $\vec{c}$ vektorning koordinatalari quyidagicha bo'ladi.

$$\boxed{c_x=a_yb_z-a_zb_y, \quad c_y=a_zb_x-a_xb_z, \quad c_z=a_xb_y-a_yb_x}$$

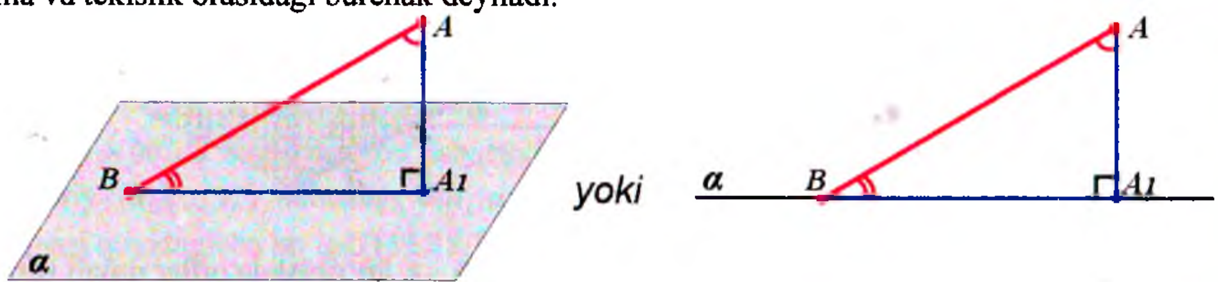
Vektorlarning skalyar ko'paytmasi natijasida skalyar kattalik (faqat miqdor) hosil bo'lsa, vektor ko'paytmasi natijasida esa vektor kattalik (miqdor va yo'nalish) hosil bo'ladi.

17-BOB: STEREOMETRIYA

Stereomertiya – geomertiyaning fazodagi shakl va figuralarni o'rganuvchi bir bo'limidir. Bunda fazodagi chiziqlar, figuralar, ko'pyoqlar hamda uch o'lchamli Dekart koordinatalar sistemasi, ya'ni prizma, parallelepiped, piramida kabi ko'pyoqlar hamda shar, sfera, konus, kesik konus, ellipsoid va paraboloid aylanish jismlari va ular bilan bog'liq masalalar o'rganiladi.

17.1-Mavzu: Fazoda to'g'ri chiziqlar va tekisliklar.

Cheksiz ko'p to'g'ri chiziqlarning yonma-yon joylashishi tekislikni hosil qiladi. Tekislikning ixtiyoriy yon tomonidan turib qaralganda u to'g'ri chiziq bo'lib ko'rinadi. Tekisliklar yunoncha kichik $\alpha,\beta,\gamma,\delta,...$ harflar bilan belgilanadi. Tekislik har qanday bo'lmasin bu tekislikda yotuvchi va yotmaydigan nuqtalar mavjuddir. Tekislikda yotmaydigan nuqta bilan tekislikning eng yaqin nuqtasini tutashtiruvchi kesmaga tekislikka tushirilgan ***perpendikulyar*** deyiladi. Tekislikda yotmaydigan nuqta bilan tekislikning boshqa nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalarga esa ***og'malar*** deyiladi (16.1.1-rasm). Tekislikda yotmagan nuqta orqali tekislikka yagona balandlik va cheksiz ko'p og'ma o'tkazish mumkin. Og'ma va uning tekislikdagi proeksiyasi orasidagi burchakka og'ma va tekislik orasidagi burchak deyiladi.



fazoviy ko'rinish *yondan ko'rinish*

17.1.1-rasm

AA_1 – balandlik;

AB – og'ma;

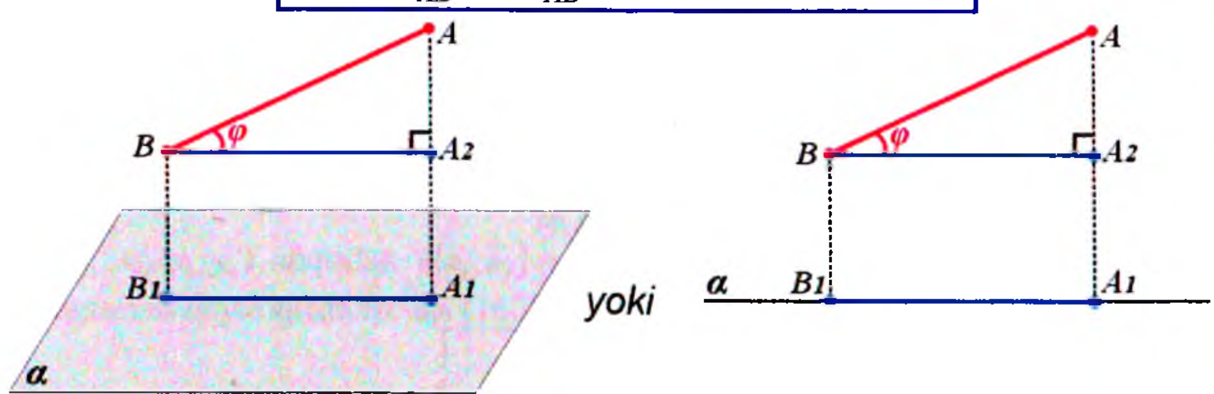
A_1B – og'maning tekislikdagi proeksiyasi;

$\angle A$ – balandlik va og'ma orasidagi burchak;

$\angle B$ – og'ma va tekislik orasidagi burchak.

Tekislik bilan kesishmaydigan va fazoda berilgan uzunligi AB bo'lgan kesmaning uchlaridan tekislikkacha bo'lgan masofalar ma'lum bo'lsa, kesma va tekislik orasidagi burchakni hamda kesmaning tekislikdagi proeksiyasini aniqlash mumkin (17.1.2-rasm).

$$\sin\varphi = \frac{AA_2}{AB} = \frac{AA_1 - BB_1}{AB}, \quad A_1B_1 = \sqrt{AB^2 - AA_2^2}$$

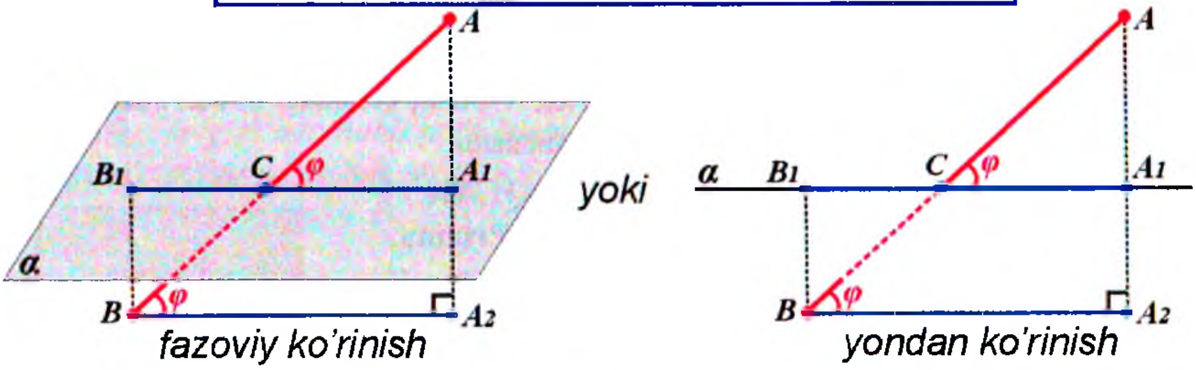


fazoviy ko'rinish *yondan ko'rinish*

17.1.2-rasm

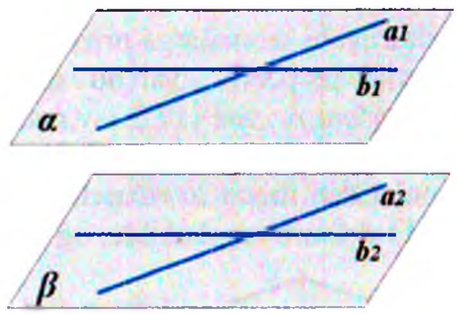
Tekislik bilan kesishadigan va fazoda berilgan uzunligi AB bo‘lgan kesmaning uchlaridan tekislikkacha bo’lgan masofalar ma’lum bo‘lsa, kesma va tekislik orasidagi burchakni hamda kesmaning tekislikdagi proeksiyasini aniqlash mumkin (16.1.3-rasm).

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{AA_2}{AB} = \frac{AA_1 + BB_1}{AB}, \quad A_1B_1 = \sqrt{AB^2 - (AA_1 + BB_1)^2}}$$



17.1.3-rasm

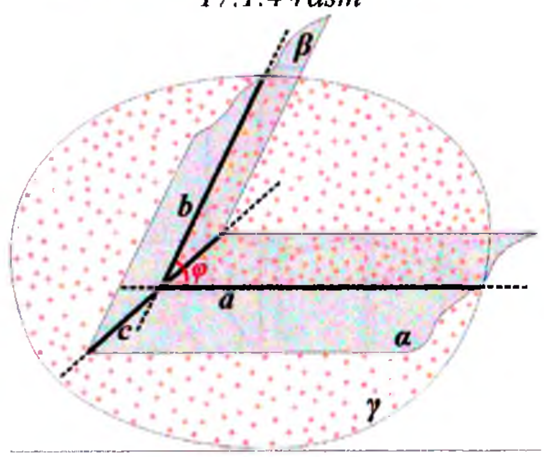
Bir tekislikda kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziq boshqa bir tekislikda kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziqqa mos holda parallel bo‘lsa, u holda bu tekisliklar o‘zaro paralleldir (16.1.4-rasm).



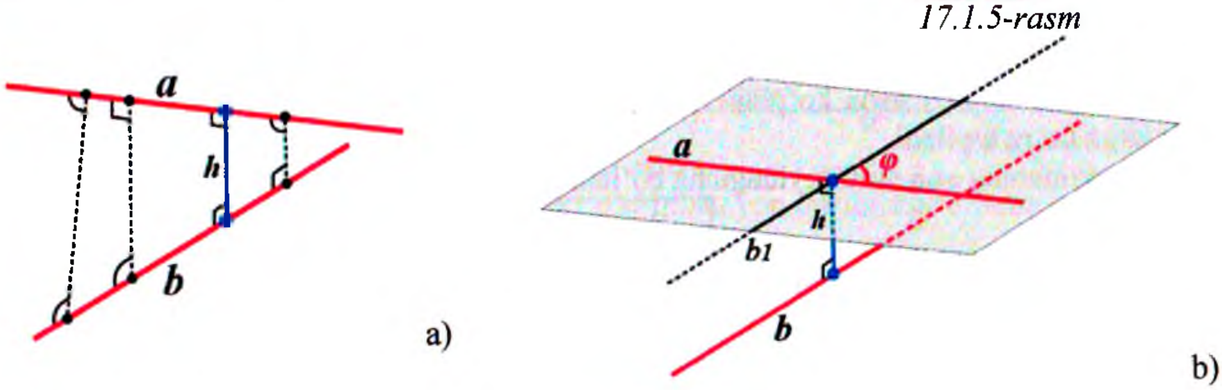
17.1.4-rasm

$$\boxed{\text{Agar } \begin{cases} a_1 \parallel a_2 \\ b_1 \parallel b_2 \end{cases} \text{ bo‘lsa, u holda } \alpha \parallel \beta \text{ bo‘ladi}}$$

Parallel bo‘lmagan tekisliklar kesishuvchi bo‘ladi. Tekisliklar to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Kesishish chizig‘i bir vaqtning o‘zida har bir tekislikka tegishlidir. Kesishuvchi ikki tekislik orasidagi burchakni topish uchun ularning kesishish chizig‘iga perpendikulyar holda uchinchi tekislik o‘tkaziladi. Uchinchi tekislik ikkita kesishuvchi tekislikni kesadigan chiziqlar orasidagi burchakka kesishuvchi ikki tekislik orasidagi ***ikki yoqli burchak*** deyiladi (17.1.5-rasm). Rasmda kesishuvchi α va β tekisliklar orasidagi burchak a va b to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakdir.



17.1.5-rasm



17.1.6-rasm

Fazoda kesishmaydigan ikki to‘g‘ri chiziqqa ***ayqash to‘g‘ri chiziqlar*** deyiladi. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar bir-biriga eng yaqin nuqtalarini tutashtiruvchi kesmaga ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa deyiladi. Bu kesma ayqash to‘g‘ri chiziqlarning umumiy va yagona perpendikulyaridir. Ayqash to‘g‘ri chiziqlarning ixtiyoriy boshqa nuqtalarini tutashtiruvchi kesma to‘g‘ri chiziqlarga burchak ostida kesishadi va uning uzunligi umumiy perpendikulyar uzunligidan katta bo‘ladi (17.1.6-a,rasm).

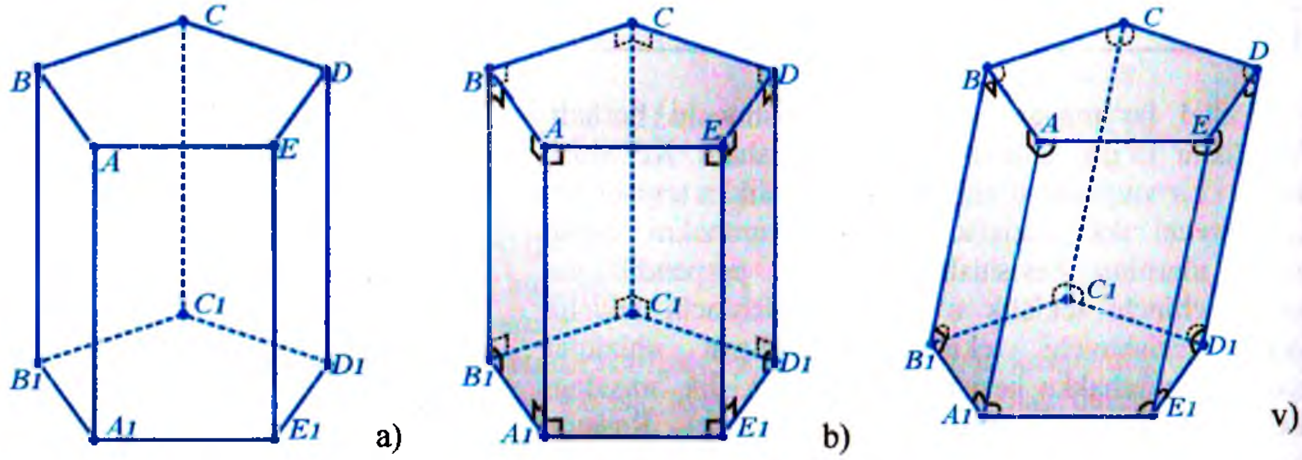
Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlash uchun ulardan biri orqali ikkinichisiga parallel qilib tekislik o‘tkaziladi. Ikkinchi to‘g‘ri chiziqni tekislikka proeksiyalanadi. Proeksiya va birinchi to‘g‘ri chiziqning kesishish burchagiga ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deyiladi (17.1.6-b,rasm). Rasmda a to‘g‘ri chiziq orqali b to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib α tekislik o‘tkazilgan hamda b to‘g‘ri chiziqni a to‘g‘ri chiziqqa proeksiyalangan. Bunda b_1 proeksiya to‘g‘ri chizig‘i hosil bo‘lgan. b_1 va a to‘g‘ri chiziq orasidagi φ burchakka berilgan a va b ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak hisoblanadi.

KO‘PYOQLAR

17.2-Mavzu: Prizma.

Parallel ko‘chirish natijasida ustma-ust tushuvchi ko‘pburchaklar va ko‘pburchaklarning mos uchlarini tutashtiruvchi kesmalardan iborat ko‘pyoqqa ***prizma*** deyiladi (17.2.1-a,rasm).

Ko‘pburchaklarni prizmaning ***asoslari*** deyiladi. Asoslar bir-biriga parallel va tengdir. Ko‘pburchak tomonlarini ***asos qirralari*** deyiladi. Ko‘pburchaklarning mos uchlarini tutashtiruvchi kesmalarga prizmaning ***yon qirralari*** deyiladi. Agar prizmaning yon qirralari uning asoslariga perpendikulyar bo‘lsa, bunday prizmaga ***to‘g‘ri prizma*** (17.2.1-b,rasm) deyiladi, aks holda ***og‘ma prizma*** (17.2.1-v,rasm) deyiladi. Asoslar orasidagi masofaga prizmaning ***balandligi*** deyiladi. To‘g‘ri prizmada, balandlik yon qirraga teng bo‘ladi. Yon qirralar va ko‘pburchak tomonlaridan iborat to‘rtburchakka prizmaning ***yon yog‘i*** deyiladi. Yon yoqlar to‘g‘ri prizmada to‘g‘ri to‘rtburchak shaklida, og‘ma prizmada esa parallelogramm shaklida bo‘ladi.



17.2.1-rasm

Prizmaning $3n$ ta qirrasi, $2n$ ta uchi, n ta yon yog‘i va $n+2$ ta yog‘i bor. Umumiy holda berilgan prizmaning birorta simmetriya tekisligi yo‘q. Agar prizma to‘g‘ri bo‘lsa, u holda uning balandlik o‘rtasidan asoslarga parallel bo‘lgan bitta simmetriya tekisligi mavjud.

Prizmaning asos yuzi asos ko‘pburchagining turiga qarab planimetriyadan ma’lum bo‘lgan formulalarga ko‘ra topiladi.

Og‘ma prizmaning yon sirti quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{yon} = p_{as}H}$$

Bu erda: p_{as} – prizma asosi perimetri, h – prizmaning balandligi.

To‘g‘ri prizmaning yon sirti quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{yon} = p_{as}\ell}$$

Bu erda: $\ell = h$ – prizmaning yon qirra uzunligi uning balandligiga teng.

Prizmaning yon sirti prizma yon sirti yuzasi va asoslar yuzalari yig‘indisiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{as}}$$

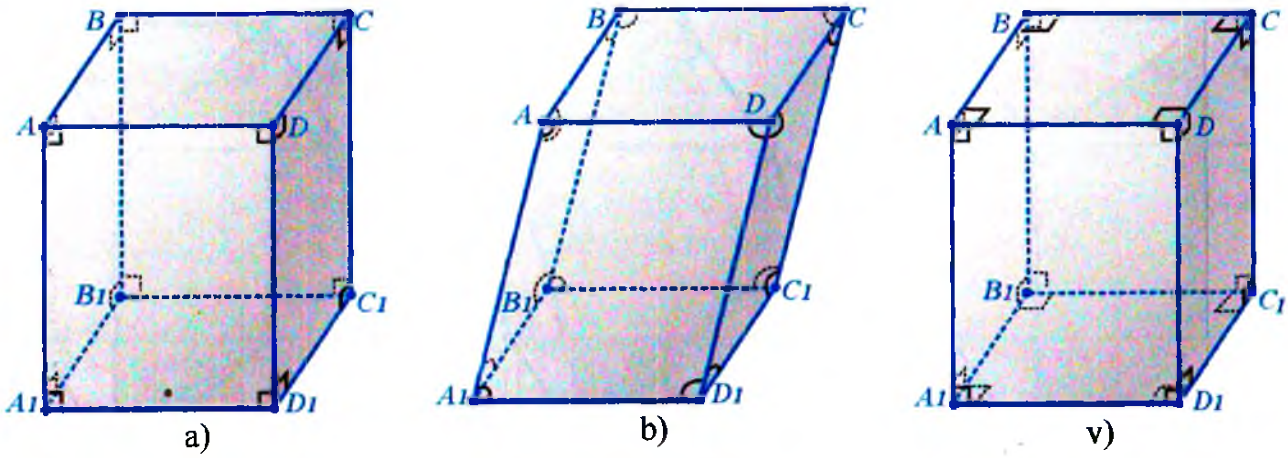
Prizma asos yuzini uning balandligiga ko‘paytmasi prizma hajmini beradi.

$$\boxed{V = S_{as} H}$$

17.3-Mavzu: Parallepiped.

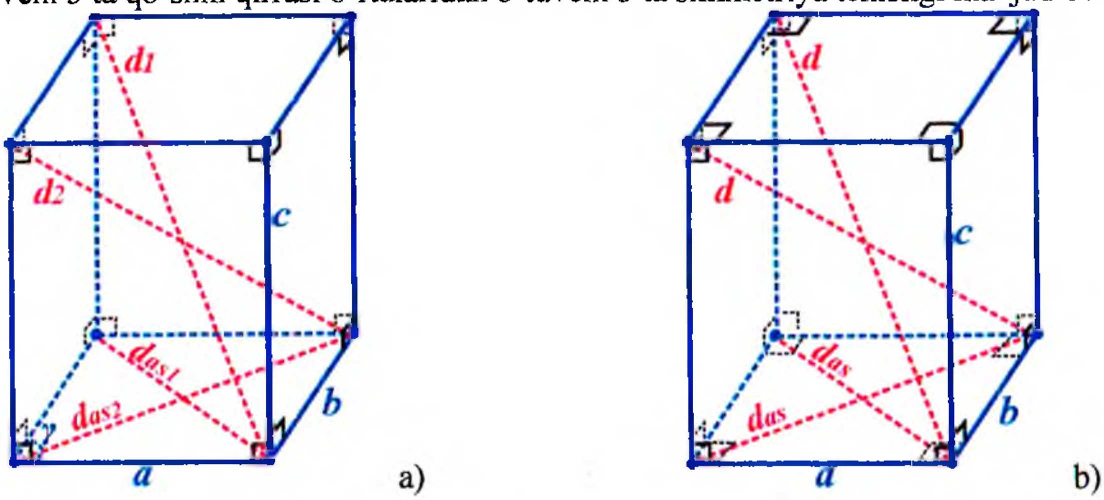
Agar prizmaning asosi parallelogram bo‘lsa, bunday prizmaga ***parallelepiped*** deyiladi.

Agar prizmaning yon qirrasi asos tekisligiga perpendikulyar bo‘lsa, bunday parallelepipedga ***to‘g‘ri parallelepiped*** deyiladi, aks holda perpendikulyar bo‘lmasa, ***og‘ma parallelepiped*** deyiladi. Agar to‘g‘ri parallelepipedning asosi to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lsa, bunday parallelepipedga ***to‘g‘ri burchakli parallelepiped*** deyiladi. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning barcha qirralari orasidagi burchak 90^0 ga teng (17.3.1-rasm).



17.3.1-rasm

Parallelepipedning *12* ta qirrasi, *8* ta uchi, *4* ta yon yog‘i va *6* ta yog‘i bor. Agar parallelepiped to‘g‘ri bo‘lsa, u holda uning balandlik o‘rtasidan asoslarga parallel bo‘lgan bitta simmetriya tekisligi mavjud. Agar parallelepiped to‘g‘ri burchakli bo‘lsa, u holda uning bir uchda tutuashuvchi 3 ta qo‘shni qirrasi o‘rtalaridan o‘tuvchi 3 ta simmetriya tekisligi mavjud bo‘ladi.



17.3.2-rasm

Odatda, parallelepipedning asosdagi qirralari a, b bilan, yon qirrasi esa c bilan belgilanadi.

To‘g‘ri $(c = h)$ parallelepipedning asosi parallelogramm bo‘lgani uchun diagonallar uzunliklari turlicha bo‘ladi (17.3.2-a,rasm).

$$\boxed{\begin{cases} d_1 = \sqrt{d_{as1}^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma + c^2} \\ d_2 = \sqrt{d_{as2}^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma + c^2} \end{cases}}$$

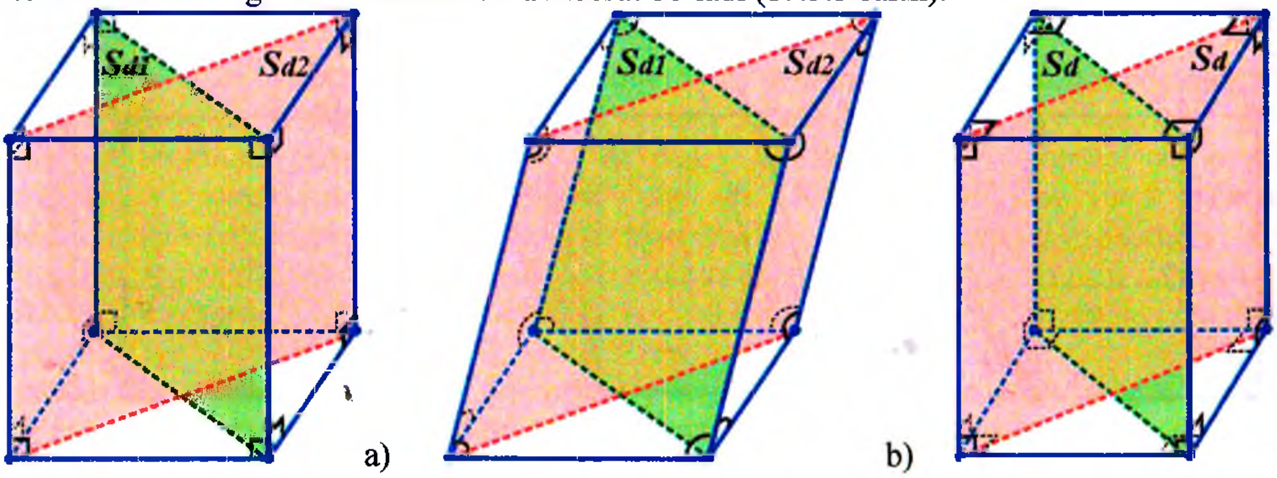
To‘g‘ri $(c = h)$ parallelepipedning diagonallari va qirralari orasidagi bog‘lanish quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{d_2^2+d_1^2=2\left(a^2+b^2+c^2\right), \qquad d_2^2-d_1^2=4ab\cos\gamma}$$

To‘g‘ri burchakli $\left(c=h,\ \gamma=90^0\right)$ parallelepipedning asosi to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lgani uchun diagonallar uzunliklari o‘zaro teng bo‘ladi (17.3.2-b,rasm).

$$\boxed{d=\sqrt{d_{as}^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Parallelepipedning qarama-qarshi uchlari orqali tekislik o‘tkazish natijasida diagonal kesim hosil bo‘ladi. Og‘ma parallelepipedda diagonal kesimlar turli parallelogrammlardir. To‘g‘ri parallelepipedda ham asos diagonallari turlicha bo‘lgani uchun parallelepiped diagonallari turli parallelogrammlardan iborat bo‘ladi. Faqatgina to‘g‘ri burchakli parallelepipedlarda diagonal kesimlar bir xil to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat bo‘ladi (17.3.3-rasm).



17.3.3-rasm

To‘g‘ri va to‘g‘ri burchakli parallepipedlarning yon yoqlari to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat bo‘ladi. Og‘ma parallepipedning yon yoqlari esa parallelogrammlardan iborat bo‘ladi

To‘g‘ri burchakli parallepipedning yon sirti quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\boxed{S_{yon}=p_{as}h=2(a+b)c}$$

Parallelepipedning to‘la sirtini yon sirt va asoslar sirtlari tashkil etadi.

$$\boxed{S_{to'la}=S_{yon}+2S_{as}}$$

Xususiy holda to‘g‘ri parallelepipedning to‘la sirti quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{to'la}=S_{yon}+2S_{as}=2(a+b)\,c+2ab\sin\gamma}$$

Xususiy holda to‘g‘ri burchakli parallelepipedning to‘la sirti quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{to'la}=S_{yon}+2S_{as}=2(ab+ac+bc)}$$

Parallelepipedning hajmi uning asosi yuzi va balandligi ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{V=S_{as}h}$$

Xususiy holda to‘g‘ri parallelepipedning hajmi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{V=S_{as}H=abH\sin\gamma}$$

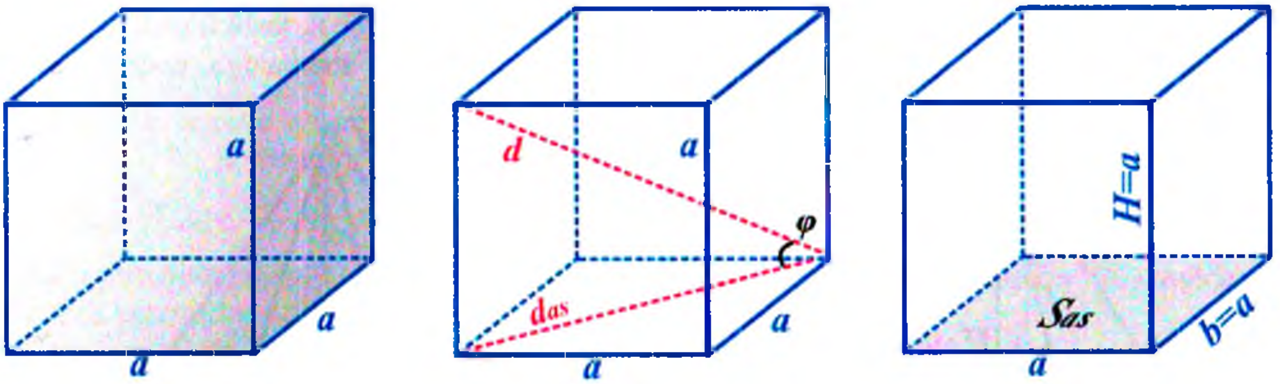
Xususiy holda to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{V=S_{as}H=abc}$$

17.4-Mavzu: Kub.

Agar to‘g‘ri burchakli parallelepipedning barcha qirralari o‘zaro teng bo‘lsa, bunday ko‘pyoqqa ***kub*** deyiladi (17.4.1-a,rasm).

Kubning *12* ta qirrasi, *8* ta uchi, *4* ta yon yog‘i va *6* ta yog‘i bor. Kub 9 ta simmetriya tekisligiga ega.



a) b) c)

17.4.1-rasm

Kubning diagnoali quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{d = \sqrt{3}\,a}$$

Isboti: Kub barcha qirralari teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped bo‘lgani uchun parallelepiped digonalini topish formulasidan so‘ralgan kattalikni keltirib chiqarish mumkin. unga ko‘ra kubning diagonali $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}\,a$ bo‘ladi.

Kubning diagonali va kubning ixtiyoriy yog‘i diagonali orasidagi burchak quyidagicha bo‘ladi (16.4.1-b,rasm):

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{d_{as}}{d} = \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

Kubning barcha yoqlari o‘zaro teng bo‘lgan kvadratlardan iborat. Kubning to‘la sirtini uning 6ta yog‘i sirti tashkil etadi.

$$\boxed{S = 6a^2}$$

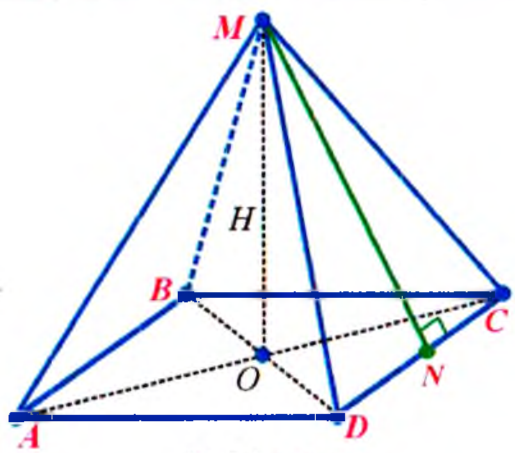
Kubning ihajmi quyidagicha bo‘ladi (16.4.1-c,rasm):

$$\boxed{V = a^3}$$

Isboti: Kub barcha qirralari teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped bo‘lgani uchun uning hajmi parallelepiped hajmini topish formulasidan keltirib chiqariladi. Unga ko‘ra $V = S_{as}H = a^2 \cdot a = a^3$ bo‘ladi.

17.5-Mavzu: Piramida.

MO – balandlik;
AB – og‘ma;
$ABCDE$ – piramida asosi;
MN – apofema;
$\angle A$ – balandlik va og‘ma orasidagi burchak;
$\angle B$ – og‘ma va tekislik orasidagi burchak.

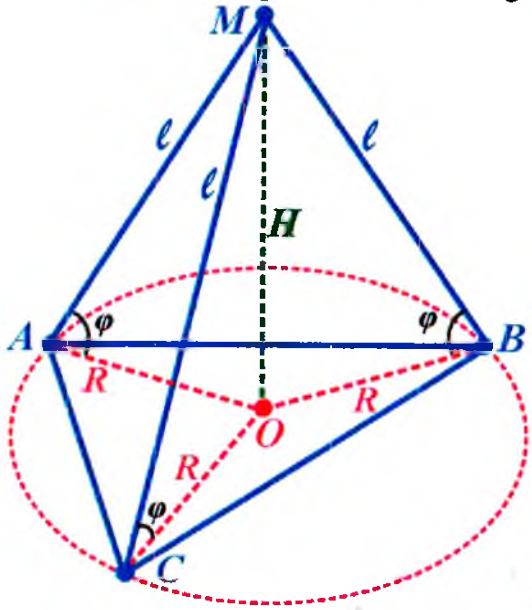


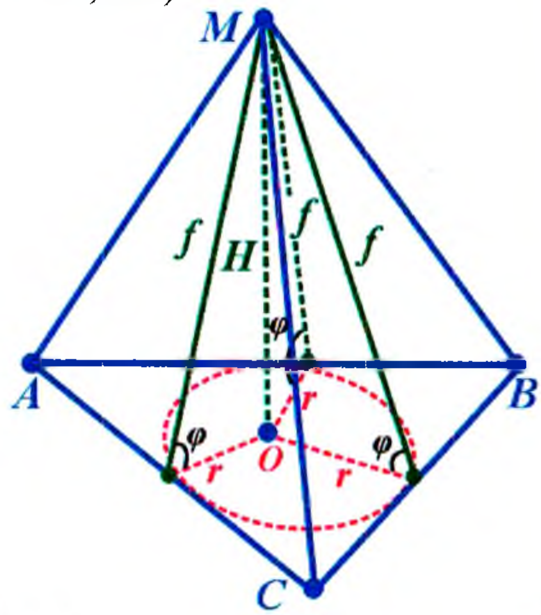
17.5.1-rasm

Qavariq ko‘pburchak va ko‘pburchakning uchlarini ko‘pburchak tekisligida yotmagan nuqta bilan tutashtiruvchi kesmalaradan iborat ko‘pyoqqa ***piramida*** deyiladi. Ko‘pburchakni ***piramida asosi*** deyiladi. Ko‘pburchak tekisligida yotmagan nuqtani ***piramida uchi*** deyiladi. Piramida uchini asos uchlari bilan tutashtiruvchi kesmalarni piramidaning ***yon qirralari*** deyiladi.Piramida uchidan asos tekisligiga perpendikulyar holda tushirilgan kesmaga ***piramida balandligi*** deyiladi. Piramida uchidan asos tomoniga tushirilgan perpendikulyar kesma uzunligiga uning ***apofemasi*** deyiladi (17.5.1-rasm).

Piramidaning $2n$ ta qirrasi, $n+1$ ta uchi, n ta yon yog‘i va $n+1$ ta yog‘i bor.

Agar piramidaning barcha qirralari asos tekisligi bilàn bir xil burchak tashkil etsa, u holda bu piramidaning balandligi uning asosiga tashqi chizilgan aylana markaziga tushadi. Bunda piramidaning barcha qirralari o'zaro teng bo'ladi (17.5.2-a,rasm).





17.5.2-rasm

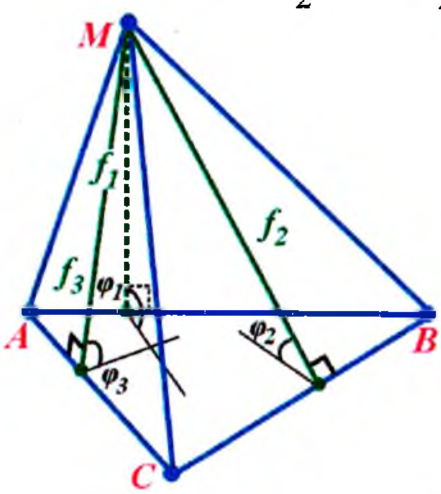
Agar piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligi bilan bir xil burchak tashkil etsa, u holda bu piramidaning balandligi uning asosiga ichki chizilgan aylana markaziga tushadi. Bunda piramidaning barcha apofemalari o'zaro teng bo'ladi, asosdagi ikki yoqli burchaklar o'zaro teng bo'ladi (17.5.2-b,rasm).

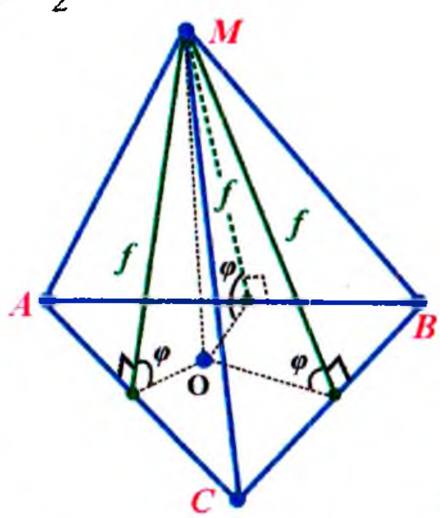
Piramida yon yoqlari yuzalarining yig'indisi uning yon sirtini beradi. Umumiy holda piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida hisoblanadi (17.5.3-a,rasm):

$$\boxed{S_{as} = \frac{1}{2}\left(a f_a + b f_b + c f_c + ...\right)}$$

Isboti: Piramidaning yon yoqlari uchburchaklardan iborat bo'lib, bu uchburchak yuzasi asos va asosga tushirilgan balandlikka ko'ra aniqlanadi. Piramida asos tomoniga tushirilgan balandlik esa apofemadir. Pirmidaning yon sirti yon yoqlari sirtlarining yig'indisiga teng. Shunga ko'ra

$S_{yon} = S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MCA} = \frac{1}{2} AB \cdot f_1 + \frac{1}{2} BC \cdot f_2 + \frac{1}{2} AC \cdot f_3 = \frac{1}{2}\left(a f_a + b f_b + c f_c + ...\right)$ bo'ladi.





17.5.3-rasm

Apofemalar teng bo'lganda piramidaning yon sirti piramida asosi perimetri va apofema ko'paytmasining yarmiga teng bo'ladi (17.5.3-b,rasm).

$$\boxed{S_{as}=\frac{p_{as}\cdot f}{2}}$$

Isboti: Apofemalar o'zaro teng bo'lganda formula yanada soddalashdi. Pirmidaning yon sirti yon yoqlari sirtlarining yig'indisisga teng. Shunga ko'ra $S_{yon}=S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCA}=\frac{1}{2}AB\cdot f+\frac{1}{2}BC\cdot f+\frac{1}{2}AC\cdot f=\frac{a+b+c}{2}f=\frac{p_{as}f}{2}$ bo'ladi.

Agar piramida yon yoqlarining asos tekisligiga og'ish burchaklari ma'lum bo'lsa, u holda piramida yon sirti va asos yuzalarini bog'lash mumkin bo'ladi.

Agar piramidaning asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar berilgan bo'lsa, yon sirt va asos yuzasi burchak kosinuslari orqali bog'lanadi.

$$\boxed{S_{as}=S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3+...}$$

Isboti: Piramidaning yon yoqlari uchburchaklar bo'lgani uchun bu yon yoqlarning asosga proeksiyalari ham uchburchaklar bo'ladi. Har bir yon yoq va uning proeksiyasi yon yoq va asos orasidagi ikki yoqli burchak kosinusi bilan bog'lanadi. Piramida yon sirti yuzi $S_{yon}=S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCA}+...=\frac{1}{2}AB\cdot f_1+\frac{1}{2}BC\cdot f_2+\frac{1}{2}AC\cdot f_3+...$ bilan, asos yuzi esa $S_{asos}=S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA}+...=\frac{1}{2}AB\cdot r_1+\frac{1}{2}BC\cdot r_2+\frac{1}{2}AC\cdot r_3+...$ bilan ifodalanadi. Apofema uchun $f_1=r_1\cdot\cos\varphi_1$ formuladan foydalansak, u holda asos yuzi uchun $S_{asos}=\frac{1}{2}AB\cdot r_1+\frac{1}{2}BC\cdot r_2+\frac{1}{2}AC\cdot r_3+...=\frac{1}{2}AB\cdot f_1\cdot\cos\varphi_1+\frac{1}{2}BC\cdot f_2\cdot\cos\varphi_2+\frac{1}{2}AC\cdot f_3\cdot\cos\varphi_3+...=$ $=S_1\cos\varphi_1+S_2\cos\varphi_2+S_3\cos\varphi_3$ formula kelib chiqadi.

Agar piramidaning asosidagi barcha ikki yoqli burchaklar o'zaro teng bo'lsa, yon sirt va asos yuzasi burchak kosinusi orqali bog'lanadi (17.5.3-a,rasm).

$$\boxed{S_{as}=S_{yon}\cdot\cos\varphi}$$

Isboti: Yuqorida hosil qilingan formuladan foydalansak, u holda ushbu $S_{asos}=S_1\cos\varphi+S_2\cos\varphi+S_3\cos\varphi+...=(S_1+S_2+S_3+...)\cos\varphi=S_{yon}\cos\varphi$ formula kelib chiqadi.

Piramidaning to'la sirtini uning yon sirti va asos yuzasi tashkil etadi (17.5.3-b,rasm).

$$\boxed{S_{to'la}=S_{as}+S_{yon}}$$

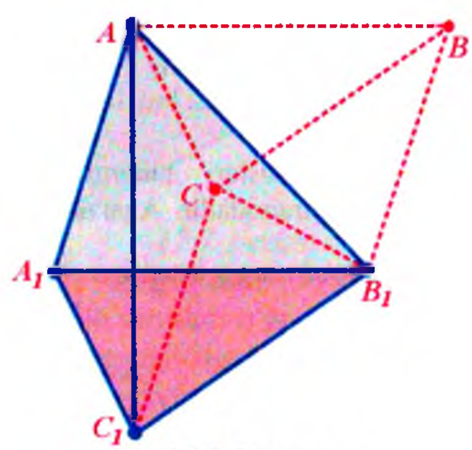
Piramidaning hajmi piramidani qamragan prizma hajmining uchdan biriga tengdir.

$$\boxed{V=\frac{1}{3}S_{as}h}$$

Isboti: Asosi $A_1B_1C_1$ va uchi A nuqtada joylashgan piramidani qamragan prizmaga to'ldirilganda $ABCA_1B_1C_1$ prizma hosil bo'ladi. Bu prizma hajmi uchta bir xil hajmli piramidalar hajmlari yig'indisiga tengdir.

$$V_{prizma}=V_{AA_1B_1C_1}+V_{B_1ABC}+V_{CAB_1C_1}$$

Bu uchala piramida hajmi bir xil bo'lib, ularning har biri prizma hajmining uchdan birini tashkil etadi. Shunda



17.5.5-rasm

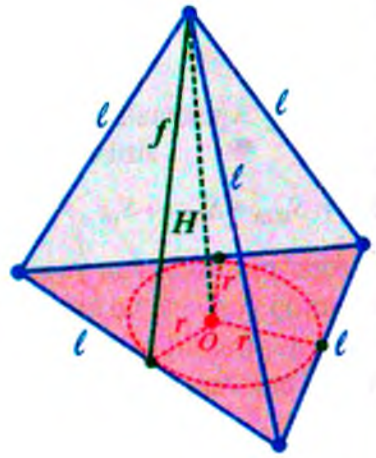
$V_{AA_1B_1C_1}=V_{B_1ABC}=V_{CAB_1C_1}=\frac{1}{3}V_{prizma}=\frac{1}{3}S_{as}h$ natijaga ega bo'lamiz.

17.6-Mavzu: Piramidaga oid masalalar.

Piramidaga oid bir necha masalalar ko'rib chiqish orqali mavzuni mustahkamlaymiz.

Masala № 1: Qirrasi ℓ bo'gan tetraedr (barcha qirralari teng bo'lgan uchburchakli piramida) ning balandligini va hajmini aniqlang.

Yechish: Tetraedrning barcha yoqlari muntazam uchburchaklar bo'lib, tetraedr apofemasi muntazam uchburchakning balandligiga teng, ya'ni $f=\frac{\sqrt{3}}{2}\ell$ bo'ladi. Uchburchak asosiga ichki chizilgan aylana radiusi $r=\frac{\ell}{2\sqrt{3}}$ ga teng. Pifagor teoremasiga asosan, tetraedr balandligi $H=\sqrt{f^2-r^2}=\sqrt{\frac{3}{4}\ell^2-\frac{1}{12}\ell^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\ell$ bo'ladi. Tetraedr hajmi $V=\frac{1}{3}S_{as}H=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\ell=\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3$ ga teng bo'ladi.



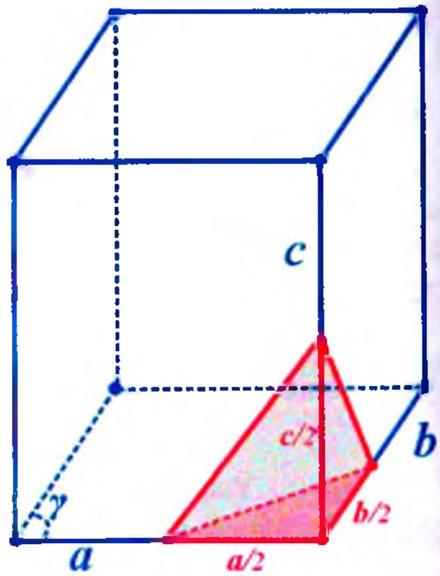
17.6.1-rasm

Demak, qirrasi ℓ bo'gan tetraedrning balandligini va hajmi quyidagicha bo'lar ekan:

$$\boxed{H=\sqrt{\frac{2}{3}}\ell,\qquad V=\frac{\sqrt{2}}{12}\ell^3}$$

Masala № 2: Parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesib olingan piramida hajmi berilgan parallelepiped hajmidan necha marta kichik?

Yechish: Aytaylik, parallelepipedning asosi tomonlari a va b bo'lgan parallelogram, yon qirrasi c, asosga tushirilgan balandlik esa H bo'lsin. Bu parallelepiped asosining yuzi $S_{paral}=ab\sin\varphi$ ekanini hisobga olsak, uning hajmi $V_{paral}=ab\sin\varphi\cdot H=abH\sin\varphi$ bo'ladi. Bu parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesishdan hosil qilingan piramida qirralari $\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2}$ ga, balandligi $\frac{H}{2}$ ga teng bo'ladi. Piramida asos yuzi $S_{piram}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cdot\sin\varphi=\frac{1}{8}ab\sin\varphi=\frac{1}{8}S_{paral}$ ga teng bo'ladi. Piramida hajmi



17.6.2-rasm

$$V_{pir}=\frac{1}{3}S_{piram}h_{piram}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}ab\sin\varphi\cdot\frac{H}{2}=\frac{1}{48}abH\sin\varphi=\frac{1}{48}V_{paral}$$

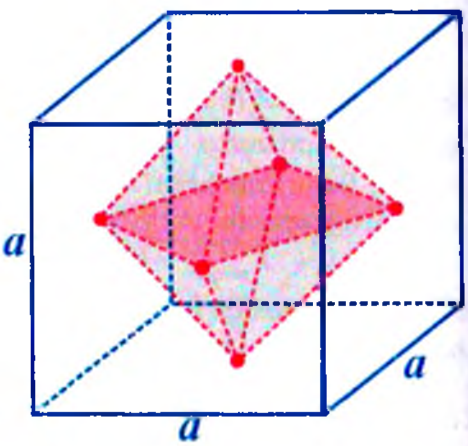
bo'ladi. Demak, parallelepipedning bitta uchda tutashuvchi qirralari o'rtalari orqali tekislik bilan kesib olingan piramida hajmi berilgan parallelepiped hajmidan 48 marta kichik bo'lar ekan.

Masala № 3: Kubning yoqlari markazlarini tutashtirish natijasida oktaedr deb ataluvchi ko'pyoq hosil bo'ladi. Oktaedr hajmi kub hajmidan necha marta katta?

Yechish:

Oktaedr asoslari umumiy bo'lgan ikkita to'rtburchakli muntazam piramidadir. Agar kubning qirrasi a ga teng bo'lsa, u holda oktaedrning qirrasi $b=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$ ga teng bo'ladi.

Piramida asosi yuzi $S_{piram}=b^2=\frac{a^2}{2}=\frac{S_{kub}}{2}$ ga, balandligi esa $h_{piram}=\frac{a}{2}$ ga teng bo'ladi. SHunda piramida hajmi $V_{pir}=\frac{1}{3}S_{pir}h_{pir}=\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}\frac{a}{2}=\frac{1}{12}a^3=\frac{1}{12}V_{kub}$ bo'ladi. Oktaedr hajmi esa piramida hajmining ikkilanganiga teng bo'ladi, ya'ni



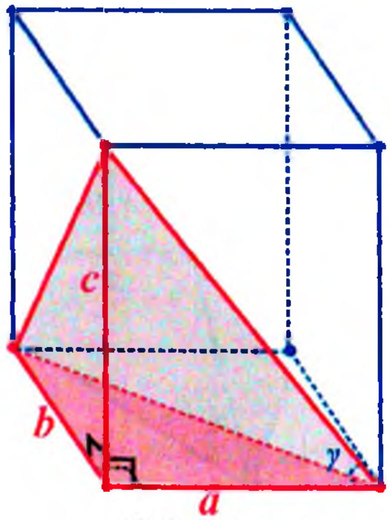
17.6.3-rasm

$V_{oktaedr}=2V_{pir}=\frac{1}{6}a^3=\frac{1}{6}V_{kub}$ bo'ladi. Demak, oktaedr hajmi kub hajmidan 6 marta kichik bo'lar ekan.

Masala № 4: O'zaro 90^0 burchak ostida kesishuvchi, qirralari uzunliklari a, b, c ga teng bo'lgan piramidaning hajmi nimaga teng?

Yechish:

Piramida asosida o'zaro 90^0 burchak ostida kesishuvchi a va b qirralar asosda $S_{piram} = \frac{1}{2}ab$ yuza hosil qiladi. Piramida balandligi $H = c$ bo'lgani uchun uning hajmi $V_{pir} = \frac{1}{3}S_{as}H = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6}V_{paral}$ bo'ladi. Demak, o'zaro 90^0 burchak ostida kesishuvchi piramida hajmi bu piramidani qamragan to'g'ri burchakli parallelepiped hajmining $1/6$ qismiga teng bo'lar ekan.



17.6.4-rasm

17.7-Mavzu: Kesik piramida.

Piramidani uning asosiga parallel tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan ko'pyoqga ***kesik piramida*** deyiladi. Kesik piramidaning asoslari o'xshash ko'pburchaklar bo'lib, yon yoqlari esa trapetsiyalardan iboratdir. O'xshash ko'pburchaklarning mos uchlarini tutashtiruvchi kesmalar kesik piramidaning ***yon qirralari*** hisoblanadi. Asoslar orasidagi masofaga kesik piramidaning ***balandligi*** deyiladi. Asoslarning mos tomonlari orasidagi masofaga kesik piramidaning ***apofemasi*** deyiladi (17.7.1-rasm).

Kesik piramida 17.7.1-rasmda tasvirlangan bo'lib, undan quyidagilarni aytib o'tamiz:

$OO_1 = h$ – kesik piramida balandligi;

$MO = H$ – butun piramida balandligi;

$MO_1 = \Delta h$ – kesib olingan piramida balandligi;

$NK = f$ – kesik piramida apofemasi;

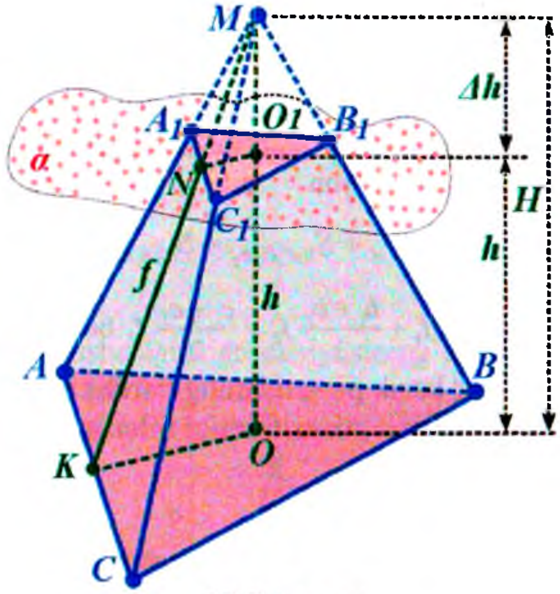
$S_{ABC} = Q$ – katta asos yuzasi;

$S_{A_1B_1C_1} = q$ – kichik asos yuzasi;

$V = V_{MABC}$ – butun piramida hajmi;

$\Delta V = V_{MA_1B_1C_1}$ – kesib olingan piramida hajmi;

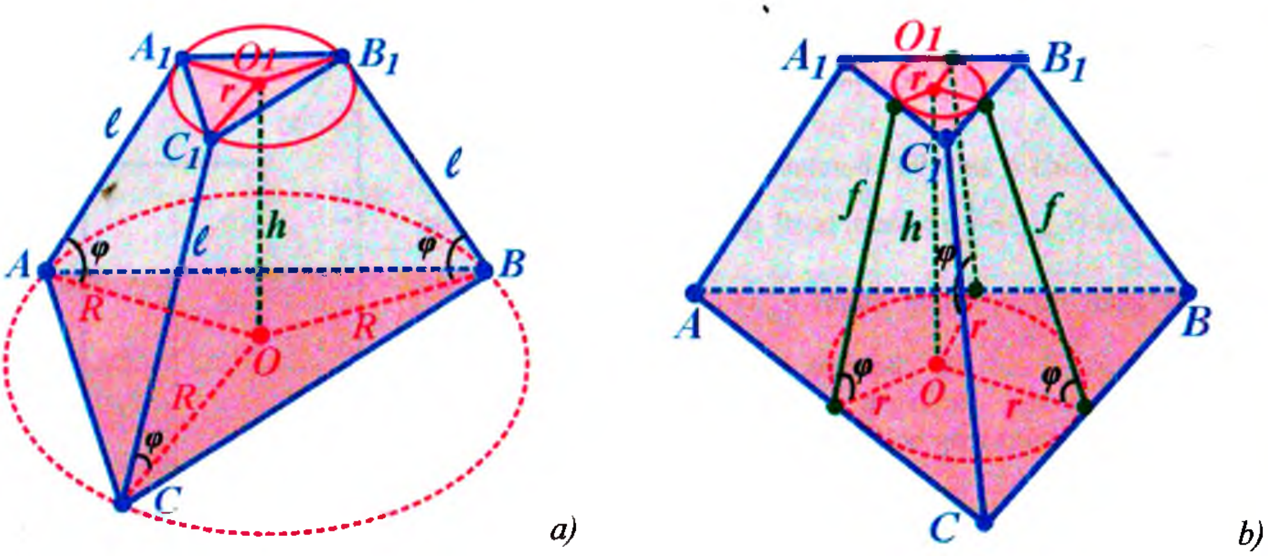
$V_k = V_{ABCA_1B_1C_1}$ – kesik piramida hajmi.



17.7.1-rasm

Umumiy holda berilgan kesik piramidaning yon yoqlari teng yonli bo'lmagan turli trapetsiyalardan iborat bo'ladi. Agar kesik piramidaning barcha yon qirralari o'zaro teng bo'lsa, u holda bu piramidaning barcha yon yoqlari teng yonli o'zaro teng trapetsiyalar bo'ladi.

Agar kesik piramida balandligi uning asoslariga tashqi chizilgan aylana markaziga tushsa, u holda bu piramidaning barcha yon qirralari o'zaro teng bo'lib, bu qirralar asoslar bilan bir xil burchak tashkil etadi. Umumiy holda yon qirralar uzunliklari turlicha bo'lib, ular asoslar bilan turlicha burchakka og'adi. Eng uzun qirra eng kichik burchakka va eng kichik qirra eng katta burchakka og'adi (17.7.2-a,rasm).



17.7.2-rasm

Agar kesik piramida balandligi uning asoslariga ichki chizilgan aylana markaziga tushsa, u holda bu piramidaning barcha apofemalari o‘zaro teng bo‘lib, bu apofemalar asoslar bilan bir xil burchak tashkil etadi. Umumiy holda apofemalar uzunliklari turlicha bo‘lib, ular asoslar bilan turlicha burchakka og‘adi. Eng uzun apofema eng kichik burchakka va eng kichik apofema eng katta burchakka og‘adi (17.7.2-b,rasm).

Kesik piramida yon yoqlari yuzalarining yig‘indisi uning yon sirtini tashkil qiladi. Umumiy holda kesik piramidaning yon sirti quyidagi formula yordamida aniqlanadi ((17.7.2-a,rasm):

$$\boxed{S_{yon} = \frac{a_1+b_1}{2}f_1 + \frac{a_2+b_2}{2}f_2 + \frac{a_3+b_3}{2}f_3 + \ldots}$$

Isboti: Kesik piramidaning yon yoqlari trapetsiyalardan iborat bo‘lib, bu trapetsiya yuzasi asoslar va balandlikka ko‘ra aniqlanadi. Kesik piramida asos tomoniga tushirilgan balandlik esa apofemadir. Pirmidaning yon sirti yon yoqlari sirtlarining yig‘indisisga teng. Shunga ko‘ra

$$S_{yon} = S_{A_1B_1B_2A} + S_{B_1C_1C_2B_2} + S_{C_1A_1A_2C_2} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{2}f_1 + \frac{B_1C_1 + B_2C_2}{2}f_2 + \frac{A_1C_1 + A_2C_2}{2}f_3 =$$

$= \frac{a_1+a_2}{2}f_1 + \frac{b_1+b_2}{2}f_2 + \frac{c_1+c_2}{2}f_3$ bo‘ladi.

Agar kesik piramidaning barcha apofemalari o‘zaro teng bo‘lsa, u holda uning yon sirti asoslar perimetrlari o‘rta arifmetigi bilan apofemasi ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{S_{yon} = \frac{p_1+p_2}{2}f}$$

Isboti: Kesik pirmidaning yon sirti yon yoqlari sirtlarining yig‘indisisga teng. SHunga ko‘ra

$$S_{yon} = S_{A_1B_1B_2A} + S_{B_1C_1C_2B_2} + S_{C_1A_1A_2C_2} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{2}f_1 + \frac{B_1C_1 + B_2C_2}{2}f_2 + \frac{A_1C_1 + A_2C_2}{2}f_3 =$$

$= \frac{a_1+a_2}{2}f_1 + \frac{b_1+b_2}{2}f_2 + \frac{c_1+c_2}{2}f_3$ bo‘ladi. Agar apofemalar o‘zaro teng bo‘lsa, ya’ni $f_1 = f_2 = f_3 = f$ bo‘lsa, u holda yon sirt $S_{yon} = \frac{a_1+a_2}{2}f + \frac{b_1+b_2}{2}f + \frac{c_1+c_2}{2}f = \frac{a_1+b_1+c_1+a_2+b_2+c_2}{2}f = \frac{p_1+p_2}{2}f$ bo‘ladi.

Kesik piramida to‘la sirti yons irti va asoslar yuzalarining yig‘indisiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{S_{to'la} = S_{yon} + Q + q}$$

Agar kesik piramidaning barcha yon yoqlari asos tekisligiga bir xil burchak ostida og‘ishsa, yon sirt va asos yuzalari orasidagi quyidagi bog‘lanish mavjud bo‘ladi.

$$\boxed{Q = q + S_{yon} \cdot \cos\alpha}$$

Kesik piramida asoslari o‘xshash ko‘pburchaklar bo‘lib, o‘xshashlik koeffitsienti quyidagicha bo‘ladi.

$$\boxed{k=\frac{H}{\Delta h}=\sqrt{\frac{Q}{q}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\Delta V}}}$$

Agar kesik piramidaning katta asosi yuzi Q, kichik asos yuzi q va balandligi h ma’lum bo‘lsa, kesilmagan katta piramidaning balandligi H va ustidan kesib olib tashlangan kichik piramidaning balandligi Δh quyidagicha bo‘ladi (17.7.1-rasm):

$$\boxed{H=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\cdot h,\qquad \Delta h=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\cdot h}$$

Isboti: $MABC$ va $MA_1B_1C_1$ piramidalar o‘xshashdir. SHuningdek ularning asoslari $S_{ABC}=Q$ va $S_{A_1B_1C_1}=q$ ham o‘xshashdir. O‘xshashlik koeffitsienti $\frac{Q}{q}=k^2=\left(\frac{H}{\Delta h}\right)^2$ dan $H=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}\Delta h$ kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan $h=H-\Delta h=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}\Delta h-\Delta h=\frac{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}{\sqrt{q}}\Delta h$ bo‘ladi. Bundan $\Delta h=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}h$ va $H=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}}\Delta h=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}h$ formulalar kelib chiqadi.

Kesik piramidaning hajmi quyidagi formula yordamida aniqlanadi (17.7.1-rasm):

$$\boxed{V_k=\frac{1}{3}h\left(Q+\sqrt{Qq}+q\right)}$$

Isboti: Kesik piramida hajmi butun piramida hajmi V va kesib tashlangan piramida hajmi ΔV ayirmasiga teng bo‘ladi. Bunda

$$V_k=V-\Delta V=\frac{1}{3}QH-\frac{1}{3}q\Delta h=\frac{1}{3}\left(Q\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\cdot h-q\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\cdot h\right)=\frac{1}{3}h\frac{\left(\sqrt{Q}\right)^3-\left(\sqrt{q}\right)^3}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}=\frac{1}{3}h\left(Q+\sqrt{Qq}+q\right)$$

natija kelib chiqadi.

Aylanish jismlari
17.8-Mavzu: Slindr.

Aylana nuqtalarini aylana tekisligiga parallel tekislikka tushirilgan proeksiyasining nuqtalari bilan tutashtirishdan hosil qilingan fazoviy jismga ***slindr*** deyiladi.

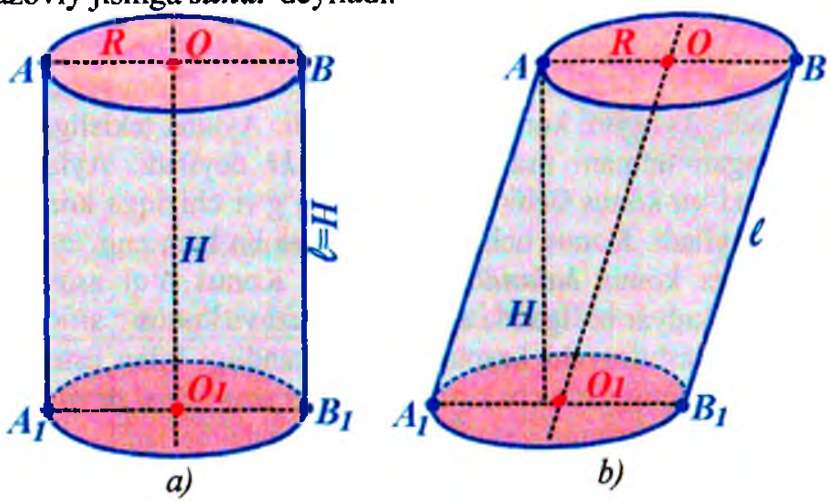
Slindr uchun quyidagilarni aytib o‘tamiz:

$OO_1=H-$slindr balandligi;

$OA=OB=R-$slindr radiusi;

$AA_1=BB_1=\ell-$ slindr yasovchisi;

$H-$slindr balandligi.



17.8.1-rasm

Slindr aylanish jismidir. To‘g‘ri to‘rtburchakni bitta tomoni atrofida aylantirishdan slindr hosil qilinadi. Aylanalarni slindr ***asoslari*** deyiladi. Aylana markazlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa slindr ***o‘qi*** deyiladi. Slindr asoslari orasidagi eng yaqin masofaga slindr ***balandligi*** deyiladi. Slindr o‘qi asoslarga perpendikulyar bo‘lsa, ***to‘g‘ri slindr***, aksincha ***og‘ma slindr*** deyiladi

(17.8.1-rasm). Aylanalarning mos nuqtalarini tutashtiruvchi kesmaga slindr ***yasovchisi*** deyiladi. To‘g‘ri slindrlarda yasovchi balandlikka teng bo‘ladi.

Slindr–aylanish jismidir. To‘g‘ri to‘rtburchakni bir tomoni atrofida to‘la bir marta aylantirishdan to‘g‘ri slindr hosil qilinadi.

Slindrni o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan kesilganda hosil bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni slindrning ***o‘q kesimi*** deyiladi.

Slindrning o‘q kesimi yuzasi slindr balandligi va diametri ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{S_{o'q} = 2RH}$$

Slindrning yon sirtini yoyilmasi eni H ga bo‘yi $2\pi R$ ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak hosil bo‘ladi. Shuning uchun slindrning yon sirti uning asos aylanasi uzunligi bilan balandligining ko‘paytmasiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{S_{yon} = 2\pi RH}$$

Slindr yon sirti yuzi va asoslar yuzalarining yig‘indisi uning to‘la sirtini beradi.

$$\boxed{S_{to'la} = S_{yon} + 2S_{asos} = 2\pi R(R+H)}$$

Agar slindrning o‘q kesimi kvadrat $(H = 2R)$ bo‘lsa, u holda uning o‘q kesimi yuzi, yon sirti va to‘la sirti quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{o'q} = 4R^2, \quad S_{yon} = 4\pi R^2, \quad S_{to'la} = 6\pi R^2}$$

Slindr asos yuzi va balandligining ko‘paytmasi slindr hajmini beradi.

$$\boxed{V = \pi R^2 H}$$

Slindrni cheksiz ko‘pburchakli muntazam prizma deb qarash mumkin.

17.9-Mavzu: Konus.

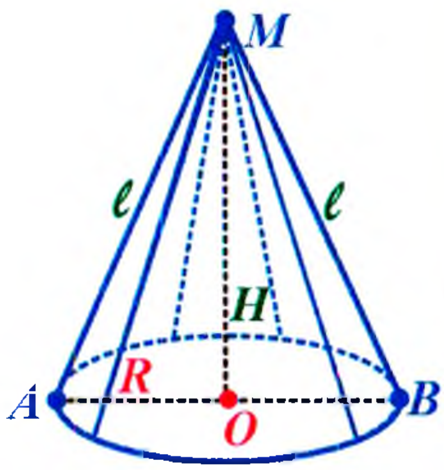
Aylana nuqtalarini aylana tekisligida yotmagan nuqta bilan ketma-ket tutashtirishdan hosil qilingan fazoviy jismga ***konus*** deyiladi.

Konus uchun quyidagilarni aytib o‘tamiz:

$MO = H$ –konus balandligi;

$OA = OB = R$ – konus radiusi;

$MA = MB = \ell$ – konus yasovchisi;



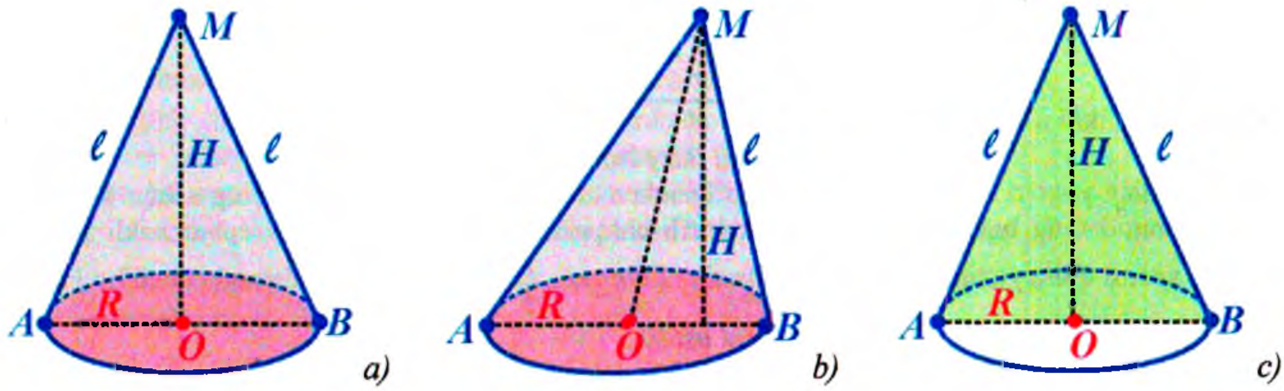
17.9.1-rasm

Konus aylanish jismidir. To‘g‘ri burchakli uchburchakni bitta kateti atrofida aylantirishdan to‘g‘ri konus hosil qilinadi. Aylanani konus ***asosi*** deyiladi. Aylana tekisligida yotmagan nuqtani esa konusning ***uchi*** deyiladi. Aylana markazi va konus uchidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqga konus ***o‘qi*** deyiladi. Konus uchidan asosgacha bo‘lgan eng yaqin masofaga konus ***balandligi*** deyiladi. Konus o‘qi asosga perpendikulyar bo‘lganda aylana markazi va konus uchini tutashtiruvchi kesma slindr balandligi bilan ustma-ust tushadi.Aylana nuqtasini konus uchi bilan tutashtiruvchi kesmaga konus ***yasovchisi*** deyiladi.

To‘g‘ri konusning yasovchisi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{\ell = \sqrt{R^2 + H^2}}$$

Agar konus o‘qi asos tekisligigaperpendikulyar bo‘lsa, ***to‘g‘ri konus***, aksincha ***og‘ma konus*** deyiladi (17.9.2-a,b,rasm).



17.9.2-rasm

Konusni o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan kesilganda hosil bo‘lgan teng yonli uchburchakni konusning ***o‘q kesimi*** deyiladi. Konusning o‘q kesimi yuzasi konus balandligi va diametri ko‘paytmasining yarmiga teng bo‘ladi (17.9.2-c,rasm).

$$\boxed{S_{o'q} = RH}$$

Konusning yon sirti uning asos aylanasi uzunligi bilan yasovchisi ko‘paytmasining yarmiga teng bo‘ladi.

$$\boxed{S_{yon} = \pi R \ell}$$

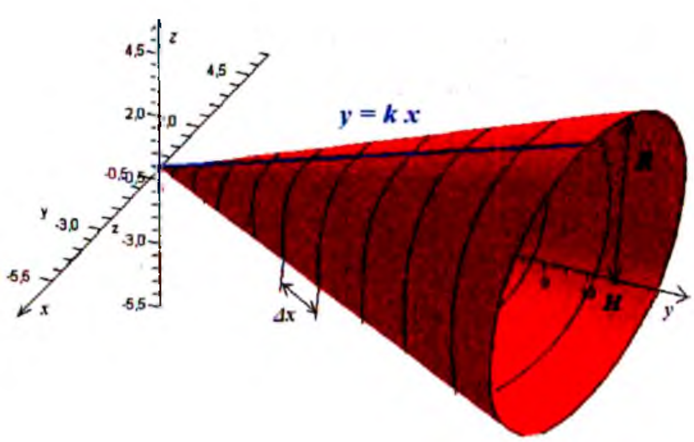
Isboti: Buni ikki usulda isbotlash mumkin.

1-usul (ko‘pburchak usuli)

Piramidaning yoqlari soni cheksiz ko‘pa bo‘lganda u konusga yaqinlashadi. Shuning uchun konusning yon sirtini piramidaning yon sirti formulasidan keltirib chiqarish mumkin. Cheksiz ko‘pburchakli piramida asosining perimetri aylana uzunligiga, piramida apofemasi esa konus yasovchisiga intiladi. Shunda $S_{yon} = \frac{1}{2} p f = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \ell = \pi R \ell$ formula hosil bo‘ladi.

2-usul (integral usuli)

$y = kx$ chiziqli funksiyaning $x = [0; H]$ kesmasini Ox o‘qi atrofida aylantirishdan konus hosil bo‘ladi. Bunda $f(H) = kH = R$ konus asosini radiusi vazifasini bajaradi. Konus yasovchisi esa $\ell = \sqrt{H^2 + R^2} = H\sqrt{1+k^2}$ bo‘ladi. Endi konus yon sirtini hisoblab topamiz. Buning uchun integrallash amalidan foydalanamiz. $S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\, dx = 2\pi \int_0^H kx\sqrt{1+k^2}\, dx =$



17.9.3-rasm

$= \pi k\sqrt{1+k^2}x^2 \Big|_0^R = \pi k\sqrt{1+k^2}H^2 = \pi k R\sqrt{1+k^2}H = \pi R \ell$ formula kelib chiqadi.

Konus yon sirti yuzi va asos yuzalarining yig‘indisi uning to‘la sirtini beradi.

$$\boxed{S_{to'la} = S_{yon} + S_{asos} = \pi R(R+\ell)}$$

Agar konusning o‘q kesimi muntazam uchburchak ($\ell = 2R$) bo‘lsa, u holda uning o‘q kesimi yuzi, yon sirti va to‘la sirti quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{o'q} = \sqrt{3}R^2, \quad S_{yon} = 2\pi R^2, \quad S_{to'la} = 3\pi R^2}$$

Agar to‘g‘ri konus yon sirti va asos tekisligi orasidagi burchak φ ga teng bo‘lsa, u holda asos yuzi va yon sirti quyidagi munosabat orqali bog‘lanadi:

$$\boxed{S_{asos} = S_{yon} \cdot \cos\varphi}$$

Konusning hajmi uning asos yuzi va balandligi ko‘paytmasining uchdan biriga teng bo‘ladi.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 H}$$

Isboti: Buni ikki usulda isbotlash mumkin.

1-usul (ko'pburchak usuli)

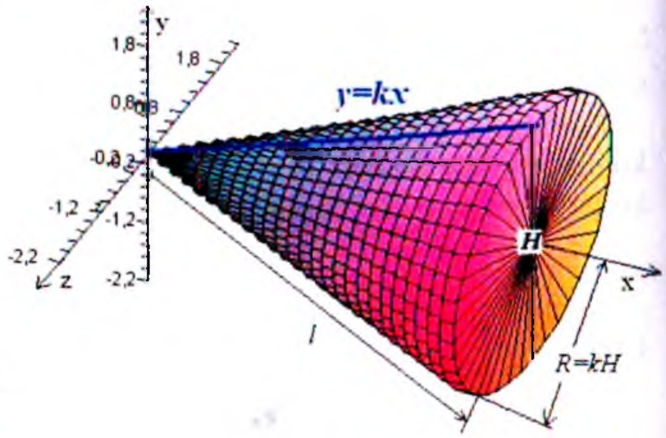
Piramidaning yoqlari soni cheksiz ko'pa bo'lganda u konusga yaqinlashadi. Shuning uchun konusning hajmini piramidaning hajmi formulasidan keltirib chiqarish mumkin. Cheksiz ko'pburchakli piramida asosining yuzasi doira yuziga intiladi. Shunda $V_{kon} = \frac{1}{3}S_{as}H = \frac{1}{3}\cdot\pi R^2 H = \frac{\pi}{3}R^2 H$ formula hosil bo'ladi.

2-usul (integral usuli)

$y = kx$ chiziqli funksiyani Ox o'qi atrofida $x = [0;\, H]$ kesmada aylantirishdan konus hosil bo'ladi. Bunda $f(H) = kH = R$ konus asosi radiusi vazifasin bajaradi. Endi konus hajmini integrallab hisoblab topamiz. Bunda

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_0^H k^2x^2\, dx = \pi\frac{k^2x^3}{3}\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{\pi k^2}{3}H^3 - \frac{\pi k^2}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}\pi(kH)^2 H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$ natija kelib chiqadi.



17.9.4-rasm

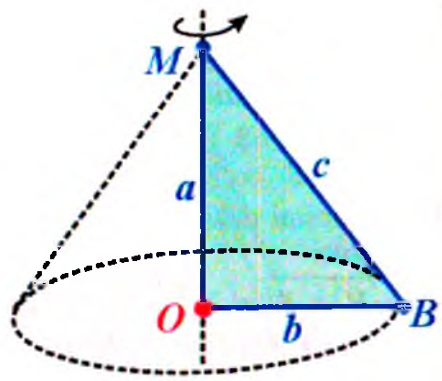
Agar konusning to'la sirti va unga ichki chizilgan shar radiusi ma'lum bo'lsa, u holda konus hajmini aniqlash mumkin bo'ladi.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}S_{to'la}\cdot r}$$

To'g'ri burchakli uchburchakni a kateti atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan konusning hajmi quyidagicha bo'ladi (17.9.5-rasm):

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi b^2 a}$$

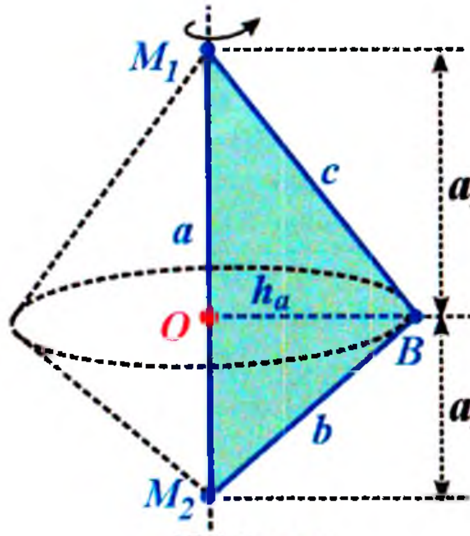
Isboti: Bunda a katet konus balandligi va b katet konus asosi radiusi vazifasini bajaradi. Shunga ko'ra $H = a,\ R = b$ bo'ladi. Konus hajmi $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi b^2 a$ bo'ladi.



17.9.5-rasm

Tomonlari ixtiyoriy a, b, c bo'lgan uchburchakni, ixtiyoriy tomoni atrofida, aytaylik a tomoni atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanish jismining hajmi quyidagicha bo'ladi (17.9.6-rasm):

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h_a^2 a}$$

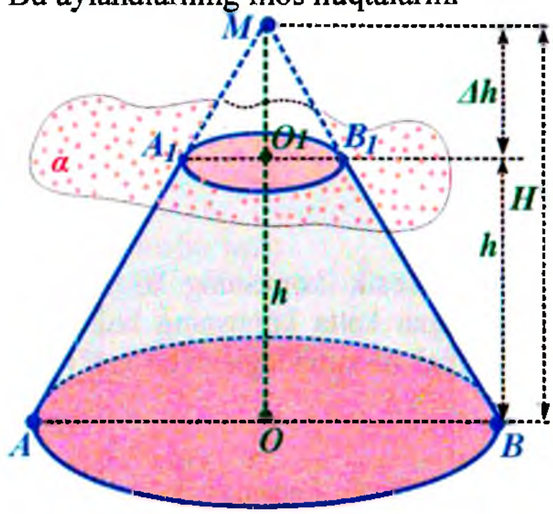


17.9.6-rasm

<u>Isboti:</u> Bunda a tomonga tushirilgan h_a balandlik bu tomonni a_1 va a_2 kesmalarga ajratadi. Natijada, berilgan uchburchak ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchaklarga ajraladi. Bu uchburchakni aytantirishdan hosil bo‘lgan aylanish jismi umumiy asosga ega bo‘lgan ikkita konusdan iborat bo‘ladi. Bu konuslar umumiy asosi radiusi $R = h_a$ ga, balandliklari esa $H_1 = a_1$, $H_2 = a_2$ ga teng bo‘ladi. Aylanish jismining hajmi bu konuslar hajmlarining yig‘indisiga teng bo‘ladi. So‘ralgan hajmi $V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2 H_1 + \frac{1}{3}\pi R^2 H_2 =$
$= \frac{1}{3}\pi h_a^2 a_1 + \frac{1}{3}\pi\, h_a^2 a_2 = \frac{1}{3}\pi h_a^2 (a_1 + a_2)\frac{1}{3}\pi h_a^2$ bo‘ladi.

17.10-Mavzu: Kesik konus.

Konusni asosiga parallel tekislik bilan kesishdan hosil bo‘lgan aylanish jismiga ***kesik konus*** deyiladi. Kesik konusning asoslari o‘xshash aylanalardir. Bu aylanalarning mos nuqtalarini tutuashtiruvchi kesmaga kesik konusning ***yasovchisi*** deyiladi. Asos tekisliklari orasidagi masofaga kesik konusning ***balandligi*** deyiladi. Asoslar markazlari orqali o‘tuvchi o‘qqa kesik konusning ***o‘qi*** deyiladi (17.10.1-rasm).



17.10.1-rasm

Kesik konus uchun quyidagilarni aytib o‘tamiz:

$OO_1 = h$ – kesik konus balandligi;
$MO = H$ – butun konus balandligi;
$MO_1 = \Delta h$ – kesib olingan konus balandligi;
$AA_1 = \ell$ – kesik konus yasovchisi;
$Q = \pi R^2$ – katta asos yuzasi;
$q = \pi r^2$ – kichik asos yuzasi;
V – butun konus hajmi;
ΔV – kesib olingan konus hajmi;
V_{kk} – kesik konus hajmi.

Kesik konus aylanish jismidir. To‘g‘ri burchakli trapetsiyani kichik yon tomoni atrofida aylantirishdan kesik konus hosil qilinadi.

Kesik konusning o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan kesilganda uning o‘q kesimi hosil bo‘ladi. Kesik konusning o‘q kesimi balandligi h ga, asoslari $2r$ va $2R$ ga teng bo‘lgan teng yonli tapetsiyadir. Kesik konusning o‘q kesimi yuzasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\boxed{S_{o‘q} = (R + r)h}$$

Kesik konusning yon sirti quyidagi formuladan topiladi:

$$\boxed{S_{yon} = \pi(R + r)\ell}$$

<u>Isboti:</u> Buni ikki usulda isbotlash mumkin.

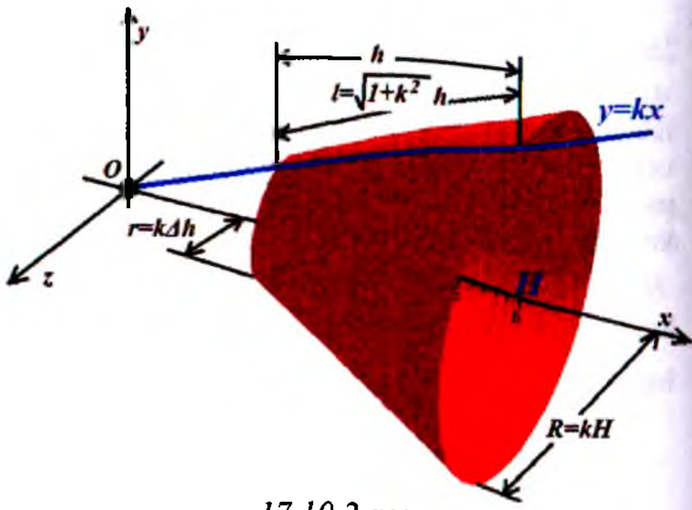
1-usul (ko‘pburchak usuli)

Kesik piramidaning yoqlari soni cheksiz ko‘pa bo‘lganda u kesik konusga yaqinlashadi. Shuning uchun kesik konusning yon sirtini kesik piramidaning yon sirti formulasidan keltirib chiqarish mumkin. Shunda $S_{yon} = \frac{p_1 + p_2}{2} f = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} \cdot \ell = \pi(R + r)\ell$ formula hosil bo‘ladi.

2-usul (integral usuli)

$y = kx$ chiziqli funksiyaning $x=[\Delta h;\, H]$ kesmasini Ox o'qi atrofida aylantirishdan kesik konus hosil bo'ladi. Bunda kesik konusning katta asosi radiusi $f(H)=kH=R$ ga, kichik asosi radiusi esa $f(\Delta h)=k\Delta h=r$ ga teng bo'ladi. Kesik konus balandligi $h=H-\Delta h$ ga, yasovchisi esa $\ell=\sqrt{h^2+(R-r)^2}=\sqrt{h^2+(kH-k\Delta h)^2}=h\sqrt{1+k^2}$ bo'ladi. Endi kesik konus yon sirtini integrallash orqali hisoblab topamiz.

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_{\Delta h}^{H} kx\sqrt{1+k^2}\,dx=\pi k\sqrt{1+k^2}\cdot$$
$$\cdot\left(H^2-\Delta h^2\right)=\pi(kH+k\Delta h)(H-\Delta h)\sqrt{1+k^2}=$$



17.10.2-rasm

$$=\pi(kH+k\Delta h)(H-\Delta h)\sqrt{1+k^2}=\pi(R+r)h\sqrt{1+k^2}=\pi(R+r)\ell.$$

Kesik konusning to'la sirti yon sirt va asoslar yuzalarining yig'indisiga teng bo'ladi.

$$\boxed{S_{to'la}=S_{yon}+Q+q=\pi\left[(R+r)\ell+R^2+r^2\right]}$$

Kesik konusning yon sirt va asos yuzalari orasidagi bog'lanish quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{Q=q+S_{yon}\cdot\cos\alpha}$$

Kesik piramida asoslari o'xshash ko'pburchaklar bo'lib, o'xshashlik koeffitsienti quyidagicha bo'ladi.

$$\boxed{k=\frac{H}{\Delta h}=\sqrt{\frac{Q}{q}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\Delta V}}}$$

Agar kesik konusning asoslar radiuslari R va r hamda balandligi h ma'lum bo'lsa, kesilmagan katta konusning balandligi H va ustidan kesib olib tashlangan kichik konusning balandligi Δh quyidagicha bo'ladi (17.10.1-rasm):

$$\boxed{H=\frac{R}{R-r}\cdot h,\qquad \Delta h=\frac{r}{R-r}\cdot h}$$

<u>Isboti:</u> Kesik konus cheksiz ko'p burchakli kesik piramidadir. SHuning uchun 325-betda kesik piramida uchun chiqarilgan formulalardan foydalanib, so'ralgan kattaliklarni aniqlaymiz. Bunda $H=\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\cdot h=\frac{\sqrt{\pi R^2}}{\sqrt{\pi R^2}-\sqrt{\pi R^2}}\cdot h=\frac{R}{R-r}h$ va $\Delta h=\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{Q}-\sqrt{q}}\cdot h=\frac{\sqrt{\pi q^2}}{\sqrt{\pi R^2}-\sqrt{\pi R^2}}\cdot h=\frac{q}{R-r}h$ natijalar kelib chiqadi.

Kesik piramidaning hajmi quyidagi formula yordamida aniqlanadi (17.7.1-rasm):

$$\boxed{V_{kk}=\frac{\pi}{3}h\left(R^2+Rr+r^2\right)}$$

<u>Isboti:</u> Buni ikki usulda isbotlash mumkin.

1-usul (ko'pburchak usuli)

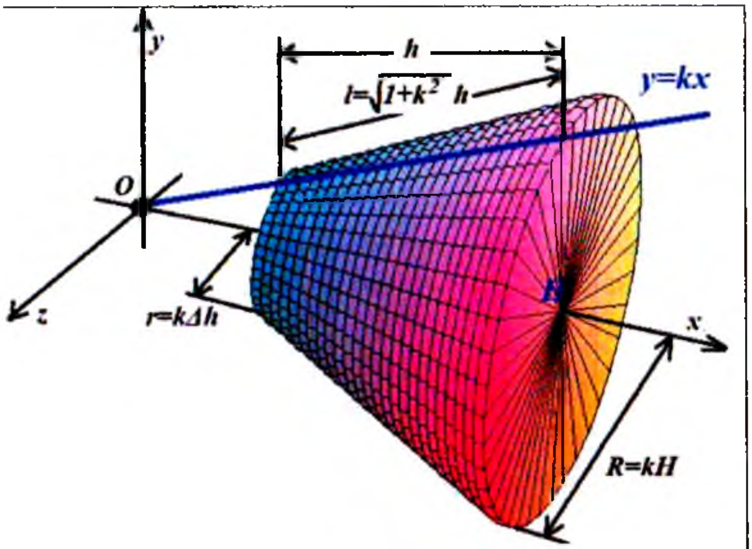
Kesik konusni cheksiz ko'pburchakli kesik piramida deb tasavvur ilish mumkin. Bunda kesik piramida asoslari doralarga, ya'ni kesik konus aosslariga aylanadi. Kesik konus hajmini kesik piramida hajmidan foydalanib aniqlash mumkin. Unga ko'ra kesik konus hajmini aniqlash uchun $V_{kk}=\frac{1}{3}h\left(Q+\sqrt{Qq}+q\right)=\frac{1}{3}h\left(\pi R^2+\sqrt{\pi R^2\,\pi r^2}+\pi r^2\right)=\frac{\pi}{3}h\left(R^2+Rr+r^2\right)$ formula kelib chiqadi.

2-usul (integral usuli)

$y = kx$ chiziqli funksiyani Ox o'qi atrofida $x = [\Delta h;\ H]$ kesmada aylantirishdan kesik konus hosil bo'ladi. Bunda kesik konusning katta asosi radiusi $f(H) = kH = R$ ga, kichik asosi radiusi esa $f(\Delta h) = k\Delta h = r$ ga teng bo'ladi. Kesik konus balandligi $h = H - \Delta h$ ga, yasovchisi esa $\ell = \sqrt{h^2 + (R-r)^2} = \sqrt{h^2 + (kH - k\Delta h)^2} = h\sqrt{1+k^2}$ bo'ladi. Endi kesik konus hajmini integrallash orqali hisoblab topamiz.

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_{\Delta h}^{H} k^2x^2\, dx = \pi\frac{k^2x^3}{3}\Bigg|_{\Delta h}^{H} =$$

$$= \frac{\pi k^2}{3}H^3 - \frac{\pi k^2}{3}\cdot\Delta h^3 = \frac{1}{3}\pi(kH)^2 H =$$



17.10.3-rasm

$$= \frac{\pi}{3}k^2(H-\Delta h)(H^2 + H\Delta h + \Delta h^2) = \frac{\pi}{3}h(k^2H^2 + kH\cdot k\Delta h + k^2\Delta h^2) = \frac{\pi}{3}h(R^2 + Rr + r^2)$$ natija kelib chiqadi.

17.11-Mavzu: Sfera va shar. Segment va sektor.

Fazoda olingan nuqtadan teng uzoqlikda joylashgan nuqtalarning geometrik o'rniga ***sfera*** deyiladi. Sfera aylanish jismidir. Aylanani uning diametri atrofida aylantirilganda sfera hosil bo'ladi. Sferaga misol qilib koptokni aytish mumkin.

Markazi koordinatalar boshida bo'lgan sfera tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2}$$

Markazi $O_1(a;\ b;\ c)$ nuqtada bo'lgan sfera tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}$$

Sferaning tashqi sirti quyidagi formula orqali hisoblab topiladi (17.11.1-rasm):

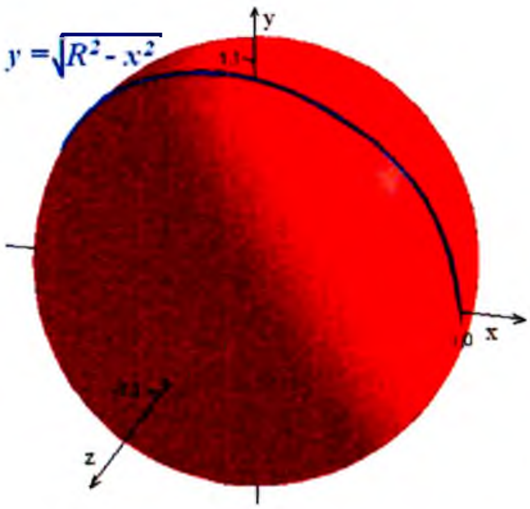
$$\boxed{S = 4\pi R^2}$$

<u>**Isboti:**</u> Aylana tenglamasi $x^2 + y^2 = R^2$ formulasidan y ni oshkor etsak, $y_1 = \sqrt{R^2 - x^2}$ – yuqorigi yarim aylana hamda $y_2 = -\sqrt{R^2 - x^2}$ – quyi yarim aylana hosil bo'ladi. Shulardan birini, aytaylik yuqorigi yarim aylanani olib, uni Ox o'qi atrofida bir aylantirsak, sfera hosil bo'ladi. Yuqorgi yarim aylanani $x \in [-R,\ R]$ kesmada intagrallasak, sfera sirti kelib chiqadi. Buning uchun eng avvalo funksiya hosilasini aniqlaymiz. Hosila $y' = \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)'_x = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ bo'ladi.Endi formulada ishtirok etadigan ildizni hisoblaymiz. Ildiz $\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ bo'ladi. Endi integrallash orqali so'ralgan yuzani aniqlaymiz. Shunda ushbu

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= 2\pi R\int_{-R}^{R} dx = 2\pi Rx\Bigg|_{-R}^{R} = 2\pi R^2 - (-2\pi R^2) = 4\pi R^2$$

natija kelib chiqadi.



17.11.1-rasm

Sferadan tekislik bilan kesib olingan qism ***sfera segment*** deyiladi. Segment asosi aylanadan iborat bo'lib, bu aylana radiusi berilgan sfera radiusidan katta bo'lmaydi. Segment asosi markazidan eng uzoq nuqtani