O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

MIRZO ULUG’BEK NOMIDAGI

O’ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MATEMATIKA FAKULTETI

Xudoyberdiyev A.X.

KOMBINATORIKA VA GRAFLAR NAZARIYASI

1-qism

(uslubiy qo’llanma)

Toshkent – 2017

Kombinatorika va graflar nazariyasi

Ushbu uslubiy qo'llanma "Amaliy matematika va Informatika", "Informatika va axborot texnologiyalari" va "Axborot xavfsizligi" bakalavriat ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, "Kombinatorika va graflar nazariyasi" fanining birinchi bobi hisoblangan kombinatorikaga doir nazariyani o'z ichiga oladi. Qo'llanmada кombinatorikaga doir nazariy bilimlar bayon qilinib, har bir mavzuga doir misollar yechimlari berilgan va mustaqil yechish uchun masalalar keltirilgan.

Комбинаторика и теория графов

Данное методическое пособие рассчитано для студентов бакалавриата направлений «Прикладная математика и информатика», «Информатика и информационные технологии» и «Информационная безопасность». В пособие излагаются основные теории и задачи комбинаторики, которые являются первым разделом предмета «Комбинаторика и теория графов». В пособие приведены теоретические знания, некоторые примеры с решениями и задачи для самостоятельных работ.

Combinatorics and graph theory

This methodical manual may be usefull for undergraduate students of directions "Applied mathematics and Informatics", "Informatics and information technologies" and "Informational security". The manual describes the basic theories and problems of combinatorics, which is the first section of the subject "Combinatorics and graph theory". In the manual theoretical knowledge, examples with solutions and tasks for independent works are presented.

Muallif:

fizika-matematika fanlari doktori
Xudoyberdiyev Abror Xakimovich.

Taqrizchilar:

fizika-matematika fanlari nomzodi
Ibragimov Farhod Nurmuhammadjonovich,

fizika-matematika fanlari nomzodi
Adashev Jobir Qodirovich.

Ma'sul muharrir:

fizika-matematika fanlari doktori, professor
Omirov Baxrom Abdazovich.

O'zbekiston Milliy universiteti O'quv-uslubiy Kengashining 2017 yil 12 dekabrdagi 3-sonli bayonnomasiga asosan nashr qilishga ruxsat etilgan.

KIRISH

Kombinatorika va graflar nazariyasi fani dastavval Diskret matematika fanining tarkibiy qismi sifatida shakllangan bo'lib, hozirgi kunda alohida fan sifatida rivojlanmoqda. Ushbu fan Oliy ta'lim muassasalarining bir necha yo'nalishlari o'quv rejalariga kiritilgan.

Ushbu uslubiy qo'llanma “Amaliy matematika va Informatika”, “Informatika va axborot texnologiyalari” va “Axborot xavfsizligi” bakalavr ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan bo'lib, Kombinatorika va graflar nazariyasi fanining birinchi bo'limi kombinatorikaga doir nazariyani bayon qiladi. Qo'llanma tarkibida Kombinatorikaga doir nazariy bilimlar bayon qilinib, har bir mavzuga doir misollar yechimlari berilgan va mustaqil yechish uchun masalalar keltirilgan.

Maskur qo'llanma O'zbekiston Milliy universiteti Matematika fakultetida “Kombinatorika va graflar nazariyasi” fani bo'yicha o'qilgan ma'ruzalar va olib borilgan amaliy mashg'ulotlar asosida tayyorlangan bo'lib, O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan tasdiqlangan Davlat ta'lim standartlariga mos keladi.

1 - § To’plamlar va ular ustida amallar. Akslantirishlar

1.1. To’plamlar va ular ustida amallar

Kombinatorika va graflar nazariyasida turli to‘plamlar va akslantirishlar muhim obyektlar hisoblanadi. Ushbu kursda to’plamlar ustida amallar, ularning xossalari, akslantirishlar va ularning turlaridan keng foydalaniladi.

To’plam deganda biror umumiy xususiyatga ega bo’lgan narsalar majmuasi, yig’ilmasi tushuniladi. To‘plamni tashkil etuvchilari shu *to‘plamning elementlari* deb ataladi. To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Elementlari soni chekli va mos ravishda cheksiz bo’lgan to’plamga mos ravishda *chekli va cheksiz to‘plamlar* deyiladi.

To‘plamlarni odatda, lotin alifbosining bosh harflari $\{A, B, C, ...\}$, uning elementlarini esa alifboning kichik harflari $\{a, b, c, ...\}$ orqali belgilanadi. A to‘plam $a, b, c, d, ..., z$ elementlardan tashkil topgan bo’lsa $A = \{a, b, c, d, ..., z\}$ ko‘rinishda ifodalanadi.

Agar a element A to’plamninng elementi bo’lsa, u holda a element A to’plamga tegishli deyiladi va $a \in A$ kabi belgilanadi, aks holda a element A to’plamga tegishli emas deyiladi va $a \notin A$ kabi belgilanadi.

Birorta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam *bo‘sh to‘plam* deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Agar A to’plamning barcha elementi B to’plamga tegishli bo’lsa, A to’plam B to’plamning *qism to’plami* deyiladi va $A \subseteq B$ kabi belgilanadi. Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo’lsa, A va B to’plamlar *teng to’plamlar* deyiladi va $A = B$ kabi belgilanadi. Teng to‘plamlar aynan bir xil elementlardan iborat bo‘ladi. A va B to‘plamlar teng bo‘lmasa, $A \neq B$ ko‘rinishda ifodalanadi.

To‘plamlar nazariyasida quvvat eng muhim tushunchalardan biri bo‘lib, u to‘plamlarni taqqoslashda katta ahamiyatga egadir.

To‘plamning quvvati tushunchasi, uning chekli yoki cheksiz bo‘lishiga qarab ta’riflanadi. Kombinatorika va graflar nazariyasida, asosan, chekli to‘plamlar bilan ishlanadi. Shu sababli, to‘plamning quvvati tushunchasini faqat chekli to‘plamlar uchun keltirish bilan chegaralanamiz.

Chekli A to‘plamning elementlari soniga shu *to‘plamning quvvati* deyiladi va $|A|$ kabi belgilanadi.

1.1-Ta’rif. A va B to‘plamlarning barcha elementlaridan, ularni takrorlamasdan, tuzilgan to‘plamga shu to‘plamlarning *birlashmasi* deb aytiladi. A va B to‘plamlarning birlashmasi $A \bigcup B$ kabi belgilanadi.

1.2-Ta’rif. A va B to‘plamlarning umumiy elementlaridan tashkil topgan to‘plamga shu to‘plamlarning *kesishmasi* deb aytiladi. A va B to‘plamlarning kesishmasi $A \bigcap B$ kabi belgilanadi.

1.3-Ta’rif. A to’plamning B to‘plamlarga tegishli bo’lmagan elementlaridan tashkil topgan to‘plamga A to‘plamdan B to‘plamni *ayirmasi* deb ataladi va $A \setminus B$ kabi belgilanadi.

A va B to‘plamlarning *simmetrik ayirmasi* deb quyidagicha aniqlangan to’plamga aytiladi:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

To’plamlar ustida aniqlangan amallar uchun quyidagi xossalar o’rinli:

1. $A \bigcup A = A$ (birlashmaning idempotentligi);

2. $A \bigcap A = A$ (kesishmaning idempotentligi);

3. $A \bigcup B = B \bigcup A$ (birlashmaning kommutativligi);

4. $A \bigcap B = B \bigcap A$ (kesishmaning kommutativligi);

5. $(A \bigcup B) \bigcup C = A \bigcup (B \bigcup C)$ (birlashmaning assotsiativligi);

6. $(A \bigcap B) \bigcap C = A \bigcap (B \bigcap C)$ (kesishmaning assotsiativligi);

7. Agar $A \subseteq B$ bo’lsa, $A \bigcup B = B$ bo’ladi;

8. Agar $A \subseteq B$ bo’lsa, $A \bigcap B = A$ bo’ladi;

9. $(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C)$;

10. $(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)$;

11. $A\Delta B=(A\bigcup B)\setminus(B\bigcap A)$;

12. $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$;

Endi to'plamlarning dekart ko'paytmasi tushunchasini kiritamiz. Buning uchun A va B to'plamlardan olingan $a\in A$ va $b\in B$ elementlardan tuzilgan (a, b) = {{a}, {a,b}} tartiblangan juftlikni aniqlaymiz. Tartiblangan juftlikning aniqlanishidan ma'lumki, umuman aytganda $(a, b) \neq (b, a)$. Kombitorika va graflar nazariyasi fanining graflar nazariyasi qismida tartiblanmagan juftlik tushunchasidan ham foydalaniladi, ya'ni (a, b) = (b, a) deb faraz qilib olinadi. Bu holda tartiblanmagan juftlikni (a, b) = {a,b} kabi aniqlash maqsadga muvofiq.

1.4-Ta'rif. A va B to'plamlarning barcha tartiblangan juftliklaridan tashkil topgan $\{(a, b) \mid a\in A,\ b\in B\}$ to'plamga A va B to'plamlarning *dekart ko'paytmasi* deyiladi va $A\times B$ kabi belgilanadi.

Agar A va B to'plamlar chekli to'plamlar bo'lsa, u holda $|A\times B| = |A||B|$ bo'ladi. Masalan A = {2, 3, 6}, B = {a, b} to'plamlarning dekart ko'paytmasi

$$A\times B = \{(2, a), (3, a), (6, a), (2, b), (3, b), (6, b)\}$$

ko'rinishiga ega bo'ladi.

1.2. Akslantirishlar va ularning turlari

Bizga A va B bo'sh bo'lmagan to'plamlar berilgan bo'lsin.

1.5-Ta'rif. Agar A to'plamning har bir elementiga biror f qonun yoki qoidaga asosan B to'plamning faqat bitta elementi mos qo'yilsa, A to'plamdan B to'plamga *akslantirish* aniqlangan deyiladi, aniqlangan moslik esa akslantirish deyilib, $f\colon A \to B$ kabi belgilanadi.

Agar $f\colon A \to B$ akslantirish $a\in A$ elementni $b\in B$ elementga mos qo'ysa, u holda b element a ning f akslantirishdagi *aksi* (obrazi), a element esa b ning f akslantirishdagi *asli* (proobrazi) deyiladi va $b = f(a)$ ko'rinishida belgilanadi.

A to'plam f akslantirishining *aniqlanish sohasi* $f(A) = \{b \in B \mid b = f(a), a \in A\}$ to'plam esa *qiymatlar*(*o'zgarish*) *sohasi* deyiladi.

Berilgan $b \in B$ elementning barcha proobrazlar to'plamini $f^{-1}(b)$ orqali belgilaymiz, ya'ni $f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$.

1.1-Misol. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ to'plamlar berilgan bo'lib, f akslantirish quyidagicha aniqlangan bo'lsin

$$f(1) = b,\ f(3) = c,\ f(5) = d,\ f(7) = c,\ f(9) = d.$$

U holda $f(A) = \{b, c, d\}$ va $f^{-1}(b) = \{1\}$, $f^{-1}(c) = \{3, 7\}$, $f^{-1}(b) = \{1\}$ bo'ladi.

1.6-Ta'rif. Agar $f\colon A \to B$ akslantirish A to'plamning turli elementlarini turli xil elementlarga o'tkazsa, ya'ni $a_1, a_2 \in A$ lar uchun $f(a_1) = f(a_2)$ tenglikdan $a_1 = a_2$ tenglik kelib chiqsa, f akslantirish *inyektiv* akslantirish deyiladi.

1.7-Ta'rif. Agar $f\colon A \to B$ akslantirish uchun $f(A) = B$ tenglik bajarilsa, ya'ni ixtiyoriy $b \in B$ uchun shunday $a \in A$ topilib, $f(a) = b$, bo'lsa f akslantirish *surektiv* akslantirish deyiladi.

1.8-Ta'rif. Agar $f\colon A \to B$ akslantirish ham inyektiv, ham surektiv bo'lsa, f akslantirish *biyektiv* (o'zaro bir qiymatli) akslantirish deyiladi.

1.2-Misol. $A = \{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{x, y, z, t\}$, to'plamlar berilgan bo'lib, quyidagi akslantirishlar aniqlangan bo'lsin:

i) $f_1\colon A \to B$, $f_1(1) = b$, $f_1(2) = c$, $f_1(4) = a$, $f_1(6) = c$, $f_1(8) = d$;

ii) $f_2\colon C \to A$, $f_2(x) = 2$, $f_2(y) = 6$, $f_2(z) = 4$, $f_2(t) = 1$;

iii) $f_3\colon B \to C$, $f_3(a) = y$, $f_3(b) = t$, $f_3(c) = x$, $f_3(d) = z$;

iv) $f_4\colon A \to C$, $f_4(1) = t$, $f_4(2) = x$, $f_4(4) = x$, $f_4(6) = t$, $f_4(8) = z$;

$f_1\colon A \to B$ akslantirish surektiv, lekin inyektiv emas;

$f_2\colon C \to A$ akslantirish inyektiv, lekin surektiv emas;

f_3: B $\rightarrow$ C akslantirish ham inyektiv, ham surektiv, ya'ni biyektiv akslantirish;

f_4: A $\rightarrow$ C akslantirish esa inyektiv ham, surektiv ham emas.

Bizga n ta elementga ega bo'lgan A to'plam berilgan bo'lsin. To'plam elementlarini shartli ravishda 1, 2, ..., n sonlar orqali belgilab olamiz, ya'ni berilgan to'plamni A={1, 2, 3, ..., n} ko'rinishda yozish mumkin.

1.9-Ta'rif. A={1, 2, 3, ..., n} to'plamni o'ziga akslantiruvchi biyektiv akslantirishga n-darajali o'rin almashtirish deyiladi.

A to'plamda aniqlangan f o'rin almashtirishni

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(1) & f(2) & \dots & f(n) \end{pmatrix}$$

ko'rinishda belgilanadi.

A to'plamning barcha o'rin almashtirishlar to'plamini S_n orqali belgilaymiz.

1.10-Ta'rif. f va g o'rin almashtirishlar ko'paytmasi deb f va g akslantirishlarning kompozitsiyasiga aytiladi, ya'ni

$$f \cdot g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f(g(1)) & f(g(2)) & \dots & f(g(n)) \end{pmatrix}.$$

A to'plamning har bir elementini shu elementning o'ziga o'tkazuvchi ε akslantirishga ayniy o'rin almashtirish deyiladi va u

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

ko'rinishiga ega bo'ladi.

A to'plamdan olingan f o'rin almashtirishga teskari o'rin almashtirish

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & \dots & f(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ f^{-1}(1) & f^{-1}(2) & \dots & f^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

ko'rinishida bo'ladi.

1.11-Ta'rif. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix}$ o'rin almashtirishda A to'plamning ixtiyoriy i va j elementlaridan tuzilgan juftlik uchun $i-j$ va $f(i)-f(j)$ ayirmalar bir xil ishoraga ega bo'lsa, bu juftlik inversiya tashkil etadi deyiladi.

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ f(1) & f(2) & ... & f(n) \end{pmatrix}$ o'rin almashtirishning barcha inversiya tashkil qiluvchu juftliklari soni uning inversiyalar soni deyiladi.

1.2-Misol. $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ o'rin almashtirishda $\{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}$, $\{3,4\}$ juftliklar inversiya tashkil etadi. Demak bu o'rin almashtirishning inversiyalar soni 4 ga teng.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1.1. A = {1, 2}, B = {2, 3}, C = {1, 2, 3}, D = {{1,2}, {2,3}}, to'pmallar uchun, $A \subseteq C$, $B \subseteq C$, $A \cup B = C$, $C \neq D$ ekanligini ko'rsating.

1.2. M = {3; 5; 7; 8; 9; 15}, P = {4; 5; 7; 9; 10; 17}, Q = {3; 4; 7} to'plamlar berilgan. $M \cap P$, $M \cap Q$, $P \setminus Q$, $P \Delta Q$ larni toping.

1.3. A = {18 ning natural bo'luvchilari to'plami},
B = {24 ning natural bo'luvchilari to'plami}.
$A \cap B$, $B \setminus A$, $B \setminus A$, $A \cup B$, $A \Delta B$ larni toping.

1.4. 48 va 128 sonlarining bo'luvchilardan tashkil topgan to'plamlarni tuzing.

1.5. A= [-3;5], B = (-3;5) bo'lsa, $A \cap B$, $B \setminus A$, $B \setminus A$, $A \cup B$ larni toping.

1.6. A= {50 gacha bo'lgan tub sonlar to'plami},
B = {280 ning natural bo'luvchilari to'plami},

$A \cap B$, $B \setminus A$, $B \setminus A$, $A \cup B$ larni toping.

1.7. $A = (0; 6)$ to'plamni $B = (0; 1)$ to'plamga o'tkazuvchi biyektiv akslantirish quring.

1.8. $A = \{3k \mid k \in Z\}$, $B = \{5k \mid k \in Z\}$ bo'lsa, $A \cap B$, $B \setminus A$, $B \setminus A$, $A \cup B$ larni toping.

1.9. $A = \{x \in R \mid |x| > 2\}$, $B = \{x \in R \mid x^2 + 8x + 15 < 2\}$ bo'lsa $A \cap B$, $B \setminus A$, $B \setminus A$, $A \cup B$ larni toping.

1.10. 1, 2, 3 raqamlarining har biridan faqat bir marta foydalanib yoziladigan uch xonali sonlar to'plamini yozing. Bu to'plamning nechta elementi bor?

1.11. Quyidagi tengliklarni isbotlang.

a) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,

c) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$,

d) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$,

e) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$,

f) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus (B \setminus C)$,

g) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus C) \cup (A \cap C)$,

h) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

1.12. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5\}$ bo'lsa, $A \times B$ va $B \times A$ dekart ko'raytmalarni toping.

1.13. $A = \{3, 5\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{a, b, c\}$ bo'lsa, $(A \times B) \times C$ va $B \times (A \times C)$ dekart ko'raytmalarni toping.

1.14. $A = [2, 4]$, $B = (0, 2]$, $C = (1, 4)$, $D = \{2, 3\}$ bo'lsa, $A \times A$, $A \times B$, $A \times C$, $A \times D$, $B \times C$, $B \times D$, $C \times C$, $C \times D$, dekart ko'raytmalarning geometrik tasvirini ifodalang.

1.15. Quyidagi tengliklarni isbotlang.

a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,

b) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$,

1.16. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ to'plamni $B = \{x, y, z\}$ to'plamga akslantiruvchi surektiv akslantirish quring.

1.17. $A = \{1, 2, 4\}$ to'plamni $B = \{x, y, z, t\}$ to'plamga akslantiruvchi inyektiv akslantirish quring.

1.18. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ to'plamni $B = \{x, y, z, t\}$ to'plamga akslantiruvchi biyektiv akslantirish quring.

1.19. Quyidagi $f\colon Z \to Z$ akslantirishlarning obrazini toping.

a) $f(x) = x^2$, c) $f(x) = x + 2$,

b) $f(x) = |x| + x$ d) $f(x) = 2x$.

1.20. Quyidagi o'rin almashtirishlarning inversiyalar sonini toping

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

1.21. Hisoblang.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1.22. Quyidagi ketma-ketliklarda faqat o'zaro qo'shni elementlarining o'rinlarini almashtirgan holda o'sish tartibidagi ketma-ketlik ko'rinishiga keltirish uchun nechta almashtirish bajarish kerak?

a) 2, 1, 6, 7, 4, 3, 5;

b) 4, 7, 2, 8, 1, 6, 5, 3;

c) 2, 4, 6, 8, ..., 2n, 1, 3, 5, 7, ... 2n–1;

d) 1, 4, 7, ..., 3n–2, 2, 5, 8, ..., 3n–1; 3, 6, 9, ..., 3n;

e) 2, 5, 8, ..., 3n–1; 3, 6, 9, ..., 3n; 1, 4, 7, ..., 3n–2,

f) 2, 6, ..., 4n–2; 1, 5, ..., 4n–3; 4, 8, ..., 4n; 3, 7, ..., 4n–1.

2 - § Kombinatorikaning asosiy elementlari

Ushbu paragrafda kombinatikaning asosiy obyektlari, tushunchalari va formulalari haqida gap boradi.

Dastlab kombinatorikaning asosiy metodlaridan biri bo'lgan matematik induksiya metodiga doir misol keltiramiz.

2.1-Misol. Ixtiyoriy n natural son uchun

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.1}$$

tenglik o'rinli. Bu tenglikni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

$n = 1$ bo'lsin, u holda yuqoridagi tenglik to'g'ri ekanligi ravshan:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}.$$

Berilgan (2.1) tenglikni $n = k > 1$ uchun to'g'ri deb faraz qilib, ya'ni

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

tenglik o'rinli bo'lsin deb, tenglikni $n = k+1$ uchun to'g'ri ekanligini ko'rsatamiz.

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= (k+1)\left[\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right] =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 4k + 3k + 6)}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)[2k(k+2) + 3(k+2)]}{6} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Demak,

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}.$$

Bu tenglik esa berilgan (2.1) tenglik $n = k + 1$ uchun o’rinli ekanligini bildiradi. □

Endi kombinatorikaning asosiy elementlari hisoblangan ba’zi tushunchalarni keltiramiz:

n! = 1·2·3·…·n – berilgan n natural son uchun 1 dan n gacha bo’lgan natural sonlarning ko’paytmasi (n faktorial);

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ – berilgan n ta elementdan m tadan o‘rinlashtirishlar soni;

$C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – berilgan n ta elementdan m tadan gruppalashlar sonini.

Ushbu binomial koeffisientlar quyidagi xossalarga ega:

2.1. $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{m!}$.

2.2. $C_n^m = C_n^{n-m}$.

2.3. $C_n^m = \dfrac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}$.

2.4. $C_n^m \cdot C_m^k = C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k}$

2.5. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Haqiqatdan ham,

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} =$$

$$\frac{n!}{m!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{n!(n+1)}{m!(m+1)(n-m-1)!(n-m)} =$$

$$\frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

2.1-Teorema. Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} ab^{n-1} + b^n \qquad (2.2)$$

tenglik o‘rinli.

Isbot. Matematik induksiya usulini qo‘llaymiz.

$n = 1$ bo‘lganda formula to‘g‘ri: $(a+b)^1 = a+b$.

(2.2) formula $n = k$ uchun to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni

$$(a+b)^k = a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + ... + C_k^{k-1} ab^{k-1} + b^k.$$

Formula $n = k+1$ bo‘lganda ham to‘g‘ri ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham, $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$ formuladan foydalanib, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k =$$

$$= (a+b)(a^k + C_k^1 a^{k-1} b + C_k^2 a^{k-2} b^2 + ... + C_k^{k-1} ab^{k-1} + b^k) =$$

$$= a^{k+1} + C_k^1 a^k b + C_k^2 a^{k-1} b^2 + ... + C_k^k ab^k +$$

$$+ C_k^0 a^k b + C_k^1 a^{k-1} b^2 + ... + C_k^{k-1} ab^k + b^{k+1} =$$

$$= a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + (C_k^1 + C_k^2) a^{k-1} b^2 + ...$$

$$... + (C_k^{k-1} + C_k^k) ab^k + b^{k+1} =$$

$$= a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + C_{k+1}^2 a^{k-1} b^2 + ... + C_{k+1}^k ab^k + b^{k+1}$$

□

Ixtiyoriy a va b haqiqiy sonlar hamda n natural son uchun $(a+b)^n$ ifodaning ko‘phad shaklidagi yoyilmasi (tasvirlanishi) Nyuton binomi deb ataladi.

Ma’lumki, Nyuton binomi formulasining umumlashmasi ixtiyoriy α haqiqiy soni uchun

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \dots \qquad (2.3)$$

ko’rinishida beriladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

2.1. Hisoblang:

a) $\frac{C_9^3 A_5^3}{A_7^5 C_7^4}$; b) $\frac{C_8^3 A_4^3}{A_7^4 C_9^4}$;

d) $\frac{C_9^5 A_6^4}{A_7^5 C_8^4}$; e) $\frac{C_9^3 A_{10}^3}{A_9^4 C_7^3}$.

2.2. Tenglamani yeching:

a) $A_x^2 \cdot C_x^{x-1} = 48$; b) $C_{x+1}^{x-2} + 2C_{x-1}^3 = 7(x-1)$;

d) $\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3 - C_x^{x-4}} = \frac{24}{23}$; e) $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$;

f) $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$; g) $\frac{A_x^3 + 3A_x^2}{(x+1)!} = \frac{1}{2}$;

h) $C_x^{x-1} + C_x^{x-2} + C_x^{x-3} + \ldots + C_x^{x-8} + C_x^{x-9} + C_x^{x-10} = 1023$.

2.3. k ning ixtiyoriy qiymatida $C_{n+k}^2 + C_{n+k+1}^2$ yig'indi aniq kvadrat ekanligini ko'rsating.

2.4. $\left(2nx + \frac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ yoyilmaning binomial koeffitsientlarining yig'indisi 64 ga teng. x ni o'z ichiga olmagan hadni aniqlang.

2.5. Agar $(a+b)^n$ yoyilmaning hamma koeffitsientlarining yig'indisi 4096 ga teng bo'lsa, uning eng katta koeffitsientini toping.

2.6. $\left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt[10]{\frac{a^7}{b^3}}\right)^n$ yoyilmada ab ni ichiga olgan hadni toping.

2.7. $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ yoyilmaning ikkinchi va uchinchi qo'shiluvchilari koeffitsientlarining yig'indisi 25,5 ga teng. x ni ichiga olmagan hadni yozing.

2.8. Agar to'rtinchi had binomial koeffitsientining ikkinchi had binomial koeffitsientiga nisbati 5:1 kabi bo'lsa, x ning qanday qiymatida

$\left(\sqrt{2^{x-1}}+\sqrt[3]{2^{-x}}\right)^m$ yoyilmaning to'rtinchi hadi m dan 20 marta katta bo'ladi?

2.9. Agar $\left(\sqrt[n]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$ yoyilmaning beshinchi hadi x ga bog'liq bo'lmasa, A_n^2 ni aniqlang.

2.10. Yoyilma to'rtinchi hadini uchinchi hadga nisbati $3\sqrt{2}$ ga teng bo'lishi uchun $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+3\right)$ ifodani qanday natural darajaga ko'tarish kerak?

2.11. $(a+b)^{n+1}$ va $(a+b)^n$ yoyilmalar uchinchi hadlarining binomial koeffitsientlari orasidagi ayirma 225 ga teng. $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[9]{b}\right)^n$ yoyilmadagi ratsional hadlarning sonini toping.

2.12. Agar $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n$ yoyilmaning boshidan to'rtinchi hadining oxiridagi to'rtinchi hadiga ko'paytmasi 14400 ga teng bo'lsa, yoyilmaning eng katta binomial koeffitsientini toping.

2.13. z ning ixtiyoriy qiymatida $\left(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z}\right)^m$ yoyilmaning T_k hadi $\left(\sqrt[6]{z^5}+\frac{1}{\sqrt[6]{z}}\right)^{m+1}$ yoyilmaning V_{k+1} hadidan 2 marta kichik, bo'lsa k ni toping.

2.14. $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt{4}\right)^n$ yoyilmaning boshidan uchinchi va oxiridan uchinchi hadining yig'indisi 9900 ga teng. Bu yoyilmada nechta ratsional had bor?

2.15. $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^m$ yoyilmaning uchinchi hadida x qatnashmaydi. x ning qanday qiymatida shu had $\left(1+x^3\right)^{30}$ yoyilmaning ikkinchi hadiga teng bo'ladi?

2.16. $\dfrac{C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n}{n}=2^{n-1}$ekanligini isbot qiling.

2.17. $C_n^m+C_{n-1}^m+\ldots+C_{n-10}^m=C_{n+1}^{m+1}-C_{n-10}^{m+1}$ ekanligini ko'rsating.

2.18. $C_{2n+x}^n\cdot C_{2n-x}^n\le(C_{2n}^n)^2$tengsizlikni isbot qiling.

2.19. Quyidagi ifodalarni toping:

a) $C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots+C_n^n$;

b) $C_n^1+2C_n^2+4C_n^3+\ldots+2^{n-1}C_n^n$;

c) $C_n^1-3C_n^2+9C_n^3-\ldots+(-3)^{n-1}C_n^n$;

d) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\ldots+nC_n^n$;

e) $C_n^1+3C_n^2+5C_n^3+\ldots+(2n-1)C_n^n$;

f) $3C_n^1+5C_n^2+7C_n^3+\ldots+(2n+1)C_n^n$;

g) $3C_n^1+7C_n^2+11C_n^3+\ldots+(4n-1)C_n^n$;

h) $\dfrac{C_n^1}{1}+\dfrac{C_n^2}{2}+\dfrac{C_n^3}{3}+\ldots+\dfrac{C_n^n}{n-1}$;

i) $\dfrac{C_n^1}{2}+\dfrac{C_n^2}{3}+\dfrac{C_n^3}{4}+\ldots+\dfrac{C_n^n}{n}$.

2.20. Ushbu $(1+x)^9+(1+x)^{10}+\ldots+(1+x)^{14}$ ifodani qavslarini ochib, hosil qilingan ko'phadda x^9 hadining oldida turgan koeffisientni aniqlang.

3 - § Asosiy kombinatsiyalar

Ushbu paragrafda kombinatorikaning asosiy formulalarini keltiramiz.

Bizga A va B to'plamlar berilgan bo'lib, |A| = n va |B| = m bo'lsin.

Ma'lumki, agar ixtiyoriy chekli A va B to'plamlar uchun $A \cap B = \varnothing$ bo'lsa, u holda $|A \cup B| = |A| + |B|$ bo'ladi. Bundan tashqari, chekli A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi uchun $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o'rinlidir.

3.1-xossa. A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi aklantirishlar soni m^n ga teng, bu yerda |A| = n va |B| = m.

Isbot. A to'plam $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, B to'plam esa $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ elementlardan iborat bo'lsin. f: A $\to$ B akslantirishni qaraymiz. Ma'lumki, har bir f akslantirish B to'plamdan olingan n ta elementdan iborat $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n))$ elementlar ketma-ketligini aniqlanaydi. Bundan tashqari, turli akslantirishlar turli elementlar ketma-ketligini va aksincha, turli ketma-ketliklar turli akslantirishlarni aniqlaydi. Demak, A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi aklantirishlar to'plami bilan B to'plamni n marotaba dekart ko'paytmasi B×B×…×B o'rtasida bir qiymatli akslantirish o'rnatish mumkin. Bundan esa f: A $\to$ B akslantirishlar soni B×B×…×B to'plamning elementlari soni m^n ga teng ekanligi kelib chiqadi.

3.2-xossa. A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi inyektiv aklantirishlar soni $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ ga teng.

Isbot. Ma'lumki, har bir inyektiv f akslantirish B to'plamdan olingan m ta turli xil elementlardan iborat $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m))$ ketma-ketlikni aniqlaydi. Bunda $f(x_1)$ ning qiymati n ta $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ lardan biri bo'ladi. $f(x_2)$ esa $f(x_1)$ dan farqli bo'lganligi uchun n – 1 ta qiymatdan birini qabul qilishi mumkin. $f(x_3)$ esa $f(x_2)$ va $f(x_1)$ lardan farqli bo'lganligi uchun n – 2 ta qiymatdan birini qabul qilishi mumkin, va hokazo $f(x_m)$ esa n – m + 1 ta qiymat qabul qilishi mumkin. Demak, barcha inyektiv akslantirish soni

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = A_n^m. \qquad \square$$

3.3-xossa. Elementlar soni n ta bo'lgan A to'plamning k ta elementli qism to'plamlar soni $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ga teng.

Isbot. Ushbu xossani n+k ga nisbatan induksiya usuli bilan isbotlaymiz.

n+k=1 bo'lganda n=1, k=0 va qism to'plamlar soni $C_1^0 = 1$ ga teng.

n+k=2 bo'lganda n=2, k=0 yoki n=1, k=1 bo'lgan hollarda qism to'plamlar soni mos ravishda $C_2^0 = 1$ va $C_1^1 = 1$ ga teng.

Endi xossa sharti $n'+k' < n+k$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n', k' lar uchun o'rinli bo'lsa, bu munosabat n+k uchun o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ to'plamning biror $x \in A$ elementini tanlab, A to'plamning k ta elementli qism to'plamlarini ikki xil sinfga ajratamiz:

Birinchi sinf – x elementni o'z ichiga oluvchi qism to'plamlar sinfi;

Ikkinchi sinf – x elementni o'z ichiga olmaydigan qism to'plamlar sinfi.

Birinchi sinfda yotuvchi qism to'plamni hosil qilish uchun A to'plamning x elementidan tashqari n–1 ta elementidan k–1 ta elementini tanlash kerak. Induksiya faraziga ko'ra bunday to'plamlar soni C_{n-1}^{k-1} ga teng.

Ikkinchi sinfda yotuvchi qism to'plamni hosil qilish uchun A to'plamning x elementdan tashqari n–1 ta elementidan k ta elementni tanlash kerak. Induksiya faraziga ko'ra bunday to'plamlar soni C_{n-1}^{k} ga teng.

Demak, A to'plamnining k ta elementli barcha qism to'plamlar soni $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$ ga teng. Binomial koeffisientlarning 2.5 xossasiga ko'ra, $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_{n}^{k}$. □

3.1-Ta'rif. A to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami A to'plamning *buleani* deb atalabi va B(A) kabi belgilanadi, ya'ni

$$B(A) = \{A' \mid A' \subseteq A\}.$$

3.4-xossa. Elementlar soni n ta bo'lgan A to'plamnining barcha qism to'plamlari soni 2^n ga teng, ya'ni $|B(A)| = 2^n$.

Isbot. $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ bo'lsin. S orqali A to'plamni {0;1} to'plamga akslantiruvchi barcha akslantirishlar to'plamini belgilaymiz. 3.1-xossaga ko'ra S to'plamning elementlari soni 2^n ga teng.

A to'plamning buleani B(A) va S o'rtasida quyidagicha moslik o'rnatamiz.

Ixtiyoriy $A_1 \in B(A)$ to'plamga $f_{A_1}(a) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \in A_1, \\ 0, & \text{agar } x \notin A_1. \end{cases}$ kabi aniqlangan f_{A_1} akslantirishni mos qo'yamiz. Turli xil $A_1 \neq A_2$ to'plamlarga turli xil $f_{A_1} \neq f_{A_2}$ akslantirishlar mos kelganligi uchun bu moslik inyektiv moslik bo'ladi.

Bundan tashqari bu moslik surektivdir, chunki A to'plamni {0;1} to'plamga akslantiruvchi ixtiyoriy g akslantirish $A_1 = \{x \in A \mid g(x) = 1\}$ to'plam orqali aniqlangan f_{A_1} akslantirishga tengdir.

Shunday qilib B(A) va S o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatildi. Demak $|B(A)| = |S| = 2^n$. □

3.1-xossada biz A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi barcha aklantirishlar sonini keltirgan edik. Endi bizdan A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi qismiy akslantirishlar (ya'ni, A to'plamning qandaydir qismini B to'plamga akslantiruvchi) sonini topish talab qilingan bo'lsin. Quyida biz qismiy akslantirishlar sonini topish formulasini keltiramiz.

3.5-xossa. A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi qismiy akslantirishlar soni $(1+m)^n$ ga teng.

Isbot. Ma'lumki A to'plamning s ta elementli qism to'plamini B to'plamga aklantiruvchi akslantirishlar soni m^s ga teng. n ta elementli A to'plamning s ta elementli qism to'plamlari soni esa C_n^s ga teng. Demak, A to'plamning qandaydir s ta elementini B to'plamga akslantiruvchi akslantirishlar soni $C_n^s m^s$ ga teng. Barcha qismiy akslantirishlar soni esa

$$C_n^0 m^0 + C_n^1 m^1 + C_n^2 m^2 + \cdots + C_n^n m^n = (1+m)^n. \qquad \square$$

Kombinatorikada tarkibidagi elementlari takrorlanishi mumkin bo'lgan kombinatsiyalar ham ko'p uchraydi. Masalan, takrorlanuvchi elementlar qatnashgan o'rin almashtirishlar, o'rinlashtirishlar va gruppalashlar. Bunday kombinatsiyalarga eng sodda misol algebraik tenglamaning ildizlari to'plami, ya'ni ildizlar karrali bo'lganida elementlari takrorlanuvchi to'plamni hosil qilamiz. Takroriy kombinatsiyalarni o'rganish uchun miltito'plam tushunchasini kiritamiz.

Bizga A to'plam va $N_0=\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ to'plam berilgan bo'lsin. A to'plamni N_0 to'plamga akslantiruvchi $r\colon A \to N_0$ akslantirishni qaraymiz.

3.2-Ta'rif. (A, r) juftlik multito'plam deb ataladi, $\sum_{a\in A} r(a)$ soni esa (A, r) multito'plamning quvvati deyiladi.

3.6-xossa. Elementlari soni n ta quvvati esa m ga teng bo'lgan (A,r) multito'plamlar soni $C_{m+n-1}^{n-1} = \dfrac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}$ ga teng.

Isbot. $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ bo'lsin. (A, r) multito'plamning quvvati m ga teng bo'lganligi uchun $r(x_1) + r(x_2) + \ldots + r(x_n) = m$ bo'ladi.

Demak, n ta elementli multito'plamning soni $r(x_1)+r(x_2)+ \ldots +r(x_n) = m$ shartni qanoatlantiruvchi akslantirishlar soni bilan aniqlanadi.

Har bir r akslantirishga elementlari 0 va 1 lardan iborat bo'lgan quyidagi

$$(\underbrace{0,...0}_{r(x_1)ta},1,\underbrace{0,...0}_{r(x_2)ta},1,\underbrace{0,...0}_{r(x_3)ta},...,1\underbrace{0,...0}_{r(x_n)ta})$$

vektorni mos qo'yamiz.

Ma'lumki, yuqoridagi ko'rinishidagi vektorlar m ta 0 va n-1 ta 1 dan iborat vektorlardir. Turli r_1: $A \to N_0$ va r_2: $A \to N_0$ akslantirishlarga turli vektorlar mos keladi, hamda m ta 0 va n-1 ta 1 dan iborat har bir vektorga yagona r: $A \to N_0$ akslantirish mos keladi. Demak, quvvati m ga teng bo'lgan (A, r) multito'plam soni uzunligi m+n–1 ga teng bo'lgan va m ta 0, n-1 ta 1 dan iborat vektorlar soniga teng. Bunday vektorlar qaysi soni m+n–1 ta o'rindan n-1 tasini tanlab olib, shu o'rinlarga 1 raqami qo'yilishi xarakterlanishini hisobga olsak, ularning soni m+n–1 ta elementli to'plamning n-1 ta elementli qism to'plamlar soniga teng ekanligi kelib chiqadi. Demak, elementlari soni n ta quvvati esa m ga teng bo'lgan (A, r) multito'plam soni $C_{m+n-1}^{n-1} = \dfrac{(m+n-1)!}{(n-1)!m!}$ ga teng. □

Agar (A, r) multito'plamda ixtiyoriy $a \in A$ element uchun $r(a) > 0$ bo'lsa, u holda bu multito'plam xosmas deyiladi.

3.1-Natija. Elementlari soni n ta quvvati esa m ga teng bo'lgan xosmas multito'plam soni $C_{m-1}^{n-1} = \dfrac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}$ ga teng.

Isbot. Berilgan $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ to'plam va r: $A \to N_0$ akslantirish uchun $r(x_i) > 0$ va $r(x_1) + r(x_2) + \ldots + r(x_n) = m$ bo'lganligidan $m \geq n$ bo'ladi.

Agar r_1: $A \to N_0$, $r_1(x_i) = r(x_i) - 1$, akslantirish uchun (A, r_1) multito'plam elementlari soni n ta quvvati esa m–n ga teng bo'lgan multito'plamdir. Bunday multito'plamlar soni $C_{m-1}^{n-1} = \frac{(m-1)!}{(n-1)!(m-n)!}$ ga teng bo'lganligidan natijaning isbotini hosil qilamiz. □

Aytaylik (A, r) multito'plam berilgan bo'lib,

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad r(x_1) + r(x_2) + \dots + r(x_n) = m$$

bo'lsin.

3.3-Ta'rif. $M = \{1, 2, \dots, m\}$ to'plamni $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ to'plamga akslantiruvchi va $|f^{-1}(x)| = r(x)$ shartni qanoatlantiruvchi $f: M \to A$ akslantirishga *multito'plamning o'rin almashtirishlari* deyiladi.

3.7-xossa. Elementlari soni n ta quvvati m ga teng bo'lgan (A,r) multito'plamdagi o'rin almashtirishlari soni

$$\frac{m!}{r(x_1)!\cdot r(x_2)!\cdot \ldots \cdot r(x_n)!}$$

ga teng.

Isbot. Ma'lumki, quvvati m ga teng bo'lgan multito'plamning o'rin almashtirishi $M = \{1, 2, \dots, m\}$ to'plamning $r(x_i)$ ta elementini x_i elementga o'tkazadi. Berilgan m ta elementdan $r(x_1)$ tasini x_1 ga akslantirishlar soni $C_m^{r(x_1)}$ ga qolgan $m - r(x_1)$ ta elementning $r(x_2)$ tasini x_2 ga akslantirishlar soni $C_{m-r(x_1)}^{r(x_2)}$ ga va hokazo $m - r(x_1) - \dots - r(x_{n-1})$ ta elementning $r(x_n)$ tasini x_n ga akslantirishlar soni $C_{m-r(x_1)-r(x_2)-\dots-r(x_{n-1})}^{r(x_n)}$ ga teng ekanligidan multito'plamning o'rin almashtirishlar soni

$$C_m^{r(x_1)} C_{m-r(x_1)}^{r(x_2)} \dots C_{m-r(x_1)-r(x_2)-\dots-r(x_{n-1})}^{r(x_n)} = \frac{m!}{r(x_1)!\cdot r(x_2)!\cdot \ldots \cdot r(x_n)!}$$

ga teng ekanligi kelib chiqadi. □

Mustaqil yechish uchun masalalar

3.1. 5 ta talabaga 5 ta har xil kitobni bittadan qilib necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

3.2. Talaba 6 kun davomida kuniga bittadan qilib 4 ta fandan imtihon topshirishi kerak. U imtihonlarni necha xil usul bilan topshirishi mumkin?

3.3. 7 ta talaba imtihon topshirmoqda. Talabalarga “3”, “4” va “5” baholarini necha xil usul bilan qo’yish mumkin?

3.4. 10 xil sovg’a mavjud. Agar tadbirda 6 ta o’quvchi ishtirok etgan bo’lsa, o’quvchilarni har biriga bittadan sovg’a bergan holda, sovg’alarni necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

3.5. 6 ta har xil kitobni 10 ta talabaga har bir talabaga bittadan ortiq kitob bermagan holda necha xil usul bilan tarqatish mumkin? (Har bir talabaga ixtiyoriy sonda kitob berilsa-chi)?

3.6. 6 ta bir xil kitobni 10 ta talabaga har bir talabaga bittadan ortiq kitob bermagan holda necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

3.7. 9 ta har xil kitobni 5 ta talabaga, har bir talabaga ixtiyoriy sondagi kitob bergan holda necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

3.8. 9 ta bir xil kitobni 5 ta talabaga, har bir talabaga ixtiyoriy sondagi kitob bergan holda necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

3.9. 10 ta bir xil kitobni 6 ta talabaga, har bir talaba kamida bittadan kitob bergan holda necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

3.10. Komissiya rais, uning yordamchisi va yana besh kishidan iborat. Komissiya a’zolari 7 xil vazifani o’zaro necha xil usul bilan taqsimlashlari mumkin?

3.11. Suzish bo’yicha o’tkazilayotgan musobaqada 20 ta sportchi ishtirok etmoqda. 1 ta oltin, 1 ta kumush va 1 ta bronza medalini musobaqa ishtirokchilariga necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

3.12. Musobaqada 30 ta sportchi ishtirok etmoqda. 1 ta oltin, 1 ta kumush va 2 ta bronza medallarni musobaqa ishtirokchilariga necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

3.13. 30 kishi har birida o'n kishidan bo'lgan uchta guruhga bo'lingan. Guruhlarning har xil tarkibi nechta bo'lishi mumkin?

3.14. Majlisda 40 ta odamdan rais, kotib va 3 ta komissiya a'zosini tanlab olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

3.15.15 ta talabadan 1 ta sardor va 4 ta yordamchini ajratilib olish kerak. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin?

3.16. 20 ta talabadan 6 tasini tanlab olib, haftaning olti kuniga navbatchilikka tayinlash kerak. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin?

3.17. Beshta talabani uchta parallel guruhga taqsimlash kerak. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin?

3.18. Kitob javoniga 10 tomlik ensiklopediyani birinchi va ikkinchi tomlari yonma-yon turmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

3.19. To'rt mergan (har biri ikkitadan) sakkizta nishonni mo'ljalga olishlari kerak. Ular nishonlarni necha xil usul bilan o'zaro bo'lishib olishlari mumkin?

3.20. 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlardan tuzilgan to'rt xonali sonlardan nechtasida 3 raqami ishtirok etadi (sonlarda raqamlar takrorlanmaydi)?

3.21. Chapdan va o'ngdan o'qiganda bir xil son bo'luvchi nechta olti xonali son mavjud? (besh xonalichi)?

3.22. Agar har bir sonda bir xil raqamlar bo'lmasligi lozim bo'lsa, 0, 1, 2, 3, 4, 5 raqamlaridan uchga bo'linuvchi nechta uch xonali son tuzish mumkin?

3.23. Agar har bir sonda bir xil raqamlar ishtirok etmasligi lozim bo'lsa, 0, 1, 3, 5, 7 raqamlardan 5 ga bo'linadigan nechta to'rt xonali son tuzish mumkin?

3.24. Uch kishi oltita do'konga mahsulot yetqazib berishi kerak. Agar ularning har biri hamma do'konga birdaniga mahsulot olib borish imkoniyatiga ega bo'lsa va agar ikki kishi bir vaqtda bitta do'konga bormasa, ular mahsulot tarqatishni necha xil usul bilan amalga oshirishlari mumkin?

3.25. $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^5$ ko'phadning hadlari sonini toping.

3.26. $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^6$ ko'phadning hadlari sonini toping.

3.27. Darajalarining yig'indisi m ga teng bo'lgan n ta o'zgaruvchili $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$ birhadlar sonini toping.

3.28. 5 ta olma, 4 ta nok va 3 ta anor mavjud. Mevalarni 12 kun davomida, kuniga bittadan qilib necha xil usul bilan yeyish mumkin?

3.29. O'qutuvchida 6 ta ko'k, 4 ta qizil va 2 ta sariq qalam bor. U qalamlarni 12 ta o'quvchiga bittadan qilib necha xil usulda tarqatishi mumkin?

3.30. 12 ta erkak va 6 ta ayoldan 4 ta erkak, 3 ta ayol kishini necha xil usul bilan tanlab olish mumkin?

3.31. **"INSTITUT"** so'zidan harflarni o'rinlarini almashtirgan holda necha xil 8 harfli so'z tuzish mumkin?

3.32. **"INSTITUT"** so'zidan harflarni necha xil 6 ta harfli so'z tuzish mumkin? (5 ta harfli-chi)?

4 - § Binar munosabatlar va ekvivalentlik munosabatlari soni

Binar munosabat tushunchasi to'plamlar nazariyasi, diskret matematika, kombinatorika va graflar nazariyasining asosiy tushunchalardan biri hisoblanadi.

Aytaylik, A va B to'plamlar berilgan bo'lib, $A\times B$ bu to'plamlarning dekart ko'paytmasi bo'lsin.

4.1-Ta'rif. $A\times B$ bu to'plamlarning istalgan R qism to'plami A va B to'plamlar o'rtasidagi *o'rnatilgan binar munosabat* deyiladi.

Agar A = B bo'lsa, u holda R *munosabat* A to'plamdagi *binar munosabat* deyiladi. Agar $x = (a,b)\in R$ bo'lsa, u holda a va b elementlar x orqali bir-biriga mos qo'yilgan deyiladi.

4.2-Ta'rif. $R\subseteq A\times A$ binar munosabatning *teskarisi* deb ixtiyoriy $(a,b)\in R$ juftliklar uchun barcha (b,a) ko'rinishdagi juftliklardan tuzilgan, R^{-1} kabi belgilanuvchi binar munosabatga aytiladi, ya'ni

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}.$$

Binar munosabatlarning ko'paytmasi quyidagicha aniqlanadi.

4.3-Ta'rif. $R_1\subseteq A\times A$ va $R_2\subseteq A\times A$ binar munosabatlarning *ko'paytmasi* deb,

$$R =\{(a,b) \mid \exists c\in A, (a, c) \in R_1, (c, b) \in R_2\}$$

to'plam orqali aniqlangan munosabatga aytiladi va $R=R_1R_2$ kabi belgilanadi.

Bir qancha muhim xossalariga ko'ra, binar munosabatlar bir nechta turlarga ajraladi. Binar munosabatlarning ba'zi bir turlari ustida to'xtalib o'tamiz.

4.4-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $a\in A$ element uchun $(a, a)\in R$ o'rinli bo'lsa, A to'plamda aniqlangan R binar munosabat *refleksiv* munosabat deyiladi.

4.5-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $a \in A$ element uchun $(a,a) \notin R$ bo'lsa, A to'plamda aniqlangan R binar munosabat *irrefleksiv* munosabat deyiladi.

4.6-Ta'rif. Agar A to'plamda aniqlangan R binar munosabatda $(a,b) \in R$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $a, b \in A$ elementlar uchun $(b,a) \in R$ ekanligi kelib chiqsa, R binar munosabat *simmetrik* munosabat deyiladi.

Ma'lumki, A to'plamda aniqlangan R binar munosabat simmetrik munosabat bo'lishi uchun $R = R^{-1}$ shartning bajarilishi, ya'ni R munosabat uning teskarisiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

4.7-Ta'rif. Agar har doim $(a,b) \in R$ va $(b,a) \in R$ ekanligidan $a=b$ ekanligi kelib chiqsa, R munosabat *antisimmetrik* binar munosabat deyiladi.

4.8-Ta'rif. Agar $(a,b) \in R$ va $(b,c) \in R$ shartlar o'rinli bo'ladigan ixtiyoriy $a,b,c \in A$ elementlar uchun $(a,c) \in R$ shart ham o'rinli bo'lsa, A to'plamda aniqlangan R binar munosabat *tranzitiv munosabat* deyiladi.

A to'plamdagi R binar munosabat tranzitiv munosabat bo'lishi uchun $R \cdot R \subseteq R$ shartning bajarilishi zarur va yetarli ekanligi kelib chiqadi.

Binar munosabatlarning muhim turi sifatida ekvivalentlik munosabatini keltirish mumkin.

4.9-Ta'rif. Agar A to'plamda aniqlangan R binar munosabat bir vaqtning o'zida refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda R munosabatga *ekvivalentlik munosabati* deyiladi.

4.1-Teorema. Bo'sh bo'lmagan A to'plamda aniqlangan ihtiyoriy R ekvivalentlik munosabati A to'plamni o'zaro kesishmaydigan sinflarga ajratadi va aksincha, A to'plam o'zaro kesishmaydigan sinflarga bo'lingan bo'lsa, u holda A to'plamda berilgan bo'linishlarga mos keluvchi ekvivalentlik munosabati aniqlash mumkin.

Isbot. Aytaylik A to’plamda R ekvivalentlik munosabati aniqlangan bo’lsin. Ixtiyoriy $a\in A$ element uchun $R[a]=\{x\in A|(a, x)\in R\}$ to’plamni aniqlaymiz. R refleksiv bo’lganligi uchun $a\in R[a]$, ya’ni aniqlangan to’plam bo’sh emas. Ushbu to’plamlar A to‘plamda o‘zaro kesishmaydigan sinflarni hosil qilishini ko’rsatamiz. Aytaylik, R[a] va R[b] to’plamlar umumiy elementga ega bo’lsin. U holda $z\in R[a]\cap R[b]$, ya’ni $z\in R[a]$ va $z\in R[b]$. Bundan esa $(a, z)\in R$ va $(b, z)\in R$ ekanligini hosil qilamiz.

Ixtiyoriy $x\in R[a]$ element olaylik, u holda $(a, x) \in R$. Agar $(a,z)\in R$ ekanligi, hamda R munosabatning simmetrik va tranzitivligidan foydalansak, $(z, a) \in R$, $(a, x) \in R$ ekanligini, bundan esa $(z, x) \in R$ bo’lishini hosil qilamiz. $(b, z) \in R$ ni hisobga olib esa $(b,x)\in R$ ni olamiz. Bu esa $x\in R[b]$ ekanligini anglatadi. Demak, $R[a] \subseteq R[b]$.

Xuddi shunga o’xshash $R[a] \subseteq R[b]$ ekanligini, ya’ni $R[a] = R[b]$ ni hosil qilamiz. Bu esa R[a] o’zaro kesishmaydigan sinflar ekanligini anglatadi.

Va aksincha, agar A to’plam o’zaro kesishmaydigan sinflarning birlashmasi shaklida ifodalangan bo’lsa, R munosabatni quyidagicha aniqlaymiz. Agar a va b elementlar bitta sinfga tegishli bo’lsa, ularni R binar munosabat orqali bo’g’langan deymiz. Ravshanki, bu R munosabat ekvivalentlik munosabati bo’ladi. □

Agar biror A to‘plam R ekvivalentlik munosabati yordamida o‘zaro kesishmaydigan qism to‘plamlarga bo‘lingan bo‘lsa, ana shu qism to‘plamlarni ekvivalentlik sinflar deb ataymiz. A ning bu ekvivalentlik sinflar to‘plamini A/R kabi belgilanadi va A/R to’plam faktor-to‘plam deb ataladi.

n ta elementli A to'plamda aniqlangan barcha ekvivalentlik munosabatlari soninini p_n orqali belgilaymiz.

Masalan, $A=\{x_1, x_2, x_3\}$ to'plamni qiyidagicha bo'laklarga ajratish mumkin:

I. $A_1=\{x_1\}$, $A_2=\{x_2\}$, $A_3=\{x_3\}$;

II. $A_1=\{x_1\}$, $A_2=\{x_2, x_3\}$;

III. $A_1=\{x_2\}$, $A_2=\{x_1, x_3\}$;

IV. $A_1=\{x_3\}$, $A_2=\{x_1, x_2\}$;

V. $A_1=\{x_1, x_2, x_3\}$.

Demak, $p_3 = 5$, ya'ni uchta elementli to'plamda 5 xil ekvivalentlik munosabatini aniqlash mumkin.

4.2-Teorema. Elementlar soni n+1 ta bo'lgan A to'plamda aniqlangan barcha ekvivalentlik munosabatlari soni p_{n+1} uchun quyidagi rekurrent formula o'rinli:

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p_k, \text{ bu yerda } p_0=1.$$

Isbot. Elementlar soni n+1 ta bo'lgan A to'plamning biror $a \in A$ elementini olamiz. Har bir ekvivaletntlik munosabati bu to'plamni kesishmaydigan sinflarga ajratganligi uchun ushbu a element ham biror sinfga tegishli. Aytaylik, bu sinf k+1 ta elementga ega bo'lsin. Ushbu a elementni o'z ichiga oluvchi k+1 ta elementli sinflar soni, a elementdan tashqari n ta elementli to'plamning k ta elementli qism to'plamlari soniga, ya'ni C_n^k ga teng. Ushbu k+1 ta elementdan tashqari n–k ta elementda esa p_{n-k} ta ekvivalentlik munosabati aniqlash mumkin. Demak, tanlangan a elementni aynan k+1 ta elementli sinfga tushiruvchi ekvivalentlik munosabatlari soni $C_n^k p_{n-k}$ ga teng. k ning qiymati 0 dan n gacha o'zgarishini hisobga olsak

$$p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^{n-k} p_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p_n$$

tenglikka ega bo'lamiz. □

n ta elementli to'plamda aniqlangan barcha ekvivalentlik munosabatlari soni p_n – ***Bell sonlari*** deb ataladi va quyida jadvalda ***Bell sonlarining*** dastlabki qiymatlarini keltiramiz.

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\mathbf{p_n}$	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

Biz yuqorida Bell sonlarini, ya'ni n ta elementli to'plamda aniqlangan barcha ekvivalentlik munosabatlari sonini aniqlash uchun rekurrent formulani keltirdik.

Endi $p_{n,k}$ orqali n ta elementli to'plamni aynan k ta sinfga ajratuvchi ekvivalentlik munosabatlar sonini belgilaymiz. Yuqoridagi misolga ko'ra:

$$p_{3,1}=1, \quad p_{3,2}=3, \quad p_{3,3}=1.$$

4.3 - Teorema. $p_{n,k}$ sonlari uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$p_{n,k}=p_{n-1,\,k-1}+k\,p_{n-1,\,k}, \qquad \text{bu yerda} \quad p_{0,0}=1,\ p_{1,0}=0.$$

Isbot. Aytaylik, $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bo'lsin. Ushbu to'plamni k ta sinfga ajratuvchi ekvivalentlik munosabatlarni ikki xil turga ajratamiz:

I. Birinchi tur-ekvivalentlik munosabatlar faqat x_1 elementdan iborat sinf tashkil qiluvchi munosabatlar, ya'ni $[x_1]=\{x_1\}$;

II. Ikkinchi tur-ekvivalentlik munosabatlar x_1 dan tashqari kamida bitta element yotuvchi sinf tashkil qiluvchi munosabatlar.

Birinchi tur ekvivalentlik munosabatlar x_1 elementdan boshqa n–1 ta elementdan k–1 ta sinf hosil qilganligi uchun ularning soni $p_{n-1,\,k-1}$ ga teng, ya'ni $A\backslash\{x_1\}$ to'plamni k–1 ta sinfga ajratiladi.

Ikkinchi tur ekvivalentlik munosabatlari esa $A\backslash\{x_1\}$ to'plamni k ta sinfga ajratuvchi munosabatlardir. Ma'lumki, $A\backslash\{x_1\}$ to'plamni k ta sinfga ajratuvchi munosabatlar soni $p_{n-1,k}$ ga teng. Tanlangan x_1 elementning shu k ta sinflardan biriga qo'shilishi A to'plamdagi ikkinchi tur ekvivalentlik munosabatini aniqlaydi. Demak, ikkinchi tur ekvivalentlik munosabatlari soni $kp_{n-1,k}$ ga teng.

Birinchi va ikkinchi tur ekvivalentlik munosabatlari sonlari yig’idisidan

$$p_{n,k} = p_{n-1,\,k-1} + k\,p_{n-1,\,k}$$

tenglik kelib chiqadi. □

$p_{n,k}$ sonlari ***ikkinchi darajali Stirling sonlari*** deb ataladi.

Yuqoridagi munosabat yordamida ikkinchi darajali Stirling sonlari qiymatlari quyidagicha ko’rinishga ega bo’lishini aniqlashimiz mumkin.

n \ **k** ($p_{n,k}$)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0	0	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1	0	0
8	0	1	127	966	1710	1050	266	28	1	0
9	0	1	255	3025	7806	6960	2646	462	36	1

4.1-Misol. $p_{n,2} = 2^n - 1$ ekanligini isbotlang.

Yechish. Ushbu tenglikni induksiya usuli bilan ko’rsatamiz. Yuqoridagi jadvaldan tenglik n ning kichik qiymatlari uchun o’rinli ekanligini payqash qiyin emas. 4.3-Teoremadan va induksiya farazidan foydalansak,

$$p_{n,2} = p_{n-1,\,1} + 2\,p_{n-1,\,2} = 1 + 2(2^{n-1} - 1) = 2^n - 1$$

kelib chiqadi.

4.2-Misol. $p_{n,3}=\frac{3^{n-1}+1}{2}-2^{n-1}$ ekanligini isbotlang.

Yechish. Ushbu tenglikni ham induksiya usuli bilan ko'rsatamiz. n=3 va n=4 lar uchun tenglik to'g'ri: $p_{3,3}=1$ va $p_{4,3}=6$.

Quyidagi munosabatdan yuqoridagi tenglik to'g'ri ekanligi kelib chiqadi:

$$p_{n,3}=p_{n-1,2}+3\,p_{n-1,3}=2^{n-1}-1+3\left(\frac{3^{n-2}+1}{2}-2^{n-2}\right)=$$

$$=2^{n-1}-1+\frac{3^{n-1}+3}{2}-3\cdot 2^{n-2}=\frac{3^{n-1}+1}{2}-2^{n-1}.$$

Mustaqil yechish uchun masalalar

4.1. A={a, b, c, d, e, f} to'plamda refleksiv, simmetrik va tranzitiv munosabatlar aniqlang.

4.2. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} to'plamda aniqlangan quyidagi munosabatning barcha elementlarini toping: R={(x, y) | x+y < 10}.

4.3. A = Z to'plamda aniqlangan R = {(x, y) | x – y =0} munosabat refleksiv munosabat ekanligini ko'rsating.

4.4. A = Z to'plamda aniqlangan R = {(x, y) | x – y > 0} munosabat tranzitiv munosabat ekanligini ko'rsating.

4.5. A={a, b, c, d, e, f} to'plamda aniqlangan munosabatlarning qaysilari tranzitiv bo'ladi:

a) R = {(a, a), (a, b), (b, d), (b, c), (a, d), (a, d)};

b) R = {(a, a), (b, b), (c, c), (a, d), (b, f), (f, c)};

c) R = {(a, a), (b, b), (b, c), (a, d), (c, b)}.

4.6. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} to'plamda aniqlangan R = {(x, y) | x – y soni 3 ga qoldiqsiz bo'linadi} munosabatning ekvivalent munosabat ekanligini ko'rsating va A/R ni toping.

4.7. Elementlari soni n ta bo'lgan A to'plamda aniqlangan binar munosabatlar sonini toping.

4.8. Elementlari soni n ta bo'lgan A to'plamda aniqlangan refleksiv munosabatlar sonini toping.

4.9. Elementlari soni n ta bo'lgan A to'plamda aniqlangan irrefleksiv munosabatlar sonini toping.

4.10. Elementlari soni n ta bo'lgan A to'plamda aniqlangan simmetrik munosabatlar sonini toping.

4.11. Elementlari soni n ta bo'lgan A to'plamda aniqlangan antisimmetrik munosabatlar sonini toping.

4.12. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ to'plamda aniqlangan ekvivalentlik munosabatlar sonini toping.

4.13. 10 ta har xil tangani 3 ta cho'ntakka necha xil usul bilan ajratish mumkin (cho'ntaklar farqli emas deb hisoblansin)?

4.14. 8 ta askar va 6 ta serjantdan har bir guruhda kamida 1 ta serjant bo'ladigan qilib, 7 kishilik 2 ta guruh tuzish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

4.15. 7 kishilik komissiya a'zolari o'z xujjatlarini bitta seyfda saqlashadi. Seyfga uni 4 kishidan kam bo'lmagan a'zolar yig'ilganda ochish mumkin bo'lib, undan kam odam bilan ochish mumkin bo'lmaydigan qilib qulf o'rnatish uchun, seyfga nechta qulf qo'yilishi va har bir komissiya a'zosida nechtadan kalit bo'lishi kerak?

4.16. 3 ta bolaga 20 ta olmani necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

4.17. Sakkiz muallif o'n olti bobdan iborat kitob yozishlari lozim. Agar ikki kishi kitobning uchtadan bobini, to'rt kishi ikkitadan bobini va ikki kishi bittadan bobini yozadigan bo'lsa, mualliflar materialni o'zaro necha xil usul bilan taqsimlashlari mumkin?

4.18. Bog'bon uch kun davomida o'nta daraxt ko'chati o'tqazishi lozim. Agar bog'bon bir kunda eng kamida bitta ko'chat o'tqazadigan bo’lsa, u ishni kunlar bo’yicha necha xil usul bilan taqsimlashi mumkin?

4.19. 3, 5 va 7 raqamlaridan foydalanib, milliondan kichik nechta son tuzish mumkin? (5 va 7 raqamlaridanchi).

4.20. 1 dan 100 000 gacha bo’lgan sonlar orasida tarkibida 1 raqami qatnashadiganlari nechta?

4.21. 1000 dan 100 000 gacha bo’lgan sonlar orasida tarkibida 1 raqami qatnashmaydiganlari nechta?

4.22. Korxonada 20 ta odam ishlaydi va korxona ishchilaridan 5 tasini xizmat safariga jo’natish kerak. Agar korxona raxbari, raxbar yordamchisi va bo’lim boshlig’ini bir vaqtda xizmat safariga jo’natish mumkin bo’lmasa, xizmat safariga boruvchi korxona ishchilarini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

4.23. 25 ta talabani 3 ta guruhga shunday ajratish kerakki, 1-guruhda 5 ta, 2-guruhda 7 ta va 3-guruhda 13 ta talaba bo’lsin. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

4.24. Musobaqada 4 ta oq, 5 ta qizil, 2 ta ko’k va 3 ta qora mashinalar ishtirok etmoqda. Bu mashinalarning faqat ranglariga ko’ra ajratilsa, ular 14 ta o’rinni necha xil usul bilan egallashlari mumkin?

4.25. Sportchida 4 ta oq, 6 ta qizil, 3 ta ko’k sharlar mavjud. U ushbu sharlarni necha xil ketma-ketlik bilan uloqtirishi mumkin?

5 - § Kiritish va chiqarish qoidasi

Aytaylik A to'plam n ta $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ elementlardan iborat bo'lib, $P_1, P_2, \ldots, P_t$ shartlar A to'plamning elementlariga qo'yilgan qandaydir shartlar bo'lsin. Umuman olganda, A to'plamning x_i elementi P_j shartni qanoatlantirishi ham qanoatlantirmasligi ham mumkin.

$N(P_j)$ orqali A to'plamning P_j shartni qanoatlantiruvchi elementlari sonini, $N(P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_r})$ orqali esa A to'plamning $P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_r}$ shartlarni qanoatlantiruvchi elementlari sonini belgilaymiz.

5.1-Teorema. A to'plamning $P_1, P_2, \ldots, P_t$ shartlarning hech birini qanoatlantirmaydigan elementlari soni N(0) uchun quyidagi munosabat o'rinli.

$$N(0) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^t S_t, \qquad (5.1)$$

bu yerda $S_0 = n$, $S_k = \sum\limits_{1 \le j_1 \le \ldots \le j_k \le t} N(P_{j_1}, P_{j_2}, \ldots, P_{j_k})$, $1 \le k \le t$.

Isbot. A to'plamning $P_1, P_2, \ldots, P_t$ shartlarning hech birini qanoatlantirmaydigan elementlarini sanash quyidagicha amalga oshiriladi.

Agar $x \in A$ element $P_1, P_2, \ldots, P_t$ shartlarning hech birini qanoatlantirmasa u element S_0 sonini olinishida bir marotaba sanaladi va (5.1) tenglikning o'ng tomonidagi qolgan qo'shiluvchilarda sanalmaydi, demak, $P_1, P_2, \ldots, P_t$ shartlarning hech birini qanoatlantirmaydigan $x \in A$ element (5.1) tenglikning o'ng va chap tomonlarida bir marotaba sanaladi.

Agar $x \in A$ element biror P_j shartni qanoatlantirib boshqa shartlarni qanoatlantirmasa, bu element (5.1) tenglikninng o'ng tomonida sanalmaydi. Ikkinchi tomondan esa bu element S_0 sonini olinishida bir marotaba sanaladi va $N(P_j)$ sonini olinishida, ya'ni S_1 sonini olinishida bir marotaba sanaladi. Qolgan S_i sonlarni hosil qilinishida esa sanalmaydi. Berilgan (5.1) tenglikninng o'ng tomoni $S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^t S_t$ ko'rinishga ega bo'lganligi uchun $x \in A$ element (5.1) tenglikninng o'ng tomonida $1 - 1 = 0$ marotaba sanaladi. Demak, faqat bitta P_j shartni qanoatlantirib, boshqa shartlarni qanoatlantirmaydigan elementlar (5.1) tenglikning o'ng tomonida ham chap tomonida ham sanalmaydi.

Endi $x \in A$ element $P_{j_1}, P_{j2}, \ldots, P_{j_r}$ shartlarni qanoatlantirsin. Ma'lumki, bu element (5.1) tenglikning o'ng tomonida sanalmaydi. Ikkinchi tomondan esa bu element S_0 sonini olinishida bir marotaba, $N(P_{j_s})$, $1 \le s \le r$ sonlarining har birida bir marotaba sanalgani uchun S_1 sonini olinishida r marotaba sanaladi. Shu mulohazani davom ettirsak, bu element $N(P_{j_s}, P_{j_q})$, $1 \le s, q \le r$ sonlarining har birida bir marotaba sanalgani uchun va P_{j_s}, P_{j_q} juftliklar S_2 da C_r^2 marotaba ishtirok etganligi uchun, $x \in A$ element S_2 da C_r^2 marotaba, $N(P_{j_s}, P_{j_q}, P_{j_p})$, $1 \le s, q, p \le r$ larni o'z ichiga oluvchi S_3 da C_r^3 marotaba, va hokazo $N(P_{j_1}, P_{j2}, \ldots, P_{j_r})$ larni o'z ichiga oluvchi S_r da C_r^r marotaba sanalishi kelib chiqadi. Demak, $x \in A$ element (5.1) tenglikninng o'ng tomonida

$$1 - C_r^1 + C_r^2 + \ldots + (-1)^r C_r^r = (1 - 1)^r = 0$$

marotaba sanalar ekan.

Demak, biz P_1, P_2, …, P_t shartlarning hech birini qanoatlantirmaydigan element (5.1) tenglikning o'ng va chap tomonlarida aynan bir marotaba sanalishini, va bu shartlarning birortasini qanoatlantiruvchi element esa har ikkala tomonda sanalmasligini hosil qildik. Bundan esa (5.1) tenglik o'rinli ekanligi kelib chiqadi. □

5.1-Teorema da keltirilgan (5.1) tenglik *kiritish va chiqarish qoidasi* deyiladi. Quyidagi teoremada kiritish va chiqarish qoidasining umumlashmasi bo'lgan munosabat keltirilgan.

5.2-Teorema. A to'plamning faqat r ta shartini qanoatlantiruvchi elementlari soni N(r) uchun quyidagi munosabat o'rinli.

$$N(r) = S_r - C_{r+1}^{r} S_1 + C_{r+2}^{r} S_2 - C_{r+3}^{r} S_3 + \dots + (-1)^{t-r} C_t^r S_t \qquad (5.2)$$

Kiritish va chiqarish qoidasidan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

5.1-Natija. Ixtiyoriy chekli $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlar uchun

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| -$$

$$- \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

munosabat o'rinlidir.

Isbot. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ to'plamning x elementi uchun quyidagi shartlarni aniqlaymiz. Agar x element A_i to'plamga tegishli bo'lsa, u holda bu element P_i shartni qanoatlantiradi deb qabul qilamiz.

Kiritish va chiqarish qoidasiga ko'ra

$$N(0) = |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} |A_i \cap A_j| -$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

P_i shartlarning hech birini qanoatlantirmaydigan elementlar soni N(0)=0 ekanligidan Natijaning o'rinli ekanligi kelib chiqadi. □

5.2-Natija. Chekli A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi surektiv akslantirishlar soni:

$$W_{n,m} = m^n - C_m^1 (m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n - \dots + (-1)^n C_m^m (m-m)^n \qquad (5.3)$$

ga teng, bu yerda n = |A|, m = |B|, n ≥ m.

Isbot. Aytaylik, $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ va $B = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ bo'lsin. A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi $f\colon A \to B$ akslantirishlar to'plami uchun quyidagi $P_1, P_2, \dots, P_m$ shartlarni aniqlaymiz.

Agar $y_i \in B$ element $f: A \to B$ akslantirishning obraziga tegishli bo'lmasa, u holda f akslantirish P_i shartni qanoatlantiradi deb qabul qilamiz. Demak, P_1, P_2, …, P_m shartlarning hech birini qanoatlantirmaydigan akslantirishning obraziga barcha $y_i \in B$ elementlar tegishli bo'ladi. Demak, bunday akslantirishlar surektivdir.

Ma'lumki, $S_0 = m^n$, chunki, S_0 bu A to'plamni B to'plamga akslantiruvchi barcha akslantirishlar soni. Bundan tashqari, A to'plamni $B\backslash\{y_i\}$ to'plamga akslantiruvchi barcha akslantirishlar soni $(m-1)^n$ ga, A to'plamni $B\backslash\{y_i, y_j\}$ to'plamga akslantiruvchi barcha akslantirishlar soni $(m-2)^n$ ga, va hokazo A to'plamni $B\backslash\{y_{j_1}, y_{j_2}, ..., y_{j_k}\}$ to'plamga akslantiruvchi barcha akslantirishlar soni $(m-k)^n$ ekanligidan

$$N(P_i) = (m-1)^n,\ N(P_i, P_j) = (m-2)^n, \ldots, N(P_1, P_2, \ldots, P_m) = (m-m)^m$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Demak

$$S_1 = \sum_{i=1}^{m} N(P_i) = C_m^1\ (m-1)^n,$$

$$S_2 = \sum_{1\le i<j\le m} N(P_i, P_j) = C_m^2 (m-2)^n,$$

………………………………………

$$S_m = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_m\le m} N(P_{j_1}, P_{j_2}, ..., P_{j_m}) = C_m^m (m-m)^n.$$

Kiritish va chiqarish qoidasiga ko'ra

$$W_{n,m} = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots + (-1)^t S_t =$$

$$= m^n - C_m^1 (m-1)^n + C_m^2 (m-2)^n - \ldots +(-1)^n C_m^m (m-m)^n$$

□

Mustaqil yechish uchun masalalar

5.1. 1 dan 1000 gacha bo'lgan sonlar orasida 3, 7 va 13 sonlarining hech biriga bo'linmaydiganlari nechta?

5.2. 1 dan 1000 gacha bo'lgan sonlar orasida 2, 5, va 7 sonlarining hech biriga bo'linmaydiganlari nechta?

5.3. 300 dan 800 gacha bo'lgan sonlar orasida 2, 7, va 11 sonlarining hech biriga bo'linmaydiganlari nechta?

5.4. Sinfda 35 ta o'quvchi bo'lib, ulardan 20 tasi matematika, 11 tasi fizika to'garagiga qatnashadi. 10 ta o'quvchi esa hech qaysi to'garakka qatnashmaydi. Sinfda nechta o'quvchi faqat matematika to'garagiga qatnashadi? Har ikkala to'garakka qatnashadiganlar nechta?

5.5. Sinfdagi o'quvchilardan 22 tasi matematika, 18 tasi fizika va 12 tasi kimyo to'garagiga qatnashadi. 8 ta o'quvchi ham matematika, ham fizika to'garagiga, 6 ta o'quvchu ham matematika, ham kimyo to'garagiga, 5 ta o'quvchi ham fizika ham kimyo to'garagiga va 3 ta o'quvchi har uchala to'garakka qatnashadi. Agar har bir o'quvchi kamida bitta to'garakka qatnashishi ma'lum bo'lsa, sinfda nechta o'quvchi bor?

5.6. 100 ta odamdan 27 tasi ingliz tilini, 15 tasi nemis va 13 tasi fransuz tilini biladi. Agar 8 ta odam ingliz va nemis tillarini, 6 ta odam ingliz va fransuz tillarini, 7 ta odam nemis va fransuz tillarini, hamda 3 ta odam har uchala tilni ham bilsa, nechta odam birorta ham chet tilini bilmaydi?

5.7. Institut xodimlarining 18 tasi ingliz tilini, 10 tasi nemis va 14 tasi fransuz tilini biladi. Agar 5 ta xodim ingliz va nemis tillarini 6 ta xodim ingliz va fransuz tillarini, 4 ta xodim nemis va fransuz tillarini, hamda 2 ta xodim har uchala tilni bilishi va har bir xodim kamida bitta chet tilini bilishi ma'lum bo'lsa, Institutda nechta xodim ishlaydi? Faqat ingliz tilini biluvchi xodimlar soni nechta?

5.8. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ to'plamni $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ to'plamga akslantiruvchi surektiv akslantirishlar nechta?

5.9. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ to'plamni $B = \{y_1, y_2, y_3\}$ to'plamga akslantiruvchi surektiv akslantirishlar nechta?

5.10. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ to'plamni $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ to'plamga akslantirib, $|f(A)|=3$ shartni qanoatlantiruvchi $f{:}A\to B$ akslantirishlar sonini toping.

5.11. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ to'plamni $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ to'plamga akslantirib, $|f(A)| = 4$ shartni qanoatlantiruvchi $f{:}A\to B$ akslantirishlar sonini toping.

5.12. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ to'plamni $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$ to'plamga akslantirib, $|f(A)| \leq 3$ shartni qanoatlantiruvchi $f{:}A\to B$ akslantirishlar sonini toping.

5.13. $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ to'plamni $B = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ to'plamga akslantirib, $|f(A)| \geq 3$ shartni qanoatlantiruvchi $f{:}A\to B$ akslantirishlar sonini toping.

5.14. 8 ta har xil sharchani 4 ta har xil qutiga, qutilarning hech biri bo'sh bo'lmaydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

5.15. 9 ta har xil kitobni 5 ta o'quvchiga har bir o'quvchi kamida bittadan kitobga ega bo'ladigan qilib necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

5.16. 10 ta har xil kitobni 6 ta o'quvchiga hech bo'lmaganda uchta o'quvchi kitobga ega bo'ladigan qilib, necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

5.17. 9 ta har xil kitobni 6 ta o'quvchiga to'rttadan ko'p talaba kitobga ega bo'ladigan qilib, necha xil usul bilan tarqatish mumkin?

5.18. 7 ta har xil medal bilan 6 ta ishchini har bir ishchi kamida bittadan medalga ega bo'ladigan qilib necha xil usul bilan taqdirlash mumkin?

5.19. 7 ta talaba o'z uy vazifa daftarlarini o'qituvchiga berishdi. O'qutuvchi daftarlarni tekshirib, har bir talabaga tavakkaliga bittadan daftarni qaytarib berdi. Ma'lum bo'lishicha, hech bir talabaga o'z daftari qaytib berilmasdan, balki boshqa talabaning daftari berilgan ekan. Bunday tarqatishni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

Agar talabalarning faqat ikkitasi o'z daftarlarini olib, qolganlari boshqa daftarlarni olgan bo'lsa-chi?

5.20. O'qituvchi 8 ta talabaning talabalik guvohnomalarini talabalarning har biriga tavakkaliga bittadan qilib tarqatdi. Keyin ma'lum bo'lishicha, hech bir talabaga o'z guvohnomasi berilmagan, ya'ni boshqa talabaning guvohnomasi berilgan ekan. Bunday tarqatishni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

Agar talabalarning to'rttasi o'z guvohnomalarini olib, qolgan to'rttasi boshqa guvohnomalarni olgan bo'lsa-chi?

5.21. Dastlabki 3 ta raqamlari yig'indisi, oxirgi uchta raqamlarining yig'indisiga teng bo'ladigan 6 xonali sonlar nechta?

5.22. To'rt mergan (har biri kamida bittadan) sakkizta nishonni mo'ljalga olishlari kerak. Ular nishonlarni necha xil usul bilan o'zaro bo'lishib olishlari mumkin?

5.23. 12 ta erkak va 8 ta ayoldan 3 ta erkak, 4 ta ayol va yana 3 xodimni necha xil usul bilan tanlab olish mumkin?

5.24. Poyezdda 9 ta vagon mavjud bo'lsa, 4 ta yo'lovchini har xil vagonlarda jo'naydigan qilib necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

6 - § Rekurrent munosabatlar metodi va Fibonachchi sonlari

Kombimatorikaning ba'zi masalalari rekurrent munosabatlar deb nomlanuvchi, n ta elementli to'plam yoki munosabatlar uchun qo'yilgan masala elementlar soni n dan kichikroq to'plam yoki munosabatlar uchun qo'yilgan masalaning yechimi orqali ifodalanuvchi metod yordamida yechiladi.

6.1 - Ta'rif. Agar $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ sonlar ketma-ketlikning x_n hadi o'zidan oldingi $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}$ hadlar orqali $x_n = F(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k})$, ko'rinishida ifodalansa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik k-tartibli *rekurrent* munosabatni qanoatlantiradi deyiladi, bu yerda F – k-o'rinli funksiya.

Ma'lumki, $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sonlar berilgan bo'lsa, u holda $n \geq k$ uchun barcha x_n hadlar bir qiymatli aniqlanadi.

Agar F funksiya chiziqli funksiya bo'lsa, ya'ni

$$x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k} \tag{6.1}$$

bo'lsa, u holda rekurrent munosabat chiziqli deyiladi.

6.2 - Ta'rif. $\{x_n\}$ ketma-ketlik (6.1) ko'rinishdagi k-tartibli chiziqli rekurrent munosabat bo'lsin.

$$P(x) = x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \ldots - a_k \tag{6.2}$$

ko'phad k-tartibli chiziqli rekurrent munosabatning xarakteristik ko'phadi deyiladi.

Aytaylik λ soni P(x) xarakteristik ko'phadning ildizi bo'lsin.

6.1-Teorema. Agar λ soni $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k}$ chiziqli rekurrent munosabatning P(x) xarakteristik ko'phadi ildizi bo'lsa, $\{c\lambda^n\}$ ketma-ketlik chiziqli rekurrent munosabatni qanoatlantiradi.

Isbot. Ketma-ketlikning $x_n = c\lambda^n$ hadlarini rekurrent munosabatga qo'ysak,

$$x_n - a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} + \ldots + a_kx_{n-k} = c\lambda^n - a_1c\lambda^{n-1} - a_2c\lambda^{n-2} - \ldots - a_kc\lambda^{n-k} =$$

$$= c\lambda^{n-k}(\lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - \ldots - a_k) = 0,$$

tenglikka ega bo’lamiz. Bundan esa $\{c\lambda^n\}$ ketma-ketlik chiziqli rekurrent munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi. □

6.1-Tasdiq. Agar $\{u_n\}$ va $\{v_n\}$ ketma-ketliklar (6.1) ko’rinishdagi k-tartibli chiziqli rekurrent munosabatni qanoatlantirsa, u holda $\{\alpha u_n + \beta v_n\}$ ketma-ketlik ham ushbu rekurrent munosabatni qanoatlantiradi.

6.2-Teorema. Aytaylik, λ_1, λ_2, …, λ_k sonlar (6.1) chiziqli rekurrent munosabatni P(x) xarakteristik ko’phadi sodda (karrali bo’lmagan) ildizlari bo’lsin. U holda bu rekurrent munosabatning umumiy yechimi quyidagi ko’rinishga ega bo’ladi:

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n \qquad (6.3)$$

Isbot. Yuqoridagi 6.1-Teorema va 6.2-Tasdiqlardan (6.3) ko’rinishidagi ketma-ketlik (6.1) rekurrent munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

Endi (6.1) rekurrent munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ketma-ketlik (6.3) ko’rinishda ekanligini ko’rsatamiz.

Faraz qilaylik, $\{v_n\}$ ketma-ketlik (6.1) rekurrent munosabatni qanoatlantirsin. Ma’lumki, $v_n = u_n$ tenglikni ko’rsatish uchin $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$, …, $u_{k-1} = v_{k-1}$ tengliklarni ko’rsatish yetarli.

Ushbu tenglamalar sistemasini qaraymiz

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dots + c_k = v_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \dots + c_k\lambda_k = v_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1\lambda_1^{k-1} + c_2\lambda_2^{k-1} + \dots + c_k\lambda_k^{k-1} = v_{k-1} \end{cases}$$

λ_1, λ_2, …, λ_k sonlar turli bo’lganligi uchun yuqoridagi sistemaning asosiy determinanti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots. & \lambda_k \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_1^{k-1} & \dots. & \lambda_1^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j)$$

noldan farqli bo'ladi.

Demak, $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}$ larning ixtiyoriy qiymatida $u_i=v_i$, $0 \le i \le k-1$ tenglik o'rinli bo'ladigan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sonlari mavjud. Bundan esa $v_n=u_n$ tenglik kelib chiqadi. □

6.1-Misol. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ boshlang'ich shartlar $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ rekurrent munosabat bilan berilgan ketma-ketlikni qaraylik.

Ushbu ketma-ketlik

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \ldots$$

ko'rinishga ega bo'lib, ***Fibonachchi sonlari*** deb ataladi.

Ushbu $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ rekurrent munosabatning xarakteristik ko'phadi $P(x) = x^2 - x - 1$ ko'rinishda bo'lib, uning idizlari $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ bo'ladi. Bundan Fibonachchi sonlarining umumiy ko'rinishini hosil qilamiz:

$$u_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

$u_0 =1$ va $u_1=1$ ekanligidan

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemadan $c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ kelib chiqadi.

Agar (6.1) chiziqli rekurrent munosabatning $P(x)$ xarakteristik ko'phadi mos ravishda $r_1, r_2, \ldots, r_s$ karrali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ildizlarga ega bo'lsa, quyidagi teorema o'rinli.

6.3-Teorema. Aytaylik, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ sonlar (6.1) chiziqli rekurrent munosabatni $P(x)$ xarakteristik ko'phadining mos ravishda $r_1, r_2, \ldots, r_s$

karrali ildizlari bo'lsin. U holda bu rekurrent munosabatning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$u_n = \sum_{i=1}^{s}(c_{i,1} + nc_{i,2} + ... + n^{r_i-1}c_{i,r})\lambda_i^n. \qquad (6.4)$$

6.2-Misol. Agar u_0=2, u_1=5, u_2=15 tengliklar o'rinli bo'lsa quyidagi

$$u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$$

rekurrent formula bilan berilgan $\{u_n\}$ ketma-ketlikning umumiy hadini toping.

Yechish: Dastlab ketma-ketlikning xarakteristik tenglamasini tuzib olamiz.

$$\lambda^3 = 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$$

Bu tenglamaning ildizlari λ_1=1, λ_2=2, λ_3=3 bo'ladi. Demak, u_n ketma-ketlik uchun quyidagi tenglikni olamiz:

$$u_n = c_1 + c_2 2^n + c_3 3^n$$

berilgan boshlang'ich shartlardan c_1, c_2, c_3 larni topamiz.

$$u_0 = 2 = c_1 + c_2 + c_3,$$

$$u_1 = 5 = c_1 + 2c_2 + 3c_3,$$

$$u_2 = 15 = c_1 + 4c_2 + 9c_3,$$

Bu sistemadan $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $c_3 = 2$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\{u_n\}$ ketma-ketlikning umumiy hadi $u_n = 1 - 2^n + 2\cdot 3^n$ bo'ladi.

6.3-Misol. Agar $u_0 = -1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 9$ tengliklar o'rinli bo'lsa, quyidagi

$$u_{n+3} = 7u_{n+2} - 13u_{n+1} + 12u_n$$

rekurrent formula bilan berilgan $\{u_n\}$ ketma-ketlikning umumiy hadini toping.

Yechish: Ushbu ketma-ketlikning xarakteristik tenglamasi

$$\lambda^3 = 7\lambda^2 - 13\lambda + 12$$

ko'rinishda bo'lib, uning ildizlari λ_1=λ_2=2, λ_3=3. Demak,

$$u_n = (c_1 + nc_2)\cdot 2^n + c_3\cdot 3^n.$$

Boshlang’ich shartlardan foydalanib,

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= -1, \\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 1, \\ 4c_1 + 8c_2 + 9c_3 &= 9, \end{aligned}$$

sistemaga ega bo’lamiz. Ushbu sistemani yechib, $c_1 = -2$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$ larni topamiz, hamda u_n ketma-ketlikning umumiy hadi

$$u_n = (n-2)\cdot 2^n + 2\cdot 3^n$$

ekanligi kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

6.1. Boshlang’ich shartlari berilgan quyidagi rekurrent munosabatlarning umumiy hadini toping:

a) $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = -1$;

b) $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 2$, $u_1 = -1$;

c) $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$, $u_0 = -1$, $u_1 = 0$;

d) $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$, $u_0 = -2$, $u_1 = 3$;

e) $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 2$, $u_1 = -1$;

f) $u_{n+3} = -5u_{n+2} + 2u_{n+1} + 24u_n$, $u_0 = u_1 = 1$, $u_2 = 11$;

g) $u_{n+3} = 12u_{n+2} - 41u_{n+1} + 30u_n$, $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -7$;

h) $u_{n+3} = 3u_{n+2} + 24u_{n+1} + 28u_n$, $u_0 = 0$, $u_1 = -11$, $u_2 = -37$;

i) $u_{n+3} = 3u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = -1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 4$;

j) $u_{n+3} = 6u_{n+2} - 12u_{n+1} + 8u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 4$;

k) $u_{n+3} = -3u_{n+2} - 3u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 5$, $u_1 = -6$, $u_2 = 11$;

l) $u_{n+4} = 3u_{n+3} - u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 6$, $u_2 = 8$, $u_3 = 16$;

m) $u_{n+4} = 6u_{n+2} - 8u_{n+1} + 3u_n$, $u_0 = 2$, $u_1 = -4$, $u_2 = 8$, $u_3 = -26$.

6.2. Quyidagi rekurrent munosabatlarning umumiy hadini toping:

a) $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 15u_n$;

b) $u_{n+2} = 13u_{n+1} - 12u_n$;

c) $u_{n+2} = 18u_{n+1} - 81u_n$;

d) $u_{n+2} = 16u_{n+1} - 64u_n$;

e) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$;

f) $u_{n+3} = -5u_{n+2} + u_{n+1} + 5u_n$;

g) $u_{n+3} = 15u_{n+2} - 75u_{n+1} + 125u_n$;

h) $u_{n+4} = 2u_{n+2} - u_n$;

i) $u_{n+4} = 8u_{n+2} - 16u_n$;

j) $u_{n+4} = 10u_{n+2} - 9u_n$.

6.3. Faqat 1 va 2 lardan tashkil topib, ikkita 1 raqami yonma-yon turmaydigan 7 xonali sonlar nechta?

6.4. 9 qavatlik binoni har bir qavatini oq yoki sariq ranglarga, qo'shni qavatlar bir xil sariq rangga bo'yalmaydigan qilib bo'yash talab qilingan. Bunday bo'yashlarni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

6.5. 10 litrlik idishdagi suvni 1 va 2 litrlik ikkita idish yordamida necha xil usul bilan bo'shatish mumkin?

6.6. Elementlari 0 va 1 raqamlaridan tashkil topib, $c_1 \le c_2$, $c_2 \ge c_3$, $c_3 \le c_4$, $c_4 \ge c_5$, …. shartlarni qanoatlantiruvchi $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ vektorlar sonini toping.

6.7. $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ to'plamining hech qaysi ikkita ketma-ket sonini o'z ichiga olmaydigan qism to'plamlari sonini toping.

6.8. Elementlari 0 va 1 raqamlaridan tashkil topib, 0 raqami yonma yon kelmaydigan uzunligi $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorlar sonini Fibonachchi sonlari orqali ifodalang.

6.9. Yonma-yon turuvchi Fibonachchi sonlarining o'zaro tub ekanligini isbotlang.

6.10. Fibonachchi sonlari f_n uchun quyidagi munosabatlar o'rinli ekanligini isbotlang.

a) $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$;

b) $f_0 + f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$;

c) $f_1 + f_3 + f_5 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$;

d) $f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_4 + \ldots + f_{2n-1}f_{2n} = (f_{2n})^2$;

e) $f_1 + 2f_2 + 3f_3 + \ldots + nf_n = nf_{n+2} - f_{n+3} + 2$;

f) $f_{n+1}f_{n-1} - (f_n)^2 = (-1)^n$.

6.11. Musiqa to'garagiga 20 kishi, she'rxonlik to'garagiga 15 kishi, rassomchilik to'karagida 12 kishi qatnashadi. To'rtta musiqachi, uchta shoir va beshta rassomdan iborat guruhlarni necha xil usul bilan tuzish mumkin?

6.12. 6 ta o'rindiqli aylanasimon arg'imchoqqa 6 ta o'quvchini necha xil usulda o'tqazish mumkin?

6.13. 8 ta o'rindiqli aylanasimon arg'imchoqqa 4 ta o'gil bola va 4 ta qiz bolani o'g'il bolalar yonma-yon o'tirmaydigan qilib necha xil usulda o'tqazish mumkin? (3 ta o'gil bola va 5 ta qiz bolanichi)?

6.14. Birinchi jamoada 10 ta sportchi va ikkinchi jamoada 15 ta sportchi mavjud. Birinchi jamoda har bir sportchi ikkinchi jamoadan o'ziga raqib tanlash imkoniga ega. Turnirdagi bahslarni necha xil usul bilan tashkil qilish mumkin?

6.15. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 raqamlaridan bir xil raqamlar ishtirok etmaydigan qilib mumkin bo'lgan barcha besh xonali sonlar tuzilgan. Bir vaqtda 2, 4 va 5 raqamlari ishtirok etgan sonlar nechta.

6.16. Do'konda 4 xil turdagi choynaklar mavjud bo'lib, xaridor 7 ta choynak sotib olmoqchi. Xaridorning tanlash imkoniyatlari nechta? (har bir turdagi choynaklar soni 7 tadan ortiq).

6.17. Sakkiz xil rangdagi bayroqlarni har bir bolaga ikkitadan va turli rangli qilib tarqatildi. Bolalarning hech birida aynan bir xil rangli bayroqlar bo'lmasligi uchun bolalar soni nechtadan oshmasligi kerak?

7 - § Hosil qiluvchi funksiyalar va Katalan sonlari

Bizga $u_1, u_2, ..., u_n, ...$. sonli ketma-ketlik berilgan bo‘lsin. Shu ketma-ketlik yordamida tuzilgan

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

ifoda sonli qator deb, $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ chekli sonlar esa qatorning hadlari deb ataladi. $s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ yig‘indiga qatorning qismiy yig‘indisi deyiladi.

Agar qatorning qismiy yig‘indilaridan tuzilgan $s_1, s_2, ..., s_n, ...$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u holda qator yaqinlashuvchi va bu limitning qiymati yaqinlashuvchi qator yig‘indisi deb ataladi.

Agar qismiy yig‘indilar ketma-ketligi chekli limitga ega bo‘lmasa, u holda qator uzoqlashuvchi deyiladi.

Yuqorida keltirilgan sonli cheksiz qator tushunchasida qatorning $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ hadlari sonlar emas, balki qandaydir x o‘zgaruvchiga bog‘liq chekli qiymatlar qabul qiluvchi $u_1(x),\ u_2(x), ...,\ u_n(x), ...$ funksiyalardan iborat bo‘lsa, u holda

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ...$$

qatot funksional qator deyiladi.

Amaliy masalalarni hal qilishda funksional qatorlar sinfiga tegishli bo‘lgan darajali qatorlar muhim ahamiyatga ega. Darajali qator

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

ko‘rinishga ega bo‘lgan funksional qatordan iboratdir.

Kombinatorikada qator tushunchasi kombinatorik ob’yektlar tufayli vujudga kelgan ketma-ketliklar bilan ishlashda keng qo‘llaniladi.

7.1-Ta'rif Darajali qator yig'indisini ifodalovchi

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$$

funksiya $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi deb ataladi.

Hosil qiluvchi funksiyalar bir qator xossalarga ega. Biz quyida shunday xossalardan ba'zilarini oddiy xossalar sifatida keltiramiz. Ular hosil qiluvchi funksiyalarni tuzish, hamda ulardan amaliy masalalarni hal etishda ko'mak beradi.

7.1- xossa. Agar $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_a(x)$ va $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_b(x)$ bo'lsa, u holda

$$a_0 \pm b_0, a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, ..., a_n \pm b_n, ...$$

ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=f_a(x)\pm f_b(x)$ bo'ladi.

Haqiqatan ham, $f_a(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ va $f_b(x)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k$ bo'lgani uchun, darajali qatorlarni hadlab qo'shib (ayirib),

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \pm \sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k=f_a(x)\pm f_b(x)$$

munosabatni hosil qilamiz. □

7.2- xossa. Agar $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_a(x)$ va $b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f_b(x)$ bo'lsa, u holda elementlari $d_n=\sum_{i=0}^{n}a_i b_{n-i}$ $(n=0,1,2,...)$ sonlardan iborat bo'lgan $d_0, d_1, d_2, ..., d_n, ...$ ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x)=f_a(x)f_b(x)$ bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$f_a(x)f_b(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{n}b_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}a_i b_{k-i}\right)x^k=\sum_{k=0}^{\infty}d_k x^k=f(x). \quad □$$

7.1-Misol. $u_0 = a, u_1 = b$ boshlang'ich shartlar va $u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$ rekurrent munosabat bilan berilgan ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $u(x) = \dfrac{a + (b-a)x}{1 - x - x^2}$ ga teng bo'ladi.

Buni ko'rsatish uchun quyidagi sistemani yozib olamiz

$$\begin{cases} u_0 = & a & \\ u_1 = & & b \\ u_2 = & u_1 + & u_0 \\ u_3 = & u_2 + & u_1 \\ \ldots & \ldots. & \ldots \\ u_n = & u_{n-1} + & u_{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \end{cases}$$

Bu sistemaning i-hadini x^i ga ko'paytirib, qo'shsak tenglikning chap tomoni u(x) hosil qiluvchi funksiyaga teng bo'ladi. O'ng tomonining birinchi ustunidan esa

$$a + u_1x^2 + u_2x^3 + \ldots + u_{n-1}x^n + \ldots = a - ax + xu(x)$$

tenglikka, ikkinchi ustunidan esa

$$bx + u_0x^2 + u_1x^3 + \ldots + u_{n-2}x^n + \ldots = bx + x^2u(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Demak, $u(x) = a - ax + xu(x) + bx + x^2u(x)$ munosabatga ega bo'ldik, bundan esa

$$u(x) = \frac{a + (b-a)x}{1 - x - x^2}$$

kelib chiqadi. □

Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, Fibonachchi sonlaridan iborat 1, 1, 2, 3, 5, 8, …. ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi

$$u(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

ga teng bo'ladi.

Quyidagi teoremada ixtiyoriy chiziqli rekurrent munosanat yordamida aniqlangan ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasini topish formulasini keltiramiz.

7.1-Teorema. Agar $\{u_n\}$ ketma-ketlik $u_0=b_0$, $u_1=b_1$, …, $u_{k-1}=b_{k-1}$ boshlang'ich shartlar va $u_n = a_1u_{n-1}+ a_2u_{n-2}+ … + a_ku_{n-k}$ rekurrent formula yordamida berilgan bo'lsa, u holda bu ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi uchun

$$u(x)=\frac{G(x)}{1-a_1x-a_2x^2-...-a_kx^k} \qquad (7.2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, bu yerda

$G(x)=b_0+(b_1–a_1b_0)x+(b_2–a_2b_0–a_1b_1)x^2+ … + (b_{k-1}–a_{k-1}b_0– …–a_1b_{k-2})x^{k-1}$.

Isbot. Rekurrent munosabat yordamida quyidagi sistemani yozib olamiz

$$\begin{cases} u_0= & b_0 & & & \\ u_1= & & b_1 & & \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ u_{k-1}= & & & & b_{k-1} \\ u_k= & a_1u_{k-1}+ & a_2u_{k-2}+ & ...+ & a_ku_0 \\ u_{k+1}= & a_1u_k+ & a_2u_{k-1}+ & ...+ & a_ku_1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ u_n= & a_1u_{n-1}+ & a_2u_{n-2}+ & ....+ & a_ku_{n-k} \\ .... & .... & .... & .... & .... \end{cases}$$

Bu sistemaning i-hadini x^i ga ko'paytirib, barchasini qo'shsak tenglikning chap tomoni u(x) hosil qiluvchi funksiyaga teng bo'ladi.

O'ng tomonining birinchi ustunidan

$$b_0 + a_1u_{k-1}x^k + a_1u_kx^{k+1} +… + a_1u_{n-1}x^n + … =$$
$$= a_1x\cdot u(x) + b_0 – a_1b_0x– a_1b_1x^2 – … – a_1b_{k-2}x^{n-1}$$

ikkinchi ustunidan

$$b_1x + a_2u_{k-2}x^k + a_2u_{k-1}x^{k+1} +… + a_1u_{n-2}x^n + … =$$
$$= a_2x^2u(x) + b_1x – a_2b_0x^2– a_2b_1x^3 – … – a_2b_{k-3}x^{k-1}$$

va hokazo k-ustunidan esa

$$b_{k-1}x^{k-1} + a_k u_0 x^k + a_k u_1 x^{k+1} + \ldots + a_k u_{n-k} x^n + \ldots = a_k x^k u(x) + b_{k-1}x^{k-1}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Demak,

$$u(x) = a_1 x \cdot u(x) + b_0 - a_1 b_0 x - a_1 b_1 x^2 - \ldots - a_1 b_{k-2} x^{k-1} +$$

$$+ a_2 x^2 u(x) + b_1 x - a_2 b_0 x^2 - a_2 b_1 x^3 - \ldots - a_2 b_{k-3} x^{k-1} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ a_{k-1} x^{k-1} u(x) + b_{k-2} x^{k-2} - a_{k-1} b_0 x^{k-1}$$

$$+ a_k x^k u(x) + b_{k-1} x^{k-1}$$

Bu tenglikdan esa $u(x) = \dfrac{G(x)}{1 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_k x^k}$ kelib chiqadi.

□

7.2-Misol. Hosil qiluvchi funksiyasi $u(x)=\sqrt{1-4x}$ ko'rinishda bo'lgan u_n ketma-ketlikni aniqlang.

Yechish. Umumlashgan Nyuton binomi formulasiga ko'ra

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$

ekanligi ma'lum. Demak,

$$\sqrt{1-4x} = (1-(4x))^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}(-4x) + \ldots + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-4x)^k + \ldots$$

Bundan esa

$$u_n = (-4)^n \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\ldots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = -2^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{n!} = -2\cdot\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$$

kelib chiqadi.

7.2-Ta'rif. Quyidagi rekurrent formula yordamida aniqlanuvchi

$$T_n = T_{n-1}T_0 + T_{n-2}T_1 + \ldots + T_0 T_{n-1},\ T_0 = 1.$$

sonli ketma-ketlik ***Katalan sonlari*** deyiladi.

Katalan sonlarining dastlabki hadlari quyidagicha bo'ladi:

1; 1; 2; 5; 14; 42; 132; 429; ….

7.2-Teorem. Katalan sonlarining umumiy n-hadi uchun quyidagi formula o'rinli:

$$T_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n$$

Isbot. Dastlab T_0, T_1, T_2, … ketma-ketlikning hosil qiluvchi funksiyasi $f(x) = T_0 + T_1x + T_2x^2 + \ldots + T_nx^n + \ldots$ ni qaraymiz.

$F(x) = xf(x) = T_0 x + T_1x^2 + T_2x^3 + \ldots + T_{n-1}x^n + T_nx^{n+1} \ldots$ bo'lsin.

Ushbu ifodani kvadratga ko'taramiz.

$$[F(x)]^2 = T_0^2 x^2 + (T_1T_0 + T_0T_1)x^3 + \ldots + (T_{n-1}T_0 + T_{n-2}T_1 + \ldots + T_0T_{n-1})x^{n+1} + \ldots$$

Endi $T_n = T_{n-1}T_0 + T_{n-2}T_1 + \ldots + T_0T_{n-1}$ ekanligini hisobga olsak,

$$[F(x)]^2 = T_1x^2 + T_2x^3 + \ldots + T_nx^{n+1} + \ldots = F(x) - x$$

hosil bo'ladi. Demak,

$$F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}$$

Yuqoridagi 7.3 – misoldan foydalanib,

$$F(x) = x + x^2 + \ldots + \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^n + \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}x^n \ldots$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan esa

$$T_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^n$$

kelib chiqadi. □

Mustaqil yechish uchun masalalar

7.1. Quyidagi ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini toping:

a) $a_n = 1$; b) $a_n = (-1)^n$;

c) $a_n = 2^n$; d) $a_n = n-1$;

e) $a_n = n^2$; f) $a_n = n+1$;

g) $a_n = n^2+n$; h) $a_n = n^2+3n+2$;

i) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$; j) $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$;

k) $a_n = 3^n+3n$; l) $a_n = 3^{-n}+3^n$.

7.2. Quyidagi rekurrent metod bilan aniqlangan ketma-ketliklarning hosil qiluvchi funksiyalarini toping:

a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;

b) $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; $a_2 = 2$;

c) $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$; $a_2 = 3$;

d) $a_{n+4} = 2a_{n+3} + 2a_{n+2} - a_n$, $a_0 = 2$, $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$.

7.3. Quyidagi ketma-ketliklarning umumiy hadini toping.

a) $a_{n+1} = a_n + n$, $a_0 = 1$;

b) $a_{n+1} = 2a_n - 1$, $a_0 = 1$;

c) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + n$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;

d) $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + n^2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

7.4. Katalan sonlari T_n uchun quyidagi xossalar o'rinli ekanligini ko'rsating:

a) $T_{n+1} = \dfrac{2(2n+1)}{n+2} T_n$;

b) $T_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n+1}$;

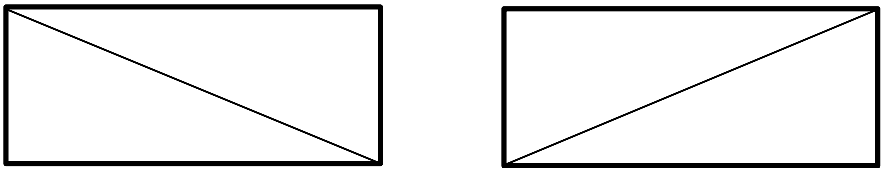
c) $T_n = \dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \left(C_n^k\right)^2$;

d) $T_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \dfrac{n+k}{k}$.

7.5. Hosil qiluvchi funksiyasi $\frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ bo’lgan ketma-ketlikni toping.

7.5. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_{2k}^{k} \cdot C_{2n-2k}^{n-k} = 4^{k}$ ekanligini ko’rsating.

7.7. Qavariq n burchakni o’zaro kesishmaydigan dioganallari orqali uchburchaklarga bo’lingan. Bunday bo’linishlar sonini t_n orqali belgilaymiz. Masalan: n=4 da quyidagicha bo’linishlar hosil bo’ladi:



Demak, $t_4 = 2$.

a) t_5 ni toping;

b) t_6 ni toping;

c) $t_n = T_{n-3}$ ekanligini isbotlang, bu yerda T_n – Katalan soni.

7.8. Ma’lumki, a·b·c ko’paytmada qavslarni ikki xil usulda (a·b)·c va a·(b·c) ko’rinishlarda qo’yish mumkin.

a) a·b·c·d ko’paytmada qavslarni necha xil usul bilan qo’yish mumkin;

b) a·b·c·d·e ko’paytmada qavslarni necha xil usul bilan qo’yish mumkin;

c) $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$ ko’paytmada qavslarni T_{n-3} xil usul bilan qo’yish mumkinligini isbotlang, bu yerda T_n – Katalan soni.

7.9. Lotto o’yinida 3 ta oq va 3 ta qora sharlar mavjud. O’yinchi qutidagi sharlarni ketma-ket bittadan tavakkaliga tanlaydi. O’yin shartlariga ko’ra, agar o’yin davomida tanlangan qora sharlar soni oq sharlar sonidan oshib ketsa o’yin to’xtatiladi. O’yinchi lotto o’yinini oxirigacha olib bora oladigan necha xil tanlash usuli mavjud? (oq va qora sharlar 4 tadan va 5 tadan bo’lganida-chi)?

7.10. Chipta narxi 5000 so'm bo'lgan konsert kassasida 10 ta odam navbatda turibdi. Navbatda turgan odamlarning 5 tasida 10000 so'mlik, qolgan 5 tasida 5000 so'mlik banknotlar bo'lib, kassirda qaytim qaytarish uchun hech qanday pul mavjud emas. Kassir barchaga o'z vaqtida qaytim qaytara olgan holda chiptalarni sotishi uchun bu odamlar necha xil usul bilan navbatga turishlari mumkin.

7.11. $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ vektor uchun quyidagi shartlar bajariladi:

$a_i = \pm 1$, $\sum_{i=1}^{2n} a_i \geq 0$ va ixtiyoriy k $(1 \leq k \leq 2n-1)$ uchun $\sum_{i=1}^{k} a_i \geq 0$.

Bunday shartni qanoatlantiruvchi $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ vektorlar soni Katalan soni T_n ga teng ekanligini isbotlang.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Qosimov N.X., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq elementlari. Uslubiy qo'llanma. Toshkent – 2013. 98 bet
2. To'rayev X., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi. Toshkent – 2009. 184 bet.
3. Harris J., Hirst J.L., Mossinghoff M. Combinatorics and Graph Theory. Springer 2008. 381 p.
4. Kenneth H. Rosen. Discrete mathematics and Its Applications. New York – 2012. 1017 p.
5. Ерош И.Л. Дискретная математика, Комбинаторика. Учебное пособие. Санкт Петербург – 2001. 37 ст.
6. Ильинская И.П., Ильинский А.И. Дискретная математика, Сборник задач, Комбинаторика, графы, вероятность. Учебное пособие. Харьков – 2008. 104 ст.
7. Носов В.А. Комбинаторика и теория графов. Москва – 1999. 112 ст.

MUNDARIJA