O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

QIShLOQ VA SUV XO’JALIGI VAZIRLIGI

ESHMATOV X., YUSUPOV M.
AYNAQULOV SH., XODJAYEV D.

MATEMATIK MODELLASHTIRISH

O’zbekiston Respublikasi Oliy va O’rta maxsus ta’lim vazirligi oliy o’quv yurtlararo ilmiy-uslubiy birlashmasi faoliyatini Muvofiqlashtiruvchi kengash tomonidan o’quv qo’llanma sifatida tavsiya etilgan

Toshkent-2008

O'quv qo'llanma O'zbekiston Respublikasi OO'MTV 2008 yil 28 fevraldagi №51 sonli buyrug'iga asosan chop etishga tavsiya etilgan

Taqrizchilar: **Sh. Nazirov**, Toshkent Axborot texnologiyalari universiteti, "Dasturlash texnologiyalari" kafedrasi profesori, fizika-matematika fanlari doktori
E. Fayziboyev, "Oliy matematika" kafedrasi, professor

Eshmatov X., Yusupov M., Aynaqulov Sh.A., Xodjayev D.A.

Matematik modellashtirish. O'quv qo'llanma, 2009 – 240 b.

Ushbu o'quv qo'llanmada «Matematik modellashtirish» fanining asosiy tushuncha va maqsadlari keltirilgan bo'lib, unda ba'zi bir ob'ektlarning matematik modellari qurib ko'rsatilgan. Matematik modelning yechish usullari va ularga mos Paskal tilidagi dasturiy ta'minoti keltirilgan.

O'quv qo'llanma qishloq va suv xo'jaligi bilim sohasi bakalavriat ta'lim yo'nalishlari va magistratura mutaxassisliklarida ta'lim olayotgan talabalarga mo'ljallangan. Shu bilan birga undan boshqa oliy o'quv yurtlarining tegishli (mos va turdosh) yo'nalishlari va mutaxassisliklarida ta'lim olayotgan talabalar va magistrantlar hamda matematik modellashtirish bilan shug'ullanayotgan mutaxassislar ham foydalanishlari mumkin.

K I R I Sh

Tabiiy fanlarning tez suratda rivojlanishi hamda shaxsiy kompyuterlar yangi avlodlarining hayotga jadal ravishda kirib kelishi, har bir mutaxassis oldiga zamon talablariga javob beradigan yangi vazifalarni qo'ymoqda. Keyingi paytlarda ko'pgina soha masalalarini yechishda matematik modellashtirish usulidan keng foydalanib kelinmoqda. Bunga asosiy sabab, birinchidan bu usulning afzalligi bo'lsa, ikkinchidan esa tezkor shaxsiy kompyuterlardan keng foydalanish imkoniyatlarining paydo bo'lganligidir.

Hozirgi vaqtga kelib «Matematik modellashtirish» fani oliy ta'limning ko'pgina yo'nalishlarida asosiy fan sifatida o'rganila boshlandi. Oliy ta'limning davlat standartiga asosan har bir bakalavr va magistr o'z sohasida mavjud bo'lgan asosiy jarayonlarni chuqur tahlil qilib berishligi kerak bo'ladi. Bu esa, hozirda matematik modellashtirish fani orqali amalga oshirilmoqda.

Matematik modellashtirish fani matematika, mexanika, fizika, informatika, kimyo, biologiya, ekologiya va boshqa maxsus fanlar bilan chambarchas bog'liq bo'lib, u har bir talabadan chuqur bilim va ko'nikmalarni talab etadi.

Ushbu o'quv qo'llanmada matematik modellashtirish fanining asosiy tushuncha va maqsadlari keltirilishi bilan birga, texnik yo'nalishda foydalaniladigan ba'zi bir ob'ektlarning matematik modellari qurib ko'rsatilgan. O'quv qo'llanmada matematik modellashtirishda ko'p uchraydigan masalalarning yechish algoritmlari ishlab chiqilgan hamda unga mos Paskal tilidagi dasturiy ta'minotlar keltirilgan.

Qo'llanmadan «Matematik modellashtirish» fanidan ta'lim berayotgan o'qituvchilar, shu fanni o'rganuvchi talabalar va ushbu fan bilan mustaqil shug'ullanayotgan keng kitobxonlar ommasi foydalanishlari mumkin.

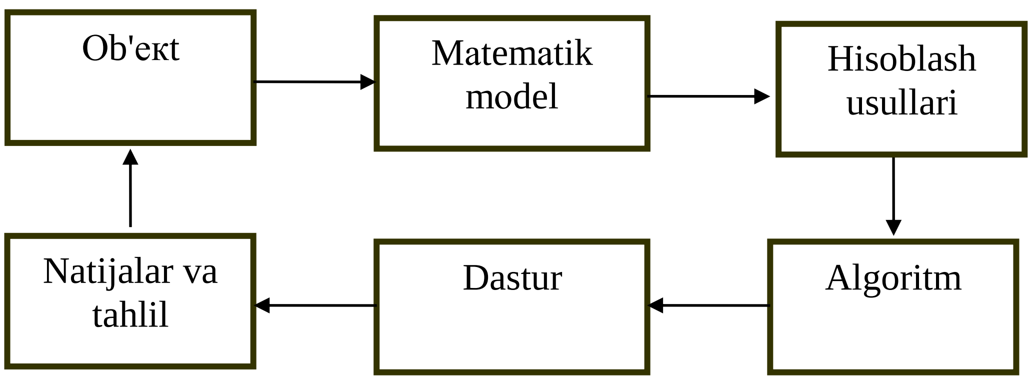
1-BOB. MATEMATIK MODELLAShTIRISh ASOSLARI

Aniq yechimga ega har qanday masala bir necha usullar yordamida yechiladi. Agar yechilayotgan masala yetarlicha aniqlikda matematik munosabatlar orqali ifodalansa, bu masalani matematik modellashtirish usuli yordamida yechish mumkin. Masalani bu usulda yechish matematik modellashtirish jarayoni deb ataladi.

1.1. Ob'ekt va matematik modellashtirish

Ob'ekt deganda har xil xossa va xususiyatlarga ega bo'lgan hamda biror soha jarayonini ifoda etuvchi, tabiatning biror elementi tushuniladi. Suv yoki gaz oqayotgan truba, paxta terish mashinasining shpendeli, elektr toki o'tkazuvchisi, qurilishda ishlatiladigan temir-beton plita va h.k. lar ob'ektga misol bo'la oladi. Turli xil soha mutaxassislarining asosiy vazifasi o'z ob'ektlarining xossa va xususiyatlarini o'rganish hamda shu asosda masalani yechishdan iborat. Ob'ektni o'rganish o'ta murakkab jarayon bo'lib, u bir necha xil usullar yordamida amalga oshiriladi.

Tekshirilayotgan ob'ekt xossa va xususiyatlarini matematik munosabatlar orqali ifodalash shu ob'ektning **matematik modeli** deb ataladi. Matematik model qurish va uni yechish jarayoni esa **matematik modellashtirish** deyiladi. Matematik modellashtirish jarayoni sxematik ravishda quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:



Har qanday ob'ektning matematik modeli qurilayotganda, dastlab bu ob'ekt xossalari mutaxassislar tomonidan har tomonlama o'rganib chiqiladi. Ob'ekt xossalarini ifodalovchi o'zgaruvchi parametrlar o'rtasidagi bog'lanishlar aniqlanadi. Shundan keyin ayrim cheklanishlar qilinadi va har xil omil(faktor)larning masala yechimiga ta'sir darajasi aniqlanadi. Buning uchun har xil faraz(gipoteza)larga asoslanadi. Ob'ekt matematik modelini qurishda har xil farazlarga asoslanganligi sababli turli xil matematik modellar hosil bo'ladi. Ob'ektni matematik modellashtirish natijasida asosan uch xil model hosil bo'ladi: **statik, dinamik** va **tarqoq modellar**.

Statik modellarda tekshirilayotgan ob'ekt xossalari vaqt o'zgarishiga bog'liq bo'lmagan holda o'rganiladi. Bu holda ob'ekt matematik modeli faqat fazoviy koordinatalar yordamida ifodalanadi.

Dinamik modelda esa aksincha, ob'ekt xossalari faqat vaqt o'zgarishiga bog'liq ravishda o'rganiladi.

Xossa va xususiyatlari vaqt hamda fazoviy koordinatalar o'zgarishiga bog'liq bo'lgan ob'ektlar matematik modeli tarqoq model ko'rinishida ifodalanadi.

1.2. Matematik modellashtirishning asosiy bosqichlari

Har qanday ob'ektni matematik modellashtirish bir necha bosqichlar asosida olib boriladi. Bu bosqichlar quyidagilardan iborat:

1. Ob'ekt xossa va xususiyatlarin o'rganish.
2. Ob'ekt matematik modelini qurish.
3. Matematik modelni yechish algoritmini tanlash yoki ishlab chiqish.
4. Tanlangan yoki ishlab chiqilgan algoritm asosida kompyuter modelini(dasturini) tuzish.
5. Ob'ektning birlamchi boshlang'ich qiymatlarini dasturga kiritish orqali natijalar olish hamda ularni tahlil qilish.

Birinchi bosqichda qaralayotgan ob'ektning mexanik, biologik, geometrik, ekologik va boshqa xususiyatlari hamda ular orasidagi bog'lanishlar batafsil o’rganiladi. Ob’ekt xossa va xususiyatlariga har xil omillarning ta’sir darajasi aniqlanadi.

Ob’ektning matematik modelini tuzishda shu ob’ektning asosiy xossa va xususiyatlari matematik munosabatlar yordamida ifodalanadi. Boshqacha qilib aytganda ob’ektni o’rganish jarayonida unga ta’sir etuvchi asosiy omillar matematik apparat (tenglama, tengsizlik, mantiqiy ifoda yoki ularning sistemalari) orqali yozib chiqiladi. Bu bosqichda shuni e’tiborga olish kerakki, matematik ifodalar imkoni boricha sodda va shu bilan birga ob’ektning barcha asosiy xossalarini o’z ichiga olgan bo’lishi maqsadga muvofiq. Chunki matematik ifodalar qanchalik sodda bo’lsa, ularni yechish algoritmi ham shunchalik sodda hamda ularni yechishda yo’l quyiladigan xatoliklar shunchalik kam bo’ladi.

Algoritm – berilgan masalani yechishda bajarilishi lozim bo’lgan amallarning qat’iy ketma-ketligidir. Har bir masalaning yechish algoritmi bir necha minglab, xatto millionlab amallarni o’z ichiga oladi. Masalaning yechish algoritmini tanlash – bu mavjud yechish algoritmlari orasidan eng qulayini tanlashdir. Ayrim hollarda masalani yechish uchun yangi hisoblash algoritmini ishlab chiqishga ham to’g’ri keladi. Yechish algoritmi tanlanayotganda yoki yangisi ishlab chiqilayotganda uning natijaviyligiga, aniqlik darajasiga, ommaviyligiga hamda vaqt bo’yicha tejamkorligiga e’tibor berish kerak bo’ladi.

Dastur tuzish bosqichida tanlangan yoki ishlab chiqilgan algoritm biror algoritm til orqali ifodalanadi. Masalani yechish uchun algoritmik til tanlanayotganda uning soddaligiga hamda imkoniyatlari darajasiga e’tibor berishga to’g’ri keladi. Ayrim hollarda masala xususiyatiga qarab ham algoritmik til tanlanadi. Bu bosqichda tuzilgan dasturdagi sintaksis va algoritmik xatolar aniqlanib ular bartaraf etiladi. Matematik modellashtirishning bu bosqichi o’ta murakkab bosqich hisoblanib dasturchidan juda ham ko’p mehnat va extiyotkorlikni talab etadi.

Modellashtirishning oxirgi bosqichida, qaralayotgan ob’ektning boshlang’ich xossa va xususiyatlarini ifodalovchi birlamchi sonli qiymatlar, tuzilgan dasturga kiritilib natijalar olinadi hamda u atroflicha tahlil qilinib, har xil xulosalar qilinadi.

1.3. Modellashtirishda analitik va tajriba (eksperiment) usullar

Ob’ektning xossa va xususiyatlariga bog’liq ravishda modellashtirish turli xil usullarda olib boriladi. Keyingi paytlarda ob’ektlarni modellashtirishda asosan ikki xil **analitik** va **eksperiment** usullaridan keng foydalanib kelinmoqda.

Ob’ekt **analitik usulda** modellashtirilganda, shu ob’ektning asosiy xossa va xususiyatlari matematik munosabatlar (tenglama, tengsizlik, integral, differentsial, integrodifferentsial tenglamalar yoki ularning sistemalari) yordamida ifodalanadi, ya’ni ob’ekt xossa va xususiyatlari matematik formulalarga ko’chiriladi. Bu usulda matematik munosabatlar shu ob’ektning barcha asosiy xossalarini o’z ichiga olgan hamda sodda ko’rinishda bo’lish talab qilinadi. Modellashtirishning analitik usuli mutaxassisdan o’z sohasini chuqur bilish bilan birga hisoblash matematikasi va algoritmik tilda dasturlash fanlarini ham yetarli darajada egallashni talab etadi.

Odatda injenerlik masalalarining matematik modeli algebraik tenglamalar, oddiy yoki xususiy hosilali differentsial tenglamalar, integrallar yoki ularning sistemalari ko’rinishida bo’lsa, iqtisodiy masalalarning matematik modeli esa asosan tengsizlik, mantiqiy ifoda yoki ularning sistemalari ko’rinishida ifodalanadi.

Masalan, elastik to’sin egilishi haqidagi masalaning matematik modeli to’rtinchi tartibli oddiy differentsial tenglamaning berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishga keltirilsa, iqtisodiy masala bo’lgan transport masalasining matematik modeli esa oddiy chiziqli algebraik tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi va maqsad funktsiyani ekstrimumga erishtiruvchi o’zgaruvchilar qiymatlarini topishga keltiriladi.

Eksperiment usulda qurilgan model ob’ektlar ustida o’tkazilgan tajribalar, ya’ni kuzatishlar orqali olingan natijalar asosida qurilgan modeldir. Ob’ektning eksperiment modelini qurish o’ta murakkab jarayon hisoblanadi. Chunki ayrim ob’ektlarning eksperiment modelini qurish uchun uzoq vaqt oralig’ida, har xil sharoitlarda bir qancha kuzatishlar o’tkazishga to’g’ri keladi. Bu holda kuzatish natijalariga bir qator ob’ektiv va sub’ektiv sabablar o’z ta’sirini o’tkazadi. Shu sababli keyingi paytlarda matematik modellashtirishda analitik usuldan ko’proq foydalanib kelinmoqda.

Ma’lumki, biror ob’ektni matematik modellashtirish deganda shu ob’ekt xossa va xususiyatlarini matematik munosabatlar yoki mantiqiy ifodalar orqali ifodalash tushuniladi. Odatda modellashtirishning bu usuli analitik usul deb ataladi. Matematik munosabatlar o’z ichiga tenglama, integral, tengsizlik, oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglama yoki ularning sistemalarini o’z ichiga oladi. Ob’ektning matematik modelida matematik munosabatlarning qaysi biri qatnashishi modellashtirilayotgan ob’ekt xossalariga bog’liq bo’ladi. Masalan, elastik materialdan tayyorlangan mayatnik tebranishi masalasini qarasak, uning matematik modeli oddiy differentsial tenglama va unga qo’yilgan boshlang’ich shart orqali ifodalansa, o’zgaruvchan kesimli elastik sterjen tebranishi masalasining matematik modeli esa o’zgaruvchan koeffitsiyentli, xususiy hosilali, to’rtinchi tartibli differentsial tenglama va unga qo’yilgan boshlang’ich hamda chegaraviy shartlar yordamida ifodalanadi.

1.4. Model adekvatligi

Ob’ekt **modelining adekvatligi** deganda shu ob’ektning barcha xossa va xususiyatlari modelda qanday darajada hisobga olinganlik tushuniladi.

Analitik usulda tuzilgan matematik modelning adekvatligi, modellashtirilayotgan ob’ekt xossalarini matematik munosabatlar yordamida ifodalashdagi aniqlik ko’rsatkichi bilan aniqlanadi. Shu bilan birga bu usulda modelning adekvatligi uning yechish usullari aniqligiga ham bog’liq bo’ladi.

Ob’ekt eksperiment modelining adekvatligi o’tkazilgan tajribalar soni va uning sifatiga hamda ularni o’tkazishda foydalanilgan o’lchash asboblarining aniqlik darajasiga bog’liq bo’ladi. Tajribalar soni qancha ko’p bo’lib, o’lchash asboblarining aniqlik darajasi qancha yuqori bo’lsa, olingan natijalar haqiqiy natijalarga yetarlicha yaqin, ya’ni model adekvat bo’ladi.

Ma’lumki, har qanday ob’ektni matematik modellashtirish jarayoni bir necha bosqichlar asosida olib borilad. Lekin bu bosqichlarni har doim ham aniq amalga oshirish imkoni bo’lavermaydi, ya’ni ob’ektning matematik modelini qurishda ba’zi bir faraz(gipoteza)larga asoslanadi. Modelni yechish uchun esa har doim ham aniq yechish usuli mavjud bo’lavermaydi. Ko’pgina hollarda taqribiy yechish usullaridan foydalaniladi. Shu sababli har qanday ob’ektni o’rganish maqsadida tuzilgan matematik model va uni yechishdan olingan natijalar shu ob’ekt xossa va xususiyatlarini ҳar doim ҳam to’liq ifodalay olmaydi.

Ob’ektning adekvat matematik modelini tuzish uchun, birinchidan ob’ektning barcha xossa va xususiyatlarini to’liq o’rganish kerak bo’lsa, ikkinchidan bu xossa va xususiyatlarning barchasi qurilgan modelda matematik munosabatlar yordamida o’z aksini topgan bo’lishi zarur bo’ladi. Shu bilan birga matematik modelni yechishda foydalaniladigan yechish usullari yetarlicha aniqlikga ega bo’lishi talab etiladi.

Ob’ekt matematik modelini adekvat ekanligini tekshirish o’ta murakkab jarayon hisoblanadi. Qurilgan matematik modelni adekvat ekanligini tekshirish usullaridan biri, shu model yordamida olingan natijalarni tajribalar o’tkazish orqali olingan natijalarga yoki oldindan ma’lum bo’lgan aniq natijalar bilan taqqoslashdir. Agar olingan natijalar, yetarlicha aniqlikda o’tkazilgan tajribalar natijalariga yoki oldindan aniq bo’lgan natijalarga yaqin bo’lsa, tuzilgan matematik model shunchalik adekvat hisoblanadi.

1.5. Matematik modellashtirishda xatoliklar

Ma’lumki, matematik modellarni yechish uchun uni diskret holga olib kelishga to’g’ri keladi. Masalalarni diskret holga keltirishda esa, ba’zi bir xatoliklarga yo’l qo’yiladi. Bu xatoliklar nimalar hisobidan hosil bo’ladi va u qanday baholanadi? Bu savollarga javob berish har bir mutaxassis uchun juda muhim ahamiyatga ega.

Taqribiy hisoblash xatoliklari va ularning turlari. Shaxsiy kompyuter (ShK) yordamida hisob-kitob ishlarini bajarish asosan taqribiy hisoblashlar asosida olib boriladi. Bu esa ixtiyoriy masalaning yechimi qandaydir xatoliklar bilan, ya’ni masalaning taqribiy yechimi hosil bo’lishiga olib keladi. Masalalarni ShK da yechishda yo’l quyiladigan xatoliklarni qanday baholash mumkin, degan savol barcha mutaxassislarni qiziqtirib keladi. Bu savolga javob berish maqsadida **absolyut** va **nisbiy xatoliklar** tushunchalari kiritiladi.

Agar biror miqdorning aniq qiymatini x va uning taqribiy hisoblash natijasida olingan qiymatini $\bar{x}$ deb olsak, u holda absolyut xato deb

$$\Delta x = |x - \bar{x}|$$

ga, nisbiy xato deb esa,

$$\delta x = \frac{|x - \bar{x}|}{|x|} \cdot 100\% = \frac{\Delta x}{|x|} \cdot 100\%$$

ga aytiladi.

Bu xatoliklarning hosil bo'lishiga asosiy sabablar nimalardan iborat? Umuman olganda hisoblashlar natijasida hosil bo'ladigan xatoliklar manbalarini, asosan to'rt guruhga ajratish mumkin.

Birinchi guruh xatolar yechilayotgan masalaning matematik modelini qurish bilan bog'liq xatolardir. Ma'lumki, birinchidan ob'ektning barcha xossa va xususiyatlarini matematik modelda hisobga olish har doim imkoniyati bo'lavermaydi. Ikkinchidan ob'ektning barcha xususiyatlarini hisobga olish, matematik modelni o'ta murakkablashishiga, natijada esa uni yetarlicha aniq yechish imkoni bo'lmay qolishiga olib keladi. Bu guruh xatoliklar ***matematik model xatosi*** deb ataladi.

Ikkinchi guruh xatolar masalaning yechish uchun beriladigan boshlang'ich qiymatlarida mavjud bo'lgan xatoliklardir. Tajriba yoki hisoblash natijasida olingan boshlang'ich qiymatlar albatta biror xatolikga ega bo'ladi. Chunki bu qiymatlar o'lchash asboblarining aniqligiga yoki hisoblash usullariga bog'liq bo'ladi. Bu guruh xatoliklar odatda ***qutilib bo'lmaydigan xatolar*** deb ataladi.

Uchinchi guruh xatolar masalani yechish usulidagi mavjud xatolardir. Bu xatolar ***yechish usulining xatosi*** deb ataladi va u asosan modelni diskret holga keltirishda va taqribiy yechish usullarida mavjud bo'lgan xatoliklardir.

To'rtinchi guruh xatolar bevosita ShKlarda hisoblashni tashkil etish bilan bog'liq bo'lgan xatoliklardir. Bu xatolar odatda ***hisoblash xatoliklari*** deb ataladi. Hisoblash xatoliklari asosan sonlarni yaxlitlash natijasida hosil bo'ladi.

Ayrim hollarda turli xil xatoliklardan qutulish uchun ba’zi bir takliflarni e’tiborga olish maqsadga muvofiq bo’ladi:

- qiymati hisoblanadigan ifodalarni imkoni boricha soddalashtirish va unda bajariladigan amallar sonini eng kam miqdorga keltirish;
- agar bir qator sonlar ustida qo’shish-ayirish amallarini bajarish lozim bo’lsa, dastlab kichik sonlar ustida amallarni bajarish;
- oraliq hisoblashlarda qiymatlari deyarli teng bo’lgan miqdorlar ustida ayirish amalini bajarmaslik.

1.6. Matematik modelni yechish usullari

Yuqorida ta’kidlanganidek, ob’ektni matematik modellashtirish har xil tenglama, tengsizlik yoki ularning sistemalarini yechishga keltiriladi. Umuman olganda modelni yechish usullarini uch turga ajratish mumkin: **analitik, sonli** va **sonli-analitik usullar.**

Analitik usul - masala yechimini aniq matematik formulalar bilan(analitik ko’rinishda) ifodalashdir. Bu usul aniq usul hisoblanib, unda yechim masalaning berilgan boshlang’ich qiymatlarni o’z ichiga olgan matematik formulalar ko’rinishida ifodalanadi. Odatda analitik usuldan oddiy matematik model bilan ifodalanadigan masalalarni yechishda foydalaniladi. Chunki murakkab masalalarning yechimini har doim ham aniq formulalar ko’rinishida ifodalash imkoni bo’lavermaydi. Analitik usulga misol sifatida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi, Gauss yoki teskari matritsa kabi yechish usullarini keltirish mumkin.

Sonli usul – taqribiy yechish usuli hisoblanib, oliy matematika fanining hisoblash matematikasi bo’limida o’rganiladi. Bu usulga ko’ra matematik modelda berilgan formulalar, taqribiy ravishda o’ziga yaqin (ekvivalent) hamda sodda ko’rinishga ega bo’lgan formulalar bilan almashtiriladi. Masalan funktsiya hosilasi, chekli ayirmaga; funktsiyaning aniq integrali chekli yig’indiga, cheksiz qator esa chekli yig’indiga almashtiriladi. Sodda ko’rinishga keltirilgan model ShK yordamida yechiladi va masala yechimi grafik yoki sonlar jadvali ko’rinishida ifodalanadi. Sonli usullarga misol sifatida trantsendent tenglamalarni oraliqni teng ikkiga bo'lish, urunmalar, vatarlar yoki differentsial tenglamalarni Eyler, Runge-Kutta, chekli ayirmalar yordamida yechish usullarini keltirish mumkin.

Sonli usullardan biri **iteratsiya usuli**dir. Taqribiy yechish usuli iteratsiya usuli deyiladi, agar noma'lumlar ustida chekli takrorlanuvchi amallar bajarilib, bu amallardan keyin noma'lumlar qiymatlari aniqlashtirilsa (noma'lumlarning taqribiy qiymatlari uning aniq qiymatlariga yaqinlashsa), shu bilan birga keyingi takrorlanuvchi amallarni bajarishda noma'lumlarning aniqlashtirilgan qiymatidan foydalanilsa.

Sonli-analitik usul – bu yuqorida aytilgan ikki usulning kombinatsiyasidan tashkil topgan usuldir. Bu usulda masala yechimi asosan xosmas integral, cheksiz qator, maxsus funktsiyalar yoki ularning kombinatsiyalari ko'rinishida ifodalanadi. Bu usulda qaralayotgan masala yechimi analitik ko'rinishda yozib quyiladi, lekin sonli natijalar ba'zi bir taqribiy hisoblashlar yordamida hosil qilinadi. Sonli-analitik usullarga misol sifatida Bubnov-Galyorkin yoki Fur'e usullarini keltirishimiz mumkin.

Tayanch so'z va iboralar. Ob'ekt, matematik model, matematik modellashtirish, kompyuter dasturi, algoritm, algoritmik til, blok-sxema, statik model, dinamik model, tarqoq model, absolyut xato, nisbiy xato, analitik usul, sonli usul, sonli-analitik usul, model adekvatligi, xosmas integral, qator, trantsendent tenglama.

Savollar

1. Ob'ektga ta'rif bering.
2. Matematik model deb nimaga aytiladi?
3. Matematik modellashtirish jarayoni deb nimaga aytiladi?
4. Matematik munosabat deganda nimani tushunasiz?
5. Matematik modellashtirish qanday bosqichlardan iborat?
6. Algoritmga ta'rif bering.

7. Algoritmik til deganda nimani tushinasiz?
8. Dastur va dasturlash nima?
9. Masala algoritmini dasturlash uchun algoritmik til qanday tanlanadi?
10. Model turlari.
11. Model adekvatligi deganda nimani tushunasiz?
12. Model adekvatligi qanday tekshiriladi?
13. Absolyut xato nima?
14. Nisbiy xato nima?
15. Modellashtirishda xatolik turlari va ularning kelib chiqish manbalari.
16. Matematik modelni yechish usullari.
17. Analitik usul nima?
18. Sonli usul nima?
19. Sonli-analitik usul nima?

2-BOB. ChIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASI VA TRANTSENDENT TENGLAMALARNI YeChISh USULLARI

Ma’lumki, ob’ekt matematik modeli matematik munosabatlar (tenglama, tengsizlik yoki ularning sistemalari) yordamida ifodalanadi. Bu munosabatlardan biri - chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidir. Bizga n ta noma’lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.1}$$

berilgan bo’lsin. Bu yerda a_{ij}, b_i lar berilgan sonlar, x_i lar noma’lumlar $(i, j = 1,2,\ldots,n)$. Agar (2.1) sistemaga mos keluvchi asosiy determenant Δ noldan farqli, ya’ni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

bo’lsa, sistema yagona yechimga ega bo’ladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning bir necha usullari mavjud bo’lib, ular Kramer qoidasi, Gauss, teskari matritsa, iteratsiya hamda Jordan usullaridir. Bu usullar algoritmlarini (2.1) sistema uchun ko’rib chiqaylik.

2.1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Kramer qoidasi usuli

Kramer qoidasi usuli odatda determenantlar usuli ham deb ataladi. Bu usulni (2.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi uchun ko’rib chiqaylik. Bu usulga ko’ra quyidagi $(n+1)$ ta n - tartibli

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1\ a_{12}\ \dots a_{1n} \\ b_2\ a_{22}\ \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_n\ a_{n2}\ \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \dots b_1 \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots b_n \end{vmatrix}$$

determinantlarning qiymatlari hisoblanadi va noma’lumlar

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \ \dots, \ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

formulalar yordamida topiladi.

Odatda bu usuldan sistemadagi tenglamalar soni kam bo’lganda foydalaniladi, chunki tenglamalar soni yetarlicha ko’p bo’lganda yuqori tartibli determinantlarni hisoblash algoritmi murakkab ko’rinishga ega bo’ladi.

Misol. Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 14 \\ 5x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi usuli yordamida yeching.

Yechish.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 7 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot(-2) + 1\cdot 7\cdot 0 + 1\cdot 5\cdot(-1) - 0\cdot(-4)\cdot(-1) - 1\cdot 1\cdot(-2) -$$

$$2\cdot 5\cdot 7 = 16 + 0 - 5 - 0 + 2 - 70 = -57$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -4 & 7 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot(-2) + 1\cdot 7\cdot 4 + (-1)\cdot 14\cdot 5 - (-1)\cdot(-4)\cdot 4 -$$

$$1\cdot 14\cdot(-2) - 1\cdot 7\cdot 5 = 8 + 28 - 70 - 16 + 28 - 35 = -57\ ;$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 14 & 7 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\cdot 14\cdot(-2)+1\cdot 7\cdot 0+(-1)\cdot 1\cdot 4-(-1)\cdot 14\cdot 0-1\cdot 1\cdot(-2)-$$

$$2\cdot 7\cdot 4 = -56+0-4-0+2-56=-114;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 14 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-4)\cdot 4+1\cdot 14\cdot 0+1\cdot 1\cdot 5-1\cdot(-4)\cdot 0-1\cdot 1\cdot 4-$$

$$2\cdot 14\cdot 5 = -32+0+5-0-4-140=-171;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-57}{-57} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-114}{-57} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-171}{-57} = 3$$

Javob: $x_1 = 1,\ \ x_2 = 2,\ \ \ x_3 = 3.$

2.2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usuli

Gauss usuli - noma’lumlarni ketma-ket yo’qotishga asoslangan usul bo’lib, uning algoritmi quyidagi hisoblashlar ketma-ketligidan iborat. (2.1) da $a_{11} \neq 0$ bo’lsin (agar $a_{11} = 0$ bo’lsa, sistemadagi tenglamalarning o’rnini almashtirib $a_{11} \neq 0$ ga ega bo’lish mumkin). (2.1) sistemadagi birinchi tenglamaning barcha hadlarini a_{11} ga bo’lib

$$x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1 \tag{2.2}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}},\ j = 2,3,\ldots,n,\ \ d_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

(2.2) tenglama yordamida (2.1) sistemadan x_1 noma’lumni yo’qotaylik. Buning uchun (2.2) tenglamani $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ larga ketma-ket ko’paytirib, (2.1) tenglamalar sistemasining mos ravishda ikkinchi, uchinchi va h.k. n-tenglamasidan hadlab ayirsak, $x_2, x_3, \ldots, x_n$ no’malumlarga nisbatan

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases} \qquad (2.3)$$

(n-1) ta noma'lumli (n-1) ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu yerda

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}c_{1j}\ ,\ \ b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}d_1,\ i,j = 2,\ldots,n.$$

Endi (2.3) sistemadan x_2 noma'lumni yo'qotaylik. Buning uchun (2.3) sistemaning birinchi tenglamasini $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ga (agar $a_{22}^{(1)} = 0$ bo'lsa, (2.3) sistemadagi tenglamalarning o'rnini almashtirib $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ga ega bo'lish mumkin) bo'lib

$$x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2 \qquad (2.4)$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ d_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},\ j = 3,4,\ldots,n.$$

Ushbu jarayonni $n-1$ marta takrorlasak

$$x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = d_{n-1} \qquad (2.5)$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$c_{n-1,n} = \frac{a_{n-1,n}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}, \qquad d_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{(n-2)}}{a_{n-1,n-1}^{(n-2)}}.$$

(2.5) tenglama yordamida oldingi sistemadan x_{n-1} noma'lumni yo'qotsak, x_n ni topish uchun

$$x_n = d_n \qquad (2.6)$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda $d_n = \dfrac{b_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}$.

Shunday qilib (2.1) sistemaning $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$ noma'lumlarini Gauss usuli bo'yicha aniqlash uchun (2.2), (2.4), (2.5) va (2.6) larga asoslangan quyidagi yechish algoritmiga ega bo'lamiz:

$$
\begin{aligned}
&x_n = d_n,\\
&x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1,n}x_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_2 = d_2 - c_{23}x_3 - \ldots - c_{2n}x_n,\\
&x_1 = d_1 - c_{12}x_2 - \ldots - c_{1n}x_n.
\end{aligned}
$$

Ushbu formulani qisqacha quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$x_k = d_k - \sum_{j=k+1}^{n} c_{kj}x_j,\ k = n, n\text{-}1, \ldots, 1.$$

Misol. Berilgan ushbu

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13\\
-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -6
\end{cases}
$$

tenglamalar sitemasini Gauss usulida yeching.

Yechish.

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\
2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 13\\
-3x_1 + x_2 - 2x_3 = -6
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\
7x_2 - 6x_3 = -15\\
7x_2 - 5x_3 = -9
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\
7x_2 - 6x_3 = -15\\
-x_3 = -6
\end{cases}
\Leftrightarrow
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\
7x_2 - 6x_3 = -15\\
x_3 = 6
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - 6 = -1\\
7x_2 - 36 = -15\\
x_3 = 6
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - 6 = -1\\
7x_2 = 21\\
x_3 = 6
\end{cases}
\Leftrightarrow
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + 6 - 6 = -1\\
x_2 = 3\\
x_3 = 6
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
x_1 = -1\\
x_2 = 3\\
x_3 = 6
\end{cases}
$$

Javob: $x_1 = \text{-}1,\quad x_2 = 3,\quad x_3 = 6.$

Paskal algoritmik tilida n ta noma'lumli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
program gauss; uses crt;
const n=4;      { sistemadagi tenglamalar soni }
type
    stroka=array[1..n+1] of real;
```

```
    matrisa=array[1..n] of stroka;
    vektor=array[1..n] of real;
var
   a:matrisa; x:vektor; max,c:real;
   i,j,k,m:integer;
procedure gauss_1(b:matrisa; var y:vektor);
          begin
               for i:=1 to n do
                   begin
                        max:=abs(b[i,i]); j:=i;
                        for k:=i+1 to n do if abs(b[k,i])>max then begin
                        max:=abs(b[k,i]);
                              j:=k;
                        end;
                        if j<>i then for k:=i to n+1 do
                                                    begin c:=b[i,k]; b[i,k]:=b[j,k];
                                                          b[j,k]:=c;
                                                    end;
                        c:=b[i,i];
                        for k:=i to n+1 do b[i,k]:=b[i,k]/c;
                        for m:=i+1 to n do
                                        begin
                                             c:=b[m,i];
                                             for k:=i+1 to n+1 do
                                       b[m,k]:=b[m,k]-b[i,k]*c;
                                        end;
                   end;
                        y[n]:=b[n,n+1];
                        for i:=n-1 downto 1 do
                        begin
```

```
                  y[i]:=b[i,n+1];
                  for k:=i+1 to n do y[i]:=y[i]-b[i,k]*y[k]
              end;
        end;
begin  clrscr;
    for i:=1 to n do  for j:=1 to n+1 do
    begin
       write('a[',i:1,',',j:1,']=');  read(a[i,j]);
{ Sistema koeffitsiyentlarini kiritish}
    end;
    gauss_1(a,x);
    writeln('Sistemaning yechimi=:');
    for i:=1 to n do writeln('x[',i:1,']=',x[i]:10:4);
{ Sistema yechimini chop etish }
     end.
```

Misol: Quyidagi

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 + x_4 = 13 \\ 3x_1 + x_2 - 10x_3 - 6x_4 = -11 \\ 9x_2 - 2x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 + 3x_2 - 12x_3 + x_4 = 20 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usuliga tuzilgan dasturdan foydalanib yeching.

Javob: $x_1 = 6{,}2167$, $x_2 = 0{,}0825$, $x_3 = -0{,}6278$, $x_4 = 6{,}0018$.

2.3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda teskari matritsa usuli

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (2.1) ni yechishda teskari matritsa usuli algoritmi bilan tanishaylik. Buning uchun (2.1) sistemadagi noma'lumlar oldidagi koeffitsiyentlardan tuzilgan n - o'lchovli

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

kvadrat matritsani qaraymiz.

Ta’rif. A matritsaga teskari matritsa deb shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun

$$A^{-1}\cdot A=E$$

tenglik o’rinli bo’ladi. Bu yerda E birlik matritsa, ya’ni

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Teorema. Agar A matritsa elementlaridan tuzilgan asosiy determenant qiymati noldan farqli, ya’ni $\det A\neq 0$ bo’lsa, A matritsaga teskari matritsa mavjud.

Agar A matritsaga teskari matritsa mavjud bo’lsa, u quyidagi formula yordamida hisoblanadi

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{Vmatrix}$$

bu yerda $\Delta=\det A$, A_{ij} - a_{ij} elementlarning algebraik to’ldiruvchilari, ya’ni

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix},\quad i,j=1,2,3,\dots,n.$$

Misol.

$$A=\left\| \begin{matrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

matritsaga teskari matritsani toping.

Yechish.

$$\Delta = det\ A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4+24-10=10$$

A matritsaning algebraik to'ldiruvchilarni hisoblaymiz: $A_{11}=-2;$ $A_{12}=-4;$ $A_{13}=8;$ $A_{21}=3;$ $A_{22}=6;$ $A_{23}=-7;$ $A_{31}=10;$ $A_{32}=-10;$ $A_{33}=20.$

U holda A^{-1} teskari matritsa

$$A^{-1}=\left\| \begin{matrix} -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 1 \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{7}{10} & 2 \end{matrix} \right\|$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish uchun, (2.1) tenglamalar sistemasini matritsa, ya'ni

$$AX=B \tag{2.7}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu yerda

$$A=\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|; \quad X=\left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{matrix} \right\|; \quad B=\left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix} \right\|.$$

(2.7) tenglamaning har ikkala tomonini A^{-1} ga ko'paytirib, $A^{-1}A=E$ va $EX=X$ tengliklardan foydalansak, (2.1) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi uchun

$$X=A^{-1}B$$

ko'rinishdagi formulaga ega bo'lamiz.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
program obrat_matritsa;  uses crt;
    const n=3;                    {tenglamalar soni}
    type vector=array[1..n] of real;
    type matr=array[1..n,1..n+1] of real;
 var
    a,c: matr; b,x: vector;   i,j,m,k: integer;
 procedure umv(l1:matr; l2:vector; var l3:vector);
 var i,k:integer;
 begin
       for i:=1 to n do l3[i]:=0.0;
       for i:=1 to n do for k:=1 to n do
       l3[i]:=l3[i]+l1[i,k]*l2[k];
 end;
 procedure obrmat(ao: matr; it: integer; var a1o: matr);
    label 1;
    var lo: matr; xo,bo: vector; so: real;
 begin
        m:=0; bo[1]:=1; for k:=2 to it do bo[k]:=0;
        for k:=1 to it-1 do for i:=k+1 to it do
                    begin
                        lo[i,k]:=ao[i,k]/ao[k,k];
                        for j:=k+1 to it do ao[i,j]:=ao[i,j]-lo[i,k]*ao[k,j];
                        bo[i]:=bo[i]-lo[i,k]*bo[k]
                   end;
    1:  xo[it]:=bo[it]/ao[it,it]; m:=m+1;
        for k:=it-1 downto 1 do
                            begin  so:=0;
```

```
                              for j:=k+1 to it do so:=so+ao[k,j]*xo[j];
                                xo[k]:=(bo[k]-so)/ao[k,k]
                           end;
   for k:=1 to it do
   if m+1=k then bo[k]:=1 else bo[k]:=0;
   for k:=1 to it-1 do for i:=k+1 to it do
   bo[i]:=bo[i]-lo[i,k]*bo[k];
   for j:=1 to it do a1o[j,m]:=xo[j];
   if m<it then goto 1
 end;
 begin  clrscr;
     for i:=1 to n do for j:=1 to n do
     begin
         write('A[',i:1,',',j:1,']=');
         read(A[i,j])
     end;
{sistema koeffitsiyentlarini kiritish}
     for i:=1 to n do
     begin
         write('B[',i:1,']=');
         read(B[i])
     end;
{sistemagi ozod hadlarni kiritish}
   obrmat(A,n,c);  umv(c,b,x);
     for i:=1 to n do begin
                          writeln('x[',i:1,']=',x[i]:8:4);
                      end;
{sistema yechimlarini chop etish}
  end.
```

2.4. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda iteratsiya usuli

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasida noma’lumlar soni ko’p bo’lganda, Kramer qoidasi, Gauss, teskari matritsa usullarining aniq yechimlar beruvchi sxemasi juda murakkab bo’lib qoladi. U holda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda, taqribiy sonli yechish usullaridan foydalanishga to’g’ri keladi. Bu usullardan biri iteratsiya usulidir. Iteratsiya usuli algoritmini (2.1) ko’rinishdagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi uchun ko’rib chiqaylik. Buning uchun (2.1) sistemani qisqacha

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1,2,...,n \qquad (2.8)$$

ko’rinishda yozib olamiz. (2.8) sistemani matritsa ko’rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$AX = B,$$

bu yerda

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}; \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Vmatrix}; \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}.$$

(2.8) da $a_{ii} \neq 0 \ (i = 1,2,\dots.n)$ deb faraz qilamiz. (2.8) dagi birinchi tenglamani x_1 ga nisbatan, ikkinchi tenglamani x_2 ga nisbatan va nihoyat oxirgisini x_n ga nisbatan yechib, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + 0 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + 0 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \alpha_{n3}x_3 + \dots + \alpha_{nn-1}x_{n-1} + 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

sistemaga ega bo’lamiz. (2.9) ni ushbu

$$\alpha=\begin{Vmatrix}0 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & 0 & \dots & \alpha_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n1} & a_{n2} & \dots & 0\end{Vmatrix},\quad \beta=\begin{Vmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \dots\\ \beta_n\end{Vmatrix},\quad X=\begin{Vmatrix}x_1\\ x_2\\ \dots\\ x_n\end{Vmatrix}$$

belgilashlar yordamida quyidagicha yozishimiz mumkin

$$X=\beta+\alpha X \tag{2.10}$$

(2.10) sistemani ketma-ket yaqinlashishlar usuli bilan yechamiz:

$$X^{(0)}=\beta,\quad X^{(1)}=\beta+\alpha X^{(0)},\ X^{(2)}=\beta+\alpha X^{(1)},....$$

Umumiy holda ketma-ket yaqinlashish jarayonini quyidagicha yozish mumkin:

$$X^{(k)}=\beta+\alpha X^{(k-1)},\ X^{(0)}=\beta,\ k=1,2,3,\ \dots \tag{2.11}$$

Agar $\{X^{(k)}\}$ ketma-ketlikning $k\to\infty$ dagi limiti mavjud bo’lsa, bu limit (2.8) sistemaning taqribiy yechimi bo’ladi. Ushbu

$$X^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)}\right)$$

belgilashni kiritamiz.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|<\varepsilon$ tengsizlik barcha $i=1,2,...,n$ lar uchun bajarilsa, $X^{(k+1)}=\left(x_1^{(k+1)},x_2^{(k+1)},\dots,x_n^{(k+1)}\right)$ vektor (2.8) sistemaning ε aniqlikdagi yechimi deb yuritiladi.

Teorema. Agar (2.9) sistema uchun $\sum_{j=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1$ yoki $\sum_{i=1}^{n}\left|\alpha_{ij}\right|<1$ shartlardan hech bo’lmaganda bittasi bajarilsa, u holda (2.11) iteratsiya jarayoni boshlang’ich yaqinlashishni tanlashga bog’liq bo’lmagan holda yagona yechimga yaqinlashadi.

Natija. (2.1) tenglamalar sistemasi uchun

$$\sum_{\substack{i\neq1\\ j=2}}^{n}|a_{ij}|<|a_{11}|,\ \sum_{\substack{j\neq2\\ j=1}}^{n}|a_{2j}|<|a_{22}|,\ ...,\ \sum_{\substack{j\neq n\\ j=1}}^{n}|a_{nj}|<|a_{nn}|$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda (2.11) iteratsion jarayon yaqinlashuvchi bo’ladi.

Misol. Ushbu

$$\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini ε=0,001 aniqlikda iteratsiya usuli yordamida yeching.

Yechish: Berilgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi koeffitsiyentlari uchun

$$\left.\begin{aligned} 0{,}24 + |-0{,}08| = 0{,}32 < |a_{11}| = 4 \\ 0{,}09 + |-0{,}15| = 0{,}24 < |a_{22}| = 3 \\ 0{,}04 + |0{,}08| = 0{,}12 < |a_{33}| = 4 \end{aligned}\right\}$$

shart bajariladi. U holda, yuqorida keltirilgan teoremaga asosan iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi. Berilgan sistemani

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 0{,}06x_2 + 0{,}02x_3 \\ x_2 = 3 - 0{,}03x_1 + 0{,}05x_3 \\ x_3 = 5 - 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 \end{cases}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Nolinchi yaqinlashish sifatida

$$X^{(0)} = \beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ yoki } x_1^{(0)} = 2,\ x_2^{(0)} = 3,\ x_3^{(0)} = 5,$$

ni olamiz. α matritsa

$$\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & -0{,}06 & 0{,}02 \\ -0{,}03 & 0 & 0{,}05 \\ -0{,}01 & 0{,}02 & 0 \end{Vmatrix}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

(2.11) formula yordamida hisoblashlarni bajaramiz:

$$X^{(1)} = \beta + \alpha X^{(0)} = \begin{Vmatrix} 1{,}92 \\ 3{,}19 \\ 5{,}04 \end{Vmatrix}, \quad x_1^{(1)} = 1{,}92;\ x_2^{(1)} = 3{,}19;\ x_3^{(0)} = 5{,}04.$$

$$X^{(2)} = \beta + \alpha X^{(1)} = \begin{Vmatrix} 1{,}9094 \\ 3{,}1944 \\ 5{,}0446 \end{Vmatrix}, \quad x_1^{(2)} = 1{,}9094;\ x_2^{(2)} = 3{,}1944;\ x_3^{(2)} = 5{,}0446.$$

$$X^{(3)} = \beta + \alpha X^{(2)} = \begin{Vmatrix} 1{,}90923 \\ 3{,}19495 \\ 5{,}04485 \end{Vmatrix}, \quad x_1^{(3)} = 1{,}90923;\ x_2^{(3)} = 3{,}19495;\ x_3^{(3)} = 5{,}04485.$$

Hisoblashlar natijasida ushbu jadvalni hosil qilamiz:

Yaqinla-shishlar(k)	x_1	x_2	x_3	$x_1^{(k)} - x_1^{(k-1)}$	$x_2^{(k)} - x_2^{(k-1)}$	$x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}$
0	2	3	5	-	-	-
1	1,92	3,19	5,04	0,08	0,19	0,04
2	1,9094	3,1944	5,0446	0,0106	0,0044	0,0046
3	1,90923	3,19495	5,04485	0,00017	0,00055	0,00025

Bu yerda

$$\left|x_1^{(3)} - x_1^{(2)}\right| = 0{,}00017 < \varepsilon, \quad \left|x_2^{(3)} - x_2^{(2)}\right| = 0{,}00055 < \varepsilon, \quad \left|x_3^{(3)} - x_3^{(2)}\right| = 0{,}00025 < \varepsilon$$

shartlar bajariladi. Demak, $X = X^{(3)}$ chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining ε aniqlikdagi taqribiy yechimi bo’ladi.

Paskal algoritmik tilida tenglamalar sistemasini iteratsiya usulida taqribiy yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
program iter_sis; uses crt;
  label 1,2;
  const n=3; { sistemadagi tenglamalar soni }
        type
           matrisa=array[1..n,1..n] of real;
           vektor=array[1..n] of real;
        var
           a,a1:matrisa; x,x0,b,b1:vektor; eps,s:real;
           i,j,k:integer;
```

```
begin   clrscr;
  for i:=1 to n do begin
  for j:=1 to n do begin
                 write('a[',i:1,',',j:1,']='); read(a[i,j]) end;
                 {Sistema koeffitsiyentlarini kiritish}
                 write('b[',i:1,']='); read(b[i]);
                {Sistema ozod hadlarini kiritish}
 end;
  eps:=0.0001;   { Yechim aniqligini berish}
  for i:=1 to n do begin
           b1[i]:=b[i]/a[i,i];
           for j:=1 to n do a1[i,j]:=-a[i,j]/a[i,i]
         end;
           for i:=1 to n do begin
                    x0[i]:=b1[i];  a1[i,i]:=0;
                      end;
    2: for i:=1 to n do
            begin
              s:=0.0;
              for j:=1 to n do s:=s+a1[i,j]*x0[j];
              x[i]:=b1[i]+s;
            end;
     k:=0;
     for i:=1 to n do if abs(x[i]-x0[i])<eps
         then begin k:=k+1; if k=n then goto 1 end
         else begin for j:=1 to n do x0[j]:=x[j]; goto 2 end;
 1:  writeln('Sistemaning taqribiy yechimi:');
  for i:=1 to n do writeln('x[',i:1,']=',x[i]:8:6);
                  {Sistemaning taqribiy yechimlarini chop qilish }
end.
```

Misol: Quyidagi

$$\begin{cases} 4x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}08x_3 = 8 \\ 0{,}09x_1 + 3x_2 - 0{,}15x_3 = 9 \\ 0{,}04x_1 - 0{,}08x_2 + 4x_3 = 20 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini iteratsiya usuliga tuzilgan dasturdan foydalanib, eps=0.0001 aniqlikda yeching.

Javob: x_1 =1,909199; x_2=3,194963; x_3=5,044807.

2.5. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Jordan usuli

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n = a_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \ldots + a_{2n}x_n = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \ldots + a_{nn}x_n = a_n \end{cases}$$

Yuqoridagi masala uchun dastlabki Jordan jadvalini tuzib olamiz:

	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$a_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
$a_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$a_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

Ushbu jadvalda Jordan almashtirishlari quyidagi tartibda bajarilib navbatdagi jadval to'ldiriladi:

1) Jordan almashtirishlari hal qiluvchi elementga nisbatan yechiladi. Jadvalning yuqori o'ng burchagidagi element hal qiluvchi element sifatida tanlab olinadi. Hal qiluvchi element joylashgan satr va ustun mos ravishda hal qiluvchi satr va hal qiluvchi ustun deyiladi;

2) hal qiluvchi satrdagi son va hal qiluvchi ustundagi o'zgaruvchi o'rni almashtiriladi;

3) hal qiluvchi element o'rniga unga teskari sonni yozamiz;

4) hal qiluvchi ustun elementlarini hal qiluvchi elementga bo'lib, natijani shu elementlarga mos kataklarga yozamiz;

5) hal qiluvchi satr elementlarini hal qiluvchi elementga bo'lib, ishorasini o'zgartiramiz va natijani shu elementlarga mos kataklarga yozamiz;

6) qolgan kataklar to'rtburchak qoidasi bo'yicha to'ldiriladi.

Masalan, (2.2) katakni to'ldirish uchun quyidagi hisoblash bajariladi:

$$a_{22}^{1} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}}{a_{11}}.$$

7) hal qiluvchi elementlar diagonal bo'yicha tanlanadi va bu jarayon navbatdagi tanlanishi kerak bo'lgan elementdan boshlab quyi o'ng burchakdagi barcha elementlar nol bo'lguncha davom ettiriladi. Aks holda jarayon hal qiluvchi element sifatida diagonalning oxirgi elementi tanlanguncha davom ettiriladi. Agar diagonalda hal qiluvchi element sifatida olinishi kerak bo'lgan son, masalan $a_{pp} = 0$ bo'lib, undan quyi va o'ng tomonda noldan farqli elementlar mavjud bo'lsa, bu sonlardan biri satr va ustunlar o'rnini almashtirish orqali (p,p) katakka olib kelinadi va u hal qiluvchi element sifatida tanlab olinadi. Agar hosoblash diagonal bo'ylab oxirgi (m,n) elementgacha olib borilsa, oxirgi jadval quyidagi ko'rinishga keladi:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1n}
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x_m =$	b_{m1}	b_{m2}	$\cdots$	b_{mn}

Yuqoridagi jadval asosida tenglamalar sistemasining yechimini quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}a_1 + b_{12}a_2 \ldots + b_{1n}a_n \\ x_2 = b_{21}a_1 + b_{22}a_2 \ldots + b_{2n}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 \ldots + b_{nn}a_n \end{cases}$$

Agar hisoblash jarayonida jadvalning quyi o’ng to’rtburchak qismida barcha elementlar nol bo’lsa, oxirgi jadval quyidagi ko’rinishga keladi:

	a_1	a_2	$\cdots$	a_k	x_{k+1}	$\cdots$	x_n
$x_1 =$	b_{11}	b_{12}	$\ldots$	b_{1k}	b_{1k+1}	$\ldots$	b_{1n}
$x_2 =$	b_{21}	b_{22}	$\ldots$	b_{2k}	b_{2k+1}	$\ldots$	b_{2n}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$x_k =$	b_{k1}	b_{k2}	$\ldots$	b_{kk}	b_{kk+1}	$\ldots$	b_{kn}
$a_{k+1} =$	b_{k+11}	b_{k+12}	$\ldots$	b_{k+1k}	0	$\ldots$	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$a_n =$	b_{n1}	b_{n2}	$\ldots$	b_{nk}	0	$\ldots$	0

Ushbu jadvalda $k+1,\ k+2,\ldots n$ - satrlar uchun quyidagi

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1,1}a_1 + b_{k+1,2}a_2 \ldots + b_{k+1,n}a_n \\ a_{k+2} = b_{k+2,1}a_1 + b_{k+2,2}a_2 \ldots + b_{k+2,n}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 \ldots + b_{nn}a_n \end{cases}$$

tengliklar to’g’ri bo’lsa, tenglamalar sistemasi cheksiz ko’p yechimga ega bo’ladi:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}a_1 + b_{12}a_2 + \ldots + b_{1k}a_k + b_{1,k+1}x_{k+1} + \ldots + b_{1n}x_n \\ x_2 = b_{21}a_1 + b_{22}a_2 + \ldots + b_{2k}a_k + b_{2,k+1}x_{k+1} + \ldots + b_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = b_{k1}a_1 + b_{k2}a_2 .. b_{kk}a_k + b_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + b_{kn}x_n \end{cases}$$

Yuqoridan ko’rinadiki, $x_1,\ x_2,\ldots,x_k$ o’zgaruvchilar $x_{k+1},\ldots,x_n$ o’zgaruvchilarning qiymatlariga bog’liq bo’ladi. $x_{k+1},\ldots,x_n$ o’zgaruvchilar esa ixtiyoriy qiymatlarni qabul qiladi. Bu holda tenglamalar sistemasi cheksiz ko’p yechimga ega bo’ladi.

Agar

$$\begin{cases} a_{k+1} = b_{k+1,1}a_1 + b_{k+1,2}a_2 \ldots + b_{k+1,n}a_n \\ a_{k+2} = b_{k+2,1}a_1 + b_{k+2,2}a_2 \ldots + b_{k+2,n}a_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = b_{n1}a_1 + b_{n2}a_2 \ldots + b_{nn}a_n \end{cases}$$

tengliklardan birortasi bajarilmay qolsa, tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lmaydi.

Misol: Quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Jordan usulida yeching:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Yechish: Yuqoridagi masala uchun dastlabki Jordan jadvalini tuzib olamiz:

	x_1	x_2	x_3
4=	2	1	2
1=	1	-1	2
3=	3	1	-2

Jordan almashtirishlaridan keyin navbatdagi jadvallar quyidagi ko'rinishga keladi:

	4	x_2	x_3
x_1	1/2	-1/2	-1
1=	1/2	-3/2	1
3=	3/2	-1/2	-5

Hal qiluvchi element sifatida $a^1_{22} = -3/2$ ni olib, unga nisbatan Jordan almashtirishlarini bajarib, navbatdagi jadvalni to'ldiramiz:

	4	1	x_3
x_1	1/3	1/3	-4/3
x_2	1/3	-2/3	2/3
3=	4/3	1/3	-16/3

Hal qiluvchi element sifatida $a_{33}^2 = -16/3$ ni olib, unga nisbatan Jordan almashtirishlarini bajarib, navbatdagi jadvalni to'ldiramiz:

	4	1	3
x_1	0	1/4	1/4
x_2	1/2	-5/8	-1/8
x_3	1/4	1/16	-3/16

Oxirgi jadvaldan tenglamalarning ildizlarini topamiz:

$$x_1 = 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1/4 + 3 \cdot 1/4 = 1/4 + 3/4 = 1$$
$$x_2 = 4 \cdot 1/2 - 1 \cdot 5/8 - 3 \cdot 1/8 = 2 - 5/8 - 3/8 = 1$$
$$x_3 = 4 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/16 - 3 \cdot 3/16 = 1 - 8/16 = 1/2$$

Topilgan ildizlarni sistemaga qo'yib, yechimning to'g'riligini tekshirib ko'rish mumkin.

Paskal algoritmik tilida tenglamalar sistemasini Jordan usulida yechish uchun tuzilgan dastur matni:

```
program jordan;
label 1,2,3,4,5;
var i,j,k,l,p,q,n,m:integer;
    s,t: real;
    a,c: array[1..20,1..20] of real;
    x,r,b:array[1..20] of real;
```

```
begin
write('Ozgaruvchilar soni m='); readln(m);
write('Tenglamalar soni n='); readln(n);
writeln('Ozod sonlarni kiriting:');
for i:=1 to n do begin
            write('b[',i,']=');
            readln(b[i]);
            end;
writeln('Tenglama koeffitsiyentlarini kiriting:');
for i:=1 to n do
for j:=1 to m do begin
            write('a[',i,',',j,']=');
            readln(a[i,j]);
            end;
writeln('1-jadval');
for i:=1 to n do begin
              for j:=1 to m do
              write(a[i,j]:8:2);
              write(b[i]:8:2); writeln;
              end;writeln;
 if m<n then q:=m else q:=n;
for k:=1 to q do begin
writeln(k+1:2,'-jadval');
for i:=k to n do
for j:=k to m do
if a[i,j]<>0 then begin
             for l:=1 to n do begin
                          t:=a[l,j];
                          a[l,j]:=a[l,k];
                          a[l,k]:=t
```

```
                  end;
            for l:=1 to m do begin
                  t:=a[i,l];
                  a[i,l]:=a[k,l];
                  a[k,l]:=t
                  end;
            t:=b[i]; b[i]:=b[k]; b[k]:=t;
            goto 2
             end;
2: for i:=1 to n do
for j:=1 to m do begin
           if (i=k) and (j=k) then c[i,j]:=1/a[k,k];
           if (i=k) and (j<>k) then c[i,j]:=-a[i,j]/a[k,k];
           if (i<>k) and (j=k) then c[i,j]:=a[i,j]/a[k,k];
           if (i<>k) and (j<>k) then c[i,j]:=a[i,j]-a[i,k]*a[k,j]/a[k,k]
            end;
for i:=1 to n do begin
             for j:=1 to m do begin
             write(c[i,j]:8:2);a[i,j]:=c[i,j];end;
             write(b[i]:8:2); writeln;
             end;writeln;
if k=q then goto 5;
for i:=k+1 to n do
for j:=k+1 to m do
if a[i,j]<>0 then goto 4;
for i:=k+1 to n do begin
            r[i]:=0;
            for j:= 1 to k do
            r[i]:=r[i]+b[j]*a[i,j];
            if b[i]<>r[i] then    begin
```

```
            writeln(' Masala  yechimga ega emas');  goto 3
                        end;
          end;
writeln(' masala cheksiz ko`p yechimga ega');  goto 3;
4: end;
5:writeln('Javob:');
for i:=1 to n do begin
          x[i]:=0;
          for j:=1 to m do
          x[i]:=x[i]+a[i,j]*b[j];
          writeln('x[',i,']=',x[i]:7:3);
          end;
3:end.
```

2.6. Trantsendent tenglamalarni yechishda oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli

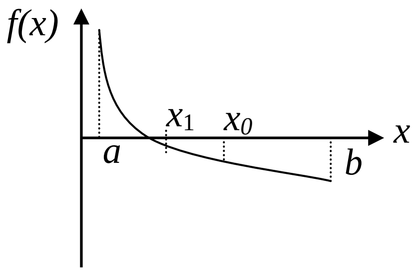
$f(x)$ funktsiya - $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va bu oraliqning chetki nuqtalarida turli xil ishoralar qabul qilsin. Shu bilan birgalikda funktsiyaning birinchi tartibli hosilasi $[a,b]$ oraliqda o'z ishorasini saqlasin. U holda

$$f(x) = 0 \tag{2.12}$$

tenglama $[a,b]$ oraliqda yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar (2.12) tenglamani algebraik almashtirishlar[1]) yordamida algebraik tenglamaga keltirish mumkin bo'lmasa, bu tenglama **trantsendent tenglama** deb ataladi. Trantsendent tenglamaga misol sifatida ko'rsatkichli, trigonometrik, logorifmik tenglamalarni keltirish mumkin.

(2.12) trantsendent tenglamaning $[a,b]$ oraliqda ε aniqlikdagi taqribiy yechimini topish talab etilsin. Bu yechimni aniqlashda bir necha taqribiy sonli usullardan foydalanish mumkin. Shu usullardan biri oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli bo'lib u quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat. $[a,b]$ oraliqni $x_0 = (a+b)/2$ nuqta yordamida teng ikkita $[a,x_0]$ va $[x_0,b]$ oraliqlarga ajratamiz (2.1-rasm).



2.1-rasm

---

[1]) Algebraik almashtirish deganda quyidagi almashtirishlar tushiniladi:
1) berilgan tenglamaning ikkala tomoniga bir xil algebraik ifodalarni qo'shish;
2) berilgan tenglamaning ikkala tomonini bir xil algebraik ifodalarga ko'paytirish;
3) tenglamaning ikkala tomonini bir xil ratsional ko'rsatkichli darajaga oshirish.

Agar $|a-x_0| \le \varepsilon$ bo'lsa, $x = x_0$ (2.12) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi deb qabul qilinadi. Bu shart bajarilmasa, $[a, x_0]$ va $[x_0, b]$ oraliqlardan (2.12) tenglama ildizi joylashganini tanlab olamiz va uni $[a_1, b_1]$ deb belgilaymiz. $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ nuqta yordamida $[a_1, b_1]$ oraliqni teng ikkita $[a_1, x_1]$ va $[x_1, b_1]$ oraliqlarga ajratamiz. Agar $|a_1 - x_1| \le \varepsilon$ bo'lsa, $x = x_1$ (2.12) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi deb qabul qilinadi, aks holda $[a_1, x_1]$ va $[x_1, b_1]$ oraliqlardan (2.12) tenglama ildizi joylashganini tanlab olamiz va uni $[a_2, b_2]$ deb belgilaymiz. Bu oraliq uchun yuqoridagi bajarilgan amallar ketma-ketligi $|a_i - x_i| \le \varepsilon \quad (i = 2,3,4,\ldots)$ shart bajarilguncha davom ettiriladi. Natijada (2.12) tenglamaning ε aniqlikdagi $x = x_i$ taqribiy yechimi hosil bo'ladi.

Misol. $f(x) = x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$ tenglamaning $[-2;1]$ oraliqdagi ildizini $\varepsilon = 0{,}01$ aniqlikda hisoblang.

Yechish. 7- qadamda $a_7 = -1{,}7305$ va $b_7 = -1{,}7363$ bo'lib, $|a_7 - b_7| = 0{,}01 \le \varepsilon$ shart bajariladi.

$$\bar{x} = \frac{a_7 + b_7}{2} = -1{,}7334 \approx -1{,}73 \text{ (javob: } \xi\text{=-1,73(±0,01)).}$$

Trantsendent tenglamalarni oraliqni teng ikkiga bo'lish usuliga Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program oraliq2; uses crt;
  var a,b,eps,x,fa,fc,c:real;
    function f(x:real):real;
    begin
      f:=x*x-sin(x)-0.5      { f(x) funktsiyaning ko'rinishi }
    end;
begin clrscr;
   write('a='); read(a); { a ning qiymatini kiritish}
   write('b='); read(b);  { b ning qiymatini kiritish}
   write('eps='); read(eps);  { ε ning qiymatini kiritish}
```

```
    fa:=f(a);
        while abs(b-a)>eps do
        begin
            c:=(a+b)/2;  fc:=f(c);
            if fa*fc<=0 then b:=c else begin a:=c; fa:=fc end;
        end;
    writeln('x=',c:10:4);   { tenglamaning taqribiy ildizini chop qilish}
end.
```

Misol: Yuqorida keltirilgan dasturdan foydalanib

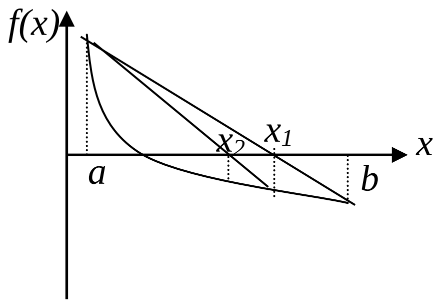
$$x^2 - sin\, x - 0{,}5 = 0$$

tenglamaning $[0;2]$ oraliqdagi yechimini 0,001 aniqlikda hisoblang.

Javob: $x = 1{,}1963.$

2.7. Trantsendent tenglamalarni yechishda vatarlar usuli

(2.12) tenglamaning $[a,b]$ oraliqdagi ε aniqlikdagi taqribiy yechimini topish talab etilsin. Aniqlik uchun $f(a) > 0$ $\left(f(a) < 0\right)$ bo'lsin. $A = A(a; f(a))$, $B = B(b; f(b))$ no'qtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz (2.2-rasm) va bu to'g'ri chiziqni Ox o'qi bilan kesishish no'qtasini $x_1 = a - \dfrac{b-a}{f(b) - f(a)} \cdot f(a)$ deb belgilaymiz.



2.2-rasm

Agar $|a - x_1| \le \varepsilon$ bo'lsa, $x = x_1$ (2.12) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi deb qabul qilinadi. Bu shart bajarilmasa, $b = x_1$ $\left(a = x_1\right)$ deb olamiz va A,B no'qtalardan to'g'ri chiziq o'tkazamiz. To'g'ri chiziqning Ox o'qi bilan kesishish no'qtasini $x_2 = a - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)} \cdot f(a)$ deb belgilaymiz. Agar $|x_2 - x_1| \le \varepsilon$ shart bajarilsa, $x = x_2$ (2.12) tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi deb qabul qilinadi, aks holda $b = x_2$ $(a = x_2)$ deb olib, yuqoridagi amallar ketma-ketligini $|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$ $(i = 3,4,...)$ $|x_i - x_{i-1}| \le \varepsilon$ shart bajarilguncha davom ettiramiz. Natijada (2.12) tenglamaning ε aniqlikdagi $x = x_i$ taqribiy yechimini hosil qilamiz.

Umumiy holda x_n larning ketma-ket hisoblash formulasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$x_n = a - \frac{x_{n-1}-a}{f(x_{n-1})-f(a)} \cdot f(a) \quad \left(x_n = b - \frac{x_{n-1}-b}{f(x_{n-1})-f(b)} \cdot f(b) \right).$$

Misol. $tg(0{,}55x + 0{,}1) - x^2 = 0$ tenglamaning $[0{,}6;0{,}8]$ oraliqdagi ildizini $\varepsilon = 0{,}005$ aniqlikda hisoblang.

Yechish. $x_2 = 0{,}7517;$ $x_1 = 0{,}7417$ taqribiy yechimlar uchun

$$|x_2 - x_1| = 0{,}002 < \varepsilon$$

bajariladi. Demak, taqribiy yechim sifatida $x_2 = 0{,}7517$ ni olish mumkin.

Trantsendent tenglamalarni yechish uchun vatarlar usuliga Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program vatar; uses crt;
  label 1,2;
  var a,b,eps,x:real;
       function f(x:real):real;
             begin
                    f:=x*x-exp(-3*x)-1     { f(x) funktsiyaning ko'rinishi }
             end;
  begin clrscr;
                 write('a='); read(a); { a ning qiymatini kiritish}
                 write('b='); read(b);  { b ning qiymatini kiritish}
```

write('eps='); read(eps); { ε ning qiymatini kiritish}

2: x:=b;

x:=b-f(b)(b-a)/(f(b)-f(a));*

if abs(x-b)<eps then goto 1 else begin b:=x; goto 2 end;

1: writeln('x=',x:8:4); { tenglamaning taqribiy ildizini chop qilish}

end.

Misol: Yuqoridagi dasturdan foydalanib, $x^2 - e^{-3x} - 1 = 0$ tenglamaning $[0;1{,}5]$ oraliqdagi yechimini $0{,}001$ aniqlikda toping.

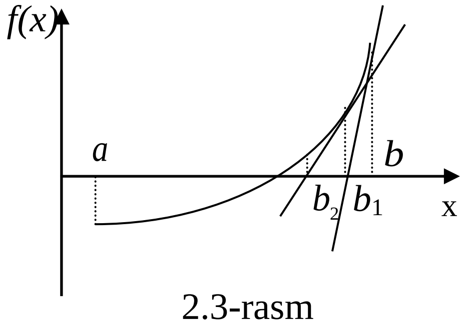
Javob: $x = 1{,}0230$.

2.8. Trantsendent tenglamalarni yechishda urinmalar usuli

Faraz qilaylik $[a,b]$ oraliqda $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarning ishoralari o'zgarmasdan qolsin. (2.12) tenglamani taqribiy yechish usullaridan yana biri urinmalar usulidir. Bu usul algoritmi quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat. $f(x)$ funktsiya grafigining $B = B(b, f(b))$ no'qtasidan urinma o'tkazamiz (2.3-rasm). Bu urinmaning Ox o'qi bilan kesishgan no'qtasini b_1 deb belgilaymiz. $f(x)$ funktsiya grafigining $B_1 = B_1(b_1, f(b_1))$ no'qtasidan yana urinma o'tkazamiz va bu urinmaning Ox o'qi bilan kesishgan no'qtasini b_2 deb belgilaymiz. Bu jarayonni bir necha marta takrorlab, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ larni hosil qilamiz. $|b_n - b_{n-1}| < \varepsilon$ shart bajarilganda hisoblash to'xtatiladi va b_n tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy yechimi deb qabul qilamiz. Umuman olganda urinmalar usuli bo'yicha taqribiy yechim

$$b_i = b_{i-1} - \frac{f(b_{i-1})}{f'(b_{i-1})}, \quad i = 1,2,\ldots$$

formula bo'yicha aniqlanadi.



2.3-rasm

Misol. $tg(0{,}55x+0{,}1)-x^2=0$ tenglamaning $[0{,}6;0{,}8]$ oraliqdagi ildizini $\varepsilon=0{,}005$ aniqlikda hisoblang.

Yechish. Tekshirib ko'rish mumkinki, b_1, b_2 lar uchun talab etilgan aniqlik bajariladi, ya'ni $|b_2-b_1|=0{,}002\le\varepsilon$. Demak taqribiy yechim sifatida $x=b_2=0{,}7503$ ni olish mumkin.

Trantsendent tenglamalarni yechish uchun urinmalar usuliga Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program urinma; uses crt;
    var x0,eps,x1,a:real;
          function f(x:real):real;
               begin
                    f:= x-exp(-x)+2;      { f(x) funktsiyasining ko'rinishi }
               end;
          function fx(x:real):real;
               begin
                    fx:=1+exp(-x)      { f'(x) funktsiyasining ko'rinishi}
               end;
begin     clrscr;
          write('x0='); read(x0);     {  x0 ning qiymatini kiritish}
          write('eps='); read(eps);   {  ε  ning qiymatini kiritish}
          x1:=x0;
   repeat
          a:=f(x1)/fx(x1);
```

```
        x1:=x1-a;
    until abs(a)<eps;
        writeln('x=',x1:10:4); { tenglamaning taqribiy ildizini chop qilish}
end.
```

Misol: Yuqorida berilgan dasturdan foydalanib, $x-e^{-x}+2=0$ tenglamaning $[-1;0]$ oraliqdagi yechimini 0,001 aniqlikda hisoblang.

Javob: $x=-0{,}4429.$

2.9. Trantsendent tenglamalarni yechishda oddiy iteratsiya usuli

(2.12) tenglamaning $[a,b]$ oraliqda joylashgan ε aniqlikdagi taqribiy yechimi topish talab etilsin. Berilgan tenglamani

$$x=\varphi(x)$$

ko'rinishdagi teng kuchli tenglamaga almashtiramiz.

Dastlab, birinchi yaqinlashish uchun ixtiyoriy $x_0\in[a,b]$ ni tanlab olamiz va

$$x_n=\varphi(x_{n-1}),\ \ n=1,2,\ldots$$

formula yordamida $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ketma-ketlikning qiymatlarini hosil qilamiz. Agar $|x_n-x_{n-1}|<\varepsilon$ shart bajarilsa, $\bar{x}=x_n$ qiymat tenglamaning ε aniqlikdagi taqribiy ildizi deb qabul qilinadi.

Iteratsiya jarayonining yaqinlashishi. $\varphi(x)$ - funktsiya $[a;b]$ da aniqlangan va differentsiallanuvchi bo'lsin. Agar $|\varphi'(x)|<1$ shart bajarilsa, $x_n=\varphi(x_{n-1})$ ketma-ketlik ixtiyoriy $x_0\in[a;b]$ da yaqinlashuvchi va $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)$ berilgan tenglamaning yagona ildizi bo'ladi.

Trantsendent tenglamalarni yechish uchun oddiy iteratsiya usuliga Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program od_iteras; uses crt;
    label 1,2;
    var f0,eps,x,x0:real;
    function f(z:real):real;
```

```
    begin
      f:=exp(z)-2     { φ(x) funktsiyasining ko'rinishi}
    end;
begin  clrscr;
      write('x0='); read(x0);      { x0 ning qiymatini kiritish}
      write('eps='); read(eps);     {  ε  ning qiymatini kiritish}
      x:=x0;
   2: f0:=f(x);
      if abs(x-f0)<=eps then goto 1 else begin x:=f0; goto 2 end;
  1: writeln('x=',x:10:6); { tenglamaning taqribiy ildizini chop qilish}
end.
```

Misol. Berilgan dasturdan foydalanib $x - e^x + 2 = 0$ tenglama ildizini 0,001 aniqlikda hisoblang ($x_0 = 0$).

Javob: $x = -1{,}840457$.

Tayanch so'z va iboralar. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, analitik usul, sonli-analitik usul, oddiy iteratsiya usuli, teskara matritsa usuli, Gauss usuli, Kramer usuli, Jordan usuli, trantsendent tenglama, vatarlar usuli, urinmalar usuli.

Savollar

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yagona yechimga ega bo'lish sharti.
2. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Kramer usuli va uning algoritmi.
3. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Gauss usuli va uning algoritmi.
4. Teskari matritsa va uning mavjudlik sharti.
5. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda teskari matritsa usuli va uning algoritmi.
6. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda iteratsiya usuli va uning

algoritmi.

7. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishda Jordan usuli va uning algoritmi.
8. Iteratsiya jarayonining yaqinlashish sharti.
9. Chiziqsiz va trantsendent tenglamalar tushunchasi.
10. Chiziqsiz tenglama yechimining mavjudlik sharti.
11. Oraliqni teng ikkiga bo'lish usuli va uning algoritmi.
12. Vatarlar usuli va uning algoritmi.
13. Urinmalar usuli va uning algoritmi.
14. Oddiy iteratsiya usuli va uning yaqinlashish sharti.

Misol va masalalar

1. Ushbu

$$\begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 = 24 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 - 8x_3 = -9 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi usulida yeching.

2. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi usulida yeching.

3. Ushbu

$$\begin{cases} 8x_1 - x_2 + 5x_3 = 11 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = -4 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching.

4. Ushbu

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini Gauss usulida yeching.

5. Ushbu

$$\begin{Vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$$

matritsaga teskari matritsani aniqlang.

6. Ushbu

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

sistemani teskari matritsa usulida yeching.

7. Quyidagi tenglamalar sistemalarini Jordan usulida yeching:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \end{cases}$

5) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$

8. Oraliqni teng ikkiga bo’lish usulida $x^3 + 2x - 5 = 0$ tenglamaning $[0;2]$ oraliqdagi yechimini $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda toping.

9. Agar $x_0 = 0{,}5$ bo’lsa, urinmalar usulida $x + 2^x - 2 = 0$ tenglama ildizini $\varepsilon = 0{,}1$ aniqlikda toping.

10. $x+2\text{-}e^{-x}=0$ tenglamaning [-1;0] oraliqdagi ildizini $\varepsilon=0{,}1$ aniqlikda vatarlar usulida toping.

11. Agar $x_0=0{,}5$ bo'lsa, $cosx\text{-}x+1=0$ tenglama ildizini $\varepsilon=0{,}1$ aniqlikda oddiy iteratsiya usulida toping.

3-BOB. TAQRIBIY INTEGRALLASh USULLARI

Ma’lumki, ba’zi bir ob’ektlarni matematik modellashtirishda jism sirti va hajmini, jism og’irlik markazi va inertsiya momentini, biror kuch ta’sirida bajarilgan ish miqdorini aniqlashga to’g’ri keladi. Bu kattaliklarni aniqlash, masalaning berilishiga bog’liq ravishda berilgan analitik funktsiyani biror oraliqda aniq integrallashga keltiriladi. Shu bilan birga qaralayotgan masalaning xususiyatiga bog’liq ravishda integrallanuvchi funktsiya shunday ko’rinishni oladiki, natijada uni aniq integrallash imkoni har doim ham mumkin bo’lavermaydi. Bu hollarda integrallarni taqribiy integrallash usullaridan foydalanishga to’g’ri keladi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning bir necha usullari mavjud bo’lib, ulardan ayrimlarining algoritmlari bilan tanishib chiqaylik.

Masalaning quyilishi. $[a;b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz $f(x)$ funktsiya bo’lib, quyidagi

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (3.1)$$

integralni berilgan ε aniqlikda hisoblash talab qilinsin.

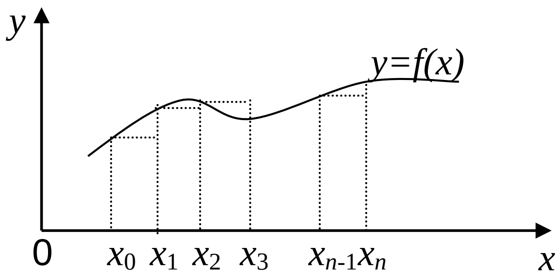
Matematika kursidan ma’lumki, agar $f(x)$ funktsiya $[a;b]$ oraliqda berilgan bo’lib, $f(x) \geq 0$ bo’lsa, u holda (5.1) aniq integral $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ chiziqlar va abtsissa o’qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzini ifodalaydi. Quyida (3.1) integralni berilgan ε aniqlikda taqribiy hisoblash usullarini keltiramiz.

3.1. To’g’rito’rtburchak usuli

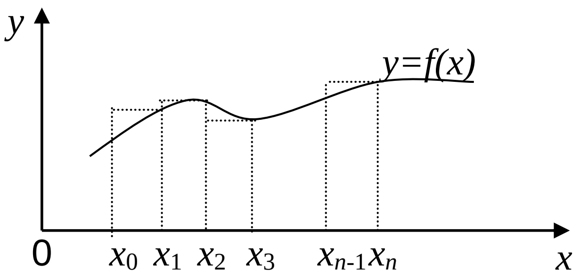
Berilgan $[a;b]$ oraliqni $h = \dfrac{b-a}{n}$ qadam bilan $n+1$ ta oraliqlarga ajratamiz. Hosil bo’lgan oraliqlarda joylashgan egri chiziqli trapetsiya yuzalarini taqribiy ravishda to’g’rito’rtburchak yuziga almashtiramiz (3.1 va 3.2 rasmlar). Natijada (3.1) integralni taqribiy hisoblash uchun quyidagi

$$S = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i\,, \qquad Q = h\sum_{i=1}^{n} y_i$$

formulalarni hosil qilamiz. Bu yerda $x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = f(x_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, n – natural son.



3.1-rasm



3.2-rasm

To'g'rito'rtburchak usulida yo'l qo'yilgan xatolik quyidagicha aniqlanadi:

$$|I - S| < Mh(b-a), \quad M = max|f'(z)|, \quad z \in [a;b].$$

Misol. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ integralni to'g'rito'rtburchak usulida taqribiy hisoblang va natijani uning aniq qiymati $arctg1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$ bilan taqqoslang.

Yechish. Aniqlik uchun $n = 10$, $\Delta x = 0{,}1$ va $x_k = k \cdot 0{,}1$ $(k = 0,1,2,\ldots,10)$ deb olib, integral ostidagi funktsiya qiymatini 0,001 aniqlikda hisoblaymiz:

$$y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{1}{1+(0{,}1)^2} \approx 0{,}990, \quad y_2 = \frac{1}{1+(0{,}2)^2} \approx 0{,}962,$$

$$y_3 = \frac{1}{1+(0{,}3)^2} \approx 0{,}917, \quad y_4 \approx 0{,}862, \quad y_5 = 0{,}800, \quad y_6 \approx 0{,}735, \quad y_7 \approx 0{,}671,$$

$$y_8 \approx 0{,}610, \quad y_9 \approx 0{,}552, \quad y_{10} = 0{,}500.$$

U holda berilgan integral uchun

$$S = 0{,}1 \cdot (1 + 0{,}990 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}800 + 0{,}735 +$$
$$+ 0{,}671 + 0{,}610 + 0{,}552) \approx 0{,}810$$

$$Q = 0{,}1 \cdot (0{,}990 + 0{,}962 + 0{,}917 + 0{,}862 + 0{,}800 + 0{,}735 + 0{,}671 +$$
$$+ 0{,}610 + 0{,}552 + 0{,}500) \approx 0{,}755$$

taqribiy qiymatlarga ega bo'lamiz, ya'ni 0,755<0,785<0,810. Bu yerda integralni taqribiy hisoblashda yo'l quyilgan absolyut xato $|I - S| < 0{,}028$ dan oshmasligini va nisbiy xato esa $\frac{0{,}028 \cdot 100}{0{,}782} \approx 3{,}6\%$ ga tengligini ko'rishimiz mumkin.

Aniq integralni to’g’rito’rtburchak usulida taqribiy hisoblash uchun Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program turt_burchak; uses crt;
    var a,b,int:real; n:integer;
    function f(x:real):real;
    begin
        f:=(x*x*x- x*x+5)*exp(-2*x)*sin(x+1)
                              { f(x) funktsiyaning ko’rinishi }
    end;
procedure turtburchak(a1,b1:real;n1:integer; var int1:real);
    var i:integer; h1,c:real;
        begin
            h1:=(b1-a1)/n1;
            c:=0; int1:=0; c:=a1-h1/2;
            for i:=1 to n1 do
                begin
                    c:=c+h1; int1:=int1+f(c)
                end;
            int1:=int1*h1;
        end;
begin clrscr;
    read(a,b,n); { a, b, n  larning qiymatlarini kiritish}
    turtburchak(a,b,n,int);
    writeln('Integral =',int:10:4);
    { Integralning taqribiy qiymatini chop etish}
end.
```

Misol. Berilgan dasturdan foydalanib $\int_1^3 (x^3 - x^2 + 5)e^{-2x} \sin(x+1)dx$ integral taqribiy qiymatini hisoblang ($n = 50$ deb oling).

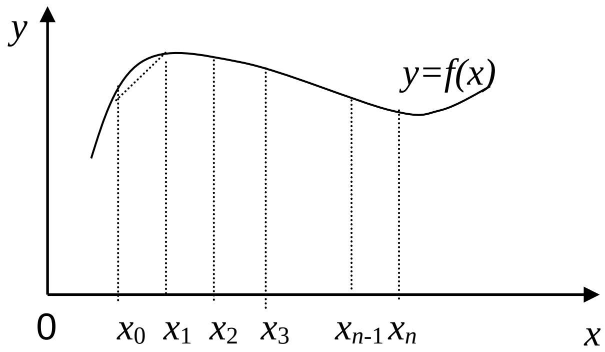
Javob: Integral taqribiy qiymati 0,2002.

3.2. Trapetsiya usuli

$[a;b]$ oraliq $x_i = a + i \cdot h$ no’qtalar yordamida (bu yerda $i = 1,2,\ldots,n;$ $x_0 = a,\ x_n = b$, n - natural son) $n+1$ ta oraliqga ajratamiz va har bir oraliqda egri chiziqli trapetsiya yuzini taqribiy ravishda to’g’ri chiziqli trapetsiya yuziga almashtiramiz (3.3-rasm). Natijada integral qiymatini hisoblash uchun quyidagi taqribiy formulaga ega bo’lamiz

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_0 + 2y_1 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = S$$

bu yerda I - (3.1) integralning aniq qiymati, S - (3.1) integralning taqribiy qiymati, $y_i = f(x_i)$.



3.3-rasm

Trapetsiya usulida xatolikni baholash:

$$|I - S| = R \le \frac{h^2}{12}(b-a)M\ , \quad M = max\left|f''(z)\right|, \quad z \in [a;b].$$

Misol. $n = 6$ uchun $I = \int_0^{\pi} sin\, xdx$ integral qiymatini trapetsiya usulida taqribiy hisoblang.

Yechish.

$$S = \frac{\pi}{6}\left(\frac{sin\,0 + sin\,\pi}{2} + sin\frac{\pi}{6} + sin\frac{2\pi}{6} + sin\frac{3\pi}{6} + sin\frac{4\pi}{6} + sin\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(0{,}5 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 0{,}5\right) \approx 1{,}9541.$$

Agar berilgan integralning aniq qiymati 2 ga tengligini hisobga olsak, taqribiy hisoblashda yo’l quyilgan absolyut xato 0,0459 ga, nisbiy xato esa $\frac{0{,}0459 \cdot 100}{2} \approx 2{,}5\,\%$ ga teng ekanligini ko’ramiz.

Aniq integralni trapetsiya usulida taqribiy hisoblash uchun Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program trapesiya; uses crt;
    var n1:integer; a,b,i1:real;
             function f(x:real):real;
                   begin
                      f:=x*exp(-x*ln(2))*cos(x*x+1)
                    { f(x) funktsiyaning ko’rinishi }
                   end;
    procedure trap1(a1,b1:real;N:integer; var int:real);
      var i:integer; h,s:real;
             begin h:=(b1-a1)/n; s:=(f(a1)+f(b1))/2;
                   for i:=1 to n-1 do s:=s+f(a1+i*h);
                   int:=s*h;
             end;
     begin    clrscr;
             write('a='); read(a);      { a ning qiymatini kiritish}
             write('b='); read(b);      { b ning qiymatini kiritish}
             write('N='); read(n1); { n ning qiymatini kiritish}
             trap1(a,b,n1,i1);
             writeln('integral=',i1:10:4);
                               {Integral taqribiy qiymatini chop etish}
     end.
```

Misol. Berilgan dasturdan foydalanib $\int_0^2 x \cdot 2^{-x} \cos(x^2+1)dx$ integralni taqribiy hisoblang ($n = 70$ deb oling).

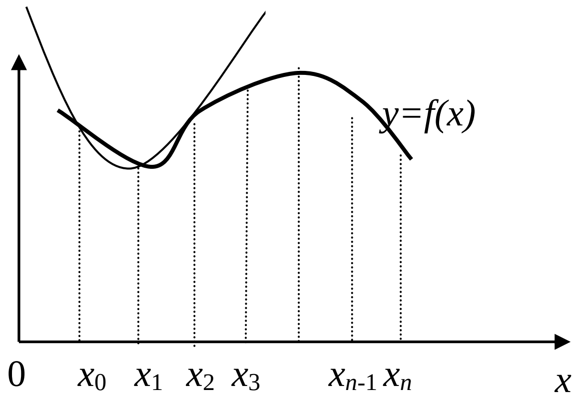
Javob: Integralni taqribiy qiymati -0,3075.

3.3. Simpson usuli

$[a;b]$ oraliqda aniqlangan uzluksiz $f(x)$ funktsiya bo'lib quyidagi

$$I=\int_a^b f(x)dx$$

integralni berilgan ε aniqlikda taqribiy qiymatini hisoblash talab qilinsin. Buning uchun $[a;b]$ oraliqni $h=\dfrac{b-a}{2n}$ qadam bilan $2n$ oraliqlarga ajratamiz (3.4- rasm). $x_0=a$, $x_{2n}=b$, $y_i=f(x_i)$, $i=1,2,\ldots,2n$. n - natural son.



3.4-rasm

Uzunligi $2h$ ga teng bo'lgan $[x_0,x_2]$, $[x_2,x_4]$, …, $[x_{2n-2},x_{2n}]$ oraliqlar uchun

$$\int_{x_0}^{x_2} y(x)dx\approx\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

Simpson formulasini qo'llaymiz. Natijada berilgan integralni taqribiy hisoblash uchun

$$\int_a^b y(x)dx\approx S=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$$

yoki

$$\int_a^b y(x)dx\approx S=\frac{h}{3}[(y_0+y_{2n})+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n-2})]$$

formulaga ega bo’lamiz. Bu formula integralni taqribiy hisoblash uchun umumlashgan Simpson formulasi deb ataladi. Oxirgi formulani

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + y_{2n} + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i}\right)$$

ko’rinishda yozish ham mumkin. Simpson usulida yo’l qo’yilgan xatolik $R \le \frac{(b-a)h^4}{180} \cdot M$, $M = max\left| f^{IV}(z) \right|$, $z \in [a,b]$ tengsizlik yordamida baholanadi.

Misol. Daryo kengligi 20 metrga teng. Daryo chuqurligi(y) ko’ndalang kes-im bo’yicha har 2 metr oraliqlarda o’lchab chiqildi. O’lchash natijalari quyidagi jadvalda keltirilgan.

x (metr)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y (metr)	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

Daryo ko’ndalang kesimi yuzasini trapetsiya va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblang.

Yechish. Trapetsiya usuli bo’yicha:

$$S = 2\left(\frac{0{,}2 + 0{,}2}{2} + 0{,}5 + 0{,}9 + 1{,}1 + 1{,}3 + 1{,}7 + 2{,}1 + 1{,}5 + 1{,}1 + 0{,}6\right) = 22 м^2$$

Simpson usuli bo’yicha:

$$S = \frac{2}{3}(0{,}2 + 4 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}9 + 4 \cdot 1{,}1 + 2 \cdot 1{,}3 + 4 \cdot 1{,}7 + 2 \cdot 2{,}1 + 4 \cdot 1{,}5 +$$
$$+ 2 \cdot 1{,}1 + 4 \cdot 0{,}6 + 0{,}2) = 21{,}9 м^2$$

Aniq integrallarni Cimpson usulida taqribiy hisoblash uchun Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program simpson; uses crt;
   var a,b,int1:real; n:integer;
     function f(x:real):real;
          begin
               f:=(x+3)*exp(x)*sin(x*x*x)    { f(x) funktsiyaning ko’rinishi }
          end;
```

```
procedure simps(a,b:real;n:integer;var int:real);
    var h,s,s1,s2:real; i:integer;
      begin  h:=(b-a)/(2*n);
              s1:=0; s2:=0;  s:=f(a)+f(b);
              for i:=1 to n do s1:=s1+f(a+(2*i-1)*h);
             for i:=1 to n-1 do s2:=s2+f(a+2*i*h);
             int:=h*(s+4*s1+2*s2)/3;
      end;
 begin     clrscr;
           write('a='); read(a);  { a ning qiymatini kiritish}
           write('b='); read(b); { b ning qiymatini kiritish}
           write('n='); read(n);  { n ning qiymatini kiritish}
            simps(a,b,n,int1);
           writeln('integral=',int1:10:4);
          { Integral taqribiy qiymatini chop etish}
 end.
```

Misol. Berilgan dasturdan foydalanib, $\int_0^1 (x+3)e^x \sin x^3 dx$ integralni taqribiy hisoblang (n=40 deb oling).

Javob: Integralni taqribiy qiymati *1,9975.*

Agar yuqorida keltirilgan taqribiy hisoblash usullarining aniqligi haqida gapiradigan bo'lsak, bu yerda eng yuqori aniqlikga ega bo'lgan usul – Simpson usulidir. Undan keyingi aniqroq usul esa – trapetsiya usuli. Bu usullar orasida to'g'rito'rtburchak usuli taqribiy integrallashda eng katta xatolikga ega bo'lgan usul hisoblanadi.

Tayanch so'z va iboralar. Egri chiziqli trapetsiya, to'g'rito'rtburchak usuli, trapetsiya usuli, Simpson usuli, absolyut xato, nisbiy xato.

Savollar

1. Aniq integralning geometrik ma'nosini ayting.
2. Taqribiy integrallash deganda nimani tushunasiz?
3. Taqribiy integrallashda to'g'ri to'rtburchak usuli va uning algoritmi.
4. Taqribiy integrallashda trapetsiya usuli va uning algoritmi.
5. Taqribiy integrallashda Simpson usuli va uning algoritmi.
6. Taqribiy integrallashda xatolik qanday aniqlanadi?

Misol va masalalar

1. $n=5$ uchun $\int_0^1 (2x^2-4x+2)dx$ integral qiymatini to'g'ri to'rtburchak usulida hisoblang.
2. $n=10$ uchun $\int_0^1 (5x^2-6x+1)dx$ integral qiymatini to'g'ri to'rtburchak usulida hisoblang.
3. $n=10$ uchun $\int_0^1 (x^2-x+1)dx$ integral qiymatini trapetsiya usulida hisoblang.
4. $n=5$ uchun $\int_1^3 (2x^2+x+1)dx$ integral qiymatini trapetsiya usulida hisoblang.
5. $n=5$ uchun $\int_0^1 (5x^2-6x+1)dx$ integral qiymatini Simpson usulida hisoblang.
6. $n=10$ uchun $\int_0^2 (3x^2-2x-6)dx$ integral qiymatini Simpson usulida hisoblang.

4-BOB. INTERPOLYaTSION FORMULALAR

Ko’pgina amaliy masalalarni matematik modellashtirish jarayonida jadval ko’rinishda berilgan funktsiyalardan foydalanishga to’g’ri keladi. Funktsiyalarning jadval ko’rinishda berilishi undan foydalanish imkoniyatlarini chegaralab qo’yadi. Shu sababli diskret ko’rinishda berilgan funktsiyani analitik ko’rinishga keltirish muhim ahamiyatga ega. Buning uchun interpolyatsion formulalardan foydalaniladi.

4.1. Chekli ayirmalar

Faraz qilaylik

$$y = f(x)$$

funktsiya berilgan bo’lib, $\Delta x = h = const$ argument orttirmasi(qadam) bo’lsin. U holda

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

ayirmaga, $y = f(x)$ funktsiyaning birinchi tartibli chekli ayirmasi deb ataladi.

Xuddi shunga o’xshash ikkinchi tartibli chekli ayirma,

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta f(x)) = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x) - f(x + \Delta x) + f(x) =$$
$$= f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$$

yoki

$$\Delta^2 y = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)$$

formula yordamida aniqlanadi.

Yuqori tartibli chekli ayirmalarni hisoblash uchun

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y); \qquad n = 2,3,\dots$$

formula o’rinli bo’ladi.

Har xil tartibli chekli ayirmalarni gorizontal (1-jadval) va diagonal (2-jadval) jadval ko’rinishda tasvirlash mumkin.

1-jadval

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$
…	…	…	…	…

2-jadval

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
			$\Delta^2 y_0$	
x_1	y_1			
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2			
			$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			

Masalan x_0 va $h=1$ bo'lganda $y=2x^3-2x^2+3x-1$ funktsiya uchun chekli ayirmalar jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	-1	3	8	12
1	2	11	20	12
2	13	31	32	12
3	44	63	44	12
4	107	107	56	12
5	214	163	68	12
…	…	…	…	…

Misol. $\Delta x = 1$ uchun $f(x) = x^3$ funktsiyaning chekli ayirmalarini hisoblang.

Yechish.

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1,$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)) = \Delta f(x+\Delta x) - \Delta f(x) =$$
$$= 3(x+1)^3 + 3(x+1) + 1 - (3x^2 + 3x + 1) = 6\text{x} + 3,$$

$$\Delta^3 f(x) = \Delta(\Delta^2 f(x)) = \Delta^2 f(x+\Delta x) - \Delta^2 f(x) = 6(x+1) + 6 - (6x+6) = 6,$$

$$\Delta^4 f(x) = \Delta(\Delta^3 f(x)) = \Delta^3 f(x+\Delta x) - \Delta^3 f(x) = 6 - 6 = 0,$$

Ixtiyoriy $n > 3$ lar uchun $\Delta^n f(x) = 0$ bo'ladi.

Agar

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + \text{a}_{\text{n-1}} x + a_n$$

n – tartibli ko'phad bo'lsa $\Delta^n P_n(x) = n!\, a_0 h^n = const$, $k > n$ lar uchun esa $\Delta^k P_n(x) = 0$ bo'ladi. Bu yerda $h = \Delta x$.

Ko'pgina hollarda $y = f(x)$ funktsiyaning bir xil o'zoqlikda joylashgan x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ nuqtalardagi $y_i = f(x_i)$ qiymatlari berilgan bo'ladi.

Jadval ko'rinishda berilgan $y_i = f(x_i)$ lar uchun chekli ayirmalar

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i ,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i ,$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta(\Delta^2 y_i) = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta^n y_i = y_{n+i} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} - \ldots + (-1)^n y_i$$

formulalar yordamida hisoblanadi. Bu yerda

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot [n-(m-1)]}{m!} .$$

4.2. Umumlashgan daraja

x sonining n-umumlashgan darajasi deb,

$x(x-h)(x-2h)\cdot \ldots \cdot [x-(n-1)h]$ ko'paytmaga aytiladi va u $x^{[n]}$ deb belgila-nadi:

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h],$$

bu yerda $h-$o'zgarmas son.

Odatda $x^{[0]}=1$ deb olinadi. $h=0$ da umumlashgan daraja oddiy daraja bilan ustma-ust tushadi: $x^{[n]}=x^n$.

Umumlashgan daraja uchun chekli ayirmalar quyidagicha hisoblanadi:

1- tartibli chekli ayirma:

$$\Delta x^{[n]} = (x+h)^{[n]} - x^{[n]} =$$

$$=(x+h)x\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h] - x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-1)h] =$$

$$=x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h]\cdot\{(x+h)-[x-(n-1)h]\}=$$

$$=x(x-h)\cdot\ldots\cdot[x-(n-2)h]\cdot nh = nhx^{[n-1]},$$

yoki

$$\Delta x^{[n]} = nhx^{[n-1]}.$$

2- tartibli chekli ayirma:

$$\Delta^2 x^{[n]} = \Delta(\Delta x^{[n]}) = \Delta(nhx^{[n-1]}) = nh(n-1)hx^{[n-2]} = nh^2(n-1)x^{[n-2]},$$

yoki

$$\Delta^2 x^{[n]} = nh^2(n-1)x^{[n-2]}$$

ko'rinishda yoziladi.

Matematik induktsiya metodi yordamida isbotlash mumkinki, $k-$ tartibli chekli ayirma uchun

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]h^k x^{[n-k]}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $k=1, 2, 3, \ldots, n$. Shu bilan birga $k>n$ bo'lsa, $\Delta^k x^{[n]}=0$ bo'ladi.

4.3. Interpolyatsiya masalasi. Nyutonning interpolyatsion formulalari

$[a, b]$ oraliqda $n+1$ ta $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nuqtalar berilgan bo'lib, ularda $f(x)$ funktsiyaning $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$, $\ldots$, $f(x_n)=y_n$ qiymatlari berilgan bo'lsin. Shunday $F(x)$ funktsiya tuzish talab qilinadiki, bu funktsiyaning

$x_0, x_1, \ldots, x_n$ nuqtalardagi qiymatlari mos ravishda $f(x)$ funktsiya qiymatlariga teng bo’lsin, ya’ni $F(x_0) = y_0$, $F(x_1) = y_1$, $\ldots$, $F(x_n) = y_n$. Bu yerda $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nuqtalar interpolyatsiya nuqtalari deb, $F(x)$ funktsiya esa interpolyatsion funktsiya deb ataladi.

Yuqoridagi berilgan masala, jadval ko’rinishda berilgan $f(x)$ funktsiyani $F(x)$ funktsiyaga interpolyatsiyalash masalasi deb ataladi.

Umuman olganda interpolyatsiyalash masalasi cheksiz ko’p yechimga ega bo’lishi yoki bitta ham yechimga ega bo’lmasligi mumkin.

Agar interpolyatsiyalash masalasida $F(x)$ funktsiya o’rniga, darajasi n dan oshmaydigan $P_n(x)$ ko’phad olinsa, u holda masala bir qiymatli yechimga ega bo’ladi.

Hosil qilingan $y = F(x)$ interpolyatsion funktsiya x ning interpolyatsiya nuqtalaridan boshqa qiymatlarida $f(x)$ funktsiya qiymatini taqribiy hisoblash imkonini beradi.

Interpolyatsiyalash masalasi matematik modellashtirish masalalarini yechishda keng foydalaniladi. Masalan o’rganilayotgan ob’ekt eksperiment (tajriba) usulida modellashtirilgan bo’lsa, ob’ekt xossa va xususiyatlarining o’lchash natijalari jadval ko’rinishida berilgan bo’ladi. Agar ob’ektning o’lchash (tajriba o’tkazish) oraliqlaridagi qiymatlari kerak bo’lsa, ular tajriba natijalar orqali tuzilgan interpolyatsion funktsiyalar yordamida topiladi.

Teng o’zoqlikda joylashgan $x_i = x_i + ih$ $(\mathrm{i} = 0,1,\ldots,\mathrm{n})$ nuqtalarda $y = f(x)$ funktsiyaning $y_i = f(x_i)$ qiymatlari berilgan bo’lsin. Bu yerda h – interpolyatsiya qadami.

Darajasi n dan katta bo’lmagan va x_i nuqtalarda

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots,n) \tag{4.1}$$

shartlarni qanoatlantiradigan $P_n(x)$ ko’phad tuzish talab qilinsin.

Ma’lumki, (4.1) formula $m = 0,1,2,\ldots,n$ lar uchun $\Delta^m P_n(x_0) = \Delta^m y_0$ tenglik bilan teng kuchli.

$P_n(x)$ ko'phadni

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\ldots+$$
$$+a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

ko'rinishda, yoki

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)^{[1]}+a_2(x-x_0)^{[2]}+a_3(x-x_0)^{[3]}+\ldots+a_n(x-x_0)^{[n]} \quad (4.2)$$

umumlashgan daraja ko'rinishda qidiramiz. Bu yerda a_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ lar hozircha noma'lum koeffitsiyentlar.

(4.2) da $x=x_0$ deb $P_n(x_0)=y_0=a_0$ ni hosil qilamiz. a_1 koeffitsiyentni topish uchun birinchi tartibli

$$\Delta P_n(x)=a_1h+2a_2(x-x_0)^{[1]}h+3a_3(x-x_0)^{[2]}h+\ldots+na_n(x-x_0)^{[n-1]}h$$

chekli ayirmani tuzib olamiz va u yerda $x=x_0$ deb $\Delta P_n(x_0)=\Delta y_0=a_1h$ yoki bundan $a_1=\dfrac{\Delta y_0}{1!\cdot h}$ ga ega bo'lamiz.

Xuddi yuqoridagi kabi amallarni bajarib, a_i lar uchun

$$a_i=\frac{\Delta^i y_0}{i!\cdot h^i} \quad (i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

formulaga ega bo'lamiz.

Topilgan a_i, $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ larning qiymatlarini (4.2) ga olib borib quyib

$$P_n(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!\cdot h}(x-x_0)^{[1]}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!\cdot h^2}(x-x_0)^{[2]}+\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{n!\cdot h^n}(x-x_0)^{[n]} \quad (4.3)$$

Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasini hosil qilamiz.

(4.3) da $q=\dfrac{x-x_0}{h}$ (x_0 nuqtadan x nuqtagacha bo'lgan h qadamlar soni) yangi o'zgaruvchi kiritib va

$$\frac{(x-x_0)^{[i]}}{h^i}=\frac{(x-x_0)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-h)}{h}\cdot\frac{(x-x_0-2h)}{h}\cdot\ldots\cdot\frac{[x-x_0-(i-1)h]}{h}=$$
$$=q(q-1)(q-2)\cdot\ldots\cdot(q-i-1) \quad (i=1, 2, 3, \ldots, n),$$

ekanligini hisobga olsak, Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasini

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\cdot\ldots\cdot(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\cdot\ldots\cdot(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

ko'rinishga ega bo'lib, bu yerda $q = \dfrac{x - x_n}{h}$ (x_n nuqtadan x nuqtagacha bo'lgan h qadamlar soni).

Nyuton interpolyatsion formulalarining qaysi biridan qachon va qanday holda foydalanish maqsadga muvofiq?

Agar $x < x_0$ $(q < 0)$ va x ning qiymati x_0 ga yaqin bo'lsa, Nyutonning 1-interpolyatsion formulasidan, agar $x > x_n$ $(q > 0)$ va x ning qiymati x_n ga yaqin bo'lsa, Nyutonning 2-interpolyatsion formulasidan foydalanish yaxshi natijalarga olib keladi.

Misol. Quyidagi jadval

x	0	1	2	3	4	5
y	5,2	8,0	10,4	12,4	14,0	15,2

ko'rinishida berilgan funktsiya uchun Nyutonning 1-interpolyatsion formulasini tuzing.

Yechish. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, $x_0 = 0$ va $h = 1$. Dastlab berilgan funktsiya uchun gorizontal chekli ayirmalar jadvalini tuzib olamiz.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	5,2	2,8	-0,4
1	8,0	2,4	-0,4
2	10,4	2,0	-0,4

3	12,4	1,6	-0,4
4	14,0	1,2	
5	15,2		

Bu jadvaldan ko’rinib turibdiki, ikkinchi tartibli ayirmalar o’zgarmas, u xolda $\Delta^3 y = 0$ bo’ladi. Shu sababli (3) formuladan

$$y_2(x) = 5{,}2 + 2{,}8x - \frac{0{,}4}{2}x(x-1)$$

yoki

$$y_2(x) = 5{,}2 + 3x - 0{,}2x^2$$

ga ega bo’lamiz.

Nyuton interpolyatsion formulalari interpolyatsiyalash qadami o’zgarmas bo’lganda o’rinli bo’ladi. Lekin ko’pgina hollarda funktsiya qiymatlari teng o’zoqlikda joylashmagan x_i lar (interpolyatsiya qadami o’zgaruvchi) uchun jadval ko’rinishda beriladi. Bunday hollarda Lagranjning interpolyatsion formulasidan foydalaniladi.

4.4. Lagranjning interpolyatsion formulasi

$[a;b]$ oraliqda o’zgaruvchi x ning $n+1$ ta $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ qiymatlari va ularga mos $y = f(x)$ funktsiya qiymatlari $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$, $\dots$, $f(x_n) = y_n$ berilgan bo’lsin.

Darajasi n dan katta bo’lmagan va x_i nuqtalarda

$$L_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{4.4}$$

shartlarni qanoatlantiradigan $L_n(x)$ ko’phadni tuzish talab qilinsin.

Dastlab, shunday $p_i(x)$ ko’phad tuzib olaylikki, u

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{агар} \quad i = j; \\ 0, & \text{агар} \quad i \neq j, \end{cases}$$

shartni qanoatlantirsin. Bu yerda δ_{ij} - Kronekker belgisi.

Qidirilayotgan ko'phad n ta $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ nuqtalarda nolga aylanadi, shu sababli uni

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n) \qquad (4.5)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin.

Agar (4.5) da $x = x_i$ deb va

$$p_i(x_i) = C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) = 1$$

ekanligini hisobga olsak,

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \qquad (4.6)$$

ga ega bo'lamiz. (4.6) ni (4.5) ga qo'yib,

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \qquad (4.7)$$

ni hosil qilamiz.

Endi (4.4) shartni qanoatlantiruvchi $L_n(x)$ ko'phadni

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y_i \qquad (4.8)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin.

(4.8) darajasi n dan katta bo'lmagan ko'phad bo'lib, (4.4) shartni qanoatlan-tiradi:

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x_j) y_i = p_j(x_j) y_j = y_j \qquad (j = 0, 1, 2, \dots, n)$$

(4.7) ni (4.8) ga olib borib quyib,

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)} \qquad (4.9)$$

Lagranjning interpolyatsion ko'phadini hosil qilamiz.

Misol. Berilgan $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$ nuqtalarga mos ravishda $y_0 = 1$, $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = 0$ qiymatlarni qabul qiladigan funktsiya uchun Lagranj ko'phadini tuzing.

Yechish. (4.9) formulaga asosan

$$L_2(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot 1+\frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{1}{2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}\cdot 0=$$

$$=6\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)-9x\left(x-\frac{1}{2}\right)=(3x-1)(2x-1)-9x^2+4{,}5x=-3x^2-0{,}5x+1$$

yoki

$$L_2(x)=-3x^2-0{,}5x+1$$

ga ega bo'lamiz.

Lagranj interpolyatsion formulasi uchun Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
 program kuphad_lag;
const n=2;
type vek=array[0..n] of real;
var   i,j:integer;
        x,y:vek; x1,y1:real;
procedure lagran(x:real; k:integer; px,py:vek; var lag:real);
var s1:real;
begin
        lag:=0;
        for i:=0 to k do
              begin s1:=1.0;
                     for j:=0 to i-1 do s1:=s1*(x-px[j])/(px[i]-px[j]);
                     for j:=i+1 to k do s1:=s1*(x-px[j])/(px[i]-px[j]);
                     lag:=lag+s1*py[i]
              end;
end;
begin
        write('x='); read(x1)
        for i:=0 to n do begin write('x[',i:1,']='); read(x[i]) end;
```

```
    for i:=0 to n do begin write('y[',i:1,']='); read(y[i]) end;
    lagran(x1,n,x,y,y1);
    writeln('y=',y1:8:5);
end.
```

Tayanch so'z va iboralar. Chekli ayirma, umumlashgan daraja, interpolyatsiya, Nyuton interpolyatsion formulasi, Lagranj interpolyatsion formulasi.

Savollar:

1. Chekli ayirma nima va u qanday hisoblanadi?
2. Yuqori tartibli chekli ayirmalar qanday hisoblanadi?
3. Chekli ayirmalarda xatolik qanday aniqlanadi?
4. Umumlashgan daraja nima va u qanday hisoblanadi?
5. Yuqori tartibli umumlashgan daraja qanday hisoblanadi?
6. Interpolyatsiyalash masalasi va uning asosiy maqsadi.
7. Nyutonning birinchi va ikkinchi interpolyatsion formulalari.
8. Lagranj interpolyatsion formulasi.
9. Matematik modellashtirishda interpolyatsion formulalardan foydalanish.

Misol va masalalar

1. $\Delta x = 1$ bo'lsa $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ funktsiya uchun 3-tartibli chekli ayirmani hisoblang.

2. Quyidagi

1,5	2,0	2,5	3,0
0,3691	0,6309	0,8340	1,0000

jadval ko'rinishda berilgan funktsiya uchun Lagranjning interpolyatsion formulasini tuzing.

3. Agar $f(x)$ funktsiya quyidagi

7,1	7,6	8,1	8,6
2,8278	2,9260	3,0179	3,1043

jadval ko'rinishda berilgan bo'lsa, Nyutonning 1-interpolyatsion formulasini tuzing va u yordamida $f(7{,}65)$ ni hisoblang.

4. Agar funktsiya quyidagi

24	24,1	24,2	24,3
3,1781	3,1822	3,1864	3,1905

jadval ko’rinishda berilgan bo’lsa, Nyutonning 2-interpolyatsion formulasini tuzing.

5-BOB. DIFFERENTSIAL TENGLAMALAR VA ULARNI YeChISh USULLARI

Noma'lum funktsiya hosilasi yoki differentsiali qatnashgan tenglama **differentsial tenglama** deb ataladi.

Tenglamada qatnashgan noma'lum funktsiya hosilasining eng yuqori darajasi, shu differentsial tenglamaning tartibini aniqlab beradi. Masalan tenglamada noma'lum funktsiyaning ikkinchi tartibli hosilasi qatnashgan bo'lsa, u ikkinchi tartibli differentsial tenglama deb ataladi.

Oliy matematika kursidan ma'lumki, har qanday differentsial tenglama cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Tenglama yechimi yagonaligini ta'minlash maqsadida differentsial tenglama tartibiga mos ravishda, noma'lum funktsiya yoki uning hosilalariga nisbatan qo'shimcha shartlar beriladi. Qo'shimcha shartlar erkli o'zgaruvchi o'zgarish oralig'ining bir tomonida, yoki ikkala tomonida berilishi mumkin. U holda bu shartlar mos ravishda boshlang'ich yoki chegaraviy shartlar deb ataladi.

Differentsial tenglamaning boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi boshlang'ich shartli yoki **Koshi masalasi** deb, chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi esa **chegaraviy masala** deb ataladi. Agar differentsial tenglamaning boshlang'ich va chegaraviy shartlarni birgalikda qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsa, bu masalaga **boshlang'ich shartli chegaraviy masala** deb ataladi.

Misollar.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)$ differentsial tenglamaning $y(a) = y_0$ va $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a} = y_1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi bo'ladi.

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right)$ differentsial tenglamaning $y(a) = y_0$ va $y(b) = y_1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi chegaraviy masala bo'ladi.

3. $\dfrac{\partial W}{\partial t} + \dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2} = q(x,t)$ xususiy hosilali differentsial tenglamaning

$W(x,0)=\varphi(x)$ hamda $W(a,t)=\psi_1(t)$ va $W(b,t)=\psi_2(t)$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi boshlang'ich shartli chegaraviy masala bo'ladi.

Differentsial tenglamalarni yechishning yetarlicha ko'p usullari mavjud bo'lib, ulardan ba'zi birlari bilan tanishib chiqamiz.

5.1. Operatsion hisob usuli

Original funktsiya va uning tasviri. t haqiqiy o'zgaruvchining manfiy bo'lmagan qiymatlari uchun $f(t)$ funktsiya berilgan bo'lib, bu funktsiya bo'lakli-o'zluksiz bo'lsin. Shu bilan birga $t\in[0;\infty)$ uchun

$$|f(t)|<M\cdot e^{S_0t}$$

shart bajarilsin. Bu yerda M va S_0 lar musbat o'zgarmas sonlar. $\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$ integralni $F(p)$ orqali belgilaymiz, ya'ni

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt$$

bu yerda $p=a+ib$ – kompleks son bo'lib, $a>0$.

F(p) funktsiya *f(t)* funktsiyaning tasvir funktsiyasi deb, *f(t)* funktsiya esa original funktsiya deb ataladi.

Agar $F(p)$ funktsiya *f(t)* funktsiyaning tasvir funktsiyasi bo'lsa, u $F(p)\xrightarrow{\bullet}f(t)$ yoki $f(p)\xleftarrow{\bullet}F(t)$ ko'rinishda belgilanadi.

Tasvir funktsiyalarni kiritish, ko'pgina amaliy masalalarni yechishni soddalashtiradi. Jumladan differentsial tenglamalarni yechish tasvir funktsiyani topish uchun bajariladigan juda sodda algebraik amallarga keltiriladi.

Operatsion hisob usulidan foydalanish uchun tasvir funktsiyaning bir qator xossalaridan foydalanishga to'g'ri keladi. Bu xossalar quyidagilardan iborat.

Tasvir funktsiyaning chiziqlilik xossasi. Agar $f(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t)$ va $F(p) \overset{\bullet}{\longrightarrow} f(t)$ hamda $F_i(p) \overset{\bullet}{\longrightarrow} f_i(t)$ bo'lsa, $F(p)=\sum_{i=1}^{n} c_i F_i(p)$ bo'ladi. Bu yerda c_i - o'zgarmaslar.

Tasvir funktsiyani siljish xossasi. Agar $F(p) \overset{\bullet}{\longrightarrow} f(t)$ bo'lsa, $F(p+\alpha) \overset{\bullet}{\longrightarrow} e^{-\alpha t} f(t)$ bo'ladi. Bu yerda $Re(p+\alpha) > S_0$, deb faraz qilinadi.

Tasvir funktsiyani differentsiallash xossasi. Agar $F(p) \overset{\bullet}{\longrightarrow} f(t)$ bo'lsa, $(-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} F(p) \overset{\bullet}{\longrightarrow} t^n f(t)$ bo'ladi.

Operatsion hisob usuli yordamida differentsial tenglamalarni yechishga misollar.

1-misol. $y''(x)+y'(x)-2y(x)=e^{-x}$

tenglamaning

$$y(0)=0 \quad \text{va} \quad y'(0)=1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Agar $F(p) \overset{\bullet}{\longrightarrow} y(x)$ deb olsak, u holda

$$p^2F(p)-py(0)-y'(0)=p^2F(p)-1 \overset{\bullet}{\longrightarrow} y''(x);$$

$$pF(p)-y(0)=pF(p) \overset{\bullet}{\longrightarrow} y'(x); \quad \frac{1}{p+1} \overset{\bullet}{\longrightarrow} e^{-x}$$

tasvir funktsiyalardan foydalanib, $F(p)$ ga nisbatan

$$p^2F(p)-1+pF(p)-2F(p)=\frac{1}{p+1}$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu yerdan

$$F(p)=\frac{p+2}{(p+1)(p^2+p-2)}=\frac{1}{p^2-1}$$

ekanligi kelib chiqadi. Agar jadvaldan foydalansak, berilgan masalaning yechimi

$$y(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

ekanligi kelib chiqadi.

2-misol. Quyidagi

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=A\sin\omega t \qquad (5.1)$$

differentsial tenglamaning

$$x\big|_{t=0}=0 \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0 \qquad (5.2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Yechish. Ma’lumki, davriy tashqi kuch ta’sirida bo’lgan elastik mexanik sistemalarning tebranishlari, shu jumladan zanjirdagi elektr tok kuchini aniqlash masalalarining matematik modeli (5.1), (5.2) ko’rinishdagi Koshi masalasini yechishga keltiriladi.

(5.1), (5.2) Koshi masalasini yechish uchun, unga mos tasvir funktsiya tenglamasini yozib olamiz:

$$\bar{x}(p)(p^2+k^2)=A\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

yoki

$$\bar{x}(p)=\frac{A\omega}{(p^2+k^2)(p^2+\omega^2)}.$$

O’ng tomondagi kasrni elementar kasrlarga ajratamiz, buning uchun uni

$$\frac{A\omega}{(p^2+k^2)(p^2+\omega^2)}=\frac{Np+B}{p^2+k^2}+\frac{Cp+D}{p^2+\omega^2}$$

ko’rinishda yozib olib, noma’lum koeffitsiyentlar usulidan foydalansak $C=0$, $N=0$, $D=\frac{A\omega}{k^2-\omega^2}$, $D=\frac{A\omega}{\omega^2-k^2}$ larga ega bo’lamiz. U holda

$$\bar{x}(p)=\frac{A\omega}{(\omega^2-k^2)k}\cdot\frac{k}{p^2+k^2}-\frac{A}{\omega^2-k^2}\cdot\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Tasvir funktsiya jadvalidan foydalanib, masalaning quyidagi

$$x(t)=\frac{A}{(k^2-\omega^2)k}\left(-\omega\sin kt+k\sin\omega t\right)$$

yechimiga ega bo’lamiz.

Bu yechimdan ko’rinib turibdiki, masalaning yechimi ikkita garmonik tebranish, ya’ni chastotasi k bo’lgan xususiy tebranish

$$x_{хус}(t) = -\frac{A\omega}{(k^2-\omega^2)k}\sin kt$$

va chastotasi ω bo’lgan majburiy tebranish

$$x_{маж}(t) = -\frac{A}{k^2-\omega^2}\sin \omega t$$

lar yig’indisidan iborat bo’lar ekan.

Tasvir funktsiyalardan to’g’ridan-to’g’ri foydalanish maqsadida quyidagi jadvalni keltiramiz.

N	$F(p)$	$f(t)$
1	$\frac{1}{p}$	1
2	$\frac{a}{p^2+a^2}$	$\sin at$
3	$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$
4	$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
5	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$sh\,\alpha t$
6	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$ch\,\alpha t$
7	$\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\sin at$
8	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
9	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	t^n
10	$\frac{2pa}{(p^2+a^2)^2}$	$t\sin at$

11	$\dfrac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$	$t\cos at$
12	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
13	$\dfrac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
14	$(-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n} F(p)$	$t^n f(t)$
15	$F_1(p)F_2(p)$	$\int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau$

5.2. Funktsiyani sonli differentsiallash

Agar x - $[a,b]$ oraliqga tegishli ixtiyoriy x_i tugun no’qtaning qiymatlarini qabul qiluvchi erkli o’zgaruvchi bo’lsa, u holda ixtiyoriy tugun no’qta qiymatini

$$x + kh, \qquad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

ko’rinishda yozish mumkin.

$$\frac{d^s y(x)}{dx^s}\ , \qquad s \geq 1$$

hosila qiymatini, funktsiyaning tugun no’qtalardagi qiymatlari, ya’ni $y(x+kh)$ lar orqali ifodalash, $y(x)$ funktsiya hosilasini *taqribiy hisoblash* yoki *taqribiy differentsiallash* deb ataladi.

Faraz qilaylik $y(x) \in C^2[a,b],\ \ x < b$ bo’lsin. $y(x+h)$ ning ikkinchi tartibli aniqlikda Teylor qatoriga yoyilmasi

$$y(x+h) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx}h + O(h^2)$$

dan foydalansak

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + O(h)$$

tenglikga ega bo’lamiz. Agar bu yerda $x = x_i$ deb olsak, birinchi tartibli hosila uchun ikki no’qtalik oldinga taqribiy hisoblash formulasi hosil bo’ladi:

$$\frac{dy(x_i)}{dx}=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}+O(h),\quad 0\le i\le m\text{-}1 \tag{5.3}$$

Odatda sonli differentsiallash formulasi deganda quyidagi

$$\frac{dy(x_i)}{dx}\approx\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$$

taqribiy formula tushuniladi.

$$R=\frac{dy(x_i)}{dx}-\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$$

ayirmaga sonli differentsiallash xatosi deb ataladi. (5.3) formula uchun $h\to 0$ da $R=O(h)$.

Xuddi shunga o'xshash birinchi tartibli hosila uchun ikki no'qtalik taqribiy hisoblash formulasini hosil qilish mumkin:

$$\frac{dy(x_i)}{dx}=\frac{y(x_i)-y(x_{i-1})}{h}+O(h),\quad 1\le i\le m.$$

Agar $y(x)\in C^3[a,b]$ bo'lsa, birinchi tartibli hosila uchun yanada aniqroq ikki no'qtalik taqribiy hisoblash formulasi – markaziy ayirma formulasi mavjud va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{dy(x_i)}{dx}=\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}+O(h^2),\quad 1\le i\le m\text{-}1.$$

yoki

$$\frac{dy(x_i)}{dx}\approx\frac{y(x_{i+1})-y(x_{i-1})}{2h}. \tag{5.4}$$

Birinchi tartibli hosilani taqribiy hisoblashda ko'p no'qtali, masalan uch no'qtali

$$\frac{dy(x_i)}{dx}=\frac{-y(x_{i+2})+4y(x_{i+1})-3y(x_i)}{2h}+O(h^2) \tag{5.5}$$

formuladan ham foydalanish mumkin.

Umumiy holda birinchi tartibli hosila uchun ko'p no'qtali formulaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{dy(x_i)}{dx}=\sum_{k=0}^{m}a_k y(x_k)+O(h^p)$$

Bu yerda a_k larni shunday tanlash mumkinki, formulaning aniqlik tartibi p ga teng bo'ladi.

Ikkinchi tartibli hosilani hisoblash uchun ham taqribiy xisoblash formulalarini keltirish mumkin:

$$\frac{d^2y(x_i)}{dx^2}=\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2}+O(h^2)$$

yoki

$$\frac{d^2y(x_i)}{dx^2}=\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2} \tag{5.6}$$

1-misol. $y=x^3+e^x$ funktsiya uchun $y'(2)$ ni hisoblang.

Yechish. $h=0{,}05$ deb, quyidagi

x	1,9	1,95	2,00	2,05	2,1
y	13,5449	14,4436	15,3891	16,3830	17,4272

jadvalni tuzib olamiz. $y_0=y(1{,}9)=13{,}5449$; $y_1=y(1.95)=14{,}4436$ va $y_2=y(2)=15{,}3891$ $y_3=y(2{,}05)=16{,}3830$ $y_4=y(2{,}1)=17{,}4272$ ekanligini hisobga olsak, oldinga taqribiy hisoblash

$$\frac{dy(x_i)}{dx}=\frac{y(x_{i+1})-y(x_i)}{h}$$

formulasiga asosan

$$y'(2)\approx\frac{16{,}3830-15{,}3891}{0{,}05}=19{,}878$$

ga ega bo'lamiz. Agar orqaga taqribiy hisoblash $\frac{dy(x_i)}{dx}=\frac{y(x_i)-y(x_{i-1})}{h}$ formulasidan foydalansak

$$y'(2)\approx\frac{15{,}3891-14{,}4436}{0{,}05}=18{,}91$$

ni hosil qilamiz. Agar ikki no'qtalik taqribiy hisoblash formulasidan foydalansak

$$y'(2) \approx \frac{16,3830 - 14,4436}{2 \cdot 0,05} = 19,394$$

bo'ladi. Agar uch no'qtali formula (5.5) dan foydalansak

$$y'(2) \approx \frac{-17,4272 + 4 \cdot 16,3830 - 3 \cdot 15,3891}{2 \cdot 0,05} = 19,3777$$

ga ega bo'lamiz.

Agar $y'(2)$ ning aniq qiymati 19,3891 ekanligini hisobga olsak, taqribiy hisoblashdagi absolyut xato birinchi holda 0,4889 ga, ikkinchi holda 0,4791 ga, uchinchi holda esa 0,0049 ga va to'rtinchi holda esa 0,0114 teng bo'ladi. Bu hollarda nisbiy xatolar mos ravishda 2,52% , 2,47%, 0,025% va 0,059% ga teng bo'ladi.

2-misol. $y = xe^x$ funktsiya uchun $y''(5)$ ni hisoblang.

Yechish. $h = 0,05$ deb, quyidagi

x	4,95	5	5,05
y	698,8161	742,0658	787,9134

jadvalni tuzib olamiz. $y_0 = y(4,95) = 698,8161$; $y_1 = y(5) = 742,0658$ va $y_2 = y(5,05) = 787,9134$ ekanligini hisobga olsak, (5.6) formulaga asosan

$$y''(5) \approx \frac{787,9134 - 2 \cdot 742,0658 + 698,8161}{0,05^2} = 1039,1704$$

ga ega bo'lamiz.

Agar $y''(5)$ ning aniq qiymati 1038,8921 ekanligini hisobga olsak, taqribiy hisoblashdagi absolyut xato 0,2783 ga, nisbiy xato esa 0,027% ga tengligi kelib chiqadi.

5.3. Ketma-ket yaqinlashish usuli

Ko'pgina muxandislik masalalarini yechish chiziqli yoki chiziqsiz differentsial tenglama uchun Koshi masalasi yechimini topishga keltiriladi. U holda Koshi masalasini yechish uchun ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanish mumkin. Bu usul algoritmini quyidagi

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{5.7}$$

differentsial tenglamaning

$$x(t_0) = x_0 \tag{5.8}$$

boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishda tanishib chiqaylik.

Agar (5.7) ni $[t_0, t]$ oraliqda t bo'yicha integrallab, (5.8) shartdan foydalansak, berilgan Koshi masalasiga teng kuchli quyidagi integral tenglamani hosil qilamiz:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau \tag{5.9}$$

(5.9) da $x(\tau)$ o'rniga nolinchi yaqinlashish sifatida ixtiyoriy funktsiyani, masalan $x(t_0) = x_0$ ni olishimiz mumkin. U holda (5.7) tenglama yechimiga birinchi yaqinlashish

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_0)d\tau$$

ni hosil qilamiz.

$x_1(t)$ ni (5.9) ga olib borib qo'yib,

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_1(\tau))d\tau$$

ikkinchi yaqinlashishni hosil qilamiz. Umumiy holda n-yaqinlashish uchun

$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x_{n-1}(\tau))d\tau$$

formulaga ega bo'lamiz.

Teorema. Agar (5.7), (5.8) Koshi masalasining yechimi $x(t)$ mavjud va u yagona bo'lsa, u holda $n \to \infty$ da $x_n(t) \to x(t)$ bo'ladi.

Xuddi yuqorida keltirilgan usuldan foydalanib,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$$

differetsial tenglamalar sistemasining

$$x_i(t_0)=x_{i0} \quad (i=1,2,\ldots,\mathrm{n})$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini ham ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida topish mumkin.

Misol. Berilgan

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x+y \\ \dfrac{dy}{dt}=3y-2x \end{cases} \tag{5.10}$$

differentsial tenglamalar sistemasining

$$\begin{cases} x(0)=1 \\ y(0)=0 \end{cases} \tag{5.11}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini ketma-ket yaqinlashish usuli yordamida aniqlang.

Yechish. (5.10) sistema tenglamalarini $[0,t]$ oraliqda integrallab, (5.11) shartlarni hisobga olsak, quyidagi

$$x(t)=1+\int_0^t [x(\tau)+y(\tau)]d\tau, \quad y(t)=\int_0^t [3y(\tau)-2x(\tau)]d\tau$$

integral tenglamalarga ega bo'lamiz.

Nolinchi yaqinlashish sifatida $x_0=1$ va $y_0=0$ larni qabul qilamiz. U holda birinchi yaqinlashish uchun

$$x_1(t)=1+\int_0^t d\tau=1+t, \quad y_1(t)=\int_0^t (-2)d\tau=-2t$$

ikkinchi yaqinlashish uchun

$$x_2(t)=1+\int_0^t (1+\tau-2\tau)d\tau=1+t-\frac{t^2}{2}, \quad y_2(t)=\int_0^t (-6\tau-2-2\tau)d\tau=-2t-4t^2$$

uchinchi yaqinlashish uchun esa

$$x_2(t)=1+\int_0^t (1+\tau-\frac{\tau^2}{2}-2\tau-4\tau^2)d\tau=1+t-\frac{t^2}{2}-\frac{3}{2}t^3,$$

$$y_3(t)=\int_0^t (-6\tau-12\tau^2-2-2\tau+\tau^2)d\tau=-2t-4t^2-\frac{11}{3}t^3$$

formulalarga ega bo’lamiz.

Uchinchi yaqinlashish (5.10), (5.11) masalaning aniq yechimi $x(t)=e^{2t}(\cos t-\sin t)$ va $y(t)=-2e^{2t}\sin t$ larning t^3 aniqlikda $t=0$ atrofida Fur’e qatoriga yoyilmasi bilan ustma-ust tushadi.

Bu usuldagi kamchiliklar quyidagilardan iborat:

1. Ba’zi yaqinlashishlarni hisoblash davomida integral qiymatini aniq hisoblash mumkin bo’lmay qoladi;

2. $\{x_n(t)\}$ ketma-ketlikning $x(t)$ ga yaqinlashish tezligi yuqori bo’lmasligi mumkin. U holda yaqinlashishlar sonini oshirishga to’g’ri keladi, bu esa murakkab bo’lgan hisoblash ishlarini bajarishni taqoza etadi;

3. Cheksiz qator ko’rinishida hosil bo’ladigan yechim qiymatini har doim aniq hisoblash imkoni bo’lavermaydi.

5.4. Eyler va Runge-Kutta usullari

Ma’lumki, ko’pgina injenerlik masalalarining matematik modeli differentsial tenglama uchun Koshi, chegaraviy yoki boshlang’ich shartli chegaraviy masalalar-ni yechishga keltiriladi. Ma’lumki, bu masalalarni yechimini aniq ko’rinishda har doim ham yozish imkoni bo’lavermaydi. Bu holda berilgan masalani yechish uchun taqribiy sonli yechish usullardan foydalaniladi. Quyida shu usullarning ayrimlari bilan tanishib chiqamiz.

Eyler usuli. $[a,b]$ kesmada

$$y'(x)=f(x,y)$$

differentsial tenglamaning

$$y(a)=x_0$$

boshlang’ich shartni qanoatlantiruvchi (Koshi masalasi) yechimini topish talab etilsin.

Eyler usuliga asosan $[a,b]$ kesmani n ta oraliqga ajratamiz, ya’ni $x_i=a+ih=x_{i-1}+h$, $(x_0=a)$ tugun no’qtalarni hosil qilamiz, bu yerda $h=(b\text{-}a)/n$. Hosil bo’lgan har bir oraliqda y' hosilani taqribiy ravishda $\dfrac{y_i-y_{i-1}}{h}$

chekli ayirmaga almashtiramiz. Natijada noma'lum $y(x)$ funktsiyaning x_i nuqtalardagi qiymatlari $y_i = y(x_i)$ ni hisoblash uchun ushbu

$$y_i \approx y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

taqribiy hisoblash formulasiga ega bo'lamiz. Bu formula, berilgan boshlang'ich shart yordamida noma'lum funktsiyaning $x = x_i$ no'qtalardagi qiymatlarini ketma-ket topish imkonini beradi.

Misol. $[0,1]$ kesmada $y'(x) = \frac{1}{2}xy$ tenglamaning $y(0) = 1$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimlari uchun taqribiy qiymatlar jadvalini tuzing.

Yechish. Aniqlik uchun $n = 10,\ h = 0{,}1$ bo'lsin. Ushbu

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{2}hx_{i-1}y_{i-1}$$

formuladan foydalanib, $y_i \quad (i = 1,2,\ldots,10)$ ning qiymatlarini topish mumkin.

Tekshirib ko'rish mumkinki, berilgan masala $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ aniq yechimga ega.

Agar $x = 1$ nuqtadagi $y(1) = e^{\frac{1}{4}} = 1{,}2840$ aniq va $y(1) \approx 1{,}2479$ taqribiy yechimlarini solishtirsak, absolyut xato 0,0361 ga, nisbiy xato esa $\frac{0{,}0361 \cdot 100}{1{,}2840} \approx 2{,}8\%$ ga teng bo'ladi.

i	x_i	y_i	$f(x_i,y_i)$	$hf(x_i,y_i)$
0	0	1	0	0
1	0,1	1	0,05	0,005
2	0,2	1,005	0,1005	0,0100
3	0,3	1,0150	0,1522	0,0152
4	0,4	1,0303	0,2061	0,0206
5	0,5	1,0509	0,2627	0,0263
6	0,6	1,0772	0,3232	0,0323
7	0,7	1,1095	0,3883	0,0388
8	0,8	1,1483	0,4593	0,0459
9	0,9	1,1942	0,5374	0,0537

10	1,0	1,2479		

Differentsial tenglama uchun Koshi masalasini Eyler usulida yechishga Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program eyler_1; uses crt;
  var a,b,y0,y:real; n:integer;
    function f(x,y:real):real;
    begin
      f:=y-0.5*x*x+x-1
    end;
  procedure eyler(a,b,y1:real;n:integer;var y:real);
     var h,x:real; i:integer;
       begin
         h:=(b-a)/n;
         x:=a;
         writeln('x=',x:6:2,'    y=',y1:10:6);
         for i:=1 to n do
           begin
             y:=f(x,y1)*h+y1;
             x:=x+h;
             writeln('x=',x:6:2,'    y=',y:10:6);
             y1:=y;
           end;
       end;
   begin
     clrscr;
     write('a='); read(a);   write('b='); read(b);
     write('n='); read(n);   write('y0='); read(y0);
     eyler(a,b,y0,n,y);
   end.
```

Misol. Berilgan dasturdan foydalanib, ushbu

$$y'(x) = y(x) - 0{,}5x^2 + x - 1$$

tenglamaning $y(0) = 1$ shartni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini aniqlang ($a = 0,\ b = 1,\ n = 10$ deb oling).

Yechish. Tekshirib ko'rish mumkinki, berilgan Koshi masalasi aniq $y(x) = 0{,}5x^2 + 1$ yechimga ega. Quyidagi jadvalda Koshi masalasining aniq va Eyler usulida topilgan taqribiy yechimlari keltirilgan.

x	Taqribiy yechim	Aniq yechim
0.0	1.000000	1.000000
0.1	1.000000	1.005000
0.2	1.009500	1.020000
0.3	1.028450	1.045000
0.4	1.056795	1.080000
0.5	1.094474	1.125000
0.6	1.141422	1.180000
0.7	1.197564	1.245000
0.8	1.262821	1.320000
0.9	1.337103	1.405000
1.0	1.420313	1.500000

Runge-Kutta usuli. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{5.12}$$

oddiy differentsial tenglamalar sistemasi berilgan bo'lib, uning $[a, b]$ oraliqdagi

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0} \tag{5.13}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin $(x_0 = a)$. Agar

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{va} \quad F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}$$

belgilashlar kiritsak, (5.12) va (5.13) ni quyidagi

$$Y = F(x,Y), \tag{5.14}$$

$$Y(x_0) = Y_0 \tag{5.15}$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin. Bu yerda

$$Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

(5.14) tenglamalar sistemasining (5.15) boshlang'ich shartlarni qanoat-lantiruvchi yechimini Runge-Kutta usuli yordamida topamiz. Buning uchun $x_i = a +_i h,\ Y_i = F(x_i, Y_i),\ i = 1,2,\ldots,n$ belgilashlarni kiritib, quyidagi hisoblashlar ketma- ketligini bajaramiz:

$$\begin{aligned} & x_i = a + ih; \\ & k_1 = F(x_i, Y_i) * h; \\ & k_2 = F(x_i + h/2, Y_i + k_1/2) * h; \\ & k_3 = F(x_i + h/2, Y_i + k_2/2) * h; \\ & k_4 = F(x_i + h, Y_i + k_3) * h; \end{aligned}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 \tag{5.16}$$

Bu yerda qadam $h = (b\text{-}a)/n$.

Hisoblashlar ketma-ketligi $i = 1$ dan $n-1$ gacha takroriy ravishda hisobla-nadi va (5.16) formuladan differentsial tenglamaning $y_i = y(x_i)$ taqribiy sonli yechimlari topiladi.

Eyler usulida yo'l quyiladigan xatolik h tartibda, Runge-Kutta usulida yo'l qo'yilgan xatolik esa h^4 tartibda bo'ladi. Agar $0 < h < 1$ ekanligini hisobga olsak, u holda Runge-Kutta usulining aniqligi Eyler usulining aniqligiga nisbatan yuqori ekanligi kelib chiqadi.

Differentsial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini Runge-Kutta usulida yechishga Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program rungi; uses crt;
    const nurav=2;
    type vector2=array[1..nurav] of real;
 var
   y0,y: vector2;
   n,i,j:integer;
   a,b,x0,x1,h:real;
 procedure pv(x: real; y: vector2; var dy: vector2);
       begin
           dy[1]:=y[1]+y[2]+4x-1;
           dy[2]:=y[1]-y[2]-2*x*x-2*x+1;
       end;
 procedure rungikytta(x: real; y0: vector2;
                var dy: vector2);
    var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vector2;
  begin
    pv(x,y0,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk1[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
    x:=x+0.5*h;   pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk2[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
    pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk3[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
    x:=x+0.5*h;  pv(x,v3,fc);
    for i:=1 to nurav do begin fk4[i]:=h*fc[i];
    dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i]) end;
```

```
  end;
begin   clrscr;
     write('a='); read(a);        write('b='); read(b);
     write('n='); read(n);        h:=(b-a)/n;
     x0:=a;
     for i:=1 to nurav do
                begin
                   write('y0[',i:1,']='); read(y0[i]);
                end;
     writeln; writeln;  write('x=',x0:5:2);
     for i:=1 to nurav do write('   y[',i:1,']=',y0[i]:10:6);
     writeln;    x1:=a;
     for j:=1 to n do begin
     rungikytta(x1,y0,y);
     x1:=a+j*h;   write('x=',x1:5:2);
     for i:=1 to nurav do write('   y[',i:1,']=',y[i]:10:6);
     x0:=x1; y0:=y;
     writeln;    end;
end.
```

Misol. Berilgan dastur yordamida, ushbu

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_1(x) + y_2(x) + 4x - 1 \\ y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x) - 2x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

differentsial tenglamalar sistemasining

$$\begin{cases} y_1(0) = -1 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlang (a=0, b=1, n=10 deb oling).

Yechish. Ishonch hosil qilish mumkinki, berilgan Koshi masalasi ushbu

$$\begin{cases} y_1(x) = x^2 - x - 1 \\ y_2(x) = -x^2 - x + 1 \end{cases}$$

aniq yechimga ega. Masalaning aniq va dastur yordamida topilgan taqribiy yechimlari quyidagi jadvalda keltirilgan.

x	$y_1(x)$		$y_2(x)$	
	aniq yechim	taqribiy yechim	aniq yechim	taqribiy yechim
0,0	-1.000000000	-1.000000000	1.000000000	1.000000000
0,1	-1.090000000	-1.090000000	0.890000000	0.889999166
0,2	-1.160000000	-1.160000084	0.760000000	0.759998408
0,3	-1.210000000	-1.210000253	0.610000000	0.609997710
0,4	-1.240000000	-1.240000511	0.440000000	0.439997058
0,5	-1.250000000	-1.250000862	0.250000000	0.249996438
0,6	-1.240000000	-1.240001315	0.040000000	0.039995840
0,7	-1.210000000	-1.210001877	-0.190000000	-0.190004750
0,8	-1.160000000	-1.160002561	-0.440000000	-0.440005343
0,9	-1.090000000	-1.090003380	-0.710000000	-0.710005952
1,0	-1.000000000	-1.000004350	-1.000000000	-1.000006587

5.5. Chekli ayirmalar usuli

Chekli ayirmalar usuli differentsial tenglamalarni taqribiy yechish usuli bo’lib, u noma’lum funktsiya hosilasini chekli ayirmalarga almashtirishga asoslangan. Soddalik uchun bu usul algoritmini quyidagi

$$y''(t) + A(t)y'(t) + B(t)y(t) = F(t) \qquad (5.17)$$

differentsial tenglamaning

$$y(0) = C_0, \qquad y'(0) = D_0 \qquad (5.18)$$

boshlang’ich shartlarni qanoatantiruvchi yechimini topish masalasida ko’rib chiqaylik.

t o'zgaruvchining qiymatini $t = t_i = i \cdot \tau$ (τ - vaqt bo'yicha integrallash qadami) deb olib, $y(t_i) = y_i$, $y'(t_i) = y_i'$, $y''(t_i) = y_i''$, $A(t_i) = A_i$, $B(t_i) = B_i$, $F(t_i) = F_i$ belgilashlarni kiritamiz.

Funktsiya hosilasini bir necha usul yordamida taqribiy chekli ayirmalarga almashtirish mumkin. Shulardan biri markaziy chekli ayirmalar usulidir. Bu usulga asosan $y(t+\tau)$ ni τ ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyilmasi

$$y_{i+1} = y_i + \tau y_i' + \frac{\tau^2}{2} y_i'' + \ldots \tag{5.19}$$

dan foydalanamiz. (5.19) ni τ^2 aniqlikda

$$y_{i+1} = y_i + \tau y_i' + \frac{\tau^2}{2} y_i'' \tag{5.20}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(5.20) da ketma-ket $\tau = -\Delta t$ va $\tau = \Delta t$ deb olib, quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$y_{i-1} = y_i - \Delta t \cdot y_i' + \frac{\Delta t^2}{2} y_i'' \tag{5.21}$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \cdot y_i' + \frac{\Delta t^2}{2} y_i'' \tag{5.22}$$

(5.21) va (5.22) lardan y_i' va y_i'' larni topish uchun

$$y_i' = \frac{1}{2\Delta t}(y_{i+1} - y_{i-1}) \tag{5.23}$$

$$y_i'' = \frac{1}{\Delta t^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) \tag{5.24}$$

ga ega bo'lamiz.

(5.23) va (5.24) ni (5.17) ga quyib,

$$y_{i+1} = \frac{1}{2 + A_i \Delta t}\left[(4 - 2B_i \Delta t^2)y_i + (A_i \Delta t - 2)y_{i-1} + 2\Delta t^2 F_i\right] \tag{5.25}$$

tenglikga ega bo'lamiz.

Boshlang'ich vaqt $t_0 = 0$ uchun $y_0 = C_0$. (5.25) dan foydalanib, y_{i+1} $(i = 0,1,2,\ldots)$ larni aniqlash uchun y_{-1} qiymati zarur bo'ladi. Bu qiymatni (5.23) formuladan foydalanib, y_0' va y_1 orqali ifodalab olamiz:

$$y_{-1} = y_1 - 2\Delta t y_0^{\prime} \qquad (5.26)$$

(5.25) da $i = 0$ deb,

$$y_1 = \frac{1}{2 + A_0 \Delta t}\left[(4 - 2B_0 \Delta t^2)y_0 + (A_0 \Delta t - 2)y_{-1} + 2\Delta t^2 F_0\right] \qquad (5.27)$$

tenglikga ega bo'lamiz. (5.26) ni (5.27) ga qo'yib, $y_1$ni hisoblash uchun

$$y_1 = \frac{1}{4}\left[(4 - 2B_0 \Delta t^2)C_0 - 2\Delta t(A_0 \Delta t - 2)D_0^{\prime} + 2\Delta t^2 F_0\right] \qquad (5.28)$$

formulaga ega bo'lamiz. Oxirgi (5.25) formula $i = 1,2,3,\ldots$ lar uchun y_{i+1} larning qiymatlarini ketma-ket hisoblash imkonini beradi.

Differentsial tenlamalarni chekli ayirma usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
program chekli_ayirma;
    const nt=21; dt=1; C0=-1; D0=3.0;
    type mas=array[1..nt] of real;
    var y,t:mas; i:integer;
function a(x:real):real;
begin
    a:=x+1;      {A(t) – funktsiya ko'rinishi}
end;
function b(x:real):real;
begin
    b:=x-2;      {B(t) – funktsiya ko'rinishi}
end;
function f(x:real):real;
begin
    f:=x*x*x+3*x*x-2*x+7;          {F(t) – funktsiya ko'rinishi}
end;
begin
    for i:=1 to nt do t[i]:=(i-1)*dt;
    y[1]:=C0;
```

```
    y[2]:=1/4*((4-2*b(0)*sqr(dt))*C0-2*dt*(a(0)*dt-2)*D0+2*sqr(dt)*f(0));
    for i:=2 to nt-1 do
                    y[i+1]:=1/(2+a(t[i])*dt)*((4-2*b(t[i])*sqr(dt))*y[i]+
                    (a(t[i])*dt-2)*y[i-1]+2*sqr(dt)*f(t[i]));
    for i:=1 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'  y=',y[i]:8:7);
  end.
```

5.6. Oddiy progonka usuli

Differentsial tenglamalarni taqribiy yechishning yana bir usuli bilan tanishib chiqaylik.

$x \in [a;b]$ oraliqda

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + q(x)y(x) = r(x) \qquad (5.29)$$

differentsial tenglamaning

$$\begin{cases} a_0 y(a) + a_1 \dfrac{dy(b)}{dx} = a_2 \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 \dfrac{dy(b)}{dx} = \beta_2 \end{cases} \qquad (5.30)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin. Bu yerda $q(x)$, $r(x)$ - $[a;b]$ oraliqda berilgan uzluksiz funktsiyalar bo'lib, a_i, β_i $(i = 0,1)$ -lar $a_0^2 + \alpha_1^2 = 0$ va $\beta_0^2 + \beta_1^2 = 0$ shartlarni qanoatlantirsin.

Teorema. Agar $q(x)$, $r(x)$ funktsiyalar $[a;b]$ oraliqda ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi va $q(x) \le 0$ bo'lsa, (5.29), (5.30) chegaraviy masala yagona $y(x)$ yechimga ega bo'ladi.

$[a;b]$ oraliqni $x_i = a + i \cdot h$ $(0 \le i \le m, h = (b - am)/m)$ nuqtalar bilan to'r(setka)ga ajratib, $y_i = y(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $r_i = r(x_i)$ belgilashlarni kiritamiz. Ichki x_i $(1 \le i \le m-1)$ nuqtalar uchun chekli ayirmalardan foydalanib, $O(h^2)$ aniqlikda (5.29) tenglamani

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+q_i y_i=r_i \qquad (5.31)$$

va (5.30) chegaraviy shartlarni esa

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0+\dfrac{\alpha_1}{2h}(-y_2+4y_1-3y_0)=\alpha_2 \\ \beta_0 y_m+\dfrac{\beta_1}{2h}(3y_m-4y_{m-1}+y_{m-2})=\beta_2 \end{cases} \qquad (5.32)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(5.31) da $y_2=r_1h^2-q_1h^2y_1+2y_1-y_0$ ekanligini hisobga olib, uni (5.32) ga qo'yamiz va

$$\alpha_0 y_0+\frac{\alpha_1}{2h}(-r_1h^2+q_1h^2y_1-2y_1+y_0+4y_1-3y_0)=\alpha_2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni y_0 ga nisbatan yechib

$$y_0=E_1y_1+D_1$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda $E_1=\dfrac{2\alpha_1+\alpha_1q_1h^2}{2\alpha_1-2\alpha_0h}$, $D_1=-\dfrac{2\alpha_2h+\alpha_1r_1h^2}{2\alpha_1-2\alpha_0h}$.

Xuddi shunga o'xshash (5.31) da $y_{m-2}=r_{m-1}h^2-q_{m-1}h^2y_{m-1}+2y_{m-1}-y_m$ ekan-ligini hisobga olib va uni (5.32) ga qo'yasak

$$\beta_0 y_m+\frac{\beta_1}{2h}(3y_m 4y_{m-1}+r_{m-1}h^2-q_{m-1}h^2y_{m-1}+2y_{m-1}-y_m)=\beta_2$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglikni y_m ga nisbatan yechib

$$y_m=Qy_{m-1}+S \qquad (5.33)$$

ga ega bo'lamiz. Bu yerda

$$Q=\frac{2\beta_1+\beta_1q_{m-1}h^2}{2\beta_1+2\beta_0h}, \quad S=\frac{h(2\beta_2-\beta_1r_{m-1}h)}{2\beta_1+2\beta_0h}.$$

(5.31) va (5.32) birgalikda $y_0, y_1, \dots, y_m$– noma'lumlarni o'z ichiga olgan $(m+1)$ ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

$$Ay=b,$$

ni tashkil etadi. Bu sistemani Gauss, Kramer koidasi, teskari matritsa usullari yordamida yechish yaxshi samara bermaydi. Shu sababli bu sistemani yechish uchun oddiy progonka usulidan foydalanamiz.

Umumiy

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = r_i \ , \ (1 \le i \le m-1) \qquad (5.34)$$

ko'rinishdagi uchdiagonalli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. Bu yerda $A_i,\ B_i,\ C_i$ lar i ga bog'liq o'zgarmaslar.

(5.34) ning yechimini

$$y_i = E_{i+1} y_{i+1} + D_{i+1},\ (0 \le i \le m-1) \qquad (5.35)$$

ko'rinishda ifodalaymiz. Bu yerda $E_1,\ D_1$ - lar ma'lum, $E_i,\ D_i \quad (i = 2,3,\ldots,m\text{-}1)$ - lar esa hozircha noma'lum koeffitsiyentlar.

(5.35) da i ni $i-1$ ga almashtirib, $y_{i-1} = E_i y_i + D_i$ ga ega bo'lamiz va y_i o'rniga uning (5.35) dagi ifodasini olib kelib qo'yamiz. Natijada

$$y_{i-1} = E_i y_i + D_i = E_i (E_{i+1} y_{i+1} + D_{i+1}) + D_1 = E_i E_{i+1} y_{i+1} + E_i D_{i+1} + D_i\ , \qquad (5.36)$$
$$(1 \le i \le m-1)$$

tenglikni hosil qilamiz. (5.35), (5.36) larni (5.34) ga olib borib quyib,

$$A_i E_i E_{i+1} y_{i+1} + A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i E_{i+1} y_{i+1} - C_i D_{i+1} + B_i y_{i+1} - r_i = 0$$
$$(1 \le i \le m-1)$$

tenglikga ega bo'lamiz. Bu tenglikda y_{i+1} oldidagi koeffitsiyentlarni hamda ozod hadlarni nolga tenglashtirib,

$$A_i E_i E_{i+1} - C_i E_{i+1} + B_i = 0$$

$$A_i E_i D_{i+1} + A_i D_i - C_i D_{i+1} - r_i = 0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bu yerdan $E_i,\ D_i$ larni hisoblash uchun

$$\begin{cases} E_{i+1} = \dfrac{B_i}{C_i - A_i E_i}\,, \\[2ex] D_{i+1} = \dfrac{A_i D_i - r_i}{C_i - A_i E_i}\,, \quad 1 \le i \le m\text{-}1 \end{cases} \qquad (5.37)$$

formulalarga ega bo'lamiz. (5.37) to'g'ri progonka formulasi deb ataladi va u E_1, D_1 lar qiymatlari orqali $E_k, D_k, \ (k=2,3, \ldots, m)$ larning qiymatlarini hisoblash imkonini beradi.

E_m, D_m larning qiymatlarini aniqlab, ularni (5.33) ga qo'ysak, natijada

$$y_m = Q(E_m y_m + D_m) + S$$

yoki

$$y_m = \frac{QD_m + S}{1 - QE_m}$$

ga ega bo'lamiz. y_m ni bilgan holda, (5.35) formula yordamida $y_k, \ (k = m-1, \ m\text{-}2, \ \ldots 0)$ larning qiymatlarini hisoblaymiz. Bu amal teskari progonka deb ataladi.

Teorema (progonka usulining turg'unligi haqida). Agar $A_i > 0$, $B_i > 0, C_i \ge A_i + B_i, \ 1 \le i \le m\text{-}1; \ 0 \le E_1 < 1, \ 0 \le Q < 1$ shartlar bajarilsa progonka usuli turg'un bo'ladi.

Differentsial tenglamalarni progonka usulida yechish uchun Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program progonka;
const   a1=0; b1=1; m=10; h=(b1-a1)/m;
        alfa0=0.5; alfa1=0.5; alfa2=1.0;
        betta0=-3.0; betta1=2.0; betta2=-3.0;
type vektor=array[0..m] of real;
var
   x,y,a,b,c,r,d,e:vektor;
   i:integer;
   q,s,g1,g2:real;
function fq(t:real):real;
begin
    fq:=2-t       { q(x) funktsiyasining berilishi}
end;
```

```
function fr(t:real):real;
begin
    fr:=-sqr(sqr(t))/3+2*t*sqr(t)/3-sqr(t)+3*t+2   {r(x) funktsiyasining berilishi}
end;
begin
for i:=0 to m do begin
                    x[i]:=a1+i*h; a[i]:=1.0; b[i]:=1.0;
                    c[i]:=2-fq(x[i])*sqr(h);  r[i]:=fr(x[i])*sqr(h)
                end;
g1:=2*(alfa1-alfa0*h);  e[1]:=alfa1*(2+fq(x[1])*sqr(h))/g1;
d[1]:=-h*(2*alfa2+alfa1*fr(x[1])*h)/g1;
for i:=1 to m-1 do begin
                    e[i+1]:=b[i]/(c[i]-a[i]*e[i]); d[i+1]:=(a[i]*d[i]-r[i])/(c[i]-
a[i]*e[i]);
                  end;
g2:=2*(betta1+betta0*h);    q:=betta1*(2+fq(x[m-1])*sqr(h))/g2;
s:=(2*h*betta2-betta1*fr(x[m-1])*sqr(h))/g2;
y[m]:=(q*d[m]+s)/(1-q*e[m]);
for i:=m-1 downto 0 do y[i]:=e[i+1]*y[i+1]+d[i+1];
for i:=0 to m do writeln('y[',i:1,']=',y[i]:6:4);
end.
```

Misol. Berilgan dastur yordamida, ushbu

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}+(2-x)\cdot y(x)=-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^3}{3}-x^2+3x+2$$

differentsial tenglamaning

$$\begin{cases} 0{,}5y(0)+0{,}5\dfrac{dy(0)}{dx}=1 \\ -3y(1)+2\dfrac{dy(1)}{dx}=-3 \end{cases}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini aniqlang.

Tekshirib ko'rish mumkinki, berilgan chegaraviy masala aniq $y(x)=\frac{x^3}{3}+x+1$ yechimga ega. Quyidagi jadvalda qaralayotgan masalaning turli x larga mos keluvchi taqribiy va aniq yechimlar qiymatlari keltirilgan.

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Taq. yechim	0,986	1,089	1,193	1,302	1,417	1,540	1,673	1,819	1,978	2,153	2,345
Aniq yechim	1,000	1,100	1,203	1,309	1,421	1,542	1,672	1,814	1,971	2,143	2,333

5.7. Kvadratura formulasi usuli

Boshlang'ich shartli differentsial tenglama (Koshi masalasi)ni taqribiy yechish usullaridan biri kvadratura formulasi(integralni chekli yig'indi bilan almashtirish)dan foydalanishga asoslangan usuldir. Bu usul algoritmini quyidagi Koshi masalasini yechishda qarab chiqamiz.

[0,t] oraliqda

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+p\frac{dy(t)}{dt}+qy(t)=f(t) \tag{5.38}$$

tenglamaning

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=y_1 \tag{5.39}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish talab qilinsin. Bu yerda p, q, y_0, y_1 lar o'zgarmaslar; $f(t)$ – berilgan funktsiya.

(5.38) tenglamani 0 dan t gacha ikki marta integrallab va (5.39) boshlang'ich shartlarni xisobga olsak,

$$\begin{gathered} y(t)-y_0-y_1\cdot t-p\left(\int_0^t y(s)ds-y_0\cdot t\right)+ \\ +q\int_0^t(t-s)y(s)ds=\int_0^t(t-s)f(s)ds \end{gathered} \tag{5.40}$$

tenglikni hosil qilamiz.

(5.40) ni quyidagi

$$y(t)-p\int_0^2 y(s)ds = y_0 + y_1\cdot t - p\cdot y_0\cdot t - \\ -q\int_0^2 (t-s)y(s)ds + \int_0^t (t-s)f(s)ds \qquad (5.41)$$

ko'rinishda yozib olamiz.

(5.41) da $t = t_n = n\Delta t,\ (n=1,2,3,\ldots)$ deb, integrallarni trapetsiya formulasiga almashtiramiz va

$$y_n - pA_n y_n = y_0 + y_1\cdot t_n - p\cdot y_0\cdot t_n + p\sum_{i=0}^{n-1} A_i y_i - \\ -q\sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)y_i + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)f(t_i) \qquad (5.42)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda

$y_i = y(t_i),\ (i=\overline{0,n-1});\ A_0 = A_n = \dfrac{\Delta t}{2};\ A_j = \Delta t,\ (j=\overline{1,n-1});\ \Delta t - t$ bo'yicha qadam.

(5.42) tenglikdan

$$y_n = \frac{2}{2-p\Delta t}\Big[y0 + y1\cdot t_n - p\cdot y0\cdot t_n + p\sum_{i=0}^{n-1} A_i y_i - \\ -q\sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)y_i + \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t_n - t_i)f(t_i)\Big] \qquad (5.43)$$

formulaga ega bo'lamiz.

(5.43) ixtiyoriy $n = 1,2,3,\ldots$ lar uchun y_n ni topishga rekkurent formula, ya'ni oldingi t_i no'qtalarda berilgan y_i lar orqali keyingi no'qtalardagi y_{i+1} larni topish formulasi bo'ladi.

Koshi masalasini kvadratura formulasi usulida yechishga tuzilgan dastur matni:

```
program kvadratura; uses crt;
const p=1; q=-2; y0=2; y1=1; dt=0.05; nt=21;
type mas=array[0..nt] of real;
var   i:integer;     t,a,y:mas; s1,s2,s3,s4:real;
function f(x:real):real;
```

```
begin
   f:=-2*x*x-1      { f(t) – funktsiyasining ko'rinishi}
end;
begin clrscr;
      for i:=0 to nt do begin a[i]:=dt; t[i]:=i*dt end;
      a[0]:=dt/2; y[0]:=y0; s1:=0; s2:=0; s3:=0; s4:=0;
      for i:=1 to nt do begin
            s1:=s1+a[i-1]*y[i-1];       s2:=s2+a[i-1]*t[i-1]*y[i-1];
            s3:=s3+a[i-1]*f(t[i-1]);    s4:=s4+a[i-1]*t[i-1]*f(t[i-1]);
            y[i]:=2*(y0+y1*t[i]+p*y0*t[i]-
           p*s1-q*t[i]*s1+q*s2+t[i]*s3-s4)/(2+p*dt);
                  end;
      for i:=0 to nt do writeln('t=',t[i]:4:2,'    y=',y[i]:10:5);
 end.
```

Misol: Berilgan dasturdan foydalanib, ushbu

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)=-2t^2-1$$

differentsial tenglamaning

$$y(0)=2,\ \ y'(0)=1$$

shartlarni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini aniqlang.

Tekshirib ko'rish mumkinki, berilgan masala aniq $y(t)=t^2+t+2$ yechimga ega. Quyidagi jadvalda berilgan masalaning aniq va taqribiy yechimlari($\Delta t=0.01$ va $\Delta t=0.05$ hollar uchun) t ning bir necha qiymatlari uchun keltirilgan.

t	Aniq yechim	Taqribiy yechim($\Delta t=0.01$)	Taqribiy yechim($\Delta t=0.05$)
0.1	2.11	2.11000	2.10988
0.2	2.24	2.23999	2.23977
0.4	2.56	2.55998	2.55957

0.6	2.96	2.95997	2.95937
0.8	3.44	3.43997	3.43916
1.0	4.00	3.99996	3.99892

5.8. Differentsial progonka usuli

Ma'lumki, ko'pgina injenerlik masalalarni yechish, o'zgaruvchan koeffitsiyentli differentsial tenglamaning har xil chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishga keltiriladi. Chegaraviy masalalarni yechish, boshlang'ich shartli masalani yechishga nisbatan ancha murakkabroq. Chunki chegaraviy masalalarni berilgan aniqlikda taqribiy yechish algoritmlarini qurish har doim ham mumkin bo'lavermaydi. Boshlang'ich shartli masalalarni esa berilgan aniqlikda yechish uchun qator algoritmlar ishlab chiqilgan bo'lib, ular standart dasturlar ko'rinishida ifodalangan. Shu sababli berilgan chegaraviy masalalar yechishni boshlang'ich shartli masalalarni yechishga keltirish eng qulay usullardan biridir. Differentsial progonka usuli yordamida chegaraviy masalani yechish, unga teng kuchli bo'lgan boshlang'ish shartli masalalarni yechishga keltiriladi. Bu usulning yana bir qulaylik tomoni shundan iboratki, Koshi masalasini berilgan aniqlikda yechish uchun har bir algoritmik til o'zining standart dasturlariga ega.

Differentsial progonka usuli algoritmi bilan quyidagi berilgan misolda tanishib chiqaylik. Ushbu

$$y''(x)+A(x)y'(x)+B(x)y(x)=F(x) \tag{5.44}$$

differentsial tenglamaning

$$\begin{cases} a_{11}y'(0)+a_{12}y(0)=b_1 \\ a_{21}y'(1)+a_{22}y(1)=b_2 \end{cases} \tag{5.45}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. Bu yerda $a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22},\ b_1,\ b_2$ – o'zgarmaslar; $A(x),\ B(x),\ F(x)$ – $[0,1]$ oraliqda berilgan uzluksiz funktsiyalar. $y(x)$ – noma'lum funktsiya.

Differentsial progonka usuliga ko'ra (5.44), (5.45) chegaraviy masala yechimini

$$\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)=\gamma(x) \qquad (5.46)$$

ko’rinishda tasvirlaymiz. Bu yerdagi $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ lar hozircha noma’lum funktsiyalar.

(5.46) ni (5.44) ga olib borib qo’yamiz va $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$ larga nisbatan quyidagi

$$\begin{cases} \alpha'(x)=\alpha(x)A(x)-\beta(x) \\ \beta'(x)=\alpha(x)B(x) \\ \gamma'(x)=-\alpha(x)F(x) \end{cases} \qquad (5.47)$$

birinchi tartibli differentsial tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

$$a_{11}y'(0)+a_{12}y(0)=b_1 \text{ va } \alpha(0)y'(0)+\beta(0)y(0)=\gamma(0)$$

shartlardan

$$\alpha(0)=a_{11}, \quad \beta(0)=a_{12}, \quad \gamma(0)=b_1 \qquad (5.48)$$

larga ega bo’lamiz.

(5.47), (5.48) Koshi masalasini $[0,1]$ oraliqda yechib, $\alpha(1)$, $\beta(1)$, $\gamma(1)$ larni aniqlaymiz. Odatda bu usul to’g’ri progonka usuli deb ataladi.

$$a_{21}y'(1)+a_{22}y(1)=b_2 \text{ va } \alpha(1)y'(1)+\beta(1)y(1)=\gamma(1)$$

shartlardan

$$y(1)=\frac{b_2\alpha(1)-a_{21}\gamma(1)}{a_{22}\alpha(1)-a_{21}\beta(1)}, \quad y'(1)=\frac{b_2\beta(1)-a_{22}\gamma(1)}{a_{21}\beta(1)-a_{22}\alpha(1)} \qquad (5.49)$$

larga ega bo’lamiz.

(5.44), (5.49) Koshi masalasini $[1,0]$ oraliqda yechib, $y(x)$ funktsiyasining sonli qiymatlarini hosil qilamiz. Bu usul teskari progonka usuli deyiladi.

Differentsial progonka usulining aniqligi unga teng kuchli bo’lgan Koshi masalalarini yechish aniqligi kabi bo’ladi. Agar Koshi masalasi yechimi to’rtinchi tartibli Runge-Kutta usuli yordamida topilgan bo’lsa, differentsial progonka usulining aniqligi ham to’rtinchi tartibga ega bo’ladi. Bu esa chegaraviy masalaning yechimi yuqori aniqlikda topilganligini anglatadi.

Chegaraviy masalalarni differentsial progonka usulida yechishga Paskal tilida tuzilgan dastur matni:

```
program difprogon; uses crt;
const  a11=1; a12=1; a21=1; a22=-1; b1=0; b2=2;
          ndx=11; dx=0.1;
type vek=array[1..ndx] of real;
type vek1=array[1..2] of real;
type vek2=array[1..3] of real;
var
     y0,y,yt: vek1; alf0,alf: vek2; px: vek; zlx,h:real;
     i,nx:integer;
function fa(z: real): real;
begin
         fa:=z+1; { A(x)-funktsiyasining ko'rinishi}
end;
function fb(z: real): real;
begin
        fb:=z+3;  { B(x)-funktsiyasining ko'rinishi}
end;
function ff(z: real): real;
begin
         ff:=z*z*z*z+7*z*z*z+7*z*z+5*z+4;   { F(x)-funktsiyasining
ko'rinishi }
end;
procedure pv(x: real; y: vek2; var dy: vek2);
begin
         dy[1]:=fa(x)*y[1]-y[2];
          dy[2]:=y[1]*fb(x);
          dy[3]:=y[1]*ff(x)
end;

procedure rungikytta1(x: real; y0: vek2; var dy: vek2);
```

```
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek2;
begin
    pv(x,y0,fc);
    for i:=1 to 3 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
    v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i] end;
    x:=x+0.5*h;
   pv(x,v3,fc);
   for i:=1 to 3 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
   v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i] end;
   pv(x,v3,fc);
   for i:=1 to 3 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
   v3[i]:=y0[i]+fk3[i] end;
   x:=x+0.5*h;
   pv(x,v3,fc);
   for i:=1 to 3 do begin fk4[i]:=h*fc[i];
  dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i]) end;
end;
procedure pv1(x: real; y: vek1; var dy: vek1);
begin
    dy[1]:=y[2];
    dy[2]:=-y[2]*fa(x)-y[1]*fb(x)+ff(x);
end;
procedure rungikytta2(x: real; y0: vek1; var dy: vek1);
var v3,fc,fk1,fk2,fk3,fk4: vek1;
begin
    pv1(x,y0,fc);
    for i:=1 to 2 do begin fk1[i]:=h*fc[i];
                          v3[i]:=y0[i]+0.5*fk1[i]
                 end;
    x:=x+0.5*h;  pv1(x,v3,fc);
```

```
for i:=1 to 2 do begin fk2[i]:=h*fc[i];
                       v3[i]:=y0[i]+0.5*fk2[i]
                   end;
pv1(x,v3,fc);
for i:=1 to 2 do begin fk3[i]:=h*fc[i];
                       v3[i]:=y0[i]+fk3[i]
                   end;
x:=x+0.5*h;  pv1(x,v3,fc);
for i:=1 to 2 do begin fk4[i]:=h*fc[i];

dy[i]:=y0[i]+0.166666667*(fk1[i]+2*fk2[i]+2*fk3[i]+fk4[i])
                   end;
end;
begin clrscr;
for i:=1 to ndx do px[i]:=(i-1)*dx;
alf0[1]:=a11; alf0[2]:=a12; alf0[3]:=b1;
for nx:=2 to ndx do begin zlx:=px[nx-1]; h:=dx;
                       rungikytta1(zlx,alf0,alf);
                       for i:=1 to 3 do alf0[i]:=alf[i];
                   end;
y0[1]:=(b2*alf[1]-a21*alf[3])/(a22*alf[1]-a21*alf[2]);
y0[2]:=(b2*alf[2]-a22*alf[3])/(a21*alf[2]-a22*alf[1]);
writeln('x=',px[ndx]:4:2,'  yy===',y0[1]:7:4);
for nx:=ndx downto 2 do begin  zlx:=px[nx]; h:=-dx;
                          rungikytta2(zlx,y0,y);
                          writeln('x=',(zlx+h):4:2,'  yy=',y[1]:7:4);
                          for i:=1 to 2 do y0[i]:=y[i];
                      end;
end.
```

Misol: Berilgan dastur yordamida, ushbu

$$y''(x)+(x+1)y'(x)+(x+3)y(x)=x^4+7x^3+7x^2+5x+4 \qquad (5.50)$$

differentsial tenglamaning

$$\begin{cases} y'(0)+y(0)=0 \\ y'(1)-y(1)=2 \end{cases} \qquad (5.51)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini aniqlang.

Tekshirib ko’rish mumkinki, berilgan chegaraviy masala aniq

$$y(x)=x^3+x^2-x+1$$

yechimga ega. Quyidagi jadvalda (5.50), (5.51) chegaraviy masalaning aniq va differentsial progonka usuli yordamida aniqlangan taqribiy yechimlari keltirilgan. Jadvaldan ko’rinib turibdiki, differentsial progonka usuli yuqori aniqlikga ega bo’lishi bilan birga, u chegaraviy shartlarni aniq hisobga oladi.

x	Aniq yechim	Taqribiy yechim
0.0	1.000000	1.000121
0.1	0.911000	0.911107
0.2	0.848000	0.848091
0.3	0.817000	0.817073
0.4	0.824000	0.824054
0.5	0.875000	0.875035
0.6	0.976000	0.976015
0.7	1.133000	1.132997
0.8	1.352000	1.351980
0.9	1.639000	1.638965
1.0	2.000000	2.000000

5.9. Bubnov-Galyorkin usuli

Chegaraviy masalalarni sonli-analitik yechish usullaridan biri Bubnov-Galyorkin usulidir. Bu usul chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi koordinat funktsiyalarini tanlashga asoslangan. Bubnov-Galyorkin usuli algoritmini quyidagi chegaraviy masalani yechishda ko'rib chiqaylik.

$$y^{IV} + Ay = F(x) \tag{5.52}$$

tenglamani

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0 \tag{5.53}$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin. Bu yerda A - o'zgarmas; $F(x)$ - $[0,1]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz funktsiya.

Bubnov-Galyorkin usuliga ko'ra (5.52), (5.53) chegaraviy masalaning yechimini

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\pi x \tag{5.54}$$

ko'rinishda qidiramiz. Bu yerda a_n lar hozircha noma'lum o'zgarmas koef-fitsiyentlar.

(5.54) ni (5.52) ga olib borib qo'yamiz va

$$\sum_{n=1}^{N} a_n (n\pi)^4 \sin n\pi x + A\sum_{n=1}^{N} a_n \sin n\pi x = F(x) \tag{5.55}$$

tenglikni hosil qilamiz.

(5.55) tenglikning ikkala tomonini $\sin m\pi x$, $m = 1,2,3,...$ larga ketma-ket ko'paytirib, uni $[0,1]$ oraliqda x bo'yicha integrallaymiz. Agar

$$\int_0^1 \sin px \sin qx dx = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{агар} \quad p = q \\ 0 & \text{агар} \quad p \neq q \end{cases}$$

ekanligini hisobga olsak, natijada

$$a_m (m\pi)^4 + Aa_m = f_m$$

yoki

$$a_m = \frac{f_m}{(m\pi)^4 + A}, \quad m = 1,2,3,\ldots,N \tag{5.56}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $f_m = 2\int_0^1 F(x)\sin m\pi x dx$.

Topilgan a_m larni (5.54) ga olib borib qo'yamiz va noma'lum $y(x)$ funktsiyani aniqlash uchun

$$y(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{f_n \sin n\pi x}{(n\pi)^4 + A} \tag{5.57}$$

formulaga ega bo'lamiz.

Bubnov-Galyorkin usulining aniqligi (5.57) formuladagi yig'indilar soniga va tanlangan koordinat funktsiyasiga bog'liq bo'ladi.

5.10. Fur'e usuli

Bu usul algoritmini uzunligi l ga teng bo'lgan ikki uchi mahkamlangan torning erkin tebranishi masalasida ko'rib chiqaylik. Ma'lumki, bu masalani yechish

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{5.58}$$

tenglamaning

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x), \quad \left.\frac{\partial u}{dt}\right|_{t=0} = F(x) \tag{5.59}$$

boshlang'ich va

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)\big|_{x=l} = 0 \tag{5.60}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishga keltiriladi.

Fur'e usuli matematik fizika tenglamalarini yechish usuli bo'lib, odatda o'zgaruvchilarni ajratish usuli ham deb ataladi. Bu usul ikki qismdan iborat bo'lib, birinchi qismda (5.58) tenglamaning (5.60) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi yechimini topishdan iborat.

Fur'e usuliga ko'ra yechimni

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{5.61}$$

ko'rinishda qidiriramiz.

(5.61) ni ikki marta x va t lar bo'yicha differentsiallab $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$ va $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = X(x)T''(t)$ tengliklarni hosil qilamiz va ularni (5.58) ga qo'yib,

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

yoki

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \tag{5.62}$$

ga ega bo'lamiz.

(5.62) ning chap qismi faqat t ga, o'ng qismi esa faqat x o'zgaruvchiga bog'liq. Agar (5.62) da t ni o'zgarmas, ya'ni tenglikning chap qismi o'zgarmas deb, x ni ixtiyoriy ravishda o'zgartirsak, uning o'ng qismi ham o'zgarmas bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash (5.62) da x ni o'zgarmas, ya'ni tenglikning o'ng qismi o'zgarmas deb, t ni ixtiyoriy ravishda o'zgartirsak, tenglikning chap qismi ham o'zgarmasdan qoladi. Bu esa $\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$ va $\frac{X''(x)}{X(x)}$ larning bir xil o'zgarmas kattalikga tengligini bildiradi, ya'ni

$$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c = const \tag{5.63}$$

Bu yerdan $T(t)$ va $X(x)$ funktsiyalar mos ravishda

$$X''(x) - cX(x) = 0\ , \quad T''(t) - ca^2T(t) = 0 \tag{5.64}$$

differentsial tenglamalarning yechimi ekanligi kelib chiqadi.

Agar (5.60) chegaraviy shartlarni hisobga olsak

$$u(x,t)\big|_{x=0} = X(0)T(t) = 0$$

$$u(x,t)\big|_{x=l} = X(l)T(t) = 0$$

tengliklar ixtiyoriy t lar uchun o'rinli bo'ladi. Bu esa

$$X(0) = 0\ ,\ \ X(l) = 0$$

bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Natijada $X(x)$ funktsiyani topish uchun

$$X^{//}(x) - cX(x) = 0 \tag{5.65}$$

$$X(0) = X(l) = 0 \tag{5.66}$$

chegaraviy masalaga ega bo'lamiz.

(5.65), (5.66) chegaraviy masala bir qarashda $X(x) \equiv 0$ trivial yechimga egadek ko'rinadi, lekin bizdan masalaning 0 dan farqli yechimini topish talab etiladi. c ning shunday qiymatini tanlaylikki, qaralayotgan masala 0 dan farqli yechimga ega bo'lsin. Buning uchun (5.65) da $X(x) = e^{rx}$ deb olib $r^2 - c = 0$ xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Bu xarakteristik tenglama uchun quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1) $c = \lambda^2 > 0$ bo'lsin, u holda $r = \pm\lambda$ bo'lib,

$$X(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x}$$

yechimga ega bo'lamiz. (5.66) shartdan foydalansak, C_1 va C_2 lar uchun

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 e^{\lambda l} + C_2 e^{-\lambda l} = 0 \end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemaning asosiy determenanti 0 dan farqli. Haqiqatdan

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda t} & e^{-\lambda\lambda} \end{vmatrix} = e^{-\lambda t} - e^{\lambda t} \neq 0 .$$

Bu yerdan esa $C_1 = C_2 = 0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni bu holda $X(x) \equiv 0$ trivial yechimga ega bo'lamiz.

2) $c = 0$ bo'lsin, u holda xarakteristik tenglamaning ikkala yechimi ham 0 ga teng bo'lib, (5.65), (5.66) chegaraviy masalaning yechimi

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

ko'rinishda bo'ladi. Agar (5.66) shartdan foydalansak $C_1 = C_2 = 0$ ekanligi kelib chiqadi va yana $X(x) \equiv 0$ trivial yechimga ega bo'lamiz.

3) $c = -\lambda^2 < 0$ bo'lsin, u holda $r = \pm i\lambda$ bo'lib,

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$$

yechimga ega bo'lamiz. (5.66) shartdan foydalansak, $C_1 = 0$ va $C_2 \sin\lambda l = 0$ tengliklarga ega bo'lamiz. $C_2 \neq 0$, ya'ni $X(x) \neq 0$ bo'lishi uchun $\sin\lambda l = 0$ yoki $\lambda = \frac{k\pi}{l}$ $(k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, $\lambda = \frac{k\pi}{l}$, ya'ni $c = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ bo'lsa, (5.65), (5.66) chegaraviy masala 0 dan farqli yechimga ega bo'ladi.

Agar har bir k uchun (5.65) ning yechimini $X_k(x)$ deb belgilasak, u holda

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5.67}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yerda A_k lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Keyinchalik $k = 1, 2, 3, \ldots$ deb olamiz, chunki A_k larning ixtiyoriyligidan $k = -1, -2, -3, \ldots$ larda hosil bo'ladigan yechimlarni ham keltirib chiqarish mumkin bo'ladi.

Har bir $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ uchun (5.67) ning faqat o'zgarmas ko'paytuvchilarga farq qiladigan cheksiz ko'p yechimini hosil qilamiz.

$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ va $\sin\frac{k\pi x}{l}$ lar mos ravishda (5.65), (5.66) chegaraviy masalaning xos sonlari va xos funktsiyalari deb ataladi.

λ_k ga (5.64) ning ikkinchi tenglamasini qanoatlantiruvchi $T_k(t)$ funktsiya mos keladi va u

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0$$

tenglamaning umumiy yechimi sifatida

$$T_k(t) = B_k \cos\frac{k\pi a t}{l} + D_k \sin\frac{k\pi a t}{l} \tag{5.68}$$

ko'rinishida aniqlanadi. Bu yerda B_k va D_k lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

(5.67) va (5.68) ni (5.61) ga qo'yib, (5.58) tenglamaning (5.60) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi

$$u_k(x,t)=\left(B_k\cos\frac{k\pi at}{l}+D_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)A_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda $a_k=A_kB_k$ va $b_k=A_kD_k$ kabi belgilashlar kiritib, uni

$$u_k(x,t)=\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5.69}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

$u_k(x,t)$ yechim torning erkin tebranishi masalasiga mos keluvchi xos funktsiyalar deb ataladi.

Teorema. Agar $u_k(x,t)$ funktsiyalar (5.58) tenglamaning bir jinsli (5.60) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi bo'lsa, $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x.t)$ funktsiya ham (5.58) tenglamaning (5.60) shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo'ladi.

Fur'e usulining ikkinchi qismi, xos funktsiyalar asosida (5.59) shartni qano-atlantiruvchi yechimni topishdan iborat. (5.69) ni (5.58) ga qo'yib, ularni yig'ib chiqamiz:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \tag{5.70}$$

Har bir k lar uchun $u_k(x,t)$ funktsiya (5.60) chegaraviy shartni qanoat-lantirganligi sababli, $u(x,t)$ funktsiya uchun ham bu shart bajariladi.

Endi a_k va b_k koeffitsiyentlarni shunday tanlaylikki, (5.70) yechim (5.59) boshlang'ich shartni qanoatlantirsin.

(5.70) da $t=0$ deb,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi x}{l}=f(x) \tag{5.71}$$

ga ega bo'lamiz.

(5.71) ni t bo'yicha differentsiallab, $t=0$ desak

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}=F(x) \tag{5.72}$$

tenglikga ega bo'lamiz.

(5.71) va (5.72) larni $sin\frac{n\pi x}{l}$ $(n=1,2,3,...)$ larga ko'paytirib, $[a,b]$ oraliqda integrallaymiz. Agar

$$\int_0^l sin\frac{k\pi x}{l}sin\frac{n\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & \text{агар } k\neq n\\ \frac{1}{2}, & \text{агар } k=n\end{cases}$$

ekanligini hisobga olsak, a_k va b_k koeffitsiyentlar uchun

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

formulalarga ega bo'lamiz. Bu koeffitsiyentlarni (5.70) ga qo'yib,

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{k\pi x}{l}dx\,cos\frac{k\pi at}{l}+\frac{2}{k\pi a}\int_0^l F(x)sin\frac{k\pi x}{l}dx\,sin\frac{k\pi at}{l}\right)sin\frac{k\pi x}{l}$$

(5.58) - (5.60) masalaning yechimini hosil qilamiz.

Misol. (5.58)-(5.60) boshlang'ich shartli chegaraviy masalani $f(x)=1+x^2$ va $F(x)=0$ bo'lgan hollar uchun yeching.

Yechish. a_k va b_k koeffitsiyentlarni aniqlaylik:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l(1+x^2)sin\frac{k\pi x}{l}dx=$$

$$=\frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k\cdot\left(\frac{2l^2}{k^2\pi^2}-1-l^2\right)-\frac{2l^2}{k^2\pi^2}+1\right],\ b_k=0.$$

Bu qiymatlarni (5.70) ga qo'yib,

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left[(-1)^k\cdot\left(\frac{2l^2}{k^2\pi^2}-1-l^2\right)-\frac{2l^2}{k^2\pi^2}+1\right]cos\frac{k\pi at}{l}sin\frac{k\pi x}{l}$$

berilgan masalaning yechimiga ega bo'lamiz.

Tayanch so'z va iboralar. Differentsial tenglama, Koshi masalasi, chegaraviy masala, operatsion hisob, tasvir funktsiya, original funktsiya, sonli differentsiallash, Eyler usuli, Runge-Kutta usuli, ketma-ket yaqinlashish usuli, kvadratura formula usuli, oddiy progonka usuli, teskari progonka usuli, differentsial progonka usuli, Bubnov-Galyorkin usuli, Fur’e usuli.

Savollar

1. Differentsial tenglamaga ta’rif bering.
2. Differentsial tenglamaning tartibi qanday aniqlanadi?
3. Differentsial tenglama uchun boshlang’ich shartlar qanday beriladi?
4. Differentsial tenglama uchun chegaraviy shartlar qanday beriladi?
5. Koshi masalasi qanday masala?
6. Boshlang’ich shartli chegaraviy masalalar qanday bo’ladi?
7. Differentsial tenglamani yechishda operatsion hisob usuli?
8. Tasvir funktsiya nima?
9. Qanday funktsiyalar original funktsiyalar deb ataladi?
10. Tasvir funktsiya uchun chiziqlilik xossasi.
11. Tasvir funktsiya uchun siljish xossasi.
12. Tasvir funktsiyani differentsiallash.
13. Sonli differentsiallash nima?
14. Sonli differentsiallashda xatolik qanday aniqlanadi?
15. Differentsial tenglamalarni yechishda Eyler usuli va uning algoritmi?
16. Differentsial tenglamalarni yechishda Runge-Kutta usuli va uning algoritmi?
17. Chekli ayirmalar usuli va uning algoritmi.
18. Oddiy progonka usuli va uning algoritmi.
19. Koshi masalasini yechishda kvadratura formula usuli va uning algoritmi.
20. Differentsial progonka usuli va uning algoritmi.
21. Bubnov-Galyorkin usuli va uning algoritmi.
22. Fur’e usuli va uning algoritmi.

Misol va masalalar

1. Berilgan differentsial tenglamalarni berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini operatsion hisob usuli yordamida aniqlang:

a) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+x(t)+e^{-t}=0,\quad x(0)=0,\quad \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=1;$

b) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}+\dfrac{dx(t)}{dt}+x(t)=\sin t,\quad x(0)=1,\quad \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=2;$

v) $\dfrac{d^3x(t)}{dt^3}+x(t)=0,\ x(0)=1,\quad \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=3,\quad \left.\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=8.$

2. Berilgan tasvir funktsiyalar uchun original funktsiyalarni aniqlang:

a) $X(p)=\dfrac{3}{(p^2+9)(p^2+4)};$ b) $X(p)=\dfrac{p^2+3p+8}{p^3+1};$

v) $X(p)=\dfrac{p^3-p^2+2p+1}{(p^2-1)(p^2-2p+2)}.$

3. Berilgan original funktsiyalar uchun tasvir funktsiyalarni aniqlang:

a) $f(t)=e^{2t}\sin 3t;$ b) $f(t)=4^t+t\cos t;$ v) $f(t)=t^3+te^{-2t}.$

4. $[0;1]$ oraliqda $y'(x)=2x+y-1$ tenglamaning $y(0)=1$ shartni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini $h=0{,}1$ qadam bilan Eyler usuli yordamida aniqlang.

5. $[1;2]$ oraliqda $y'(x)=x+y$ tenglamaning $y(1)=0$ shartni qanoatlantiruvchi taqribiy yechimini $h=0{,}2$ qadam bilan Runge-Kutta usuli yordamida aniqlang.

6. Sonli differentsiallash usulidan foydalanib, $y=2x^2+e^{2x}$ bo'lsa, $y'(2)$ ni hisoblang.

7. $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+xy(x)=x^2$ tenglamaning $y(0)+2y'(0)=1$ va $y(1)-y'(1)=3$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini $x\in[0;1]$, $h=0{,}2$ lar uchun oddiy progonka usulida aniqlang.

8. $\dfrac{d^2y(x)}{dx^2}+2\dfrac{dy(x)}{dx}-3y(x)=5$ tenglamaning $\left.y(x)\right|_{x=0}=0$ va $\left.y(x)\right|_{x=1}=0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Bubnov-Galyorkin usuli yordamida aniqlang.

9. $\frac{d^4 y(x)}{dx^4} + 3y(x) = x$ tenglamaning $y(0) = y^{//}(0) = y(1) = y^{//}(1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Bubnov-Galyorkin usuli yordamida aniqlang.

10. $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ tenglamaning $u\big|_{t=o} = 2$, $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ boshlang'ich va $u\big|_{x=o} = 0$, $u\big|_{x=1} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Fur'e usuli yordamida aniqlang.