O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O’RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

TOSHKENT VILOYATI CHIRCHIQ DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

Informatika kafedrasi

Kompyuterli modellashtirish

FANIDAN

Ma’ruzalar matni

CHIRCHIQ – 2020

E.Kamolov

M.Yusupov

MARUZA MASHG'ULOTLARI

KIRISH

Ta'limni rivojlantirish va uni zamonaviy bosqichga olib chiqish jamiyatni axborotlashtirishning ustuvor yo'nalishlari toifasiga kiritadi. Kasbiy va shaxsiy faoliyati rivojlantirish uchun zarur bo'lgan asosiy bilimlarni egallash muhim ahamiyatga ega. Egallagan bilimlarning konstruktivligi emas, balki ularni koʻzlangan maqsadlarga muvofiq qoʻllash qobiliyati rivojlantirish ham muhimdir. Shu nuqtai nazardan, tizimli tahlil metodologiyasiga asoslangan modelli yondashuv alohida o'rin tutadi.

Modelli yondashuvning xilma xil imkoniyatlari mavjud boʻlib, ulardan bugungi kunda rasmiy modellar va modellashtirish usullari orqali keng foydalanilmoqda. matematik modellar tavsifning qiyinchiliklari tufayli murakkab va katta tizimlarni o'rganish odatda immitatsiya (simulyatsiya) usullari bilan amalga oshiriladi. Zamonaviy axborot kommunikatsiya texnologiyalarining privojlanishi nafaqat modellashtirish tizimlarining imkoniyatlarini kengaytiribgina qolmay, balki ishlab chiqilgan modellarning xilma-xilligini va ularni amalga oshirish usullarini keng qo'llash imkonini beradi. Shu sabablarga ko'ra, kompyuterli modellashtirish bugungi kunda barcha sohalardag tadqiqotlarni avtomatlashtirish, tajriba va tizimlarni loyihalashning ko'plab murakkab muammolarini hal qilish vositasiga aylandi. Shuningdek, har bir mutahassisning ishchi vositasi sifatida ham modellash jarayonini oʻrganish muximdir.

1-§. Model va modellashtirish tushunchalari

"Model" so‘zi lotincha bo‘lib (modulus), o‘lchov, namuna, norma kabi ma’nolarni bildiradi. Model deganda biror ob’ekt yoki ob’ektlar tizimining obrazi yoki namunasi tushuniladi. Modellarni turli xil usullar yordamida hosil qilinadi.

Masalan, biror ob’ektning shaklini - predmetli model (maket) shaklida, informatsion aloqalar -informatsion model, matematik formulalar yordamida aniqlangan funksional bog‘lanishlar-matematik model shaklida ifodalanadi. Yerning modeli deb globusni, osmon va undagi yulduzlar modeli deb planetariy ekranni, har bir odamning modeli sifatida esa pasportidagi suratini olish mumkin.

Modellarning tuzilishi va ishlatilish sohalariga qarab turli xildagi turlarini sanab o‘tish mumkin. Modellarning turlarini tahlil qilish, tasniflash va tizimlashtirishni talab qiladi. Bugungi kunda mavjud moddellarning turlarini tasniflash turli xil usullarda amalga oshiradi. Masalan: R.Shennonning tasnifiga ko‘ra:

- deterministik va stoxastik;
- statik va dinamik;
- diskret, uzluksiz va diskret-uzluksiz;
- aqliy va haqiqiy modellarga bo‘linadi.

Boshqa ishlarda esa modellar quyidagi asoslarga ko'ra tasniflanadi:

- Ob’ektning modellashtirilgan tomonining tabiatiga ko‘ra;
- Vaqtga nisbatan;
- Tizim xolatini ifodalash uslubiga ko‘ra;
- Imitatsiya qilinadigan jarayonlarning tasodifiylik darajasiga ko‘ra;
- Modelni amalga oshirish usullari(yo‘llari)ga ko‘ra.

Shulardan ob’ektning imitatsiya qilinadigan jarayonlarning tabiatiga ko‘ra modellar quyidagi turlarga ajratilgan:

1. Kibernetik yoki funksional modellar- ularda simulyatsiya(imitatsiya) qilingan ob'ekt hisobga olinadi. ichki tuzilishi noma'lum bo'lgan "qora quti" ga

o‘xshash. Bunday "qora quti" ning ishlashini chiqish signallarini bog'laydigan matematik tenglama, grafik yoki jadval bilan tasvirlash mumkin bo‘lgan (reaktsiyalar) kirish (stimuli) qurilmalardir. Ularning tuzilishi va ishlash tamoyillar, xatti-harakatlari o'rganilayotgan ob'ekt bilan hech qanday aloqasi yo'q, lekin shunga o'xshash tarzda ishlaydi. Masalan, kompyuterdagi shashka o'yinini taqdim qiluvchi dastur

2. Tarkibiy modellar- bularning tuzilishi modellashtirishning tuzilishiga mos keladigan modellardir. Bunga misollar sifatida buyruq postlari mashg'ulotlari, o'z-o'zini boshqarish kunlik sxemalari, elektron sxemalar va boshqalar.

3. Axborotli modellar- maxsus tanlangan qiymatlar va ularning o'ziga xos qiymatlari, o'rganilayotgan ob'ektni tavsiflovchi xarakteristkalari, Og'zaki ajratish jadval, grafik va matematik axborot modellaridir. Masalan, talabaning ma'lumot modeli imtihonlar, testlar va laboratoriya ishlari uchun baholardan iborat bo'lishi mumkin. Yoki ba'zi bir ishlab chiqarishning axborot modeli bu ishlab chiqarish ehtiyojlarini, uning eng muhim xususiyatlarini va ishlab chiqarilgan tovarlarning parametrlarini tavsiflovchi axborotlar to'plamidir.

Vaqt taqsimotiga qarab esa modellar:

1. Statik modellar—Vaqt o'tishi bilan holati o'zgarmaydigan modellar: chorak qurilishining sxemasi, avtomobil tanasining modeli.

2. Dinamik modellar- ishlayotgan ob'ektlari doimiy ravishda o'zgarib turadi. Bularga hozirgi dvigatel modellari, generator, kompyuter modeli, jonlantirilgan ishlarning kompyuter modeli va boshqalar kiradi.

Tizimning holatini ifodalash uslubiga ko‘ra quyidagilarga ajratadilar:

1. Diskret modellar avtomatika, ya'ni haqiqiy yoki xayoliy belgilangan signallarga muvofiq kirish signallarini konvertatsiya qiladigan ma'lum bir ichki holatga ega diskret qurilmalar.

2. Doimiy modellar - bu doimiy jarayonlar sodir bo'ladigan modellar. Masalan, analog kompyuterlardan foydalanish, differentsial tenglamani yechish, rezistor orqali zaryadsizlanish orqali radioaktiv parchalanishni modellashtirish va boshqalar kiradi

Simulyatsiya (Imitatsiya) qilingan jarayonning tasodifiylik darajasiga ko‘ra esa:

1. Ko'chib o'tishga moyil bo'lgan aniqlovchi modellar aniq algoritmga muvofiq bir holatdan boshqasiga, ya'ni Ichki holat kirish va chiqish signallari o'rtasida aniq bir yozishma mavjudligi (svetofor modeli)

2. Stoxastik -ehtimollik avtomatikasi kabi ishlaydigan modellar; signal chiqishda va keyingi vaqtning holati matritsa tomonidan o'rnatiladigan ehtimolliklar. Masalan, o'quvchining ehtimoliy modeli, kompyuterning shovqin bilan aloqa kanali orqali xabarlarni yuborish modeli va boshqalar.

Amalga oshirish usuli bo'yicha quyidagi modellarlarga ajratiladi:

1. mavhum modellar, ya'ni faqat bizning tasavvurimizda mavjud bo'lgan aqliy modellar. Masalan, foydalanilishi mumkin bo'lgan algoritmning tuzilishi, blok sxemalar, funktsional boglanishlar, ma'lum bir jarayonni tavsiflovchi differentsial tenglama. Mavhum modellarga ham turli xil grafik modellar, sxemalar, tuzilmalar, shuningdek animatsiyalarga taalluqli bo'lishi mumkin.

2. Moddiy (jismoniy) modellar - bu modellar qo‘zg‘almas yoki xarakalanadigan qurilmalar maketi xisobalanadi. Ularga shar molekulasi modeli, suv osti kemasi modelining xarakatlanishini misola keltirishmumkin. Ob'ektning moddiy modelini qurish va u bilan bir qator tajribalarni amalga oshirishni 'z ichiga oladi. Masalan, suv osti kemasining suvdagi harakatini o'rganish uchun uning kichraytirilgan nusxasi quriladi va oqim gidrodinamik trubadan foydalanib simulyatsiya(immitauiya) qilinadi.

Modellarni tanlash vositalariga qarab ularni uch guruhga ajratish mumkin :abstrakt, fizik va biologik.

Abstrakt (ideal) modellar inson tafakkurining mahsuli bo‘lib, ular tushunchalar, gipotezalar va turli xil qarashlar sistemasidan iborat. Tadqiqotlarda, boshqarish sohalarida asosan abstrakt modellashtirishdan foydalaniladi.   Ilmiy bilishda abstrakt modellar ma’lum tillarga asoslangan belgilar majmuidan iborat. Narsa yoki obektni xayoliy tasavvur qilish orqali formula va chizmalar yordamida o‘rganishda qo‘llaniladigan model abstrakt model hisoblanadi. Abstrakt modelni matematik model deb atasa ham bo‘ladi. Shuning uchun abstrakt model o'z navbatida og'zaki, matematik va kompyuterli modellarga ajratiladi.

og'zaki yoki matnli modellar bilish ob'ektini tavsiflovchi tabiiy yoki rasmiy tilde ifodalangan bayonotlar ketma-ketlikni o'z ichiga oladi

Matematik model deb, o‘rganilayotgan ob’ektni matematik formula yoki algoritm ko‘rinishida ifodalangan xarakteristikalari orasidagi funksional bog‘lanishga aytiladi. *Matematik modellar*-o‘rganilayotgan ob’ekt yoki jarayonlarning asosiy xossalarini matematik formulalar, tenglamalar va tenglamalar sistemasi, tengsizliklar va tengsizliklar sistemasi orqali ifodasidir.
Kompyuter modellari bu- mantiqiy, algebraik yoki differentsial tenglamalar tizimini yechadigan va o'rganilayotgan tizimning xatti-harakatlarini taqlid qiladigan algoritm yoki kompyuter dasturi.

Fizik modellar o‘rganilayotgan ob’ektni kichiklashtirib yasash yordamida tadqiqot o‘tkazishda qo‘llaniladigan model hisoblanadi. Fizik modellarga ob’ektlarning kichiklashtirilgan maketlari, turli asbob va qurilmalar, trenajyorlar va boshqalar misol bo‘ladi. Fizik modellardan samolyot, kema, avtomobil, poezd, GES va boshqa ob’ektlarni o‘rganish yoki ularni yaratishda qo‘llaniladi.

Biologik model turli tirik ob’ektlar va ularning qismlari – molekula, hujayra, organizm va boshqalarga xos biologik tuzilish, funksiya va jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi. Biologik model odam va hayvonlarda uchraydigan ma’lum bir holat yoki kasallikni laboratoriyada hayvonlarda sinab ko‘rish imkonini beradi.

Kompyuterlar yaratilgandan boshlab matematik modellashtirish jarayoni alohida ahamiyatga ega bo‘lib kelmoqda. Matematik modellashtirishdan murakkab texnik, iqtisodiy va ijtimoiy tizimlarni yaratish hamda ularni kompyuterlar yordamida qayta ishlashda keng miqyosda foydalanib kelinmoqda. Buning natijasida ob’ekt, ya’ni haqiqiy tizim ustida emas, balki uni almashtiruvchi matematik model ustida tajriba o‘tkazila boshladi.

Kompyuterli modellashtirish quyidagilarga bo'linadi:

1. Vizual - ob'ektga mos keladigan xayoliy tasvirni, aqliy rejani yaratishni o'z ichiga oladi. davom etayotgan jarayon haqidagi taxminlarga yoki shunga o'xshash narsaga asoslangan model

2. Ramziy - bu mantiqiy tuzilishdan iborat bo‘lib maxsus belgilar tizimiga (lingvistik (asosiy tushunchalarning tezaurusi asosida)) asoslangan modellar

3. Matematik - bu o'quv kompyuter predmetiga muvofiqligini aniqlashdan iborat bulib, ba'zida ularni matematik va analitiklarmodellar deb yuritiladi. Analitik modellashtirish algebraik, differentsial, integral, sonli farqlar va mantiqiy shartlar tizimini yozishni o'z ichiga oladi. Analitik modelni tadqiq qilishda analitik usul va sonli usuldan foydalanish mumkin. So'nggi paytlarda raqamli usullar kompyuterlarda amalga oshiriladi, shuning uchun kompyuter modellarini bir xil matematik deb hisoblash mumkin.

Matematik modellar juda xilma-xil bo'lib, ular ham turli maqsadlarga ko'ra turlarga tasniflanadi. Bular: Abstraktsiya darajasi, ya’ni tizim xususiyatlarini tavsiflashiga ko‘ra meta, makro va mikromodellarga bo'linadi. Taqdim etish shakliga qarab invariant, analitik, algoritmik va grafik modellar ajralib turadi.

Modellarda tavsif etillayotgan ob’ektining ko’rsatilgan xossalari namunasiga ko‘ra: tarkibiy, funktsional va texnologik. Modellarni qo‘rish usullariga ko'ra: nazariy, empirik va kombinatsiyalangan turlarga ajraladi. Matematik apparatlarning xususiyatlariga qarab:chiziqli va chiziqsiz, doimiy va diskret, deterministik va ehtimollik, statik va dinamik modellarga ajratiladi. Modellarni amalga oshirish usuliga ko‘ra analog, raqamli, gibrid, neyro modellar bo‘linadi. Bu modellar analog, raqamli, gibrid hisoblash mashinalari va neyrotarmoqlar usullari asosida yaratiladi.

Modellashtirishdan ilmiy-tadqiqot ishlarida ancha ilgari vaqtlardan beri foydalana boshlangan. U texnik konstruksiya, qurilish va arxitektura, astronomiya, fizika, ximiya, biologiya va ijtimoiy fanlarda o‘z ifodasini topgan. Angliyalik iqtisodchi Vilyam Petti XVII asrda "Siyosiy arifmetika" nomli asarida modellashtirish masalalariga to‘xtalgan edi.

XX asrdagi modellashtirish usullari hozirgi zamon fanlarining hamma sohalariga muvaffaqiyat keltirdi. Model tuzish jarayoni modellashtirish deb ataladi. Modellashtirish deganda biror ob’ektni ularning modellari yordamida tadqiq qilish mavjud predmet va hodisalarning modellarini yasash va o‘rganish tushuniladi.

Modellashtirish uslubidan hozirgi zamon fanlari keng foydalanmoqda. U ilmiy-tadqiqot jarayonini yengillashtiradi, ba’zi hollarda esa murakkab ob’ektlarni o‘rganishning yagona vositasiga aylanadi. Mavhum ob’ekt, olisda joylashgan ob’ektlar, juda kichik hajmdagi ob’ektlarni o‘rganishda modellashtirishning ahamiyati beqiyosdir. Modellashtirish uslubidan fizika, astronomiya, biologiya, iqtisodiyot fanlarida ob’ektning faqat ma’lum xususiyat va munosabatlarini aniqlashda ham foydalaniladi.

Matematik modellarni iqtisodiy qonuniyatlarni o‘rganishga tadbiq etishni - *iqtisodiy matematik modellashtirish*, bu modellarni amaliyotga qo‘llashni esa *iqtisodiy-matematik usullar* deyiladi.

Modellashtirish va modellar o‘zining turli sohalardagi tadbiqlariga qarab moddiy va abstrakt deb ataluvchi sinflarga bo‘linadi. *Moddiy modellar* asosan o‘rganilayotgan ob’ekt va jarayonni geometrik, fizik, dinamik yoki funksional xarakteristikalarini ifodalaydi. Masalan, ob’ektning kichiklashtirilgan maketi (masalan, litsey, kollej, universitet) va turli xil fizik, ximik va boshka xildagi maketlar bunga misol bula oladi. Bu modellar yordamida turli xil texnologik jarayonlarni optimal boshqarish, ularni joylashtirish va foydalanish yo‘llari o‘rganiladi. Umuman olganda, moddiy modellar tajribaviy xarakterga ega bo‘lib, texnika fanlarida keng qo‘llaniladi.

Ammo moddiy modellashtirishdan iqtisodiy masalalarni yechish uchun foydalanishda ma’lum chegaralanishlar mavjud. Masalan, xalq xo‘jaligini biror sohasini o‘rganish bilan butun iqtisodiy ob’ekt haqida xulosa chiqarib bo‘lmaydi. Ko‘pgina iqtisodiy masalalar uchun esa moddiy modellar yaratish qiyin bo‘ladi va ko‘p xarajat talab etadi.

2-§.Matematik va axborotli modellashtirish. Matematik modelni qurish

metodlari

Yechiladigan masalalarni o‘rganish uning matematik modelini tuzishdan boshlanadi, ya’ni uning asosiy o‘ziga xos xususiyatlari ajratiladi va ular o‘rtasida matematik munosabat o‘rnatiladi. Matematik model tuzilgach, ya’ni masala matematik ko‘rinishda ifodalangach, uni ma’lum matematik usullar bilan tahlil qilish mumkin. Matematik model tuzish bilan biz o‘rta maktab fizika kursida tanishganmiz. Bunda dastlab o‘rganilayotgan fizik hodisaning mohiyati, belgilari, ishlatilayotgan ko‘rsatkichlari, so‘zlar yordamida batafsil ifoda etiladi. Keyin fizik qonunlar asosida kerakli matematik tenglamalar keltirilib chiqariladi. Bu tenglamalar o‘rganilayotgan fizik jarayon, hodisalarning matematik modelidir.

Sifatli va sonli modellar. Bugungi kundagi fan va texnikaning vazifasi atrof-muhitning nazariy modelini qurishdan iborat bo'lib, unda noma'lum hodisalarni tushuntirib beradigan va bashorat qiladigan obektlar mavjud. Nazariy model sifatli yoki sonli bo'lishi mumkin. Hodisaning yuqori sifatli modeli tizimning xatti-harakatlarini tahlil qilish va, masalan, obektning hajmini kamaytirish bilan, ishlash tezligini oshirish, vaqt unimdorligini xisobga olish kabi sifat-tavsiflovchi usullar(modellar)dan matematik modellarga o'tishdir.

Tabiat va atrof muhitni o’rab turgan o'plab muammolarini hal qilish kosmik va vaqtni raqamlashtirishni, koordinata tizimining kontseptsiyasini joriy etishni, turli jismoniy, psixologik va boshqa o'lchov usullarini ishlab chiqishni va takomillashtirishni talab etadi. Buning natijasida algebraik va differensial tenglamalar tizimini ifodalovchi juda murakkab matematik modellar olingan. Hozirgi vaqtda tabiiy va boshqa hodisalarni o'rganishda sifat-tavsiflovchi usullar(modellar)ni emas, balki matematik nazariyani qurishni nazarda tutuvchi sonli modellardan kengroq foydalaniladi.

Matematik modelning tuzilishi. O'rganilayotgan tizimni x, β, y vektorlar orqali tashqi, ichki va chiqish parametrlari bilan ifodalanishi mumkin. Masalan, elektron kuchaytirgich uchun chiqish parametrlari sifatida -daromad, uzatilgan signallarning chastota diapazoni, kirish qarshilik, kuch taqsimoti, tashqi qarshilik va ish hajmi, kuchlanish manbalari, atrof-muhit harorati, kirish signallari va ichki qarshilik, kondansator kuchi, tranzistorlar xususiyatlari kabilar olinadi. Tizimni yaratishda chiqish parametrlarining qiymatlari yoki ularning o'zgarish oralig'i tizimni ishlab chiqish uchun texnik topshiriqda aniqlanadi, tashqi parametrlar uning ishlash shartlarini tavsiflaydi.

Tizimni yaratishda tashqi va chiqish parametrlarining qiymat tizimini loyihalash uchun texnik topshiriq bilan bog'liq yanada murakkab sintez muammolarini hal qilish, uning ichki parametrlarini topish kerak bo'ladi. Muhandislik amaliyotida bunday muammoni hal qilish ko'pincha ichki tartibga solish uchun loyiha hisob-kitobidir.

Matematik modellarning xususiyatlari. Yuqoridagilardan kelib chiqadiki, tizimni o'rganishda matematik usullar orqali modelining quyidagi xususiyatlari qo'llaniladi.

1. To'liqlilik. Matematik model hisoblash tajribasining maqsadi nuqtai nazaridan bizni qiziqtirgan tizimning xususiyatlarini va xususiyatlarini etarli darajada aks ettirishga imkon beradi. Misol uchun, model tizishda yuzaga keladigan jarayonlarni to'liq tasvirlab berishi mumkin, ammo uning umumiy, ommaviy yoki muhim ko'rsatkichlarini aks ettirmaydi.

2. Aniqlilik. Matematik model aniqligi chiqish parametrlarining model qiymatining haqiqiyligini va mos kelishuvini ta'minlaydi.

3. Bog‘liqliligi. Matematik model orqali tizimning chiqish parametrlari tashqi va ichki parametrlar bilan bog'liq bo'lganligi sababli, ushbu tizim modelining aniqligi uning qiymatlariga miqdoriy xa-rakteristika sifatida bog'liq bo'ladi.

4. Etarliligi. Matematik modelning etarliligi modelning xususiyatlarini aks ettirish qobiliyatidir. Matematik modelning etarliligi to'g'ri og'ish degan ma'noni anglatadi-bu muayyan holatda muhim bo'lgan belgilar tizimining aniq miqdoriy tavsifi.

5. Sifatliligi. Bu holat, har doim ham matematik modellari bo'lmagan biologik va ijtimoiy sohalarga xosdir.

6. Samaradorligi. Matematik model samaradorligi kompyuterda modelni bajarish uchun zarur bo'lgan hisoblash xarajatlari bilan baholanadi. Ushbu

xarajatlar modelni qo'llashda arifmetik operatsiyalar soniga, o'zgarmaydigan maydonning o'lchamiga, ishlatiladigan kompyuterning xususiyatlariga va boshqa omillarga bog'liq.

7. Soddaliligi. Matematik modelning iqtisodiy xarakteristikasi odatda uning soddaligi bilan bog'liq. Bundan tashqari, soddalashtirilgan versiyaning miqdoriy tahlillari-Matematik model antov zamonaviy hisoblash uskunalarini jalb qilmasdan amalga oshirilishi mumkin. Biroq, uning natijalari cheklangan bo'lishi mumkin.

8. Taqribiyligi. Matematik model hech qachon qaralayotgan ob’ektning xususiyatlarini aynan, to‘la o‘zida mujassam qilmaydi. U har xil faraz va cheklanishlar asosida tuzilgani uchun taqribiy harakterga ega demak, uning asosida olinayotgan natijalar ham taqribiy bo‘ladi.

Matematik modellashtirish turli xil tabiatli, ammo bir xil matematik boglanishlarni ifodalaydigan voqea va jarayonlarga asoslangan tadqiqot usulidir.

Hozirgi paytda matematik modellashtirish iqtisodiy tadqiqotlarda, amaliy rejalashtirishda va boshqarishda yetakchi o‘rin egallab, kompyuterlashtirish bilan chambarchas bog‘langan. Matematika, kompyuterlashtirish sohalari, umumuslubiy va predmet fanlarining rivojlanishi natijasida matematik modellashtirish uzluksiz rivojlanib, yangi-yangi matematik modellashtirish shakllari vujudga kelmoqda. Kompyuterlarning vujudga kelishi bilan modellashtirishning yangi yo‘nalishi paydo bo‘ladi. Model yaratish va unda tajribalar o‘tkazishda kompyuter katta rol o‘ynaydi. Bunday modellarni *immitatsion modellar* deyiladi.

Iqtisodiy jarayonlar va voqealarning matematik modellarini qisqacha *iqtisodiy-matematik modellar* deyiladi. Amaliy maqsadlarda iqtisodiy-matematik modellar iqtisodiy jarayonlarning umumiy xossalari va qonuniyatlari bo‘yicha *nazariy-analitik modellarga*, konkret iktisodiy masalalarni yechish (iqtisodiy tahlil, bashoratlash va boshqarish modellari) bo‘yicha esa *tadbiqiy modellar*ga bo‘linadi.

Modelning aniqligi, natijalarning ishonchlilik darajasini baholash masalasi matematik modellashtirishning asosiy masalalaridan biridir.

Matematik model har xil vositalar yordamida berilishi mumkin. Bu vositalar funksional analiz elementlarini ishlatib differensial va integral tenglamalar tuzishdan to hisoblash algoritmi va kompyuter dasturlarini yozishgacha bo‘lgan bosqichlarni o‘z ichiga oladi. Har bir bosqich yakuniy natijaga o‘ziga xos ta’sir ko‘rsatadi va ulardagi yo‘l qo‘yiladigan xatoliklar oldingi bosqichlardagi xatoliklar bilan ham belgilanadi.

Asrlar davomida insonning faoliyati tabiatdagi o‘simliklar, hayvonlar, quyosh energiyasi kabi tayyor maxsulotlarini o‘zlashtirish bilan bog‘liq bo‘lib kelgan. Lekin vaqt o‘tishi bilan inson faqat tayyor maxsulotlarni olishni o‘rganibgina qolmasdan, tabiatga ta’sir qilishni ham o‘rganib oldi. Uning nomini akademik V.I.Vernadskiy ***noosfera*** deb atadi.

Noosferani yaratish bilan birgalikda inson materiya turlari va xossalaridan foydalandi. Lekin bu jarayonning turli bosqichlarida materiyaning har bir kategoriyasi bir hilda o‘zlashtirilmadi. Boshlangich paytda ***moddani*** o‘zlashtirishga e’tibor ko‘proq qaratilgan bo‘lsa, keyinchalik ***energiyani*** o‘zlashtirishga va nihoyat, ***axborotni*** o‘zlashtirishga imtiyoz berildi.

Fanda, ya’ni tabiatni o‘rganish ,u to‘g‘risidagi bilimlarni to‘plash va o‘rganishda shunday davrlar borligi ma’lumki, ular materiyaning ma’lum bir turini rivojlanishi bilan bog‘liqdir. Shu sababli noosferaning uchta tashkil etuvchilarini ajratib ko‘rsatish mumkin bo‘ladi.Bular:

- ***texnosfera,***
- ***ergosfera,***
- ***infosfera.***

Texnosferaning paydo bo‘lishi moddani o‘rganish bilan, ergosferani paydo bo‘lishi energiyani o‘rganish bilan bog‘liq bo‘lsa, infosferaning paydo bo‘lishi esa axborotni o‘rganish bilan bog‘liqdir.

Texnosfera va ergosferani o‘rganish ximiya, fizika, matematika va boshqa fanlar orqali amalga oshiriladi.

Insoniyatning tabiatni o‘zlashtirishdagi tajriba va bilimlarini to‘plashi axborotni o‘zlashtirish bilan birgalikda kechadi. Aynan mana shu jarayon infosferaning paydo bo‘lishiga olib keldi. Demak infosferaning paydo bo‘lishi axborotni o‘rganish bilan bog‘liq ekan.

Axborot lotincha informatio so‘zidan olingan bo‘lib, tushuntirish, biror narsani bayon qilish yoki biror narsa yoki xodisa haqida ma’lumot ma’nosini anglatadi.

Inson yashaydigan dunyo turli moddiy va nomoddiy ob’ektlar, shuningdek ular o‘rtasidagi o‘zaro aloqa va o‘zaro ta’sirlardan, ya’ni jarayonlardan tashkil topgan. Sezish a’zolari, turli asboblar va xokazolar yordamida qayd etiladigan tashqi dunyo dalillari *ma’lumotlar* deb ataladi. Ma’lumotlar aniq vazifalarni hal etishda zarur va foydali deb topilsa- *axborotga* aylanadi. Demak ma’lumotlarga u yoki bu sabablarga ko‘ra foydalanilmayotgan yoki texnik vositalarda qayta ishlanilayotgan, saqlanayotgan, uzatilayotgan belgilar yoki yozib olingan kuzatuvlar sifatida qarash mumkin. Agar bu ma’lumotlardan biror narsa to‘g‘risidagi mavhumlikni kamaytirish uchun foydalanish imkoniyati tug‘ilsa, ma’lumotlar axborotga aylanadi. Demak amaliyotda foydali deb topilgan, ya’ni foydalanuvchining bilimlarini oshirgan ma’lumotlarnigina axborot deb atasa bo‘ladi.

Kundalik turmushimizda biz axborot deganda atrof muhitdan, (tabiatdan yoki jamiyatdan) sezgi a’zolarimiz orqali qabul qilib, anglab oladigan har qanday ma’lumotni tushunamiz. Tabiatni kuzata turib, insonlar bilan muloqotda bo‘lib, kitob va gazetalar o‘qib, televizion ko‘rsatuvlar ko‘rib biz axborot olamiz. Shunday qilib, turli sohalarda axborot turlicha tushinilar ekan. Lekin axborotlarning umumiy tomonlari ham borki, u ham bo‘lsa beshta muhim hossaga ega bo‘lishligidir. Bular axborotni **yaratish, qabul qilish, saqlash, ishlov berish** va **uzatish** xossalaridir.

Axborotdan foydalanish imkoniyati va samaradorligi uning reprezentativligi, mazmundorligi, yetarliligi, aktualligi, o‘z vaqtidaligi, aniqligi, ishonarliligi, barqarorligi kabi asosiy iste’mol sifat ko‘rsatkichlari bilan bog‘liqdir.

a) axborotning reprezentativligi – ob’ekt xususiyatini adekvat ifoda etish maqsadlarida uni to‘g‘ri tanlash va shakllantirish bilan bog‘liqdir.

b) axborotning mazmundorligi – semantik(mazmuniy) hajmini ifoda etadi.

v) axborotning yetarliligi (to‘laligi) - qaror qabul qilish uchun minimal, lekin yetarli tarkibga (ko‘rsatkichlar jamlamasiga) ega ekanligini bildiradi. To‘g‘ri qaror qabul qilish uchun to‘liq bo‘lmagan, ya’ni yetarli bo‘lmagan, xuddi shuningdek ortiqcha bo‘lgan axborot ham foydalanuvchining qabul qilgan qarorlari samaradorligini kamaytiradi.

g) axborotning aktualligi – axborotdan foydalanish vaqtida uning boshqarish uchun qimmatliligi saqlanib qolishi bilan belgilanadi va uning xususiyatlari o‘zgarishi dinamikasi hamda ushbu axborot paydo bo‘lgan vaqtdan buyon o‘tgan vaqt oralig‘iga bog‘liq bo‘ladi.

d) axborotning o‘z vaqtidaligi – uning avvaldan belgilab qo‘yilgan vazifani hal etish vaqti bilan kelishilgan vaqtdan kechikmasdan olinganligini bildiradi.

ye) axborotning aniqligi –olinayotgan axborotning ob’ekt, jarayon, hodisa va hokazolarning real holatiga yaqinligi darajasi bilan belgilanadi.

j) axborotning ishonarliligi – axborotning real mavjud ob’ektlarni zarur aniqlik bilan ifoda etish xususiyati bilan belgilanadi.

z) axborotning barqarorligi – axborotning asos qilib olingan ma’lumotlar aniqligini buzmasdan o‘zgarishlarga ta’sir qilishga qodirligini aks ettiradi.

Axborotga ishlov berish texnologiyalari bugungi kunda hayotimizning hamma sohalarini qamrab olgan. Informatikaning asosiy resursi – *axborotdir*.

Ma’lumki jamiyat rivojlangani sari iqtisodiyot, fan, texnika, texnologiya, madaniyat, san’at, tibbiyot kabilarning turli masalalari haqidagi mavjud ma’lumotlar, axborot zaxiralaridan foydalanishni tashkil etish intellektual va iqtisodiy hayotga tobora ko‘proq ta’sir ko‘rsatadi. Demak axboriy jarayonlarni ko‘p qirrali jarayon ekanligi ayon bo‘lmoqda.

Zamonaviy jamiyatda insonning ishlab chiqarish faoliyati umumlashgan ishlab chiqarish(UICh) doirasida kechmoqda. UICh bir-biri bilan uzviy bog‘liq fizik(moddiy) hamda axboriy-mantiqiy qismlardan iborat. Ishlab chiqarishning axboriy-mantiqiy qismiga kuch bergan mamlakatlar yuqori ish unumdorligi va zamonaviy, xaridorgir maxsulotlar ishlab chiqarishga erishganliklari ma’lum.

Axboriy-mantiqiy ishlab chiqarish(AMICh)ning resurslari asosini axborot, mehnat vositalarini esa hisoblash texnikasi, uning dasturiy ta’minoti, axborot texnologiyalari va boshqalar tashkil qiladi. Mehnat vositalari hamda aqliy mehnatni sarf qiluvchi, tajriba va bilimga ega insonlar AMIChning ishlab chiqarish kuchlarini tashkil qiladi. AMIChning maxsuloti abstrakt ob’ekt(axborot, model) ist’emol predmeti sifatida namoyon bo‘lmoqda.

Ishlab chiqarish doirasidagi XX asrda yuz bergan o‘zgarishlar AMIChning paydo bo‘lishi va uning ahamiyatini oshib borishi bilan bog‘liqdir. Binobarin, UIChning umuman unumdorligining oshishi avtomatlashtirish, shu jumladan, AMIChni avtomatlashtirish bilan bog‘liq deb qaralishi zarur. Shu boiz mehnat unumdorligi ko‘p jihatdan informatikaga bog‘liqdir.

Hisoblash texnikasi va aloqa vositalarining keng rivojlanishi axborotni ilgari xayolga ham keltirib bo‘lmaydigan hajm va tezkorlikda yig‘ish, saqlash, qayta ishlash va uzatish, ya’ni avtomatlashtirilgan holda ishlov berish imkoniyatini yaratib berdi. Axborot texnologiyalari tufayli insonning faoliyati, uning kundalik muloqot sohasi dunyo sivilizatsiyasi ishlab chiqqan tajriba, bilimlar va ma’naviy qadriyatlarni jalb etish hisobiga chindan ham behad kengaymoqda.Bu esa o‘z novbatida jamiyatni yuqori darajada axborotlashgan bo‘lishini talab etadi.

Axborotlashgan jamiyat haqida olimlar turlicha fikr yuritadilar. Masalan Yapon olimlarining hisoblashicha, axborotlashgan jamiyatda kompyuterlashtirish jarayoni odamlarga ishonchli axborot manbaidan foydalanish, ishlab chiqarish va ijtimoiy sohalarda axborotni qayta ishlashni avtomatlashtirishning yuqori darajasini ta’minlashga imkon beradi. Jamiyatni rivojlantirishda esa harakatlantiruvchi kuch moddiy mahsulot emas, balki axborot ishlab chiqarish bo‘lmog‘i lozim.

Axborotlashgan jamiyatda nafaqat ishlab chiqarish, balki butun turmush tarzi, qadriyatlar tizimi ham o‘zgaradi. Barcha harakatlar tovarlarni ishlab chiqarish va iste’mol etishga yo‘naltirilgan sanoat jamiyatiga nisbatan axborotlashgan jamiyatida intellekt, bilimlar ishlab chiqariladi va iste’mol etiladiki, bu hol aqliy mehnat ulushining oshishiga olib keladi. Insondan ijodiyotga qobiliyat talab etiladi, bilimlarga ehtiyoj oshadi.

Axborotlashgan jamiyatining moddiy va texnologik negizini kompyuter texnikasi va kompyuter tarmoqlari, axborot texnologiyalari, telekommunikatsiya aloqalari asosidagi turli xil tizimlar tashkil etadi.

Axborotlashgan jamiyat **–** jamiyatning koʻpchilik a’zolari axborot, ayniqsa uning oliy shakli boʻlmish bilimlarni ishlab chiqarish, saqlash, qayta ishlash va amalga oshirish bilan band boʻlgan jamiyatdir.

Axborotlashgan jamiyatga oʻtishda kompyuter va telekommunikatsiya axborot texnologiyalari negizida yangi axborotni qayta ishlash sanoati yuzaga keladi.

Hozirgi paytda shu narsa ravshan boʻlib qolmoqdaki, u yoki bu mamlakat XXI asrda munosib oʻrin egallashi va boshqa mamlakatlar bilan iqtisodiy musobaqada teng qatnashishi uchun, oʻz iqtisodiy tuzilishi, ustivorliklari, boyliklari, institutlarini qayta qurish va sanoatini axborot tizimlari talablariga moslashtirishi kerak.

Axborotlarni qayta ishlash, saqlash va uzatish insoniyat rivojlanishining har bir bosqichida turli koʻrinishlarda rivojlanib borib, turli koʻrinishlarga ega boʻlgan. Rivojlanishning taraqqiyot bosqichlari rivojlangan sari, insonlarning axborot toʻplashi, qayta ishlashi va ularni uzatishi oʻzgarib borgan. Axborotlarni qabul qilish, qayta ishlash va ularni uzatish bosqichma-bosqich amalga oshirilgan.

I – bosqich. Yozuvning paydo boʻlishi, saqlanishi va avloddan avlodga oʻtishidir. Yozuv paydo boʻlishi bilan inson birinchi marta qayta ishlash texnologiyasidan quvvat oldi.

II - bosqich. (XVI) asr oʻrtalarida kitob bosib chiqarilishining yaratilishi bilan bogʻilk, ya’ni madaniyatning rivojlanishiga olib keldi. Kitob nashr etish fanning rivojlanishi bilan birga soha bilimlarining jadal rivolanishiga olib keldi. Mehnat jarayonida, stanoklarda, mashinalarda ishlash orqali orttirilgan bilimlarni yangi fikrlash manbai va ilmiy yoʻnalishlarga tadbiq etildi.

III - bosqich. (XIX) asr oxirlari. Elektr energiyasi paydo bo‘lishi bilan birga telefon, telegraf, radio orqali ko‘p miqdordagi axborotlarni uzatish va qabul qilish imkoniyati yaratildi.

IV - bosqich. Axborot revalyusiyasining bo‘lishi bilan xarakterlandi. Bu bosqichning boshlanishi XX asrning 40-yillariga, ya’ni universal EXM larning yaratilishi davriga to‘g‘ri keldi. 70-yillarda axborot texnologiyasining yadrosi bo‘lgan mikrotexnlogiya va shaxsi kompyuterlar yaratildi. Hisoblash texnikasining rivojlanishi evolyusiyasida mikroprotsessor yo‘nalishi paydo bo‘ldi.

V – bosqich. (XX) asr oxiri. Boshqarishg tizimlarni osonlashtirish maqsadida axborot texnologiyalari qayta ishlandi. Axborotlarni mazmunli qayta ishlash negizida shunday algoritm va modellar borki, ular bizga boshqaruv tizimini o‘rganish imkoniyatini beradi. Kompyuterlarning paydo bo‘lishi – bu insoniyatning ulkan yutug‘i hisoblanadi, Axborotlarni xotirasida yig‘ib ularni tez qayta ishlash imkoniyatiga ega, lekin axborotlarni qayta ishlashdan maqsad nima ekanligini bilmaydi.

XX asr oxirida xar xil modellar ishlab chiqildi (matematik, mantiqiy va.b.) va texnik boshqarish algoritmlari (avtomatlashtirilgan va avtomatik ishlab chiqarish) va ijtimoiy tizimlar. Har qanday ishlab chiqarish asosida boshqarishsiz amalga oshmaydigan maqsadga yo‘naltirilgan harakatlar yotadi. XX asr oxiriga kelib, mantiqiy axborot ishlab chiqarishlar ko‘payib qoldi. Boshqaruvchining aqliy imkoniyatlari boshqarishning effektini oshishiga olib keldi.

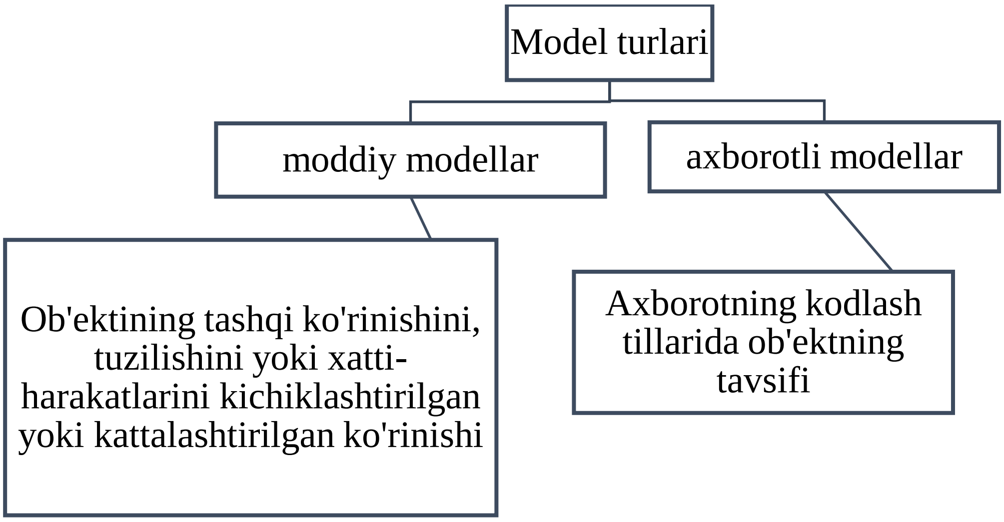
Beshinchi bosqichning asosiy mazmuni shuni bildiradiki, ya’ni nafaqat boshqarish faoliyatidagi effektning keskin ko‘tarilishi, balki undagi ishchi kuchlarining ortishi ham inobatga olindi. Shunday qilib texnologiyaning yangi turi – axborot texnologiyalari ma’lumotning va mahsulotning qaerdan kelishi bu axborot hisoblanadi.

Kosmik kemalarning harakat traektoriyasi, murakkab muhandislik inshootlarini yaratish, transport magistrallarini loyihalash, iqtisodni rivojlantirish va boshqalar bilan bog‘liq bo‘lgan ulkan hisoblashlarning kompyuterda bajarilishi matematik modellashtirish uslubining samaradorligini tasdiqlaydi.

Modellashtirish nazariyasi ham tizimlarning umumiy nazariyasiga asoslanadi

Bu esa tizimli yondashuv deb nomlanadi. Tizimli yondashuv umumiy ilmiy yo'nalish bo'lib, unga ko'ra tizimli yondashuvning o'rganish **ob'ekti** atrof-muhit bilan o'zaro aloqada bo'lishini hisobga olingan murakkab tizim deb olinadi. Ob'ekt - bu tizimning bir-biriga bog'langan elementlari to'plamidan iborat .

Hozirgi davrda fan va texnikada kup foydalaniladigan tushunchalardan biri - tizimdir. **Tizim** - yunoncha suz bulib, tashkil etuvchilardan iborat bir butunlik degan ma’noni anglatadi. Tizimlarni ularning turli belgilariga qarab turkumlash mumkin. Umuman olganda, tizimlar **moddiy** yoki **mavxum** bo‘lishi mumkin (mavxum - inson ongi ma’suli).



Moddiy tizimlar, asosan moddiy ob’ektlar to‘plamidan tashkil topadi. o‘z navbatida moddiy tizim anorganik (mexanik, ximik) va organik (biologik) tizimga yoki aralash tizimga ajratiladi. Moddiy tizimlarda asosiy urinni ijtimoiy tizim egallaydi. Bunday tizimning xususiyatlaridan biri insonlar o‘rtasidagi munosabatlarni aks ettirishdir. Mavxum tizimlar inson ongining maxsuli bo‘lib, har xil nazariyalar, bilimlar, gipotezalardan iborat.

Shunday qilib, tizim - bu o’zaro bog‘liq va yagona maqsadga erishish uchun ma’lum qoida asosida o‘zaro munosabatda bo‘ladigan unsurlar to‘plami. Bu unsurlar to‘plami oddiy unsurlar yig‘indisidangina iborat bo‘lmay, har bir unsur ham o‘z navbatida tizim bo‘lishi mumkin.

Tizimlar tuzilishi bo‘yicha **oddiy** yoki **murakkab** bo‘lishi mumkin.

Oddiy tizimlarni tashkil etuvchi unsurlar soni kam bo‘lib, sodda tuzilishga ega bo‘ladi.

Murakkab tizimlar esa, bir nechta unsurlardan tashkil topgan bo‘lib, bu unsurlar ham o‘z navbatida alohida tizimlarga bo‘linishi mumkin.

Vakt davomida o‘zgarishga qarab tizimlar **statistik** va **dinamik** turlarga ajratiladi. Statistik tizimda vaqt davomida o‘zgarish bo‘lmaydi. Dinamik tizimda esa, vaqt o‘tishi bilan xolat o‘zgarib boradi.

Tashqi muhit bilan bo‘ladigan aloqasiga qarab **ochiq** yoki **yopiq** tizimlar bo‘lishi mumkin. Ochiq tizimlar tashqi muhit bilan aktiv aloqada bo‘ladi. Yopiq tizimlarning unsurlari esa tashqi muhitdan ta’sirlanmaydi.

Tizim - buyurtma asosida tashkil qilingan tuzilish va aniqlikning mavjudligi bilan ajralib turadi. Masalan, kichkina bir qutidan iborat televizor ma'lum bir qoida asosida bog'langan ko‘plab radiodetallarni birlashtirib turadigan obekt bo‘lgani uchun tizim sifatida qaraladi. Lekin bir qutiga turli xil radiadetallar tartibsizlar joylantirilgan bo‘lsa uni tizim deb bo‘lmaydi.

Tizim tavsifining quyidagi darajalari mavjud: 1) lingvistik (ramziy); 2) ko'plik nazariyasi; 3) mavhum-mantiqiy; 4) mantiqiy-matematik; 5) nazariy- axborotli; 6) dinamik; 7) evristik.

Agar tizimning ichki tuzilishi noma'lum bo'lsa, u "qora quti" deb hisoblanadi va unga kirish-chiqish holatini bog'laydigan funktsiya o'rnatiladi. Bunday tizim kibernetik yondashuvli tizimdir. Shu bilan birga, ko'rib chiqilayotgan tizimning xatti-harakati, uning tashqi ta'sirlarga va atrof-muhitdagi o'zgarishlarga munosabati tahlil qilinadi.

Ta’lim olish ob'ekti tarkibi va tuzilishini o'rganish tizimli tahlil deb ataladi. Uning metodologiyasi quyidagi printsiplarda o'z ifodasini topadi:

1) jismoniy printsip: tizimning xatti-harakati ma'lum jismoniy (psixologik, iqtisodiy va boshqalar) qonunlar bilan tavsiflanadi;

2) modellashtirish printsipi: tizim bo'lishi cheklangan miqdordagi usullar bilan modellashtirilgan, ularning har biri o'zining muhim tomonlarini aks ettiradi;

3) maqsadlilik printsipi: ancha murakkab tizimlarning ishlashi muayyan maqsadga, holatga va jarayonning saqlanishiga olib keladi.

Yuqorida aytib o'tilganidek, tizim tuzilishga ega - bu asosiyni belgilaydigan elementlar orasidagi ichki barqaror aloqalar to'plami ushbu tizimning xususiyatlarini ifodalaydi. U grafik, diagramma, kimyoviy yoki matematik formula yoki grafik shaklida taqdim etilishi mumkin. Ushbu grafik tasvir elementlarning fazoviy joylashishini, ularning joylashishi yoki bo'ysunishini, murakkab hodisaning turli qismlarining xronologik ketma-ketligini tavsiflaydi. Modelni qurishda o'rganilayotgan ob'ektning juda murakkab bo'lsa strukturaviy diagrammalarini tuzish tavsiya etiladi. Bu sizga umumiylikni tushunishga imkon beradi. Tizimning tarkibiy qismlariga ega bo'lmagan ob'ektning barcha xususiyalari integrativ xususiyatlar xisoblanadi.

Tizimli yondashuvning eng muhim g'oyalaridan biri bu paydo bo‘lish tamoyildir. Paydo bo'lish tamoyilning - elementlarni (qismlarni, komponentlarni) birlashtirganda bir butun tizimli ta'sirga ega: tizimning o‘zi esa unga kiritilgan elementlarning hech biriga ega bo'lmagan fazilatlarni o‘z ichiga oladi.

Tizimning asosiy strukturasini tanlash printsipi shundaki, juda murakkab ob'ektni o'rganish uning asosiy yoki asosiy tarkibiy qismini oldinga surishni talab qiladi . Boshqacha qilib aytganda, tafsilotlarning barcha turlarini hisobga olishning hojati yo'q, lekin asosiy naqshlarni tushunish uchun ob'ektning muhim qismlarini kamroq ahamiyatga egalarini kengaytirish kerak .

Har qanday tizim boshqa tizimlar bilan o'zaro ta'sir qiladi va shakllantiradi. Shuning uchun uni ko'rib chiqish kerak bo‘lgan ba'zi kengroq tizimning quyi tizimi. Agar siz faqat ichki aloqalarni tahlil qilishni cheklasangiz, unda ayrim hollarda ob'ektning to'g'ri modelini yaratishingiz mumkin. Tizimning atrof- muhit bilan, ya'ni tashqi omillar bilan muhim aloqalarini hisobga olish va shu bilan tizimni "o’rash" kerak bo’ladi. Bu esa **izolyatsiya** tamoyili hisoblanadi.

O'rganilayotgan ob'ekt qanchalik murakkab bo'lsa, unda turli xil modellar (tavsiflar) tuzilishi mumkin. Shunday qilib, silindrsimon ustunga qarab turli tomondan, barcha kuzatuvchilar uni ma'lum o'lchamdagi bir hil silindrsimon tanasi bilan modellashtirish mumkinligini aytishadi. Agar ustun o'rniga murakkab me'moriy kompozitsiyani ko'rib chiqsalar, unda har bir kishi o'z modelini ko'radi va uning modelini quradi. Shu bilan birga, bir-biriga zid bo'lgan turli natijalar paydo bo'ladi. Murakkab tizimlarni o'rganishda ular **ierarxiya tamoyilira** асосланади. Bu тамойил quyidagicha: O'rganilayotgan ob'ekt birinchi darajadagi bir nechta quyi tizimlarni o'z ichiga oladi, ularning har biri ikkinchi darajali quyi tizimlardan tashkil topgan tizim хисобланади. Shuning uchun strukturaning tavsifi va nazariy modelni yaratish turli "darajalarda" elementlarning "joylashuvi"ni, ya'ni ularning ierarxiyasini hisobga olish kerak.

Tizimlarning asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

1) yaxlitlik, ya'ni tizim xususiyatlarining individual elementlarning xususiyatlari yig'indisi;

2) strukturaviy- murakkab strukturaning mavjudligi;

3) Tavsifning ko'pligi,-tizim turli yo'llar bilan tavsiflanishi mumkin;

4) tizim va atrof-muhitning o'zaro bog'liqligi- tizim elementlari unga kiritilmagan va atrof-muhitni shakllantiradigan narsalar bilan bog'liq;

5) ierarxik - tizim ko'p bosqichli tuzilishga ega.

Kompyuterli modellashtirish. Atrof-muhit hodisalarini o'rganishning samarali usuli bu ilmiy tajribaning boshqariladigan sharoitda tabiiy hodisalarni o'rganishdan iborat. Biroq, ko'pincha tajriba o‘tkazish mumkin emas yoki talab qilinadi. Ouda yuqori iqtisodiy xarajatlar va istalmagan oqibatlarga olib kelishi mumkin. Bunday holda, o'rganilayotgan ob'ekt kompyuterga asoslangan model bilan almashtiriladi va uning harakati turli tashqi ta'sirlari uchun o'rganiladi.

Shaxsiy kompyuterlarning tezkorligi, axborot texnologiyalari, superkompyuterlarning yaratilishi kompyuter modellashtirish fizik, texnik, biologik, iqtisodiy va boshqa tizimlarni o'rganishning eng samarali usullaridan biridir. Ko'pincha kompyuter modellarini o'rganish osonroq va qulayroq, ular haqiqiy o'rnatish qiyin yoki oldindan aytib bo'lmaydigan natijalarni berishi mumkin. Mantiqiy va rasmiylashtirilgan kompyuter modellari o'rganilayotgan ob'ektlarning xususiyatlarini aniqlaydigan asosiy omillarni aniqlashga imkon beradi.

Kompyuterni modellashtirish birinchi navbatda sifatli, so'ng matematik modelni yaratish uchun hodisalarning mavhumlikni talab qiladi. Buning ortidan ketma-ket hisoblash ishlari olib boriladi, yani kompyuter tajribalari, natijalarni sharhlash, simulyatsiya natijalarini o'rganilayotgan ob'ektning xatti-harakati bilan taqqoslash, modelni aniqlashtirish va hakazo. Hisoblash tajribasi o'rganilayotgan ob'ektning matematik modeli orqali kompyuter yordamida o'tkaziladi.

Tizimni kompyuterda immitasiya qilishning mohiyati tavsiflaydigan kompyuter dasturi (dasturiy ta'minot to'plami)larini yaratish, o'rganilayotgan tizim elementlarining ichki va tashqi muhit o'rtasidagi o'zaro ta'sirini hisobga olgan holda, uning ishlash jarayonida bir qator hisoblash tajribalarini o'tkazishdan iborat.

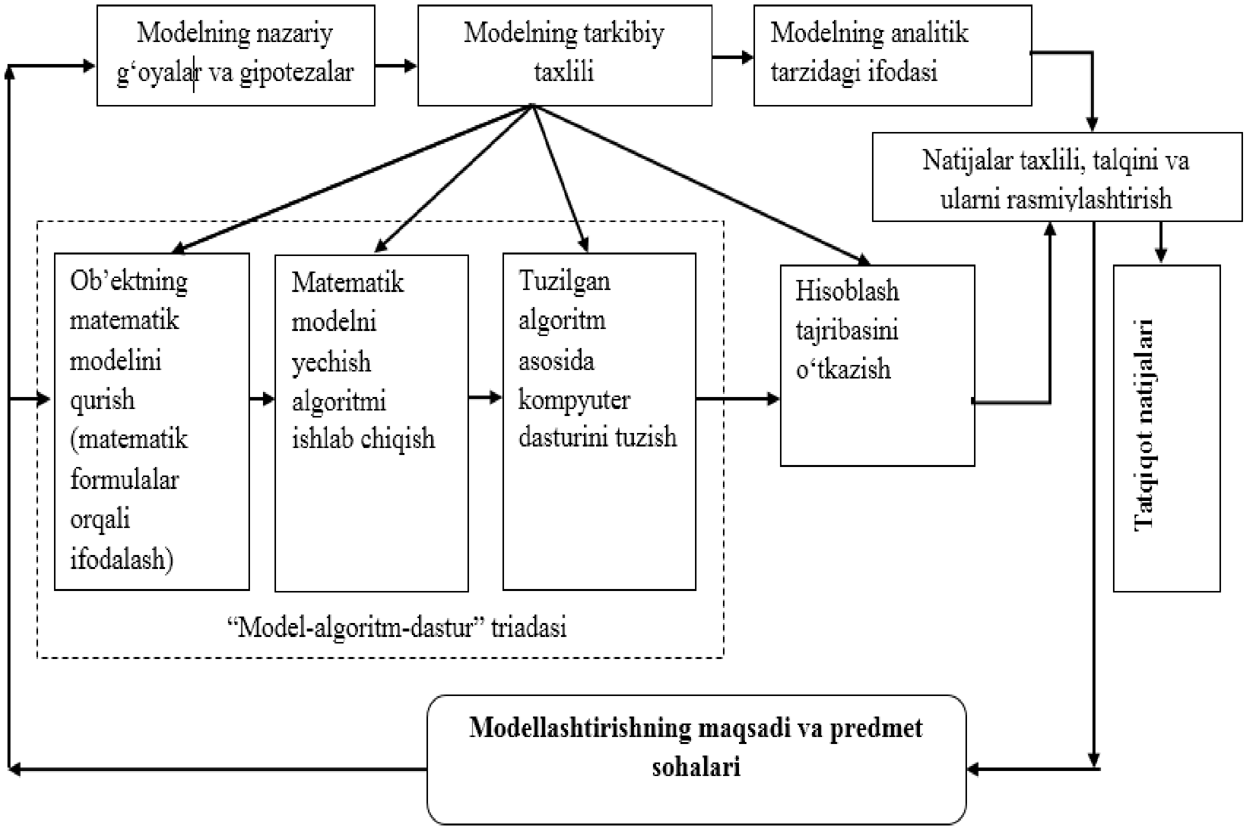
O'rganilayotgan tizim modeli bajarilishi kerak bo'lgan talablar:

1. Modelning to’liqligi, ya'ni barcha elementlarni hisoblash qobiliyati talab qilinadigan aniqlik va ishonchlilik bilan ishlash xususiyatlari. 2. Modelning moslashuvchanligi- Turli xil ishga tushirish va ishga tushirishga imkon beradigan vaziyatlar va jarayonlar, o'rganilayotgan tizimning tuzilishi, algoritmlari va parametrlarini o'zgartira olishi. 3. Modelni yaratishga sarflangan vaqtni tavsiflovchi ishlab chiqish va amalga oshirish muddati. 4. Blok tuzilishi modelning ba'zi qismlarini (bloklarini) qo'shish, chiqarib tashlash va almashtirishga imkon beradi. Bundan tashqari, axborot ta'minoti, dasturiy ta'minot va texnik vositalar modelga tegishli ma'lumotlar bazasi bilan axborot almashish va komputerning samarali ishlashi va foydalanuvchilarning qulay tajribasini ta'minlashi kerak.

Kompyuterda immitatsiya qilishning asosiy bosqichlari quyidagilar:

1) muammoning qo’yilishi, o'rganilayotgan tizimning tavsifi va uni aniqlash

tarkibiy qismlar va o'zaro ta'sirning elementar harakatlari; 2) matematik modelini shakllantirish. Matematik modelni yaratish uchun mavjud o'rganilayotgan ob'ektning mohiyatini aks ettiruvchi matematik tenglamalar; 3) rivojlanish muammoni hal qiladigan algoritmni ishlab chiqish; 4) ma'lum bir dasturlash tilida dastur tuzish; 5) kompyuterda hisob-kitoblarni rejalashtirish va bajarish, dasturni takomillashtirish va natijalarni olish; 6) natijalarni sharhlash, ularni empirik qiymatlari bilan taqqoslash. Keyin bularning barchasi keyingi bosqichda takrorlanadi.



Kompyuterni modellashtirish tamoyillari.

1. Moslik printsipi: Model o'rganilayotgan ob'ektning eng muhim jihatlarini hisobga olishi va uning xususiyatlarini aks ettirishi kerak

2. Oddiylik va iqtisodiy samaradorlik printsipi: Model ishlatish samarali va samarali bo'lishi uchun etarlicha sodda bo'lishi kerak. Bu tadqiqotchi uchun talab qilinadigan narsadan murakkab bo'lmasligi kerak.

3. Axborotning etarliligi printsipi: ob'ekt haqida ma'lumotlarning to'liq bo’lmasa modelni tuzish mumkin emas. Etarli ma'lumot mavjud bo'lganda, modellashtirish ma'noga ega bo’ladi.

4. Amalga oshirish printsipi: Yaratilgan model tadqiqot maqsadiga aniq vaqt ichida erishilishini ta'minlashi kerak.

5. Modellarning ko'plik va birlik printsipi: Har qanday o'ziga xos model real tizimning faqat ba'zi jihatlarini aks ettiradi. To'liq o'rganish uchun o'rganilayotgan

jarayonning eng muhim tomonlarini aks ettiradigan va umumiy jihatlari bo'lgan bir qator modellarni yaratish kerak. Har bir keyingi model qo'shimcha bo'lishi kerak va
avvalgisini takrorlamasligi.
6. Uyg'unlik printsipi: o'rganilayotgan tizim shakl shaklida bo'lishi mumkin
standart matematik usullar bilan modellashtirilgan o'zaro ta'sir etuvchi quyi tizimlar to'plamlari. Bundan tashqari, tizimning xususiyatlari uning elementlari xususiyatlarining yig'indisi emas.
7. Parametrlarning bir xillik printsipi. Simulyatsiya qilingan tizimning ba'zi quyi tizimlari bitta parametr bilan tavsiflanishi mumkin.
Model quyidagi talablarga javob berishi kerak:
1) adekvat,bo'lishi, ya'ni tekshirilayotgan ob'ektning muhim jihatlarini kerakli aniqlik bilan aks ettirish; 2) muayyan sinf vazifalarini hal qilishga asoslanish; 3) taxminlar va taxminlarning minimal sonidan kelib chiqqan holda sodda va tushunarli bo'lishi; 4) o'zgartirish va to'ldirish, boshqa ma'lumotlarga o'tishga imkon beradi; 5) foydalanish uchun qulay bo'lishi.
Kompyuter modellarining turlari. Keng ma'noda kompyuter modellashtirish orqali biz kompyuter modellarni yaratish va tadqiq qilish jarayonini tushunamiz
Modellashtirishning quyidagi turlari ajratiladi:
1. Fizik modellashtirish: kompyuter eksperimental sozlash yoki simulyatorning bir qismidir, u tashqi signallarni qabul qiladi, tegishli hisob-kitoblarni amalga oshiradi va boshqaruvchi signallarni ta'minlaydi. Masalan, turli xil manipulyatorlar, samolyotning o'quv modeli
2. Dinamik yoki raqamli simulyatsiya: algebraik va differentsial tenglamalar sistemasini hisoblash matematikasi usulida raqamli echish va tizimning turli parametrlari bilan hisoblash tajribasini o'tkazish, boshlang'ich sharoitlar va tashqi ta'sirlar. U turli xil fizik, biologik, ijtimoiy va boshqa hodisalarni simulyatsiya qilish uchun ishlatiladi: mayatnikning tebranishi, to'lqin tarqalishi, populyatsiya hajmining o'zgarishi, ma'lum bir hayvon turining populyatsiyasi va boshqalar.

3. Simulyatsiya murakkab texnik, iqtisodiy yoki boshqa kompyuter tizimining talab qilinadigan holatini taqlid qiluvchi kompyuter dasturini (yoki dasturiy ta'minot to'plamini) yaratishdan iborat.

4. Statistik modellashtirish stoxastik tizimlarni o'rganish uchun ishlatiladi va ular bilan bir nechta testlarni o'tkazishdan olingan natijalarni keyingi statistik qayta ishlash. Bunday modellar tasodifiy omillar ta'sirida bo'lgan turli xil tizimlari, ko'p protsessor tizimlari, kompyuter tarmoqlari, turli xil dinamik tizimlarning xatti-harakatlarini o'rganishga imkon beradi. Statistik modellar ehtimoliy muammolarni echishda, shuningdek katta hajmlarni qayta ishlashda qo'llaniladi

5. Axborotli modellashtirish, ya'ni o'rganilayotgan ob'ektning eng muhim tomonlarini aks ettiruvchi maxsus tashkil etilgan ma'lumotlar to'plamini (belgilar, signallar) tashkil etishdan iborat. Vizual, grafik, animatsion, matnli, jadvalli axborot modellarini farqlang.

6. Bilimlarni modellashtirish- bilimlar bazasiga asoslangan sun'iy intellekt tizimini qurishni o'z ichiga oladi

Matematik modelni qurish metodlari

Matematik model tuzish to‘rt bosqichda amalga oshiriladi:

Birinchi bosqich – modelning asosiy ob’ektlarini bog‘lovchi qonunlarni ifodalash.

Ikkinchi bosqich – modeldagi matematik masalalarni tekshirish.

Uchinchi bosqich – modeldan olingan nazariy natijalarni amaldagi kuzatish natijalariga mos kelishini aniqlash.

To‘rtinchi bosqich – o‘rganiladigan ob’ekt haqidagi ma’lumotlarni jamlash, tahlil qilish va rivojlantirish.

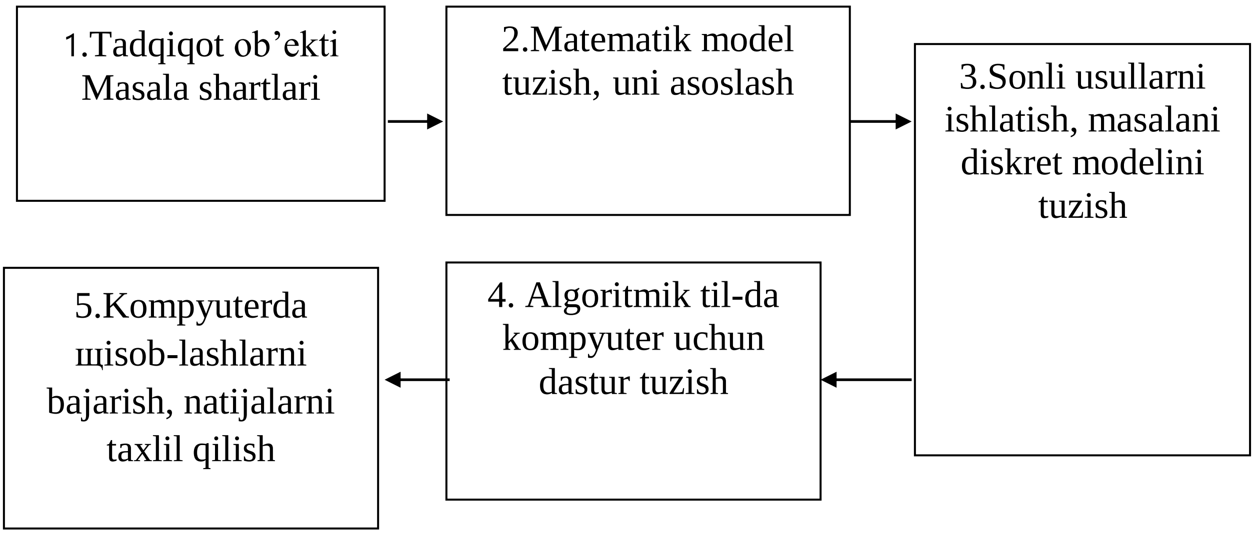
Yechiladigan masalalarni o‘rganish uning matematik modelini tuzishdan boshlanadi, ya’ni uning asosiy o‘ziga xos xususiyatlari ajratiladi va ular o‘rtasida matematik munosabat o‘rnatiladi. Matematik model tuzilgach, ya’ni masala matematik ko‘rinishda ifodalangach, uni ma’lum matematik usullar bilan tahlil qilish mumkin. Matematik model tuzish bilan biz o‘rta maktab fizika kursida tanishganmiz. Bunda dastlab o‘rganilayotgan fizik hodisaning mohiyati, belgilari, ishlatilayotgan ko‘rsatkichlari, so‘zlar yordamida batafsil ifoda etiladi. Keyin fizik qonunlar asosida kerakli matematik tenglamalar keltirilib chiqariladi. Bu tenglamalar o‘rganilayotgan fizik jarayon, hodisalarning matematik modelidir.

Modelning aniqligi, natijalarning ishonchlilik darajasini baholash masalasi matematik modellashtirishning asosiy masalalaridan biridir.

Matematik model har xil vositalar yordamida berilishi mumkin. Bu vositalar funksional analiz elementlarini ishlatib differensial va integral tenglamalar tuzishdan to hisoblash algoritmi va kompyuter dasturlarini yozishgacha bo‘lgan bosqichlarni o‘z ichiga oladi. Har bir bosqich yakuniy natijaga o‘ziga xos ta’sir ko‘rsatadi va ulardagi yo‘l qo‘yiladigan xatoliklar oldingi bosqichlardagi xatoliklar bilan ham belgilanadi.

Ob’ektning matematik modelini tuzish, uni kompyuterda bajariladigan hisoblashlar asosida tahlil qilish "kompyuterli loyixalashtirish" deyiladi.

"Kompyuterli loyixalashtirishning umumiy sxemasi 1-rasmda ko‘rsatilgan.



Birinchi bosqichda masalaning aniq qo‘yilishi, berilgan va izlanuvchi miqdorlar, ob’ektning matematik model tuzish uchun ishlatish lozim bo‘lgan boshqa xususiyatlari tasvirlanadi.

Ikkinchi bosqichda fizik, mexanik, ximiyaviy va boshqa qonuniyatlar asosida matematik model tuziladi. U asosan algebraik chiziqsiz, differensial, integral va boshqa turdagi tenglamalardan iborat bo‘ladi. Ularni tizimda o‘rganilayotgan jarayonga ta’sir ko‘rsatuvchi omillarning barchasini bir vaqtning o‘zida hisobga olib bo‘lmaydi, chunki matematik model juda murakkablashib ketadi. Shuning uchun, model tuzishda eng kuchli ta’sir etuvchi asosiy omillargina hisobga olinadi.

Uchinchi bosqichda masalaning matematik modeli tuzilgach, mos tenglamalar yechilishi va kerakli ko‘rsatkichlar aniqlanishi lozim. Masalan, matematik model differensial tenglama bilan tasvirlangan bo‘lsa, sonli usullar yordamida u chekli sondagi nuqtalarda aniqlangan chekli-ayirmali tenglamalar bilan almashtiriladi.

To‘rtinchi bosqichda sonli usullar yordamida aniqlangan algoritm asosida biror - bir algoritmik tilda kompyuterda ishlatish uchun dastur tuziladi. Masalan, u umumiy xususiyatga ega bo‘lishi kerak, ya’ni matematik modelda ifodalangan masala parametrlarining yetarlicha katta sohada o‘zgaruvchi qiymatlarida dastur yaxshi natija berishi kerak.

Oxirgi bosqichda dastur kompyuterga qo‘yiladi va olingan sonli natijalar chuqur tahlil qilinib baholanadi.

Natijalarga qarab mutaxassis tahlil qilinayotgan jarayon to‘g‘risida xulosalar chiqaradi, uning amalga oshishiga ma’lum maqsad asosida ta’sir ko‘rsatadi, boshqarish vositalarini ishlab chiqadi, tavsiyalar beradi. Ko‘plab variantlar asosida bajariluvchi hisoblash tajribalari yordamida loyihachi u yoki bu belgiga ko‘ra barcha variantlar ichidan eng ma’qulini tanlashi mumkin.

1990 yillardan boshlab zamonaviy kompyuterlarning ishlab chiqilishi, ilmiy va o‘quv jarayonlariga kirib kelishi ma’lum bir yutuqlardan tashqari ba’zi noqulayliklarni ham yuzaga keltirdi. Bu noqulaylik shaxsiy kompyuterlardan ilmiy, texnik va ijodiy masalalarni yechishda foydalanuvchilar uchun ancha sezilarli bo‘ldi. Bunga asosiy sabab shaxsiy kompyuterlarda yuqorida eslatib o‘tilgan katta kompyuterlar uchun yaratilgan tadbiqiy masalalarni yechish uchun mo‘ljallangan dasturlar kutubxonasini mavjud emasligidir. Shuning uchun hozirda ana shu kamchilikni bartaraf qilish yo‘lida turli xil izlanishlar olib borilmoqda.

Shulardan biri sifatida ma’lum bir sinf masalalarini yechishga mo‘ljalangan amaliy dasturlar bog‘lamlarini yaratishni ko‘rsatish mumkin.

Tizim haqida tushuncha. Tizim (sistema) uni tashkil etuvchi tarkibiy qismlar birligi bo’lib, uning tuzilishi yaxlitligini ta’minlash bilan birga rivojlanish yo’nalishini hamda maqsadini belgilaydi. Tizim o’z tarkibiy tuzilishidagi o’zgarishlar asosida bir holatdan ikkinchi holatga o’tadi va unda yangi xususiyatlar paydo bo’ladi.

Tabiat, jamiyat texnikani o’rganish, tahlil qilishda keyingi vaqtda ilmiy tafakkurning erishgan yutuqlari asosida tizimli yondashish tobora ko’proq rasm bo’lmoqda. Tizimli yondashuvning narsa-hodisalarni moddiy olamning turli tomonlarini o’rganishda oddiy, ya’ni uni alohida, o’z holicha - yakka holda, atrofdagi muhit bilan bog’lanishlarini inobatga olmay o’rganishdan qator ustunligi mavjud.

Tabiat, jamiyatdagi jarayonlarni o’z holicha tahlil qilish ularning boshqa hodisalar, jarayonlar bilan bog’liqligini, kelib chiqishi, rivojlanishi, istiqbolini aniq ko’rish imkoniyatini bermaydi.

Tizimli yondashuvda narsa-hodisalarning mavjud muhitdagi o’rni, uning boshqa atrofdagi narsa-hodisalar bilan bog’liqligini ochish ancha osondir. Shu asosda uning o’tmishini, hozirgi holati va istiqbolini bilib olish mumkin. Buning uchun tizim tarkibiy qismlari (komponentlari)ning umumiy tizimidagi har birining bajaradigan vazifasi, ularning o’zaro bog’liqligi va munosabati alohida-alohida va so’ngra yaxlitligicha tahlil qilinadi.

Tarkibiy qismlarning har birining vazifasi aniqlanib, umumiy maqsad va natija belgilanadi. Bunda ilmiy tadqiqotning bir necha metodologik tamoyillariga rioya qilish zarurdir. Chunonchi, oddiydan murakkabga, yakka, alohidalikdan umumiylikka, tarixiylikdan mantiqiylikka o’tish o’rganilayotgan ob’ekt uchun muhim bo’lib hisoblanadi.

Bundan tashqari ijtimoiy hodisalarni, ayniqsa inson faoliyati bilan bog’liq tizimlarni o’rganishda yuqoridagilardan tashqari insoniy sifatlar va faoliyat nuqtai-nazaridan o’rganish ham tizimli yondashuv uchun ham juda muhimdir. Bularsiz inson faoliyatining qirralari, ular o’rtasidagi aloqadorlikni to’la ochish mumkin emas. Tizimli yondashuv metodologik tamoyil sifatida o’rganilayotgan ob’ektni yaxlitligicha va qismlarga bo’lib o’rganishni to’la amalga oshirish imkoniyatini beradi.

Tizimlar mavjudligi va bajaradigan vazifasi jihatdan tabiat, texnik, ijtimoiy tizimlarga bo’linadi. Tizim mavjud bo’lishi yoki faoliyat ko’rsatishi uchun ma’lum tuzilishga ega bo’lishi va uni ichki barqarorligi, bog’liqligini ta’minlovchi, munosabatlarni shakllanishi zarur. Uning tuzilishi o’z navbatida tarkibiy qismlar o’rtasidagi o’zaro bog’liqlikka mazmun hamda tashkiliy tomondan belgilab beradi. Har qanday tizim ob’ektiv olamda mutlaqo alohida faoliyat ko’rsata olmaydi. U o’zidan boshqa katta tizimning tarkibiga kiradi.

Tizimli yondashuv pedagogik hodisalarni tadqiq qilishda ular mohiyatini chuqur anglash, qismlarga bo’lib va yaxlitlgicha tahlil qilish asosida bog’lanishlarni ochish imkoniyatini beradi. Tizimli yondashuv pedagogik hodisalar va qonuniyatlarni bir butun va uning tashkil etuvchi qismlar, umumiylikdan xususiylikka qarab tahlil qilish asosida ular o’rtasidagi o’zaro bog’lanishlarni gnoseologik mohiyatini ochish, tizimni tashkil etuvchi qismlar umumiy tizimda o’rni, bajaradigan funksional vazifalarini aniqlash orqali har birini o’ziga xos tomonlarini aniqlash demakdir.

Tizimlarni o’rganish uchun eng avvalo ularni boshqa tizimlardan farq qiluvchi belgilarini aniqlash lozim. Buning uchun tashkil etuvchi komponentlarini, maqsad va vazifasini, mazmun va mohiyatini aniqlash lozim.

Tizim uchun eng xarakterli xususiyati va uning tuzilishi bilan birga maqsad va natijadir. Maqsad va natija tizimni tashkil etuvchilarning eng muhimi bo’lib, uni tashkil etuvchi bosh komponent hisoblanadi.

Matematik modellashtirish bosqichlarining mazmuni va uning ketma-ketligi quyidagilardan iborat:

1. Muammoni qo‘yilishi va uni tahlil qilish. Maqsadning qo‘yilishi modellashtirishda muhim o‘rin egallaydi. Aniq qo‘yilgan maqsad asosiy elementlar va ular orasidagi boglanish tarkibi va miqdoriy xarakteristikasini aniqlaydi.

Modellashtirishning dastlabki bosqichida ma’lumotlar to‘planadi va tahlil qilinadi. Tahlil uchun tanlangan ma’lumotlarning to‘g‘ri ligi bu modellashtirishning so‘nggi natijalariga bog‘liq. To‘plangan ma’lumotlar absolyut miqdorlarda va yagona o‘lchov birliklarda ifodalanishi kerak. Bu bosqichda modellashtiriladigan ob’ekt va uni abstraksiyalashning muhim tomonlari va xossalari belgilanadi. Ob’ektning strukturasi va elementlari orasidagi asosiy bog‘lanishlar, uning o‘zgarishi va rivojlanishi bo‘yicha gipotezalarni shakllantirish masalalari o‘rganiladi.

2. Matematik modellar qurish. Bunda muammolar konkret matematik bog‘lanishlar va munosabatlar (funksiya, tengsizlik va hokazo) shaklida ifodalanadi. Matematik modellar qurish jarayoni matematika va iqtisodiyot bo‘yicha ilmiy bilimlarning o‘zaro uyg‘unlashuvidan iborat. Albatta, bunda matematik modelni yaxshi o‘rganilgan matematik masalalar sinfiga tegishli bo‘lishi uchun harakat qilinadi. Biroq, shunday bo‘ladiki, iqtisodiy masalani modellashtirish oldindan ma’lum bo‘lmagan matematik strukturalarga olib kelishi ham mumkin. XX asr o‘rtalaridan boshlab iqtisodiyot fani va uning amaliyoti ehtiyojlaridan kelib chiqib, matematik dasturlash, o‘yinlar nazariyasi, funksional analiz, hisoblash matematikasi fanlari ham o‘z rivojini topdi.

3. Modelni matematik tahlil qilish. Bu bosqichning maqsadi-modelning umumiy xossalarini ifodalashdan iborat. Bu yerda tadqiqotlarning matematik usullari qo‘llaniladi. Eng muhim joyi- tuzilgan modellarning yechimga egaligini isbotlashdir. Agar matematik masalaning yechimga ega emasligi isbot qilinsa, u holda qo‘yilgan matematik model rad etiladi. Shunga muvofiq, iqtisodiy masalaning qo‘yilishi yoki matematik modelini boshqacha ko‘rinishlari tadqiq etiladi. Modellarni analitik tadqiq etish ularni empirik (sonli) tadqiq qilishga nisbatan ustunlikka ega, chunki, olingan xulosalar modellardagi ichki va tashqi parametrlarning har xil qiymatlarida ham o‘z kuchini saqlaydi.

4. Dastlabki ma’lumotlarni tayyorlash. Modellashtirishda ma’lumotlar tizimiga muhim talablar qo‘yiladi. Shu bilan birgalikda ma’lumotlarni olish uchun real imkoniyatlar amaliy maqsadlarga mo‘ljallangan modellarni tanlash uchun

ma’lum chegaralar qo‘yadi. Ma’lumotlarni tayyorlash jarayonida ehtimollar nazariyasi, matematika, statistika, nazariy statistika usullaridan keng ko‘lamda foydalaniladi.

5. Sonli yechimlar. Bu bosqich qo‘yilgan masalani sonli yechish uchun algoritmlar, kompyuter uchun dasturlar tuzish va bevosita hisoblashlar o‘tkazish uchun mo‘ljallangan. Odatda matematik modellarda hisob-kitob ishlari ko‘pvariantli xarakterga ega.

6. Sonli natijalar tahlili va uning tadbiqlari. Bu so‘nggi bosqichda modellashtirish natijalarining to‘g‘riligi va to‘laligi haqidagi savollarga javob olinadi. Nazariy xulosalar va model yordamida bevosita olingan sonli natijalar o‘zaro taqqoslanadi. Shunga qarab qo‘yilgan iqtisodiy masala va modellarining yutuq yoki kamchiliklari aniqlanadi. Iqtisodiy-matematik model aniqlangandan so‘ng, unda ishtirok etayotgan omillarning natijaviy belgiga ta’sirining mukammalligi baholanadi. Agar model va unga kiritilgan barcha omillar talab etilgan ehtimol bilan mohiyatli bo‘lsa, u adekvat model deyiladi. Adekvat model bo‘lmagan holda uning ko‘rinishi o‘zgartiriladi. Yangi model oldingisidan mohiyatsiz omillarini chiqarish yo‘li bilan aniqlanadi. Shu natijalar asosida modellarni takomillashtirish, ularni axborot va matematik ta’minlash yo‘nalishlari aniqlanadi.

Birinchi bob bo`yicha savol va topshiriqlar

1. Modellashning kelib chiqish tarixi va uning nazariyasining asosiy tushunchalari
2. Modellashtirish maqsad va vazifalari
3. Model va modellashtirish tushunchalari
4. Kompyuterli modellashtirish *(sonli, imitatsion, statistik)*
5. Kompyuterli modellashtirish bosqichlari *(matematik, algoritmik va modellarning dasturiy ko‘rinishlari)*
6. Tizimlarning tashqi, ichki va chiquvchi parametrlari. Oddiy tizimning matematik modeli.
7. Matematik model klassifikatsiyasi. Nazariy va empirik modellar

8. Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan modellar. Modellarning linearizatsiya qilish. Uzluksiz, diskret va aralash modellar.

9. Matematik modellarning iyerarxiyasi

10. Matematik modellashtirish bosqichlar. Matematik modellar qurishning asosiy qonuniyatlari.

3-§. Xatoliklar arifmetikasi. Xatoliklarni aniqlashda differensial hisobini qo‘llash.

Taqribiy sonlar. Kompyuterlarda sonlar qo‘zg‘almas va suzuvchi vergul shaklida tasvirlanadi. Haqiqiy sonlar to‘plami cheksizdir, lekin kompyuterlarning sonlar tasvirlanuvchi qurilmasida chekli xonalarga ega bo‘lgan sonlar yozilishi mumkin. Shuning uchun haqiqiy sonlar kompyuterlarda taqribiy tarzda tasvirlanadi.

Taqribiy sonlar ustida amallar bajarilganda xatolikni baholash katta ahamiyatga ega.

Xatolik ikki xil bo‘ladi: absolyut va nisbiy xato.

Absolyut xato sonning aniq va taqribiy qiymatlari orasidagi farqdan iboratdir, ya’ni agar *X*-biror sonning aniq, $\overline{X}$ esa shu sonning taqribiy qiymati bo‘lsa, absolyut xatolik

$\Delta X = |X - \overline{X}|$ ga teng.

Nisbiy xato sonning absolyut xatosini uning taqribiy qiymatiga, nisbatiga teng, ya’ni

$\delta_X = \Delta X / \overline{X}$.

Sonlarning aniq qiymati ko‘p masalalarni yechishda noma’lum bo‘ladi. Shuning uchun absolyut xato tushunchasi kiritiladi: u absolyut xatolar modullarining yuqori chegarasidir, ya’ni

$\overline{X} \geq |X|$.

Sonning aniq qiymati quyidagi oraliqda bo‘ladi:

$\overline{X} - \Delta \overline{X} \leq X \leq \overline{X} + \Delta \overline{X}$

Arifmetik amallar bajarishda absolyut va nisbiy xatolarning o‘zgarishini ko‘rib chiqaylik.

Yig'indi (ayirma) xatoligi. Ikkita $X=\overline{x}+\Delta X$, $y=\overline{y}+\Delta y$ son berilgan bo'lsa, ularning yig'indisi $X+U=\overline{x}+\overline{y}+\Delta X+\Delta y$ bo'ladi. Yig'indining absolyut xatoligi $\Delta_{x+u}=\Delta_x+\Delta_u$ ga teng

Xuddi shunday, **ayirmaning absolyut xatoligi** $\Delta_{x-u}=\Delta_x-\Delta_u$ kabidir.

Ko'paytma xatoligi. Berilgan sonlarning ko'paytmasi quyidagicha topiladi:

$$x\cdot y=(\overline{x}+\Delta x)(\overline{y}+\Delta y)=\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{x}\cdot\Delta y+\overline{y}\cdot\Delta x+\Delta x\cdot\Delta y$$

Bu ifodada oxirgi ko'paytma boshqa hadlarga nisbatan ikkinchi darajali kichik miqdordir. Shuning uchun uni e'tiborga olmaymiz. Demak, ko'paytmaning absolyut xatoligi quyidagicha:

$$\Delta_{xy}=\overline{x}\cdot\Delta y+\overline{y}\cdot\Delta x$$

Bo'linma xatoligi. Bo'linmaning absolyut xatosini topish uchun ayrim almashtirishlarni bajaramiz:

$$\frac{x}{y}=\frac{\overline{x}+\Delta x}{\overline{y}+\Delta y}=\frac{\overline{x}+\Delta x}{\overline{y}(1+\frac{\Delta y}{\overline{y}})}$$

Nisbiy xato $\frac{\Delta y}{\overline{y}}<<1$ ekanligidan foydalanib $(1+\frac{\Delta y}{\overline{y}})^{-1}$ ifodani qatorga yoyamiz:

$$\frac{x}{y}=\frac{\overline{x}+\Delta x}{y}\left[1-\frac{\Delta y}{\overline{y}}+(\frac{\Delta y}{\overline{y}})^2-...\right]$$

Bu yerda ham ikkinchi va undan yuqori darajali kichik miqdorlarni hisobga olmagan holda

$\frac{x}{y}\approx\frac{\overline{x}}{\overline{y}}+\frac{\Delta x}{\overline{y}}-\frac{\overline{x}}{\overline{y}^2}\Delta y$ tenglikka keltiramiz. Bundan esa $\frac{\Delta x}{y}=\frac{\Delta x}{\overline{y}}-\frac{\overline{x}}{\overline{y}^2}\cdot\Delta y$ ga ega bo'lamiz.

Arifmetik amallarni bajarishda nisbiy xatolar quyidagicha topiladi:

$$\delta_{x+y}=\frac{\Delta(x+y)}{\overline{x}+\overline{y}}=\frac{\overline{x}}{\overline{x}+\overline{y}}\cdot\frac{\Delta\overline{x}}{\overline{x}}+\frac{\overline{y}}{\overline{x}+\overline{y}}\cdot\frac{\Delta y}{\overline{y}}=\frac{\overline{x}}{\overline{x}+\overline{y}}\cdot\delta_x+\frac{\overline{y}}{\overline{x}+\overline{y}}\cdot\delta_y;$$

$$\delta_{x-y} = \frac{\Delta x - y}{\bar{x} - \bar{y}} = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{y}} \cdot \delta_x - \frac{\bar{y}}{\bar{x} - \bar{y}} \cdot \delta_y;$$

$$\delta_{xy} = \frac{\Delta xy}{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\bar{x} \cdot \Delta y}{\bar{x} \cdot \bar{y}} + \frac{\overline{y} \cdot \Delta x}{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \delta_x + \delta_y;$$

$$\delta_{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x / y}{\bar{x} / \bar{y}} = \left(\frac{\Delta x}{\bar{y}} - \frac{\Delta y}{\bar{y}^2} \bar{x} \right) \frac{\bar{y}}{\bar{x}} = \delta_x - \delta_y$$

Taqribiy sonni **darajaga** oshirilganda, uning nisbiy xatoligi shu daraja ko'rsatkichiga ko'paytiriladi.

$$\delta(x^n) = n\delta(x)$$

Yuqorida keltirilgan formulalar arifmetik amallar bajarishda yo‘l qo‘yiladigan absolyut va nisbiy xatolarni baholash imkoniyatini beradi.

Qiymatli raqam va ishonchli belgi tushunchalari. O‘nli kasr ko‘rinishida yozilgan sonning chapdan noldan farqli raqamdan boshlangan barcha raqamlariga qiymatli raqamlar deyiladi.

Argumentlarning taqribiy qiymatlari uchun funksiya qiymatining xatoligini baholash masalasini ko‘raylik. Bizga

$Y=f(x_1, x_2,\dots,x_n)$ differensiallanuvchi funksiya berilgan bo‘lib, uning argumentlarining aniq kiymatlari ma’lum bo‘lmay, faqat taqribiy qiymatlari ma’lum bo‘lsin. Argumentlarning absolyut xatoliklari $\Delta x_i (i=1,2,\dots,n)$ kabi bo‘lsin. U holda funksiya qiymatining absolyut xatoligi

$$|\Delta u| = |f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2,\dots,x_n+\Delta x_n) - f(x_2, x_2,\dots,x_n)|$$

bo‘ladi. Δx_i qiymatlar juda kichik bo‘lganligidan, amalda ularning ko‘paytmalari, kvadratlari , yuqori darajalarini hisobga olmasa ham bo‘ladi. Shuning uchun,

$$\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| f'_{Xi}(x) \right| \Delta_{x_i} \;.\; \delta_y = \frac{\Delta_y}{|f(x)|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{f'_{Xi}}{f(x)} \right| \Delta_{xi}$$

Hisoblash xatoliklari. Masalani kompyuterda yechish jarayonida muayyan xatoliklarga yo‘l qo‘yish mumkin. Jumladan:

1. Bartaraf qilish mumkin bo‘lmagan xatoliklar. Bu xildagi xatoliklar masalani yechishda tuzilgan matematik modelda yo‘l qo‘yilgan taxminlar, farazlar va shuning oqibatida modelda paydo bo‘lgan ayrim kamchiliklar bilan aniqlanadi.

Masalan, matematik model unga kiruvchi o‘zgaruvchilar va parametrlarning o‘zgarish sohasining ma’lum bir qismida yaxshi natijalar berib, boshqa bir qismida esa yaroqsiz yechim berishi mumkin. Shuning uchun matematik modelning "ishlash" sohasini topish masala yechish bosqichlaridagi hal qilinishi lozim bo‘lgan asosiy vazifalardan biridir.

Bartaraf qilish mumkin bo‘lmagan xatoliklarga matematik modellarda ishlatiluvchi parametrlarning dastlabki berilgan qiymatlarining xatoliklari ham kiradi. Parametrlarning bu qiymatlarni har xil fizik, texnik, kimyoviy tajribalar, muhandislik izlanishlari asosida topiladi. Ayrim parametrlar esa dastlabki hisob-kitoblar orqali asoslanadiki, bu bosqichning o‘zidayoq ularga hisoblash xatoliklari qo‘shiladi. Tajribalar aniqligini oshirib bu xatoliklarni kamaytirish mumkin, lekin ularni batamom bartaraf etib bo‘lmaydi. Hisoblashlarda matematik modelda qatnashuvchi parametrlarning dastlabki qiymatlari bir-biriga yaqin tartibdagi xatoliklarga ega bo‘lishiga erishish zarur. Chunki ma’lum parametrlarning juda yuqori tartibdagi aniqlik bilan olinishi yakuniy natijalarni ham shunday aniqlikda olishga hamma vaqt imkoniyat yaratmaydi.

2. Matematik usullarning xatoliklari. Matematik modeldagi tenglamalarni hamma vaqt ham aniq usullar bilan yechib bo‘lmaydi. Faqat ayrim xususiy hollardagina buning imkoniyati mavjud. Lekin olingan yechim ko‘pincha juda murakkab ko‘rinishda bo‘ladi, ular asosida topilgan ko‘rsatkichlarning son qiymatlarini kompyuterda hisoblash o‘z navbatida oson masala emas. Bunday hollarda masala taqribiy usullar yordamida yechiladi. Tabiiyki, bunda aniq yechim emas, balki taqribiy yechim hosil qilinadi.

Taqribiy usullarning asosini sonli usullar tashkil qiladi. differensial hisob usullarning aniqligini ma’lum darajada oshirish mumkin, lekin, bu usulning ishlashiga ketadigan vaqt miqdorini keskin ko‘paytirib yuborishi mumkin. Differensial hisob usul aniqligini o‘ta oshirish hamma vaqt ham natijalarning aniqligini oshiravermaydi. Shuning uchun sonli usullarning aniqligini matematik modelga kiruvchi parametrlar aniqligidan bir-ikki tartib yuqoriroq olish bilan cheklanish mumkin.

Differensial hisob usullarga qo‘yiladigan talablar. Matematik modeldagi tenglamalarni har xil sonli usullar bilan yechish mumkin. Lekin hamma usullar ham kerakli aniqlikdagi yechimni beravermaydi. Ayniqsa masala hozirgi zamon kompyuterlarida yechilganda hisoblash algoritmi turli, o‘ziga xos shartlarni bajarishi kerak. Sonli usullarga qo‘yiladigan talablar ikki guruhga bo‘linadi. Birinchi guruhga sonli usullar qo‘llanishi natijasida hosil qilingan diskret(uzuq-uzuq) masalaning matematik modeldagi dastlabki masalaga mos kelish shartlari kiradi. Sonli usullarning yaqinlashishi, diskret masalalarda saqlanish qonunlarining bajarilishi, turg‘unlik, korrektlik kabi talablar birinchi guruhga kiradi. Shulardan ayrimlarini qarab o‘tamiz.

Matematik modeldagi parametrlarning dastlabki qiymatlaridagi xatolikni bartaraf etish mumkin bo‘lmagan xatolik ekanligini yuqorida ko‘rsatgan edik. Bu xatolikni masala yechimiga ko‘rsatadigan ta’sir darajasini bilish katta ahamiyatga ega. Sonli usullarning bunday sezuvchanligini (ta’sirchanligini) turg‘unlik degan tushuncha yordamida tekshirish mumkin.

Agar quyidagi shartlar bajarilsa, masala korrekt qo‘yilgan deyiladi: 1) masalada yechim mavjud; 2) yechim yagona; 3) turg‘un.

Ko‘rsatilgan shartlardan birortasi bajarilmasa, masala korrekt qo‘yilmagan deyiladi. Bunday masalalarga sonli usullarni qo‘llash foydasizdir, chunki bunda yetarli darajadagi shartlarni qanoatlantiruvchi sifatli yechimni olish imkoniyati yo‘qdir. Shuni ham aytish kerakki, ayrim korrekt qo‘yilmagan masalalarni yechish usullari ham yaratilgan. Bu usullar dastlabki qo‘yilgan masalani yechishga asoslangandir. Yordamchi masalada qo‘shimcha α parametr qatnashadi. Shunday yo‘l bilan dastlabki masala regulyarlashtiriladi. Agar $\alpha \to 0$ bo‘lsa, yordamchi masalaning yechimi dastlabki masalaning yechimiga intilishi kerak.

Yuqoridagiga o‘xshash sonli usullarning korrektlik tushunchasi kiritilgan. Agar masaladagi parametrlarning barcha qiymatlarida sonli yechim mavjud, yagona va turg‘un bo‘lsa, u korrekt deyiladi.

Sonli usullar bilan topilgan yechim masalaning xaqiqiy yechimiga yaqin bo‘lishi kerak. Buni sonli usullarning yaqinlashishi tushunchasi yordamida tahlil qilishimiz mumkin. Diskretlashgan masalalar misolida yaqinlashish tushunchasini quyidagicha berishimiz mumkin. Agar diskretlashtirilgan masalaning yechimi diskretlashtirish parametri nolga intilganda dastlabki uzluksiz masalaning yechimiga intilsa, sonli usul yaqinlashadi deyiladi.

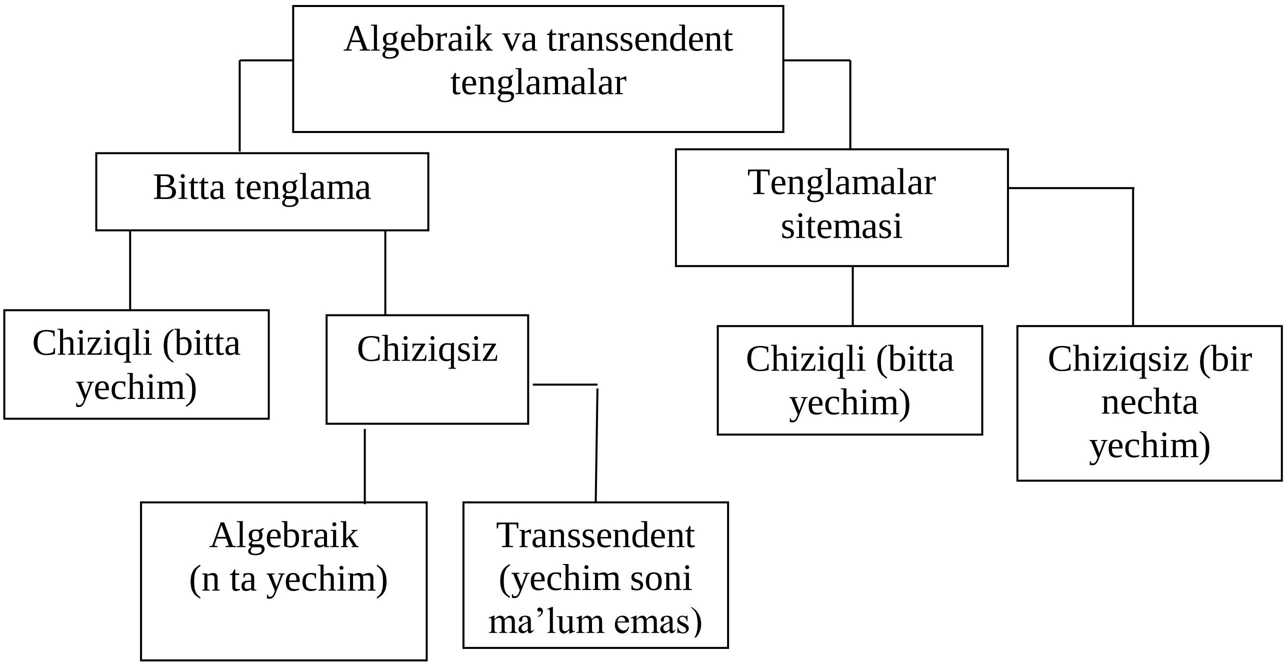
Sonli usullar ichida eng ko‘p ishlatiladiganlari ayirmali usullardir. Bu usullar yordamida uzluksiz matematik modellardan diskret modellar hosil qilinadi. Buning uchun masala qaralayotgan soha diskret nuqtalar majmuasi - to‘r bilan almashtiriladi, tenglamadagi, chegaraviy va boshlang‘ich shartlardagi xossalardan chekli ayirmalarga o‘tiladi. Natijada to‘rning tugun nuqtalarida aniqlangan funksiyalarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasi hosil qilinadi. Ma’lumki, matematik modellar asosida yotuvchi tenglamalar aksariyat hollarda fizika, mexanikadagi saqlanish qonunlari asosida tuziladi. Bu qonunlar matematik modeldagi tenglamalar diskret tenglamalar - chekli ayirmali sxemalar bilan almashtirilganda ham bajarilishi kerak. Bunday chekli ayirmali sxemalarga konservativ sxemalar deyiladi. Konservativ sxemalar tenglamalar yechimini fizik nuqtai nazardan to‘g‘ri olish imkoniyatini beradi. Shuning uchun chekli ayirmali sxemalarning konservativlik sharti masalalar yechishda boshqa shartlar qatori tekshirilishi kerak.

Sonli usullarga qo‘yiladigan talablarning ikkinchi guruhini diskret modelni kompyuterda o‘tkazish imkoniyatlari tashkil qiladi. Sonli usullar shunday algoritmlarga olib kelishi kerakki, kompyuterning xotira qurilmasi ular uchun yetarli bo‘lishi kerak va hisob-kitob vaqti iloji boricha kam bo‘lishi kerak.

Sonli usullarga qo‘yiladigan talablarning ikkinchi guruhini diskret modelni kompyuterda o‘tkazish imkoniyatlari tashkil qiladi. Sonli usullar shunday algoritmlarga olib kelishi kerakki, kompyuterning xotira qurilmasi ular uchun yetarli bo‘lishi kerak. Hisoblash algoritmlari yetarli samaradorlikka ega bo‘lishi kerak. Algoritmdagi arifmetik va mantiqiy amallar soni iloji boricha kam bo‘lib, u kompyuterning xotira qurilmasida kam hajmni egallashi kerak.

4-§.Algebraik va transsendant tenglamalarni taqriban yechish usullari.

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar va ularning sistemalariga ko‘pgina ilmiy izlanishlarda va muhandislik - loyihalash masalalarini yechishda duch kelamiz.



Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni rasmdagiday ikki xilga bo‘lish mumkin: algebraik va transsendent.

1-ta’rif. Chap tomoni n-darajali ko‘pxaddan iborat ushbu :

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n- +}{}_nx+A=0 \qquad (1)$$

ifoda bir noma’lumli algebraik tenglama deyiladi.

Bunda $A_0,A_1, \dots ,A_n$ - algebraik tenglamaning koeffitsentlaridan iborat, $A_0\neq0$.

2-ta’rif. Tarkibida transsendent (ko‘rsatkichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik va xokazo) funksiyalar mavjud bo‘lgan tenglamalar transsendent tenglamalar deyiladi.

Agar algebraik va transsendent tenglamalarning chap tomonini qisqacha *f(x)* orqali belgilasak, bu tenglamalarni

$$f(x) = 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

3 – t a ‘ r i f. $f(x) = 0$ tenglamani chap tomonidagi funksiyani nolga aylantiruvchi $x=x_0$ kiymat bu tenglamaning ildizi deyiladi.

Chiziqsiz tenglamalarni yechish usullari ikkita guruhga bo‘linadi: aniq (to‘g‘ri) va iteratsion (taqribiy) usullar. Aniq usul yordamida tenglamaning yechimi formulalar orqali aniqlanadi. Masalan, kvadrat tenglamaning yechimini topishni shu usulga misol sifatida ko‘rsatish mumkin:

$ax^2+vx+s=0$ -chiziqsiz tenglamani yechimlari:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Iteratsion usullar bilan chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni yechish bir necha bosqichga bo‘linadi. Birinchidan, yechimlar sonini, ularning sonlar o‘qida taqsimlanishini baholash kerak.

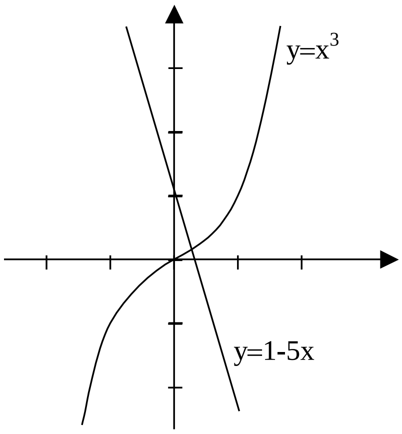
Ildizlarni ajratish uchun ma’lum qadam bilan o‘zgaruvchi x larda f(x) funksiyaning qiymatlarini hisoblab qurish mumkin. Agar yonma-yon ikkita a va b nuqtalarda f(x)funksiya har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya’ni $f(a)*f(b)<0$ bo‘lsa, f(x) funksiya uzluksiz bo‘lganligi uchun [a,b] kesmada uning hech bo‘lmaganda bitta ildizi bo‘ladi.

Iteratsion usullarda ilgari ko‘rilganidek yechimning dastlabki x_0 ixtiyoriy yaqinlashishi olinadi va u ketma-ket aniqlashtirilib boriladi. Natijada yechimning $x_{0,}x_1,..., x_n,..$ ketma-ketligi hosil qilinadi. Agarda bu ketma-ketlik $n\to\infty$ bo‘lganda aniq x yechimga intilsa, iteratsiya jarayoni yaqinlashadi deyiladi.

Yechimning taqribiy qiymatini topish uchun grafik usuldan ham foydalanish mumkin. Bunda f(x) funksiyaning aniqlanish sohasida grafigi chizilib, uning Ox o‘qi bilan kesishgan nuqalari topiladi. Bu nuqtalarga mos keluvchi x lar taqribiy yechim deb qabul qilinadi. Ayrim hollarda f(x)=0 tenglamani unga teng kuchli bo‘lgan $f_1(x)=f_2(x)$ ko‘rinishda tasvirlanadi. Keyin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning grafiklari alohida- alohida chizilib, ikkala grafikning kesishish nuqtalari topiladi. Bu nuqtalarning abssissalari ildizlarning taqribiy qiymatlari deb qabul qilinadi. Taqribiy ildiz yotgan [a,b] kesmani haqiqatda to‘g‘ri olinganligini analitik yo‘l bilan tekshirib ko‘rish mumkin. Buning uchun yana ildizning mavjudlik sharti f(a)f(b)<0 dan foydalanamiz. Agar shart bajarilsa oraliq to‘g‘ri tanlangan bo‘ladi.

M i s o l. Ushbu $f(x)=X^3+5X-1$ tenglamaning taqribiy ildizini $\varepsilon=0,01$ aniqlikda toping.

Ye ch i sh. Avvalo ildizni ajratib olishimiz kerak. Buning uchun $f_1(x)=X^3$ va $f_2(x)=1-5X$ funksiyalarning grafigini chizib olamiz (5-rasm). x=0 va x=1 nuqtalarda f(x) funksiya har xil ishorali qiymatlariga ega:



5-rasm

$f(0)=-1<0$, $f(1)=5>0$.

Demak, ildiz [0;1] kesmada yotadi.Oraliq aniqlangach, turli usullardan birini ishlatib, kerakli aniqlikdagi yechimni olish mumkin.

Iteratsion usullarning ayrimlarini quyida qaraymiz.

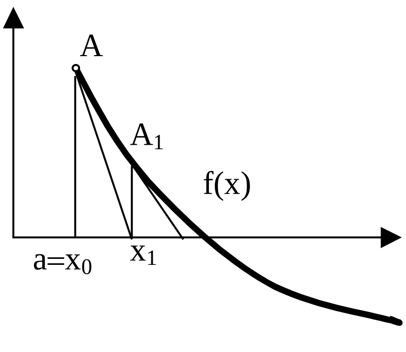
1. Kesmani ikkiga bo‘lish

Bu usul iteratsion usullar ichida eng soddasidir. Uni ishlatish uchun maxsus shartlarning bajarilishi talab qilinmaydi. Faqat izlanayotgan ildiz ajratilgan bo‘lishi kerak ya’ni x=s ildiz [a,v] kesmada yotgan bo‘lsin. Kesmaning o‘rtasi $s_0=(a+v)/2$ da $f(c_0)$ni hisoblaymiz. Berilgan [a,b] kesmani ikkita teng $[a, c_0]$, $[c_0,b]$ kesmalarga bo‘lib, ularning chetlarida f(x) funksiyaning ishoralarini tekshiramiz. qaysi kesmaning chetki nuqtalarida f(x) har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, x=s ildiz o‘sha kesmada bo‘ladi. U yoki bu kesmada shunday bo‘lishi aniq, chunki ildiz [a,b] kesmada yotadi. Ildiz yotmagan [a, c_0] yoki [c_0,b] kesmani tashlab yuborib, qolgan kesmani yana ikkiga bo‘lamiz. Masalan f(a) f(c_0)<0 bo‘lsa, c_1=(a+ c_0)/2 deb olib, f(c_1) ni hisoblaymiz. Yana [a, c_1],[c_1,c_0] kesmalarda f(x)ning ishoralari tekshiriladi va hokazo. Shunday qilib, har bir iteratsiyadan so‘ng kesma uzunligi ikki baravar qisqarib boradi.

Bu jarayonni to kesma uzunligi ε dan kichik bo‘lmaguncha davom ettiriladi. Bunda ε - yechim aniqligi. Oxirgi kesmaning o‘rtasi taqribiy yechim sifatida qabul qilinadi.

Yuqorida qayd qilingan ijobiy hislatlari bilan birga dixotomiya - kesmani ikkiga bo‘lish usulining kamchiligi -sekin yaqinlashishini ham aytib o‘tish lozim. Shuning uchun bu usul ketma-ket yaqinlashishlarning yuqori tezligi talab qilinmagan hollarda ishlatiladi.

2. **Urinmalar usuli.** Kesmani teng ikkiga bo‘lish usulidagi amallar sonining ko‘pligi urinmalar usulida deyarli uchramaydi. Agar dastlabki yaqinlashish to‘g‘ri tanlansa, taqribiy yechim juda tez topiladi. Usulning mohiyati quyidagicha:



f(x)=0 tenglama [a,b] oralivda bitta tavribiy ildizga ega deb faraz qilaylik. Dastlabki yaqinlashish sifatida a yoki b nuqtalardan birini olishimiz mumkin va shu nuqtadan urinma o‘tkazamiz. Aytaylik urinma A nuqtadan o‘tsin. Urinmaning x o‘qi bilan kesishgan nuqtasi x_1 ga mos nuqtani A_1 deb olib, endi A_1 nuqtadan urinma o‘tkazamiz, va hokazo. Urinmaning x o‘qi bilan kesishgan nuqtalari taqribiy ildiz x ga yetarli aniqlikkacha yaqinlashguncha jarayon davom etadi.

Demak, x_0 ni to‘g‘ri tanlash juda muhimdir. Shuning uchun dastlabki yaqinlashish x_0 ni tanlash masalasiga alohida e’tibor beramiz.

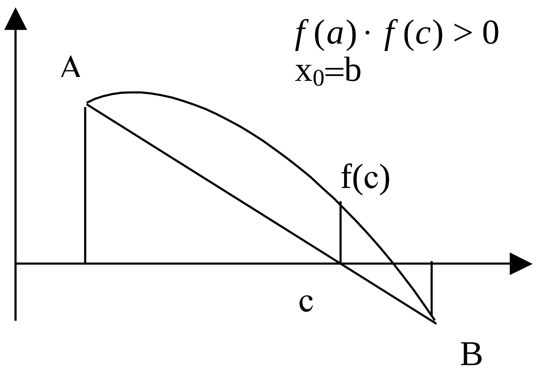
Buning uchun (a,f(a)) va (b,f(b)) nuqtalardan o‘tuvchi vatarni ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi s ning qiymatini to‘g‘ri chiziq tenglamasidan aniqlaymiz.

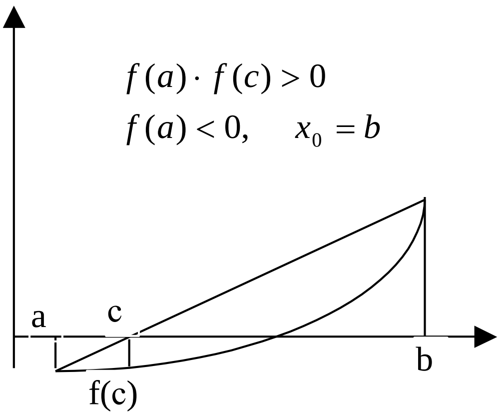
$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}. \qquad (5.1)$$

Vatarning Ox o‘qi bilan kesishish nuqtasi c_0 da x= c_0, u=0 bo‘ladi.

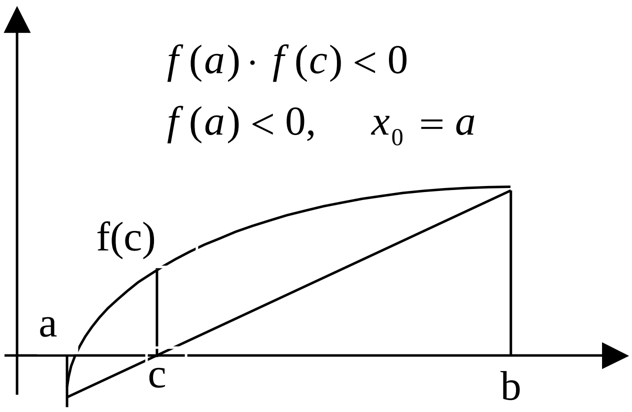
$$c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

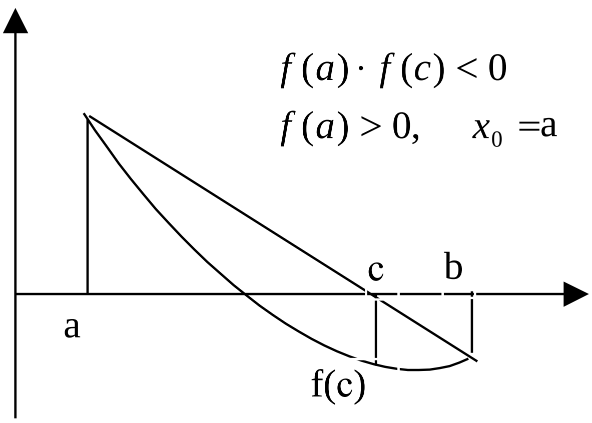
s ma’lum bo‘lgach, f(s) ning qiymatini hisoblash mumkin. Bo‘lishi mumkin bo‘lgan barcha hollarni ko‘rib chiqaylik:





1) 2)





3) 4)

1) f(a)>0 va f(a)f(c)>0 ,bo‘lsa x_0=b

2) f(a)<0 va f(a)f(c)>0 ,bo‘lsa x_0=b

3) f(a)<0 va f(a)f(c)<0 ,bo‘lsa x_0=a

4) f(a)>0 va f(a)f(c)<0 ,bo‘lsa x_0=a

SHartlarni umumlashtirib olib, f(a)f(c) ko‘paytmaning ishorasi musbat-manfiyligiga qarab, a yoki v qiymatlardan birini x_0 sifatida olish mumkin. Endi urinma tenglamasi u-f(x_0) =f`(x_0)(x- x_0) dan urinma x o‘qi bilan kesishgani uchun u=0 deb olamiz.

x- x_0=-f(x_0)/f’(x_0) bundan x_n= x_{n-1}-f(x_0)/f’(x_0);

Hosil bo‘lgan ishchi formula urinmalar usulining asosiy ishchi formulasi bo‘lib, hisoblashlar $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ sharti bajarilguncha davom ettiriladi.

3. Vatarlar usuli. Bu usulining mohiyati quyidagicha: bu usulda ham ildiz yotgan [a,v] kesma aniq deb hisoblaymiz. Ildizga yaqinlashuvchi c_0..., c_n,... ketma-ketlikni f(x) funksiyaning vatarlarini Ox o‘qi bilan kesishish nuqtalari tashkil qiladi.

Shuning uchun (5.1) tenglamadan

$$c_0 = a - \frac{b-a}{f(b) - f(a)} f(a) \qquad (5.2)$$

ni hosil qilamiz. Bu nuqtada $f(c_0)$ ni hisoblaymiz. Rasmda ko‘rsatilgan hol uchun $f(c_0)<0$. Demak, yechim [a, c_0] kesmada bo‘ladi. Ikkini vatarni A va V_1 nuqtalardan o‘tkazamiz. U Ox o‘qini c_1 nuqtada kesib o‘tadi. Bu jarayonni davom ettirib kerakli aniqlikdagi yechim topiladi.Demak formula vatarlar usulining asosiy ishchi formulasi ekan.

Nyuton (urinmalar) usuli. Bu usulda birinchi navbatda X_o-dastlabki yaqinlashishni tanlab olinadi,ya’ni taqribiy ildiz yotgan [a,v] kesma uchlaridan birini Xo sifatida olish mumkin.

4. **Birlashgan usul.** Ayrim hollarda (5.1) tenglamaning ildizini tezroq topish uchun vatarlar va urinmalar usullari birgalikda ishlatiladi.

Bu birlashgan usulni tushunish uchun rasmlarda ko‘rsatilgan hollarni yana bir bor qaraymiz. Misol uchun rasmda tasvirlangan $f'(x)<0$, $f''(x)>0$ hol o‘rinli bo‘lsin. Boshqa hollar ham xuddi shunday tahlil qilinishi mumkin. A va V nuqtalardan vatar o‘tkazib, uning Ox o‘qi bilan kesishgan c_0 nuqtasini topamiz. Bu nuqta vatarlar usulida keltirib chiqarilgan (5.2) formula bilan topiladi. Izlanayotgan yechim (a, c_0) kesmada bo‘ladi. Endi A nuqtadan urinma o‘tkazamiz va uning Ox o‘qi bilan kesishgan nuqtasi b_0 ni topamiz. $b_0 = a - f(a)/f'(a)$.

Shunday qilib, yechim yotgan [a,b] kesma [b_0 , c_0] kesmagacha qisqartirildi. Xuddi shu yo‘sinda o‘ng tarafdan vatarlar usuli va chap tarafdan urinmalar usuli bilan yaqinlashib x=s ning taqribiy qiymati topiladi.

Yechimning qaysi tarafidan qaysi usul bilan yaqinlashish kerakligini urinmalar usulidagi f'(x)f''(x)>0 shartning bajarilishiga ko‘ra aniqlaymiz. Agar bu shart [a,b] kesmaning yoki bu kesmani o‘z ichiga oluvchi ixtiyoriy kesmaning chap yoki o‘ng chetlarida bajarilsa, shu tarafdan urinmalar usuli, qolgan tarafdan esa vatarlar usuli ishlatiladi.

Bu usulda ketma-ket yaqinlashishlar f(x)=0 tenglama

$$x=\varphi(x) \qquad (5.3)$$

ko‘rinishga keltirib tuziladi.

[a, b] kesmada ihtieriy x_0 yechimning boshlang‘ich yaqinlashishini aniqlaymiz. Buni (1) tenglamaning o‘ng tarafiga qo‘yib, chap tarafda yechimning birinchi yaqinlashishini topamiz:

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Topilgan yaqinlashishni ketma-ket (1) ning o‘ng tarafiga qo‘yib borib, chap tarafda yangi yaqinlashishlari topamiz:

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\ n=0,1,2,... \qquad (5.4)$$

Agar $x_0,x_1,...$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo‘lsa, u (5.3) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Iteratsiya jarayoni $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ shart bajarilguncha davom ettiriladi.

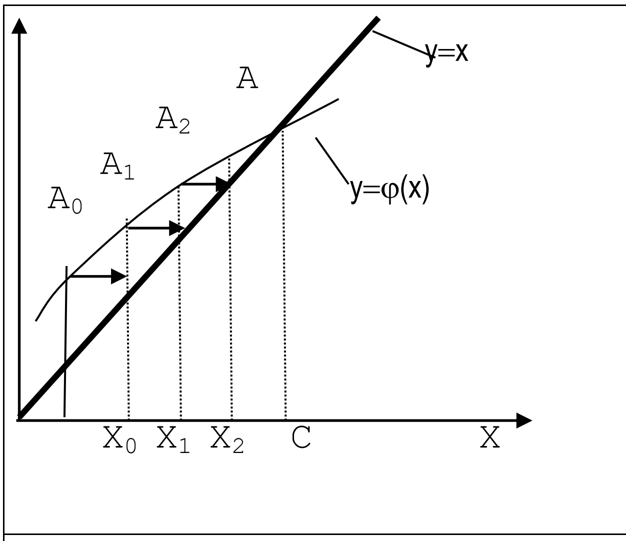
Iteratsiya usulining yaqinlashish masalasiga to‘xtab o‘tamiz. Yuritiladigan mulohazalar 9-rasmda o‘z tasvirini topgan. (5.3) tenglamaning yechimi u=x va u=φ(x) funksiyalar grafiklarining kesishgan nuqtasining absissasiga teng. Rasmlarda u x=s nuqtaga mos keladi.

Iteratsiya usulining umumiy algoritmiga binoan $x=x_0$ dastlabki yaqinlashishni tanlab olamiz. Birinchi yaqinlashish $x_1 = \varphi(x_0)$ bo‘ladi. Bu geometrik nuqtai nazardan φ(x) nuqtaga mos keluvchi $A_0(x_0,\varphi(x_0))$nuqtadan Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazib, uning u=x to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtasining abssissasini topish demakdir. Bu nuqtada $\varphi(x_1)$ ni hisoblaymiz. Buning natijasida $A_0(x_1,\varphi(x_1))$ nuqta topiladi. Bu nuqtadan yana Ox o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasining abssissasi, ya’ni $x_2=\varphi(x_1)$ni topamiz va h. k. 40-a rasmdan ko‘rinib turibdiki, A_0, A_1,... nuqtalar A(s,φ(s)) nuqtaga yaqinlashib boradi va o‘z navbatida $x_0, x_1, \ldots$ ketma-ketlik x=s limitga intiladi. Demak,0<φ'(x)<1 bo‘lganda iteratsiya jarayoni yaqinlashar ekan.

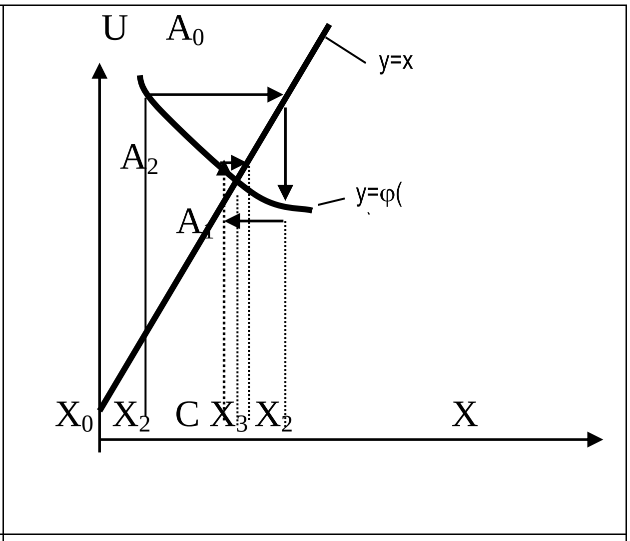
Endi -1<φ'(x)<0 bo‘lgan holni qaraymiz (rasm). Ketma-ket yaqinlashishlar rasmda strelkalar yordamida yaqqol ko‘rsatilgan. Bunda, faqat, oldingi holdan farqli ravishda x_0, x_1 ... yaqinlashishlar x=s yechimning har xil tarafida yotadi. Bu holda ham yaqinlashuvchi iteratsiya jarayoniga ega bo‘ldik.

Qolgan φ'(x)<-1, φ'(x)>1 (40-v, g rasmlar) hollarda iteratsiya jarayoni uzoqlashuvchi bo‘ladi, φ'(x)<-1 bo‘lganda yaqinlashishlar x=s yechimning ikkala tarafida uzoqlashib boradi. φ'(x)>1 bo‘lganda esa ular yechimning bir tarafida uzoqlashadi.

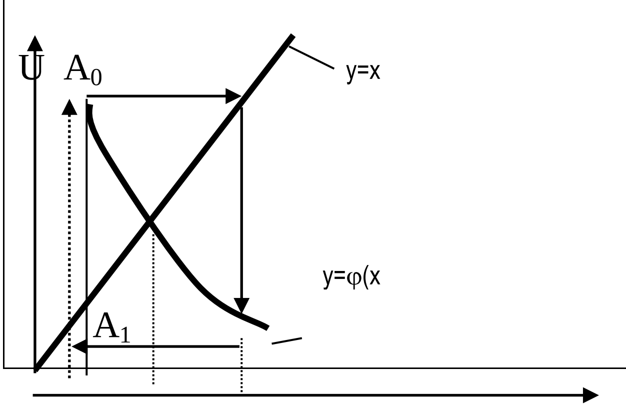
Bu mulohazalarni yakunlab quyidagi xulosaga kelamiz: iteratsiya usuli qaralayotgan sohada *|φ'(x)|<1* bo‘lganda yaqinlashadi va *|φ'(x)|≥1* bo‘lganda uzoqlashadi.

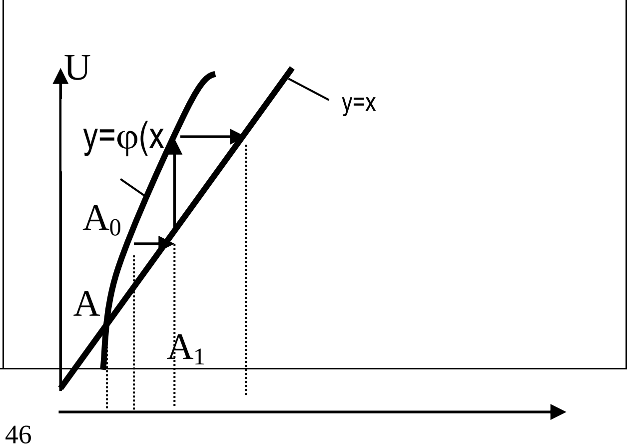


a)



b)





X_2 X_0 C X_1 X	C X_0 X_1 X_2 X
v)	g)

Yana (5.1) tenglamani qaraymiz. Uni x=0.5 +yexr (-0,5x) (5.5) ko‘rinishdan yozib olamiz.

Iteratsiya usulining yaqinlashish shartini [1;1,5] kesmada tekshirib ko‘ramiz. Tenglamaning o‘ng tarafi - φ(x)=0,5+yexr(-0,5x) funksiya φ(1)≈1,106dan φ(1,5)≈0,972 gacha monoton kamayib boradi. Uning φ'(x)=-0,5 yexr (-0,5) xosilasi ham monoton funksiya bo‘lib, φ'(1) = -0,303 dan φ'(1,5) ≈-0,236 gacha o‘sadi. Demak, qaralayotgan [1;1,5] kesmada |φ'(x)|<1 shart bajariladi. Shu sababli (5.9) tenglama uchun iteratsiya usuli yaqinlashadi. Yechimning dastlabki yaqinlashishi sifatida x_0=1,5 ni olib iteratsiyalar tuzamiz:

x_1=0,5+yexr(-0,5.0,5)≈0,9724

x_2=0,5+yexr(-0,5.0,9724)≈1,115

x_3=0,5+yexr (-0,5.1,115)≈1,073,

....

Iteratsiyalarni davom ettirib 11-qadamda $\varepsilon=10^{-6}$ aniqlikda x=1,082128 taqribiy yechimini topamiz. -1<φ'(x)<0 bo‘lganligi uchun ketma-ket yaqinlashishlar yechimning ikkala tarafidan bo‘ladi. Yuqorida keltirilgan yaqinlashishlarga qarab bunga ishonch hosil qilishimiz mumkin.

Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulining ishchi algoritmi va dasturi

Chiziqsiz tenglamani taqribiy yechishning oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulini ishchi algoritmi bilan to‘liqroq tanishib chiqaylik.

(5.3) tenglamaning E aniqlikdagi (E-o‘ta kichik son, yechimni topish aniqligi) taqribiy-sonli yechimini (a;b) oraliqda topishni quyidagi algoritm bo‘yicha tashkil qilamiz:

1. Berilgan (a;b) oraliqni o‘rtasini aniqlaymiz.

$$C = \frac{a+b}{2}$$

2. Yechimni [a;c] yoki [c;b] oraliqdaligini

$f(a)\cdot f(c)<0$

shartidan foydalanib aniqlaymiz.

3. Shartni qanoatlantiradigan oraliqni yangi oraliq sifatida olamiz va uni yana teng ikkiga bo‘lib, yuqoridagi ishlarni yana takrorlaymiz.

Natijada, qandaydir qadamdan so‘ng tenglamaning aniq yoki talab qilingan aniqlikdagi taqribiy ildizini hosil qilamiz

Yangi oraliq uchun yuqoridagi ishlarni qayta takrorlaymiz va buni oraliq uzunligi Ye-dan kichik bo‘lmaguncha davom ettiramiz. Oxirgi oraliqdagi ixtiyoriy nuqtani tenglamaning taqribiy yechimi sifatida qabul qilish mumkin.

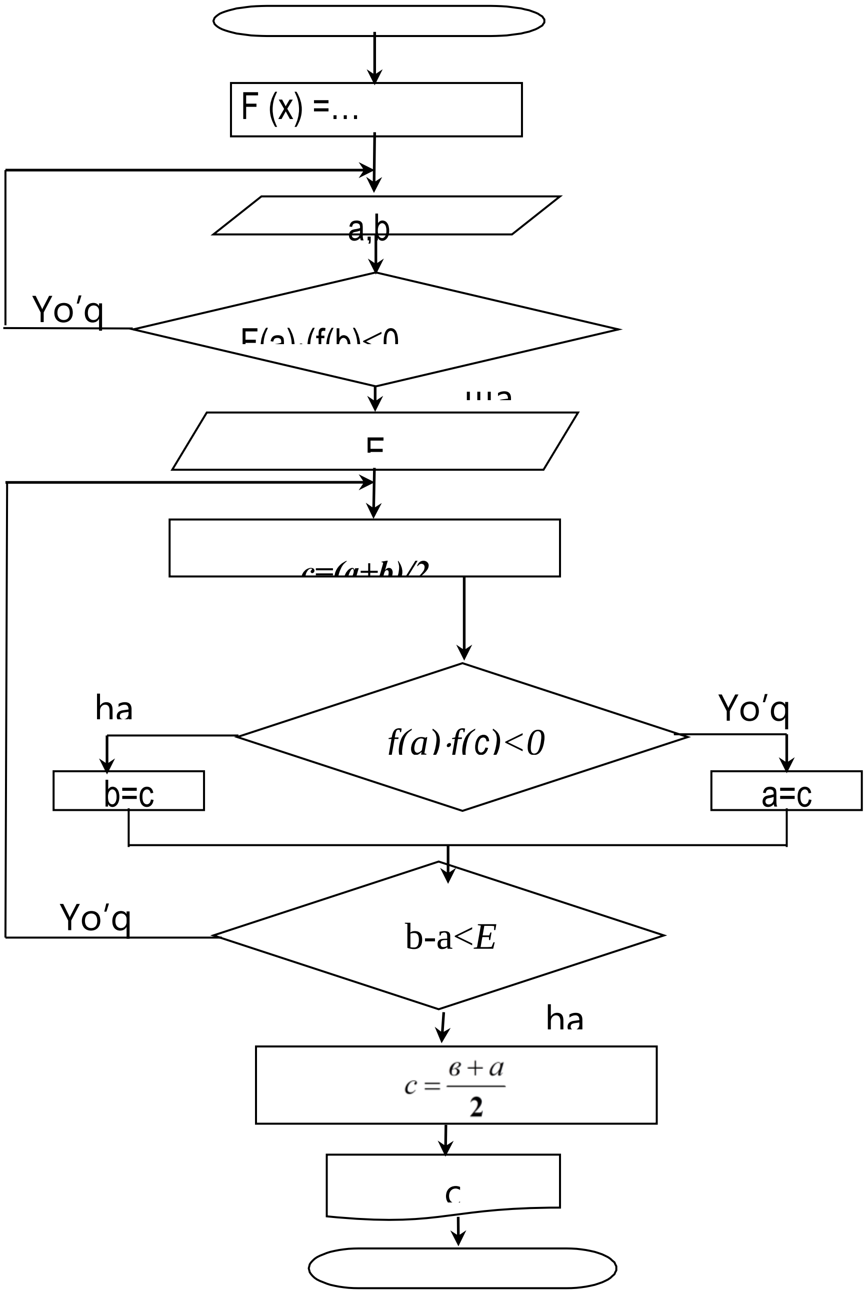
Tanishib chiqqan algoritm bo‘yicha biror dasturlash tilida dastur tuzishdan avval masalani yechish algoritmini blok-sxemalar orqali ifodalab olamiz.

Algoritmning PASCAL dasturi:

```
Program_Teng ikkiga bolish;
label L1, L2;
var a, b, c, eps : real;
function F(x : real) : real;
begin F:=....
end ;
begin
   L1: writeln('a,b=’); readln( a, b);
   if f(a)*f(b)>0 then goto L1;
   readln(eps);
   L2:C:=(a+b)/2;
   if f(a)*f(c)<0 then b:=c else a:=c;
   if abs(b-a)>eps then goto L2;
   c:=(a+b)/2;
   writeln ('tenglama yechimi= ', c, 'echim aniqligi=’,  f(c));
end.
```

Masala yechimi algoritmning

<u>B l o k - s x ye m a s i</u>



Ketma-ket yaqinlashish usulining ishchi algoritmi va dasturi.

Yuqorida aytganimizdek oraliqni teng ikkiga bo'lish usulining asosiy kamchiligi bajariladigan amallar sonining ko'pligidir, bu esa dasturni kompyuterda bajarilish vaqtini keskin orttirib yuboradi. Bu kamchilikni to'ldiradigan usullardan biri oddiy ketma-ketlik usulidir.

Usulning ishchi algoritmi (5.3) tenglamani

$x=\varphi(x)$, bu yerda $|\varphi'(x)|<<1$

ko‘rinishga keltirib yechishga asoslangandir, ya’ni:

$$x_n=\varphi(x_{n-1}), \quad n=1,2,.... \quad (5.5)$$

X_0-yechimning boshlang‘ich qiymati. Tenglama yechimini aniqlash $|x_n-x_{n-1}|<E$ sharti bajarilguncha, (3) rekkurent formula bo‘yicha davom ettiriladi. Bu shartning bajarilishi tenglama yechimining Ye nisbiy aniqlikda aniqlanganligini bildiradi.

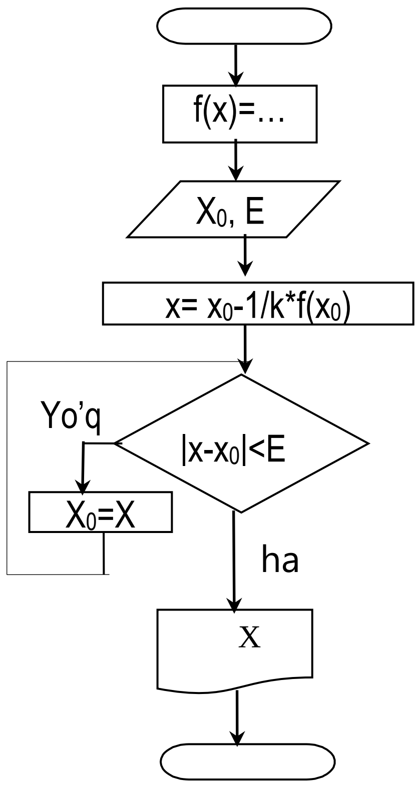
Berilgan funksiyani yuqoridagi ko‘rinishga keltirishdan qutilish maqsadida quyidagi almashtirishlarni bajarish mumkin. f(x)=0 tenglamani щar ikkala tomonini (–1/k) ga ko‘paytiramiz va x ni qo‘shamiz.

x=x+(-1/k)f(x), bu yerda k-ixtiyoriy son. Demak xosil bo‘lgan formulani rekkurent formula sifatida olish mumkin.

$$x_n = x_{n-1} + (-1/k)f(x_{n-1}),$$

Bunda щam yaqinlashish jarayoni berilgan aniqlikkacha davom ettiriladi.

Oddiy ketma-ketlik algoritmining *__Blok sxemasi:__*



Algoritmning PASCAL dasturi:

Program Iteratciya;

```
Label L1, L2,L3;
Var  x, x0, eps: real;
        i:integer;
Function f(x:real):real;
Begin f:=....   end;
Begin      write('ani=likni kiriting e='); readln(eps);      L1:writeln('x0 va k ni
            kiriting='); readln (x0,k);
                  i:=0;
                  L2:x:=x0-(1/k)*f(x0);
                  if  abs(x-x0)<eps  then goto L3;
                 if I>50 then gotol L1;
                   i:=i+1; x0:=x;  goto L2;
               L3:write ('echim= ';x);
    End.
```

Urinmalar usulining ishchi algoritmi va dasturi

Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli uzoq vaqt ishlasa, oddiy ketma-ketlik usulida esa tenglamaning ko‘rinishini o‘zgartirishga to‘g‘ri keladi. Bunday kamchiliklardan urinmalar usuli щolidir.Bu usul kutilgan natijani agar boshlang‘ich qiymat to‘g‘ri tanlansa, juda tez aniqlab beradi.Eng asosiysi x_0 boshlang‘ich qiymatni to‘g‘ri tanlashda. Yechim yotgan (a,v) oraliq bor deb щisoblanib,qiymati kiritiladi. a va v nuqtalardan vatar o‘tkazamiz. Vatarga mos to‘g‘ri chiziq tenglamasidan vatarning x o‘q bilan kesishish nuqtasi s ni ifodasini topamiz.

$$c = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

Quyidagi shartlardan foydalanib,boshlang‘ich qiymat sifatida a yoki v ni tanlab olish mumkin.

f(a)f(c) <0 bo‘lsa,x_0=a

f(a)f(c)>0 bo‘lsa,x_0=b

Boshlang‘ich qiymat aniqlangandan keyin shu nuqtadan urinma o‘tkaziladi. Urinmalar yordamida ketma-ket yaqinlashishlarni amalga oshiramiz. Uning ishchi algoritmi biror nuqtadan o‘tuvchi urinmalar tenglamasi orqali aniqlanadi:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n= 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

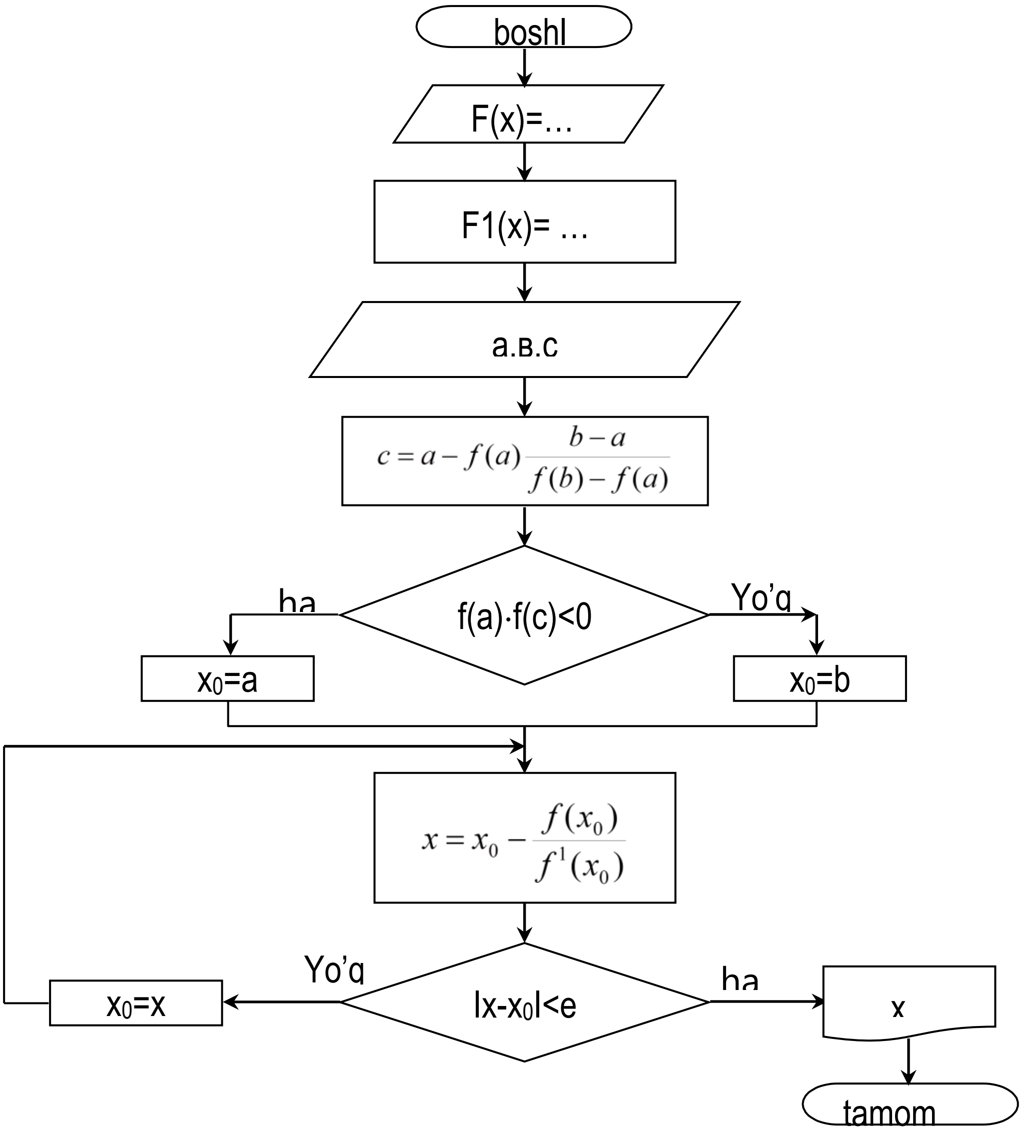
Hisoblashlar esa toki $|x_n - x_{n-1}| < E$ shart bajarilguncha davom ettiriladi. Bu yerdagi x_0 - boshlang‘ich qiymat.

Algoritmning Pascal dasturi

```
Program Urinma;
Label L1;
Var
   a,b,x, x0, eps,c : real;
        Function F (x: real): real;
              Begin F: = ... end;
        Function F 1(x: real): real;
              Begin F 1: = ... end;
Begin
     writeln(‘a,b=’); readln(a,b);
writeln(‘ aniklikni kiriting'); readln( eps);
        c:=a-f(a)(b-a)/(f(a)-f(b));
    if f(a)*f(c)<0 then x0=a else x0=b;
L1 : x : = xo-F(xo)/F1(xo);
    If  abs(x-x0)>eps then begin xo: =x; goto L1; end;
        Writeln (‘tenglama yechimi= ‘,x,’anikligi=’,f(x));
End.
```

Urinmalar usuli algoritmining

Blok-sxemasi



5-§.Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari

Chiziqli algebraning sonli usullariga chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish, matritsaning teskarisini topish, determinantlar hisoblash kabi sonli usullar kiradi. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari sonli usullar orasida muhim o'rin tutadi. Buning asosiy sababi xalq ho'jaligining juda ko'p masalalari bunday sistemalarni yechish bilan bog'liqdir.

Ushbu n-tartibli n ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (6.1)$$

Bu yerda $a_{ij}(i,j=1,n)$ lar ma’lum sonlardan iborat bo‘lib, noma’lumlarning koeffitsientlari deyiladi, $x_1,x_2,...,x_n$ - noma’lumlar, b_1, b_2,..., b_n- (6.1) sistema tenglamalarining ozod hadlari, ular ham ma’lum sonlardan iborat.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ .... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Bunda A-n ta satr va n ta ustundan iborat kvadrat matritsa, a_{ij} elementlarning soni n^2 ta, X V-n ta elementlardan iborat vektor ustunlar.

Matritsalarni bir-biriga ko‘paytirish xossasidan foydalanib, (2.6) belgilashlarni hisobga olgan holda (2.5) sistemani matritsa ko‘rinishda yozamiz:

$$AX=V. \qquad (6.3)$$

A matritsa turli ko‘rinishlarda bo‘lishi mumkin. Agar faqat $a_{ii}(i=1,n)$ elementlar noldan farqli bo‘lib, boshqa elementlarning hammasi nolga teng bo‘lsa, A matritsa **diagonal matritsa** deyiladi, $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,n)$ bo‘lsa, A **simmetrik matritsa** deyiladi.

Masalan,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{-simetrik matritsa;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \text{-diagonal matritsa.}$$

Yana ayrim maxsus ko‘rinishdagi matritsalarga misollar keltiramiz.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ - yuqori uchburchak matritsa; diagonal va undan yuqorida turgan elementlar noldan farqli, qolgan elementlar esa nolga teng;

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ - uch diagonalli matritsa; diagonal va unga parallel bo‘lgan ikkita qo‘shni yo‘nalish bo‘yicha elementlar noldan farqli, boshqa elementlar nolga teng.

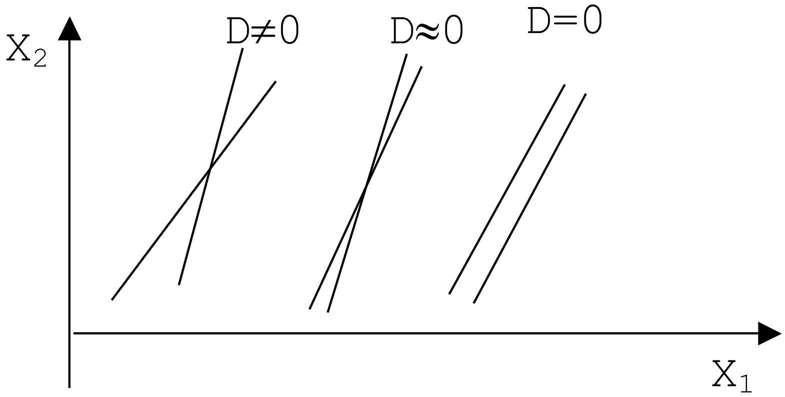
Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish deb (6.1) yoki (6.3) sistemalardan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ noma’lumlarni topishga aytiladi. Topilgan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ qiymatlar (6.1) yoki (6.3) sistemalarga qo‘yilganda tenglamalarni ayniyatga aylantirsa, ular sistemaning **yechimi** deyiladi.

Sistemaning yagona yechimi mavjudligining zaruriy va yetarli sharti A matritsa determinantining noldan farqli bo‘lishidir, ya’ni

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} ... a_{1n} \\ a_{21} a_{22} ... a_{2n} \\ .... \\ a_{n1} a_{n2} ... a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (6.4)$$

Agar D=0 bo‘lsa, sistemalar maxsus sistemalar deyiladi va ularning yechimi yoki mavjud emas, yoki cheksiz ko‘p bo‘ladi (bunday sistemalarni aynigan sistemalar deb ataladi).

Ta’kidlangan hollarni ikkinchi tartibli sistemalar misolida geometrik tasvirlash mumkin. Bunda sistemaning har bir tenglamasi tekislikda to‘g‘ri chiziqlarni ifodalaydi. To‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtasining koordinatalari sistemaning yechimidir. D=0 bo‘lganda to‘g‘ri chiziqlar yoki ustma-ust tushadi yoki parallel bo‘ladi(rasm).



D≈0 bo‘lgan hol alohida e’tiborga molikdir. To‘g‘ri chiziqlar bu holda deyarli parallel bo‘ladi va kesishish nuqtasini topishda noturg‘unlikka ega bo‘lamiz, ya’ni (6.1) sistema koeffitsentlarining ozgina o‘zgarishi (ayniqsa ozod hadlarning) kesishish nuqtasining u yoki bu tarafga siljib ketishiga olib keladi. Bunday sistemalarga yomon shartlangan sistemalar deyiladi. Lekin D≈0 ekanligidan hamma vaqt ham sistemaning yomon shartlanganligi chiqavermaydi, ya’ni D≈0 bo‘lishi sistemaning shartlanganligining zaruriy shartidir. Yetarli shart esa boshqachadir. U quyidagi A matritsa shartlanganligi o‘lchami deb ataluvchi

$$\nu(A) = \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \qquad (6.5)$$

qiymat bilan aniqlanadi, bu yerda A^{-1} teskari matritsa. Bu parametrning qiymati bilan (6.1) sistema yechimining ozod hadlarga nisbatan turg‘unligi ham aniqlanadi. Shartlanganlik o‘lchami ν(A) qancha katta bo‘lsa, (6.1) sistema shuncha yomon shartlangan bo‘ladi, aksincha (6.5) bo‘yicha topilgan qiymatlar qanchalik kichik bo‘lsa, sistema shuncha yaxshi shartlangan bo‘ladi. (6.5) da to‘g‘ri A va teskari A^{-1} matritsalarning normasi [I]da keltirilgan formulalar bilan aniqlanishi mumkin. Lekin hamma normalarda ν(A)≥1 bo‘ladi. Odatda $\nu(A)=10^3\%10^4$ bo‘lsa, sistema yomon shartlangan deyiladi. (6.5) formuladan shartlanganlik o‘lchamining teskari A^{-1} matritsa normasiga bevosita bog‘liq ekanligi ko‘rinib turibdi. Teskari matritsa elementlari qanchalik katta bo‘lsa, shartlanganlik o‘lchami ham shuncha katta bo‘ladi.

Umuman $D \neq 0$ bo‘lganda ham (6.1) sistema yomon shartlangan bo‘lishi mumkin, va aksincha, $D \approx 0$ bo‘lganda sistema yaxshi shartlangan bo‘lgan hollar uchraydi.

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish usullari ikkita guruhga bo‘linadi: to‘g‘ri (aniq) va iteratsion (taqribiy) usullar.

To‘g‘ri usullar yordamida sistemaning yechimi chekli sondagi aniq arifmetik amallar bajarish orqali hisoblanadi. Bu usullar keng sinfdagi sistemalarni yechish imkoniyatiga ega. Lekin, shu bilan birga, ular ayrim kamchiliklardan ham holi emas. Masalan, ular KOMPYuTERda ishlatilganda hotira qurilmasida sistema koeffitsentlari va ozod hadlarning barchasi saqlanishi kerak. Sistema koeffitsentlari matritsasi A ning elementlari siyrak bo‘lsa, ya’ni 0 ga teng elementlari ham bo‘lsa, ularni xotira qurilmasiga yozish ko‘p joyni egallaydi. Bundan tashqari, usullar asosida yotuvchi algoritmlar aniq bo‘lishiga qaramasdan yechim ma’lum darajada taqribiy topiladi. Chunki yahlitlash xatoliklari ketma-ket bajariluvchi hisoblash bosqichlarida doimo jamlanib boradi. Ayniqsa yuqori tartibli va yomon shartlangan sistemalar uchun bu butunlay yaroqsiz yechim olinishiga sabab bo‘lishi mumkin. Shuning uchun to‘g‘ri usullar yaxshi shartlangan, past tartibli, elementlari siyrak bo‘lmagan matritsali sistemalarni yechishda ishlatiladi.

Iteratsion usullar - bu ketma-ket yaqinlashish usullaridir. Bu usullar to‘g‘ri usullarga nisbatan murakkabroq. Lekin ko‘p hollarda iteratsion usullarni ishlatish ma’qulroqdir. Chunki bu usullarni ishlatganda kompyuter xotira qurilmasida sistema matritsasining barcha elementlarini saqlashga hojat yo‘q. Undan tashqari xatoliklar ham iteratsion usullarda jamlanib bormaydi. Har bir iteratsiya qadamida hisob-kitob go‘yo yangidan boshlangandek davom etib ketaveradi. Lekin iteratsion usullarni hamma vaqt ham ishlataverish mumkin emas. Buning uchun ma’lum shartlar bajarilishi kerak. Aks holda iteratsiya jarayoni uzoqlashuvchi bo‘lib, yetarli aniqlikdagi yechimni olish imkoniyati bo‘lmaydi. Bu shartlar quyiroqda, iteratsion usullar berilgan paragrafda keltirilgan.

To‘g‘ri usullarga Kramer, Gauss, bosh elementlar, kvadrat ildizlar va boshqa usullar kiradi. Iteratsion usullarga esa oddiy iteratsiya, Zeydel, relaksatsiya va boshqa usullar kiradi.

Gauss usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish usulining umumiy sxemasidan iboratdir. Mulohazalarni asossiz murakkablashtirmaslik uchun ushbu to‘rt noma’lumli to‘rtta tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases} \qquad (6.10)$$

Birinchi tenglamada $a_{11}\neq 0$ bo‘lsin. Agar bu shart bajarilmasa, birinchi tenglama cifatida boshqa, x_1 oldidagi koeffitsenti 0 ga teng bo‘lmagan tenglamani olishimiz mumkin. Bir vaqtning o‘zida barcha $a_{ij}(i=1,4)$ koeffitsentlar 0 - ga teng bo‘lishi mumkin emas. Shu sababli $a_{11}\neq 0$ sharti hamma vaqt bajariluvchi shartdir. (6.10) tenglamalar sistemasida birinchi tenglamani a_{11} koefitsentga bo‘lib,

$x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4=b_{15}$ (6.11)

bu yerda

$b_{1j}=a_{1j}/a_{11}, \ j>1$

tenglamani hosil qilamiz.

Oxirgi (6.11) tenglamadan foydalanib (6.10) sistemadan x_1 noma’lumni yo‘qotish (chiqarish) mumkin. Buning uchun (6.10) tenglamani a_{21}ga ko‘paytirib (6.10) sistemaning ikkinchi tenglamasidan, a_{31} ga ko‘paytirib uchinchi tenglamasidan va nihoyat a_{41} ga ko‘paytirib to‘rtinchi tenglamasidan ayirish kifoya. Bu amallarni bajarish natijasida

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \qquad (6.12)$$

sistema ega bo‘lamiz. Bunda

$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}-a_{i1}b_{1j} \quad (i,j\geq 2)$

Endi (2.11) sistemaning birinchi tenglamasini $a_{22}^{(1)}\neq 0$ koeffitsentga bo‘lamiz:

$$x_2 = b_{23}^{(1)}x_3 + b_{24}^{(1)}x_4 = b_{25}^{(1)}, b_{2j}^{(1)} = a_{2j}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, j > 2. \qquad (6.13)$$

Yuqoridagi singari bu yerda ham $a_{22}^{(1)}\neq0$ shartni hamma vaqt ta'minlashimiz mumkinligini ko'rsatish =iyin emas.

Uchinchi tartibli (6.12) sistemada xuddi x1 noma'lum yo'qotilgani kabi, x_2 noma'lumni yo'qotamiz:

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{2} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{2} \end{cases} \qquad (6.14)$$

Bu yerda $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{j2}^{(1)}b_{3j}^{(1)}$ (i,j≥3) koeffitsentlar (6.13) tenglamani $a_{32}^{(1)}$,$a_{42}^{(1)}$larga ko'paytirib, (6.12) sistemaning ikkinchi va uchinchi tenglamalaridan mos ravishda ayrishdan hosil bo'ladi.

Endi (2.13) sistemaning birinchi tenglamasini $a_{33}^{(2)}\neq0$ koeffitsientga bo'lamiz:

$$x_3 + b_{34}^{(2)}x_4 = b_{35}^{(2)}, b_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(2)} / a_{33}^{(2)}, j > 3. \qquad (6.15)$$

Oxirgi tenglamadan foydalanib (2.13) sistemadan x_3 noma'lumni yo'qotamiz:

$$\begin{gathered} a_{44}^{3}x_4 = a_{45}^{3}, \\ a_{ij}^{3} = a_{ij}^{2} - a_{i3}^{2}b_{3j}^{3} (i, j \geq 4) \end{gathered} \qquad (6.16)$$

x_4 noma'lum (2.15) tenglamadan osongina topiladi:

$$x_4 = \frac{a_{45}^{(3)}}{a_{44}^{(3)}} = b_{45}^{(3)}. \qquad (6.17)$$

qolgan noma'lumlar esa (6.15), (6.13) va (6.11) tenglamlardan topiladi:

$$\begin{gathered} x_3 = b_{35}^{(2)} - b_{34}^{(2)}x_4, \\ x_2 = b_{25}^{(1)} - b_{23}^{(1)}x_3 - x_{21}^{(1)}x_4, \\ x_1 = b_{15} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4 \end{gathered}$$

a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, $a_{44}^{(3)}$ koeffitsentlar (6.10) sistemaning yetakchi elementlari deyiladi. Yuqoridagi shartlarga binoan ularning barchasi noldan farqli bo'ladi.

Shunday qilib, Gauss usulining asosiy g'oyasi berilgan (6.10) sistemadan koeffitsentlari uchburchak matritsani tashkil qiluvchi (6.11), (6.13), (6.15) va (2.17) tenglamalardan iborat teng kuchli tenglamalar sistemasini hosil qilishdir.

Mazkur usulning hisoblash algoritmi ikki bosqichdan iborat. Birinchi bosqich to‘g‘ri yurish deb atalib (6.11),(6.13),(6.15) va(6.17) tenglamalardagi barcha b_{1j}(j>1) va $b_{ij}^{(k)}$(i=2,3,4;j>2,k=1,2,3) koeffitsentlarni hisoblashdan iborat. Ikkinchi bosqich esa teskari yurish deb atalib, unda barcha noma’lumlarning qiymatlari (ya’ni yechimlar) indeksning kamayib borish tartibida topiladi.

Yuqorida keltirilgan algoritm bo‘yicha ihtieriy n-tartibli sistemalarni yechish mumkin. Bunda algoritmning umumiy sxemasi xech qanday o‘zgarishsiz qolaveradi.

Biz yuqorida tenglamalar bo‘linuvchi a_{ij} koeffitsentlar noldan farqli bo‘lishi shartini qo‘yib, buning natijasida yetakchi elementlarni hamma vaqt noldan farqli qilib tanlash imkoniyati mavjudligini ta’kidlagan edik. Bunga tenglamalarning o‘rinlarini almashtirib erishish ham mumkinligi eslatib o‘tilgan edi. Noldan farqli koeffitsentlar bir nechta bo‘lganda buni bir necha yo‘l bilan amalga oshirish mumkin. Masalan (2.10) ko‘rinishdagi to‘rtinchi tartibli sistemada $a_{11}=0$, $a_{i1}\neq 0$, i=2,3,4 bo‘lsin. Birinchi tenglamaning o‘rnini ikkinchi, uchinchi va to‘rtinchi tenglamalarning xohlagan biri bilan almashtirib $a_{11}\neq 0$ shartga erishamiz. Ko‘rinib turibdiki, bunday imkoniyatlar yagona emas.

Ulardan foydalanib, nafaqat yetakchi elementlarni noldan farqli qilib tanlash, balki yaxlitlash xatoliklarini ham sezilarli darajada kamaytirishga erishishimiz mumkin.

Quyidagi n tartibli, kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Agar $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \cdots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa mavjud bo‘lib,$A*A^{-1}$= Ye shart bajarilsa (bu yerda Ye-birlik matritsa),u holda A^{-1} matritsa A matritsaga teskari matritsa deyiladi.

bu yerda Ye=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ .... & .... & .... & .... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$

Oliy matematika kursida biz teskari matritsani sistemaning satr va ustunlari ustida turli arifmetik amallar bajarish yordamida topishni o‘rganganmiz. Lekin bu juda ko‘p qo‘lda hisoblashlarni bajarishga olib keladi. Gauss usulini qism dastur sifatida qarab uni bir necha marta qo‘llash yordamida teskari matritsani osongina topish mumkin.

Agar A matritsani har bir ustunini vektor deb olib,quyidagi ko‘paytmalar tuzsak,

$$\text{A*}\begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{A*}\begin{pmatrix} \gamma_{12} \\ \gamma_{22} \\ \vdots \\ \gamma_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \dots\dots \; \mathbf{A*}\begin{pmatrix} \gamma_{1n} \\ \gamma_{2n} \\ \vdots \\ \gamma_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ko‘rinishga keladi**.**

Ma’lumki, chiziqli algebraik tenglamalar sitemasini vektorga ko‘paytirsak, vektor hosil bo‘ladi,uni sistema holida yozsak,1-tenglikdan

$$\begin{cases} a_{11}\gamma_{11} + a_{12}\gamma_{21} + ... + a_{1n}\gamma_{n1} = 1 \\ a_{21}\gamma_{11} + a_{22}\gamma_{21} + ... + a_{2n}\gamma_{n1} = 0 \\ .... \\ a_{n1}\gamma_{11} + a_{n2}\gamma_{21} + ... + a_{nn}\gamma_{n1} = 0 \end{cases}$$

hosil bo‘ladi.

γ_{11}**,** γ_{21}**, …**γ_{n1} **lar noma’lum koeffitsientlar** bo‘lib,ularni Gauss usuli yordamida yechib , topamiz. Demak, yuqoridagi n ta ifodaga Gauss usulini n marta qo‘llaymiz. Har safar topilgan yechimlarni 1 ta sistemaga yig‘sak, hosil bo‘lgan sistemaga mos matritsa berilgan matritsaga teskari matritsaning aynan o‘zidir.

Ko‘pchilik qurilish masalalari chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bunday sistemalarni

$$
\begin{cases}
f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0
\end{cases}
\qquad (6.18)
$$

shakldа yozishimiz mumkin. Bunda f_1, f_2,..., f_n-ma'lum funksiyalar. (6.18) sistemani matritsa formasida yozamiz. Buning uchun

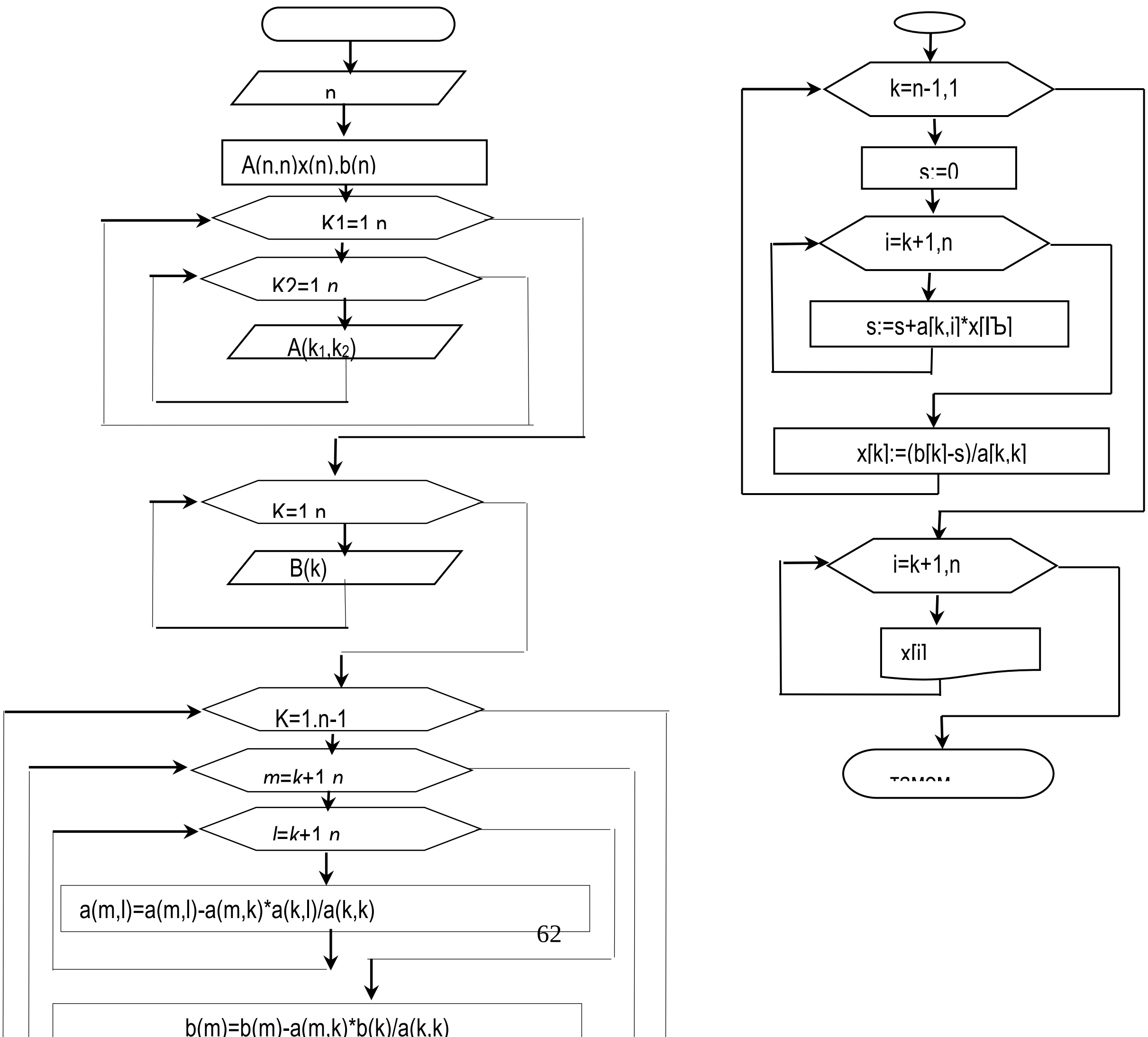
$$
\left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix} \right.
$$

vektor-ustunlari kiritamiz. Bu belgilashlardan foydalanib (6.18) tenglamani

f(x)=0 (6.19) koʻrinishda yozamiz.

(6.18), (6.19) sistemalarni yechish usularidan ayrimlarini qarab oʻtamiz.

Amalda tenglamalar sistemasini yechish uchun asosan bosh hadni tanlashga asoslangan Gauss usulidan foydalanishning algoritmining blok-sxemasi



Yuqoridagi algoritm asosida paskal dasturlah tilidagi dasturi

```
Program m1;
const n=...; { }
var k1,k2,k:byte;
        A:Array[1..n,1..n] of real;         x,b:Array[1..n] of real;
 begin
           for k1:=1 to n do
           for k2:=1 to n do
            readln(A[k1,k2])
           for k1:=1 to n do
            readln(B[k1])
           for k:=1 to n-1 do
        begin
             for m:=k+1 to n do
          begin
             for l:=k+1 to n do
                  a[m,l]:=a[m,l]-a[m,k]*a[k,l]/a[k,k];
                  b[m]:=b[m]-a[m,k]*b[k]/a[k,k];
          end;
        end;
    X[n]:=B[n]/a[n,n];
    for k:=n-1 downto 1 do
    begin
       s:=0;
       for i:=k+1 to n do  s:=s+a[k,i]*x[i];
       x[k]:=(b[k]-s)/a[k,k];
    end;
    for k:=1 to n do  writeln(x[k]);
 end.
```

Yuqori tartibli determinantlarni algebraik to'ldiruvchilar va minorlarga yoyib hisoblashda hosil bo'ladigan algoritm nisbatan murakkab hamda amallar soni juda ko`p bo`ladi Bu esa dasturlash jarayonini tashkil qilishda noqulaylik keltirib chiqaradi. Shuning uchun, amalda ko`proq Gauss usulining ishchi algoritmiga asoslangan usuldan foydalaniladi. Bunda berilgan determinant matritsasi uchburchak щoliga Gauss usulining birinchi bosqich ishchi formulalari yordamida keltirib olinadi: $a_{ml}^{(k+1)} = a_{ml}^{k} + \frac{a_{mk}^{k} \cdot a_{kl}^{k}}{a_{kk}^{k}}$

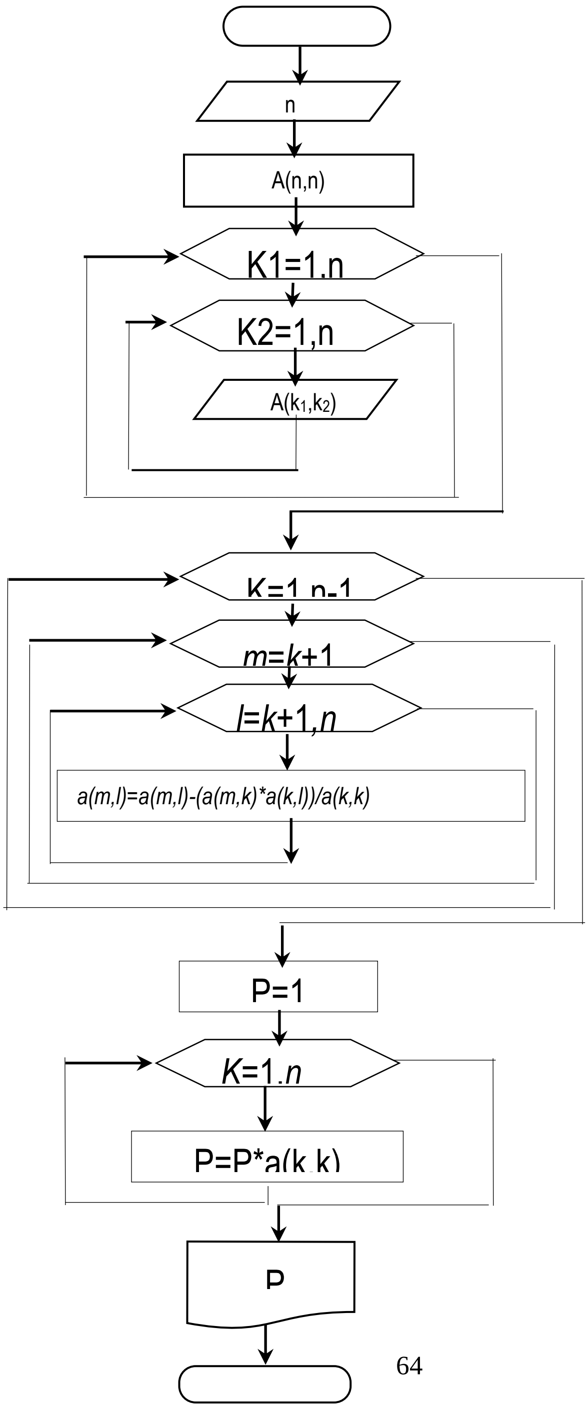
Bu yerda $a_{i,j}$ (i=1..n, j=1..n) Determinant hadlari;

$k < m,\ \ l \le n,\ \ \ \le k \le n-1$;

Hosil qilingan uchburchak ko`rinishdagi determinantning qiymati esa asosiy diagonaldagi hadlar ko’paytmasi orqali topiladi:

$$P = \det A = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{vmatrix} = a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n)} = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}^{(k)}$$

determinant hisoblash algoritmining blok sxemasi



yuqoridagi algoritm asosida paskal dasturlah tilidagi dasturi

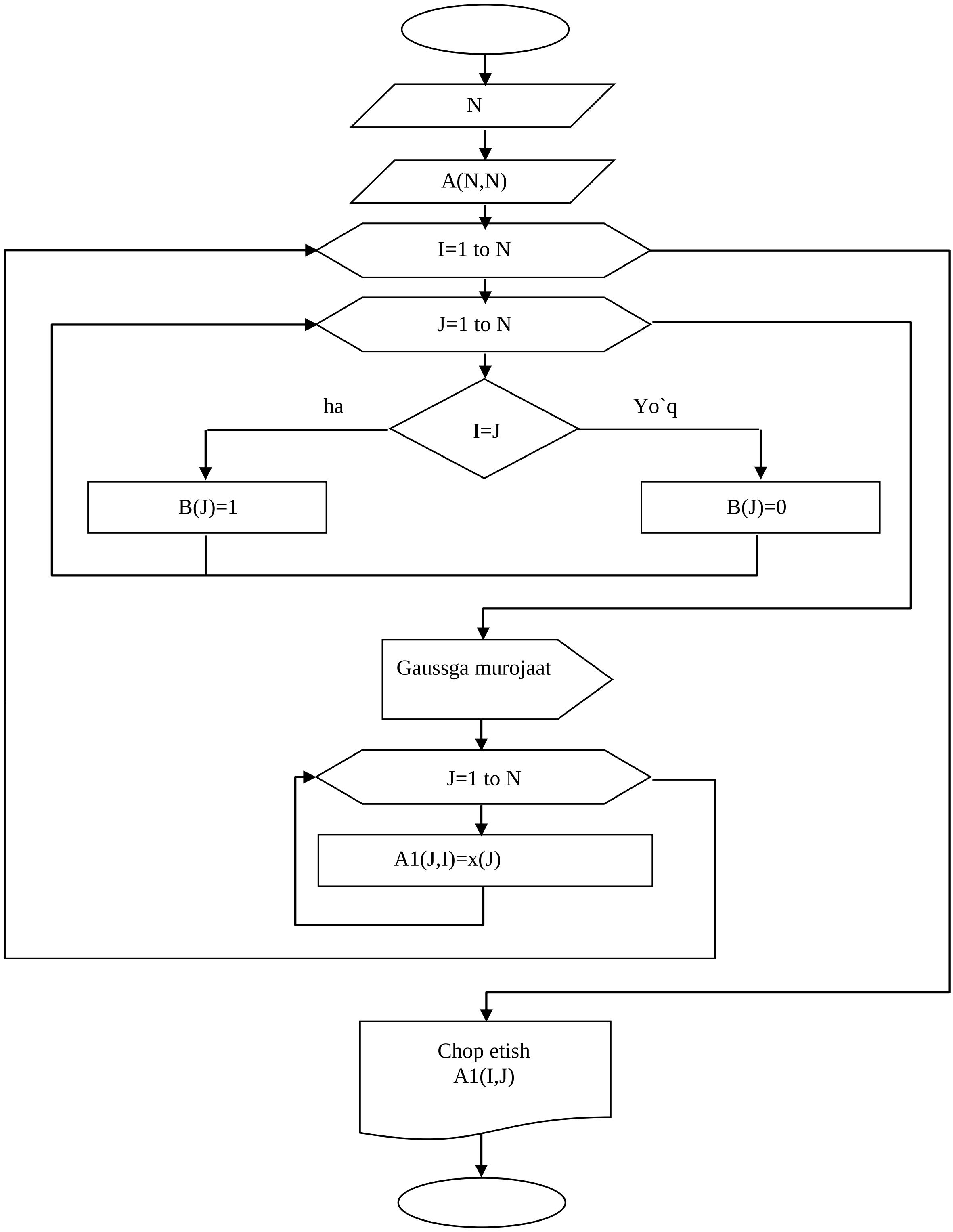
```
program Determinant;
 const n=   ;
 var
    k1,k2,k,m,l:byte;
    p:real;
    a:array [1..n,1..n] of real;
 begin
    for k1:=1 to n do
      for k2:=1 to n do
        readln(a[k1,k2]);
    for k:=1 to n-1 do
      for m:=k+1 to n do
        for l:=k+1 to n do
     a[m,l]:=a[m,l]-a[m,k]*a[k,l]/a[k,k];
    p:=1;
    for k:=1 to n do
     p:=p*a[k,k];
      writeln('get A=',  p);
 end.
```

Teskari matritsani topish dasturi

```
Program Teskari_mat;
const n=3;
type
  mat=array[1..n,1..n] of Real;
  Vec=array[1..n] of Real;
Var
  A,T,E:Mat;
  X,B:Vec;   i,j,K:Integer;
Procedure Gauss(a:Mat; b:Vec; n:byte;Var x:Vec);
var
   k,l,m,i:byte;    s:real;
begin
  for k:=1 to n-1 do
 begin
    for m:=k+1 to n do
   begin
      for l:=k+1 to n do a[m,l]:=a[m,l]-a[m,k]*a[k,l]/a[k,k];
      b[m]:=b[m]-a[m,k]*b[k]/a[k,k];
    end;
```

```
end;
  x[n]:=b[n]/a[n,n];
  for k:=n-1 downto 1 do
 begin
    s:=0;
    for i:=k+1 to n do s:=s+a[k,i]*x[i];
    x[k]:=(b[k]-s)/a[k,k];
  end;
end;
begin
  For I:=1 to n do For J:=1 to n do Readln(A[i,j]);
  For I:=1 to n do
    Begin
      For J:=1 to n do If i=j Then B[J]:=1 else B[J]:=0;
      Gauss(A,B,N,X);
      For J:=1 to n do T[J,I]:=X[J];
    End;
    For I:=1 to n do
   Begin
     For J:=1 to n do Write(T[i,j]:12:4);
      Writeln;
    End;
    Writeln('Tekshirish');
    for i:=1 to n do
    for j:=1 to n do
   begin
      e[i,j]:=0;
      for k:=1 to n do e[i,j]:=e[i,j]+a[i,k]*T[k,j];
    end;
    for i:=1 to n do
   begin
      for j:=1 to n do write(E[i,j]:8:4);
      writeln;
    end;
    readln;
end.
```

Teskari matritsani toppish algoritmi



Bosh elementlar usuli. Gauss usulida yetakchi elementlar doim ham noldan farqli bo'lavermaydi. Ba’zan esa ular nolga yaqin sonlar bo'lishi mumkin. Buning natijasida taqribiy yechim aniq yechimdan sezilarli darajada chetlashib ketadi.

Hisoblashda bunday chetlashishdan qutilish uchun Gauss usuli bosh elementni tanlash yo'li bilan qo'llaniladi. Bu usulning Gauss usulining ixcham tahriridan farqi quyidagidan iborat. Faraz qilaylik, noma’lumlarni yo'qotish jarayonida ushbu tizimga egamiz:

$$\begin{cases} x_1 + b_{12}^{(1)}x_2 + b_{13}^{(1)}x_3 + ... + b_{1n}^{(1)}x_n = b_{1,n+1}^{(1)} \\ .... \\ x_m + b_{m,m+1}^{(m)}x_{m+1} + ... + b_{m,n}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(1)} \\ a_{m+1,m+1}^{(m)}x_{m+1} + ... + a_{m+1}^{(m)}x_n = b_{m,n+1}^{(2)} \\ .... \\ a_{n,m+1}^{(m)}x_{m+1} + ... + a_{n,n}^{(m)}x_n = a_{n,n+1}^{(m)} \end{cases}$$

bu yerda

$$b_{m,j}^{(m)} = \frac{a_{m,j}^{(m)}}{a_{m,m}^{(m)}} \; ; \qquad a_{i,j}^{(m)} = a_{i,j}^{(m-1)} - a_{i,m}^{(m-1)}b_{im}^{(m)} \qquad (I,j \geq m+1)$$

Endi $\left|a_{m+1,k}^{(m)}\right| = \max\left|a_{m+1,j}^{(m)}\right|$ tenglikni qanoatlantiradigan k-raqamni topib, o‘zgaruvchilarni qayta belgilaymiz: $x_{m+1} = x_k$ va $x_k = x_{m+1}$. So'ngra (rn+2) tenglamadan boshlab, barchasidan x_{m+1} noma’lumni yo'qotamiz. Bunday qayta belgilashlar yo'qotish tartibini o'zgartirishga olib keladi va ko'p hollarda hisoblash xatoligini kamaytirishga xizmat qiladi.

Misoi. Bosh elementlar usulidan foydalanib quyidagi tizim yechilsin.

$$
\begin{cases}
1{,}1161x_1 + 0{,}1254x_2 + 0{,}1397x_3 + 0{,}1490x_4 = 1{,}5471 \\
1{,}182x_1 + 1{,}1675x_2 + 0{,}1768x_3 + 0{,}2271x_4 = 1{,}6471 \\
1{,}1968x_1 + 0{,}2071x_2 + 1{,}2168x_3 + 0{,}2271x_4 = 1{,}7471 \\
1{,}2368x_1 + 0{,}2471x_2 + 0{,}2568x_3 + 1{,}2671x_4 = 1{,}8471
\end{cases}
$$

Tizimni yechish jarayoni quyidagi 3.3- jadvalda keltirilsin.

	i	m_i	$a_{i,1}$	$a_{i,1}$	$a_{i,1}$	$a_{i,1}$	$a_{i,1}$	$\sum a_6$
I	1	0,11759	1,11610	0.1254	0,1397	0,1490	1,5471	3,07730
	2	0,14766	0,1582	1,1675	0,1768	0,1871	1,6471	3.33760
	3	0,17923	0,1968	0,2071	0,2168	0,2271	1,7471	3,59490
	4		0,2368	0,2471	0,2568	1,2671	1,8471	3,85490
II	1	0,09353	1,08825	0,09634	0,10950		1,32990	2,62399
	2	0,11862	0,12323	1.13101	0,13888		1,37436	2,76748
	3		0,15436	0,16281	1,17077		1,41604	2,90398
III	1	0,07296	1,07381	0,08111			1,19746	2,35238
	2		0,10492	0,11170			1,20639	2,42301
IV	1		1,06616				1,10944	2,17560
V	1		1				1,04059	2,04059
	2			1			0,98697	1,98697
	3				1		0,98505	1,93505
	4					1	0,88130	1,88130

bu yerda $m_i=a_{iq}/a_{pq}$; barcha $i \neq p$ lar uchun a_{pq} - bosh element. Jadvaldan quyidagi yechimni hosil qilamiz:

x_1=1,04059; x_2=0,98697

x_3=0,93505; x_4=0,88130

Iteratsion usullar. Iteratsion usullarda yechim cheksiz ketma-ketliklarning limiti sifatida topilishi haqida aytib o'tilgan edi. Bugunda turli tamoyil (prinsip)larga asoslangan juda ko'plab iteratsion usullar mavjud. Umuman, bu usullarning, o'ziga xos tomonlaridan biri shundan iboratki, yo‘l qo'yilgan xatoliklari har qadamda to‘g‘rilanib boradi. Aniq usullar bilan ishlayotganda, agar biror qadamda xatoga yo'l qo'yilsa, bu xato oxirgi natijaga ham ta’sir qiladi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror qadamida yo‘l qo'yilgan xatolik esa faqat i nr necha iteratsiya qadamini ortiqcha bajarishgagina olib keladi xolos. Biror qadamda yo‘l qo'yilgan xatolik keyingi qadamlarda tuzatilib boriladi. Boz ustiga bu usullarning hisoblash tartibi sodda bo'lib, ularni GNM larda hisoblash qulaydir. Lekin har bir iteratsion usulning qo'llnnish sohasi chegaralangandir. Chunki iteratsiya jarayoni berilgan li/im uchun uzoqlashishi yoki shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, buning oqibatida amalda yechimni qoniqarli aniqlikda topib bo'lmaydi. Shuning uchun ham iteratsion usullarda faqat yaqinlashish masalasigina emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta ahamiyatga egadir. Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorning qulay tanlanishiga ham bog'liqdir.

Bu yerda biz avval iteratsion usullarning umumiy xarakteristikasini qarab chiqamiz, so'ngra esa hisoblash amaliyotida keng qollaniladigan iteratsion usullarni keltiramiz.

Iteratsion usullarning umumiy tasnifi. Avval qayd etilganidek, iteratsion usullar tizimning izlangan x yechimiga yaqinlashadigan y_0, y_1, y_2, ... iteratsion ketma-ketliklarni qurishga asoslangan. Har bir shunday usul navbatdagi y_{k+1} ni hisoblashda faqat bitta avvalgi uk iteratsiyadan foydalaniiadi. Bunday usullar bir qadamli deyiladi. Bir qadamli usullar uchun iteratsion formulani quyidagi standart kanonik ko'rinishda yozish

$$B_{k+1}\frac{y_{k+1}-y_k}{\tau_{k+1}}+Ay_k=f \quad (6.20)$$

qabul qilingan; bunda - iteratsion parametrlar $\tau_{k+1}\succ 0$, B_{k+1} - yordamchi maxsus bo’lmagan matritsalardir. Agar τ va B lar k+1 indeksga bog'liq bo'lmasa, ya’ni (6.20) formula ixtiyoriy k lar uchun bir xil ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu iteratsion usul statsionar usul deyiladi. Statsionar usullar hisoblash jarayonini tashkil etish nuqtai nazaridan soddadir. Ammo nostatsionar usullar boshqa ustunliklarga ega: ular $\{\{P\tau_{k+1}\},\{B_{k+10}\}$ ketma-ketliklarni tanlash bilan boglangan qo'shimcha «erkinlik darajasiga» ega. Bundan y_k iteratsiyalar tizimning x yechimiga yaqinlashish tezligini oshirishda foydalanish mumkin.

(6.20) iteratsion formula yordamida navbatdagi y_{k+1} yaqinlashishni topish ushbu

$B_{k+1}y_{k+1} = F_{k+1}$ (6.21) tenglamalar tizimini yechishni talab etadi. Bunda

$$F_{k+1} = B_{k+1} - \tau_{k+1}Ay_k + \tau_{k+1}f \quad (6.22)$$

Shunday hisoblashni har bir qadamda bajarishga to'g'ri keladi.

B_{k+1} matritsa sifatida birlik B_{k+1} = E matritsa olsak, iteratsion ketma-ketlik hadlarini hisoblash uchun eng sodda shaklga ega bo'lamiz. Bunday holda navbatdagi y_{k+1} iteratsiyani topish uchun y_{k+1} ning komponentlarini (6.21) uchburchakli tizimdan birin-ketin Gauss usulining teskari yurishiga qilinganidek topishga keltiriladi.

qandaydir iteratsion usulning qo'llanishi $\{u_k\}$ ketma-ketlik tizimning x yechimiga yaqjn|ashishni bildiradi:

$\lim_{k\to\infty} y_k = x$ y (3.20) terigijk quyidagini anglatadi:

$$\sqrt{(y_1^{(k)}-x_1)^2+(y_2^{(k)}-x_2)^2+(y_3^{(k)}-x_3)^2+....+(y_n^{(k)}-x_n)^2} \to 0 \quad (6.23)$$

(6.23) dan ko’rinadiki, y_k vektorlar ketma-ketligining x vektorga yaqinlashishining zaruriy va yetarli sharti har bir komponentning yaqinlashuvchiiigidan iborat $\lim_{k\to\infty} y_i^{(k)} = x_i$ i=1,2,3…..,n

Ushbu ayrjm z_k=y_k-x xatolik deyiladi. y_k ni y_k=x + z_k ko'rinishda yozib va (6.20) ga qo'yjb, xatolik uchun,

$$B_{k+1} = \frac{Z_{k+1}-Z_k}{\tau_{k+1}} + AZ_k = 0 \quad (6.24)$$

iteratsion formulani hosil qilamiz. (6.20) dan farqli o'laroq, u tizimning o’ng tomoni (f) ni o'z ichiga olmaydi, ya’ni bir jinslidir. (6.23) yaqinlashishm talatj etish z_k ning nolga intilishi lozimligini anglatadi:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = 0 \qquad (6.25)$$

Har bir iteratsion usul yaqinlashuvchiligining yetarlilik shartlari A,B_{k+1} matritsalar va τ_{k+1} iteratsion parametrlarni optimal tanlashga oid shartlarni tekshirish qiyin. Natijada hisoblashlarni bajarayotganda iteratsion parametrlarni ko'pincha tajriba yo'li bilan (empirik) tanlashga to’g’ri keladi.

Iteraцiya usuli. (6.10) sistemani

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n),\\ x_2 &= \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n), \qquad (6.26)\\ &\dots\dots\dots\\ x_n &= \varphi_n(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

ko‘rinishda ëzib olamiz.

Chiziqli bo‘lmagan bitta tenglamani echishda ishlatilgan iteraцiya usuliga o‘xshash. Bu erda ham ixtiëriy $x^{(0)}= (x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ vektorni olib (6.13) sistemaning o‘ng tarafiga qo‘yib, chap tarafda echimning birinchi yaqinlashishini hosil qilamiz. Bu jaraënni takrorlab yangi yaqinlashishlarni tuzamiz. Masalan, $x^{(R)}= (x_1^{(R)},x_2^{(R)},...,x_n^{(R)})$Yaqinlashish topilgan bo‘lsa, $x^{(k+1)}$ yaqinlashish

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \varphi_1(x_1,x_2,...,x_n),\\ x_2^{(k+1)} &= \varphi_2(x_1,x_2,...,x_n),\\ &\dots\dots\dots\\ x_n^{(k+1)} &= \varphi_n(x_1,x_2,...,x_n) \end{aligned}$$

kabi topiladi.

Iteraцiya jaraëni

$$\max_{1\le i\le n} |x_i^{(R+1)} - x_i^R| < \varepsilon$$

shart bajarilguncha davom эttiriladi. Bu erda ham ilgaridagi kabi ε- echim aniqligi.

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemasini echishda chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini echishda ishlatilgan Zeydel usulidan ham foydalanish mumkin.

Bunda (6.15) yaqinlashishlar quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$x_1^{(k+1)}=\varphi_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}),$$
$$x_2^{(k+1)}=\varphi_2(x_1^{(k+1)},x_2^{(k)},...,x_n^{(k)}),$$
$$...$$
$$x_n^{(k+1)}=\varphi_n(x_1^{(k+1)},x_2^{(k+1)},...,x_{n-1}^{(k+1)},x_n^{(k)}),\ k=0,1,...$$

Iteraцiya usulining yaqinlashish shartlarini ikkinchi tartibli sistema uchun keltiramiz.

T e o r e m a. Ikkinchi tartibli (6.13) sistemaning yagona echimi $\{a<x_1<b,\ c<x_2<d\}$ to‘g‘ri to‘rtburchakda joylashgan bo‘lsin. U holda agar bu to‘g‘ri to‘rtburchakda quyidagi

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right|\le p_1;\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right|\le q_1;\qquad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right|\le p_2;\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right|\le q_2;$$

$$p_1+p_2\le M<1, q_1+q_2\le N<1 \qquad (6.27)$$

tengsizliklar bajarilsa, iteraцiya jaraёni yaqinlashadi va nolinchi yaqinlashish sifatida to‘g‘ri to‘rtburchakning ixtiёriy nuqtasini olish mumkin.

Ikkinchi bob bo`yicha savol va topshiriqlar

1. Xatolikning qanday turlari mavjud?
2. Absolют va nisbiy xatolikka ta’rif bering.
3. Xatolikning manbalari qaerda?
4. Sonli usul tushunchasi nima?
5. Nima uchun sonli usullar ishlatiladi?
6. Sonli usullarga qanday talablar qo‘yiladi?
7. Berilgan matriцaga teskari matriцa qachon mavjud bo‘ladi?
8. Teskari matriцani Gauss usuli ёrdamida qanday topiladi?
9. Teskari matriцani щisoblashning yana qanday usullari bor?
10. Chiziqsiz tenglamalar sistemasi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
11. Chiziqsiz tenglamalar sistemasini echishning qanday usullarini bilasiz?

12. Ketma-ket yaqinlashish usulining moщiyatini tushuntirib bering
13. Chiziqli algebrik tenglamalar sistemasiga tegishli nazariy ma’lumotlarni aytib bering.
14. ChATSning ko‘rinishiga qarab qanday turlari ajratiladi.
15. ChATSni taqribiy hisoblash usullari qaysilar?
16. Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?
17. Usulning afzalligi nimada?
18. Gauss usuli ërdamida yana qanday hisoblashlarni bajarish mumkin.
19. Tenglamaning ildizlarini grafik usulda ajrating va uning taqribiy echimlarini E=0.001 aniqlikda юqorida sanab o‘tilgan barcha usullar ërdamida toping va natijalarni taщlil qiling.

1. a) $2x^3-2x-1=0$ b) $3x+\cos x+1=0$

2. a) $x^3-x+7=0$ b) $\ln x+2\sqrt{x}=0$

3. a) $2x^3-2x^2+3x+1=0$ b) $x+\cos x-1=0$

4. a) $2x^3-x-5=0$ b) $\sqrt{x+1}=\frac{1}{x}$.

5. a) $x^3-3x^2+2x-4=0$ b) $x^2+4\cdot\sin x=0$

6. a) $x^3+2x^2+5x+2=0$ b) $\ln x+x+1=0$

7. a) $2x^3+2x-4=0$ b) $2x-\lg x=3$

8. a) $x^3-2x^2+7x-1=0$ b) $x=\sqrt{\lg(x+2)}$

9. a) $2x^3+3x+4=0$ b) $x^2=3\sin x$

10. a) $x^3-3x^2+6x+2=0$ b) $3x-2\ln x=4$

11. a) $x^3-2x+2=0$ b) $4x-e^x=0$

12. a) $x^3-3x^2+2x-4=0$ b) $x\cdot(x+1)^2=2$

13. a) $x^3+x-8=0$ b) $3-2x=\ln x$

14. a) $x^3-3x^2+5x+1=0$ b) $2x-\cos x=0$

15. a) $x^3-x+2=0$ b) $\sin(x/2)+1=x^2$

16. a) $x^3-3x^2+7x+1=0$ b) $2x+\lg x=-0,5$

17. a) $x^3-3x+1=0$ b) $(2-x)\cdot e^x=1$

18. a) $x^3+x^2+2x+4=0$ b) $x^3=2\sin x$

19. a) $x^3-2x-5=0$ b) $2x-2^x=0$

20. a) $x^3+2x^2+3x-2=0$ b) $x^2-4\cdot\sin x=0$

21. a) $x^3+4x-6=0$ b) $x^2=\ln(x+2)$

22. a) $x^3-3x^2+6x-5=0$ b) $2x-\cos x=0$

23. a) $x^3-2x+7=0$ b) $3x+\cos x=2$

24. a) $x^3-4x+1=0$ b) $x+\lg x=1{,}5$

25. a) $x^3+2x+1=0$ b) $x\sqrt{x+2}-3=0$

6-§.Funksiyalarni interpolyasiyalashning umumiy masalasi. Chekli ayirmalar

Amaliy masalalarda uchraydigan masalalarning ko‘rinishi ko‘pincha murakkab bo‘lib, ularning analitik ifodasini topish mumkin emas. Bunday hollarda berilgan murakkab funksiyani o‘rganish qulayroq bo‘lgan soddaroq funksiya bo‘lgan almashtirish maqsadga muvofiqdir.

Interpolyasiya deganda erkli o‘zgaruvchi miqdor bilan funksiyaning diskret nuqtalaridagi mos qiymatlari orasida munosabati ma’lum bo‘lgan holda funksional bog‘lanishning taqribiy yoki aniq analitik ifodasini tuzish tushuniladi.

Biror xodisani o‘rganishda y va x miqdorlar orasida shu hodisaning miqdor tomonini aniqlovchi funksional bog‘lanish borligi aniqlangan bo‘lsin; bunda y =f (x) funksiya noma’lum bo‘lib, lekin tajriba asosida argumentning [a.b]kesmadagi $x_0,x_1,..,x_n$ qiymatlarida funksiyaning $y_0,y_1,..,y_n$ qiymatlari aniqlangan bo‘lsin. Bundagi masala u= f(x) noma’lum funksiyani [a, v] kesmani aniq yoki taqribiy tasvirlaydigan, hisoblash uchun mumkin kadar qulay (masalan ko‘phad yoki trigonometrik funksiya) shaklidagi funksiyani topishdan iborat. Bu masalani umumiyroq shaklda bunday aytish mumkin: [a, v] kesmada noma’lum u= f (x) funksiyaning n+1 ta har xil x_0, x_1, ..,xn nuqtalardagi qiymatlari berilgan : u0=f(x_0), y_1= f(x_0),..,$y_{n=}$ f(x_n) funksiyaning taqribiy ifodalovchi , darajasi n dan katta bo‘lmagan R(X) ko‘phadni topish talab etiladi.

Bunday ko‘phad sifatida … x_0, x_1, ..,x_n nuqtalardagi qiymatlari f(x) … funksiyaning $y_0,y_1,..,y_n$ qiymatlari bilan mos ravishda bir xil bo‘lgan ko‘phadni olish kerakligi tabiiydir, u vaqtda «funksiyaning interpolyasiyalash masalasi» deb ataladigan bu masala bunday ifodalanadi: berilgan f(x) funksiya uchun berilgan x_0, x_1, ..xn … nuktalarda … u_0=f(x_0), y_1= f(x_0),..,$y_{n=}$ f(xn) qiymatlar qabul qiladigan darajasi n dan katta bo‘lmagan R(x) ko‘phadni topish kerak.

Topilgan R(x) funksiya interpolyasion formula deyilib, x_0, x_1, ..xn lar interpolyasiya tugunlari deyiladi. Tugunlar orasidagi masofa …interpolyasiya qadami deyiladi.

Amalda topilgan R(x) interpolyasion formula funksiyaning berilgan x argument kiymatlaridagi (interpolyasiya tugunlaridan farqli) qiymatlarini hisoblash uchun qo‘llaniladi. Ushbu operasiya funksiyani interpolyasiyalash deyiladi .

Chekli ayirmalar va ularning xossalari. Argumentning o'zaro teng uzoqlikda joylashgan $x_i=x_0+ih$ $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=h=conts$ (h - jadval qadami) qiymatlarida f{x) funktsiyaning mos ravishdagi u_i =f(x_i) qiymatlari berilgan bolsin deb faraz qilaylik.

Birinchi tartibli chekli ayirmalar deb $\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i$ ifodaga

Ikkinchi tartibli chekli ayirmalar deb

$\Delta 2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} - y_i$ ifodaga, vahokazo

n-tartibli chekli ayirmalar deb $\Delta^n y_i = \Delta(\Delta^{n-1} y_i) = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$ ifodaga aytiladi.

Chekli ayirmalarni quyidagi jadval ko'rinishida ham olish mumkin.

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$	$\Delta^5 y_i$	…..
X_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$	$\Delta^5 y_0$	….
X_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_1$	…	
X_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_2$	…		
X_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$	….			
X_4	y_4	Δy_4	…				
X_5	y_5	…					

....	...						

$\Delta y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i) = y_{i+1} - y_i$ dan quyidagiga egamiz:

$$y_{i+1} == y_i + \Delta y_i = (1+\Delta) y_i$$

Bu yerdan ketma-ket quyidagilami keltirib chiqaramiz:

$$y_{i+2} = (1+\Delta) y_{i+1} = (1+\Delta)^2 y_i$$

$$y_{i+3} = (1+\Delta) y_{i+2} = (1+\Delta)^3 y_i$$

$$y_{i+4} = (1+\Delta) y_{i+3} = (1+\Delta)^4 y_i$$

. . . .

$$y_{i+n} = (1+\Delta) y_{i+n-1} = (1+\Delta)^n y_i \, .$$

Nyuton binomi formulasidan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y_{i+n} = y_i + C_n^i \Delta y_i + \ldots + C_n^{n-1} \Delta^{n-1} y_i + \Delta^n y_i$$

Bundan esa:

$$\Delta^n y = [(1+\Delta) - 1]^n y_i = (1+\Delta)^n y_i - C_n^1 (1+\Delta)^{n-1} y_i + C_n^2 (1+\Delta)^{n-2} y_i + \ldots . + (-1)^n y_i$$

yoki

$$\Delta^n y = y_{i+1} - C_n^1 y_{n+i-1} + C_n^2 y_{n+i-2} + \ldots . + (-1)^n y_i$$

Ko’rinishdagi formuladan foydalanish mumkin Masalan, oxirgi formuladan

$$\Delta^2 y = y_{i+2} - 2 y_{i+1} + y_0$$

$$\Delta^3 y = y_{i+3} - 3 y_{i+2} + 3 y_{i+1} - y_i$$

$$\Delta^4 y = y_{i+4} - 4 y_{i+3} + 6 y_{i+2} - 4 y_{i+1} + y_i$$

kabi vahakoza qiymatlargaega bo’lamiz.

Chekli ayirmalar quyidagi xossalarga ega.

1^0. Funksiyalar yig'indisining (ayirmasining) chekli ayirmasi funksiyalarning chekli ayirmalari yig'indisiga (ayirmasiga) teng:

$$\Delta^n (f(x) \pm \varphi(x)) = \Delta^n f(x) \pm \Delta\varphi(x)$$

2^0. Funksiya o'zgarmas songa ko'paytirilsa, uning chekli ayirmasi o'sha songa ko'payadi:

$$\Delta^n (k \cdot f(x)) = k \cdot \Delta^n f(x)$$

3^0. n- tartibli chekli ayirmaning m- tartibli chekli ayirmasi (n+m)-tartibli chekli ayirmaga teng:

$$\Delta^m (\Delta^n y) = \Delta^{m+n} y$$

4^0. n-tartibli ko'phadning n-tartibli chekli ayirmasi o'zgarmas songa, n+1-tartibli chekli ayirmasi esa nolga teng.

Misol. Jadval qadamini h=1 va dastlabki qiymatni $x_0=0$ deb hisoblab, $f(x)=x^3-3x^2+6x-5=0$ ko'phadning ayirmalar jadvali tuzilsin.

Yechish: f(x) ning $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$ $x_4=4$ $x_5=5$ nuqtalardagi qiymatlarni hisoblaymiz: f(o)=-5, f(1)=-1, f(2)=3, f(3)=13, f(4)=35, f(5)=75

Bundan esa quyidagilar kelib chiqadi: $\Delta y_0=y_1-y_0$, $\Delta^2 y_0=\Delta y_1-\Delta y_0$, $\Delta^3 y_0=\Delta^2 y_1-\Delta^2 y_0$

Bu formulalar asosida jadvalni to'ldirib chiqamiz:

X	y	Δy	Δ^2y	Δ^3y
0	-5	4	0	6
1	-1	4	6	6
2	3	10	12	6
3	13	22	18	
4	35	40		
5	75			

Berilgan funktsiya 3- darajaii ko'phad bo'lganligi sababli uning 3-tartibli ayirmasi o'zgarmas son bo'lib, $\Delta^3 y=6$ bo'ladi.

7-§.Nyutonning I va II interpolyasion formulalari. Xatoliklarni baholash

Aytaylik y=f(x) funksiya uchun y_i=f(x) qabul qiluvchi qiymatlari berilgan va interpolyatsiya tugunlari teng uzoqlikda joylashgan bo'lsin, ya’ni $x_i=x_0+ih$. Bu yerda i=0,1,..., h qiymatlarni qabul qiladi va undagi h- interpolyatsiya qadami xisoblanadi. Berilgan argumentning mos qiymatlarida darajasi h dan oshmaydigan mos qiymatlar qabul qiladigan ko'phad tuzish lozim bo'lsin va bu ko'phad quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$\mathbf{P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+...+a_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1},)} \quad (8.1)$$

Bu n-tartibli ko'phad hisoblanadi. Interpolyatsiya masalasidagi shartga ko'ra $P_n(x)$ ko'phad $x_0, x_1,... x_n$ interpolyasiya tugunlarida $P_n(x_0)=y_0$. $P_n(X_1)=y_1$ $Pn(x_2)=y_2$, ... $P_n(x_n)=y_n$ qiymatlarni qabul qiladi, $x=x_0$ deb tasavvur qilsak, yuqoridagi (8.1) formuladan $y_0=p_n(x_0)=a_0$, ya’ni $a_0=u_0$, so'ngra x ga $x_1$va x_2 larga qiymatlar berib, birin –ketin quyidagiga ega bolamiz:

$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \text{ bundan } a_1 = \frac{\Delta y}{h},$$

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x\ ) + a_1(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1),$$

Yani $y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = 2h^2 \cdot a_2$

Yoki $y_2 - 2y_1 - y_0 = 2h^2 \cdot a_2$ bundan $a_2 = \frac{\Delta^n y_0}{2!h^2}$

Bu jarayonni davom ettirib, $x=x_n$ uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

Topilgan a_0, a_1, a_2...... a_n koeffitsientlarning qiymatlarini (8.1) formulaga qo'ysak,

$$P_n(x_2) = y_0 + \frac{\Delta\, y_0}{1!h^1}(x\ - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_1) + ... +$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^2}(x - x_0)(x - x_1)....(x - x_{n-1})$$

ko'rinishga ega bo'lamiz. Bu .yuqoridagi formulada $\frac{x - x_0}{h} = q$.

ya’ni $x = x_0 + h_q$ deb belgilash kiritilsa, u holda

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = q-1$$

$$\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0-2h}{h} = q-2$$

....

$$\frac{x-x_n}{h} = \frac{x-x_0-nh}{h} = q-n$$

Natijada Nyutonning 1- interpolyatsion formulasiga ega bo'lamiz:

$$P_n(x) = P_0(x_0+q_0) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+.....+\frac{q(q-1)(q-2)(q-3).....(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Nyutonning 1- interpolyatsion formulasini [a, b] ning boshlangich nuqtalarida qo'llash qulay. Agar n=1 bo'lsa, u holda

$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0$ ko'rinishdagi chiziqli interpolyatsion formulaga,

n=2 bo'lganda esa

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0$$

ko rinishdagi parabolik interpolyatsion formulaga ega bo'lamiz. Nyutonning 1- formulasini oldinga qarab interpolyatsiyalash formulasi ham deyiladi.

qoldiq hadi $R_n(x) = h^{n+1}\dfrac{q(q-1)(q-2).....(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$

bu yerda $\xi \in [x_0, x_n]$, Funksiyaning analitik ko'rinishi har doim ham ma’lum bo'lavermaydi. Bunday hollarda chekli ayirmalar tuzilib,

$$f^{(n+1)}(\xi) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi.

U holda Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi uchun xatolik

$$R_n(x)=\frac{q(q-1)(q-2).....(q-n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)}y_0$$

formula orqali topiladi.

Misol. y=lgx funksiyaning jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib uning x=1001 bo'lgan holdagi qiymatini toping.

x	u	Δu	Δ^2u	Δ^3u
1000	3.0000000	43214	-426	8
1010	3.0043214	42788	-418	9
1020	3.0086002	42370	-409	8
1030	3.0128372	41961	-401	
1040	3.0170333	41560		
1050	3.0211893			

Yechish. Chekli ayirmalar jadvalini tuzamiz. Jadvaldan ko'rinib turibdiki, 3-tartibli chekli ayirma o'zgarmas, shu sababli n=3 olish yetarli:

$$P_3(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

x=1001 uchun q=0,1, h=10

Shuning uchun

$$\ln 1001=3000000+0{,}1\cdot 0{,}0043214+\frac{0.1(0.1-1)}{2}\cdot 0.0000426+$$

$$+\frac{0.1\cdot 0.9\cdot 1.9}{6}\cdot 0{,}0000008=3.0004341$$

Endi qoldiq hadni baholaymiz. n=3 bo'lganda quyidagiga egamiz:

$$R_3(x)=h^4\,\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\,f^{(4)}(\xi)$$

Bu erda $1000\le\xi\le 1030$

F(x)=lgx bo’lganligi uchun $f^{(4)}(x)=\frac{3!}{x^4}\lg e$ shuning uchun

$$f^{(4)}(\xi) \prec \frac{3!}{1000^4}$$

h=10 va q=0.1 qiymatlar uchun quyidagilarga ega bo’lamiz

$$|R_3(1001)| \prec \frac{0.1\cdot 0.9\cdot 1.9\cdot 2.9\cdot 10^4 \lg e}{4\cdot 1000^4} = 0.5\cdot 10^{-9}$$

Shunday qilib, qoldiq had $R_3(1001) \approx 0.5\cdot 10^{-9}$ ekan.

Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi. Nyutonning birinchi interpolyatsion formulasi jadvalning boshida va ikkinchi formulasi esa jadvalning oxirida interpolyatsiyalash uchun mo'ljallangan. Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasini keltirib chiqaramiz.

Faraz qilaylik y=f(x) funksiyaning n+1 ta qiymati ma’lum bo'lsin, ya’ni argumentning n= 1 x_0, x_1, x_2, ..., x_n qiymatlarida funksiyaning qiymatlari y_0, y_1, y_2,….. y_n bo'lsin. Tugunlar orasidagi masofa h o'zgarmas bo'lsin. Quyidagi ko'rinishdagi interpolyatsion ko'phadni quramiz:

$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_n)+a_2(x-x_n)(x-x_{n-1})+ a_3(x-x_n)(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})+$

$+...+ a_n(x-x_n)(x-x_{n-1})...(x-x_1 ,)$ (8.2)

Bunda qatnashayotgan a_0, a_1 ..., a_n noma’lum koeffitsientlarni topishni X=Xn bo'lgan holdan boshlash kerak. Keyin esa argumentga x_{n-1}, $x_{n-2\ldots}$qiymatlar berib, qolgan koeffitsientlar aniqlanadi.

Yuqo’ridagi ko'rilgan mulohazalarni (8.2) formula uchun ham qo'llasak, u holda noma’lum koeffitsientlar a_1 a_2, a_3, ..., a_n lami topish uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$a_0 = y_n \;,\; a_1 = \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h} \,,\; a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2} \,, \ldots\ldots\ldots\; a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}$$

Topilgan koeffitsientlarning qiymatlarini (8.2) formulaga qo'ysak,

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h^1}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_{n-1})(x - x_2) + \ldots.. +$$

$$+\frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots.(x - x_1) \qquad (8.3)$$

ko'rinishdagi Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasi kelib chiqadi.

Bu formulada $\frac{x-x_n}{h}=q$ deb belgilash kiritsak,

$$P_n(x)=y_n+q\Delta y_{n-1}+\frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2}+\frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}+$$
$$+.....+\frac{q(q+1)(q+2)(q+3).....(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (8.4)$$

hosil bo'ladi. Ba'zan bu formulani orqaga qarab interpolyatsiyalash formulasi ham deyiladi. (8.4) formuladan [a, b] kesmaning oxirgi nuqtalarida foydalanish qulayroqdir. Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasining qoldiq hadini baholash formulasi quyidagicha bo iadi:

$$R_n(x)=h^{n+1}\frac{q(q+1)(q+2).....(q+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$$

Endi tugunlar bir xil $\frac{x-x_n}{h}=q$, bu yerda $\xi\in[x_0,x_n]$,

Agar funktsiyaning analitik ko rinishi m a’lum bo'lmasa, u holda chekli ayirmalar tuzilib,

$$f^{(n+1)}(\xi)=\frac{\Delta^{n+1}y_0}{h^{n+1}}$$

deb olinadi. Shuning uchun Nyutonning ikkinchi interpolyatsion fo r-mulasi uchun xatolik formulasi

$$R_n(x)=\frac{q(q+1)(q+2).....(q+n)}{(n+1)!}\Delta^{(n+1)}y_n$$

bladi.

Misol. y =lgx funktsiyaning jadvalda berilgan qiymatlaridan foydalanib, uning x=1033 dagi qiymatini hisoblang. bunda h=10.

x	y
1000 1010 1020	3,0000000 3,0043214 3,0086002

1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Ychish:Chekli ayirmalar jadvalini tuzamiz

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1000	3,0000000	43214	-426	8
1010	3,0043214	42788	-418	9
1020	3,0086002	42370	-409	8
1030	3,0128372	41961	-401	
1040	3,0170333	41560		
1050	3,0211893			

Jadvalga ko'ra X_n=1050 bo'lgani uchun

$$q = \frac{1033 - 1050}{10} = -1{,}7$$

Chekli ayirmalar jadvalidan tagiga chizilgan ayirmalardan foydalangan holda Nyutonning ikkinchi interpolyatsion formulasini qo'llab quyidagilarini hosil qilamiz:

$$\lg 1033 = 3{,}0170333 + (-1{,}7)\cdot 0{,}0041961 +$$
$$+ \frac{(-1{,}7)(-1{,}7+1)}{2}\cdot 0{,}0000409 +$$
$$+ \frac{(-1{,}7)\cdot(-1{,}7+1)\cdot(-1{,}7+2)}{6}\cdot 0{,}0000009 =$$
$$= 3.0098857$$

Uchinchi bob bo`yicha savol va topshiriqlar

1. Funksiyalarni interpolyasiyalashning umumiy masalasi.
2. Chekli ayirmalar.
3. Nyutonning I va II interpolyasion formulalsri. Xatoliklarni baholash
4. Amaliy topshiriqlar

1-vazifa.A matritsasi berilgan.

XisoblangA^{-1}

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

2-fazifa.

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 5 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix},\ V=\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}.\ X=\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{vmatrix}$$ toping.

3-vazifa.

Iteratsiya metodi Bilan xisoblang.

$\varepsilon=10^{-4}$

$10x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0$

$2x_1 + 10x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$

$2x_1 + 3x_2 + 20x_3 - x_4 = -10$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 15$

4-vazifa.

Nyuton formulasi Bilan xisoblang.

x_1=1,3617, x_2=1,3921

x	1,340	1,345	1,350	1,355	1,360	1,365
u	4,25562	4,35325	4,45522	4,56184	4,67344	4,79038
x	1,370	1,375	1,380	1,385	1,390	1,395
u	4,91306	5,04192	5,17744	5,32016	5,47069	5,62968

5- vazifa. U=f (x) funksiya uchun tugun nuqtalari ma’lum bo‘lgan Lagranj va Nyuton interpolyatsion formulalarini tuzing. Tugun nuqtalar orasidagi mvsofa turlicha (1 – 5 - jadvallar) va bir xil (6 – 10 - jadvallar) bo‘lgan hollarni qarang.

6 – vazifa. Funksiyaning $\chi = \overline{\chi}_0$ nuqtadagi qiymatini hisoblang

7 – vazifa. Topilgan polinomni $\chi = \overline{\chi}_0$ nuqtada baholang.

1 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		1	2	3	4	5	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,41	1,5068	0,4346	0,0998	0,9171	0,6408	
1	0,46	1,5841	0,4964	0,4439	0,8961	0,6782	0,38
2	0,52	1,6820	0,5725	0,4969	0,8678	0.7211	0,43
3	0,60	1,8221	0,6841	0,5646	0,8253	0,7746	0,48
4	0,65	1,9155	0,7602	0,6052	0,7961	0,8062	0,74
5	0,72	2,05444	0,9316	0,6593	0,7518	0,8485	

2 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		6	7	8	9	10	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,11	1,1163	0,1104	0,1098	0,9940	0,3317	
1	0,16	1,1735	0,1614	0,1593	0,9872	0,4000	
2	0,22	1,2416	0,2236	0,2182	0,9769	0.4690	0,08
3	0,30	1,3498	0,3093	0,2956	0,9553	0,5477	0,18
4	0,35	1,4191	0,3650	0,3429	0,9394	0,5916	0,33
5	0,42	1,5220	0,4466	0,4078	0,9131	0,6481	0,44

3 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		11	12	13	14	15	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,21	1,2337	0,2131	0,2085	0,9780	0,4582	
1	0,26	1,2969	0,2660	0,2571	0,9664	0,5099	0,19
2	0,32	1,3771	0,3314	0,3146	0,9492	0.5657	0,28
3	0,40	1,4918	0,4228	0,3894	0,9211	0,6324	0,43
4	0,45	1,5683	0,4830	0,4350	0,9004	0,6708	0,54
5	0,52	1,6820	0,5726	0,4969	0,8678	0,7211	

4 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		16	17	18	19	20	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,31	1,3634	0,3208	0,3051	0,9523	0,5568	0,28
1	0,36	1,4333	0,3776	0,3523	0,9358	0,6000	0,33
2	0,42	1,5220	0,4466	0,4078	0,9131	0.6481	0,53
3	0,50	1,6487	0,5463	0,4794	0,8776	0,7071	
4	0,55	1,7332	0,6131	0,5227	0,8525	0,7416	0,64
5	0,62	1,8559	0,7139	0,5810	0,8139	0,7874	

5 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		16	17	18	19	20	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,51	1,6653	0,5593	0,4882	0,8722	0,7141	
1	0,56	1,7506	0,6269	0,5312	0,8472	0,7483	0,48
2	0,62	1,8589	0,7139	0,5810	0,8139	0.7874	0,58
3	0,70	2,0138	0,8423	0,6442	0,7648	0,8367	0,73
4	0,75	2,1170	0,9316	0,6816	0,7317	0,8660	0,84
5	0,82	2,2705	1,0717	0,7311	0,6822	0,9055	

6 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		1	2	3	4	5	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,41	1,5068	0,4346	0,0998	0,9171	0,6403	0,39
1	0,46	1,5841	0,4954	0,1439	0,8961	0,6782	0,53
2	0,51	1,6653	0,5593	0,4882	0,8722	0.7141	0,60
3	0,56	1,7506	0,6269	0,5312	0,8472	0,5483	0,68
4	0,61	1,8404	0,6989	0,5728	0,8169	0,7810	
5	0,66	1,9348	0,7761	0,6131	0,7899	0,8124	

7 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		6	7	8	9	10	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,11	1,1163	0,1104	0,1098	0,9940	0,3317	
1	0,16	1,1785	0,1614	0,1593	0,9872	0,4000	0,14
2	0,21	1,2337	0,2131	0,2085	0,9780	0.4582	0,19
3	0,26	1,2969	0,2660	0,2571	0,9664	0,5099	0,29
4	0,31	1,3634	0,3203	0,3051	0,9523	0,5568	0,38
5	0,36	1,4333	0,3776	0,3523	0,9359	0,6000	

8 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		11	12	13	14	15	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,21	1,2337	0,2131	0,2085	0,9780	0,4582	
1	0,26	1,2969	0,2660	0,2571	0,9664	0,5099	0,24
2	0,31	1,3634	0,3203	0,3051	0,9523	0.5568	0,28
3	0,36	1,4333	0,3776	0,3523	0,9359	0,6000	0,39
4	0,41	1,5068	0,4346	0,0998	0,9171	0,6403	0,48
5	0,46	1,5841	0,4954	0,4439	0,8961	0,6782	

9 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		16	17	18	19	20	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,31	1,3634	0,3203	0,3051	0,9523	0,5568	
1	0,36	1,4333	0,3776	0,3523	0,9359	0,6000	0,34
2	0,41	1,5068	0,4346	0,0998	0,9171	0.6403	0,38
3	0,46	1,5841	0,4954	0,4439	0,8961	0,6782	0,49
4	0,51	1,6653	0,5593	0,4882	0,8722	0,7141	0,58
5	0,56	1,7506	0,6259	0,5312	0,8472	0,7483	

10 – jadval

n	x_n	Variantlar					$\bar{x}_0$
		16	17	18	19	20	
		e^x	tgx	$\sin x$	$\cos x$	$\sqrt{x}$	
0	0,51	1,6653	0,5593	0,4882	0,8722	0,7141	
1	0,56	1,7506	0,6269	0,5312	0,8472	0,7483	0,54
2	0,61	1,8404	0,9680	0,5728	0,8196	0.7810	0,58
3	0,66	1,9348	0,7761	0,6131	0,7899	0,8124	0,69
4	0,71	2,0346	0,8595	0,6518	0,7584	0,8426	0,78
5	0,76	2,1353	0,9504	0,6889	0,7248	0,8718	

8-vazifa.

Trapesiya usuli Bilan xisoblang. $\int_{1,2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x}dx$, n=20.

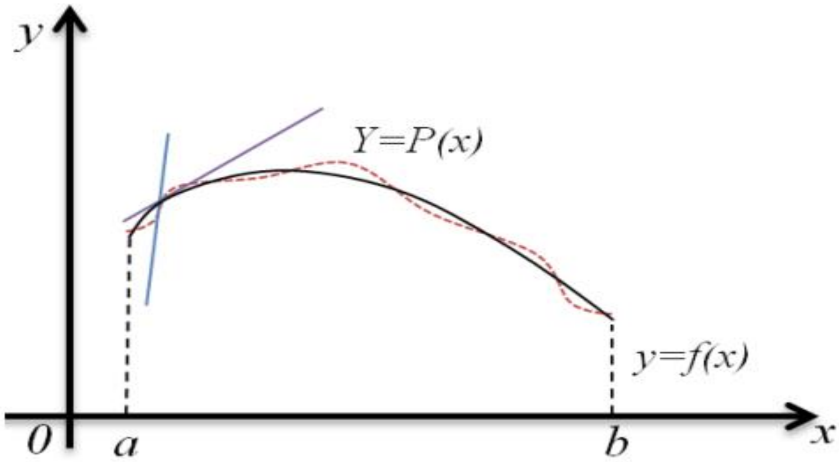
9-vazifa.

Simpson formulasi yerdamida xisoblang $\int_{0,2}^{1} (x+1)Cos(x^2)dx$, n=20.

8-§.Sonli differensiallash. Aniq integralni taqriban hisoblash usullari.

Ma’lumki, berilgan funksiyaning hosilasini topish amali differensiallash deb atalib, uning uchun boshlang‘ich funksiyani topishdan iborat teskari amal integrallash deb ataladi (latincha-untegrare-tiklash degan ma’noni bildiradi). Amalda ko‘pgina funksiyalarning boshlang‘ich funksiyalarini formulalar bilan hisoblash imkoni hamma vaqt ham bo‘lavermaydi.

Amaliy masalalarni yechishda, ko‘pgina hollarda y= f(x) funksiyaning berilgan nuqtalardagi ko‘rsatilgan tartibli hosilasini topish talab etiladi. Keltirilgan talablarda f(x) funksiyaning berilgan nuqtalardagi differensialini analitik yo‘l bilan hisoblashda qiyinchiliklar tug’diradi



Bunday hollarda odatda sonli differensiallash usulidan foydalaniladi. Sonli differensiallash formulasini kiritish uchun, berilgan f(x) funksiyaning [a,b] oraliqdagi interpolyasiyasi P(x) ko‘phad bilan almashtiriladi va quyidagicha hisoblanadi:

$$f'(x) = P'(x)\ ,\ a \le x \le b \quad (9.11)$$

Shu tarzda f(x) funksiyaning yuqori tartibli hosilasini topishga o‘tiladi.

Agar P(x) interpolyatsion funksiya uchun hatolik $R(x) = f(x) - P(x)$ ekanligi ma’lum bo‘lsa, u holda interpolyatsion funksiya hosilasi $P'(x)$ ham quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$r(x) = f'(x) - P'(x) = R'(x) \quad (9.2)$$

Shuni ta’kidlab o‘tish joizki sonli differensiallash amali, interpolyasiyalashdan ko‘ra kamroq aniqlikni beradi. Haqiqatdan ham [a,b] oraliqdagi bir-birga yaqin y=f(x) va Y=P(x)

egri chiziqlar, shu oraliqdagi funksiyalarning hosilasi $f'(x)$ va $P'(x)$ yaqinlashishini ta'minlash kafolatini bermasligi mumkin, ya'ni ikkita urinmaning bir nuqtadagi burchak koeffisiyentlari kamroq yaqinlashadi (yuqoridagi chizma). Sonli differensiallashning Logranj, Nyuton, Stirling va boshqa usullari mavjud bo‘lib, biz ulardan ayrimlarini ko‘rib o‘tamiz.

Nyutonning birinchi interpolyatsion ko‘phadi asosida sonli differensiallash formulasi. Bizga y(x) funksiyaning [a, b] oraliqda teng uzoqlikda joylashgan (0, 1, 2, ...,n) nuqtalarda y_i=f (x_i) qiymatlari bilan berilgan bo‘lsin.

Berilgan [a, b] oraliqda funksiyaning $y' = f'(x)\,, y'' = f''(x)\,,...$ hosilalarini topish uchun, y(x) funksiyani $x_0,x_1,x_2,...x_k$, (k≤n) nuqtalardagi Nuyoton interpolyatsion formulasi bilan almashtiramiz va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$
$$+ \ldots.. + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)\ldots..(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

bu yerda $q = \frac{x - x_0)}{h}$, h=x_{i+1}-x_i; i=0,1,2,….

Binom ko‘paytmalarni qavsdan ochsak quyidagini hosil qilamiz:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{(q^2 - q)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q)}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots.$$

Shunday qilib

$\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$. U holda

$$y'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta y_0 + \frac{(2q-1)}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2 - 6q + 2)}{6}\Delta^3 y_0 + \ldots..\right]$$

Shu tarzda $y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$ · ekanligidan

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q-1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2-18q+11)}{12}\Delta^4 y_0+.....\right]$$

kelib chiqadi. Shu usul bilan y(x) funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilasini hisoblash imkoniga ega bo‘lamiz.

E’tibor bersak, x ning belgilangan nuqtasidagi $y'=f'(x), y''=f''(x)$ … hosilalarini topishda x_0 sifatida argumentning jadvalli qiymatiga yaqinini olishimizga to‘g‘ri keladi.

Ba’zan, y(x) funksiyaning hosilasini topishda asosan berilgan x_i nuqtalardagi foydalaniladi. Bunda sonli differensiallash formulasi bir muncha qisqaradi. Shu tarzda jadvalli qiymatning har bir nuqtasini boshlang‘ich nuqta deb faraz qilib olsak, unda $x=x_0$ q=0 ko‘rinishda yozsa bo‘ladi va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$. \ y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0-\frac{\Delta^2 y_0}{2}+\frac{\Delta^3 y_0}{3}-\frac{\Delta^4 y_0}{4}+\frac{\Delta^5 y_0}{5}.....\right]$$

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0-\Delta^3 y_0+\frac{11}{12}\Delta^4 y_0-\frac{5}{6}\Delta^5 y_0+...\right]$$

Agar $P_k(x)$ -Nyuton interpolyatsion ko‘phadining chekli ayirmalari $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0,....,\Delta^k y_0$ va mos ravishda hatoligi $R_k(x)=y(x)-P_k(x)$ bo‘lsa,

unda hosilasining hatoligi

$R_k'(x)=y'(x)-P_k'(x)$ o‘ladi.

Oldingi mavzulardan ma’lumki

$$R_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi)=$$

$$=h^{n+1}\frac{q(q-1)(q-2).....(q-k)}{(k+1)!}y^{(n+1)}(\xi)$$

Bu yerda ξ - x_0, x_1, x_2,…x_k orasidagi ixtiyoriy son. Shu sababli

$Y(x)\in C^{(k+2)}$ ko‘zlasak u holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$R_k'(x)=\frac{dR_k}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{h^k}{(k+1)!}\left[y^{(k+1)}(\zeta)\frac{d}{dq}\left[q(q-1)...(q-k)\right]+q(q-1)...\frac{d}{dq}\left[y^{(k+1)}(\zeta)\right]\right]$$

Shu yerdan x $=x_0$, va q=0 hamda $\frac{d}{dq}\left[q(q-1)...(q-k)\right]_{q=0}=(-1)^k k!$ ekanligini bilib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$R_k'(x)=(-1)^k\frac{h^k}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\zeta)$$

Shunday qilib $y^{(k+1)}(\zeta)$ ko‘pgina hollarda baholash qiyinchilik tug‘diradi, lekin h ning kichik yaqinlashishida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$y^{(k+1)}(\zeta)=\frac{\Delta^{k+1}y_0}{h^{k+1}}$$

demak $R_k'(x_0)=\frac{(-1)^k}{h}\frac{\Delta^{k+1}y_0}{k+1}$

Nyutonning ikkinchi interpolyatsion ko‘phadi asosida sonli differensiallash formulasi. Funksiyani oxirgi nuqtalardagi birinchi interpolyatsion ko‘phad orqali ifodalash amalyotda noqulayliklar tug‘diradi . Bunday hollarda Nyutonning ikkinchi interpolyatsiyasi orqali ifodalash kerak bo‘ladi. Sonli differensiallash jarayoni huddi birinchi interpolyatsion shaklda keltirib chiqariladi.

Bunda ham y(x) funksiyaning [a,b] oraliqda teng uzoqlikda joylashgan x_i (0, 1, 2,...,n) nuqtalarda $y_i=f(x_i)$ qiymatlari bilan berilgan bo‘lsa,

$y'=f'(x)\,,\,y''=f''(x)\ldots$ hosilalarini topish uchun, y(x) funksiyani x_0, $x_1,...,x_k$ ($k\le n$) nuqtalardagi Nuyotonning ikkinchi interplyasion formulasi (polinumi) bilan almashtiramiz va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2y_0+\frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3y_0+....$$

bu yerda $q=\frac{x-x_0)}{h}$, $h=x_{i+1}-x_i$; i=0,1,2,….

Binom ko‘paytmalarni qavsdan ochsak quyidagini hosil qilamiz:

$$y(x)=y_0+q\Delta y_0+\frac{(q^2-q)}{2}\Delta^2 y_0+\frac{q^3-3q^2+2q)}{6}\Delta^3 y_0+....$$

Shunday qilib

$\frac{dx}{dy}=\frac{dy}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{1}{h}\frac{dy}{dq}$. U holda

$$y'(x)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{(2q+1)}{2}\Delta^2 y_0+\frac{3q^2+6q+2)}{6}\Delta^3 y_0+.....\right]$$

Shu tarzda $y''(x)=\frac{d(y')}{dx}=\frac{d(y')}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}$ · ekanligidan

$$y''(x)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_0+(q+1)\Delta^3 y_0+\frac{6q^2+18q+11)}{12}\Delta^4 y_0+.....\right]$$

kelib chiqadi. Shu usul bilan y(x) funksiyaning ixtiyoriy tartibli hosilasini hisoblash imkoniga ega bo‘lamiz.

E’tibor bersak, x ning belgilangan nuqtasidagi $y'=f'(x)\,,y''=f''(x)$ … hosilalarini topishda x_0 sifatida argumentning jadvalli qiymatiga yaqinini olishimizga to‘g‘ri keladi

Ba’zan, y(x) funksiyaning hosilasini topishda asosan berilgan x_i nuqtalardagi foydalaniladi. Bunda sonli differensiallash formulasi bir muncha qisqaradi. Shu tarzda jadvalli qiymatning har bir nuqtasini boshlang‘ich nuqta deb faraz qilib olsak, unda $x=x_n$ q=0 ko‘rinishda yozsa bo‘ladi va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$.\ y'(x_n)=\frac{1}{h}\left[\Delta y_0+\frac{\Delta^2 y_n}{2}+\frac{\Delta^3 y_n}{3}-\frac{\Delta^4 y_n}{4}+\frac{\Delta^5 y_n}{5}.....\right]$$

$$y''(x_n)=\frac{1}{h^2}\left[\Delta^2 y_n-\Delta^3 y_n+\frac{11}{12}\Delta^4 y_n-\frac{5}{6}\Delta^5 y_n+...\right]$$

Agar $P_k(x)$ -Nyuton interpolyatsion ko‘phadining chekli ayirmalari $\Delta y_0,\Delta^2 y_0,\Delta^3 y_0,....,\Delta^k y_0$ va mos ravishda hatoligi $R_k(x)=y(x)-P_k(x)$ bo‘lsa,

unda hosilasining hatoligi

$R_k'(x)=y'(x)-P_k'(x)$ o‘ladi.

Oldingi mavzulardan ma’lumki

$$R_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_k)}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\xi)=$$

$$=h^{n+1}\frac{q(q+1)(q+2).....(q+k)}{(k+1)!}y^{(n+1)}(\xi)$$ Bu yerda ξ - x_0, x_1, x_2,…x_k orasidagi ixtiyoriy son. Shu sababli

$Y(x)\in C^{(k+2)}$ ko‘zlasak u holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$R_k'(x)=\frac{dR_k}{dq}\cdot\frac{dq}{dx}=\frac{h^k}{(k+1)!}\left[y^{(k+1)}(\zeta)\frac{d}{dq}\left[q(q+1)...(q+k)\right]+q(q+1)...\frac{d}{dq}\left[y^{(k+1)}(\zeta)\right]\right]$$

Shu yerdan x $=x_0$, va q=0 hamda $\frac{d}{dq}\left[q(q+1)...(q+k)\right]_{q=0}=k!$ ekanligini bilib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$R_k'(x)=\frac{h^k}{(k+1)!}y^{(k+1)}(\zeta)$$

Shunday qilib $y^{(k+1)}(\zeta)$ ko‘pgina hollarda baholash qiyinchilik tug‘diradi, lekin h ning kichik yaqinlashishida quyidagicha hisoblash mumkin:

$$y^{(k+1)}(\zeta)=\frac{\Delta^{k+1}y_0}{h^{k+1}}$$

demak $R_k'(x_0)=\frac{1}{h}\frac{\Delta^{k+1}y_0}{k+1}$

Misol. Jadvalda keltirilgan y=lgx funksiyaning qiymatlaridan foydalanib y′(50) ning qiymatini birinchi interpolyatsion almashtirishda foydalanib hisoblang.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
50	1.6990	414	-36	5
55	1.7404	378	-31	
60	1.7782	347		
65	1.8129			

Yechish. Bu yerda h=5. Keltirilgan jadvalning oxirgi 3 ta ustunini chekli ayirmalar bilan to‘ldiramiz. Yuqoridagi formulalardan foydalanib hisoblasak quyidagiga ega bo‘lamiz:

$y'(50)=1/5\ (0,0414+0,0018+0,0002)=0,0087$

Haqiqatdan ham

$$y'_x=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 10}=\frac{1}{50}\,\frac{1}{2.,302585}=0,0087\,.$$

Ko‘rinib turibdiki sonli usuldagi hisob natijasi bilan analitik usuldagi hisob natijalarning 4 xona aniqlikdagi yaxlitlangan qiymatlari bir xil.

Logranj interpolyatsion ko‘phadi asosida sonli differensiallash formulasi va hatoliklarini baholash. Bizga y(x) funksiyaning [a,b] oraliqda teng uzoqlikda joylashgan x_i (i=0, 1, 2, ...,n) nuqtalarda $y_i=y(x_i)$ qiymatlari bilan berilgan bo‘lsin. [a, b] oraliqda funksiyaning $y'=y'(x)$, $y''=y''(x)$ hosilalarini topish uchun,

y(x) funksiyani x_0, $x_1,...,x_k$ (k≤n) nuqtalardagi Logranj interplyasion formulasi (polinumi) bilan almashtiramiz va quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\prod_{n+1}(x)y_i}{(x-x_i)\prod'_{n+1}(x_i)}$$

Bu yerda $\prod_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_n)$ u holda

$$L_n(x_i)=y_i\,;i=0,1,2,...,n$$

Shunday qilib $q=\frac{x-x_0}{h}$ dan foydalansak

$$\prod_{n+1}(x)=h^{n+1}q(q-1)....(q-n_1)=h^{n+1}q^{(n+1)}$$

va
$$\prod'_{n+1}(x_i)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)....(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})=$$
$$=h^n i(i-1)...1(-1)...\left[-(n-i)\right]=(-1)^{n-i}h^n i!(n-i)!$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, Logranj interpolyatsion ko‘phadi uchun

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}y_i}{i!(n-i_i)!}\cdot\frac{q^{[n+1]}}{q-i}$$ Endi

$\frac{dx}{dq} = h$, ekanligidan foydalanib quyidagiga ega bo‘lamiz

$y'(x) = L_n'(x) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i} y_i}{i!(n-i_i)!}\cdot\frac{d}{dq}\left[\frac{q^{[n+1]}}{q-i}\right]$ Shu tartibda davom ettirilib berilgan y(x) funksiyaning yuqori tartibli hosilasi topiladi. Hatoligini baholash uchun, umumiy hatolik formulasidan foydalanamiz ya’ni

$r_n(x)=y^{'}(x)-L_x^{'}(x)$

Buning uchun interpolyatsion ko‘phad hatoligini topish formulasini qo‘llaymiz

$$R_n(x) = y(x) - L(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod\nolimits_{n+1}(x)$$

Bu yerda ξ - x_0, x_1, x_2,...x_k orasidagi ixtiyoriy son. Shu sababli

$y(x)\in C^{(k+2)}$ ekanligini hisobga olsak u holda quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$r_n(x) = R_n'(x) = \frac{1}{(n+1)!}\left\{y^{(n+1)}(\xi)\prod\nolimits_{n+1}^{'}(x) + \prod\nolimits_{n+1}(x)\frac{d}{dx}\left[y^{(n+1)}(\xi)\right]\right\}.$$

1.11 formuladan foydalansak berilgan nuqtadagi hatolik formulasini quyidagicha yozish mumkin:

$$R_n'(x) = (-1)^{n-i}h^n\frac{i!(n-i)!}{(n+1)!}y^{(n+1)}(\xi)$$

Aniq integralni taqriban hisoblash usullari

To‘g‘ri to‘rtburchaklar usuli. Integral tarixan egri chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzini, xususan egri chiziqli trapesiyaning yuzini hisoblash munosabati bilan kelib chiq=an. Trapesiyaning asosi bo‘lgan [a;b] kesmani $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ nuqtalar bilan n ta kesmalarga bo‘lamiz. U holda bo‘linish oralig‘i uzunligi h=(b-a)/n formula bilan ifodalanadi. $x_0=a$ desak, $x_i=x_{i-1}+h$ nuqtalarni belgilab olamiz, bunda i=1,2,3,…n. x_1, x_2, x_3, …, x_n nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan kesishgunga qadar vertikal parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz va kesishish nuqtalarining ordinatalarini quyidagicha $u(x_1)$, $u(x_2)$, …, $u(x_i)$, … kabi belgilaymiz. Har bir oraliqdagi ordinatasi uzunligi $u(x_i)$ ga teng to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzalarini topamiz.

$$S_i = h \cdot y(x_i)$$

n ta to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini qo‘shamiz:

$$S = h \cdot (y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + \ldots + y(x_n))$$

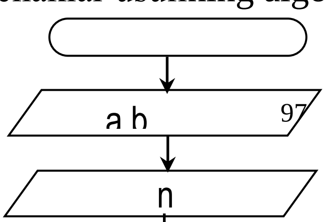
Yuzalarni hisoblashda k=1,2,…n deb olsak, vertikal to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan o‘ng tomondagi to‘g‘ri to‘rtburchaklar olingani uchun o‘ng to‘g‘ri to‘rtburchaklar usulining formulasi kelib chiqadi:

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h\left[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+n \cdot h)\right] = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a+kh)$$

i=1,2,…,n-1 deb olsak, vertikal to‘g‘ri chiziqlarga nisbatan chap tomondagi to‘g‘ri to‘rtburchaklar olingani uchun chap to‘g‘ri to‘rtburchaklar usulining frmulasi kelib chiqadi.

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h[f(a+h) + \ldots + f(a+(i-1)h)] = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh);$$

To‘g‘ri to‘rtburchaklar usulining algoritmi



algoritm asosida paskal dasturlah tilidagi dasturi

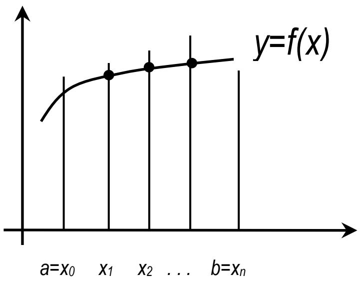
```
program Turtburchakli yuza;
var a,b,s, h:real;
n,k:byte;
function F(x:real):real;
begin F:=.... end;
begin  writeln ('a,b='); readln (a,b);
          writeln('n=');  readln (n);
      h:=(b-a)/n;
      s:=0;
      for k:=0 to n-1 do
      s:=s+f(a+k*h);
      s:=s*h;
      writeln('íàòèæà=',s);
 end.
```

Trapesiya usuli. Bu usulda ham to‘g‘ri to‘rtburchaklar usulidagi kabi *[a,b]* kesmani $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ nuqtalar bilan n ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. Har bir tugun nuqtalar orasidagi masofa *h=(b-a)/n*;

[a,b] kesmani bo‘luvchi nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan kesishgunga qadar perpendikulyar o‘tkazamiz. Egri chiziq mos nuqtalarinng ordinatalarining $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, …, $y_{n-1}=f(x_{n-1})$, $y_n=f(x_n)$;

Perpendikulyarlarning *y=f(x)* chiziq bilan kesishgan qo‘shni nuqtalarini vatarlar bilan birlashtiramiz va hosil qilingan har bir to‘g‘ri chiziqli trapesiyalarning yuzini topamiz:

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h; \quad \cdots \quad \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h;$$



Barcha n ta trapesiya yuzini qo‘shamiz

$$S = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + ... + \frac{y_n}{2}\right]$$

Demak. Egri chiziqli trapesiyaning yuzi taqriban quyidagiga teng

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

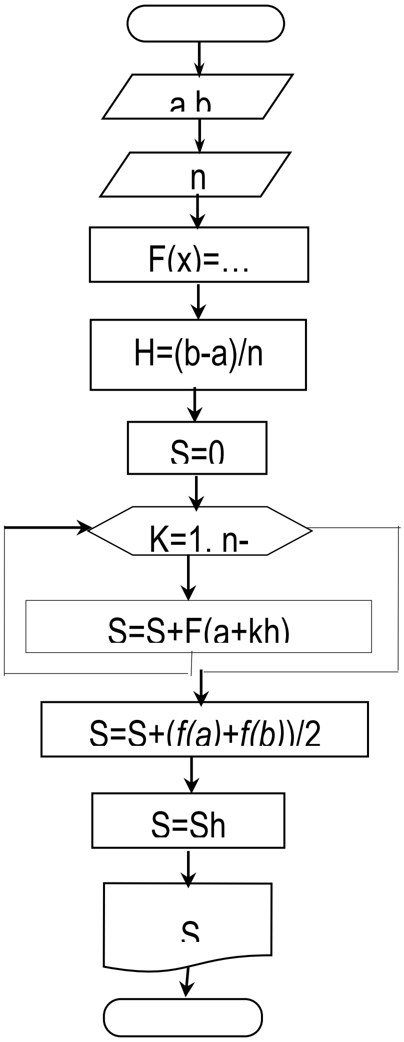
yoki $y_0=f(a)$, $y_n=f(b)$, $x_i=a+ih$ desak, trapesiya usulining fomulasi

$$S = \int_a^b f(x)dx = h \cdot \left[\frac{f(a) + f(b)}{\mathbf{2}} + \sum_{k=\mathbf{1}}^{n-\mathbf{1}} f(a + kh)\right]$$

bo‘ladi.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblashning barcha usullarida n bo‘linishlar sonini orttirish tufayli xatolik miqdorini kamaytirish mumkin, chunki bo‘linishlar natijasida hosil bo‘lgan yuza qanchalik kichik bo‘lsa, formula orqali topayotgan figuraning yuzi egri chiziqli trapesiyaning yuziga shunchalik yaqin bo‘ladi.

Trapesiya usuli algoritmining blok-sxemasi.



algoritm asosida paskal dasturlah tilidagi dasturi

```
Program Trapetsia;
var a,b,h,S:real;
    n,k:byte;
  function f(x:real):real;
     begin f:= .... end;
   begin
    write('a,b=');
    readln(a,b);
     write('n=');
    readln(n);
        h:=(b-a)/N;
```

```
        s:=0;
        for k:=1 to n-1 do
        s:=s+f(a+k*h);
        s:=s+(f(a)+f(b))/2;
        s:=s*h;
      writeln('s=',s);
end.
```

Simpson (parabolalar) usuli. [a,v] kesma uzunligini h=(b-a)/2n bo‘lgan 2n ta juft bo‘lakka

x_1, x_2,…, x_{2n-1} nuqtalar orqali ajratamiz.

[x_0, x_2],[x_2, x_4],…,[x_{2n-2}, x_{2n}] kesmalar xosil bo‘ladi. x_0=a, x_{2n}=b bo‘ladi.Bu kesmalarning o‘rtalari mos ravishda x_1 ,x_3 ,…,x_{2n-1} nuqtalar bo‘ladi.U holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

integral yig‘indiga ajratamiz.

Har bir [x_{2i}, x_{2i+2}] (i=0 dan n-1 gacha) kesmalarda (x_{2i}, Y_{2i}), (x_{2i+1}, Y_{2i+1}),(x_{2i+2}, Y_{2i+2}) nuqtalar orqali hamma vaqt parabola o‘tkazish mumkin,shu bilan birga bunday parabola [x_{2i},y_{2i+2}] kesmada faqat bitta bo‘ladi. Yordamchi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapesiya yuzi taqriban berilgan egri chiziqli trapesiyaning yuziga teng

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (Ax^2 + Bx + C)dx$$

Parabolaga tegishli har uchta nuqta uchun yuqoridagi tenglamani yozamiz:

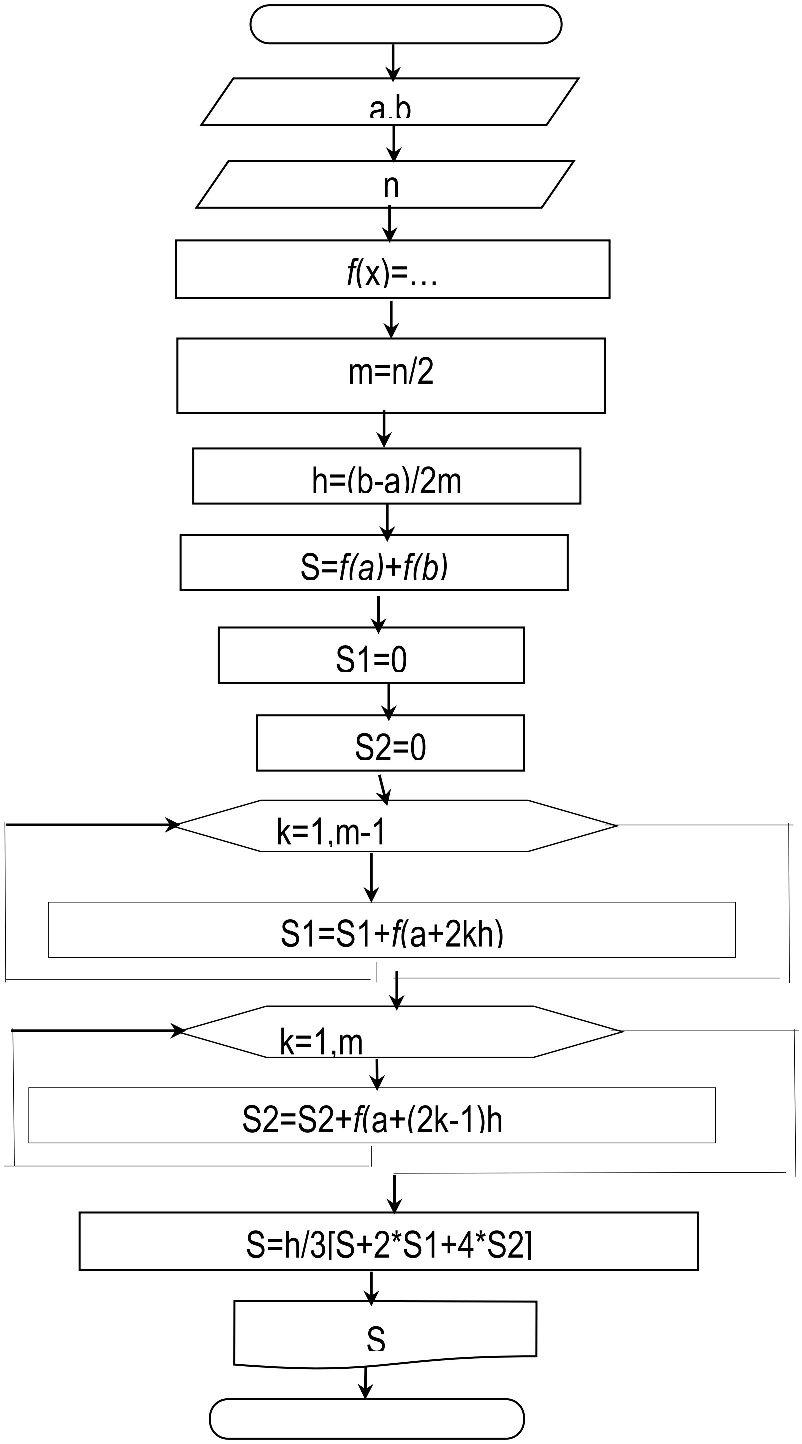
$$\begin{cases} ax_{2i}^2 + bx_{2i} + c = y_{2i} \\ ax_{2i+1} + bx_{2i+1} + c = y_{2i+1} \\ ax_{2i+2} + bx_{2i+2} + c = y_{2i+2} \end{cases}$$

Hosil bo‘lgan a,b,c noma’lumli uchta tenglamalar sistemasini echib, a,b,c larning qiymatini integral ifodaga qo‘yib, hisoblaymiz. Har bir kesmalar uchun ularning qiymatini qo‘shib, parabolalar usuliga mos formulani hosil qilamiz.

$$S = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\cdot\sum_{k=1}^{n} f(a+(2i-1)h) + 4\cdot\sum_{k=1}^{n} f(a+2ih)\right];$$

bu erda   h=(b-a)/2n .

Simpson (parabolalar) usuli algoritmining blok-sxemasi.



algoritm asosida paskal dasturlah tilidagi dasturi:

```
Program Parabola;
var a,b,h,s,s1,s2:real;
k,m,n:byte;
function f(x:real):real;
begin f:=... end;
begin
write('a,b');  readln( a,b);
write('n='); readln(n);
m:=n*2; h:=(b-a)/m;   s:=f(a)+f(b); s1:=0; s2:=0;
for k:=1 to m-1 do s1:=s1+f(a+2*k*h);
for k:=1 to m do s2:=s2+f(a+(2*k-1)*h);
s:=h/3*(s+2*s1+4*s2);
writeln('s=',s);
end.
```

9-§.Birinchi tartibli tenglamalarni taqriban yechish

Ma’lumki, ko‘pincha amaliy masalalarni echishda, dastlab uning matematik modeli fizik, mexanik, kimyoviy va boshqa qonuniyatlar asosida tuziladi. Matematik model asosan algebraik, differensial, integral va boshqa tenglamalardan iborat bo‘ladi. *Oddiy differensial* tenglamalar esa juda ko‘p muhandislik masalalarini echishda uchraydi. Demak, differensial tenglamalarning ma’lum shartlarni qanoatlantiruvchi echimlarini topish katta ahamiyatga ega.

Differensial tenglamalar ikkita asosiy sinfga bo‘linadi: *oddiy differensial* tenglamalar va *xususiy hosilali differensial* tenglamalar.

Xususiy hosilali differensial tenlamalarga keyinroq batafsil to‘xtalamiz.

Oddiy differensial tenglamalarda faqat bir o‘zgaruvchiga bog‘liq funksiya va uning hosilalari qatnashadi, ya’ni

$$f(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (11.1)$$

(1) tenglamada qatnashuvchi hosilalarning eng yuqori tartibi differensial

tenglamalarning *tartibi* deyiladi. Agar tenglama izlanuvchi funksiya va uning hosilalariga nisbatan chiziqli bo‘lsa, unga *chiziqli differensial* tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning *umumiy echimi* deb, uni ayniyatga aylantiruvchi x va *n* ta $c_1, c_2, c_3, ..., c_n$ o‘zgarmaslarga bog‘liq ixtiyoriy funksiyaga aytiladi. Masalan (11.1) tenglamaning umumiy echimi $y = \varphi(x, c_1, c_2, ..., c_n)$ ko‘rinishdagi funksiyalardan iborat . Agar $c_1, c_2, ..., c_n$ o‘zgarmaslarga muayyan qiymatlar berilsa, umumiy echimdan xususiy echim hosil qilinadi. Xususiy echimni topish uchun $c_1, c_2, ..., c_n$ o‘zgarmaslarning mos qiymatlarini aniqlash lozim. Buning uchun esa echimni qanoatlantiruvchi qo‘shimcha shartlarga ega bo‘lishimiz kerak. Agar differensial tenglama *n*-tartibli bo‘lsa, yagona xususiy echimni topish uchun xuddi shuncha qo‘shimcha shartlar kerak. Xususan, *1*-tartibli tenglama ($F(x, y, y') = 0$) ning umumiy echimi $y = \varphi(x, c)$ dagi *s* o‘zgarmasni topish uchun *1* ta qo‘shimcha shartning berilishi kifoya.

Qo‘shimcha shartlar berilishiga ko‘ra differensial tenglamalar uchun 2 xil masala qo‘yiladi:

1) *Koshi masalasi*
2) *Chegaraviy masala.*

Agar qo‘shimcha shartlar bitta $x = x_0$ nuqtada berilsa, differensial tenglamani echish uchun qo‘yilgan masala *Koshi masalasi* deyiladi. Koshi masalasidagi qo‘shimcha shartlar *boshlang‘ich shartlar,* $x = x_0$ nuqta esa *boshlang‘ich nuqta* deb ataladi. Oddiy differensial tenglamalarni echishning chizma, analitik, taqribiy va sonli echish usullari mavjud.

*Analitik usullar*da differensial tenglamaning echimlari aniq formulalar orqali aniqlanadi.

*Taqribiy usullar*da differensial tenglama va qo‘shimcha shartlar u yoki bu darajada soddalashtirilib, masala osonroq masalaga keltiriladi.

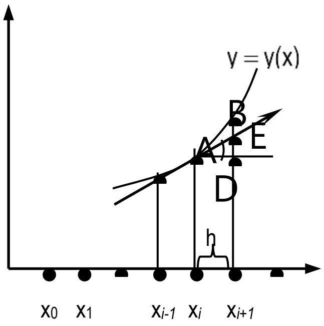
*Sonli usullar*da esa echim analitik shaklda emas, balki sonlar jadvali ko‘rinishida olinadi. Albatta bunda differensial tenglamalar oldin diskret tenglamalar bilan almashtirib olinadi. Natijada sonli usullar vositasida olingan echim ham taqribiy bo‘ladi.

Umuman olganda, oddiy differensial tenglamalarning echimlarini analitik usul yordamida topish imkoni juda kam bo‘lganligi uchun, amalda ko‘pincha ularni sonli usullar yordamida taqribiy hisoblanadi.

10-§.Eyler va Runge-Kutta usullari

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalarni taqriban yechishning usullardan Eyler va Runge-Kutta usullarini ko‘rib chiqamiz.

Eyler usuli



Bizga quyidagi birinchi tartibli differensial tenglama(Koshi masalasi)ni

$y' = f(x, y)$ (12.1)

$[a, b]$ oraliqdagi $y_0 = y(x_0)$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi echimini topish lozim bo‘lsin.

Koshi masalasini Eyler usuli yordamida echish uchun, dastlab differensial tenglamaning echimi qidiriladigan $[a, b]$ kesmani $x_1, x_2, ..., x_n$ tugun nuqtalar bilan bo‘laklarga bo‘lamiz. Tugun nuqtalarning koordinatalari $x_{i+1} = a + (i+1)h \quad (i = \overline{o, n-1})$ formula orqali aniqlanadi. Har bir tugunda $y(x_i)$ echimning qiymatlarini chekli ayirmalar yordamida taqribiy y_i qiymatlar bilan almashtiriladi.

Ma’lumki, $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqta atrofidagi Teylor qatoriga yoyilmasini quyidagicha yozish mumkin:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{1}{2} h^2 \cdot y'(x_i) + ...$$

Ushbu cheksiz qatorning boshidagi ikkita had bilan chegaralanib, birinchi tartibli hosila qatnashgan hadni aniqlash natijasida quyidagi chekli ayirmali formulani hosil qilamiz:

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \qquad (12.2)$$

Ushbu almashtirishning geometrik ma’nosi quyidagicha:

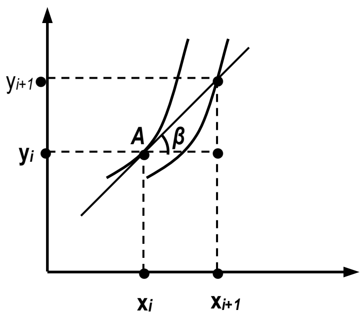
Xosilaning geometrik ma’nosiga ko‘ra

$$y'(x_i) = tg\beta = \frac{ED}{AD} = \frac{ED}{h}$$

(12.2) dan

$$y'(x_i) \approx \frac{\overbrace{y_{i+1} - y_i}^{BD}}{h} = \frac{BD}{h} = \frac{ED}{h} + \frac{BE}{h} = y'(x_i) + \frac{BE}{h}$$

Demak, chekli ayirmalar formulasi hosilaning asl qiymatidan BE/h ga farq qiladi, ya’ni *BE* qancha kichik bo‘lsa, chekli ayirma y' hosilaga shuncha yaqin bo‘ladi. Rasmdan $h \to 0$ da $BE \to 0$ ekanini ko‘rish mumkin. (12.1) va (12.2) dan $y'_i = f(x_i, y_i)$ ekanini hisobga olib, quyidagini hosil qilamiz:



$$y'_{i+1} \approx y_{i+1} + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (12.3)$$

Hosil qilingan (12.3) formula Eyler usulining asosiy ishchi formulasi bo‘lib, uning yordamida tugun nuqtalarga mos bo‘lgan differensial tenglamaning y_i xususiy echimlarini topish mumkin. Yuqoridagi formuladan ko‘rinib turibdiki, y_{i+1} echimni topish uchun y_i echimnigina bilish kifoya. Demak, Eyler usuli bir qadamli usullar jumlasiga kiradi.

Eyler usulining *geometrik ma’nosi* quyidagicha:

A nuqta $x = x_i$ nuqtaga mos keluvchi echim bo‘lsin. Bu nuqtadan integral chiziqqa o‘tkazilgan urinma x_{i+1} nuqtada boshqa integral chizig‘ida y_{i+1} echimni aniqlaydi.

Urinmaning og‘maligi $\beta \cdot y_i^{'} = f(x_i, y_i)$ hosila bilan aniqlanadi. Demak, Eyler usulidagi yo‘l qo‘yilgan asosiy xatolik echimni bir integral chizig‘idan boshqasiga o‘tkazib yuborishi bilan xarakterlanadi.

Runge-Kutta usuli. Bir qadamli oshkor usullarning boshqa bir necha xillari ham majud bo‘lib, ularning ichida amalda eng ko‘p ishdlatiladigani Runge-Kutta usuli hisoblanadi. Usul shartiga ko‘ra har bir yangi x_{i+1} tugun nuqtadagi y_{i+1} echimni topish uchun $f(x, y)$ funksiyani 4 marta har xil argumentlar uchun hisoblash kerak. Bu jihatdan Runge-Kutta usuli hisoblash uchun nisbatan ko‘p vaqt talab qiladi. Lekin Eyler usulidan ko‘ra aniqligi yuqori bo‘lganligi uchun, undan amalda keng foydalaniladi.

Usulning ishchi formulasi quyidagicha yoziladi:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3) \quad i = 0,1,...$$

bu erda $k_0 = f(x_i, y_i)$***;***

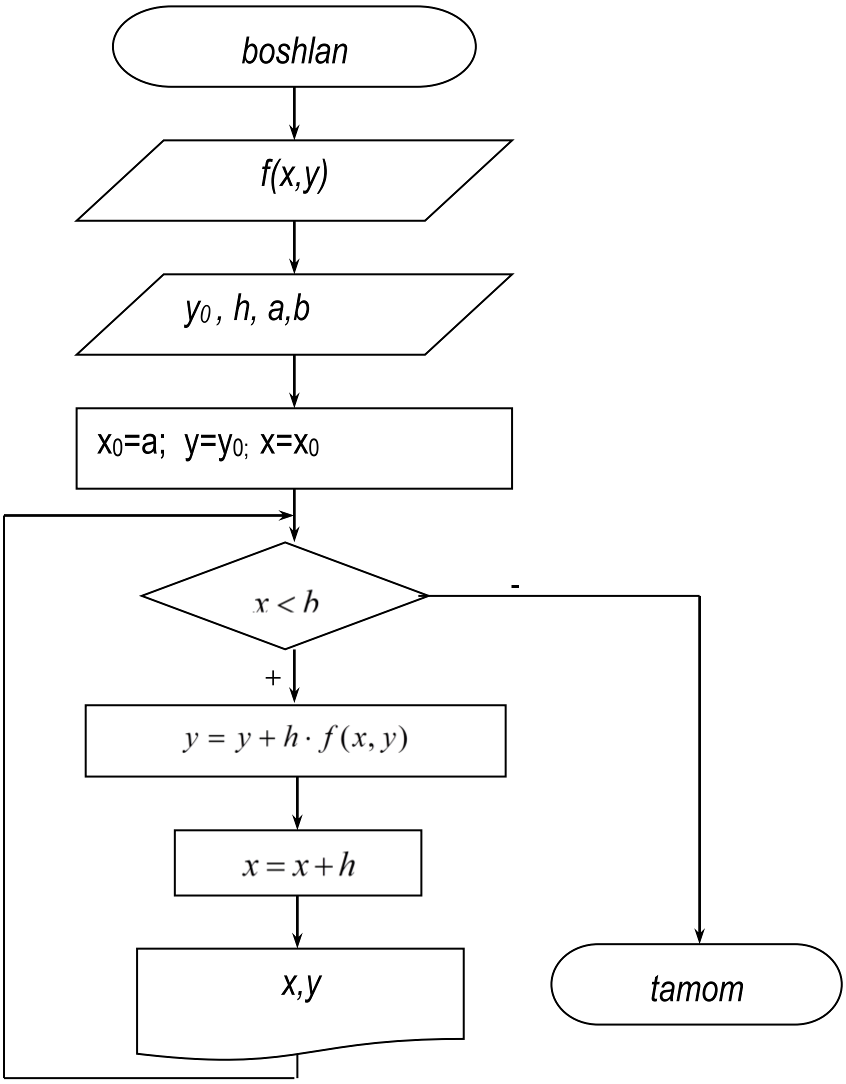
$$k_1 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_0);$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot k_1);$$

$$k_3 = f(x_i + h, y_i + h \cdot k_2);$$

Demak, formulalardan ko‘rinib turibdiki, Eyler usuli birinchi tartibli Runge-Kutta usuliga mos keladi.

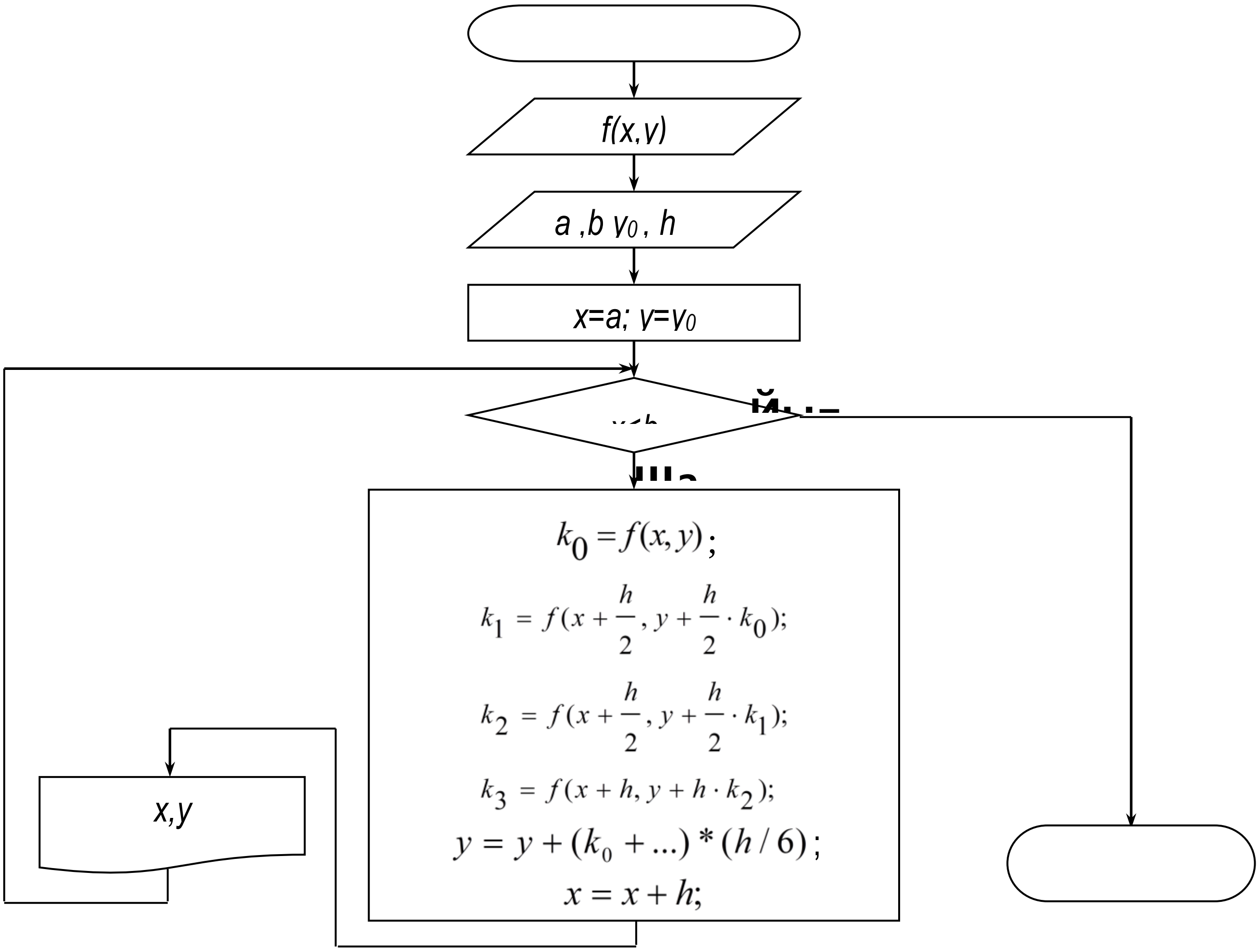
Eyler usuliga mos algoritm blok-sxemasi.



algoritm asosida paskal dasturlah tilidagi dasturi

```
 Program Eyler;
var a,b,x0,y0,x,y,h:real;
 Function f(x,y:real):real;
 Begin
f:=<функция куриниши>;
end;
 Begin
      WRITE('A,B='); READLN(A,B);
      WRITE('Y0='); READLN(Y0);
  x0:=a;
      WRITE('H=');READLN(H);
  writeln('x0=',x0,'    y0=',  y0 );
  x:=x0;y:=y0;
  while  x< b  do
  begin
  y:=y+h*f(x,y);
  Writeln('x=',x; '     y=',y);
  x:=x+h;
  end;
      READLN;
end.
```

Runge-Kutta usuliga mos blok-sxema.



algoritm asosida paskal dasturlah tilidagi dasturi**:**

```
Program  R__kutta;
var  a,b,x0,y0,h,x,y,k0,k1,k2,k3:real;
function f(x,y:real):real;
   begin
          f:=. . .;
   end;
```

```
 Begin
          WRITE(‘A,B=’);READLN(A,B);
          WRITE(‘Y0,H=’);READLN(Y0,H);
   x:=a;y:=y0;
   while x<b do
   begin
      k0:=f(x,y);
      k1:=f(x+h/2,y+h*k0/2);
      k2:=f(x+h/2,y+h*k1/2);
      k3:=f(x+h,y+h*k2);
   y:=y+(k0+2*k1+2*k2+k3)*(h/6);
   x:=x+h;
   Writeln(‘x=’,x,’    y=’,y );
   end;
readln;
end.
```

To’rtinchi bob bo`yicha savol va topshiriqlar

1. Aniq integralning geometrik ma’nosi qanday?
2. Aniq integralni nima uchun taqribiy hisoblanadi?
3. Aniq integralni taqribiy hisoblash usullari qaysilar?
4. To‘gri to‘rtburchaklar usuliga mos ishchi formulalarni qanday hosil qilinadi ?
5. Qanday tenglamalarni differensial tenglamalar deb ataymiz?
6. Oddiy differensial tenglamalarga ta’rif bering?
7. Umumiy echim nima?
8. Xususiy echim nima?
9. Differensial tenglamalarni taqribiy echish zaruriyati qaerdan kelib chiqadi?

10. Differensial tenglamalar ni taqribiy echishning qanday usullarini bilasiz?

11. Eyler usulining ishchi algoritmi?

12. Runge-Kutta usulining ishchi algoritmi?

13. Runge-Kutta usulining qanday kamchiligi va afzalligi bor?

14. Amaliy topshiriqlar

Eyler va Runge-Kutta usullari yordamida berilgan differensial tenglama uchun Koshi masalasini h=0.1 =adam bilan [0;1] orali=da yechimini topish algoritmi va dasturini tuzing.

№	*Tenglama*	*Boshlang'ich shart*
1	$y' = (x+1)^{1/2}y - 0{,}5x^2$	$y(0) = 1{,}2$
2	$y' = (x^2+1)^{1/2}y + 4{,}5x$	$y(0) = 1{,}4$
3	$y' = 3{,}4x^2y - 2{,}8x^2$	$y(0) = 0{,}6$
4	$y' = (x+3)^{1/2}y - 1{,}3x^2$	$y(0) = 1{,}6$
5	$y' = 4{,}5x^2 + y - 6{,}4x + 1$	$y(0) = 4{,}2$
6	$y' = 2{,}7x^2y + 3{,}8x + y$	$y(0) = 4{,}6$
7	$y' = 8{,}5x^3y + \sin x^2$	$y(0) = 2{,}8$
8	$y' = 5{,}2x - y + 4.8x^3$	$y(0) = 4{,}2$
9	$y' = 4{,}2xy + x^2 - \cos x$	$y(0) = 4{,}8$
10	$y' = 5{,}4xy + 1{,}5x^2 + \ln y$	$y(0) = 2{,}6$
11	$y' = 8{,}6x^3y - 5{,}1x^2 + 2$	$y(0) = 4{,}2$
12	$y' = (3{,}5x+1)y + x^2 + 1{,}6$	$y(0) = 2{,}6$
13	$y' = (2x+5)^{1/2}y + 1{,}5x^2$	$y(0) = 2{,}4$
14	$y' = (x^2-1)^{1/3}y - 0{,}6x^2$	$y(0) = 1{,}2$
15	$y' = (2x+1)^{1/2}y + 3{,}4x^2 + 1{,}2$	$y(0) = 1{,}2$
16	$y' = (3x^2+1)y - 3{,}4x^2 + 1{,}4$	$y(0) = 1{,}5$
17	$y' = (4x^2+1)y - 3{,}5x^2 + 1{,}2$	$y(0) = 1{,}6$
18	$y' = (4x^2-1)y + 1{,}8x^3 - 12$	$y(0) = 1{,}2$
19	$y' = x^{1/2} + 7x^3y - 3x^2$	$y(0) = 3{,}2$

20	$y'=4,6x^3+2x^3+2.8$	$y(0)=2,9$
21	$y'=4,2x^3y-2,6x^2$	$y(0)=4,7$
22	$y'=3x+1,9y^2-5xy$	$y(0)=0,2$
23	$y'=x^2+xy+\cos x$	$y(0)=0,2$
24	$y'=x^2+y-\ln y$	$y(0)=0,4$
25	$y'=xy+y^2+\sin y$	$y(0)=0,6$
26	$y'=0,1x+0,2y^2+5y$	$y(0)=0,2$
27	$y'=2x^2+xy-\sin x$	$y(0)=0,5$
28	$y'=x^2+0,2xy$	$y(0)=0,6$
29	$y'=x^2+3xy-\log_2 x$	$y(0)=0,3$
30	$y'=2x^2+3y^2+5xy$	$y(0)=0,2$

11-§.Chiziqli dasturlash masalalarining qo‘yilishi va unda qo‘llaniladigan modellar. Masalasini simpleks usulda yechish.

Optimallash nazariyasi va matematik dasturlashtirish hozirgi inson faoliyatining turli jabxalarida keng qo‘llanilayotgan fanlardan biridir. Bu sohadagi muhim muvaffaqiyatlarga katta texnik sistemalarni loyihalash va tahlil qilish natijasida erishilgandir. Nazariy bilimlarni injenerlik va boshqa sohalarga tezda tadbiq qilinishi hozirgi zamon hisoblash texnikasining takomillashtirilishi va keng tarqalishi bilan bevosita bog‘liqdir.
hozirgi vaqtda matematik usullar xalq xo‘jaligining rivojlantirishda, iqtisodiy masalalarni echishda muvaffaqiyat bilan qo‘llanilmoqda. Masalalarni echishda quyidagi muommalar bilan duch kelinadi: a) masala echimining mavjudligi; b) echimning yagonaligi; v) echimning turg‘unligi; g) o‘zgaruvchilarga nisbatan cheklanish; d) maqsadga muvofiq echimni aniqlash.

Boshqarish va rejalashtirish jarayonida iqtisodcha quyidagi xususiyatlarga ega bo‘lgan masalalarga duch keladi:

- izlanayotgan miqdorlarga juda ko‘p cheklanishlar qo‘yiladi;

- masala juda ko‘p echimga ega bo‘lib, ulardan qandaydir ma’noda eng maqbulini (optimalini) tanlab olish kerak bo‘ladi.

Yaqin vaqtlargacha bunday masalalarning ko‘pchiligi empirik yo‘l bilan echilar edi. Keyingi yillarda yaratilgan chiziqli dasturlash usullari quyilgan masalalarni birdan – bir to‘g‘ri hal qilish imkonini yaratib berdi.

Matematik dasturlash amalga oshirsa bo‘ladigan dasturni (rejani) aniqlashdan iborat bo‘lib, u ma’lum nuqtai nazardan qabul qilingan mezonga (kriteriyga) asosan optimal hisoblanadi. Zamonaviy kompyuterlarning yaratilishi va ularning dasturiy ta’minoti, matematik dasturlash usullarining tadbiqlari va imkoniyatlarini kengaytirib yubordi.

Berilgan iqtisodiy masalaning matematik modelini tuzish ikki bosqichdan iborat bo‘ladi:

1.Oldimizga qo‘yilgan maqsad, izlanayotgan miqdorlarning (noma’lumlarning) biror bog‘lanishi ko‘rinishida beriladi. Bu bog‘lanish *maqsad funksiyasi* yoki mazkur *masalaning funksionali* deyiladi.

2.Shundan so‘ng izlanayotgan miqdorlarga qo‘yiladigan cheklanishlar ifodalanadi. Bunday shartlar *cheklanishlar sistemasi* deyiladi.

Agar maqsad funksiyasi musbat iqtisodiy omillarni (masalan foydani) ifodalasa, u holda maqsad funksiyasining maksimum qiymati aniqlanadi, aks xolda – minimum qiymati aniqlanadi.

Cheklanishlar sistemasini qanoatlantiruvchi har qanday echim (reja) *mumkin bo‘lgan echim* (reja) deyiladi. Maqsad funksiyasiga maksimum (yoki minimum) qiymat beradigan mumkin bo‘lgan echim (reja) *optimal echim* (reja) deyiladi.

Shunday qilib, masalani echish – mumkin bo‘lgan barcha echimlardan optimalini topishdan iborat.

Agar maqsad funksiyasi va cheklanishlar sistemasi noma’lumlarga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda masala *chiziqli dasturlash masalasi* deyiladi. Agar maqsad funksiyasi yoki cheklanishlar sistemasi chiziqsiz ifodalardan tashkil topsa, u holda masala *chiziqsiz dasturlash masalasi* deyiladi. Chiziqsiz dastrulash qavariq, diskret, kvadratik, stoxastik, dinamik va boshqa dasturlashlarga bo‘linadi.

Chiziqli dasturlash usullarini qo‘llab echiladigan iqtisodiy masalalarga quyidagi masalalarni keltiramiz.

Transport (yuk tashish) masalasi. M_1,M_2,M_3, ko‘mir konlarida xar oyda mos ravshida a_1, a_2, a_3, tonnadan ko‘mir qazib chiqariladi. KO‘mir R_1, R_2, R_3, punktlarga (omborlarga) etkazib berilishi kerak. Bu punktlarning ko‘mirga har oydagi talabi mos ravshida v_1,v_2,v_3, tonnani tashkil etadi. M_i konidan R_j punktga keltirilgan 1 tonna ko‘mirga S_{ij} sum sarflansin. Agar M_i konidan P_j punktga keltirilgan X_{ij} tonna desak, masala shunday qo‘yiladiki, barcha ko‘mirni punktlarga etkazib berish uchun qilingan sarf – xarajat eng kichik qiymatga (minimum) ega bo‘lish kerak. Masalani echish uchun eng kam narx usuli, shimoliy – g‘arb usuli, diagonal usuli, potensial usuli kabilar mavjud.

Ozuka rasioni masalasi. Xo‘jalikda n hil ozuqa bo‘lib, ularning xar qaysisi m turdagi to‘yimli moddalarga (yog‘, kraxmal, oqsil va hokazolarga) ega. Birinchi ozuqaning bir birligi a_{1i} birinchi to‘yimli moddaga, a_{2i} birlik ikkinchi to‘yimli moddaga va hokazo ega. Umumiy holda j nomerli bir birlik ozuqada a_{ij} birlik i chi modda bor. v_i (i=1,2,...,m) – har qaysi to‘yimli moddaning miqdori. Bu miqdor albatta rasionga kirishi kerak. j nomerli ozuqaning narxi C_j (j = 1,2,...,n). Shunday rasion x_j , ya’ni boqish rejasini topish kerakki, u barcha talablarga javob berib, narxi eng kichik qiymatga ega bo‘lsin.

Yuqoridagi masalardan tashqari qo‘yidagi masalalar ham chiziqli dasturlash masalariga misol bo‘ladi:

1.*Xom ashyo resurslaridan foydalanish masalasi* (Korxonaning eng ko‘p daromad olish masalasi.)

2.*Parxez masalasi*.

3.*Andozalash masalasi.*

4.*Ishga tayinlash xaqidagi masala*.

Endi ba’zi tarixiy ma’lumotlarga to‘xtalib o‘tamiz. Chiziqli algebra matematikaning mustaqil sohasi sifatida XVIII asrda nemis matematigi Leybnis va shveysariyalik matematik G.Kramer tomonidan n – tartibli determinantlar tushunchasi kiritilib, n–ta noma’lumli n – ta tenglamalar sistemasining echishning umumiy formulasi berilgandan keyin yuzaga keldi.

Yuk mashinasining optimal rejasini tuzish masalasi chiziqli dasturlash masalasi tariqasida birinchi marta A.N.Tolstov tomonidan 1930 yilda qo‘yilgan.

1931 yili venger matematigi B. Egervari chiziqli dasturlashning hususiy xollaridan birining matematik qo‘yilishini tekshirib, bu masala keyinchalik «Tanlash muammosi» nomi bilan yuritila boshlandi. Bu masalani amerikalik matematik G.U. Kun yangi usul bilan echdi va uni Venger usuli deb atadi.

Chiziqli dasturlash masalasini tekshirishning sistematik taraqqiyoti 1939 yili. L.V. Kantarovich va uning shogirdlari ishlari asosida boshlandi. U chiziqli dasturalash masalasini echishning umumiy usuli – hal qiluvchi ko‘paytuvchilar usulini yaratdi.

Simpleks usul 1941 yili Dj. Dansig tomonidan yaratildi. Chiziqli va chiziqsiz dasturlashning keyingi rivoji Ford, Kun kabi olimlarning ishlari va kompyuterlarning rivoji bilan bog‘liq.

Chiziqli dasturlash masalalasining qo‘yilishi. Maqsad funksiyasi va cheklanish shartlari chiziqli funksiyalardan iborat bo‘lgan masala chiziqli dasturlash deyiladi.

Masala umumiy tarzda quyidagicha qo‘yiladi. Chiziqli

$$Z = \sum_{J=1}^{n} c_j x_j \qquad (13.1)$$

funksiyaning qo‘yidagi chiziqli

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} x_j \le b_i \qquad i = \overline{1.m} \\ &x_j \ge 0. \quad J = \overline{1.n} \end{aligned}\right\} \quad (13.2)$$

cheklanish shartlarini qanoatlantiridagan minimumi topilsin. Bu erda s_j, a_{iJ}, b_i lar oldindan berilgan o‘zgarmas sonlardir. Tengsizliklar sistemasi ko‘rinishida berilgan cheklanish shartlari (13.2)ni qo‘shimcha o‘zgaruvchilar, ya’ni x_{n+i} larni kiritib sistemani quyidagicha yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{J=1}^{n} a_{iJ} x_J + x_{n+i} = b_i \qquad i = \overline{1.m} \\ &x_j \ge 0. \quad x_{n+i} + \ge 0. \quad j = \overline{1.n} \end{aligned}\right\} \quad (13.3)$$

(1) funksiyaning chiziqli cheklanish shartlari (13.2)ni qanoatlantiradigan minimumini topish masalasi *standart chiziqli dasturlash masalasi* deyiladi. (13.1) funksiyaning cheklanish shartlari (13.3)ni qanoatlantiradigan minimumini topish masalasi esa, *kanonik ko'rinishdagi chiziqli dasturlash masalasi* deyiladi. (13.1) funksiyaga *maqsad yoki minimallashtiradigan funksiya* deyiladi. (13.1)-(13.2)ga yoki (13.1)-(13.3)ga qo'yiladigan *masalaning matematik modeli* deyiladi. Tengsizliklar sistemasi (13.2) yoki tenglamalar sistemasi (13.3)ning bir nechta, hatto cheksiz ko'p echimlari bo'lishi mumkin.

1-ta'rif. Tenglamalar yoki tengsizliklar sistemasining istalgan manfiy bo'lmagan echimi *o'rinli echim* deyiladi.

2-ta'rif. Maqsad funksiya (13.1)ga talab qilingan minimum (yoki maksimum) qiymat beriuvchi o'rinli echim *optimal echim* deyiladi.

Chiziqli dasturlash masalalarini echishda ayrim hollarda maqsad funksiya (13.1)ning maksimumini topish talab qilinadi. Biroq, minZ=max(-Z) bo'lganligi uchun maqsad funksiyaning minimumini topish masalasini maksimumni topish masalasiga keltirish mumkin va aksincha.

Chiziqli dasturlash masalalarining matematik modellarini qurish. *Xom ashyodan foydalanish masalasi*. Biror karxona ikki xil, ya'ni M_1 va M_2 ishlab chiqarish uchun uch xil, ya'ni x_1,x_2,x_3 xom ashyodan foydalanadigan bo'lsin. Xom ashyoning zaxiralari, mahsulot birligini tayyorlash uchun sarflangan xom ashyo birligining miqdori va har qaysi mahsulot birligidan keladigan foydaning son qiymati 1-jadvalda keltirilgandek bo'lsin.

1-jadval

Xom ashyo xillari	Xom ashyo zaxirasi	Mahsulot birligini tayyorlash uchun sarflangan xom ashyo birligining miqdori.	
		M_1	M_2
X_1	20	2	5
X_2	40	8	5
X_3	30	5	6

Bir birlik mahsulotdan keladigan foyda.	50	40

Agar M_1 mahsulot birligining miqdorini X_1,M_2 mahsulot birligining miqdorini esa X_2 bilan belgilab olib, mahsulot birligini tayyorlash uchun sarf bo‘lgan xom ashyo birligini va xom ashyoning zaxirasini nazarda tutsak, quyidagi cheklanish tengsizliklarini (yoki shartlarini) hosil qilamiz.

$2x_1+5x_2 \le 20, \quad 8x_1+5x_2 \le 40, \quad 5x_1+6x_2 \le 30 \quad (13.4)$

Bu tengsizliklar mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun sarf qilingan xom ashyoning berilgan xom ashyo zaxirasidan oshib ketmasligini ko‘rsatadi.

Agar M_1 xildagi mahsulot ishlab chiqarilmasa $x_1=0$, aks holda esa $x_1> 0$, M_2 xildagi mahsulot uchun ham xuddi shunday bo‘ladi.

Demak, hamma vaqt $x_1\ge0$, $x_2\ge0$ bo‘lar ekan. M_1 xildagi bir-birlik mahsulot 50 birlik foyda bergani uchun shu xildagi umumiy mahsulotdan keladigan foyda $50x_1$, ga teng bo‘ladi. Xuddi shuningdek, ikkinchi xil mahsulotdan $40x_2$ foyda olinadi. Umumiy foyda quyidagi

$Z=Z(x_1,x_2)=50x_1+40x_2 \qquad (13.5)$

ko‘rinishda bo‘ladi va qo‘yilgan masalaning maqsad funksiyasini ifodalaydi.

Cheklanish shartlari (13.4) va maqsad funksiyasi (13.5) chiziqli bo‘lgani uchun (13.5)-(13.4) ifoda chiziqli iqtisodiy masalaning, ya’ni xom ashyodan foydalanish masalasining matematik modelini tashkil qiladi. Demak, masalani echish uchun (13.4) sistemaning shunday manfiy bo‘lmagan $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$ echimini topamizki, unda (13.5) formula bilan aniqlangan Z chiziqli funksiya eng katta qiymatga erishadi (Z maksimallashadi), ya’ni umumiy foyda eng katta bo‘ladi.

Endi xom ashyodan foydalanish masalasini umumiy holda qo‘yish mumkin.

Faraz qilaylik, korxona n xil mahsulot tayyorlash uchun m xil xom ashyodan foydalanadigan bo‘lsin. Avvalgi masalamizga o‘xshash, mahsulot xillarini $M_j(j=\overline{1.n})$ bilan, xom ashyo hillarini $X_i(i=\overline{1.m})$ bilan, xom ashyoning zaxiralarini b_i bilan, i-ko‘rinishdagi xom ashyo birligi miqdoridan j-nomerli mahsulot tayyorlash uchun qancha sarf qilinganligini a_{ij}; j - nomerli mahsulot birligi realizasiya qilingandan keyin olinadigan foydani S_j bilan va j – nomerli mahsulot birligining miqdoring X_J bilan belgilasak (2-jadval) qo‘yilgan masalaning matematik modeli quyidagi bo‘ladi.

$$Z = \sum_{i=1}^{n} C_j X_j \qquad (13.6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_j, \quad (i = \overline{1.m}), \quad x_j \ge 0, \quad (j = \overline{1.n}) \qquad (13.7)$$

Bu erda (13.6) maqsad funksiya, (13.7) esa cheklanish shartlaridir.

2 – jadval

Xom ashyo xillari	Xom ashyo zaxirasi	j – nomerli mahsulot birligini tayyorlash uchun sarf qilingan, i-xildagi xom ashyo birligining miqdori.				
		M_1	M_2	M_3	...	M_n
X_1 X_2 . . . x_m	b_1 b_2 . . . b_m	a_{11} a_{21} . . . a_{m1}	a_{12} a_{22} . . . a_{m2}	a_{13} a_{23} . . . a_{m3}	....	a_{1n} a_{2n} . . . a_{mn}
Bir birlik mahsulotdan keladigan foyda		C_1	C_2	C3	.....	C_n

Qo‘yilgan masaladan ko‘rinib turibdiki, maqsad funksiya (13.6)ni maksimallashtiradigan $X_j \ge 0$ larni topish uchun chiziqli tengsizliklar sistemasi (13.7)ning manfiy bo‘lmagan echimlarini topish kerak. Tengsizliklar sistemasini echish tenglamalar sistemasini echishga qaraganda ancha murakkab bo‘lgani uchun, ko‘pincha tengsizliklar sistemasi (13.7) unga teng kuchli bo‘lgan tenglamalar sistemasi bilan almashtiriladi. Buning uchun, tengsizliklar sistemasi

(13.7) ning chap tomoniga, hozircha noma'lum va musbat bo'lgan $X_{n+i} \geq 0$, i= $\overline{1.m}$ o'zgaruvchilarni qo'shib yozish kifoyadir, ya'ni

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i; \quad i = \overline{1.m} \qquad (13.8)$$

Bu sistemada noma'lumlar soni tenglamalar sonidan ko'p, ya'ni n+m>n bo'lgani uchun (13.8) sistema cheksiz ko'p echimlarga egadir. Bu echimlar to'plamidan shunday $x_j \geq 0$ larni tanlab olish talab qilinadiri, maqsad funksiya (13.6) o'zining eng katta qiymatiga erishsin. (13.6)-(13.7) umumiy holda xom ashyodan foydalanish masalasining matematik modelini tashkil qiladi.

Transport masalasi, ozuqa rasioni masalasi va boshqa masalalarning umumiy holdagi matematik modellari ham shu kabi tuziladi.

Chiziqli dasturlash masalasini simpleks usulda yechish

Aytaylik, bizga (1.1) maksad funksiyasining (13.2) cheklanish tengsizliklar sistemasini kanoatlantiradigan minimumini topish masalasi berilgan bo'lsin. Tengsizliklar sistemasi (13.2)ni qanoatlantiradigan ixtiyoriy $x_1, x_2, .., x_n$ sonlar to'plami uning echimlari deyiladi.

(13.2) sistema xech bo'lmasa bitta echimga ega bo'lsa sistema *birgalikda deyiladi*. Aks xolda sistema *birgalikda emas deyiladi.* Bundan keyin biz tengsizliklar sistemasi (13.2)ni birgalikda deb faraz qilamiz.

n=2 bo'lganda (13.2)dan quyidagi sistemani hosil qilamiz.

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \leq в_i \text{; i=}\overline{1,m}; \quad x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0 \qquad (14.1)$$

Bu tengsizliklarning har biri $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2=b_i$ to'g'ri chiziq bilan, echimlarning manfiy bo'lmaslik shartlari $x_j \geq 0$ j=1;2 esa, $x_j=0$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan yarim tekisliklar bo'ladi. (14.1) tengsizliklar sistemasi birgalikda bo'lgani uchun xech bo'lmaganda bitta echimga ega bo'ladi, ya'ni chegaraviy to'g'ri chiziqlar bir-biri bilan kesishib, o'rinli echimlar to'plamini hosil qiladi. Demak, n=2 bo'lganda o'rinli echimlar to'plami ko'pburchakning nuqtalarilan iborat bo'ladi. (13.2)da n=3 bo'lsa va bu tengsizliklarning har biriga geometrik nuqtai nazardan qaraganda ularning har biri $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3=b_i$, $i=\overline{(1,m)}$. tekisliklari bilan, echimlarning manfiy bo‘lmaslik shartlari $x_j=0$ lar esa, $x_j\geq 0$ tengsizliklar bilan chegaralangan uch o‘lchovli yarim fazolardan iborat bo‘ladi.

Ikkinchi tomondan (13.2) sistema birgalikda bo‘lganligi uchun bu yarim fazolar kesishib, biror bir ko‘pyoqli hosil qiladi. KO‘pyoqli esa, o‘rinli echimlar to‘plamini beradi, ya’ni uning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari (13.2) ni qanoatlantiradi va nihoyat (13.2) da $n>3$ bo‘lsa bu tengsizlikning har biri $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+ ..+a_{in}x_n=b_i$; $i=\overline{(1,m)}$. gipertekisliklar bilan, manfiy bo‘lmaslik shartlari esa, $x_j=0$ gipertekisliklar bilan chegaralgan yarim fazolardan iborat bo‘ladi. Bu yarim fazolar kesishib, o‘rinli echimlar to‘plami bo‘lgan birorta ko‘pyoqlini hosil qiladi.

Yuqoridagi mulohazalar chiziqli dasturlash masalalarini geometrik nuqtai nazardan talqin qilishga imkon beradi: o‘rinli echimlar bo‘lgan ko‘pyoklining shunday nuqtasining koordinatalarini topish kerakki, bu nuqtada maqsad funksiya (13.1) o‘zining eng kichik qiymatiga erishsin.

Grafik usul. Bizga ikki o‘lchovli fazoda chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo‘lsin, ya’ni ushbu

$$Z = C_1X_1 + C_2 X_2 \qquad (14.2)$$

funksiyaning cheklanish tengsizliklari sistemasi

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i=1}^{2} a_{ij}x_j \leq b_i, i=\overline{1,m} \\ x_j \geq 0, j=1,2 \end{array}\right\} \qquad (14.3)$$

ni qanoatlantiradigan eng kichik qiymatini topish talab qilingan bo‘lsin.

Tengsizliklar sistemasi (14.3) ni birgalikda deb faraz qilsak, bu tengsizlikning har biri $a_{i1}x_1+ a_{i2}x_2 = b_i$, $i = 1,2$ to‘g‘ri chiziqlar bilan, echimlarning manfiy emaslik shartlari esa $Xj=0$, $j=1,2$ to‘g‘ri chiziqlar bilan yarim tekisliklarni tashkil etadi va bu yarim tekisliklar bir – biri bilan kesishib, o‘rinli echimlar to‘plami bo‘lgan birorta ko‘pburchakni tashkil etadi.

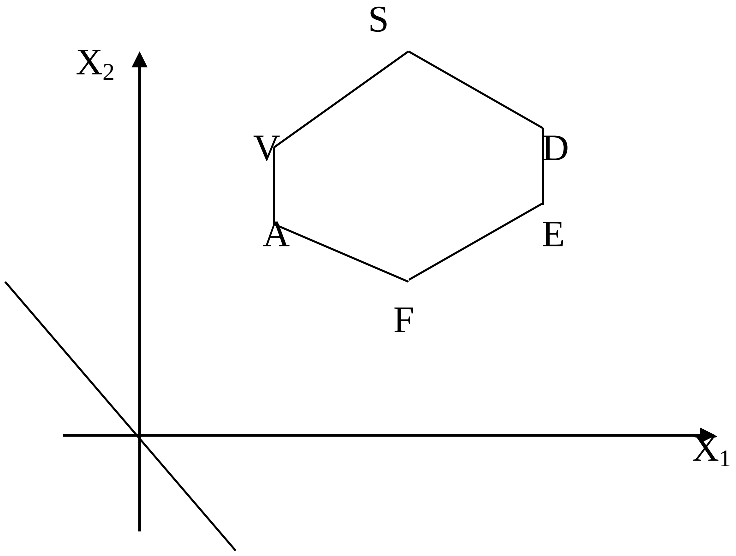
Maqsad funksiya (14.2) Z ning har bir qiymatida birorta to‘g‘ri chiziqning tenglamasini bildiradi, ya’ni

$C_1X_1 + C_2 X_2 = const$ (14.4)

hususiy holda Z=0 , bo‘lsa to‘g‘ri chiziq

$C_1X_1 + C_2 X_2 = 0$ (14.5)

ko‘rinishda bo‘lib , koordinata boshidan o‘tadi. Maqsad funksiyasi orqali aniqlanuvchi bunday to‘g‘ri chiziq *satx chiziIi* deyiladi. Endi qo‘yilgan masalani quyidagicha bayon qilish mumkin: o‘rinli echimlar to‘plami bo‘lgan ko‘pburchakning shunday tayanch to‘g‘ri chiziIini topish kerakki, ko‘pburchak bilan tayanch to‘g‘ri chiziqqa umumiy bo‘lgan nuqtada maqsad funksiya (14.2) o‘zining eng kichik qiymatiga erishsin. Maqsad funksiya $\vec{N}=(C_1,C_2)$ vektor yo‘nalishi bo‘yicha xamma vaqt o‘suvchi bo‘lib, vektor (14.4) to‘g‘ri chiziqlarga perpendikulyar bo‘ladi Shuning uchun (14.5) to‘g‘ri chiziqni N vektor yo‘nalishi bo‘yicha o‘ziga parallel ravishda ko‘chira boshlasak, u AVSDEF ko‘pburchakka A va D nuqtalarda tayanch to‘g‘ri chiziq bo‘ladi va maqsad funksiya (14.2) shu A nuqtada eng kichik qiymatiga erishadi.



A nuqtaning koordinatalari X^0_1 va X^0_2 lar AV va AF to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalaridan tuzilgan sistemani, ya’ni

$$\left.\begin{array}{l} AB: a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 = b_1 \\ AF: a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 = b_2 \end{array}\right\}$$

ni birgalikda echish natijasida topiladi.

Grafik usuli bilan echiladigan chiziqli dasturlashtirish masalalariga doir misollar.

1) Xom ashyodan foydalanish masalasini echish.

Xom ashyodan foydalanish masalasi ushbu $Z = 50X_1 + 40\ X_2$

chiziqli funksiyaning quyidagi

$$\left.\begin{aligned} &2x_1 + 5x_2 \le 20 \\ &8x_1 + 5x_2 \le 40 \\ &5x_1 + 6x_2 \le 30,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\}$$

cheklanish tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradigan maksimumini topishdan iboratdir.

Echish: Avval, o‘rinli echimlar to‘plami bo‘lgan ko‘p burchakni hosil qilamiz. Buning uchun X_1OX_2 tekislikda cheklanish tengsizliklarining har biriga to‘g‘ri keladigan chegaraviy to‘g‘ri chiziklarning , ya’ni

$$\left.\begin{aligned} &l_1 : 2x_1 + 5x_2 = 20 \\ &l_2 : 8x_1 + 5x_2 = 40 \\ &l_3 : 5x_1 + 6x_2 = 30,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

larning o‘rnini topamiz. Natijada o‘rinli echimlar to‘plami bo‘lgan, OAVSD ko‘pburchakni hosil qilamiz, Z=0 bo‘lganda

$50X_1 + 40X_2 = 0$

to‘g‘ri chiziq N=(50,40) vektorga perpendikulyar bo‘lib koordinata boshidan o‘tadi va OAVSD ko‘pburchakka O va S nuqtalarda tayanch to‘g‘ri chiziq bo‘ladi. Maqsad funksiyamiz N vektor yo‘nalishi bo‘yicha o‘suvchi bo‘lganligi uchun, O nuqtada minimumga,S nuqtada esa maksimumga erishadi. C nuqtaning koordinatalari $X_1^{(0)}$ va $X_2^{(0)}$ lar esa l_2 va l_3 to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalaridan tuzilgan quyidagi sistemani, ya’ni

$8X_1^{(0)} + 5X^{(0)}_2 = 40$

$5X_1^{(0)} + 6X^{(0)}_2 = 30$

ni birgalikda echish natijasida topiladi. Shunday qilib berilgan maqsad funksiyaga optimal , ya’ni eng katta qiymat beruvchi echim $X_1^{(0)} = 3,9$; $X^{(0)}_2 = 1,7$ bo‘lib,

$$Z = 50X_1 + 40X^{(0)}_2 = 50*3,9 + 40*1,7 = 263$$

bo‘ladi.

Demak, 263 so‘mdan iborat bo‘lgan eng katta foydani olish uchun birinchi xil maxsulot M_1 dan 3.9 birlik va ikkinchi xil maxsulot M_2 dan 1.7 birlik maxsulot ishlab chiqarishni rejalashtirish zarur ekan.

Cheklanish shartlari n noma’lumli m ta tenglamalar sistemasidan iborat bo‘lgan chiziqli dasturlash masalalarini grafik usulda echish.

Biz hozigrgacha cheklanish shartlari ikki noma’lumli m ta tengsizliklar sistemasidan iborat bo‘lgan chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda echilishini ko‘rdik. Bu usul cheklanish shartlari n noma’lumli m ta tenglamalar sistemasidan iborat bo‘lgan chiziqli dasturlash masalalarini n-m=2 bo‘lganada ham echish mumkin. haqiqatan ham, bizga ushbu

$$Z_{\min}=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;, \qquad (14.6)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (14.7)$$

$$x_j \geq 0, \; j=1,n, \quad n-m=2$$

chiziqli dasturlash masalasi berilgan bo‘lsin. Ko‘rinib turibdiki, (14.7) da noma’lumlar soni tenglamalar sonidan 2 ta ko‘pdir, ya’ni n-m=2. Shuning uchun, x_1, x_2, ... ,x_m larni erksiz o‘zgaruvchilar, x_{m+1},x_{m+2} larni erkli o‘zgaruvchilar deb qabul qilamiz. (14.7) sistemani erksiz o‘zgaruvchilarga nisbatan Gauss usuli bilan echsak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_1' - a_{1,m+1}' x_{m+1} - a_{1,m+2}' x_{m+2} \\ x_2 = b_2' - a_{2,m+1}' x_{m+1} - a_{2,m+2}' x_{m+2} \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ x_m = b_m' - a_{m,m+1}' x_{m+1} - a_{m,m+2}' x_{m+2} \end{array}\right\} \qquad (14.8)$$

Endi (14.8) ni (14.6) ga qo‘ysak, maqsad funksiyamiz quyidagi

$$Z_{\min}=c_0' + c_{m+1}' x_{m+1} + c_{m+2}' x_{m+2} \qquad (14.9)$$

ko‘rinishga keladi. Echimlarning manfiy bo‘lmaslik shartlari, ya’ni $x_j \geq 0$, j=1,2,...,n nazarda tutsak (14.8) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\left.\begin{array}{l} a'_{1,m+1}x_{m+1} + a'_{1,m+2}x_{m+2} \leq b'_1, \\ a'_{2,m+1}x_{m+1} + a'_{2,m+2}x_{m+2} \leq b'_2, \\ ----------------- \\ a'_{m,m+1}x_{m+1} + a'_{m,m+2}x_{m+2} \leq b'_m \\ x_{m+1} \geq 0, x_{m+2} \geq 0 \end{array}\right\} \qquad (14.10)$$

(14.9) – (14.10) masalani grafik usulda echamiz. Cheklanish tengsizliklari (14.10) ni qanoatlantirib, maqsad funksiya (14.9) ga minimum beruvchi optimal echim x_{m+1}, x_{m+2} ni topib, (14.8) ga qo‘ysak, (14.6) funksiyaga minimum beruvchi x_1, x_2, ... ,x_m larning ham optimal qiymatlarini topgan bo‘lamiz;

*Misol.*Grafik usul bilan

$$Z=2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \qquad (14.11)$$

funksiyaning cheklanish shartlari

$$\left.\begin{array}{l} x_1-x_2+3x_3-18x_4+2x_5=-4, \\ 2x_1-x_2+4x_3-21x_4+4x_5=22, \\ 3x_1-2x_2+8x_3-43x_4+11x_5=38 \end{array}\right\}$$

$$x_j \geq 0, j=1,5$$

ni qanoatlantiradigan maksimumi topilsin.

*Echish.*Cheklanish tenglamalarini x_1, x_2 va x_3 larga nisbatan Gauss usuli bilan echsak,

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_4-3x_5=6, \\ x_2+7x_4+10x_5=70, \\ x_3-4x_4+5x_5=20 \end{array}\right\}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu erdan

$x_1=6-x_4+3x_5$,

$x_2=70-7x_4-10x_5$,

$x_3=20+4x_4-5x_5$

larni topib,maqsad funksiya (14.11) ga qo‘ysak,

$Z=6x_4+15x_5-38$ (14.12)

ni hosil qilamiz.Echimlarning manfiy bo‘lmaslik shartlari $x_j \geq 0$, ($j=\overline{1,5}$)ni nazarda tutsak,

$$\left.\begin{aligned} &x_4 - 3x_5 \leq 6,\\ &7x_4+10x_5 \leq 70,\\ &-4x_4+5x_5 \leq 20 \end{aligned}\right\} \qquad (14.13)$$

$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

tengsizliklar sistemasini hosil qilamiz. Endi (14.12) funksiyaning cheklanish tengsizliklari (14.13)ni qanoatlantiradigan maksimumini grafik usul bilan topamiz.

Chiziqli dasturlash masalasini echishning simpleks usuli. Biz yuqorida ko‘rib o‘tgan grafik usulda ikki o‘lchovli yoki qandaydir usul bilan ikki o‘lchovliga keltiriladigan chiziqli dasturlash masalalarini echish mumkin. Biroq amalda shunday masalalar uchraydiki, bu masalani echish uchun n o‘lchovli chiziqli dasturlash masalalarini echishni talab qiladi. n>2 bo‘lganda chiziqli dasturlash masalalarini echishning umumiy usuli *simpleks usulidir*. Endi shu usul bilan tanishamiz. Bu usul cheklanish shartlari tenglamalar sistemasi shaklida berilgan chiziqli dasturla masalalarini echish uchun qo‘llaniladi.

Bizga

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (14.14)$$

funksiyaning cheklanish tenglamalari sistemasi

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ x_j \geq 0,\ i=\overline{1,m} \qquad (14.15)$$

ni qanoatlantiradigan minimumini simpleks usuli bilan topishi talab qilingan bo‘lsin.

Bu masalada cheklanish tenglamalari $X_1, X_2, \ldots, X_m$ noma’lumlarga nisbatan birorta usul bilan echilgan, ya’ni

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b_1' - \left(a_{1m+1}' x_{m+1}' + a'_{1m+2} x_{m+2} + \dots + a_{1n}' x_n\right) \\ x_2 = b_2' - \left(a_{2m+1}' x_{m+1}' + a'_{2m+2} x_{m+2} + \dots + a_{2n}' x_n\right) \\ ------------------------------ \\ x_m = b_m' - \left(a_{mm+1}' x_{m+1}' + a'_{mm+2} x_{m+2} + \dots + a_{mn}' x_n\right) \end{array}\right\} \qquad (14.16)$$

bo‘lsinki, bunda $b'_1 \geq 0$, $b_2' \geq 0$,..., $b'_m \geq 0$, shartlar ham bajarilsin

Maqsad funksiya (14.14) ni (14.16) dan foydalanib quyidagi

$Z = C_0' - (C'_{m+1}X_{m+1} + C'_{m+2}X_{m+2} + \dots + C'_nX_n)$ (14.17)

ko‘rinishga keltiramiz va bu chiziqli funksiyaning minimumini topamiz. (14.16)ning chap tomonidagi $X_1, X_2, \dots, X_m$ noma’lumlar to‘plami chiziqli dasturlash masalasining bazisi deyiladi va u

$B = \{X_1, X_2, \dots, X_m, 0, 0, \dots, 0\}$

ko‘rinishida belgilanadi, $X_1, X_2, \dots, X_m$ lar bazis noma’lumlar, $X_{m+1}, X_{m+2} \dots\dots, X_n$ lar esa ozod noma’lumlar deyiladi. $X_{m+1}, X_{m+2} \dots\dots, X_n$ ozod noma’lumlarga $X_{m+1} = X_{m+2} = \dots = X_n = 0$ qiymatlar bersak (14.16)dan $X_1 = b'_1 \geq 0, X_2 = b'_2 \geq 0, \dots, X_m = b'_m \geq 0$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib bazis echim deb ataluvchi ushbu

$B_1 = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_m, 0, 0, \dots, 0\}$ (14.18)

o‘rinli echim hosil bo‘ladi. Zning bu echimdagi qyimati quyidagiga teng $Z(B_1) = C_0'$

Bu masalada ikki xol ruy berishi mumkin:

1. (14.17) da xamma C_{m+1}', C_{m+2}',…, C'_n sonlar manfiy. U xolda (14.17) $X_{m+1} = X_{m+2} = \dots = X_n = 0$ shartda $Z(B_1) = C_0'$ minimum qiymatga erishadi, ya’ni (14.18) bazis echim optimal echim bo‘ladi, chunki biror $Sj \leq 0$, va $Xj \geq 0$ uchun $-C'_jX'_j \geq 0$ bo‘ladi. Demak $Z = C_0' - C'_jX'_j > C_0'$ bo‘ladi.

2. (14.17) dagi $C'_{m+1}, C'_{m+2}, \dots, C'_n$ sonlar orasida musbatlari bor. Masalan, $S'_j > 0$ deylik , u vaqtda $X_{m+1} = X_{m+2} = \dots = X_{j-1} = X_{j+1} = \dots = X_n = 0$, $X_j \geq 0$ deb olib, X_j ning qiymatini orttira borish hisobiga $Z = C_0' - C'_jX'_j$ ni qiymatini kamaytirish mumkin. Bu xolda (14.16) dan kelib chiqadigan quyidagi

$$\begin{array}{l} X_1 = b'_1 - a'_{1i}X_j \\ X_2 = b'_2 - a'_{2i}X_j \qquad (14.19) \\ - - - - - - - - \end{array}$$

$X_m = b'_m - a'_{mi} X_j$

tenglamalardagi $X_1, X_2, \ldots, X_m$ larning birortasi xam manfiy bo‘lmasligi kerak.

Bu erda xam ikki hol ro‘y beradi:

a) (14.19) da $a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}$, sonlarning hammasi musbat emas. $X_j \geq 0$ uchun $-a'_{kj} X_j \geq 0$ (k=1,2,...,m) bo‘lganidan $X_k = b'_k - a'_{kj} X_j \geq b_k' > 0$ dir.

Demak, $Z = C'_0 - C'_j X_j$ da $C'_j > 0$ va $X_j \geq 0$ bo‘lgani uchun X_j ni cheksiz orttira borish bilan min Z =- ∞ ega bo‘lamiz. Bundan esa, maqsad funksiya Z minimumga erishmasligi kelib chiqadi.

b) (14.19) dagi $a'_{1j}, a'_{2j}, \ldots, a'_{mj}$ sonlar orasida musbatlari bor. Masalan , $a'_{kj} > 0$ bo‘lsin . U holda $X_k = b''_k - a'_{kj} X_j$ da X_j ga $\frac{b'_k}{a'_{kj}}$ dan katta qiymat berish mumkin emas, aks holda $X_R < 0$ bo‘lib qoladi. Bunda $\frac{b'_k}{a'_{kj}} \geq 0$ ekanligi ravshan. Bunday kasrlar orasida eng kichigi $\frac{b_i}{a_{ij}}$ bo‘lib, a'_{ij} son hal qiluvchi elementdir. £isqalik uchun $\frac{b_i}{a_{ij}} = \rho$ belgilash kiritamiz. (6) da X_j ni ρ gacha orttira olamiz, aks holda $X_i < 0$ bo‘lishini ko‘rdik. Ozod nam’lumlarga

$X_{m+1} = X_{m+2} = \ldots = X_{j-1} = X_{j+1} = \ldots = X_n = 0,\ X_j = \rho$ (14.20)

qiymatlarni berib, bazis noma’lumlarni quyidagidan aniqlaymiz.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - a'_{1j} p \\ x_2 = b'_2 - a'_{2j} p \\ ----------- \\ x_i = b'_i - a'_{ij} p \\ x_m = b'_m - a'_{mj} p \end{array}\right\} \qquad (14.21)$$

endi yangi B_2 bazisga o‘tamiz:

$B_2 = \{X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots, 0, 0, \ldots 0\}$.

Bu bazis echim (14.20) va (14.21) dan tuziladi va unga mos Z (B_2) ning qiymati quyidagiga teng bo‘ladi:

$Z(B_2) = C'_0 – C'_j \rho \le Z(B_1)$, $S'_j>0$

Endi (14.16) sistema va maqsad funksiya (14.17) ni yangi bazis B_2 ga moslab yozamiz. Buning uchun (14.16) dagi

$X_i = b'_i – (a'_{im+1} X_{m+1} +\ldots+a'_{ij} X_j+\ldots+a'_{in}X_n)$

tenglamani X_j ga nisbatan echamiz.

$$x_j = \frac{b_i'}{a_{ij}} - \left(\frac{a_{im+1}'}{a_{ij}} x_{m+1} + \frac{a_{im+2}'}{a_{ij}'} x_{m+2} + \ldots + \frac{1}{a_{ij}'} x_i + \ldots + \frac{a_{in}'}{a_{ij}'} x_n \right)$$

va bu ifodani (14.16) ning qolgan tenglamalariga qo‘yamiz.

hosil bo‘lgan yangi sistemani qo‘yidagi ko‘rinishda yozamiz.

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = b_1 - \left(a_{1m+1} x_{m+1}' + a_{1m+2} x_{m+2} + \ldots + a_{1i}' x_i + \ldots + a_{1n}' x_n\right) \\
x_2 = b_2' - \left(a_{2m+1}' x_{m+1}' + a_{2m+2} x_{m+2} + \ldots + a_{2i}' x_i + \ldots + a_{2n}' x_n\right) \\
----------------------------------- \\
x_j = b_j' - \left(a_{jm+1}' x_{m+1}' + a_{jm+2} x_{m+2} + \ldots + a_{ji}' x_i + \ldots + a_{jn}' x_n\right) \\
----------------------------------- \\
x_m = b_m' - \left(a_{mm+1}' x_{m+1}' + a_{mm+2} x_{m+2} + \ldots + a_{mi}' x_i + \ldots + a_{mn}' x_n\right)
\end{array}\right\} \qquad (14.22)$$

Bu bazisning ifodalarini (14.17) ga qo‘yib, uni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$Z=C''_0-(C''_{m+1} X_{m+1} + C''_{m+2} X_{m+2}+\ldots$ (14.23)

$+C''_i X_i +\ldots+ C''_nX_n)$,

Shu bilan jarayonning birinchi bosqichi tugadi. Keyingi bosqich, yana shu birinchi bosqichni, ya’ni (14.23) va (14.22) ga nisbatan I va II xolni, undan keyin IIa va IIb ni takrorlashdan iborat bo‘ladi va x.k.

Shunday qilib, simpleks usul quyidagi jarayonni ifodalaydi:

1. Cheklanish tenglamalari sistemasi (14.15) ni (14.16) ko‘rinishga, maqsad funksiya (14.14) ni esa (14.17) ko‘rinishga keltiramiz.

2. Agar (4) da barcha $C'_{m+1},C'_{m+2},\ldots,C'_n$ koeffisientlar manfiy bo‘lsa, B_1 bazisning $\{b_1', b'_2,\ldots,b_m',0,0,\ldots,0\}$echimi optimal bo‘lib, bu echimda $Z(B_1)=S'_0$ minimumga erishadi

3. (4)da S'_{m+1}, C'_{m+2} ,…,C'_n ,lar orasida musbatlari mavjud, masalan, C'_j >0 desak, $X_{m+1}=X_{m+2}=\ldots=X_{j-1}=X_{j+1}=\ldots=X_n=0$, $X_j>0$ qiymatlarda (14.16) sistema, (14.19) ko‘rinishni oladi. Agar (14.19 da barcha $a'_{1j},a'_{2j},\ldots,a'_{mj}$ koeffisientlar musbat bo‘lmasa, min Z=-∞ kelib chiqadi, ya’ni Z funksiya minimumga erishmaydi.

4. (14.19) dagi a_{kj}, k=1,2,...,m koeffisientlarning musbatlari mavjud, ya’ni $a'_k>0$ desak, $\frac{b'_r}{a'_{rj}}$ sonlar orasida eng kichigi bo‘lgan $\frac{b'_i}{a'_{ij}}$ ni olamiz. (14.16) sistemaning X_i ga nisbatan yozilgan tenglamasidan X_j ni aniqlab (14.16) sistemani yangi $B_2 = \{ X_1,X_2,\ldots,X_i,\ldots, X_m,0,0,\ldots,0\}$ bazis echimga nisbatan yozib (14.22) ni hosil qilamiz maqsad funksiya (14.17) ni esa (14.23) ko‘rinishda ifodalaymiz.

Yangi bazis noma’lumlar $\{X_1,X_2,\ldots,X_{j-1},X_i\ldots X_{i+1},...,X_n\}$ dan iborat bo‘ladi. Yuqorida bayon etilgan jarayon (14.23) va (14.22) ga nisbatan yana takrorlanadi.

Misol. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3&=19\\ 2x_1+x_2+x_4&=13\\ 3x_2+x_5&=15\\ 3x_1+x_6&=18 \end{aligned}\right\} \qquad (14.24)$$

sistemaning musbat echimlari orasidan

$$Z=-7X_1-5X_2 \qquad (14.25)$$

funksiyaga minimum beruvchi echimni toping.

Echish: (14.24) sistemani X_3,X_4, X_5 va X_6 noma’lumlarga nisbatan echamiz, ya’ni

$$\left.\begin{aligned} x_3&=19-2x_1-3x_2\\ x_4&=13-2x_1-x_2\\ x_5&=15-3x_2\\ x_6&=18-3x_1 \end{aligned}\right\} \qquad (14.26)$$

Bu erda X_3,X_4, X_5 va X_6 bazis, X_1,X_2 ozod noma’lumlar $X_1=X_2=0$ da (14.26) dan $X_3=19$, $X_4=13$, $X_5=15$, $X_6=18$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, bazis deb atalgan quyidagi

$B_1=\{ 0,0,19,13,15,18\}$ o‘rinli echimga ega bo‘lamiz. (14.25) funksiyaning bu echimga mos qiymati. $Z(B_1)=-7*0-5*0=0$ bo‘ladi (14.25) dan ko‘rinib turibdiki X_1

vaX_2 ning qiymatlari ortishi bilan Z kamayadi. Yana (14.25) dan $-5X_2$ ga nisbatan $-7X_1$ da Z ni tezroq kamayishini ko‘ramiz. Shu sababli $X_2=0$, $X_1>0$ deb olib X_1 ga $X_1=6$ qiymat beramiz. $X_1>6$ bo‘lganda (14.26)da $X_3>0$, $X_4>0$, $X_5>0$ va $X_6<0$ bo‘lib qoladi, ammo biz (14.26) ning musbat echimlarinigina topishimiz kerak. U holda $X_2=0$, $X_1=6$ qiymatlarda $X_3>0$, $X_4>0$, $X_5>0$, va $X_6=0$, kelib chiqadi.

Endi yangi X_1,X_3,X_4,X_5 bazisga o‘tish qulay bo‘lib, (14.26)ni X_1,X_3,X_4,X_5 ga nisbatan echamiz.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_3 = 7 + \frac{2}{3}x_6 - 3x_2 \\ x_4 = 1 + \frac{1}{3}x_6 - x_2 \\ x_5 = 15 - 3x_2 \end{array}\right\} \qquad (14.27)$$

(14.25) ning bunga mos ifodasi.

$$Z=-42+\frac{7}{3}X_6 - 5X_2 \qquad (14.28)$$

bo‘ladi. (14.27) dan $X_6 = 0$, $X_2 = 0$ bo‘lganda quyidagi o‘rinli echimga ega bo‘lamiz:

$B_2=\{6;0;7;1;15;0\}$

bu echim yangi bazis echim deyiladi. (14.28) ning bu echimga mos keladigan qiymati $Z(B_2)=-42$ bo‘ladi. (14.28) da X_2 ortganda Z kamayadi, X_6 ortganda esa Z ham ortadi. Shuning uchun $X_6=0$ va $X_2 \leq 1$ deb olamiz, chunki $X_2>1$ shartda (14.27) ning uchinchi tenglamasidan $X_4<0$ ekanligi kelib chiqadi, X_1, X_2, X_3, X_5, bazisga o‘tish uchun (14.27) dan ushbu sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 6 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_2 = 1 + \frac{2}{3}x_6 - x_4 \\ x_3 = 4 - \frac{4}{3}x_6 + 3x_4 \\ x_5 = 12 - 2x_6 + 3x_4 \end{array}\right\} \qquad (14.29)$$

buning ikkinchi tenglamasini (14.27) ga qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$Z=-47+5X_4 - X_6 \qquad (14.30)$$

X_4=0, X_6=0 bo‘lganda (14.29) dan yangi bazis echim: B_3={6;1;4;0;12;0} ni hosil qilamiz. Bu echimda Z(B_3)=-47. Endi (14.30) ga e’tibor bersak, X_6 ortganda Z ning kamayishini ko‘ramiz. Biroq X_4=0 da $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$, $X_5 \geq 0$ shartlar buzilmasligi uchun (14.29) da X_6 ni 3gacha orttirishimiz mumkin, chunki $X_6 > 3$ bo‘lganda $X_3 <0$ bo‘lib qoladi. X_6 =3 bo‘lganda X_3=0 bo‘lgani uchun X_1, X_2, X_5, X_6 bazisga o‘tish uchun (14.29) dan ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$X_6 = 3 + \frac{9}{4}X_4 - \frac{3}{4}X_3$.

Bu ifodani (17) ga qo‘ysak, maqsad funksiya quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$Z=-50+\frac{3}{4}X_3+\frac{11}{4}X_4 \qquad (14.31)$$

X_3=0, X_4=0 bo‘lganda (14.29) dan B_4={5;3;0;0;6;3} ni hosil qilamiz. Bu echimda Zning qiymati Z(B_4) =-50 ga teng bo‘ladi.

(14.31) da X_3 va X_4 ning koeffisientlari musbat sonlar bo‘lgani uchun Z ni ortikacha kamaytirib bo‘lmaydi, demak, Z (B_4)=- 50 optimal echim ekan. Xaqiqatdan xam, Z (B_1) < Z(B) < Z (B_3)<Z(B_4)=-50

Chiziqli dasturlash masalasining echimini Simpleks usuli bilan topish bir necha bosqichdan iborat ekanligini biz yuqorida ko‘rib o‘tdik. Bu usulning asosiy quyinchiligi har bir bosqichda yangi bazisga nisbatan maqsad funksiya va cheklanish shartlarini qaytadan yozib chiqishdan iboratdir. Agar shu bosqichlarning xammasi simpleks jadvallar yordamida bajarilsa, chiziqli dasturlash masalasini simpleks usuli bilan echish ancha osonlashadi.

Buni quyidagi masalada ko‘rib chiqamiz.

$x_1+a'_{1m+1}x_{m+1}+a'_{1m+2}x_{m+2}+...+a'_{1j}x_j +...+a'_{1n}x_n=b'_1$,

$x_2+a'_{2m+1}x_{m+1}+a'_{2m+2}x_{m+2}+...+a'_{2j}x_j +...+a'_{2n}x_n=b'_2$,

----

$x_i+a'_{im+1}x_{m+1}+a'_{im+2}x_{m+2}+...+a'_{ij}x_j+...+a'_{in}x_n =b'_i$, (1)

$x_m+a'_{mm+1}x_{m+1}+a'_{mm+2}x_{m+2}+...+a'_{mj}x_j +...+a'_{mn}x_n=b'_m$,

$x_j \geq 0$, j=1,2,...,n, $b_s \geq 0$, s=1,2,...,m

$Z_{min}+C'_{m+1}X_{m+1}+C'_{m+2}X_{m+2}+...+C'_jX_j+...+C'_nX_n= C'_0$ (2)

Faraz qilaylik, $S'_j > 0$ bo‘lganda hal qiluvchi element uchun a'_{ij} tanlangan bo‘lsin. (1) da $X_1, X_2, ..., X_i, ..., X_m$ -bazis noma’lumlar, $X_{m+1}, ..., X_j, ..., X_n$-ozod noma’lumlardir $C'_j>0$ bo‘lganligi uchun maqsad funksiya (2)ga minimum qiymat beruvchi optimal echimni topish uchun $X_1, X_2, …, X_i, …, X_m$ bazisdan yangi $X_1X_2, …, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, …, X_m$ bazisga o‘tishimiz va shu bazisga nisbatan cheklanish shartlari (1) ni

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + a''_{1m+1}x_{m+1} + \cdots + a''_{1i}x_i + \cdots + a''_{1n}x_n = b''_1, \\ x_2 + a''_{2m+1}x_{m+1} + \cdots + a''_{2i}x_i + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2 \\ ------------------------ \\ x_j + a''_{jm+1}x_{m+1} + \cdots + a''_{ji}x_i + \cdots + a''_{jn}x_n = b''_j \\ ------------------------ \\ x_m + a''_{mm+1}x_{m+1} + \cdots + a''_{mi}x_i + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m, \end{array}\right\} \quad (3)$$

ko‘rinishda, maqsad funksiya (2) ni esa

$Z_{min} + C''_{m+1}X_{m+1}+...+ C''_jX_i+...+ C''_nX_n= C''_0$ (4)

ko‘rinishida yozib olamiz. (1) – (2) ni Simpleks jadval deb yuritiluvchi jadvalda quyidagicha yozish mumkin:

1- jadval.

Bazis noma’lumlar	Ozod xadlar	X_1	X_2	…	X_i	…	X_m	X_{m+1}	…	X_j	…	X_n
X_1	B''_1	1	0	…	0	…	0	a'_{1m+1}	…	a'_{1j}	…	a'_{1n}
X_2	B''_2	0	1	…	0	…	0	a'_{2m+1}	…	a'_{2j}	…	a'_{2j}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_i	B'_i	0	0	…	1	…	0	a'_{2m+1}	…	a'_j	…	a'_{1n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_m	B'_m	0	0	…	0	…	1	a'_{mm+1}	…	a'_{mj}	…	a'_{mn}
Z	C'_0	0	0	…	0	…	0	C'_{m+1}	…	C'_j	…	C'_n

1-chi jadvalning X_1 dan boshlanuvchi satrida (1) sistemadagi birinchi tenglamaning ozod xadi va noma’lumlar oldidagi koeffisientlar, X_2 dan boshlanuvchi satrda esa ikkinchi tenglamaning ozod hadi va noma’lumlar oldidagi koeffisientlar joylashtirilgan va xokazo. Z dan boshlanuvchi oxirgi satrida esa (2) tenglikdagi ozod xad va noma’lumlar oldidagi koeffisientlar joylashtirilgan. Xuddi shu usul bilan (3)-(4) masalaga mos keluvchi jadvalni ham tuzish mumkin. 1-chi jadvaldan foydalanib, 2-jadval quyidagicha tuziladi: Z ga mos keluvchi satr elementlari orasida musbatlari bo‘lsa, shu elementlarning eng kattasi joylashgan, ya’ni S'_j joylashgan ustun

2-jadval

Bazis nom’alumlar	Ozod xadlar	X_1	X_2	…	X_i	…	X_m	X_{m+1}	…	X_j	…	X_n
X_1	b''_1	1	0	…	a''_{1i}	…	0	a''_{1m+1}	…	0	…	a''_{1n}
X_2	b''_2	0	1	…	a''_{2i}	…	0	a''_{2m+1}	…	0	…	a''_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_j	b''_i	0	0	…	a''_{ji}	…	0	a''_{jm+1}	…	1	…	a''_{jn}
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
X_m	b''_m	0	0	…	a''_{mi}	…	1	a''_{mm+1}	…	0	…	a''_{mn}
Z	C''_0	0	0	…	C''_i	…	0	C''_{m+1}	…	0	…	C''_n

elementlardan musbatini belgilab olamiz, masalan $a'_{kj}>0$ bo‘lsin. Ajratilgan musbat a'_{kj} elementlar bilan bitta satrda joylashgan ozod xadlar b'_k ning a'_{kj} larga nisbatini tuzamiz va tuzilgan nisbatlarning eng kichigini b'_i/a'_{ij} , bilan belgilaymiz, a'_{ij} hal qiluvchi elementdir.

1- jadvalda hal qiluvchi element, a'_{ij} to‘rtburchak ichiga olingan, u turgan ustun va satr strelkalar bilan ko‘rsatilgan.

hal qiluvchi a'_{ij} element 1 dan farqli bo‘lsa, uni 1 ga teng qilib olish mumkin. Buning uchun, shu element joylashgan satrning barcha elementlarini a'_{ij} ga bo‘lish kifoya. Buning o‘zi esa (1) da *i* tenglamani X_j ga nisbatan echish bilan teng kuchlidir. Endi 1-jadval satrlarining elementlarini shunday o‘zgartiramizki, hal qiluvchi element turgan ustundagi shu elementdan boshqalari 0 ga aylansin. Buning uchun 1- jadvalning i–satrini – a'_{kj} , k=1,...,m, k≠i va s'_j ga ko‘paytirib, mos ravshida k=1,2,3,…, m+1, k≠i satrlarga qo‘shamiz. U xolda yuqorida keltirilgan 2-jadval kelib chiqadi. Yuqorida keltirilgan ish natijasida avvalgi X_1 $X_2,\ldots, X_i ,\ldots, X_m$ bazisdagi X_i o‘rniga X_j keladi va 2-jadvalda ko‘rsatilganidek yangiX_1 $X_2,\ldots, X_j ,\ldots, X_m$ bazis hosil bo‘ladi.

Agar 2-jadvalning ohirgi satridagi barcha C''_i, $C''_{m+1},\ldots,C''_n$ lar manfiy bo‘lsa $Z_{min}=C''_0$ bo‘ladi, aks xolda yuqoridagi ko‘rsatilgan usul bilan 3-jadval tuzishga to‘g‘ri keladi. Bu jarayon optimal echim topilguncha yoki masalaning echimi mavjud emasligi isbotlangunga qadar davom ettiriladi.

Agar birorta K-jadvalda hal qiluvchi element turishi mumkin bo‘lgan ustunning barcha elementlari manfiy bo‘lsa, $Z_{min} =-\infty$ bo‘lib, masala echimga ega emasligi isbotlangan bo‘ladi.

Misol. Ushbu

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_4 - 2x_5 &= 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 &= 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 &= 3, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

sistemaning manfiy bo‘lmagan echimlari orasidan

$Z=0+x_4 - x_5$ (6)

funksiyaga minimum qiymat beruvchi echimni toping.

Echish. (5) va (6) ni jadval tuzish uchun

$X_1+X_4-2X_5 =1$,

$X_2-2X_4+X_5 =2$,

$X_3+3X_4+X_5 =3$,

$Z- X_4 + X_5 = 0$

ko‘rinishda yozib olamiz. (5) sistemani X_1,X_2,X_3 ga nisbatan osongina echish mumkin. Shuning uchun bu noma’lumlarni(5) sistemaning bazis noma’lumlari deb qabul qilamiz.

Bazis noma’lumlar – X_1, X_2, X_3 va Z larni jadvalning birinchi ustuniga, ozod xadlarni ikkinchi ustuniga, X_1 ning koeffisientlarini uchinchi ustuniga va xokazo X_5 –ning koeffisientlarini ohirgi ustuniga yozib, quyidagi 3-jadvalga ega bo‘lamiz:

3- jadval.

Bazis noma’lumlar.	Ozod xadlar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1 X_2 X_3	1 2 3	1 0 0	0 1 0	0 0 1	1 -2 3	-2 $\boxed{1}$ 1
Z	0	0	0	0	-1	1

Z dan boshlanuvchi oxirgi satrda musbat son bo‘lganligi uchun Z ni kamaytirish imkoniyati bor. Shuning uchun X_1, X_2, X_3 bazisdan yangi bazisga o‘tamiz. Bu ish jadvallar yordamida quyidagicha bajariladi:

1) Z dan boshlanuvchi oxirgi satrda bitta musbat 1 son bor. Bu musbat son bittagina bo‘lgani uchun u joylashgan ustunni hal qiluvchi ustun deb qaraymiz. Agar oxirgi satrda musbat sonlar ikkta va undan ortiq bo‘lsa, ularning eng kattasi joylashgan ustun hal qiluvchi ustun bo‘ladi.

2) hal qiluvchi ustundan musbat elementlarni olamiz. Ular ikkita bo‘lib, 2-va 3 satrlarga joylashgan, agar bitta bo‘lsa, shu sonning o‘zi hal qiluvchi element bo‘ladi.

Ajratilgan musbat elementlar bilan bitta satrda joylashgan ozod xadlarning shu sonlarga nisbatlarini tuzamiz.

Bu nisbatlar: $\frac{2}{1} = 2$ va $\frac{3}{1} = 3$ bo‘ladi.

3) Tuzilgan nisbatlardan eng kichigining maxraji hal qiluvchi element bo‘ladi. 3- jadvalda hal qiluvchi element to‘rtburchak ichiga olingan va shu element joylashgan satr va ustun strelka bilan ko‘rsatilgan.

4) hal qiluvchi element 1 ga teng bo‘lgani uchun shu element turgan satrni 1 ga bo‘lgan bilan bu satr elementlari o‘zicha qolaveradi.

5) 3-jadvalning hal qiluvchi element turgan ikkinchi satrini 2,-1,-1 ga ko‘paytirib, mos ravishda 1-,3,-4- satrlarga qo‘shsak, hal qiluvchi element turgan ustunda shu elementdan boshqalari 0 larga aylanadi va 4- jadval kelib chiqadi.

6) Yuqoridagilarga asosan avvalgi X_1,X_2,X_3 bazisdagi X_2 o‘rniga X_5 keladi va 4-jadvalda ko‘rsatilgandek, bazis noma’lumlar ustunidagi X_2 o‘rniga X_5 keladi va 4- jadvalda ko‘rsatilgandek, yangi X_1,X_5,X_3 bazis xosil bo‘ladi.

4-jadval.

Bazis noma’lumlar.	Ozod xadlar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	5	1	2	0	-3	0
X_5	2	0	1	0	-2	1
X_3	1	0	-1	1	$\boxed{5}$	0
Z	2	0	-1	0	1	0

4- jadvalning Z dan boshlanuvchi oxirgi satridagi faqat bitta musbat element mavjud. Bu ustunda bittagina musbat element bor. Uni hal qiluvchi element deb xisoblab, uchunchi bazisga o‘tamiz. Bu ish quyidagi 5-jadvalda keltirilgan.

5-jadval.

Bazis noma’lumlar.	Ozod xadlar	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	$\frac{28}{5}$	1	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
X_5	$\frac{12}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0	1
X_4	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0

Z	$\frac{-11}{5}$	0	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	0

5-jadvalning oxirgi satrida birorta ham musbat element qolmadi. Demak, topilgan { $\frac{28}{5}$; 0;0; $\frac{1}{5}$;$\frac{12}{5}$} echim optimal bo‘lib, unga mos kelgan Z ning minimumi $\frac{-11}{5}$ ga teng, ya’ni $Z_{min} = \frac{-11}{5}$.

12-§.Transpotga oid masalalar va ularni yechish usullari

Har xil yuklarni tashishda transport vositalarining o‘ziga xos xususiyatlari va boshqa shartlariga ko‘ra, qaralayotgan masalalarni hal etish uchun hozirgi vaqtda chiziqli dasturlashning transport masalasi modelidan foydalaniladi. Xaqiqatdan ham, ma’lum yuklarni ishlab chiqarish punktlaridan iste’mol qiluvchi punklarga tashish rejasini shunday aniqlash kerak bo‘ladiki, bunda transport xarajatlarini eng kam sarf qilgan holda iste’molchilar talabini to‘la qoydirish mumkin bo‘lsin.

Faraz qilaylik, m ta ishlab chiqarish punkti (ularni A_1 A_2 ,…,A_m deb belgilaymiz) o‘z maxsulotlari bilan n ta iste’mol punktlarini (ularni V_1 V_2 ,…,V_n deb belgilaymiz) ta’minlaydigan bo‘lsin (m≠n). Ma’lum bir vaqt ichida har bir A_i(i=1,...,m) punktlarda ishlab chiqarilgan maxsulotlarning miqdori mos ravshida a_i ga va har bir V_j (j=1,...,n) punklarining shu vaqt ichidagi maxsulotga bo‘lgan talabi b_j ga teng bo‘ladi.

A_i punktlarida ishlab chiqarilgan maxsulotlarning umumiy miqdori B_j punktlarning maxsulotga bo‘lgan talabning umumiy miqdoriga teng bo‘lsin, deb faraz qilamiz, u holda $a_1+ a_2+...+a_m= b_1+ b_2+...+b_n$
tenglik o‘rinli bo‘ladi.

A_i ishlab chiqarish punktidan B_j iste’mol punktiga olib borilgan maxsulotning umumiy miqdorini X_{ij} bilan va A_i ishlab chiqarish punktidan B_j iste’mol punktigacha bir birlik maxsulotni olib borish uchun sarf qilingan xarajatni C_{ij} bilan belgilaymiz.

Masalan, X_{23}-A_2ishlab chiqarish punktidan B_3 iste'mol punktiga olib borilgan maxsulotning miqdori bulsa, S_{23} – A_2 ishlab chiqarish punktidan V_3 iste'mol punktigacha bir birlik maxsulotni olib borish uchun sarf qilingan xarajatdir.

Bu masalaning hamma berilgan parametrlarni quyidagi jadvaldan olamiz.

Ishlab chiqarish punktlari	Ishlab chiqarilgan maxsulot	Iste'mol punktlari			
		V_1	V_2	...	V_n
A_1	a_1	$\boxed{X_{11}}$ S_{11}	$\boxed{X_{12}}$ S_{12}	...	$\boxed{X_{1n}}$ S_{1n}
A_2	a_2	$\boxed{X_{21}}$ S_{21}	$\boxed{X_{22}}$ S_{22}	...	$\boxed{X_{2n}}$ C_{2n}
...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	$\boxed{X_{m1}}$ C_{m1}	$\boxed{X_{m2}}$ C_{m2}	...	$\boxed{X_{mn}}$ C_{mn}
Maxsulotga bo'lgan talab		b_1	b_2	...	b_n

Shunday qilib, masala va uning shartlarini jadval ko'rinishida juda sodda, aniq va ixcham xolda ifodaladik. Endi bu masalani matematika tilida ifodalaymiz, ya'ni matematik modelini tuzamiz.

Masalanining matematik modelini tuzishimiz uchun, har bir ishlab chiqarish punktini iste'mol punktlariga shunday moslab qo'yish kerakki, birinchidan, har bir ishlab chiqarish punktidagi maxsulotlar to'la taqsimlansin. Bu shartni tenglamalar sistemasi orqali qo'yidagicha yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+\dots+x_{1n}&=a_1\\ x_{21}+x_{22}+\dots+x_{2n}&=a_{2n}\\ x_{m1}+x_{m2}+\dots+x_{mn}&=a_m\end{aligned}\right\} \qquad (15.1)$$

Ikkinchidan, har bir iste'mol qiluvchi punktning talabi to'la qondirilsin. Bu shart quyidagi ko'rinishda yoziladi.

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+\dots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\dots+x_{m2}=b_1 \\ x_{1m}+x_{2n}+\dots+x_{mn}=b_n \end{aligned}\right\} \qquad (15.2)$$

Uchinchidan, maxsulotlarni tashish uchun sarf qilinadigan jami harajat eng kam bo‘lsin. Bu shartni quyidagi chiziqli funksiya orqali ifodalaymiz.

$$\begin{aligned} Z= & S_{11}X_{11}+S_{12}X_{12}+\ldots+S_{1n}X_{1n}+ \\ + & S_{21}X_{21}+S_{22}X_{22}+\ldots+S_{2n}X_{2n}+ \\ & + \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; + \qquad (15.3) \\ + & S_{m1}X_{m1}+S_{m2}X_{m2}+\ldots+S_{mn}X_{mn} \end{aligned}$$

IQtisodiy nuqtai nazardan, bu masalaning echimlari manfiy bo‘lmasligi kerak, ya’ni:

$$Xij \geq 0, \quad (i = 1,2,...,m \;,\; j = 1,2,...,n\,) \qquad (15.44)$$

(1) – (4) ifodalarni yig‘indi ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} Xij = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} Xij = bj; j = \overline{1,n}; Xij \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad (15.5)$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXj \qquad (15.6)$$

Shunday qilib (15.5) –(15.6) ifodalar birgalikda *transport masalasining matematik modeli* deb ataladi. Demak, (15.5) shartni qanoatlantiruvchi shunday echimlarni tanlashimiz kerakki, natijada (15.6) maqsad funksiya eng kichik qiymatga erishsin

Agar ishlab chiqarilgan maxsulotlarning umumiy miqdori ularga bo‘lgan talabning miqdoriga teng bo‘lsa, ya’ni

$$\sum_{i=1}^{m} ai = \sum_{j=1}^{n} bj = M > 0 \qquad (15.7)$$

bo‘lsa,u xolda bu masalani *yopiq modelli transport masalasi* deb ataymiz.

Teorema. Ixtiyoriy yopiq modelli transport masalasi echimga ega.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun, berilgan shartlar asosida, masalaning hech bo‘lmaganda bitta echimi mavjudligini va maqsad funksiyaning echimlari to‘plamida chegaralanganligini ko‘rsatish kifoya. Teoremaning shartiga ko‘ra (15.7) tenglik o‘rinlidir, u holda

Xij = $\frac{ai*bj}{M}$, (i = 1,...,m ; j = 1,...,n) (15.8)

ifoda berilgan transport masalasining echimi bo‘ladi, chunki u (15.6) cheklanish shartlarini qanoatlantiradi. Xaqiqatdan ham,

$$\sum_{j=1}^{n} Xij = \sum_{j=1}^{n} \frac{ai*bj}{M} = \frac{ai}{M}\sum_{j=1}^{n} bj = \frac{ai}{M}*M = ai$$

$$\sum_{i=1}^{m} Xij = \sum_{i=1}^{m} \frac{ai*bj}{M} = \frac{bj}{M}\sum_{i=1}^{m} ai = \frac{bi}{M}*M = bj$$

X_{ij} = $\frac{ai*bj}{M}$ ≥ 0, chunki $a_i \geq 0$, $b_j \geq 0$, M>0.

Maqsad funksiyaning echimlar to‘plamida chegaralanganligini ko‘rsatish uchun S_{ij} qiymatlarini ichidan eng kattasini tanlab olib, uni S=max S_{ij} deb belgilaymiz va (15.6) maqsad funksiyaning barcha kooffisentlarini S^1ga almashtiramiz; u xolda (15.5) ning birinchisiga va (15.8) ga asosan quyidagicha ega bo‘lamiz:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} CijXij < C'\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Xij = C'\sum_{i=1}^{m} ai = C'M$$

Endi C_{ij} qiymatlarining ichidan eng kichigini tanlab olib, uni S``=minC_{ij} deb belgilaymiz va (15.6) maqsad funksiyaning barcha koeffisientlarini S" ga almashtiramiz; u xolda (15.5) ning birinchisiga va (15.8) ga asosan quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} CijXij. > C``\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Xij = C``\sum_{i=1}^{m} ai = C``M$$

Ikkita oxirgi tengsizliklarni birlashtirib, ularni quyidagi ko‘rinishda yozamiz

S``M≤ z ≤S`M

Demak, maqsad funksiya transport masalasining echimlari to‘plamida chegaralangan ekan.

Misol. A_1, A_2 va A_3 omborlarda mos ravishda 90 t , 70 t va 50 t un saqlanadi. Bu unlarni V_1, V_2, V_3 va V_4 magazinlarga ularning talablariga ko‘ra, mos ravishda 80 t, 60 t, 40 t, va 30 t dan etkazib berish kerak bo‘lsin. A_1 ombordan 1 t unni V_1 ,V_2, V_3 va V_4 magazinlarga etkazib berish uchun sarf qilinadigan transport xarajati mos ravishda 2; 1; 3; va 2 so‘mni A_2 ombordan – 2; 3; 3; va 1 so‘mni va A_3 ombordan esa - 3,3,2 va 1 so‘mni tashkil qilsa, barcha unni tashishda sarf qilingan umumiy transport xarajati eng kam bo‘ladigan echim topilsin . Bu transport masalasining matematik modeli tuzilsin.

Echish : A_i (i = 1,2,3) omborlardan Bj (j = 1,2,3,4) magazinlarga etkazib beriladigan unning miqdorini Xij, bilan Ai omborlarda saqlanayotgan unning miqdorini a_i (bunda a_1= 90 t, a_2 = 70t, a_3 =50 t) bilan, Bj magazinlarning unga bo‘lgan talabini bj (bunda b_1 = 80 T, b_2 = 60 T, b_3 = 40 T, b_4 = 30 T) bilan belgilasak , har bir omborlardagi uning to‘la taqsimlanish shartini

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 90 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 70 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 50 \end{cases}$$

ko‘rinishda, har bir magazinlarning unga bo‘lgan talabini to‘la qondirish shartini

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 60 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \end{cases}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

A_i omborlardan B_j magazinlarga bir tonna unni etkazib berish uchun sarf qilingan transport xarajatini S_{ij} bilan belgilasak , unni tashish uchun sarf qilinadigan jami xarajatning miqdorini aniqlaydigan chiziqli funksiya quyidagicha bo‘ladi:

$Z=2X_{11} + X_{12} + 3X_{13} + 2X_{14} + 2X_{21} + 3X_{22} + 3X_{23} + X_{24} + 3X_{31} + 3X_{32}+2X_{33}+X_{34}$

IQtisodiy nuqtai nazardan, transport masalasining echimlari manfiy bo‘lmaslik shartlarini hisobga olib, quyilgan transport masalasining matematik modelini quyidagicha ifodalash mumkin:

$Z=2X_{11} + X_{12} + 3X_{13} + 2X_{14} + 2X_{21} + 3X_{22} + 3X_{23} + X_{24} + 3X_{31} + 3X_{32}+2X_{33}+X_{34}$

chiziqli maqsad funksiyaning quyidagi:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=90 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=70 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=80 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=60 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30 \end{cases} \qquad X_{ij} \geq 0,\ i=1,3;\ j=1,4$$

cheklanish tenglamalari sistemasini qanoatlantiradigan minimumi topilsin.

Transport masalalarini echish uchun qo‘llaniladigan birinchi aniq usul, **potensiallar usuli** 1949 yilida olimlar L.V Kantorovich va M.K Gavurin tomonidan taklif qilingan. Bu usulning asosiy g‘oyasi, chiziqli dasturlashtirish masalalarini echish usullariga bog‘liq bo‘lmagan xolda, transport masalasiga moslashtirilgani simpleks usulidan iboratdir.

Boshqa chiziqli dasturlashtirish masalalari singari transport masalasini potensiallar usuli yordamida echish jarayoni ham boshlang‘ich bazis echimini topishdan boshlanadi. Bu usul yordami bilan boshlang‘ich bazis echimdan boshlab, optimal echimga yaqinroq bo‘lgan yangi bazis echimlarga o‘ta borib, chekli sondagi qadamdan so‘ng masalaning optimal echimi topiladi.

Shuning uchun, potensiallar usulining asosiy maxiyatini bayon qilishdan oldin, transport masalasining boshlang‘ich bazis echimini topish uchun qo‘llaniladigan usullardan biri – shimoli – g‘arb burchak usuli bilan tanishamiz:

1. **Shimoli – g‘arb burchak usuli**. Faraz qilaylik, transport masalasining shartlari 1 – jadvaldagidek ko‘rinishda berilgan bo‘lsin.

Shimoli – g‘arb burchak usulning asosiy mohiyati quyidagilardan iborat: dastavval masalaning echimlaridan tuzilgan jadvallarning shimoli g‘arbida joylashgan noma’lum X_{11} ning qiymati aniqlanadi. X_{11}= min (a_1, v_1). Agar $a_1 \leq v_1$ bo‘lsa, $X_{11}= a_1$ va $x_{1j}=0$ (j=2,3,...,n) bo‘lib, $a_1=0$ va $v_1=v_1-a_1$ ga o‘zgaradi, agar $a_1 \geq v_1$ bo‘lsa, $X_{11}= v_1$ va $x_{i1}=0$ (i=2,m) bo‘lib, $a_1=a_1-v_1$ va $v_1=0$ ga o‘zgaradi.

Faraz qilaylik, ikkinchi xol bajarilsin. Bu xolda 1 – qadamdan so‘ng masalaning echimlaridan tuzilgan jadval 2 – jadval ko‘rinishda bo‘ladi. Endi jadvalning shimoli – g‘arbida joylashgan X_{12} ning qiymati aniqlanadi: agar a_1-a_1>v_2 bo‘lsa, X_{12}= v_2 va x_{2j} =0 (i=2,...,m) bo‘lib, a_1-v_1=a_1- v_1- v_2 va v_2=0 ga o‘zgaradi. Agar a_1-v_1<v_2 bo‘lsa, X_{12}= a_1- v_1 va x_{1j} =0 (j=3,...,n) bo‘lib,

a_1- v_1=0 va v_2=v_2-a_1+v_1 ga o‘zgaradi.

Aytaylik, yangi jadval uchun birinchi hol bajarilsin, u holda 2 – qadamdan so‘ng masalaning echimlaridan tuzilgan jadval 3-jadval ko‘rinishda bo‘ladi.

1 – jadval

Ishlab chiqarish punktlari	Ishlab chiqarilgan maxsulotlar	Iste’mol punktlari.				
		V_1	V_2	V_3	…	V_n
A_1	a_1-v_1	b_1	X_{12}	X_{13}	…	X_{1n}
A_2	A_2	$\underline{0}$	X_{22}	X_{23}	…	X_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	0	X_{m2}	X_{m3}	…	X_{mn}
Maxsulotga bo‘lgan talab		0	b_2	b_3	…	b_n

2- jadval.

Ishlab chiqarish punktlari	Ishlab chiqarilgan maxsulotlar	Iste’mol punktlari.				
		V_1	V_2	V_3	…	V_n
A_1	a_1-v_1-v_2	b_1	b_2	X_{13}	…	X_{1n}
A_2	A_2	$\underline{0}$	0	X_{23}	…	X_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	0	0	X_{m3}	…	X_{mn}
Maxsulotga bo‘lgan talab		0	0	b_3	…	b_n

3 – jadval.

Ishlab chiqarish punqtlari	Ishlab chiqarilgan maxsulotlar	Iste'mol punktlari.				
		V_1	V_2	V_3	…	V_n
A_1	0	b_1	b_2	a_1-v_1-v_2	…	0
A_2	a_2	0	0	X_{23}	…	X_{2n}
…	…	…	…	…	…	…
A_m	a_m	0	0	X_{m3}	…	X_{mn}
Maxsulotga bo'lgan talab		0	0	b_3-a1-v_1+v_2	…	b_n

2 – jadvalning shimoli – g'arbidagi noma'lum X_{13} ning qiymatini topaylik. Faraz qilaylik, bu xolda a_1-v_1-v_2< b_3 bo'lsin. Demak, X_{13}=a_1-v_1-v_2 va X_{1j} = 0 (j=4,...,n) bo'lib, a_1-v_1-v_2=0 va b_3= b_3- a_1-v_1+v_2 ga o'zgaradi. (3 – jadvalga qarang) va x.k.

Xuddi shu yul bilan davom etib, har bir qadamda jadvalning shimoli – g'arbiy burchagida joylashgan X_{ij} ning qiymati X_{ij} – min(a_i,b_i) topiladi, bunda a_i,b_i nolga o'zgaradi. Bu jarayon barcha a_i va b_i lar nollarga aylangunga qadar davom ettiriladi.

2. Potensiallar usuli. Bu usul yordamida boshlang'ich bazis echimdan boshlab, optimal echimga yaqinroq bo'lgan yangi bazis echimlarga o'ta borib, chekli sondagi qadamdan keyin masalaning optimal echimi topiladi. har bir qadamdan keyin topilgan bazis echim optimal echim ekanligini tekshirish uchun har bir ishlab chiqarish punkti (A_i) va iste'mol qiluvchi (V_j) punktga ularning potensiallari deb ataluvchi miqdorlari u_i va v_j mos qo'yiladi. Bu potensiallarni shunday tanlash kerakki, bunda A_i va V_j punktlarga mos keluvchi potensiallar yiIindisi A_i ishlab chiqarish punktidan V_j iste'mol punktigacha bir birlik maxsulotni olib borish uchun sarf qilingan xarajatga, ya'ni S_{ij} ga teng bo'lishi kerak.

Teorema. Agar X=(x_{ij}) echim transport masalasining optimal echimi bo'lsa, u holda unga

u_i +v_j = S_{ij} (x_{ij}>0) (15.9)

$u_i + v_j \le S_{ij}$ $(x_{ij}=0)$ (15.10)

$i=1,...,m$; $j=1,...,n$

shartni qanoatlantiruvchi m+n ta u_i va v_j sonlar mos keladi. u_i va v_j sonlar mos ravishda *ishlab chiqarish punktlari va iste'mol punktlarining potensiallari* deyiladi.

Potensiallar usulining asosiy g'oyasi quyidagi bosqichlardan iborat:

1. Shimoli-G'arbiy burchak usuli yordamida boshlang'ich bazis echim topiladi.

2. Topilgan echimni optimal echim ekanligini tekshirish uchun potensiallar sistemasi tuziladi.

3. Hosil qilingan sistemada potensiallarning son qiymati aniqlanadi.

1. Barcha bo'sh katakchalar uchun $\Delta_{ij} = u_i + v_j - S_{ij} \le 0$ sharti tekshiriladi. Agar bu shart bajarilsa boshlang'ich bazis echim optimal echim bo'ladi. Aks holda boshlang'ich bazis echim almashtiriladi.

2. Yangi bazis echim hisoblanib, yangi potensiallar sistemasi tuziladi.

3. Yangi bazis echimning optimal echim bo'ladigan shartlari tekshiriladi. Agar u shartlar bajarilmasa jarayon takrorlanadi. Aks holda jarayon tugatiladi.

Beshinchi bob bo`yicha savol va topshiriqlar

1. Chiziqli dasturlash masalalari
2. Matematik dasturlash
3. Chiziqli dasturlash masalalariga olib keladigan masalalar.
4. Chiziqli dasturlash masalasining geometrik ma'nosini aytib bering.
5. Iqtisodiy masalalarning matematik modeli
6. Simplek usulini tavsiflang
7. Simpleks usulining mohiyati
8. Simplek jadval usulida bazis tushunchasi
9. Maqsad funksiya tushunchasi
10. Dinamik dasturlash masalalari
11. Dinamik dasturlashning chiziqli dasturlashdan farqli tomonlari

12. Chiziqli dasturlash masalasini grafik usulda yechishni tavsiflang
13. Chiziqli dasturlash masalalarini simpleks usulida yechishni tavsiflang
14. Shimoliy - g‘arb burchak usulida transport masalalari
15. Transport masalasi. Transport masalasi yechimini qurish bosqichlari.
16. Transpotga oid masalalar va ularni yechish usullsri
17. Transport masalasini tavsiflang
18. Transport masalasini sohalarda qo‘llanishi
19. Tranport masalalarining chiziqli dasturlash masalasi bilan bog‘liqligi
20. Amaliy topshiriqlar

1. Quyidagi masalalarni chiziqli dasturlashning asosiy masalasiga keltiring.

1.1

$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\le 3, \\ x_1 + 2x_2 &\ge 1, \\ -3x_1 + 8x_2 &\le 3. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = x_1 + 4x_2 \to \max$

1.2.

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &\le 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\ge 14, \\ x_1 &\ge 2. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \min$

1.3.

$$\left.\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 &\ge 14, \\ x_1 + 2x_2 &\ge 10. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$

1.4.

$$\left.\begin{aligned} -5x_1 + x_2 &\le 0, \\ x_1 + x_2 &\ge 1, \\ x_1 + 5x_2 &\ge 0, \\ x_1 + x_2 &\le 6, \\ x_1 - x_2 &\le 7. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \min$

1.5.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4, \\ 8x_1 + 2x_2 &\ge 1, \\ x_1 + 5x_2 &\ge 4. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$

1.6.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\le 24, \\ 5x_1 + 4x_2 &\ge 22, \\ 2x_1 + 7x_2 &\ge 28. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = 7x_1 + 4x_2 \to \min$

1.7.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1, \\ 2x_1 - x_2 &\le 2. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$F = 3x_1 + 8x_2 \to \min$

1.8.

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &\le 1, \\ 2x_1 - x_2 &\le 2. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$F = 3x_1 + 8x_2 \to \min$

1.9.

$$\left.\begin{aligned} 18x_1 + 9x_2 &\le 720, \\ 8x_1 + 28x_2 &\le 56. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = 11x_1 + 7x_2 \to \min$

1.10.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 70, \\ 15x_1 + 12x_2 &\le 36, \\ 7x_1 + 13x_2 &\ge 200. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = 27x_1 + 50x_2 \to \max$

1.11.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 6x_3 &\le 12, \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 &= 14, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\le 18. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

$F = -2x_1 - 12x_2 + 5x_3 \to \min$

1.12.

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 24, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 18, \\ 3x_1 + 9x_2 - 2x_3 &= 27. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

$F = -4x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max$

1.13.

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &\ge 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &\ge 16, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 18. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

$F = -x_1 + x_2 - 3x_3 \to \min$

1.14.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_4 &\le 12, \\ -4x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 &\ge 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 9x_4 &= 25, \\ 9x_1 + 18x_2 + x_3 - 27x_4 &\le 9. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3, x_4 \ge 0.$

$F = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 \to \max$

1.15.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &\le 4, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\le 2, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 &\le 5. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$

$F = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max$

1.16.

$$\left.\begin{aligned} 0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 + x_3 &\le 150, \\ 0{,}7x_1 + 0{,}3x_2 + 2x_3 &\le 270, \\ 0{,}1x_1 + 4x_2 - 3x_3 &\le 0. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

$F = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$

1.17.

1.18.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+5x_2+4x_3 &\ge 20,\\ 5x_1+2x_2+2x_3 &\le 25,\\ 8x_1+0\cdot x_2-3x_3 &\ge 3. \end{aligned}\right\}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

$F = 8x_1 - 3x_2 + x_4 \to \max$

$$\left.\begin{aligned} 10x_1+5x_2 &\le 50,\\ 6x_1+0x_2 &\le 26,\\ 12x_1+4{,}5x_2 &= 1\cdot \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 10x_1 + 20x_2 \to \min$

1.19.

$$\left.\begin{aligned} 3x_1+x_2-x_3 &\ge 0,\\ 4x_1+5x_2-6x_3 &\le 4,\\ 5x_1-3x_2+15x_3 &\le 30. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max$

1.20.

$$\left.\begin{aligned} 7x_1-5x_2 &\ge 2,\\ x_1-3x_2 &\le 4,\\ 6x_1+5x_2 &\le 30. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = x_1 - 10x_2 \to \min$

1.21.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+x_2-5x_3 &= 30,\\ x_1+x_2-x_3 &\le 4,\\ x_1-5x_2+9x_3 &\le 45. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 5x_1 + 14x_2 - 7x_3 \to \max$

1.22.

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2 &\ge 4,\\ x_1+5x_2 &\le 20,\\ x_1 &\le 8,\\ x_2 &\ge 4. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 3x_1 + x_2 \to \min$

1.23.

$$\left.\begin{aligned} x_1+4x_2-12x_3 &\le 36,\\ 4x_1+x_2+36x_3 &\ge 14,\\ x_1+x_2+8x_3 &= 10. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = x_1 + 10x_2 - 20x_3 \to \max$

1.24.

$$\left.\begin{aligned} 2x_1-4x_2+12x_3 &= 24,\\ 4x_1-5x_2+5x_3 &\le 10,\\ 7x_1+x_2+14x_3 &\le 28. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 5x_1 - 10x_2 + 15x_3 \to \min$

1.25.

$$\left.\begin{aligned} x_1+9x_2+18x_3 &= 36,\\ 9x_1+18x_2-x_3 &\le 36,\\ 21x_1+42x_2-84x_3 &\ge 168. \end{aligned}\right\}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 10x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

2. Quyidagi masalalarni chiziqli programmalashning asosiy masalasiga keltiring va simpleks usuli va grafik usul bilan yeching.

2.1

$$\begin{cases} 6x_1 + 8x_2 \le 470, \\ 7x_1 + 3x_2 \le 365, \\ 4x_1 + x_2 \le 310. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 11x_1 + 8x_2 \to \max$

2.2

$$\begin{cases} 8x_1 + 12x_2 \le 614, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 455, \\ 5x_1 + x_2 \le 320. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 20x_1 + 7x_2 \to \max$

2.3.

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 740, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 690, \\ 6x_1 + x_2 \le 456. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 4x_1 + 6x_2 \to \max$

2.4.

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 \le 350, \\ 6x_1 + 6x_2 \le 366, \\ 9x_1 + 3x_2 \le 81. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 9x_1 + 11x_2 \to \max$

2.5.

$$\begin{cases} 7x_1 + 9x_2 \le 630, \\ 4x_1 + 13x_2 \le 420, \\ 8x_1 + x_2 \le 320. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2 \ge 0.$

$F = 11x_1 + 14x_2 \to \max$

2.6

$$\begin{cases} 20x_1 + 15x_2 + 14x_3 \ge 10, \\ 28x_1 + 9x_2 + x_3 \ge 2. \end{cases}$$

$x_1,\ x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 1238x_1 + 1118x_2 + 523x_3 \to \min$

2.7.

$$\begin{cases} 11x_1 + 13x_2 + 12x_3 \ge 5, \\ 21x_1 + 15x_2 + 3x_3 \ge 3. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 740x_1 + 740x_2 + 822x_3 \to \min$

2.8.

$$\begin{cases} 44x_1 + 12x_2 + 8x_3 \ge 7, \\ 8x_1 + 4x_2 + x_3 \ge 3. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 620x_1 + 545x_2 + 380x_3 \to \min$

2.9.

$$\begin{cases} 19x_1 + 16x_2 + 20x_3 \ge 5, \\ 26x_1 + 17x_2 + 8x_3 \ge 4. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 620x_1 + 372x_2 + 540x_3 \to \min$

2.10.

$$\begin{cases} 14x_1 + 15x_2 + 20x_3 \ge 5, \\ 40x_1 + 27x_2 + 4x_3 \ge 13. \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

$F = 1200x_1 + 990x_2 + 1100x_3 \to \min$

2.11.

2.12.

$$\begin{cases} 9x_1 + 15x_2 + 15x_3 \ge 11, \\ 27x_1 + 15x_2 + 3x_3 \ge 6. \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$
$F = 600x_1 + 400x_2 + 820x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 8x_1 + 14x_2 + 14x_3 \ge 5, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_3 \ge 7. \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$
$F = 60x_1 + 80x_2 + 400x_3 \to \min$

2.13.

$$\begin{cases} 19x_1 + 16x_2 + 19x_3 \ge 16 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 \ge 19 \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$
$F = 1121x_1 + 706x_2 + 1066x_3 \to \min$

2.14.

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 \ge 11, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10. \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$
$F = 480x_1 + 364x_2 + 320x_3 \to \min$

2.15.

$$\begin{cases} 10x_1 + 9x_2 + 3x_3 \ge 11, \\ 8x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10. \end{cases}$$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$
$F = 1240x_1 + 1120x_2 + 53x_3 \to \min$

3. Viloyatning uchta A_1, A_2 va A_3 korxonalarida bir jinsli maxsulotlar ishlab chiqarilib, ishlab chiqarilgan maxsulotlarni beshta B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 iste’molchilarga jo‘natish kerak. A_1, A_2 va A_3 korxonalarda mos ravishda a_1, a_2, a_3 tonna bir jinsli ishlab chikarilgan maxsulotni B_1, B_2, B_3, B_4 va B_5 iste’molchilarga mos ravishda b_1, b_2, b_3, b_4 va b_5 tonna yuklarni jo‘natish kerak.

Ishlab chikarish korxonalaridan iste’molchilargacha bo‘lgan masofalar kuyidagi T matritsada berilgan

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

Ishlab chikarish korxonalaridan maxsulotlarni iste’molchilarga tashish xarajatlarining minimal variantini toping:

3.1.

$$a_1 = 330,\quad a_2 = 270,\quad a_3 = 350$$

$$b_1 = 220,\quad b_2 = 170,\quad b_3 = 150,\quad b_4 = 150,\quad b_5 = 200.$$

$$T = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 34 \end{pmatrix}.$$

3.2.

$$a_1 = 260,\quad a_2 = 150,\quad a_3 = 200,\quad b_1 = 100.\quad b_2 = 70,\quad b_3 = 130,\quad b_4 = 110,\quad b_5 = 200.$$

$$T = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 12 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 68 & 62 \end{pmatrix}.$$

3.3.

$$a_1 = 200,\quad a_2 = 350,\quad a_3 = 300,\quad b_1 = 270,\quad b_2 = 130,\quad b_3 = 100,\quad b_4 = 190,\quad b_5 = 110.$$

$$T = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 20 & 10 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}.$$

3.4.

$$a_1 = 250,\quad a_2 = 300,\quad a_3 = 200,\quad b_1 = 135,\quad b_2 = 135,\quad b_3 = 120,\quad b_4 = 150,\quad b_5 = 210.$$

$$T = \begin{pmatrix} 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.5.

$$a_1 = 300,\quad a_2 = 350,\quad a_3 = 200,\quad b_1 = 110,\quad b_2 = 150,\quad b_3 = 190,\quad b_4 = 150,\quad b_5 = 250.$$

$$T = \begin{pmatrix} 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

3.6.

$$a_1 = 170,\quad a_2 = 250,\quad a_3 = 230,\quad b_1 = 150.\quad b_2 = 110,\quad b_3 = 160,\quad b_4 = 90,\quad b_5 = 140.$$

$$T = \begin{pmatrix} 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \\ 49 & 26 & 27 & 16 & 38 \\ 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \end{pmatrix}.$$

3.7.

$$a_1=200,\quad b_2=110,$$
$$a_2=250,\quad b_3=100,\qquad T=\begin{pmatrix}27&33&23&31&34\\18&26&27&32&21\\28&27&18&27&24\end{pmatrix}.$$
$$a_3=200,\quad b_4=120,$$
$$b_1=130.\quad b_5=190.$$

3.8.

$$a_1=300,\quad b_2=195,$$
$$a_2=200,\quad b_3=200,\qquad T=\begin{pmatrix}37&30&31&39&41\\19&17&26&36&36\\22&14&16&28&30\end{pmatrix}.$$
$$a_3=350,\quad b_4=140,$$
$$b_1=145.\quad b_5=170.$$

3.9.

$$a_1=200,\quad b_2=135,$$
$$a_1=250,\quad b_3=120,\qquad T=\begin{pmatrix}3&16&10&1&4\\9&4&11&9&17\\4&8&13&2&2\end{pmatrix}.$$
$$a_3=300,\quad b_4=150,$$
$$b_1=135.\quad b_5=270.$$

3.10.

$$a_1=270,\quad b_2=200,$$
$$a_3=330,\quad b_3=150,\qquad T=\begin{pmatrix}3&12&9&1&7\\7&4&11&2&10\\3&12&9&1&7\end{pmatrix}.$$
$$a_3=350,\quad b_4=220,$$
$$b_1=210.\quad b_5=170.$$

3.11.

$$a_1=200,\quad b_2=100,$$
$$a_2=200,\quad b_3=100,\qquad T=\begin{pmatrix}27&36&35&31&29\\35&42&33&32&39\\22&23&25&32&35\end{pmatrix}.$$
$$a_3=250,\quad b_4=130,$$
$$b_1=140.\quad b_5=120.$$

3.12.

$$a_1=250,\quad b_2=325,$$
$$a_2=450,\quad b_3=125,\qquad T=\begin{pmatrix}7&3&5&9&2\\4&2&2&5&6\\5&8&70&10&3\end{pmatrix}.$$
$$a_3=200,\quad b_4=100,$$
$$b_1=250.\quad b_5=100.$$

3.13.

$$a_1=225,\quad b_2=190,$$
$$a_2=175,\quad b_3=80,\qquad T=\begin{pmatrix}2&3&6&8&7\\7&1&3&1&10\\3&7&4&2&5\end{pmatrix}.$$
$$a_3=200,\quad b_4=130,$$
$$b_1=100.\quad b_5=100.$$

3.14.

$$a_1 = 210,\quad a_2 = 450,\quad a_3 = 290,\quad b_1 = 150.\quad b_2 = 220,\quad b_3 = 200,\quad b_4 = 170,\quad b_5 = 210.\quad T = \begin{pmatrix} 15 & 14 & 28 & 27 & 30 \\ 39 & 21 & 12 & 21 & 47 \\ 19 & 27 & 32 & 32 & 20 \end{pmatrix}.$$

3.15.

$$a_1 = 330,\quad a_2 = 450,\quad a_3 = 270,\quad b_1 = 220.\quad b_2 = 230,\quad b_3 = 200,\quad b_4 = 210,\quad b_5 = 190.\quad T = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \\ 37 & 30 & 15 & 19 & 37 \end{pmatrix}.$$

3.16.

$$a_1 = 270,\quad a_2 = 420,\quad a_3 = 330,\quad b_1 = 210.\quad b_2 = 230,\quad b_3 = 200,\quad b_4 = 210,\quad b_5 = 130.\quad T = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 19 & 29 & 26 \\ 36 & 30 & 15 & 19 & 37 \\ 16 & 19 & 13 & 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

3.17.

$$a_1 = 300,\quad a_2 = 250,\quad a_3 = 300,\quad b_1 = 250.\quad b_2 = 190,\quad b_3 = 150,\quad b_4 = 130,\quad b_5 = 130.\quad T = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.18.

$$a_1 = 250,\quad a_2 = 300,\quad a_3 = 310,\quad b_1 = 260.\quad b_2 = 190,\quad b_3 = 150,\quad b_4 = 130,\quad b_5 = 130.\quad T = \begin{pmatrix} 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 17 & 21 & 24 & 32 & 24 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

3.19.

$$a_1 = 300,\quad a_2 = 320,\quad a_3 = 230,\quad b_1 = 190.\quad b_2 = 160,\quad b_3 = 120,\quad b_4 = 180,\quad b_5 = 200.\quad T = \begin{pmatrix} 32 & 31 & 22 & 20 & 25 \\ 20 & 11 & 19 & 18 & 18 \\ 26 & 30 & 17 & 19 & 20 \end{pmatrix}.$$

3.20.

$$a_1 = 260,\quad a_2 = 290,\quad a_3 = 300,\quad b_1 = 140.\quad b_2 = 150,\quad b_3 = 125,\quad b_4 = 215,\quad b_5 = 220.\quad T = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 23 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 11 & 6 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.21.

$$a_1 = 200,\quad a_2 = 350,\quad a_3 = 300,\quad b_1 = 170.\qquad b_2 = 140,\quad b_3 = 200,\quad b_4 = 195,\quad b_5 = 145.\qquad T = \begin{pmatrix} 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.22.

$$a_1 = 290,\quad a_2 = 260,\quad a_3 = 300.\qquad b_1 = 140,\quad b_2 = 200,\quad b_3 = 190,\quad b_4 = 150,\quad b_5 = 170.\qquad T = \begin{pmatrix} 16 & 25 & 21 & 9 & 9 \\ 18 & 31 & 35 & 25 & 13 \\ 45 & 30 & 25 & 33 & 41 \end{pmatrix}.$$

3.23.

$$a_1 = 140,\quad a_2 = 210,\quad a_3 = 100,\quad b_1 = 100.\qquad b_2 = 140,\quad b_3 = 75,\quad b_4 = 60,\quad b_5 = 75.\qquad T = \begin{pmatrix} 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 15 & 23 & 23 & 19 & 17 \\ 13 & 21 & 24 & 13 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.24.

$$a_1 = 150,\quad a_2 = 200,\quad a_3 = 100,\quad b_1 = 90.\qquad b_2 = 150,\quad b_3 = 75,\quad b_4 = 60,\quad b_5 = 75.\qquad T = \begin{pmatrix} 13 & 21 & 24 & 13 & 12 \\ 17 & 13 & 14 & 12 & 20 \\ 15 & 23 & 23 & 19 & 17 \end{pmatrix}.$$

3.25.

$$a_1 = 280,\quad a_2 = 440,\quad a_3 = 330,\quad b_1 = 180.\qquad b_2 = 210,\quad b_3 = 200,\quad b_4 = 240,\quad b_5 = 220.\qquad T = \begin{pmatrix} 17 & 21 & 24 & 32 & 21 \\ 23 & 10 & 15 & 20 & 26 \\ 20 & 27 & 29 & 23 & 25 \end{pmatrix}.$$

13-§.Matematika statistika elementlari

Bosh va tanlanma to‘plamlar. Tasodifiy hodisalarga mos qonuniyatlarni (ilgari surilayotgan g‘oya va metodik ta’minotlarni) matematik-statistik usullar orqali o‘rganish- mos statistik ma’lumotlarni to‘plash, guruhlarga ajratish, ularning natijalarini statistik tahlil qilish usullarini ishlab chiqish va tegishli xulosalar chiqarishni talab qiladi. Ilmiy pedagogik va Fan-texnika ilgari suradigan juda ko‘p g‘oyalar matematik-statistik usullar bilan o‘rganish tanlab olingna ob’ektlar faoliyatida optimal ishlab chiqarish modellarini tuzishda muhim omil bo‘lib xizmat qiladi. Pedagogik tatqiqotlarda olib borilayotgan ishning biror bir alomatiga (miqdoriy ko‘rsatkichga yoki sifat va smaradorligiga) ko‘ra tekshirish lozim bo‘lgan bir jinsli ob’ektlarning katta guruhi o‘rganiladi. Misol sifatida o‘quvchilarni bazaviy konpetensiyaviy faoliyatini o‘rganish, o‘quvchilarning bilim darajalarini baxolash jarayonini ko‘rib chiqaylik. Bunda o‘quvchilarning sohalarga nisbatan 1-foaliyat sohasiga nisbatn konpetensiyasi (x_1), 2-foaliyat sohasiga nisbatn konpetensiyasi (x_2), 3-foaliyat sohasiga nisbatn konpetensiyasi (x_3), 4-foaliyat sohasiga nisbatan konpetensiyasi (x_4), va hokazolar (x_n) to‘g‘risida zarur kompetensiyalarni talab qiluvchi bilimlarni to‘plash rejalashtiriladi.

Ushbu faoliyat ob’ektlarning har biri matematik-statistik o‘rganish nuqtai nazaridan bosh (asosiy) to‘plam deb talqin qilinadi.

Tekshirishi lozim bo‘lgan barcha ob’ektlar ta’lim muassasalari, korxonalar, tashkilotlar, detallar, apparatlar, buyumlar majmuasi **bosh *(asosiy)*** to‘plam deb ataladi. Asosiy to‘plamni barcha alomatlari bo‘yicha to‘liq o‘rganish va tahlil qilish murakkab jarayon bo‘lib, ko‘p vaqtni talab qiladi. Shu sababli tekshirish uchun bosh to‘plamdan ma’lum bir qismini ajratib olinadi. Tekshirish uchun olingan ushbu to‘plamga ***tanlanma*** to‘plam deyiladi. Tanlanmadagi ob’ektlar soni ***tanlanma hajmi*** deb ataladi. Tanlanma to‘plam vakolatli (reprezentativ) bo‘lishi uchun katta sonlar qonuni bo‘yicha u tasodifiy bo‘lishi kerak.

Bosh to‘plamdan ob’ektlar tasodifan bittalab olinadigan tanlanma ***tasodifiy tanlanma*** deyiladi.

Faraz qilaylik, tasodifiy X (diskret yoki uzluksiz) bosh to‘plamning miqdoriy yoki sifatli alomatlarini o‘rganish talab qilinayotgan bo‘lsin. X alomatli bosh to‘plamning ustida ketma-ket o‘tkazilgan n ta sinovlarda (tajribada) kuzatilgan qiymatlarini $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilan belgilaymiz. Ushbu qiymatlar bosh to‘plamdan ajratib olingan tanlanmaning kuzatilgan qiymatini tashkil qiladi. Kuzatilgan x_i (i=1,n) qiymatlar ***variantalar deyiladi.***

O‘sib borish, ya’ni $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n$ tartibda yoki kamayish bo‘yicha tuzilgan variantalar ketma-ketligi variasion qator deb ataladi. Odatda, variasion qatorni tuzish uchun X_{min} , X_{max} larni aniqlash lozim. Agar tanlanma to‘plamda x_1 varianta

m_1 marta, x_2 varianta m_2 marta vaxakoza x_n varianta m_n marta takror kuzatilgan bo‘lsa, unda m_1, m_2, ….., m_n sonlari chastotalar deb ataladi. Barcha chastotalar yig‘indisi $n=m_1+m_2+\ldots+m_n$ tanlanmaning hajmi yoki ***sinovlar soni*** deyiladi.

Chastota (m) - absolyut miqdor bo‘lib, har bir variantaning to‘plamda necha bor takror ro‘y berishini ko‘rsatadi. Masalan, o‘quv guruhida (to‘plamda) 32 ta talabalar bo‘lib, ulardan 5 ta talaba a’lochilar bo‘lsa, bunda chastota m=5 ga teng.

Variantalar va ularga mos chastotalar ro‘yxatidan tuzilgan quyidagi ikki satrli jadvalga

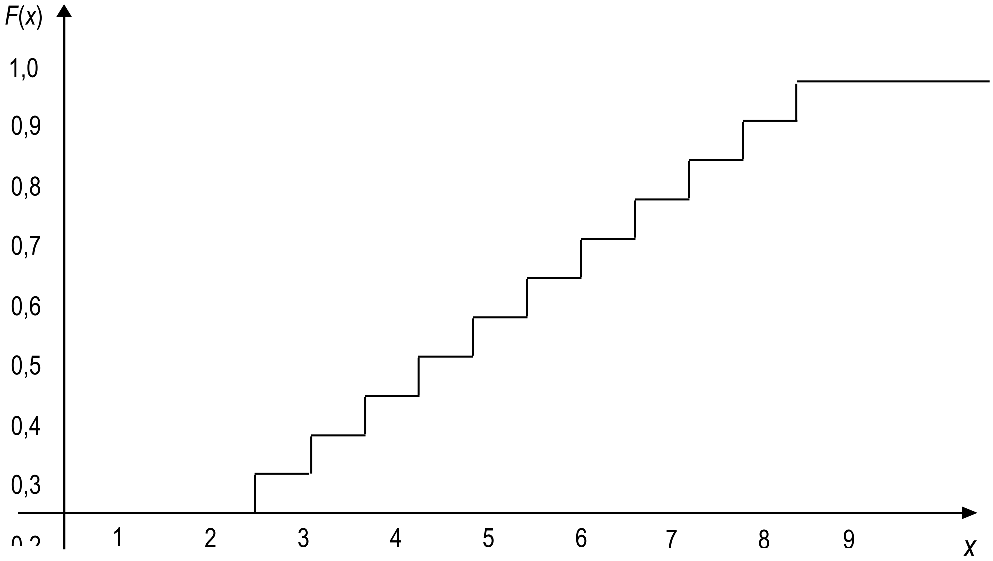
x_i	x_1	x_2	…	x_n
m_i	m_1	m_2	…	m_n

tanlanma to‘plamning statistik yoki empirik taqsimoti deyiladi

Faraz qilaylik, X alomatli (ko‘rsatkichli) tanlanma to‘plam o‘tkazilgan n-ta sinovlarda kuzatilgan x_1 , x_2 ,..., x_n qiymatlari va ularga mos takror ro‘y berish m_1 , m_2 ,..., m_n sonlari bilan berilgan bo‘lsin. Bunda tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi quyidagi ko‘rinishda tuziladi:

$$F(x)=\begin{cases} 0, x \le x_1 \\ \dfrac{m_1}{n}, x_1 \le x \le x_2 \\ \dfrac{m_1+m_2}{n}, x_2 \le x \le x_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{m_i}{n}, x_{n-1} \le x \le x_n \\ 1, x \ge x_n \end{cases}$$

$F(x)$ funksiyaning chizmasi zinapoyasimon chiziq ko‘rinishida



bo‘ladi. Empirik taqsimot funksiyasi $F(x)$ quyidagi xossalarga ega

- $F(x)$ ning barcha qiymatlari $0 \leq F(x) \leq 1$ oraliqqa tegishli;
- $F(x)$ kamaymaydigan funksiya;
- agar x_1 eng kichik va x_p eng katta variantalar bo‘lsa, unda $x<x_1$ da $F(x_1)=0$ va $x>x_n$ da $F(x_n)=1$.

Misol. Tanlanmaning berilgan ushbu

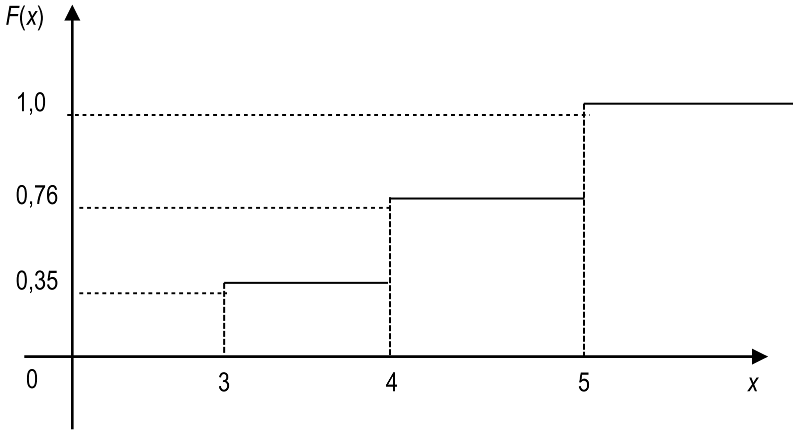
x_i	3	4	5
m_i	6	7	4

taqsimoti bo‘yicha empirik funksiyani tuzing va chizmasini chizing.

Echish: Bu erda; x_1 =3 x_2=4, x_3=5 va m_1=6, m_2=7, m_3=4. n=6+7+4=17

$F(x)$ funksiyani (*) formula asosida tuzamiz va hosil qilamiz:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 3 \\ \dfrac{6}{17}, 3 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{6+7}{17}, 4 \leq x \leq 5 \\ 1, x \geq 5 \end{cases}$$



Ushbu funksiyaning chizmasini yasaymiz:

Endi matematik-statistik tadqiqotlarda tasodifiy tanlanmaning taqsimotni tavsiflaydigan ba’zi zaruriyatli parametrlarini ko‘rib chiqaylik.

$n=m_1+m_2+\ldots+m_n$ hajmli tanlanma to‘plam x_1, x_2, ..., x_p kuzatilgan qiymatlar va ularga mos takror ro‘y berish sonlari (chastotalar) m_1, m_2, ..., m_p bilan berilgan.

o‘rtacha arifmetik qiymati:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (16.1)$$

Tanlanmaning o‘rtacha qiymati:

$$\overline{X}_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot m_i \quad (16.2)$$

O‘rtacha chiziqli farqlari:

$$\rho = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})$$

$$\rho_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) \cdot m_i$$

tanlanmaning o‘rtacha arifmetik $\overline{X}$ va tanlanmaning o‘rtacha $\overline{X}_T$ qiymatlarning x_1, x_2 ,..., $x_n$kuzatilgan qiymatlaridan chetlanish kvadratlari dispersiyalari mos ravishda quyidagi tarzda ifodalanadi:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i$$

$X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ alomatning o‘zgarishini ifodalovchi o‘rtacha kvadratik farqlar (chetlanishlar) quyidagicha hisoblanadi:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_T = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot m_i}$$

Variasion qator $x_1,x_2,\ldots,x_n$ ning variasiya chegarasi (*R*) deb uning ekstremal qiymatlari farqiga aytiladi: $R=x_{max}-x_{min}$

Variasiya – *X* alomatning o‘zgarishidir. Variantalar o‘zgaruvchi $x_1,x_2,\ldots,x_n$ miqdorning haqiqiy ifodasi.

Variasiya koeffisienti (*V*)-*X* belgining o‘zgarishini ifodalovchi nisbiy ko‘rsatkich bo‘lib, foizlarda ifodalanadi: o‘rtacha chiziqli farq bo‘yicha variasiya koeffisienti:

$$v_\rho = \frac{\rho}{\overline{X}} \cdot 100\%$$

O‘rtacha kvadratik farqi bo‘yicha variasiya koeffisienti:

$$v_\rho = \frac{\rho}{\overline{\overline{X}}} \cdot 100\%$$

Yuqorida keltirilgan barcha tushunchalar va formulalar korrelyasion-regression tahlil modellarini o‘rganishda asosiy ma’lumotlari hisoblanadi.

Korrelyasion-regression tahlil modellari. Funksional va korrelyasion bog‘lanishlar. Bugungi kunda barcha jabhalarda uchraydigan har qanday tasodifiy hodisalar ma’lum bir qonuniyatlarga bo‘ysunadi. Bunday hodisalarning ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi aniq hisobga olinadigan omillarga bog‘liq, ularning sonli ko‘rsatkichlari ma’lum bir aniq xususiyatga ega bo‘ladi. Masalan, biz pedagogik-statistik tatqiqotlar olib borganimizda turli darajadagi texnik va pedagogik ko‘rsatkichlar ko‘rinishidagi axborotlarga duch kelamiz. Ana shunday ko‘rsatkichlar bilan pedagogik tatqiqotlar(ilgari surilgan g‘oyalar) o‘rtasidagi munosabatlar o‘rganiladi.

Tadqiqot amaliyotda ikkita x va y o‘zgaruvchan miqdorlar o‘rtasidagi munosabatlarning funksional, statistik va korrelyasion bog‘la- nishlarini kuzatish mumkin. Agar x miqdorning D sohaga tegishli har bir qiymatiga biror usul yoki qonun bo‘yicha y miqdorning biror E sohadagi aniq bir qiymati mos qo‘yilsa, unda y o‘zgaruvchi miqdor x o‘zgaruvchi miqdorning funksiyasi deyiladi. x va y miqdorlarning orasidagi ushbu bir qiymatlik moslanishi(funksiyasi) $y=f(x)$ ko‘rinishida yoziladi. Bunday bog‘lanishga ***funksional bog‘lanish*** deb ataladi. Funksional bog‘lanish jadval, analitik va grafik ko‘rinishda tasvirlanishi mumkin.

Statistik bog‘lanishda tasodifiy miqdorlardan birining o‘z- garishi ikkinchi tasodifiy miqdor ehtimollari taqsimoti qonunining o‘zgarishiga olib keladi. Pedagogik tadqiqotlarda eng dolzarb masalalardan biri ikkita x va y tasodifiy miqdorlar orasidagi statistik bog‘lanishni topishdir.

Tasodifiy miqdorlar orasidagi statistik bog‘lanishlar kor- relyasion-regression tahlil usullari yordamida o‘rganiladi.

y tasodifiy miqdor qiymatlarining x ning $X=x$ qiymatiga mos keluvchi o‘rtacha arifmetik qiymatiga shartli o‘rtacha y_x qiymat deyiladi. Ushbu y_x qiymat shartli matematik kutilma bilan ifodalanadi:

$$\bar{y}_x = M[Y / X = x] = f(x) \quad (16.3)$$

Ushbu shartli o‘rtacha y_X qiymatning x bilan funksional bog‘lanishiga y va x tasodifiy miqdorlar orasidagi korrelyasion bog‘lanish deyiladi. Bunda (2.1) tenglama y ning x ga ***regres siya tenglamasi*** deb ataladi. $f(x)$ funksiyaning shakli y ning x ga regressiya chizig‘i deyiladi.

Yuqorida zikr qilingan mulohazalarni *x* va *y* tasodifiy miqdorlar tartibiga nisbatan takror qo‘llab, *x* ning *Y*=*u* qiymatga mos keluvchi shartli o‘rtacha x_u qiymatini va *x* ning *y* ga regressiya tenglamasini hosil qilamiz:

$$\bar{x}_y = M\left[X / Y = y\right] = \varphi(y) \quad (16.4)$$

Regressiya – bu bitta tasodifiy miqdorning ikkinchi taso- difiy miqdor qiymatlari bilan bog‘langan shartli matematik ku- tilmasining o‘zgarish qonunidir. Shunday qilib, *y* tasodifiy miqdorning *x* tasodifiy miqdorga regressiyasi, shuningdek x ning *y* ga regressiya tenglamalari mos ravishda $\bar{y}_x = f(x)$ va $\bar{x}_y = \varphi(y)$ shartli o‘rtacha qiymatlar orqali ifodalanadi.

Agar $\bar{y}_x = f(x)$ va $\bar{x}_y = \varphi(y)$ regressiya funksiyalari chiziqli bo‘lsa, unda *x* va *y* tasodifiy miqdorlar chiziqli korrelyasiyalangan, ya’ni ***chiziqli bog‘langan*** deyiladi. Tabiiyki, o‘rganilayotgan tasodifiy hodisalar o‘rtasidagi bog‘lanishlar har xil: to‘g‘ri chiziqli va egri chiziqli shakllarda bo‘lishi mumkin.

Korrelyasion-regression tahlil nazariyasi tajribada kuzatilgan ma’lumotlardan foydalanib, qaralayotgan ikki yoki undan ko‘p tasodifiy omillar orasidagi bog‘lanishlar shaklini va zichligini aniqlashdan iboratdir.

Korrelyasiya koeffisienti. Statistik ma’lumotlar har doim jadvallar shaklida taqdim etiladi. Jadvallarda keltirilgan sonli ma’lumotlar, odatda o‘zaro ochiq (ma’lum) yoki (maxfiy) bog‘lanishlarga egadir.

Ochiq turdagi bog‘langan ko‘rsatkichlar, masalan, rejaning bajarilish foizi, darajalar, tegishli salmoqlar, yig‘indida chetlanish, o‘sish darajasi, indekslar va hokazolar ma’lum formulalar yordamida oldindan hisoblanishi mumkin.

Ikkinchi turdagi bog‘lanishlar oldindan ma’lum emas. Lekin inson murakkab hodisalarni va jarayonlarni boshqarishi uchun ularga xos maxfiy bog‘lanishlarni tushuntira olishi va bashoratlashi kerak. Shu sababli mutaxassislar kuzatuvlar yordamida maxfiy bog‘lanishlarni ochishga va ularni formulalar orqali ifo- dalashga, ya’ni hodisalarni va jarayonlarni matematik tarzda modellashtirishga intilmoqdalar. Shunday imkoniyatlardan birini korrelyasion-regression tahlil taqdim etadi.

Hozirgi vaqtda kompyuterdagi elektron jadvallarning korrelyasion-regression tahlil vositalari bilan ta’minlanishi tufayli eng murakkab guruhga tegishli, chuqur ilmiy va shu sababli kam foydalaniladigan, deyarli ekzotik usullardan biri bo‘lmish korrelyasion-regression tahlil mutaxassis uchun kundalik, samarali va operativ analitik qurolga aylandi.

Korrelyasion-regression tahlil usullaridan foydalanib, analitiklar korrelyasiya koeffisienti yordamida ko‘rsatkichlar o‘rtasidagi bog‘lanishlar zichligini o‘lchamoqda. Bunda har xil turdagi (kuchsiz, o‘rtacha zichroq, eng kuchli va hokazo) bog‘lanishlar kuzatiladi. Agar bog‘lanishlar o‘ta muhim bo‘lsa, unda maqsadga muvofiq ularning regression modeli tarzda matematik ifodasini topish va modelning statistik qiymatini baholash lozim. Tatqiqotlarda regressiya tenglamasining qiymatidan o‘rganilayotgan hodisani yoki ko‘rsatkichni bashoratlashda foydalaniladi. Shu sababli regression tahlil kuzatuvlar natijasida hosil qilingan ma’lumotlar o‘rtasidagi yashirin bog‘lanishlarni ochishda zamonaviy matematik statistikaning asosiy usuli deb hisoblanadi.

Korrelyasion-regression tahlilning samaradorligi ko‘pgina pedagogik va ta’limiy muammolarni hal qilishda muhim rol o‘ynaydi. Bunda, eng avvalo o‘rganilayotgan hodisalar (omillar, ko‘rsatkichlar) o‘rtasidagi bog‘lanish har tomonlama sinchiklab tahlil qilinishi lozim. Haqiqatan ham bog‘lanish mavjud bo‘lsa, unda korrelyasion-regression tahlil usulidan foydalanib, real ahamiyatga ega bo‘lgan natijalarni olish mumkin.

Korrelyasion tahlilning birinchi vazifasi, korrelyasion bog‘lanish shakllarini, ya’ni regressiya funksiyasi ko‘rinishlarini (chiziqli, darajali, logarifmik, ko‘rsatkichli va hokazolar) aniqlashdan iborat. Bog‘lanish shakllarini tanlash regression tahlil va tanlanayotgan funksiya haqidagi ma’lum bashoratlarni ishlab chiqish hamda tahlil qilishdan boshlanadi.

Iqtisodiy hodisalar o‘rtasidagi bog‘lanishlarning murakkab- ligi tufayli ularni regression tahlil yordamida modellashtirish-da bog‘lanish shakli modelini tanlay olish muhim hisoblanadi.

Korrelyasion tahlilning ikkinchi vazifasi hodisalar (o‘zga- ruvchilar) o‘rtasidagi bog‘lanish zichligini (kuchini) aniqlashdan iboratdir. Bu korrelyasion indeksi $|R| \leq 1$ *va* chiziqli korrelyasion koeffisienti $|r| \leq 1$ larning sonli qiymatlarini hisoblash yo‘li bilan tekshiriladi. Agar R=l (r=1) bo‘lsa, unda o‘rganilayotgan omillar o‘rtasida funksional bog‘lanishlar mavjud bo‘ladi. Agar R=0 *(*r=0*)* bo‘lsa, bu holda omillar o‘zaro bog‘lanmagan bo‘ladi.

Bog‘lanish zichligi R va r larning sonli qiymatlari bo‘yicha baholashda quyidagi shartli tasniflash qo‘llaniladi:

0,1 dan 0,3 gacha qiymatga teng bo‘lsa kuchsiz bog‘lanish;

0,3 - 0,65 gacha qiymatga teng bo‘lsa o‘rtacha zich bog‘lanish;

0,65 - 0,80 gacha qiymatga teng bo‘lsa o‘rtachadan zichroq bog‘lanish;

0,80 -0,99 gacha qiymatga teng bo‘lsa zich bog‘lanish.

Korrelyasion indeks R juftli omillar o‘rtasidagi bog‘lanish zichligini baholashda qo‘llaniladi. Chiziqli bog‘lanishlar zichligini aniqlashda korrelyasiya koeffisientidan foydalanish mumkin. Korrelyasiya koeffisienti r ning manfiy qiymati hodisalar o‘rtasida teskari bog‘lanish mavjud ekanligidan dalolat beradi.

Endi oddiy korrelyasiya va regressiyani qaraylik. Ikkita x va y tasodifiy o‘zgaruvchilar o‘rtasidagi korrelyasiya oddiy (xususiy) korrelyasiya deyiladi. Xususiy korrelyasiya usuli bilan tahlil qilishdan maqsad, ikki o‘zgaruvchi (hodisa) o‘rtasidagi bog‘lanishning mavjudligi va zichligini aniqlashdan iborat.

Faraz qilaylik, ikkita tasodifiy: bog‘liqmas o‘zgaruvchi x va bog‘lik, o‘zgaruvchi y – natijaviy ko‘rsatkich bir xil p hajmli (n – kuzatuvlar soni) miqdoriy qiymatlaridan tuzilgan tanlanma to‘plamlari jadvali bilan berilgan bo‘lsin:

X	x_1	x_2	…	x_n
Y	y_1	y_2	…	y_n

Ushbu jadvaldagi qiymatlardan tuzilgan $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ nuqtalarni tekislikda koordinatalar tizimida yasab, tarqoqlik diagrammasi hosil qilinadi.

x va y tasodifiy o‘zgaruvchilarning birgalikda taqsimoti (korrelyasion bog‘lanishi) quyidagi parametrlar bilan tasvirlanadi:

1. Taqsimot markazi $(M(x), M(y))$ vaziyatini aniqlovchi x va y tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmalari (o‘rtacha qiymatlari):

$$\begin{cases} M(X) = \overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ M(Y) = \overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

2.Markazga nisbatan taqsimot tarqoqligini aniqlovchi σ_x^2 va σ_y^2 dispersiyalar

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2$$

3. (16.3) ma’lumotlar to‘plami bilan berilgan ikkita x va y tasodifiy miqdorlar o‘rtasidagi statistik bog‘lanishlar darajasini ifoda qiluvchi kovariasiya (korrelyasion moment) koeffisienti:

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X)) \cdot (y_i - M(Y))$$

Agar x tasodifiy miqdorning katta qiymatlari y tasodifiy miqdorning katta qiymatlariga mos kelsa, ya’ni ular orasida to‘g‘ridan-to‘g‘ri o‘zaro zich bog‘liqlik mavjud bo‘lsa, unda kovariasiyaning musbat qiymati kuzatiladi.

x tasodifiy miqdorning kichik qiymatlariga y tasodifiy miqdorning katta qiymatlari mos kelgan holatlarda kovaria- siyaning manfiy qiymati kuzatiladi. Kuchsiz bog‘liqlik holatlarda kovariasiya ko‘rsatkichi qiymati 0 ga yaqin bo‘ladi.

Tadqiqot qilinayotgan miqdorlarning o‘lchov birligiga bog‘liq bo‘lgan kovariasiya koeffisientini amalda qo‘llanilishini chegaralab qo‘yadi.

4. Agar x va y tasodifiy o‘zgaruvchilar chiziqli bog‘langan bo‘lsa, u holda bog‘lanish zichligini baholashda xususiy (juft) korrelyasiya koeffisientidan foydalaniladi:

$$r_{xy} = \frac{x \cdot y - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

bu erda, σ_x va σ_y lar mos ravishda x va y o‘zgaruvchilarning o‘rtacha kvadratik chetlanishlaridir va ular quyidagi formulalar yordamida hisoblanadi:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$$

x va y lar (16.4) formulalar bo‘yicha hisoblanadi

$\chi \cdot y$ va $\bar{x} \cdot \bar{y}$ ko‘paytmaning o‘rtacha arifmetik qiymati

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \quad (16.5)$$

Shuningdek, xususiy juftli korrelyasiya koeffisientini hisoblashning modifikasiyalangan formulasidan ham foydalananish mumkin:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \cdot\bar{y})}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$r_{xy} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{\left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\right] \cdot \left[n \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2\right]}}$$

Korrelyasiya koeffisienti r_{xy} ning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlari $r_{xy} \in [-1;1]$ oraliqqa tegishli. r_{xy} ning $-1 \le r_{xy} \prec 0$ oraliqdagi qiymatlari chiziqli teskari o‘zaro bog‘liqliklarni va $0 \le r_{xy} \le 1$ oraliqdagi qiymatlari esa chiziqli to‘g‘ri o‘zaro bog‘liqliklarni xarakterlaydi.

r_{xy} ning absolyut qiymati o‘sib borishi bilan chiziqli korrelyasion bog‘lanish zichlanib boradi va $|r_{xy}| = 1$ funksional bog‘lanishga aylanadi. Shunday qilib, *x* va *y* - o‘rtacha arifmetik qiymatlari σ_x va σ_y ularga mos o‘rtacha kvadratik chetlanishlari bo‘lsa, unda bog‘liqlik miqdori -xususiy korrelyasiya koeffisienti r_{xy} ni hisoblash mumkin. Ayni paytda bog‘lanish qonuniyatini aks ettiruvchi va bog‘lanish chizig‘ini yasashga imkon beruvchi regressiya funksiyasini topish mumkin.

Ayrim hollarda korrelyasiyaning indeksi va koeffisientidan tashqari determinasiya koeffisienti deb ataluvchi

$$d = r^2 = r^2{}_{xy}$$

ko‘rsatkich ham hisoblanadi. Determinasiya koeffisienti natija- viy ko‘rsatkich va variasiyaning qaysi qismi omil ko‘rsatkichlari variasiyasi bilan bog‘lanishini ko‘rsatadi.

Agar tahlil ta’sir qilayotgan omil qiymatining o‘zgari- shiga muvofiq hodisalar qiymati taxminan bir tekisda o‘zgari- shini ko‘rsatsa, u holda to‘g‘ri chiziqli bog‘lanish mavjudligini ko‘rsatadi. Agar bu o‘zgarish bir tekisda bo‘lmasa, unda egri chiziq- li bog‘lanish bo‘lishi ravshan.

Ikki o‘zgaruvchi *x* va *y* o‘rtasidagi bog‘lanish zichligini umumiy baholashda korrelyasiya indeksidan foydalaniladi:

$$R_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{xy}^2}} \le 1$$

bu erda: $\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$

natijaviy ko‘rsatkich dispersiyasi:

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

Ushbu kattalik esa $y = a_0 + a_1 \cdot x$ ni hisoblashda qo‘yilgan o‘rtacha kvadratik xatosi-qoldiq dispersiya. Bog‘liqlik barqarorligi (ishonchliligi) koeffisienti quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$$

Eng kichik kvadratlar (EKK) usulining analitik talqini. Tabiatning ko‘p hodisalarini, iqtisodiy-ijtimoiy jarayonlarni o‘rganishda, tabiiy fanlarda, murakkab inshootlarni loyihalashtirishda iqtisodiy optimal modellashtirishda o‘tkazilgan sinovlar asosida to‘plangan ma’lumotlar bo‘yicha tuzilgan empirik formulalardan foy dalaniladi.

Empirik formulalarni hosil qilishning eng samarali usul- laridan biri – bu eng kichik kvadratlar (EKK) usulidir. EKK usuli funksiyalarni ekstremumga tekshirishda va noma’lum funksiyalarni approksimasiyalash (tekislash) bilan tuzishda samarali qo‘llaniladi.

Mazkur usulning matnini ikkita x va y o‘zgaruvchilarning bog‘lanishiga nisbatan keltiramiz.

Faraz qilaylik, o‘tkazilgan n ta kuzatuvlar natijasida x ning ketma-ket

$x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlari hosil qilingan. Ushbu kuzatuvlarda y ning ham $y_1, y_2, ..., y_n$ qiymatlari topilgan. Kuzatilgan ma’lumotlar asosida quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	X_1	X_2	…	X_n
y	Y_1	Y_2	…	Y_n

Agar ushbu jadvaldagi qiymatlardan tuzilgan nuqtalar $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, …$M_n(x_n, y_n)$ tekislikda koordinatalar tizimida birorta to‘g‘ri chiziq atrofida tarqalgan bo‘lsa, unda x va y lar o‘rtasida chiziqli bog‘lanish mavjud deb faraz qilinadi, ya’ni

$y = a_0 + a_1 \cdot x$

Bu erda a_0 va a_1 lar hozircha noma'lum parametrlar. Ravshanki, $x=x_i$ da yuqoridagi formulaga asosan $a_0 + a_1 x_i$ ni hosil qilamiz va kuzatuvlar natijasida hosil qilingan jadvalda keltirilgan y_i $(i=1,n)$ qiymatlar ham mavjud. Ushbu ikkita $a_0 + a_1 x_i$ va y qiymatlarni hisoblashda ma'lum $\xi_i (i = 1, n)$ xatolikka yo'l qo'yilgan deb faraz qilaylik, ya'ni $y_i - a_0 - a_1 \cdot x_i = \xi$ Ushbu xatoliklardan quyidagi kvadratik funksionalni tuzamiz:

$$S_{(a_0 a_1)} = \sum_{i=1}^{n} (y_0 - a_0 - a_1 \cdot x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{\ 2}$$

Bunda a_0 va a_1 parametrlarni shunday tanlash kerakki ξ_i xatoliklar yig'indisining kvadrati mumkin bo'lgan eng kichik qiy- matga erishadigan bo'lsin. $S(a_0, a_1)$ ni ikkita a_0 va a_1 o'zgaruv- chilarning funksiyasi sifatida qarab, masalani funksiyaning minimumini topishga keltiramiz. Ko'p o'zgaruvchilik funksiyalar nazariyasiga asosan ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy shartlari uning barcha o'zgaruvchi- lar bo'yicha hisoblangan xususiy hosilalari nolga teng bo'lishidan foydalanib, differensiallab, tenglamalar tizimini hosil qilamiz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_0 - a_0 - a_1 \cdot x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (y_0 - a_0 - a_1 \cdot x_i) \cdot x_i = 0 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalarni qulayroq tarzda yozib olamiz:

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \end{cases}$$

Shunday qilib, noma'lum a_0 va a_1 parametrlarga nisbatan ikkita tenglamalar tizimini hosil qildik. Ushbu tenglamalar tizimi EKK usulining normal tenglamalar tizimi deb ataladi. Tenglamalar tizimini echib, noma'lum parametrlarni topamiz:

$$
\begin{cases}
a_0 = \dfrac{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2 \cdot (\sum\limits_{i=1}^{n} y_i) - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2} \\
a_1 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \cdot (\sum\limits_{i=1}^{n} y_i) - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i) \cdot (\sum\limits_{i=1}^{n} y_i)}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^2} .
\end{cases}
$$

Ushbu aniqlangan a_0 , a_1 qiymatlarni empirik $y=a_0+a_1x$ formulaga qo‘yib, qaralayotgan masala funksional bog‘lanishning eng yaxshi yaqinlashuvchi (approksimasiyalovchi) funksiyasini hosil qilamiz.

Agar x va y o‘rtasidagi bog‘lanish jarayoni ushbu

$$
y = a_0 + a_1^x
$$

ko‘rsatkichli funksiyasi bilan ifodalangan bo‘lsa, unda noma’lum parametrlar a_o va a_1

$$
\begin{cases}
n \cdot \ln a_0 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i \\
a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x^2{}_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln x_i \cdot \ln y_i
\end{cases}
$$

tenglamalar tizimini echish bilan topiladi.

Agar x va y o‘zgaruvchilar o‘rtasida giperbolik bog‘lanish

$$
y = a_0 + \frac{a_1}{x}
$$

mavjud bo‘lsa, unda uning parametrlari a_0 va a_1 lar ushbu

$$
\begin{cases}
n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln y_i \\
a_0 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i} + a_1 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{x_i^2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{x_i}
\end{cases}
$$

tenglamalar tizimidan aniqlanadi.

Agar $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$,..., $M_n(x_n, y_n)$ nuqtalar tekislikda birorta egri chiziq (parabola) atrofida tarqalgan bo‘lsa, unda approksimasiyalovchi funksiya sifatida kvadrat uchhad $y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 x^2$

ni olish mumkin.

Ushbu parabolik bog‘lanishda a_0, a_1, a_2 parametrlar

$$\begin{cases} n \cdot a_0 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x^3{}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} x^3_i + a_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x^4{}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot y_i \end{cases}$$

tenglamalar tizimini echish bilan topiladi.

Masala. Bitta maktabda choraklar va yillik baholash bo‘yicha 5 bahoga o‘qiydigan o‘quvchilarning samaradorligi quyidagi ma’lumotlar bilan xarakterlanadi:

Choraklar va yillik	1	2	3	4	5
Bir chorak yoki yillikda 5 bahoga o‘qiydigan o‘quvchilarning o‘rtacha soni	235	250	270	292	300

O‘qish samaradorligini tasvirlovchi bog‘lanishni tuzing va ushbu bog‘lanishning parametrlarini EKK usuli yordamida toping.

Echish. Masala shartlaridagi ma’lumotlarni chizma shaklida ifodalaymiz: to‘g‘ri burchakli koordinatalar tizimida absissalari chorak raqamidan va yillik va ordinatalari besh bahoga o‘qiydigan o‘quvchilar sonidan iborat (1;235), (2;250), (3;270), (4;292), (5;300) nuqtalarni yasaymiz. Besh bahoga o‘qiydigan o‘quvchilar sonining chorakdan chorakka o‘sib borishi deyarli bir xil: 250-235=15; 270-250=20; 292- 270=22; 300-292=8. Bu esa o‘qish samaradorligi chiziqli tarzda ro‘y bermoqda deb faraz qilishga asos bo‘ladi va bog‘lanish shaklini $y= a_0+a_1x$ funksiya bilan ifodalash mumkin. Buning parametrlari a_0 va a_1 ni EKK usuli yordamida topamiz, ya’ni (3.4) tenglamalar tizimini tuzamiz. Bizning misolimizda

$n = 5$, $\sum_{i=1}^{5} x_i = 15$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 1347$,

$\sum_{i=1}^{5} x_i^{\ 2} = 55$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 4213$

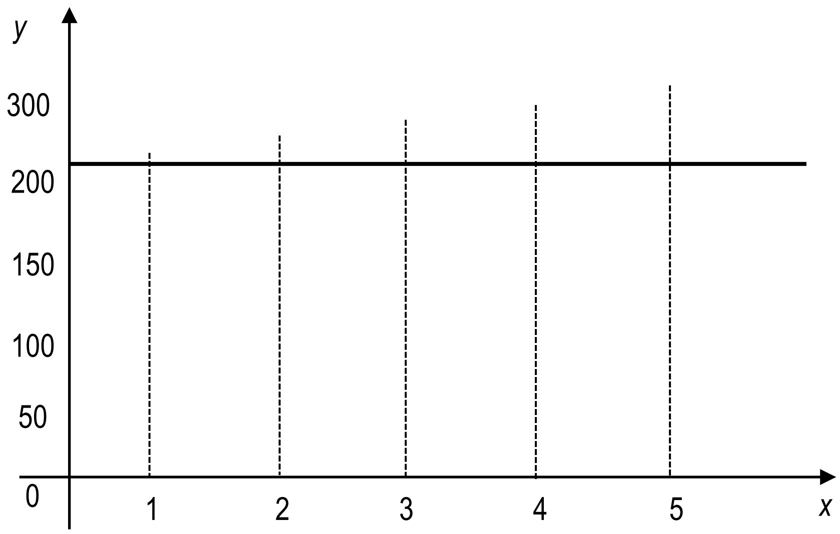
Natijada (3.4) tenglamalar tizimini tuzamiz:

$$\begin{cases} 5 \cdot a_0 + 15a_1 = 1347 \\ 15a_0 + 55a_1 \cdot = 4213 \end{cases}$$

Ushbu tenglamalar tizimini echib, hosil qilamiz:

$a_0 = 217{,}8$ $a_1 = 17{,}2$

Bunda istagan funksional bog‘lanish $y(x)$=217,8 +17,2x ko‘rinishda bo‘ladi. Ushbu to‘g‘ri chiziqning shaklini yasaymiz.(shakl)



shakl.

Topilgan funksional bog‘lanish berilgan ma’lumotlarni yaxshi akslantiradi. Masalan, $x_1 = 1$ da $y_1 = 235$ va hokazo.

Korrelyasion-regression tahlil natijalarini baholash mezonlari. Amaliy tadqiqotlarda qaralayotgan omillar o‘rtasidagi korrelyasion va regression tahlil natijalari ishonchliligini baholashda *Fisherning Z mezoni*, *Styudentning t- mezoni*, *Fisherning* F_T *mezonlaridan* foydalaniladi.

Fisherning Z mezoni. Fisher korrelyasion va regression tahlilning ishonchliligini tekshirish uchun logarifmik funksiyadan

$$Z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)(r = r_{xy})$$

foydalanishni tavsiya etgan. Bu erda *r* tanlanma taqsimot korrelyasiya koeffisienti. *Z* taqsimot kichik tanlanmalarda (tanlanma hajmi *n*>30 bo‘lganda) normal taqsimotga taqriban yaqin bo‘ladi. *Z* ning o‘rtacha kvadratik chetlanish (xatosi) quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadi:

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

O‘rtacha kvadratik xato faqat tanlanma hajmiga bog‘liq. *r* dan *Z* ga o‘tish maxsus jadvallar bo‘yicha amalga oshiriladi va korrelyasion-regression tahlil natijalari ishonchliligini tekshirish oson bo‘ladi.

Styudentning t mezoni. Mazkur mezon taqsimoti kichik tanlanmalar uchun maxsus yaratilgan. *t* taqsimot quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$t = \frac{\bar{x} - m}{\sigma_x} \cdot \sqrt{\gamma + 1}$$

bu erda: *t* - bosh o‘rtacha qiymat; γ - erkinlik darajasi soni *(n*-1*)*; $\bar{x}$, σ_x lar tegishli tanlanma to‘plam arifmetik o‘rtacha qiymati va o‘rtacha kvadratik chetlanishi.

Juftli korrelyasiya natijalarini tekshirishda *Styudentning t- taqsimoti nazariyasida* berilgan ushbu qoidadan foydalaniladi:

Berilgan α qiymatdorlik darajasida ikki omilli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning bosh korrelyasiya koeffisientining nolga tengligi haqidagi $H_1 : p = 0$

nolinchi gipotezani konkurent gipoteza bo‘lganda tekshirish uchun $H_1 : p \neq 0$ bo‘lganda tekshirish uchun

$$T = \frac{r_t - \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_t^2}}$$ formuladan foydalaniladi.

Mezonning kuzatilgan qiymatini hisoblash va Styudent taqsimotning kritik nuqtalari jadvalidan berilgan α qiymatdorlik darajasi va $K=n$-2 ozodlik darajalari soni bo‘yicha ikki tomonlama kritik sohaning $t_{kr}(\alpha,k)=t_{\alpha}$; n-2 kritik nuqtasini topish lozim.

Agar $|t_{kuz}|>t_{\alpha;n-2}$ bo‘lsa, nolinchi gipoteza rad etiladi. Bu esa x va y omillarning korrelyasiyalanganligini bildiradi.

Agar $|t_{kuz}|<t_{\alpha;n-2}$ bo‘lsa, nolinchi gipoteza rad etishga asos yo‘q. Bu holatda x va y omillarning korrelyasiyalanmaganligini bildiradi. Mazkur (7.4) formulada p - kuzatuvlar soni, r- tanlama korrelyasiya koeffisienti; $t_{\alpha;n-2}$ ning qiymati Styudent taqsimoti jadvalidan olinadi.

Styudentning ushbu mezoni ikki maqsadda qo‘llaniladi:

1. Korrelyasiya koeffisientining ahamiyatliliginitekshirish uchun
2. Qurilgan regressiya tenglamasi koeffisientlarini ahamiyatga molikligini tekshirish uchun (chiziqli $y=a_1x$; $y=a_0+a_1x$ regressiya tenglamalarida).

Agar $t_{kuz}=t_{hisob}$ va $t_{\alpha;n-2}=t_{jadval}$ lar uchun $t_{hisob} > t_{jadval}$ bo‘lsa, unda korrelyasiya koeffisientini ahamiyatli deb hisoblanadi. Bunda omillar o‘zaro zich bog‘langan va regressiya tenglamasida tekshirilayotgan omillar qatnashadi. Agar $t_{hisob} < t_{jadval}$ bo‘lsa, unda korrelyasiya koeffisienti ahamiyatsiz deb hisoblanadi va omillar o‘zaro bog‘lanmagan deyiladi, ya’ni regressiya tenglamasida bu omillar qatnashmaydi.

Chiziqsiz bog‘lanishlarda to‘plam korrelyasiyasining indeksi R ishonchliligi ham xuddi shu tarzda tekshiriladi. Korrelyasiya koeffisienti korrelyasiya indeksi R bilan almashtiriladi.

To‘plam korrelyasiya koeffisienti *R* kvadratik xatosi ushbu

$$\sigma_R = \frac{1-R^2}{\sqrt{n-K-1}}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi va *t*-mezonning jadvaldagi empirik qiymati; $t_R = \frac{R\sqrt{n-R-1}}{1-R^2}$ bilan solishtiriladi.

To‘plamli $y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n$ regressiya tenglamasi koeffisientlarini mohiyatlilik darajasini hisoblash uchun ***Styudent t -taqsimoti*** formulasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$t_{hisob} = \frac{a_i}{\sigma_{a_i}}; \quad \sigma_{a_i} = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y}_x)^2}{(n-2)\sum(x_i - \bar{x})^2}}, i = 1.n$$

bu erda: y_i - natijaviy omilning haqiqiy qiymatlari; y_x - natijaviy omilning $y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n$ formula ta’sir etuvchi omilning o‘rtacha qiymati;

$\bar{x}$ ta’sir etuvchi omilning bo‘yicha tekislangan qiymati;

x_i- ta’sir etuvchi omilning asosiy qiymatlari;

σ_{a_i} -regressiya koeffisientining standart xatoligi.

Agar $t_{hisob} > t_{jadval}$ bo‘lsa, unda regressiya tenglamasining koeffisientini ahamiyatli deb hisoblanadi.

to‘plamli korrelyasiyada a_i koeffisienti quyidagicha aniqlanadi:

$$a_i = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n-K-1}} \cdot c_i, (i = 1.n)$$

bu erda s_i - normal tenglamalar tizimi teskari matrisasining diagonal elementlaridan iborat matrisa.

Fisher F - mezoni. Ushbu mezon R.Fisher tomonidan yaratilgan bo‘lib, to‘plamli korrelyasiya koeffisientining ahamiyatliligini tekshirish uchun qo‘llaniladi

$$F=\frac{R^2\cdot(n-k)}{(1-R^2)(n-1)} \text{ yoki } F=\frac{\sum_{i=1}^{n}(y-\bar{y})\cdot(n-k)}{(y-\bar{y}_x)^2(n-1)}$$

bu erda *p* - kuzatuvlar soni; *k* - omillar soni.

Agar

$F_{hisob}> F_{\alpha;k1;k2}$ (jadval; bo‘lsa, $k_1=p-1$, $k_2=p-k$ ozodlik darajasi hamda α qiymatdorlik darajasiga ko‘ra, korrelyasiya koeffisientini ishonchli deb hisoblash mumkin.

Ikki omilli korrelyasiyada korrelyasiya indeksi *R* ishonchli deyiladi, agar

$F=\frac{R^2\cdot(n-2)}{(1-R^2)}$ statistikaning qiymati jadvaldagi $F_{\alpha;k1;k2}$ qiymatdan (bu erda $k_1=1$, $k_2=p-2$) katta bo‘lsa, ya’ni $F_{hisob}> F_{\alpha;k1;k2}$.

Tajriba ishlarida turli son va sifat belgilari orasidagi munosabatlarni o‘rganishga to‘g‘ri keladi. Belgilar orasida ikki turdagi bog‘lanish- funksional va korrelyasion (yoki statik) bog‘lanishlar mavjuddir.

Funksional bog‘lanishlarda bir o‘zgaruvchi miqdorning har qaysi qiymatiga boshqa o‘zgaruvchi miqdorning aniq bir qiymati mos keladi.Bunday bog‘lanishlar aniq fanlar-matematika, fizika va ximiyada ayniqsa yaqqol kuzatiladi.

Agar ikki x va u tasodifiy miqdor orasida shunday munosabat mavjud bo‘lsaki, x miqdorning har bir qiymatiga x ning o‘zgarishi bilan qonuniy ravishda o‘zgaradigan u miqdorning aniq taksimoti mos kelsa, x va u orasidagi bunday munosabat *statistik* yoki *korrelyasion* munosabat deyiladi.

x va u orasidagi munosabat oddiy jadval ko‘rinishida berilishi mumkin.

Ikkala holda ham x va u o‘zgaruvchilarni bog‘laydigan y=φ (x) analitik ifoda tanlash kerak. Kuzatishdan olingan analitik bog‘lanishlarni empirik bog‘lanish deymiz. Empirik bog‘lanishlarni aniqlash asosan ikki bosqichda amalga oshiriladi: empirik formulani tanlash va tanlangan formuladagi koeffisientlarni aniqlash.

Tajriba natijasida argumentning n ta qiymati uchun funksiyaning n ta mos qiymati olingan bo‘lsin: Natijalar quyidagi jadvalda yozilgan:

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Y miqdorning x miqdorga funksional bog‘liqligi y=φ (x) ni tajribada olingan natijalarga ko‘ra aniqlash talab etilsin. Ushbu funksiyaning ko‘rinishi tajribada olingan qiymatlarga mos keladigan nuqtalarning koordinatalar tekisligida qanday joylashganiga qarab aniqlanadi. Bu nuqtalarni eksperimental nuqtalar deb ataymiz. Masalan, eksperimental nuqtalar koordinatalar tekisligida rasmda tasvirlangandek joylashgan bo‘lsin. Tajriba bajarilayotganda ozgina bo‘lsada xato bo‘lishini hisobga olib, izlangan y=φ (x) funksiyani a) y=ax, b) y=ax+b v) y=ax^2+ bx + c, g) y= a+b/x fnusiyalar ko‘rinishida tanlash mumkin (boshqa hollar ham bo‘lishi mumkin). Funksiyani y=φ (x,

Ko‘pincha turmushda kuzatishlar va tajribalar orqali empirik formulalarni keltirib chiqarish mumkin.

Masalan, haroratning ko‘tarilishi yoki aksincha pasayishini, simob ustunining ko‘tarilishi yoki pasayishiga qarab bilish mumkin. Demak, harorat bilan simob ustini o‘rtasidagi chiziqli bog‘lanish borligini tajriba orqali bilish mumkin.

Bunday masalalarni echishda eng kichik kvadratlar usulidan foydalanamiz.

Eng kichik kvadratlar usuli birinchi marta 1874 yilda Gauss tomonidan ishlab chiqilgan bo‘lib, ayrim adabiyotlarda bu usul Gauss usuli deb ataladi.

Endi eng kichik kvadratlar usulining mohiyati bilan tanishib chiqamiz.

Aytaylik, x erkli o‘zgaruvchining n ta qiymati berilgan bo‘lsin. X_1, X_2, X_3, …, X_n unga mos funksiya qiymatlari Y_1, Y_2, Y_3, … , Y_n bo‘lsin.

Demak, funksiya jadval ko‘rinishda berilgan.

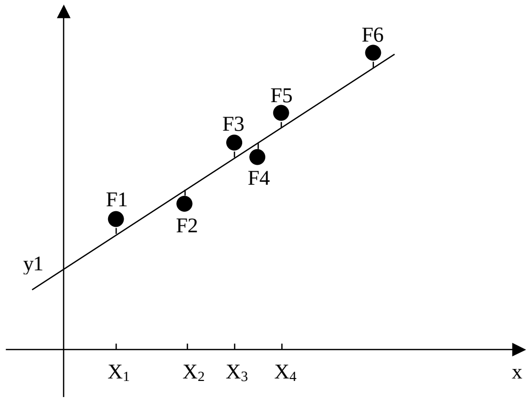
X	X_1	X_2	…	X_n
Y	Y	Y	…	Y

	1	2		n

F_1 (X_1,Y_1)

F_2 (X_2,Y_2)

Bu qiymatlarga mos nuqtalarni koordinata tekisligida tasvirlaylik.



Demak, biz ana shu tajriba nuqtalardan juda kam farq qiladigan u=ax+b funksiyani ko‘rishimiz kerak.

Matematik model chiziqli bo‘ladi.

Chizmada yasalgan to‘g‘ri chiziq bilan bir nuqta orasidagi masofalar ayirmasining kvadratlarining yig‘indisining xatolari minimum bo‘lsin:

$$Z(a;b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b))^2 \qquad \min\ z = ?$$

Ushbu shart bajarilishi uchun, no’malum koeffisentlardan olingan xususiy xosilalar nolga teng bo‘lishi kerak, ya’ni $\frac{\partial z}{\partial a} = 0;$ $\quad \frac{\partial z}{\partial b} = 0;$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i + b)) \cdot (-1) = 0$$

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} y_i + a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} \quad = 0 \end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n} = n \quad деб \quad олиб$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

sistemani a va v ga nisbatan olib, noma’lum koeffisentlarni topamiz, va natijada chiziqli *u=ax+v* funksiyani ifodasini hosil qilamiz. Endi har qanday argumentning qiymatida funksiyaning qiymatini hisoblash mumkin bo‘ladi.

Oltinchi bob bo`yicha savol va topshiriqlar

1. Hisoblash eksperimenti. Hisoblash eksperimenti bosqichlari.
2. Tajriba-sinov ishlarini olib borish.
3. Korrelyatsion analiz tushunchasi va mohiyati.
4. Matematika statistika elementlari
5. Matematik modelning samaradorligi
6. Hodisalarni matematik model orqali o‘rganish

Adabiyotlar:

1. A.A.Abduqodirov va boshqalar. hisoblash matematikasi va dasturlash. – T., ¤qituvchi. 1996 y.

2. F.B. Badalov. Optimallash nazariyasi va matematik programmalashtirish. –T. ¤qituvchi. 1989 y.

3. 3. Yu.N. Kuznesov, V.I. Kubuzov, A.B. Voloshenko. Matematicheskoe programmirovanie. –M. Vыsshaya shkola. 1980 g

4. K. Safaeva, N. Beknazarova. Operasiyalarni tekshirishning matematik usullari. 1-qism. –T. ¤qituvchi. 1984 y,

5. Abduqodirov A., Xaitov A., Shodiev R. Axborot texnologiyalari. Akademik litsey va kasb – hunar kollejlar uchun darslik. T.: “O‘zbekiston”, 2002.-

6. Guter R.S.., Ovchinskiy B.V. Elementы chislennogo analiza i matematicheskaya obrabotka rezultatov opыta. M.: Nauka, 1970.

7. Demidovich B.P., Maron I.A. Osnovы vыchislitelnoy matematiki. M.: Nauka, 1970.

8. Demidovich B.P., Maron I.A., Shuvalova E.Z. Chislennыe metodы analiza. M.: Nauka, 1968.

9. Kopchenova N.V., Maron I.A. Vыchislitelnaya matematika v primerax i zadachax. M.: Nauka, 1972.-368 s.

10. Fadeev D.K., Fadeeva V.N. Vыchislitelnыe metodы lineynoy algebrы. M.: Fizmatgiz.- 1953.

11. Ramez Elmasri, Shamkant B.Navathe. Fundamentals of Database Systems (7th Edition). Pearson. USA, 2015.

12.Boev V.D., Sыpchenko R.P., Kompyuternoe modelirovanie. — INTU-IT.RU, 2010. — 349 s.

13. Bulavin L.A., Vыgorniskiy N.V., Lebovka N.I. Kompyuternoe mode-lirovanie fizicheskix sistem. — Dolgoprudnыy: Izdatelskiy Dom “Intellekt”, 2011. – 352 c.

14. Dvoreskiy S.I., Muromsev Yu.L., Pogonin V.A. Modelirovanie si-stem. — M.: Izd. sentr “Akademiya”, 2009. — 320 s.

15. Panichev V.V., Solovev N.A. Kompyuternoe modelirovanie: uchebnoe posobie. — Orenburg: GOU OGU, 2008. -- 130 s.

16.Matematicheskoe i kompyuternoe modelirovanie: sbornik materialov IV Mejdunarodnoy nauchnoy konferensii (Omsk, 11 noyabrya2016 g.) / [otv. za vыp. I. P. Bessennыy]. – Omsk: Izd-vo Om. gos. un-ta, 2016. – 176 s.

17.Mooney, M. A. et al.Intelligent Soil Compaction Systems, National Cooperative Highway Research Program (NCHRP) Report 676 – Washington, D.C.: Transportation Research Board, 2010.

Virtual video materiallar

18.Computer modelini yaratish.
https://www.youtube.com/watch?v=oNo98ZrukQU

19.Computer model school project(class 4) | CPU MODEL | DESKTOP MODEL | MONITOR MODEL | KEYWORD MODEL.
https://www.youtube.com/watch?v=YgY6hcLcMPU

20. Cómo realizar maqueta de COMPUTADOR - PC, sus partes. https://www.youtube.com/watch?v=wxS79FXoS2o
21. Простой 3d"A"рисунок на бумаге - Нарисовать сможет каждый. https://www.youtube.com/watch?v=jr-zAzxfTVU
22. Как сделать мышь от компьютера из бумаги. Оригами компьютерная мышь. https://www.youtube.com/watch?v=l-D8nvpIg5U
23. How to make Computer miniature model with Paper & cardboard. https://www.youtube.com/watch?v=jE86teFea_I
24. Sri Triveni School...Topology in Network by 6th class student. https://www.youtube.com/watch?v=mNTH2tQCbv8
25. COMPUTER- quest n quench -school exhibition. https://www.youtube.com/watch?v=NjLA6Ja2oX0
26. LAN, MAN & WAN SCHOOL MODEL ll SMART KIDS TECH ll. https://www.youtube.com/watch?v=16SyANahONs
27. Java Project Tutorial - Make Login and Register Form Step by Step Using NetBeans And MySQL Database. https://www.youtube.com/watch?v=3vauM7axnRs
28. Основы Программирования - #1 - Логика. Алгоритмы. https://www.youtube.com/watch?v=_J-3nt9bhbI
29. Распаковка Mac Pro за 2000000 руб. Самый мощный компьютер Apple в истории! https://www.youtube.com/watch?v=fTxPRWP0rJo
30. (New 2019) Free internet WiFi 100% - New Ideas Technology 2019. https://www.youtube.com/watch?v=Tdm-7qAYPC0
31. Use Free WiFi at Home - Awesome ideas Free interne. https://www.youtube.com/watch?v=nu8ldV5F_pg.
32. Блестящая идея со старым DVD плеером! https://www.youtube.com/watch?v=cWFhpwL6jWg
33. Free internet Version 5G/6G LTE - Get Free Unlimited internet 2019. https://www.youtube.com/watch?v=GEjWcVZALms
34. New free internet 100% Working - Good idea free wifi internet 2019. https://www.youtube.com/watch?v=x9ySCPkbgKA
35. КАК РАБОТАЕТ ПРОЦЕССОР. https://www.youtube.com/watch?v=RwSLO953anc
36. УЧИМСЯ ПАЯТЬ. Как паять паяльником. https://www.youtube.com/watch?v=MKZBAqnGoZ4

AMALIY ISHLAR

Kompyuterli modellashtirish