O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA`LIM

VAZIRLIGI

M.Olimov, K.D. Ismanova, P.Karimov,

SH.Ismoilov

AMALIY MATEMATIK DASTURLAR PAKETI

(o‘quv qo‘llanma)

So’z boshi

Mamlakatimizda jismoniy sog’lom, ma`naviy yetuk, har tomonlama uyg’un va barkamol rivojlangan, mustaqil fikrlaydigan, intellektual salohiyatga, chuqur bilim va zamonaviy dunyoqarashga ega, Vatanimizning taqdiri va kelajagi uchun mas`uliyatni o’z zimmasiga olishga qodir bo’lgan yosh avlodni tarbiyalab voyaga yetkazish bugun har bir muhandis-pedagog oldidagi ulkan mas`uliyatli vazifadir.

Ayniqsa, ijtimoiy sohalarni to’liq qamrab olgan zamonaviy hisoblash mashinalaridan unumli foydalana oladigan malakali mutaxassislarga bo’lgan talab bugun yaqqol sezilmoqda. Ma`lumki, kompyuter texnologiyasi kompyuter tizimining eng asosiy elementi hisoblangan dasturlash rivojlanishining har xil bosqichlarida turlicha rol o’ynagan. Kompyuterlar quvvati va texnik vositalar rivojlanishining ortishi hamda dasturlash uslubi o’sib borishi bilan kompyuterda yechiladigan masalalar murakkabligi ham orta boshlaydi, bu esa dasturlash texnologiyasiga yuqori etibor qaratilishiga sabab bo’ladi.

Yaqin kungacha foydalanuvchi o’zining matematik masalasini yechish uchun nafaqat matematikani bilishi, balki kompyuterda ishlashni, kamida bitta dasturlash tilini bilishi va murakkab hisoblash usullarini o’zlashtirgan bo’lishi kerak bo’lar edi. Hozirda esa dasturlashni mukammal bilmaydigan yoki bilish imkoniyati mavjud bo’lmaganlar uchun shunday tayyor ilmiy dasturlar majmualari, elektron qo’llanmalar va tipik hisob-kitoblarni bajarishga mo’ljallangan dasturiy vositalar – matematik *amaliy dasturlar paketlari* (ADP) mavjud. Xususan, kompyuter algebrasining nisbatan imkoniyatli paketlari bu - *Mathematica*, *Maple*, *Matlab*, *MathCAD*, *Derive* va *Scientific WorkPlace*lardir. Bulardan birinchi ikkitasi professional matematiklar uchun mo’ljallangan bo’lib, imkoniyatlarning boyligi, ishlatishda murakkabligi bilan ajralib turadi.

MatLab dasturi matrisalar bilan ishlashga va signallarni avtomatik boshqarish hamda qayta ishlashga mo’ljallangan. MathCAD va Derive esa qo’llanilishi juda oson bo’lib, talabalarning tipik talablarini qondirishni ta`minlaydi. Bular qatoriga

Eureka paketini ham qo’shish mumkin. ushbu qo’llanmada esa hisoblash usullarining bir nechta sinflari bo’yicha amaliy masalalar MathCAD amaliy dasturlar paketi yordamida yechiladi. Ulardan oqilona va samarali foydalana olish bugungi kunda har bir inson uchun suv va havodek zarur bo’lib qolmoqda.

Respublikamiz Prezidenti I.Karimov XXI acrni ma’naviyat va ma’rifat asri, ilm-fan, madaniyat va axborotlar asri deb ta’riflar ekan, du bilan hozirgi davrning muhim belgisi va xususiyatlarini ham belgilab berganini paygash giyin emas.

O’zbekiston darhaqiqat kelajagi buyuk davlat. Bu kelajakni yaqinlashtirish, yoshlarning aqliy salohiyatiga, zamonaviy bilimlarni, fan va zamonaviy texnologiyalarning eng so’nggi yutuqlarini o’zlashtirishlariga bog’liq.

Shu bois mazkur o’quv qo’llanma kasb ta`limi “Informatika va axborot texnologiyalari” ta`lim yo’nalishida o’tiladigan asosiy fanlardan biri bo’lgan “Amaliy matematik dasturlar paketi” fanini mukammal o’rganishga bag’ishlangan bo’lib, unda MathCAD dasturining eng sodda tushunchalaridan boshlab turli xil amaliy masalarning matematik modellarini sonli usullarga asoslanib yechishga oid masalalar turkumi batafsil qaraladi hamda MathCAD dasturini imkoniyatlaridan to’la foydalanishga oid yo’riqnomalar keltiriladi.

O’quv qo’llanma oltita bobdan iborat. Qo’llanmaning birinchi bobida amaliy matematik dasturlar paketlari, MathCAD dasturi haqida umumiy ma`lumotlar keltirilib, dasturlar paketini yangi o’rganayotgan foydalanuvchi uchun ko’rsatmalar, yo’riqnomalar, dasturlash elementlari eng sodda misollar orqali batafsil bayon qilinadi.

Qo’llanmaning ikkinchi bobida amaliy masalalarda ko’p uchraydigan chiziqli va chiziqsiz tenglamalar, tenglamalar sistemasining taqribiy yechimini aniqlaydigan turli xil sonli usullar, sonli usullarning algoritmlariga mos dasturiy ta`minotlar MathCAD dasturi yordamida yaratiladi. Shuningdek chiziqli algebra masalalarini MathCADda yechish uchun matrisani tashkil qilish va bloklar bo’yicha amallar bajarish tartibi, xos son va xos vektorni aniqlash masalalari keltiriladi.

Qo’llanmaning uchinchi bobida sonli integrallash va differensiallash usullari bayon qilinadi. Sonli integrallashning har bir usuli bo’yicha amaliy dasturlar paketi va MathCAD dasturi yordami oddiy funksiyadan murakkab funksiyagacha differensiallash masalalari bayon qilinadi.

To’rtinchi bobda oddiy differensial tenglamalar va ularning sistemalari hamda ular orqali ifodalanadigan Koshi masalasini MathCADda yechish tartibi bayon qilinadi. Shuningdek chegaraviy masalalar va ularni MathCAD yordamida yechishning amaliy dasturlar paketi ishlab chiqiladi.

Qo’llanmaning beshinchi bobida xususiy hosilali differensial tenglamalar va ular orqali ifodalangan amaliy masalalarning yechish usullari, ularning dasturlari, yechimlari keltiriladi va tahlil etiladi.

O’quv qo’llanmada berilgan barcha masalalar dastlab, MathCADning standart funksiyalari yordamida hisoblangan. Har bir usul uchun ishlab chiqilgan algoritmlar asosida MathCAD dasturida standart dastur ta`minotlari yaratilgan. Ishlab chiqilgan algoritmlar va dasturning ishonchliligini baholash uchun ular yordamida «test misollari» yechib ko’rsatilgan. Natijalar vizuallashtirilib, sonli qiymatlarga mos grafik tasvirlar keltirilgan. Olingan natijalar grafiklar asosida batafsil tahlil qilib berilgan.

Usbu o’quv go’llanmani yozishda mualliflar ushbu yo’nalishdagi boshqa oliy o’quv yurtlari professor oqituvchilari va xorijiy olimlar tomonidan yaratilgan ma’nbalarni tahlil etdilar. Mualliflarning avvalgi ilmiy-tadqiqot ishlarida qaralgan bir qancha masalalar, misol uchun elastiklik nazariyasi bilan bog’liq bo’lgan amaliy masalalarning dasturiy ta’minotlarini MathCAD dasturida yechish masalalari magistrlik disertatsiyalarida ham yoritilgan.

Albatta, mazkur qo’llanma ilk bor yaratilayotganligi bois ayrim kamchilliklardan xoli bo’lmasligi mumkin. Uni yanada takommillashtirishga qaratilgan fikr- mulohazalarni mualliflar mamnuniyat bilan qabul qiladilar.

1-BOB. AMALIY MATEMATIK DASTURLAR PAKETLARI VA MATHCAD HAQIDA UMUMIY MA`LUMOTLAR

Ma`lumki, har qanday amaliy masala o‘zining qandaydir ko‘rinishdagi matematik modeliga ega. Uni yechish masalasi esa mutaxassis tomonidan hal etiladi va quyidagi vazifalar ketma-ketligida amalga oshiriladi:

1. Masalaning berilgan va qiymatlari qidirilayotgan miqdorlari, tekshirilayotgan ob`ekt, jarayonning kechishini harakterlaydigan parametrlar majmuasi aniqlanadi.
2. Fizik, mexanik, kimyoviy va boshqa qonuniyatlardan foydalanib parametrlar orasida munosabatlar o‘rnatiladi, ya`ni matematik model tuziladi.
3. Matematik modelni yechish uchun biror hisoblash usuli tanlanadi va ishchi algoritm ishlab chiqiladi.
4. Biror algoritmik tilda masalani yechish uchun dastur ta`minoti loyihalanadi yoki biror matematik dasturda hisoblash jarayoni tashkil etiladi.
5. Yaratilgan dasturni kompyuter xotirasiga kiritib, xatolar tuzatiladi, tajriba eksperimentini o‘tkaziladi va shulardan so‘ng, masalaning asosiy boshlang’ich ma`lumotlari kiritilib, natijalar olinadi. Natijalar tahlil qilinib, zarur bo‘lsa, dasturga, algoritmga tuzatishlar kiritiladi.

Bu ko‘rsatilgan vazifalar masalani yechish bosqichlari yoki hisoblash tajribasi deb ataladi. Sanab o‘tilgan bosqichlarning har birini hal qilishda mutaxassis oldida o‘ziga xos qiyinchiliklar paydo bo‘ladi. Mutaxassis nafaqat masalaning modelini tuzishni, uni yechish usulini tanlashni va algoritm ishlab chiqishni bilishi, balki biror zamonaviy dasturlash tilida mukammal dasturlar yarata olishi yoki biror matematik dasturiy vositalar yordamida qo‘yilgan masalani yecha olishi ham kerak. Oxirgi yillarda sanab o‘tilgan murakkab vazifalarni hal qilishga mo‘ljallangan izlanishlar tobora izchil olib borilmoqda. Ma`lum bir sinf masalalarini yechishga bag’ishlangan dasturiy vositalar, amaliy dasturlar paketlari yaratila boshlandi. Eng yaxshi dasturlar paketi odatda o‘z muhitidan «chiqmas»dan barcha zaruriy ishlarni, yoki ishlarning salmoqli qismini bajarish imkoniyatini beradi. Dasturlar paketi e‘tiborni masalaning asosiy tomoniga qaratib, klassik matematika texnikasi, hisoblash usullari injiqliklariga, dasturlash, operasion tizimlar buyruqlarining sirlariga e‘tibor bermaslik imkoniyatlarini beradi.

«Dasturlar paketi» tushunchasi foydalanuvchi nuqtai-nazaridan qaraganda bir maqsadga yo‘naltirilgan bir nechta dasturlar to‘plamini anglatadi. Paketga asosan qo‘yilgan masalaning alohida xususiyatlarini o‘zida saqlovchi va samarali yechimni olishga mo‘ljallangan dasturlar kiritiladi. Amaliy dasturlar paketini ishlab chiqish va undan foydalanishning bir nechta tomonlari mavjud. Asosan quyidagi ko‘rsatkichlar paketdan foydalanishda muhim ro’l o‘ynaydi:

-ma`lumotlarni kiritish va paketni ishlatishning qulayligi, masalani qo‘yishning tabiiyligi va soddaligi, matematika tiliga yaqinligi;

-agar zarur bo‘lsa dasturga yoki algoritmga to‘ldirishlar va o‘zgarishlar kiritish imkoniyatining mavjudligi;

-ma`lumotlarning tushunarliligi va mazmunliligi.

Har bir dasturni yoki dasturlar paketini yaratish qandaydir imkoniyatlarning mavjudligi, qandaydir imkoniyatlarning esa mavjud emasligidan kelib chiqqan holda qat`iy aniqlangan texnologiyaga asoslanadi. Biz ham o‘zimizning dasturiy mahsulotlarimizni yaratishni o‘zimizga xos texnologiya asosida amalga oshirishimiz mumkin.

Amaliy dasturlar paketining yuqoridagi imkoniyatlarini tahlil etib, dars jarayonida ulardan foydalanishning samarali jihatlarini quyidagicha tavsiflash mumkin:

1. Talaba dasturlash tillarining yuqori imkoniyatlaridan foydalanish malakasiga ega bo‘ladi;
2. Amaliy dasturlar paketidan foydalanganda qo‘yilgan amaliy masalaning barcha yechimlarini tahlil qilish va masalani yechishning samarali usulini tanlash imkoniyati paydo bo‘ladi;
3. Mavzu talabalar tomonidan tizimli va mantiqiy bog’langan holda o‘zlashtiriladi.
4. Amaliy dasturlar paketi dasturlar kutubxonasi sifatida keyingi ilmiy-tadqiqotlar uchun zaruriy dasturiy ta`minot zahirasi vazifasini o‘taydi;

5. Paketni keraklicha to‘ldirish va o‘zgartirish imkoniyatining mavjudligi talabaning kelgusidagi bilish faoliyatini aniq maqsadlar sari yo‘naltiradi;
6. Talabada o‘z bilimiga va amaliy masalalarni yechish qobiliyatiga bo‘lgan ishonchi ortib, unda yangi ijodiy izlanishlar uchun motivasiya paydo bo‘ladi.

Shunday qilib, har qanday masalani yechish uchun muayyan dasturlar paketidan foydalaniladi. Hozirgi davrda kelib, turli xil amaliy masalalarni yechish uchun foydalanuvchilarga mo‘ljallangan, dastur tuzishni bilishi unchalik zarur bo‘lmaganlar uchun tayyor, o‘rganish unchalik qiyin bo‘lmagan, ilmiy dasturlar kutubxonasi, elektron qo‘llanmalar va eng muhimi, standartlashtirilgan, ommaviy hisoblashlarni bajaradigan qator matematik amaliy dasturlar paketlari yaratildi.

Hozirgi paytda quyidagi matematik dasturiy tizimlar keng tarqalgan:

-MathCAD, Mat Lab (firma Math Soft, 1988 y.);

-Maple (firma Waterloo Maple Software, Kanada);

-Mathematica (firma Wolfram Research);

-Scientific Work Place (SWP) (firma Waterloo Maple Software, Kanada).

Bu dasturiy tizimlar turli xil imkoniyatlarga ega.

Quyida matematik dasturiy tizimlarning eng soddasi va foydalanishga qulayi hisoblangan MathCAD dasturiy ta`minoti haqida qisqacha to‘xtab o‘tamiz.

MathCAD xilma-xil matematik masalalarni yechish uchun mo‘ljallangan integrallashgan muhitdir. MathCAD quyidagi funksional komponentlardan iborat:

- yaxshi o‘ylangan, koordinasiyalashgan menyular tizimi, kontekst menyu;
- qurollar paneli majmuasi;
- matn muharriri;
- formulalar tahrirlashichi;
- grafik tahrirlashich, jumladan uch ulchovli grafiklar yaratish imkoniyatini beradi;
- hisoblash tizimi, bu tizim sonli va simvolli hisoblashlar imkoniyatini beradi;
- shablonlar majmuasi, ular yordamida formulalar, indekslar, integral, hosila, matrisa, determinant va hokazo belgilarni qulay kiritish mumkin;

- matematik ifodalarni to‘g’ri yozilishini nazorat qiluvchi va noto‘g’riligi haqida, uni tuzatish haqida ko‘rsatma beruvchi yordam sistemasi;
- natijalarni chiqarish sistemasi;
- alfavitli, indeksli yordam tizimi.

MathCAD menyusi ierarxik tuzilishga ega: bosh menyu (gorizontal menyu) gorizontal menyu punktlariga bog’langan osiluvchi vertikal menyu va uning qo‘shimcha menyulari, qalqib chiquvchi menyu, kontekst menyu.

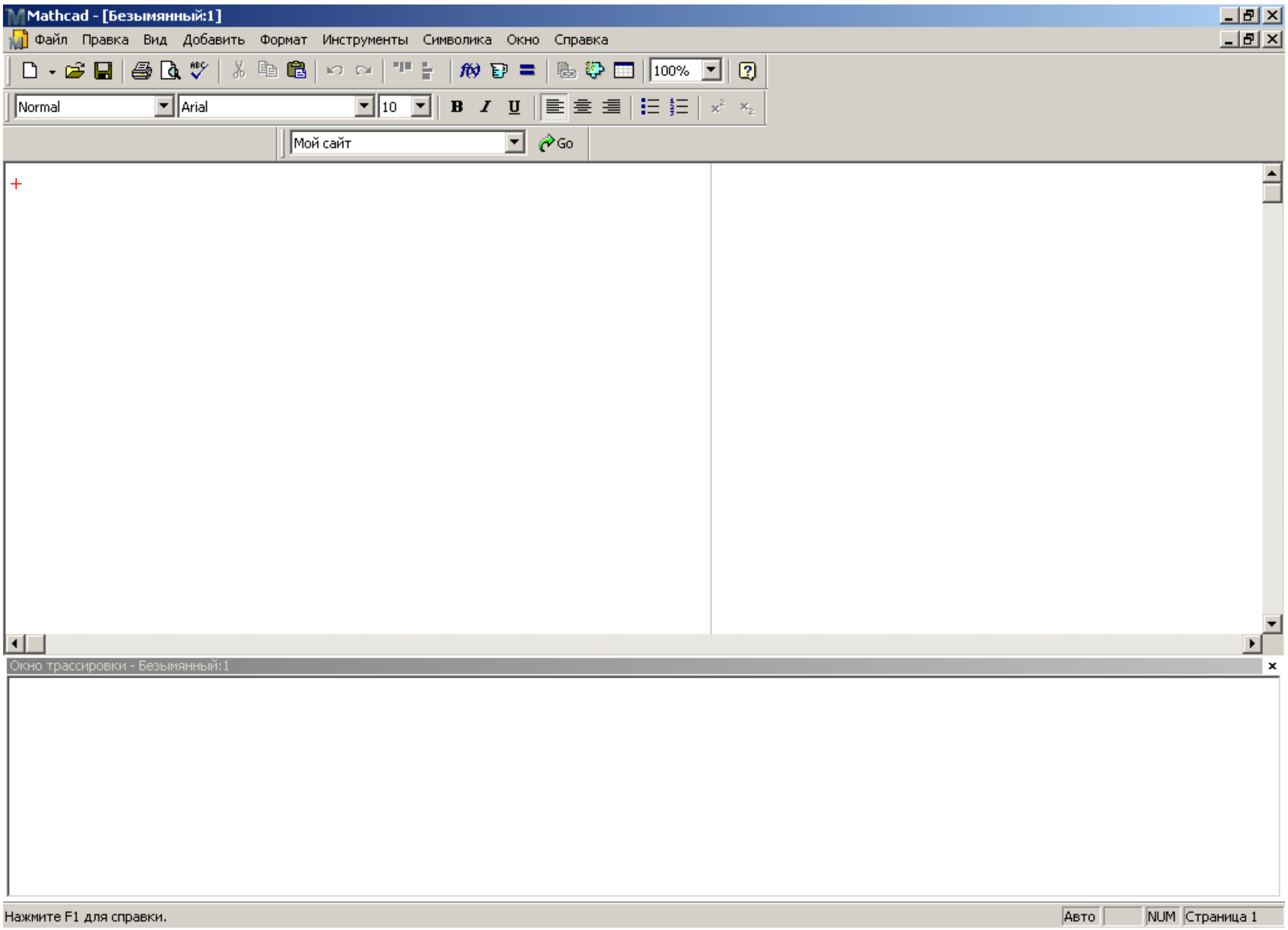
MathCAD dasturiy tizimi Math Soft Inc. firmasi tomonidan kompakt disklarda chiqariladi. Uni standart usullar bilan installyasiya qilinadi. MathCAD dasturi o’rnatilgach, Windows OSning bosh menyusida qayd etiladi. *Fayl, pravka, vid, vstavka, format, okno, pomoh* menyulari har qanday Windows dasturlarining menyulari uchun standart vazifalarni bajaradi.

1-§. MathCAD dasturining interfeysi

O’quv modullari

Matematik ifoda, operator, operanda, o’zgaruvchi, indeksli o’zgaruvchi.

MathCAD dasturining amaliy dasturlar paketi mavjud matematik paketlar ichida eng ommalashgani bo’lib, har qanday hisob-kitob va belgilash ishlarini bajarish imkoniyatiga egadir. Bundan tashqari muhandislik-masalalarini yechish va grafigini chizish hamda mantiqiy mulohazalar chiqarish uchun eng qulay vosita hisoblanadi. MathCAD dasturining ishchi oynasi quyidagi interfeysga ega:



1.1-rasm.

Matematik ifodalarni yoki matnni yozish maqsadida belgi **(+)** foydalanuvchi uchun qulaylik tug'diradi. Kursorni **←,↑,→,↓** belgilar yoki sichqoncha yordamida **o'nga, chapga** , **yuqoriga** va **pastga** surish mumkin. Ishchi oynaga kiritiladigan barcha belgilar **(+)** belgisi turgan joydan boshlab yoziladi.

MathCADda ifodalarni tahrirlash. Matematik ifodalarni kiritishda asosiy vazifani kursor yordamida amalga oshiriladi. Kursorni boshqarish **Insert**, **Probel** ← **,**→ tugmachalari orqali bajariladi.

Operator oxirgi belgilangan operanda orqali ifodalanadi yoki **probel** yordamida kursorni o'ng └ va chap ┘ qismini **Insert**dan foydalangan holda kiritish mumkin. Agar kursor _│ ko'rinishda bo'lsa ← (**Backspace**) va aksincha **_** bo'lsa, **Delete** klavishlari yordamida ajratilgan operandalarni olib tashlanadi.

Misol: Quyidagi ifoda hisoblansin.

$$\frac{2.3}{4.78+21.687}-8$$

MathCAD ishchi oynasiga kiritish uchun quyidagi ishlar ketma-ket bajariladi:

1. 2.3 (klaviaturadan kiritiladi).
2. **“/”** belgi tanlanadi.
3. 4.78 kiritilsa MathCAD oynasida $\boxed{\frac{2.3}{4.78}}$ hosil bo’ladi.
4. / belgisi tanlanadi.
5. 21.687 kiritilsa MathCAD oynasida $\boxed{\frac{2.3}{4.78+21.687}}$ hosil bo’ladi.
6. Ayirish amali hamma ifodaga taa`luqlidir. Shu bois, navbatdagi operandani birlashtirish uchun probelni bir marotaba bosiladi

$$\boxed{\frac{2.3}{4.78+21.687}}$$

7. Klaviaturadan ayirish (-) amali tanlanadi**.** **8** soni kiritiladi.
8. Natijani olish uchun **(/)** belgisi klaviaturadan tanlanadi.

Natijada MathCADning ishchi oynasida quyidagi ifodalar hosil bo’ladi.

$$\boxed{\frac{2.3}{4.78+21.687}-8=-7.913}$$

O’zgaruvchilarni kiritish. MathCAD ishchi oynasida o’zgaruvchi ifodalarni kiritish uchun quyidagi ishlarni amalga oshirish kerak.

1. O’zgaruvchi nomini kiritish
2. “ **:=** ” belgisini kiritish.

Misol: $x := 5.32 \qquad y := \frac{\pi}{12}$

MathCADning ishchi oynasida o’zgaruvchi nomlarini **lotin** va **grek** harflari, sonlar va simvollar (**1...9** gacha raqamlar va **! ” ,№ , ; , %, :, ?, *, (,),** kabi) dan foydalanish mumkin.

MathCAD ishchi oynasida hosil bo’lgan ifodalarni **yuqoridan pastga** va **chapdan o’ngga** aniq ketma-ketlikda o’qiydi.

MathCAD oynasida kiritilayotgan ifodaning qiymatini ko’rish zaruriyati paydo bo’lsa, = bosiladi (**u= …**). Agar o’zgaruvchi aniqlanmasdan turib = belgisi kiritilsa, **y:=** ga almashtiriladi.

Indeksli o’zgaruvchidan foydalanish. Indeksni MathCAD oynasida klaviatura yordamida kiritish uchun xususan, $x_{\min}$ ni hosil qilish uchun birinchidan noma`lum *x* kiritiladi, so’ngra (.) belgisini tanlab min so’zini indeksga yoziladi.

Bundan tashqari o’zgaruvchini qandaydir oraliqda o’zgarib borishini MathCAD oynasida quyidagicha tasvirlanadi.

Misol: o’zgaruvchi **-3** dan **2** gacha **0.25** qadam bilan o’zgarib borsin:

1. O’zgaruvchi qadamlar soni **h** ni kiritiladi.
2. Boshlang’ich qiymat **-3** kiritish.
3. Vergul yordamida **,-2.75** kiritish
4. Ikki nuqtani **(..)** hosil qilish uchun **(;)** ni klaviaturadan kiritish.
5. Oxirgi qiymat ikkini kiritish.
6. **h=** va **Enter**ni tanlash natijasida quyidagi qiymatlar jadvali kelib chiqadi.

$h := -3, -2.75 .. 2$

$h =$

-3
-2.75
-2.5
-2.25
-2
-1.75
-1.5
-1.25
-1
-0.75
-0.5
-0.25
0
0.25
0.5
...

Shunday qilib yuqorida MathCAD dasturining interfeysi, uning ayrim imkoniyatlari, sodda amallar va ifodalarni hisoblash jarayoni, tahrirlash usullari bayon qilindi. Keyingi mavzularda dasturlar paketining qolgan imkoniyatlari va standart funksiyalarini qo'llanilishi haqida kengroq ma`lumot beriladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

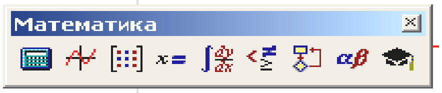
1. Qanday zamonaviy matematik dasturiy tizimlarni bilasiz?
2. MathCAD dasturi qanday funksional komponentlarga ega?
3. MathCAD dasturi qanday ierarxik tuzilishga ega?
4. MathCAD dasturining eng so'nggi variantlari qaysilar va u qanday imkoniyatlarni o'zida mujassamlashtirgan?
5. "Har qanday matematik masala MathCAD dasturida yechilishi mumkin" degan fikrga qo'shilasizmi?
6. Agar sizda imkoniyat bo'lsa qanday matematik dasturlar tizimini yaratgan bo'lardingiz?

2-§. MathCAD dasturining panellari

O’quv modullari

Maxsus paketlar, matematika, kal`kulyator, ischislenie, limit, integrallar hisobi, mantiqiy amallar, matrisa, grafika.

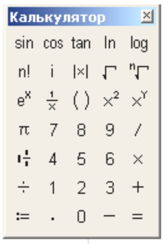
MathCADda formulalar maxsus panellar yordamida kiritiladi. “Математика” paneli **Вид/Панели** инструментов/Математическая bo’limlarini tanlash orqali hosil qilinadi. Natijada quyidagi 1.2-rasm hosil bo’ladi.



1.2-rasm.

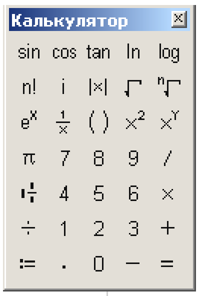
Undagi mavjud barcha asboblar alohida funksiyalarni bajaruvchi elementlardan tashkil topgan.

Oddiy hisoblash panelini hosil qilish uchun  bo’limi faollashtiriladi va elementar oddiy funksiyalar hamda muayyan simvollar kiritiluvchi “**Калъкулятор**” paneli hosil bo’ladi.



1.3-rasm.

Kalkulyator oynasidagi funksiyalarni hisoblash uchun kerakli funksiya turi tanlanadi va o’zgaruvchi qora marker o’rniga kiritiladi.



 - faktorial

 - n-darajali ildiz

 - absolyut qiymat

$\blacksquare^{\blacksquare}$ - darajaga ko'tarish

$\ln(\blacksquare)$ - natural logarifm

$\blacksquare := \blacksquare$ - yuborish operatori

Kalkulyator oynasi MathCADning barcha funsiyalarini o'z ichiga olmaydi. Biroq mavjud funksiyalar yordamida qolgan barcha murakkab funksiyalar aniqlanishi mumkin.

Funksiyalar bir o'zgaruvchili yoki ko'p o'zgaruvchili ko'rinishda bo'lishi mumkin. Har qanday holatda o'zgaruvchilar funksiya argumenti sifatida ko'rsatiladi va ular funksiya tarkibiga matematik ifodalar bilan birga kiritiladi.

Misol:

$$g(x) := \sin(x) + \cos(x)$$

$$f(x, y, z) := \sin(x) + \cos\left(z \cdot y^2\right)$$

MathCADda funksiyaning qiymatini hisoblash uchun quyidagi misolni qaraymiz.

$$gg(x, y) := \sin(x \cdot \cos(y))$$

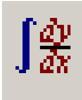
Agar funksiyaning qiymatlari **argument sifatida kiritilsa**, va **= belgisi tanlansa**, berilgan argumentlarga mos funksiyaning qiymati namoyon bo'ladi.

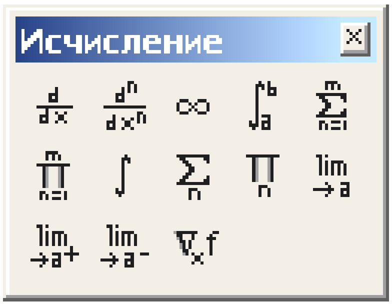
$$gg\left(\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{11}\right) = 0.417$$

Demak, ixtiyoriy sondagi o'zgaruvchilar uchun ham funksiyaning qiymati shu tartibda hisoblanadi.

MathCADda grek harflarini kiritish uchun  tugmasidan foydalaniladi. Natijada quyidagi "**Греческая**" oynasi hosil bo'ladi:

1.4-rasm.

Hisoblash operatorlarini bajarish uchun qo'llaniladigan "**Исчисление(Калкулус)** "darchasi  paneli yordamida hosil qilinadi.



1.5-rasm.

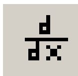
Ushbu oyna yordamida quyidagi hisoblash ishlarini bajarish mumkin.
MathCAD dasturida odatda natijalar 2 xil usulda olinadi:

1. Simvolli(analitik) natijalar.
2. Sonli natijalar.

Simvolik (formulali) natijani olish uchun → belgisidan, sonli natijani olish uchun **Ctr +** tugmachasidan foydalaniladi.

Quyida funksiyaning differensialini analitik hisoblash uchun bir nechta misollar qaraladi:

1-misol:

$g1(x) := \sin\left(x^3\right)$ funksiyaning differensialini hisoblash uchun simvolli (→) belgisidan foydalaniladi. Buning uchun  bo'limi tanlanib, differensial osti funksiyaning qiymati va → belgi kiritiladi

$$\frac{d}{dx}g1(x) \rightarrow 3\cdot x^2\cdot\cos\left(x^3\right)$$

2-misol:

$f1(x) := \sin\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)$ murakkab funksiyaning differensialini hisoblash uchun yangi o'zgaruvchi kiritiladi, ya`ni:

$$f2(x) := \frac{d}{dx} f1(x)$$

deb belgilab olinsa, f2(x) va → belgini tanlash orqali

$$f2(x) \rightarrow -\frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)\cdot\cos\left(\cos\left(\sqrt{x}\right)\right)}{2\cdot\sqrt{x}}$$

murakkab funksiyaning differensialini analitik ko’rinishda hosil qilish mumkin.

Differensial funksiyani ixtiyoriy nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun esa oddiy tenglikdan foydalaniladi. Xususan, yuqoridagi funksiyaning aniq nuqtadagi qiymatini = belgisi yordamida hosil qilish mumkin: $f2(0.5) = -0.333$

Agar differensial belgisi ostiga differensiallanuvchi funksiyaning ifodasini to’g’ridan-to’g’ri kiritilsa va simvolli belgisi tanlansa, natija analitik ko’rinishda hosil bo’ladi:

$$\frac{d}{dx} e^{\sin\left(x^2\right)} \rightarrow 2\cdot x\cdot\cos\left(x^2\right)\cdot e^{\sin\left(x^2\right)}$$

Yuqori tartibli differensiallash amallari ham shu tarzda bajariladi. Faqat bunda har bir differensiallash tartibi differensiallash belgisi ostiga kiritiladi. Masalan, quyida **1-,2-,3- tartibli differensiallash** uchun mos funksiyalar differensiallarini analitik ko’rinishda hisoblash natijalari keltirilgan. Buning uchun “**Исчисление**” bo’limidagi $\frac{d^n}{dx^n}$ funksiyasidan foydalaniladi.

$$\frac{d^1}{dx^1}\sin\left(x^3\right) \rightarrow 3\cdot x^2\cdot\cos\left(x^3\right)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin\left(x^3\right) \rightarrow 6\cdot x\cdot\cos\left(x^3\right) - 9\cdot x^4\cdot\sin\left(x^3\right)$$

$$\frac{d^3}{dx^3}\sin\left(x^3\right) \rightarrow 6\cdot\cos\left(x^3\right) - 27\cdot x^6\cdot\cos\left(x^3\right) - 54\cdot x^3\cdot\sin\left(x^3\right)$$

Quyidagi misolda dastlab differensiallash funksiyasi belgilab olingan va → belgisidan foydalanib, analitik yechim va uning ixtiyoriy nuqtadagi qiymati hisoblangan hol keltirilgan.

$$ff(x) := \cos(\sin(x))$$

$$ff2(x) := \frac{d^2}{dx^2} ff(x)$$

$$ff2(x) \rightarrow \sin(x) \cdot \sin(\sin(x)) - \cos(x)^2 \cdot \cos(\sin(x))$$

$$ff2\left(\frac{\pi}{5}\right) = -0.219$$

MathCAD yordamida ixtiyoriy sonli argumentli (0 dan to 5gacha) skalyar funksiyalar hosilasini hisoblash mumkin. Bunda funksiya va argumentlar haqiqiy yoki kompleks sonlar bo'lishi mumkin. Funksiyani uning singulyarligiga yaqin nuqtalarida differensiallash mumkin emas.

Singulyar-maxsus nuqta bo'lib, unda funsiyani qiymati cheksizlikka intiladi yoki aniqlanmagan bo'ladi.

MathCADning hisoblash jarayonlari sonli differensiallash natijalarini yuqori aniqligini ta`minlaydi. Lekin, eng muhimi, belgili differensiallash ishini kuzatilsa, u foydalanuvchini murakkab funksiyalarni qayta-qayta differensiallash kabi og'ir qo'l mehnatidan ozod etadi. Belgili differensiallash juda ko'plab analitik berilgan funksiyalar ustida bajariladi. Quyida ularni tartib bilan qarab chiqiladi.

Hosila. Berilgan f(x) funksiyani ayrim nuqtalardagi hosilasini hisoblash uchun:

- Hosila hisoblanadigan x nuqtani aniqlash. Masalan x:=1.
- Matematik analiz panelidagi $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$ **Derivative** (Hosila) tugmasi yoki tugmadondan so'roq belgisini **Shift+?** yordamida differensiallash operatorini kiritish.
- Hosil bo'lgan to'ldirish joyida **x** ga bog'liq bo'lgan **f(x**) funksiyani va **x** argument ismini kiritish.

- Natijani olish uchun sonli hisoblash operatori tenglik belgisi = ni yoki belgili hisoblash operatori $\rightarrow$ ni kiritish.

Masalan: $f(x) = \sin x \ln x$ funksiya hosilash kerak.

$x := 0.01$ /argumentning xususiy qiymati kiritiladi/

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)\cdot\ln(x)) \rightarrow -3.604956595980940$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)\cdot\ln(x)) = -3.605$$

Olingan natijalarning ikki xil ekanligi hisoblash jarayonining turlicha (belgili va simvolli) hamda turli xil ishonchlilik darajasida aniqlanganligidadir.

Sonli hisoblashlarni amalga oshirishda albatta differensiallash argumenti qiymatini oldindan kiritishni unutmaslik zarur. Agar argument kiritilmasa, u holda differensiallash natijasi analitik ko'rinishda bo'ladi.

MathCAD yordamida oddiy funksiyalardan tortib to murakkab funksiyalargacha hosilaning qiymatini analitik ko'rinishda olish mumkin.

Masalan:

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)\cdot\ln(x)) \rightarrow \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\cdot\ln(x)$$

Natija yuqorida berilgan murakkab funksiyaning hosilasini analitik ko'rinishda hosil qiladi.

Birmuncha murakkabroq xususan, kasrli ifodalar quyidagicha murakkab funksiyalar ko'rinishida bo'ladi.

$$f(x) = \frac{5\sin 2x}{\cos x^2}$$

funksiyasi hosilasi:

$$\frac{d}{dx}\frac{5\cdot\sin(2\cdot x)}{\cos\left(x^2\right)} \rightarrow \frac{10\cdot\cos(2\cdot x)}{\cos\left(x^2\right)} + \frac{10\cdot x\cdot\sin(2\cdot x)\cdot\sin\left(x^2\right)}{\cos\left(x^2\right)^2}$$

Agar funksiyalarning analitik ifodasi oldindan aniqlanadigan bo'lsa, funksiyaning qiymatini := belgisidan foydalanib kiritiladi va differensial belgisi ostida funksiyaning nomi kiritiladi.

$$f(x) := \sin(x)\cdot\ln(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \frac{\sin(x)}{x} + \cos(x)\cdot\ln(x)$$

Parametrga bog'liq bo'lgan funksiyalarning hosilasi parametrda berilgan funksiyaning qiymatlari orqali quyi darajada aniqlanadi:

$$y'(x) = \frac{\rho'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y_i}{x_i}$$

Misol: Bu yerda $y(x)$ funksiyaning parametrik tenglamalari $x = \varphi(t)$ va $y = \rho(t)$ ga teng.

$x(t) := 3\cdot\cos\left(t^3\right)$ $\quad y(t) := 3\cdot\sin\left(t^3\right)$ ko'rinishda berilgan $y(x)$ funksiyani differensiallash natijasi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\left(\frac{d}{dt}y(t)\right)}{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)} \rightarrow -\frac{\cos\left(t^3\right)}{\sin\left(t^3\right)}$$

MathCAD oshkormas holda berilgan $f(x, y)$ funksiyaning ham hosilasini topish imkonini beradi.

Bu yerda shuni hisobga olish kerakki, y ham x ning funksiyasi bo'lib, natijada $y'(x)$ ham qatnashadi. Shuning uchun ham natijaviy funksiya x va $y(x)$ lar orqali ifodalanadi.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y(x)}{3} - \frac{x^2}{5} - 1\right) \rightarrow \frac{\frac{d}{dx}y(x)}{3} - \frac{2\cdot x}{5}$$

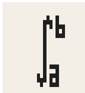
$$f(x) := \frac{d}{dx}(\sin(y(x)) - \ln(x)) \rightarrow \frac{d}{dx}y(x)\cdot\cos(y(x)) - \frac{1}{x}$$

MathCAD yordamida $[f(x)]^{g(x)}$ kabi funksiyalarning hosilasini hisoblash mumkin. Bu darajali murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash amaliga o’xshaydi.

$$\frac{d}{dx}x^{x} \rightarrow x \cdot x^{x-1} + x^{x} \cdot \ln(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x))^{\cos(x)} \rightarrow \cos(x)^{2} \cdot \sin(x)^{\cos(x)-1} - \sin(x) \cdot \sin(x)^{\cos(x)} \cdot \ln(\sin(x))$$

Hosilani sonli hisoblashda MathCAD dasturi juda murakkab verguldan so’ng 7-8 ta belgigacha aniqlikdagi qiymatni oluvchi algoritmni qo’llaydi. Bu algoritm Ridder usuli deb aytiladi.

Aniq integralni hisoblash uchun  operatoridan foydalaniladi.

Bunda ham, aniq integralning qiymatini sonli hisoblash uchun **Ctrl+** belgilaridan, simvolli(formulali) natijani olish uchun → belgilari ishlatiladi.

1-misol.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\,dx = 0.134$$

2-misol.

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\,dx \rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Natijalar tanlanishiga qarab sonli(oddiy tenglik yordamida) yoki simvolli(→ belgisini tanlash orqali) ko’rinishida ekanligi ko’rinib turibdi.

Aniqmas integralni hisoblash uchun  operatoridan foydalaniladi. Bu holda qo’llanilgan → simvolli belgisi aniqmas integralning qiymatini analitik ko’rinishda hosil qilish imkonini beradi:

1-misol.

$$\int x \cdot \sin\left(x^2\right) dx \rightarrow -\frac{\cos\left(x^2\right)}{2}$$

2-misol.

$$\int \sin(x)^3 dx \rightarrow \frac{\cos(3 \cdot x)}{12} - \frac{3 \cdot \cos(x)}{4}$$

Yig'indini hisoblash uchun  operatoridan (**Ctrl+Shift+4**) foydalaniladi: Bu holda yig'indining chegaraviy qiymatlari va yig'indi osti funksiyani kiritish hamda → belgisini yoki q ishorasini tanlash yetarli.

1-**misol.**

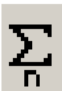
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{\pi^2}{6}$$

2-misol.

$$\sum_{k=0}^{10} \sin(k) = 1.411$$

3-misol.

$$\sum_{k=1}^{5} k! \rightarrow 153$$

operatoridan (**Shift+4**) foydalanishda yig'indini hisoblash uchun yig'indi osti parametrning barcha qiymatlari tartib bilan kiritiladi. Natijada yig'indi osti funksiyaga mos barcha qo'shiluvchilar yig'indisi hisoblanadi.

1-misol.

$$k := 1, 2..500 \qquad \sum_{k} \frac{1}{k^3} = 1.202$$

2-misol.

$$k := 1, 2 .. 500 \qquad \sum_{k} \frac{1}{k^2} = 1.643$$

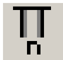
Ko’paytmani hisoblash uchun  operatoridan (Ctrl+Shift+3) foydalaniladi.

1-misol.

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-i)\cdot\Gamma(1+i)}$$

2-misol.

$$\prod_{m=1}^{20} \left(1 + \frac{1}{m^3}\right) \rightarrow \frac{14936861968691671606597909}{6158757858272870400000000} = 2.425$$

Ko’paytmaning qiymatini hisoblashda  operatoridan **(Shift+4)** foydalaniladi. Buning uchun ko’paytuvchilarning sonini ifodalovchi parametrning barcha qiymatlari ketma-ket kiritiladi. Natijada ko’paytirish belgisi ostidagi funksiyaning parametrlarga mos ko’paytmalarining sonli natijalari hosil qilinadi.

1-misol.

$$p := 1, 2 .. 10 \qquad \prod_{p} \left(2 - \frac{1}{p^2}\right) = 384.673$$

2-misol.

$$p := 1, 2 .. 10 \qquad \prod_{p} \sqrt{p} = 1.905 \times 10^3$$

3-misol.

$$u := 1, 2 .. 150 \qquad \prod_{u} \sqrt[2u]{u} = 517.263$$

Limitni hisoblash uchun  operatoridan (Ctrl+L) foydalaniladi. Buning uchun limit osti funksiyasi parametrning muayyan qiymatga intilgandagi limiti simvolli → belgisi yordamida hisoblanadi va sonli natijalar olinadi.

1-misol.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \to 0$$

2-misol.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(n^2 + 5n - 7\right)}{5n^2 + 16n - 100} \to \frac{1}{5}$$

3-misol.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$$

4-misol.

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) \to \text{undefined}$$

(aniqmas)

O’ng va chap tomonli limitlar ham xuddi shu yo’sinda hisoblanadi.

O’ng tomondan limitni hisoblash uchun  operatoridan (Ctrl+Shift+A) foydalaniladi.

1-misol.

$$\lim_{n \to \infty^+} \frac{1}{n^2} \to 0$$

2-misol.

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) \to \frac{\pi}{2}$$

Chap tomondan limitni hisoblash uchun esa  operatoridan (Ctrl+Shift+B)

1-misol.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} \to 1$$

2-misol.

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{atan}\left(\frac{1}{x}\right) \to -\frac{\pi}{2}$$

Mantiqiy ifodalar va ular yordamidagi arifmetik amallarni bajarish uchun **Boolean** (логический) panelidan foydalaniladi. Ushbu panelni ishga tushirish uchun matematika panelidan tugmani tanlash kifoya.

1.6-rasm.

Panelda mavjud bo'lgan quyidagi munosabat belgilari: **>, ?, <, ? , q, ?** ikkita mantiqiy ifodani aniqlab beradi: **1** (**rost**) yoki **0** (**yolg'on**).

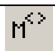
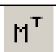
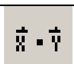
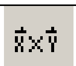
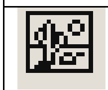
MathCADda mantiqiy operandalar quyidagi operatorlar orqali aniqlanadi:

- I (And) $\wedge$;
- ILI (or) $\vee$;
- Yo'qotish ILI (Exclusive or) $\oplus$
- Bekor qilish (NOT) $\neg$

Matrisa va vektorlar bilan amallar bajarish uchun **Matrix** (Матрица) panelidan foydalaniladi. Ushbu panelni ishga tushirish uchun Математика panelidan bo'limi tanlanadi.

1.7-rasm.

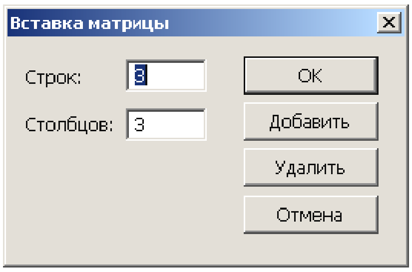
Natijada bir nechta amallarni bajarish imkonini beruvchi paneldagi matrisa va vektor ustida quyidagi amallar maxsus tugmachalar yordamida bajariladi.

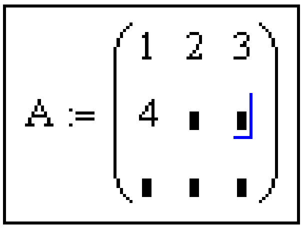
	Matrisaning o’lchamini aniqlash
	Massiv elementini kiritish
	Teskari matrisani hisoblash: A matrisa uchun uning teskarisi A^{-1} bo’ladi
	Matrisaning determinantini hisoblash : $\lvert A \rvert$=detA;
	Vektor operatori (matrisa va vektor bilan bajariladigan amallar): Agar V={v_{ij}} bo’lsa, u holda f(V)={f(v_{ij})} bo’ladi, yoki agar A={a_{ij}} va B={b_{ij}} bo’lsa, u holda AB={a_{ij} b_{ij} } bo’ladi.
	Matrisaning ustunini aniqlash; $A^{<j>}$- bu yerda j –matrisa ustuni
	Matrisani transponirlash: A= {a_{ij}}, A^t ={a_{ji}};
	Turli xil o’zgaruvchilarni aniqlash: j=m,k,..,n;
	Vektorni skalyar ko’paytmasini hisoblash: Agar x(x_1, x_2, … x_n) va y (y_1, y_2, … y_n) bo’lsa, $x*y=x_1*y_1+x_2*y_2+....+x_n*y_n$ bo’ladi.
	Vektorlar ko’paytmasi: Agar x(x_1, x_2, x_3) va y (y_1, y_2,y_3) bo’lsa, ko’paytma $x*y=(x_2*y_3-x_3*y_2, x_3*y_1-x_1*y_3, x_1*y_2-x_2*y_1)$ tartibda hisoblanadi.
	Vektorlar komponentlarining yig’indisini hisoblash. Agar x(x_1, x_2, … x_n) bo’lsa, $\sum x=x_1+x_2+...+x_n$;
	Vizuallashgan raqamli ma`lumotlarni matrisa ko’rinishida saqlash: matrisa ko’rinishidagi rasmlarni qayta ishlash, koordinata nuqtalarini kiritish; skaner yordamida rasmlarni xotiraga olish, raqamli fotoapparatlar, grafiklarni to’g’rilash va boshqa amallar shu panelda bajariladi.

Shunday qilib, matrisani kiritish uchun MathCAD dasturining ishchi oynasida quyidagi ishlar ketma-ket bajariladi:

1. Matrisaning nomini kiritib, (:) belgisi yordamida Matrix panelidan  tanlanadi.
2. Ishchi sohada 1.8-rasm paydo bo’ladi. Bu yerda matrisa qatorlari (строк) va ustunlari (столбцов) soni kiritilib, OK tugmasi bosiladi.

3. Hosil bo’lgan bo’sh matrisaning elementlari o’ngdan chapga qarab kiritiladi (1.9-rasm).





1.8-rasm. **1.9-rasm.**

Matrisalar bilan turli xil amallarni bajarish uchun panelda ko’rsatilgan operatorlarni tanlab, elementlarni kiritish talab etiladi.

Masalan: Matrisani transponirlash uchun M^T tanlanadi. Natijada M matrisa sifatida kiritilgan matrisa hadlari transponirlangan holga o’tkaziladi. Teskari matrisani aniqlash uchun esa x^{-1} tanlab panelga matrisa nomi kiritiladi. $ORIGIN := 1$ kabi qayd etish talab qilinadi. {odatda matrisa elementlarini 1-elementdan boshlab kompyuter xotirasiga kiritish uchun ORIGIN funksiyasining qiymati 1 deb olinadi.}

Misollar:

A kvadrat matrisaning elementlari **4X4** o’lchamli bo’lsin. Bu yerda matrisaning ixtiyoriy elementini quyidagicha tasvirlash mumkin.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-misol. A matrisaning **teskarisini** topish uchun A^{-1} ni tanlash kifoya.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.375 & -0.125 & 0.25 \\ -0.313 & 0.469 & 0.031 & 0.063 \\ 0.5 & -0.25 & -0.25 & 0 \\ -0.063 & 0.094 & 0.406 & -0.188 \end{pmatrix}$$

2-misol. A matrisani **transponirlash** amali yuqoridagi tartibda bajariladi:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3-misol. Matrisani **songa ko'paytirish** uchun yangi L ikki o'lchamli o'zgaruvchi kiritib olinadi va sonni ko'paytirish formulasi yoziladi.

$$L := \frac{1}{2} \cdot A$$

$$L = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1.5 & 1 \\ 0 & 1.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1.5 \\ 2 & 1.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

4-misol. A matrisani L **matrisaga ko'paytirish** uchun $A*L=$ ni yozish kifoya. Ko'paytirish natijalari yangi matrisada hosil bo'ladi.

$$A \cdot L = \begin{pmatrix} 7.5 & 8.5 & 3.5 & 7.5 \\ 4 & 7 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 10 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

5-misol. A matrisani L matrisaga **qo'shish** uchun esa $A+L=$ ni tanlanadi. Natijada yig'indi matrisaning qiymatlari hosil bo'ladi.

$$A + L = \begin{pmatrix} 1.5 & 3 & 4.5 & 3 \\ 0 & 4.5 & 3 & 1.5 \\ 3 & 1.5 & 0 & 4.5 \\ 6 & 4.5 & 0 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Vektorlar bilan ishlashda matrisa qiymatlaridan foydalanish mumkin. Buni quyidagi misolda qaraymiz: 3x3 o'lchovli N matrisa berilgan bo'lsin.

$$H := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrisaning nolinchi (0) ustunini ajratib, vektor hosil qilish uchun M vektorni dastlab aniqlab olinadi: $M := H^{\langle 0 \rangle}$

So'ngra Mq deb yozish kifoya.

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektorni songa ko'paytirish uchun esa K yangi ko'paytuvchi matrisani aniqlab olinadi va K= deb yozish tufayli natija vektor hosil qilinadi.

$$K := 2 \cdot M \qquad K = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vektorni qo'shish, ayirish va songa bo'lishni quyidagi misolda ko'rish mumkin:

$$D := M + K - \frac{H^{\langle 1 \rangle}}{5}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2.6 \\ 6 \\ 8.8 \end{pmatrix}$$

Vektorni transponirlash xuddi matrisani transponirlash kabi amalga oshiriladi.

$$U := D^T \qquad U = (2.6 \;\; 6 \;\; 8.8)$$

Vektorning absolyut qiymatini topish uchun modul belgisidan foydalaniladi.

$$d := |D| \quad d = 10.964$$

Vektorlar komponentlarining yig'indisini hisoblash uchun yig'indi belgisi tanlanib, uning ostiga kerakli vektorning nomi kiritiladi.

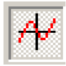
$$S := \sum D \qquad S = 17.4$$

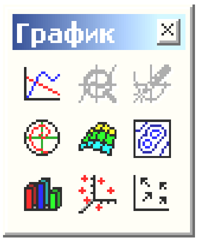
Vektorlarning skalyar ko'paytmasini hisoblash uchun esa oddiy ko'paytirish amalidan foydalaniladi: $M \cdot D = 41$

Vektorni vektorga ko'paytirish uchun esa maxsus ko'paytirish amali qo'llaniladi:

$$M \times D = \begin{pmatrix} -0.4 \\ -1 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

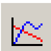
Yuqoridagi berilgan matrisa indeksi noldan boshlanganligining sababi, MathCAD sistemasidagi **ORIGIN** o’zgaruvchisidir.

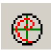
График panelni hosil qilish uchun Математика asboblar panelidan  tugma tanlanadi va 1.10-rasmdagi bo’limlar hosil bo’ladi.



1.10-rasm.

Grafik panelidagi tugmalarning vazifasi quyidagichadir:

 Dekart koordinalar sistemasining ikki o’lchovli grafigi (X-Y Plot)

 Egri chiziqli kordinatalar sistemasi (Polar Plot)

 Uch o’lchovli koordinatalar sistemasi (Surface Plot)

 Uch o’lchovli fazodagi yopiq grafiklar (Contour Plot)

 Uch o’lchovli fazodagi nuqtalar grafigi (3d Scatter Plot)

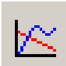
 Uch o’lchovli gistogrammalar (3d Bar Chart)

 Tekislikdagi vektor maydon grafiklari (Vektor Eield Plot)

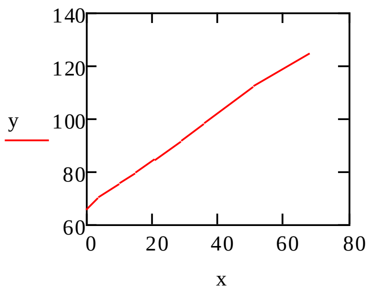
Mazkur tugmachalar yordamida foydalanuvchi uchun ixtiyoriy funksiyaning grafik na`munalarini olish va tahrirlash mumkin. Bunday na`munalarni bitta yoki bir necha maydon yordamida kiritish imkoniyatining mavjudligi dasturlar paketining grafiklarni tasvirlashdagi afzalliklaridandir. Grafiklar yasashda kerakli maydonlar berilgan qiymatlar yordamida to’ldiriladi va koordinata sistemasining kursor joylashgan qismida tasvir hosil qilinadi. Agar tasvirni oynaning boshqa tomoniga siljitish kerak bo’lsa sichqoncha ko’rsatgichi orqali siljitiladi. Grafiklarni kattalashtirish yoki kichiklashtirish, gorizontal yoki vertikal o’qlari bo’yicha surish chizilgan grafikni ajratib olish, nusha ko’chirish, o’chirib tashlash, grafikni koordinatalardagi qiymatlarini yangilash orqali o’zgartirish kabi tahrirlash amallarini bajarish mumkin.

Misol: $y = x$ funsiyaning grafigi yasalsin

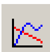
Grafikni hosil qilish uchun quyidagi bosqichlar ketma-ket bajariladi.

1. *x* argument va *y* funksiyaning qiymatlarini kiritish.
2. Grafik panelidan  tugmani tanlash (Insert>Graph> X-Y Plot).
3. Grafikdagi na`munaga x va y yozuvni kiritish.
4. Enter tugmasini tanlash yoki *grafik chegarasidan tashqariga* sichqonchani chertish natijasida 1.11–rasmdagi grafik tasvirni hosil qilish.

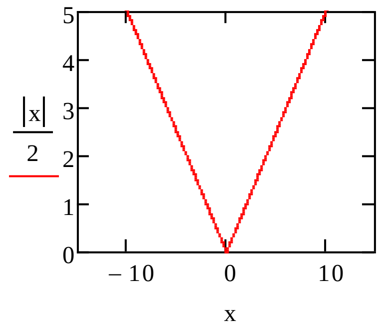
$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 15 \\ 21 \\ 29 \\ 36 \\ 51 \\ 68 \end{pmatrix} \qquad y := \begin{pmatrix} 66 \\ 71 \\ 76 \\ 80 \\ 85 \\ 92 \\ 99 \\ 113 \\ 125 \end{pmatrix}$$



1.11-rasm.

Agar grafikning o’zgarish oraliqlari aniq sonli oraliqda berilgan bo’lsa, grafik qurishni tezroq amalga oshirish imkoniyati ham mavjuddir. Buning uchun dekard koordinatalar sistemasidagi  belgi tanlanib, argumentning va funsiyaning nomi hamda ularning sonlar o’qlaridagi o’zgarish chegaralari kiritiladi. U vaqtda grafik avtomatik ravishda hosil bo’ladi.

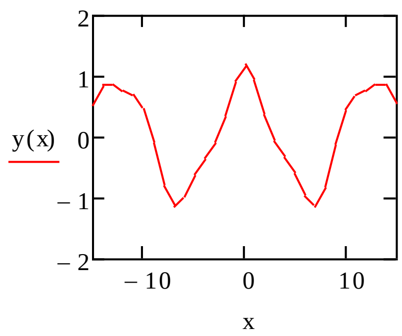
Misol. -10 dan +10 gacha argumentning qiymatlari berilgan bo'lsa, $y = \frac{|x|}{2}$ funsiyaning grafigi quyidagi ko'rinishda hosil bo'ladi. Agar argumentning o'zgarish oraliqlari o'zgartirilsa, grafik tasvir o'zgaradi.



1.12-rasm.

Grafik qurish jarayonida argumentning qiymati qanchalik kichiklashtirilsa, aniqlik shunchalik yuqori bo'ladi.

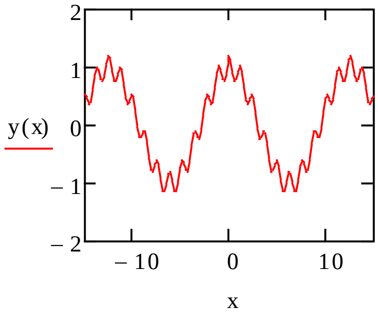
Misol: $y(x) := \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cdot\cos(5x)$ funksiyaning $x := -15..15$ oraliqda argumentning bir birlik qadam bilan o'zgaradigan hol uchun grafik tasviri quyidagicha bo'ladi.



1.13-rasm.

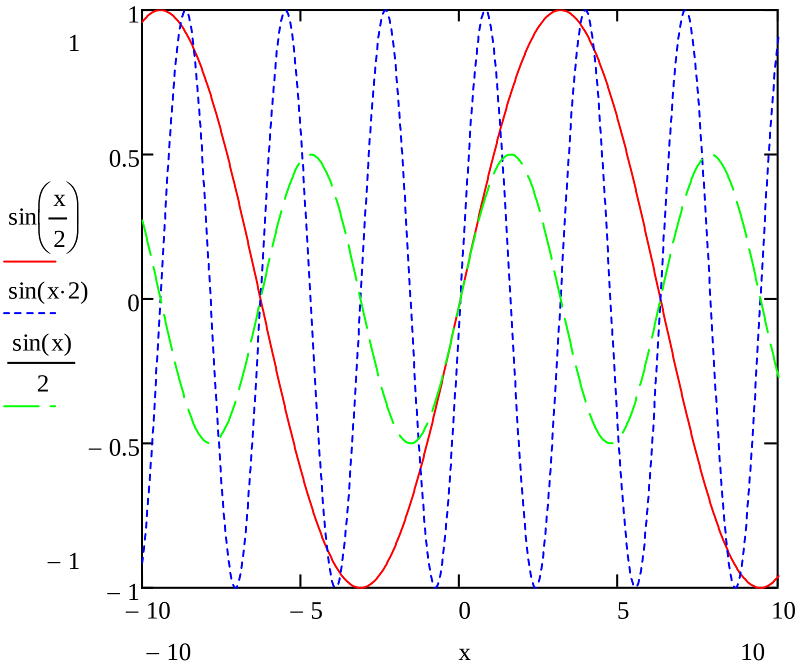
Agar aynan shu funksiya uchun argumentning o'zgarish oralig'i ancha kichik qilib tanlansa, grafik tasvir ham o'zgaradi.

$$x := -15, -14.8..15 \qquad y(x) := \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{5}\cdot\cos(5x)$$

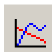


1.14-rasm.

MathCAD dasturlar paketi nafaqat ikki o'lchovli, balki uch o'lchovli tasvirlarni ham yaratish imkonini beradi. 1.15-rasmda bir nechta elementar funksiyalarning grafiklari har xil argumentning qiymatlarida muayyan oraliqda tasvirlangan.

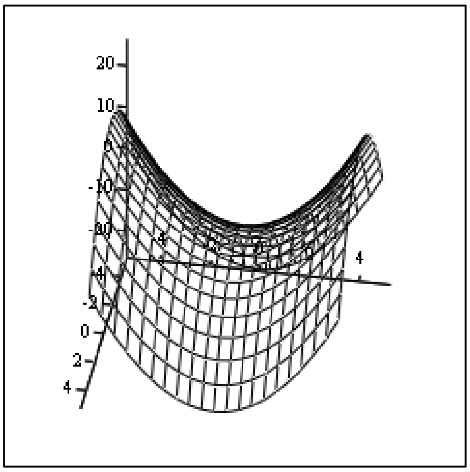


1.15-rasm.

Ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchili funksiyalarning grafigini qurish uchun  tanlanadi va funsiyaning berilishi kiritiladi. Bunda funksiya argumentlari vergul bilan ajratiladi.

Uch o'lchovli grafikani qurish uchun grafik panelidagi  (Surface Plot) tugma tanlanadi va uch o'lchovli koordinatalar sistemasiga mos z o'zgaruvchi kiritiladi. (1.16-rasm)

Misol: $z(x,y) := y^2 - x^2$



z

1.16-rasm.

Shunday qilib MathCAD dasturi dasturlar paketi sifatida matematik funsiyalarni hisoblash, tahrirlash, masalalar yechishda ulardan foydalanib grafik tasvirlar hosil qilish, algebra elementlari bilan ishlash, umuman barcha-barchasi uchun “beqiyos” imkoniyatlarga egadir.

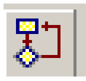
MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

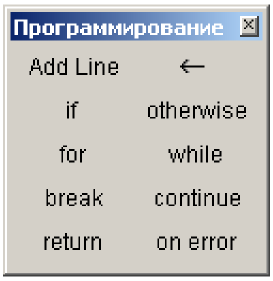
1. MathCAD dasturi qanday foydalanuvchi interfeysiga ega?
2. MathCADda ifodalar qanday tahrirlanadi?
3. MathCADda o’zgaruvchi ifodalarni kiritish qanday amalga oshiriladi?
4. Indeksli o’zgaruvchi nima va unday foydalanish tartibini tushuntiring.
5. MathCAD dasturida arifmetik amallarni qaynday kiritiladi? “: =” belgisi nimani anglatadi?
6. MathCADda ifodalarni tahrirlash Ms Office dasturlar paketidagi amaliy dasturlarga o’xshaydimi? Fikringizni tushuntiring.
7. MathCAD dasturida + belgi nimani anglatadi. U oddiy qo’shuv amali bo’lishi mumkinmi?

3-§. MathCADning dasturlash elementlari bilan ishlash

O'quv modullari

Operator, dasturlash bloki, dasturiy modul, shartli operator, takrorlanuvchi operator.

"**Математика**" panelidan  tugma tanlanadi va quyidagi **dasturlash** paneli hosil qilinadi.



1.17-rasm

Dasturlash panelidagi bo'limlar quyidagi vazifalarni bajaradi:

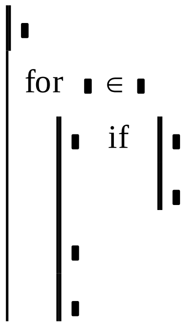
- **Add Line** - MathCADning dasturlashda foydalanadigan komandalarini kiritish blokini tashkil qiladi.
- ← - o'zgartirish operatori vazifasini bajaradi.
- **If** – shartli operator.
- **Otherwise** – qo'shimcha tanlash (shartli operator bilan birgalikda qo'llaniladi).
- **For** – takrorlanuvchi operatori.
- **While** –shartli takrorlanuvchi.
- **Break** –to'xtatish operatori
- **Continue**-ilova va to'ldirishlar.
- **Return** –qaytish
- **On error** –xatoni qayta ishlash.

Har qanday dastur kodlari kiritish uchun dasturlash panelidagi 

tugmani tanlash orqali hosil qilingan blokdan foydalaniladi:

Ayrim hollarda blok ichida yana mustaqil, tugallangan dastur kodlarini kiritish zaruriyati tug'iladi, bu xuddi ichma-ich joylangan murakkab paketga o'xshaydi.

Buning uchun dasturlash blokining ichida yana qaytadan Add Line operatori chaqiriladi va yangi maydon hosil qilinadi. Dasturlash bloki ichiga buyruqlar aniq algoritm asosida kiritiladi. Unga, takrorlash va shartli operatorlar uchun ham alohida qism-bloklar tashkil etiladi va dastur matni tizimli tarzda shakllantiriladi.



1.18-rasm.

Umuman olganda MathCADda yaratilgan dasturlar qism dasturlar tarzida shakllanadi. Uning natijasi esa son, vektor yoki matrisa ko'rinishida ifodalanadi. Программирование panelidagi ← **tugmasi** o'zgartirish operatorini tasvirlaydi hamda chap tomondagi o'zgaruvchining qiymatiga o'ng tomondagi o'zgaruvchining qiymatini o'zlashtiriladi.

Shartli operator. Shartli operator if tugmasi orqali quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

Operator if shart:

Bu yerda qo'yilgan shart bajarilsa, operator qiymat qabul qiladi va aksincha bo'lsa boshqarish shartli komanda **if** dan keyingi operatorga o'tkaziladi.

Quyida shartli operatorning strukturasi misolda ko'rsatilgan:

$$F(a,b) := \left| \begin{array}{l} c \leftarrow 0 \\ c \leftarrow a + b \ \ \text{if } \ a < b \\ c \leftarrow c + 12 \end{array} \right.$$

$F(3,6) = 21$

Bu yerda $3 < 6$ shart bajarilganligi uchun s=0, s=3+6, s=3+6+12, s=21 qiymat hosil bo'ladi. Shartli operatorlar bilan ishlashda qo'shimcha operatorni tanlash imkoniyati ham mavjuddir:

Operator1 **if** shart

Operator2 **otherwise**

Bu yerda agar shart bajarilsa, ya`ni ifoda mantiqan **rost** (true) bo'lsa, boshqarish **Operator1**ga o'tadi, aks holda (false) **Operator2** bajariladi.

Shartli operatorning umumiy tuzilishi

$$\left| \begin{array}{l} \blacksquare \ \ \text{if } \ \blacksquare \\ \blacksquare \ \ \text{otherwise} \end{array} \right.$$

Misol:

$$F(a,b) := \left| \begin{array}{ll} \text{"a>b"} & \text{if } \ a > b \\ \text{"a<b"} & \text{otherwise} \end{array} \right.$$

Funksiya uchun argumentning aniq qiymatlardagi bajarilishini tekshirish uchun 2 xil holatni qarash mumkin:

$$F(3,7) = \text{"a<b"}$$

$$F(10,2) = \text{"a>b"}$$

Takrorlanuvchi operator. Takrorlanish jarayonida qo'llaniladigan operatorning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

"**For** o'zgaruvchi $\in$ boshlang'ich qiymat . oxirgi qiymat operator "

Bu yerda operator siklik o'zgaruvchini boshlang'ich qiymatidan oxirgi qiymatigacha har bir o'zgarish qadamida muayyan buyruqlarni bajarilishini takroriy tarzda amalga oshirilishini ta`minlaydi.

1-Misol. 1 dan 10 gacha bo'lgan yig'indi hisoblansin.

$$\mathrm{Sum} := \left|\begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for}\ \ i \in 1..10 \\ \quad s \leftarrow s + i \end{array}\right.$$

$\mathrm{Sum} = 55$

2-Misol. 1 dan 10 gacha bo'lgan toq sonlarni yig'indisi hisoblansin.

$$\mathrm{Sum\_n} := \left|\begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for}\ \ i \in 1,3..10 \\ \quad S \leftarrow S + i \end{array}\right.$$

$\mathrm{Sum\_n} = 25$

MathCad dasturida murakkab sikl operatorlarini ham bajarish mumkin. Bunda murakkab siklni tashkil etish uchun ichma-ich joylashgan sikllarni tashkil etish algoritmi ishlab chiqiladi. Sikl parametrlari chegaraviy qiymatlari na`munadagi kabi olinadi

While operatoridan foydalanish. While operatori takroriy hisoblashlar soni noaniq bo'lgan hollarda ishlatiladi va quyidagi strukturaga ega:

while shart **operator**

bu yerda operator shart bajarilgunga qadar takrorlanadi va takroriy hisoblanishlarni oxirgi qiymati ko'rsatiladi.

Xulosa qilib aytganda, MathCAD yordamida bajarilgan barcha hisoblashlar alohida fayllarda saqlanadi. Har doim MathCAD paketi ochilganda bo'sh oyna hosil bo'ladi. Yangi oynani tashkil qilish uchun **File/ New (Ctrl+N)** buyrug'idan foydalaniladi. Har doim MathCADdagi ochilgan yangi xujjat shartli ravishda **Untitnled:1, Untitnled:2, Untitnled:3** tartibida rasmiylashtiriladi.

MathCAD dasturida xujjatlar bilan ishlash xuddi matnli muharrirdagi kabi tahrirlashlarni hamda fayllar bilan ishlash amallarini o'z ichiga oladi. MathCAD dasturida ham yaratilgan xujjatni **saqlash, o'chirish, qayta ishlash, nusha olish** kabi amallar juda oson bajariladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. MathCADning asosiy, maxsus panellari haqida nimalarni bilasiz?
2. “Математика” paneli elementlarini va vazifalarini tavsiflang.
3. “Калькулятор” paneli elementlarini va vazifalarini tavsiflang.
4. “Греческая” paneli elementlarini va vazifalarini tavsiflang.
5. “Исчисление” paneli elementlarini va vazifalarini tavsiflang.
6. “Логический” paneli elementlarini va vazifalarini tavsiflang.
7. “Матрица” paneli elementlarini va vazifalarini tavsiflang.
8. “График” paneli elementlarini va vazifalarini tavsiflang.
9. MathCAD dasturida funksiyalarning grafiklarini chizish jarayonini tushuntiring.
10. MathCAD dasturida matrisalar elementlari qanday kiritiladi?
11. MathCADda limitlarni va integral funksiyalarning qiymatlari qanday hisoblanadi?
12. Oddiy tenglik (=) va simvolli (→) belgi o’rtasidagi tavofutni ayta olasizmi? Fikringizni misollar orqali tushuntirib bering.
13. Bir xil misolning natijasi sonli va analitik ko’rinishda bo’lsa, qaysi biri ishonchli va aniq bo’lishi mumkin? Bunga dalillaringiz bormi?
14. MathCADda differensial hisoblar ixtiyoriy darajali funksiyalar uchun amalga oshiriladimi? Bunda ayrim mustasnolar mavjud emasmi?

1-BOB BO’YICHA XULOSALAR.

- ✓ Mazkur bobda amaliy dasturlar paketining asosiy vazifalari, ularning tasnifi, MathCADning dasturiy interfeysi, muhitda ishlash qoidalari haqida zarur ma`lumotlar berildi.
- ✓ MathCADda ifodalarni tahrirlash va o’zgaruvchilarni kiritish, indeksli o’zgaruvchidan foydalanishning eng qulay usullari tavsiya qilindi.

- ✓ MathCADdagi barcha panellar, ularning elementlari, funksiyalari aniq misollar bilan tushuntirildi.
- ✓ MathCADdagi bir nechta standart funksiyalar, ularning hisobi, funksiyaning grafiklar yasashdagi imkoniyatlari alohida bayon qilindi, misollar orqali asoslandi.
- ✓ Turli xil jarayonlarning algoritmlari MathCADning dasturlash sohasidagi imkoniyatlaridan foydalanib hisoblandi. Takrorlanuvchi va tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun har xil operatorlarga misollar olib, natijalar hosil qilindi va tahlil etildi.

2-BOB. MATHCAD DASTURINING TURLI XIL FUNKSIYALARIDAN FOYDALANIB TENGLAMA VA TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH

Yuqoridagi bobda matrisa va vektorlar bilan ishlash bo'yicha kerakli yo'riqnomalar MathCADning "Математика" panellari yordamida keltirilgan edi.

Ushbu bobda matrisalar tashkil qilish funksiyasi va ular ustida arifmetik amallar bajarish, matrisa va vektorlar bilan bajariladigan turli xil jarayonlarni maxsus funksiyalar orqali chiziqli algebra masalalarini yechishga qo'llash masalalari o'rganiladi.

1-§. Chiziqli algebra masalalarini yechish

O'quv modullari

Matrix, diag, Identity, Augment, Stack, subMatrix, Eigenvecs, Eigenvals, simmetrik matrisa, ortogonal matrisa.

MathCAD dasturining **Matrix(m,n,f)** funksiyasi matrisaning a_{ij} elementlarini m va n o'lchovda hamda $f(i,j)$ funksiyasi yordamida tashkil etish vazifasini bajaradi. Buning uchun dasturning ishchi oynasiga quyidagi buyruqlar ketma-ketligi kiritiladi:

$$ORIGIN := 1$$

$$f(x,y) := x - y$$

$$A := matrix(4,3,f)$$

$A =$ belgilari kiritilishi bilan $3x4$ o'lchovli matrisaning barcha koeffisientlari f funksiyaga mos holda hosil qilinadi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

diag(d)-standart funksiyasi yordamida matrisani diagonal elementlarini hosil qilish mumkin. Buning uchun ishchi oynaga diagonal elementlari soni i parametr bilan diagonal elementlari qiymati d_i o'zgaruvchi quyidagi ketma-ketligida kiritiladi.

$$ORIGIN := 1$$

$$i := 1..4 \quad d_i := 2 \cdot i$$

$$D := diag(d)$$

$D =$ yozuvi matrisaga mos diagonal elementlarini hosil qiladi:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Umuman olganda, **Diag(v)** funksiyasi bosh diagonal matrisani tashkil qilib, uning qiymatlarini v vektorda saqlaydi.

Identity(n) funksiyasi $n-$ matrisaning tartibini aniqlaydi.

Masalan:

$$ORIGIN := 1 \qquad E := identity(3)$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\AA -$ matrisaning birlik matrisa sifatida shakllantirilganligini anglatadi.

Augment(A,B) funsiyasi **-** A va B matrisalar qiymatlarini **ustun bo'yicha** barchasini birlashtirib, uchinchi matrisani hosil qiladi. Bunda qiymatlar tartib bilan ketma-ket joylanadi.

Masalan: $B := augment(A, D)$ funksiya natijasida yuqorida A va D matrisalarning qiymatlaridan hosil qilingan yangi matrisa hosil bo'ladi.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Stack(A,E) funksiyasi –*A* va *E* matrisalardan *satr bo'yicha* uchinchi matrisani tashkil qilish vazifasini bajaradi. Bunda yangi matrisaning qiymatlari *A* va *E* matrisalarning barcha satr bo'yicha qiymatlarini ketma-ket olish natijasida hosil qilinadi. Dastlab *A* matrisa keyin *E* matrisaning elementlari tartiblanadi.

$$C := \mathrm{stack}(A, E), \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Submatrix(A,l,k,p,r) funksiyasi A matrisani bloklarga ajratish imkonini beradi. Bu yerda l –qatordan k -qatorgacha, p -ustundan, r -ustungacha bo'lgan oraliqdagi elementlar ajratib olinib, yangi matrisa hosil qilinadi.

Masalan:

$$F := \mathrm{submatrix}(B, 3, 4, 1, 2)$$

funksiyasi berilgan *V* matrisadan ko'rsatilgan tartibdagi ajratishlar orqali yangi F matrisani hosil qiladi: $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Quyidagi funksiyalar, vektorlar va matrisalar uchun mo'ljallangan ayrim xususiyatlarni aniqlashga yordam beradi:

last(v) – v vektor komponentasining oxirgi nomerini aniqlaydi.

length(v) –v vektor komponentasining elementlar sonini aniqlaydi.

rows(A) –A matrisaning qatorlari sonini aniqlaydi.

cols(A) –A matrisaning ustunlari sonini aniqlaydi.

max(A) –A matrisa (vektor)ning eng katta elementini aniqlaydi.

min(A) –A matrisa (vektor) ning eng kichik elementini aniqlaydi.

mean(A) – A matrisa (vektor) ning o’rta qiymatini hisoblaydi

median(A) –A matrisa (vektor) ning medianasini hisoblaydi.

tr(A) –A matrisa diagonal elementlarini yig’indisini hisoblaydi.

rank(A) –A matrisaning rangini hisoblaydi

Keltirilgan barcha funksiyalar quyida A matrisa misolida qaraladi.

MathCADning ishchi oynasiga dastlab A matrisa va V vektorning qiymatlari kiritiladi. Hamda yuqoridagi funksiyalar ishlatiladi:

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \qquad V := A^{\langle 2 \rangle} \qquad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{last}(V) = 4 \quad \mathrm{length}(V) = 4$$

$$\mathrm{rows}(A) = 4 \quad \mathrm{cols}(A) = 4$$

$$\max(A) = 7 \quad \min(A) = 0$$

$$\mathrm{mean}(A) = 3.063 \quad \mathrm{median}(A) = 3$$

$$\mathrm{tr}(A) = 4 \quad \mathrm{rank}(A) = 4$$

Chiziqli algebra masalalarini yechishda yana bir qancha funksiyalar ham mavjud bo’lib, ular muayyan aniq algoritmlarni ishlab chiqishni talab etadi.

Quyidagi funksiyalar matrisaning muhim xususiyatlarini aniqlaydi.

Eigenvals (A) –A kvadrat matrisaning xos qiymatini aniqlaydi.

Eigenvecs (A) –A kvadrat matrisaning xos vektorini aniqlaydi.

Eigenvec (A,p) –A matrisaning xos vektorini *r* xos son yordamida aniqlaydi.

Genvals (A,B) funksiya– $A*x = v*B*x$ tenglamani yechimi yordamida v umumlashgan vektorning xos sonini aniqlaydi.

Genvecs (A,B) – Matrisaning xos vektori bilan bir vaqtda umumlashgan xos qiymatni hisoblaydi.

Isolve (A,B) – A*x=V ko’rinishdagi algebraik tenglamalar sistemasini yechimini aniqlaydi.

Lu (A) – A matrisani uchburchak matrisaga ya`ni: A=C*L*U tarzda, bu yerda L va U yuqori va pastki uchburchak matrisalar bo’lib, hamma 4 ta matrisa bir xil tartibli kvadrat matrisalardan iboratdir.

Qr (A) – A matrisani yoyishni amalga oshiradi: A=Q*R, bu yerda Q ortogonal matrisa, R yuqori uchburchak matrisa.

1-misol. Berilgan A, B va C matrisalar uchun quyidagi munosabatlar tekshirilsin.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. $(A*B)*C = A*(B*C)$ munosabatni tekshirish

$(A\cdot B)\cdot C = \begin{pmatrix} 34 & -18 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}$ o’ng tomonni hisoblash natijalari.

$A\cdot(B\cdot C) = \begin{pmatrix} 34 & -18 \\ 40 & -22 \end{pmatrix}$ chap tomonni hisoblash natijalari.

Hosil qilingan ikkala natija ko’paytirish uchun aniqlangan assosiativlik qoidasini matrisalarga ham tadbiq etish mumkinligini anglatadi.

2. $(A^T + B)*C = A^T*C + B*C$ munosabatni tekshiring

$\left(A^T + B\right)\cdot C = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 21 & 0 \\ 2 & 22 \end{pmatrix}$ o’ng tomonini hisoblash natijalari

$A^T\cdot C + B\cdot C = \begin{pmatrix} 12 & -8 \\ 21 & 0 \\ 2 & 22 \end{pmatrix}$ chap tomonini hisoblash natijalari

Natijaviy matrisalarning tengligi matrisalar uchun ham taqsimot qonunini qo’llash mumkinligini bildiradi.

2-misol.

$\Delta_A - 3*\Delta_B + 2*x - 10$ ifodani soddalashtirish kerak.

Bu yerda Δ_A, Δ_B A va B matrisaning aniqlovchilari (determinanti). A va B matrisa esa quyidagicha aniqlangan bo’lsin:

$$A = \begin{pmatrix} x & x \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

MathCADning ishchi oynasiga hisoblanishi kerak bo’lgan ifodani kiritiladi. Simvolli belgi ifodani tartiblashga yordam beradi:

$$|A| - 3\cdot|B| + 2\cdot x - 10 \rightarrow 2\cdot x + |A| - 3\cdot|B| - 1($$

Agar matrisalar ifodaga to’liq shaklda kiritilsa, ifoda yanada sodda holga keltiriladi:

$$\left|\begin{pmatrix} X & X \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\right| - 3\cdot\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & X \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\right| + 2\cdot X - 10 \rightarrow 5 - 21\cdot X$$

Simmetrik matrisani tekshirish. Buning uchun A matrisaga transponirlangan $B := A^T$ matrisa aniqlanadi. So’ngra $B =$ ifodasi kiritilib hosil qilingan matrisaning avvalgisi bilan bir hil bo’lgan matrisa hosil qilinadi. Bu

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \qquad B := A^T \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

A matrisaning simmetrik ekanligini tasdiqlaydi.

Ortogonal matrisani tekshirish. Buning uchun matrisaning determinantini hisoblab, uni noldan farqli ekanligini tekshirib ko’rish hamda transponirlangan va teskari matrisani topish lozim. Agar transponirlangan matrisa teskari matrisaga teng bo’lsa, u holda ularning ayirmasini hisoblash talab etiladi. Natijada nol matrisa hosil bo’ladi.

Misol.

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

berilgan matrisa $|A| =$ matrisaning determinantini $|A| = -1$ hamda $|A| \neq 0$ bo'lganligi uchun endi uning teskarisini va tranponirlanganini topish kerak.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.333 & 0 & -0.667 & -0.667 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.667 & 0 & 0.333 & -0.667 \\ -0.667 & 0 & -0.667 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$A^T - A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Amallarning natijalari va natijaviy matrisaning qiymatlari A matrisani ortogonal ekanligini bildiradi.

Manfiy bo'lmagan butun sondan iborat bo'lgan darajali kvadrat matrisa ustidagi bajariladigan ko'paytirish amali quyidagicha bo'ladi:. $A^0 = E, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A * A, \quad A^3 = A * A * A, ...$ va hokazo.

Misol: $A * X = B$ matrisali tenglama yechilsin: va $X * A = B$ munosabat tekshirilsin.

Odatda matrisali tenglamalar quyidagi ko'rinishdan biri orqali ifodalanadi: $A * X = B$ yoki $X * A = B$ bu yerda $X -$ noma`lum matrisa

Agar matrisali tenglamadagi A matrisani uning teskarisi A^{-1} ga chapdan ko'paytirilsa, $A^{-1} * A * X = A^{-1} B$ yoki o'ngdan ko'paytirilsa $X * A * A^{-1} = B * A^{-1}$ tengliklar hosil qilinadi. Bundan $A^{-1} * A = A * A^{-1} = E$ va $E * X = X * E = X$ tengliklarni o'rinli ekanligi hisobga olinsa , $X -$ noma`lum matrisani quyidagicha hisoblash mumkin: $X = A^{-1} * B$ yoki $X = B * A^{-1}$. Bu X matrisaning ikkala ko'rinishdagi yechimlari aslida bir xil va yagona qiymatli ekanligini anglatadi.

Agar A va B n – tartibli kvadrat matrisalar bo'lib, A matrisaning determinanti noldan farqli bo'lsa, matrisali tenglamani MathCAD dasturida yechish mumkin bo'ladi.

1-Misol.

X noma`lum matrisani hisoblash kerak.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Tenglamani yechish uchun $X = A^{-1} * B$ formuladan foydalaniladi.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$$

Natijaviy matrisani tekshirish uchun quyidagi ko'paytirish amali bajariladi.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A * X = B$ tenglik o'rinli bo'lganligi uchun matrisalar tenglamasining yechimi $\begin{pmatrix} -9 & 11 \\ 13 & -13 \end{pmatrix}$ dan iborat ekan.

2-Misol. X noma`lum matrisani hisoblash kerak

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Endi A^{-1} o'ngdan ko'paytiriladi, ya`ni:

$$X := B \cdot A^{-1} \qquad X := \begin{pmatrix} -31 & 23 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$$

Tekshirish uchun $X * A$ ni bajarish kifoya. Natijaviy ko'paytma B - matrisaga tengligi yechimning to'g'riligini bildiradi.

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. MathCADning dasturlash elementlari qaerda joylashgan?
2. MathCADda qanday dasturlash bo’yruqlaridan foydalaniladi?
3. Shartli operatorlar MathCADda qanday qo’llaniladi?
4. MathCADda qanday takrorlanish operatorlari ishlatiladi.
5. MathCADdagi dastur kodlari bizga ma`lum bo’lgan dasturlash tillaridan, masalan Delphi, Visual Basic dasturlaridan farq qiladimi? Ularning qaysi biri foydalanuvchi uchun qulay hisoblanadi? Fikringizni misollar bilan tushuntira olasizmi?

2-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish

O’quv modullari

Kramer qoidasi, determinant, teskari matrisa usuli, Gauss usuli, augment, rref, cols.

Quyida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning bir necha usuli qaraladi.

Kramer usuli. Tenglamalar sistemasini Kramer qoidasi bilan yechish uchun quyidagi misolni qaraymiz:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases} \qquad (2.1)$$

Agar (2.1) tenglamalar sistemasining determinanti noldan farqli bo’lsa, ya`ni, $A\cdot X = B, \quad \Delta = \det A \neq 0$ bo’lsa, u holda tenglamalar sistemasining yagona $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ yechimini $x_i = \Delta i / \Delta$ Kramer qoidasi orqali topish mumkin.

Dastlab sistemani matrisa ko’rinishda yozib olinadi.

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta := |A|, \quad \Delta = 27$$

Hisoblangan bosh determinantining noldan farqli ekanligi yechimning mavjud va yagonaligini anglatadi.

Noma`lumlar oldidagi koeffisentlarni o’ng tomondagi ustun elementlari bilan almashtirib, quyidagi matrisalar tuziladi va har bir xususiy matrisa uchun alohida determinantlar aniqlanadi. Natijada sistemaning barcha ildizlari ketma-ket, tartib bilan yuqoridagi Kramer formulasi yordamida aniqlanadi.

$$A1 := \begin{pmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Delta1 := |A1| \qquad x1 := \frac{\Delta1}{\Delta} \qquad x1 = 3$$

$$A2 := \begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Delta2 := |A2| \qquad x2 := \frac{\Delta2}{\Delta}$$

$x3 = -1$

$$A3 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Delta3 := |A3| \qquad x3 := \frac{\Delta3}{\Delta} \qquad \Delta3 = -27$$

$$A4 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta4 := |A4| \qquad x4 := \frac{\Delta4}{\Delta} \qquad x4 = 1$$

Teskari matrisalar usuli: Teskari matrisalar usuli yordamida (2.1)-tenglamalar sistemasini, yechish uchun quyidagi ishlarni ketma-ket bajarish kerak.

Dastlab sistemaning koeffisientlaridan iborat A matrisa va V vektor yozib olinadi:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

So'ngra A matrisaning teskarisini topib B vektorga ko'paytiriladi: $\boldsymbol{A^{-1} * B}$:

Natijada sistemaning yechimi hosil bo'ladi:

$$X := A^{-1} \cdot B \qquad X := \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Olingan natijalarni to'g'riligini tekshirish uchun quyidagi ifodani hisoblash mumkin:

$$A \cdot X - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nol matrisani hosil bo'lishi olingan natijalarning to'g'ri ekanligini ko'rsatadi.

Gauss usuli. Bu usulda **(2.1)-t**englamalar sistemasi matrisa holida yozib olinadi.

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{pmatrix} \qquad b := \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Augment(A,B) funksiyasi yordamida kengaytirilgan matrisa tuzib olinadi.

$$P := \mathrm{augment}(A, b) \qquad P := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Rref(A) funksiya yordamida hosil qilingan pog’onali matrisa sistema yechimini aniqlashga yordam beradi.

$$R := \mathrm{rref}(P) \qquad R := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrisaning oxirgi ustun elementlari tenglamalar sistemasining yechimini tashkil qiladi.

cols(R) – funksiyasi yordamida matrisaning oxirgi ustun elementlari ajratib olinadi.

$$n := \mathrm{cols}(R) \qquad x := R^{\langle n \rangle} \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Olingan natijani tekshirish uchun $A * X - B$ ifodaning qiymatini aniqlash zarur.

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Natijaviy nol matrisa Gauss usulida olingan yechimni to’g’ri ekanligini tasdiqlaydi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. MathCADda matrisalar tashkil etish qanday amalga oshiriladi?
2. ORIGIN funksiyaning vazifasini bilasizmi?
3. Diag – standart funksiyasi qanday vazifani bajaradi?
4. Identity funksiyasi qachon ishlatiladi?
5. Augment funksiyasining vazifasini misollar bilan tushuntiring.
6. Stack va Submatrix funksiyalari qanday vazifalarni bajaradilar?

7. Vektor va matrisa komponentlari ustida qanday standart amallarni bajarish mumkin. Bunda qaysi standart funksiyalar ishlatiladi?
8. Simmetrik va ortogonal matrisani MathCADda tekshirish usulini bilasizmi?
9. MathCAD dasturi matrisalar ustida amallar bajarishda qanday qulayliklar yaratadi? Buni oddiy foydalanuvchi xis etishi mumkinmi? Fikringizni misollar bilan tushuntiring.

3-§. Matrisaning xos son va xos vektorini topish

O'quv modullari

Birlik matrisa, xos son, xos vektor, bazis yechim, rref.

1. A matrisaning elementlari kiritiladi.

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Matrisa tartibidagi E birlik matrisa tashkil qilinadi.

$$E := \text{identity}(2) \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\det(A - \lambda * E) = 0$ xarakteristik tenglama yordamida matrisaning xos qiymatlari aniqlanadi.

$$A - \lambda \cdot E \rightarrow \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$|A - \lambda \cdot E| \rightarrow \lambda^2 - 4 \cdot \lambda - 5$ xarakteristik tenglama uchun

$(\lambda + 1)(\lambda - 5) \qquad \lambda 1 := -1 \quad \lambda 2 := 5$

4. A matrisaning xos qiymatlaridan yangi xos matrisalar hosil qilinadi.

$A - \lambda 1 \cdot E = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\lambda 1$- A pog'onador matrisa uchun xos son

$A - \lambda 2 \cdot E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ $\lambda 2$- A pog'onador matrisa uchun xos son

5. $(A-\lambda * E)\cdot x = 0$ sistemadan bazis yechimlar aniqlanadi.

$(A-\lambda 1E)x=0$ λ1 uchun sistemaning umumiy yechimi hosil bo'ladi:

$$\mathrm{rref}\left[\mathrm{augment}\left(\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

U holda natijaviy matrisaga mos bazis yechim.

$$x1-\frac{1}{2}x2=0$$, yoki $$x1=\frac{1}{2}x2$$

$(A-\lambda 2E)x=0$ λ2 sistemaning umumiy yechimi aniqlanadi:

$$\mathrm{rref}\left[\mathrm{augment}\left(\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\right)\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

U holda bazis yechim $x1+x2=0$, yoki $x1=-x2$

6. Xususiy yechimlar yordamida A matrisaning xos vektorlari aniqlanadi:

7. Olingan natijalar tekshiriladi. $(A-\lambda * E)\cdot y = 0$

MathCAD dasturining ishchi oynasiga yuqoridagi buyruqlar tizimi kiritiladi.

Yuqoridagi umumiy yechimlardan xususiy yechimni hosil qilish uchun xos vektorlar aniqlanadi:

$y1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $y2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ xos vektorlar

Olingan natijalarni tekshirish uchun $(A-\lambda E)y$ ifodadan foydalaniladi:

$(A - \lambda 1\cdot E)y1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(A - \lambda 2\cdot E)y2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Nol matrisa hosil qilingan yechimlarning to'g'riligini tasdiqlaydi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. MathCAD dasturida xos son va xos vektor tushunchasi qanday kiritiladi?
2. MathCAD dasturida xos vektorlar qanday hisoblanadi?
3. MathCAD dasturida xos vektorni hisoblovchi standart funksiya mavjudmi?
4. MathCAD dasturida xos vektorni hisoblash algoritmini tavsiflang.

2 – BOB BO'YICHA XULOSALAR.

- ✓ Ushbu bobda MathCAD dasturida chiziqli algebraning eng muhim masalalarini yechishga oid dastlabki ko'nikmalar, xususan matrisalar tashkil etish funksiyalari, standart funksiyalar yordamida turli shakldagi matrisalarni hosil qilish usullari bayon qilindi. Har bir standart funksiyani ishlatilishiga doir aniq misollar keltirildi.
- ✓ Matrisalar va vektorlar bo'yicha turli xil amallar, xususan, yangi matrisani hosil qilish, matrisani bloklarga ajratish, matrisalar ustida ko'paytirish va qo'shish amallarini bajarishga oid misollar tavsiya qilindi.
- ✓ Vektorlar va matrisalarning ayrim xususiyatlarini ifodalovchi funksiyalar, elementlar sonini, ustun va qatorlar sonini, eng katta va eng kichik elementni, o'rta qiymat va rangini hisoblovchi funksiyalar misollar bilan bayon qilindi.
- ✓ Xos son va xos vektorni aniqlashga imkon beruvchi standart funksiyalar keltirildi hamda matrisalar orasidagi turli munosabatlarni tekshirishga oid masalalar qaraldi.
- ✓ Matrisalar ustida bajariladigan amallar ichida eng ko'p ishlatiladigan funksiyalardan hisoblangan matrisani transponirlash va teskari matrisani topish amallari hamda matrisali tenglamani yechish masalasi aniq misollar bilan keltirildi.
- ✓ MathCAD dasturida chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechish uchun qo'llanadigan Kramer usuli, teskari matrisalar usuli hamda Gauss usullari uchun ishchi algoritmlarga mos dasturlar paketlari yaratildi va bitta masala olinib, har bir usulda yechildi, natijalar olinib, tahlil etildi.
- ✓ MathCAD dasturida matrisaning xos son va xos vektorini topish uchun bajariladigan amallar ketma-ketligi aniq algoritm asosida bayon etildi, dasturlar paketlari yaratildi va misollar bilan tahlil etildi.

3-BOB. ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALAR VA ULARNI SISTEMALARINI MATHCAD DASTURIY VOSITALARI YORDAMIDA TAQRIBIY YECHISHNING AMALIY DASTURLAR PAKETINI YARATISH

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni umumiy holda quyidagi shaklda ifodalash mumkin: $f(x) = 0$

Chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni ikki xilga bo‘lish mumkin: algebraik va transsendent. Algebraik tenglamalar deb algebraik (butun, rasional, irratsional) funksiyalardan tashkil topgan tenglamalarga aytiladi. Agar tenglamada boshqa funksiyalar (trigonometrik, ko‘rsatkichli, logarifmlik va h.k) qatnashsa, bunday tenglamaga transsendent tenglama deyiladi.

Tenglamaning yechimi deb x noma`lumning shunday qiymatlariga aytiladiki, ularni noma`lumli tenglamaga qo‘yganda, tenglama qanoatlantiriladi. Lekin, amalda bunday tenglamalarning aniq yechimlarini topish juda qiyin yoki umuman mumkin emas. Bunday hollarda, yechimni taqribiy qiymatini topishga imkon beruvchi taqribiy hisoblash usullari qo‘llaniladi. Ushbu bobda ana shunday usullardan ayrimlarini MathCAD dasturida hisoblash uchun dasturlar paketi yaratiladi.

1-§. Ildiz yotgan oraliqni ajratish va MathCADning standart funksiyalari yordamida chiziqsiz tenglamalarni yechish

O’quv modullari

Tenglama va ildiz tushunchasi, ildizning mavjudlik sharti, ildiz uchun oraliqni ajratish, analitik usul, grafik usul, usulning geometrik ma`nosi, standart funksiyalar, root, polyroot.

Chiziqsiz tenglamalarni yechish usullari ikkita guruhga bo‘linadi: aniq (to‘g’ri) va iteratsion (taqribiy) usullar. Aniq usul yordamida tenglamaning yechimi formulalar orqali aniqlanadi. Masalan, kvadrat tenglamaning yechimini topishni shu usulga misol sifatida ko‘rsatish mumkin:

$ax^2+bx+c=0$ -chiziqsiz tenglamani yechimlari Viet formulalari orqali beriladi (Kordano, Ferrari formulalari):

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

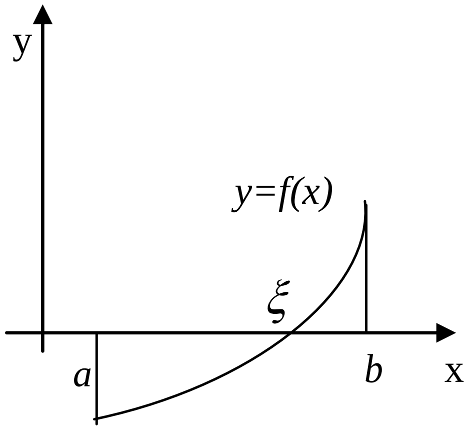
Lekin, bunday formulalar 3-, 4-darajali algebraik tenglamalar uchun mavjud xolos.

Taqribiy yechish uchun qo‘llaniladigan ko‘pgina usullarda tenglamaning ildizlari ajratilgan, ya`ni shunday kichik atrofchalar topilganki, bu atrofchalarda tenglamaning bittagina ildizi joylashadi, deb faraz qilinadi. Bu atrofning biror nuqtasini dastlabki yaqinlashish sifatida qabul qilib, taqribiy usullardan birortasini qo‘llab, izlanayotgan yechimni berilgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. Demak, chiziqsiz tenglamani taqribiy yechish ikki bosqichda olib boriladi:

1. Ildizni ajratish, ya`ni iloji boricha shunday kichik oraliq olinadiki, natijada shu oraliqda tenglamani bitta va faqat bitta haqiqiy ildizi mavjud bo‘lsin.

2. Dastlabki yaqinlashish ma`lum bo‘lsa, ildizni berilgan aniqlik bilan hisoblash.

Masalaning birinchi qismi ikkinchisiga qaraganda ancha murakkabdir. Chunki umumiy holda ildizni ajratishning samarali usuli mavjud emas.



3.1- rasm.

Quyidagi teoremalar ildiz yotgan oraliqlarni ajratishga yordam beradi:

1-teorema: Agar uzluksiz $f(x)$ funksiya biror (a,b) oraliqning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda bu oraliqda (2.1) tenglamaning hech bo‘lmaganda bitta haqiqiy ildizi mavjuddir. Ya`ni, shunday ξ son $\xi \in (a,b)$ topiladiki, $f(\xi)=0$ bo‘ladi (3.1- rasm). Agar shu bilan birga, birinchi tartibli hosila $f'(x)$ mavjud bo‘lib, u o‘zining ishorasini shu oraliqda saqlasa, u vaqtda bu oraliqda olingan ildiz yagonadir.

2-teorema: $f(x)$ funksiya (a,b) oraliqning chetki nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda tenglamani a va b nuqtalar orasida yotadigan ildizlar soni toqdir. Agar $f(x)$ funksiya oraliqning chetki nuqtalarida bir xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u vaqtda tenglama ildizi oraliqda mavjud emas yoki ularning soni juftdir.

Ildizlarni ajratishning turli usullari mavjud. Amalda analitik, grafik va algoritmik usullardan keng foydalaniladi. Ularni qisqacha tavsiflaymiz:

1) **Analitik usul**- bunda $f(x)$ funksiyaning ishorasi o‘zgaradigan oraliqlari topiladi. Albatta, $f'(x)=0$ tenglama yordamida. Bu oraliqlarda tenglamaning yagona ildizlari yotadi.

2) **Algoritmik usul**- bunda ildiz aniqlanadigan kesma uzunligi $[a,b]$ iloji boricha kattaroq qilib tanlab olinadi. Oraliqqa tegishli har bir kichik $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalarda funksiya ishoralari o‘zgaradigan oraliqlar va ularning soni aniqlanadi. Har safar $f(x_i)\cdot f(x_{i+1})<0$ sharti tekshiriladi. Agar shart bajarilmasa, navbatdagi kesma tekshirib borilaveradi. Bu jarayon kes-malar $[a,b]$ oraliqni to‘liq qoplab olmagunicha davom ettiriladi. Bunda topilgan oraliqlarda ildizning yagonaligiga ham, ba`zi bir ildizlarni aniqlanmay qolishligiga ham asos bor. Chunki, $[a,b]$ yetarlicha katta bo‘lganda funksiya ishoralari har xil bo‘lgan oraliqda u abssissa o‘qini bir necha marta kesib o‘tgan ham, aslida ishora o‘zgarganu, lekin oraliq chetlarida bir xil ishorali bo‘lib qolgan va ildizi yo‘qotilgan bo‘lishi mumkin. Shuning uchun, olingan natijalarni tekshirish maqsadida ularni $[a,b]$ning har xil qiymatlarida olib ko‘rish maqsadga muvofiqdir. Agar natijalar barcha holda takrorlansa ularni haqiqatga yaqin deb hisoblash mumkin.

Grafik usul-bu usul haqiqiy ildizni ajratishda katta yordam beradi. Buning uchun, $y=f(x)$ funksiyaning grafigini taqribiy ravishda chizib olamiz. Grafikning OX o‘qi bilan kesishgan nuqtalarining absissalari ildizning taqribiy qiymatlari deb olinadi. Agar $f(x)$ning ko‘rinishi murakkab bo‘lib, uning grafigini chizish qiyin bo‘lsa, u vaqtda grafik usulni boshqacha tarzda qo‘llash kerak. Buning uchun, $f(x)=0$tenglamani unga teng kuchli bo‘lgan $f_1(x)=f_2(x)$ ko‘rinishda tasvirlanadi. Keyin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalarning grafiklari alohida-alohida chizilib, ikkala grafikning kesishish nuqtalari topiladi. Bu nuqtalarning abssissalari ildizlarning taqribiy qiymatlari deb qabul qilinadi. Shunday qilib, taqribiy yagona ildiz yotgan $[a,b]$ kesmani haqiqatda to‘g’ri olinganligini analitik yo‘l bilan tekshirib ko‘rish mumkin. Buning uchun, yana ildizning mavjudlik sharti $f(a)\cdot f(b)<0$dan foydalanamiz. Agar shart bajarilsa oraliq to‘g’ri tanlangan bo‘ladi.

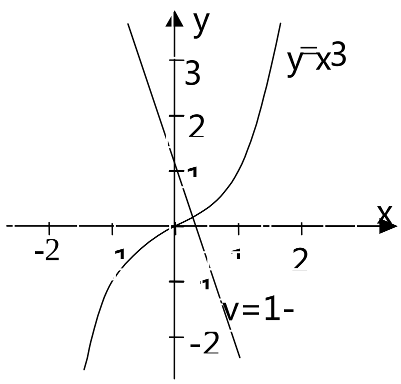
Oraliqni grafik usulda ajratish jarayonini misol bilan tushuntiramiz.

Misol. Ushbu

$$f(x) = x^3 + 5x - 1$$

tenglamaning taqribiy ildizi yotgan oraliqni ajrating.

Yechish. Buning uchun $f_1(x) = x^3$ va $f_2(x) = 1 - 5x$ funksiyalarning grafigini chizib olamiz (3.2-rasm).



3.2-rasm.

Grafikdan ko‘rinib turibdiki, chiziqsiz tenglama faqat bitta ildizga ega va u $[0, 1]$ oraliqda bo‘lishi mumkin. Chunki x=0 va x=1 nuqtalarda $f(x)$ funksiya har xil ishorali qiymatlarga ega: $f(0)$=-1<0, $f(1)$=5>0. Demak, ildiz $[0, 1]$ kesmada yotadi. Oraliq aniqlangach, turli usullardan birini ishlatib, kerakli aniqlikdagi yechimni olish mumkin.

Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechishda yo‘l qo‘yiladigan xatoni umumiy holda baholashda quyidagi teoremadan foydalanamiz:

3-teorema: Agar (a, b) kesmada ξ soni $f(x) = 0$ tenglamaning aniq, x esa taqribiy yechimi va ularning ikkalasi ham $a \le x \le b$ kesmada joylashgan bo‘lib, $|f'(x)| \ge m_1 > 0$ bo‘lsa, u holda quyidagi baho o‘rinlidir. $|x - \xi| \le \dfrac{f(x)}{m_1}$.

MathCAD dasturida bir noma’lumli chiziqsiz tenglamalarni taqribiy yechish uchun standart ichki funksiyalar mavjud bo‘lib, ular: ***root, given, find, minimize, polyroots*** kabi funksiyalardan iboratdir. Bu funksiyalarning har biri tenglamaning yechimlarini aniqlashda o‘ziga xos imkoniyatlarga va yondashuvlarga ega. Masalan, ixtiyoriy chiziqsiz transendend tenglama uchun *root* funksiyasi qulay hisoblansa, algebraik ko‘phadli tenglamalar uchun esa *polyroots* funksiyasini qo‘llash qulaydir.

Quyida Matcad dasturining chiziqsiz tenglamalarni sonli yechish imkoniyatlari alohida qaraladi.

1. $\mathrm{Polyroots}(v)$- n -darajali algebraik chiziqsiz tenglamaning barcha haqiqiy va kompleks ildizlarini topishga mo’ljallangan, bu yerda v vektor chiziqsiz tenglama koeffisientlaridan iborat bo’lib, $n+1$ o’lchovlidir.

Quyidagi chiziqsiz tenglamalar yechilsin.

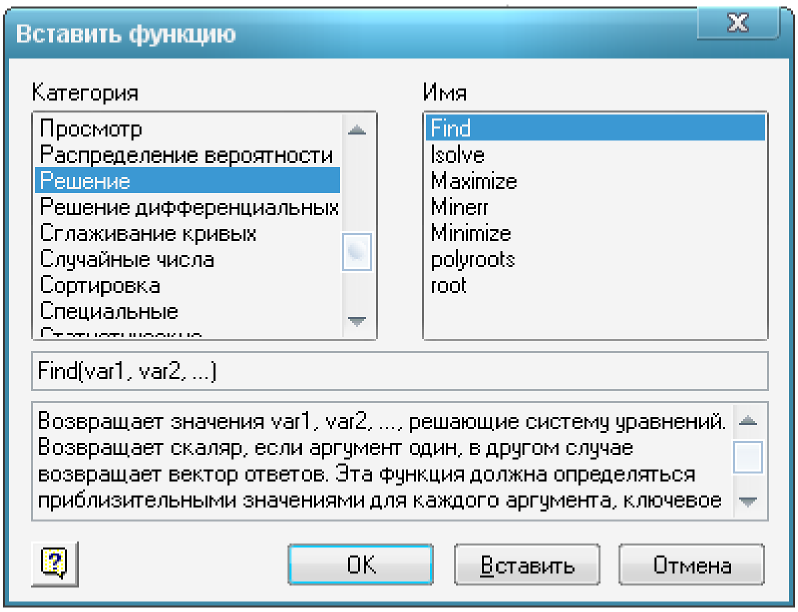
1) $f1(x) = x^3 - 5x + 1$, 2) $f2(x) = 2x^3 - 0.4$,

3) $f3(x) = x^3 + 2x + 0.5$, 4) $f4(x) = 0.1x^3 - 0.4x - 80$,

1-4 tenglamalarni yechishda *polyroots* funksiyasidan foydalanish uchun ko‘phad koeffisiyentlaridan iborat vektorlar tashkil etiladi:

$v1^T := [1\ \ -5\ \ 0\ \ 1]$, $v2^T := [-0.4\ \ 0\ \ 0\ \ 2]$, $v3^T := [0.5\ \ 2\ \ 0\ \ 1]$, $v4^T := [-80,\ -0.4\ \ 0\ \ 0.1]$

So‘ngra ***r=polyroots(v)*** ichki funksiyasiga murojaat qilinadi.(3.3-rasm)



3.3-rasm..

Xususan, $f1(x) := x^3 - 5x + 1$ tenglama uchun taqribiy yechish $v1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

ko‘phad koeffisientlari kiritilib, so‘ngra ***polyroots(v₁)*** funksiyasi ishlatiladi. Natijada ishchi oynada tenglamaning barcha ildizlari paydo bo‘ladi:

$$\mathrm{polyroots}(v1) = \begin{pmatrix} -2.33 \\ 0.202 \\ 2.128 \end{pmatrix}.$$

Qolgan chiziqsiz tenglamalarning ildizlari ham huddi shu tartibda hosil qilinadi:

$$v2 := \begin{pmatrix} -0.4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v3 := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v4 := \begin{pmatrix} -80 \\ -0.4 \\ 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}(v2) = \begin{pmatrix} -0.292 - 0.506i \\ -0.292 + 0.506i \\ 0.585 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}(v3) = \begin{pmatrix} -0.243 \\ 0.121 + 1.43i \\ 0.121 - 1.43i \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{polyroots}(v4) = \begin{pmatrix} -4.713 - 7.915i \\ -4.713 + 7.915i \\ 9.427 \end{pmatrix}$$

Natijalardan ko’rinib turibdiki, har bir chiziqsiz tenglama muayyan haqiqiy yokiy kompleks ildizlarga esa, bo’lib, ularning aniqligini oshirish mumkin.Buning uchun **Формат /Результат/ Формат Результата** muloqotli darchasida ishonchli raqamlar soni ko’rsatiladi. Agar tenglama algebraik bo’lmasa, elementar funksiyalar qatnashgan tenglama uchun ***polyroots*** funksiyasi yaroqli emas. Shuning uchun quyida qo’shimcha funksiyadan foydalaniladi.

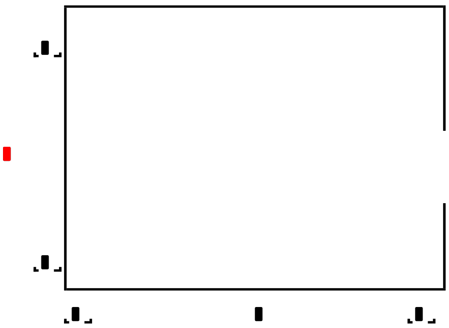
2. ***root***$(F(x), x)-$funksiyasi $F(x)=0$ chiziqsiz tenglamani berilgan aniqlikda iterasion usullar yordamida yechish imkonini beradi, faqat bu yerda ildiz yotgan oraliqqa mos $x-$dastlabki yaqinlashishning qiymatini kiritish talab etiladi. Demak, bu funksiya ixtiyoriy algebraik bo’lmagan transsendent tenglamani yechishga qulaydir.

Quyidagi $x^3+5+x-1=0$ tenglama berilgan. Dastlab transsendent tenglamaning taqribiy ildizi yotgan oraliqni aniqlab olinadi.

Buning uchun $f(x)=0$ tenglama $g(x)=p(x)$ ko’rinishiga keltiriladi.

$$g(x)=x^3 \qquad\qquad p(x)=1-5x\,.$$

Har bir funksiya grafigi ishchi oynada hosil qilinadi. Buning uchun Grafik panelidan “x-y-grafik” ikki o’lchovli grafik hosil qilish bo’limi tanlanadi.

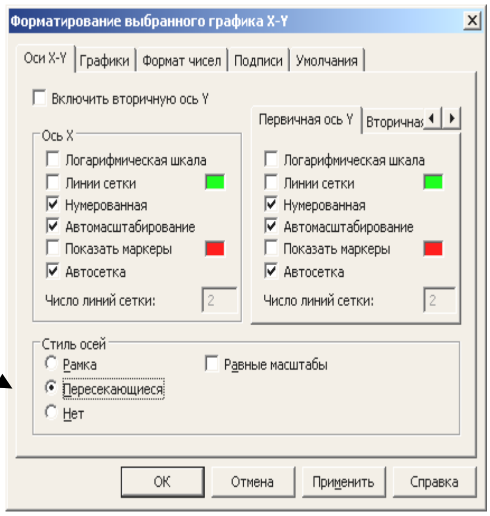


Grafik hosil qilish bo’limidan barcha parametrlar grafikka moslanadi

Buning uchun muloqotli

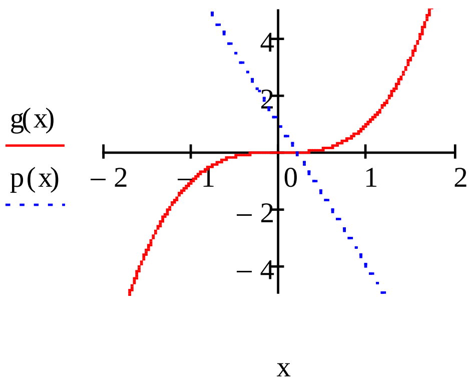
Пересекающиеяс

bo’limi faollashtiriladi



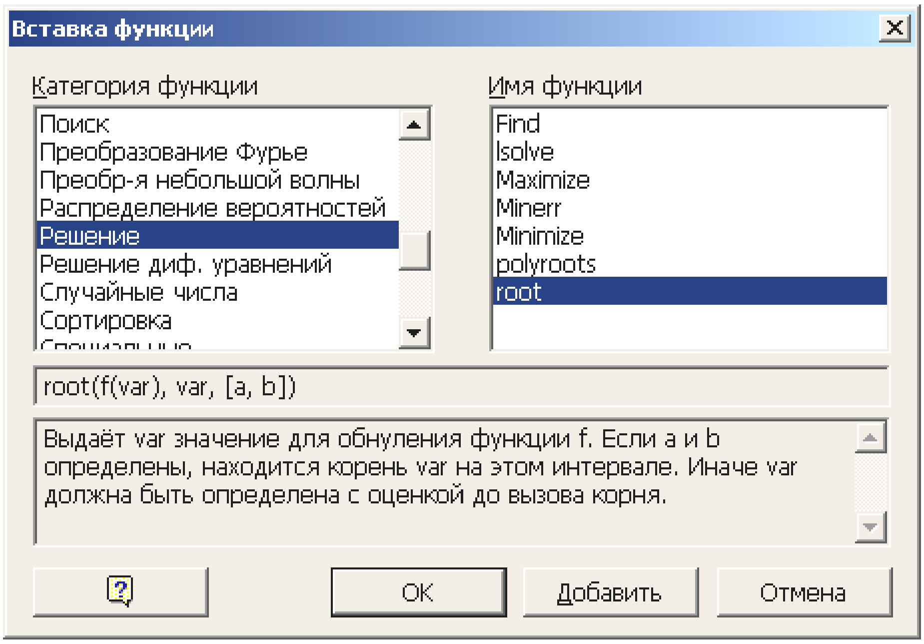
3.4-rasm

Darchaga grafigi chizilishi kerak bo'lgan funksiya nomlari hamda x-y-o'qlar uchun chegaraviy qiymatlar kiritiladi. Natijada grafiklar son o'qlarida berilgan oraliqda hosil bo'ladi. Ular kesishgan nuqtani taqribiy yechim deb qarab, atrofidagi nuqtalardan birini dastlabki yaqinlashish sifatida olish mumkin.



3.5-rasm.

$x=0$-dastlabki yaqinlashish kiritiladi. Son'gra $root(F(x), x)$ – funksiyasi ishlatiladi.



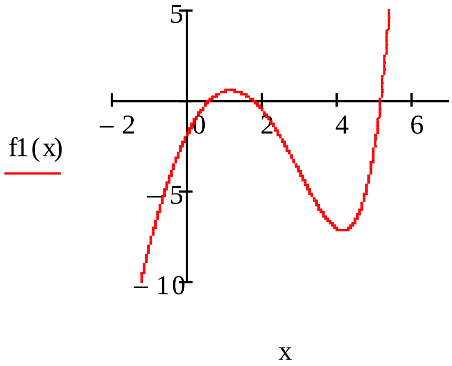
3.6-rasm.

Qaralayotgan hol uchun natijalar funksiya kiritilishi bilan olinadi.

$$root(f(x), x, 0, 1) = 0.198 .$$

Xuddi shu jarayon boshqa tenglama uchun bajarilsin:

$$f1(x) = \frac{e^x}{5} - 2(x-1)^2$$



3.7-rasm.

Funksiyaning grafigi yuqoridagi usul yordamida hosil qilinadi. Grafikdan ko'rinib turibdiki, tenglama uchta haqiqiy ildizga ega, har bir ildiz uchun alohida dastlabki yaqinlashuvchi *x* qiymat kiritiladi.

$$\mathrm{root}(\mathrm{f1}(x), x, 0, 1) = 0.578$$

$$\mathrm{root}(\mathrm{f1}(x), x, 1, 2) = 1.764$$

$$\mathrm{root}(\mathrm{f1}(x), x, 5, 6) = 5.148$$

Bu holatda ham olingan taqribiy ildizlar aniqligini ishonchli raqamlar sonini orttirish orqali oshirish mumkin.

Odatda chiziqsiz tenglamalarni MathCADning ichki funksiyalaridan tashqari bizga ma`lum bo'lgan interasion sonli usullar bilan ham yechish mumkin. Bu o'ziga xos ishchi algoritm va aniq ketma-ketlik asosida amalga oshiriladi. MathCAD dasturidan foydalanib esa mazkur jarayonlar yanada aniqroq va qulayroq tarzda bajariladi. Quyida chiziqli tenglamani yechuvchi ayrim sonli usullar alohida qaraladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Qanday tenglamani chiziqsiz tenglama deb ataladi?
2. Chiziqsiz tenglamaning nechta yechimi mavjud?

3. Chiziqsiz tenglamani taqribiy yechish uchun dastlab oraliqni ajratish shart deb o‘ylaysizmi? Oraliqni ajratmay turib tenglamani yechish bo‘yicha tavsiyalar bera olasizmi?
4. Chiziqsiz tenglamani yechishda oraliqni qanday ajratiladi?
5. Ildiz yotgan [a,b] oraliqni to‘g’riligini tekshiruvchi asosiy shartda ko‘paytma f(a)f(b)=0 tenglikni qanoatlantirsa, qanday mulohazalar yuritiladi?
6. Oraliqni ajratishning grafik usulini tushuntirib bering.
7. Oraliqni ajratishning analitik usulida qaysi formula qo‘llaniladi ?
8. Nima uchun taqribiy ildiz yotgan oraliqning chetki nuqtalarida funksiyaning turli ishorali bo‘lishi va shu oraliqda birinchi tartibli hosilaning ishorasini o‘zgarmas bo‘lishligi talab qilinishini tushuntirib bera olasizmi? Aksincha bo‘lsachi?
9. Algebraik va transsendent tenglamalarni taqribiy yechishda yo‘l qo‘yiladigan xatolikni umumiy holda baholashda qaysi teoremadan foydalaniladi?
10. MathCADning qaysi ichki funksiyalari chiziqsiz tenglamani yechishga yordam beradi?
11. root va polyroot funksiyalari orasidagi tafovutni ayta olasizmi? Ularni chiziqsiz tenglama yechishdagi imkoniyatlari bir xilmi?

2-§. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish (biseksiya) usuli

O’quv modullari

Kesmaning o‘rtasi, ildizning mavjudlik sharti, ildizga yaqinlashish formulasi, usulning geometrik ma`nosi, ishchi algoritm, dastur matni, usulning xatoligi.

Bu usul iteratsion usullar ichida eng soddasidir. Uni ishlatish uchun maxsus shartlarning bajarilishi talab qilinmaydi. Faqat $f(x)=0$ chiziqsiz tenglamaning izlanayotgan ildizi ajratilgan bo‘lishi kerak, ya`ni x=c ildiz $[a,\ b]$ kesmada yotgan bo‘lsin. Kesmaning o‘rtasi $c_0=\dfrac{a+b}{2}$ da $f(c_0)$ ni hisoblaymiz. Berilgan $[a,\ b]$

kesmani ikkita teng $[a,\ c_0]$, $[c_0,\ b]$kesmalarga bo‘lib, shu kesmalarning chetlarida $f(x)$ funksiyaning ishoralarini tekshiramiz. Qaysi kesmaning chetki nuqtalarida $f(x)$ har xil ishorali qiymatlarni qabul qilsa, $x = c$ ildiz o‘sha kesmada bo‘ladi. U yoki bu kesmada shunday bo‘lishi aniq, chunki ildiz $[a,\ b]$ kesmada yotadi. Ildiz yotmagan $[a,\ c_0]$, yoki $[c_0,\ b]$ kesmani tashlab yuborib, qolgan kesmani yana ikkiga bo‘lamiz. Masalan, $f(a)\cdot f(c_0) < 0$ bo‘lsa, $c_1 = \dfrac{a + c_0}{2}$ deb olib, $f(c_1)$ ni hisoblaymiz. Yana $[a,\ c_1]$, yoki $[c_1,\ c_0]$ kesmalarda $f(x)$ning ishoralari tekshiriladi va hokazo. Shunday qilib, har bir iteratsiyadan so‘ng yechim yotgan kesma uzunligi ikki baravar qisqarib boradi.

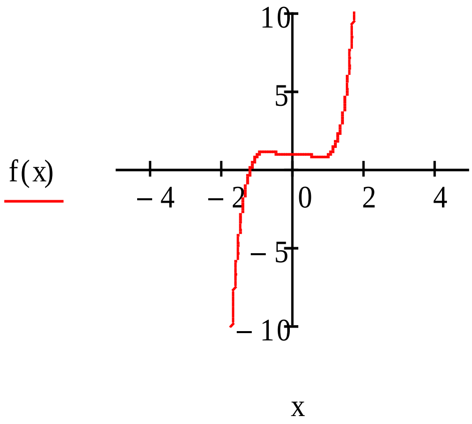
Bu jarayonni to kesma uzunligi ε dan kichik bo‘lguncha davom ettiriladi. Bunda ε - yechim aniqligini ifodalovchi musbat, o‘ta kichik son. Oxirgi kesmaning ixtiyoriy nuqtasi taqribiy yechim sifatida qabul qilinadi.

Demak, biz usulni qo‘llash natijasida bir-birini ichida joylashgan cheksiz $(a_1,b_1)...(a_n,b_n)$ kesmalar ketma-ketligini hosil qilamiz va oxirgi toraygan kesma

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

ga teng bo‘ladi. Bunda yo‘l qo‘yilgan xatolik $\Delta x_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ talab qilingan ε aniqlik bilan solishtirib chiqiladi. Agar $\Delta x_n < \varepsilon$ shart bajarilsa, masala yechilgan bo‘ladi.

Yuqorida qayd qilingan ijobiy hislatlari bilan birga biseksiya, ya`ni kesmani ikkiga bo‘lish usulining asosiy kamchiligi, yechimga uning o‘ta sekin yaqinlashishini ham aytib o‘tish lozim. Shuning uchun, bu usul ketma-ket yaqinlashishlarning yuqori tezligi talab qilinmagan hollarda ishlatiladi. Misol sifatida $f(x) := x^5 - x^3 + 1$ chiziqsiz tenglamani yechish jarayonini ko’ramiz. Dastlab grafikni hosil qilamiz.



3.8-rasm.

Grafikdan ko'rinib turibdiki, tenglama bitta haqiqiy ildizga ega. Usul algoritmiga mos dastur kodlarini MathCADning ishchi oynasiga quyidagi tarzda kiritiladi.

$$
\text{teng\_ikkiga\_bo'lish}(a,b,\varepsilon) := \left|\begin{array}{l}
k \leftarrow 0 \\
\text{while } 1 \\
\quad \left|\begin{array}{l}
c \leftarrow \dfrac{(a+b)}{2} \\
b \leftarrow c \ \ \text{if } f(c)\cdot f(a) < 0 \\
a \leftarrow c \ \ \text{otherwise} \\
k \leftarrow k+1 \\
\text{break} \ \ \text{if } |b-a| < \varepsilon
\end{array}\right. \\
\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

Natijani hosil qilish uchun yozilgan dastur matni va algoritm uchun oraliqning chegaraviy qiymatlarini va aniqlikni kiritish yetarli.

$$
\text{teng\_ikkiga\_bo'lish}(-2,-1,0.0001) = \begin{pmatrix} -1.237 \\ 14 \end{pmatrix}
$$

Dasturdagi parametrlarning qiymatini o'zgartirib esa tenglamaning ildizini va berilgan aniqlikni ta`minlovchi iteratsiyalar sonini aniqlash mumkin.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulining geometrik ma`nosi qanday ifodalanadi?
2. MathCAD dasturida usulga mos asosiy ishchi formula qanday hosil qilinadi?
3. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulining afzalligi nimada?
4. Bu usulda dastlabki yaqinlashishni aniqlash kerakmi?
5. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usuli juda sodda bo‘lganligi uchun tenglamani yechishda hech ikkilanmay shu usulni tanlagan bo‘larmidingiz? Yoki bunga monelik qiluvchi biror sabab bormi?
6. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulining xatoligi qanday baholanadi?
7. MathCAD dasturida yaratilgan usulga mos dasturlar paketining qulaylik tomonlarini ko’rsata olasizmi?

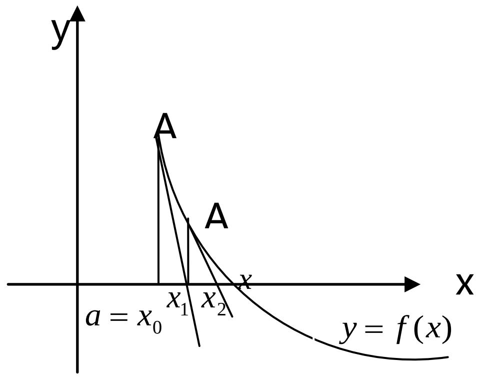
3-§. Urinmalar (Nyuton) usuli

O’quv modullari

Dastlabki yaqinlashish, dastlabki yaqinlashishni aniqlovchi shart, usulning geometrik ma`nosi, asosiy ishchi formula, Nyuton usulining xatoligi, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Oraliqni teng ikkiga bo‘lish usulidagi amallar sonining ko‘pligi urinmalar usulida deyarli uchramaydi. Agar dastlabki yaqinlashish to‘g’ri tanlansa, bu usulda taqribiy yechim juda tez topiladi. Usulning mohiyati quyidagicha:

$f(x)=0$ tenglama $[a,b]$ oraliqda bitta taqribiy ildizga ega deb faraz qilaylik. Dastlabki yaqinlashish sifatida a yoki b nuqtalardan birini olishimiz mumkin va shu tanlangan nuqtadan urinma o‘tkazamiz. Aytaylik, urinma $A(a, f(a))$ nuqtadan o‘tsin



3.9-rasm.

Urinmaning OX o‘qi bilan kesishgan nuqtasi x_1 ga mos nuqtani A_1 deb olib, endi $A_1(x_1, f(x_1))$ nuqtadan urinma o‘tkazamiz, va h. Urinmaning OX o‘qi bilan kesishgan nuqtalari ildizga yetarli aniqlikkacha yaqinlashguncha jarayon davom etadi.

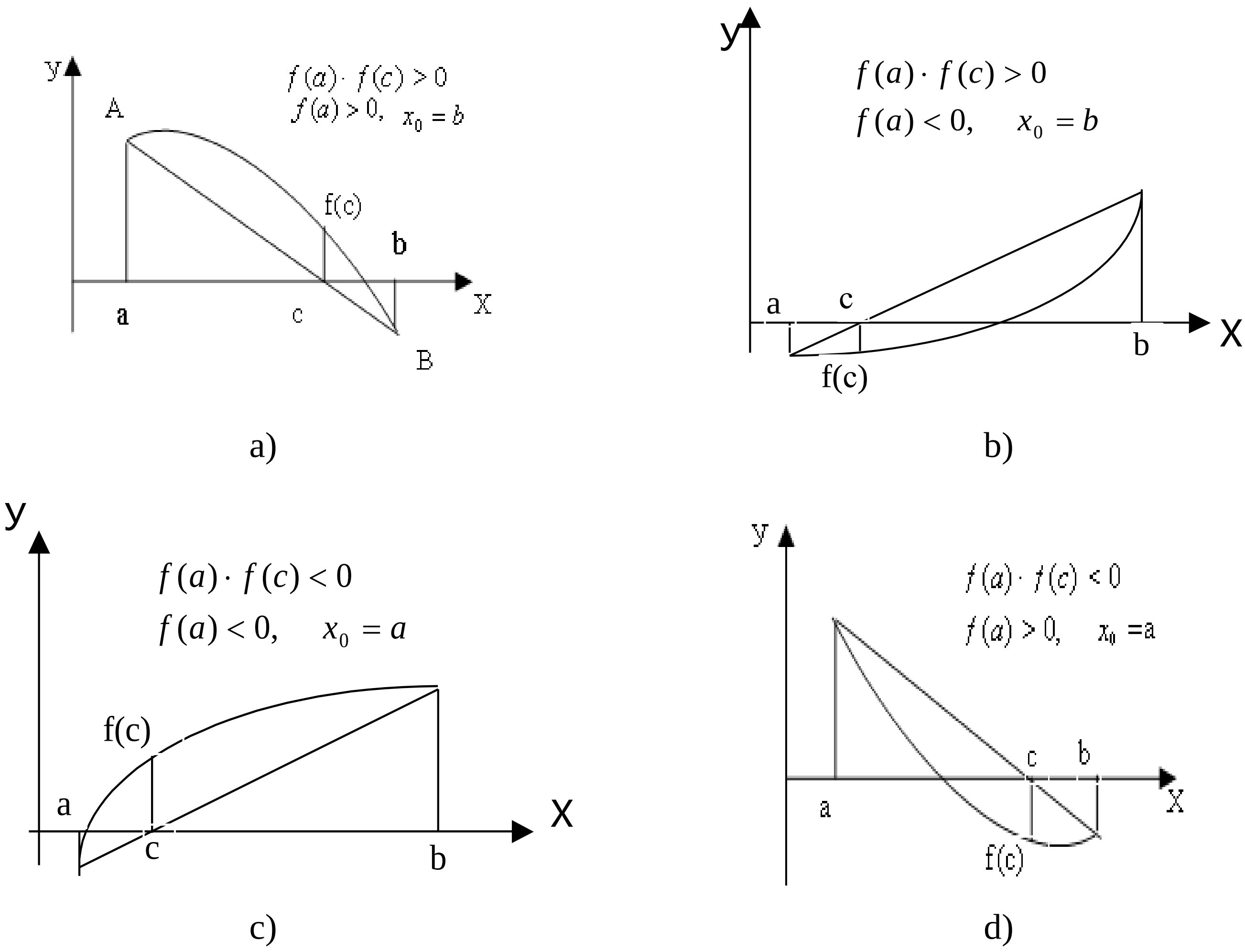
Bu usulda x_0 ni to‘g’ri tanlash juda muhimdir. Shuning uchun, dastlabki yaqinlashish x_0 ni tanlash masalasiga alohida e`tibor beramiz. Buning uchun $(a, f(a))$ va $(b, f(b))$ nuqtalardan o‘tuvchi vatarni OX o‘qi bilan kesishish nuqtasi c ning qiymatini shu ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g’ri chiziq tenglamasidan aniqlaymiz.

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Vatarning OX o‘qi bilan kesishish nuqtasi c_0 da $x = c_0$, $y = 0$ bo‘ladi, u holda yuqoridagi ifodadan quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lgan formulani hosil qilamiz:

$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a)$$

c ma`lum bo‘lgach, $f(c)$ ning qiymatini hisoblash mumkin. $C(c, f(c))$ nuqtani yechimga nisbatan joylashishi mumkin bo‘lgan barcha hollarni ko‘rib chiqaylik:



3.10-rasm.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ tenglamadan urinma OX o‘qi bilan kesishgani uchun $y(x_1)=0$ deb olib, $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ tenglikni va bu formulani umumlashtirib usulga mos ishchi formulani hosil qilamiz:

Ushbu ko‘rinishlarga mos ravishda usul uchun dastlabki yaqinlashish tanlanadi:

1) $f(a)>0$ va $f(a)f(c)>0$ bo‘lsa $x_0=b$;

2) $f(a)<0$ va $f(a)f(c)>0$ bo‘lsa $x_0=b$;

3) $f(a)<0$ va $f(a)f(c)<0$ bo‘lsa $x_0=a$;

4) $f(a)>0$ va $f(a)f(c)<0$ bo‘lsa $x_0=a$;

Shartlarni umumlashtirib olib, $f(a)f(c)$ ko‘paytmaning ishorasi musbat-manfiyligiga qarab, a yoki b qiymatlardan birini urinmalar usulida dastlabki yaqinlashish sifatida olish mumkin degan xulosalarga kelamiz. $(x_0,\ f(x_0))$ nuqtaga o‘tkazilgan urinma tenglamasi $x_n = x_{n-1} - \dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$ dan iborat bo’lgani uchun uni ishchi formula sifatida olib, hisoblashlar $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ sharti bajarilguncha davom ettiriladi. Usul algoritmiga mos dastur kodlarini MathCADning ishchi oynasiga joylashtirish uchun $f(x) := x^5 - x^3 + 1$ tenglamaning ildizi yotgan (a,b) oraliqni grafikdan aniqlangan [-2;-1] tarzida kiritiladi va usul algoritmiga mos quyidagi natijalar hosil qilinadi. $f1(x) := \dfrac{d}{dx} f(x)$

$$
\mathrm{Urinmalar}(a,b,\varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow 0 \\
x \leftarrow a \\
y \leftarrow b \\
\text{while } 1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x \leftarrow x - \dfrac{f(x)}{f(y) - f(x)} \cdot (y - x) \\
y \leftarrow y - \dfrac{f(y)}{f1(y)} \\
k \leftarrow k + 1 \\
\text{break if } |y - x| < \varepsilon
\end{array}
\right. \\
x \leftarrow \dfrac{(x + y)}{2} \\
\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

Yuqorida berilgan dastur kodlariga mos prosedura ishlatilsa, urinmalar usuliga mos chiziqsiz tenglamaning ildizlari hosil bo’ladi.

$$
\mathrm{Urinmalar}(-2,-1,0.000001) = \begin{pmatrix} -1.2365056 \\ 5 \end{pmatrix}
$$

Natijalardan ko’rinib turibdiki, taqribiy yechimga yaqinlashishlar soni avvalgi usulga qaraganda ancha ko’p. Biroq yechimni aniqligini aslida menyu bo’limlari orqali har doim oshirish imkoniyati mavjuddir.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Urinmalar usulining asosiy mohiyati nimada?
2. Urinmalar usulining asosiy afzalligi nimada?
3. Urinmalar usulida dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
4. MathCAD dasturida usulning ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?
5. Urinmalar usulida xatolik qanday baholanadi?

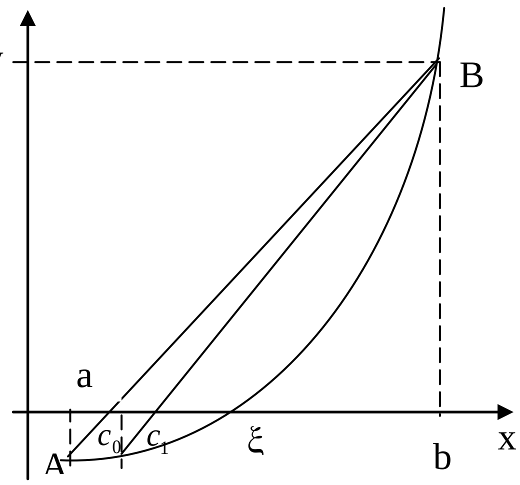
4-§. Vatarlar usuli

O'quv modullari

Dastlabki yaqinlashish, dastlabki yaqinlashishni aniqlovchi shart, usulning geometrik ma`nosi, asosiy ishchi formula, vatarlar usulining xatoligi, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Bu usul ham $f(x)=0$ tenglamaning ildizini berilgan $[a,b]$ kesmada tez va aniqroq topish imkonini beradi. Berilgan tenglamalarning $f(x)$ funksiyasi $[a,b]$ kesmada uzluksiz va uning chegaralarida har xil ishorali qiymatlariga ega bo‘lib, $f(a)\cdot f(b)<0$ sharti bajarilsin. Urinmalar usulidan farqli ravishda bu usulda haqiqiy yechimga vatarlar yordamida yaqinlashib boramiz. Avval $A(a,f(a))$ va $B(b,f(b))$ nuqtalardan vatar o‘tkazaylik (3.12-rasm). U OX o‘qini c_0 nuqtada kesib o‘tadi. Ma`lumki, vatarni OX o‘qi bilan kesishishidan hosil bo‘lgan nuqtaning abssissasi: $c_0 = a - \dfrac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$

dan iborat bo‘ladi. Bu nuqtani dastlabki yaqinlashish sifatida olishimiz mumkin. Lekin, keyingi vatarlarni qaerdan o‘tkazamiz degan savol tug’iladi. Buning uchun, oraliqni qo‘zg’almas nuqtasini



3.11-rasm

$f(a)\cdot f(c_0)<0$ sharti yordamida aniqlab olishimiz kerak. Chizmadan ko‘rinib turibdiki, agar $f(a)\cdot f(c_0)<0$ sharti bajarilsa, $b=c$ bo‘lib, a nuqta qo‘zg’almas bo‘ladi, aks holda $a=c$ bo‘lib, b nuqta qo‘zg’almas bo‘ladi. Ildizga yaqinlashuvchi $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ ketma-ketlik $f(x)$ funksiyaning vatarlarini OX o‘qi bilan kesishish nuqtalarini tashkil qiladi.

$$c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$$

formuladan esa ishchi formula sifatida foydalanamiz. Urinmalar usulidagi singari bu usulda ham $f(a)\cdot f''(x)>0$ sharti bajarilsa ishchi formula yordamida topilgan qiymatlar yechimga yaqinlashuvchan bo‘ladi. Jarayon kerakli aniqlikdagi yechim olinmaguncha davom etaveradi.

Endi vatarlar usulining xatosini baholaymiz. $f'(x)$ hosila (a,b) kesmada uzluksiz va o‘zining ishorasini saqlaydi, deb faraz qilamiz. ξ va x_n $f(x)=0$ tenglamaning aniq va taqribiy yechimlari bo‘lsin. U holda

$$|\xi - x_n| \le \frac{M_1 - m_1}{m_1}|x_n - x_{n-1}|$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda m_1 va M_1 lar (a,b) kesmada $f'(x)$ ning moduli bo‘yicha eng katta va eng kichik qiymatlari. Ko‘pincha amaliyotda, agar talab qilingan aniqlik $\varepsilon > 0$ musbat sonidan iborat bo‘lsa, xatoni aniqlash uchun oxirgi x_n yaqinlashish x_{n-1} yaqinlashishdan ε ga nisbatan kamroq farq qilsa, ya`ni $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ bo‘lsa, u vaqtda limit absolyut xato sifatida olinadi: $|\xi - x_n| < \varepsilon$.

$f(x) := x^5 - x^3 + 1$ tenglamani vatarlar yordamida yechimga yaqinlashuvchi algoritmni qo‘llab, dastur bo‘yicha quyidagi ijobiy natijalarga erishamiz.

$$
\text{Vatarlar\_usuli}(a,b,\varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
k \leftarrow 0 \\
\text{while } 1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
c \leftarrow a - \dfrac{f(a)}{f(b) - f(a)} \cdot (b - a) \\
b \leftarrow c \quad \text{if } f(c) \cdot f(a) < 0 \\
a \leftarrow c \quad \text{otherwise} \\
k \leftarrow k + 1 \\
\text{break} \quad \text{if } |f(c)| < \varepsilon
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} c \\ k \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

Dasturlar paketi yordamida vatarlar usuliga oid procedura ishlatib ko’rilganda berilgan chiziqsiz tenglama uchun quyidagi natijalar hosil qilindi:

$$
\text{Vatarlar\_usuli}(-2,-1,0.001) = \begin{pmatrix} -1.236395769 \\ 30 \end{pmatrix}
$$

Mazkur bobda qaralgan barcha sonli hisoblash usullari uchun ishlab chiqilgan matematik dasturlar paketi yordamida olingan natijalarni tahlil qilish uchun natijalarni taqqoslaymiz:

Usulning nomi	Yaqinlashishlar soni	Taqribiy yechim
Oraliqni teng ikkiga bo’lish	14	-1,237
Urinmalar	5	-1,2365
Vatarlar	30	-1,2363

Olingan natijalardan ko’rinib turibdiki, uchta ishonchli raqamlar uchun olingan taqribiy yechimga eng tez yaqinlashilgani urinmalar usulidir. Ayniqsa, bu dastlabki yaqinlashishni omadli tanlangan holda sezilarli natijalarga olib keladi. Oraliqni teng ikkiga bo’lish usulida tabiiy ravishda yaqinlashishlar soni juda ko’p va yechimga yaqinlashish uchun yana ko’p marta rekkurent hisoblashlar bajarish talab etiladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Vatarlar usulining geometrik ma`nosi qanday ifodalanadi?
2. MathCAD dasturida vatarlar usulining ishchi formulasi qaysi formula asosida hosil qilinadi?
3. Vatarlar usulida dastlabki yaqinlashishni qanday qilib aniqlanadi?
4. Usulning xatoligini baholash mumkinmi?
5. Vatarlar usulining kamchiligi mavjudmi?
6. Chiziqsiz tenglamani taqribiy yechish zaruriyati tug’ilganda qaysi usulni tanlagan bo‘lar edingiz? Qaysi usulda aniqlik yuqori bo‘ladi deb o‘ylaysiz?
7. Yechimga yaqinlashishda bir muncha ustunlikka ega bo‘lgan urinmalar va vatarlar usullarini qo‘llashdagi asosiy qiyinchilik qaerda paydo bo‘ladi? Bu usullarni har doim ishlatish mumkin deb o‘ylaysizmi?

5-§. Iteratsiya usuli

O’quv modullari

Nolinchi yaqinlashish, usulning geometrik ma`nosi, yaqinlashishni aniqlovchi shart, yaqinlashuvchi jarayon, uzoqlashuvchi jarayon, iteratsiya usulining xatoligi, usulning ishchi algoritmi, dastur ta`minoti.

Algebraik va transsendent tenglamalarni yechishning eng muhim usullaridan biri iteratsiya usuli hisoblanadi. Iteratsiya usulini qo‘llash uchun f(x)=0 tenglamani unga teng kuchli bo‘lgan quyidagi

$$x = \varphi(x)$$

kanonik ko‘rinishga keltirilgan va ildizlari ajratilgan bo‘lishi kerak. Hosil qilingan tenglamaning ildizi yotgan atrofning biror x_0 nuqtasini izlanayotgan ildizning nolinchi yaqinlashishi deb olamiz. Navbatdagi yaqinlashishlarni topish uchun quyidagi formuladan foydalanamiz, ya`ni

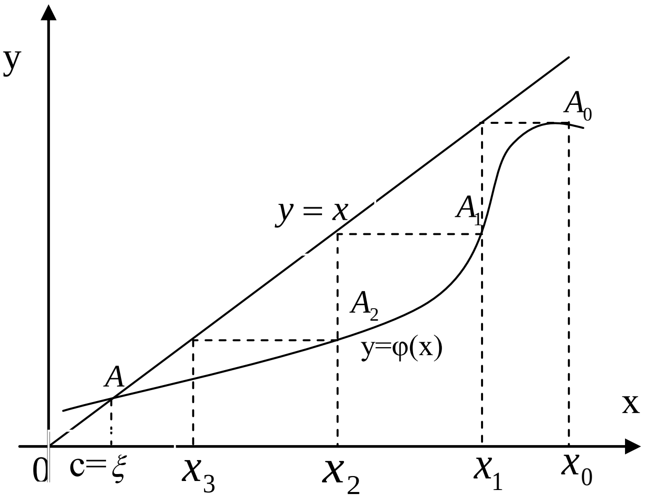
$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \qquad (2.3)$$

Hosil qilingan sonlar ketma-ketligining limiti

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi \qquad (2.4)$$

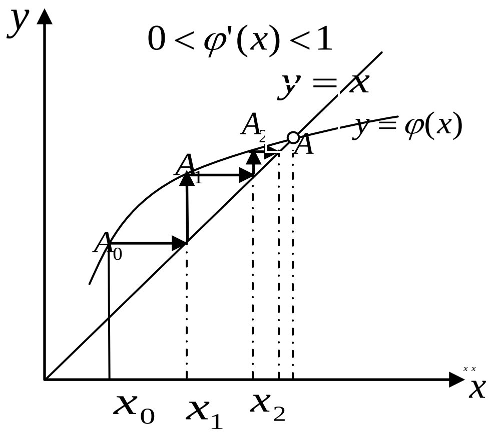
mavjud va $\varphi(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lsa, ξ berilgan tenglamaning ildizi bo‘ladi. Demak, bu ildizni rekurent formula yordamida istalgan aniqlik bilan hisoblash mumkin. Sonlar ketma-ketligining limit mavjud bo‘lgan holda iteratsiya jarayoni yaqinlashuvchi deyiladi. Lekin, mazkur limit har doim ham mavjud bo‘lavermaydi, bunday holda oddiy iteratsiya usulidan foydalanish maqsadga muvofiq bo‘lmay-di.

Iteratsiya usuli sodda geometrik ma`noga ega. Buni tushunish uchun $y = x$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalarning grafiklarini chizamiz.

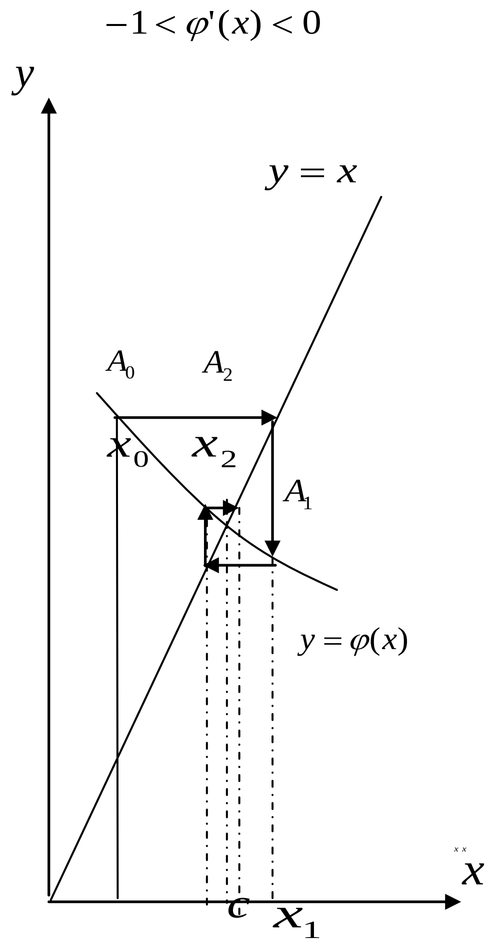


3.12-rasm.

Bu grafiklarning kesishgan nuqtasining absissasi tenglamaning ildizidan iborat bo‘ladi. Iteratsiya usulining umumiy algoritmiga binoan dastlabki yaqinlashishni tanlab olamiz. Bu geometrik nuqtai-nazardan x_0 nuqtaga mos keluvchi $A_0(x_0, \varphi(x_0))$ nuqtadan OX o‘qiga parallel to‘g’ri chiziq o‘tkazib, uning $y = x$ to‘g’ri chiziq bilan kesishish nuqtasining abssissasini topish demakdir. Bu nuqtada $\varphi(x_1)$ ni hisoblaymiz. Natijada $A_1(x_1, \varphi(x_1))$ nuqta topiladi. Bu nuqtadan yana OX o‘qiga parallel to‘g’ri chiziq bilan kesishgan nuqtasining abssissasi, ya`ni $x_2 = \varphi(x_1)$ ni topamiz va h.k. 3.13-rasmdan ko‘rinib turibdiki, $0 < \varphi'(x) < 1$ sharti bajarilganda iteratsiya jarayoni yaqinlashar ekan, ya`ni $A_0, A_1, \ldots$ nuqtalar $A(c, \varphi(c))$ nuqtaga yaqinlashib boradi va o‘z navbatida $x_0, x_1 \ldots$ ketma-ketlik $x = c$ limitga intiladi.



3.13-rasm



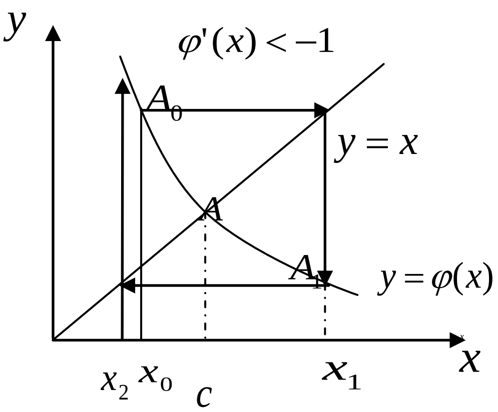
3.14-rasm

Endi -1<$\varphi'(x)$<0 bo‘lgan holni qaraymiz (3.14-rasm). Ketma-ket yaqinlashishlar rasmda strelkalar yordamida yaqqol ko‘rsatilgan. Bunda, faqat, oldingi holdan farqli ravishda $x_0, x_1...$ yaqinlashishlar $x=c$ yechimning har xil tarafida yotadi. Bu holda ham yaqinla-shuvchi iteratsiya jarayoniga ega bo‘lamiz. Qolgan $\varphi'(x)$<-1, $\varphi'(x)$>1 hollarda (3.15-3.16-rasmlar) iteratsiya jarayoni uzoqlashuvchi bo‘ladi, $\varphi'(x)$<-1 bo‘lganda yaqinlashishlar *x=c* yechimning ikkala tarafida uzoqlashib borsa, $\varphi'(x)$>1 bo‘lganda esa ular yechimning bir tarafida uzoqlashadi.

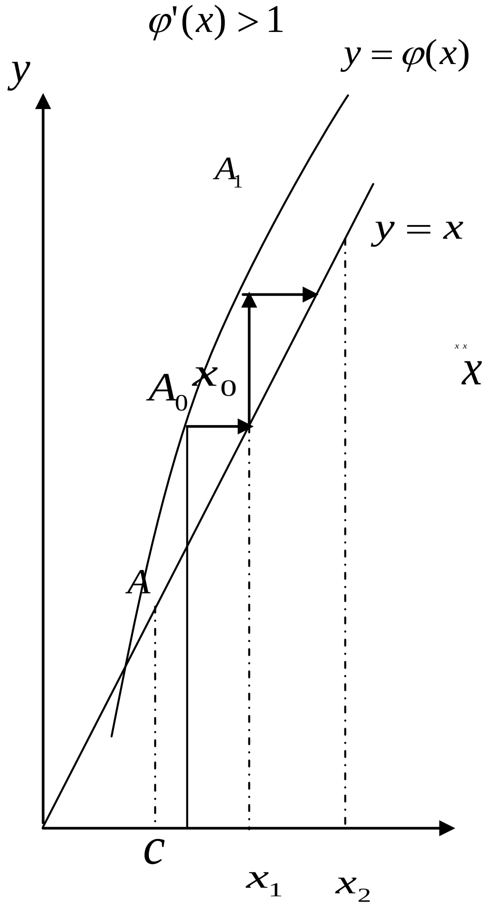
Bu mulohazalarni yakunlab quyidagi umumiy xulosaga kelamiz: iteratsiya usuli qaralayotgan sohada $|\varphi'(x)|<1$ bo‘lganda yaqinlashadi va $|\varphi'(x)|\geq 1$ bo‘lganda uzoqlashadi. Iteratsiya usulining hatosini baholash uchun quyidagi formuladan foydalaniladi.

$$|\xi - x_n| < \frac{q^n}{1-q}(x_1 - x_0)$$

Agar q qanchalik kichik bo‘lsa, iteratsiya jarayoni shunchalik tez yaqinlashadi. Iteratsiya usulining boshqa usullarga nisbatan ustunligi shundaki, operasiyalarning bajarilishi har bir qadamda bir xil bo‘lib, bu dastur tuzish ishini sezilarli darajada yengillashtiradi.



3.15-rasm.



3.16 -rasm.

Usul algoritmiga mos dastur kodlarini MathCADning ishchi oynasiga joylashtirish uchun quyidagi parametrik kattaliklar kiritiladi va usul algoritmiga mos natijalar hosil qilinadi.

$f(x) := x - \sin(x) - 0.2$ $x0 := 1.$

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x)$ $|f1(x0)| = 0.6376422$

$$1 - \lambda\cdot|f1(x0)| < 1 \quad \lambda \rightarrow \quad 0 < \lambda$$

$$1 - \lambda\cdot|f1(x0)| \ge 0 \quad \lambda \rightarrow \quad \lambda \le 1.56$$

$$\lambda := 1.5 \qquad \phi(x) := x - \lambda\cdot f(x)$$

$$\mathrm{iter}(x1,\varepsilon) := \left|\begin{array}{l} k \leftarrow 0 \\ \text{while } 1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow \phi(x0) \\ k \leftarrow k+1 \\ \text{break if } |x0 - x1| < \varepsilon \end{array}\right. \\ \begin{pmatrix} x1 \\ k \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\mathrm{iter}(1.2, 0.00001) = \begin{pmatrix} 1.17122974 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Natijalarni tahlil qilib, shunday xulosalarga kelish mumkin: agar iteratsion jarayonni tashkil etuvchi $\varphi(x)$ funksiya to‘g’ri tanlansa, yechim juda oson topiladi, jarayonning yaqinlashishi faqat shu funksiyaga bog’liq. Chunki ixtiyoriy dastlabki yaqinlashishda ham agar funksiya to’g’ri tanlangan bo’lsa, iteratsion qiymatlar o‘zini darhol o‘nglab oladi va yechimga intiladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Iteratsiya usulining geometrik ma`nosi qanday ifodalanadi?
2. Iteratsiya usulida dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
3. MathCAD dasrurida usulning ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?
4. Iteratsion jarayonni yechimga yaqinlashishi qaysi formula yordamida tekshiriladi? Iteratsiya usulining xatoligi qanday baholanadi?

6-§. Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishning oddiy iteratsiya usuli

O’quv modullari

Aniq usullar, taqribiy usullar, iteratsiya usuli, kanonik shakl, dastlabki yaqinlashish, iteratsiya usulining yaqinlashish sharti, iteratsion jarayon, usulning ishchi algoritmi, dastur matni.

Ma`lumki, tenglamalar sistemasini yechish usullarini ikki guruhga bo‘linadi: aniq va iteratsion. Aniq usullar yordamida sistemani yechgan bilan aniq yechimni har doim ham topa olmasligimiz mumkin. Chunki berilgan sistemadagi ayrim qiymatlar taqriban olingan bo‘lishi, bundan tashqari, hisoblash jarayonida sonlarni yaxlitlashga to‘g’ri kelishi mumkin. Iteratsion usullarda esa yechim cheksiz ketma-ketliklarning limiti sifatida olinadi. Lekin, bu usullarning o‘ziga xos tomonlaridan biri shundan iboratki, ular o‘z xatosini o‘zi tuzatib boradi.

Agar aniq usullar bilan ishlayotganda biror qadamda xatoga yo‘l qo‘yilsa, bu xato oxirgi natijaga ham o‘z ta`sirini o‘tkazadi. Yaqinlashuvchi iteratsion jarayonning biror qadamida yo‘l qo‘yilgan xato esa faqat bir necha iteratsiya qadamini ortiqcha bajarishgagina olib keladi, xolos. Ya`ni, biror qadamda yo‘l qo‘yilgan xato keyingi qadamlarda tuzatib boriladi. Iteratsion usullarning hisoblash sxemalari juda sodda bo‘lib, ularni dasturlash juda qulaydir. Lekin, har bir iteratsion usulning qo‘llanish sohasi chegaralangandir. Chunki, iteratsiya jarayoni berilgan sistema uchun uzoqlashishi yoki, shuningdek, sekin yaqinlashishi mumkinki, amalda yechimni qoniqarli aniqlikda topib bo‘lmaydi. Shuning uchun ham, iteratsion usullarda faqat yaqinlashish masalasigina emas, balki yaqinlashish tezligi masalasi ham katta ahamiyatga egadir. Yaqinlashish tezligi dastlabki yaqinlashish vektorining qulay tanlanishiga ham bog’liqdir. Aytib o‘tilgan mulohazalar chiziqli tenglamalar sistemasini iteratsion usullar yordamida yechishga tegishli bo‘lib, chiziqsiz tenglamalar sistemasini iteratsion usullar yordamida yechishda bu jarayon birmuncha boshqacharoq kechadi.

Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishda eng qulay usullar bu iteratsion usullardir. Chunki, chiziqsiz tenglamalar sistemasini aniq usullar bilan yechish imkoniyati juda kam bo‘lganligi uchun, ularni yechishda taqribiy usullarni qo‘llashni tavsiya qilinadi.

Chiziqsiz tenglamalar uchun iteratsiya usulining mohiyati quyidagicha. Aytaylik, bizga quyidagi

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. Bu sistemani yechish uchun avval berilgan sistemani biror usul bilan quyidagi kanonik shaklga keltirib olinadi:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, ...x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, ...x_n) \\ .... \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, ...x_n) \end{cases}$$

Bu yerda $\varphi_1, \varphi_2, ...\varphi_n$ lar berilgan tenglamaning koeffisientlari va ozod hadga bog’liq qandaydir funksiyalardir. n noma`lumli, $n$ ta chiziqsiz tenglamalar sistemasi uchun ixtiyoriy $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ...x_n^{(0)})$ vektorni taqribiy, ya`ni qo‘pol yechim sifatida qabul qilamiz va uni nolinchi yaqinlashish deb ataymiz. So‘ngra, taqribiy yechimdan aniqroq bo‘lgan shunday yechimlar ketma-ketligini hosil qilamizki, bu ketma-ketliklarning limiti berilgan tenglamalar sistemasining yechimidan iborat bo‘lsin.

Masalan, $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ...x_n^{(k)})$ yaqinlashish topilgan bo‘lsa,

$\mathbf{x}^{(k+1)}$ yaqinlashishni

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots x_n^{(k)}) \end{cases}$$

kabi topiladi.

Iteratsiya jarayoni

$$\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$$

sharti bajarilguncha davom ettiriladi. Bu yerda ε -izlanayotgan yechim aniqligi.

Iteratsiya usuli ma`lum shartlar bajarilganda yetarli aniqlikdagi yechimni istalgan $\mathbf{x}^{(0)}$ boshlang'ich yaqinlashishlarda topish imkoniyatini beradi. Bu shartlar yaqinlashish shartlari deyiladi. Muayyan aniqlikdagi yechimni olish uchun kerak bo‘lgan iteratsiyalar soni dastlabki yaqinlashishlarga bog'liq bo‘ladi. Dastlabki yaqinlashish topilayotgan taqribiy yechimga qancha yaqin bo‘lsa, yechim shuncha kam iteratsiyalar bilan olinadi. Iteratsiya jarayonining yaqinlashish tezligi esa o‘z navbatida berilgan sistema koeffisientlari matrisasining xususiyatiga bog'liq bo‘ladi.

Albatta, iteratsiya usuli bilan tenglamalar sistemasining taqribiy yechimi topiladi. Agar sistema koeffisientlari va ozod hadlari aniq sonlardan iborat bo‘lsa, hisoblashlarni sonlarda verguldan keyin ixtiyoriy m ta xona aniqligida bajarish mumkin. Buning uchun, hisoblash amallari verguldan keyin $m+1$ ta xona aniqligida bajarilib, kerakli iteratsiyalar bajarilgach, $m+1$ xonadagi son yaxlitlanadi. Sistema koeffisientlari va ozod hadlar p aniqlikdagi sonlar bo‘lsa, sistemani p dan katta aniqlikda yechish ma`noga ega emas. Bunda odatda sistema p dan katta bo‘lmagan aniqlikda yechiladi. Misol sifatida iteratsiya usulining yaqinlashish shartlarini ikkinchi tartibli sistema uchun keltiramiz.

5-teorema: Ikkinchi tartibli sistemaning yagona yechimi $\{a < x_1 < b,\ c < x_2 < d\}$ to‘g'ri to‘rtburchakda joylashgan bo‘lsin. Agar bu to‘g'ri to‘rtburchakda quyidagi

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| \le p_1, \quad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| \le q_1, \quad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| \le p_2, \quad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| \le q_2,$$

$$p_1 + p_2 < 1, \qquad q_1 + q_2 < 1$$

tengsizliklar bajarilsa, iteratsiya jarayoni yaqinlashadi va nolinchi yaqinlashish sifatida to‘g’ri to‘rtburchakning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

Misol: Ushbu $\begin{cases} x_1 + \dfrac{x_1^2}{10} + \dfrac{\ln x_2}{3} = 4.6 \\ e^{-x_1} + \sqrt{x_2} + x_2 = 3.1 \end{cases}$

chiziqsiz tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan 0,001 aniqlikda yeching.

Echish: Avvalo sistemaning ko‘rinishini o‘zgartirib olamiz, ya`ni ularni x_1 va x_2 larga nisbatan yechib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 4{,}6 - \dfrac{x_1^2}{10} - \dfrac{\ln x_2}{3} \\ x_2 = 3.1 - e^{-x_1} - \sqrt{x_2} \end{cases}; \qquad \text{U holda} \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2) = 4{,}6 - \dfrac{x_1^2}{10} - \dfrac{\ln x_2}{3} \\ \varphi_2(x_1, x_2) = 3.1 - e^{-x_1} - \sqrt{x_2} \end{cases}$$

Endi qidirilayotgan o‘zgaruvchilar bo‘yicha hususiy hosilalar olinadi:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = -\frac{x_1}{5}, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{3x_2}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = e^{-x_1}, \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{2\sqrt{x_2}}$$

Aytaylik, boshlang’ich yaqinlashish x_1 va x_2 lar bo‘yicha [1,4] kesmada bo‘lsin. U holda hosilalar uchun quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}\right| \le \frac{4}{5} = 0{,}8 = p_1 \qquad \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}\right| \le \frac{1}{12} = 0{,}083 = q_1$$

$$\left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}\right| \le \frac{1}{e^4} \approx 0.0069 = p_2 \qquad \left|\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}\right| \le \frac{1}{4} = 0{,}25 = q_2$$

Demak, qaralayotgan kvadratda:

$$p_1 + p_2 = 0{,}8 + 0.0069 = 0.8069 < 1$$

$$q_1 + q_2 = 0{,}083 + 0{,}25 = 0.333 < 1$$

yaqinlashish shartlari bajariladi.

U holda dastlabki yaqinlashish sifatida $x_1^{(0)} = 3{,}5 \quad x_2^{(0)} = 1{,}7$ ni olib, keyingi yaqinlashishlarni oddiy iteratsiya usuliga mos dastur ta`minoti yordamida aniqlanadi.

Buning uchun MathCAD dasturining ishchi oynasiga quyidagi buyruqlar kiritiladi.

```
iter(x1, y1, ε) := | k ← 0
                   | while 1
                   |    | x0 ← x1
                   |    | y0 ← y1
                   |    | x1 ← φ1 (x0, y0)
                   |    | y1 ← φ2 (x0, y0)
                   |    | x ← x1 − x0
                   |    | y ← y1 − y0
                   |    | k ← k + 1
                   |    | break if max(|x|, |y|) < ε
                   | (x1)
                   | (y1)
```

Dasturni ishlatish uchun argumentning qiymatlari o’rniga aniq kattaliklar kiritiladi. Natijada ishlab chiqilgan algoritmga mos chiziqsiz tenglamaning ildizlari hosil qilinadi.

$$\mathrm{iter}(3.5, 2.2, 0.001) = \begin{pmatrix} 3.31523183 \\ 1.74336709 \end{pmatrix}$$

Natijalardan ko‘rinib turibdiki, berilgan chiziqsiz tenglamalar sistemasining $x_1^{(0)} = 3{,}5 \quad x_2^{(0)} = 1{,}7$ dastlabki yaqinlashish bilan olingan 0,001 aniqlikdagi yechimi $x_1 = 3{,}315$ va $x_2 = 1{,}743$ ga teng. Albatta, aniqlikni oshirish imkoniyati ε ning qiymatiga bog’liq ravishda har doim mumkin va bu zamonaviy hisoblash mashinasida hisoblash vaqtini biroz orttiradi xolos.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Tenglamalar sistemasini yechishda iteratsiya usuli uchun dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
2. Iteratsion usullarda yechimga yaqinlashish formulasi qanday hosil qilinadi?
3. Iteratsiya usulining yaqinlashish tezligi qaysi omilga bog’liq?
4. Iteratsion jarayon qachon to‘xtatiladi?
5. Iteratsiya usulida har doim yechimga yaqinlashish holati sodir bo‘ladimi?
6. Tenglamalardagi singari tenglamalar sistemasini yechishda ham dastlabki yaqinlashishni tanlashda muayyan shartlarning bajarilishi yechimga yaqinlashishdagi asosiy omil sifatida qaraladimi? Dastlabki yaqinlashish izlanayotgan yechimga yaqinlashish tezligiga ta`sir etadimi?
7. MathCAD dasturida iteratsiya usuliga mos dasturlar paketi qanday yaratiladi?

7-§. Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishning Nyuton usuli

O’quv modullari

Nyuton usuli, Yakobi matrisasi, dastlabki yaqinlashish, usulning xatoligi, yechimga yaqinlashish tezligi.

Bu usul iteratsiya usuliga nisbatan tezroq yaqinlashadi. Nyuton usuli (2.7) tenglamalar sistemasidagi $f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyani Teylor qatoriga yoyib, faqat birinchi tartibli hosilalar qatnashgan hadlarni qoldirib, ketma-ket yaqinlashishlarni tuzishga asoslangan. Masalan, avvalgi paragrafda berilgan sistema yechimining $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)})$ yaqinlashishi topilgan bo‘lsin. Sistemaning $\boldsymbol{x}$ aniq yechimi $\boldsymbol{x}^{(k)}$ taqribiy yechimdan $\varepsilon^{(k)} = (\varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, ..., \varepsilon_n^{(k)})$ tuzatmaga farq qiladi.

$$x = x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}$$

Buni inobatga olib, $\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ .... \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasini

$f(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) = 0$ deb yozamiz. Endi $f(x)$ funksiyani uzluksiz differensiallanuvchi deb qarab, $x^{(k)}$ nuqta atrofida $\varepsilon^{(k)}$ ning darajalari bo'yicha Teylor qatoriga yoyamiz va bunda faqat chiziqli hadlar bilan chegaralanib

$$f(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) \approx f(x^{(k)}) + f^{'}(x^{(k)}) \cdot \varepsilon^{(k)})$$

sistemani hosil qilamiz.

Bu tenglamalarni koordinatalar bo'yicha yoyib yozib,

$$\begin{cases} f_1(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) \approx f_1(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_1} \cdot \varepsilon_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_2} \cdot \varepsilon_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_1(x^{(k)})}{\partial x_n} \cdot \varepsilon_n^{(k)} = 0 \\ f_2(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) \approx f_2(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_1} \cdot \varepsilon_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_2} \cdot \varepsilon_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_2(x^{(k)})}{\partial x_n} \cdot \varepsilon_n^{(k)} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x^{(k)} + \varepsilon^{(k)}) \approx f_n(x^{(k)}) + \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_1} \cdot \varepsilon_1^{(k)} + \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_2} \cdot \varepsilon_2^{(k)} + \ldots + \dfrac{\partial f_n(x^{(k)})}{\partial x_n} \cdot \varepsilon_n^{(k)} = 0 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Oxirgi sistemada

$$[\mathrm{f}'(\mathrm{x})] = [\mathrm{W}(\mathrm{x})] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \cdots \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Yakobi matrisasini kiritib, uni

$$W(x^{(k)})\varepsilon^{(k)} = -f(x^{(k)})$$

shaklga keltiramiz. Bu esa $\varepsilon^{(k)}$ larga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat. Noma`lumlar oldidagi koeffisientlar $W(x^{(k)})$-Yakobi matrisasini tashkil qiladi. Bu matrisani xos emas yani,

$$\det[Wx^{(k)}] \neq 0$$

deb faraz qilaylik. Unda sistemaning yechimi

$$\varepsilon^{(k)} = -[W^{-1}(x^{(k)})]f(x^{(k)})$$

dan iborat bo‘ladi. U holda yechimning $k+1$ yaqinlashishini

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - W^{-1}(x^{(k)})f(x^{(k)}), \quad k = 0,1,...$$

ko‘rinishda aniqlaymiz.

Nolinchi yaqinlashish sifatida ixtiyoriy $x^{(0)}$ vektorni olish mumkin.

Quyida usul algoritmiga mos ishlab chiqilgan amaliy dasturlar paketining umumiy-struktusi va dastur kodlari keltirilgan. Ular MathCADning ishchi oynasiga shu tartibda kiritiladi:

$$ORIGIN := 1$$

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} 2\cdot x^2 - x\cdot y - 5\cdot x + 1 \\ x + \log(x)\cdot 3 - y^2 \end{pmatrix}$$

$$D(x,y) := -\begin{pmatrix} \frac{d}{dx}F(x,y)_1 & \frac{d}{dy}F(x,y)_1 \\ \frac{d}{dx}F(x,y)_2 & \frac{d}{dx}F(x,y)_2 \end{pmatrix}^{-1}$$

```
Nyuton(X,ε):= | Λ ← D(X_1, X_2)
              | while 1
              |     | x_1 ← X_1
              |     | x_2 ← X_2
              |     | Y ← Λ·F(x_1, x_2)
              |     | X ← x + Y
              |     | break  if  max(|x − X|) < ε
              | X
```

Dasturni ishlatish uchun X_0 dastlabki yaqinlashish kiritiladi:

$$X0 := \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.1 \end{pmatrix}$$

Nyuton usulining prosedurasi ishlatib ko'rilganda quyida keltirilgan natijaviy vector hosil qilinadi.

$$Nyuton(X0, 0.00001) = \begin{pmatrix} 1.459 \\ -1.397 \end{pmatrix}$$

Va demak, Yakobi matrisasini qurib olish bilan taqribiy yechimga bir necha marta tezroq yaqinlashuvchi usul algortimiga mos dasturlar paketiga ega bolish mumkin**.**

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. N'yuton usulida dastlabki yaqinlashish qanday aniqlanadi?
2. N'yuton usulida tenglamalar sistemasini yechish uchun qo'llanadigan Yakobi matrisasi qanday tuziladi?
3. N'yuton usulida yechimga yaqinlashish formulasi qanday munosabatlar asosida shakllantiriladi?
4. MathCAD dasturida N'yuton usuliga mos dastur paketlari qanday yaratiladi?
5. Tenglamalar sistemasini samarali yechishda yaqinlashish tezligi masalasi eng muhim omillardan ekanligining sababini ko'rsata olasizmi?
6. Iteratsion jarayonining davomiyligi nima uchun aynan oldingi va keyingi yaqinlashishlarga mos tavofut miqdorlarning max qiymatini muayyan aniqlikka tekshirish orqali aniqlanishini tushuntirib bera olasizmi?
7. Nyuton usulining iteratsiya usuliga ko'ra tezroq yechimga yaqinlashishiga nima sabab deb o'ylaysiz? Yakobi matrisasini har doim ham tuzib bo'ladimi? U yechimga yaqinlashishni doimo kafolatlaydimi?

3- BOB BO’YICHA XULOSALAR.

- ✓ Mazkur bobda chiziqsiz algebraik va transsendent tenglamalar, ularni yechish imkoniyatlari, tenglamani yechimlari soni, taqribiy yechish usullari haqida umumiy ma`lumotlar keltirildi.
- ✓ Chiziqsiz tenglamani yechish uchun uning ildizlarini ajra-tishning analitik, grafik va algoritmik usullari, ularning mohiyati bayon qilindi va misollar bilan tushuntirildi.
- ✓ MathCAD dasturida chiziqsiz tenglamalarni taqribiy yechish uchun qo’llanadigan standart funksiyalar, ularni qo’llash bo’yicha ko’rsatmalar, bir nechta chiziqsiz tenglamalar uchun keltirildi hamda taqribiy yechimning aniqligini oshirish imkoniyatlari tavsiya qilindi.
- ✓ Chiziqsiz tenglamaning taqribiy yechimi yotgan oraliqni ajratishda MathCADning grafik imkoniyatlaridan samarali foydalanildi.
- ✓ Chiziqsiz tenglamalarni yechishda MathCADning ichki funksiyalaridan tashqari bizga ma`lum bo’lgan iterasion sonli usullar alohida qaraldi. Oraliqni teng ikiga bo’lish, urinmalar, vatarlar va iterasiya usullarining mohiyati, usullarning geometrik ma`nosi, taqribiy yechimga yaqinlashish algoritmi, MathCAD dasturida har bir iterasion usul uchun dasturlar paketi yaratildi va misollar yechildi, olingan natijalar tahlil etildi.
- ✓ Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishning eng qulay usullari tahlil etildi va iterasiya hamda Nyuton usullari bo’yicha chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechish algoritmi bayon etildi. Mazkur usullarni MathCAD dasturida qo’llash bo’yicha amaliy dasturlar paketi yaratilib, natijalar olindi, har ikkala usuldan olingan natijalar tahlil etildi.

4-BOB. ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASHNI MATHCAD DASTURIDA AMALIY DASTURLAR PAKETINI YARATISH

Ma`lumki, berilgan funksiyaning hosilasini topish amali differensiallash deb atalib, uning uchun boshlang'ich funksiyani topishdan iborat teskari amal integrallash deb ataladi (lotincha-untegrare-tiklash degan ma`noni bildiradi). Amalda ko'pgina funksiyalarning boshlang'ich funksiyalarini elementar funksiyalarning kombinatsiyasi orqali ifodalab bo'lmaydi. Shuning uchun, bu funksiyalarning aniq integrallarini ba`zan taqribiy usullar bilan hisoblash zaruriyati tug'iladi. Shuning uchun ushbu bobda aniq integralni taqribiy hisoblashning ayrim usullari, ularning mohiyati, geometrik ma`nosi, ishchi algoritmlari va dastur ta`minotlari tavsiya qilinadi.

1-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash haqida umumiy tushunchalar

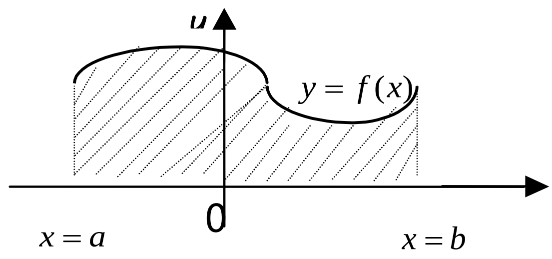
O'quv modullari

Integrallash, egri chiziqli trapetsiya, Nyuton- Leybnis formulasi, integral yig'indi, boshlang'ich funksiya, integrallash formulasi, integrallash usullari.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblash egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqidagi masalaning geometrik yechimi bilan uzviy bog'liqdir. Quyidan OX o'qidagi $[a,b]$ kesma bilan, yuqoridan musbat qiymat qabul qiladigan $y = f(x)$ uzluksiz funksiyaning grafigi bilan, yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlarning kesmalari bilan chegaralangan figurani egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini (4.1-rasm)

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

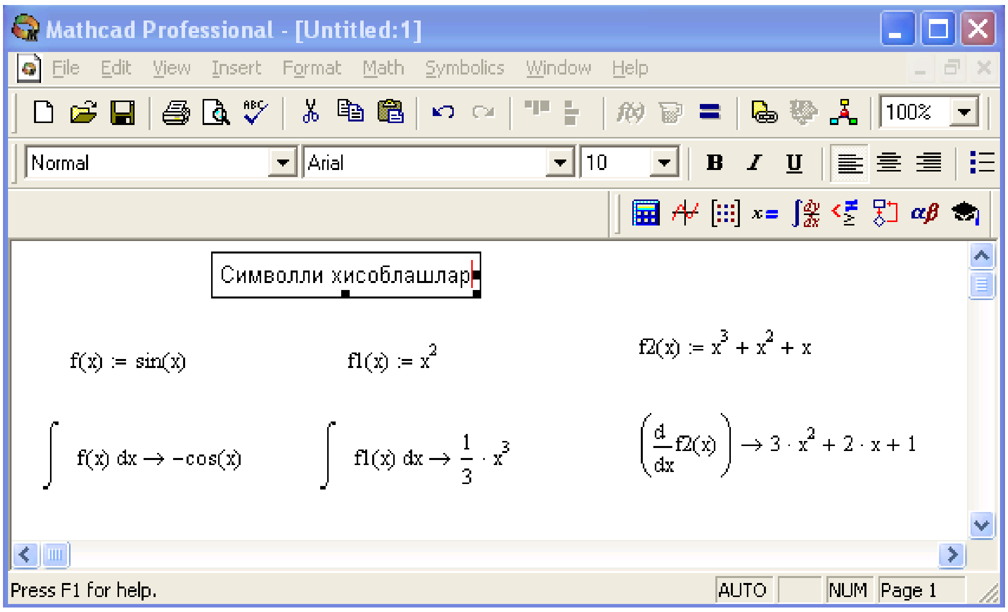
Nyuton-Leybnis formulasi orqali aniq hisoblash mumkin. Bunda $F(x)$-berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi. Yuqorida ta`kid-langanidek, boshlang'ich funksiyani integrallash qoidalari va formulalar yordamida hisoblash imkoni bo'lmaganda uni integral yig'indilar yordamida taqriban hisoblanadi.



4.1 –rasm.

Aniq integralni geometrik ma`nosi 4.1-rasmdagi shtrixlangan sohaning yuzasini topish demakdir.

Sonli hisoblashlardan tashqari MathCAD belgili (simvolli) hisoblashlarni ham amalga oshiradi. Bu degani hisoblashlar natijasini analitik ko'rinishda tasvirlash mumkin. Va aynan, aniqmas integral, differensiallash va boshqa shu kabi masalalarni yechishda MathCADning mazkur xususiyatidan foydalanish maqsadga muvofiqdir. Bunday oddiy simvolli hisoblashlar *aniqmas integral* uchun 4.2-rasmda keltirilgan.



4.2-rasm.

Simvolli hisoblashlarni bajarishda ikkita asosiy vosita mavjud:

- Symbolics (Simvolli hisoblash) menyusi;
- Matematika panelidan Symbolic paneli.

Bu vositalar ancha murakkab simvolli hisoblashlarda qo’llaniladi. Hozir esa oddiy simvolli hisoblashni bajarishning eng sodda usuli, ya`ni tez-tez ishlatilib turiladigan usullardan biri - *simvolli tenglik belgisi* ($\rightarrow$) usulini ko’rib chiqamiz. Quyida bu usuldan foydalanishning ketma-ket tartibi berilgan:

1. Matematika panelidan Calculus Toolbar (Hisoblash paneli) bo’limi tanlanadi.
2. Ochilgan panel oynasidan Calculus(Hisoblash)ni tanlab, aniqmas integralni ajratib olinadi(misol sifatida).
3. Kiritish joylari to’ldiriladi, ya`ni funksiya nomi va o’zgaruvchi nomi kiritiladi.
4. Simvolli ($\rightarrow$) belgisi kiritiladi. Natija hosil qilinadi.

Odatda integral ostidagi funksiyaning boshlang’ich fuksiyasini topish matematik jihatdan ancha qiyinchilik tug’diradi, ayrim funksiyalar uchun esa boshlang’ich funksiyani topishning mutlaqo iloji yo‘q. Shuning uchun, kerak bo‘lgan aniqlikda **aniq integral**larni hisoblash algoritmlarining ishlab chiqilishi va dasturlarining yaratilishi dolzarb masalalardan hisoblanadi.

Aniq integralni hisoblash ta`rifiga ko‘ra , u

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

limitga teng. Bu yerda $\Delta x_k - [a,b]$ kesmani n ta bo‘lakka bo‘lgandagi k- bo‘lagining uzunligi, ξ_k -k-kesma ichidagi biror nuqta.

Aniq integralni taqribiy hisoblashning barcha usullari yuqoridagi formulaga asoslangan bo‘lib, Δx_k va ξ larni har xil tanlab olib, turli taqribiy integrallash formulalari hosil qilinadi.

Amalda eng ko‘p qo‘llaniladigani to‘g’ri to‘rtburchaklar, trapetsiyalar va Simpson formulalaridir.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Integral so‘zining ma`nosini bilasizmi?
2. Matematik modeli aniq integrallar bilan ifodalanadigan amaliy jarayonlarni bilasizmi? Ularga misollar keltira olasizmi?
3. MathCAD dasturida egri chiziqli trapetsiyaning yuzi qaysi formula bilan hisoblanadi?
4. Aniq integralni hisoblovchi Nyuton-Leybnis kabi formulalar mavjud bo‘la turib, taqribiy usullarni qo‘llash zaruriyati paydo bo‘lishining sababi nimada deb o‘ylaysiz?
5. Aniq integralni hisoblashda qaysi usullardan foydalaniladi?

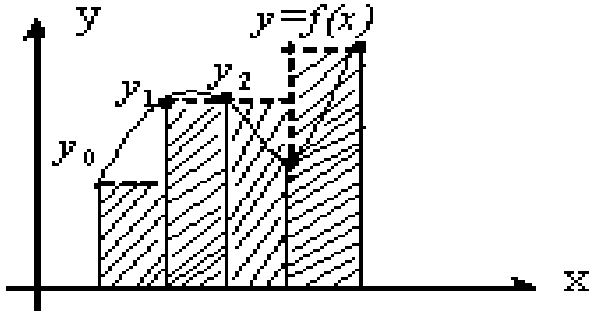
2-§. To’g’ri to’rtburchaklar usuli

O’quv modullari

Egri chiziqli soha, bo‘linish qadami uzunligi, o‘ng to‘g’ri to‘rtburchaklar usuli, chap to‘g’ri to‘rtburchaklar usuli, hisoblash formulasi xatoligi.

Integral tarixan egri chiziqlar bilan chegaralangan figuralarning yuzini, xususan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblash munosabati bilan kelib chiqqan. Mazkur usul ham yuzani to‘g’ri to‘rtburchaklar bilan to‘ldirib taqriban hisoblashga asoslangan. Trapetsiyaning asosi bo‘lgan $[a;b]$ kesmani $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ nuqtalar bilan n ta kesmalarga bo‘lamiz. U holda bo‘linish oralig’i uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$ formula bilan ifodalanadi. $x_0 = a$ deb, $x_i = x_{i-1} + h$ nuqtalarni belgilab olamiz, bunda $i = 1,2,3,...,n$. $[a,b]$ oraliqning tugun nuqtalari $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ dan chegaraviy $y = f(x)$ egri chiziq bilan kesishgunga qadar vertikal parallel to‘g’ri chiziqlar o‘tkazamiz va kesishish nuqtalarining ordinatalarini

$y(x_1), y(x_2), \ldots, y(x_i), \ldots$ kabi belgilaymiz. Har bir oraliqdagi ordinatasi uzunligi $y(x_i)$ ga teng to‘g’ri to‘rtburchakning yuzalarini topamiz:



4.3-rasm

Hosil qilingan to‘g’ri to‘rtburchaklarning yuzalarini qo‘shamiz:

$$S = h \cdot (y(x_1) + y(x_2) + y(x_3) + \ldots + y(x_n)) = h \cdot \sum_{k=1}^{n} y(x_k)$$

Yuzalarni hisoblashda $k = 1,2,3,\ldots,n$ deb olsak, vertikal to‘g’ri chiziqlarga nisbatan o‘ng tomondagi to‘g’ri to‘rtburchaklar olingani uchun o‘ng to‘g’ri to‘rtburchaklar usulining formulasi kelib chiqadi:

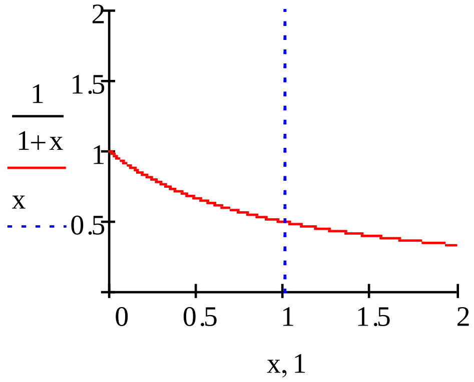
$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h\left[f(a+h) + \ldots + f(a + n \cdot h)\right] = h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(a + k\,h)$$

$k = 0,2,\ldots,n-1$ deb olsak, vertikal to‘g’ri chiziqlarga nisbatan chap tomondagi to‘g’ri to‘rtburchaklar olingani uchun, chap to‘g’ri to‘rtburchaklar usulining formulasi kelib chiqadi:

$$S = \int_b^a f(x)dx \approx h[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a + (i-1)h)] = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh)$$

Agar $f(x)$ funksiya ikki marta differensiallanuvchi bo‘lsa ishchi formulani hisoblash xatoligi $R_n = \dfrac{(b-a)^3}{2n^2} f''(\xi)$, $a \le \xi \le b$ formula bilan aniqlanadi.

Misol: $S := \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ yuzani hisoblash kerak. Aniq integralni taqribiy hisoblashning to’g’ri to’rtburchaklar usuli uchun ishlab chiqilgan algoritmlarga mos dastur kodlari MathCAD dasturiga kiritiladi.



4.4-rasm.

Mazkur usulga mos ishlab chiqilgan dasturlar paketiga mos dasturlash kodlari MathCADning ishchi oynasiga quyidagi tartibda kiritladi.

$$
T\_u(a,b,n,f) := \left|\begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{(b-a)}{n} \\ s \leftarrow 0 \\ \text{for } j \in 1..n \\ \quad \left|\begin{array}{l} x_j \leftarrow a + h\cdot(j) \\ s \leftarrow s + f\left(x_j - \dfrac{h}{2}\right) \end{array}\right. \\ s \leftarrow s\cdot h \\ s \end{array}\right.
$$

$f(x) := \dfrac{1}{1+x}$ integral osti funksiyani kiritish va prosedurani ishlatish orqali quyidagi natijani olish mumkin:

$$T\_u(0,1,100,f) = 0.693$$

Demak, [0,1] oraliqda muayyan qadam bilan olingan f funksiya osti aniq integralning qiymati 0.693 ga teng ekan.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. To‘g’ri to‘rtburchaklar usulining mohiyati nimada?
2. To‘g’ri to‘rtburchaklar usulining geometrik ma`nosi qanday tavsiflanadi?
3. MathCAD dasturida chap va o‘ng to‘g’ri to‘rtburchaklar usulining ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?

3-§. Trapetsiya usuli

O’quv modullari

Trapetsiya usulinig ishchi algoritmi, trapetsiya usulining geometrik ma`nosi, Trapetsiya usuli xatoligi.

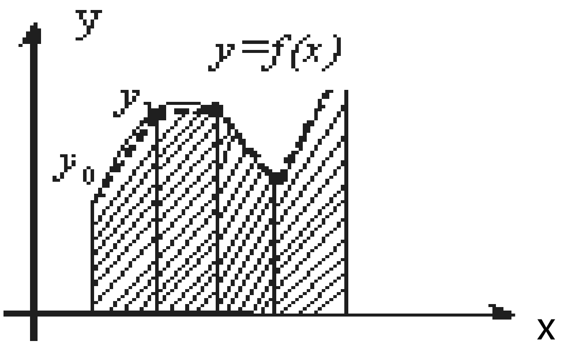
Bu usulda ham to‘g’ri to‘rtburchaklar usulidagi kabi $[a;b]$ kesmani $a = x_0, x_1, ..., x_n = b$ nuqtalar bilan n ta teng bo‘lakka bo‘lamiz. Har bir tugun nuqtalar orasidagi masofa $h = \frac{b-a}{n}$.

$[a;b]$ kesmani bo‘luvchi x_i nuqtalardan chegaraviy egri chiziq bilan kesishgunga qadar perpendikulyarlar o‘tkazamiz. Egri chiziq mos nuqtalarining ordinatalarini $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \ldots, y_{n-1} = f(x_{n-1}), y_n = f(x_n)$ deb belgilaymiz.

Perpendikulyarlarning $y = f(x)$ chiziq bilan kesishgan qo‘shni nuqtalarini vatarlar bilan birlashtiramiz va hosil qilingan har bir trapetsiyalarning yuzini topamiz (4.5-rasm):

$$\frac{y_0 + y_1}{2} \cdot h; \quad \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot h; ...; \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \cdot h$$

Barcha n ta trapetsiya yuzini qo‘shamiz: $S = h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + \frac{y_n}{2}\right]$.



4.5-rasm.

Demak, egri chiziqli trapetsiyaning yuzi taqriban quyidagiga teng:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)$$

desak, trapetsiya usulining formulasi quyidagicha ko'rinishda beriladi.

$$S=\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right]$$

Usulning hisoblash xatoligi $R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$, $a \le \xi \le b$ formula bilan aniqlanadi.

Misol: $s := \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ Aniq integralni taqribiy hisoblashning trapesiya usuli uchun ishlab chiqilgan dasturlar paketiga mos dastur kodlari MathCADning ishchi oynasiga quyidagi tartibda kiritiladi.

$$
\mathrm{Trapet\_u}(a,b,n,f) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{(b-a)}{n} \\
s \leftarrow 0 \\
\textbf{for}\;\; j \in 1..n-1 \\
\quad \left| \begin{array}{l} x_j \leftarrow a + h\cdot j \\ s \leftarrow s + f\left(a + x_j\right) \end{array} \right. \\
s \leftarrow s + \dfrac{(f(a) + f(b))}{2} \\
s \leftarrow s\cdot h \\
s
\end{array}
\right.
$$

$f(x) := \dfrac{1}{1+x}$ integral osti funksiyani kiritish va prosedurani ishlatish orqali quyidagi natijani olish mumkin:

$$\mathrm{Trapet\_u}(0,1,100,f) = 0.6931534$$

Demak, [0,1] oraliqda muayyan qadam bilan olingan f funksiya osti aniq integralning qiymati 0.6931534 ga teng ekan.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Trapetsiya usulining mohiyati nimada?
2. Trapetsiya usuling geometrik ma`nosi qanday tavsiflanadi?
3. MathCAD dasturida trapetsiya usulining ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?
4. Aniq integralni taqribiy hisoblashning qaysi usulida aniqlik yuqori bo‘lishi mumkin. Umuman olganda, natijaning aniqligi usulning turiga bog’liqmi?

4-§. Simpson (parabolalar) usuli

O'quv modullari

Simpson usulinig ishchi algoritmi, trapetsiya usulining geometrik ma`nosi, trapetsiya usulining xatoligi, ishchi algoritmga mos algoritm blok-sxemasi, dastur ta`minoti.

Aniq integralni Simpson usulida hisoblashda, oraliqni bo'lish (bo'linishlar soni juft bo'lishi kerak) natijasida hosil qilingan yuzalarni yuqoridan parabolalar bilan chegaralangan deb faraz qilinadi va bunday yuzani hisoblash aniq integralni boshlang'ich funksiyasini topish hisobiga amalga oshiriladi.

$[a,b]$ kesma uzunligini $h=\dfrac{b-a}{2n}$ bo'lgan $2n$ ta juft bo'lakka $x_1, x_2, ..., x_{2n-1}, x_{2n}$ nuqtalar orqali ajratamiz va $[x_0, x_2], [x_2 x_4], ..., [x_{2n-2}, x_{2n}]$ kesmalarni hosil qilamiz. Bu kesmalarning o'rtalari mos ravishda $x_1, x_3, ..., x_{2n-1}$ nuqtalar bo'ladi. U holda hisoblanayotgan aniq integralni

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx + ...$$

ko'rinishidagi integral yig'indiga ajratamiz. Har bir $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ ($i=0$ dan $n-1$ gacha) kesmalarda $(x_{2i}, y_{2i}), (x_{2i+1}, y_{2i+1}),\ (x_{2i+2}, y_{2i+2})$ nuqtalar orqali hamma vaqt parabola o'tkazish mumkin, shu bilan birga bunday parabola $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ kesmada yagona bo'ladi. Yordamchi parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzi taqriban berilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} (ax^2 + bx + c)dx$$

Parabola tenglamasiga tegishli har uchta a,b,c noma`lum uchun quyidagi sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} ax_{2i}^2 + bx_{2i} + c = y_{2i} \\ ax_{2i+1} + bx_{2i+1} + c = y_{2i+1} \\ ax_{2i+2} + bx_{2i+2} + c = y_{2i+2} \end{cases}$$

Hosil bo‘lgan a,b,c noma`lumli uchta tenglamalar sistemasini yechib, a,b,c larning qiymatini integral ifodaga qo‘yib, aniq integralni Nyuton-Leybnis formulasi bilan hisoblaymiz. Har bir kesmalar uchun ularning qiymatini qo‘shib, parabolalar usuliga mos ishchi formulani hosil qilamiz.

Usulning ishchi formulasi quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\cdot\sum_{k=1}^{n} f(a+(2i-1)h)+2\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f(a+2ih)\right]$$

Nazariy tomondan Simpson formulasi yuqoridagi ikki formulaga nisbatan ancha aniqdir, chunki bunda xato

$$R_n(x)=-\frac{(b-a)^5}{180n^4}\quad f^{IV}(\eta)\ \ ,a\le\eta\le b$$

formula bilan aniqlanadi. Ammo, xatolik funksiyasi integral ostidagi funksiyaning 4-tartibli hosilasi mavjudligini talab qiladi. Shuning uchun, ba`zi bir funksiyalar uchun Simpson formulasi to‘g’ri to‘rtburchaklar va trapetsiyalar formulalaridan yomonroq natija berishi mumkin.

Taqribiy qiymatni aniqligini tekshirish uchun aniq integrallanadigan funksiya uchun u yo bu formulani qo‘llab ko‘rish foydali bo‘ladi.

Misol: $s:=\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ aniq integralni taqribiy hisoblashning Simpson(parabolalar) usuli uchun ishlab chiqilgan algoritmlarga mos dastur kodlari MathCAD dasturiga kiritiladi.

$$\text{Simpson}(a,b,n,f) := \left| \begin{array}{l} m \leftarrow \dfrac{n}{2} \\ h \leftarrow \dfrac{(b-a)}{2\cdot m} \\ s \leftarrow f(a) + f(b) \\ s1 \leftarrow 0 \\ s2 \leftarrow 0 \\ \text{for } k \in 1..m-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_k \leftarrow a + 2\cdot h\cdot k \\ s1 \leftarrow s1 + f\left(x_k\right) \end{array} \right. \\ \text{for } k \in 1..m \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_k \leftarrow a + (2k-1)h \\ s2 \leftarrow s2 + f\left(x_k\right) \end{array} \right. \\ s \leftarrow \dfrac{h}{3}(s + 2\cdot s1 + 4s2) \\ s \end{array} \right.$$

Integral osti funksiyani kiritish va prosedurani ishlatish orqali quyidagi natijani olish mumkin:

$$\text{Simpson}(0,1,100,f) = 0.6931472$$

Demak, [0,1] oraliqda muayyan qadam bilan olingan f funksiya osti aniq integralning qiymati 0.6931472 ga teng ekan.

Ishlab chiqilgan algoritmlarning va yaratilgan dasturlarning to‘g’riligini tekshirib ko‘rish uchun test misolini tanlab olaylik va uning qiymatini aniqlaylik:

$$I = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - x + 5)dx = \left[\frac{x^4}{4} + 2\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x \right]\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 5 = 5 + \frac{3+8}{12} - \frac{1}{2} = 5 + \frac{11}{12} - \frac{1}{2} =$$

$$= 5 + \frac{11-6}{12} = 5\frac{5}{12}$$

Demak, integralning aniq qiymati $5\frac{5}{12}$ yoki 5,41(6) ga teng ekan.

Dastur ishlashi uchun zarur bo‘lgan boshlang’ich qiymatlar: *a=0,* *b=1,* *n=20*

Berilgan qiymatlarni kiritib, yuqoridagi algoritmlar asosida dastur ta`minotini ishlatib ko‘ramiz. Ulardan olingan natijalar:

1) To‘g’ri to‘tburchaklar usulida: *S=5,4236673*

2) Trapetsiya usulida: *S=5,41566723*

3) Simpson usulida: *S=5,4166666*

Olingan natijalarning barchasi aniq yechimga yaqindar. Lekin, usullardan eng yaxshi natija bergani Simpson usuli bo‘lsa, eng yomon natija to‘g’ri to‘rtburchaklar usulidan olindi. Mantiqan ham olingan natijalar rostdir. Demak, yuqorida berilgan algoritm va dasturlar to‘g’ri, amalda ishlatish uchun yaroqli.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Simpson usulining mohiyati nimada?
2. Simpson usulining geometrik ma`nosi qanday tavsiflanadi?
3. Simpson usulining ishchi formulasi qanday hosil qilinadi?
4. Integral osti funksiyaning xususiyati aniq integralni taqribiy hisoblash usulini tanlashda muhim omil bo‘la oladimi? Fikringizni tushuntiring.

4– BOB BO’YICHA XULOSALAR.

- ✓ Ushbu bobda aniq integralning mohiyati, egri chiziqli trapesiyaning yuzini topish masalasi, aniq integralni hisoblash usullari va ularning imkoniyatlari haqida zarur ma`lumotlar berildi.
- ✓ MathCAD dasturida aniq integralni taqribiy hisoblashning to’g’ri to’rtburchaklar, trapesiya va Simpson usullari uchun hisoblash algoritmlariga mos amaliy dasturlar paketlari ishlab chiqildi.
- ✓ Barcha usullarning mohiyati ularning geometrik ma`nolari yordamida tushuntirildi, Barcha taqribiy usullar uchun ishlab chiqilgan dastur paketlari MathCAD dasturida aniq masalalar uchun ishlatib ko’rildi, olingan natijalar tahlil etildi.

5-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH

Ma`lumki, ko'pincha amaliy masalalarni yechishda, dastlab uning matematik modeli fizik, mexanik, kimyoviy va boshqa qonuniyatlar asosida tuziladi. Matematik model asosan algebraik, differensial, integral va boshqa tenglamalardan iborat bo'ladi. Ayniqsa, oddiy differensial tenglamalar juda ko'p muhandislik masalalarini yechishda matematik model rolini o'ynaydi. Shuning uchun, differensial tenglamalarning ma`lum shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini topish katta ahamiyatga ega.

Differensial tenglamalar ikkita asosiy sinfga bo'linadi: oddiy differensial tenglamalar va xususiy hosilali differensial tenglamalar. Xususiy hosilali differensial tenglamalarga keyinroq batafsil to'xtalamiz.

Uzhbu bobda oddiy differensial tenglama va differensial tenglamalar sistemasini yechishga mo'ljallangan MathCAD dasturining standart funksiyalari qaraladi. Ixtiyoriy tartibli oddiy differensial tenglama va ularning sistemasi uchun Koshi masalasini yechish texnologiyasi tavsiya etiladi.

1-§. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasi haqida asosiy tushunchalar. Koshi masalasi

O'quv modullari

Differensial tenglama, oddiy differensial tenglama, birinchi tartibli oddiy differensai tenglama, differensial tenglamalarning yechimi, xususiy yechim, Koshi masalasi, normal sistema, bir jinsli chiziqli sistema.

Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchi, noma`lum funksiya va uning turli tartibli hosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi, ya`ni

$$f(x, y, y', \ldots. y^{(n)}) = 0.$$

Agar noma`lum funksiya bitta argumentga (o'zgaruvchiga) bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama *oddiy differensial* tenglama, agar u bir nechta argumentga bog'liq bo'lsa, xususiy hosilali differensial tenglama deb ataladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unga kiruvchi yuqori hosilaning (yoki differensialning) tartibiga aytiladi. Masalan, birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar quyidagi ko'rinishlarning birida beriladi:

$$F(x, y, y') = 0$$

$$y'(x) = f(x, y)$$

$$M(x, y) \cdot dx + N(x, y) \cdot dy = 0$$

Berilgan differensial tenglamani qanoatlantiradigan har qanday $y=\varphi(x)$ funksiya, ya`ni tenglamada $y(x)$ ni va uning hosilalarini $\varphi(x)$ va uning tegishli hosilalari bilan almashtirilganda berilgan tenglamani ayniyatga aylantiradigan funksiya differensial tenglamaning yechimi deb ataladi.

Agar tenglamani qanoatlantiradigan funksiya $F(x,y)=0$ ko'rinishdagi munosabat orqali yoki parametrik berilgan bo'lsa, u holda ular differensial tenglamaning integrali nomi bilan yuritiladi.

Differensial tenglamaning yechimini analitik ko'rinishda topish aniqmas integralni hisoblashga keltiriladi. Shuning uchun ham yechim o'zgarmas ***c*** parametrga bog'liq bo'lib, u differensial tenglamaning umumiy yechimi deb ataladi va quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y = \varphi(x, c)$$

umumiy integral esa $F(x,u,s)=0$ ko'rinishga ega bo'ladi.

Shunday qilib, differensial tenglama yechimga ega bo'lsa, yechimni ifodalovchi funksiyalar cheksiz ko'p bo'ladi. Bu funksiyalardan birini ajratib olish uchun argumentni birorta qiymatiga mos keladigan yechim qiymatini ko'rsatish kerak, ya`ni

$$x = x_0 \quad \text{da} \quad y(x_0) = y_0$$

ko'rinishdagi shartning berilishi zarurdir. Bunday shart *boshlang'ich shart* deyiladi.

Yuqorida keltirilgan $y=\varphi(x,c)$ tenglamalardan birini $y(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi *u(x)=φ(x) ye*chimi (yoki *F(x,u)=0* integrali) shu differensial tenglamaning **xususiy yechimi** (yoki xususiy integrali) deb ataladi.

Differensial tenglamaning berilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish *Koshi masalasi* nomi bilan yuritiladi.

Shuni ta`kidlash lozimki, ko'plab amaliy masalalar yechimni analitik ko'rinishda olib bo'lmaydigan differensial tenglamalarga keltiriladi. Bunday hollarda taqribiy yechish usullariga murojaat qilishga to'g'ri keladi. Hozirgi zamon hisoblash matematikasida differensial tenglamalarning yechimini istalgan aniqlik bilan son ko'rinishda olish mumkin bo'lgan o'nlab, hatto yuzlab taqribiy (sonli) yechish usullari yaratilgan va ulardan mutaxassislar amalda samarali foydalanadilar.

$y'(x)=f(x,y)$ tenglamaning $y(x_0)=y_0$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini birorta [*a;b*] kesmada to'rtinchi tartibli **Runge-Kutta** usulini qo'llab topish uchun u quyidagi rekurrent formula ko'rinishda berilgan diskret tenglama bilan almashtiriladi:

$$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}\cdot(m_1+2\cdot m_2+2\cdot m_3+m_4)$$

$$m_1=f(x_k,y_k)$$

$$m_2=f\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+m_1\cdot\frac{h}{2}\right)$$

$$m_3=f\left(x_k+\frac{h}{2},\ y_k+m_2\cdot\frac{h}{2}\right);$$

$$m_4=f(x_k+h,\ y_k+m_3\cdot h)$$

Bu yerda $h=\frac{b-a}{n}$ – integrallash qadami; n – integrallash oralig'ining bo'linish nuqtalari soni; $x_k=a+k\cdot h$ – bo'linish (integrallash) nuqtasi; y_k – yechimning x_k nuqtadagi taqribiy qiymati, $k=0,1,2,\ \dots\ ,n-1$. Mazkur hisoblashlar birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning ildizini yuqori aniqlikda hisoblash imkonini beradi.

Tabiiy hodisalarni o'rganishda fan va texnikaning turli sohalariga tegishli ko'plab amaliy masalalarni yechishda qaralayotgan voqea va jarayonlarga mos keluvchi qonuniyatlarni aks ettiruvchi matematik modellar oddiy differensial tenglamalar yoki xususiy hosilali differensial tenglamalar shaklida ifodalanadi.

Masalan:

1) Havo bosimining balandlikka bog'liq holda o'zgarishiga mos keluvchi matematik model quyidagi differensial tenglama ko'rinishida hosil qilinadi:

$$p'(h) = \frac{d\breve{p}}{dh} = -k \cdot p(h),$$

bu yerda *h* – balandlik; *p(h)* – havo bosimi.

Bu tenglamani berilgan boshlang'ich shartlar asosida yechib, havo bosimining balandlikka bog'liq holda o'zgarish qonuniyati $p = \varphi(h)$ topiladi.

2) Yuqumli kasallikning tarqalishi (epidemiya) natijasida aholining kasallikka chalinish qonuniyati (dinamikasi) sodda hol uchun quyidagi birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi:

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{dx}{dt} = -k_1 \cdot x(t) \cdot y(t), \\ y'(t) = \dfrac{dy}{dt} = k_1 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_2 \cdot y(t), \\ z'(t) = \dfrac{dz}{dt} = -k_2 \cdot y(t). \end{cases}$$

bu yerda *x(t)* – qaralayotgan *t* vaqtdagi aholining sog'lom, lekin kasallikka chalinishi mumkin bo'lgan qismi; *y(t)* – kasallikka chalinganlar soni; *z(t)* – kasallikdan tuzalayotganlar, boshqalardan chegaralab qo'yilganlar, sog'lom va immunitetga ega bo'lganlar soni; k_1 – birlik vaqt oralig'ida kasallikka chalinish koeffisienti; k_2 – birlik vaqt oralig'ida kasallikdan tuzalish koeffisienti.

$N = x(t) + y(t) + z(t)$ - *t* paytdagi aholi soniga teng bo'lib, qaralayotgan modelda aholining *t* paytdagi ko'payishi (tug'ilish) hisobga olinmagan.

3) Uzunligi *l* ga teng bo'lgan va quyi qismidan mahkamlangan prizma shak-lidagi po'lat simning o'z og'irligi ostida egilish qonuniyatini topish quyidagi Bessel tenglamasi deb ataluvchi ikkinchi tartibli differensial tenglamani yechishga keltiriladi:

$$y''(x)+\frac{1}{x}\cdot y'(x)+\left(1-\frac{1}{9x^2}\right)\cdot y(x)=0$$

4) Yupqa metall plastinkada issiqlikning tarqalish dinamikasi quyidagi ikki o'lchovli xususiy hosilali differensial tenglamani berilgan boshlang'ich va chegaraviy shartlar asosida yechish orqali o'rganiladi:

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=D\cdot\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+F(x,y,t,u)$$

Yuqorida keltirilgan misollardan ko'rinib turibdiki, differensial tenglamalar va ularni yechish usullarini o'rganish muhim amaliy ahamiyatga ega.

Birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal sistemasi. Birinchi tartibli n ta differensial tenglamalarning normal sistemasi boshlang'ich shartlar bilan umumiy holda quyidagicha ifodalanadi:

$$\begin{cases} y_1'(x)= f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n), \\ y_2'(x)= f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n), \\ \quad\dots \\ y_n'(x)= f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n), \end{cases}$$

$$y_1(x_0)=y_{1,0},\quad y_2(x_0)=y_{2,0},\ \dots,\ y_n(x_0)=y_{n,0},$$

bu yerda $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0}$ - berilgan sonlar.

Berilgan sistemaning berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi deb ataladi.

Birinchi tartibli n ta differensial tenglamalarning normal sistemasining umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda topiladi:

$$\begin{cases} y_1(x)=\varphi_1(x,c_1,c_2,\dots,c_n), \\ y_2(x)=\varphi_2(x,c_1,c_2,\dots,c_n), \\ \quad\dots \\ y_n(x)=\varphi_n(x,c_1,c_2,\dots,c_n), \end{cases}$$

bu yerda $c_1, c_2, \dots, c_n$ - o'zgarmaslar.

Differensial tenglamalar sistemasi va berilgan boshlang'ich shartlarni vektor shaklida ham ifodalash mumkin:

$$\mathbf{Y}'(x)=\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\mathbf{F}(x,y), \qquad \mathbf{Y}(x_0)=\mathbf{Y}_0$$

Bu yerda $\mathbf{Y}(x)=(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x))$ - koordinatalari (tashkil etuvchilari) qidirilayotgan yechimlardan iborat vektor funksiya; $\mathbf{Y}_0=(y_{1,0},y_{2,0},...,y_{n,0})$- koordinatalari berilgan boshlang'ich shartlardan iborat vektor; $\mathbf{F}(x,y)=(f_1(x,y_1,...,y_n),f_2(x,y_1,y_2,...,y_n),...,f_n(x,y_1,y_2,...,y_n))$ - koordinatalari berilgan tenglamalar sistemasining o'ng tomonida turgan funksiyalardan iborat vektor funksiya.

O'zgarmas koeffisientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. Agar $f_1(x,y_1,y_2,...,y_n), f_2(x,y_1,y_2,...,y_n),..., f_n(x,y_1,y_2,...,y_n)$ funksiyalar izlanayotgan $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x)$ funksiyalarga nisbatan chiziqli bo'lsa, differensial tenglamalarning normal sistemasi *chiziqli sistema* deyiladi. U holda chiziqli va bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar sistemasini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\begin{cases} y_1'(x)=a_{11}\cdot y_1+a_{12}\cdot y_2+...+a_{1n}\cdot y_n+b_1, \\ y_2'(x)=a_{21}\cdot y_1+a_{22}\cdot y_2+...+a_{2n}\cdot y_n+b_2, \\ \qquad \cdots \qquad\qquad\qquad \cdots \\ y_n'(x)=a_{n1}\cdot y_1+a_{n2}\cdot y_2+...+a_{nn}\cdot y_n+b_n, \end{cases}$$

bu yerda a_{ik} -koeffisientlar va $b_i(i,k=1,2,...,n)$ «ozod hadlar», yoki x ning ixtiyoriy funksiyalari bo'lishi mumkin.

Vektor-matrisa belgilashlaridan foydalanilsa sistema quyidagi ixcham ko'rinishda yoziladi:

$$\mathbf{Y}'(x)=A\cdot\mathbf{Y}+B$$

Bu yerda $\mathbf{Y}(x)=(y_1(x),y_2(x),...,y_n(x))^T$, $\mathbf{Y}'(x)=(y_1'(x),y_2'(x),...,y_n'(x))^T$,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad B=(b_1,b_2,...,b_n)^T$$

Agar berilgan differensial sistemada barcha a_{ik} va b_i lar o'zgarmas bo'lsa, ya`ni $a_{ik} = const$ va $b_i = const \ (i,k = 1,2,...,n)$ bo'lsa, u *o'zgarmas koeffisientli,* chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb ataladi, $b_i \equiv 0 \ (i = 1,2,...,n)$ bo'lganda esa *o'zgarmas koeffisientli bir jinsli* chiziqli differensial tenglamalar sistemasi deb yuritiladi.

Birinchi tartibdan yuqori tartibga ega bo'lgan barcha differensial tenglamalar yuqori tartibli differensial tenglamalar deyiladi. Umumiy holda n – tartibli differensial tenglama quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\mathbf{F}(x, y, y', y'',..., y^{(n)}) = 0$$

yoki yuqori hosilaga nisbatan yechilgan ko'rinishda quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right)$$

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi bitta o'zgarmasga bog'liq bo'lsa, ***n*** **- tartibli differensial tenglama**ning umumiy yechimi n ta o'zgarmasga bog'liq bo'ladi:

$$y(x) = \varphi(x, c_1, c_2,..., c_n)$$

va u n tartibli differensial tenglamaning yechimlari to'plamini tashkil etadi.

Umumiy yechimdan birorta xususiy yechimni olish uchun izlanayotgan funksiyaning (echimning) va uning $(n-1)-$ tartibgacha barcha hosilalarining mumkin bo'lgan $x = x_0$ nuqtadagi qiymatlari berilishi lozim, ya`ni $x = x_0$ da

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0',..., y_{(x_0)}^{n-1} = y_0^{(n-1)}$$

sonlar (boshlang'ich shartlar) beriladi.

Tartibi n ga teng bo'lgan tenglamaning boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish Koshi masalasi nomi bilan yuritiladi.

Umumiy yechimning oshkormas ko'rinishini aniqlovchi

$$\Phi(x, y, c_1, c_2,..., c_n) = 0$$

tenglama $y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y',..., y^{(n-1)}\right)$ tenglamaning **umumiy integrali** deb ataladi.

Yuqori tartibli differensial tenglamalarni birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Haqiqatan ham $y^{(n)}(x)=f\left(x,y,y',...,y^{(n-1)}\right)$ tenglama yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan *n*–tartibli differensial tenglama bo'lsin. Quyidagi belgilashlar kiritiladi:

$$\begin{aligned}
&y(x)=y_1(x),\\
&y'(x)=y_1'(x)=y_2(x),\\
&y''(x)=y_2'(x)=y_3(x),\\
&\quad \dots\\
&y^{(n-1)}(x)=y_{n-1}'(x)=y_n,\\
&y^n(x)=y_n'(x)=f(x,y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x)).
\end{aligned}$$

Natijada n – tartibli bitta tenglamadan quyidagi birinchi tartibli n ta differensial tenglamalarning normal sistemasi hosil bo'ladi:

$$\begin{cases}
y_1'(x)=y_2\,,\\
y_2'(x)=y_3\,,\\
\quad\dots\\
y_n'(x)=f(x,y_1(x),y_2(x),\dots,y_n(x))
\end{cases}$$

Berilgan boshlang'ich shartlarni yuqoridagi sistema uchun quyidagicha yozib olamiz:

$$y_1(x_0)=y_{0,1},\ y_2(x_0)=y_{0,2},\dots,y_n(x_0)=y_{0,n},$$

Misol. Beshinchi tartibli o'zgarmas koeffisentli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama uchun Koshi masalasi berilgan bo'lsin:

$$y^V-y^{IV}=x\cdot e^x-1$$

$$y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=2,\ y'''(0)=0,\ y^{IV}(0)=3$$

Berilgan yuqori tartibli differensial tenglamani birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish uchun quyidagi funksiyalarni kiritiladi:

$$y(x) = y_1(x),$$
$$y'(x) = y_1'(x) = y_2(x),$$
$$y''(x) = y_2'(x) = y_3(x),$$
$$y'''(x) = y_3'(x) = y_4(x),$$
$$y^{IV}(x) = y_4'(x) = y_5(x).$$

Bu yerda $y^V - y^{IV} = x \cdot e^x - 1$ va $y^V(x) = y_5'(x)$ ekanligini e`tiborga olib, berilgan masala birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun Koshi masalasiga keltiriladi va u quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = y_3(x), \\ y_3'(x) = y_4(x), \\ y_4'(x) = y_5(x). \\ y_5'(x) = y_5(x) + x \cdot e^x - 1 \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 2,\ y_4(0) = 0,\ \ y_5(0) = 3$$

Differensial tenglamalar sistemasini yechish masalasi keyingi paragrafda qaraladi. Yuqori tartibli, chiziqli, o'zgarmas koeffisientli bir jinsli va bir jinsli bo'lmagan oddiy differensial tenglamalar mos ravishda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = 0$$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_n \cdot y = f(x)$$

bu yerda $a_0, a_1, \ldots, a_n -$ixtiyoriy haqiqiy sonlar (ya`ni $a_i \in R, i = 0,1,2,\ldots,n$); $n > 1, a_0 \neq 0$

Masalan, $y''' + 2 \cdot y'' - y' - 2y = 0$ tenglama uchinchi tartibli chiziqli o'zgarmas koeffisentli bir jinsli differensial tenglama bo'lsa, $y'' + 2y + y = x^2 \cdot e^{-x} \cdot \cos x$ tenglama ikkinchi tartibli, chiziqli, o'zgarmas koeffisentli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaga misol bo'la oladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Differensial tenglamalar qanday sinflarga bo‘linadi?
2. Qanday tenglamalar oddiy differensial tenglamalar hisoblanadi?
3. Differensial tenglamaning umumiy yechimi nima?
4. Differensial tenglamalarnig xususiy yechimi qanda aniqlanadi?
5. Differensial tenglamalar sistemasini umumiy ko’rinishini tavsiflay olasizmi?

2-§. Oddiy differensial tenglama va oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga mo’ljallangan MathCAD dasturi tarkibidagi standart funksiyalar

O’quv modullari

Standart funksiyalar, rkfixed, Rkadapt, Bulstoer, integrallash oralig’i, Koshi masalasi, Given, Odesolve.

Differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemasi uchun ko’pincha analitik (aniq, ya`ni funksiya ko’rinishidagi) yechimlarni topish mumkin. Biroq ayrim hollarda qaralayotgan fizik jarayonni tahlil qilish, shular asosida ma`lum xulosalarga kelish uchun berilgan boshlang’ich ma`lumotlarning turli qiymatlarida, olingan analitik yechimning sonli qiymatlarini topish, ular asosida grafiklar qurish ehtiyoji tug’iladi.

Bundan tashqari shunday differensial tenglamalar va differensial tenglamalar sistemalari mavjudki, ularning yechimini analitik ko’rinishda topib bo’lmaydi. Shuning uchun ham bugungi kunda differensial tenglamalarni integrallashning taqribiy usullari keng tarqalgan. Mavjud matematik dasturiy paketlar bu usullaridan samarali foydalanib, kerakli aniqlikdagi yechimni olish imkonini beradi.

MathCAD dasturi tarkibida birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar, yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini hamda chegaraviy masalalarni sonli yechishga mo'ljallangan o'ndan ortiq standart funksiyalar mavjud bo'lib, ularning asosiylari quyida keltirilgan.

rkfixed (y, x1, x2, m, D) – bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli n ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo'llab, integrallash qadami o'zgarmas bo'lgan hol uchun yechadi.

Bu yerda shuni ta`kidlash lozimki, ***rkfixed*** funksiyasi yordamida olingan sonli yechim ***(m+1)*** satr va ***(n+1)*** ta ustunga ega bo'lgan matrisaning elementlari ko'rinishida beriladi. Matrisaning birinchi ustuni argument $x$ ning integrallash oralig'iga tegishli qiymatlari, ya`ni x_0 , x_1, x_2 , ... , x_n larni (boshlang'ich va integrallash nuqtalarini) o'z ichiga oladi. Ikkinchi ustunda $u_1(x)$ funksiyaning (ya`ni $u(x)$ funksiyaning), uchinchi ustunda $u_2(x)$ funksiyaning (ya`ni $y'(x)$ funksiyaning), to'rtinchi ustunda $u_3(x)$ funksiyaning (ya`ni $y''(x)$ funksiyaning) va hokazo oxirgi ustunda $u_n(x)$ funksiyaning (ya`ni $u^{(n-1)}(x)$ funksiyaning) qiymatlariga mos qiymatlari joylashgan bo'ladi.

Agar differensial tenglama birinchi tartibli bo'lsa, olingan sonli yechim ikkita ustunli matrisa elementlari shaklida ifodalanadi. Birinchi ustunda argument x ning qiymatlari $(x_i = x_0 + i \cdot h, \quad h = (x2 - x1)/m)$, ikkinchi ustunda esa ana shu qiymatlarga mos yechimning qiymatlari $y_i = y(x_i)$ joy oladi $(i = 0,1,...,m)$.

- ***Rkadapt (u, x1, x2, m, D)*** - bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli n ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo'llab, integrallash qadamini avtomatik tanlash yo'li bilan yechadi.
- ***Bulstoer (u, x1, x2, m, D)*** - bu funksiya birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli n ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada Bulirish-Ster usulini qo'llab, integrallash qadami o'zgarmas bo'lgan hol uchun yechadi.

Ushbu ***rkfixed, Rkadapt*** va ***Bulstoer*** funksiyalarining argumentlari bir xil ma`noni anglatadi va masalaning matematik qo'yilishi bo'yicha quyidagicha aniqlanadi: $y = (y_{0,1}, y_{0,2}, ..., y_{0,n})^T$ - komponentlari berilgan boshlang'ich shartlardan tashkil topgan vektor funksiya; *x1, x2* - mos ravishda integrallash oralig'ining boshlang'ich va oxirgi qiymati; *m* - integrallash nuqtalari soni, ya`ni integrallash oralig'i *[x1; x2]* ning o'zgarmas qadam bilan bo'linish nuqtalari soni:

$$D(x, y) = (f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), ..., f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n))^T$$

ga teng bo'lib, komponentlari (tashkil etuvchilari) differensial tenglamalar sistemasining o'ng tomonida turgan funksiyalardan iborat bo'lgan *n* ta satr va 1 ta ustundan iborat vektor funksiya; *x* - skalyar miqdor; *u=u(x)* – izlanayotgan vektor funksiya.

Birinchi tartibli $y' = f(x, y)$ tenglama uchun *D(x,u)* funksiya

$$D(x, y) = f(x, y)$$

ko'rinishda yoziladi.

Odesolve $([y], x, b, [m])$-bu funksiya ***n*** –tartibli (***n*** = 1, 2, …) oddiy differensial tenglamalar va birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini sonli yechish uchun mo'ljallangan.

Bu yerda ***u*** – berilishi shart bo'lmagan va nomi qidirilayotgan funksiya hamda koordinatalari berilgan boshlang'ich shartlardan iborat vektor (oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishda uning berilishi shart); ***x***– erkli o'zgaruvchi; ***b*** - integrallash oralig'ining oxirgi qiymati; ***t*** – berilishi shart bo'lmagan, qiymati esa integrallash qadamlari sonini bildiruvchi butun son (integrallash oralig'i ***[a; b]*** ni bo'linishlar soni) bo'lib, sonli yechimni yuqori aniqlik bilan olish uchun xizmat qiladi. (***t*** ning qiymati ortishi bilan aniqlik ham ortadi, lekin shu bilan birga, integrallash uchun sarflanadigan kompyuter vaqti ham ortib boradi).

Odesolve funksiyasi ***Given*** berilgan kalit so'z bilan birgalikda ishlatiladi. Amaliyotda ***Given*** va ***Odesolve*** juftliklari oralig'iga berilgan differensial tenglama yoki ularni sistemasi hamda berilgan boshlang'ich shartlar yoziladi (tenglik belgisini yozishda mantiqiy amal belgilari panelidagi tenglik belgisidan yoki ***[Ctrl ++]*** buyrug'idan foydalaniladi). Tenglama va boshlang'ich shartlar tarkibiga kiruvchi kattaliklarning qiymatlari ***Given*** kalit so'zdan avval sonli tenglik belgisi ***(:=)*** yordamida kiritiladi.

Masalan, $y^{(n)}(x) = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ va $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{n-1}_{(x_0)} = y_0^{(n-1)}$ tengliklar bilan berilgan ***p*** – tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasining ***Given – Odesolve*** juftligi yordamida yechish algoritmi umumiy holda quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\boldsymbol{x_0 := a}$$

$$\textbf{\textit{Given}} \quad \boldsymbol{F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0}$$

$$\boldsymbol{y(x_0) = y_0 \qquad y''(x_0) = y'_0 \quad ... \quad y^{(n-1)}_{(x_0)} = y_0^{(n-1)}}$$

$$\boldsymbol{y :=} \textit{ Odesolve } (x, b)$$

Vektor shaklida $\mathrm{Y}'(x) = \frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathrm{F}(x, y)$ tengliklar bilan berilgan ***p*** ta birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish algoritmi quyidagi amallar ketma-ketligidan iborat bo'ladi:

$$x_0 := a$$

$$\text{Given } Y'(x) = F(x, y)$$

$$Y(x_0) = Y_0$$

$$Y := \textit{ Odesolve } (Y_0, x, b)$$

Hosila belgisini ko'rsatish uchun klaviaturaning chap tomonidagi ikkinchi qatorning birinchi tugmasidan (' belgisidan) yoki hisoblash panelidagi va operatorlarning $\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$, $\frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare$ belgilaridan biridan foydalanish yoki bu operatorlarga mos $\boldsymbol{[Shift + /]}$ va $[Ctrl + Shift + /]$ buyruqlardan birini klaviatura yordamida kiritish kifoya.

1-misol. Quyida berilgan birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasini yeching.

$$\left(y\cdot\cos(y/x)-x\right)\cdot dx - x\cdot\cos(y/x)\cdot dy = 0, \qquad y=\frac{\pi}{3}, \qquad x\in[1;6]$$

Topilgan sonli yechimni berilgan analitik (aniq) yechim bilan solishtiring.

$$y_{aniq}(x)=x\cdot\arcsin\left(\ln\left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big/x\right)\right)$$

Yechish. *Given-Odesolve* juftligi yordamida qo'yilgan masalani yechish uchun avval berilgan tenglamani quyidagi ko'rinishda yozib olinadi:

$$\boldsymbol{x\cdot\cos(y/x)\cdot y' + x - y\cdot\cos(y/x) = 0}$$

So'ngra MathCAD dasturining ishchi oynasiga quyidagi buyruqlar tizimi kiritiladi.

$$\boldsymbol{a:=1 \qquad b:=6}$$

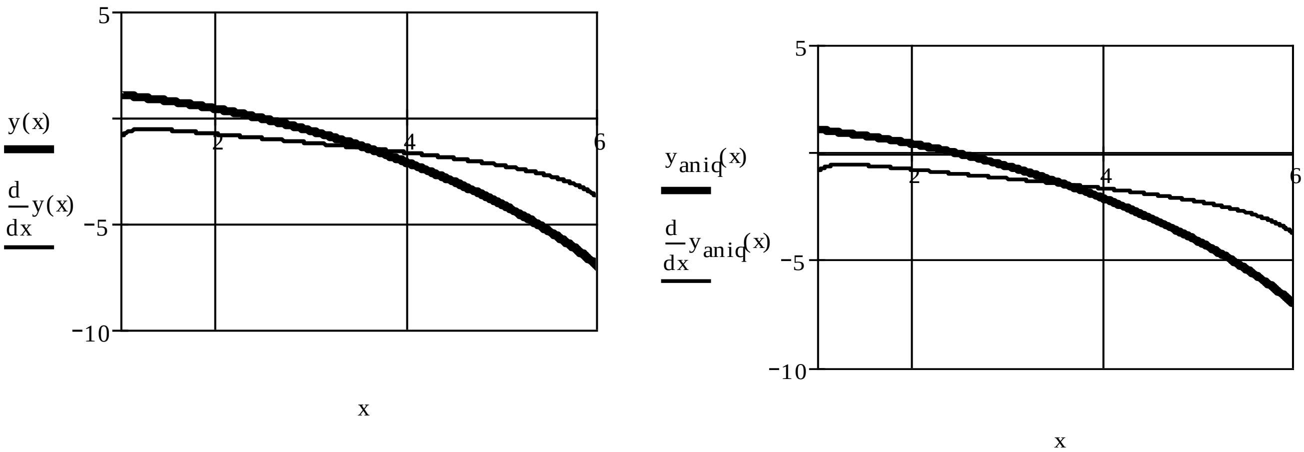
Given $\boldsymbol{x\cdot\cos(y(x)/x)\cdot y'(x)+x-y(x)\cdot\cos(y(x)/x)=0 \qquad y(a)=\frac{\pi}{3}}$

$\boldsymbol{y}$***:= Odesolve (x, b)***

Algoritmning ikkinchi bandini quyidagi ko'rinishda ifodalasa ham bo'lar edi:

Given $\boldsymbol{x\cdot\cos(y(x)/x)\cdot\frac{d}{dx}y(x)+x-y(x)\cdot\cos(y(x)/x)=0}$

Olingan **sonli yechim** va berilgan **analitik yechim**larning hamda ularning birinchi tartibli hosilalarining grafiklari 5.1-rasmda berilgan.



5.1-rasm.

x:=1,1.025..5 gacha o'zgarish orqaliqlaridagi u(x) taqribiy olingan yechim funksiyaning va aniq yechimning sonli qiymatlari quyidagi jadvallarda keltirilgan.

$y(x) =$	$y_{aniq}(x) =$	$\frac{d}{dx}y(x) =$	$\frac{d}{dx}y_{aniq}(x) =$
1.047	1.047	-0.885	-0.953
1.004	1.004	-0.796	-0.779
0.968	0.968	-0.685	-0.689
0.935	0.935	-0.643	-0.642
0.903	0.903	-0.617	-0.617
0.873	0.873	-0.607	-0.607
0.843	0.843	-0.606	-0.606
0.812	0.812	-0.611	-0.611
0.781	0.781	-0.621	-0.621
0.75	0.75	-0.633	-0.633
0.718	0.718	-0.648	-0.648
0.685	0.685	-0.664	-0.664
0.651	0.651	-0.682	-0.682
0.617	0.617	-0.7	-0.7
0.581	0.581	-0.719	-0.719
0.545	0.545	-0.739	-0.739
0.508	0.508	-0.759	-0.759
0.469	0.469	-0.779	-0.779

Keltirilgan natijalarni solishtirib, tahlil qilish natijasida ***Odesolve*** funksiyasi yordamida olingan sonli yechimning yuqori aniqlik bilan topilganiga ishonch hosil qilish mumkin.

Qo'yilgan masalani ***rkfixed*** funksiyasi yordamida yechish uchun esa berilgan tenglamani birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan ko'rinishda yozib olinadi:

$$y'(x) = \frac{y \cdot \cos(y/x) - x}{x \cdot \cos(y/x)}$$

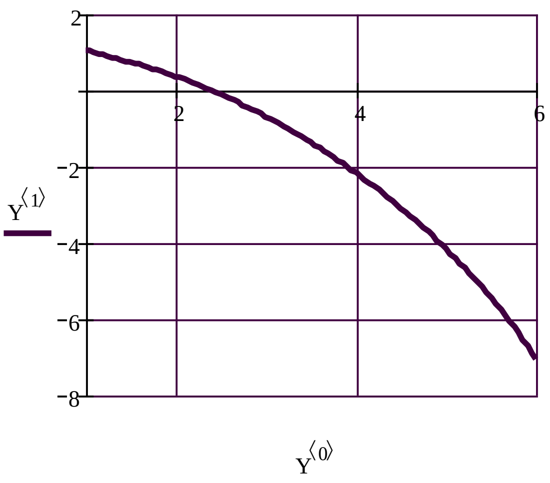
U holda algoritm quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:

$$D(x, y) := \frac{y \cdot \cos(y/x) - x}{x \cdot \cos(y/x)}$$

$$a := 1 \quad b := 6 \quad y_0 := \frac{\pi}{3} \quad m := 100$$

$$Y := rkfixed\,[y_0, a, b, m, D]$$

Dastur ishchi oynasida hosil qilingan natijalar quyidagi grafik va jadvalda berilgan:

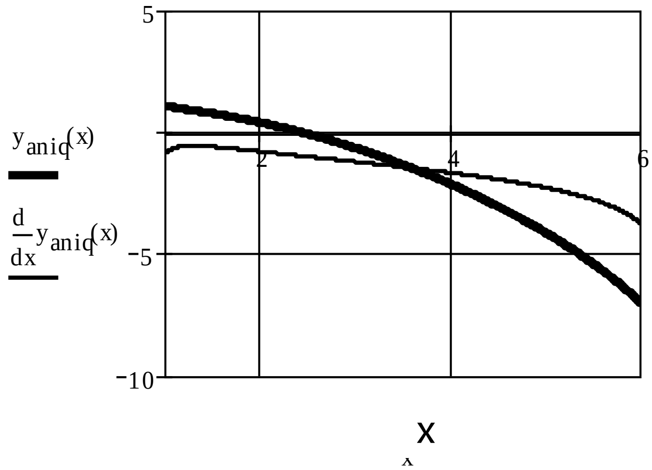


Y =

	0	1
0	1	1.047
1	1.05	1.004
2	1.1	0.968
3	1.15	0.935
4	1.2	0.903
5	1.25	0.873
6	1.3	0.843
7	1.35	0.812
8	1.4	0.781
9	1.45	0.75
10	1.5	0.718

5.2-rasm. *rkfixed* funksiyasi yordamida olingan sonli yechimning grafigi

$$\boldsymbol{y_{aniq}(x) = x \cdot a\sin\left(\ln\left(e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big/ x\right)\right)}$$



5.3-rasm.

Hosil qilingan grafiklar va sonli natijalar tahlili ishlab chiqilgan algoritmning to’g’riligini ko’rsatadi.

Endi Runge -Kutta usuli yordamida Koshi masalasini Mathcad dasturida yechishning amaliy dasturlar paketini yaratish masalasini qaraymiz:

Bizga quyidagi Koshi masalasi berilgan edi.

$$y'(x) = \frac{y \cdot \cos(y/x) - x}{x \cdot \cos(y/x)}$$

Quyidagi boshlang’ich shart va parametrik kattaliklar berilgan:

$$y_0 := \frac{\pi}{3}, \qquad m := 100, \qquad a := 1, \qquad b := 6$$

Yuqorida keltirilgan Runge-Kutta usulining ishchi formulalaridan foydalangan holda quyidagi ma'lumotlar dastur ishchi oynasiga kiritiladi.

$$f(x, y) := \frac{y \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right) - x}{x \cdot \cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$$a := 1 \quad b := 6 \quad y0 := \frac{\pi}{3} \quad n := 100 \quad h := \frac{b - a}{n}$$

$$X(n) := \left|\begin{array}{l} X_0 \leftarrow a \\ \text{for } \; i \in 1..n \\ \quad X_i \leftarrow a + h \cdot i \\ X \end{array}\right.$$

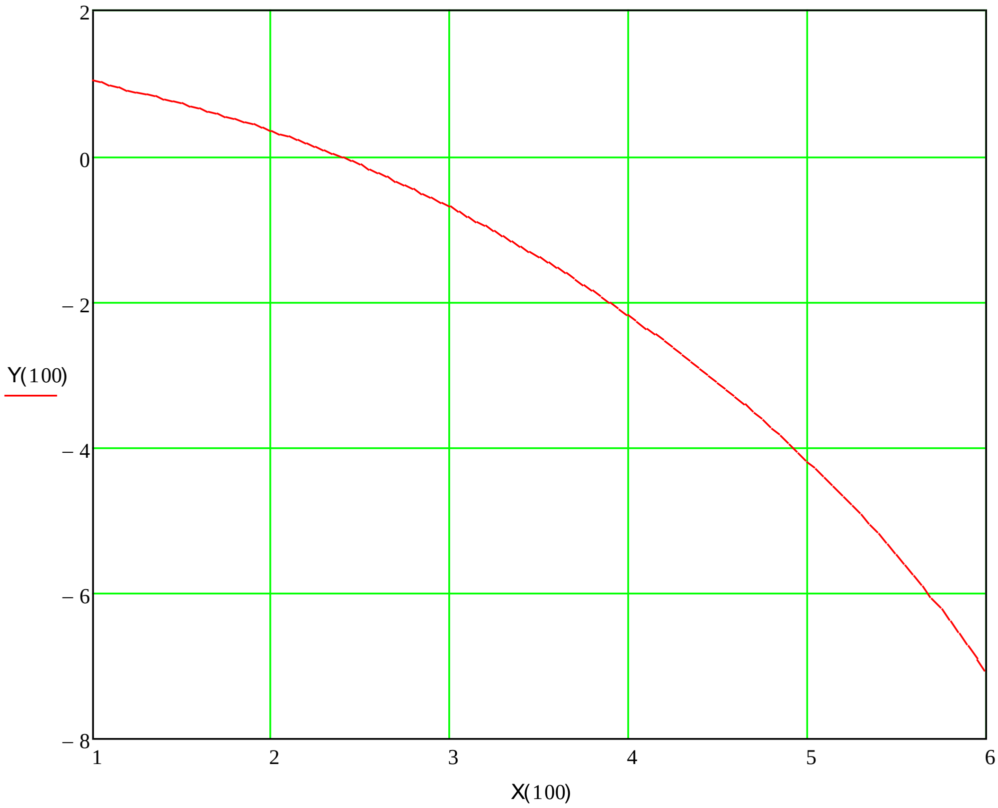
$$Y_0 := y0$$

$$Y(n) := \left|\begin{array}{l} Y_0 \leftarrow y0 \\ \text{for } \; i \in 1..n \\ \quad \left|\begin{array}{l} F1 \leftarrow f\left(X(n)_{i-1}, Y_{i-1}\right) \\ F2 \leftarrow f\left(X(n)_{i-1} + \frac{h}{2}, Y_{i-1} + \frac{h}{2} \cdot F1\right) \\ F3 \leftarrow f\left(X(n)_{i-1} + \frac{h}{2}, Y_{i-1} + \frac{h}{2} \cdot F2\right) \\ F4 \leftarrow f\left(X(n)_{i-1} + h, Y_{i-1} + h \cdot F3\right) \\ Y_i \leftarrow Y_{i-1} + \frac{h}{6} \cdot (F1 + 2 \cdot F2 + 2 \cdot F3 + F4) \end{array}\right. \\ Y \end{array}\right.$$

Runge-Kutta usulining dasturlar paketini berilgan kattaliklar uchun ishlatish orqali jadvalda berilgan natijaviy qiymatlar va rasmdagi grafik tasvir hosil qilinadi.

$Y(100) =$

	0
0	1.04719755
1	1.0044258
2	0.96795769
3	0.93479965
4	0.90338973
5	0.87281683
6	0.84250946
7	0.81209046
8	0.78130157
9	0.74996094
10	0.71793779



5.4-rasm.

Olingan natijalardan shuni xulosa qilish mumkinki qo'yilgan Koshi masalasini Mathcad amaliy matematik dasturlar paketining standart ***rkfixed*** funksiyasi, Runge-Kutta usuli hamda aniq yechimlar bilan taqqoslanganda aniq yechimlarga eng yaqini MathCADning standart funksiyalari yordamida olingan natijalar ekanligini ko'rish mumkin. Bu esa kelgusida Koshi masalasini yechishda MathCAD dasturidan samarali foydalanish imkoniyatlari mavjudligini ko'rsatadi.

2- misol. ***Odesolve*** va ***rkfixed*** funksiyalari yordamida berilgan ikkinchi tartibli o'zgarmas koeffisientli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama uchun Koshi masalasini berilgan oraliqda yeching. Topilgan sonli yechimni berilgan analitik yechim bilan taqqoslang.

$$y'' + 4\cdot y = (6x+5)\cdot e^{-2x},\ \ y(0)=0,\quad y'(0)=0.75,\quad x\in[0;\,6]$$

$$y_{aniq}(x) = -\cos 2x + \sin 2x + \left(\frac{3x}{4}+1\right)\cdot e^{-2x},$$

Echish: Given – Odesolve juftligi yordamida yechish algoritmi:

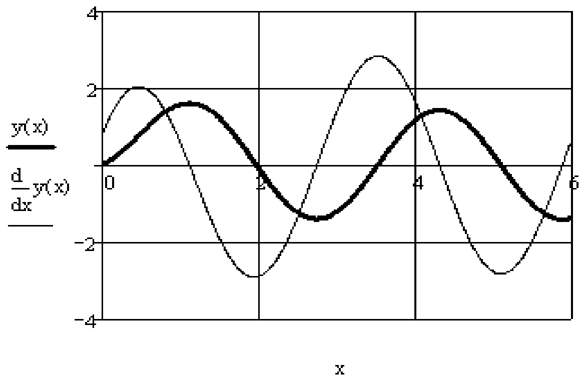
$$a:=0 \qquad b:=6$$

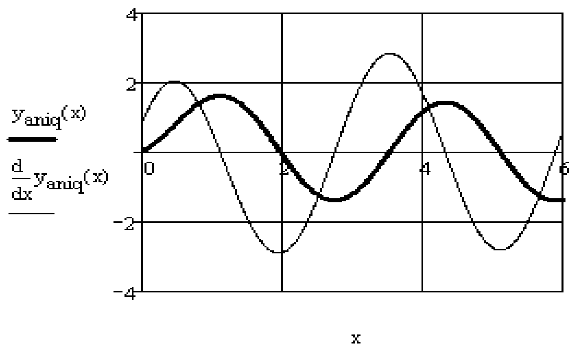
$$Given \qquad \frac{d^2}{dx^2}y(x) + 4\cdot y(x) = (6\cdot x+5)\cdot e^{-2\cdot x}$$

$$y(a)=0 \qquad y'(a)=0.75$$

$$y:=Odesolve\,(x,b)$$

Olingan sonli (taqribiy) yechim va berilgan analitik (aniq) yechimlarning grafiklari 5.5-rasmda berilgan.





5.5-rasm.

Endi xuddi shu masalaning sonli yechimini *rkfixed* funksiyasi yordamida topish algoritmini hosil qilish uchun

$$\boldsymbol{y(x) = y_1(x); \quad y'(x) = y_1'(x) = y_2(x)}$$

belgilarni kiritib, berilgan masalani quyidagi birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga keltirib olinadi:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = -4 \cdot y_1(x) + (6 \cdot x + 5) \cdot e^{-2x}, \end{cases} \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0.75, \quad x \in [0;6]$$

Yechish: *rkfixed yordamida yechish algoritmi*

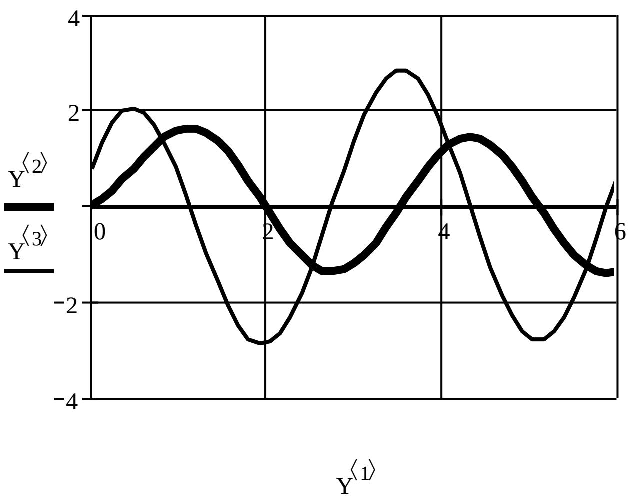
$$\text{ORIGIN} := 1$$

$$y := (0 \quad 0.75)^T$$

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ -4 \cdot y_1 + (6 \cdot x + 5) \cdot e^{-2x} \end{bmatrix}$$

$$Y := rkfixed \ (y, 0, 6, 30, D)$$

rkfixed funksiyasi yordamida topilgan sonli yechimlarning va ***y(x)***, $\boldsymbol{y'(x)}$ funksiyalarning grafiklari hamda ularning sonli qiymatlari quyidagi rasmda keltirilgan.



Y =

	0	1	2
0	0	0	0.75
1	0.12	0.124	1.293
2	0.24	0.305	1.701
3	0.36	0.526	1.951
4	0.48	0.766	2.031
5	0.6	1.006	1.941
6	0.72	1.226	1.692
7	0.84	1.407	1.302
8	0.96	1.534	0.801
9	1.08	1.596	0.221

5

5.6-rasm.

Yuqorida hosil qilingan birinchi tartibli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini ***Odesolve*** funksiyasi yordamida yechish algoritmi quyidagi ko'rinishlarning birida beriladi:

Given

$$y1'(x)=y2(x) \qquad y2'(x)=-4\cdot y1(x)+(6\cdot x+5)\cdot e^{-2x}$$

$$y1(0)=0 \; y2(0)=0.75$$

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} := Odesolve\left[\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}, x, 6\right]$$ yoki

Given

$$\frac{d}{dx}\, y1(x)=y2(x) \qquad \frac{d}{dx}\, y2(x)=-4\cdot y1(x)+(6\cdot x+5)\cdot e^{-2x}$$

$$y1(0)=0 \qquad y2(0)=0.75$$

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \end{bmatrix} := Odesolve\left[\begin{pmatrix} y1 \\ y2 \end{pmatrix}, x, 6\right]$$

3-misol. Berilgan to'rtinchi tartibli, o'zgarmas koeffisientli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama uchun Koshi masalasini ***Odosolve*** va ***rkfixed*** funksiyalari yordamida yeching.

$$y''''(x)+2\cdot k^2\cdot y''(x)+k^4\cdot y(x)=\cos(k\cdot x),$$
$$y(0)=0, \quad y'(0)=0, \quad y''(0)=0, \quad y'''(0)=2\cdot k^3, \quad x\in[0;\,15]$$

Topilgan sonli yechimni berilgan aniq yechim bilan solishtiring.

$$y_{aniq}(x)=\left(1+\frac{x}{8k^3}\right)\cdot\sin(k\cdot x)-\left(k+\frac{x}{8k^2}\right)\cdot x\cdot\cos(k\cdot x)$$

Echish. 1. ***Given – Odesolve*** juftligi yordamida yechish algoritmi (***k=0.5*** deb olamiz):

$$a:=0 \quad b:=15 \;\; k:=0.5$$

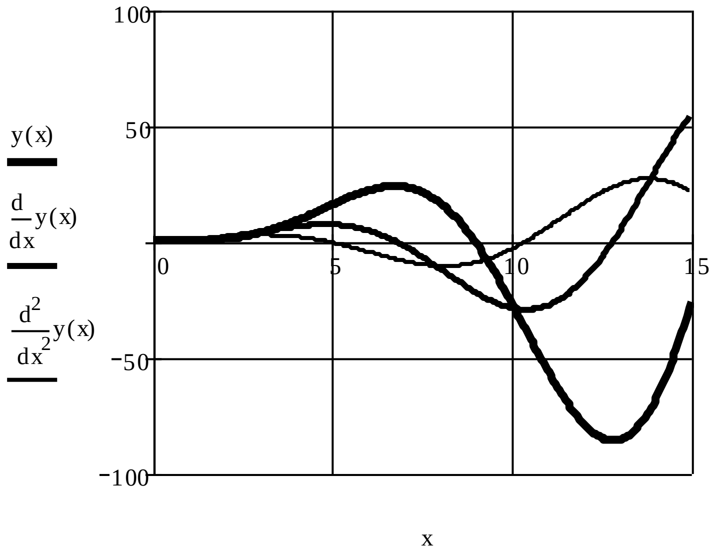
Given $$\frac{d^4}{dx^4}\, y(x)+2\cdot k^2\cdot\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)+k^4\cdot y(x)=\cos(k\cdot x)$$

$$y(a)=0 \quad y'(a)=0 \quad y''(a)=0 \quad y'''(a)=2\cdot k^3$$

$$y:=Odesolve(x,\, b)$$

$$x:=a, a+0.05\,..\,b$$

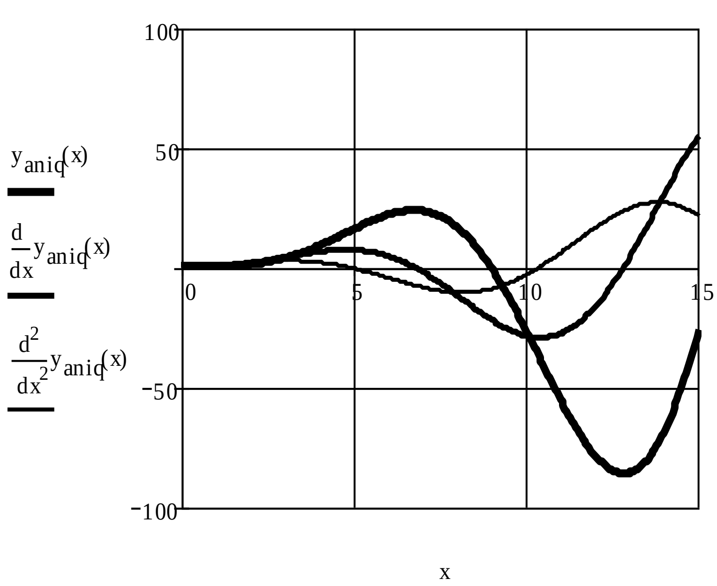
Odesolve funksiyasi yordamida topilgan sonli yechimlarning va ***aniq yechim*** funksiyalarining grafiklari hamda ularning sonli qiymatlari quyidagi rasmlarda keltirilgan.



y(x) =

0
$5.468\cdot10^{-6}$
$4.582\cdot10^{-5}$
$1.616\cdot10^{-4}$
$3.996\cdot10^{-4}$
$8.125\cdot10^{-4}$
$1.459\cdot10^{-3}$
$2.404\cdot10^{-3}$
$3.718\cdot10^{-3}$
$5.478\cdot10^{-3}$
$7.764\cdot10^{-3}$
0.011
0.014
0.019

5.7-rasm.



$y_{aniq}(x)$ =

0
$5.468\cdot10^{-6}$
$4.582\cdot10^{-5}$
$1.616\cdot10^{-4}$
$3.996\cdot10^{-4}$
$8.125\cdot10^{-4}$
$1.459\cdot10^{-3}$
$2.404\cdot10^{-3}$
$3.718\cdot10^{-3}$
$5.478\cdot10^{-3}$
$7.764\cdot10^{-3}$
0.011
0.014
0.019

5.8-rasm.

Qo'yilgan masalaning sonli yechimini ***rkfixed*** funksiyasi yordamida topish uchun ushbu

$$y(x) = y_1(x), \quad y'(x) = y_1'(x) = y_2(x), \quad y''(x) = y_2'(x) = y_3(x), \quad y'''(x) = y_3'(x) = y_4(x)$$

belgilashlarni kiritiladi. Natijada berilgan masala unga teng kuchli bo'lgan birinchi tartibli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga keladi:

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2(x), \\ y_2'(x) = y_3(x), \\ y_3'(x) = y_4(x), \\ y_4'(x) = \cos(kx) - 2 \cdot k^2 \cdot y_3(x) - k^4 \cdot y_1(x), \quad y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_3(0) = 0,\ y_4(0) = 2 \cdot k^3 \end{cases}$$

Hosil bo'lgan differensial tenglmalar sistemasini yechish algoritmi:

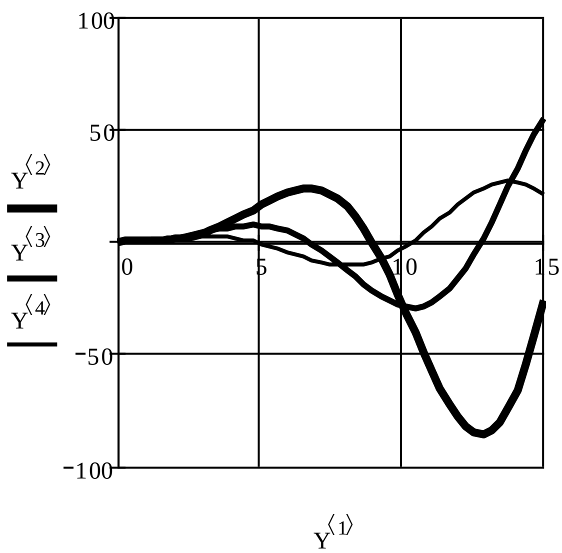
ORIGIN : =1 a:=0 b:=15 m=50

$$k := 0.5 \quad y := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \cdot k^3 \end{pmatrix}^T$$

$$D(x, y) := \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \cos(k \cdot x) - 2 \cdot k^2 \cdot y_3 - k^4 \cdot y_1 \end{bmatrix}$$

$$Y := rkfixed\,(y,\ a,\ b,\ m,\ D)$$

Hisoblash natijalari quyidagi rasmda berilgan.



Y =

	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0.3	$.462\cdot10^{-3}$	0.016	0.119
3	0.6	0.014	0.08	0.321
4	0.9	0.057	0.216	0.595
5	1.2	0.153	0.442	0.922
6	1.5	0.332	0.772	1.28
7	1.8	0.627	1.211	1.645
8	2.1	1.07	1.757	1.988
9	2.4	1.691	2.399	2.28
10	2.7	2.516	3.117	2.493
11	3	3.566	3.884	2.6

5.9-rasm.

Amaliyotda shunday masalalar uchraydiki, ularning matematik modeli sifatida olingan oddiy differensial tenglamalar yoki ularning sistemasi integrallash oralig'ining barcha nuqtalarida emas, balki berilgan bitta yoki bir nechta nuqtalarda yechiladi (masalan, oraliqni oxirgi nuqtasida). Bunday turga tegishli masalalardan keng tarqalgani dinamik sistemalarning attraktorlarini qidirish masalasidir

(***Attractor*** – bitta nuqtaga intilish ma`nosini bildiruvchi *inglizcha so'z*). Dinamik sistemalarning harakatini ifodalovchi differensial tenglamalarning turli xil nuqtalardan chiqqan (turli xil boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi) yechimlari, ya`ni harakat troektoriyalari $\mathbf{t \to \infty}$ da aynan bitta nuqtaga (attractor) asimptotik yaqinlashadi. Bunday nuqtalarni topish esa amaliy ahamiyatga egadir.

MathCAD dasturi tarkibida bu turdagi masalalarni yechishga mo'ljallangan ***rkadapt*** va ***bulstoer*** kabi standart funksiyalar mavjud. Ularning umumiy ko'rinishi va vazifalari quyida keltirilgan.

rkadapt(y, x1, x2, eps, D, kmax, h) – bu funksiya oddiy differensial tenglama yoki ularning sistemasi uchun Koshi masalasini bitta nuqtada (yoki berilgan bir nechta nuqtalarda) integrallash qadamini avtomatik tanlash (o'zgaruvchi qadam) bilan Runge-Kutta usulini qo'llab yechadi;

bulstoer(y, x1, x2, eps, D, kmax, h) – bu funksiya oddiy differensial tenglama yoki ularning sistemasi uchun Koshi masalasini bitta nuqtada (yoki berilgan bir nechta nuqtalarda). Bulirsh – Shter usulini qo'llab yechadi. Bu yerda ***eps*** – integrallash qadami o'zgaruvchi bo'lganda yechim xatoligini boshqarib turuvchi parametr (agar topilgan sonli yechim xatoligi ***eps*** dan katta bo'lsa, integrallash qadamining qiymati ***h*** – ning qiymatidan kichik bo'lguncha kichiklashadi); ***kmax*** – integrallash nuqtalarining maksimal soni (echim hosil bo'la-digan matrisaning satrlari soni, integrallash nuqtasi bitta bo'lganda ***kmax=2*** bo'ladi); ***h*** – integrallash qadamining mumkin bo'lgan eng kichik qiymati.

Amaliy masalalarni yechishda ***eps*** va ***kmax*** parametrlarning qiymatlari qaralayotgan har bir masalaning xususiyatiga qarab, foydalanuvchi tomonidan beriladi (***eps*** $\approx$ ***0.001 va kmax*** < ***1000*** qiymatlardan foydalanish tavsiya etiladi).

Bu funksiyalarni qo'llash natijasida elementlari erkli o'zgaruvchi ***x*** ning qiymatlari va ularga mos topilgan sonli yechimlardan iborat ***kmax*** ta satr va ***n+1*** ta ustunga ega bo'lgan ikki o'lchovli matrisa hosil bo'ladi (***n*** – integrallash nuqtalari soni).

MathCAD dasturi tarkibidagi rkadapt va bulstoer funksiyalarni qo'llashga doir misollar.

1-Misol. Berilgan Koshi masalasini integrallash oralig'ini oxirgi nuqtasidagi yechimini ***rkadapt*** va ***bulstoer*** funksiyalari yordamida toping

$$y'(x) + y(x) = 3 \cdot \sin(y(x) \cdot x/3), \qquad y(0) = 2, \qquad x \in [0;\ 50]$$

Qo'yilgan masalaning yechish uchun MathCAD ning ishchi oynasiga yuqorida tavsiflangan funksiyalar muayyan parametrlar bilan kiritiladi:

Echish. ORIGIN : =1 kmax:=2 a:=0 b:=50 eps:=0.001 h:=0.01

y=2 D(x,y):=-y+3sin$(x \cdot y/3)$

$$rkadapt(y,\ a,\ b,\ eps,\ D,\ k\max,\ h) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix}$$

$$bulstoer(2,\ 0,\ 50,\ 0.0001,\ D,\ 2,\ 0.001) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix}$$

yoki

Y:=rkadapt(2, 0, 50, 0.001, D, 2, 0.01)

Z:=bulstoer(2, 0, 50, 0.0001, D, 2, 0.01)

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix} \qquad (Y^T)^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0.185 \end{pmatrix}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 50 & 0.185 \end{pmatrix} \qquad (Z^T)^{\langle 2 \rangle} = \begin{pmatrix} 50 \\ 0.185 \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi masalani [0;100] oralig'iga tegishli butun nuqtalardagi yechimlarini quyidagicha topish mumkin:

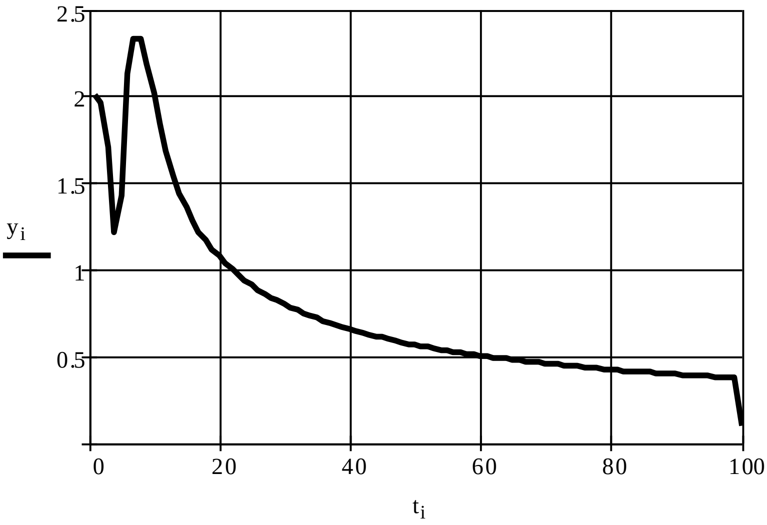
ORIGIN : = 1

H :=1 (integrallash qadami); ***a:=0*** (integrallash oralig'ining boshlang'ich qiymati); **N := 100** (integrallash nuqtalarining soni); **eps := 0.0001** (integrallash aniqligi); **h:= 0.01** (integrallash qadamini mumkin bo'lgan eng kichik qiymati); **y:= 2** (berilgan boshlang'ich shart); **D(x,y):=-y+3·sin**$(x \cdot y/3)$ (berilgan tenglamaning o'ng tomonida turgan funksiya); ***i:=1..N;*** ***t_i:= i·H*** (elementlari berilgan oraliqqa tegishli butun sonlardan iborat massiv); ***kmax:=100*** (integrallash nuqtalarining maksimal soni).

$$y_i := rkadapt\ (y,\ 0,\ t_i,\ 0.0001,\ \ D,\ \ 100,\ 0.01)_{i,2}$$

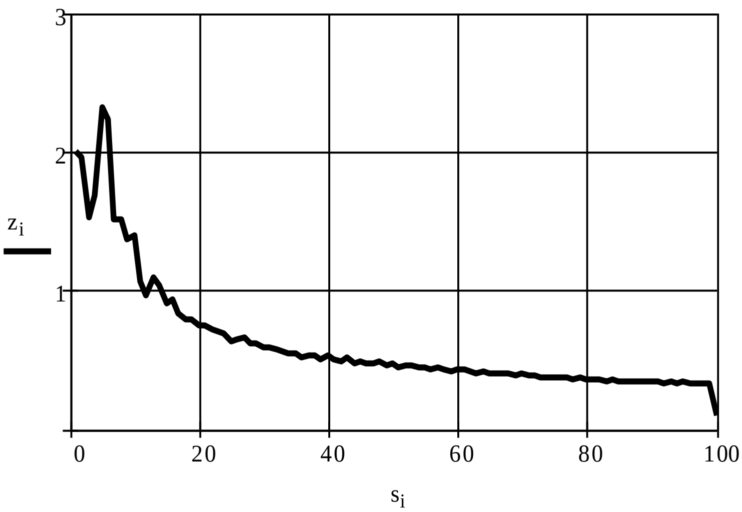
$$z_i := bulstoer\ \ (2,\ a,\ \ t_i,\ eps,\ \ D,\ \ k\max,\ \ h)_{i,2}$$

rkadapt va ***Bulstoer*** yordamida olingan natijalarga mos funksiyalar grafiklari o`uyidagi rasmlarda tasvirlangan:



$t_i =$	$y_i =$
1	2
2	1.961
3	1.698
4	1.213
5	1.424
6	2.123
7	2.329
8	2.325
9	2.182
10	2.015
11	1.831
12	1.684

5.10-rasm. *Rkadapt funksiyasi uchun natijalar*



$t_i =$	$z_i =$
1	2
2	1.961
3	1.518
4	1.677
5	2.313
6	2.232
7	1.509
8	1.51
9	1.367
10	1.395
11	1.058
12	0.955

5.11.-rasm. *Bulstoer funksiyasi uchun natijalar*

Olingan natijalardan ko’rinib turibdiki (5.10-va 5.11–rasmlar) ***rkadapt*** funksiyasi ***bulstoer*** funksiyasiga qaraganda qo’yilgan masalani aniqroq yechar ekan. yechimni ifodalovchi chiziqning tekis o’zgaruvchanligidan shunday xulosalarga kelish mumkin.

Quyidagi holatda berilgan masalaning [0;80] kesmaning butun nuqtalaridagi yechimlari ***Odesolve, rkadapt*** va ***rkfixed*** funksiyalari yordamida olinib ularga mos grafiklar 5.12-, 5.13- rasmlarda tasvirlangan. Buning uchun funksiyalarga quyidagi argument qiymatlari kiritiladi:

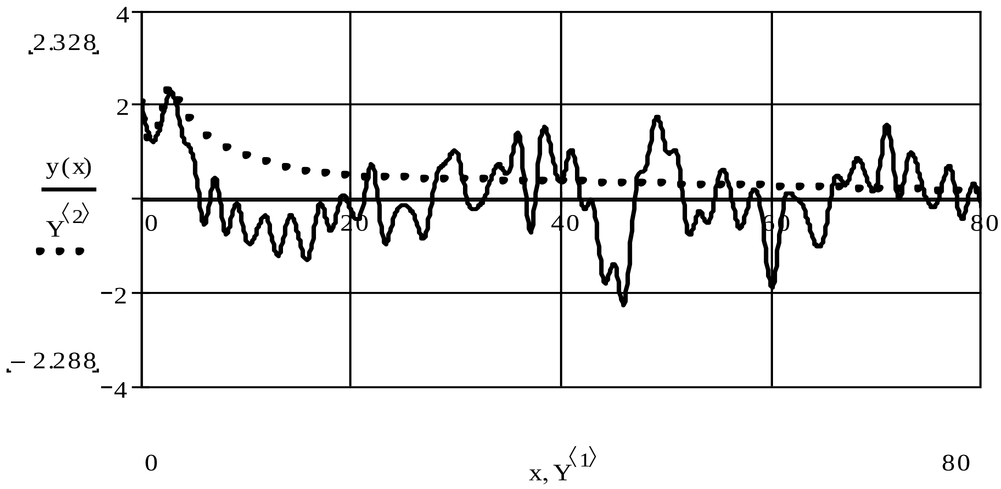
Given $y'(x) + y(x) - 3\cdot\sin(x\cdot y(x)/3) = 0 \qquad y(0) = 2$

$y := Odesolve(x, 80, 80)$ ORIGIN:=1

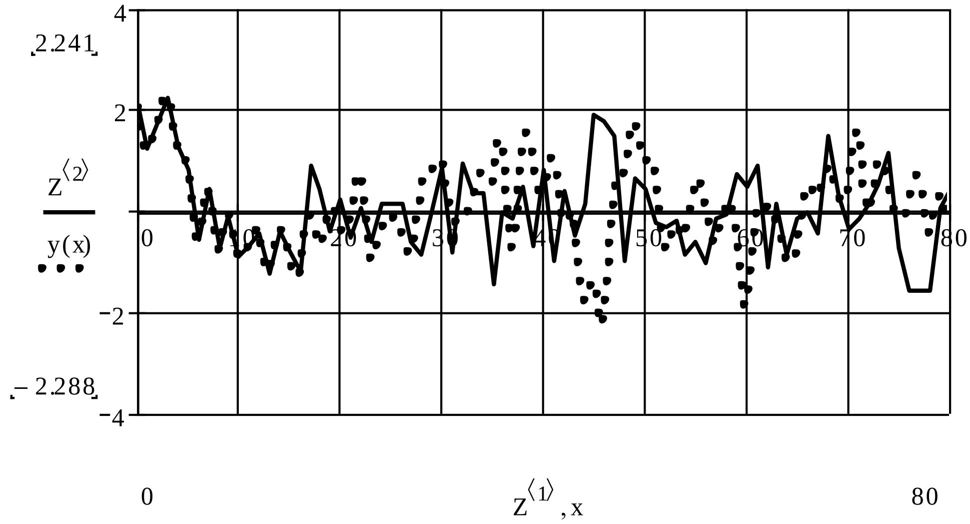
$D(x, y) := -y + 3\cdot\sin(x\cdot y/3)$

$Y := rkadapt(2, 0, 80, 0.0001, D, 80, 0.01)$

$Z := rkfixed(2, 0, 80, 80, D)$



5.12-rasm. **rkadapt** va **Odesolve** funksiyalari uchun yechimlar grafiklari.



5.13-rasm. **Odesolve** va ***rkfixed*** funksiyalari uchun yechimlar grafiklari.

Natijalardan ko'rinib turibdiki, rkadapt funksiyasi qaralayotgan hol uchun qolgan standart funksiyaga nisbatan yechimni to'g'ri aniqlagan. Odesolve va rkfixed funksiyalari yordamida qo'yilgan masalaning berilgan aniqlikdagi sonli (turg'un) yechimini [0; 80] oraliqda topish uchun integrallash oralig'ini 2000 ta bo'lakka bo'lish zarur. rkadapt yoki bulstoer funksiyasi yordamida esa 80 ta nuqtada integrallash natajalarini hisoblash kifoya. Quyida ana shu algoritm va unga mos olingan natijalar keltirilgan.

Given

$$y'(x) + y(x) - 3 \cdot \sin(x \cdot y(x)/3) = 0$$

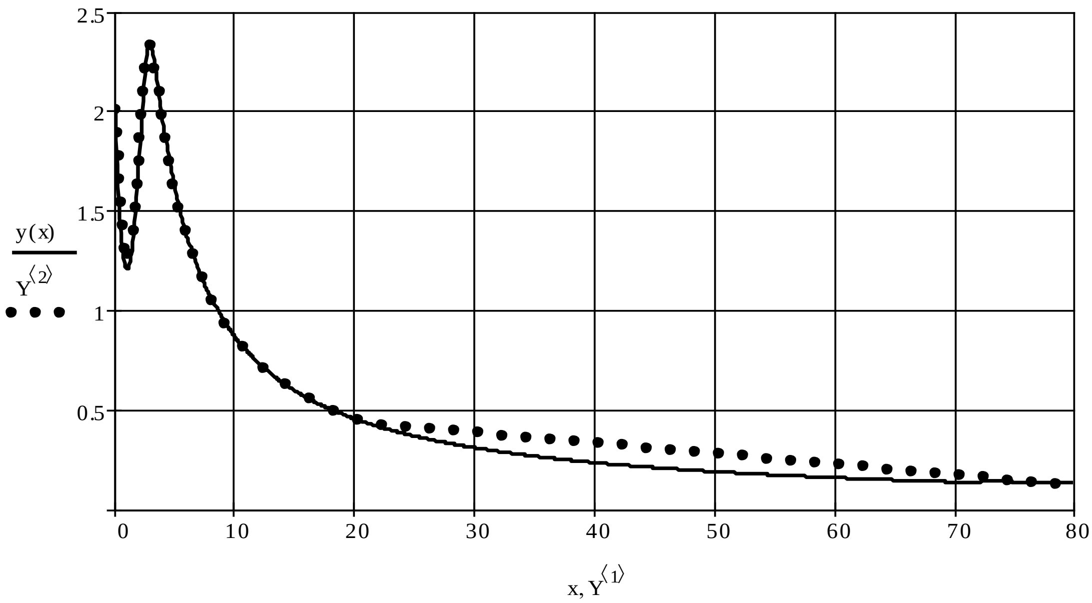
$$y(0) = 2 \qquad y := \mathrm{Odesolve}(x, 80, 2000)$$

$$\mathrm{ORIGIN} := 1$$

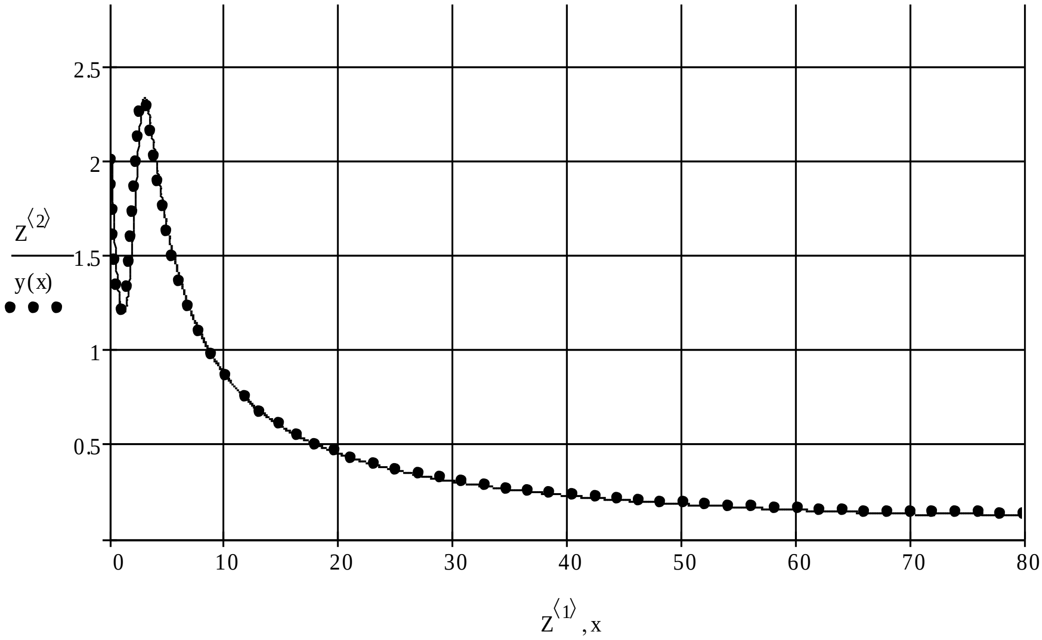
$$D(x, z) := -z + 3 \cdot \sin(x \cdot z/3)$$

$$Y := \mathrm{rkadapt}(2, 0, 80, 0.0001, D, 80, 0.01)$$

$$Z := \mathrm{rkfixed}(2, 0, 80, 2000, D)$$



5.14-rasm. **rkadapt** va **Odesolve** funksiyalari uchun yechimlar grafiklari.



5.15-rasm. **Odesolve** va ***rkfixed*** funksiyalari uchun yechimlar grafiklari

Olingan natijalardan ko'rinib turibdiki, ***rkadapt*** funksiyasi differensial tenglama sonli yechimini berilgan kesmada yuqori aniqlik bilan topsada, amaliyotda ***rkadapt*** va ***bulstoer*** funksiyalardan differensial tenglama yechimini integrallash oralig'iga tegishli faqat bitta yoki bir nechta nuqtalarda topish zaruriyati tug'ilgandagina foydalanish tavsiya etiladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. MathCAD dasturidagi qanday standart funksiyalarni bilasiz?
2. *rkfixed* funksiyasini qo'llanilish uslubini tushuntirib bera olasizmi?
3. *Bulstoer* funksiyasini o'llanilish uslubini tushuntirib bera olasizmi?
4. *rkadapt* funksiyasi differensial tenglama sonli yechimini berilgan kesmada yuqori aniqlik bilan topishi mumkinligini izohlay olasizmi?
5. *Given – Odesolve* juftligi yordamida MathCAD dasturida differensial tenglamani yechish algoritmini tavsiflab bering.
6. Odesolve va rkfixed funksiyalari yordamida differensial tenglamani yechish imkoniyatlarini taqqoslay olasizmi?
7. *rkadapt* funksiyasi *bulstoer* funksiyasiga qaraganda qo'yilgan masalani aniqroq yechishi mumkinligini tushuntira olasizmi?

3-§. Chegaraviy masalalar va ularning taqribiy yechishgning MathCADda dasturlash yordamida amaliy dasturlar paketini yaratish

Oldingi paragraflarda ta`kidlab o‘tganimizdek, differensial tenglamalar orqali juda ham ko‘p va turli-tuman jarayonlarning matematik modellari ifodalanadi. Ma`lumki, amaliyotchilarni differensial tenglamalarning umumiy yechimlari emas, balki qandaydir qo‘shimcha shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlari ko‘proq qiziqtiradi. Qo‘shimcha shartlar esa o‘zlarining qo‘yilish ma`nosiga ko‘ra boshlang’ich va chegaraviy shartlarga bo‘linadi. Boshlang’ich shartli differensial tenglamalarni yechish yo‘llari bilan oldingi paragrafda tanishib o‘tdik.

Chegaraviy masalalarda differensial tenglamalarni qaralayotgan sohaning chegaralaridagi shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimlarini topish masalasi o‘rganiladi. Odatda, chegaraviy shartlar integrallash sohasini chegaralarida berilib quyidagi masalalarga bo‘linadi: Dirixle masalasi, Neyman masalasi va aralash masala. Endi chegaraviy masalalarni qo‘yilishi va ularni yechish usullari bo‘yicha batafsil to‘xtalib o‘taylik. Odatda, chegaraviy masalani yechishni o‘rganishni ikkinchi tartibli, o‘zgaruvchan koeffisientli oddiy differensial tenglamalarni turli xil chegaraviy shartlarda yechish orqali amalga oshiriladi.

Shunday qilib, bizga quyidagi ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = f(x) \quad , \; a < x < b$$

integral oralig’ining chetki nuqtalari $x = a$ va $x = b$ larda berilgan

$$m_0 y(a) + m_1 y'(a) = m_2 , g_0 y(b) + g_1 y'(b) = g_2$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi aniq yechimi $\bar{y} = \bar{y}(x)$ni topish kabi chegaraviy masalani yechish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. Bu yerda $P(x), Q(x), f(x)$- $[a,b]$ oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar, $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ - berilgan sonlar, ularni chegaraviy shart belgilari deb ham ataladi. Bu o‘zgarmaslar baravariga nolga teng emas, ya`ni

$$|m_0| + |m_1| \neq 0 \text{ va } |g_0| + |g_1| \neq 0$$

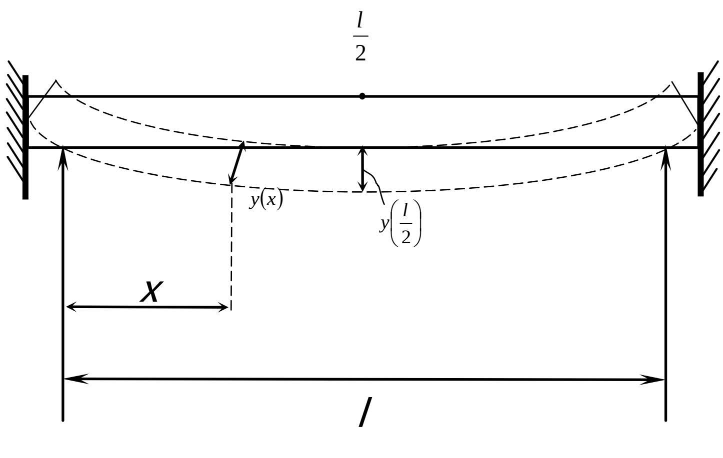
Chegaraviy shart belgilariga turli xil qiymatlarni berish orqali, berilgan masalani yechish uchun har xil chegaraviy shartlar hosil qilinishi mumkin.

Ayrim paytlarda yechilishi lozim bo‘lgan masalalarning matematik modellari to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar orqali ham ifodalanishi mumkin.

Masalan: Ikkita uchidan sharnirli mahkamlangan po’lat balka o’z og’irlik kuchi ta`sirida egilish qonuniyatini o’rganish masalasi quyidagi

$$y'' + \frac{\omega}{2E \cdot I} \cdot x(l - x) = 0$$

ikkinchi tartibli differensial tenglamani $y(0) = 0$ va $y(l) = 0$ chegaraviy shartlar asosida yechish masalasini hal etishga keltiriladi.



5.16-rasm. Ikki uchidan sharnirli mahkamlangan po’lat balka

Bu yerda ω - balkaning solishtirma chiziqli massasi; l - balkaning uzunligi; *ye* – elastiklik moduli; I - balka ko’ndalang kesimining inersiya momenti; *u(x)* - balkaning *x* nuqtadagi egilish miqdori.

Amaliy jarayonlarda shu kabi bir qancha masalalarning matematik modellarii turli xil chegaraviy shartlar bilan berilgan oddiy differensial tenglamalarga keltiriladi. Bunday masalalarni yechishni MathCAD amaliy dasturlar paketi yordamida dastur tuzish orqali amalga oshiramiz.

Berilgan differensial masalaning ildizini MathCAD amaliy dasturlar paketi yordamida topish uchun chekli ayirmalar va haydash usullarining dasturlash algoritmlaridan foydalaniladi.

Bizga quyidagi

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=f(x)$$

ikkinchi tartibli, o'zgaruvchan koeffisientli, oddiy differensial tenglamaning $x\in[a,b]$ oraliqning chetki nuqtalarida qo'yilgan

$$\begin{cases} m_0 y(a)+m_1 y'(a)=m_2 \\ g_0 y(b)+g_1 y'(b)=g_2 \end{cases}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topish lozim bo'lsin. Bu yerda $p(x), q(x), f(x)$ lar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz funksiyalar sinfiga kiradi. $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2$ - o'zgarmaslar, ya`ni chegaraviy shart belgilari.

Yuqorida ko'rsatilgan formuladan $m_0, m_1, m_2, g_0, g_1, g_2 -$ lar o'zgarmas sonlar bo'lib, bir vaqtda nolga teng bo'lishi mumkin emas. Xususiy xolda turli xil chegaraviy shartlarni mavjud koeffisientlarga turli xil qiymatlar berish orqali hosil qilish mumkin.

1. Agar $m_0=1, m_1=0, m_2=1$ va $g_0=1, g_1=0, g_2=1$ bo'lsa,

$m_0 y=m_2$ va $g_0 y=g_2$ bo'lib, **birinchi** chegaraviy masalaga kelinadi.

2. Agar $m_0=0, m_1=1, m_2=0$ va $g_0=0, g_1=1, g_2=0$ bo'lsa,

$m_1 y'=m_2$ va $g_1 y'=g_2$ bo'lib, **ikkinchi** chegaraviy masalaga kelinadi.

3. Agar $m_0=1, m_1=0, m_2=1$ va $g_0=1, g_1=1, g_2=1$ bo'lsa,

$m_0 y=m_2$ va $g_0 y+g_1 y'=g_2$ **uchinchi** chegaraviy masala, yani **aralash** masala hosil qilinadi.

Yuqoridagi masalani sonli-taqribiy usul hisoblanmish chekli ayirmalar usuli bilan yechish uchun yechim qidiriladigan $[a,b]$ oraliqda quyidagi to'rni kiritamiz, ya`ni oraliqni koordinatalari $x_i=a+i\cdot h$ formula bilan aniqlanuvchi tugun nuqtalar bilan bo'laklarga bo'lamiz, bu yerda $h=\dfrac{b-a}{n}$, n-tugun nuqtalar soni.

x_i nuqtalar uchun yuqorida berilgan tenglama o'rinli bo'lgani uchun, uni shu nuqtalarda yozib olamiz:

$$y''(x_i) + p(x_i)y'(x_i) + q(x_i)y(x_i) = f(x_i)$$

Qulaylik uchun, bu tenglamani quyidagi ko'rinishda qayta yozamiz:

$$y''_i + p_i y'_i + q_i y_i = f_i \qquad (5.1)$$

Ma`lumki, izlanuvchi y_i funksiyaning x_i nuqta atrofidagi Teylor qatoriga yoyilmasini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots \qquad (5.2)$$

yoki

$$y_{i-1} = y_i - hy'_i + \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots \qquad (5.3)$$

(5.2) va (5.3) qatordagi ikki va undan yuqori tartibli hosilalar qatnashgan hadlarni tashlab yuborsak, izlanuvchi funksiyaning x_i nuqtadagi hosilalari uchun quyidagi taqribiy hisoblash formulalari hosil bo'ladi.

(5.2) formuladan

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} \qquad (5.4)$$

(5.3) formuladan

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} \qquad (5.5)$$

(5.4)-formula o'ng chekli ayirmali formula, (5.5)-formula chap chekli ayirmali formula deb ataladi. Bu formulalar $O(h)$ miqdorli xatoliklar bilan baholanadi.

Endi (5.2) va (5.3) Teylor qatoridagi uchinchi va undan yuqori tartibli hosilalar qatnashgan hadlarni tashlab yuborib, hosil bo'lgan taqribiy tengliklarni ayirish hisobiga birinchi tartibli hosilani taqribiy hisoblashning markaziy chekli ayirmali formulasini hosil qilamiz:

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{h^2} \qquad (5.6)$$

bu almashtirishning xatolik darajasi $O(h^2)$ miqdor bilan belgilanadi.

Agar yuqoridagi (5.2) va (5.3) formulalardagi ikkinchi tartibli hosila qatnashgan hadni ham qo'shib olib, hosil bo'lgan tengliklarni hadlab qo'shsak

$$y_i''=\frac{y(x_{i+1})-2y(x_i)+y(x_{i-1})}{h^2} \qquad (5.7)$$

dan iborat izlanuvchi y_i funksiyaning x_i nuqtalari uchun ikkinchi tartibli hosilasini taqribiy hisoblash formulasi kelib chiqadi. Bu almashtirishning xatoligi ham $O(h^2)$ miqdor bilan baholanadi.

(5.1) differensial tenglamadagi y_i', y_i'' lar o'rniga hosil qilingan chekli ayirmali formulalarni qo'yamiz va berilgan differensial tenglama o'rniga hosilalar qatnashmagan va y_i noma`lumlardan iborat tenglamalarni hosil qilamiz.

SHunday qilib, (5.6) va (5.7) taqribiy kattaliklarni (5.1) differensial tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+p_i\,\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+q_iy_i=f_i\,.$$

Hosil bo'lgan tenglamani har ikkala tomonini h^2 ga ko'paytiramiz va mos hadlarni gruppalaymiz. Hamda belgilashlar kiritish natijasida:

$$A_i=1+\frac{h}{2}p_i,\quad B_i=2-h^2q_i,\quad C_i=1-\frac{h}{2}p_i,\quad D_i=h^2f_i \qquad (5.8)$$

quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$A_iy_{i+1}-B_iy_i+C_iy_{i-1}=D_i \qquad (5.9)$$

Bu yerda $i=\overline{1,n-1}$ bo'lgani uchun i ga mos qiymatlarni berib, (5.9) sistemaning yoyib yozilgan xolini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1y_2-B_1y_1+C_1y_0=D_1\\ A_2y_3-B_2y_2+C_2y_1=D_2\\ A_3y_4-B_3y_3+C_3y_2=D_3\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A_ny_{n+1}-B_ny_n+C_ny_{n-1}=D_n \end{cases} \qquad (5.10)$$

Hosil bo’lgan sistema $y_0, y_1,..., y_n$ lardan iborat ($n+1$) ta noma`lumli, $(n-1)$ ta tenglamadan iborat uch diagonalli, algebraik, chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat.

Uch diagonalli bo’lishiga sabab, sistemadagi har bir tenglamada faqat uchtadan noma`lum qatnashgan hadlar mavjud bo’lib, sistemada ularning joylashgan o’rni asosiy diagonal, uni pasti va yuqorisidagi diagonallarga mos keladi.

Ma`lumki, tenglamalar sistemasining yagona yechimini aniqlash uchun tenglamalar va noma`lumlar soni teng bo’lishi kerak. Shuning uchun, yetishmayotgan ikkita tenglamani chegaraviy shart hisobiga to’ldirib olamiz. $x_0 = a$ va $x_n = b$ oraliqning chetki nuqtalari uchun berilgan shartlarni quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} m_0 y_0 + m_1 y_0' = m_2 \\ g_0 y_n + g_1 y_n' = g_2 \end{cases}$$

y_0', y_n'-larni mos ravishda (5.3) va (5.4) chekli ayirmali formulalari bilan almashtiramiz, ya`ni $y(x)$ ni $x = x_0$ yoki $x = a$ nuqtadagi hosilasi uchun o’ng chekli ayirma formulasini, $x = x_n$ yoki $x = b$ nuqtadagi hosilasi uchun chap chekli ayirma formulasini qo’yamiz:

$$\begin{cases} m_0 y_0 + m_1 \cdot \dfrac{y_1 - y_0}{h} = m_2 \\ g_0 y_n + g_1 \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = g_2 \end{cases}$$

Hosil bo’lgan tenglamalarni h ga ko’paytirib, o’xshash hadlarni ixchamlaymiz:

$$\begin{cases} (hm_0 - m_1) y_0 + m_1 y_1 = hm_2 \\ (hg_0 + g_1) y_n - g_1 y_{n-1} = hg_2 \end{cases} \qquad (5.11)$$

Quyidagicha belgilashlarni kiritib:

$$A_0 = hm_0 - m_1, C_0 = hm_2, B_n = -g_1,\ B_0 = m_1, A_n = hg_0 + g_1, C_n = hg_2 \qquad (5.12)$$

hosil qilingan tenglamalarni (5.9) tenglamalar sistemasiga “ulaymiz” va natijada ($n+1$) ta noma`lumli, ($n+1$) ta tenglamadan iborat $y_0, y_1,..., y_n$ noma`lumlarga nisbatan yozilgan quyidagi uch dioganalli chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0 \\ A_i y_{i+1} - B_i y_i + C_i y_{i-1} = D_i \qquad (i = 1, \overline{n-1}) \\ A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n \end{cases} \qquad (5.13)$$

Ma`lumki, qidirilayotgan taqribiy yechimning aniqlik darajasini oshirish uchun $[a,b]$ oraliqda kiritilgan $x_i = a + ih$ to'rning h qadamini kichraytirish lozim. Bu miqdorni kichraytirish esa o'z navbatida tugun nuqtalar x_i ning sonini keskin oshishiga olib keladi. Shunday qilib, qo'yilgan masalani zarur aniqlikda yechish uchun hosil qilingan (5.13) sistemaning tartibi ming, ayrim hollarda esa o'n mingdan ham ortiq bo'lishi mumkin.Yuqorida eslatganimizdek, sistemaning har bir tenglamasida faqat uchtadangina noma`lum qatnashgan xadlar mavjud. Qolgan noma`lumlarning koeffisientlari esa nolga teng. Agarda biz bunday sistemani an`anaviy usullar (Gauss, Kramer, teskari matrisa kabi) yordamida yechmoqchi bo'lsak, nollar ustida ma`nosiz bo'lgan ko'p hajmdagi amallarni bajarishimizga to'g'ri keladi. Shuning uchun, bunday maxsus sistemalarni yechishning maxsus usullari ishlab chiqilgan. Bu usullarning eng soddasi, dasturlashga qulayi, xatolar yig'ilmasini hosil qilmaydigani "haydash" usuli hisoblanadi.

Quyida "Haydash " usulining qisqacha mohiyati bilan tanishib chiqamiz.

Maxsus, diagonalli sistemalarni yechishga mo'ljallangan "Haydash" usuli ikki bosqichdan iborat:

- noma`lum koeffisientlarni aniqlash (to'g'ri bosqichi)
- sistemaning yechimlarini aniqlash (teskari bosqichi).

1-bosqichda (5.13) sistemaning noma`lum y_i yechimini quyidagi ko'rinishda qidiramiz:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1} \qquad (5.14)$$

bu yerda α_{i+1} va β_{i+1} noma`lum haydash koeffisientlari. Noma`lum $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ koeffisientlarni topish uchun (5.14) tenglikni $x = x_i$ va $x = x_{i-1}$ nuqtalardagi ko'rinishini (5.13) formuladagi ikkinchi tenglamaga ketma-ket qo'yib,

$$A_i y_{i+1} - B_i(\alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}) + C_i(\alpha_i(\alpha_{i+1} y_{y+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i) = D_i$$

yoki

$$(A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1}) y_{i+1} + (-B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i) = 0$$

ni hosil qilamiz.

Bu chiziqli ifoda aynan 0 ga teng bo'lishi uchun, barcha koeffisientlar 0 ga teng bo'lishi kerakligini hisobga olib, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz:

$$A_i - B_i\alpha_{i+1} + C_i\alpha_i\alpha_{i+1} = 0$$
$$-B_i\beta_{i+1} + C_i\alpha_i\beta_{i+1} + C_i\beta_i - D_i = 0$$

Hosil qilingan tengliklardan $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ noma`lum koeffisientlarni topish unchalik qiyin emas, ya`ni

$$\alpha_{i+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{c_i\beta_i - D_i}{B_i - C_i\alpha_i}; \quad i = \overline{1, n-1} \qquad (5.14)$$

Mazkur rekurent formuladagi barcha α_{i+1} va β_{i+1} larni aniqlash uchun yoki boshqacha aytganda rekurent formulani "yurishi" uchun dastlabki α_1 va β_1 qiymatlarni topishimiz kerak. Bu qiymatlarni topishimiz uchun $x = a$ nuqtadagi chegaraviy shartdan hosil qilingan (5.13) formuladagi birinchi tenglamadan foydalanamiz.

$A_0 y_0 + B_0 y_1 = C_0$ tenglamani har ikkala tomonini A_0 ga bo'lib, y_0 ni topamiz:

$$y_0 = -\frac{B_0}{A_0} y_1 + \frac{C_0}{A_0};$$

Keltirib chiqarilgan formulani (5.14) formulaning $i = 0$ dagi qiymatida hosil qilingan $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$ bilan solishtirish natijasida $\alpha_1 = -\frac{B_0}{A_0}; \quad \beta_1 = \frac{C_0}{A_0}$ ekanligi kelib chiqadi.

Eslatib o'tamiz, A_0, B_0, C_0 larning qiymati oldinroq (5.12) formulalar orqali aniqlangan edi.

α_1, β_1 lar ma`lum bo'lgach, barcha keyingi $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ lar (5.14) rekurent formuladan topiladi. Bu jarayon "haydash" usulining to'g'ri bosqichini tashkil etadi.

2-bosqichda α_i, β_i noma`lum koeffisientlarning barcha qiymatlari topilgach (5.14) rekurent formula yordamida qidirilayotgan yechim y_i larni topish mumkin, bu yerda ham rekurent formulaning ishlashi uchun dastlabki qiymat sifatida y_n ni aniqlash lozim. Bu ishni bajarish uchun $x = b$ nuqtadagi chegaraviy shartdan hosil qilingan (5.13) sistemaning uchinchi tenglamasi

$$A_n y_n + B_n y_{n-1} = C_n$$

va (5.14) formulaning $i = n-1$ nuqtadagi ko'rinishi $y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n$ dan foydalanamiz, ya`ni ularni sistema deb qarab, bu sistemadan y_n ni aniqlaymiz.

$$y_n = \frac{C_n - B_n \beta_n}{A_n + B_n \alpha_n}$$

Qidirilayotgan y_n hisoblangach, $y_i = \alpha_{i+1} \cdot y_{i+1} + \beta_{i+1}$ rekurent formulasi yordamida ($i = \overline{n-1,0}$) barcha qolgan yechimlar topiladi.

Bu jarayon i ga nisbatan teskari tartibda bo'lgani uchun, uni haydashning teskari bosqichi deb ataymiz.

(5.13) sistemaga xaydash usulini qo'llash uchun quyidagi turg'unlik shartlari bajarilishi kerak:

$$A_i \neq 0,\ C_i \neq 0,\ |B_i| \geq |A_i| + |C_i|,\ i = \overline{1, n-1},\ \left|\frac{-B_0}{A_0}\right| \leq 1,\ \left|\frac{-B_n}{A_n}\right| < 1.$$

Shunday qilib, oldimizga qo'yilgan masalani, ya`ni o'zgaruvchan koeffisientli, ikkinchi tartibli, oddiy differen-sial tenglamani chekli ayirmali formulalar yordamida sonli-taqribiy usulda yechish uchun ishchi algoritm hosil qildik.

Misol. $f(x) := 6 \cdot x + 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x) + x^3 \cdot \cos(x)$ ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama $p(x) := \sin(x)$, $q(x) := \cos(x)$ chegaraviy shartlar bilan berilgan bo'lsin. Natijalarni tekshirish qulay bo'lishi uchun aniq yechim sifatida $y = x^3$ ni olamiz.

Haydash usuliga mos algoritmini MathCAD dasturining ishchi oynasiga muayyan talablar asosida kiritiladi:

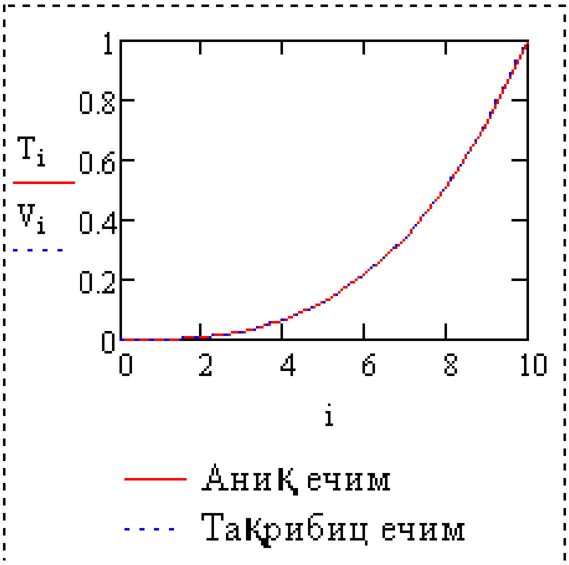
$$
\begin{aligned}
&\mathrm{pragon}(m0, m1, m2, g0, g1, g2, n, p, q, f) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{1}{n} \\
\text{for } \ i \in 0..n \\
\quad x_i \leftarrow i \cdot h \\
a_0 \leftarrow h \cdot m0 - m1 \\
b_0 \leftarrow m1 \\
a_n \leftarrow h \cdot g0 + g1 \\
c_0 \leftarrow h \cdot m2 \\
b_n \leftarrow -g1 \\
c_n \leftarrow h \cdot g2 \\
\alpha_1 \leftarrow \dfrac{-b_0}{a_0} \\
\beta_1 \leftarrow \dfrac{c_0}{a_0} \\
\text{for } \ i \in 1..n-1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
x \leftarrow a + i \cdot h \\
a_i \leftarrow 1 + \left(\dfrac{h}{2}\right) \cdot p(x_i) \\
b_i \leftarrow 2 - h^2 \cdot q(x_i) \\
c_i \leftarrow 1 - \left(\dfrac{h}{2}\right) \cdot p(x_i) \\
d_i \leftarrow h^2 \cdot f(x_i) \\
\alpha_{i+1} \leftarrow \dfrac{a_i}{b_i - c_i \cdot \alpha_i} \\
\beta_{i+1} \leftarrow \dfrac{(c_i \cdot \beta_i - d_i)}{b_i - c_i \cdot \alpha_i}
\end{array}
\right. \\
y_n \leftarrow \dfrac{(c_n - b_n \cdot \beta_n)}{a_n + b_n \cdot \alpha_n} \\
\text{for } \ i \in n-1..0 \\
\quad y_i \leftarrow y_{i+1} \cdot \alpha_{i+1} + \beta_{i+1} \\
y
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

O’zgaruvchi parametrlar uchun aniq chegaraviy shart belgilari kiritiladi:

$$V := \mathrm{pragon}(1,0,0,1,0,1,10,p,q,f)$$

$$a := 0 \quad b := 1 \quad n := 10 \quad i := 0..n$$

$T_i := O(i) \qquad O(i) := \left[\frac{(b-a)}{n}\cdot i\right]^3$ aniq yechim va taqribiy hisob natijalari orasidagi farqi. $\Delta_i := \left|T_i - V_i\right|$



V =

	0
0	0
1	0.00117674
2	0.00834005
3	0.02747716
4	0.06457668
5	0.12562898
6	0.21662662
7	0.34356445
8	0.51243957
9	0.72925112
10	1

T =

	0
0	0
1	0.001
2	0.008
3	0.027
4	0.064
5	0.125
6	0.216
7	0.343
8	0.512
9	0.729
10	1

Δ =

	0
0	0
1	0.00017674
2	0.00034005
3	0.00047716
4	0.00057668
5	0.00062898
6	0.00062662
7	0.00056445
8	0.00043957
9	0.00025112
10	0

5-17 rasm.

Grafikdan va sonli natijalar jadvalidan ko’rinib turibdiki, olingan aniq yechimlar va taqribiy yechimlar bir-biriga juda yaqin bo’lib, bu ishlab chiqilgan algoritmlar va dasturning to’g’ri ekanligini tasdiqlaydi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

- ✓ Chegaraviy masalani yechish uchun qanday qo‘shimcha shartlardan foydalanish yetarli hisoblanadi?
- ✓ Chegaraviy masalalarni yechish usullarini qaysi guruhlarga bo‘linadi?
- ✓ Mathcad dasturida chegaraviy masalani yechish uchun qanday usullardan foydalanasiz?
- ✓ MathCAD dasturida chegaraviy masalani yechishning haydash usuliga mos algoritmni tavsiflang.
- ✓ Chegaraviy masalalarda qo‘shimcha shartlarning yetarli emasligini qanday oqibatlarga olib kelishi mumkinligini tushintira olasizmi?
- ✓ MathCAD dasturida chegaraviy masalani yechish uchun qaysi usullar guruhini qo‘llagan maqsadga muvofiq deb o‘ylaysiz?

5– BOB BO’YICHA XULOSALAR.

- ✓ Ushbu bobda differensial tenglamaning asosiy sinflari, oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamaning umumiy ta`rifi keltirildi.
- ✓ Oddiy differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimi tushunchasi bayon qilindi va yechish usullari guruhlari tahlil etildi.
- ✓ Matematik modellari oddiy diferensial tenglamalar bilan ifodalanadigan bir nechta amaliy jarayonlar va ularning matematik modellari bayon qilindi.
- ✓ Birinchi tartibni differensial tenglamalarning normal sistemasi, o’zgarmas koeffisientli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi hamda yuqori tartibli differensial tenglamalar haqida umumiy ma`lumotlar keltirildi.
- ✓ Oddiy differensial tenglama va oddiy differensial tenglamalar, sistemasini yechishga mo’ljallangan MathCAD tarkibidagi standart funksiyalar hamda ularni qo’llash uslubi bayon qilindi.

- ✓ MathCAD dasturida differensial tenglama va tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish algoritmiga mos amaliy dasturlar paketi ishlab chiqildi va aniq misollar uchun natijalar olindi.
- ✓ MathCADning standart funksiyalari yordamida ikkinchi va to’rtinchi tartibli, o’zgarmas koeffisientli, bir jinsli bo’lmagan differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi berilgan oraliqda yechildi.
- ✓ MathCAD dasturi tarkibidagi rkadapt va bulstoer funksiyalarini qo’llashga oid masalalar qaraldi va natijalar jadval hamda grafik holatlarda keltirildi.
- ✓ Chegaraviy masalalar va ular uchun beriladigan qo’shimcha shartlar bayon etildi va chegaraviy masalani yechishning haydash usuli uchun amaliy dasturlar paketi yaratildi. Natijalar olinib, tahlil etildi.

6-BOB. MATHCAD YORDAMIDA XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHNING AMALIY DASTURLAR PAKETINI YARATISH

Fizik va ayrim jarayonlarning modellari xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanadi. Bu tenglamadagi fuksiyalarning argumentlari fazoviy koordinatalar x, u, z va t vaqt bo'ladi.

Matematik fizika tenglamalarini analitik usullarda yechishning asosiy usullaridan biri bu o'zgaruvchilarni ajratish usulidir. Biz ushbu xususiy hosilali differensial tenglamalarni to'r usulida yechish va uni MathCADda amalga oshirishni hamda o'rnatilgan funksiyalar yordamida yechishni qarab o'tamiz.

1-§. Xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida umumiy ma`lumotlar

O'quv modullari

Xususiy hosilali differensial tenglamalar, parabolik, elliptik, giperbolik tipdagi tenglamalar, Laplas, Puasson, Gel`mgols, to'lqin, tebranish, telegraf, issiqlik tarqalish *tenglamalari*, Dirixle sharti, Neyman shartlari, aralash shartlar, to'r soha, ichki nuqtalar, tashqi nuqtalar.

Amalda xususiy hosilali differensial tenglamalar juda ko'p fizik jarayonlarni tahlil qilishda ishlatiladi. Masalan, turar joy binolari va korxonalar qurishdagi hisob ishlari, ko'p qavatli binolarning issiqlik rejimini saqlash maqsadida yechiladigan g'ovak to'siqlarning issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi (bunda jism sirtiga o'tkaziladigan issiqlik ta`siri vaqt bo'yicha juda tez o'zgarishi va jism har xil materiallar aralashmasidan iborat bo'lishi mumkin), ingichka torlar, har xil materiallardan ishlangan tayoqlar va boshqa xildagi konstruksiyalarning ko'ndalang va bo'ylama tebranishlari jarayonlari, neft va gaz konlaridagi ishlab chiqarishni tashkillashtirish va boshqarishni avtomatlash-tirish maqsadida qaralayotgan qatlam parametrlarini aniqlik ko'rsatkichini yanada yaxshilash, quvurlardagi qovushqoq suyuqlik-larning nostasionar harakati jarayonlari. Bu jarayonlarning barchasi uchun yaratiladigan matematik modellar – xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanadi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni matematik-fizika tenglamalari deb ham ataladi. Oddiy differensial tenglamalar kabi xususiy hosilali differensial tenglamalar ham cheksiz ko'p yechimlarga ega. Ular umumiy yechimlar deyilib, xususiy yechimlar umumiy yechimlardan ma`lum shartlar asosida ajratiladi. Agar qo'shimcha shartlar soha chegarasida berilsa, bunday masalaga chegaraviy masala deyiladi. Agar chegaraviy shartlar berilmasdan faqat boshlang'ich shart berilsa, bunday masalaga xususiy hosilali differensial tenglama uchun Koshi masalasi deyiladi. Bunda masala cheksiz sohada qaraladi. Masalada ham boshlang'ich, ham chegaraviy shartlar qatnashsa, bunday masalaga aralash masala deyiladi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni ikki o'lchovli hol uchun quyidagicha yozish mumkin(qulaylik uchun faqat xususiy holni, ya`ni ikkinchi tartibli hosilalarga nisbatan chiziqli tenglamalarnigina qaraymiz):

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \qquad (6.1)$$

bunda x, y-erkli o'zgaruvchilar, $u(x, y)$-qidirilayotgan noma`lum funksiya, indeksdagi $x, y$ lar noma`lum funksiyaning x va y bo'yicha xususiy hosilalarini anglatadi. a, b, c, d, e, f, g-koeffi-sientlar umuman x, y va u ga bog'liq funksiyalar bo'lishi mumkin. Agar ular o'zgarmas sonlardan iborat bo'lsa, (6.1) tenglamani o'zgarmas koeffisientli, x va y ga bog'liq funksiyalar bo'lsa o'zgaruvchi koeffisientli va nihoyat, x, y va u ga bog'liq funk-siyalar bo'lsa, tenglama kvazichiziqli deyiladi. Bu funksiyalar berilgan ma`lum funksiyalar bo'lib, yopiq $\overline{G} = G + \Gamma$ sohada aniqlangandir. G soha x va y o'zgaruvchilarning o'zgarish sohasi bo'lib Γ kontur bilan chegaralangandir.

(6.1) ko'rinishdagi matematik-fizika tenglamalarning tipi $D = b^2 - ac$ diskriminantning ishorasi bilan aniqlanadi. Agar $D > 0$ bo'lsa, tenglama giperbolik tipga, $D = 0$ bo'lsa, tenglama parabolik tipga, $D < 0$ bo'lsa, tenglama elliptik tipga tegishli bo'ladi. Tenglamaning tipini aniqlash juda muhim ahamiyatga ega, chunki bir xil tipdagi har xil tenglamalar juda ko'p umumiy xusu-siyatlarga ega bo'ladi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish usullari xuddi oddiy differensial tenglamalardagi kabi, bir necha guruhga bo'linadi:

1. Aniq usullar;
2. Taqribiy-analitik usullar;
3. Sonli-taqribiy usullar;

Aniq usullar bilan asosan chiziqli xususiy hosilali tenglamalar sodda ko'rinishdagi chegaraviy va boshlang'ich shartlar bilan berilganda yaxshi natijalar olish mumkin. Bu guruhga o'zgaruvchilarni ajratish, Laplas almashtirishlari va boshqa usullar kiradi. Taqribiy- analitik usullar bilan umumiy ko'rinishdagi tenglamalarni yechish imkoniyati deyarli yo'q, faqat ayrim xususiy hollardagina biror-bir natija chiqishi mumkin. Amalda esa foydalanishga qulayligi va dasturlashga osonligi uchun asosan sonli-taqribiy usullarni qo'llaniladi.

Klassik elliptik tenglamalar sinfiga quyidagilar kiradi:

- **Laplas** tenglamasi $\Delta u = 0$, stasionar issiqlik va magnit maydonlarini tavsiflashda ;
- **Puasson** tenglamasi $\Delta u = f$, elektrostatika, egiluvchanlik nazariyasi va boshqalarda;
- **Gel`mgols** tenglamasi $\Delta u + cu = f$ tebratuvchi jarayonlarni tavsiflash uchun xizmat qiladi.

Giperbolik tenglamalar orasida quyidagi tenglamalarni ajratish mumkin:

A) Bir jinsli torning majburiy tebranishini ifodalovchi t**o'lqin** tenglamasi.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

B) Membrananing **tebranish**ini ifodalovchi ikki jinsli tenglama.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,y,t)$$

C) Elektr uzatish tarmoqlarida u potensialni o'zgarishini ifodalovchi **telegraf** tenglamasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{RC+LG}{LC}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{RG}{LC}u-\frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

Bu yerda L,C,R,G-o'z induksiya, hajm, qarshilik, liniyadagi bir birlik uzunlikdagi yo'qotish koeffisienti.

D) Klassik parabolik tipdagi tenglamaga **issiqlik tarqalish** tenglamasi kiradi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\Delta u+f$$

Xususiy hosilali differensial tenglamaning yagona yechimini topish uchun boshlang'ich va chegaraviy shartlarni berish zarur. Boshlang'ich shart sifatida vaqtning t boshlang'ich momentida berilgan shartni olish qabul qilingan. Chegaraviy shart sifatida esa fazoviy o'zgaruvchilarning turli qiymatlarida beriladi.

Elliptik tenglamalar uchun faqat chegaraviy shartlar berilib, ularni uchta sinfga ajratish mumkin:

1) Dirixle sharti :

$$u\,|_{(x,y,z)\in\Gamma}=\varphi(x,t)$$

Bunda yechim $\tilde{A}$ soha chegarasida izlanadi va ayrim φ funksiyasi beriladi. Bir jinsli holatda bu shart quyidagi ko'rinishni oladi:

$$u(0,t)=\varphi_1(t);u(L,t)=\varphi_2(t),$$

Bunda (0,L)-bir jinsli masala yechimi izlanadigan oraliq.

2) Neyman sharti :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(x,y,z)\in\Gamma}=\varphi(t)$$

bu holda soha chegarasida hosila n tashqi normal yo'nalishi bo'yicha berilgan.

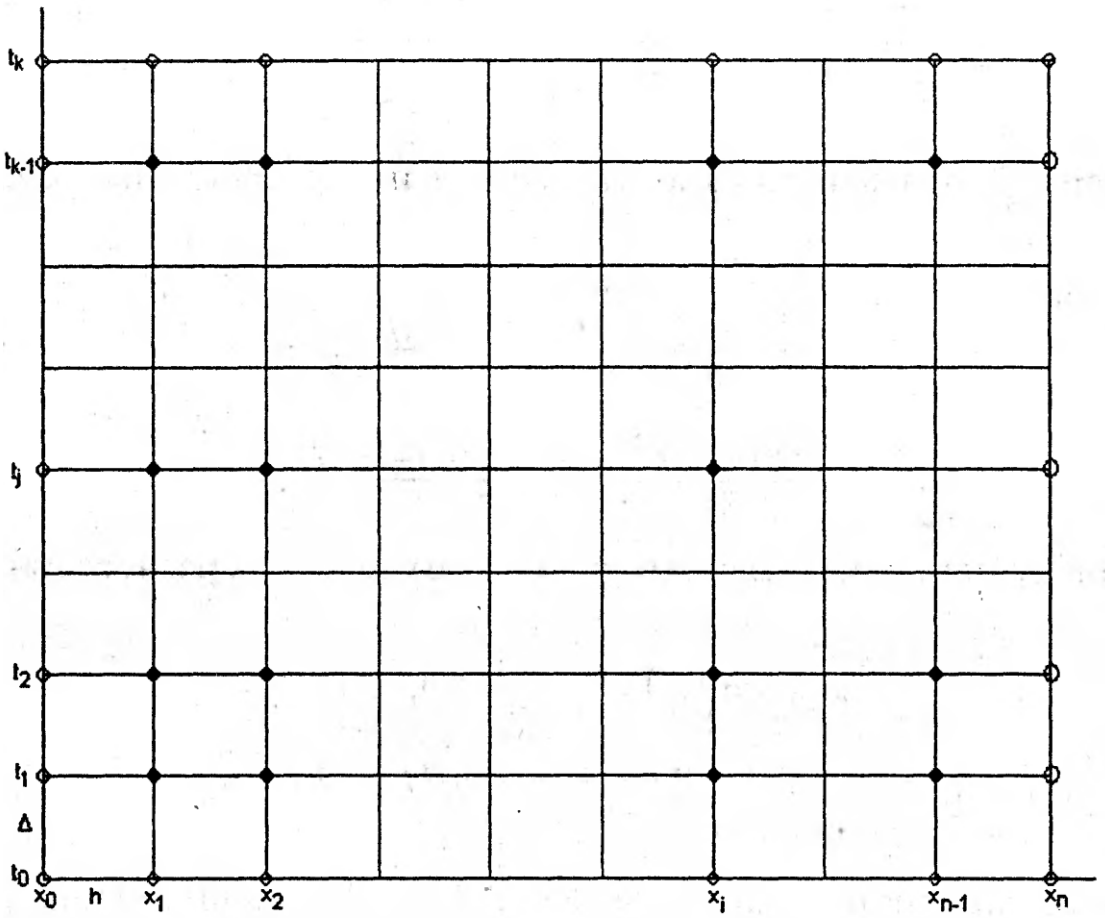
3) Aralash shart:

$$\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{(x,y,z)}=\varphi(t)$$

Differensial tenglamani sonli yechish usullari orasida eng ko'p tarqalgani to'r usuli hisoblanadi. To'r usulida Ω sohada tenglamani yechimini topish uchun to'g'ri to'rtburchak sohasini o'qlariga parallel $t=t_j$ va $x=x_i$ to'g'ri chiziqlar bilan bo'lib chiqamiz (6.1-rasm).

Bunda:

$$x_i=x_0+ih, h=\frac{x_n-x_0}{n}, i=0,1,2,...n, t_j=t_0+j\Delta, \Delta=\frac{t_r-t_0}{k}, j=0,1,2,...k.$$



6.1-Rasm. G chegarali Ω soha uchun Ω_h^Δ to'r.

Qaysiki Ω sohaning Γ chegarasida yotuvchi nuqtalar tashqi, qolgan nuqtalar esa ichki hisoblanadi. Nuqtalarning hamma to’plami Ω_h^Δ to’r deyiladi, h va Δ lar esa mos ravishda x va t bo’yicha qadamlardir.

To’r usulining g’oyasi shundan iboratki, istalgan uzluksiz $w(x,t)$ funksiya o’rniga Ω_h^Δ to’rning tugunlarida aniqlangan $w_i^j = w(x_i, t_j)$ diskret funksiyani olamiz. Funksiya hosilalari o’rniga ularning to’r tugunlaridagi oddiy ayirmali approksimasiyalarini qaraymiz.

Shunday qilib, xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi o’rniga oddiy algebraik tenglamalar sistemasi olinadi. Xususiy hosilali differensial tenglamaning modelini ifodalovchi algebraik tenglamalar sistemasi h va t o’zgarish qadamlari miqdorlari qancha kichik bo’lsa shuncha yuqori aniqlikda bo’ladi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

- ✓ Qanday tenglamalar matematik-fizika tenglamalari deb ataladi?
- ✓ Matematik modellari xususiy hosilali differensial tenglamalar orqali ifodalanuvchi jarayonlarga misollar keltira olasizmi? Hosila bilan ishtirok etuvchi parametrlar amalda qanday qonuniyatlar asosida o‘zgarishi mumkin?
- ✓ Matematik-fizika tenglamalarini taqribiy hisoblash zaruriyati qaerdan kelib chiqadi?
- ✓ MathCAD dasturida xususiy hosilali differensial tenglamani yechishning qanday usullarini bilasiz?
- ✓ Xususiy hosilali differensial tenglamani yechishda ko‘proq qaysi usuldan foydalaniladi?
- ✓ Differensial tenglamani sonli yechish usullari orasida eng ko’p tarqalgani to’r usuli ekanligini tushuntirib bera olasizmi?
- ✓ Matematik-fizika tenglamalari uchun chegaraviy shartlarning asosiy guruhlarini tavsiflab bering.

- ✓ Klassik elliptik tenglamalar sinfiga qaysi tenglamalar kiradi?
- ✓ G chegarali Ω soha uchun taqribiy yechim izlanayotganda barcha ichki va tashqi nuqtalar teng kuchli bo'ladimi?
- ✓ Nima uchun xususiy hosilali differensial tenglamalarni tiplarga ajratib o'rganiladi? Ularning barchasi uchun umumiy bo'lgan yechish usullarini ishlab chiqish mumkin emasmi?
- ✓

2-§ Parabolik tipdagi differensial tenglamalarni MathCAD dasturiy vositalari yordamida taqribiy yechishning amaliy dasturlar paketini yaratish

O'quv modullari

Issiqlik o'tkazuvchanlik masalasi, parabolik tipdagi tenglamalar, boshlang'ich shart, chegaraviy shart, oshkor sxema, oshkormas sxema

Agar o'rganilayotgan jarayonda vaqt bo'yicha jarayonning kechish tezligi o'zgarmas bo'lsa, bu jarayonlarning matematik modeli parabolik tipdagi tenglamalar orqali ifodalanadi. Bunday jarayonlarga quvurlardagi qovushqoq suyuqliklarning nostasionar harakati jarayonlari, g'ovak to'siqlarning issiqlik o'tkazuvchanlik masalalari, diffuziya jarayonlari va boshqalar kiradi.

Parabolik tipdagi tenglamalarni xususiy holda (fazoviy koordinata bo'yicha bir o'lchov bilan chegaralanib) quyidagicha yozish mumkin:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t), 0 \le x \le L, 0 \le t \le T,\\
&u(0,t) = \mu(t), u(L,t) = \eta(t), 0 \le t \le T, \qquad\qquad (6.2)\\
&u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le L.
\end{aligned}
$$

Ω_h^Δ to'rni quramiz (6.1-rasm). To'r tenglamalarini olish uchun $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ hosila ayirmali sxemalar bilan almashtiriladi:

$$\frac{\partial^2 u(x_i,t)}{\partial x^2}=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+2u_{i-1,j}}{h^2} \qquad (6.3)$$

$\frac{\partial u}{\partial t}$ ni almashtirish uchun quyidagi taqribiy ayirmali formulalarni biridan foydalanish mumkin:

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}=\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\Delta} \qquad (6.4)$$

$$\frac{\partial u(x_i,t_j)}{\partial t}=\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\Delta}$$

Bundan tashqari, boshlang'ich va chegaraviy shartlarni ularning aproksimasiyasi bilan almashtiramiz:

$$u_{i,0}=\varphi(x_i)=\varphi_i, \quad i=0,1,....,n,$$

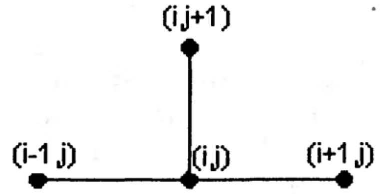
$$u_{0,j}=\mu(tj_i)=\mu_j, \quad u_{i,0}=\eta(t_j)=\eta_j \quad j=0,1,....,k,$$

Barcha almashtirishlar (6.2) masaladagi differensial tenglamaga mos ravishda qo'yilsa funksiya qiymatlarini Ω_h^Δ to'rda hisoblashning quyidagi sxemasi hosil bo'ladi:

$$u_{i,j+1}=\gamma u_{i,j-1}+(1-2\gamma)u_{i,j}+\gamma u_{i,j+1}+\Delta f_{i,j} \qquad (6.5)$$

$$u_{0,j}=\mu_i, \quad u_{n,j}=\eta_j, \quad u_{i.,0}=\varphi_i, \quad \gamma=a^2\frac{\Delta}{h^2}$$

Bu ikki qatlamli oshkor sxemadir (6.2-rasm). Nolinchi qatlamda (t=0 da) u_{i0} (xuddi shuningdek $u_{0j},u_{i,0}$) oldindan ma`lum, boshlanishida $u_{i,1}$ so'ngra $u_{i,2}$ aniq hisoblash mumkin. Ayirmali sxema turg'unligi uchun t va x lar bo'yicha qadamlar quyidagi shartlarni qanoatlantiradi: $\Delta\le\frac{h^2}{2a^2}$



6.2-rasm. Ikki qatlamli ayirmaning oshkor sxemasi.

Parabolik tipdagi tenglamani MathCADda yechishni quyidagi issiqlik tarqalish masalasi yordamida ko'rib o'tamiz.

1-Masala. $L(0 \le x \le L)$ uzunlikdagi sterjenda **issiqlikning tarqalishi**ni aniqlang, sterjendagi boshlang'ich temperatura ixtiyoriy $\varphi(x)$ funksiya bilan berilgan. Sterjen uchlaridagi temperaturalar $u(0,t) = u_1 = const$ va $u(L,t) = u_2 = const$ ga teng.

Sterjenda temperaturaning tarqalishini ifodalovchi boshlang'ich chegaraviy masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho} \quad , \quad 0 < x \le L \quad , \quad 0 < t \le \infty$$

$$u(0,t) = U_1, \quad u(L,t) = U_2, \quad 0 < t < \infty$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < L$$

Masalani yechish uchun quyidagi parametrli kattaliklar MathCAD dasturrining ishchi oynasiga kiritiladi va yechish algoritmiga mos dasturlar paketi shakillantiriladi:

$$f(x,t) := 0$$

$$N := 50$$

$$L := 5 \quad T := 3$$

$$K := 200 \quad a := 0.4$$

$$\nu(t) := 2.11$$

$$\phi(x) := e^{0.015x}$$

$$\mu(t) := 1$$

$$
\text{parabolik}(N,K,L,T,a) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{L}{N} \\
\Delta \leftarrow \dfrac{T}{K} \\
\text{for } i \in 0..N \\
\quad x_i \leftarrow i \cdot h \\
\text{for } j \in 0..K \\
\quad t_j \leftarrow j \cdot \Delta \\
y \leftarrow a^2 \cdot \dfrac{\Delta}{h^2} \\
\text{for } i \in 0..N \\
\quad u_{i,0} \leftarrow \phi(x_i) \\
\text{for } j \in 0..K \\
\quad \left| \begin{array}{l} u_{0,j} \leftarrow \mu(t_j) \\ u_{N,j} \leftarrow \nu(t_j) \end{array} \right. \\
\text{for } j \in 0..K-1 \\
\quad \text{for } i \in 1..N-1 \\
\quad\quad u_{i,j+1} \leftarrow y \cdot u_{i-1,j} + (1 - 2 \cdot y) \cdot u_{i,j} + y \cdot u_{i+1,j} + \Delta \cdot f(x_i, t_j) \\
\begin{pmatrix} u \\ x \\ t \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$H := \text{parabolik}(N,K,L,T,a)$

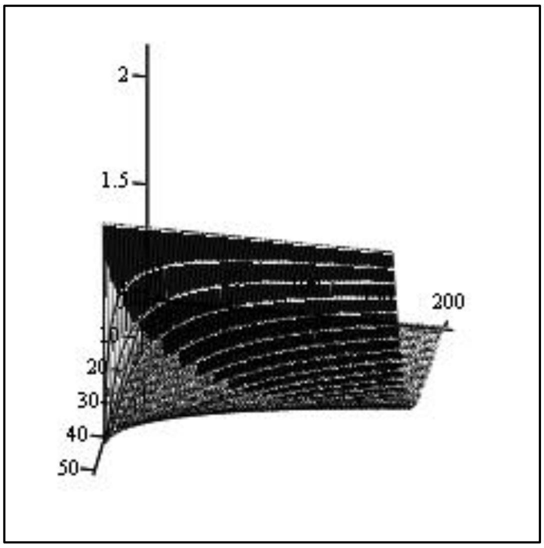
Bu yerda a^2-temperatura o'tkazish koeffisienti, λ- esa sterjen materialining temperatura o'tkazish koeffisienti, c-uzoqlashtirilgan issiqlik hajmi, ρ-massaning zichligi.

Qism dastur parabolikning kiruvchi qiymatlari: N-$(0,L)$-kesmani bo'lishdagi oraliqlar soni; K-$(0,T)$ kesma bo'linadigan orliqlar soni; L-sterjenning uzunligi; T-vaqt oralig'i; a-differensial tenglamaning parametri. Funksiya uchta qiymatni qaytaradi: Ω_h^Δ to'rda aniqlangan u to'r funksiyasi, x va t massivlar. Dastur natijasi 6.3- rasmda tasvirlangan.

$H := \text{parabolik}(N,K,L,T,a)$, $v := H_0$ $x := H_1$, $t := H_2$

v =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002	1.002
2	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003	1.003
3	1.005	1.005	1.005	1.005	1.005	1.005	1.005	1.005	1.005
4	1.006	1.006	1.006	1.006	1.006	1.006	1.006	1.006	1.006
5	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008	1.008
6	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009
7	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011	1.011
8	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012	1.012
9	1.014	1.014	1.014	1.014	1.014	1.014	1.014	1.014	1.014
10	1.015	1.015	1.015	1.015	1.015	1.015	1.015	1.015	1.015
11	1.017	1.017	1.017	1.017	1.017	1.017	1.017	1.017	1.017
12	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018	1.018
13	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02	1.02
14	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021	1.021
15	1.023	1.023	1.023	1.023	1.023	1.023	1.023	1.023	...



v

6.3.rasm. u nuqtali funksiya va masalaning yechimi.

2-masala. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x - x^2)\cos t - \sin x$ tenglama yechilsin. Buning uchun quyidagi funksiya parametrlarini kiritamiz.

$$f(x,t) := \left(x - x^2\right)\cdot\cos(t) + \sin(t)$$

$N := 50 \quad T := 3 \quad K := 200 \quad L := 5 \quad a := 0.4$

$$\nu(t) := 0$$

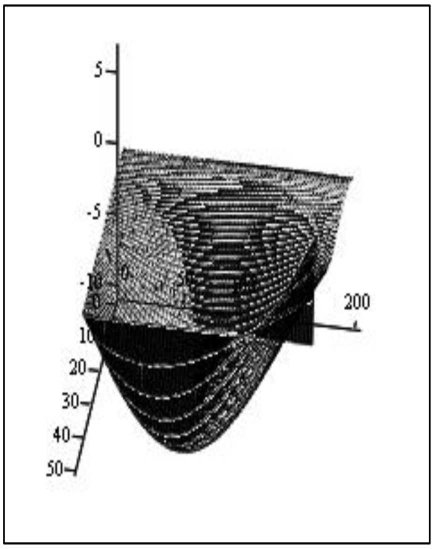
$$\mu(t) := 0 \quad \phi(x) := 0$$

$$
\text{parabolik}(N,K,L,T,a) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{L}{N} \\
\Delta \leftarrow \dfrac{T}{K} \\
\text{for } i \in 0..N \\
\quad x_i \leftarrow i \cdot h \\
\text{for } j \in 0..K \\
\quad t_j \leftarrow j \cdot \Delta \\
y \leftarrow a^2 \cdot \dfrac{\Delta}{h^2} \\
\text{for } i \in 0..N \\
\quad u_{i,0} \leftarrow \phi\left(x_i\right) \\
\text{for } j \in 0..K \\
\quad \left| \begin{array}{l} u_{0,j} \leftarrow \mu\left(t_j\right) \\ u_{N,j} \leftarrow \nu\left(t_j\right) \end{array} \right. \\
\text{for } j \in 0..K-1 \\
\quad \text{for } i \in 1..N-1 \\
\quad\quad u_{i,j+1} \leftarrow y \cdot u_{i-1,j} + (1 - 2 \cdot y) \cdot u_{i,j} + y \cdot u_{i+1,j} + \Delta \cdot f\left(x_i, t_j\right) \\
\begin{pmatrix} u \\ x \\ t \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

$$H := \text{parabolik}(N,K,L,T,a)$$

Yangi parametrlarga mos parabolik funksiyasining qiymatlari quyidagi jadvaldagi va 6.4-rasmda tasvirlangan.

$v := H_0 \quad x := H_1 \quad t := H_2$



6.4-rasm. Masalaning grafik yechimi.

$H_0 =$

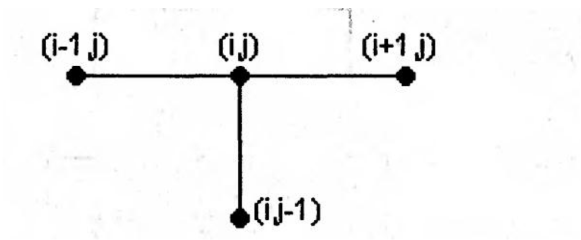
	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	$1.35\cdot10^{-3}$	$2.853\cdot10^{-3}$	$4.471\cdot10^{-3}$	$6.186\cdot10^{-3}$
2	0	$2.4\cdot10^{-3}$	$4.953\cdot10^{-3}$	$7.658\cdot10^{-3}$	0.011
3	0	$3.15\cdot10^{-3}$	$6.453\cdot10^{-3}$	$9.907\cdot10^{-3}$	0.014
4	0	$3.6\cdot10^{-3}$	$7.353\cdot10^{-3}$	0.011	0.015
5	0	$3.75\cdot10^{-3}$	$7.653\cdot10^{-3}$	0.012	0.016
6	0	$3.6\cdot10^{-3}$	$7.353\cdot10^{-3}$	0.011	0.015
7	0	$3.15\cdot10^{-3}$	$6.453\cdot10^{-3}$	$9.907\cdot10^{-3}$	0.014
8	0	$2.4\cdot10^{-3}$	$4.953\cdot10^{-3}$	$7.658\cdot10^{-3}$	0.011
9	0	$1.35\cdot10^{-3}$	$2.853\cdot10^{-3}$	$4.508\cdot10^{-3}$	$6.316\cdot10^{-3}$
10	0	0	$1.53\cdot10^{-4}$	$4.589\cdot10^{-4}$	$9.177\cdot10^{-4}$
11	0	$-1.65\cdot10^{-3}$	$-3.147\cdot10^{-3}$	$-4.49\cdot10^{-3}$	$-5.68\cdot10^{-3}$
12	0	$-3.6\cdot10^{-3}$	$-7.047\cdot10^{-3}$	-0.01	-0.013
13	0	$-5.85\cdot10^{-3}$	-0.012	-0.017	-0.022
14	0	$-8.4\cdot10^{-3}$	-0.017	-0.025	-0.033
15	0	-0.011	-0.022	-0.033	...

Parbolik tipdagi tenglamalarni oshkor sxema yordamida yechishda asosiy muammo yechimning turg'unligi va t qadamni to'g'ri tanlash bo'ladi. Aks holda har bir qatlamdagi xatoliklar miqdori borgan sari yig'ilib kattalashib borishi mumkin. Bu muammoni hal etish uchun oshkormas ayirmali sxema taklif etilgan. Bu sxemalar absolyut turg'un hisoblanadi, lekin olingan to'r tenglamani yechish algoritmi bir muncha murakkabroqdir. Oshkormas ayirmali sxemani qurish uchun ayrim almashtirishlarni qo'llab, Ω_h^Δ to'r tugunlarida u funksiyaning qiymatlarini hisoblash sxemasini olamiz.

$$\gamma u_{i-1,j} + (1+2\gamma)u_{i,j} + \gamma u_{i-1,j} = -u_{i,j-1} - \Delta f_{i,j} \qquad (6.6)$$

$$i = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,k$$

Bu tenglik ikki qatlamli oshkormas sxemani tashkil etadi.



6.5-rasm. Ikki qatlamli ayrmaning oshkormas sxemasi.

Hosil qilingan sxemalar yechimni ochiq yozish uchun yetarli emas,shuning uchun ham $u_{i,j}$ ni topish uchun j ning har bir qiymatida uch diagonalli algebraik tenglamalar sistemasini yechish zarur, buning uchun iterasion usullardan yoki haydash usulidan foydalanishga to'g'ri keladi. (6.6) tenglamalar sistemasini quyidagicha yozib olamiz:

$$u_{i,j} = \frac{\gamma}{1+\gamma}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{u_{i,j-1}}{1+\gamma} + \frac{\Delta}{1+2\gamma} f(x_i, t_j) \qquad (6.7)$$

(6.7) formula Zeydel usulida olingan oshkormas ayirmali sistemaning yechimini dasturlash uchun imkon beradi. Buning uchun quyidagi dasturlash parametrlari va oshkormas sxemaga mos dastur algoritm shakillantiriladi.

$$L := 5 \quad T := 3 \quad N := 50 \quad K := 200$$

$$f(x,t) := 0 \quad \varphi(x) := e^{0.15 \cdot x}$$

$$\mu(t) := 1 \quad \nu(t) := 2.1 \quad a := 5 \quad h := \frac{L}{N}$$

$$\Delta := \frac{T}{K} \quad \gamma := a^2 \cdot \frac{\Delta}{h^2} \quad i := 0..N$$

$$j := 0..K \qquad x_i := i \cdot h$$

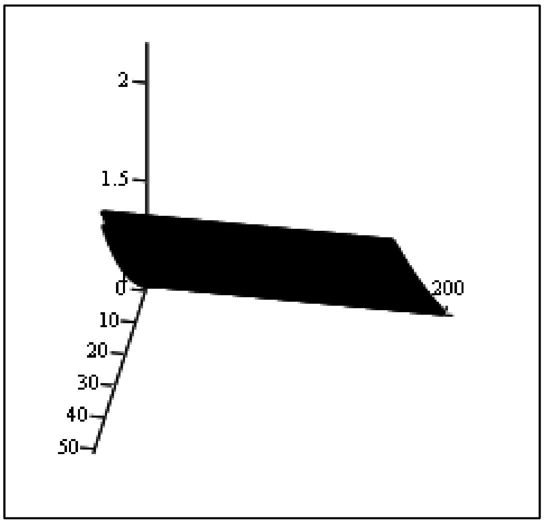
$$t_j := j \cdot \Delta \qquad U_2 := 1.18 \qquad U_{0,j} := \mu(t_j)$$

$$U_{i,0} := \varphi\, x_i \qquad U_{N,j} := \nu(t_j)$$

$$\text{Os\_mas}(U, \gamma, \Delta, \varepsilon, x, t) := \left| \begin{array}{l} p \leftarrow 1 \\ k \leftarrow 0 \\ \text{while } p > \varepsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N-1 \\ \quad \text{for } j \in 1..K \\ \quad\quad \left| \begin{array}{l} V \leftarrow \dfrac{\gamma}{1+2\cdot\gamma} \cdot \left(U_{i-1,j} + U_{i+1,j}\right) + \dfrac{U_{i,j-1}}{1+2\cdot\gamma} + \dfrac{\Delta}{1+2\cdot\gamma} \cdot f\left(x_i, t_j\right) \\ R_{i,j} \leftarrow \left|V - U_{i,j}\right| \\ U_{i,j} \leftarrow V \end{array} \right. \\ p \leftarrow \max(R) \\ k \leftarrow k+1 \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} U \\ R \\ k \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$H := \text{Os\_mas}(U, \gamma, \Delta, 0.0001, x, t) \qquad U := H_0 \qquad R := H_1 \qquad k := H_2 \qquad k = 1.144 \times 10^3$$

Dastur natijalari quyidagi jadvalda va 6.6-rasmda berilgan.



U

6.6-Rasm.

3-Masala. $L(0 \le x \le L)$ uzunlikdagi sterjenda issiqlikning tarqalishini aniqlang, sterjendagi boshlang'ich temperatura ixtiyoriy $f(x)$ funksiya bilan berilgan. Sterjen uchlaridagi temperaturalar $u(0,t) = u_1 = const$ va $u(L,t) = u_2 = const$ ga teng.Sterjenning yon sirtida temperaturaning almashinishi Nyuton qonuni bo'yicha amalga oshadi. Sterjenda issiqlikning tarqalishi masalasining boshlang'ich va chegaraviy shartlari quyidagicha:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h(u - u_0), \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}, \quad h = \frac{\alpha p}{c\rho\sigma}, \quad 0 \le x \le L, \quad 0 < t < \infty,$$

$$u(0,t) = U_1, \quad u(L,t) = U_2, \quad 0 < t < \infty \qquad (6.8)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < L$$

Bu yerda α-almashish koeffisienti, σ-sterjenning ko'ndalang kesim yuzasi, p-sterjenning ko'ndalang kesimi perimetri.

Ω_{hx}^{Δ} to'rni quramiz:

$$x_i = ihx, \quad hx = \frac{L}{n}, \quad i = 0,1,2,...,n, \quad t_j = j\Delta, \quad \Delta = \frac{T}{k}, \qquad j = 0,1,2,...,k.$$

To'r tenglamasini olish uchun $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ va $\frac{\partial u}{\partial t}$ hosilalarni taqribiy ayirmali formulalar bilan almashtirib, quyidagi ayirmali oshkormas sxemani quramiz.

$$u_{i,0} = \varphi(x_i), \quad i = 0,1,2,...,N,$$

$$u_{0,j} = U_1, \quad u_{N,j} = U_2, \quad j = 0,1,2,...,K$$

$$u_{i,j} = \frac{1}{1 + 2\gamma + \Delta h} + 1 + \frac{\gamma}{1 + 2\gamma + \Delta h}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{\Delta h}{1 + 2\gamma + \Delta h} u_0$$

$$i = 1,2,...,N-1; \quad j = 1,2,...,K$$

$$\gamma = a^2 \frac{\Delta}{hx^2}$$

Oshkormas sxemani qo'llab, masalani Zeydel usulida yechish uchun quyidagi parametrik kattaliklar kiritiladi va masalani yechish algoritmiga mos dastur ta`minoti shakillantiriladi.

$$L := 8 \qquad T := 3 \qquad N := 50 \qquad K := 200$$

$$\phi(x) := 0.25 + \sin(0.15x)$$

$$u1 := 0.2\ \ u2 := 1.1\ \ h := \frac{L}{N} \quad \Delta := \frac{T}{K}$$

$$a := 5 \quad \gamma := a^2 \cdot \frac{\Delta}{h^2} \quad i := 0..N \quad j := 0..K$$

$$x_i := i \cdot h \qquad t_j := j \cdot \Delta$$

$$U_{i,0} := \phi(x_i) \qquad U_{N,j} := u2$$

$$u_0 := 2 \quad U_{0,j} := u1 \qquad \varepsilon := 0.000$$

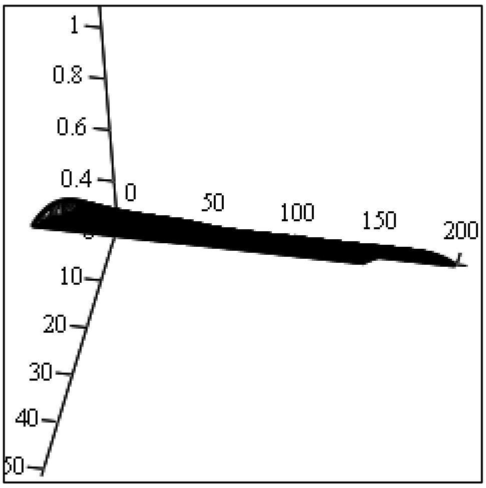
```
Ohk_mas(U,K,N,Δ,h,ε) := | ρ ← 1
                        | k ← 0
                        | while ρ > ε
                        |   | for j ∈ 1..K
                        |   |   for i ∈ 1..N − 1
                        |   |     | V ← γ/(1 + 2·γ + Δ·h)·(U[i−1,j] + U[i+1,j]) + U[i,j−1]/(1 + 2·γ + Δ·h) + Δ·h/(1 + 2·γ + Δ·h)·u0
                        |   |     | R[i,j] ← |V − U[i,j]|
                        |   |     | U[i,j] ← V
                        |   | ρ ← max(R)
                        |   | k ← k + 1
                        | (U R k)
```

Masalani yechish algoritmiga mos dastur natijalari quyidagi jadvallarda va 6.7-rasmda keltirilgan.

$H := \mathrm{Ohk\_mas}(U,K,N,\Delta,h,\varepsilon) \qquad H_2 = 992$

$H_0 =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
1	0.274	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275	0.275
2	0.298	0.299	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3
3	0.322	0.323	0.324	0.325	0.325	0.325	0.325	0.325	0.325
4	0.346	0.348	0.348	0.349	0.349	0.35	0.35	0.35	0.35
5	0.37	0.371	0.373	0.373	0.374	0.374	0.374	0.374	0.374
6	0.394	0.395	0.396	0.397	0.397	0.398	0.398	0.398	0.398
7	0.417	0.419	0.42	0.421	0.421	0.421	0.421	0.421	0.421
8	0.441	0.442	0.444	0.444	0.445	0.445	0.445	0.445	0.445
9	0.464	0.466	0.467	0.468	0.468	0.468	0.468	0.468	0.468
10	0.488	0.489	0.49	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491	0.491
11	0.511	0.512	0.513	0.513	0.514	0.514	0.514	0.514	0.513
12	0.534	0.535	0.536	0.536	0.536	0.536	0.536	0.536	0.536
13	0.557	0.558	0.558	0.559	0.559	0.559	0.558	0.558	0.558
14	0.58	0.58	0.581	0.581	0.581	0.581	0.58	0.58	0.58
15	0.602	0.603	0.603	0.603	0.603	0.602	0.602	0.602	...



H_0

6.7-rasm. Masalaning yechimi va uning grafigi.

Yuqorida berilgan barcha tipdagi masalalar to’r usuli algoritmi va unga mos dastur ta`minotlarini yaratish orqali yechiladi. Biroq MathCAD tizimidagi ayrim standart funksiyalar xususiy hosilali differensial tenglamani yechish imkonini beradi.

Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun MathCAD tizimida pdesolve va numol funksiyalari mavjud bo’lib, ulardan quyidagicha foydalaniladi.

Parabolik tenglamani yechish uchun quyidagi prosedurani bajarish kerak:

1. Given kalit so'zini kiritish.
2. Tizimga kiruvchi tenglamani kiritish. Bunda tenglik belgisini qalin qilib tanlash kerak, buning uchun Ctrl+= klavishlarini birgalikda bosiladi yoki Boolean (Bul operatorlari) panelidan foydalaniladi.
3. Boshlang'ich va chegaraviy shartlarni kiritish. Bunda hosilalar quyi indekslar sifatida kiritiladi, tenglik belgisi uchun Boolean (Bul operatorlari) panelidan foydalaniladi.
4. $pdesolve(u, x, xrange, t, trange, xpts, tpts)$ funksiyasini qo'llash, bu yerda u-funksiya nomi(argumentlarsiz), x-fazoviy o'zgaruvchi nomi, $xrange$-fazoviy o'zgaruvchining o'zgarish chegaralarini aniqlovchi ikki o'zgaruvchili massiv, t-vaqt bo'yicha o'zgaruvchi, $trange$-vaqt o'zgaruvchisining chegaralarini aniqlovchi ikki elementdan iborat massiv, $xpts$, $tpts$ -x va t o'zgaruvchilarning bo'linadigan oraliqlaridagi nuqtalar soni (bu parametr berilmasa ham bo'ladi. U holda uni MathCAD avtomatik ravishda tanlaydi).

Quyida kiritilgan parametrlarning qiymatlari va prsedurasining bajarilishi ifodalangan:

$$L := 5 \quad T := 3 \quad N := 50 \qquad f(x) := e^{0.15 \cdot x}$$

$$\mu(t) := 1 \qquad \nu(t) := 2.11$$

$$a := 5 \quad U_1 := 1 \quad U_2 := 2.11$$

$$\text{Given} \; u_t(x,t) = \left(a^2 u_{xx}(x,t)\right)$$

$$u(0,t) = U_1$$

$$u(x,0) = f(x)$$

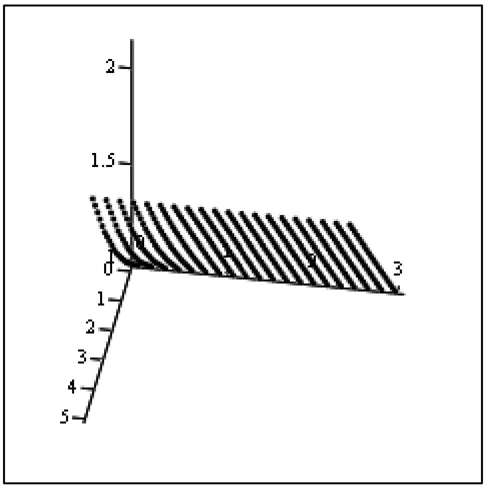
$$u(L,t) = U_2$$

Issiqliq tarqalish tenglamasini $pdesolve$ yordamida yechish uchun natijaviy prosedura ishlatiladi.

$$u := \mathrm{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 5, 4\right]$$

$$U := \mathrm{CreateMesh}(u, 0, L, 0, T)$$

Natijaning grafik tasviri hosil qilingan qiymatlarga mos holda tasvirlangan.



U

6.8-rasm. Issiqlik tarqalish tenglamasining grafik yechimi.

Endi $pdesolve(u, x, xrange, t, trange, xpts, tpts)$ funksiyasi yordamida ikkinchi masalaning yechilishini ko'rib o'tamiz. Buning uchun MathCAD dasturining ishchi muhitiga quyidagi funksiya va uning parametrlari kiritiladi.

$$f(x) := 0.25 + \sin(0.15x)$$

$$u_0 := 2$$

$$L := 8 \quad U_1 := 0.25 \quad U_2 := 1.182$$

$$T := 3 \quad h := 1 \quad a := 5$$

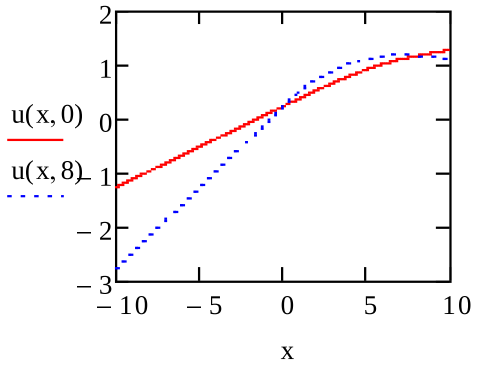
$$\text{Given} \; u_t(x,t) = a^2 \cdot u_{xx}(x,t) - h \cdot \left(u(x,t) - u_0\right)$$

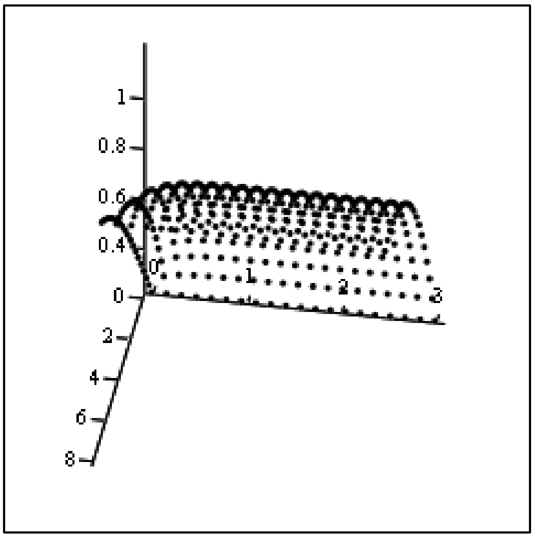
$$u(0,t) = U_1 \qquad u(L,t) = U_2$$

$$u(x,0) = f(x)$$

$$u := \mathrm{Pdesolve}\left[u, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 30, 30\right]$$

$$U := \mathrm{CreateMesh}(u, 0, L, 0, T)$$





U

6.9-rasm. Issiqlik tarqalishi tenglamasiga mos masalaning grafik yechimi.

Xususiy hosilali differensial tenglamaning yechimi natijasi funksiya hisoblanadi. Uning istalgan nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun argument sifatida aniq qiymatlardan foydalanish yetarli.

Bir o'lchamli parabolik tenglamani chegaralarda Dirixle sharti bilan yechish uchun numol funsiyasidan foydalaniladi. Bu funsiya

$$numol(xrange, xpts, trange, tpts, Npde, Nae, pde\_f, pde\_init, pde\_bc)$$

to'r tugunlarida qiymatlar matrisasini qaytaradi.

Funksiya tarkibidagi o'zgaruvchilar

- $xrange$ -fazoviy o'zgaruvchilar chegarasini aniqlovchi ikki elementli massiv;
- $xpts$ - x o'zgaruvchi o'zgaradigan oraliqni bo'lishdagi nuqtalar soni;
- $trange$ -vaqt oralig'ini o'zgarishi chegaralarini aniqlovchi ikki elementli massiv;
- $tpts$ - vaqt o'zgaruvchisi oralig'ini bo'lishdagi nuqtalar soni;
- $Npde$ -xususiy hosilali differensial tenglamalar soni;
- Nae -xususiy hosilali differensial tenglamalar sitemasiga kiruvchi qo'shimcha algebraik tenglamalar soni ;

- pde_f - x,t,u,u_x,u_{xx} o’zgaruvchilarga bog’liq bo’lgan parabolik tenglamaning o’ng tomonini aniqlovchi funksiya;
- pde_int -boshlang’ich shartni ifodalovchi funsiyadan iborat;
- pde_bc -chegaraviy shartni ifodalovchi vektor funksiya;

$$L := 5 \quad T := 3 \quad N := 50 \quad f(x) := e^{0.15\cdot x}$$

$$\mu(t) := 1 \quad \nu(t) := 2.11$$

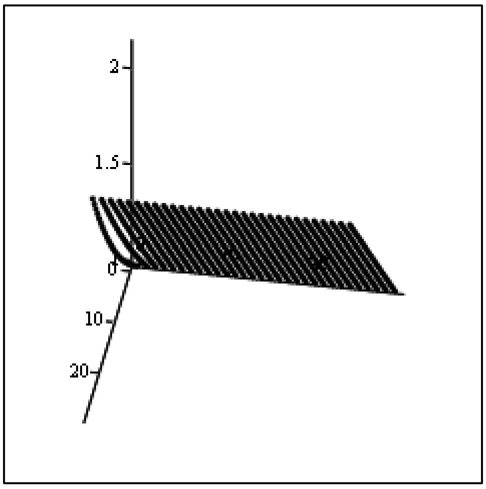
$$U_1 := 1 \quad a := 5 \quad U_2 := 2.11 \quad h := \frac{L}{N} \quad h = 0.1 \quad Npde := 1 \quad Nae := 0$$

$$pde\_f\left(tu, x, u, u_x, u_{xx}\right) := a^2 \cdot u_{xx}$$

$$pde\_bc(t) := \left(U_1 \quad U_2 \quad \text{"D"}\right)$$

$$V := numol\left[\begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, 30, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 30, Npde, Nae, pde\_f, f, pde\_bc\right]$$

Issiqliq tarqalish tenglamasini *numol* yordamida yechish uchun quyidagi parametrik kattaliklar va prosedura funksiyalar kiritiladi:



V

6.10-rasm.

Endi 2-masala uchun **numol** funksiyasini qo’llangan holni qaraymiz. Buning uchun quyidagi parametrik qiymatlar va funksiyalar kiritiladi.

$$f(x) := 0.25 + \sin(0.15x)$$

$$u_0 := 2$$

$$L := 8 \quad T := 3$$

$$U_2 := 1.182 \quad a := 5 \quad h := 1 \quad U_1 := 0.25$$

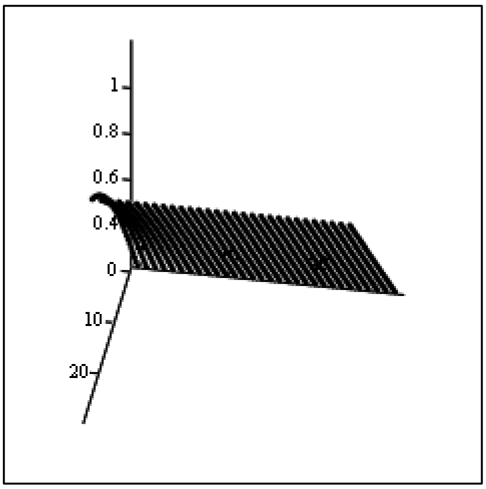
$$Npde := 1 \quad Nae := 0$$

$$pde\_f(t, x, u, u_x, u_{xx}) := \left[a^2 \cdot u_{xx} + h \cdot (u - u_0)\right]$$

$$pde\_bc(t) := \left(U_1 \quad U_2 \quad "D"\right)$$

$$V := numol\left[\begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, 30, \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix}, 30, Npde, Nae, pde\_f, f, pde\_bc\right]$$

Issiqlik tarqalishi tenglamasining 2-masalasini numol funksiyasidan foydalanib olingan yechimi 6.11-rasmda tasvirlangan.



V

6.11-rasm.

Yuqoridagi rasmlardan ko'rinib turibdiki to'r usulida xuddi shuningdek *numol* va *pdesolve* funksiyalarida olingan yechimlar ustma-ust tushadi.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

- ✓ Parabolik tipdagi tenglamani oshkor va oshkormas sxemalar orqali yechish qanday tashkil etiladi?
- ✓ Mathcad dasturida oshkormas sxemani qo’llab, masalani Zeydel usulida yechish algoritmini bilasizmi?
- ✓ MathCAD dasturida pdesolve funksiyasi bilan parabolik tipdagi tenglamani yecha olasizmi?
- ✓ Numol standart funksiyasi parabolik tipdagi differensial tenglamani yechishda qanday imkoniyatlar yaratadi?
- ✓ *numol* va *pdesolve* standart funksiyalarini differensial tenglamani yechishdagi imkoniyatlarini taqqoslang, ulardan qaysi biri samaraliroq ekanligini aniqlang.

3-§. Giperbolik tenglamalarni MathCAD dasturiy vositalari yordamida taqribiy yechishning amaliy dasturlar paketini yaratish

O’quv modullari

Giperbolik tipdagi tenglama, boshlang’ich shart, chegaraviy shart, to’r usuli, oshkor va oshkormas sxemalar.

Yuqorida ta‘kidlab o‘tganimizdek, amalda uchraydigan barcha jarayonlar o‘zlarining asosiy xususiyatlarini ifodalovchi matematik modellarga egadirlar. Masalaning mohiyatiga qarab, bu modellarni ifodalovchi matematik tenglamalar turli ko‘rinishda, jumladan, murakkab jarayonlarning matematik modellari matematik-fizika tenglamalari orqali ifodalanadi.

Agar tebranuvchan xarakterdagi jarayonlar, aniqroq qilib aytadigan bo‘lsak, turli xil ingichka torlar, har xil materiallardan ishlangan tayoqlar va boshqa xildagi konstruksiyalarning ko‘ndalang va bo‘ylama tebranishlari jarayonlari o‘rganilayotgan bo‘lsa, bunday masalalarning matematik modellari giperbolik tipdagi tenglamalarga keltiriladi. Tebranishlar esa so‘nib boruvchi yoki aksincha bo‘lishi mumkin. Xususiy holda giperbolik tipdagi tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin (fazoviy koordinata bo‘yicha bir o‘lchov bilan chegaralanib):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (6.9)$$

Bunda $u(x,t)$-izlanuvchi funksiya, t-vaqt, x-chiziqli koordinata, c^2-o‘zgarmas koeffisient. (6.9)-ko‘rinishdagi giperbolik tipdagi tenglamalar uchun odatda ikkita boshlang’ich va ikkita chegaraviy shart beriladi. Qaralayotgan soha $x^{\circ}[a,b]$ va $t^{\circ}[0,T]$ lardan iborat bo‘lsa, qidirilayotgan noma`lum $u(x,t)$ funksiya quyidagi boshlang’ich shartlarni:

$$u(x,0) = f_1(x), \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = f_2(x) \qquad (6.10)$$

va quyidagicha chegaraviy shartlarni (soddalik uchun eng sodda chegaraviy shart, Dirixle masalasi qabul qilindi):

$$u(a,t) = \varphi_1(t), \ u(b,t) = \varphi_2(t)$$

qanoatlantirishi kerak.

Masala:Quyidagi boshlang’ich va chegaraviy shartlari bilan berilgan giperbolik tipdagi masalani yechish talab etilgan:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x} + \sin(xt), \quad 0 \le x \le L, \quad t > 0,$$

$$\omega(x,0) = \varphi(x,0), \quad \omega(L,t) = \varphi(L), \qquad \omega(x,0) = \varphi(x), \quad \omega_i(x,0) = \psi(x).$$

Buning uchun chegaraviy va boshlang’ich shartlarni ifodalovchi funksiyalarni hamda zarur parametrik qiymatlarni hamda to’r usulida yechish algoritmiga mos buyrug’lar tizimini kiritamiz.

$\phi(x) := \sin(x) \quad \psi(x) := \cos(x) \quad \nu(t) := 0 \quad f(x,t) := \sin(x \cdot t)$

$a := 4 \quad T := 2 \quad A := 3 \quad \nu := 5 \quad L := 10 \quad N := 50 \quad K := 200$

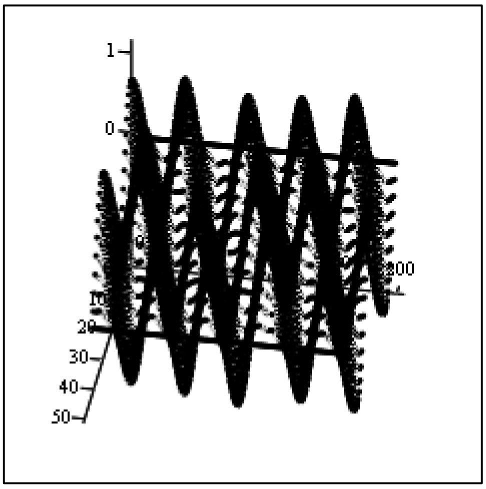
$$
\mathrm{giferbolic}(N,K,L,T,a) := \left|
\begin{array}{l}
h \leftarrow \dfrac{L}{N} \\
\Delta \leftarrow \dfrac{T}{K} \\
\text{for } i \in 0..N \\
\quad \left| \begin{array}{l} x_i \leftarrow i \cdot h \\ u_{i,0} \leftarrow \phi\left(x_i\right) \\ u_{i,1} \leftarrow u_{i,0} + \Delta \cdot \psi\left(x_i\right) \end{array} \right. \\
\text{for } j \in 0..K \\
\quad t_j \leftarrow \Delta \cdot j \\
\text{for } j \in 1..K \\
\quad \left| \begin{array}{l} u_{0,j} \leftarrow 0 \\ u_{N,j} \leftarrow \phi(L) \end{array} \right. \\
\nu \leftarrow a^2 \cdot \dfrac{\Delta^2}{h^2} \\
\text{for } j \in 1..K-1 \\
\quad \text{for } i \in 1..N-1 \\
\qquad u_{i,j+1} \leftarrow -u_{i,j-1} + \gamma \cdot u_{i-1,j} + (2 - 2\gamma)u_{i,j} + \gamma \cdot u_{i+1,j} + \Delta^2 \cdot f\left(x_i, t_j\right) \\
u
\end{array}
\right.
$$

$V := \mathrm{giferbolic}(N,K,L,T,a)$

Giferbolic prosedurani ishlatish natijasida jadval berilgan natijaviy qiymatlar hamda 6.12-rasmdagi grafik tasvirlar hosil qilinadi.

V =

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0.199	0.208	0.208	0.197	0.182
2	0.389	0.399	0.399	0.386	0.359
3	0.565	0.573	0.568	0.55	0.517
4	0.717	0.724	0.715	0.688	0.646
5	0.841	0.847	0.833	0.8	0.748
6	0.932	0.936	0.918	0.879	0.819
7	0.985	0.987	0.966	0.923	0.858
8	1	0.999	0.976	0.93	0.863
9	0.974	0.972	0.947	0.901	0.833
10	0.909	0.905	0.88	0.835	0.77
11	0.808	0.803	0.778	0.736	0.677
12	0.675	0.668	0.645	0.608	0.556
13	0.516	0.507	0.487	0.455	0.413
14	0.335	0.326	0.309	0.285	0.254
15	0.141	0.131	0.118	0.103	...



v

6.12-rasm.

Shunday qilib yuqorida qaralgan pdesolve funksiyasi t bo'yicha hosilasi birinchi tartibli hosiladan yuqori bo'lmagan differensial tenglama va sistemalarni yechishga imkon beradi. Istalgan giperbolik tenglamalarda t bo'yicha ikkinchi hosila albatta ishtirok etgan. Suning uchun, giperbolik tenglamani yechishda uni xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Buning uchun qo'shimcha $\nu = \frac{\partial u}{\partial t}$ no`malum funksiyasi kiritiladi.

$$\nu = \frac{\partial \omega}{\partial t},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sin(xt),$$

$$\omega(x,t) = \varphi(0), \omega(L,t) = \varphi(l),$$

$$\omega(x,0) = \varphi(x), \nu(x,0) = \psi(x),$$

Mazkur masalani Given-Pdesolve bloki yordamida yechish uchun quyidagilarga e`tibor berish zarur:

- pdesolve funksiyasining birinchi parametri funksiyalar ismlaridan iborat massiv bo'ladi, berilgan misolda u $\begin{pmatrix} \omega \\ \gamma \end{pmatrix}$ dan iborat;
- pdesolve funksiyasi sistema yechimi vektor funksiyani qaytaradi.

- Ishchi oynaga quyidagi parametrlar kiritiladi va differensial tenglamaning vektordan iborat natijalari hosil qilinadi.

$$\phi(x) := \sin(x)$$

$$\psi(x) := \cos(x)$$

$$f(x,t) := \sin(x \cdot t)$$

$$L := 10$$

$$a := 4$$

$$T := 2$$

$$A := 3$$

$$\gamma := 5$$

$$\text{Given}\quad v_t(x,t) = a^2 \cdot \omega_{xx}(x,t) + \sin(x \cdot t)$$

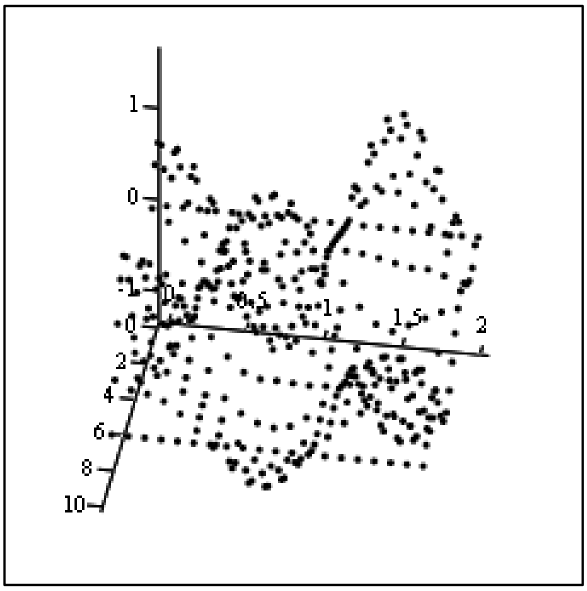
$$\omega_t(x,t) = v(x,t)$$

$$v(x,0) = \psi(x)$$

$$\omega(L,t) = \phi(L)$$

$$\omega(0,t) = 0$$

$$\begin{pmatrix}\omega\\ v\end{pmatrix} := \text{Pdesolve}\left[\begin{pmatrix}\omega\\ v\end{pmatrix}, x, \begin{pmatrix}0\\ L\end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix}0\\ T\end{pmatrix}, 100, 100\right]$$



CreateMesh $(\omega, 0, L, 0, T)$

6.13- rasm.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Giperbolik tipdagi tenglamalarni to‘r usulida yechish algoritmini ayting?
2. Given-Pdesolve bloki yordamida MathCAD dasturida yechush algoritmini tushuntirib bera olasizmi?
3. Giperbolik tipdagi differensial tenglamalarni yechishda olingan sonli-taqribiy yechimlarning aniqligini oshirish bo‘yicha tavsiyalar bera olasizmi?

4-§. Elliptik tipdagi tenglamani MathCAD dasturiy vositalari yordamida taqribiy yechishning amaliy dasturlar paketini yaratish

O’quv modullari

Elliptik tipdagi tenglama, to’r soha, Dirixle sharti, Zeydel usuli, mul’tigrid standart funksiyasi.

Ma`lumki, qaralayotgan masalada vaqt faktori kuchsiz rol o‘ynasa, ya`ni jarayonning matematik modelida vaqtni ifodalovchi parametrlar qatnashmasa, bunday jarayonlarni stasionar jarayonlar deb ataladi. Stasionar jarayonlarga qurilish mexanikasini zo‘riqish va egilish masalalarini kiritish mumkin.

Elliptik tipdagi tenglama uchun $\Omega(R-a \le x \le R+a; -a \le y \le a$ to’g’ri to’rtburchakli sohada Γ chegarada Dirixle shartli ayirmali sxemani qaraymiz:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{5\partial \psi}{x \partial x} = -2$$

$$\psi(x,y)\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = 0$$

Tenglamani to’r usulida yechish uchun Ω_{hx}^{hy} to’rni quramiz, buning uchun Ω sohada koordinata o’qlariga parallel bo’lgan $y = y_i$ va $x = x_i$ to’g’ri chiziqlarni o’tkazamiz, bunda $x_i = R - b + ihx$, $hx = \frac{b}{n}$, $i = 0,1,2,...,n$ $y_i = -a + hy$, $hy = \frac{2a}{k}$, $j = 0,1,2,...,k$. Ayirmali tenglamalarni qurish uchun xususiy hosilalarni va chegaraviy shartlarni quyidagi shartlar bilan almashtiriladi:

$$\frac{\partial^2 \Psi(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{\Psi_{i+1,j} - 2\Psi_{i,j} + \Psi_{i-1,j}}{hx^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi(x_i, t_j)}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{hy^2}$$

$$\Psi_{i,0} = \Psi_{i,Ny} = 0, \quad i = 0,1,2,...,Nx,$$

$$\Psi_{i,0} = \Psi_{Nx,j} = 0, \quad j = 0,1,2,...,Ny$$

Yuqoridagi munosabatlardan foydalanib, elliptik tipdagi chegaraviy masalani quyidagi ayirmali tenglamalar sistemasiga keltiramiz:

$$\Psi_{i,j} = \frac{1}{A}\left(B_i \Psi_{i+1,j} + C_i \Psi_{i-1,j} + D(\Psi_{i,j-1} + \Psi_{i,j+1}) + 2 \right),$$

$$A = \left(\frac{2}{hx^2} + \frac{2}{hy^2} \right), \; B_i = \frac{1}{hx^2} + \frac{5}{2hxx_i}, \quad C_i = \frac{1}{hx^2} - \frac{5}{2hxx_i}, \; D = \frac{1}{hy^2} \qquad (5.14)$$

$$\Psi_{i,0} = \Psi_{i,Ny} = 0, \quad i = 0,1,2,...,Nx,$$

$$\Psi_{i,0} = \Psi_{Nx,j} = 0, \quad j = 0,1,2,...,Ny$$

Bu tenglamalar sistemasini yechish uchun Zeydelning iterasion usulini qo’llash maqsadga muvofiqdir. Buning uchun MathCAD dasturining ishchi oynasiga quyidagi parametrik kattaliklar kiritiladi.

$R := 1\varepsilon \quad a := 3 \; b := 6 \quad Nx := 16 \quad Ny := 8$

$i := 0..Nx$

$j := 0..Ny$

$$hy := \frac{2\cdot a}{Ny} \qquad hx := \frac{2\cdot b}{Nx}$$

$$x_i := R - b + i\cdot hx \qquad y_j := -a + j\cdot hy$$

$$\psi_{i,0} := 0 \qquad \psi_{i,Ny} := 0 \qquad \psi_{0,j} := 0 \qquad \psi_{Nx,j} := 0$$

$$A := \frac{2}{hy^2} + \frac{2}{hx^2} \qquad D := \frac{1}{hy^2}$$

$$i := 1..Nx$$

$$B_i := \frac{1}{hx^2} + \frac{5}{2\cdot hx\cdot x_i}$$

$$C_i := \frac{1}{hx^2} - \frac{5}{2\cdot hx\cdot x_i} \qquad \varepsilon := 0.000$$

Differensial tenglamani yechish uchun ishlab chiqilgan algoritmlarga mos dastur kodlari ishchi muhitga quyidagi tartibda kiritiladi va jadvalda keltirilgan ma`lumotlar hosil qilinadi.

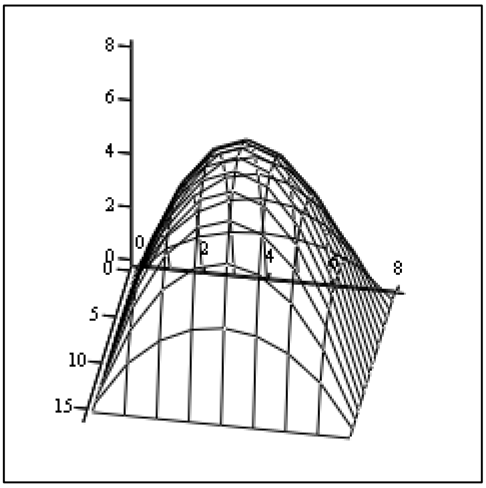
```
Elliptic(Ψ, Nx, Ny, ε) := | p ← 1
                          | k ← 0
                          | while p > ε
                          |   | for i ∈ 1..Nx − 1
                          |   |   for j ∈ 1..Ny − 1
                          |   |     | V ← (1/A)·[B_i·Ψ_{i−1,j} + C_i·Ψ_{i+1,j} + D·(Ψ_{i,j−1} + Ψ_{i,j+1}) + 2]
                          |   |     | R_{i,j} ← |V − Ψ_{i,j}|
                          |   |     | Ψ_{i,j} ← V
                          |   | p ← max(R)
                          |   | k ← k + 1
                          | (Ψ R k)
```

$$H := Elliptic(\psi, Nx, Ny, \varepsilon)$$

$H_0 =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1.087	1.664	1.954	2.043	1.954	1.664	1.088	0
2	0	1.83	2.92	3.499	3.681	3.499	2.92	1.83	0
3	0	2.365	3.867	4.697	4.962	4.697	3.867	2.365	0
4	0	2.759	4.58	5.613	5.947	5.613	4.58	2.759	0
5	0	3.05	5.114	6.303	6.692	6.304	5.114	3.05	0
6	0	3.263	5.506	6.813	7.243	6.814	5.506	3.264	0
7	0	3.414	5.784	7.176	7.635	7.176	5.784	3.415	0
8	0	3.512	5.965	7.412	7.89	7.412	5.965	3.513	0
9	0	3.561	6.054	7.529	8.016	7.529	6.054	3.561	0
10	0	3.556	6.046	7.518	8.005	7.518	6.046	3.556	0
11	0	3.486	5.917	7.35	7.824	7.35	5.917	3.486	0
12	0	3.324	5.621	6.966	7.41	6.966	5.621	3.324	0
13	0	3.025	5.075	6.263	6.652	6.263	5.075	3.025	0
14	0	2.503	4.14	5.071	5.373	5.071	4.141	2.503	0
15	0	1.602	2.58	3.119	3.292	3.119	2.58	1.602	...

Elliptik tipdagi tenglama yechimlariga mos qiymatlardan hosil qilingan grafik tasvir 6.14-rasmda tasvirlangan.



H_0

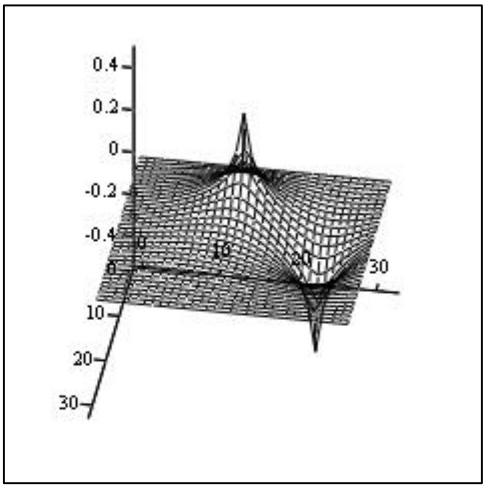
6.14-rasm.

Endi berilgan elliptik tipdagi differensial tenglamani MathCAD ning standart funksiyalari yordamida yechish masalasini qaraymiz. Buning uchun quyidagi parametrik kattaliklar va *multigrid* funksiyasidan foydalaniladi.

$$N := 32 \qquad i := 1..N \qquad j := 1..N$$

$$F_{i,j} := 0 \qquad F_{10,15} := 800$$

$$u := multigrid(-F, 2) \qquad F_{15,25} := -900$$



u

6.16-rasm.

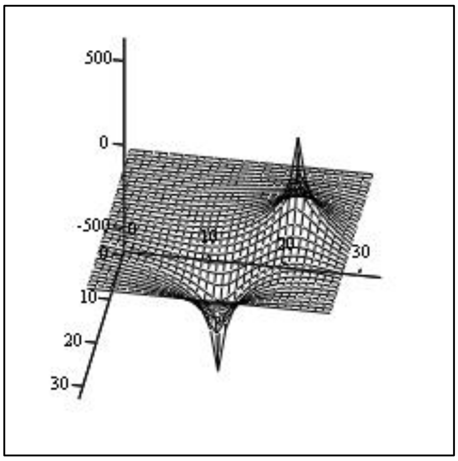
Standart funksiyalardan biri relax funksiyasidir. Mazkur funksiyani ishlatishda xuddi yuqoridagi kabi quyidagi parametrik kattaliklar kiritiladi.

$$N = 32 \quad i := 0..N \quad j := 0..N$$

$$a_{i,j} := 1 \quad b := a \quad c := a \quad d := a \quad e := -4 \cdot a \quad F_{i,j} := 0 \quad u_{i,j} := 0$$

$$F_{25,16} := 10^3 \quad F_{16,25} := -10^3 \quad rjac := 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{N}$$

$$U := relax(a, b, c, d, e, F, u, rjac)$$



U

6.17-rasm.

MUHOKAMA UCHUN SAVOLLAR VA MUAMMOLI VAZIYATLAR!

1. Elliptik tipdagi tenglamani yechishda eng maqbul usul qaysi? Fikringizni tushuntiring.
2. *Multigrid* funksiyasi yordamida eliptik tipdagi tenglamani qanday yechiladi?
3. *Relax* standart funksiyasi yordamida eliptik tipdagi tenglamani yechish algoritmini tavsiflab bering.

6– BOB BO’YICHA XULOSALAR.

- ✓ Ushbu bobda xususiy hosilali differensial tenglamalar, ularning amaliy tadbiqlari, differensial tenglamani tiplarga ajratish, turli xil tipdagi differensial tenglamalar uchun beriladigan boshlang’ich va chegaraviy shartlar haqida zarur ma`lumotlar berildi.
- ✓ Dirixle masalasi, Neyman masalasi, aralash masala, oshkor va oshkormas sxemalarning umumiy tavsifi keltirildi.
- ✓ MathCAD dasturida parabolik va giperbolik tipdagi tenglamalarni oshkor va oshkormas sxemalar yordamida hamda elliptik tipdagi tenglamalarni to’r usulida yechish uchun hisoblash algoritmlariga mos dasturlar paketlari yaratildi, aniq masalalar uchun dasturlar ishlatildi va olingan natijalar tahlil etildi.
- ✓ Xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechishda MathCADning standart funksiyalaridan foydalanildi, olingan natijalar jadvallar va grafik ko’rinishlarda keltirildi va tahlil etildi.

IZOHLI LUG’ATLAR

Algoritm–m‘lum bir turga oid masalalarni yechishda ishlatiladigan amallarning muayyan tartibda bajarilishi haqidagi aniq qoida (dastur).

Amaliy dasturlar paketi–muayyan sinf vazifalarini kompyuterda hal etish uchun mo’ljallangan dasturlar majmui.

Augment(A,B)– A va B matrisalar qiymatlarini ustun bo’yicha barchasini birlashtirib, uchinchi matrisani hosil qiladi.

Bir qadamli usul – y_{k+1} ni hisoblashda faqat bitta oldingi y_k iterasiya ishlatiladigan usul.

Bulstoer (u, x1, x2, m, D) – birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli *n* ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada Bulirish-Ster usulini qo’llab, integrallash qadami o’zgarmas bo’lgan hol uchun yechadi.

Cols(A) –A matrisaning ustunlari sonini aniqlaydi.

Dastur–kompyuterda ishlatishga tayyor, dasturlash tilida yoki ob’ektli kodda yozilgan algoritm.

Dasturlar paketi – foydalanuvchi nuqtai-nazaridan qaraganda bir maqsadga yo‘naltirilgan bir nechta dasturlar to‘plamini anglatadi.

Diag(d) –standart funksiyasi yordamida matrisani diagonal elementlarini hosil qiladi.

Diagonal matrisa – bosh diagonalda joylashgan elementlaridan boshqa barchasi nolga teng kvadrat matrisa.

***Differensial* tenlama** –erkli o’zgaruvchi va noma’lum funksiya hamda uning hosilalalari yoki differensiallarini bog’lovchi munosabat.

Differensial tenlamaning yechimi– tenglamaga qo’yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi funksiyaga aytiladi.

Find(x, y, z…) –topmoq, tenglama va tenglamalar sistemasi ildizlarini topish.

Gausning kvadratura formulasi– algebraik ko’phadga nisbatan eng yuqori aniqlikdagi tartibda integrallash formulasi.

Global o'zgaruvchilar –dasturning ixtiyoriy yerida foydalanish mumkin bo'lgan o'zgaruvchi.

***Grafik* soha**–shaklni yaratish, chizma ob`ektlarini o'zgartirish mumkin bo'lgan soha.

Ikki qadamli iteratsiya usuli – usul, boshlangich shart va u asosida olingan yechim orasidagi farqni topish.

Integral– cheksiz kichik sonlar yig'indisi sifatida qaraladigan butun miqdor.

Integrallash–berilgan funksiyaning yoki matematik ifodaning integralini topish, aniqlash.

Koshi masalasi–berilgan differensial tenglamani boshlangich shart asosida xususiy yechimini topish.

Last(v)– v vektor komponentasining oxirgi nomerini aniqlaydi.

Length(v)–v vektor komponentasining elementlar sonini aniqlaydi.

Lentali matrisa– barcha nolga teng bo'lmagan elementlari bosh diagonal atrofida joylashgan matrisa.

MathCAD– kompyuter matematika sistemasi.

Matlab–matematik hisoblashlarni matrisaviy operasiyalarga asoslangan holda avtomatlashtirish.

Matematik model–jarayonni matematik munosabatlar yoki tenglanalar bilan tasvirlangan ifodasi.

Max(A) –A matrisa (vektor)ning eng katta elementini aniqlaydi.

Mean(A) – A matrisa (vektor) ning o'rta qiymatini hisoblaydi

***Median(A*)**–A matrisa (vektor) ning medianasini hisoblaydi.

Min(A)–A matrisa (vektor) ning eng kichik elementini aniqlaydi.

Modul–kamida bitta operatordan iborat dastur.

Multigrid–giperbolik tipdagi xususiy hosilali differesial tenglamani yechadi.

Numol–parabolik tipdagi xususiy hosilali differesial tenglamani yechadi.

Odesolve–oddiy differensial tenglamalar sistemasini sonli yechish uchun mo'ljallangan.

Oddiy differensial tenglama–noma'lum funksiya faqat bitta o'garuvchiga bog'liq bo'lgan differensial tenglama.

ORIGIN–massiv elementlarini tartibini boshqarish uchun o'rnatilgan funksiya.

Parabolalar formulasi (Simpson)–yopiq tipdagi tugunlar bilan Nyuton-Kotesning sonli integrallash formulasi.

Pdesolve–xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechadi.

Rank(A) –A matrisaning rangini hisoblaydi .

Relax- elliptik tipdagi xususiy hosilali differesial tenglamani yechadi.

Rkadapt (u, x1, x2, m, D)– birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli *n* ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo'llab, integrallash qadamini avtomatik tanlash yo'li bilan yechadi.

Rkfixed (y, x1, x2, m, D) –birinchi tartibli oddiy differensial tenglama yoki birinchi tartibli *n* ta oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini berilgan kesmada to'rtinchi tartibli Runge-Kutta usulini qo'llab, integrallash qadami o'zgarmas bo'lgan hol uchun yechadi.

Root$(F(x),x)$– $F(x)=0$ chiziqsiz tenglamani berilgan aniqlikda iterasion usullar yordamida yechadi.

Rows(A)–A matrisaning qatorlari sonini aniqlaydi.

Sonli usullar–matematik masalalarni sonli yechish usullari**.**

Stack(A,E)–*A* va *E* matrisalardan *satr bo'yicha* uchinchi matrisani tashkil qilish vazifasini bajaradi.

Submatrix(A,l,k,p,r) – A matrisani bloklarga ajratish imkonini beradi.

Segmentni teng ikkiga bo'lish– algebraik tenglamani yechish usuli.

Tr(A)–A matrisa diagonal elementlarini yig'indisini hisoblaydi.

Transsendent tenglama–algebraik bo'lmagan tenglama. Odatda bu ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik funksiyalarni o'z ichiga olgan tenglamadir.

Trapesiyalar formulasi– Nyuton-Kotesning yopiq tipdagi ikkita tugun bilan sonli integrallash formulasi.

Turg'unmas algoritm (hisoblashga turg'unmas)– hisoblash jarayonida yaxlitlash xatoligi cheklanmagan darajada o'sadi.

Tuzatib bo'lmaydigan xatolik– kiruvchi ma`lumotlarni noaniq berilishi bilan bog'liq sonli usul xatoligi .

Teskari interpolyasiyalash– $y(x_i)$ ning berilgan qiymatlari orqali x_i ni topish masalasi .

To'r funksiya–butun argumentli funksiya.

To'g'ri to'rtburchaklar usuli–Nyuton-Kotesning ochiq tipdagi bitta tugun bilan sonli integrallash formulasi.

Xususiy hosilali differensial tenglama–noma'lum funksiya ikki va undan ortiq o'garuvchiga bog'liq bo'lgah differensial tenglama.

Chegaraviy masala–izlanayotgan funksiani topishda integrallash oraligini boshlangich va oxirgi nuqtalaridagi qiymatlaridan foydalanadigan masala.

Chiziqli masala– berilgan funksiya izlanayotgan funksiyaga nisbatan chiziqli bo'ladigan masala.

Chiziqsiz masala– berilgan funksiya izlanayotgan funksiyaga nisbatan chiziqsiz bo'ladigan masala.

Haydash usuli–chegaraviy masalani yechishga mo'ljallangan usullaridan biri.

Hisoblash algoritmi–uning yordamida matematik masalaning taqribiy sonli yechimlari topiladigan arifmetik va mantiqiy operasiyalar ketma-kektligi.

Hosila–funksiyaning o'zgarish tezligini ifodalovchi asosiy tushuncha.

MUNDARIJA

1-BOB. AMALIY MATEMATIK DASTURLAR PAKETLARI VA MATHCAD HAQIDA UMUMIY MA`LUMOTLAR 5
1-§. MathCAD dasturining interfeysi 8
2-§. MathCAD dasturining panellari...13
3-§. MathCADning dasturlash elementlari bilan ishlash 34
2-BOB. MATHCAD DASTURINING TURLI XIL FUNKSIYALARIDAN FOYDALANIB TENGLAMA VA TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH 40
1-§. Chiziqli algebra masalalarini yechish 40
2-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish 48
3-§. Matrisaning xos son va xos vektorini topish................................52
3-BOB. ALGEBRAIK VA TRANSENDENT TENGLAMALAR VA ULARNI SISTEMALARINI MATHCAD DASTURIY VOSITALARI YORDAMIDA TAQRIBIY YECHISHNING AMALIY DASTURLAR PAKETINI YARATISH.............................55
1-§. Ildiz yotgan oraliqni ajratish va MathCADning standart funksiyalari yordamida chiziqsiz tenglamalarni yechish 56
2-§. Oraliqni teng ikkiga bo‘lish (biseksiya) usuli 65
3-§. Urinmalar (Nyuton) usuli 68
4-§. Vatarlar usuli 72
5-§. Iteratsiya usuli...76
6-§. Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishning oddiy iteratsiya usuli...81
7-§. Chiziqsiz tenglamalar sistemasini yechishning Nyuton usuli 86
4-BOB. ANIQ INTEGRALNI TAQRIBIY HISOBLASHNI MATHCAD DASTURIDA AMALIY DASTURLAR PAKETINI YARATISH...91
1-§. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash haqida umumiy tushunchalar 91
2-§. To’g’ri to’rtburchaklar usuli 94
3-§. Trapetsiya usuli..97
4-§. Simpson (parabolalar) usuli 100

5-BOB. ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR VA TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISH 104
1-§. Differensial tenglamalar va tenglamalar sistemasi haqida asosiy tushunchalar. Koshi masalasi..104
2-§. Oddiy differensial tenglama va oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga mo'ljallangan MathCAD dasturi tarkibidagi standart funksiyalar...113
3-§. Chegaraviy masalalar va ularning taqribiy yechishgning MathCADda dasturlash yordamida amaliy dasturlar paketini yaratish...133
6-BOB. MATHCAD YORDAMIDA XUSUSIY HOSILALI DIFFERENSIAL TENGLAMALARNI YECHISHNING AMALIY DASTURLAR PAKETINI YARATISH 146
1-§. Xususiy hosilali differensial tenglamalar haqida umumiy ma`lumotlar 146
2-§ Parabolik tipdagi differensial tenglamalarni MathCAD dasturiy vositalari yordamida taqribiy yechishning amaliy dasturlar paketini yaratish...152
3-§. Giperbolik tenglamalarni MathCAD dasturiy vositalari yordamida taqribiy yechishning amaliy dasturlar paketini yaratish 169
4-§. Elliptik tipdagi tenglamani MathCAD dasturiy vositalari yordamida taqribiy yechishning amaliy dasturlar paketini yaratish 174
IZOHLI LUG'ATLAR..180
MUNDARIJA...184
FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR: 186

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В., Решение задач вычислительной математики в пакетах Matchad 12, MATLAB 7, Maple 9,-М.: НТ. Пресс, 2006.-496 с.: ил.-Самоучитель.
2. Кирьянов Д.В., Самоучитель Matchad 12.-СПб.: БХВ-Петербург, 2004.-576 с.
3. S.S. Irisqulov, K.D. Ismanova, M.Olimov, A.Imomov Sonli usullar va algoritmlar, O’quv qo’llanma.-N.: Namangan nashriyoti, 2012, -276 b.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. Москва, Наука 1970.
5. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова В.З., Численные методы анализа, -М. Наука, 1967.-368 с.
6. Boyzoqov A., Qayumov SH. Hisoblash matematikasi asoslari. Toshkent, TDIU, 2000.
7. Ho’jayorov B.X. Qurilish masalalarini sonli yechish usullari. Toshkent, «O’zbekiston», 1995.