КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНСТРУКТИВНЫХ ЗАДАЧ НА ПЛОСКОСТИ

Учебное пособие

КАЗАНЬ 2013

УДК 517 (075.4)

Печатается по решению учебно-методической комиссии Редакционно-издательского совета ФГАОУВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И.Лобачевского

Протокол № 3 от 21 февраля 2013 года

Заседания кафедры теории и технологий преподавания математики и информатики

Протокол № 7 от 18 января 2013 года

Составители:

канд. физ. - мат. наук, доц. К.Ш. Рамазанова,

канд.пед.наук, доц. Н.В. Тимербаева

Научный редактор

канд.пед.наук, доц.К.Б.Шакирова

Рецензенты

канд. пед. наук, доц. Е.Р. Садыкова,

канд. физ.-мат. наук, доц. Панкратова О.В.

Методы решения конструктивных задач на плоскости/ Сост. К.Ш. Рамазанова, Н.В. Тимербаева. – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – 70 с.

Данное учебно-методическое пособие содержит основной теоретический материал, более тридцати разобранных задач и более двухсот пятидесяти заданий для закрепления умений производить геометрические построения циркулем и линейкой. Задания подобраны по возрастающему уровню сложности.

Пособие предназначено для студентов педагогических отделений математических факультетов и учителей школ.

Одной из тем геометрического курса, изучаемого на педагогических отделениях математических факультетов университетов, непосредственно связанной со школьным курсом геометрии является тема «Геометрические построения на плоскости». В школьном курсе геометрии решение конструктивных задач (на построение) начинается уже с 7 класса. При этом рассмотрение этой темы вызывает затруднения у начинающего учителя. Поэтому приобретение прочных знаний по указанной теме и конкретных навыков по решению конструктивных задач занимает важное место в профессиональной подготовке будущего учителя.

Студент ***обязан*** знать аксиомы (**А**) построения с помощью циркуля и линейки, список простейших (**П**) и основных (**О**) построений, знать методику решения задач на построение и ***уметь*** решать целый ряд типовых задач с применением тех или иных методов. При этом студент должен ориентироваться в выборе того или иного метода решения конструктивных задач, знать свойства геометрических преобразований и уметь применять их к решению задач.

Рассмотрим вкратце указанные вопросы. В задачах на построение на плоскости фигуру F мы считаем построенной, если эта фигура, изображена (начерчена). Вообще, строгого определения этому понятию - построить - не дается.

Основные требования, которыми характеризуется это понятие, перечисляются в *аксиомах*; которыми мы пользуемся при решении *любой* задачи на построение.

Аксиомы конструктивной геометрии

А$_1$. Каждая данная фигура F построена.

А$_2$. Если построены фигуры F_1 и F_2, то построено и объединение этих фигур.

А$_3$. Если: F_1 и F_2 построены, то можно установить является ли их пересечение пустым множеством или нет. Если пересечение данных фигур не пусто, то оно построено.

А$_4$. Если F_1 и F_2 построены и $F_1 \subset F_2$, $F_1 \neq F_2$, то построено $F_2 \backslash F_1$.

А$_5$. Можно построить точку, принадлежащую данной фигуре.

А$_6$. Можно построить точку, не принадлежащую данной фигуре (если она не совпадает со всей плоскостью).

Аксиомы A_1 – A_6 называют *общими аксиомами конструктивной геометрии*. Этими аксиомами пользуются при решении задач с использованием любых средств построения. В классической теории геометрических построений на плоскости (и в школьном курсе геометрии) допустимыми средствами построения являются *циркуль* и *линейка*. При этом имеется в виду идеальные циркуль и линейка (без делений). Конструктивные возможности этих абстрактных инструментов опять-таки указываются в аксиомах.

A_7. Если A и B ($A \neq B$) построены, то можно построить луч AB (аксиома линейки).

A_8. Если построены точка O и отрезок AB, то можно построить окружность $\omega(O, AB)$ (аксиома циркуля).

Аксиомы A_1 – A_8 называются *системой аксиом построения с помощью циркуля и линейки.* Эта система аксиом позволяет выполнить на плоскости следующие, так называемые, *простейшие построения*:

Π_1. Построить отрезок AB, если A и B построены.

Π_2. Построить прямую AB, если A и B построены.

Π_3. Построить точку пересечения двух данных непараллельных прямых.

Π_4. Построить точки пересечения данных прямой и окружности, если они существуют.

Решение задачи на построение мы сводим к перечисленным аксиомам и простейшим построениям Π_1-Π_4. Но в случае сколько-нибудь сложных задач мы можем получить большое число логических «шагов».

Это может привести к тому, что за общей логической структурой решения трудно будет *уследить.* Поэтому в практике решения таких задач поступают иначе.

Если найдено решение какой-либо задачи, то в дальнейшем разрешается пользоваться этим решением в целом, не расчленяя его на простейшие построения. Существует целый рад геометрических задач на построение, которые особенно часто входят в качестве составных частей в решение более сложных задач. Задачи такого рода рассматриваются уже в первых главах школьного курса.

Перечислим эти, так называемые, ***основные* (элементарные) *построения***, которые наиболее часто встречаются в практике решения задач на построение, снабдив их поэтапной инструкцией построения (в дальнейшем, при решении задач этапы основных построений не описываются).

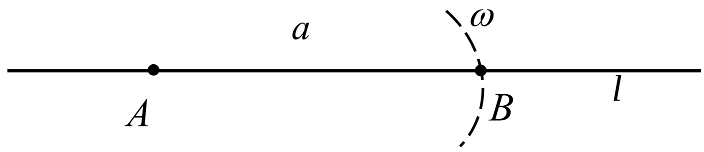
O_1. *Построение отрезка, равного данному.*

Дано: отрезок длины a.

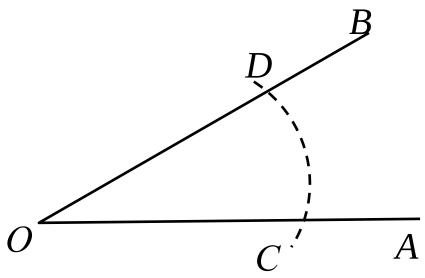
Построить: отрезок AB длины a.

Построение.

1. $A \in l$ - произвольно.
2. $\omega(A, a)$.
3. $\omega \cap l \equiv B$.
4. AB – искомый.



O_2. *Построение угла, равного данному.*

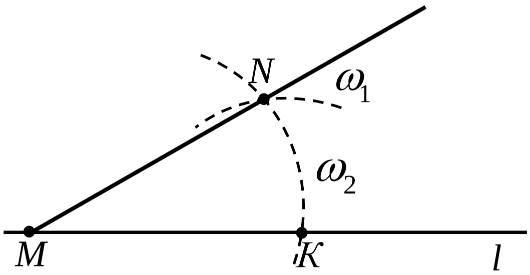


Дано: $\angle AOB$.

Построить: угол KMN, равный углу AOB.

Построение.

1. $M \in l$ - произвольно.
2. $\omega_1(M, OC)$.
3. $\omega_1 \cap l \equiv K$.
4. $\omega_2(K, CD)$.
5. $\omega_1 \cap \omega_2 \equiv N$.
6. MN.
7. $\angle KMN$ - искомый.



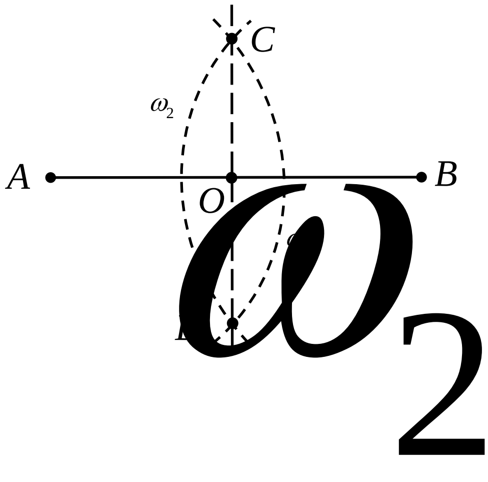
O_3. *Деление отрезка пополам (построение середины отрезка).*

Дано: отрезок AB.

Построить: точку O – середину AB.

Построение.

1. $\omega_1(A, r)$, где $r > \dfrac{AB}{2}$.
2. $\omega_2(B, r)$.
3. $C, D \in \omega_1 \cap \omega_2$.
4. $CD \cap l \equiv O$.
5. O – искомая точка.



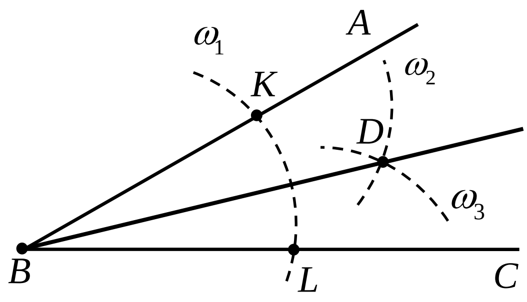
О$_4$. ***Деление угла пополам (построение биссектрисы угла).***

Дано: угол *ABC*.

Построить: *BD* – биссектрису угла *ABC*.

Построение.

1. $\omega_1(B,r)$.
2. $\omega_1 \cap BA \equiv K$.
3. $\omega_1 \cap BC \equiv L$.
4. $\omega_2(K,r_1)$.
5. $\omega_3(L,r_1)$.
6. $\omega_2 \cap \omega_3 \equiv D$.
7. *BD* – искомая.



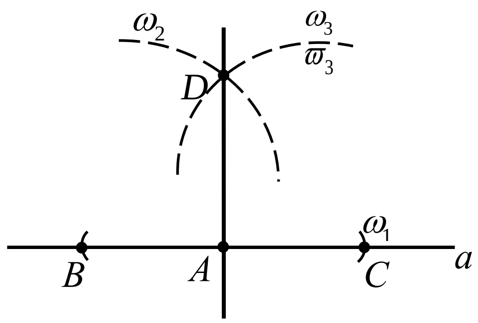
О$_5$. ***Построение перпендикуляра к данной прямой, проходящей через данную точку.***

а) *Дано*: прямая *a*, точка $A \in a$.

Построить: прямую, проходящую через точку *A*, перпендикулярно к прямой *a*.

Построение.

1. $\omega_1(A,r)$.
2. $B, C \in \omega_1 \cap a$.
3. $\omega_2(B,r_1)$, где $r_1 > BC/2$.
4. $\omega_3(C,r_1)$.
5. $\omega_2 \cap \omega_3 \equiv D$.
6. *AD* – искомая.

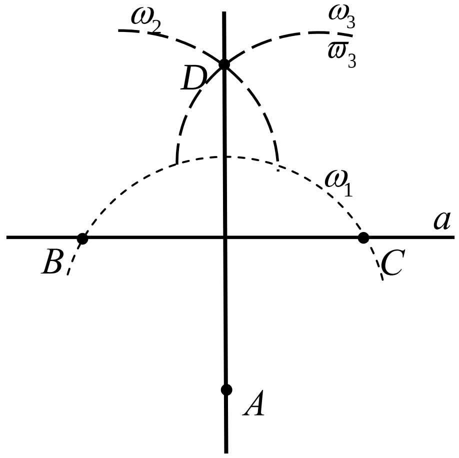


б) *Дано*: прямая *a*, точка $A \notin a$.

Построить: прямую, проходящую через точку *A*, перпендикулярно к прямой *a*.

Построение.

1. $\omega_1(A,r)$.
2. $B, C \in \omega_1 \cap a$.
3. $\omega_2(B,r_1)$, где $r_1 > BC/2$.
4. $\omega_3(C,r_1)$.
5. $\omega_2 \cap \omega_3 \equiv D$.
6. *AD* – искомая.

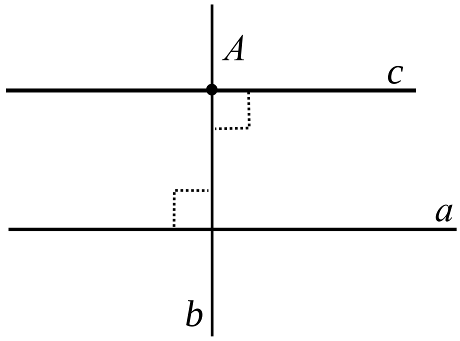


O$_6$. *Построение прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку.*

Дано: прямая a, точка $A \notin a$.

Построить: прямую, проходящую через точку A, параллельно прямой a.

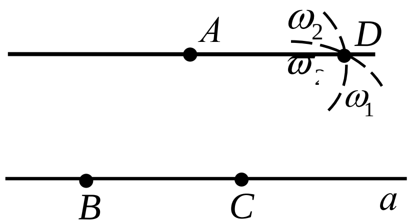
I способ (через два перпендикуляра).



Построение.

1. $A \in b,\ b \perp a$.
2. $A \in c,\ c \perp b$.
3. c – искомая.

II способ (через параллелограмм).



Построение.

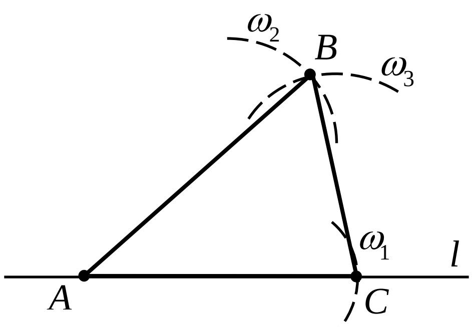
1. $B, C \in a$ - произвольно.
2. $\omega_1(A, BC)$.
3. $\omega_2(C, AB)$.
4. $\omega_1 \cap \omega_2 \equiv D$.
5. AD – искомая.

O$_7$. *Построение треугольника по трем сторонам.*

Дано: отрезки длины a, b, c.

Построить: треугольник ABC.

Построение.



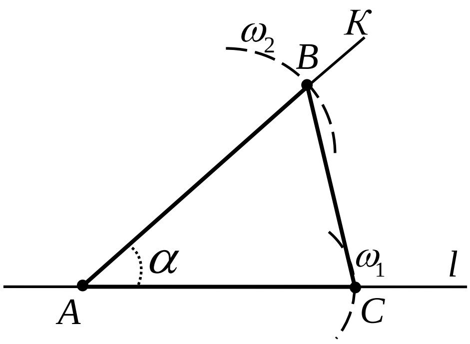
1. $A \in l$ - произвольно.
2. $\omega_1(A, b)$.
3. $\omega_1 \cap l \equiv C$
4. $\omega_2(A, c)$.
5. $\omega_3(C, a)$.
6. $\omega_2 \cap \omega_3 \equiv B$.
7. ΔABC – искомый.

O_8. *Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.*

Дано: отрезки длины b, c, угол α.

Построить: треугольник ABC.

Построение.



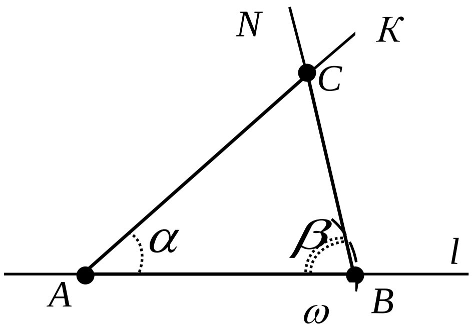
1. $A \in l$ - произвольно.
2. $\omega_1(A,b)$.
3. $\omega_1 \cap l \equiv C$.
4. $\angle CAK = \alpha$.
5. $\omega_2(A,c)$.
6. $\omega_2 \cap AK \equiv B$.
7. ΔABC – искомый.

O_9. *Построение треугольника по стороне и двум прилежащим углам.*

Дано: отрезок длины c, углы α и β.

Построить: треугольник ABC.

Построение.



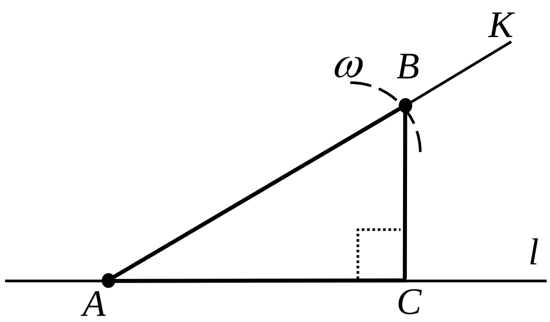
1. $A \in l$ - произвольно.
2. $\omega(A,c)$.
3. $\omega \cap l \equiv B$.
4. $\angle BAK = \alpha$.
5. $\angle ABN = \beta$.
6. $AK \cap BN \equiv C$.
7. ΔABC – искомый.

O_{10}. *Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и острому углу.*

Дано: отрезок длины c, угол α.

Построить: прямоугольный треугольник ABC.

Построение.



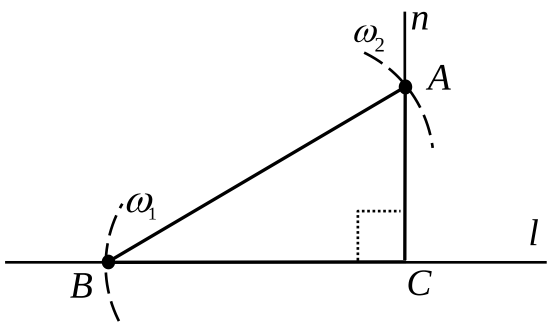
1. $A \in l$ - произвольно.
2. $\angle lAK = \alpha$.
3. $\omega(A,c)$.
4. $\omega \cap AK \equiv B$.
5. $B \in a \perp l$.
6. $a \cap l \equiv C$.
7. ΔABC – искомый.

O$_{11}$. *Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету.*

Дано: отрезки длины a и c.

Построить: прямоугольный треугольник *ABC*.

Построение.



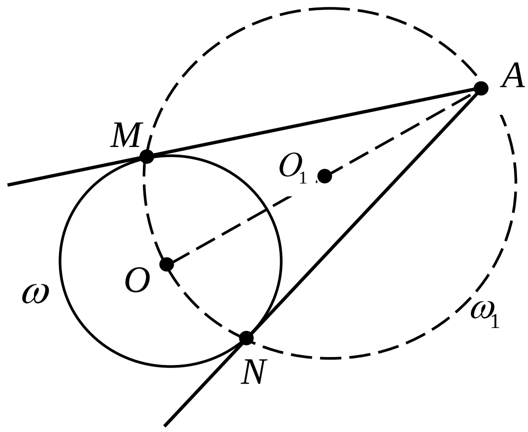
1. $C \in l$ - произвольно.
2. $C \in n \perp l$
3. $\omega_1(C,a)$.
4. $\omega_1 \cap l \equiv B$.
5. $\omega_2(B,c)$.
6. $\omega_2 \cap n \equiv A$.
7. ΔABC – искомый.

O$_{12}$. *Построение касательной к данной окружности, проходящей через данную точку.*

Дано: окружность $\varpi(O)$, точка A вне ее.

Построить: касательную к окружности $\omega(O)$, проходящую через точку A.

Построение.



1. OA.
2. O_1 - середина OA.
3. $\omega_1(O_1, O_1O)$.
4. $M, N \in \varpi_1 \cap \varpi$.
5. AM, AN – искомые.

Студент ***должен уметь*** выполнять с помощью циркуля и линейки каждое из перечисленных построений.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ

Задача на построение состоит в том, что требуется построить указанными инструментами некоторую фигуру F, если даны некоторые фигуры F_1, F_2, …и указаны некоторые соотношения между элементами искомой фигуры и элементами данных фигур.

Каждая фигура, удовлетворяющая условию задачи, называется *решением* этой задачи. *Найти решение* задачи на построение – значит, свести ее к конечному числу простейших и основных построений. При этом может оказаться, что задача на построение имеет несколько различных решений. Решить задачу – значит найти все ее решения. Для этого нужно:

а) установить конечное число случаев, исчерпывающих все возможности в выборе данных;

б) для каждого случая дать ответ – имеет ли задача решение и сколько этих решений.

При решении каждой сколь-нибудь сложной задачи возникает вопрос – как нужно *рассуждать,* чтобы найти способ построения искомой фигуры, выяснить – сколько решений и т.д. Решение всех этих вопросов облегчается, если придерживаться *определенной схемы*: анализ, построение, доказательство, исследование. При этом конечно, возможны отклонения от этой схемы. Например, если знаем как строить искомую фигуру, то никакой анализ не нужен.

АНАЛИЗ. Анализ – это *поиск* способа решения задачи. В анализе мы находим те зависимости, которые имеют место между элементами данной и искомой фигур. Анализ – подготовительный, предварительный этап решения задачи.

В анализе, предполагая задачу решенной (пусть искомая фигура F построена...), мы изображаем (от руки) данные и искомые фигуры в том расположении, которое предусмотрено условием задачи. При этом можно поступить двояко: начертить сначала данные фигуры, а затем построить искомую фигуру или же наоборот сначала начертить искомую фигуру, а затем построить данные фигуры так, как это предусмотрено условием задачи.

Задача 1. Даны окружность ϖ и точка A. Построить прямые, проходящие через точку A и касающиеся данной окружности.

Задача 2. Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна m и лежала на данной прямой a, а две вершины лежали на данных прямых b и c соответственно.

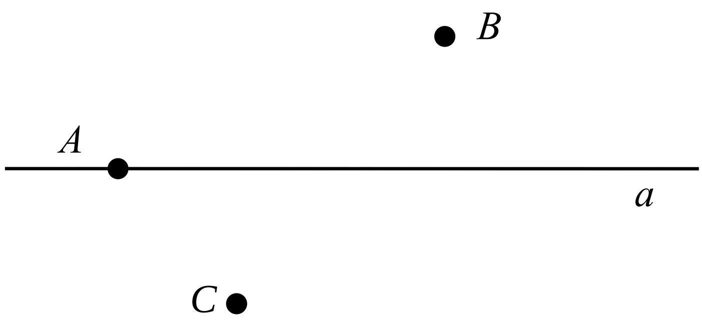
В первой задаче чертеж к анализу лучше начать с изображений окружности и точки, а затем уже (от руки!) пристроить искомые касательные. Во второй задаче чертеж к анализу выгоднее начать, с изображения искомого ромба, а затем - пристроить данные прямые так, как это предусмотрено условием задачи. (Попробуйте наоборот!).

Если вспомогательный чертеж не подсказывает способа построения искомой фигуры, то пытаются обнаружить какую-либо часть (хотя бы точку!) искомой фигуры или вообще *некоторую фигуру*, которая *может быть построена* (м.б.п.) и которой затем можно пользоваться для построения искомой фигуры. Для этого подмечают, что построение искомой фигуры F сводится к построению фигуры F_1, построение F_1 – к построению фигуры F_2 и т.д. После некоторого числа шагов подмечают, что пришли к построению фигуры F_n, построение которой известно. Иногда бывает полезно провести ряд вспомогательных линий, с помощью которых устанавливаются *связи* между элементами данных фигур и элементами искомой фигуры.

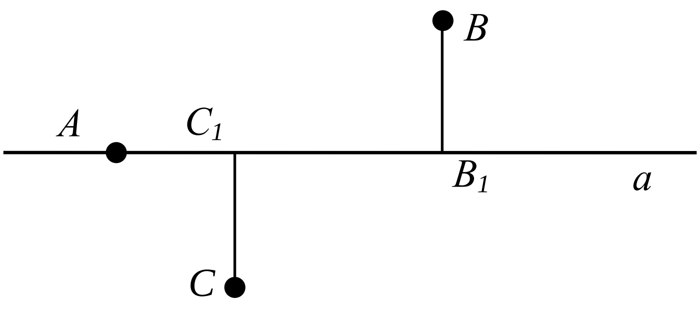
Например:

Задача 3. Через данную точку A провести прямую так, чтобы она находилась на одинаковом расстоянии от данных точек B и C.

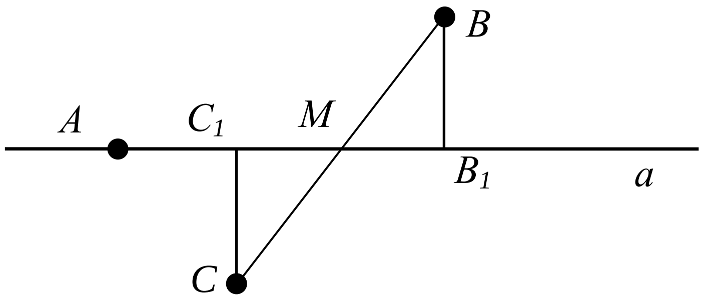
Анализ: Строим прямую a, затем точки A, B и C (так, как это предусмотрено условием задачи). Тем самым все фигуры - данные и искомые - на чертеже будут изображены.



Но по этому чертежу еще трудно установить связи, дающие возможность построить a. Попробуем изобразить расстояния, о которых идет речь в условии задачи. Для этого проведем перпендикуляры к a из точек B и C. Но и перпендикуляры BB_1 и CC_1 (разные по длине!) еще не подсказывают пути построения a. И только после того, как мы «догадаемся» повести прямую BC и «заметим», что отрезок BC делится пополам точкой пересечения с прямой a, мы



найдем «ключ» к решению задачи: прямая a, оказывается должна пройти через середину M отрезка BC и эта точка может быть построена (O_3). Тогда и прямая a может быть построена.



После того, как в анализе выяснили все связи между данными и искомой фигурами, переходим к построению. (Если же при этом искомая фигура не строится, значит, мы нашли не все связи, или нашли их неверно, и нужно снова вернуться к анализу).

ПОСТРОЕНИЕ состоит в том, чтобы указать последовательность простейших и основных построений, которые надо выполнить для решения задачи. Построение должно сопровождаться графическим выполнением каждого шага с помощью инструментов, принятых для построения.

Схема построения (последовательность шагов) в *задаче* 3. В схеме построения слово «строим» мы опускаем, например:

1. «Отрезок BC» вместо «Строим отрезок BC».
2. M - середина отрезка.
3. Прямая AM – искомая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО имеет целью установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям задачи.

В *задаче* 3 прямая a проходит через точку A по построению, расстояния BB_1 и CC_1 точек B и C до прямой a равны (это следует из равенства треугольников BB_1M и CC_1M), т.е. прямая a удовлетворяет всем условиям задачи.

ИССЛЕДОВАНИЕ. Отвечаем на вопросы:

а) при любом ли выборе данных задача имеет решение?

б) сколько различных решений имеет задача при каждом *возможном* выборе данных?

Чтобы ответить на эти вопросы, мы рассматриваем каждый шаг построения и отвечаем на вопросы: всегда ли возможно указанное построение; однозначно ли оно? При этом: надо перебрать все возможные случаи выбора данных.

В *задаче* 3: исследуя каждый шаг построения 1 - 3, мы приходим к выводу, что каждый шаг построения выполняется, и при этом однозначно. Можно было бы сделать вывод: задача имеет решение и притом единственное. Но такой вывод делать рано. Мы не рассмотрели все случаи выбора данных, Очевидно, можно было бы выбрать точки B и C так, что точка A будет серединой отрезка, те, $A = M$. Тогда любая прямая, проходящая через точку A удовлетворяет условию задачи и задача имеет бесчисленное множество решении. Можно B и

С выбрать так, что A будет лежать на прямой BC. Тогда искомая прямая a совпадет с BC и задача имеет одно решение. Наконец, можно потребовать, чтобы B и С лежали по одну сторону от прямой a. Тогда искомая прямая пройдет через A параллельно прямой BC и задача будет иметь единственное решение.

При решении задач на построение выделяют ***три основных метода:***

- метод геометрических мест точек (гмт) или метод пересечений;
- метод геометрических преобразований;
- алгебраический метод.

Рассмотрим вкратце суть этих методов. При этом в ряде случаев доказательство и исследование предлагается провести самостоятельно.

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МЕСТ ТОЧЕК

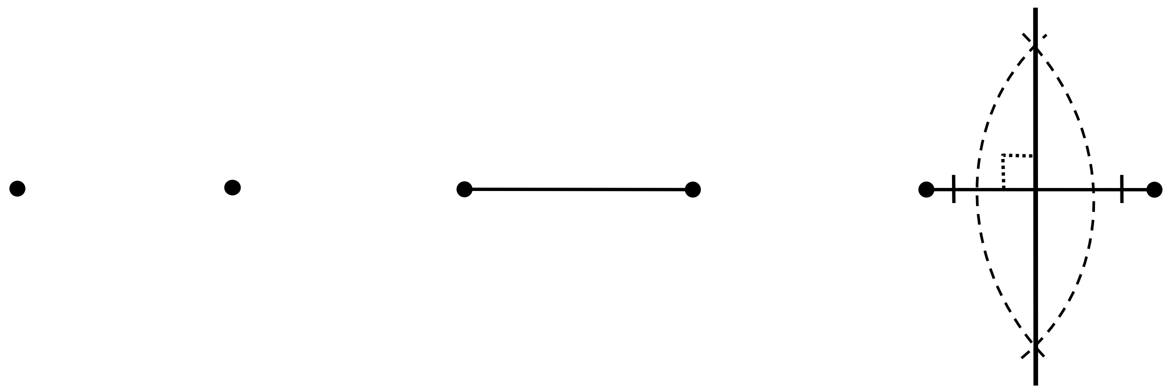
Сущность этого метода заключается в следующем. Решение задачи на построение сводят к построению некоторой точки X, которая удовлетворяет двум независимым условиям 1^0 и 2^0, вытекающим из требований задачи. Отбрасывая одно из этих условий, например 2^0строим фигуру F_1 как геометрическое место точек плоскости, обладающих свойством 1^0. Затем, отбрасывая условие 1^0, строим фигуру F_2 как геометрическое место точек плоскости, обладающих свойством 2^0. Так как точка X должна обладать и свойством 1^0 и свойством 2^0одновременно, то она принадлежит и F_1 и F_2, т.е. $F_1 \cap F_2$. Каждая точка пересечения фигур F_1 и F_2, (если оно не пусто) дает одно решение задачи.

При решении задач этим методом надо знать основные геометрические места точек на плоскости:

1. ГМТ, равноудаленных от двух данных точек.
2. ГМТ, находящихся на данном расстоянии от данной точки.
3. ГМТ, удаленных на расстояние d от данной прямой.
4. ГМТ, равноудаленных от двух данных параллельных прямых.
5. ГМТ, равноудаленных от сторон угла.
6. ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом.

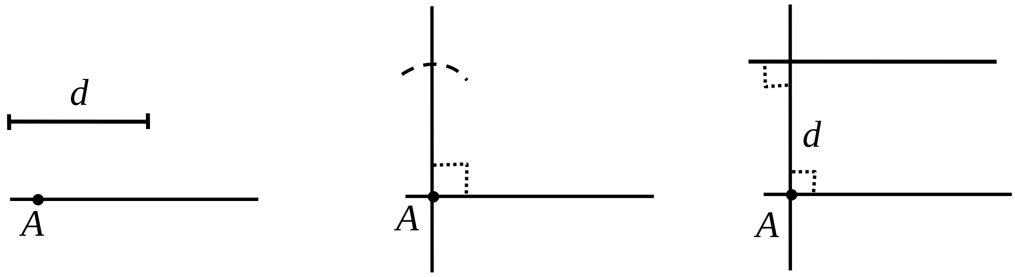
Студент должен знать эти ГМТ и должен уметь строить их с помощью циркуля и линейки. Рассмотрим построение этих ГМТ:

1. **Геометрическим местом точек**, **равноудаленных от двух данных точек,** является ***серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках***.



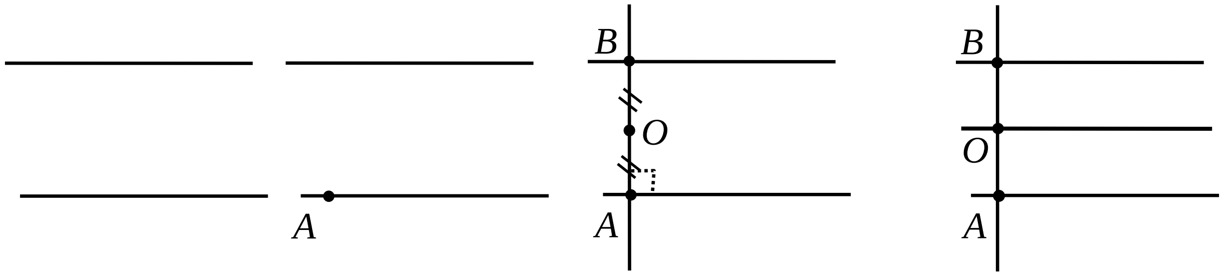
2. **Геометрическим местом точек**, **находящихся на данном расстоянии от данной точки,** является ***окружность с центром в данной точке и радиусом, равном данному отрезку***.

3. **Геометрическим местом точек, удаленных на расстояние *d* от данной прямой в выбранной полуплоскости,** является ***прямая, параллельная данной и находящаяся на расстоянии d от нее.***



А выбираем произвольно.

4. **Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных параллельных прямых,** является ***прямая, находящаяся на одинаковом расстоянии от данных прямых (ось симметрии этих прямых).***



OA=OB

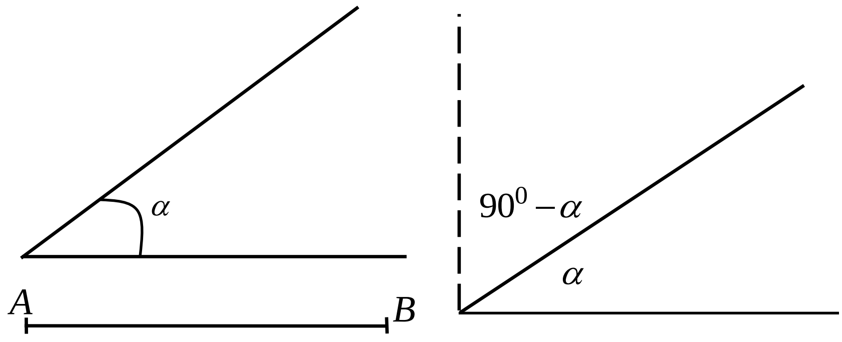
5. **Геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла,** является ***биссектриса этого угла.*** (См. построение O_4).

6. **Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом,** является ***дуга окружности, опирающейся на этот отрезок.***

I *случай:*

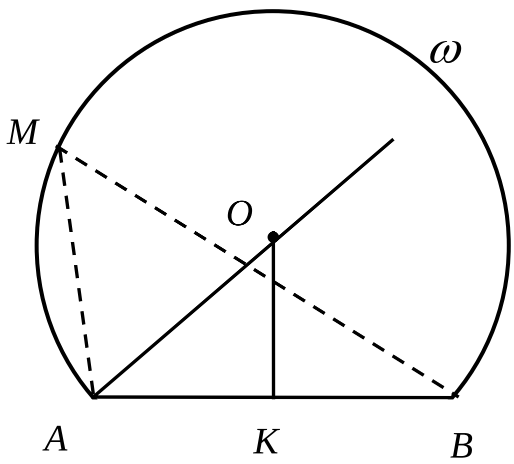
$\alpha < 90^0$ - данный угол,

AB – данный отрезок.



Построение.

1. *K* – середина *AB*.
2. $\angle OAB = 90^0 - \alpha$.
3. $OK \perp AB$.
4. $O = OK \cap AO$.
5. $\omega(O, AO)$.
6. дуга *AMB* – искомое гмт.



Действительно, $\angle AMB$, как угол, вписанный в окружность, измеряется половиной малой дуги AB, так как центральный угол $\angle AOB = 2\alpha$, то $\angle AMB = \alpha$.

При этом заметим, что центр окружности O и вершина M угла лежат по одну сторону от данного отрезка

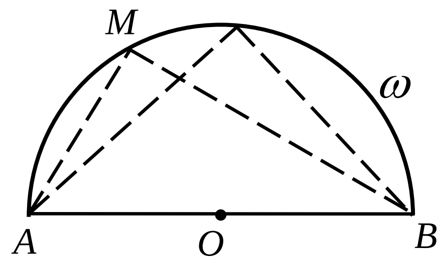
II *случай*: $\alpha = 90^0$.

Построение.

1. O – середина AB.

Полуокружность $\omega(O, AO)$.

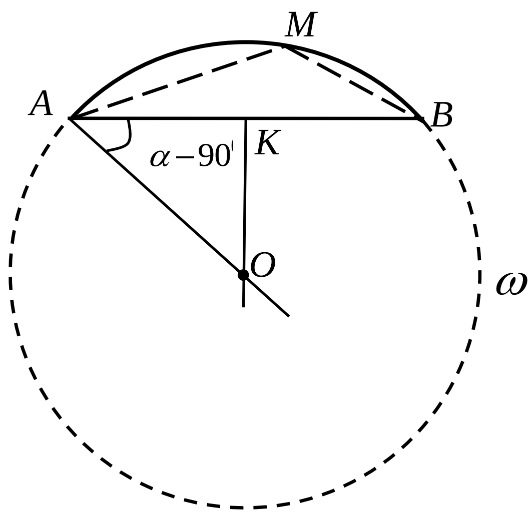
(Любой угол, опирающийся на диаметр – прямой).



III *случай*: $\alpha > 90^0$.

Построение.

1. K - середина AB.
2. $OK \perp AB$.
3. $\angle BAO = \alpha - 90^0$.
4. $O = KO \cap AO$.
5. дуга AMB – искомое гмт.



Действительно, $\angle AOB = 2\left(90^0 - \left(\alpha - 90^0\right)\right) = 2\left(180^0 - \alpha\right)$. Тогда большая дуга AB равна $360^0 - 2\left(180^0 - \alpha\right) = 2\alpha$ и угол AMB, опирающийся на большую дугу AB, измеряется половиной этой дуги, т.е. равен α.

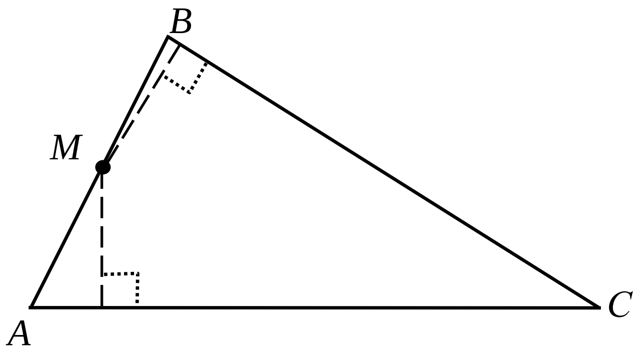
Примеры задач, решаемых методом гмт

Задача 4. На стороне треугольника найти точку, равноотстоящую от двух других сторон треугольника.

Анализ. Пусть задача решена и точка M на стороне AB находится на одинаковом расстоянии от сторон AC и BC, образующих угол C. Так как все точки, равноудаленные от сторон угла C лежат на биссектрисе этого угла (гмт 5), то точка M удовлетворяет двум независимым условиям:

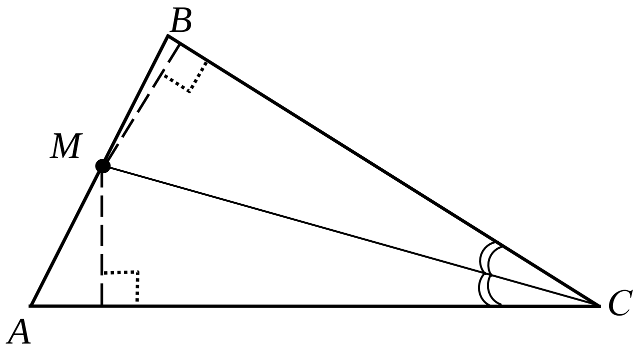
1^0. $M \in AB$;

2^0. $M \in F_1$ - биссектрисе угла C, т.е. $M = AB \cap F_1$ м.б.п.



Построение.

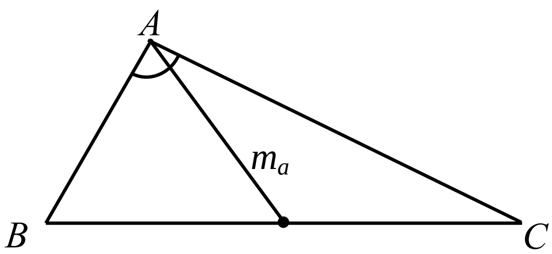
1. F_1 – биссектриса угла C.
2. $M = AB \cap F_1$ - искомая.



Доказательство. Легко видеть, что точка M удовлетворяет требованиям задачи.

Задача 5. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и медиане m_a.

Анализ. Допустим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен так, что $BC = a$, $AM = m_a$ – медиана и $\angle BAC = \alpha$.



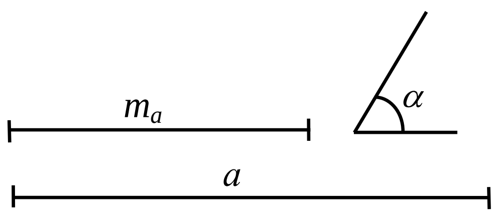
Отрезок BC, равный данному, всегда м.б.п. Тогда задача сводится к построению точки A, удовлетворяющей двум независимым условиям:

1^0. точка A находится на расстоянии m_a от середины M стороны BC, т.е. $A \in \omega(M, m_a)$;

2^0. так как $\angle BAC = \alpha$, то точка A принадлежит гмт F_1, из которых отрезок BC виден под углом α, т.е. $A \in F_1$.

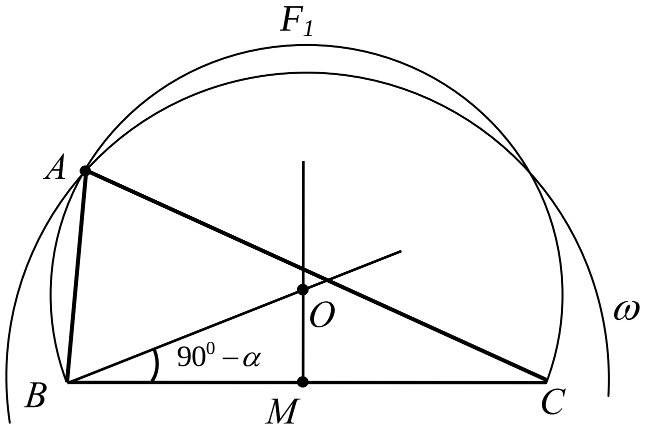
Таким образом, $A \in \omega(M, m_a)$; $A \in F_1$, т.е. $A \in \omega \cap F_1$.

Заданные по условию задачи элементы могут быть выбраны перед построением или анализом.



Построение.

1. $BC=a$.
2. $M \mid BM = MC$.
3. F_1 :
а) $MO \perp BC$;
б) $\angle CBO = 90^0 - \alpha$;
в) $\omega_1(O, OB)$.
4. $\omega(M, m_a)$.
5. $A \in \omega \cap F_1$.
6. ΔABC - искомый.

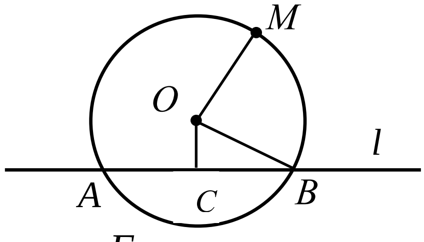


Доказательство. $BC = a$, $AM = m_a$ по построению, и $\angle CBO = 90^0 - \alpha \Rightarrow \angle BOM = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha \Rightarrow \angle BAC = 0{,}5 \times \angle BOC = \alpha$ и, следовательно, ΔABC удовлетворяет всем условиям задачи и потому искомый.

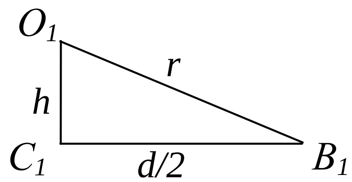
Исследование. Задача имеет столько решений, сколько точек содержит пересечение $\omega \cap F_1$ двух окружностей. Если пересечение в двух точках, то два решения; в одной (окружности касаются) – одно решение, не пересекаются – нет решений.

Задача 6. Построить окружность данного радиуса r, проходящую через данную точку M и высекающую на данной прямой l отрезок длины d, равный данному.

Анализ. Пусть искомая окружность построена. Пусть O – ее центр, r – данный радиус, M – данная точка, AB – хорда длины d, построенной окружности, лежащей на данной прямой l. Опустим перпендикуляр OC на прямую l. В прямоугольном треугольнике OBC известна гипотенуза (данный радиус r) и катет BC, равный половине данного отрезка. Кроме того, $OM = r$.



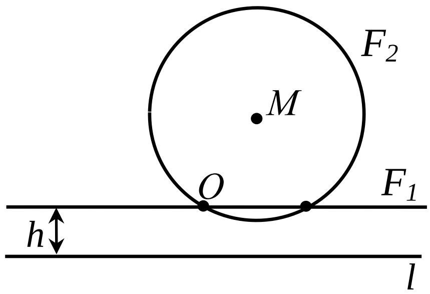
Значит, искомый центр O принадлежит, во-первых гмт F_1, удаленных от данной прямой l на расстояние, равное OC (гмт 3); во-вторых гмт F_2, удаленных от данной точки M на расстояние, равное данному радиусу r (гмт2). Окружность ω м.б.п., гмт F_1 м.б.п., если мы найдем расстояние $OC = h$.



Для этого построим вспомогательный треугольник $O_1B_1C_1$ по гипотенузе $O_1B_1 = r$ и катету $B_1C_1 = d/2$. Тогда $h = O_1C_1$ будет найден.

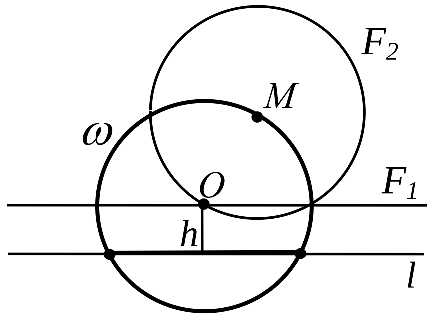
Построение.

1. Прямоугольный $\Delta O_1B_1C_1 \mid O_1B_1 = r$, $B_1C_1 = d/2$.
2. F_1 (гмт 3).
3. F_2 (гмт 2) - окружность $\omega(M, r)$.
4. $O = F_1 \cap F_2$.
5. $\omega(O; OM)$ - искомая окружность.



Доказательство. Убеждаемся в том, что построенная окружность удовлетворяет всем требованиям задачи. $OM = r$ по построению. Докажем, что $AB = d$.

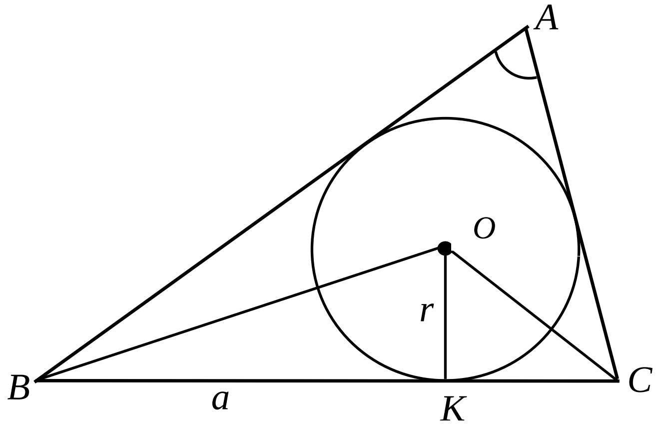
Действительно, ΔAOB - равнобедренный (OC – медиана и высота), отсюда $AB = 2 \cdot BC = 2 \cdot d/2 = d$.



Исследование. Построение 1 возможно, если $d < 2r$. Построения 2 - 3 выполняются и притом однозначно. Построение 4 возможно лишь тогда, когда прямая F_1 и окружность F_2 пересекаются, то есть при условии, что расстояние от точки M до прямой l не больше, чем $r^2 + \sqrt{r^2 - d^2/4}$.При этом прямая F_1 пересекает окружность $\omega(M, r)$ в двух или одной точке соответственно. Таким образом, задача может иметь одно, два или не иметь решений.

Задача 7. Построить треугольник *ABC*, зная угол *A,* основание *a* и радиус *r* вписанной окружности.

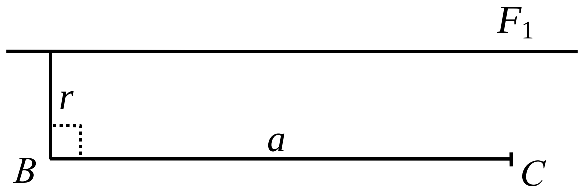
Анализ. Пусть искомый треугольник построен и пусть $BC = a$, $\angle BAC = \angle A$, O - центр вписанной окружности и $OK = r$. Легко видеть, что построив $BC = a$ и центр вписанной окружности, мы смогли бы построить и вершину *A,* и треугольник *ABC* будет построен. Отрезок $BC = a$ мы всегда можем построить (O_1). Тогда задача сводится к построению точки *O*. Одно свойство (условие 1^0) точки *O* можно отметить сразу – она находится на расстоянии *r* от стороны *BC*, то есть центр *O* вписанной окружности принадлежит гмт, находящихся на расстоянии *r* от прямой *BC* (гмт 3). (Как правило, мы строим только в одной из двух полуплоскостей,



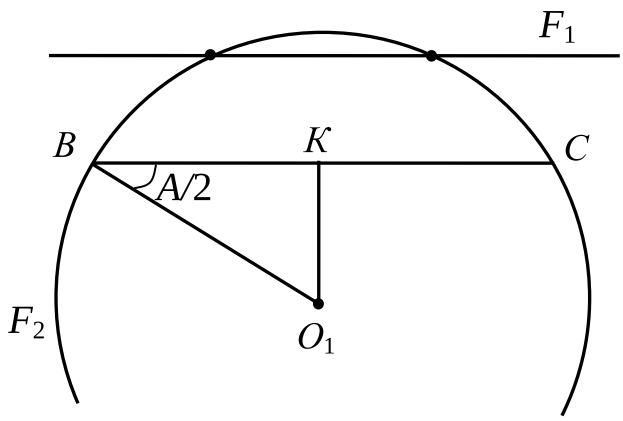
определяемых заданной прямой). Второе свойство, которым обладает точка O, видно не сразу. Но, исходя из свойств вписанной окружности, это свойство мы можем найти: центр вписанной окружности находится на пересечении биссектрис треугольника и потому OB и OC – биссектрисы углов B и C. Тогда:
$\angle BOC = 180^0 - 0,5(B+C) = 180^0 - 0,5(180^0 - A) = 90^0 + 0,5A$.

Так как $\angle BOC = 90^0 + A/2$, то точка O принадлежит гмт F_2, из которых данный отрезок BC виден под данным углом $\alpha = 90^0 + A/2$ (гмт 6). Гмт F_1 и F_2 м.б.п., а потому и точка $O \in F_1 \cap F_2$ м.б.п. и мы можем перейти к построению искомой фигуры.

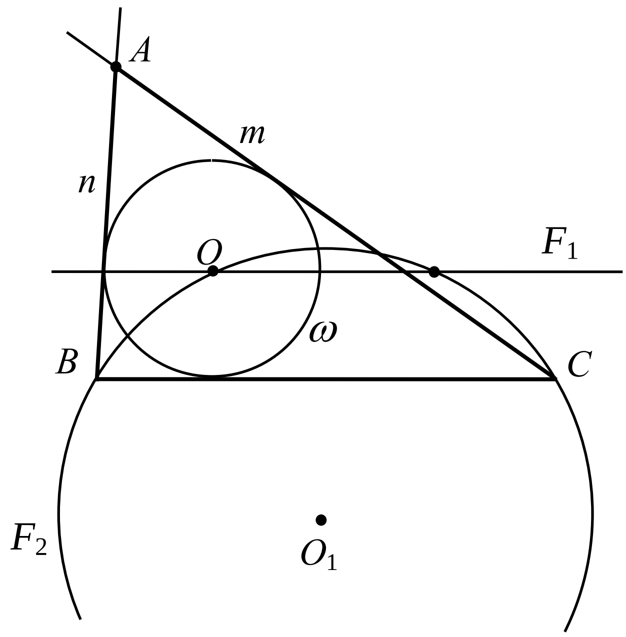
Построение.



1. $BC=a$.
2. F_1 (гмт 3).
3. F_2 (гмт 6).



4. $O \in F_1 \cap F_2$.
5. $\omega(O,r)$.
6. $C \in m$ – касательная к $\omega(O,r)$.
7. $B \in n$ - касательная к $\omega(O,r)$.
8. $A = m \cap n$.
9. ΔABC - искомый.



При выполнении построений каждый шаг должен сопровождаться графическим выполнением с помощью циркуля и линейки, хотя в данном пособии иногда мы будем опускать построения, доказательство и исследование.

Доказательство. Убеждаемся в том, что построенный треугольник удовлетворяет всем требованиям задачи. $BC = a$, окружность $\omega(O,r)$ вписана в треугольник по построению. Остается доказать, что $\angle BAC$ равен данному углу A. Действительно, по построению $\angle O_1BK = A/2$. Тогда $\angle BO_1C = 2\cdot\left(90^0 - A/2\right) = 180^0 - A$, $\angle BOC = 0{,}5\cdot\left(360^0 - \angle BO_1C\right) = 90^0 + A/2$.

Теперь находим: $\angle BAC = 180^0 - 2\cdot\left(\angle OBC + \angle OCB\right) = 180^0 - 2\cdot\left(180^0 - 90^0 - A/2\right) = A$.

Значит, ΔABC удовлетворяет всем условиям задачи, а потому – искомый.

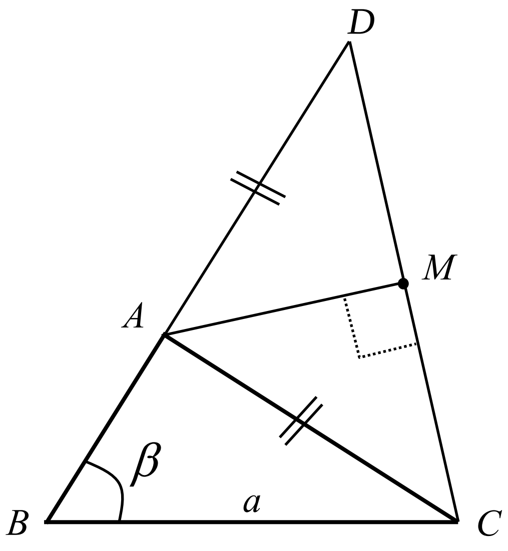
Исследование. Построения 1-3 выполняются и притом однозначно при любых a, r и $A<180^0$. Построение 4 возможно лишь тогда, когда прямая F_1 пересекает окружность F_2, то есть при условии $r \le O_1B - O_1K$ или при: $r \le \dfrac{a}{2\cos A/2}\cdot\left(1 - \sin A/2\right)$ (*). При этом прямая F_1 пересекает окружность F_2 в двух или одной точке соответственно. Построения 6 и 7 всегда выполнимы, так как из любой точки вне окружности можно провести к ней две касательные (одна из них в данном случае прямая BC). А вот построение 8 возможно не всегда: прямые m и n могут быть параллельными или могут пересекаться в полуплоскости, не содержащей точку O. В этих случаях в нужной нам полуплоскости точка A не строится. Вывод: при выполнении условий $A<180^0$, (*) задача может иметь одно, два или ни одного решения.

Метод спрямления и гмт

Особо можно выделить некоторую группу задач, в условии которых содержится сумма или разность отрезков. Метод спрямления состоит в том, что сначала строят вспомогательную фигуру, в которую входит данная сумма или разность отрезков, а затем искомую фигуру.

Задача 8. Построить треугольник по стороне *a*, углу *B* и сумме двух других сторон.

Анализ. Пусть искомый треугольник *ABC* построен и пусть *BC = a*, $\angle ABC = \alpha$, *b+c=m*. От точки *A* на продолжении стороны *BA* отложим отрезок *AD=AC*. Тогда *BD=m* и треугольник *BDC* м.б.п. по двум сторонам и углу между ними. Замечаем, что треугольник *ADC* равнобедренный и медиана *AM* является и высотой.



Построение.

1. $\Delta BDC \big| BC = a, \angle DBC = \beta, BD = m.$
2. *M* - середина *DC*.
3. $MA \perp DC$.
4. $A = BD \cap MA$.
5. ΔABC - искомый.

Доказательство и исследование провести самостоятельно.

Задача 9. Построить треугольник, если даны два его угла *A* и *B* и разность двух его сторон *a* и *b*.

Анализ. Пусть искомый треугольник *ABC* построен и пусть $\angle BAC = \beta$, $\angle ABC = \alpha$ и *b – a = m*.

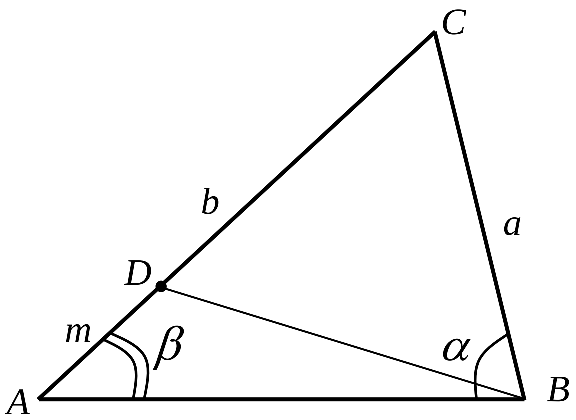
На стороне *CA* отложим отрезок *CD = CB*. Тогда *AD = m*. Далее замечаем, что треугольник *BDC* равнобедренный, поэтому $\angle CDB = \angle CBD = \varphi$. Так как $\angle C = 180^0 - (\alpha + \beta)$, то $\varphi = 0{,}5 \cdot (180^0 - (180^0 - (\alpha + \beta)) = 0{,}5 \cdot (\alpha + \beta)$. Тогда $\angle ADB = 180^0 - \varphi = 180^0 - 0{,}5 \cdot (\alpha + \beta)$ и треугольник *BDA* м.б.п. по стороне *AD* и двум углам, затем м.б.п. точка *C*.

Построение.

1. $\Delta ADB \mid AD = m,$

   $\angle DAB = \beta,$

   $\angle ADB = 180^0 - (\alpha + \beta)$
2. $\angle ABC = \alpha.$
3. $C = BC \cap AD.$
4. ΔABC - искомый.



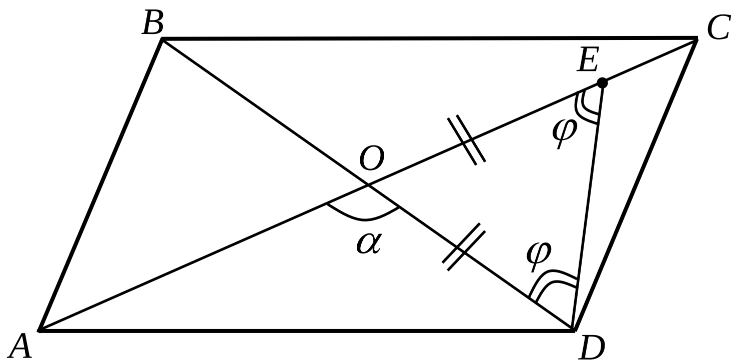
Доказательство и исследование провести самостоятельно.

Задача 10. Построить параллелограмм по стороне *a,* сумме *m* его диагоналей и углу α между диагоналями.

Анализ. Предположим, что задача решена и искомый параллелограмм *ABCD* построен. Пусть при этом *AD* = *a*, *AC* +*BD* = *m* и $\angle AOD = \alpha.$

Отложим *OE* = *OD*.

Тогда *AO* + *OD* = *AE* = 0,5*m*. Замечаем, что треугольник *OED* равнобедренный и $\alpha = 2\varphi$ (внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, несмежных с ним), т.е. $\varphi = \alpha / 2.$

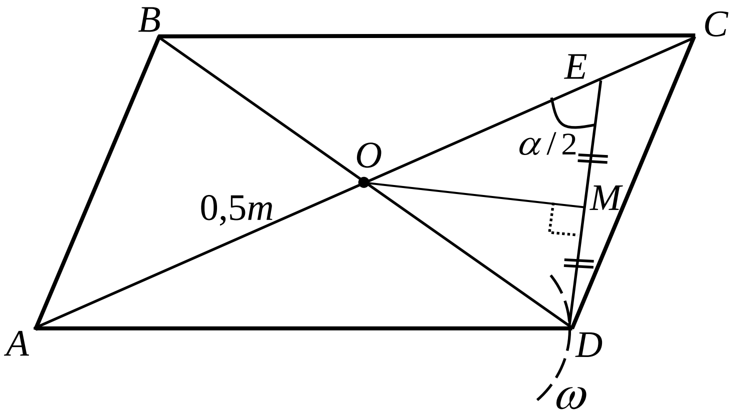


Теперь м.б.п. треугольник *AED,* т.к. *AD* = *a*, *AE* = 0,5*m* и $\angle AED = 0{,}5\alpha.$ После построения треугольника *AED* м.б.п. точка *O*, а затем параллелограмм *ABCD*.

Построение.

1. $\Delta AED(AE = 0{,}5m; \angle AED = 0{,}5\alpha;$

   $\omega(A, a); D \equiv ED \cap \omega)$.
2. *M* – середина *DE*.
3. $MO \perp DE.$
4. $O \equiv MO \cap AE.$
5. *OC* = *AO*, $C \in AE.$
6. *OB* = *OD*, $B \in DO.$
7. *ABCD* – искомый параллелограмм.



Доказательство и исследование провести самостоятельно.

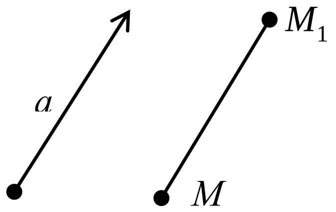
МЕТОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Суть метода преобразований состоит в том, что при проведении анализа наряду с данными и искомой фигурами бывает полезно рассматривать фигуру, которая может быть получена из данной или искомой при помощи какого-либо преобразования. При этом оказывается, что эта новая фигура м.б.п., что в свою очередь приводит к построению искомой фигуры. Иногда решение задачи удается свести к построению точки, которая является общей для какой-либо данной фигуры и фигуры, получающейся из другой данной при помощи некоторого преобразования. В зависимости от того, какое именно преобразование рассмотрели, можно говорить о методе переноса, методе поворота, гомотетии, инверсии и т.д.

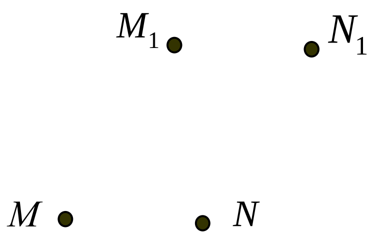
Для успешного решения задач этим методом, для того, чтобы быстро ориентироваться в выборе преобразования при решении задачи, студент ***должен*** знать определение, способы задания, свойства преобразований, знать основные свойства геометрических фигур, изучаемых в школьном курсе геометрии.

Метод параллельного переноса

Параллельный перенос вполне определяется *заданием* вектора, т.е. направления и отрезка.



$M_1 = T_{\overline{a}}(M)$



$N_1 = T_{M \to M_1}(N)$

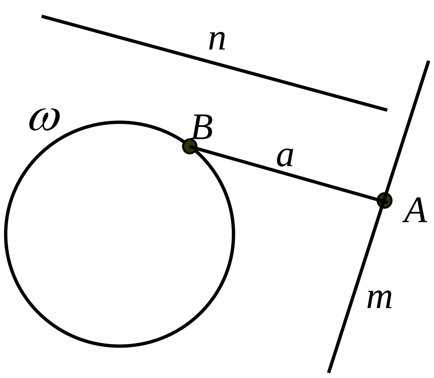
Основные свойства параллельного переноса: при параллельном переносе сохраняются

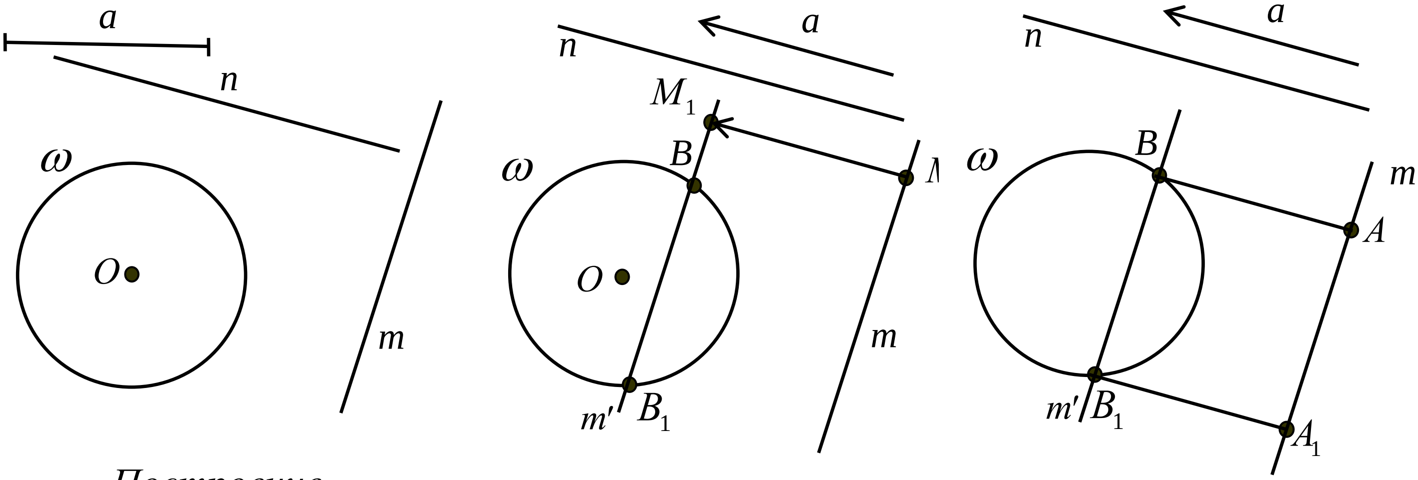
- длина отрезка и величина угла,
- всякая прямая отображается в параллельную ей прямую,
- всякая фигура отображается в равную ей фигуру.

При решении задач бывает полезно с б л и з и т ь какие-либо элементы (точки, отрезки) данных или искомой фигур. Это легко достигается с помощью параллельного переноса.

Задача 11. Построить отрезок AB данной длины, опирающийся своими концами на данную окружность ω и данную прямую m, и параллельный данной прямой n.

Анализ. Допустим, что задача решена и искомый отрезок AB построен, т.е. $AB = a$, AB параллелен n, $A \in m$, $B \in \omega$. Заметим, что искомый отрезок имеет данную длину и данное направление. Но этими данными определяется параллельный перенос на вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, при этом $B = T_{\vec{a}}(A)$, $A \in m$ и поэтому $T_{\vec{a}}(A) \in T_{\vec{a}}(m)$. Так как по условию $B \in \omega$, приходим к заключению, что $B \in \omega \cap m'$ и м.б.п.





Построение.

1. $m' = T_{\vec{a}}(m)$, $|\vec{a}| = a$, $\vec{a}$ параллелен n.
2. $B \in \omega \cap m'$.
3. $A = T_{-\vec{a}}(B)$.
4. AB – искомый отрезок.

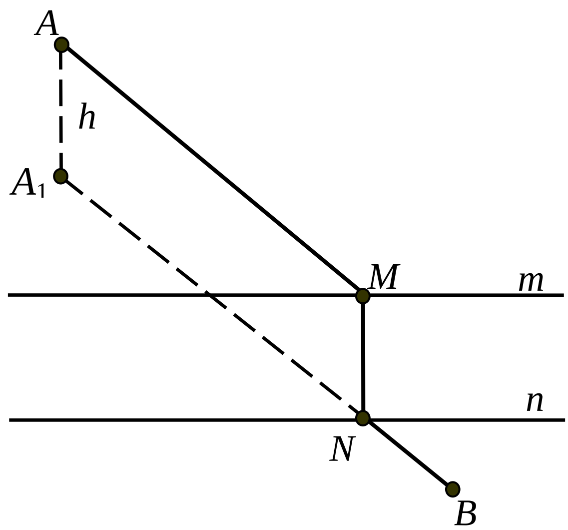
Доказательство. Легко видеть, что отрезок AB удовлетворяет всем требованиям задачи.

Исследование. Задача имеет столько решений, сколько точек содержит $\omega \cap m'$.

Задача 12. В каком месте следует построить мост MN через реку, разделяющую две данные деревни A и B, чтобы путь $AMNB$ из деревни A в деревню B был наикратчайшим? (Берега реки m и n считаются параллельными прямыми, мост предполагается перпендикулярным к реке.)

Анализ. Предположим, что некоторое положение моста MN, где $M \in m, N \in n$, h – ширина реки найдено. Искомый отрезок MN имеет данную длину, равную ширине реки h, и данное направление. Этими данными определяется параллельный перенос на вектор $\vec{h} = \overrightarrow{MN}$, при этом $N = T_{\bar{h}}(M)$, $A_1 = T_{\bar{h}}(A)$. Значит, $A_1N = T_{\bar{h}}(AM)$ и, следовательно, $A_1N = AM, AA_1 = MN = h$. Тогда $AM + MN + NB = AA_1 + A_1N + NB = h + A_1N + NB = min \Leftrightarrow A_1N + NB = min \Leftrightarrow A_1N + NB = A_1B$, т.е. точки A_1, N и B лежат на одной прямой, а BN параллельна AM.

Построение.

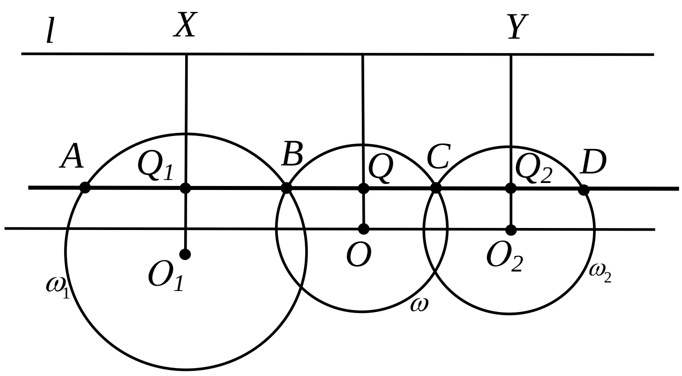


1. $A_1 = T_{\bar{h}}(A)$.
2. A_1B.
3. $N = A_1B \cap n$.
4. $MN \perp n$.
5. $M = MN \cap m$.
6. MN - искомый отрезок.

Доказательство и исследование провести самостоятельно.

Задача 13. Параллельно данной прямой l провести прямую, на которой две данные окружности ω_1 и ω_2 высекали бы хорды, сумма (или разность) длин которых имела бы заданную величину a.

Анализ. Рассмотрим случай, когда окружности расположены одна вне другой и сумма указанных хорд имеет заданную величину a. Предположим, что нужная прямая проведена. Пусть AB и CD хорды данных окружностей ω_1 и ω_2, параллельные данной прямой l, и $AB + CD = a$ $(A, B, C, D$ – последовательные точки проведенной прямой). При параллельном переносе, переводящем точку C в точку B, окружность ω_2 переходит в равную ей окружность ω. Пусть Q_1, Q_2, и Q – проекции центров окружностей ω_1, ω_2 и ω на проведенную прямую.



Тогда Q_1, Q_2, и Q – середины соответствующих хорд.

Поэтому $O_1O_2 = QB + + BQ_1 = CD/2 + AB/2 = a/2$. Рассмотрим $d = XY - a/2$, где $X = пр_l\ (O_1)$, $Y = пр_l(O_2)$, направление вектора $\vec{d}$ совпадает с направлением вектора $\overrightarrow{YX}$.

Построение.

1. $\omega = T_{\vec{d}}(\omega_2)$.
2. $B = \omega \cap \omega_1$.
3. AB параллельно l.
4. AB – искомая прямая.

Задача имеет столько решений, сколько пересечений имеет $\omega \cap \omega_1$.

Аналогичное решение при разности хорд.

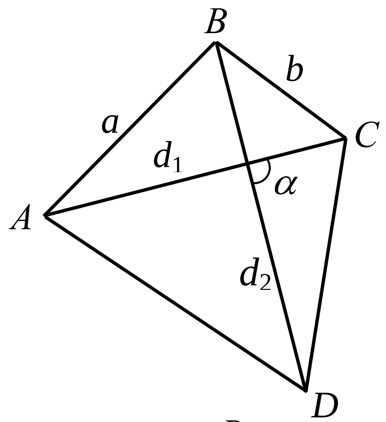
Задача 14. Построить четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-либо сторонам.

Дано: a, b, d_1, d_2, α - угол между диагоналями.

Построить: $ABCD$.

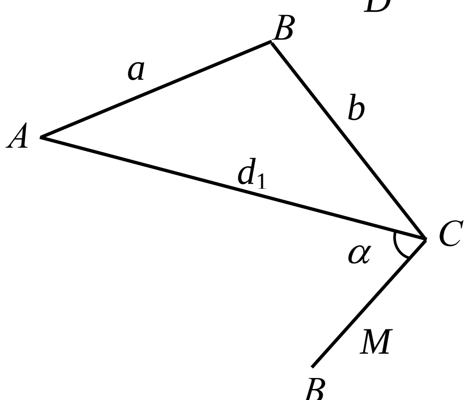
Анализ.

1) a и b – смежные стороны.



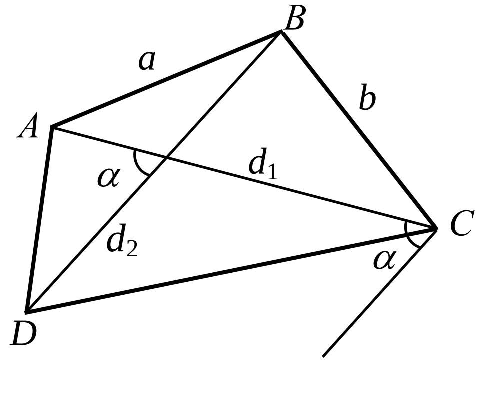
Допустим, что задача решена и искомый четырехугольник $ABCD$ построен.

Пусть при этом $AB = a$, $BC = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle(d_1, d_2) = \alpha$. Видим, что ΔABC м.б.п. (по трем сторонам). Тогда строится точка D такая, что $BD = d_2, \angle(BD, AC) = \alpha$.



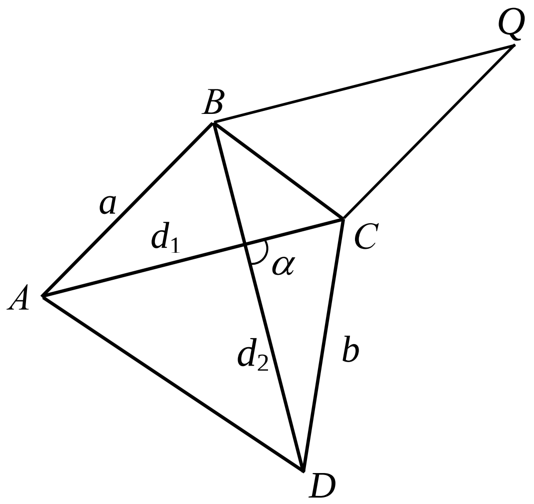
Построение.

1. $\Delta ABC \big| AB = a, BC = b, AC = d_1$.
2. $\angle ACM = \alpha$.
3. BD параллельно CM.
4. $BD = d_2$.
5. $ABCD$ – искомый четырехугольник.

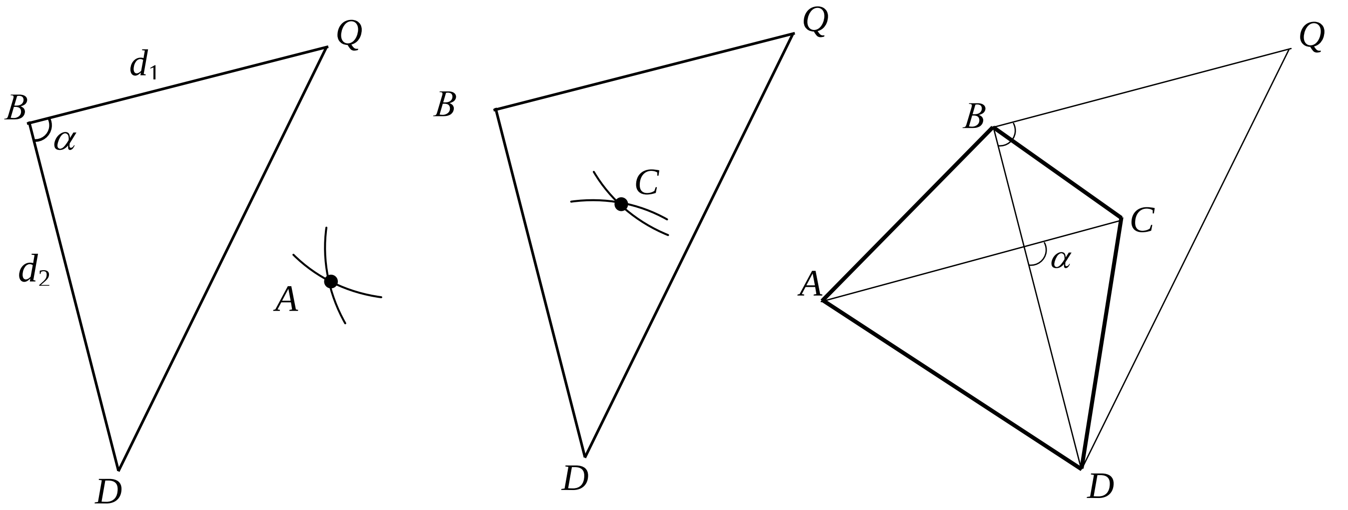


2) a и b – противоположные стороны.

Пусть $AB = a$, $CD = b$, $AC = d_1$, $BD = d_2$ и $\angle(BD, AC) = \alpha$. «Сблизим» диагонали AC и BD. Для этого рассмотрим параллельный перенос $T_{\overline{a}}(A) = B$. Пусть при этом $T_{\overline{a}}(C) = Q$. Тогда $BQ = d_1$, BQ параллельно AC, $CQ = a$. Замечаем, что $A \in \omega(B, a) \cap \omega(C, d_1)$, $BD = d_2$, $BQ = d_1$, $\angle DBQ = \alpha$ и ΔBDQ м.б.п. (по двум сторонам и углу между ними). Далее м.б.п. точка C (как пересечение двух окружностей с центрами в точках Q и D и радиусами a и b).



Построение.

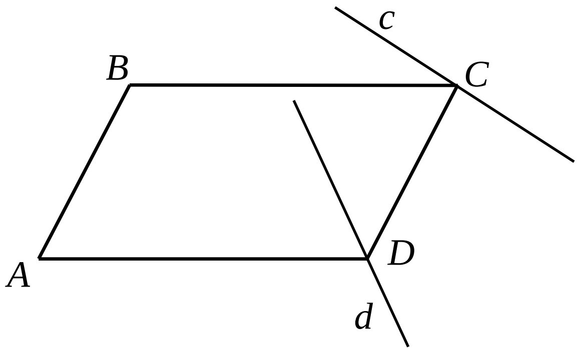


1. ΔBDQ: $\angle DBQ = \alpha$, $BQ = d_1$, $BD = d_2$.
2. $C \in \omega(Q, a) \cap \omega(D, b)$.
3. $A \in \omega(B, a) \cap \omega(C, d_1)$.
4. $ABCD$ – искомый четырехугольник.

Доказательство и исследование предлагается провести самостоятельно.

Задача 15. Даны две точки A и B и две прямые c и d. Построить параллелограмм $ABCD$ так, чтобы вершины C и D лежали на прямых c и d соответственно.

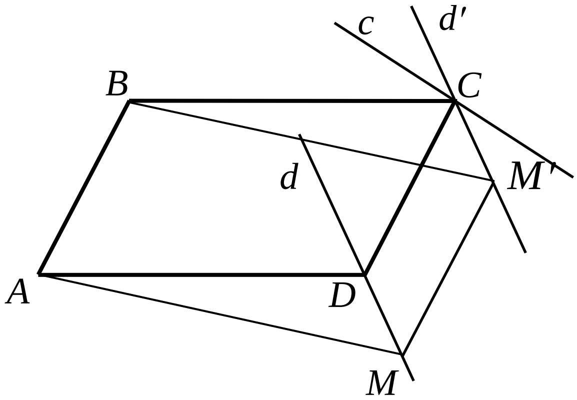
Анализ. Пусть искомый параллелограмм $ABCD$ построен и пусть $C \in c, D \in d$, где c и d – данные прямые, A и B – данные точки. Очевидно, как только будет построена третья вершина, например C, будет построен и параллелограмм $ABCD$. Так как у параллелограмма противоположные стороны параллельны и равны, то $AB = CD$ и при параллельном переносе на вектор $\overline{AB}$ точка D отобразится на точку C. Точка D по условию принадлежит прямой d, поэтому образ этой точки при параллельном переносе должен лежать на образе прямой d, т.е. $C \in d' = T_{\overline{AB}}(d)$.



Прямая d' м.б.п., после чего можно построить точку C, как точку пересечения прямых d' и c.

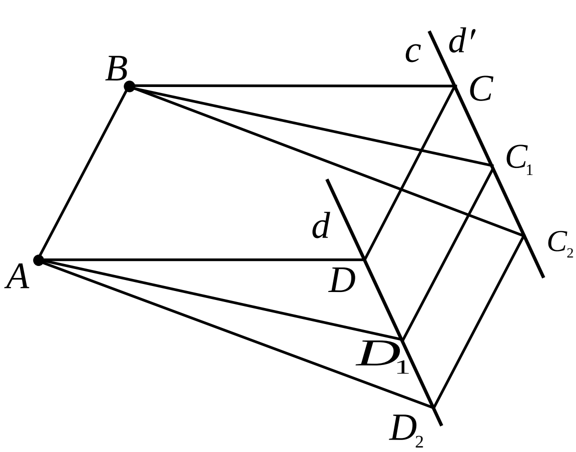
Построение.

1. $M \in d$ - произвольно.
2. M': $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.
3. d': $M' \in d'$, d' параллельно d.
4. $C = c \cap d'$.
5. CD: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.
6. $ABCD$ - искомый параллелограмм.



Доказательство. Точка C лежит на прямой c по построению. Так как вектор $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ определяет параллельный перенос, обратный параллельному переносу на вектор $\overrightarrow{AB}$, то прямая d' при переносе на вектор $\overrightarrow{CD}$ перейдет обратно в прямую d и точка C, лежащая на прямой d', должна перейти в точку D, лежащую на прямой d. Из того, что $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ следует, что $ABCD$ - параллелограмм. При этом по построению все вершины параллелограмма расположены так, как это предусмотрено условием задачи, поэтому он искомый.

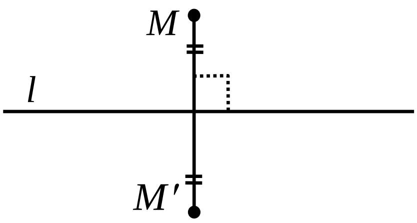
Исследование. Если c и d не параллельны, то d' пересекает прямую c и точка C строится, притом единственным образом. Если d параллельно c, а прямая d' не совпадает с прямой c, то точка C не строится и задача не имеет решения. Если d параллельно c, а прямая d' совпадает с прямой c, то задача имеет бесчисленное множество решений.



Метод осевой симметрии

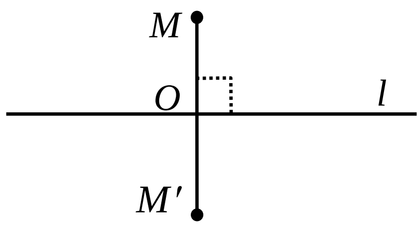
Метод осевой симметрии чаще всего применяется в тех задачах, в которых искомая фигура имеет осевую симметрию, причем осью симметрии является одна из данных прямых. Осевая симметрия успешно применяется и при решении задач, связанных со спрямлением ломаных линий, в частности, задач, содержащих в качестве данных суммы или разности ломаной, а также задач на построение фигур, дающих минимальные или максимальные значения некоторой величины.

Осевая симметрия задается или осью симметрии



$S_l(M) = M'$,

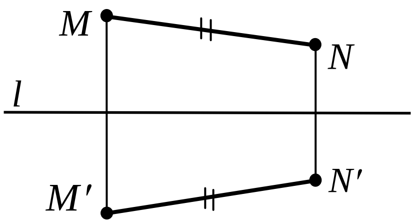
или парой соответствующих точек



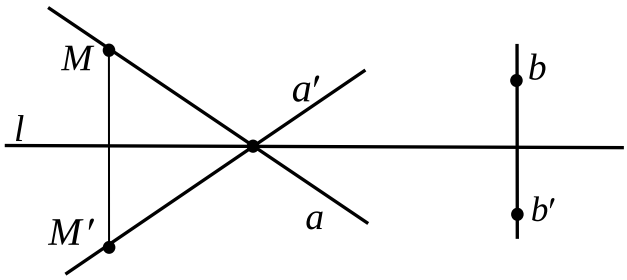
$S_{M \to M'}$ O - середина MM', $l \perp MM'$.

Основные свойства осевой симметрии: при осевой симметрии сохраняются

- длина отрезка и величина угла,

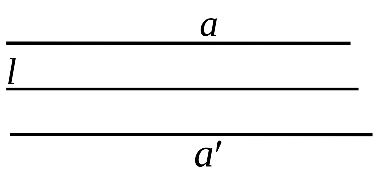


- соответственные прямые
  пересекаются на оси симметрии



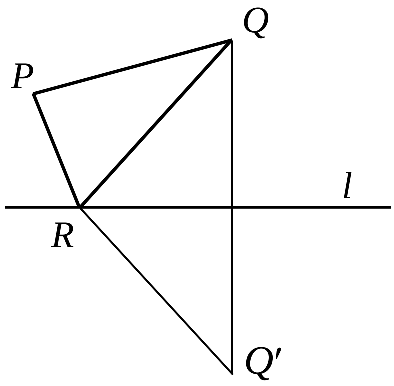
$b \perp l \Rightarrow b' \perp l$

или параллельны ей.



Задача 16. Даны прямая l и две точки P и Q по одну сторону от нее. Построить на прямой l точку R так, чтобы ΔPQR имел наименьший периметр.

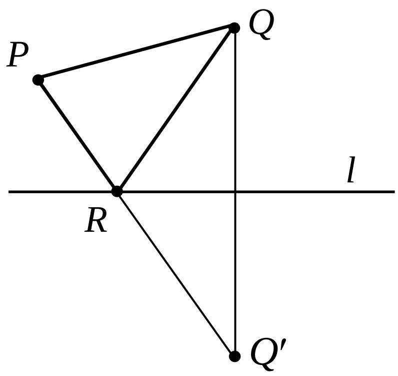
Анализ. Пусть точка R построена.



Тогда $p = PQ + PR + RQ = min \Leftrightarrow PR + RQ = min$ $(PQ - const)$. Если $Q' = S_l(Q)$, то $RQ = RQ'$.

Поэтому $PR + RQ = = min \Leftrightarrow PR + RQ' = min.$

Сумма этих двух отрезков будет минимальной тогда и только тогда, когда все три точки P, R и Q' будут лежать на одной прямой, т.е. при $R \in PQ'$.



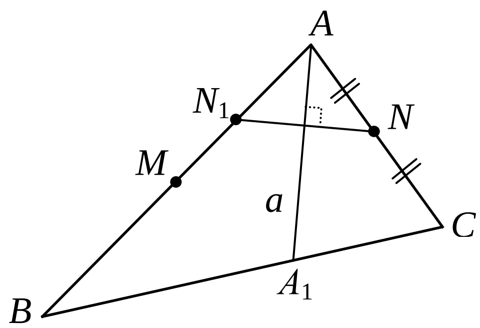
Построение.

1. $Q' = S_l(Q)$.
2. $R = l \cap PQ'$.
3. ΔPQR - искомый.

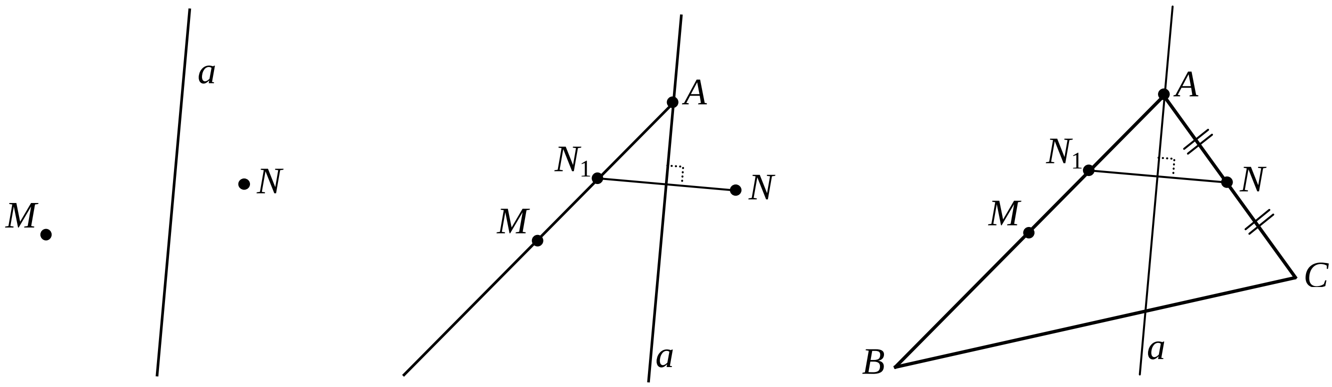
Сущность этого приема: задача сводится к построению точки, причем эта точка оказывается общей точкой некоторой данной фигуры и фигуры, симметричной данной фигуре относительно некоторой оси. Аналогичный прием применяется при решении задач при помощи и других геометрических преобразований.

Задача 17. Построить треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к третьей стороне.

Анализ. Предположим, что задача решена. Пусть ABC - искомый треугольник, M и N – середины сторон AB и AC соответственно, AA_1 - биссектриса. При симметрии относительно AA_1 луч AC переходит в луч AB, поэтому точка N луча AC переходит в некоторую точку N_1 луча AB.



Построение.



1) $N_1 = S_a(N)$.

2) N_1M.

3) $A = a \cap N_1M$.

4) $NC = NA, C \in AN$.

5) $MB = MA, B \in AM$.

6) ΔABC - искомый.

Исследование. Возможны следующие случаи:

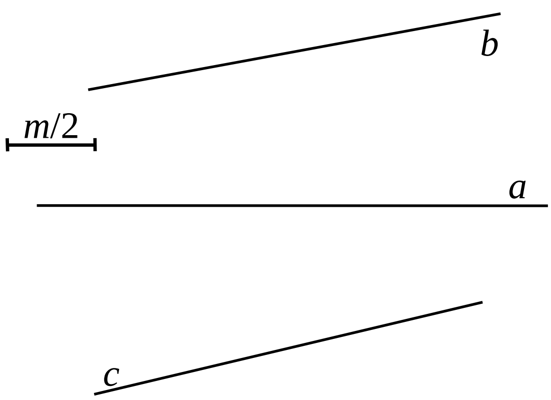
1) Если точки N_1 и M совпадают, то задача имеет бесконечно много решений.

2) Если точки N_1 и M различны, но прямая N_1M параллельна a, то задача не имеет решений.

3) Если точки N_1 и M различны, а прямые N_1M и a пересекаются, то задача имеет единственное решение.

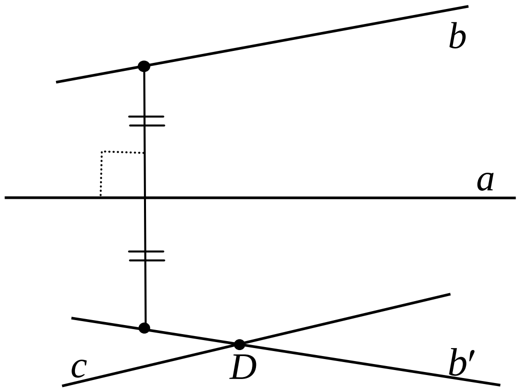
Рассмотрим *задачу* 2. Построить ромб так, чтобы одна из его диагоналей была равна данному отрезку m и лежала на данной прямой a, а остальные две вершины ромба лежали соотвественно на данных прямых b и c.

Анализ.



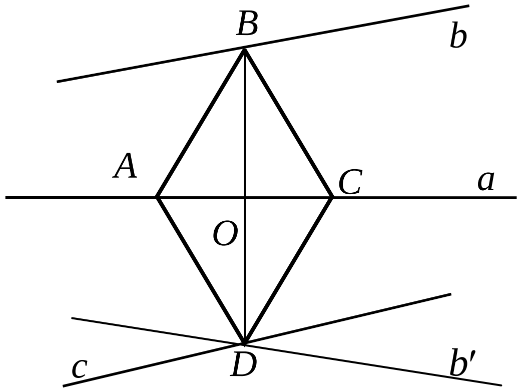
Пусть искомый ромб построен и пусть $AC = m$, $A \in a, C \in a$, $B \in b$, $D \in c$. Так как диагонали ромба являются осями его симметрии, то $D = S_a(B)$. По условию $B \in b$, поэтому образ точки B обязан лежать на образе прямой b, то есть $D \in b' = S_a(b)$ и точка $D \in b' \cap c$ м.б.п. Затем легко строится

$B = S_a(D)$, A и C.



Построение.

1. $b' = S_a(b)$.
2. $D = b' \cap c$.
3. $B = S_a(D)$.
4. $O = BD \cap a$.
5. A: $OA = m / 2$.
6. C: $OC = m / 2$.
7. $ABCD$ - искомый.



Исследование. Возможны случаи:

1) c параллельна b', тогда решений нет.

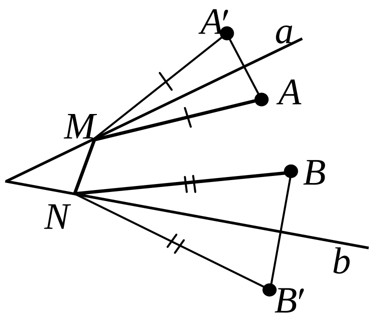
2) $c \equiv b'$, тогда имеем бесконечное множество решений.

3) $c \cap b'$ вне прямой a, тогда имеем одно решение.

4) $c \cap b' \in a$, тогда решений нет.

Задача 18. Дан угол и внутри него – две точки A и B. Построить ломанную из трех звеньев, имеющую наименьшую длину и такую, чтобы ее концами были точки A и B, две промежуточные вершины лежали (по одной) на сторонах данного угла.

Анализ. Допустим, что задача решена и ломаная $AMNB$ построена, где A и B данные точки, а точки M и N лежат на сторонах угла (ab). Нужно найти точки M и N такие, что ломаная $AMNB$ имела наименьшую длину. Используем метод «спрямления» ломаной.

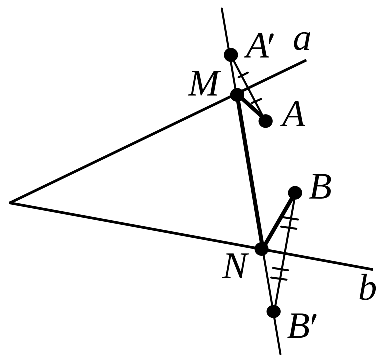


Для этого рассмотрим точку A', симметричную точке A относительно стороны a угла, и точку B', симметричную точке B относительно стороны b угла. Так как при симметрии отрезок переходит в равный отрезок, точка оси симметрии остается неподвижной, то $A'M = AM$ и $B'N = BN$. Тогда $AM + MN + NB = min \Leftrightarrow A'M + MN + NB' = min$.

Сумма длин отрезков $A'M$, MN и NB' будет минимальной тогда и только тогда, когда точки A', M, N, B' лежат на одной прямой. А это значит, что точки

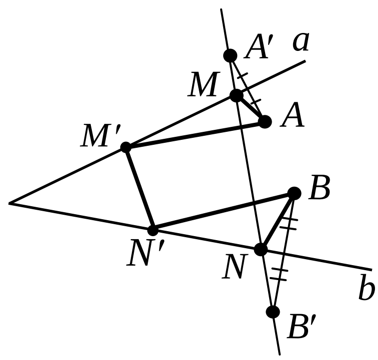
M и N мы можем найти как точки пересечения прямой $A'B'$ с прямыми a и b соответственно.

Построение.



1. $A' = S_a(A)$.
2. $B' = S_b(B)$.
3. $M = a \cap A'B'$.
4. $N = b \cap A'B'$.
5. Ломаная $AMNB$ –искомая.

Доказательство.



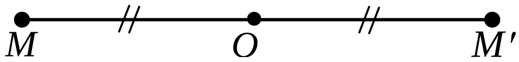
Рассмотрим ломаную $AM'N'B$, где точки $M' \in a$, $N' \in b$ отличны от точек M и N. Так как в треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон, то $A'B' < A'N' + N'B'$, $A'N' < A'M' + M'N'$.

Поэтому $A'B' < A'M' + M'N' + N'B'$ и, следовательно $AM + MN + NB < AM' + M'N' + N'B$, т.е. длина построенной ломаной – наименьшая.

Исследование. Точки A' и B', а затем и точки M и N строятся всегда, притом однозначно, Поэтому задача всегда имеет решение, притом единственное.

Метод центральной симметрии

Определение. Две точки M и M' называются *симметричными относительно точки O,* если точка C является серединой отрезка MM'.

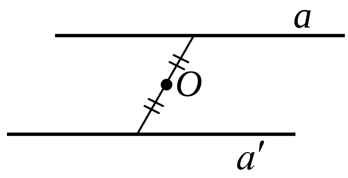


Определение. Преобразование точек плоскости, при котором каждая точка M отображается в симметричную ей относительно точки O точку M' называется *центральной симметрией с центром симметрии в точке O.*

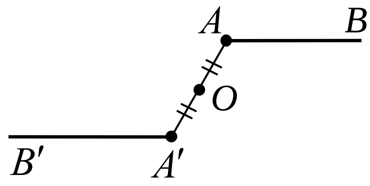
Центральная симметрия задается или центром симметрии O (обозначается S_O) или парой соответственных точек M и M' (обозначается $S^{M \to M'}$).

Основные свойства центральной симметрии:
при центральной симметрии

- прямая отображается в параллельную ей прямую;



- луч отображается в противоположно направленный луч;



-

- прямая, проходящая через центр симметрии, отображается сама в себя;
- отрезок отображается в равный отрезок;
- угол отображается в равный угол.

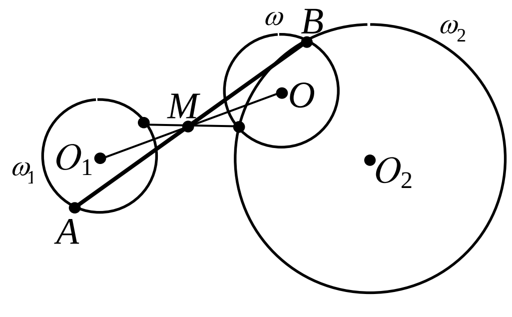
При решении задач на построение центральная симметрия применяется, как правило, в тех задачах, в которых искомая фигура имеет центр симметрии (параллелограмм, прямоугольник, квадрат, ромб, окружность, правильный шестиугольник,…).

Задача 19. Через данную точку провести прямую, отрезок которой, заключенный между двумя данными окружностями, делился бы этой точкой пополам.

Анализ. Пусть задача решена и такая прямая AB построена. Пусть A и B – точки на данных окружностях с центрами O_1 и O_2 соответственно, M – данная середина отрезка AB. При симметрии относительно точки M точка A переходит в точку B, а окружность с центром в точке O_1 – в равную ей окружность с некоторым центром O, проходящую через точку B.

Построение.

1. $\omega = S_M(\omega_1)$.
2. $B = \omega_2 \cap \omega$.
3. $A = S_M(B)$.
4. AB – искомая прямая.



Исследование: Возможны случаи:

1) ω не пересекает ω_2, тогда решений нет.

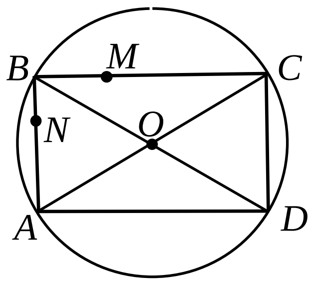
2) ω касается ω_2, тогда существует одно решение.

3) ω пересекает ω_2 в двух точках, тогда существует два решения.

Задача 20. В данную окружность ω_1 вписать прямоугольник так, чтобы прямые, содержащие две его стороны (смежные или противоположные) проходили через две данные точки.

Анализ. а) Пусть *ABCD* - искомый прямоугольник и пусть данные точки *N* и *M* лежат на его смежных сторонах. Так как вершина прямого угла лежит на окружности, для которой гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром, то, во-первых, *AC* и *BD* пересекаются в центре окружности, (т. е. центр симметрии вписанного прямоугольника совпадает с центром окружности) и, во-вторых, точка *B* лежит на окружности, для которой данный отрезок *MN* является диаметром.

Построение.

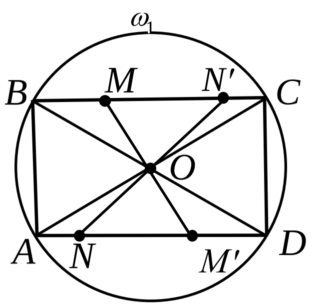


1. *K* – середина отрезка *MN*.
2. Окружность $\omega(K, KM)$.
3. $B = \omega_1 \cap \omega$.
4. $A = BN \cap \omega_1$, $C = BM \cap \omega_1$.
5. $D = S'_O(B)$.
6. *ABCD* – искомый прямоугольник.

Так как две окружности пересекаются не более, чем в двух точках, то задача имеет не более двух решений.

б) Пусть данные точки *N* и *M* лежат на противоположных сторонах вписанного прямоугольника. Так как центр симметрии искомого прямоугольника совпадает с центром окружности, то точка, симметричная *M* относительно точки *O*, лежит на стороне *AD*, т.е. $M' = S_O(M) \in AD$. Аналогично, $N' = S_O(N) \in BC$.

Построение.



1. $N' = S_O(N)$.
2. MN'.
3. $B = MN' \cap \omega_1, C = MN' \cap \omega_1$.
4. $A = OC \cap \omega_1, D = OB \cap \omega_1$.
5. *ABCD* – искомый прямоугольник.

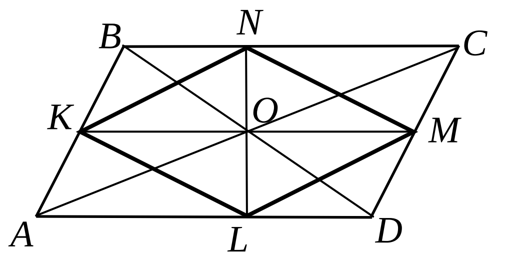
Доказательство. При симметрии относительно точки *O* окружность отражается сама на себя, сторона *AD* переходит в сторону *CB*, поэтому точка *D* перейдет в точку *B*, точка *A* – в точку *C*. Поэтому *ABCD* – искомый прямоугольник.

Исследование. Очевидно, если $O \notin MN$ и хотя бы одна из точек (*M* или *N*) является внутренней точкой окружности, задача всегда имеет решение. Если

$O \in MN$ и $OM=ON$, задача имеет множество решений. Если же $O \in MN$ и $OM \neq ON$, задача не имеет решений.

Задача 21. Дан параллелограмм и точка N на одной из его сторон. Построить ромб, одна вершина котрого – точка N, а остальные три вершины лежат на трех других сторонах параллелограмма.

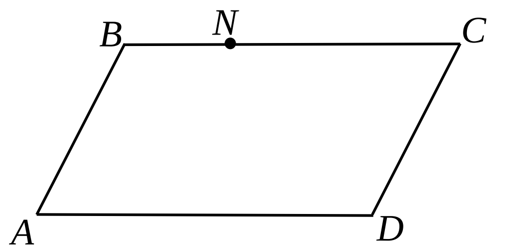
Анализ. Пусть искомый ромб построен и точка N лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$ с центром в точке O. Пусть вершины K, L, M искомого ромба $KLMN$ расположены на сторонах AB, AD, CD соответственно. Тогда точка O – центр симметрии параллелограмма $ABCD$. Докажем, что точка O является центром симметрии и ромба $KLMN$, причем $KM \perp NL$.



$\Delta KBN = \Delta MDL$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($KN=LM$, $\angle BKN = \angle DML$ и $\angle BNK = \angle DLM$ как углы с параллельными сторонами). Из равенства треугольников имеем: $BK=DM$, $BN=DL$. Теперь допустим, что при центральной симметрии относительно точки O точка K переходит в точку K_1,

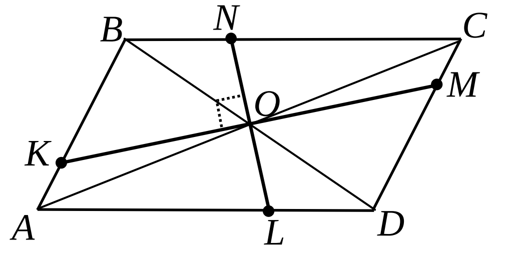
т.е. S_O: $\left.\begin{matrix} K \to K_1 \\ B \to D \end{matrix}\right\} \Rightarrow KB \to K_1D \Rightarrow KB = K_1D$.

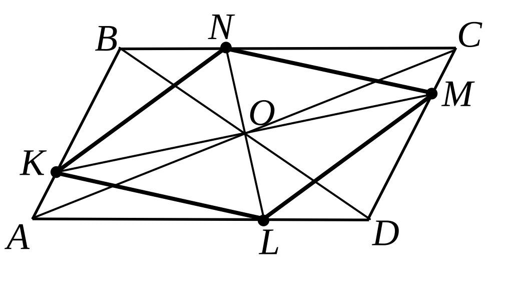
Получили: $K_1D=KB=MD \quad \Rightarrow K_1 \equiv M$, т.е. $S_O(K)=M$. Аналогично, $S_O(N)=L$ и $S_O(KNML)=MLKN$ и ромб переходит сам в себя, а O – центр симметрии ромба. У ромба диагонали взаимно-перпендикулярны, т.е. $KM \perp NL$.



Построение.

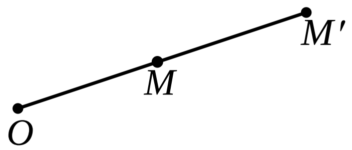
1. $O = AC \cap BD$.
2. $L = S_O(N)$.
3. $OM \perp NL$.
4. $K = AB \cap OM$.
5. $M = CD \cap OM$.
6. $KLMN$ – искомый ромб.





Метод гомотетии

Методом гомотетии, как правило, решаются такие задачи на построение, в условии которых даны углы, отношение отрезков и один линейный элемент. При этом, если искомая фигура F удовлетворяет нескольким условиям, оказывается возможным построить фигуру F_1, гомотетичную F и удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме одного – линейного размера. После построения фигуры F_1 строится фигура F.



Гомотетия вполне определяется *заданием* центра O и коэффициента k.

Если при этом $H_O^k(M) = M'$, то $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

$k = 2$

$H_O^2(M) = M' \Rightarrow OM' = 2 \cdot OM$

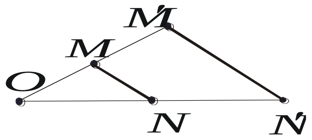
Часто при решении задач бывает удобно *задать* гомотетию с центром O и парой соответственных точек M и M', при этом точки O, M и M' должны лежать на одной прямой. Обозначение такой гомотетии $H_O^{M \to M'}$.

Основные свойства гомотетии: при гомотетии

- длина отрезка изменяется на коэффициент гомотетии, то есть если $H_O^k(AB) = A'B'$, то $A'B' = |k| \cdot AB$,

$k = 2$ $\quad M'N'$ параллельно MN

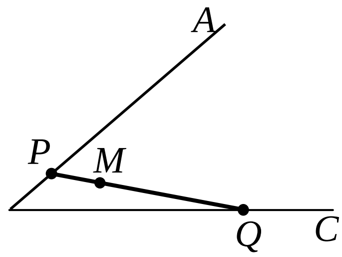
$M'N' = 2MN$



- сохраняется величина угла,
- прямая отображается на параллельную прямую,
- сохраняется отношение любых двух отрезков, в частности середина отрезка отображается на середину отрезка.

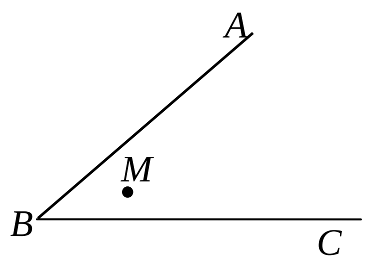
Задача 22. Дан угол ABC и точка M внутри угла. Построить отрезок с концами на сторонах угла так, чтобы точкой M он делился в отношении 1:3.

Анализ. Пусть отрезок PQ – искомый и пусть $P \in AB$ и $Q \in BC$, $PM : MQ = 1 : 3$. Замечаем, что гомотетия с коэффициентом $k = -3$ и центром M точку P отобразит в точку Q, то есть $H_M^{-3}(P) = Q$. Так как точка P принадлежит стороне AB, то образ точки P должен лежать на образе прямой AB, то есть $Q \in l = H_M^{-3}(AB)$. Построив прямую l, найдем

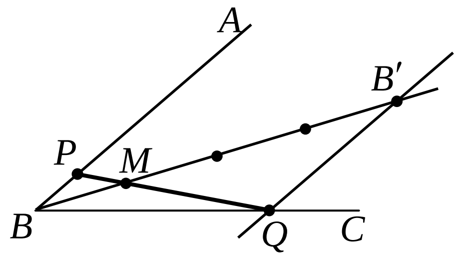


точку $Q = l \cap BC$.

Построение.

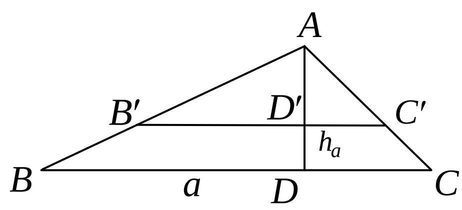


1. $B' = H_M^{-3}(B)$.
2. $B'Q = H_M^{-3}(AB)$.
3. $Q = BC \cap QB'$.
4. $P = MQ \cap AB$.
5. PQ – искомый.



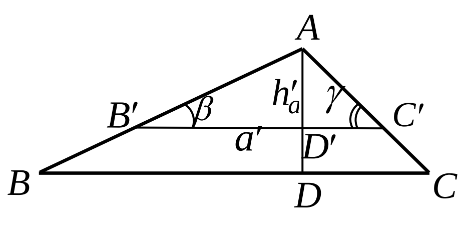
Задача 23. Построить треугольник ABC, если даны углы при основании β и γ и сумма основания и высоты $a + h_a$.

Анализ. Пусть ΔABC построен и пусть $BC + AD = a + h_a$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. На луче AB возьмем некоторую точку B' и рассмотрим гомотетию с центром в точке A и парой соответственных точек B и B', то есть $H_A^{B \to B'}$. При этой гомотетии точка C переходит в точку $C' \in AC$, при этом $B'C'$ параллельна BC, точка $D \in BC$ переходит в точку $D' = B'C' \cap AD$.



В треугольнике $AB'C'$ имеем $\angle AB'C' = \beta, \angle AC'B' = \gamma, B'C' = a'$, $AD' = h'_a$. Очевидно, $a' + h'_a \neq a + h_a$, т. е. треугольник $AB'C'$ удовлетворяет не всем требованиям задачи. Но если этот треугольник будет построен, то будут известны отрезки a' и h'_a. Гомотетия с центром в точке A и коэффициентом $k = \dfrac{a + h_a}{a' + h'_a}$ переведет $\Delta AB'C'$ в искомый ΔABC.

Построение.



1. $\Delta AB'C'$ по двум углам:

а) $B'C'$ - произвольный;

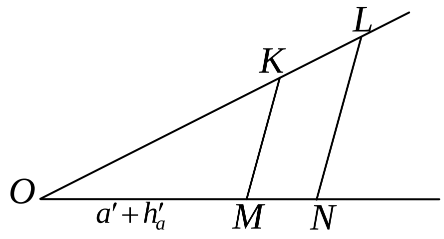
б) $\angle AB'C' = \beta, \angle AC'B' = \gamma$.

2. $B'C' + AD' = a' + h'_a$.

B: $\dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{a+h_a}{a'+h'_a}$.

C: BC параллельна $B'C'$.

3. $\triangle ABC$ - искомый.



$OK = AB', OL = AB$

Заметим, что построение точки B (третий шаг построения) сводится к построению отрезка AB как отрезка, четвертого пропорционального трем известным отрезкам: AB', $a'+h'_a$ (известны из построения 1 и $a+h_a$ (известно по условию задачи).

Это построение из школьного курса геометрии. На нашем чертеже: $ON = a+h_a, OM = a'+h'_a$.

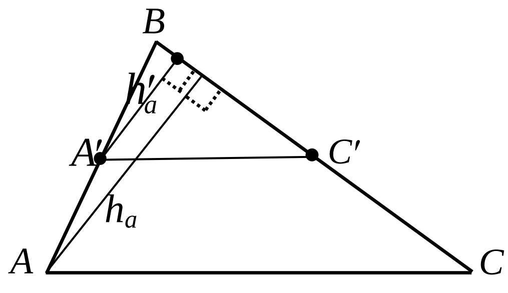
Доказательство. Так как $\triangle ABC$ гомотетичен $\triangle AB'C'$, а при гомотетии углы сохраняются, то $\angle ABC = \angle AB'C' = \beta,\ \ \angle ACB = \angle AC'B' = \gamma$. Поскольку при нашей гомотетии $B' \to B$, то $AB' \to AB$ и $AB = k \cdot AB'$, то есть $k = AB : AB' = (a+h_a):(a'+h'_a)$. Докажем, что сумма основания и высоты построенного $\triangle ABC$ равна длине данного отрезка. На самом деле, $BC + AD = B'C' + k \cdot AD' = k \cdot (a'+h'_a) = ((a+h_a):(a'+h'_a)) \cdot (a'+h'_a) = a+h_a$. Таким образом, $\triangle ABC$ удовлетворяет всем условиям задачи, а потому он искомый.

Исследование. При $\beta + \gamma < 180^0$ задача всегда имеет решение, притом единственное (все шаги построения выполнимы и однозначно).

Задача 23. Построить треугольник ABC, если даны $\angle \beta$ и три отрезка m, n, p, удовлетворяющие условиям $m : n = c : b, p = a - h_a$.

Анализ. Предположим, что задача решена и искомый треугольник ABC построен. Пусть $\angle ABC = \beta$, $BA : AC = m : n, p = a - h_a$.

Рассмотрим гомотетию с центром в вершине B данного угла и с произвольным коэффициентом k. Пусть $H_B^k : A \to A', C \to C'$. Так как при гомотетии прямая переходит в параллельную ей прямую и сохраняется отношение любых двух отрезков, то $A'C'$ параллельна AC и $BA : AC = BA' : A'C' = m : n$.



Поскольку коэффициент гомотетии мы выбрали произвольно, то можно потребовать, чтобы $BA' = m$. Тогда, очевидно, $A'C' = n$ и треугольник

$A'BC'$ м.б.п. Далее, учитывая, что $a' = k \cdot a$, $h'_a = k \cdot h'_a$, $BA' = k \cdot BA$ и $p' = a' - h'_a = k \cdot (a - h_a) = k \cdot p$ находим $k = p' : p = BA' : BA$ (*). После построения треугольника $A'BC'$ находим отрезки p' и BA' и строим отрезок BA, удовлетворяющий условию (*).

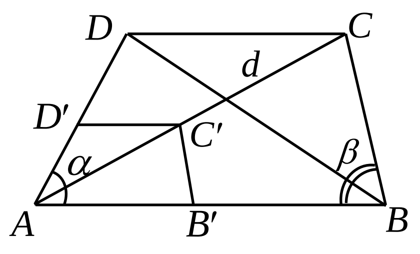
Построение.

1. $\Delta A'BC'$ так, чтобы $\angle A'BC' = \beta, BA' = m, A'C' = n$.
2. $p' = a' - h'_a$.
3. BA так, чтобы $BA : BA' = p : p'$ (отрезок, четвертый пропорциональный к трем данным).
4. AC параллельно $A'C'$.
5. $C = AC \cap BC'$.
6. ΔABC – искомый.

Доказательство. Так как AC параллельно $A'C'$ (по построению), то ΔABC гомотетичен $\Delta A'BC'$. Если $\Delta ABC = H_B^{k'}(\Delta A'BC')$, то $a = k' \cdot a'$, $h_a = k' \cdot h'_a$, $BA = k' \cdot BA'$. По построению $BA : BA' = p : p'$. Поэтому $k' = p : p'$. Теперь a - h_a = $k' \cdot (a' - h'_a) = k' \cdot p' = (p : p') \cdot p' = p$. Кроме того, по свойству гомотетии $BA : AC = BA' : A'C' = m : n$ и ΔABC удовлетворяет всем требованиям задачи.

Исследование. $\Delta A'BC'$ строится при условии $\beta < 180^0$. Все остальные шаги построения выполняются, притом однозначно. Итак, при $\beta < 180^0$ задача всегда имеет решение, притом единственное.

Задача 24. Построить трапецию по диагонали d, отношению $m : n$ оснований, углам α и β при основании.



Анализ. Допустим, что задача решена, и искомая трапеция $ABCD$ построена. Пусть при этом $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $AB : CD = m : n$, $AC = d$. Рассмотрим гомотетию $H_A^{D \to D'}$, где D' - произвольная точка луча AD. Пусть $C \to C'$, $B \to B'$. Так как при гомотетии прямые, соединяющие соответственные точки, проходят через центр гомотетии, то $C' \in AC, B' \in AB$. Далее при гомотетии прямые переходят в параллельные прямые и поэтому $D'C'$ параллельна DC, $C'B'$ параллельна CB. Таким образом, выбор точки D' вполне определяет трапецию $AB'C'D'$, гомотетичную данной. Так как $AB' : C'D' = AB : CD = m : n$,

$\angle AB'C' = \beta, \angle B'AD' = \alpha$, то новая трапеция удовлетворяет всем условиям задачи, кроме одной – диагональ $AC' \neq d$. Очевидно, построив трапецию $AB'C'D'$, можно построить трапецию $ABCD$, гомотетичную $AB'C'D'$, при гомотетии $H_A^{C \to C'}$.

Построение.

1. $AB'C'D'$ - трапеция:

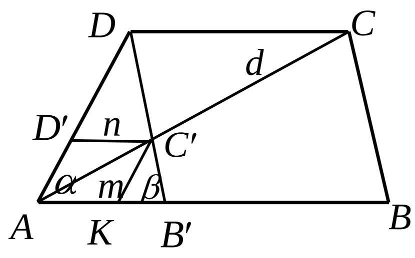
а) $AB' = m$,

б) $\angle B'AD' = \alpha, \angle AB'C' = \beta$,

в) $AK = n, K \in AB'$,

г) KC' параллельно $AD', C' = KC' \cap B'C'$,

д) D' : $C'D'$ параллельно AB'.



2. $AC = d$, $C \in AC'$.

3. CB параллельно $C'B', B = CB \cap AB'$.

4. CD параллельно AB, $D = CD \cap AD'$.

5. $ABCD$ - искомая трапеция.

Доказательство. По построению $AKC'D'$ - параллелограмм, поэтому $C'D' = AK = n$. Далее, трапеция $ABCD$ гомотетична трапеции $AB'C'D'$, поэтому $AB:CD = AB':C'D' = m : n$ и $\angle BAD = \alpha$, $\angle AB'C' = \beta$. Так как по построению $AC = d$, то построенная трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи и потому – искомая.

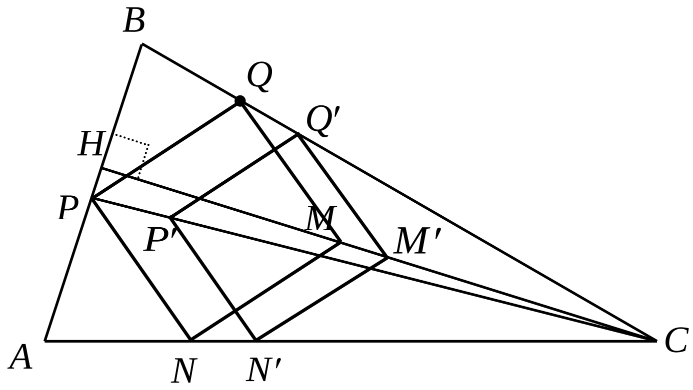
Исследование. Так как на выбранной полупрямой данный отрезок можно отложить единственным образом, то точки K и B' строятся однозначно. В заданную полуплоскость от данной полупрямой данный угол можно отложить всегда, притом единственным образом, то есть построение 1.б однозначно. Прямая KC' строится всегда и единственным образом, а вот точка C' может быть построена лишь при условии $\alpha + \beta < 180^0$. Если трапеция $AB'C'D'$ будет построена, то гомотетичная ей трапеция строится всегда, притом однозначно. Из всего сказанного делаем вывод: при условии $\alpha + \beta < 180^0$ задача всегда имеет решение, притом единственное.

Задача 25. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы три его вершины лежали на сторонах треугольника, а четвертая – на одной из его высот.

Анализ. Предположим, что задача решена и искомый квадрат $MNPQ$ построен. Пусть при этом M, N, P и Q лежат на высоте CH и сторонах AC, AB и BC соответственно.

Рассмотрим гомотетию с центром в точке C, переводящую точку M в точку M': $H_C^{M\to M'}$. При этом точку M', лежащую на высоте CH, выбираем произвольно. При этой гомотетии точки N, P и Q перейдут в точки N', P', Q'.

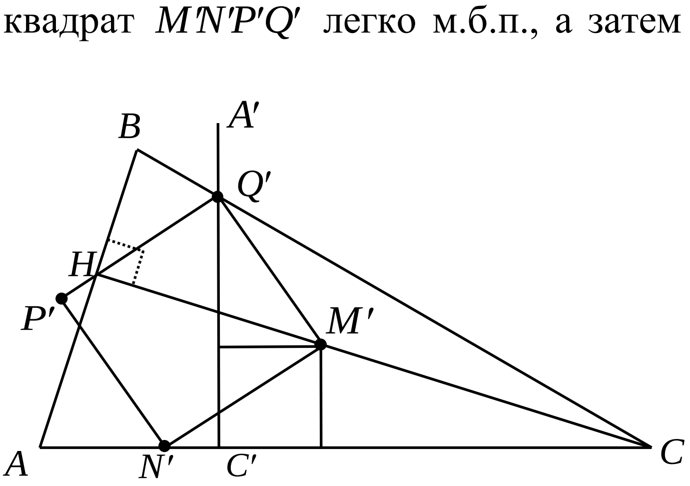
Так как при гомотетии точки прямой, проходящей через центр гомотетии, перейдут в точки этой же прямой, то точки N', P', Q' будут лежать на прямых CA, CP и CB соответственно. При этом квадрат $MNPQ$ перейдет в квадрат $M'N'P'Q'$, т.к. при гомотетии сохраняются углы и отношение любых двух отрезков, в частности, равные отрезки переходят в равные. Далее, стороны полученного квадрата параллельны соответствующим сторонам квадрата, т.к. при гомотетии всякая прямая переходит в параллельную прямую. Новый квадрат удовлетворяет всем требованиям задачи, кроме одного – вершина P' не лежит на стороне треугольника. Очевидно, если мы сможем построить квадрат $M'N'P'Q'$, то гомотетия $H_C^{P'\to P}$ переведет этот квадрат в искомый. Таким образом, построение искомого квадрата мы свели к построению квадрата $M'N'P'Q'$, для которого одно из четырех условий задачи не выполнено. Этот квадрат м.б.п. Для этого заметим, что при повороте вокруг точки M' на угол 90^0 (по часовой стрелке) вершина N' перейдет в вершину Q'. Так как точка N' должна лежать на стороне CA, то образ Q' этой точки должен лежать на образе прямой CA при данном повороте, т.е. точка Q' лежит на прямой $C'A' = R_{M'}^{-90^0}(CA)$ и на стороне CB.



Таким образом, точка Q' может быть получена как точка пересечения двух прямых – прямой CB и прямой $C'A'$ - образа прямой CA при повороте с центром в точке M' на угол -90^0. При этом точка M' выбирается произвольно. Очевидно, после построения точки Q' квадрат $M'N'P'Q'$ легко м.б.п., а затем м.б.п. и искомый квадрат.

Построение.

1. $M' \in CH$ - произвольно.
2. $C'A' = R_{M'}^{-90^0}(CA)$ (для построения $C'A'$ достаточно из точки M' опустить перпендикуляр на CA, повернуть его по часовой стрелке на 90^0, через конец



полученного отрезка провести перпендикулярную этому отрезку прямую).

3. $Q' = CB \cap C'A'$.

4. $M'N' \perp M'Q'$

5. $N' = CA \cap M'N'$.

6. $N'P'$ параллельно $M'Q'$,

$Q'P'$ параллельно $M'N'$,

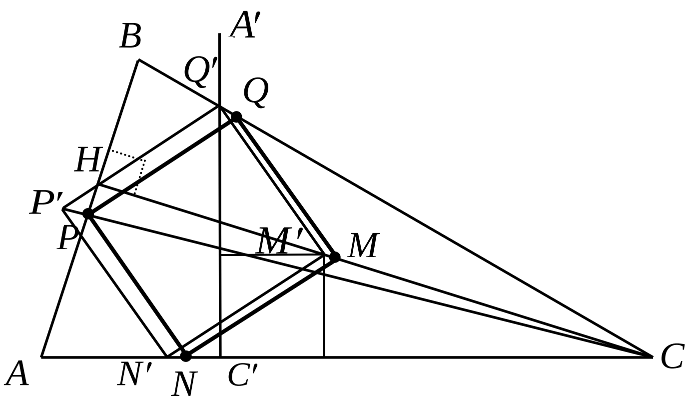
$P' = N'P' \cap Q'P'$.

7. $P = AB \cap CP'$.

8. PN параллельно $P'N'$,

PQ параллельно $P'Q', QM$ параллельно $Q'M', MN$.

9. $MNPQ$ – искомый квадрат.



Доказательство. При повороте с центром в точке M' на угол 90^0 против часовой стрелки прямая $C'A'$ перейдет, очевидно, в прямую CA, а прямая $M'Q'$ - в перпендикулярную ей прямую $M'N'$. Точка Q', являющаяся точкой пересечения прямых CQ' и $C'A'$, перейдет в точку пересечения образов этих прямых CA и $M'N'$, т.е. в точку N'. Тогда $M'Q' = M'N'$ и построенный четырехугольник будет квадратом. Четырехугольник $MNPQ$, гомотетичный по построению квадрату $M'N'P'Q'$, тоже является квадратом, при этом вершины этого квадрата расположены так, как это предусмотрено условием задачи, т.е. квадрат $MNPQ$ является искомым.

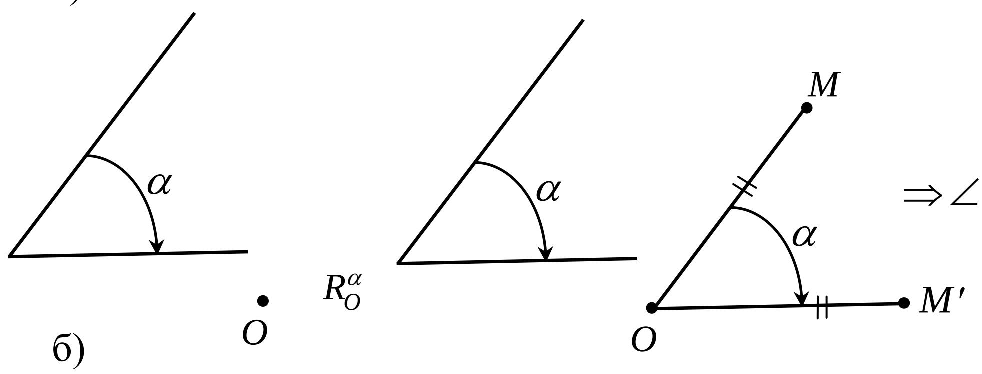
Исследование. Задача не имеет решения, если не строится точка Q', т.е. если прямые CB и $C'A'$ параллельны, т.е. если $CB \perp AC$, если ΔACB прямоугольный. Для любого непрямоугольного треугольника задача всегда имеет решение, притом единственное.

Метод поворота

Метод поворота большей частью применяется при решении тех задач, в которых требуется построить фигуру, имеющую поворотную симметрию (равносторонний треугольник, квадрат, окружность и т.д.) или же требуется построить фигуру по заданному углу (и удовлетворяющую другим дополнительным условиям).

Поворот вполне определяется *заданием* центра и угла поворота (или центра и пары соответственных точек).

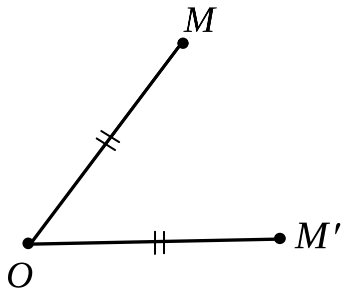
а)



$R_O^{\alpha}(M) = M' \Rightarrow$

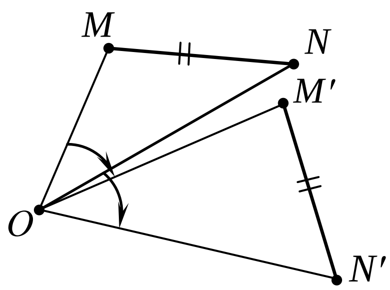
$\Rightarrow \angle MOM' = \alpha,\ OM' = OM$

б)



$R_O^{M \to M'} \Rightarrow \angle MOM'$ - угол поворота,

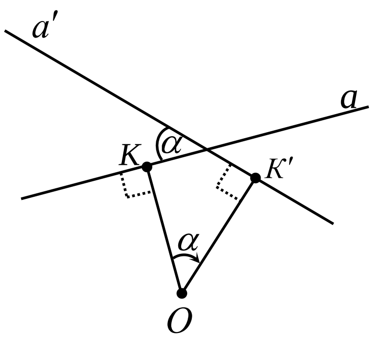
$OM' = OM$.



Основные свойства поворота: при повороте сохраняются

- длина отрезка и величина угла,

- угол между прямой и образом этой прямой при повороте равен углу поворота.



Построение образа прямой при повороте.

1. $OK \perp a$.
2. $K' = R_O^{\alpha}(K)$ $(\angle KOK' = \alpha, OK' = OK)$.
3. $a' \perp OK', K' \in a'$.

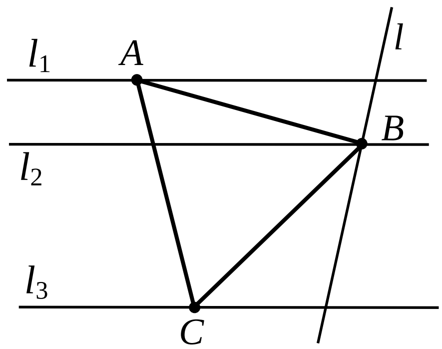
угол между a и a' равен α.

Задача 26. Построить равносторонний треугольник ABC с вершинами на трех данных параллельных прямых.

Анализ. Предположим, что нужный треугольник ABC построен. Пусть его вершины A, B и C лежат на данных параллельных прямых l_1, l_2, l_3 соответственно. При повороте на 60^0 относительно точки A, переводящем вершину C в B, прямая l_3 перейдет в некоторую прямую l, пересекающую l_2 в точке B.

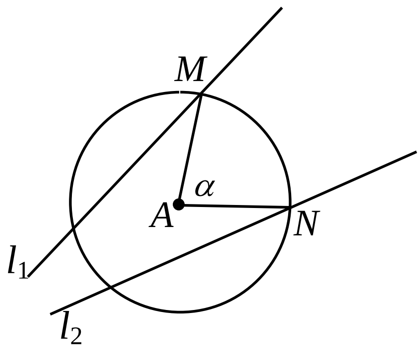
Построение.

1. $A \in l_1$, A – произвольно.
2. $l = R_A^{60^0}(l_3)$.
3. $B = l \cap l_2$.
4. $C = l_3 \cap \omega(B, AB)$.
5. ΔABC - искомый.



Задача 27. Даны две прямые l_1 и l_2, точка A и угол α. Построить окружность с центром в точке A так, чтобы одна из дуг окружности с концами на данных прямых имела угловую меру, равную α.

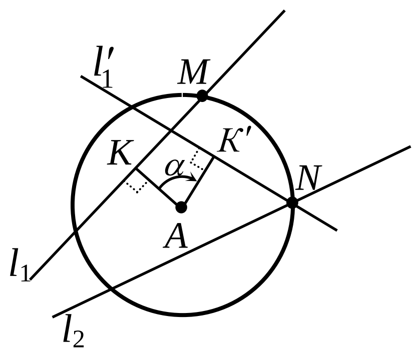
Анализ.



Пусть искомая окружность построена и пусть MN – дуга этой окружности, причем $M \in l_1$, $N \in l_2, \angle MAN = \alpha$. Так как $R_A^{\alpha}(M) = N$ и $M \in l_1$, то утверждаем, что точка N должна лежать на образе прямой l_1 при повороте R_A^{α}, то есть $N \in l_2 \cap l_1' = R_A^{\alpha}(l_1)$.

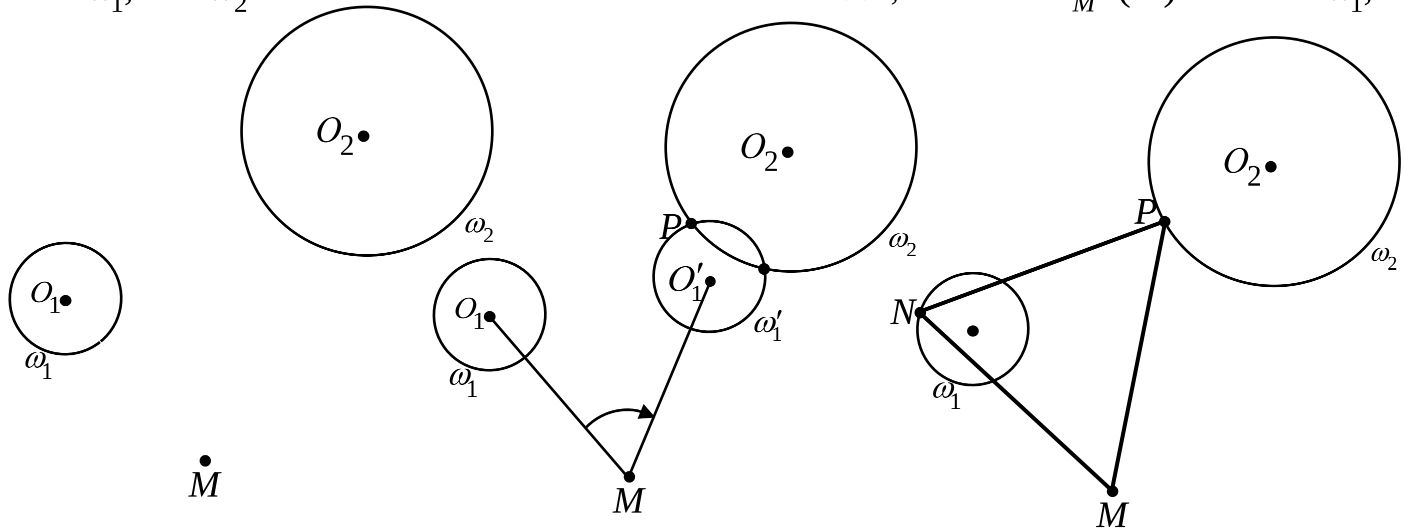
Построение.

1. $l_1' = R_A^{\alpha}(l_1)$.
2. $N \in l_2 \cap l_1'$.
3. Окружность $\omega(A, AN)$ – искомая.



Задача 28. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и точка *M*. Построить равносторонний треугольник *MNP*, вершины которого *N* и *P* лежат соответственно на окружностях ω_1 и ω_2 .

Анализ. Пусть ΔMNP- искомый равносторонний треугольник и пусть $N \in \omega_1$, $P \in \omega_2$. Так как $MN = MP$ и $\angle PMN = 60^0$, то $P = R_M^{60^0}(N)$. Но $N \in \omega_1$,



поэтому образ этой точки должен лежать на образе ω_1' окружности ω_1 при повороте $R_M^{60^0}$. Значит $P \in \omega_1' \cap \omega_2$.

Построение.

1. $\omega_1' = R_M^{60^0}(\omega_1)$.
2. $P \in \omega_1' \cap \omega_2$.
3. $N \in \omega_1 \cap \omega(M, MP)$.
4. ΔMNP- искомый.

Доказательство. Т.к. точка *P* лежит на окружности ω_1' , то прообраз этой точки обязан лежать на ω_1 , т.е. если $R_O^{-60^0}(P) = N$, то $N \in \omega_1$. При этом $MP=MN$ и ΔMNP - равнобедренный с углом при вершине 60^0. Такой треугольник всегда равносторонний и ΔMNP удовлетворяет всем требованиям задачи, т.е. искомый.

Исследование. Задача имеет столько решений, сколько пересечений имеют окружности ω_2 и ω_1' .

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД

Иногда при решении задач на построение в процессе анализа удаётся установить, что построение искомой фигуры сводится к построению некоторого отрезка, длина которого x может быть выражена по некоторой формуле через длины данных отрезков. В этом случае мы говорим об алгебраическом методе решения задачи.

Итак, алгебраический метод решения задачи на построение заключается в том, что построение искомой фигуры F сводится к построению некоторого отрезка. Исходя из условия задачи, выражают длину x этого отрезка через длины $a, b, c...$ данных отрезков. В результате получаем формулу:

$$x = f(a, b, c, ..l) \qquad (1)$$

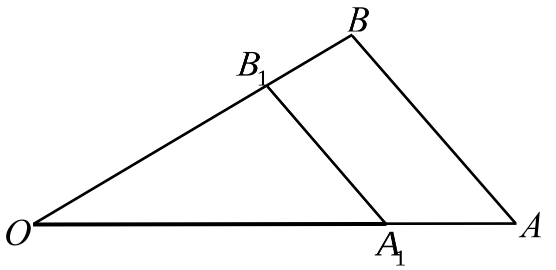
По найденной формуле (1) строится отрезок длины x, а затем и искомая фигура F.

В школьном курсе геометрии рассматривается построение отрезков, длина которых x выражается через длины данных отрезков a, b, c следующими формулами:

1) $x = a + b;$

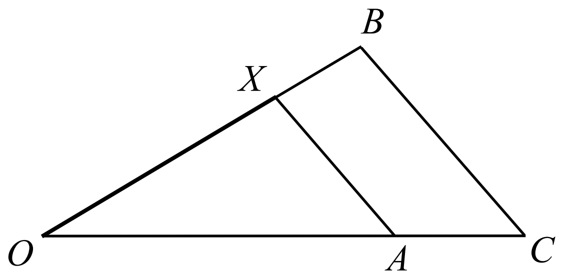
2) $x = a - b, (a > b);$

3) $x = \frac{p}{q} a \ (p \in N, q \in N)$.



Здесь $OA = a$, $OB_1 = p$, $OB = q$, B_1A_1 параллельно BA, тогда $OA_1 = \frac{p}{q} a$;

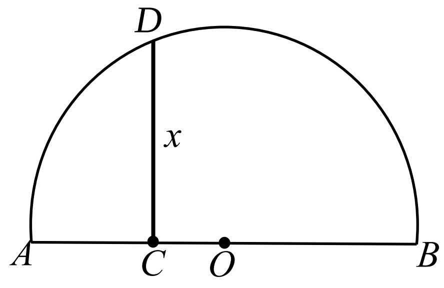
4) $x = \frac{ab}{c}$ (построение четвертого пропорционального).



$OA = a$, $OC = c$, $OB = b$, AX параллельно BC, тогда $OX = \frac{ab}{c}$.

5) $x=\sqrt{ab}$ (построение среднего пропорционального отрезка между двумя данными отрезками).

Построение.



1. $AB = a + b$, где $AC = a$, $CB = b$.
2. $AO = OB$.
3. Полуокружность $\omega(O,OA)$.
4. $CD \perp AB$.
5. $D = CD \cap \omega$.
6. $CD = \sqrt{ab}$ - искомый.

6) $x=\sqrt{a^2+b^2}$ (здесь x – гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b);

7) $x=\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b)$ (здесь x – катет прямоугольного треугольника с гипотенузой a и катетом b).

Студент *должен знать* построения отрезков, длины которых заданы формулами 1)-7).

При построении отрезка, длина которого x выражается по формуле (1) через длины данных отрезков, возникает вопрос: всегда ли мы можем построить такой отрезок с помощью циркуля и линейки? Ответ на этот вопрос даёт следующая ***теорема:***

Отрезок длины x можно построить по известным длинам a, b c,... данных отрезков с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда длина x выражается через длины данных отрезков и рациональные числа при помощи конечного множества основных операций и извлечения квадратного корня, т. е формула(1) содержит только операции (+, - , •, $\div$, $\sqrt{\ }$).

Если мы нашли x по формуле (1), то выражение *f (a, b, c ,... l),* должно иметь размерность длины, т. е. должно быть линейным однородным относительно *a, b, c, ... l.* Если среди данных отрезков имеется единичный отрезок *e,* то мы получим выражение *f (a, b, c, ... l),* которое формально не является однородным. Например, выражение $x=\sqrt{a}$ не является однородным первой степени. Но, вводя единичный отрезок *e,* мы можем восстановить нужную размерность: $x=\sqrt{a\cdot e}$, где e = 1. При построении отрезка по этой формуле кроме заданного отрезка длины a мы должны задать единичный отрезок e и произвести нужное построение.

Приведем ещё несколько примеров восстановления размерности длины в выражении (1) с помощью единичного отрезка:

1. $x = ab \to x = \dfrac{ab}{e}$;

2. $x = a^2 \to x = \dfrac{a \cdot a}{e} = \dfrac{a^2}{e}$;

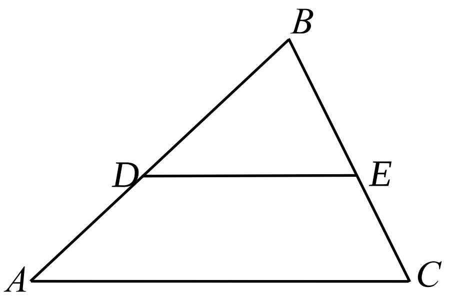
3. $x = (a+b) \cdot c \to x = \dfrac{(a+b) \cdot c}{e}$;

4. $x = \dfrac{a}{b} \to x = \dfrac{a \cdot e}{b}$.

Приведём примеры решения задачи на построение алгебраическим методом.

Задача 29. Дан треугольник *ABC*. Построить прямую, параллельную основанию треугольника и делящую его площадь пополам.

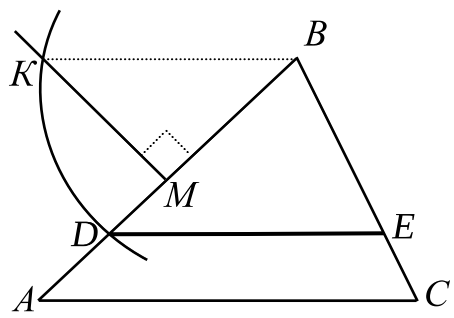
Анализ.



Пусть искомая прямая *DE* построена. Имеем $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta BDE} = 2:1$, но треугольник *ABC* подобен треугольнику *BDE* и поэтому $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta BDE} = AB^2 : DB^2 = 2:1$, значит $DB = AB : \sqrt{2}$ - гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами, равными 0,5*AB*.

Построение.

1. *AM* = *MB*.
2. $MK \perp AB$.
3. $K = MK \cap \omega(M, MB)$.
4. $D = AB \cap \omega(B, BK)$.
5. *DE* параллельно *AC*.
6. *DE* – искомая прямая.

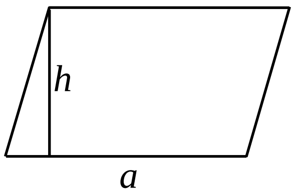


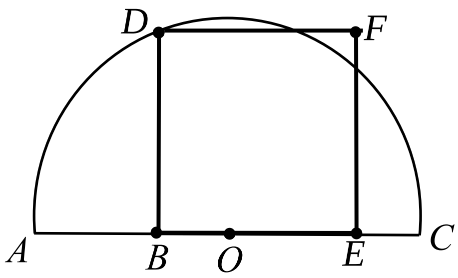
Доказательство. По построению $DB = AB : \sqrt{2}$, треугольник *ABC* подобен треугольнику *BDE*. Отсюда имеем: $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta BDE} = AB^2 : DB^2 = AB^2 : \dfrac{AB^2}{2} = 2:1$.

Исследование: Задача всегда разрешима, т.к. треугольник *ABC* можно разделить пополам. Решение – единственное, т.к. все шаги построения выполняются единственным образом.

Задача 30. Построить квадрат, равновеликий данному параллелограмму.

Анализ. Пусть данный параллелограмм имеет основание a и высоту h. Тогда его площадь $S = a\,h$, для квадрата имеем $S = x^2$, откуда $x^2 = ah$, а сторона квадрата $x = \sqrt{ah}$ находится, как среднее геометрическое отрезков a и h.





Построение.

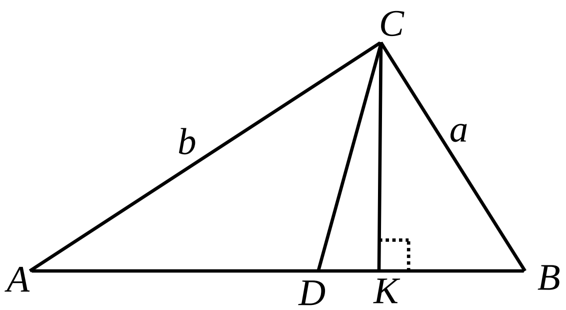
1. $AC = a + h$ $(AB = h, BC = a)$.
2. $BD = \sqrt{ah}$.
3. Квадрат $BDFE$ – искомый со стороной $\sqrt{ah}$.

Доказательство. По построению $x^2 = ah$, значит, задача решена.

Исследование. Задача всегда разрешима, т.к. $x = \sqrt{ah}$ можно построить при любых a, h и единственным образом, т.е. x находится однозначно.

Задача 31. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и биссектрисе прямого угла.

Анализ. Пусть треугольник ABC построен и пусть $\angle ACB = 90^0$, $AB = c$, $CD = l$ – биссектриса. Очевидно, что отрезок AB длины c всегда может быть построен. Тогда построение треугольника ABC сводится к построению вершины C. Точка C принадлежит геометрическому месту точек F_1, из которых отрезок AB виден под прямым углом и F_1 м.б.п.



Так как положение точки D неизвестно, то условие $CD = l$ сразу не может быть использовано. Но легко видеть, что, найдя длину высоты CK, мы легко построим вершину C. Итак, мы пришли к необходимости нахождения длины отрезка CK.

Пусть $CK = h$. Так как $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta BCD}$ и $S_{\Delta ABC} = 0,5ch = 0,5ab$, $S_{\Delta ACD} = 0,5b \cdot l \cdot \sin 45^0 = 0,25\sqrt{2}b \cdot l$, $S_{\Delta BCD} = 0,5a \cdot l \cdot \sin 45^0 = 0,25\sqrt{2}a \cdot l$, то находим $0,5ch = 0,25\sqrt{2}l(a+b)$ или $ch\sqrt{2} = l(a+b)$ (2).

Далее $\left.\begin{array}{l} ab = ch \\ a^2+b^2=c^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+2ab+b^2=2ch+c^2 \Rightarrow (a+b)^2=c^2+2ch$ (3).

$(2),(3) \Rightarrow l^2\left(a+b\right)^2=2c^2h^2 \Leftrightarrow l^2\left(c^2+2ch\right)=2c^2h^2 \;\Leftrightarrow 2c^2h^2-2cl^2h-l^2c^2=0$

$\Leftrightarrow 2ch^2-2l^2h-l^2c=0$.

Решая полученное уравнение, находим: $h=\dfrac{l\cdot\left(l+\sqrt{l^2+2c^2}\right)}{2c}(4)$.

Второй корень уравнения, который даёт отрицательное значение для h, нам не подходит по геометрическому смыслу - длина отрезка всегда выражается положительным числом.

Построение.

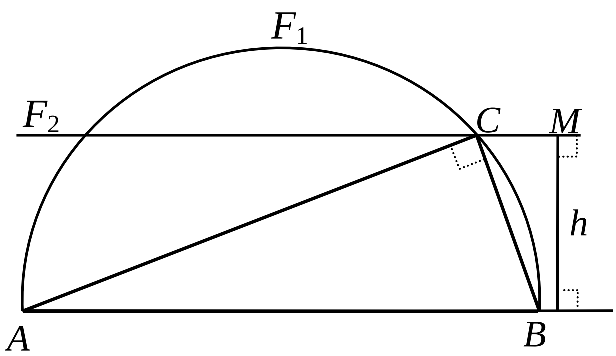
1. Строим отрезок $x = h$ (пользуясь формулой (4))

а) $x_1=\sqrt{c^2+c^2}$;

б) $x_2=\sqrt{l^2+x_1^2}$;

в) $x_3=l+x_2$;

г) $x_4=\dfrac{l\cdot x_3}{2c}=h$.



2. $AB = c$.

3. F_2 – гмт таких, что $\rho(M, AB)=h$.

4. F_1 - гмт таких, что $\angle AMB=90^0$.

5. $C\in F_1\cap F_2$;

6. ΔABC - искомый.

Легко *доказать*, что ΔABC удовлетворяет всем требованиям задачи и потому - он искомый

Исследование. Очевидно, что задача имеет два решения, если полуокружность F_1 и прямая F_2 пересекаются; ни одного решения, если F_1 и F_2 не пересекаются ($h > c/2$); одно решение, если F_1 и F_2 касаются друг друга.

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ, НЕРАЗРЕШИМЫЕ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

Следствие из теоремы разрешимости задач на построение циркулем и линейкой: Если дан только отрезок, принимаемый за единичный, и l –данное число, то отрезок длины l может быть построен циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда число l может быть получено из 1 посредством лишь конечного числа основных действий.

Задача о квадратуре круга

Построить циркулем и линейкой квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Решение.

Пусть r – радиус данного круга, x – сторона искомого квадрата. Тогда $S_{кр} = \pi r^2 = \left(\sqrt{2\pi r \cdot r/2}\right)^2 = x^2 = S_{кв}$. Откуда $x = \sqrt{2\pi r \cdot r/2}$ - есть средний пропорциональный отрезок между отрезками $2\pi r$ и $r/2$. Итак, задача о квадратуре круга свелась к задаче о спрямлении окружности, т.е. построении отрезка, равного длине окружности данного радиуса ($2\pi r$). При $r = 1$ длина окружности $C = 2\pi$, следовательно, задача о спрямлении окружности привела к изучению свойств числа π. Согласно следствию из критерия разрешимости спрямление окружности возможно только при условии, что π является числом, которое можно получить из *1* только с помощью основных операций. В 1882 году было доказано, что это невозможно, так как π является трансцендентным числом, а, следовательно, разрешена проблема квадратуры круга. С помощью циркуля и линейки квадратура круга невозможна.

Задача о трисекции угла

Дан угол α. Линейкой и циркулем построить угол φ так, чтобы $\varphi = \alpha/3$ (т.е. разделить данный угол на три равные части).

(Существует множество углов, для которых эта задача разрешима. Например, если $\alpha = 90^0$, то $\varphi = 30^0$, а такой угол строится циркулем и линейкой, используя прямоугольный треугольник. Аналогично, если $\alpha = \pi/2^n$, где n =2, 3, …. , то угол φ можно построить).

Докажем, что существует бесконечное множество углов, для которых эта задача неразрешима циркулем и линейкой.

Доказательство:

Ограничимся рассмотрением этой задачи для углов, меньших 90^0. Если данный угол α - тупой, то $\alpha = 180^0 - \beta$, где $\beta < 90^0$, так, что $\alpha/3 = 60^0 - \beta/3$ и поэтому задача о трисекции тупого угла сводится к задаче о трисекции острого угла.

Пусть $\angle O = \alpha$ - данный угол, а $\angle O_1 = \varphi$ - искомый, а l – единичный отрезок. Построим прямоугольные треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ с гипотенузами $OA = O_1A_1 = 2$. Пусть $OB = a$, $O_1B_1 = x$.

Выясним можно ли по данным сторонам треугольника OAB построить отрезок x. Ясно, что если эта задача разрешима с помощью циркуля и линейки, то разрешима задача о трисекции угла α и наоборот.

Имеем $\cos\alpha = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ (*). Так как $\cos\alpha = OB/OA = a/2$, то $\cos\varphi = O_1B_1/O_1A_1 = x/2$, то подставим эти значения в равенство (*):

$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi - \cos\alpha = 0$. Далее $4\cdot\frac{x^3}{8} - 3\cdot\frac{x}{2} - \frac{a}{2} = 0$ или $x^3 - 3x - a = 0$ (**).

Отрезок x, а, следовательно и угол φ могут быть построены лишь, если уравнение (**) имеет хотя бы один рациональный корень. Пусть, например, $\alpha = 60^0$, тогда $a = 1$ и уравнение примет вид: $x^3 - 3x - 1 = 0$. Легко проверить, что это уравнение не имеет рациональных корней, откуда следует невозможность деления угла в 60^0 на три равные части с помощью циркуля и линейки. Следовательно, задача о трисекции угла неразрешима циркулем и линейкой и в общем виде.

Задача об удвоении куба

Построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема данного куба.

Решение. Пусть a – ребро данного куба, x – ребро искомого куба. Тогда по условию задачи $x^3 = 2a^3$. Принимая длину данного куба за единицу измерения, получим $a = 1$, и тогда $x^3 - 2 = 0$.

Из алгебры известно, что рациональные корни приведённого уравнения с целыми коэффициентами могут быть только целыми и содержатся среди делителей свободного члена уравнения. Но делителями числа 2 служат только числа +1, -1, +2 и -2, и ни одно из них, как легко проверить, не удовлетворяет данному уравнению. Следовательно, уравнение $x^3 - 2 = 0$ рациональных корней не имеет, а это означает, что задача удвоения куба не может быть решена с помощью циркуля и линейки

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Метод геометрических мест точек

1. Найти точку, находящуюся на расстоянии a от прямой AB и на расстоянии b от прямой CD.
2. Найти точку, отстоящую от данной точки A на расстояние, равное a, и от данной точки B на расстояние, равное b.
3. Найти точку, находящуюся на равных расстояниях от двух данных точек M и N, и на равном расстоянии от сторон данного угла BAC.
4. Найти точку, находящуюся на расстоянии a от точки C и на равном расстоянии от точек A и B.
5. На данной прямой AB найти точку, равноудаленную от двух данных пересекающихся прямых.
6. На стороне треугольника найти точку, равноудаленную от двух других сторон треугольника.
7. Построить окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.
8. На данной окружности построить точку, которая находилась бы на данном расстоянии от данной прямой.
9. Разделить пополам угол между двумя прямыми, не пересекающимися в пределах чертежа.
10. Построить окружность, которая проходила бы через две данные точки и центр которой находился бы на данной прямой.
11. Построить окружность с центром в данной точке на стороне данного угла, которая на другой стороне угла отсекала бы хорду данной длины.
12. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной прямой.
13. Построить окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.
14. Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой в данной точке B.
15. Построить треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.
16. Построить окружность, касающуюся двух данных прямых, причем одну из них - в данной точке.
17. Построить окружность данного радиуса, касающуюся двух данных пересекающихся прямых.

18. Построить окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

19. Построить окружность данного радиуса, проходящую через данную точку и касающуюся данной окружности.

20. Построить окружность данного радиуса, которая касалась бы данной прямой и данной окружности.

21. Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных параллельных прямых.

22. Построить окружность, которая касалась бы двух данных параллельных прямых и круга, находящегося между ними.

23. Построить окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

24. Построить окружность, касающуюся двух данных концентрических окружностей.

25. Построить окружность, которая проходила бы через данную точку и касалась бы данной окружности в данной точке.

26. Вписать в данный треугольник ABC равнобедренный треугольник MNK данной высоты так, чтобы его основание MN было параллельно AB, а вершина K лежала на стороне AB.

27. Дана окружность с центром O и точка A внутри нее. Построить окружность, проходящую через точки A и O и касающуюся исходной окружности.

28. Построить треугольник по радиусу описанной окружности, стороне и высоте, проведенной к другой стороне.

29. Построить треугольник по стороне и проведенной к ней высоте, если известно, что эта сторона видна из центра вписанной в треугольник окружности под углом 135^0.

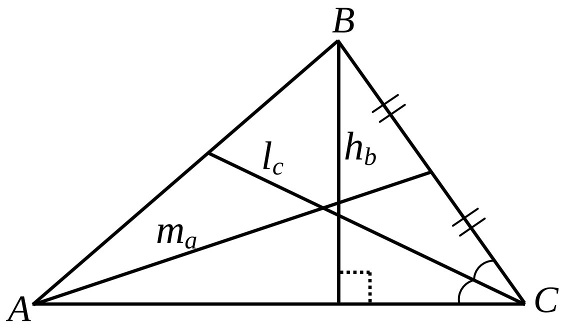
30. Через данную точку провести прямую, на которой данная окружность высекала бы хорду, равную данному отрезку.

31. Построить прямую, на которой две данные окружности высекали бы хорды, равные двум данным отрезкам.

32. Построить окружность, касающуюся двух данных окружностей, причем одну из них - в данной точке.

33. На стороне треугольника построить точку, сумма расстояний от которой до двух других сторон равна данному отрезку.

34. Построить ГМТ середин хорд, отсекаемых окружностью на прямых, проходящих через данную точку.



Обозначения, принятые в треугольнике ABC: стороны $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; медианы m_a, m_b, m_c; биссектрисы l_a, l_b, l_c; высоты h_a, h_b, h_c ; радиус вписанной окружности r, радиус описанной окружности R.

35. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и точке D пересечения основания с биссектрисой l_a внутреннего угла при вершине A.

36. Построить параллелограмм, зная основание, высоту и угол между диагоналями.

37. Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и высоте на какую-либо боковую сторону.

38. Построить треугольник, зная A, h_b и m_a.

39. Построить треугольник по основанию a, углу при вершине A и радиусу r вписанной окружности.

40. Построить треугольник по данным радиусам вписанной и описанной окружностей и одному из углов треугольника.

41. В данную окружность вписать прямоугольный треугольник, зная острый угол и точку, через которую проходит один из катетов.

42. В данную окружность вписать треугольник с данным углом так, чтобы две его стороны проходили через две данные точки.

43. Построить треугольник по основанию a, медиане m_a и радиусу R описанной окружности.

Метод спрямления

44. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

45. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

46. Построить прямоугольный треугольник по сумме катетов и острому углу.

47. Построить прямоугольный треугольник по разности катетов и острому углу.

48. Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы и другого катета.

49. Построить прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и другого катета. Построить прямоугольный треугольник по сумме гипотенузы и катета $b+c$ и острому углу A.

50. Построить прямоугольный треугольник по периметру и острому углу.

51. Построить треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

52. Построить треугольник по сумме сторон a и b, стороне c и углу A.

53. Построить треугольник по разности сторон a и b, стороне c и углу B.

54. Построить треугольник, если даны два его угла A и B и сумма двух его сторон a и b.

55. Построить треугольник, если даны два его угла A и B и разность двух его сторон a и b.

56. Построить треугольник, если даны его периметр и два угла A и B.

57. Построить треугольник по периметру $2p$, высоте h_a и углу B при основании.

58. Построить квадрат по сумме стороны и диагонали.

59. Построить прямоугольник по углу между диагоналями и периметру.

60. Построить прямоугольник по сумме S основания и диагонали и углу α между его диагоналями.

61. Построить параллелограмм по меньшей диагонали d, сумме S его смежных сторон и острому углу α.

62. Построить равнобочную трапецию по сумме S ее большего основания и боковой стороны, высоте h и углу α при большем основании.

63. Построить треугольник по стороне a,разности двух других сторон и высоте h, опущенную на большую из них.

64. Построить ромб по стороне a и разности диагоналей d.

II. Метод параллельного переноса

65. Дан угол ABC и прямая l. Параллельно прямой l провести прямую, на которой стороны угла ABC высекают отрезок данной длины.

66. Построить хорду данной окружности, равную и параллельную данному отрезку.

67. Построить отрезок, равный и параллельный данному отрезку так, чтобы его концы лежали на двух данных окружностях.

68. Построить треугольник по основанию c и медианам p и q его боковых сторон.

69. Построить параллелограмм по двум смежным сторонам и одной диагонали.

70. Построить параллелограмм по двум диагоналям и стороне.

71. Построить параллелограмм по двум смежным сторонам и одному из углов.

72. Построить параллелограмм по двум диагоналям и высоте.

73. Построить параллелограмм по диагонали, стороне и высоте, опущенной на другую сторону.

74. Построить прямоугольник по смежным сторонам.

75. Построить прямоугольник по стороне и диагонали.

76. Построить прямоугольник по диагонали и углу между диагоналями.

77. Построить ромб по стороне и одному из углов.

78. Построить ромб по диагонали и одному из углов.

79. Построить ромб по двум диагоналям.

80. Построить ромб по диагонали и высоте.

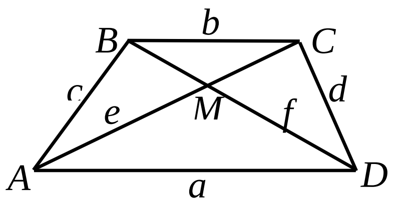
81. Построить ромб по высоте и одному из углов.

82. Построить квадрат по его диагонали.

83. Построить трапецию, если даны ее диагонали, угол между ними и боковая сторона.

84. Построить трапецию по двум параллельным сторонам и двум диагоналям.

85. Построить трапецию по одному ее углу, двум диагоналям и средней линии.



Обозначения, принятые в трапеции $ABCD$: основания $AD = a$, $BC = b$; боковые стороны $AB = c$, $CD = d$; диагонали $AC = e$, $BD = f$; углы $\angle A, \angle B$, $\angle C, \angle D$; угол между диагоналями $\angle M$; высота трапеции - h, средняя линия – m.

Построить трапецию, если даны:

86. a, b, c, e.

87. a, c, d, e.

88. a, c, d, h.

89. a, e, f, h.

90. a, b, c, h.

91. a, b, e, h.

92. $a, c, d, \angle A$.

93. $a, b, c, \angle B$.

94. $a, c, e, \angle M$.

95. $a, h, \angle A, \angle D$.

96. $a, b, \angle A, \angle D$.

97. $a, c, m, \angle A$.

98. Построить четырехугольник $ABCD$ по четырем углам и сторонам $AB = a$, $CD = b$.

99. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую так, чтобы часть ее, заключенная внутри окружностей, имела данную длину.

100. Параллельно данной прямой провести прямую, на которой две данные окружности высекали бы равные хорды.

101. Построить четырехугольник по трем сторонам и углам, прилежащим к четвертой.

102. Построить четырехугольник по диагоналям, углу между ними и двум каким-нибудь сторонам.

103. Построить выпуклый четырехугольник по четырем сторонам и отрезку, соединяющему середины двух противоположных сторон.

104. Построить четырехугольник по сторонам и углу между двумя противоположными сторонами.

105. Построить четырехугольник, зная его диагонали, две противоположные стороны и угол между этими сторонами.

III. Метод осевой симметрии

106. Даны две точки A и B, расположенные по одну сторону от данной прямой xy. Расположить на этой прямой отрезок MN данной длины так, чтобы ломаная $AMNB$ была наименьшей длины.

107. Даны две окружности и прямая l. Построить равносторонний треугольник так, чтобы две его вершины находились соответственно на окружностях, а высота, проведенная через третью вершину, лежала на прямой l.

108. На данной прямой построить точку:

а) сумма расстояний которой от двух данных точек наименьшая;

б) разность расстояний которой от двух данных точек наибольшая.

109. Прямая l пересекает отрезок AB. Найти на этой прямой такую точку X, чтобы прямая l служила биссектрисой угла AXB.

110. Построить треугольник наименьшего периметра, если даны основание и высота.

111. Даны две пересекающиеся прямые a и b и две точки A и B, не лежащие на этих прямых. На прямых a и b построить соответственно точки M и N так, чтобы ломаная $AMNB$ имела наименьшую длину.

112. Даны прямая MN и точки A и B по одну сторону от нее. На MN найти точку X так, чтобы $\angle MXA = \angle AXB$.

113. Даны прямая A и B точки M и N, не лежащие на ней. На прямой AB построить точку X так, чтобы $\angle AXN = \angle MXB$.

114. На прямой l построить точку X так, чтобы касательные, проведенные из нее к двум данным окружностям $O(r)$ и $O_1(r_1)$, составляли с прямой l равные углы.

115. Построить ромб с данной диагональю, лежащей на данной прямой так, чтобы две другие вершины ромба находились на двух окружностях.

116. Построить треугольник, зная b, c и $\angle B - \angle C$.

117. Даны точки A и B и угол α. На прямой CD найти точку X так, чтобы $\angle AXC - \angle BXD = \alpha$.

118. Построить равнобедренный треугольник, основание которого лежало бы на одной стороне данного угла, вершина – на другой стороне угла, а боковые стороны проходили бы через две данные внутри угла точки.

119. Построить треугольник, зная a,b и разность $c - b = d$.

120. Построить четырехугольник $ABCD$, если даны его стороны и известно, что его диагональ AC делит угол A пополам.

121. Дан острый угол AOB и внутри него точка M. На стороне угла найти такие точки K и L, что периметр треугольника KLM был наименьшим.

122. Дан угол и внутри него две точки. Построить четырехугольник минимального периметра, у которого две смежные вершины лежат в данных точках, а две другие – на сторонах данного угла.

123. Построить треугольник по данным серединам двух его сторон и прямой, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из сторон.

124. Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l. Построить на прямой l такую точку K, чтобы разность отрезков MK и NK была наибольшей.

125. Построить четырехугольник $ABCD$ по двум сторонам AB и AD и двум углам B и D, если известно, что в него можно вписать окружность.

126. Построить треугольник, если дана одна его вершина и три прямых, на которых лежат его биссектрисы.

127. Построить треугольник по двум углам и разности противолежащих им сторон.

128. Построить треугольник по разности двух сторон, углу между ними и стороне, противолежащей этому углу.

129. Построить треугольник по центру его описанной окружности и двум прямым, на которых лежат высоты.

IV. Метод центральной симметрии

130. Построить образы данной прямой и данной окружности при симметрии относительно данной точки.

131. Через точку пересечения двух окружностей провести секущую, определяющую в этих окружностях равные хорды.

132. Через данную точку A провести прямую, часть которой между двумя данными окружностями делилась бы в точке A пополам.

133. Построить параллелограмм, две противоположные вершины которого находятся в данных точках, третья – на данной окружности, четвертая – на данной прямой.

134. Даны две концентрические окружности и точка A на меньшей из них. Провести в большей окружности хорду, проходящую через точку A так, чтобы эта хорда делилась окружностями на три равные части.

135. Построить параллелограмм $ABCD$, центром которого является данная точка O, а вершины A, B, C, D лежат на данных прямых a, b, c, d.

136. В данную окружность вписать прямоугольник так, чтобы прямые, содержащие две его стороны, проходили через две данные точки.

137. Даны две точки A, B и окружность. Провести через A и B две параллельные прямые, которые при пересечении с окружностью образуют равные хорды.

138. Построить треугольник ABC, зная длину медианы BM и радиусы окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM.

139. Построить треугольник ABC, зная длины стороны AB, медианы AM и высоты BH.

140. Построить треугольник ABC, зная длины стороны AB, медианы AM и высоты CH.

141. Построить квадрат, если даны его центр и две точки, лежащие на его параллельных сторонах.

142. Даны окружность, прямая и точка A. Построить на прямой и окружности по точке M и N так, чтобы точка A была серединой отрезка MN.

143. На стороне угла AOB вершина которого недоступна, дана точка M. Построить отрезок, равный отрезку OM.

144. Даны две пересекающиеся прямые и точка O, не лежащая на них. Построить прямую, проходящую через точку O так, чтобы отрезок этой прямой, отсекаемый данными прямыми, делился точкой O пополам.

145. Построить треугольник по двум сторонам a, b и медиане m_c, проведенной к третьей стороне.

146. Даны две концентрические окружности. Построить прямую, на которой эти окружности высекают три равных отрезка.

V. Метод гомотетии

147. Построить треугольник по двум сторонам и биссектрисе, проведенной из вершины меньшего из данных углов.

148. Построить треугольник по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

149. Построить треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB : AC = 2 : 3$.

150. Построить треугольник ABC по углу A и стороне BC, если известно, что $AB : AC = 2 : 1$.

151. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

152. Построить треугольник по двум углам A и B и медиане m_c.

153. Построить треугольник, если даны $a : b$, $\angle C$ и h_c.

154. Построить треугольник, если даны $\angle A, \angle B$ и r.

155. Построить треугольник, если даны $a : b$,, $\angle C$ и m_a.

156. Построить треугольник, если даны $a : b$,, $\angle C$ и l_a.

157. Построить треугольник, если даны $h_c : l_c$, $\angle A$ и m_c.

158. Построить параллелограмм, если даны: отношение двух его сторон, угол и одна из диагоналей.

159. Построить параллелограмм, если даны: высота, отношение диагоналей и угол между ними.

160. Построить параллелограмм, если даны: сторона, отношение диагоналей и угол между ними.

161. Построить трапецию по двум смежным сторонам, углу между ними и отношению двух других сторон.

162. Построить треугольник по двум углам и сумме высоты с основанием.

163. Построить треугольник по углу при основании, отношению боковых сторон и разности основания и высоты.

164. Построить треугольник по двум углам и сумме высоты, медианы и биссектрисы, исходящих из третьей вершины.

165. Построить ромб по стороне и отношению диагоналей.

166. В данный треугольник вписать прямоугольник, подобный данному.

167. В данную окружность вписать треугольник, подобный данному.

168. В данный треугольник вписать ромб с острым углом так, чтобы две его вершины лежали на основании, а две другие – соответственно на боковых сторонах.

169. В данный ромб вписать квадрат, вершины которого лежат на сторонах ромба.

170. В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на основании, а две другие – соответственно на боковых сторонах.

171. Построить ромб по отношению диагоналей и высоте.

172. В данный выпуклый четырехугольник вписать ромб так, чтобы его стороны были параллельны диагоналям данного четырехугольника.

VI. Метод поворота

173. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина находилась в данной точке, а две другие были расположены на двух данных прямых.

174. Построить равносторонний треугольник так, чтобы одна его вершина лежала на данной окружности, другая – на данной прямой, а третья – в данной точке.

175. Построить равносторонний треугольник так, чтобы три его вершины лежали на трех данных параллельных прямых.

176. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник так, чтобы вершины острых углов лежали на двух данных окружностях, а вершина прямого угла совпадала с данной точкой.

177. Внутри прямого угла дана точка A. Построить равносторонний треугольник ABC, вершины B и C которого лежат на сторонах этого угла.

178. Построить квадрат, три вершины которого лежали бы на трех данных параллельных прямых.

179. Даны две прямые a и b и точка O. С центром в точке O построить окружность так, чтобы одна из дуг ее, заключенная между прямыми a и b, была видна из точки O под данным углом α.

180. Даны две окружности и точка S. Построить окружность с центром в точке S так, чтобы одна из ее дуг, заключенная между точками пересечения с данными окружностями, имела бы данную градусную меру φ.

181. Дан квадрат $ABCD$ и на стороне AB точка E. На сторонах BC и CD построить соответственно точки F и Y так, чтобы треугольник EFY был равносторонним.

182. Даны две окружности пересекающиеся в точке A. Проведите в них равные хорды AB_1 и AB_2, составляющие данный угол α.

183. Через точку A, данную внутри данной окружности, провести хорду, вдвое меньшую своего расстояния от центра.

184. Через точку A, данную внутри данного круга, провести хорду, отсекающую от окружности дугу заданной угловой величины.

185. Даны три концентрические окружности. Постройте равносторонний треугольник с вершинами на этих окружностях.

186. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в заданной точке A, у которого вершины острых углов лежат: одна на данной прямой, а другая – на данной окружности.

187. В данную окружность вписать прямоугольный треугольник, зная его острый угол и точку A, через которую проходит один из катетов.

188. Около данной окружности описать равносторонний треугольник, одна из сторон которого проходит через данную точку A.

189. Через данную точку провести прямую, отрезок которой между двумя данными концентрическими окружностями виден из центра под данным углом.

190. Даны две окружности и прямая. Постройте правильный треугольник так, чтобы две его вершины лежали соответственно на данных окружностях, а высота, проведенная из третьей вершины, лежала на данной прямой.

191. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ постройте точки M и N так, чтобы угол при вершине A равнобедренного треугольника MAN имел данную величину α.

192. Впишите квадрат в данный параллелограмм.

193. Даны две точки и окружность. Через данные точки провести две секущие, отрезки которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались под данным углом α.

VII. Алгебраический метод

194. Построить треугольник, зная $a, b + c, b - c$.

195. Построить треугольник, зная $a + b, a + c, a + b + c$.

196. Построить треугольник, зная $a - b, a - c, a + b + c$.

197. Построить треугольник, зная $a + b, a + c, a + b + c, b - c$.

198. Построить треугольник, зная $b, c, \angle A + \angle B$.

199. Построить треугольник, зная $a, \angle A + \angle B, \angle B - \angle C$.

200. Построить треугольник, зная $a, \angle A, \angle B - \angle C$.

201. Построить отрезок, длина которого x выражается через длины $a, b, c, \ldots$ данных отрезков по формуле:

а) $x=\sqrt{\dfrac{abc}{d}}$; б) $x=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; в) $x=\sqrt{a^2+b^2+ab}$;

г) $x=\sqrt{\dfrac{ab\cdot\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2+c^2}}}$; д) $x=\dfrac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\cdot c}}{b}$; е) $x=\dfrac{\left(a+b\right)^2\cdot c^3}{\left(a-b\right)^4}$;

ж) $x=\sqrt[4]{abcd}$; з) $x=\sqrt{a^4-b^4}$; и) $x=\dfrac{a^3-3a^2b+b^3}{5a^2+2b^2}$;

к) Дан единичный отрезок e. Построить отрезки, длины которых равны $\sqrt{3},\ \sqrt{1},\ 2+\sqrt{2}$;

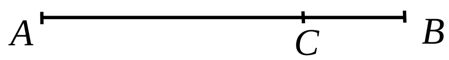
л) $x=\sqrt{a^2+b}$; м) $x=\dfrac{1}{ab}$; н) $x=\dfrac{abcd}{fgh}$; о) $x=\sqrt[4]{a^4+b^4}$.

202. Построить равнобедренный треугольник по двум его неравным сторонам.

203. Построить прямоугольник, имеющий периметр $2p$ и равновеликий квадрату со стороной a.

204. Данный отрезок AB разделить в среднем и крайнем отношении («золотое сечение»).

Здесь $AB = a$, $AC = x$, $x/a=(a-x)/x$, $x^2 + ax - a^2 = 0$ (#)



Задача сводится к построению корней квадратного уравнения (#).

205. В данную окружность вписать правильный десятиугольник.

206. Построить квадрат, равновеликий данному треугольнику.

207. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник, равновеликий данному прямоугольнику.

208. Построить квадрат, площадь которого была бы равна сумме площадей двух данных прямоугольников.

209. В данную окружность вписать прямоугольник, равновеликий данному квадрату.

210. В данную окружность вписать прямоугольник данного периметра.

211. Доказать, что квадрат, равновеликий данному кругу, нельзя построить циркулем и линейкой (задача о квадратуре круга).

212. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя построить куб, в два раза больший по объему данного куба (задача об удвоении куба).

213. Доказать, что циркулем и линейкой нельзя произвольный данный угол разделить на три равные части (задача о трисекции угла).

VIII. Разные задачи на построение

214. Построить треугольник, если даны середины его сторон.

215. Построить треугольник по двум медианам и углу между ними.

216. Построить треугольник по высоте, опушенной на основание, и медианам боковых сторон.

217. Построить треугольник по основанию и медианам боковых сторон.

218. Построить параллелограмм, если даны периметр, одна диагональ и угол между диагональю и стороной.

219. Построить параллелограмм, если даны две высоты, проведенные из одной вершины, и угол.

220. Построить прямоугольник по стороне и сумме диагоналей.

221. Построить прямоугольник по диагонали и сумме двух неравных сторон.

222. Построить прямоугольник по диагонали и разности двух неравных сторон.

223. Построить прямоугольник по стороне и сумме диагонали с другой стороной.

224. Построить равносторонний треугольник по радиусу r.

225. Построить равнобедренный треугольник по боковой стороне и радиусу описанной окружности.

226. Построить равнобедренный треугольник по основанию и R.

227. Построить равнобедренный треугольник по высоте, проведенной на основание, и радиусу описанной окружности.

228. Построить равнобедренный треугольник по высоте, проведенной на основание, и радиусу вписанной окружности.

229. Построить равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

230. Построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

231. Построить прямоугольный треугольник по катету и радиусу вписанной окружности.

232. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и радиусу вписанной окружности.

233. Построить прямоугольный треугольник, если даны радиусы вписанной и описанной окружностей.

234. Построить прямоугольник по стороне и разности диагонали с другой стороной.

235. Построить ромб по стороне и диагонали.

236. Построить ромб по углу и диагонали, проходящей через вершину этого угла.

237. Построить ромб по сумме диагоналей и углу, образованному диагональю со стороной.

238. Построить ромб, если даны сумма стороны и диагонали и один из углов.

239. Построить ромб, если даны разность стороны и диагонали и один из углов.

240. Построить ромб, если даны сторона и сумма диагоналей.

241. Построить ромб, если даны сторона и разность диагоналей.

242. Построить ромб, если даны сумма диагоналей и угол между стороной и диагональю.

243. Построить равносторонний треугольник по радиусу описанной окружности.

244. Построить прямоугольный треугольник по острому углу и радиусу описанной окружности.

245. Построить треугольник по основанию, высоте, проведенной к основанию, и радиусу описанной окружности.

246. Построить треугольник по стороне, углу, прилежащему к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

247. Построить треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

248. Построить треугольник, если даны высота, проведенная к основанию, угол при основании и радиус описанной окружности.

249. Построить треугольник, если даны боковая сторона, высота, проведенная к основанию, и радиус описанной окружности.

250. Построить треугольник по высоте и биссектрисе, проведенных из вершины одного из углов, и радиусу описанной окружности.

251. Построить треугольник по стороне, углу, прилежащему к этой стороне, и радиусу вписанной окружности.

252. Построить треугольник по боковой стороне, высоте, проведенной к основанию, и радиусу вписанной окружности.

Литература

1. Аргунов Б.И., Балк М.Б. Геометрические построения на плоскости. – М.: Просвещение, 1955.
2. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 7 - 9 классы. - М.: Просвещение, 2011.
3. Атанасян Л.С., Васильева М.В. и др. Сборник задач по элементарной математике. - М.: Просвещение, 1964.
4. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия, II часть. – М.: Просвещение, 1975.
5. Гайшут А., Литвиненко Г. Задачник по школьному курсу (планиметрия). М.: АСТ – ПРЕСС, 1998.
6. Гордин Р.К. Планиметрия. 7-9 классы: Пособие для учащихся. – М.: Дрофа, 2011.
7. Назаретский В.Е., Федин Н.Г. Задачник – практикум по элементарной математике. – Учпедгиз, 1961.
8. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7-9 классы: Учебник. – М.: Дрофа, 2002.

Содержание

Введение	3
Аксиомы конструктивной геометрии	3
Основные построения	5
Методика решения задач на построение	10
Метод геометрических мест точек	14
Метод спрямления и гмт	22
Метод геометрических преобразований	24
Метод параллельного переноса	24
Метод осевой симметрии	30
Метод центральной симметрии	34
Метод гомотетии	38
Метод поворота	45
Алгебраический метод	48
Задачи на построение, неразрешимые циркулем и линейкой	53
Задачи для самостоятельного решения	55
I. Метод геометрических мест точек	55
Метод спрямления	57
II. Метод параллельного переноса	58
III. Метод осевой симметрии	60
IV. Метод центральной симметрии	62
V. Метод гомотетии	63
VI. Метод поворота	64
VII. Алгебраический метод	65
VIII. Разные задачи на построение	67
Литература	69