

АННОТАЦИЯ

Китобнинг биринчи қисмида (I—IX боблар) қисқача, лекция системали равишда Лобачевскийнинг геометрияси баён қилинади ҳамда бу геометриянинг асосий ғоялари ва уларнинг фан тараққиётига қилган ғоят катта таъсири ёритилади. Иккинчи қисмида (V—VIII боблар) Евклиднинг "Негизлар" номли асарининг асосий мазмунини блан ва геометрия асослари элементлари блан таништирамиз.

Бу китоб ўрта мактабнинг математика ўқитучилари ва юқори синф ўқучилари учун фойдали қўлланма тарихида хизмат қилиши керак.

СЎЗБОШИ

Улуғ рус олими Николай Иванович Лобачевский ўз тадқиқотларининг натижалари ҳақида Қозон университетининг физика-математика бўлимида доклади қилиб берган шонли кунга 1951 йилнинг 23 февралда 125 йил тўлади; бу тадқиқотлар айрим фанни ташкил қилиб, кейинроқ Лобачевскийнинг гайриевклид геометрияси (яъни Евклидники бўлмаган геометрия) номини олади.

Ўрта мактабнинг математика ўқитувчиси Лобачевский геометриясининг асосий тушунчалари ва фактлари блан ҳартарафлама таниш бўлиши ва уларни ўзлаштириши керак, чунки ўрта мактабда ўқилидиган Евклид геометриясини гайриевклид геометрия блан таққослагандагина, унинг маънавий тузилиши ойдинлашади. Ўрта мактаб юқори синфларининг ўқучилари ҳам Лобачевский геометриясининг асосий мазмунини қизиқиш ва фойда блан эгаллайолади.

П. С. Александров [3]: „Алгебранк тафаккур группалар назариясидан бошланади, ва бу назария элементлари блан танишиб чиқмай туриб, илмий математик бўлиш нарёқда турсин, саводли математик ҳам бўлиш мумкин эмас“ деб жуда тўғри айтган.

Геометрик тафаккур гайриевклид геометрияларини эгаллашдан бошланади. 1942—43 йилларда Абакан ўқитувчилар институтда ўқилган менинг лекцияларимни ёзиб, менинг ихтиёримга топширгани учун, толибам Н. Е. Горбатенкога ташаккур билдириш учун пайтдан фойдаланаман. Бу ёзмалар ушбу китобни ёзишда анча енгиллик бердилар.

Қўлэзamani ўқиб чиққан ва бирқанча қимматли маслаҳатлар берган А. П. Норден ва Г. Б. Гуревичга самимий ташаккур изҳор этишни бурчим деб ҳисоблайман. Айрим редакторион камчиликларни курсатган С. И. Новосёловдан миннатдорман.

Москва, июль 1949 йил.

Б. Кулузов.

МУҚАДДИМА

Елғиз ўзининг она тилини ўрганиб олган киши, бошқа тиллар блан солиштирмасдан туриб, унинг хусусиятларини ва тузилишини (структурасини) яхши билаолмагани каби, ёлғиз Евклид геометриясини билиш ҳам геометрия фанининг тузилишидаги хусусиятларни тамомла ойдинлаштиришга имконият бермайди. Геометрия фанига ҳозирги замонда ҳукм суриб келаётган қарашлар чўққисига фақат Н. И. Лобачевский томонидан яратилган гайриевклид геометрияни ўрганиш натижасидагина кўтарилиш мумкин. Бу геометрия блан танишиб чиқиш, геометрия асосларини ўрганишда биринчи босқич бўлиб ҳисобланади.

„Геометрия асослари“ — математиканинг шундай қисмидирки, унда геометриянинг асосий тушунчалари ва аксиомалари белгиланади ва текширилади, геометрия фанининг тузилишида ҳарбир аксиоманинг роли ва ўрни, аксиомаларни бир-бири блан олмоштириш имконияти, шунингдек бундай олмоштиришнинг натижалари тадқиқ қилинади.

1826 йилда улуғ рус олими Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) томонидан *Лобачевскийнинг гайриевклид геометрияси* номини олган янги геометриянинг яратилиши, геометрия асосларини ва умуман математика асосларини ташкил этувчи масалаларнинг қўйилишида асосий аҳамиятга эгадир.

Бу муҳокамалар, ўқитувчи учун Лобачевский геометриясини ва геометрия асосларини эгаллашнинг ғоят даражада муҳимлигига далил бўлади.

Лобачевский геометриясини ва геометрия асосларини билиш, геометрия фанининг тузилишини яхшироқ тушунишга, турли-туман манзарали геометрик материал блан иш кўрганда йўл-йўриқ топабилишга ёрдам беради ва мактабда ўқилидиган геометрияни доимий, яъни ўзгармайдиган равишда тизиб қўйилган теоремалар мажмуаси тарихида баён этиш хавфидан сақланишга имконият беради.

Геометрия фанини систематик равишда баён этган ва бизнинг давримизгача сақланиб келган биринчи асар Искандария

математики Евклидининг (бизнинг эрамыздан 300 йил бурун) „Негизлар“ [10] номли асаридир. Қўлланманинг V бобида Евклиднинг бу асари муфассал равишда кўриб чиқилади; бу маъхур асарнинг яхши жиҳатлари, камчиликлари ва тарихий аҳамияти ҳам шу бобнинг ўзида кўрилган*. Ҳарбир геометрия ўқитучиси Евклиднинг 2000 йил мобайнида синовдан ўтган бу асари билан танишиб чиқиши керак. Евклид, геометрияга оид бошқа асарлар ҳам ёзган, лекин уларнинг кўпчилиги йўқолган.

Шуни ҳам айтиш зарурки, Лобачевский давригача геометрия фани анча тараққий этган эди. Брок, қанча мураккаб бўлса-да, геометрияда ишлатиб келинган материал, геометрияда асос бўлган асосий қонун ва аксиомалар *Евклидни*ки эди. Лобачевский давригача, ғоят юксак, лекин Евклид геометрияси билан иш кўриб келинди. Масалан, „Чизма геометрия“ фақатгина янги методдан иборат бўлиб, янги геометрия эмас эди. „Аналитик геометрия“ фақат координаталар методидир.

Эски Евклид геометриясидан тубдан фарқ қилучи янги геометрияни яратуви Николай Иванович Лобачевский бўлди. Лобачевский ўзининг ғайриевклид геометриясини яратиб, Евклид геометрияси босган бутун йўлни (даврни) яқка ўзи босиб ўтди. Бу китобда Лобачевский геометриясининг фақат элементар қисми (ва тригонометрияси) баён қилинади. Лобачевский ўзининг геометриясини яратиб блан, геометрия фанининг ва умуман математиканинг тараққиётида ғоят даражада муҳим революцион сакраш ясади. Ушбу китоб Лобачевский ғоялари ва Лобачевский тадқиқотлари таъсири остида пайдо бўлган ғояларни баён этишга бағишлангандир.

Лобачевскийнинг улуғ кашфиёти унинг *параллел чизиқлар назариясига* бағишланган тадқиқотларига асосланади. Бу тадқиқотлар Евклиднинг параллел чизиқлар ҳақидаги аксиомасининг моҳиятини аниқлашдан бошланади. Евклиднинг „Негизлар“ номли асарининг шарҳловчилари (комментаторлари) параллеллар назариясига ва Евклиднинг бешинчи постулатига айниқса зўр аҳамият бериб келганлар; бу постулат олатда қуйидагича ифода қилинади: „Агар икки тўғри чизиқ, учинчи тўғри чизиқ билан кесилиб, кесутидан бир тарафда ётган ва йиғиндиси икки тўғрибурчакдан кичик бўлган бурчаклар ҳосил қилса, бу тўғри чизиқларни етарлича давом эттирганда, улар йиғиндиси икки тўғрибурчакдан кичик бўлган бурчаклар тарафда кесишади“.

Баъзи рўйхатларда бу постулат „Ўнбиринчи аксиома“ тариқасида берилди.

Евклиднинг бошқа постулат ва аксиомалари ўз-ўзидан жуда аён, равшан ҳисобланса-да, бешинчи постулатнинг аёнийли-

* Шунингдек „Труды МГУ по истории математики“. Историко-математические исследования, вып. 1, Гостехиздат, 1948, китобига қараш.

ги эътироз қилинар эди. Бошқа аксиомаларга суяниб уни исботлаш учун интилишлар бўлди. Олимларнинг бешинчи постулатни теоремалар қаторига ўтказиш учун қилган бундай уринишлари йўлида энгиб бўлмайдиган қийинчиликлар бор эди. Бу постулат ўрнига, авторларнинг ўзларига нима ўқундир унга қараганда аёнроқ кўринган бошқа постулатни олиб ҳам ундан қутулишга ҳаракат қилинди. Бунинг натижасида Евклид постулати ўрнини босаоладиган кўп постулатлар вужудга келди.

Постулатни сохта исбот қилиш вақтида, кўпинча постулатнинг ўзига эквивалент (тенгкучли) бўлган даъво қилиб келинди. Ушбу китобнинг биринчи бобида, турли олимлар томонидан кўрсатилган шундай даъволардан бирқанчаси тўла текширилади. Бу даъволарга айрим эътибор қилиш керак, чунки Лобачевский геометриясига бизнинг китобимизда берилган баёотда уларнинг роли каттадир. Бу даъволарнинг ўзлари айрим аҳамиятга эга бўлиш блан бирга, уларни ўрганиш ўқучилар тўғрисида ҳам муҳим жўмлаларни, ўқитучи томонидан масаланинг қўйилиши яхшилаб аниқлашган тақдирда, синфда ҳам текшириш мумкин.

Бешинчи постулатни исботлаш учун қилинган уринишлар тарихида математик Саккенининг (1667—1733) тадқиқотлари айрим ўрин олади; Саккени бунга оид ишларини „*Ҳамма доғлардан тозаланган Евклид; бутун геометриянинг энг биринчи негизларини аниқлаш тажрибаси*“ номли асарида (Милан, 1733) баён қилган. Саккени, асосидаги бурчаклари тўғри ва ён томонлари тенг бўлган тўртбурчакни текширади. Унинг қолган икки бурчаги бир-бирига тенг бўлиб тўғри, ўтмас ёки ўткир бурчаклардан иборат бўлиши мумкин. Бу уч ҳолдан қайси бирининг тўғрилигини олдиндан белгилаб қўймасдан, уларнинг ҳар уччаласидан жуда кўп ҳулосалар чиқариб, Саккени бирин-кетин, аввал „*Ўтмас бурчак гипотезасини*“ зиддиятликка учратади ва ундан сўнг, „*Ўткир бурчак гипотезаси*“ ҳам зиддиятликка учради деб ўйлайди. Саккенининг фикрича, фақат „*тўғри бурчак гипотезаси*“ кучга эга бўлиб қолади. Бу гипотезадан эса, бешинчи постулат дарҳол мантикий натижа бўлароқ келиб чиқади.

Бу қўлланманинг биринчи бобида, бошқалар қаторида, Саккенининг тадқиқотлари ҳам баён қилинади ва у чиқарган ҳулосаларнинг ҳатолиги кўрсатилади.

Саккени, ўзи фойдаланган, тескаридан муҳокама юритиш усулини қуйидагича тавсифлайди: „Ҳатто исбот қилишимиз керак бўлган даъво аввалдан нотўғри деб фараз қилсакда, бу даъво тўғри деган ҳулосага келиб қолишимиз ҳам мумкин“.

Бешинчи постулатни исбот қилиш учун қилинган уринишларда Саккенига эргашуви Ламберт (1728—1777) бўлди. Ламберт ўзининг „Параллел чизиқлар назарияси“ да уч бурчаги

тўғри бўлган тўртбурчакни олади. Тўртинчи бурчак ҳақида У. Саккернинг гипотезаларига ухшаш гипотезаларни қўяди. У ҳам Саккери сингари, "ўтмас бурчак гипотезасини" зиддиятликка келтиради. "Ўткир бурчак гипотезаси"га келганда, у Саккери йўл қўйган хатони қилмаган бўлса-да, ундан жуда кўп ҳулосаларни чиқариши билан аниқ бир натижага келаолмади. Аммо Саккери билан Ламбертнинг ишларига фақат Лобачевскийнинг тадқиқотларини ҳамма тангандан кейингина диққат берилди; бунгача у ишлар деярли номаълум эди.

Утган асрнинг бошларида Лежандрнинг (1752—1833) асарлари шухрат қозониб келди. Лежандрнинг параллел чиқиқлар назариясига ва унинг учбурчак бурчакларининг йиғиндиси билан бўлган алоқасига бағишланган ишлари "Геометрия элементлари" номли дарслигида 1794 йилдан бошлаб босилади.

Лобачевский ҳам ўзининг 1823 йилдаги "Геометрия" номли қўлёзма асарида учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси ҳақидаги теоремалар билан шуғулланади [15]. Бу асарнинг мазмунини қўлланмаизнинг биринчи бобида баён этилади. Лобачевский ҳаётлигида унинг бу асари босилмаган эди. Лежандр-Саккерининг учбурчак бурчаклари йиғиндиси ҳақидаги теоремалари мактаб геометрия курсига киритилиши мумкин.

2000 йилдан ортқ вақт давомида Евклиднинг параллел чиқиқлар ҳақидаги постулатини исботлаш учун қилинган уришлар унумсиз чиқди. Кўп математиклар, улар орасида Лаплас, Лагранж, Гаусс, рус математикларидан Остроградский, Буяковский ва бошқалар параллел чиқиқлар назарияси билан шуғулланиб келган бўлсалар-да, бу назариянинг қийинчиликлари олдида чекиндилар. Чунончи, Лагранж Париж академиясида параллел чиқиқлар тўғрисидаги докладыни бошлаган бўлса ҳам, "мен ҳали яна уйлашам керак", деб ўз докладыни битирмасдан мажлисини ташлаб чиқиб кетади.

Лобачевский ўз геометриясини яратиб билан энг қийин бўлган бу проблемани ҳал этди. Натижада, геометрия ва бутун математика фанига янги йўллар очиб берди [15], [16]. Янги геометриянинг яратувчиси, бизнинг шон-шарафимиз Николай Иванович Лобачевский эски стиль билан 1792 йил* 20 ноябрда Нижний Новгород, ҳозирги Горький шаҳрида туғилди.

Лобачевскийнинг отаси — Иван Максимович — тезда вафот этади. Учта ўғли билан қолган она-Просковья Александровна болаларнинг тарбиясини ўз зиммасига олади. Просковья Александровна болаларни гимназияга киритиш учун Қозонга олиб келади. Қозон гимназияси кенгаши мажлисининг ака-ука

* Н. И. Лобачевскийнинг таркиман ҳолига доир материалларни тўплаган ва таҳрир этган киши Л. Б. Модзалевскийдир. Труды Комиссии по истории Академии Наук СССР. Академик С. И. Вавиловнинг умумий таҳрири остида. СССР Ф А нашриёти, 1948.

Лобачевскийларни гимназияга бепул ўқучи сифатида қабул қилиш тўғрисидаги 1802 йил 5 ноябрда чиқарган қарори сақлангандир.

"Ўқучилик" ва "университетлик" давларини тугатиб, Лобачевский Қозон университетининг аввал ўқитучи ва сўнгра профессори вазифасини эгаллайди. Лобачевскийнинг бутун ҳаёти Қозон университети билан зич боғлангандир. 1817 йил 14 июльда "университет а'золари ҳақида чиқарилган қарорда, физика-математика бўлими бўйича Иван Симонов ва Николай Лобачевский профессорлик унвонида тасдиқландилар". Профессор Лобачевский университетда соф математиканинг, олий математиканинг бошланғич бўлимларидан, механикадан, физикадан, астрономиядан лекциялар ўқийди.

1826 йил 6 февралда Қозон университетининг физика-математика бўлимига Лобачевский француз тилида ёзилган "*Параллел чиқиқлар ҳақидаги теоремани тўла исбот қилган ҳолда геометрия асосларининг қисқача баёни*" деган ишини топширади. Шу кун янги геометриянинг дун'ёга келиш кўни бўлиб ҳисобланади. 1828 йил 5 июльда Лобачевский Қозон университетининг ректори вазифасига тасдиқланади ва 1846 йилгача ҳар уч йилда бу вазифага сайланиб туради. 1829 йилда янги геометриянинг баёни биринчи марта босилиб чиқади — "Казанский вестник" журналида Лобачевскийнинг "*Геометриянинг янги негизлари*" деган асари босилади. Шу пайтдан бошлаб Лобачевский ўзининг геометриясини яна юксак даражага кўтаруни кўп илмий ишлар ёзиб, уларни бостиради. Булардан ташқари Лобачевский математик анализдан, олий алгебрадан ҳам муҳим ишлар ёзади. Вафот қилиш олдида, кўзсиз қолган Лобачевский, ўзининг охириги ишини — "Пангеометрия" деган асарини бостиради. Эски стиль билан 1856 йил 12 февралда улуғ геометр Лобачевский вафот этади. Лобачевскийнинг чуқур геометрик ғоялари унинг тириклик даврида тушунилмади ва тақдир этилмади.

Лобачевский геометриясининг элементлари ушбу китобнинг II, III ва IV бобларида баён қилинади. Бу боблардан, Лежандр-Саккери теоремалари билан бир қаторда, ўрта мактабда тўғрақ ишлари учун фойдаланиш мумкин. IV боб Лобачевский геометриясида юзалар ҳақидаги та'лимотга бағишланади. Евклид геометриясидаги юзалар назарияси билан уни таққослаш, юзалар назариясининг моҳиятини яхшироқ тушунишга ёрдам беради. VI, VII, VIII боблар геометрия асослари элементлари, геометрик системани интерпретация қилиш ва Лобачевский геометриясини модельларда баён этишга бағишланади. VI бобда геометриянинг асосий масалалардан бири — та'рифланмайдиган асосий тушунчалар ва аксиомалар масаласи ёритилади. Иккита содда мисолда аксиоматик методнинг асосий ғояси тушунирилади. Геометрия ўқитувчиси аксиоматик методнинг асосий ҳолатларини ўзига яққол ойдинлаштириб олиши

керак. Бу методнинг биринчи группа аксиомалари мисолидагина аниқлаб берилган гоёси, фанни яхши ўзлаштирган ўқучиларга тушунарлидир. Тўғарак ишлари учун етарли вақт ажратилган бўлса, аксиоматик методнинг моҳиятини ўқучиларнинг деярлик ҳаммасига тушунтириш мумкин. Геометрик ясашлар назарияси учун Лобачевский геометриясининг интерпретациялари гоёт даража фойдали материал беради. Бу жиҳатдан, текисликдаги Лобачевский геометриясига Пуанкаре томонидан берилган интерпретация айниқса кўп фойдалидир. Буерда бажариладиган ҳамма ясашларни Евклид геометриясининг терминларида олиб бориш, бу интерпретация образларида асосий тушунчалар ва улар орасидаги асосий муносабатларнинг аҳамияти ва маъносини тушунтириш ва ундан сўнг модельдан фойдаланиб дарҳол Лобачевский геометриясининг мазмунига ўтиш мумкин. Брок, даставвал ўқитувчининг ўзи предметни жуда яхши эгаллаган бўлиши керак.

§ 1. Параллел тўғри чизиқлар тушунчасининг киритилишидан олдинги теоремалар.

„Параллеллар назариясигача“ бўлган бўлимга оид теоремалар ўрта мактаб дарсликларида қуйидаги тартибда келтирилади: геометрик фигура, чизиқ, нуқта, текислик, кесма, нур, айлана, айлана ёни, ватар ва ҳ. к. тўғрисидаги тушунчаларни аниқлагандан сўнг, кесмаларни ва ёйларни қўшиш амали қаралади. Сўнгра, тўғри чизиқ ҳақидаги бобда бурчак тушунчаси киритилади, бурчакларни қўшиш ва айриш қаралади, биссектриса, қўшни бурчаклар, вертикал бурчаклар тўғрисида тушунча киритилади. Бундан сўнг, тўғри чизиқда ётмаган нуқтадан шу тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш мумкин, ҳам фақат биттагина деган муҳим теорема ва вертикал бурчакларнинг тенглигини ифода этуви теорема исбот қилинади. Сикиқ чизиқ, кўпбурчак, учбурчак, қабарик кўпбурчак тушунчалари киритилади. Ўққа нисбатан симметрия асослари текширилади, тенгёнли учбурчак хоссалари ва учбурчаклар тенглигининг аломатлари ўрганилади. Биз учун катта аҳамиятга эга бўлган ушбу теорема исботланади: *учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакларнинг ҳарбиридан каттадир*. Бу теореманинг параллеллар назариясигача исботланишига эътибор қилиш керак.

Булардан кейин, учбурчакнинг томонлари блан бурчаклари орасидаги муносабатлар муфассал равишда ўрганилади: *ҳарқандай учбурчакда тенг томонлар қаршисида тенг бурчаклар ётади; катта томон қаршисида катта бурчак ётади*. Бу теоремаларга тескари бўлган теоремалар ҳам қаралади.

Икки нуқтани туташтиручи тўғри чизиқ кесмаси, бу нуқталарни туташтиручи ҳарқандай синиқ чизиқдан кичикдир

деган теорема исботланади. Шуернинг ўзидаёқ, мос равишда тенг бўлган томонлари орасидаги бурчаклари тенг бўлмаган икки учбурчак ҳақидаги теорема қаралади; яъни: *агар бир учбурчакнинг икки томони, иккинчи учбурчакнинг икки томонига мос равишда тенг бўлса, бу томонлар орасидаги бурчакларнинг каттаси қаршисида катта томон ётади* ва тескари теорема.

Сўнгра, перпендикуляр блан оғмаларнинг солиштирма ўзунликлари қаралади ва тўғрибурчакли учбурчаклар тенглигининг аломатлари киритилади; геометрик ўрин тушунчаси киритилди ва улардан энг соддалари текширилади: кесманинг ўртасидан унга ўтказилган перпендикулярнинг, кесма учларидан баравар узоқликда туручи нуқталарнинг геометрик ўрни эканлиги; биссектрисанинг бурчак томонларидан баравар узоқликда туручи нуқталарнинг геометрик ўрни эканлиги. „Параллел чизиқларгача“ келган бўлим, ясашга доир асосий масалалар: кесмани ва бурчакни тенг иккига бўлиш, перпендикуляр тушириш ва бошқа масалалар блан туғайди. Дарсликда параллел чизиқлар назариясигача келган бўлимнинг мазмунини шулардан иборатдир.

Лобачевский геометриясини баён этишда биз юқорида келтирилган материалга асосланамиз. Лобачевскийнинг тадқиқотлари янги давр геометриясининг негизини ташкил қилади. „Геометрия асослари“ фани фақат Лобачевскийнинг тадқиқотлари натижасида вужудга келаолди.

Евклид геометрияси блан Лобачевский геометрияси орасидаги энг асосий фарқ улардаги „параллеллар назариясининг“ турлилигидан иборатдир.

Параллел чизиқлар аксиомасидан бевосита ёки бавосита фойдаланмасдан туриб қўлга киритиладиган геометрик фактларнинг нақадар кўпчилигини билиш мақсадида, Лобачевскийнинг „Геометрия“ номли асарини кўздан кечирайлик. Бу асар улуг геометрнинг ҳаёғ вақтида босилмаган эди. Лобачевскийнинг қўли блан ёзилган (1823 йил) қўлёзма 1898 йилда архивдан топилиб, 1909 йилда босилган эди [14]. Қўлёзма асли, Лобачевскийнинг геометрия блан таниш бўлган пастки курс студентларига ўқиган лекцияларининг конспекти бўлиб, унда Лобачевский геометрияси баён қилинмагандир. Лобачевский ўзининг бу улуг кашфиётини 1826 йилда эълон қилди ва 1829 йилда бостирди. Шунинг учун ҳам, Лобачевскийнинг параллеллар назариясига боғлиқ бўлмаган маълумотларни тўплагани ва параллеллар аксиомасини „Геометрия“нинг олтинчи бобидагина киритиши айрим диққатга моликдир.

Лобачевский бу асарда геометрияни учта қисмга бўлади: „чизиқларни ўлчаш ҳақида (лонгиметрия), сиртларни ўлчаш ҳақида (планиметрия) ва жисмларни ўлчаш ҳақида (стереометрия)“.

Биринчи бўлимда — „Чизиқларни ўлчаш“ бўлимида — тўғри чизиқ, айлана ва ёйлар, ҳамда ички чизилган синиқ чизиқ узунлигидан лимитни топиш билан эгри чизиқ узунлигини ҳисоблаш усули кўрсатилади.

Иккинчи бўлимда — „Бурчаклар ҳақида“ деган бўлимда — Лобачевский чизиқли бурчак, текисликлар орасидаги бурчак, тўғри чизиқ блан текислик орасидаги бурчакни қарайди, сфера тўғрисида баҳс қилади, учбурчакларни ва кўпбурчакларни турларга бўлади ва кўпёқлар ҳақида озгина тўхталиб ўтади.

Учинчи бўлимда — „Перпендикулярлар ҳақида“ деган бўлимда — перпендикуляр тўғри чизиқлардан ташқари перпендикуляр текисликлар ҳамда текисликка перпендикуляр тўғри чизиқлар текширилади.

Тўртинчи бўлим — „Мужассам бурчакларни ўлчаш. Мунтазам кўпбурчаклар ва жисмлар ҳақида“ деган сарлавҳали бўлиб, мунтазам кўпёқларнинг мавжудлигини исботлаш ва уларнинг турларга ажратиш блан тугайди. Лобачевский бу бўлимда, параллеллар назариясига мумкин қадар таянмаслик мақсадида, ўз даврида қабул қилинган исботлардан анча фарқ қиладиган исботларни келтиради.

„Учбурчакларнинг бирхиллиги ҳақида“ номли бешинчи бўлимда учбурчакларнинг тенглик ҳоллари текширилади.

Тўғри тўртбурчакларни ўлчаш ҳақида“ номли олтинчи бўлим қуйидаги сўзлар блан бошланади: „Текисликларни* ўлчаб ушбу ҳақиқатга асосланади: агар икки тўғри чизиқ, учинчи тўғри чизиқдан бир тарафда туриб, булардан бири шу тўғри чизиққа перпендикуляр, иккинчиси эса у блан ўтқир бурчак ташкил қилса, улар кесишади...

... Бу ҳақиқатнинг исботи ҳозиргача топилган эмас. Берилган исботларни фақат унга берилган изоҳ деб айтиш мумкин бўлиб, тўлиқ маънода математик исбот номини олишга арзишмайди“.

Бу китобда Лобачевский параллеллар назариясига боғлиқ бўлмаган кўп маълумотни тўплайди. Бу маълумотларнинг жойлашиш тартиби ва баёни одатлагидан шу қадар фарқ қилар эдики, академик Фусс қўлёзмага ёмон баҳо берди ва у босилмади. Лобачевский ёзган бу асарнинг кейинча Лобачевский номини олган ғайриеқлид геометрияни вужудга келтиришда ғоят даражада катта роль ўйнаганини эндигина биз кўриб турамиз.

„Геометрия“нинг кейинги бўлимларида параллел чизиқлар назарияси ишлатилади.

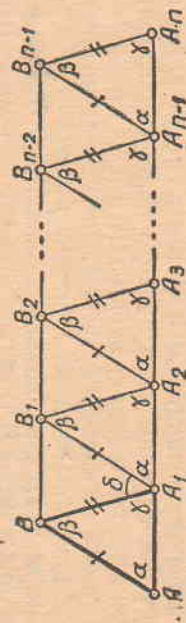
Бундан буёнги баёнимиз учун керак бўлган ва исботи параллел чизиқлар назариясига асосланмаган яна бир неча теоремаларни келтирамиз.

* Яъни текис фигураларнинг юзларини.

§ 2. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси Лежандр-Саккерининг теоремалари.

Лежандр-Саккерининг биринчи теоремаси. Истаган учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан катта бўлиши мумкин эмас.

Исбот. ABA_1 учбурчакни олиб, унинг AA_1 томонини давом эттирамиз (чизма 1). AA_1 нинг ҳосил қилинган давомига AA_1 кесими n марта шундай қўяборамизки, $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = A_{n-1}A_n$ бўлсин ва бу кесмаларнинг ҳарбирида ABA_1 учбурчакка тенг шундай учбурчак ясаймизки, берилган учбурчак AA_n тўғри чизиққа нисбатан қайси тарафда жойлашган бўлса,



Чизма 1.

у ҳам шу тарафда ётсин. Бу учбурчакларни шундай белгиларимиз: $A_1B_1A_2, A_2B_2A_3, \dots, A_{n-1}B_{n-1}A_n$. Энди $B, B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ уларни туташтирайлик. Ҳосил қилинган $BB_1, B_1B_2, \dots, B_{n-2}B_{n-1}$ кесмалар бир-бирига тенг, чунки ясашимизга асосан A_1B_1 ва A_2B_2 учбурчакларда $A_1B = A_2B_1; A_1B_1 = A_2B_2$ ва улар орасидаги бурчаклар ҳам тенгдир:

$\angle B_1A_1B = 2d - \alpha - \gamma$ ва $\angle B_2A_2B_1 = 2d - \alpha - \gamma$. Демак, учбурчаклар тенглиги аломатларининг бирига мувофиқ, A_1B_1 учбурчак $A_2B_1B_2$ учбурчакка тенг; тенг учбурчакларда тенг бурчаклар қаршида тенг томонлар ётгани сабабли, $BB_1 = B_1B_2$. Худди шунингдек, i нинг истаган қийматига мос келган исталган $B_{i-1}B_i$ кесманинг ҳам BB_1 га тенглигини исботлаш мумкин. Шундай қилиб, $BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = B_{n-2}B_{n-1}$.* Бу кесмаларнинг ўзаро тенглигини исбот қилишимиз ABA_1 учбурчак бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг бўлишига мутлақо боғлиқ эмас.

ABA_1 учбурчак бурчаклари α, β, γ ларнинг йиғиндисининг $2d$ дан катта эмаслигини исбот қиламиз. Исботни тескаридан олиб борамиз. $\alpha + \beta + \gamma > 2d$ бўлсин (ана шу фарз бизни эйдиятликка келтиради). Лекин $\alpha + \delta + \gamma = 2d$, демак, $\beta > \delta$. Шундай қилиб, ABA_1 ва BA_1B_1 учбурчакларда мос равишда тенг томонлар бор: $AB = A_1B_1, BA_1 = BA_1$ (бу томон умумий), ва бу томонлар орасидаги β, δ бурчаклар тенг эмас; биз билмишми, бундай учбурчакларда катта бурчак қаршида катта

* Лекин $BB_1B_2, \dots, B_{n-1}$ ни тўғри чизиқ кесмаси деб ҳисоблашдан сақлашни керак. § 10, 17 га қараг.

томон ётади. Шунинг учун $AA_1 > BB_1$. Бундан ташқари, тўғри чиққининг икки нукта орасидаги кесмаси, шу нукталарни тўташтиручи синиқ чиққидан кичиклиги сабабли, ушбу тенгсизлиكنи ёзаоламиз:

$$AA_n < AB + BB_1 + B_1B_2 + \dots + B_{n-2}B_{n-1} + B_{n-1}A_n$$

ёки

$$n \cdot AA_1 < AB + (n-1)BB_1 + BA_1 \quad (\text{чунки } B_{n-1}A_n = BA_1),$$

Бу тенгсизликдан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади:

$$n(AA_1 - BB_1) < AB + BA_1 - BB_1,$$

аммо, $AA_1 > BB_1$ ва $AB + BA_1 > AA_1 > BB_1$ (учбурчакнинг икки томонининг йиғиндиси учинчисидан катта), шунинг учун $AA_1 - BB_1 = a$ ва $AB + BA_1 - BB_1$ кесмани b блан белгилаб, ҳосил қилинган тенгсизликни шу кўринишда ёзиш мумкин: $n \cdot a < b$. Лекин, (бутун мусбат) n сонни истаганимизча катта қилиб олиш мумкинлиги сабабли, a кесмани n марта қўшилчи сифатида такрорлаб, берилган b кесмадан катта кесмани ҳосил қилаоламиз. Брок, истаган n учун чиқарилган $n \cdot a < b$ тенгсизлик, a кесмани қўшилчи сифатида қанча марта такрорласак-да, b кесмадан катта, ёки ҳатто унга тенг бўлган $n \cdot a$ кесмани ҳосил қилаолмаслигини кўрсатади. Биз зиддиятга дучор бўлдик. Демак, учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан катта деган фаразиямиз нотўғри экан. Теорема исбот қилинди.

Эслатма. a кесма қандай кичик бўлса-да, муносиб n сонни олиб, a ни ҳарвақт қўшилчи сифатида n марта такрорлаш мумкинки, na йиғинди, олдиндан берилган b кесмадан катта кесмани беради. Бу жумла, Архимед — Евдокс аксиомаси* дейилади.

Хуллас, учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан катта деган фараз, Архимед — Евдокс аксиомасига зиддир.

Лежандр-Саккерининг иккинчи теоремаси. Агар берилган бирор учбурчакда бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлса, ҳарқандай учбурчакда ҳам бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенгдир.

Бу теореманинг исботини тўрт қисмга бўламиз.

1°. Агар бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенг ABC учбурчакнинг истаган учини, асосида ётиб, қолган икки учи орасида турчи D нукта блан туташтирсак, $\triangle ABC$, ҳарбирида бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлган иккита ABD , BDC учбурчакка бўлинади.

Исбот. Теореманинг шартига кўра $\alpha + \beta + \gamma = 2d$ бўлсин. ABD учбурчак бурчакларининг йиғиндисини x , BDC учбурчак

* Шу китобнинг 40-нчи параграфага ва Киселёв дарслигининг II-нчи қисми охиридаги қўшимчага қаралсин (Тарж.)

бурчакларининг йиғиндисини y блан белгилайлик (чизма 2); бу ҳолда:

$$\begin{aligned} \beta' + \beta'' &= \beta, & \delta' + \delta'' &= 2d; \\ \alpha + \beta' + \delta' &= x, & \delta'' + \beta'' + \gamma &= y, \end{aligned}$$

булардан:

$$\begin{aligned} x + y &= \alpha + \beta' + \delta' + \delta'' + \beta'' + \gamma = [\alpha + (\beta' + \beta'') + \gamma] + (\delta' + \delta'') = \\ &= 2d + 2d = 4d. \end{aligned}$$

Лежандр-Саккерининг биринчи теоремасига асосан учбурчак бурчакларининг йиғиндисини белгилатгани учун x $2d$ дан катта бўлаолмайди, лекин y $2d$ дан кичик ҳам бўлаолмайди, чунки y ҳолда, BDC учбурчак бурчакларининг йиғиндисини белгилатган y , $2d$ дан катта бўлар эди, бунинг эса ўша теореманинг ўзига биноан юз бериши мумкин эмас. Демак, $x = y = 2d$.

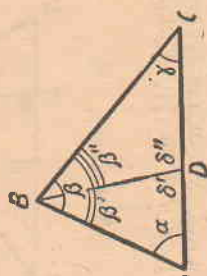
Жумладан, ABC учбурчак бурчаклари- α , β , γ дан каттасининг учидан баландлик ўтказилса, у асосни қолган икки уч орасидаги бирор нуктада кесиб ўтади ва натижада ҳарбиридаги бурчаклар йиғиндиси $2d$ га тенг бўлган тўғрибурчакли учбурчаклар ҳосил қилинади.

2°. Бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлган ABC учбурчакнинг икки томонида учлар орасида биттадан нукта олиб (улар P , Q бўлсин), уларни бир-бири блан туташтирсак, ABC учбурчакдан йиғиндиси $2d$ га тенг APQ учбурчак ажралади.

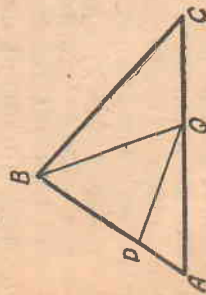
Исбот. B нуктани Q блан туташтирамиз (чизма 3). ABC учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг-лигидан п. 1° га асосан ABQ учбурчак бурчакларининг ҳам йиғиндиси $2d$ га тенгдир. Лекин $\triangle ABQ$ ни PQ кесма, ҳарбиридаги бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенг иккита учбурчакка бўлади, улар $\triangle APQ$ ва $\triangle PQB$ дан иборат (чунки $\triangle ABQ$ ни бўлиш усули теореманинг 1-нчи пунктдаги шартларни қаноатлантиради). Демак, APQ учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг.

3°. Агар бирор учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлса, тўғрибурчакли ҳарқандай учбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳам $2d$ тенг бўлади.

Исбот. Фараз этайлик, ABC учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлсин (чизма 4). Исталган тўғрибурчакли LMN учбурчак бурчаклари йиғиндисининг $2d$ га тенглигини исботлаш керак (чизма 5). ABC учбурчакнинг катта бурчаги

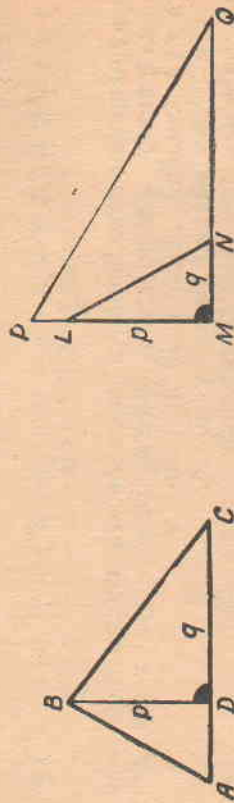


Чизма 2.



Чизма 3.

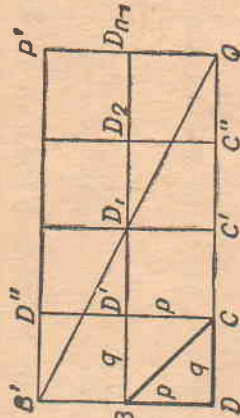
учи B дан унинг AC асосига перпендикуляр туширамыз. Хосил қилинган тўғрибурчакли BDC учбурчак бурчакларининг йиғиндиси исботлашимизга кўра, $2d$ га тенгдир. $BD=p$, $DC=q$ деб белгिलाيمиз ва m , n сонларни шундай танлаб оламизки,



Чизма 4.

$pt > ML$ ва $nq > MN$ бўлсин. Бундай m , n сонларни Архимед-Евдокс аксиомасига асосан танлаб олиш мумкин. Энди тўғрибурчакли шундай MQR учбурчак ясаймизки, унинг катетлари: $MP = mr$, $MQ = nq$ бўлсин (чизма 5); бу учбурчакда бурчаклар йиғиндисининг $2d$ га тенглигини исботлаймиз.

Исботлаш мақсадида BDC учбурчак ёнига унга тенг шундай $CD'B$ учбурчак ясаймизки, уларнинг гипотенузлари умумий бўлсин ва D , D' учлар унинг турли тарафда жойлашсин (чизма 6). BDC учбурчакнинг тўғрибурчаклиги сабабли, хосил қилинган $BDCD'$ тўртбурчакнинг тўрттала бурчаги ҳам тўғри бурчаклардан иборатдир. $BD = p$ кесмани m марта такрорлаб, mr га тенг DB' кесмани ясаймиз ва унинг p га тенг ҳарбир бўлагала $CDBD'$ тўғритўртбурчакка конгруэнт тўртбурчак ясаб борамиз. C , D' , D учларнинг бир тўғри чизиқда ётишини кўриш қийин эмас. $DC = q$ томон блан ҳам шу каби иш кўрамыз, я'ни уни n марта такрорлаб, $CDBD'$ га конгруэнт тўғритўртбурчаклар ясаймиз. B , D' , D_1 , $D_2, \dots, D_{n-1}$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Бу ҳолда томонлари $BD = p$, $DQ = nq$ дан иборат ва тўрттала бурчаги ҳам тўғри бўлган $DQD_{n-1}B$ тўғритўртбурчакни ясаймиз. Сўнгра, DQ асосни BD_{n-1} ҳолатга кўчириб, тўғритўртбурчак $BB'D'D_{n-1}$ ни ясаймиз ва x . к. Нагиждада тўрттала бурчаги тўғри бўлган тўртбурчак $B'DQP'$ ни хосил қиламиз. Унинг томонлари $DB' = mr$ ва $DQ = nq$ (чизмада $m = 2$; $n = 4$). Бу тўғритўртбурчакни $B'Q$ диагонали блан



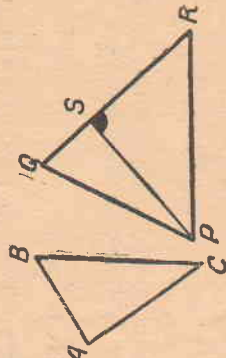
Чизма 6.

тўғрибурчакли иккита учбурчакка бўлиб, хосил қилинган QDB , $QB'P'$ учбурчакларнинг ҳарбиридаги бурчаклар йиғиндисининг $2d$ га тенг бўлишини кўрамыз. Чунончи, $\triangle QDB'$ бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кам бўлаолмайди, чунки у чоғда $\triangle QB'P'$ бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан катта бўлар эди. Лежандр-Саккерининг биринчи теоремасига кўра, бу ҳол юз бераолмайди. Шундай қилиб, QMP учбурчакка конгруэнт бўлган QDB' учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг экан, демек, шу теореманинг 2-нчи пунктига асосан LMN учбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳам $2d$ га тенгдир. Чиқарилган нагижа шундан иборат: **агар бирор учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлса, исдалган тўғрибурчакли учбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳам $2d$ га тенг бўлади.**

4°. Энди Лежандр-Саккери теоремасини умумий ҳолда ҳам исбот этаоламиз

Фараз этайлик, ABC учбурчакда бурчаклар йиғиндиси $2d$ га тенг бўлсин (чизма 7). Йиғиндининг ҳарқандай PQR учбурчак учун ҳам $2d$ га тенглигини исботлаш талаб қилинади. $\triangle PQR$ бурчакларининг каттаси учидан асосга PS перпендикуляр туширамыз. Хосил қилинган тўғрибурчакли PSQ , PSR учбурчакларнинг ҳарбиридаги бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенг (3-нчи пунктга асосан). Энди тўғрибурчакли бу учбурчаклар бурчакларининг йиғиндисини ҳисоблаб, ундан (S нуқтадаги бурчаклар йиғиндиси) $2d$ ни айирсак, PQR учбурчакдаги бурчаклар йиғиндисининг $2d$ га тенглигини кўрамыз. Шунини исботлаш керак эди ҳам.

Учбурчак бурчакларининг йиғиндисига оид назария учун исботланган Лежандр-Саккери теоремалари катта аҳамиятга эгадир. Уларнинг ёрдами блан хосил қилинган фактлар, параллел чизиқлар назариясидан қат'и назар қўлга киритилди. Энди, учбурчак бурчаклари йиғиндисининг $2d$ дан катта эмаслигини қат'ий билсак-да, биз параллел чизиқлар назариясига асосланмасдан туриб, исдалган учбурчакдаги бурчаклар йиғиндисининг нимага тенглиги тўғрисида ҳечнарсга айталомаймиз; лекин, Лежандр-Саккерининг иккинчи теоремаси, бирор учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг бўлган тақдирда, ҳарқандай учбурчакдаги бурчаклар йиғиндисининг ҳам $2d$ га тенг бўлишини бизга кўрсатади. Исботланганлардан яна бир мўҳим хулоса чиқариш мумкин: бирор учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кам бўлса, бу йиғинди ҳарқандай учбурчак учун ҳам $2d$ дан кам бўлар эди. Бу хулоса Лежандр-Саккерининг иккинчи теоремасидан бевосита келиб чиқали ва кўпинча шу олимларнинг учинчи теоремаси деб аталади.



Чизма 7.

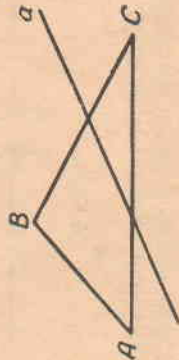
Лежандр-Саккерининг учинчи теоремаси. Агар бирор учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлса, бу йиғинди ҳарқандай учбурчак учун ҳам $2d$ дан кичикдир.

Теоремани текширидан исботлаш осон, ABC учбурчакда бурчаклар йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлсин (чизма 7). Энди бирор PQR учбурчакда бурчаклар йиғиндиси $2d$ га тенг деб фарз қилайлик. Бу чоғда Лежандр-Саккерининг иккинчи теоремасига кўра, ABC учбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳам $2d$ га тенг бўлар эди; бу эса фарзимишга зиддир; шу блан теорема исбот қилинди, чунки Лежандр-Саккерининг биринчи теоремасига асосан, учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан катта ҳам бўлаолмайди.

§ 3. Паш постулати.

Элементар геометрия дарсликларида бу интуитив жўмладан гайришкор равишда фойдаланилса-да, уни эслатиб ўтишмайди. Бу постулат қуйидагича ифода қилинади:

Агар ABC учбурчак ва унинг учларидан ўтмайдиган, ҳамда учбурчак томонларининг бири блан икки уч орасида кесшидиган а тўғри чизиқ берилган бўлса, бутўғри чизиқ учбурчакнинг қолган икки томонидан бири блан яна икки уч орасидаги нуктада муқаррар кесшидади (чизма 8). Зарур бўлган бу аксиомани биз келгусида тез-тез ишлатиб туражакмиз. Унинг муҳимлигини XIX асрнинг охирида Паш кўрсатиб берди. Биз *постулат* сўзини *аксиома* ма'носида тушунамиз.



Чизма 8.

§ 4. Икки бурчаги тўғри бўлган тўртбурчак ва унинг хоссалари.

Бундан буёнги тадиқотлар учун бурчаги тўғри бўлган махсус кўринишли тўртбурчак керак бўлади. Бу каби тўртбурчаклар кўпинча *иккитўғрибурчак*ли деб аталади. Масалан, 9-нчи чизмада тасвирланган $ABDC$ тўртбурчак шундайдир; унинг A ва B бурчаклари — тўғри бурчаклар. Бундай тўртбурчакларнинг қуйидаги хоссаларини исбот қиламиз.

1°. Агар иккитўғрибурчакли тўртбурчакда $BD > AC$ бўлса, $\gamma > \delta$ бўлади. Бу теоремани кўзда тутиб, биз кўпинча *катта томон қаршисида катта бурчак ётади* деб айтамыз.

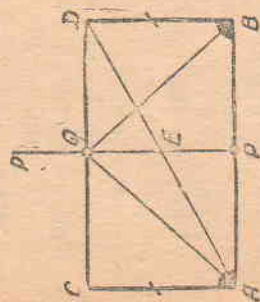
Исбот. BD томонда шундай E нуктани оламизки, $BE = AC$ бўлсин. E нукта D блан B орасига тушади. C ни E блан туташтирсак, A ва B бурчаклари тўғри, AC ва BE блан белгиланган

ён томонлари бир-бирига тенг $ABEC$ тўртбурчак ҳосил бўлади. Бундай тўртбурчак *Саккери тўртбурчаги* дейилади. Саккери тўртбурчагининг юқори асосидаги бурчакларининг бир-бирига тенглигини биз кейинроқ кўрамиз. Шу хоссага асосланиб, да'вони исбот қиламиз $\gamma > \angle ACE = \angle BEC$ (CE нурунинг γ бурчак ичидан кетгани сабабли, BEC бурчак δ дан кичикдир; CE D учбурчак учун олинган ташқи бурчак ҳақид ги теоремага асосан, BEC бурчак δ дан катта).

Саккери тўртбурчаги. Олдинги теоремани исботлашда Саккери тўртбурчагининг бир хоссасига биз асосландик. Ҳозир биз бу хоссани исбот қиламиз ва йўлакай Саккери тўртбурчагининг яна бир неча муҳим хоссасини чиқарамиз.

Саккери тўртбурчаги $ABDC$, я'ни A ва B бурчаклари тўғри, ён томонлари AC ва BD бир-бирига тенг тўртбурчак берилган бўлсин. Юқори асосдаги C ва D бурчакларнинг бир-бирига тенглигини исбот қилайлик (чизма 10).

Исбот. AB нинг тенг ўртасини белгилловчи P нуктадан AB га перпендикуляр чиқарамиз. Бу перпендикуляр CD томон блан C ва D нукталар орасида кесшидади. Бу фактнинг жуда ҳам равшанлигига қарамай, уни исботлаш зарурдир. Паш аксиомасидан фойдаланиб бу исботни ҳосил қилиш осон. AD диагональни ўтказиб, Паш аксиомасини ABD учбурчак ва P блан белгиланган перпендикулярга нисбатан қўлаймиз. P тўғри чизиқ AB томон блан, ёки BD блан кесшидади. Демак, $P \in AD$ блан, чунки бир тўғри чизиққа ўтказилган икки перпендикуляр кесшимайди. Хуллас, P тўғри чизиқ BD блан кесшимайди ва шу сабабли, D нуктадан ўтмайди. (Шу сингари, у C нуктадан ҳам ўтмайди). Демак, Паш аксиомасига кўра, P тўғри чизиқ AD блан A ва D нукталар орасидаги нуктада кесшидади. Худди шу сингари, P тўғри чизиқ ACD учбурчакнинг AC томони блан кесшимайди ва CD томон блан C ва D орасидаги Q нуктада кесшидади. Q ни A ва B блан туташтирайлик. APQ учбурчак BPQ учбурчакка конгруентдир, чунки уларнинг катетлари тенгдир (чизма 11). Демак, $AQ = BQ$, бундан эса, CAQ, DBQ учбурчаклар бир-бирига конгруентдеган хулоса чиқади, чунки улардан бирининг икки томони, иккинчисининг икки томонига мос равишда тенг ва, бу томонлар орасидаги бурчаклар тенгдир. Шунинг учун C бурчак D

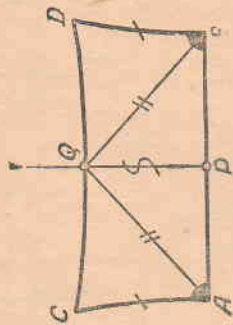


Чизма 10.

бурчакка тенг, я'ни Саккери тўртбурчагида юқори асосдаги бурчаклар узаро тенгдир, шуни исботлаш керак эди. Йўлакай биз ушбунни исбот қилдик:

2°. PQ перпендикуляр юқори асос блан ҳам тўғри бурчак остида кесиади* ва кесилиш нуқтаси Q , юқори асосни ҳам тенг иккига бўлади.

Эслатма. Саккери тўртбурчагининг хоссаларини чиқаришда, бир тўғри чизикқа ўтказилган икки перпендикулярнинг кесиммаслигидан фойдаландик. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб



Чизма 11.

буни исботлаш осон, чунки бу перпендикулярлар кесинган ҳолда учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакка тенг бўлар эди, бунинг эса бўлиши мумкин эмас. Демак, параллеллар ҳақидаги аксиомалардан фойдаланмасдан туриб, Саккери тўртбурчагининг юқори асосидаги бурчакларнинг тенглигини исботладик. Брок уларнинг иккаласининг параллеллар аксиомасини киритмасдан ҳечнарс айтиоолмаймиз; бунинг кейинроқ тушунармиз. Лекин бу бурчакларнинг утмас бўлаолмаслигини параллеллар назариясига асосланмасдан исботлаш мумкин. Ҳақиқатан, агар C ва D бурчаклар утмас бўлса, ACD ва BAD учбурчакларнинг бирида бурчаклар йиғиндиси $2d$ дан катта бўлар эди, чунки бу учбурчаклардаги ҳамма бурчакларнинг йиғиндиси $4d$ дан каттадир. Лекин учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан катта бўлиши мумкин эмас; демак бир-бирига тенг C ва D бурчаклар утмас бўлаолмайди.

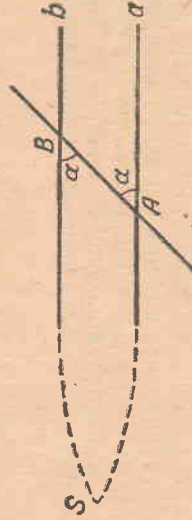
Параллеллар назариясига асосланмасдан исбот қилинадиган ва бундан буён бизга керак бўлган теоремаларни шу блан таломлаймиз.

* Чунки $\angle CQE = \angle EQD$ ва бу бурчаклар қўшни (таржимон).

БИРИНЧИ БОБ

ЕВКЛИД ПОСТУЛАТИГА (ЭКВИВАЛЕНТ) ТЕНГУЧЛИ ДА'ВОЛАР

Геометрия дарсликларининг кўпида, китобимизнинг кириш қисмида келтирилган маълумотларни бергач, параллеллар назариясига бағишланган боб киритилади. Бу маълумотларни биз Лежандр-Саккери теоремалари ва иккитўғрибурчакли тўртбурчаклар хоссалари блан тўлдирдик. Одатда, параллел тўғри чизиклар, бир текисликда ётиб кесинмайдиган, я'ни битта ҳам умумий нуқтаси бўлмаган тўғри чизиклар деб та'рифланади. Бундай тўғри чизикларнинг мавжудлигини исботлаш осон ва бу исбот параллеллар аксиомасига асосланмайди. Ҳақиқатан, агар a тўғри чизик A нуқтада иккитўғри чизик AB тўғри чизик блан кесинса (чизма 12), AB тўғри чизикнинг B нуқтасидан, олмошинучи бурчаклар бир-бирига тенг бўладиган қилиб b тўғри чизикни ўтказсак, кесинмайдиган, я'ни параллел тўғри чизиклар ҳосил бўлади. Ҳақиқатан, a ва b тўғри чизиклар S нуқтада кесинган тақдирда, ABS учбурчакнинг A учидagi ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакка тенг бўлар эди, бу эса юз бераолмайди. Демак, a ва b кесинмаолмайди. Шу сингари, бир тўғри чизикқа ўтказилган икки перпендикулярнинг ҳам кесинмаслиги бизга маълум. Бу охириги ҳол, бундан илгариги ҳолнинг олмошинучи бурчаклар тўғри бурчаклардан иборат бўлган вақтдаги, хусусий ҳолига мос келади.



Чизма 12.

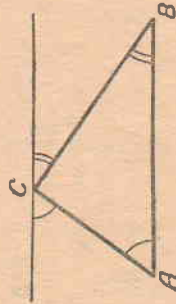
Шундай қилиб, a тўғри чизикда ётмаган A нуқта орқали берилган текисликда a блан кесинмайдиган лоақал битта b тўғри чизик ўтказиш мумкинлиги тайинланди. Шунга диққат қилиш керакки, бу охириги фактни аниқлаш учун, биз ҳечбир янги аксиомани киритмадик. Сўроқ туғилади: A нуқтадан a блан кесинмайдиган бундай b тўғри чизик битта ўтадими, ёки бундай тўғри чизиклар сони биттадан ошиқми?

Шундай қилиб, a тўғри чизикда ётмаган A нуқта орқали берилган текисликда a блан кесинмайдиган лоақал битта b тўғри чизик ўтказиш мумкинлиги тайинланди. Шунга диққат қилиш керакки, бу охириги фактни аниқлаш учун, биз ҳечбир янги аксиомани киритмадик. Сўроқ туғилади: A нуқтадан a блан кесинмайдиган бундай b тўғри чизик битта ўтадими, ёки бундай тўғри чизиклар сони биттадан ошиқми?

Янги аксиомани киритмасдан бу сўроққа жавоб бериб бўлмаганини биз келгусида кўрамиз. Бу янги аксиомани киритишга *мажбур*миз ва бу ерда иккита имконият бор: 1) бундай тўғри чизиқдан *фақат битта* ўтказиш мумкин, 2) бундай тўғри чизиқлардан *биттадан ортиқ* ўтказиш мумкин. Евклид биринчи имкониятни танлади.

Евклиднинг параллеллар ҳақидаги аксиомаси. *Берилган а тўғри чизиқда ётмаган А нуқтадан, А нуқта ва а тўғри чизиқ билан аниқланган текисликда а га параллелликини тўғри чизиқ ўтказиш мумкин эмас*.*

Бу аксиомадан А нуқта орқали а га параллел *фақат битта* тўғри чизиқ ўтказиш мумкин деган хулоса чиқади, чунки ҳеч бўлмаганда битта бундай тўғри чизиқнинг мавжудлигини биз билармиз.



Чизма 13.

Параллеллар тўғрисидаги аксиомани киритгандан сўнг, геометрияда параллеллар хоссалари текширилади, масалан, агар а тўғри чизиқ b тўғри чизиққа, b эса — c тўғри чизиққа параллел бўлса, а ва c тўғри чизиқлар параллелдир.

Бундан кейин параллел икки тўғри чизиқнинг кесуши билан ташкил қилган бурчаклари қаралади, ва ниҳоят *учбурчак бурчаклар йиғиндисининг 2d га тенглиги* исбот қилинади. Бу теорема одатда шундай исботланади: учбурчакнинг C учидан АВ асосга параллел ўтказилади (чизма 13), ва ички олмошмачи бурчакларнинг тенглигидан фойдаланиб, А, В, С бурчаклар йиғиндисининг 2d га тенглиги осонлик билан исботланади. Учбурчаклар бурчакларининг йиғиндисини тўғрисидаги бу теореманинг параллеллар ҳақидаги аксиомасига асосланишига катта эътибор бериш ва уни тушуниб олиш керак. Учбурчак бурчакларининг йиғиндисини ҳақидаги теоремани қуйидагича ифодаласак, айтган фикримиз яна ҳам ойдинроқ бўлади: *агар а тўғри чизиқда ётмаган А нуқтадан а га иккита параллел ўтказиш мумкин бўлмаса, учбурчак бурчакларининг йиғиндисини 2d га тенг бўлади*. Тескари теореманинг ҳам ўринли эканлигини келгуси параграфда кўрсатамиз.

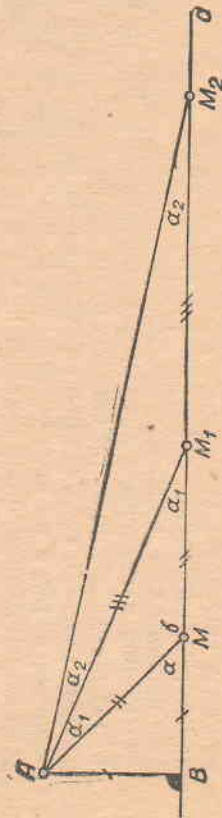
§ 5. Учбурчак бурчакларининг йиғиндисини 2d га тенг деган да'во Евклид постулатига тенгкучлидир.

Агар бирор учбурчак бурчакларининг йиғиндисини 2d га тенг деган да'вони исботсиз қабул қилсак, параллеллар тўғрисидаги аксиомани исботлаш мумкин бўлади.

* Бу аксиома (ёки постулат)ни Евклид бошқача *ифодалиди*, аммо биз уни тексда кўрсатилган формада олармиз.

Буни исботлаш мақсадида, даставвал, исботи параллеллар аксиомасига суянмаган битта леммани исботлаймиз. Бу леммани кириш қисмидаги жумлалар рўйхатига киритиш ҳам мумкин.

Лемма. Агар а ва АМ тўғри чизиқлар (А нуқта а да ётмайди, М нуқта эса — а да ётади) берилган бўлса, А нуқтани қўзғатмасдан М нуқтани а тўғри чизиқ бўйича шу қадар узоққа кўчириш мумкинки, α бурчак (чизма 14) ол-



Чизма 14.

дин берилган $\epsilon > 0$ бурчакдан кичик бўлади; ёки бошқача айтганда, М нуқтанинг а бўйлаб, масалан ўнг томонга, чексиз узоқлашабориши билан, α бурчак О га интилади.

Исбот. А дан а тўғри чизиққа АВ перпендикуляр тушириб $MM_1 = AM$ ни қўямиз. А₁ М М₁ учбурчакни олайлик. Ундаги бурчаклар йиғиндисини 2d дан катта бўлаолмайди, я'ни $2\alpha + \gamma \leq 2d$; бунда тенглик ишораси учбурчак бурчакларининг йиғиндисини 2d га тенг ҳолда ва тенгсизлик ишораси эса — бурчаклар йиғиндисини 2d дан кичик бўлган ҳолда юз беради. Аммо биз параллеллар аксиомасини киритмаганимиз сабабли, бу ишоралардан бирортасини танлаб олаолмаймиз.

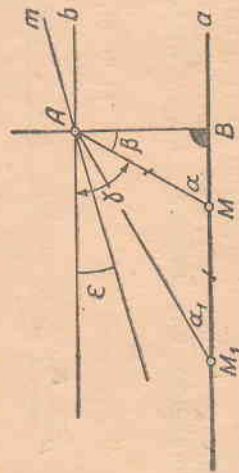
Хуллас, $2\alpha_1 + \gamma \leq 2d$. Аммо $\alpha + \gamma = 2d$, булардан эса: $2\alpha_1 \leq \alpha$, ёки $\alpha_1 \leq \frac{\alpha}{2}$. Бундан кейин $M_1 M_2 = AM_1$ ни қўйиб, шу сингари исботлаймизки: $\alpha_2 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2^2}$. Агар $M_2 M_3 = AM_2$ ни қўйсак,

худди шунингдек: $\alpha_3 \leq \frac{\alpha_2}{2} \leq \frac{\alpha}{2^3}$, ва. ҳ. к. Ниҳоят, буни л марта такрорлагач, $M_{n-1} M_n = AM_{n-1}$ қўйиб, $\alpha_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$ ни ҳосил қиламиз; демак, етарлича катта n учун α_n бурчак, олдин берилган $\epsilon > 0$ бурчакдан кичик бўлаолади. Бошқача айтганда, $n \rightarrow \infty$ да $\alpha_n \rightarrow 0$, биз ана шунини исбот қилмоқчи эдик. Леммани исботлаш вақтида ҳатто параллеллар тушунчасидан ҳам фойдаланмаганимизни ва фақат кириш қисмида келтирилган маълумотларга асосланишимизни яна бир бор та'кидлаб ўтаемиз. Биз ушбу жумлалардан фойдаландик: 1) учбурчак бурчакларининг йи-

ғиндиси $2d$ дан катта бұлиши мүмкін емес; 2) тенгәнли уч- бурчакнинг асосидаги бурчаклари бир-бирига тенг; 3) учбур- чакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ҳарбир ички бурчакдан катта; 4) тўғри чизик кесмасини чексиз давом этти- раш мүмкін.

Теорема. Агар бирор учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ га тенг бўлса, а тўғри чизикда ётмаган A нуктадан, а га иккита параллел утказиш мүмкін эмасдир.

Исбот. A дан a га перпендикуляр қилиб b ни утказамиз. a ва b тўғри ва AB га перпендикуляр қилиб b ни утказамиз. a ва b тўғри чизиклар битта AB тўғри чизикқа перпендикулярлиги сабабли, кесишмайди. Энди, A нуктадан ўтуши ва b тўғри чизикдан ўз- га ҳарқандай m тўғри чизик b блан қандай e бурчак ташкил қилса ҳам, a тўғри чизик блан кесишади; буни исботлайлик. m тў- ри чизик A нуктадан ўтиб a блан b орасидаги соҳага AB дан қайси томондан кирган бўлса, a тўғри чизикнинг AB дан ўша томонда ёт- ган қисмида бирор M нуктани оламыз ва уни A блан туташтирамиз. ABM учбурчак бурчакларининг йигиндиси (Межандр-Сак- керининг иккинчи теоре- масига кўра) $2d$ га тенг- лиги сабабли $\alpha + \beta = d$.



Чизма 15.

Аммо $\gamma + \beta = d$, чунки $\angle bAB = d$, шунинг учун $\alpha = \gamma$. M нуқ- танинг B нуктадан (измада — чап томонга) етарлича узоқла- шаборгани сари, α бурчак ва унинг блан бирга унга тенг γ бурчак ҳам олдин берилган ҳарқандай бурчакдан, демек e дан ҳам кичик бўлади. Шу сабабли Am тўғри чизик ABM учбурчакнинг ичига унинг A учидан кириб, учбурчакнинг $B'M$ асоси блан, я'ни a тўғри чизик блан кесишади. Теорема исботланди.

Эслатма. Учбурчакнинг учидан киручи m тўғри чизик- нинг учбурчак асоси блан албатта кесилишини Паш аксиома- сига асосланиб исботлаш мүмкин. Исботнинг ўзини ўтказмас- дан шу мулоҳазанинг ўзи блан чекланиб қолайлик.

Исбот қилганимизга бир бор диққат блан қарайлик. Агар Евклиднинг параллеллар ҳақидаги аксиомаси қабул қилинган бўлса, учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ га тенг, ва аксинча: бирор учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ га тенг деган да'вои аксиома деб қабул қилсак, у чоғда берилган тўғри чизикда ётмаган нуқта орқали бу тўғри чизикқа иккита параллел утказиш мүмкин эмаслигини исботлаш мүмкин. Бу фикрларни қуйидагича айтаоламиз: бирор учбурчак бурчакла- рининг йигиндиси $2d$ га тенг деган да'во ва параллеллар аксиомаси бир-бирига эквивалент (тенгкучули)дир. Булардан

қайси бирининг аксиома сифатида, я'ни исботсиз қабул қили- ниши барибир. Геометрияни шундай баён қилиш ҳам мүмкин эди: параллеллар аксиомасигача келган ма'лумотларни ўзича қолдириб, параллеллар аксиомаси ўрнига ушбу аксиомани қа- бул қилиш мүмкин эди: *лоақола битта учбурчак бурчаклари- нинг йигиндиси $2d$ га тенгдир.* Бунинг натижасида, кўргани- миз каби, илгари параллеллар аксиомаси сифатида қабул қи- линган жумла теоремага айланади ва исбот бўлади. Геометрия курсининг бундан кейинги қурилиши одатлагидек борали.

Геометриядаги фактлар мажмуасини бузмасдан туриб*, па- раллеллар аксиомаси ўрнига олинини мүмкин бўлган да'волар- ни, *Евклид постулатига тенгкучули да'волар деб атаймиз.* Масалан, *учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ га тенг деган да'во Евклид постулатига тенгкучули.* Агар геометрия- дан Евклиднинг параллеллар ҳақидаги аксиомаси чиқариб ташланса, унинг блан бирга учбурчак бурчакларининг йигинди- си $2d$ га тенг деган да'вои ҳам чиқариб ташлашга тўғри келади.

§ 6. Ҳамма учбурчакларда бурчаклар йигиндиси бирхил деган да'во — Евклид постулатига тенгкучулидир.

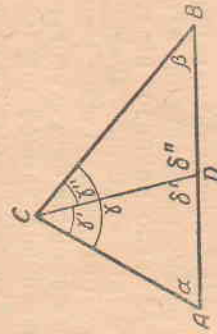
Евклиднинг параллеллар ҳақидаги аксиомаси ўрнига шун- дай да'вои қабул қилиш мүмкин: *ҳамма учбурчакларда бур- чаклар йигиндиси бирхилдир.* Агар шунга аксиома деб қабул қилсак, ундан Евклиднинг параллеллар ҳақидаги аксиомаси теорема тариқасида келиб чиқа- ди. Буни исботлайлик. Учбурчак бурчакларининг йигиндиси x блан белгилаймиз; у чоғда (чиз- ма 16):

1. $\alpha + \beta + \gamma = x$,
2. $\alpha + \gamma' + \delta' = x$,
3. $\beta + \gamma'' + \delta'' = x$,
4. $\delta' + \delta'' = 2d$.

Иккинчи ва учинчи тенглик- ларни қўшайлик:

$$\alpha + \gamma' + \delta' + \beta + \gamma'' + \delta'' = 2x, \text{ ёки } x + 2d = 2x; x = 2d.$$

Шундай қилиб, ABC учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ га тенг, бундан эса олдинги теоремага асосан, Евклид пос- тулати келиб чиқади. Лекин, аксинча, постулатдан учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ га тенг деган натижа чиққани



Чизма 16.

* Евклиднинг „Негизлар“ асаридаги фактлар кўзда тутилади.

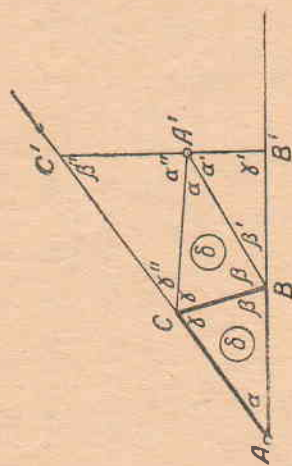
сабабли, ҳамма учбурчакларда бурчаклар йиғиндиси бирхил деб қўйилган талаб, Евклид постулатига тенгкучлидир. Эслатма. Ҳамма учбурчакларда бурчаклар йиғиндиси бирхил деган талабни қўймаслик ҳам мумкин эди. Бунинг ўрнига, бирор ABC учбурчакни CD тўғри чизиқ (чизма 16), ҳарбирида бурчаклар йиғиндиси, ABC учбурчакдаги бурчаклар йиғиндисига тенг бўлган иккита учбурчакка ($\triangle ACD$, $\triangle DCB$) бўлади деб фараз этиш қифоя қилади. Ҳозир кўрагимиздек, бундан бу учбурчак бурчаклари йиғиндисининг $2d$ га тенглиги келиб чиқади, демак (Лежандр-Саккерининг иккинчи теоремасига кўра), бу йиғинди ҳамма учбурчакларда бирхил бўлади. Юқоридагидек, параллеллар аксиомасининг ўрнига ушбуни олиш мумкин: *ҳамма учбурчакларда бурчаклар йиғиндиси бирхилдир*. Бу ҳолда тўғри чизиққа ётмаган нуқтадан шу тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ ўтказиш мумкин эмас деган да'вони теорема сифатида исботлаш мумкин ва геометриянинг келгуси тузилиши одадагидек боради.

Олимларнинг кўп асрлар давомида Евклид постулатини исботлаш йўлидаги уринишлари бу постулатга эквивалент жуда кўп да'воларнинг борлигини очиб берди. Уларнинг ҳарбирини Евклид аксиомаси ўрнига олиш мумкин, у чоғда аксиоманинг ўзи теорема ўрнига олади. Евклиднинг ўзи бу аксиомани ўзининг "Негизлар" деган асарида биринчи марга 29-нчи теоремани исботлаш вақтида қўллайди. Бундан олдинги 28 теоремани (уларни китобимизнинг кириш қисмида баён қилдик) у параллеллар аксиомасидан фойдаланмасдан исбот қилади. Кўп геометрларга бу аҳвол ғайритабиий кўринди ва параллеллар аксиомасининг ўзини ҳам улар етарлича аён эмас деб қарадилар. Бу аксиомани теоремалар қаторига киритиш, я'ни исботлаш йўлида уринишлар кўпаяборди.

Параллеллар аксиомасини исботлаш вақтида ба'зи олимлар, очик равишда кўрсатиб ўтмасалар-да, ҳамма учбурчакларда бурчаклар йиғиндисини бирхил фараз этиб, ундан сўнг постулатни осонлик билан "исбот" қилар эдилар. Ба'зан индамай қабул қилинадиган да'волар ичида, ҳатто авторнинг ўзи ва унинг танқидчилари учун ҳам яширин бўлган да'волар учрар эди. Бундай яширин равишда сезмасдан туриб киритилган да'воларнинг бирдан Лежандр фойдаланди. Унинг ёрдами билан Лежандр учбурчак бурчаклари йиғиндисининг $2d$ дан кичик бўлаолмаслигини "исботлади". Бу "исбот"нинг хатоси бўлматганда, ундан учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ га тенг деган хулоса чиқар эди, chunkи Лежандр-Саккерининг биринчи теоремасига кўра, бу йиғинди $2d$ дан катта бўлаолмайди. Лежандрнинг "исботига" асосан бу йиғинди $2d$ дан кичик ҳам бўлаолмайди, бундан эса, Евклид постулатининг исботи бевосита келиб чиққан бўлар эди. Лежандрнинг ўзи кейинча бу "исбот"нинг хатосини топди. Лежандрнинг хатоли бу исботини келтирайлик.

§ 7. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлаолмайди" деган теореманинг Лежандр томонидан ҳаголи исботи.

Исботни тескаридан олиб борамиз ABC учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлсин (чизма 17), я'ни $\alpha + \beta + \gamma = 2d - \delta$, бунда $\delta > 0$ бўлсин. $2d$ блан учбурчак бурчакларининг йиғиндиси орасидаги айрма учбурчакнинг нуқсонини (*дефекти*) дейилади. Нуқсонни δ блан белгиласак, $\delta = 2d - (\alpha + \beta + \gamma)$. Энди BC томонга нисбатан A га симметрик бўлган A' нуқтани ясайлик



Чизма 17.

($\triangle ABC$ ни ўткир бурчакли деб фараз қилиб, A' нинг BAC бурчак ичида ётиши тўғрисида натижа чиқарамиз; ABC исталган учбурчак бўлган ҳолда ҳам, A блан унинг энг катта бурчагини белгилаб, яна шу натижани ҳосил қиламиз). $A'BC$ учбурчак ABC учбурчакка тенгдир, chunkи улар бир-бирига симметрик, демак уларнинг тегишли бурчаклари ҳам тенг ва нуқсонлари бирхил. AB ва AC томонларни давом қилдирамиз (чизма 17) ва A' нуқтадан бурчак томонлари блан (B' , C' нуқталарда) кесинадиган тўғри чизиқ ўтказамиз. $AB'C'$ учбурчакнинг нуқсонини δ_1 блан белгилаб, унинг ABC учбурчак нуқсонининг икки барабаридан катталлигини кўрсатамиз, я'ни $\delta_1 > 2\delta$ тенгсизлиқни исботлаймиз.

$B'A'$ ва $C'A'$ учбурчаклар бурчакларини чизмада кўрсатилгандек қилиб белгилаймиз. У чоғда уларнинг нуқсонлари мос равишда шуларга тенг:

$$\delta' = 2d - (\alpha' + \beta' + \gamma'),$$

$$\delta'' = 2d - (\alpha'' + \beta'' + \gamma'').$$

Булардан ташқари ушбу тенгликларни ёзаоламиз:

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 2d,$$

$$2\beta + \beta' = 2d,$$

$$2\gamma + \gamma' = 2d.$$

Бу тенгликлардан фойдаланиб, $AB'C'$ учбурчакнинг нуқсонини топамиз; бу учбурчакнинг бурчакларини биз α , β' , γ' блан белгиладик. Демак

$$\delta_1 = 2d - (\alpha + \beta' + \gamma'), \text{ ёки } \delta_1 = [2d - (\alpha + \beta + \gamma)] + [2d - (\alpha + \beta + \gamma) + \gamma'] + [2d - (\alpha' + \beta' + \gamma')], \quad (A)$$

буни юқорида ёзилган тенгликлардан фойдаланиб текшириб кўриш осон. Ҳақиқатан, (А) тенгликнинг унғ томонини қис- қалик учун α блан белгилаб, шуни ёзамиз:

$$\alpha = 8d - 2(\alpha + \beta + \gamma) - (\alpha' + \beta' + \gamma') - (\alpha'' + \beta'' + \gamma'') = 8d - (\alpha + \alpha' + \alpha'') - (2\beta + \beta') - (2\gamma + \gamma') - (\alpha + \gamma' + \beta'') = 2d - (\alpha + \gamma' + \beta'').$$

Аммо (А) тенгликда қавслар ичида турган ифодалар тегиш- ли учбурчакларнинг нуқсонидир, демак биз шуни ҳосил қи- ламиз:

$$\delta_1 = \delta + \delta' + \delta'', \text{ ёки } \delta_1 = 2\delta + \delta' + \delta'';$$

лекин δ' , δ'' — мусбат сонлардир, шунинг учун $\delta_1 > 2\delta$; да'во исботланди.

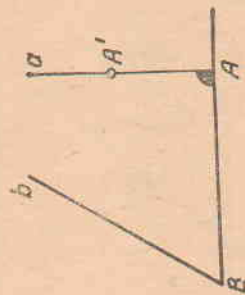
Ҳосил қилинган натижани сўзлар блан қуйидагича ифодалаш мумкин: агар ABC учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кичик ва унинг нуқсони δ га тенг бўлса, доимо шундай $AB'C'$ учбурчак яшаш мумкинки, унинг δ_1 нуқсони δ нуқсонининг икки бараваридан катта бўлади (исботнинг хатоллигини эсдан чиқар- майлик, бу хатонинг нимадан иборатлигини биз кейинроқ кўр- сатамиз). Энди учбурчак бурчаклари йиғиндисининг $2d$ дан кичиклиги тўғрисидаги теорема "исботига" хотима ясайлик. Я'ни: агар ABC учбурчакнинг нуқсони δ га тенг бўлса, юқо- ридагидек иш кўриб, нуқсони $\delta_1 > 2\delta$ бўлган учбурчак ясаймиз; бу охириги учбурчак учун ҳам яна юқоридагидек яшашларни бажариб, нуқсони $\delta_2 > 2\delta_1 > 2^2\delta$ бўлган учбурчак ясаймиз. Бу учбурчак учун ўз навбатида нуқсони $\delta_3 > 2\delta_2 > 2^3\delta$ бўлган уч- бурчак ясаймиз. Шу йўсинда давом этдириб, ниҳоят, нуқсонни $\delta_n > 2^n$ бўлган учбурчакни ясаймиз. Бундай яшашлар сонини билдиручи n ни етарлик катта олиб, нуқсони истаганча катта бўлган учбурчакни ҳосил қиламиз; лекин бу ҳолнинг юз бери- ши мумкин эмас, чунки $2d$ блан учбурчак бурчаклари йиғин- диси орасидаги айрма, я'ни $2d - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$ нуқсон, $2d$ дан катта эмасдир. Ҳосил қилинган зидлик, Лежандрнинг фикрича, учбурчак бурчаклари йиғиндисининг $2d$ дан кичик бўлаолмас- лигини исбот этади. Брок, *Лежандрнинг исботида хато бор*. Бу хато нозик ва муҳокамада унга жуда ҳам яширин равиш- да йўл қўйилган. Бу хатони ўқучининг ўзи топишга ҳара- кат қилиб кўрсин; бунинг оғирлиги ўқучига равшан бўлади.

Гап шундаки, муҳокама олиб борган вақтда Евклид посту- латига аслида тенгкучли бир да'во яширин равишда исботсиз қабул қилинган эди. $AB'C'$ учбурчакнинг ясалшини эсга олай- лик (чизма 17). BAC бурчак ичида олинган A' нуқтадан $B'A'$ кесучини ўтказиб, бу кесучи BAC бурчак (AB, AC) томонла- рининг иккаласи блан ҳам кесинади деган да'вои исботсиз қабул қилган эдик. Бошқача айтганда, ушбу да'во исботсиз қабул қилинган: BAC бурчак ичида қандай A' нуқтани олсак ҳам, доимо унинг орқали, бурчакнинг иккала томони блан ҳам кесинадиган тўғричилик ўтказиш мумкин. Бу да'вонинг

Евклид постулатига тенгкучли эканлигини 8-нчи параграфда исбот қиламиз. Постулатга тенгкучли да'вога асосланиш, шу по- стулатнинг ўзига асосланишдан бошқа нарсани исботлаш вақтида, гап шундаки, параллеллар ҳақидаги аксиомани исботлаш жум- узимиз билмайтуриб, унинг ўзини тўғри деб, ундан бошқа жум- ла ниқобига ўралган ҳолда фойдаланиб келамиз. Демак биз, "ўша нарсани ўша нарсанинг ўзи орқали" исботлаган бўламиз. Исбот- да йўл қўйиладиган бу каби хатолар логикада "айланабериш" деб айтилади*.

§ 8. Евклид постулатига эквивалент яна бир да'во — бурчак ичидаги исталган нуқтадан бурчакнинг иккала томони блан ҳам кесишувчи тўғри чизик ўтказиш мумкин.

Буни исботлаш учун, Евклид постулати қабул қилинган деб фараз этайлик. Бу постулатни қуйидагича ифодалаш ҳам мум- кин: AB тўғри чизикқа ўтказилган a перпендикуляр ва b оғма доимо кесинади (чизма 18),



чизма 18.

акс ҳолда, B нуқтадан a тўғри чи- зикқа AB га ўтказилган перпенди- кулардан бошқа иккинчи параллел ўтказиш мумкин бўлар эди; Евклид постулати қабул қилинган тақдирда, бу ҳол юз бераолмайди. Бу муҳо- камалардан сўнг, бурчак ичидаги исталган A' нуқтадан B бурчак- нинг иккала томони блан ҳам ке- синадиган кесучини ўтказиш мум- кинлиги бизга равшан бўлиб қолмоқ- да; бунинг учун, A' дан AB га перпендикуляр тўғри чизик ўтказиш кифой қилади. Бунинг тескарисини ҳам кўрсатамиз. Я'ни: агар B бурчакнинг истаган A' нуқтасидан, бурчак томон- ларининг иккаласи блан ҳам кесинадиган тўғри чизик ўт- казиш мумкин бўлса, у чоғда Евклид постулатини исботлаш мумкин. Бу теоремани исбот қилинган деб айтишимиз мумкин; брок, буерда кўрсатилган шаронгта учбурчак бурчаклари йи- гиндисининг $2d$ дан кичик бўлаолмаслигини қат'ий исботлаш керак бўлади; келтирилган да'вои қуйидагича ифодаласак, исботни ҳосил қилиш осонлашади: агар A бурчак ичида- ги исталган A' нуқтадан бурчак томонларининг иккаласи блан ҳам кесишувчи тўғри чизик ўтказиш мумкин бўлса, учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлаолмай- ди. Бу шартли жумлани исботлашда Лежандрнинг муҳокама- рини сўзма-сўз такрорлаш мумкин (§ 7 га қаранг); шу форма- да бу муҳокамалар хатодан ҳолидир. Демак, аввалдан Лежандр

* Виноградов, Кузьмин—Логика (мантик), Тошкент, 1949 йил, бет 167, §950 йил, бет 164.

диқат бермаган да'вонинг Евклид постулатига тенгкучли эканлиги исбот қилинди. Геометрик системани қуришда параллеллар аксиомаси ўрнига, устида сўз бораётган да'вони қабул қилиш мумкинлигини энди англаш қийин эмас. У чоғда постулатнинг ўзи теорема ўрнини босади.

§ 9. Ўхшаш, лекин тенг бўлмаган иккита учбурчак мавжуд, деган жумла Евклид постулатига тенгкучлидир.

Бу да'вони инглиз математиги Валлис киритди ва уни исботлади. Параллеллар назарияси блан шуғулланиб келган кўп олимлардан Валлиснинг фарқи шундаки, Валлис ўхшаш фигураларнинг мавжудлиги ҳақидаги фаразни Евклид постулати ўрнига олиш мумкин деб онгли равишда тасдиқлади. Бунни исботлайлик.

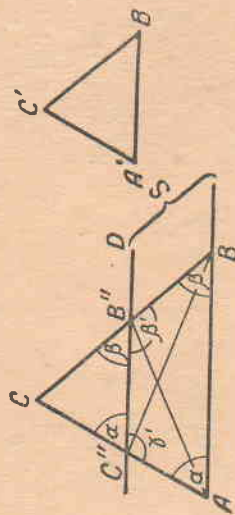
I. Тўғри теорема. Евклид постулати қабул қилинса, у чоғда бундан, бир-бирига тенг бўлмаган, лекин ўхшаш учбурчаклар мавжуд деган хулоса чиқади.

Параллеллар аксиомаси қабул қилинган элементар геометрия курсидан бундай учбурчакларнинг мавжудлиги маълумдир.

II. Тескари теорема (Валлис теоремаси).

Агар бурчаклари мос равишда тенг ва ўзлари тенг бўлмаган иккита учбурчак мавжуд бўлса, берилган тўғри иккита тўғри чизик ўтказиш мумкин эмас.

Исбот. ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар ўзаро тенг эмас, лекин мос равишда тенг бурчакларга эга бўлган (чизма 19). AC томон $A'C'$ томонга тенг бўлаолмайди, чунки $AC = A'C'$ ҳолда бу учбурчаклар, биттадан тенг томонларга ва бу томонларга ёпишган тенг бурчакларга эга бўлиб ўзлари ҳам тенг бўлар эдилар. Аниқлик учун, $AC > A'C'$ деб фараз қилайлик. CA томонда шундай C'' нуқтани оламизки, $CC'' = C'A'$ бўлсин ва C'' нуқтадан шундай $C''D$ тўғри чизик ўтказамизки, $\angle CC''D = \angle C'A'B'$, демек $\angle CC''D = \angle A$ бўлсин. $C''D$ тўғри чизик BC томон блан B ва C орасидаги нуқтада кесишади. Ҳақиқатан, $C''D$ тўғри чизик AB блан кесишаолмайди, чунки бу тўғри чизиклар AC кесучи блан бир-бирига тенг мос бурчакларни ва демак, бир-бирига тенг олмошинучи бурчакларни ташкил қилади; бундай тўғри чизикларнинг кесишмаслигини эса биз биламиз.



Чизма 19.

Шундай қилиб, учбурчак учларининг бирдан ҳам ўтмай CA томон блан C'' нуқтада кесишган ва AB томон блан кесишмайдиган тўғри чизик ҳосил бўлади; Паш постулатига кура, у BC томон блан B ва C орасидаги B'' нуқтада кесишади. Ҳосил қилинган $CC''B''$ учбурчак $C'A'B'$ учбурчакка тенгдир, чунки $CC'' = C'A'$ ва бу томонларга ёпишган бурчаклар мос равишда тенг. Аммо бу ҳолда $ABV''C''$ тўртбурчакда бурчаклар йиғиндиси $4d$ га тенг, чунки $\alpha + \gamma' = 2d$ ва $\beta + \beta' = 2d$ (чизмага қараң). $ABV''C''$ тўртбурчакни AB'' диагональ блан ABV'' ва $AC''B''$ дан иборат икки учбурчакка бўламиз ва буларнинг ҳарбиридаги бурчаклар йиғиндисининг $2d$ га тенглигини исбот қиламиз; ҳақиқатан, буларнинг биридаги йиғинди $2d$ дан кичик бўлса, иккинчисидagi йиғинди $2d$ дан катта бўлиши керак эди; чунки бирга олинган бу икки йиғинди, $ABV''C''$ тўртбурчак бурчакларининг йиғиндисини (я'ни $4d$ ни) ташкил қилиши керак. Аммо Лежандр-Сакерининг биринчи теоремасига кура, учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан катта бўлаолмайди. Шундай қилиб, бир-бирига тенг бўлмаган ўхшаш икки учбурчакнинг мавжудлиги тўғрисидаги фараздан, бурчакларнинг йиғиндиси $2d$ га тенг учбурчакларнинг мавжудлиги ва бундан эса — Евклид постулати келиб чиқади.

Натижада Евклиднинг параллеллар аксиомаси ўрнига бундай аксиомани қабул қилиш мумкин: *бурчаклари мос равишда тенг ва ўзлари тенг бўлмаган иккита учбурчак мавжуддир*. Параллеллар аксиомасининг ўзи теорема ўрнини олади. Геометрик системамиз илгаригидек қолади. Агар Евклид геометриясида фигураларнинг ўхшашлиги ҳақидаги та'лимотнинг (бу та'лимотнинг параллеллар назариясига бошдан-оёқ суянишни биз ҳозиргина исботладик) нақадар катта роль ўйнаганини эсга олсак, Евклид постулатининг бутун геометрик система учун муҳимлигини кўриб турамыз. Параллеллар постулати киритилмаса, фигураларнинг ўхшашлиги тўғрисидаги та'лимот ва ундан келиб чиқаётган ҳамма натижалар ҳам мавжуд бўлмас эди.

§ 10. Евклид постулатининг яна бир сохта исботи (Клавий).

Аввал Клавий томонидан берилган бу исботни келтирамиз ва ундан сўнгра, ўзи параллеллар аксиомасига тенгкучли бўлиб, исботлаш вақтида сезилмай қолган постулатни кўрсатиб ўтамиз.

Бирор α тўғри чизикни олайлик. Бу тўғри чизикнинг учта A, B, C нуқталарида узунликлари тенг учта перпендикуляр чиқарамиз: AA_1, BB_1, CC_1 (чизма 20). $A_1B_1C_1$ тўғри чизикни b блан белгилаб, учта тўртбурчакни олайлик: $AB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1$. Бу тўртбурчаклар Саккери тўртбурчакларидир. Демак, A_1 бурчак биринчи тўртбурчакдаги B_1 бурчакка тенгдир. Бу бурчакларни α блан белгилайлик. Шу сингари учинчи тўртбурчакдаги A_1 бур-

чак C_1 бурчакка тенг, иккинчи тўртбурчакдаги B_1 бурчак эса C_1 бурчакка тенг, b тўғри чизиқнинг B_1 нуқтада бир-бирига тенг икки қўшни бурчак ҳосил бўлди, демак уларнинг ҳар бири тўғри бурчакка тенгдир, я'ни $\alpha = d$. Демак, қаралаётган тўртбурчакларнинг ҳар бири тўртта тўғри бурчакка эгадир. Бу тўртбурчакларни диагональлар билан иккита учбурчакка бўлиб, буларнинг ҳар биридаги бурчаклар йиғиндисининг $2d$ га тенг бўлишини кўрамиз; бундан эса, Евклид постулатининг қандай келиб чиқиши бизга ма'лум.

Бу муҳокамаларни юргизиш вақтида, юқорида кўрсатиб ўтганимизча, Евклид постулатининг ўзига эквивалент бир да'водан яширин равишда фойдаландик. a тўғри чизиқдан бир тарафда ва бирхил масофада ётувчи учта A_1, B_1, C_1 нуқтани олиб, биз уларни бир тўғри чизиққа ётади деб ҳисобладик; бу фарзнинг ўзи эса, параллеллар аксиомасига эквивалентдир.



Чизма 20.

Бундан келиб чиқади, чунки Евклид постулати қабул қилинган бўлса, бу учта нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётиши элементар геометрия курсларида исбот қилинади. Биз тескарисини исботладик: бундай учта нуқта бир тўғри чизиқда ётса, Евклид постулати кучга эгадир.

Бирор a тўғри чизиқдан бир тарафда жойлашган ва ундан баравар узоқликда турган учта нуқта, бир тўғри чизиққа ётади деган фарз, Евклид геометрияси системасини қуришда параллеллар аксиомасининг ўрнига олиниши мумкин. Бу чоғда геометрия системаси, дастлабки боблар тузилишидагина озроқ ўзгаради. Системадаги жумлаларнинг ҳаммаси ўзича қолиб, фақат параллеллар аксиомаси теоремалар қаторига ўтади; аксиома ўрнини қаралаётган да'во эгаллайди.

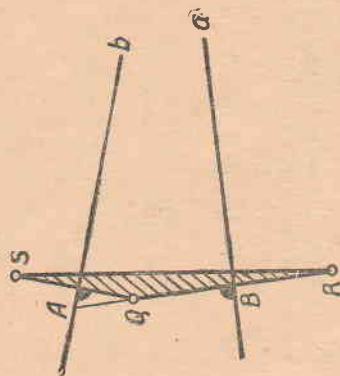
Клавийнинг талабини биз бирқадар кучсизлантирдик. Клавийнинг ўзи умумийроқ талабни қўйган эди: *тўғри чизиқдан бир тарафда жойлашган ва ундан ма'лум масофада турган нуқталарнинг геометрик ўрни, тўғри чизиқдан иборатдир.*

§ 11. В. Болиан теоремаси.

В. Болиан теоремаси: *агар бир тўғри чизиқда ётмаган ихтиёрий учта нуқтадан айлана ўтказиш мумкин бўлса, бундан Евклиднинг параллеллар туғрисидаги аксиомаси келиб чиқади.*

Исбот. Теореманинг шarti бир тўғри чизиққа ётмаган учта нуқтадан баравар масофада ётган O нуқта (ташқи чизилган айлана маркази) нинг мавжудлигини тасдиқлайди. Евклид

постулатини исботлаш учун, бир тўғри чизиққа ўтказилган перпендикуляр ва оғманинг бир-бири билан ҳаммавақт кесилишини исботлаш етарлидир. Фараз этайлик, a тўғри чизиқ BA га перпендикуляр ва b унга оғма бўлсин (чизма 21). AB кесмада ихтиёрий Q нуқтани оламиз ва a, b тўғри чизиқларга нисбатан Q га симметрик бўлган R, S нуқталарни ясаймиз. Q, R, S нуқталар бир тўғри чизиққа ётмайди, чунки QS кесма b тўғри чизиққа перпендикуляр, QR эса $-b$ га оғмадир. Аммо шартга мувофиқ Q, R, S нуқталардан баравар узоқлашган O нуқта мавжуддир.



Чизма 21.

Ўрнидан иборат a тўғри чизиқ O' нуқтадан ўтади. Q, S нуқталардан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборат b тўғри чизиқ ҳам O нуқтадан ўтади. Демак, a ва b тўғри чизиқлар, QRS учбурчакка ташқи чизилган айлана маркази бўлган O нуқтадан ўтади. BA тўғри чизиққа оғма бўлган b ва унга перпендикуляр a бир-бири билан доимо кесишади. Бундан эса, A нуқта орқали a тўғри чизиққа иккита параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин эмас деган хулоса чиқади.

Шуни ҳам айтиб ўтиш керакки, *истаган учбурчакка ташқи чизилган айлананинг мавжудлиги туғрисидаги фарздан Евклид постулатини осонлик билан исбот қилинишини* В. Болиан онгли равишда тасдиқлаган эди.

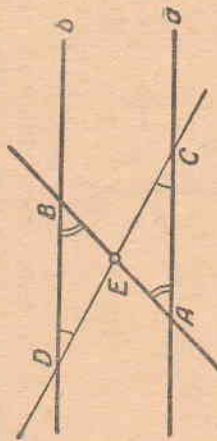
§ 12. Евклид постулатига эквивалент яна бир аксиома.

Текисликда бир-бири билан кесилмайдиган тўғри чизиқларнинг мавжудлиги бизга ма'лум. Бундай тўғри чизиқларнинг мавжудлигини исботлаш учун параллеллар аксиомаси талаб қилинмайди. Ҳозир биз ушбу да'вони исбот қилмоқчимиз: *умумий нуқтада бўлмаган икки тўғри чизиқ истаган тўғри чизиқ билан кесилганда бир-бирига тенг икки олмошини* уч бурчаклар ҳосил қилса, бундан Евклиднинг параллеллар аксиомаси келиб чиқади.

Исбот. Фараз этайлик, a, b — бир-бири билан кесилмайдиган тўғри чизиқлар, c — шу тўғри чизиқларда мос равишда ётувчи A, B нуқталардан ўтадиган кесуви бўлсин (чизма 22).

a тўғри чизиқда C нуқтани ва b тўғри чизиқда D нуқтани шундай оламизки, улар AB тўғри чизиқдан турли тарафда жойлашсин ва AC кесма BD га тенг бўлмасин, я'ни $AC \neq BD$. Сўнгра DC тўғри чизиқни ўтказамиз, у AB билан A ва B ора-

сидаги E нуқтада кесишади. Бу чоғда AEC ва BED учбурчакларнинг бурчаклари мос равишда тенг бўлади, яъни бу учбурчаклар ўхшашдир. Чизмада белгиланиб қўйилган бурчаклар, кесучиларнинг a, b блан ташкил қилган бурчаклари бўлганидан, шартга кўра, бир-бирига тенгдир. E нуқтадаги бурчаклар, вертикал бўлганликлари сабабли, тенгдир. Қаралаётган учбурчаклар тенг эмас, чунки ясашга асосан $AC \neq BD$; Валлис теоремасига асосан бундан Евклид постулати келиб чиқади.



Чизма 22.

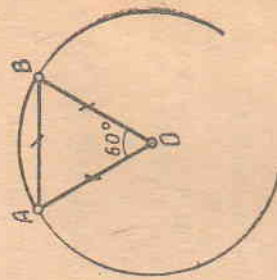
зиқ блан кесишиб, бир-бирига тенг ички-оғмошини уч бурчаклар ҳосил қилади. Бунинг исботи геометриянинг ҳарбир дарслигида бор. Тўғри ва тескари теоремалар исбот қилиниб бўлгандан кейин, бу параграфда келтирилган да'во блан Евклид постулатининг эквивалентлиги аниқланади.

§ 13. Ички чизилган олтибурчак томони радиусга тенг деган жумла—Евклид постулатига эквивалентдир.

Евклид постулатига эквивалент да'волар қаторидан яна бир (охирги) да'вони келтирайлик. Доирага ички чизилган мунтазам олтибурчак томонининг бу доира радиусига тенглиги, элементар геометриядан маълумдир. Бу теореманинг исботи, учбурчак бурчаклари йнгииндисининг $2d$ га тенглигига асосланади. Бу эса, параллеллар аксиомасидан фойдаланишдир. Содиқ бўлган аҳвол тасдиқий эмас, чунки ички чизилган мунтазам олтибурчакнинг томони радиусга тенг деб айтиш Евклиднинг параллеллик аксиомасига тенгқучдир.

Теорема. Агар доирага ички чизилган мунтазам олтибурчакнинг томони шу доиранинг радиусига тенг бўлса, бундан Евклиднинг параллеллик постулати келиб чиқади.

Ҳақиқатан, айлананинг олтидан бир қисмидан иборат AB ёйга тиралган марказий бурчак 60° га тенгдир; фаразга кўра, $AB=OB$, лемак OAB учбурчакнинг OA асосидаги бурчаклари ўзаро тенгдир (чизма 23).



Чизма 23.

OA радиус OB радиусга тенглиги учун $\angle A = \angle B$. Демак учбурчак бурчакларининг йнгииндис $2d$ га тенг; бундан Евклид постулати келиб чиқади*.

Бу теоремалан фойдаланиб, Евклиднинг параллеллар аксиомасини тажрибада сынаб кўришимиз мумкин-ку, деган фикр ҳам туғилади. Яхшидаб текисланган моддий текисликда айлана чизиб ва ўлчов асбоби блан айлана бўйлаб "саёхат" қилсак, олти кадам бостандан сўнг дастлабки вазиятимизга келишимиз керак эди. Лекин бу амалий "исбот" қанчалик ишончли бўлса-да, бу сингари тажрибалар геометрия чегарасидан четга чиқади. Физикада (нисбийлик назариясида) қаттиқ jismlar ва масштаблар хоссалари Евклид геометриясининг қонуналарига итоат этмайди деб да'во қилинади. Қаттиқ jismlar хоссаларини тавсифлаш учун Евклид геометриясидан бошқа геометрия керак.

Фазонинг тузилишини, яъни табиатини белгилловчи тажрибаларга долр масалаларга Лобачевский ва Гауссинг ўзлариёқ қизиқишган эди. Масалан, Ганноверда ташкил қилинган геодезия ишларига раҳбарлик қилиб, Гаусс, томонлари 10 км дан ошдиқ бўлган учбурчак бурчакларининг йнгииндисини тоғат даражада диққат блан ўлчаган эди. Лекин асбобларнинг мумкин аниқлик чегарасида бу йнгиинди $2d$ дан фарқ қилмади. Лобачевский, томонларидан бири бирнеча ёруғлик йилларидан иборат космик учбурчак бурчакларининг йнгииндисини ўлчаб, ўлчаш асбобларнинг аниқлик чегарасида $2d$ га тенг йнгииндини ҳосил қилди.

Евклид постулатига эквивалент да'воларни келтиришни тасмолладиқ. Уларни яна ҳам давом эттирсак бўлади. Евклид постулатини кўп асрлар давомида исботлаш йўлидаги уринишлар "айланабериш"дан иборат эди, яъни улар "ўша нарсани ўша нарса орқали" исботлар эдилар. Постулатни исботлай туриб, яъни теоремалар қаторига кириштига интилатуриб, ҳамма авторлар постулатнинг ўзига эквивалент бўлган қандайдир бир жумладан фойдаланар эдилар.

XVIII ва XIX асрнинг бошида яшаган йирик геометрларда Евклид постулатининг умуман исбот қилиб бўлмаслиги туғрисида э'тиқод ҳосил бўлабошлади. Уларнинг ичида бизнинг ватандошимиз Николай Иванович Лобачевский бошқаларга қараганда инқилобий йўлдан борди. Евклид постулатини ташлаб, унинг ўрнига ма'но жиҳатдан тескари аксиомани қабул қилди ва янги геометрияни ижод этди. Бу янги геометрия Лобачевскийнинг гайриевклид геометрияси деб аталади. Лобачевскийнинг геометрияси математиканинг ўзида ва унга яқин фанларда кўп қўлланади. Масалан, нисбийлик назарияси, Лобачевскийнинг геометрик ғоялари ривожланиб кетмаганида, вужудга келмастмас эди.

*Академик Буныковский [5] китобида Евклид постулатига эквивалент да'волар ҳақида кўп нарса оор. Гайриевклид геометрияни тушунамслик назариясида, Буныковский кўп теоремаларга жуда оғир исботларни беради. Агар Евклид постулатига эквивалент да'воларни "Лобачевский геометриясида ўринли" деб ўқилса (китобимизнинг II бобидагидек), Буныковский китоби Лобачевский геометриясининг бошланғич боби хизматини ўташи мумкин.

a тўғри чизиқда ётмаган *A* нукта орқали (*Aa*) текислиكنинг *a* тўғри чизиқ ва *A* нукта блан аниқланучи текисликда, *a* тўғри чизиқ блан кесилмайдиган ҳеч бўлмаганда иккита *c* ва *b* тўғри чизиқ ўтади.

Бу постулатдан, *A* нукта орқали (*Aa*) текислиكنинг *a* тўғри чизиқ блан кесилмайдиган чексиз кўп тўғри чизиқлари ўтади деган хулоса чиқади. Масалан, маркази *A* нуктадан ва ўзлари *bAC* бурчак блан унга вертикал бўлган бурчакда ётучи барча тўғри чизиқлар дастаси шундай тўғри чизиқлардан иборатдир (чизма 24).

Буни ксбоблайлик. *b* тўғри чизиқда шундай *B* нуктани оламизки, *b* нукта блан *a* тўғри чизиқ *c* тўғри чизиқдан турли тарафда ёлсин. *B* ни *a* тўғри чизиқнинг бирор *D* нуктаси блан туташтирайлик. *BD* кесмас *c* тўғри чизиқ блан бирор *C* нуктада кесиллади. *N, BC* кесманинг ихтиёрый нуктаси бўлсин.

AN тўғри чизиқ *a*

блан кесилмайди. Ҳақи-

қатан, агар *AN* тўғри чи-

зиқ *a* блан *A* дан *N* га

сорган йўналишдаги *S*

тини учбурчак *NDS* ва *c*

DS блан *D* ва *S* орасидаги

келар эдик; аммо бу, қилинган

чунки *c* тўғри чизиқ *a* блан

эди. *NA* тўғри чизиқ *a* блан

S' нуктада кесиллади десак,

Паш постулатини *b* тўғри

лаш кифоядир.

Лобачевский постулатини

мумкин, я'ни постулатдаги

ва ма'лум бир *A* нукта учун

кин. Бундан сўнгра, да'вонинг

ва *A*₁ нуктадан ўтмаган ҳарқандай

лаш мумкин.

Ҳақиқатан, *A* нукта ва *a*

постулати бажарилган бўлсин.

чизиқ учун Лобачевский постулати

қилиб, *A*₁ ва *a*₁ учун Евклид постулати

сага келамиз. Евклид постулатининг

тўғри чизиқ учун бажарилшидан,

чизиқ ва унда ётмаган ҳарқандай

лиги келиб чиқади. Бу эса, олинган битта A нуқта блан битта a тўғри чизик учун қабул қилинган Лобачевский постулатига зиддир.

§ 15. Лобачевский текислигида учбурчак бурчакларининг йигиндиси.

Энди Лобачевский текислигида жойлашган учбурчак бурчаклари йигиндиси масаласи блан шугулланайлик. Бу йигиндининг $2d$ дан кичик бўлишини тushуниш осон. Ҳақиқатан, бу йигинди $2d$ га тенг бўлса, бундан Евклиднинг параллеллик постулати келиб чиқар эди; аммо биз Лобачевский текислиги блан иш кўрмоқдамиз; шу сабабли, учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ га тенг деган фарз зидликка келтиради. Аммо Лобачевский текислигида, ва шунингдек Евклид текислигида ҳам, учбурчак бурчакларининг йигиндиси $2d$ дан ошиқ бўлаолмаслиги сабабли, бу йигинди $2d$ дан кичик бўлиши керак. Бундан ташқари олдинги муҳокамалардан (§ 6), Лобачевский текислигидаги турли учбурчак бурчаклари йигиндисининг умуман айтганда турли эканлиги келиб чиқади. Бошқача айтганда, учбурчак бурчакларининг йигиндиси бир учбурчакдан иккинчисига ўтганда ўзгариб туради, чунки бу йигинди ҳамма учбурчакларда бирхил бўлса, бу ҳолда Евклид постулати юз берган бўлар эди. Олдинги муҳокамалардан Лобачевский текислигида ушбу теореманинг мавжудлиги келиб чиқади: агар бир учбурчакнинг учта бурчаги иккинчи учбурчакнинг учта бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар бир-бирига тенгдир.

Теореманинг даъвосига қарши, бундай учбурчаклар тенг бўлмаса, улар ўхшаш бўлар эди; аммо Валлиснинг теоремасига асосан, бу ердан Евклид постулати келиб чиқар эди; Лобачевский текислигида эса Евклид постулати кучга эга эмас. Ҳосил қилинган зидлик теоремани исбот этади. Биз Лобачевский текислигида учбурчаклар тенглигининг яна бир аломати пайдо бўлганини кўриб тураемиз; бу аломат Евклид текислигида кучга эга эмасдир. Валлис теоремасидан, Лобачевский текислигида ўхшаш фигуралар йўқ деган хулоса ҳам келиб чиқади. Лобачевский геометриясининг яна бир ажойиб теоремасини та кидлаб ўтамиз. Бу теорема кесма блан бурчак орасидаги боғланишга доирдир.

Лобачевский геометриясида ҳарбир бурчак ($< \pi$) бирқийматли равишда кесмани аниқлайди.

Томонлари берилган кесмага тенг бўлган тенгтомонли учбурчак ясакак, теоремадаги даъонинг тўғрилигига ишонч ҳосил қилаемиз; бундай учбурчак тенбурчакли ҳам бўлади. Бу учбурчакнинг бурчаги берилган кесма блан аниқланиб, тайин ва бирдан-бир бурчак бўлади. Биринчи кесмага тенг бўлмаган бошқа кесмани олиб, яна тенгтомонли учбурчак ясакак, унинг

бурчаги биринчи учбурчакнинг бурчагига тенг бўлаолмайди, чунки акс ҳолда, бу учбурчаклар тенглигининг ҳозиргина ҳосил қилинган янги аломатига зидлик қилар эди. Тенгтомонли ҳарбир учбурчак бурчагининг катталиги учбурчак томонига боғлиқдир. Бир-бирига тенг бўлмаган тенгтомонли иккита учбурчакнинг бурчаклари ўзаро тенг эмасдир. Лобачевский геометриясида ўхшашлик тўғрисида таълим йўқ, лекин унинг ўрнига кесмалар блан бурчаклар орасида ажойиб боғланиш бор. Евклид геометриясида бундай боғланиш мавжуд эмасдир.

§ 16. Бурчакнинг бир томони блан кесишмай, унинг иккинчи томонига перпендикуляр бўлган тўғри чизик ҳақидаги теорема.

Евклид постулатига Лежандр томонидан берилган сохта (ёлгондакам) исботлан фойдаланиб, Лобачевский геометриясининг ушбу теоремасини ҳосил қилаемиз: ҳарбир ВОС бурчак ичида шундай A нуқталар борки, бу нуқталар орқали бурчакнинг иккала $ОВ$ ва $ОС$ томонлари блан ҳам кесишувчи тўғри чизиклар ўтказиш мумкин эмасдир (чизма 25). Бошқача айтганда, бундай A нуқтадан ўтувчи тўғри чизик, бурчакнинг бирор томони, масалан, $ОВ$ блан кесишса, бу тўғри чизик ВОС бурчакнинг иккинчи томони $ОС$ блан ҳеч жойда кесишмайди. Ҳақиқатан, A нуқта ВОС бурчак ичидаги қандай нуқта бўлса-да, A орқали бурчакнинг иккала томони блан ҳам кесишадиган тўғри чизик ўтказиш ҳамавақт мумкин деб фарз қилинса, у чоқда буердан Лежандр муҳокамаларига асосан Евклид постулати келиб чиқади; Лобачевский текислигида эса, Евклид постулати кучга эга бўлиши мумкин эмас. Бу жумлага бошқачароқ шаклни бериб, уни ўзгартиш мумкин. Лобачевский геометриясида ушбу муҳим теорема кучга эгадир: ДОС ўткир бурчак қандай бўлса-да, доимо шундай тўғри чизик мавжудки, у бурчакнинг бир томонига перпендикуляр бўлиб, иккинчи томони блан кесишмайди (чизма 25).



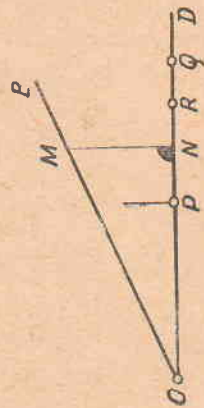
Чизма 25.

A блан ДОС бурчакнинг шундай нуқтасини белгилайликки, ундан бурчакнинг ҳар иккала томони блан кесишувчи битта ҳам тўғри чизик ўтказиш мумкин бўлмасин. A нуқтадан OD томонга AB перпендикуляр тушириб, теоремада айтилган перпендикулярни ҳосил қилаемиз.

Шуни эсда тутиш керакки, Лобачевский постулатини қабул қилган тақдирда, биз ундан чиққан хулосаларни ҳам, улар қанчалик ғалағи, ғайритабиий бўлса-да, қабул қилишга мажбурмиз. Лобачевский сўзларини келтирайлик: "Менинг томо-

нимдан ҳаёлий деб аталган геометриянинг теоремалари биринчи қарашда, я'ни синчиклаб, ҳартаврафлама мунозара қилинмаса, умуман зидликка йўл қўяди деб ўйлаш мумкин; лекин шунни айтиб ўтиш лозимки, гарчи улар бизнинг кундалиқ тасаввуримиз ва идрок қилишимизга зидлик қилса-да, аммо улар мантикий жиҳатдан қўсурғандир*.

Лобачевскийнинг ҳаёлийлигида унинг ғояларини бошқалар тушунмадилар; у ўзининг яратган геометриясини э'тироф этилишига эришаолмайди. Лобачевский даврида яшаган ҳатто отоқли математиклар кундалиқ фазовий тасаввуримизда юз берган бу зидлик, Лобачевский геометрияси "бема'ни" деб ҳудоса чиқариш учун ҳал эғучи асос деб ҳисоблар эдилар. Лобачевскийнинг ижодини ўша замонда яшаган деярлик ҳамма математиклар тушунаолмади. Фазовий тасаввуримизга, аёнликка қанча зид бўлса-да, ўқучи Лобачевский геометриясидан чиқадиган ҳамма ҳулосаларни, улар, фақат мантикий жиҳатдан зарур бўлишига итоат қилиб, қабул қилишга тайёр бўлиши керак. Геометрияни ўрганишда фойдаланиладиган чизма ва шакллар шартли бир рольни ўйнайди; Лобачевский ёки барибир Евклид геометриясини ўрганишда чизмалар ва



Чизма 26.

шакллар муҳим аҳамиятга эга эмасдир.

Энди BOD бурчакнинг OD томонига ўтказилган перпендикулярларга қайтайлик. Биз, исталган ўтқир BOD бурчакнинг OD томонига шундай нуқталарнинг борлигини аниқладикки, у нуқталарда OD га ўтказилган перпендикулярлар OB блан кесишмайди (чизма 26). Иккинчи томондан, OD да шундай нуқталар ҳам албатта борки, улардаги перпендикулярлар OB томон блан кесишади. OB блан кесишадиган бу перпендикулярларни ҳосил қилиш осон: OB тўғри чизиқда исталган M нуқтани олиб, ундан OD га перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг N асоси шундай нуқталар қаторига кирядики, улар орқали OD га ўтказилган перпендикулярлар OB томон блан кесишади. N нуқтадан чаплагич, я'ни O ва N орасидаги ҳамма нуқталар шундай синфга кирядики, улардан OD га ўтказилган перпендикулярлар OB томон блан кесишади. Ҳақиқатан, P нуқтада OD га ўтказилган перпендикулярлар ONM учбурчакнинг ON томонини O блан N орасидаги нуқтада кесиб ўтади; айни вақтда бу перпендикуляр NM томон блан кесишмайди, чунки бир тўғри чизиққа ўтказилган икки перпендикуляр ўзаро кесишмайди. Демак, Пашнинг постулатига асосан бу перпендикуляр OM томон блан O ва M учлар орасидаги нуқтада кесишади; биз шунини исботлаганмиз. Хул-

лас, ушбу натижага келамиз: агар OD тўғри чизиқнинг Q нуқталарида OD га ўтказилган перпендикулярлар OB блан кесишмаса, унинг N нуқталарида ўтказилган перпендикулярлар OB блан кесишса, Q нуқталарнинг ҳаммаси исталган N нуқтадан бир тарафда, я'ни O нуқтани ўз ичига олмаган тарафда ётади. Шундай қилиб, OD нурнинг ҳамма нуқталари икки синфга бўлинади. Биринчи синфга бу нурнинг шундай P нуқталарини киритамизки, улардан OD га чиқарилган перпендикулярлар OB блан кесишади. Иккинчи синфга шундай Q нуқталарни киритамизки, улардан OD томонга ўтказилган перпендикулярлар OB томон блан кесишмайди. Биз икки нарсани исботладик: биринчидан, ҳам биринчи синфга, ҳам иккинчи синфга киручи нуқталарнинг борлигини ва OD нурдаги ҳарбир нуқтанинг бу синфлардан бирига қиришини; иккинчидан, биринчи синфга қарашли ҳарбир нуқтанинг, иккинчи синфга қарашли ҳамма нуқталардан бир тарафда ётишини. OD нурнинг нуқталарини бу равишда икки синфга шу нурдаги бирдан-бир R нуқта бўладики, 1-нчи синфнинг ҳамма P нуқталари R нуқтадан бир томонда ётади (чизмада чап томон), ва 2-нчи синфнинг ҳамма Q нуқталари R нуқтанинг бошқа томонида ётади (чизмада ўнг томон). R нуқтанинг ўзи бу синфларнинг биринчисига ҳам, иккинчисига ҳам қарашли бўлиши мумкин. R нуқтанинг қайси синфга қиришлигини билиш учун қўшимча текшириш ўтказилади*.

R нуқтанинг иккинчи синфга қарашли бўлишини, я'ни R дан OD га чиқарилган перпендикулярнинг OB томон блан кесишмаслигини исбот қилайлик. Ҳақиқатан, агар бу перпендикуляр OB блан бирор S нуқтада кесишса, S нинг O нуқта ётмаган томонида T нуқтани олиб ва ундан OD га перпендикуляр тушириб, шундай N нуқтани ҳосил қилган бўлар эдикки, у биринчи синфга қарашли бўлатуриб, R нуқтадан ўнг томонда ётади; бу эса, биринчи синфдаги ҳамма нуқталарнинг R нуқтадан чап томонда ётишига қарши келади (чизма 27). Демак, R нуқтадаги перпендикулярлар OB блан кесишади деган фараз зидликка келтиради. Шундай қилиб, R нуқта иккинчи синфга киряди. Бошқача айтганда, (нурни икки синфга ажратучи) R нуқтада OD тўғри чизиққа ўтказилган перпендикуляр бурчакнинг OB томони блан кесишмайди. Биринчи синф нуқталаридаги ҳамма перпендикулярлар орасидаги охиригисиди; иккинчи синф перпендикулярлари орасида эса биринчиси мавжуд бўлиб, у R нуқтадан ўтади.

Исталган ўтқир бурчакнинг бир томонига тик ва иккинчи томони блан кесишмайдиган биринчи перпендикуляр

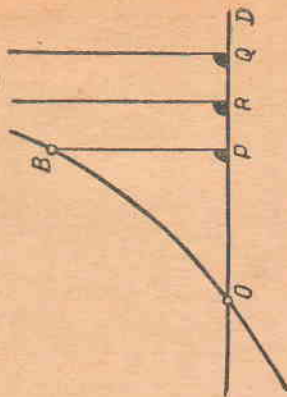
* Нурни икки бўлакка ажратучи R нуқтанинг мавжудлиги ва ягоналиги Дедекинд аксиомасининг мазмунини ташкил этади; бу ҳақда кейинроқ гапирамиз.

ҳақида исбот қилинган теорема, Лобачевский геометриясининг энг муҳим теоремаларидан биридир.

Лобачевский геометриясидаги тўғри чизикларнинг бу хосасини тасаввур этиш қийин ишдир. Гиперболани асимптотаси билан бирга олиб қарасак, бу каби ҳол Евклид текислигида ҳам юз беради (чизма 28). Агар OB —гипербола, OD —у билан кесишувчи тўғри чизик ва R нуқтада OD га утказилган перпендикуляр гиперб



Чизма 27.



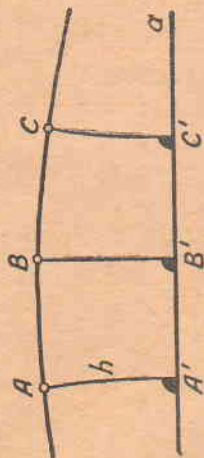
Чизма 28.

бола асимптотаси бўлса, R дан чапдаги ҳамма P нуқталар биринчи синфга, R дан ўнгдаги ҳамма нуқталар эса—иккинчи синфга киради.

§ 17. Эквидистанта.

Бирор a тўғри чизикнинг бир тарафида жойлашиб, ундан берилган масофага узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тўғри чизикдан иборат бўлса, бу чоғда Евклид постулатининг кучга эгаллигини биз 10-нчи параграфда аниқлаган эдик. Лобачевский геометриясида эса, бу постулат кучга эга эмас, шунинг учун Евклид постулатига эквивалент бўлган ҳамма жумлалар ҳам кучга эга эмасдир.

Лобачевский геометриясида қуйидаги теорема тўғрисида берилган тўғри чизикнинг бир тарафида жойлашиб, ундан берилган масофага узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни, ҳечбир учта нуқтаси бир тўғри чизикда ётмаган эгри чизикдан иборатдир. Ҳақиқатан, бу геометрик ўриннинг учта A, B, C нуқтаси бир тўғри чизикда ётса, Саккери тўртбурчаги бўлган $ACC'A'$ нинг тўртта тўғри бурчаги бўлар эди; бу ҳол эса Лобачевский текислигида юз бераолмайди (чизма 29). Ҳосил қилинган эгри чизикни Лобачевский эквидистанта деб атаган эди.



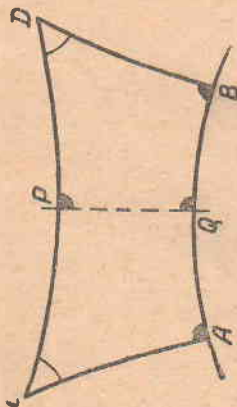
Чизма 29.

Эквидистанта тўғри чизик билан айлананинг ба'зи умумий хоссаларига эгадир. Чунончи, тўғри чизикни "ўзи бўйлаб ҳаракатлантириш" мумкин, я'ни тўғри чизикда қандайдир иккита A, B нуқта олиб, уларни шу тўғри чизикдаги икки A', B' нуқта билан жойлашадиган қилиб тўғри чизикни ҳаракатлантирсак, унинг иккинчи ҳолати биринчи ҳолатидан фарқ қилмайди. Айланани олганда ҳам аҳвол шундай, я'ни уни ўзининг маркази атрофида айлантирсак, у "ўзи бўйлаб сирпанаборади". Бу хоссага эга бўлган эгри чизиклар *эгрилиги узгармас эгри чизиклар* деб аталади. Евклид геометриясида бундай эгри чизиклар фақат айлана ва тўғри чизиклардан иборат. Лобачевский геометриясида *эгрилиги узгармас эгри чизиклар қаторига тўғри чизик ва айланалардан ташқари эквидистанталар ҳам киради*. Агар AA' перпендикулярнинг A' асосини унинг ўзи билан бирга a тўғри чизик бўйлаб ҳаракатлантирсак, перпендикулярнинг A учи *эквидистанта*ни чизиборади; агар ABC эквидистанта AA' перпендикуляр билан қаттиқ боғланган бўлса, ҳалиги ҳаракат вақтида бу эквидистанта ўзи бўйлаб сирпанаборади, демек U , ўзгармас эгриликка эгадир. Бу эгри чизикнинг истаган AB бўлагини учлари билан шу эгри чизикнинг ўзига "қўйиш" мумкин ва бу ҳолда шу бўлақнинг ҳамма нуқталари эквидистанта нуқталари билан устма-уст тушади. Эквидистанта нуқталарининг эквидистанта асоси a га бўлган h масофаси, *эквидистанта баландлиги* дейилади. Турли радиусли айланалар каби баландликлари турли бўлган икки эквидистантадан бирининг ҳечқайси бўлагини, иккинчисининг ҳечқандай бўлагига ётқизиш мумкин эмасдир.

§ 18. Лобачевский геометриясининг яна ба'зи теоремалари.

Биринчи бобдаги натижалардан фойдаланиб, Лобачевский геометриясининг ба'зи теоремалари устида тўхталиб ўтайлик. Масалан, кесишмайдиган икки тўғри чизик учинчи тўғри чизик билан кесилса, ички олмошинувчи бурчаклар, умуман айтганда, бир-бирига тенг эмасдир, чунки бу бурчаклар *исталган* кесуви учун ҳам ўзаро тенг бўлса, бундан Евклид постулати келиб чиқади (§ 12); Лобачевский геометриясида эса, бу постулат кучга эга эмасдир. Саккери тўртбурчагини олиб, ички олмошинувчи бурчаклар ўзаро тенг бўлмаган хусусий ҳолни юзага келтириш мумкин, чунки Лобачевский геометриясида Саккери тўртбурчагининг юқори асосидаги бурчаклари ўткир бурчаклардан иборат. Демак, бир-бири билан кесишмовчи AB ва CD тўғри чизиклар (симметрия ўқи PQ га тик бўлганлари сабабли) BD тўғри чизик билан кесшиб, ўзаро тенг ички олмошинувчи бурчакларини ташкил қилмайди. Саккерининг ўша тўртбурчагини олиб, CD тўғри чизикдаги D нуқтанинг AB тўғри чизиккача бўлган DB масофасининг PQ масофадан катталигини кўрамиз, чунки $PQBD$ тўртбурчақда "катти бўлган P

бурчак қаршисида катта томон ҳам ётади" (P — тўғри бурчак, D — ўткир бурчак). Демак AB ва CD тўғри чизиқларнинг умумий перпендикуляри бўлган PQ , бу тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофадир (чизма 30). Бундан ташқари Саккери тўртбурчагининг юқори асоси CD , қуйи асоси AB дан каттадир, бунга ўша $PQ \perp CD$ дан иборат учтўғрибурчакли тўртбурчакнинг ўзи далил бўлаолади. Агар PQ ни бу тўртбурчакнинг асоси деб қабул қилсак, B блан белгиланган тўғри бурчакнинг қаршисида каттароқ томон PD ётади. Аммо $AB = 2QB$ ва $CD = 2PD$. Демак $CD > AB$.



Чизма 30.

§ 19. Ташқарисига айлана чизиб бўлмайдиган учбурчаклар тўғрисида.

В. Болиаи теоремасидан, Лобачевский геометриясида ташқарисига айлана чизиб бўлмайдиган учбурчакларнинг мавжудлиги келиб чиқади, чунки ҳарбир учбурчак ташқарисига айлана чизиб мумкин бўлса, В. Болиаи теоремасидан Евклид постулатининг кучга эгалиги келиб чиқар эди. Бундай учбурчаклардан мисоллар келтириш осон.

Бирор a тўғри чиқиқ ва ундан бир тарафда ва баравар узоқликда ётуни учта A, B, C нуқтани олайлик (чизма 29). A, B, C нуқталар Евклидистанга қарашли бўлганидан, бир тўғри чиқиқда ётаолмайди. Демак ABC учбурчак, Евклидистанга ички чизилган учбурчакдир. Энди Евклидистанга ички чизилган ҳарқандай учбурчакка ташқи айлана чизиб бўлмаслигини исботлайлик. Ҳақиқатан, $ABBA'$ тўртбурчак Саккери тўртбурчагидир ва унинг симметрия ўқи PQ , Евклидистанга ватари бўлган юқори асос AB га, ҳамда Евклидистанга асоси a тўғри чиқиққа перпендикулярдир (чизма 31). Шундай қилиб, ушбуни исботладик: Евклидистанга ватарининг уртасидан шуватарга утказилган ва Евклидистаннинг ички A, B нуқтасидан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни бўлган перпендикуляр шу Евклидистаннинг a асосига перпендикуляр тўғри чиқиқдан иборатдир.

ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази, агар у мавжуд бўлса, учта геометрик ўриннинг кесилган нуқтасидан иборат бўлиши керак эди: 1) A, B нуқталардан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни; 2) B, C нуқталардан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни; 3) A, C нуқталардан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни. Аммо ҳозиргина исбот қилишимизга асосан, бу геометрик

ўринларнинг ҳаммаси Евклидистаннинг a асосига перпендикулярдир; бундай перпендикулярлар эса умумий нуқтага эга эмас. Демак, ABC учбурчакнинг учларидан баравар узоқлашган нуқта ҳам йўқдир. Бу учбурчакка ташқи айлана чизиб бўлмайди. Ислобсиз бўлса-да, шунга кўрсатиб ўтайлик: ташқарисига



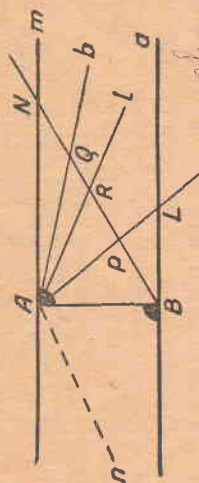
Чизма 31.

айлана чизиб бўлмайдиган учбурчаклар, Евклидистанга ички чизилган учбурчаклар блан тавом бўлмайди. Евклид геометриясида Евклидистанлар тўғри чиқиқларга ва кўрилаётган учбурчаклар эса кесмаларга айланади.

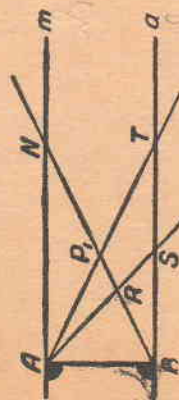
§ 20. Доирага ички чизилган мунтазам олтибурчак томони бу доиранинг радиусидан каттадир.

Доирага ички чизилган мунтазам олтибурчак томонининг шу доира радиусига тенг эмаслигини биз биламиз, чунки бу томон радиусга тенг бўлса, бундан Евклид постулати келиб чиқади. Бу олтибурчак томонининг радиусдан катталигини 23-нчи чизмага ўхшаш чизма ясаб ва ABO учбурчак устида муҳокама юргизиб исбот қиламиз. AOB бурчак 60° га тенг. Тенгёнли AOB учбурчакда бир-бирига тенг A, B бурчакларнинг ҳарбири 60° дан кичик, чунки учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $2d$ дан кичикдир. Шундай қилиб, бу учбурчакнинг энг катта бурчаги O дир. Демак, $AB > OA = R$.

чиқиқларини киритамиз. Синфларнинг ҳарбирида чексиз кўп тўғ-
ри чиқиқлар бор. Масалан, a тўғри чиқиқдаги M нуқталарни A
нуқта блан туташтириб 1-нчи синф тўғри чиқиқларини ҳосил
қиламиз; b ва c тўғри чиқиқлар ва шунингдек, bAC бурчақдаги бар-
ча тўғри чиқиқлар 2-нчи синфга киради; бу иккинчи синфга
киручилар орасида AB
га перпендикуляр бўл-
ган Am тўғри чиқиқ
ҳам бор, бунда AB
нинг ўзи a га перпенди-
куляр. BA тўғри бур-
чадаги тўғри чиқиқлар
ҳам икки синфга бўли-
нади (чизма 33). Бирин-
чи синфга a блан кеси-
шучи тўғри чиқиқларнинг ҳаммасини, иккинчи синфга a блан
кесишмайдиган ҳамма тўғри чиқиқларни киритамиз. Am нурда N
нуқтани олиб ва BN кесмани ясаб, BA бурчақдаги ҳамма тўғри
чиқиқларнинг BN блан кесишганини кўрамиз. ABN учбурчакни
олиб қарасак, бунга ишонч ҳосил қиламиз. 1-нчи синфга қарашли
тўғри чиқиқлар, масалан, AL ,
 BN кесмани 1-нчи синф нуқта-
ларида (улар P бўлсин) ва
2-нчи синф тўғри чиқиқлари
эса, масалан, b , BN кесмани
иккинчи синф нуқталарида
(улар Q бўлсин) кесди деб
ҳисоблаймиз. BN кесманинг
нуқталари ҳуллас икки синфга
ажралди. Уларнинг ҳарбирида



Чизма 33.



Чизма 34.

чексиз кўп нуқталар бор ва биринчи синфнинг ҳамма нуқта-
лари (я'ни P), 2-нчи синфдаги ҳарбир Q нуқтадан бир тараф-
да ётади. Дедекинд аксиомасини қўллаб, BN кесмани икки бў-
лакка ажратуви ягона R нуқтанинг борлигини аниқлаймиз.
Бўлакларнинг бири 1-нчи синф нуқталари P , иккинчиси эса
2-нчи синф нуқталари Q дан иборатдир. Бу бўлакларнинг че-
гараси бўлган R нуқта 2-нчи синфга киради. Биринчи синф-
нинг охириги нуқтаси йўқ, я'ни AR нур a тўғри чиқиқ блан ке-
сишмайди. Ҳақиқатан, AR нур a тўғри чиқиқ блан S нуқтада
кесишад деб фараз қилайлик (чизма 34) ва a тўғри чиқиқда
шундай T нуқта олайликки, у, BS йўналишда S нуқтадан кейин
ётсин. A ни T блан туташтирайлик. AT нур BN кесма блан P_1
нуқтада кесишад. Демак P_1 нуқта 1-нчи синф нуқтасидир; бироқ
бу ҳолининг содир бўлиши мумкин эмас, чунки RN кесмадаги
ҳамма нуқталар 2-нчи синф нуқталаридир. AR нур a тўғри чи-
қиқ блан кесишад деган фараз зидликка келтирди, демак AR
нур a тўғри чиқиқ блан кесишмайди. Бундаги аҳволни анг-
латиб аёнлаш мумкин: 1-нчи синфнинг AL нуқтини A нуқта ат-

УЧИНЧИ БОБ

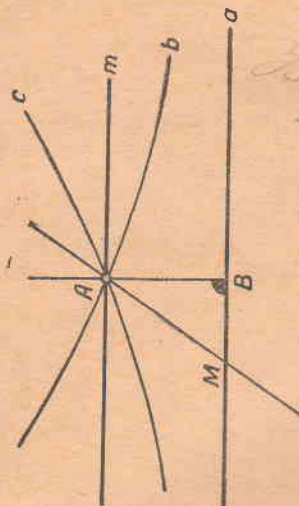
ЛОБАЧЕВСКИЙ ТЕКИСЛИГИДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ

Лобачевский текислигидаги тўғри чиқиқларнинг ўзаро
вазирини батафсил ва системали равишда кўрайлик. Ўткир
бурчакнинг бир томонига тик ва иккинчи томони блан кесиш-
майдиган биринчи перпендикуляр ҳақидаги теорема, тўғри
чиқиқларнинг бир-бирига нисбатан олган вазиртларида Евклид
геометрияси блан Лобачевский геометриясида жуда катта
фарқнинг борлигини кўрсатади.

Лобачевский геометриясида тўғри чиқиқлар ё кесишад,
ёки кесишмайди, аммо кесишмайдиган тўғри чиқиқлар, Евклид
геометриясидаги сингари, у қадар содда хоссаларга эга эмас.
Бунда аҳвол анча мураккабдир.

§ 21. Параллел ва ўтапараллел тўғри чиқиқлар.

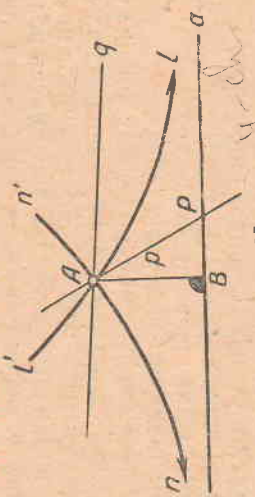
Лобачевский постулати устида тўхталиб ўтайлик. a тўғри
чиқиқда ётмаган A нуқтадан (a, A) текисликда a блан
кесишмайдиган энг



Чизма 32.

нуқтадаги даста тўғри чиқиқлари икки синфга ажралди. Бирин-
чи синфга дастанинг a тўғри чиқиқ блан кесишучи барча тўғри
чиқиқлари, 2-нчи синфга — дастанинг қолган ҳамма тўғри

рофида (келтирилган 34-нчи чизмада соат стрелкасига тескари) айлантираборсак, ўзгаручи бу нур a тўғри чизик блан L нуқтада кесишди; бу нуқта, нурнинг айланабориши блан a тўғри чизик бўйлаб борган сари узоқлашади, ва ниҳоят, шундай пайт келдики, айланучи нур a тўғри чизикдан «ўзилиб кетади». Бу пайт, айланучи нур AR вазиятни олганда, я'ни 1-нчи синф нурларидан 2-нчи синф нурларига ўтганида юз беради. Бундан кейин бу нурни то Am нурнинг вазиятигача айлантираборганимизда у, a тўғри чизик блан кесишмайди. Ана шу «чегаравий» $AR = l$ тўғри чизикни (чизма 33) Лобачевский A нуқтага нисбатан BL йўналишида a тўғри чизикка параллел чизик деб атаган эди. Агар симметрия ўқи AB га нисбатан l блан симметрик бўлган n тўғри чизикни олсак, олдинги йўналишга қарама-қарши бўлган LB йўналишида a га параллел бўлган иккинчи тўғри чизикни ҳосил қиламиз. Буерда параллелик Лобачевский та'рифича тушунилади. Шундай қилиб, ҳарбир a тўғри чизик ва ҳарбир A нуқта учун шундай икки l , n тўғри чизик мавжудки, улар a га Лобачевский та'рифи бўйича параллелдир; булардан бирига бир йўналишда, иккинчиси эса — қарама қарши йўналишда параллелдир. lAn бурчакдаги ҳамма p тўғри чизикларнинг a блан кесишишни биз аниқладик. $n'Al$ бурчакдаги ҳамма q тўғри чизиклар a блан кесишмайди. q тўғри чизиклар a тўғри чизикка ўтапараллел деб аталади (чизма 35). a га ўтапараллеллар қаторига BA га перпендикуляр t тўғри чизик ҳам киряди (чизма 32). Агар a тўғри чизикда стрелка блан кўрсатилган тайин бир йўналиш танланиб олинган бўлса, a тўғри чизикда ётмаган ҳарбир A нуқтадан, берилган йўналишда a тўғри чизикка параллел фақат битта b тўғри чизик ўтади.



Чизма 35.

Берилган A нуқтадан ўтиб, a тўғри чизикка берилган йўналишда параллел бўлган тўғри чизикка қуйдагича та'риф бериш мумкин: a тўғри чизикнинг исталган B нуқтасини A блан таштирамиз (чизма 36). AB тўғри чизик текислики иккита яримтекисликка бўлади. a тўғри чизикда берилган йўналишда ҳаракат қилиб, бу яримтекисликларнинг бирдан иккинчисига ўтаемиз. bAB бурчак иккинчи яримтекисликда ётади. Қуйдаги



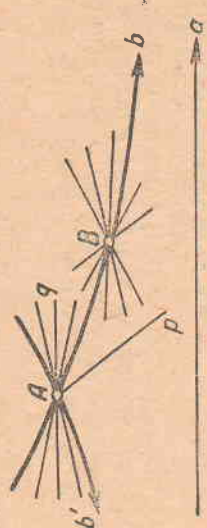
Чизма 36.

икки шарт бажарилса, b тўғри чизик a га кўрсатилган йўналишда параллел деб аталади: 1) b тўғри чизик a блан кесишмайди; 2) bAB бурчакдаги исталган p тўғри чизик a блан кесишмайди. Бу та'рифнинг, параллелларга Лобачевский томонидан берилган та'рифта эквивалентлиги равшандир.

§ 22. Параллел тўғри чизикларнинг хоссалари.

Параллелларга Лобачевский бўйича берилган та'рифта A нуқта махсус рольни ўйнаган эди. Параллелизм та'рифи, биринчидан, берилган йўналишга, иккинчидан, берилган A нуқтага нисбатан эди. Аммо a тўғри чизикка берилган йўналишда параллел бўлган b тўғри чизикдаги A нуқтанинг алоҳида аҳамиятга эга эмаслигини исботлаш мумкин.

Теорема. Агар b тўғри чизик a тўғри чизикка ма'лум йўналишда ва ма'лум A нуқтага нисбатан параллел бўлса, b тўғри чизик a тўғри чизикка уша йўналишда ўзининг истаган B нуқта-сига нисбатан ҳам параллелдир (чизма 37).



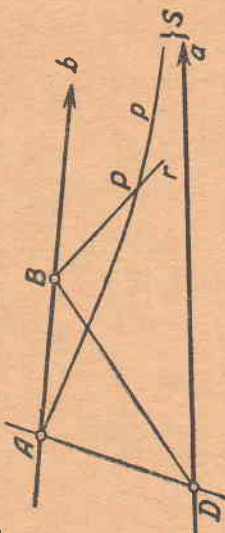
Чизма 37.

Бу теоремани исботлашдан олдин, масаланинг қўйилишига тўхтаб ўтайлик. Агар b тўғри чизик a тўғри чизик-ка A нуқтага нисбатан a даги ма'лум йўналишда параллел бўлса, демак b тўғри чизик a блан кесишмайди ва a блан кесишмайдиган ҳамма тўғри чизиклар учун чегаравий тўғри чизикдир. a блан кесишмайдиган тўғри чизиклар учун иккинчи чегаравий тўғри чизик, a га қарама-қарши йўналишда параллел бўлган b' тўғри чизикдан иборатдир. b бурчак ва унга перпендикуляр бўлган бурчакдаги ҳарбир p тўғри чизик a блан кесишадир. Иккинчи жуфт вертикал бурчаклардаги ҳарбир q тўғри чизик эса a блан кесишмайди.

Агар B нуқтани b тўғри чизикда олсак, B нуқтадан ўтган тўғри чизиклар дастаси орасида, a тўғри чизик блан кесишмайдиган ҳамма кесишмайдиганлари мавжуддир. a блан кесишмайдиганлар орасида b тўғри чизик ҳам бор. Лекин, b тўғри чизикнинг a блан кесишмайдиган ва кесишмайдиганларни ажратиб туручи чегаравий бўлиш-бўлмаглигини биз ҳали билмаймиз. b тўғри чизик a тўғри чизикка B нуқтага нисбатан ўтапараллел бўлаолмайди? Ана шу ҳолнинг юз бермаслиги тўғрисида теоремада да'во қилинади. b тўғри чизикнинг a га B нуқтага нисбатан ҳам берилган йўналишда параллеллигини исботлаш учун икки нарсани исботлаш керак: биринчидан, b тўғри чизик a блан кесишмайди (бу эса ма'лум, чунки b тўғри чизик a га A нуқтага нисбатан параллелдир), иккинчи-

дан, bBD бурчакдаги ҳарбир r тўғри чизик (чизма 38) a блан кесишади. Ибботни икки қисмга бўламиз.

1) b тўғри чизикнинг B нуқтаи, A нуқтадан ўнг томонда, я'ни параллеллик томонида ётади (чизма 38). bBD бурчакдаги исталган r тўғри чизикнинг a блан кесишишни ибботлаш керак. r тўғри чизикда шундай P нуқта оламизки, u a блан b орасида ётадиган бўлсин ва бу P нуқтаи A блан туташтирамиз; уларни туташтиручи тўғри чизик r бўлсин. b тўғри чизикнинг bAD бурчак ичига киргани ва b нинг a тўғри чизикка A нуқтага нисбатан параллелиги сабабли, r тўғри чизик a блан S нуқтада кесишади.



Чизма 38.

Паш постулатини ADS учбурчак ва r тўғри чизикка нисбатан қўллаймиз. r тўғри чизик учбурчакнинг AS томони блан A ва S орасидаги P нуқтада кесишади ва AD томон блан кесилмайди, чунки r тўғри чизик, AD кесма нуқталарини ўз ичига олмаган bBD бурчакдаги тўғри чизикдир.

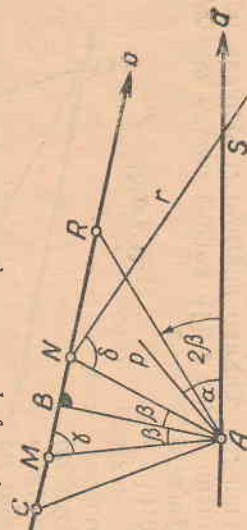
Демак, r тўғри чизик AD томон блан A ва D орасида кесилмайди. Шу сабабли, ADS учбурчакнинг битта ҳам учидан ўтмайдиган r тўғри чизик, бу учбурчакнинг DS томони блан D ва S орасида ётуви нуқтада кесишади, я'ни u a блан кесишади.

2) b тўғри чизикнинг B нуқтаи A нуқтадан чап томонда, я'ни параллелизм йўналишига қарама-қарши томонда ётади. bBC бурчак ичидagi исталган r тўғри чизикнинг a блан кесишишни ибботлаш керак. Ибботлаш учун r тўғри чизикда шундай T нуқта оламизки, u bBC бурчакка вертикал бўлган бурчакда ётсин ва сўнгра T ни A блан туташтирамиз, T ни A блан туташтиручи тўғри чизик r бўлсин (чизма 39). r тўғри чизик bAC бурчак ичига кириб, a тўғри чизик блан S нуқтада кесишади, чунки b тўғри чизик A нуқтага нисбатан a га параллелдир. ACS учбурчак ва r тўғри чизикни олайлик. r тўғри чизик AC томон блан A ва C орасида кесишади, чунки r тўғри чизик ABC бурчакка қарашлидир; r тўғри чизик AS блан A ва S орасида кесилмайди, чунки u $r \equiv AS$ блан AS дан таш-

Чизма 40.

қаридаги T нуқтада кесилган эди. Паш постулатини ACS учбурчак ва унинг учларидан ўтмаган r тўғри чизикка нисбатан қўлаб r нинг CS блан S ва S орасида кесилганини, я'ни r тўғри чизикнинг a блан кесилганини ибботлаймиз. Теорема тўла ибботланди. Бундан буён a га параллел бўлган b тўғри чизик ҳақида гапирганда, b да алоҳида нуқтани кўрсатиб ўлтирмаймиз, чунки иббот қилишимизга асосан, b тўғри чизик a га ўзининг ҳалики нуқталарига нисбатан берилган йўналишида параллелдир. Теорема. Агар b тўғри чизик a тўғри чизикка берилган йўналишида параллел бўлса, a тўғри чизик ҳам ўз навбатида b тўғри чизикка ўша йўналишида параллелдир (чизма 40).

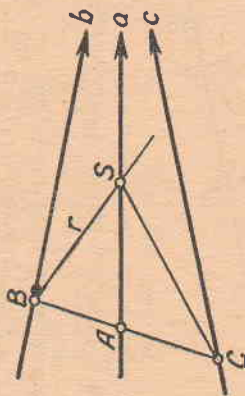
Буни ибботлаш учун қўридагиларга ишонч ҳосил қилиш керак: 1) a тўғри чизик b тўғри чизик блан кесилмайди; 2) aAC бурчакнинг a блан ихтиёрий a бурчак ташкил қилган ҳарқандай p тўғри чизиги b блан кесишади (C блан b даги ихтиёрий нуқта белгиланган). b нинг a га параллелиги, ва шу туфайли a нинг b блан кесилмаслигига асосан, бу даволарнинг биринчиси тўғридир. Иккинчисини ибботлаш қолади.



$\angle NAB = \angle BAM = \beta < \frac{\alpha}{2}$ бўлсин. AMB бурчакни γ блан белгилайлик; $\gamma < \angle bNA$, чунки bNA бурчак ANM учбурчакнинг ташқи бурчагидир.

AN тўғри чизик блан δ ($\delta = \angle AMB = \gamma$) бурчак ташкил қилган r тўғри чизикни ясайлик. r тўғри чизик bNA бурчак ичидан кетади, чунки $\angle bNA > \gamma = \delta$; демак u , a блан S нуқтада кесишади. Бу $-b$ нинг a тўғри чизикка параллелигидан келиб чиқади. Сўнгра b тўғри чизикка M нуқтадан бошлаб параллеллик томонига қараб $MR = NS$ кесмани қўямиз ва $\triangle AMR$ ни оламиз. Бу учбурчак NAS учбурчакка тенгдир, чунки ясашимизга кўра: $AM = AN$, $MR = NS$ ва $\delta = \gamma$. Агар $\triangle ANS$ ни соат стрелкасига қарши томонга A нуқта атрофида 2β дан иборат бурчакка бурасак, u AMR учбурчак блан устма-уст келади. Жумладан, AS томон бўрилишдан сўнг AR блан устма-уст келади; демак $\angle RAS = 2\beta$ лекин $\beta < \frac{\alpha}{2}$ ёки $2\beta < \alpha$, шу сабабли r тўғри чизик MAR учбурчакнинг A бурчаги ичига киради ва шунинг учун, бу учбурчакнинг MR томони блан кес-

сишади. Хуллас, p тўғри чизик b блан кесишади. Аммо p эса BAa бурчакнинг ихтиёрий тўғри чизигидир. Шундай қилиб, a тўғри чизикнинг b тўғри чизикқа A нуқтага нисбатан параллеллиги исбот қилинди. Олдинги теоремадан, a тўғри чизик b га ўзининг истаган нуқтасига нисбатан ҳам параллел деган натижани чиқарамиз. Ҳозир исботланган теорема, a ва b тўғри чизиклар берилган йўналишда ўзаро параллел деб гапиришга имконият беради. Энди параллелизмнинг транзитивлик хосасига эга бўлишини кўрсатайлик.

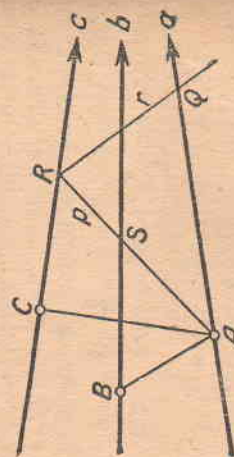


Чизма 41.

Теорема. Бирор a тўғри чизикқа ма'лум йўналишда параллел бўлган икки b , c тўғри чизик, уша йўналишда ўзаро параллелдир.

Исботни икки қисмга бўламиз.

1) b ва c тўғри чизиклар a тўғри чизикдан турли тарафда ётади (чизма 41). b тўғри чизикда B нуқтани ва c тўғри чизикда C нуқтани оламиз. BC кесманинг четлари a тўғри чизикдан турли тарафда ётгани учун BC кесма a блан A нуқтада кесишади. Шартга кўра a га b параллелдир, шу сабабли, b ва c бурчакдаги исталган g тўғри чизик a тўғри чизик блан (S нуқтада) кесишади ва a SC бурчак ичига кириб, c тўғри чизик блан кесишади. Бундан ташқари, a тўғри чизикдан турли тарафда ётгани сабабли, b ва c тўғри чизикларнинг ўзлари ҳам кесишмайди. Шундай қилиб, b тўғри чизик c тўғри чизикқа параллелдир. g нурнинг SBC яримтекисликда ўтказилганлиги туфайли, b блан c а тўғри чизикқа қайси йўналишда параллел бўлса, b ўша йўналишда параллелдир.

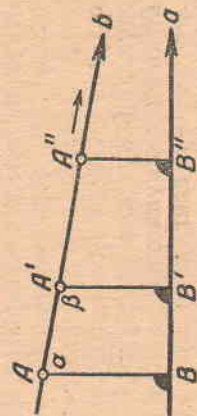


Чизма 42.

2) b ва c тўғри чизиклар a га бир йўналишда параллел, лекин a тўғри чизикдан бир тарафда ётади (чизма 42). Учта нуқта олайлик. A ни a тўғри чизикда, B ни b да ва C ни c да. B ва C нуқталарни A блан туташтирамиз; аниқлик учун b тўғри чизик a блан c орасида ётсин. c нинг b блан кесилишмаслигини исботлайлик. Ҳақиқатан, c тўғри чизик b блан кесишса, у чоғда c , бир-бирига параллел b ва a тўғри чизиклар орасидаги соҳага уларнинг параллеллик томонидан қирар эди ва шунинг учун a блан кесишар эди. Аммо c нинг бу

йўналишда a га параллеллиги туфайли, бу ҳол юз бераолмайди. Энди BAa ва CAa бурчакларнинг умумий қисмига қарашли бўлган исталган p тўғри чизикни олайлик (чизмага қаранг), a нинг b ва c га параллеллиги сабабли, p тўғри чизик ҳам b блан (S да) ҳам c блан (R да) кесишади. c RA бурчакда исталган g тўғри чизик ўтказайлик. c нинг a га параллеллигидан a тўғри чизик блан g (Q нуқтада) кесишади. Демак, g тўғри чизик b блан ҳам кесишади. Бунга ишонч ҳосил қилиш учун ARQ учбурчак ва b тўғри чизикқа Паш постулатини қўллаш қиёя қилади. Шундай қилиб, теореманинг иккинчи қисми ҳам исботланди.

Энди параллел икки тўғри чизикни олиб, уларнинг биридаги нуқтадан иккинчи тўғри чизиккача бўлган масофанинг, нуқта биринчи тўғри чизик бўйлаб параллелизм йўналишида ёки унга қарама-қарши йўналишда ҳаракатланаборини блан, ўзгаришини текширайлик. Олинган нуқта A бўлсин. A нуқтанинг параллелизм йўналиши бўйлаб ҳаракатланиши блан, AB масофанинг монотон равишида камайиб борганлигини исботлаш осон. A нинг қарама-қарши йўналишда ҳаракатланиши блан AB монотон равишда ўсади (чизма 43).

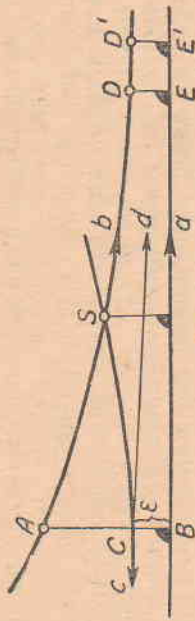


Чизма 43.

Чиндан ҳам, α — ўткир, β — ўтмас бўлганидан $A'B' < AB$, чунки „тўрбурчакнинг катта бурчаги қаршисида катта томон ётади“. Шунингдек, $A''B''$ кесманинг $A'B'$ дан кичиклигини ҳам кўрсатиш мумкин. Шундай қилиб, A нуқтанинг параллелизм йўналиши бўйлаб ҳаракатланиши блан AB нинг монотон камайишини исботладик. Қарама-қарши йўналишда эса AB нинг монотон ўсишини исботлаш мумкин. Лекин, ўзгаруши миқдор монотон ўсиши блан бирор ўзгармас миқдордан кичиклигича қолиши мумкин (масалан, айланага ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг периметри, томонлар сонининг чексиз иккиланаборини блан ўсади, лекин ташқи чизилган кўпбурчак периметридан кичиклигича қолади). Худди шу сингари, агар AB масофа параллелик томонида монотон камайиб борса, бундан бу масофа ма'лум бир узунликдан катта бўлаолмайди деган ҳудудса чиқариб бўлмайди (масалан, ташқи чизилган мунтазам кўпбурчак периметри томонлар сонининг чексиз иккиланаборини блан монотон камайди, лекин у исталган мунтазам ички чизилган кўпбурчак периметридан кичик бўлаолмайди). Қўрилаётган ҳолда эса, ушбу теорема кичик эгалар икки параллел чизикдан биридаги нуқталарнинг иккинчисигача бўлган масофалари параллелизм томонида қарама-қаршиланганда чегарасиз камаяди ва нуқтанинг қара-

ма-қарши томонга қараб ҳаракатланабориши билан чегарасиз ўсади.

Авалло шуни исботлайлик: ихтиёрий ε кесма қандай бўлса бўлсин, b тўғри чизикда ҳаракатланучи нуктанинг параллеллик йўналишида шундай D' вазиятини кўрсатиш мумкинки, унинг a гача масофаси ε дан кичик бўлади. Ислоҳлаш учун $\varepsilon = BC$ кесмани (чизма 44) AB перпендикулярга шундай қўямизки, C нукта параллеллар орасидаги соҳага тушсин, ва C орқали қарама-қарши йўналишда a га параллел c тўғри чизикни ўтказамиз.

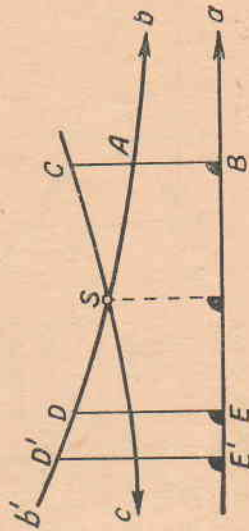


Чизма 44.

миз. c нинг b тўғри чизик билан кесилишганлигини исботлайлик. Бунинг учун, C нуктадан илгариги йўналишда a га параллел d тўғри чизикни ўтказамиз. d тўғри чизик b га ҳам параллел бўлади. c тўғри чизик dCA бурчакка қарамқарши, демек у b тўғри чизик билан (S нуктада) кесилиши, чунки $d b$ га параллел эди. b тўғри чизикда S га нисбатан параллеллик йўналишида ётуши шундай D нуктани оламизки, $SD=CS$ бўлсин. a га туширилган DE перпендикулярнинг узунлиги ε га тенгдир, чунки C ва D нукталар ва шу сингари B ва E нукталар S дан a га туширилган перпендикулярга нисбатан симметрикдир ва $CB=DE=\varepsilon$. Агар D нуктани b бўйлаб параллеллик томонга қараб силжитсак, масалан D' вазиятига келтирсак, унинг a тўғри чизиккача бўлган масофаси ε дан кичик бўлади. $D'E' < DE=\varepsilon$. Ҳосил қилинган натижа қисқача шундай ифода этилади: параллел тўғри чизиклар параллеллик томонда бир-бирига асимптотик равишда яқинлашади. Ба'зи авторлар 'параллел тўғри чизиклар' термини ўрнига асимптотик тўғри чизиклар терминини ишлатадилар. Бундай тўғри чизикларни Лобачевскийнинг ўзи яқинлашучи (сводные) тўғри чизиклар деб атаган эди.

Энди, параллеллизм йўналишига қарама-қарши томонда параллел тўғри чизиклар нукталари орасидаги масофанинг чексиз ўсишини кўрсатамиз. Бунинг ма'носи қуйидагидан иборат: n кесма қанча катта олинган бўлса-да, b да ҳаракатланучи нуктанинг шундай D' вазиятини кўрсатиш мумкинки, унинг a тўғри чизиккача бўлган масофаси n дан катта бўлади. BA перпендикулярда $BC=n$ кесмани олиб, берилган йўналишга қарама-қарши йўналишда a тўғри чизикка C нуктадан параллел c тўғри чизикни ўтказамиз (чизма 45). Бу c тўғри чизик b тўғри чизик билан S нуктада кесилиши, чунки b тўғри чизик-

нинг AB' нурга қарашли нукталарининг a тўғри чизиккача бўлган масофалари, A дан B гача бўлган масофадан катта; c тўғри чизикдаги нукталар эса, унинг a га параллеллик томонида a га чексиз яқинлаша боради. Бундан сўнгра, $SD=SC$ ни қўямиз ва D дан a га DE перпендикуляр туширамиз. Худди олдинги ҳолдагидек, DE ва CB кесмаларнинг n га тенглигига ($DE=$



Чизма 45.

$CB=n$) ишонч ҳосил қиламиз ва S нуктадан D га қараганда узоқроқ туручи D' нуктани олиб, $D'E'$ нинг n дан катталигини ($D'E' > n$) исбот қиламиз. Теорема тўла равишда исботланди. Параллелизм йўналишига қарама-қарши томонда асимптотик тўғри чизиклар чексиз узоқлашабориши.



Чизма 46.

Текисликнинг параллел тўғри чизиклар орасидаги қисми параллеллар орасидаги минтақа (полоса) дейилади.

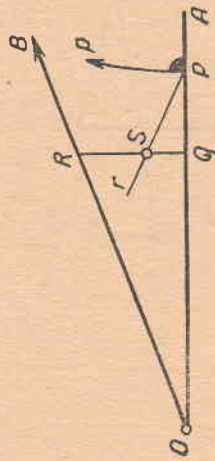
Теорема. Параллел тўғри чизиклар орасидаги барча минтақалар конгруэнтдир, я'ни улар бир-бирига ҳамма нукталари билан устма-уст келтирилиши мумкин.

Ихтиёрий икки a , b ва a' , b' минтақани олайлик (чизма 46). b тўғри чизикда A нуктани олиб, ундан a га AB перпендикуляр туширамиз. A' нукталарнинг a' тўғри чизиккача масофалари нукта билан чексизлик орасидаги барча қийматларни қабул қилгани сабабли, шундай A' нукта топиладики, $A'B'=AB$ бўлади; энди $A'B'$ ни AB билан устма-уст келтирсак, олинган минтақалардан бирини иккинчисига ётқизгин бўламиз.

Правардда AOB бурчакнинг OA томонига тик ва унинг OB томони билан кесилишмайдиган қилиб ўтказилган биринчи перпендикуляр p га қайтайлик (чизма 47).

Теорема. Ихтиёрый ўткир АОВ бурчакнинг ОА томонига тик ва унинг иккинчи ОВ томони билан кесилмайдиган биринчи p перпендикуляр ОВ томонга параллелдир.

Исб о т. 1) ОВ ва p кесилмайд. 2) ОРр бурчакнинг ис-талган r тўғри чизиғи ОВ билан кесишади. Чиндан ҳам, r нур-да S нуқтани олиб ва ОА га SQ перпендикулярни утказиб, олдингидек, бу перпендикулярнинг ОВ билан (R нуқтада) кесил-ганини кўрамиз. Энди OQR учбурчак билан r тўғри чизиққа Паш по-стулатини қўласак, r тўғри чизиқнинг ОР билан O ва R нуқталар орасида кесишади деган хулосага келамиз.



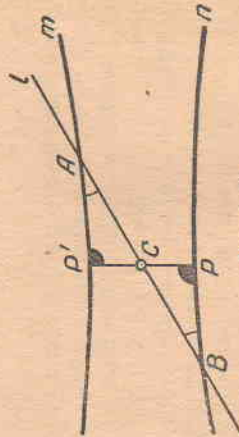
Чизма 47.

Бу теореманинг исботланиши натижасида биринчи перпендикуляр ҳақидаги теоремани қуйидагича ифодалаш мумкин: қандай ўткир бурчак берилган бўлмасин, унинг бир томонига перпендикуляр ва иккинчи томонига параллел тўғри чизиқ ҳамавақт мавжуддир.

§ 23. Параллеллик бурчаги.

Ўтапараллел тўғри чизиқларга доир бир леммани исбот қиламиз.

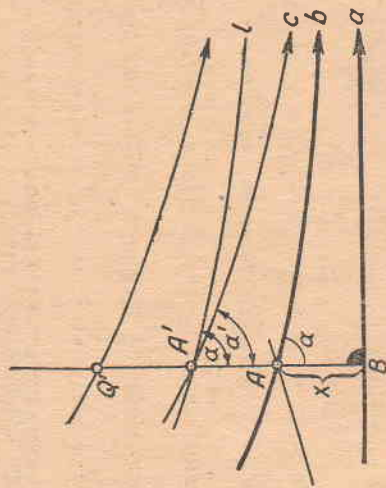
Агар икки тўғри чизиқ (m , n) учинчи (l) тўғри чизиқ билан кесилиб, бир-бирига тенг икки олмошини уч бурчаклар ташкил қилса, бу (m , n) тўғри чизиқлар ўтапараллелдир. Олинган тўғри чизиқлар билан кесинишчи l тўғри чизиқ АВ кесмасининг ўртаси C бўлсин (чизма 48). C дан n тўғри чизиққа CP перпендикуляр ва m тўғри перпендикуляр ва t тўғри чизиққа CP' перпендикуляр туширайлик. Бу перпендикулярларнинг бири иккин-чисининг давомини ташкил этади. Ҳақиқатан, CPB уч-бурчак CP'A учбурчакка тенгдир, чунки тўғрибурчакли бу уч-бурчакларда гипотенузлар ва ўткир бурчаклар ($\angle B$ билан $\angle A$) узаро тенгдир, демек C нуқтадаги бурчаклари ҳам тенгдир (улар бу ҳолда вертикал бурчаклар бўлади); шу сабабди, CP' чизиқ тўғри чизиқдир. PP' тўғри чизиққа перпендикуляр бўлганликларидан, m , n тўғри чизиқлар ўтапараллелдир. Лемма исботланди.



Чизма 48.

Агар a тўғри чизиқда ётмаган A нуқтадан a га параллел қилиб b утказилса, у чоғда bAB бурчак (уни α билан белги-лайлик, $\alpha = \angle bAB$). A нуқта ва a тўғри чизиқ учун парал-леллик бурчаги деб аталади. A нуқтанинг a тўғри чизиққа олиган ҳарбир x масофасига аниқ бир параллеллик α бурчаги мос келишини тушуниш осон, чунки a тўғри чизиқдан x масофа-даги A нуқтадан, берилган йўналишда a га фақат битта b параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин; демек у тўғри чизиқ АВ перпенди-куляр билан аниқ бир α бурчак ташкил қилади. A нуқтадан қа-рама-қарши йўналишда ўтказилган параллел, b тўғри чизиққа АВ перпендикулярга нисбатан симметрикдир ва АВ билан ўша α бурчакни ташкил этади. Хуллас, ҳарбир x кесмага аниқ бир α бурчак мос келади. Демак, α бурчак x нинг функция-сидир. Лобачевский бу функция учун $\alpha = P(x)$ белгини кирит-ди. Бу функцияни сифат жиҳатдан текширайлик.

1) $P(x)$ — монотон камаючи функциядир. Бу — x аргумент-нинг ўсиши билан $P(x)$ нинг камайишини кўрсатади. Бунга ишонч ҳосил қилиш осон. АВ перпендикулярда шундай A' нуқтани ола-мизки, A'B = $x' > x$ бўлсин, ва A' нуқтадан a га берилган йўналиш-да параллел c тўғри чизиқни утказайлик. У чоғда параллеллик бур-чаги $\alpha' = P(x')$ бў-лади. Агар A' нуқта-дан A'B билан α бурчак ташкил этгучи l тўғри чизиқ ўтказсак, b га l ўтапараллел бўлади, чунки AA' кесуши билан l ва b тўғри чизиқлар α га тенг мос бурчак-ларни, демак узаро-тенг олмошини уч бур-чакларни ҳам ташкил этади; бундай тўғри чизиқларнинг ўтапа-раллеллигини биз биламиз. Бу муҳокамадан l тўғри чизиқнинг cAB бурчакка қарashi эмаслиги келиб чиқади, бу эса $\alpha' < \alpha$ ни, я'ни $x' > x$ да $P(x') < P(x)$ ни билдиради.



Чизма 49.

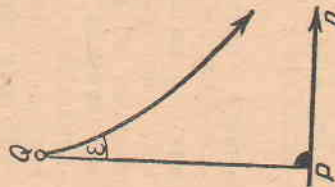
2) x нинг чегарасиз ўсиши билан бурчак $\alpha = P(x)$ чегарасиз камаяди, я'ни истаганча кичик ихтиёрый ϵ бурчакдан кичик бўлади ($\epsilon > 0$). Чиндан ҳам, ϵ бурчакни ясаб, унинг бир томо-нида шундай P нуқтани топамизки (чизма 50), P нуқтада шу томонга ўтказилган p перпендикуляр, "биринчи перпенди-куляр ҳақидаги теорема"га асосан, бурчакнинг иккинчи томони-га параллел бўлади. Энди p тўғри чизиқни a тўғри чизиқ билан шундай устма-уст келтирамизки, P нуқта B нуқтага туш-син (чизма 49). PQ перпендикуляр BA йўналиш бўйлаб кета-

ди ва e бурчакнинг Q учи Q' нуқтага бориб тушади. Q' да a тўғри чизикқа ўтказилган параллелнинг параллеллик бурчаги e га тенгдир. Q' нуқтанинг BA перпендикуляр бўйича юқори га кўтарилабориши блан параллеллик бурчаклари (e дан) камаяборади. Исботлангани шундай ифода-
лаш мумкин: $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 0$. Параллеллик бурчаги $P(x)$ нинг x масофа O га интилиши блан $\frac{\pi}{2}$ га интилишини англаш қийин эмас*. Лобачевский $P(x)$ функцияни x масофа орқали ифодаловчи формулани чиқариб берди.

Лобачевскийнинг формуласини ҳозирча исбот-
сиз келтирайлик:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} P(x) = e^{-\frac{x}{\kappa}}.$$

Бунда e — непер сони, κ — бутунлай ихтиёрый мусбат ўзгармас сондир. Лобачевскийнинг ҳамма формула-
рида ихтиёрый ўзгармас κ нинг иштирок этиши, Лобаче-
вский геометриясининг хусусиятидир. Ўзгармас κ , аёний
характерли иккинчи бир ўзгармас e га яқин алоқадордир. Ўзгармас бу e , шундай
масофани билдирадики, унга $\frac{\pi}{4}$ га тенг бўлган параллеллик бурчаги тўғри
келади, я'ни $P(c) = \frac{\pi}{4}$. Лобачевский формуласига x ўрнига c ни қўйсак
 $\operatorname{tg} \frac{1}{2} P(c) = e^{-\frac{c}{\kappa}}$ бўлади, ёки $P(c)$ нинг қийматини этиборга олиб $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} =$
 $= e^{-\frac{c}{\kappa}}$ ни ҳосил қиламиз, бундан: $-\frac{c}{\kappa} = \operatorname{Intg} \frac{\pi}{8}$, я'ни κ сон c га про-
порционал. Охириги тенгликдан: $\kappa = -\frac{c}{\operatorname{Intg} \frac{\pi}{8}}$; бу эса, c ўзгармасни ихтиё-
рий равишда бериш, Лобачевский доимий κ ни ихтиёрый равишда бериш
демакдир. $c \rightarrow \infty$ да $\kappa \rightarrow \infty$. Ўзгармас c миндор, я'ни $\frac{\pi}{4}$ дан иборат
бурчакка мос келучи масофа нимага тенг? Лобачевский геометрияси
 c ўзгармас миқдор мутлақо ихтиёрый равишда танлаб олиниши мум-
кин деб да'во қилади. Бу e кесма кўпинча масштаб бирлиги учун қабул
қилинади. Лобачевский геометриясида масштаб бирлиги сифатида қа-
бул қилиниши мумкин бўлган аниқ бир кесманинг мавжудлиги ажойиб



Чизма 50.

* Бунда бурчакларнинг ўлчов бирлиги тўғри бурчакка $\frac{\pi}{2}$ сон мос ке-
ладиган қилиб танлаб олинган ва π эса геометрик таърифлар блан боғланма-
ган, масалан, Лейбниц қатори блан аниқланган:

$$1) \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

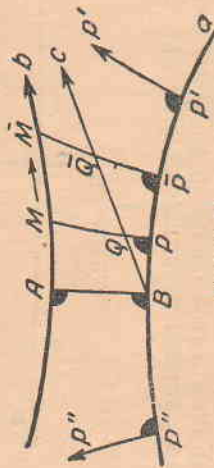
$$2) \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < 1; \operatorname{Intg} \frac{\pi}{8} < 0.$$

бир ҳолдир. Евклид геометриясидаги сингари, Лобачевский геометриясида
„бурчакларнинг табиий ўлчови“ мавжуддир, я'ни тўғри бурчакни масштаб
бирлиги деб олиш мумкин. Лобачевский геометриясида кесмалар учун ҳам
табиий ўлчов бордир. e кесмани бирлик сифатида олиш мумкин. Қуйдаги
хол этиборга молиқдир: e кесма нақадар катта олинса, доимийи шу e дан
ибораг Лобачевский геометрияси, Евклид геометриясига шунча яқин кела-
ди. $e \rightarrow \infty$, я'ни $\kappa \rightarrow \infty$ бўлса, Евклид геометрияси Лобачевский геометрияси-
нинг лимитдаги ҳолига айланади. Чунончи, Лобачевский формуласида
 $\kappa \rightarrow \infty$ деб фараз қилиб лимитга ўтилса, истатган x учун $P(x) = \frac{\pi}{2}$ бў-
лади, бу эса—Евклид геометрияси учун характерли хоссадир.

Лобачевский формуласидан шундай хулоса чиқариш мумкин: берилган
ҳарбир κ учун текислиkning шу қадар кичик бўлагини қараш мумкинки,
„энг катта бўлган ҳамма масофалар“ унда шундай кам кўринадики, $e^{-\frac{x}{\kappa}}$
бирга „жуда яқин“, демак $P(x)$ эса $-\frac{\pi}{2}$ га жуда яқин бўлади. Буердан
шундай натижа чиқади: Лобачевский текислигининг етарлича кичик бўлак-
ларида деярлик хато қилмасдан Евклид геометриясидан фойдаланиш
мумкин.

§ 24. Ўтапараллеллар хоссалари.

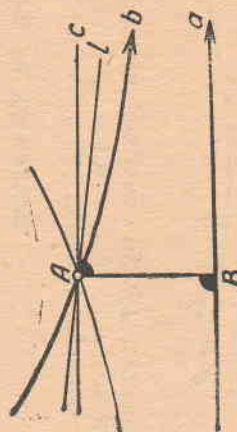
Бир тўғри чизикқа ўтказилган икки перпендикулярнинг
ўтапараллелиги бизга ма'лумдир. Ўтапараллел икки тўғри чи-
зиққа ўтказилган умумий перпендикулярнинг бу тўғри чизик-
лар орасидаги энг қисқа
масофани беришини Сак-
кери тўртбурчагининг
хоссаларини текширганда
кўрган эдик. Бундан таш-
қари, ўтапараллел икки
тўғри чизикнинг бири
бўйлаб бу умумий пер-
пендикулярдан ўнг ёки
чап томонга қараб ҳара-
кат қилсак, уларнинг би-
ридаги нуқталарнинг иккинчи ўтапараллелгача бўлган масо-
фалари ўсаборади. Энди биз, ўтапараллел икки тўғри чизик-
нинг биридаги M нуқталарнинг иккинчи тўғри чизикқа
бўлган MP масофаларнинг M нуқтанинг уларга ўтказилган
умумий AB перпендикулярнинг асосидан узоқлашгани сари,
чексиз ўсаборишини кўрсатамиз. Бунини, масалан, шундай исбот-
лаш мумкин: B нуқтадан ма'лум йўналишда b га параллел
қилиб c тўғри чизикни ўтказамиз (чизма 51). Бу тўғри чизик
 aBA бурчакка қаршилидир. a тўғри чизикқа P нуқтада ўтка-
зилган PQ перпендикуляр, BP масофанинг ўсиши блан ўса-
ди: $PQ \rightarrow \infty$. P нуқта шундай P' ҳолатни олиши мумкинки,
унда бу перпендикуляр c тўғри чизикқа параллел бўлади;
демак y, b тўғри чизикқа ҳам параллел бўлади; чунки бирор



Чизма 51.

тўғри чизикқа маълум йўналишда параллел икки тўғри чизик, шу йўналишда ўзаро параллелдир; аммо b тўғри чизикдаги M нуктанинг a тўғри чизиккача бўлган MP масофаси QR дан катта, чунки M ва P нукталар c тўғри чизикдан турли тарафда ётади ($MP > QR$). PQ масофани эса, демак ундан катта MP ни ҳам, истаганча катта кесмадан катта қилиш мумкин. Ҳақиқатан, Q нуктас c тўғри чизикда шундай танланиб олинган бўлсинки, QR перпендикуляр олдин берилган исталган n кесмадан катта бўлсин. PQ тўғри чизик b блан M нуктада кесишади, чунки c тўғри чизик b га AM йўналишда параллелдир. Демак, $PM > PQ > n$. Симметрияга асосан, a ва b тўғри чизиклар ўзларининг умумий AB перпендикуляридан чап томонда ҳам истаганча узоқлашаборади. Келтирилган муҳокамалардан яна бир ажойиб теорема келиб чиқади.

Теорема. Агар ўтапараллел икки тўғри чизик умумий AB перпендикулярга эга бўлса, уларнинг ҳарбирида, масалан a да (умумий AB перпендикулярга нисбатан симметрия) шундай P' , P'' нукталар борки, шу нукталарда a тўғри чизикка ўтказилган P' ва P'' перпендикулялар b тўғри чизикка тегишли йўналишда параллелдир.



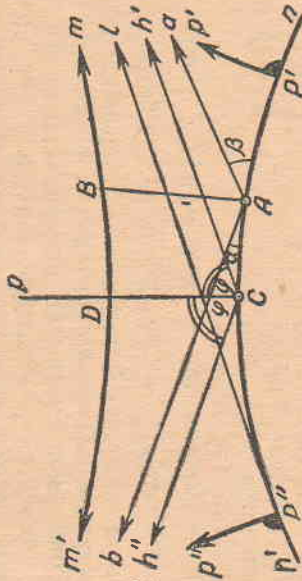
Чизма 52.

Исбот қилинганларнинг ҳаммаси умумий перпендикулярга эга бўлган ўтапараллел тўғри чизикларга тааллуқлидир. Лекин, ҳарқандай иккита ўтапараллел тўғри чизик умумий перпендикулярга эмас (чизма 52). a ва l тўғри чизиклар умумий перпендикулярга эгами?

Теорема. Ҳарқандай икки ўтапараллел тўғри чизик умумий перпендикулярга эга ва бундай перпендикулялар фақат битта.

m ва n ўтапараллел тўғри чизиклар бўлсин (чизма 53). n тўғри чизикда ихтиёрий A нуктани олиб, ундан m тўғри чизикка параллел қилиб икки йўналишда a ва b тўғри чизикларни ўтказамиз. a тўғри чизик nAB бурчакка, b тўғри чизик эса, $n'AB$ бурчакка тегишлидир; бунда B нукта — m нинг бирор нуктасидир. $\angle aAn' = \beta$ ва $\angle bAn' = \alpha$ бурчакларнинг ҳеч бўлмаганда бири ўткир бурчакдан иборатдир; α ўткир бўлсин. Биринчи перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан, n' томонда шундай P'' нукта мавжудки, n' га ўтказилган P'' перпендикуляр b га параллел, демак m' тўғри чизикка ҳам параллел. P'' нуктадан кўрсатилган йўналишда m га параллел қилиб l тўғри чизик-

ни ўтказамиз. $n''l$ бурчакнинг n томонида шундай P' нуктани белгилаб қўямизки, n га ўтказилган $P'R'$ перпендикуляр l тўғри чизикка параллел бўлсин (чизмада P' нукта P'' дан A га қараганда узоқ туради, аммо α ўтмас бўлганда бу ҳол юз бер-

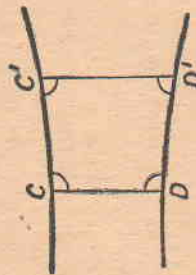


Чизма 53.

маслиги ҳам мумкин эди). P', l га, l эса m га ўша йўналишда параллелдир, демак m га P' параллел бўлади. $P'R''$ масофани C нуктада тенг иккига бўлиб, шу нуктада n га P перпендикуляр ўтказсак, у чоғда P ўтапараллел бўлган m , n тўғри чизикларнинг умумий перпендикуляри бўлади. Ҳақиқатан, симметрияга асосан C нуктадан мос равишда P', P'' га, демак m, m', h', h'' тўғри чизиклар P тўғри чизик билан бир хил φ бурчакларни ташкил этади. Бундан P нинг m' га перпендикулярлиги келиб чиқади*.

Ўтапараллел тўғри чизиклар иккита умумий перпендикулярга эга бўлаолмайди. Чунки, улар иккита умумий CD ва $C'D'$ перпендикулярга эга бўлса (чизма 54), тўрт бурчаги ҳам тўғри бўлган $CDD'C'$ тўртбурчак ҳосил қилинган бўлар эди, бу ҳол эса Лобачевский геометриясида юз бераолмайди. Теорема тўла исботланди.

Шундай қилиб, ўтапараллел бўлган ҳарқандай икки тўғри чизик ўзларининг умумий перпендикуляридан бошлаб бир-бирини чексиз узоқлашаборади. Ўтапараллел тўғри чизикларни Лобачевский „ажралиб кетиши“ („разводные“) тўғри чизиклар деб атаган эди.

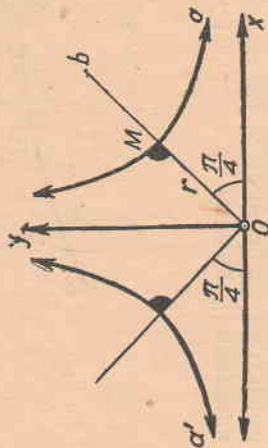


Чизма 54.

* Бу исботни автор 1942 йилда Либкнехт номи пединститутнинг математика кафедрасида доклад қилиб берган эди.

§ 25. Лобачевский текислигидаги тўғри чизиқлар ўзаро вазиятининг ба'зи хусусий ҳоллари.

Бу бобнинг праварида Лобачевский текислигидаги тўғри чизиқларнинг жойлашидаги ба'зи хусусий ҳоллар билан танишиб чиқамиз. Олдинги параграфларда баён қилинганлардан фойдаланиб, тўғри чизиқлардан тузилган ба'зи фигураларни урганайлик; Евклид геометриясида бу фигуралар мавжуд эмас. xOy тўғри бурчакни олиб (чизма 55), унинг b биссектрисасига шундай OM кесмани қўямизки, $\angle(r) = \frac{\pi}{4}$ бўлсин ва OM кесманинг M учидан b тўғри чизиққа a перпендикулярни ўтказамиз. Бу перпендикулярни ўзининг бир йўналишида Ox тўғри чизиққа, иккинчи йўналишида эса — Oy тўғри чизиққа параллелдир. Томонлари Ox, Oy, a дан иборат „учбурчак“ ҳосил қилдик. Ox ва Oy томонлар орасидаги бурчак тўғри бурчакдир, қолганлари эса — нульга тенг. xOy га қўшни бурчакни олиб ҳалиги яшашни такрорласак, у га илгариги йўналишда параллел ва x га тескари йўналишда параллел бўлган a' тўғри чизиқни ҳосил қиламиз. Натижада учта тўғри чизиқ: x, a, a' дан тузилган „учбурчак“ вужудга келади. Унинг томонлари $тулқ$ тўғри чизиқлардан иборат бўлиб, бурчаклари нульга тенгдир. Бу учбурчакни бурчаклари нульдан иборат учбурчак деб атаёмиз. Параллел тўғри чизиқлар орасидаги бурчакларни нульга тенг деб ҳисоблашнинг тараллигига кесудан утиш процесси далил бўлаолади. M нуқтанинг a тўғри чизиқ бўйлаб параллеллик томонига қараб ҳаракатланиши блан (чизма 56), a бурчак нульга интилади; шунинг билан бирга, параллеллар та'рифидан, BM чексиз ўсаборганда AM кесучининг лимитдаги вазияти a га параллел b тўғри чизиқдан иборат деган хулоса келиб чиқади.



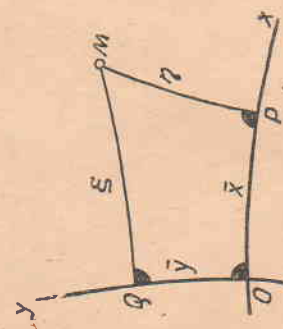
Чизма 55.

Шундай қилиб, параллеллар орасидаги бурчакни нульга тенг деб айтиш табиийдир. Ушанга параллел иккита тўғри чизиқ орасидаги бурчак тўғрисида сўзлаш мумкин эмаслигини айтиб утаемиз. Йўдак қуйидаги ажойиб бир фактни кўрсатиб ўтамиз. Ма'лум йўналишда ўзаро параллел бўлган a ва x тўғри чизиқ берилган бўлса, у чоғда шундай a' тўғри чизиқ мавжудки, у, ўзининг бир йўналишида a га ва тескари йўналишида эса — x га параллел бўлади. Бу бурчаклари нульдан иборат учбурчак устида юритилган муҳокамалардан бевосита келиб чиқади (чизма 55). Тўғри бурчак xOy ва унинг иккала томонига параллел бўлган a тўғри чизиққа доир мулоҳазалардан яна шундай хулоса чиқарамиз: ўзаро параллел икки x, a тўғри чизиқ берилган бўлса, уларнинг бирига (масалан x га) перпендикуляр қилиб шундай Oy тўғри чизиқ ўтказиш мумкинки, у параллелларнинг иккинчисига (масалан a га) қарама-қарши йўналишда параллел бўлади.

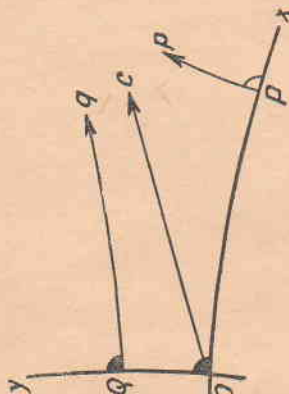
Энди Лобачевский текислигида координаталар системасини кiritиш масаласига тўхталиб ўтамиз. Евклид геометриясидагидек, Декарт координаталарини 57-нчи чизмада кўрсатилган шаклда кiritиш мумкин: Ox тўғри чизиққа O нуқтадан мусбат ва манфий $OP = x$ абсциссаларни қўйорамиз, $PM = y$ ординаталарни Ox ўққа P нуқтада ўтказилган перпендикулярга қўйорамиз. Ox ўқдан тўғри тарафда жойлашган нуқталар учун ординаталар турли ишорага эга. x ўқининг ўзидан ординаталар нульга тенг. Бунда ордината ўқининг O нуқтадан ўтиш-ўтмаслиги аҳамиятли эмас. Координаталарга берилган бу та'рифдан, x, y сонларнинг тартиблаган ҳарқандай жуфтига текислиқнинг фақат битта M нуқтаси мос келади деган хулоса чиқади; аксинча, текислиқнинг ҳарбир M нуқтасига сонларнинг тартиблаган бир жуфти тўғри келади, чунки текислиқдаги ҳарбир M нуқтадан Ox ўқига фақат битта перпендикуляр ўтказиш мумкин. Лекин биз, абсциссаларни яшаш усулини



Чизма 57.



Чизма 58.



Чизма 59.

иларигидек қолдириб, ординаталарни Oy ўқига қўйорсак, у чоғда бутунлай бошқа ахвол юз беради. Бу ҳолда ҳарбир M нуқтага сонларнинг тартиблаган бир жуфти мос келади ва бу сонлар шу нуқтанинг координаталари бўлади, ҳарқандай M нуқтадан координаталар ўқларига MP ва MQ перпендикулярлар тушириш мумкин (чизма 58). M нуқтанинг координаталари учун $OP = x$ ва $OQ = y$ ни қабул қилиш мумкин. Лекин ордината учун PM ни ва абсцисса учун $MQ = x$ ни олсак, бундан олдин кiritилган координаталар системасидан фарқ қиладиган иккинчи системани ҳосил қиламиз, чунки $\xi \neq x$. Бунда $\xi > x$, чун-

ки OP перпендикуляр ўтапараллел бўлган PM ва OQ тўғри чизиклар орасидаги энг қисқа масофадир. Кўриб ўтилган бу учта системаларда M нуктага сонларнинг уч жуфти мос келади: (x, y) ; (ξ, η) . Уларнинг биринчиси Декарт системаси дейилади (чизма 57); бу Декарт системасида нукталар билан сонларнинг тартибланган жуфтлари орасида ўзаро бирқийматли мослик мавжуд бўлсада, кейинги икки система ҳақида буни такрорлаб бўлмайди, яъни бу системаларда айтиб ўтилган бирқийматли мослик рўй бермайди. Масалан, текисликдаги ҳар бир M нуктага фақат сонларнинг бир жуфти (x, y) тўғри келса-да, бунинг текислигини нотўғрийдир. Шундай $\bar{x}, \bar{y}$ сонларни кўрсатиш мумкинки, уларга текисликнинг битта ҳам нуктаси мос келмайди. Буни қуйидагича исботлаш мумкин: координаталар бошидан исталган c тўғри чизикни ўтказамиз ва координаталар ўқларига перпендикуляр, ҳамда c тўғри чизикқа параллел p, q тўғри чизикларни ўтказамиз (чизма 59) $\bar{x} = OP$ ва $\bar{y} = OQ$ сонлар нуктанинг вазиятини белгилamayди. $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ ни мос равишда OP ва OQ дан катта қилиб ҳам олиб бўлмайди. Нукталар билан сонлар жуфтлари орасидаги мослик ўзаро бирқийматли эмас. Лобачевский ўзининг аналитик геометриясида координаталарнинг кўрсатилган уччала системасидан ҳам фойдаланган эди.

ТўРТИНЧИ БОВ ЛОБАЧЕВСКИЙ ГЕОМЕТРИЯСИДА ЮЗАЛАРНИ ЎЛЧАШ МАСАЛАСИ

*Содда текис кўпбурчак** жумладан учбурчак юзи ҳақидаги тушунчани барпо қилиш, бундай кўпбурчакнинг ҳарбири учун қуйидаги икки шарт бажарилган ҳолда *мусбат сонни* кўрсатишдан иборатдир:

1°. *Конгруэнт (тенг) кўпбурчакларга тенг сонлар мос келади.*

2°. *Қўшни бўлган икки кўпбурчакдан тузилган кўпбурчакка мос сон, бу кўпбурчакларнинг ҳарбирига мос келган сонлар йиғиндисига тенг (аддитивлик хоссаси).*

Агар иккита содда кўпбурчак битта ёки бирнеча умумий томонга эга бўлса, ёхуд бу томонларнинг айрим қисмлари умумий бўлса, ва уларнинг битта ҳам умумий ички нуктаси бўлмаса, бундай кўпбурчакларни қўшни деб айтамыз.

Қўйилган талаблар бажарилган тақдирда ҳар бир содда кўпбурчакка мос келган *сон*, бу кўп бурчакнинг юзи деб аталади.

Бу бобда баён қилинганлардан мақсад, *ҳар бир учбурчакка шу учбурчак нуксонига пропорционал миқдорни бериш*.

Лобачевский геометриясида юзаларни ўлчаш системасининг барпо қилиниши учун етарли эканлигини кўрсатишдир [учбурчакнинг нуксонини деб π билан учбурчак бурчакларининг йиғиндиси орасидаги айрмани айтилади, яъни $\delta = \pi - (A + B + C)$]. Ҳарқандай содда кўпбурчакнинг юзи аддитивлик хоссасига мувофиқ аниқланади, яъни бу кўпбурчакнинг юзи уни учбурчакларга бўлиш натижасида ҳосил қилинган учбурчаклар юзларининг йиғиндиси сифатида аниқланади; бунда кўпбурчак юзига мос келган *сон*, кўпбурчакни учбурчакларга бўлиш усулига боғлиқ эмасдир.**

* Содда кўпбурчак таърифи 37-нчи § да берилган (бет 90).

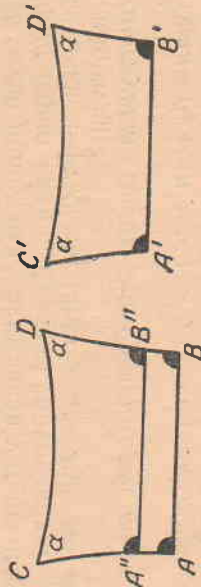
** Адамар китобидаги [1] баён билан таққосланг, D қўшимча. Юза тушулчаси ҳақида. Буерда келтирилган юзалар назарияси Лобачевскийникидир [17]. Лобачевский томонидан берилган исботлар Костин [13] асарида қайтадан ишлаб чиқилган.

§ 26. Саккери тўртбурчакларининг конгруэнтлиги.

Худди Евклид геометриясидагидек, Лобачевский геометриясида эгри чизиқли фигураларнинг юзлари уларга ички ва тاشқи чизилган кўпбурчаклар юзларининг лимитлари сифатида таърифланади; демек иш кўпбурчаклар юзларини ҳисоблашга келтирилади. Бу кўпбурчаклар қабариқ бўлса, уларни диагоналар билан учбурчакларга бўлиб, биз *учбурчак юзини аниқлаш* масаласига келамиз ва бу масала билан ушбу бобда шуғулланамиз. Аввало ёрдамчи бир да'вони исботлайлик.

Юқори асослари тенг ва бу асосларга ёпишган ўткир бурчаклари мос равишда тенг бўлган Саккери тўртбурчаклари бир-бирига конгруэнтдир.

Исбот. Фараз этайлик, Саккерининг $ABDC$ ва $A'B'D'C'$ тўртбурчакларида $CD = C'D'$ ва CD билан $C'D'$ асосларига ёпишган ўткир бурчаклар бир-бирига тенг бўлсин (чизма 60).



Чизма 60.

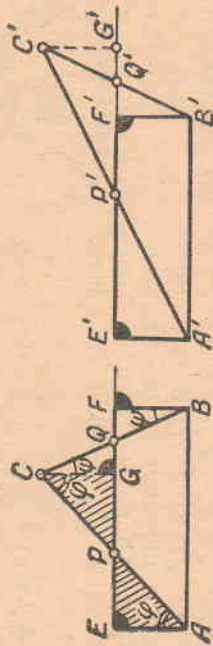
Бу бурчакларни α билан белгилайлик. $A'B'D'C'$ тўртбурчакни $ABDC$ тўртбурчакка шундай қўямизки, $C'D'$ томон CD билан устма-уст келсин; бурчакларнинг тенглигидан, $C'A'$ тўғри чизиқ CA бўйлаб кетади. Шу сабабнинг ўзига кўра, $D'B'$ тўғри чизиқ DB бўйлаб кетади; энди ҳамма гап, A' нуктага A' вазиятда, B' нуктанинг B нуктага тушишида. A' нукта A' вазиятни, B' нукта эса B' вазиятни олади ва $A''B''$ нукталар AB тўғри чизиқдан бир тарафда ётади деб фараз этайлик (чизма 61). AB дан юқорида). AC тўғри чизиққа ўтказилган икки перпендикуляр AB ва $A''B''$ ўтапараллелдир; демек, ўтапараллел AB ва $A''B''$ тўғри чизиқлар бундай ҳолда иккита умумий перпендикулярга эга бўлади: AC ва BD , бу эса юз бериолмайди. Шунинг учун, Саккери тўртбурчакларини юқоридагидек қилиб устма-уст келтирсак, уларнинг пастки $A'B'$ ва AB асослари ҳам устма-уст тушиши керак. Хуллас, бу тўртбурчаклар конгруэнтдир. Талабимиз исбот бўлди.

§ 27. Учбурчакларнинг нуқсони ва учбурчакнинг юзи.

Теорема. Нуқсонлари тенг ва биттадан томонлари тенг бўлган икки учбурчак тенгюзлидир.

Исбот. ABC ва $A'B'C'$ учбурчакларнинг AB ва $A'B'$ томонлари тенг бўлсин ва уларнинг нуқсонлари бирхил бўлсин: $\delta = \pi - (A + B + C)$, $\delta' = \pi - (A' + B' + C')$, $\delta = \delta'$ (чизма 61).

Харбир учбурчакда қуйидаги ясабларни бажарайлик. ABC учбурчакнинг AC ва CB томонларининг P, Q билан белгиланган ўрталарини тўғри чизиқ билан бирлаштириб, бу тўғри чизиққа A, B нукталардан AE, BF перпендикулярлар туширамиз. C нуқтадан ҳам бу тўғри чизиққа CG перпендикуляр туширамиз. $A'B'C'$ учбурчакда ҳам шуларни такрорлаймиз. Тўғрибурчакли



Чизма 61.

PGC , AEP учбурчаклар тенгдир, чунки уларнинг гипотенузлари тенг ва P нуқтадаги бурчаклари ҳам вертикал бўлганлиги учун бир-бирига тенгдир. Шу сингари, CGQ ва QFB учбурчаклар ҳам бир-бирига тенгдир. Демак, $AEFB$ тўртбурчакнинг юзи ABC учбурчакнинг юзига тенгдир. Худди шунингдек, $A'E'F'B'$ тўртбурчакнинг юзи $A'B'C'$ учбурчакнинг юзига тенгдир. Аммо $EFBA$ ва $E'F'B'A'$ тўртбурчаклар Саккери тўртбурчакларидир, чунки $EA = CG = FB$, $A'E' = C'G' = B'F'$ ва E, F, E', F' бурчаклар — тўғри бурчаклардан иборат. Биринчи тўртбурчакнинг „юқори“ асосидаги A ва B бурчакларининг йиғиндисини ABC учбурчак бурчакларининг йиғиндисига тенгдир, чунки C нуқтадан EF га туширилган перпендикуляр, C бурчакни ϕ, ψ бурчакка бўлади. Шунингдек, $E'F'B'A'$ тўртбурчакнинг „юқори“ асосидаги бурчакларининг йиғиндисини $A'B'C'$ учбурчак бурчакларининг йиғиндисига тенгдир. Аммо ABC ва $A'B'C'$ учбурчакларнинг нуқсонлари шартга кўра тенглиги сабабли, улардаги бурчакларнинг ҳам йиғиндилари тенгдир; бундан эса, $EFBA$ ва $E'F'B'A'$ тўртбурчаклар ўзаро конгруэнт деган хулосани чиқарамиз, чунки уларнинг „юқори“ асослари тенг: $AB = A'B'$ ва „юқори“ асосдаги бурчаклари ҳам тенгдир ($AEFB$ тўртбурчакда $\angle A = \angle B$ ва A бурчак ABC учбурчак бурчаклари йиғиндисининг ярмига тенг). Демак ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар ҳам конгруэнтдир.

Энди яна бир леммани исботлайлик.

Агар ABC учбурчак CD трансверсаль билан иккита учбурчакка бўлинган бўлса, бу учбурчаклар нуқсонларининг йиғиндисини олинган ABC учбурчакнинг нуқсонига тенгдир (чизма 62).

Хосил қилинган ADC , DBC учбурчакларнинг нуқсонларини δ' , δ'' блан белгилайлик: $\delta' = \pi - (\alpha + \lambda + \gamma')$, $\delta'' = \pi - (\mu + \beta + \gamma'')$; буларни қўшайлик: $\delta' + \delta'' = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma' + \gamma'') - (\lambda + \mu)$; аммо $\gamma' + \gamma'' = \gamma$; $\lambda + \mu = \pi$; шу сабабли: $\delta' + \delta'' = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) = \delta$.

Бундан ташқари, агар D нуқта AB бўйлаб A дан B га ҳаракат қилса, δ' нуқсон O блан δ орасидаги истаган қийматни қабул қилатуриб, O дан δ га ҳақ ўзгаради. Агар D нуқта A нуқта блан бир-лашишга интилса, у чоғда $\gamma' \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow \alpha$; демак

$$\lambda \rightarrow \pi - \alpha \quad \text{ва} \quad \delta' = \pi - (\alpha + \gamma' + \lambda) \rightarrow \pi - \pi = 0.$$

Агар D нуқта ўз ҳаракатини A дан бошласа, ADC учбурчакнинг δ' нуқсони ўз ўзгаришини O дан бошлайди. Агар D нуқта D' ҳолатини ол-

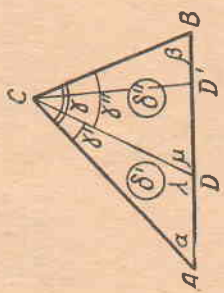
са, ADC учбурчакнинг нуқсони ADC ва $DD'C$ учбурчаклар нуқсонларининг йиғиндисига тенг бўлади. Бу муҳокамалардан, D нуқтанинг A дан B га ҳаракат қилиши блан, ADC учбурчакнинг δ' нуқсони O дан δ га ҳақ ўсади деган хулоса чиқади, бунда δ берилган ABC учбурчакнинг нуқсонидир. Бунда шуни ҳам э'тиборга олиш кераки, ўсиш узлуксиз боради, бу эса — O блан δ орасидаги δ_1 сон қандай бўлса-да ($0 < \delta_1 < \delta$), D нуқтанинг шундай вазиятини борлигини кўрсатадики, ADC учбурчакнинг нуқсони δ_1 га тенг бўлади. Бу муҳим леммани биз келгусида ишлатамиз.

Теорема. Биттадан томонлари тенг бўлган икки учбурчак юзларининг нисбати, уларнинг нуқсонларининг нисбатига тенгдир.

ABC ва $A'B'C'$ учбурчакларда $AB = A'B'$, δ , δ' — бу учбурчакларнинг нуқсонлари, Δ, Δ' — уларнинг юзлари бўлсин. $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$.

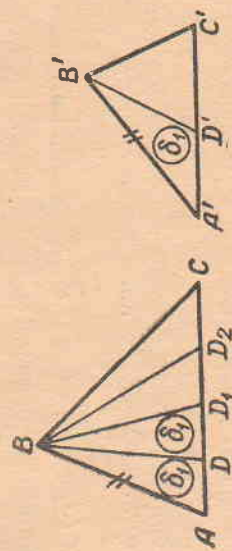
муносабатнинг борлигини исботлаш талаб қилинади.

1°. δ , δ' нуқсонлар ўлчовдош бўлсин, я'ни уларнинг δ нуқсонга m марта, δ' нуқсонга n марта жойлашадиган умумий δ_1 ўлчови мавжуд бўлсин: $\delta = m \delta_1$, $\delta' = n \delta_1$, бунда m , n — натурал сонлар ва $0 < \delta_1 \leq \delta$, $0 < \delta_1 \leq \delta'$. Олдинги муҳокамаларга асосан, AC да ва шунингдек $A'C'$ да ҳам шундай D ва D' нуқталар топилдики, ADB ва $A'D'B'$ учбурчакларнинг нуқсонлари δ_1 га тенг бўлади. Бундай ҳолда эса, ADB ва $A'D'B'$ учбурчаклар тенгюзлидир, чунки уларнинг нуқсонлари бирхил ва биттадан томонлари тенгдир ($AB = A'B'$). Энди BD_1 трансверсаль ўтказиб, DBC учбурчакдан нуқсони δ_1 га тенг бўлган DD_1B учбурчакни "қирқиб" оламиз; сўнгга D_1BC учбурчакдан нуқсони яна δ_1 га тенг $\triangle DD_1B$ ни "қирқиб" оламиз ва х. к. Натижада B нуқтадан ўтказилган трансверсальлар $\triangle ABC$ ни нуқсонлари δ_1 га тенг бўлган m -та учбурчакка бўлади. Шу



Чизма 62.

сингари, B' нуқтадан ўтказилган трансверсальлар $\triangle A'B'C'$ ни нуқсонлари δ_1 га тенг n -та учбурчакка бўлади. Аммо BD томонлари умумий ва нуқсонлари тенг бўлганидан, DBD_1 ва ABD учбурчаклар тенгюзлидир. Ўша сабабга кўра, $\triangle DD_1B$ нинг юзи $\triangle DD_1B$ нинг юзига тенгдир, ва х. к. Демак, ABC учбурчакдан бўлиниш натижасида ҳосил қилинган m -та уч-



Чизма 63.

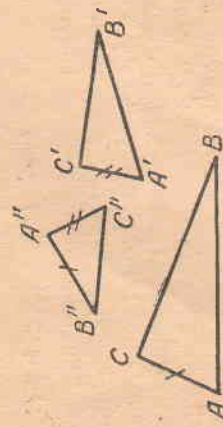
бурчак тенгюзлидир. Шу сабабнинг ўзига асосан, $A'B'C'$ учбурчакдан бўлиниш натижасида ҳосил қилинган n -та учбурчакнинг юзлари ўзаро тенг ва ABC учбурчакдаги ҳарбир қисм юзига тенгдир, чунки ADB ва $A'D'B'$ учбурчаклар тенгюзлидир. Демак, битта юзнинг $ўзи$ биринчи учбурчакка m марта, иккинчи учбурчакка n марта жойлашади Бундан:

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{m}{n} = \frac{m\delta_1}{n\delta_1} = \frac{\delta}{\delta'}.$$

2°. δ ва δ' нуқсонлар ўлчовдош бўлмаган ҳол бундай масалаларда ан'ана бўлиб қолган усул текширилади, я'ни: ўлчовдош нуқсонлар учун ўтказилган исботнинг биринчи қисмидан фойдаланиб, учбурчаклар юзларининг нисбати $\frac{1}{N}$ га ҳақ (N — исталган бутун сон) аниқлик блан нуқсонлар нисбатига тенг деган натижага келамиз. N ни чексизликка интиштириб, нуқсонлар ўлчовдош бўлмаган ҳол учун теорема исботланади. Энди теоремани умумий ҳол учун исботлайлик.

Теорема. Ҳарқандай икки учбурчак юзларининг нисбати, уларнинг нуқсонлари нисбатига тенгдир.

Исбот. Фараз этайлик, ABC ва $A'B'C'$ — нуқсонлари мос равишда δ ва δ' га тенг иккита учбурчак бўлсин. Шундай учинчи $A''B''C''$ учбурчак ясаймизки, $A''B'' = AC$ ва $A''C'' = A'C'$ бўлсин (чизма 64). Бу учбурчакнинг нуқсони δ'' бўлсин. Шун-



Чизма 64.

дай қилиб, ABC учбурчакнинг бир томони $A''B''C''$ учбурчакнинг бир томонига тенгдир. Демак, олдинги теоремага асосан, бу учбурчаклар юзларининг нисбати уларнинг нуқсонлари нисбатига тенг: 1) $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$, $A''B''C''$ ва $A'B'C'$ учбурчаклар ҳам биттадан умумий томонга эгадир, демак: 2) $\frac{\Delta''}{\Delta'} = \frac{\delta''}{\delta'}$; бунда Δ , Δ' , Δ'' қаралаётган учбурчак юзлари; ҳосил қилинган тенгликларни ҳалма-ҳад кўпайтиб чиқсак, $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$ келиб чиқади, бу эса теоремани исботлаб беради.

Бундан, **учбурчак юзининг шу учбурчак нуқсонига нисбатли учбурчакка боғлиқ бўлмаган ўзгармас миқдордир**, деган хулосани чиқарамиз (я'ни бу миқдор ҳамма учбурчак учун бирхилдир). Ҳақиқатан, $\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\delta}{\delta'}$ тенгликдан $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta'}{\delta'}$ тенглик келиб чиқади. Агар ABC ни берилган учбурчак, $A'B'C'$ ни эса ихтиёрин учбурчак десак, ҳосил қилинган тенглик **ихтиёрин учбурчак юзининг шу учбурчак нуқсонига нисбатининг**, берилган учбурчак юзининг шу учбурчак нуқсонига нисбатига тенглигини кўрсатади. Ўзгармас бу нисбатнинг қандай белгиланиши (ишораланиши), юзлар ўлчовининг бирлигига боғлиқдир. Бу ўзгармас миқдорни, Лобачевский геометриясида параллеллик бурчагини аниқловчи формулага киручи ўзгармас κ миқдорнинг квадратага тенг қилиниб олинади. Ўзгармас нисбат миқдорини бу йўсунда танлаб олинса, $\frac{\Delta}{\delta} = \kappa^2$, ёки $\Delta = \kappa^2 \delta$ ни ҳосил қиламиз, ёки $\delta = \pi - (A + B + C)$ ни э'тиборга олиб, учбурчак юзининг формуласини шундай ёзиш мумкин:

$$\Delta = \kappa^2 [\pi - (A + B + C)].$$

Эслатма. Бу формулада κ ўрнига формал тарихда iR ни қўйсак, ($i = \sqrt{-1}$), учбурчак юзи учун ушбу формула ҳосил бўлади:

$$\Delta = -R^2 [\pi - (A + B + C)] = R^2 [(A + B + C) - \pi],$$

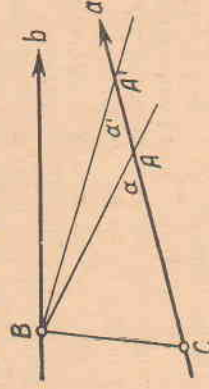
бу эса — сферадаги учбурчак юзининг формуласидир, бу учбурчакнинг томонлари катта доиралар ёйларидан ва бурчаклари A , B , C дан иборатдир (Адамар [2] китобида қаралсин, бет 369). Лобачевский геометриясидаги барча формулаларда κ ўрнига iR қўйилса, улар сферадаги геометриянинг формулаларига айланади.

Лобачевский ўзининг геометрияси билан сферик геометрия орасидаги бу боғланишни батафсил асослади.

§ 28. Учбурчакларнинг лимитик ҳоллари.

Энди $\Delta = \kappa^2 [\pi - (A + B + C)]$ формуладан келиб чиқадики натижаларга тўхтаб ўтайлик. Бу формула учбурчак бурчак-

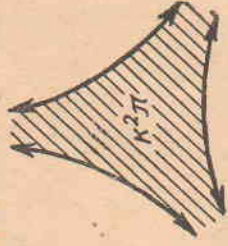
ларининг йиғиндиси $A + B + C$ қанча кичик бўлса, учбурчак юзи Δ нинг шунча катта бўлишини кўрсатади. Аксинча, учбурчакнинг юзи қанча кичик бўлса, я'ни бу учбурчакнинг юзи қанча кичик бўлса, унинг бурчакларининг йиғиндиси π га шу қадар яқин бўлади. Лимитда ҳосил бўладиган ушбу ҳолни кўрайлик. $\triangle ABC$ ни олиб (чизма 65), унинг B , C ушларини ҳаракатсиз қолдирамиз ва A учни CA асос бўйлаб, мисол учун, унғ томонга қараб кўчирабормиз; бу чоғда маълумки $\angle A = \alpha$ бурчак нульга интилади, BA томон эса, лимитик ҳолни олади, я'ни a га параллел бўлган b тўғри чизиқ вазиятини қабул қилади; ABC учбурчак эса бир-бирига параллел a , b тўғри чизиқлар орасида жойлашган ва BC тўғри чизиқдан унғ тарафдаги минтақага айланди.



Чизма 65.

Четараланган бундай минтақани бир бурчаги 0 га тенг "учбурчак" деб айтиш ва унинг юзини ушбу $\Delta = \kappa^2 [\pi - (B + C)]$ формулага асосланиб ҳисоблаш табиийдир. Мисол тариқасида бир бурчаги нульга, иккинчи бурчаги $\frac{\pi}{2}$ га, демак учинчи бур-

чаги $\Pi(p)$ га тенг бўлган учбурчак юзини топайлик, бунда p блан BC томоннинг узунлиги белгиланган (чизма 66). Бундай "учбурчакнинг" юзи:



Чизма 66.

Иккинчи мисол сифатида, "учта бурчаги ҳам нульга тенг учбурчакни" оламиз; бу учбурчак 67-нчи чизмада "тасвирланган". Бу учбурчак бурчакларининг $A + B + C$ йиғиндиси 0 га тенгдир. Демак, бу учбурчакнинг Δ юзини $\kappa^2 \pi$ га тенг деб қабул қилиш мумкин. Ҳечбир учбурчакнинг юзи "бурчаклари нульга тенг учбурчак" юзидан катта ёки унга тенг бўлаолмайди. "Бурчаклари нульга тенг учбурчак" бурчакларининг йиғиндиси ҳарқандай учбурчак бурчакларининг йиғиндисидан кичик, демак унинг юзи энг каттадир.

$$\Delta = \kappa^2 \left[\pi - \left[\Pi(p) + \frac{\pi}{2} \right] \right], \text{ ёки } \Delta = \kappa^2 \left[\frac{\pi}{2} - \Pi(p) \right].$$

Чизма 67: Геометрический рисунок треугольника с вершинами B, C и A. Вершина A находится на расстоянии p от стороны BC. Угол при вершине B обозначен как pi(p). Площадь треугольника заштрихована.

Чизма 67.

§ 29. Юзи ихтиёрӣй катта бўлган учбурчак мавжуд, деган фараз—Евклид постулатига эквивалентдир.

Агар юзлари ҳарқанча катта бўлган учбурчаклар мавжуд деб фараз қилинса, бундан Евклид постулати келиб чиқади, яъни бу фараз Евклид постулатига эквивалентдир.

Бошқача айтганда, учбурчакнинг юзи ҳарқанча ўсиши мумкин деган фараз, Евклид постулатига эквивалентдир, чунки учбурчакнинг юзи чегарасиз ўсаолади деган фараздан чиқарилган ҳулосалар Лобачевский постулатидан чиқадиган натижаларга, демак бу постулатнинг ўзига ҳам зиддик қилади. Шу блан Лобачевский геометриясидаги юзалар назариясига бағишланган ушбу қисқа бобга хотима ясаймиз. Лобачевский юзалар ҳақидаги таълими батафсил ривожлангирди; у, кўпбурчак юзлари ва доира ҳамда унинг қисмларининг юзларини учун тегишли формулаларни чиқариб беради; интеграл ҳисоби ёрдами блан истаган фигуранинг юзи учун формула чиқаради (бу фигуранинг юзи тўғрисида сузлаш мумкин бўлса).

§ 30. Лобачевскийнинг математика соҳасидаги хизматлари.

Бу бобнинг правардида шунини айтиб ўтамизки, Лобачевский ўзининг ғайриевклид геометриясида планиметрия, стереометрия ва тригонометрияни мукаммал равишда ривожлантириб, бу бўлимларнинг деярлик ҳамма асосий теоремаларини ва улардан келиб чиқадиган барча ҳулосаларни кўрсатиб берди. Ўз геометриясидаги бу элементар бўлимдан ташқари Лобачевский текислик блан фазода ғайриевклид аналитик геометрияни ва диференциал геометрияни яратди. Шунини ҳам таъкидлаш керакки, Лобачевскийнинг геометрия асосларига доир улуғвор кашфиёти, улуғ рус олимининг бошқа соҳалардаги ғоят даражада муҳим хизматларини ўз гавдаси блан тўсиб турди.

Уларнинг баъзиларини кўрсатиб ўтайлик. Ўзлуксиз функциялар синфи блан дифференциаллануши функциялар синфи орасидаги фарқни Лобачевский жуда яхши билар эди, тенгламалар илдиэларини тақрибий ҳисоблаш усулини берди; бу усул Лобачевский усули номи блан юргизилади; Дедекндининг ўзлуксизлик ҳақидаги аксиомасининг вужудга келишидан анча илгарийёқ ўзлуксизлик тушунчасидан, унга тегишли жуммаларни аниқ ифодалаб, дуруст фойдаланиб келди.

Шу муносабат блан, Дедекндин аксиомасининг мазмуни, Лобачевскийнинг берилган нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизикқа берилган йўналишда фақат битта параллел тўғри чизик ўтади деган даъвосининг ўзидан бошқа нарса эмаслигини айтиб ўтиш керак.

Лобачевский „нурларнинг икки синфга бўлиниши ва бундай

бўлиниши вужудга келтиручи бирдан-бир нурнинг мавжудлиги“ ҳақида тўғридан-тўғри гапирди.

Хуллас, математиканинг қийин ва нозик бўлган кўпгина масалаларида Лобачевский ўз замонасининг фанидан анча илгари кетган эди. У ўз геометриясини яратиши блан геометрия соҳасида улуғ шухрат қозонишига сабаб бўлди.

Отоқли совет олими, академик А. Н. Колмогоров [4] „... Лобачевский геометриясининг яратилиши, ўнсаккизинчи асрдаги математик тафаккур услубига қарама-қарши бўлган ўн-тўққизинчи аср математик тафаккурининг услубини анча ўзгартишга йўл очди“ деб ёзади.

Лобачевский геометриясининг яратилиши муносабати блан, геометрик системанинг зидсизлиги масаласи тўғрисида. Бирор геометрик системани етарлича ривожлантириб унинг бирин-кетин теоремаларини ҳосил қилаборганда, уларнинг зиддикка олиб келтирмаслиги учун ишонч борми? Модомики, Лобачевский геометриясига нисбатан бу зидсизлик масаласи тўғрилар экан, биз масалани Евклид геометрияси олдига қўйишга ҳам ҳақли-миз. Гарчи Евклид геометрияси, ўз таркибидagi теоремалари блан ҳозиргача зиддикка учрамаган бўлса-да, унинг теоремаларининг сони ошаборган сари ҳеҳқачон ҳам зиддикка дуч келмаслигини ким исботлади? Демак, зидсизлик масаласи,

Лобачевский геометрияси блан Евклид геометрияси олдида бир меърда қўйилади. Евклид геометриясининг кундалик практикада амалга ошиши ҳаммага маълум. Аммо биз Евклид геометриясининг Лобачевский геометрияси учун хусусий ҳоллигини кўрсатиб берган эдик. Шунинг учун, Лобачевский формуласига киручи ўзгармас миқдор κ , етарлича катта қий-матга эга бўлганда, ҳар икки системадан ҳосил қилинган натижалар орасидаги фарқ амалда сезилмай қолиши мумкин. Агар Евклид геометриясида формал тарихида бўлса-да зид-лик юз берса, арифметикада ҳам зидлигининг борлиги кейинги вақтларда исботланди. Бундан ташқари, Лобачевский геометриясида содир бўлган ҳарқандай зидлиқнинг, Евклид геометриясида ва арифметикада ҳам зидлик тўғрисида исботланди.

Лобачевский геометриясининг вужудга келиши блан, геометриядагина эмас, балки бутун математикада янги давр очилади. Лобачевскийнинг ғайриевклид геометриясининг очили-ши, математика асосларини тубдан қайта қараб чиқишга маж-бур этади. Геометрия асослари, ва умуман математик фанлар-нинг асослари—аксиоматика—ҳақида таълимот юзага келади. Масалан, геометрия аксиомаларининг тўлиқ рўйхати ва улар-нинг зидсизлиги масалалари кўтарилади. Бундай зидсизлиқни исботлаш ҳақида тўлиқча бериш ва геометрия асосларида бу масаланинг қандай қўйилишини билиб олиш мақсадида, биринчидан, Евклиднинг „негизлар“ деган асари блан ва, иккинчидан, геометрия аксиомалари ва аксиоматик метод блан танишиб чиқамиз.

ЕВКЛИДНИНГ "НЕГИЗЛАР" НОМЛИ АСАРНИНГ ОБЗОРИ

Евклид ҳақида бор маълумот жуда оз. Бизга фақат унинг фаолиятининг гуллаган даври милоддан тахминан 300 йил бурун Искандарияда бўлганигина маълум. Математика ва геометрик оптиканинг Евклид кўп асарлар ёзди. Аммо бу асарларнинг кўпчилиги сақланиб қолмай, фан тарихига фақат уларнинг номларигина маълум. Бизнинг давримизгача унинг фақат "Негизлар" номли улуг ижоди келиб етди, бу асарда Евклид Юнонистондаги ўз замондошларига маълум фактларни тўплади, кўп нарсани ўзидан қўшди. Энг муҳими шундаки, Евклид тўплаган маълумотларини узоқ вақт давомида аёнлик ва жиддийлик жиҳатдан тақлидга манзур ҳисобланадиган системага солди. Дунёдаги бошқа асарларга қараганда Евклиднинг "Негизлари" жуда кўп марта нашр этилди. Коперник, Галилей, Декарт, Паскаль, Ньютон, Ломоносов, Лейбниц, Лобачевский ва умуман улуг олимлар, геометрияни шу китобдан ўқиган эдилар. Бутун олам ёшлари Евклиднинг "Негизларини" бошқа авторларнинг баёни орқали ўрганадилар. Бу асарнинг мазмуни блан биз танишиб чиқамиз [10].

§ 31. Евклид "Негизларининг" мазмуни.

Евклиднинг "Негизлари" 13 китоб (боб) дан иборат. 7,8,9-нчи китоблари арифметикага бағишланиб, улар геометрия тили блан баён қилинган. 10-нчи китобда иррационал миқдорлар назарияси берилган. Бу китоблар (яъни 7-10-нчи китоблар) сонларнинг бўлиниш аломатларига, яъни соф арифметикага бағишланган десак хато қилмаган бўламиз. Бу китобларда Евклид, катта назарий аҳамиятга эга бўлган ва энг нозик масалаларни ўз олдига қўйиб, уларни зўр маҳорат блан ечади. Масалан, 19-нчи асрда вужудга келган ва математика олимлари томонидан янгиланган сифатида қабул қилинган иррационал миқдорлар назарияси Евдокс блан Евклид асарларидаёқ ишлаб чиқилган эди. Булар Евклиднинг назарий жиҳатдан нозик бўлган бу китобларининг катта аҳамиятлилигини яна бир бор кўр-

сатади. Биз бу китобларга тўхтаб ўтирмасдан, геометрик мазмунли китобларга диққат қиламиз.

1-нчи китобда учбурчакларнинг тенглик шартлари, учбурчакнинг томонлари блан бурчаклари орасидаги муносабатлар, параллеллар назарияси, параллеллограммлар хоссалари, учбурчаклар ва кўпбурчаклар юзларининг тенглик шартлари келтирилган, бу китоб, кўпбурчакни унинг блан тенгюзли учбурчакка айлантириш масаласи блан тугайди.

2-нчи китобда бу масала кўпбурчакка ва квадратга нисбатан қўйилади, яъни берилган кўпбурчакни унинг блан тенгюзли квадратга айлантириш масаласи қаралади. Йўлакай баъзи айниятлар геометрик формада исботланади. Ҳозирги ёзувда:

$$ab + (a - b)a = a^2 \text{ (2-нчи теорема).}$$

$$ab = b(a - b) + b^2 \text{ (3-нчи теорема).}$$

Бу айниятларни Евклид 68-нчи чизмада келтирилган тўғри тўртбурчаклар юзларини текширишга асосланиб исботлайди. Турганга, Евклид кес-

маларни ҳарфлар блан, ва юзани кўпайтма шаклида ифода этмайди. Евклиднинг исботлари, мактабдаги баъзи дарсликлардагидек, оғир, ўнғайсиз ҳолда берилган.

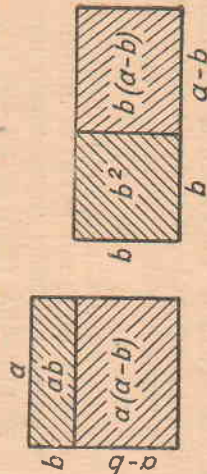
3-нчи китоб ай-

ланага бағишланади. Буерда айлананинг муҳим хоссалари қаралади. Икки айлананинг ҳамда айлана блан тўғри чизиқнинг ўзаро вазияти, марказий бурчаклар блан ички чизилган бурчаклар орасидаги муносабат қаралади.

4-нчи китобда ички чизилган ва ташқи чизилган кўпбурчаклар тўғрисида сўз боради.

5-нчи китобда пропорциялар назарияси бор. Бу китоб ҳозирги замон фани нуқтаи назаридан ҳам аҳамиятлидир. Бу китоб аслида Дедекинд кесимлари назариясидан иборат бўлган иррационал миқдорлар назариясини ўз ичига олади. Юнонлилар иррационал сонларни билмаганликлари ва арифметика блан миқдорлар ҳақидаги таълимот орасида чегара қўйганлари сабабли, Евклид иррационаллик назариясига муҳтож эди. Бу китобда Архимед-Евдокс постулати ҳам бор. Математиканинг баъзи тарихчилари бу китобни Евдокс ёзган деб даъво қиладилар.

6-нчи китобда кўпбурчаклар ўхшашлиги назарияси ва шу муносабат блан, тўғричизиқли фигуралар юзлари назарияси берилган. Евклид юзлар учун биз тушунган маънода "формулалар" бермасдан, бир *фигуранинг иккинчи фигура блан тенгюзли эканлигини* ёки фигуралар юзлари нисбатларининг тенглигини исботлайди.



Чизма 68.

7—10-нчи китоблар тўғрисида юқорида сўзладик.

11—12-нчи китобларда стереометриянинг бошланғич боблари, ҳажмлар, кўпёқлар ва айланма жисмлар назарияси берилди. Бу китобларда Евклид лимитлар назариясининг ўрнини босадиган *битирини методидан* фойдаланади (метод исчерпания).

13-нчи китобда мунтазам кўпёқлар ҳақидаги таълимот берилди.

Евклиднинг „Негизлар“ номли асари ўша замон Юнон олимлари маълум бўлган барча геометрик фактларни ўз ичига олмади. Масалан, юнонлиларга ўша даврдаёқ, *коник кесимлар назарияси* маълум эди ва бу назарияни Аполлоний фойда ражада юксалтирган эди. Юнонлилар *мураккаб* (алгебраик ва трансцендент) *чизиқлар* блан ҳам таниш эдилар.

§ 32. „Негизлар“ да баёнлаш усули.

Ҳарбир китоб унда учрайдиган тушунчаларнинг таърифларидан бошланади. Биринчи китоб 23 таъриф блан бошланади. Уларнинг кетидан постулат ва аксиомалар келади. Бундан сўнг бир-бирини боғловчи муҳокамавларни бермасдан, бирин-кетин теоремалар (жумлалар, даъволар) исботланаборади. Ҳарбир теорема даставвал ифодаланади, сўнгра берилганлар блан исботланиши керак бўлган фактлар кўрсатилади. Бундан кейин, илгариги теоремалар, постулатлар, аксиомаларга таяниб исбот олиб борилади. Ҳарбир исбот, „талаб исботланди“ сўзлари блан тугайди. Евклид исботнинг ҳамамоментиға бирхил диққат блан қарайди, унинг учун майда-чуйда йўқ; уларнинг энг осонларини ҳам, қийин ва оғир моментларига берган диққат блан исботлайди. Теоремада учраши мумкин бўлган барча ҳолларни Евклид ҳаргал сабот блан батафсил кўздан кечиради. Евклид китобхонда ҳосил бўлиш эҳтимоли бор ҳарбир сўроқ, ҳарбир шубҳа тўғрисида зийраклик блан огоҳлантириб қўйишға ҳаракат қилади. Лекин жиддийлик жиҳатдан жиримсиз бўлиш мақсадига Евклид барибир эришаолмади; буни биз кейинроқ кўраимиз. Шунга қарамай, Евклиднинг асари кўп йиллар мобайнида аниқлик, бекаму-кўстлик (жиримсизлик), жиддийлик жиҳатдан етиб бўлмайдиган асар намунаси бўлиб келди. Масалан, 17-нчи асрда файласуф Спиноза, „Геометрия методи блан баён қилинган Декарт фалсафаси“ деган китобни ёзади. „Геометрия методи блан“ сўзлари, баён таърифлар, постулатлар ва аксиомалардан бошланиб, қолган жумлаларнинг шулардан хулоса тариқасида ҳосил қилинишини билдиради.

§ 33. „Негизлар“ нинг асосий хусусиятлари.

Авалги саккизта таъриф қуйидагича ифодаланган:

Таъриф I. Нуқта шудирки, у булақларға эға эмас.

Таъриф II. Чизик энсиз узунлиқдир.

Таъриф III. Чизикнинг чегаралари нуқталар деб аталади.

Таъриф IV. Тўғри чизик деб шундай чизикни аталадики, у ўзининг ҳамма нуқталарига нисбатан бирхил жойлашгандир.

Таъриф V. Сирт шудирки, у узунлик ва энга эғади.

Таъриф VI. Сиртнинг чегаралари чизиклардир.

Таъриф VII. Текислик шундай сиртки, у ўзидаги ҳамма тўғри чизикларға нисбатан бирхил жойлашади.

Таъриф VIII. Текис бурчак деб бир-бири блан кесишган ва бир текисликда жойлашган, лекин бир тўғри чизикда этмаган икки чизикнинг бир-бириға қиялигини айтилади.

Бу таърифлардан кейин, *постулатлар* ва *аксиомалар* келтирилади.

Постулатлар.

I. Ҳарбир нуқтадан исталган иккинчи нуқтаға тўғри чизик ўтказиш мумкин бўлишни талаб қилиш керак,

II. ва чегараланган ҳарбир тўғри чизикни исталганча давом этдириш мумкин бўлсин,

III. ва исталган марказдан ҳарқандай радиус блан айлана чизиш мумкин бўлсин,

IV. ва ҳамма тўғри бурчаклар ўзаро тенг бўлсин,

V. ва бир тўғри чизақ икки тўғри чизик блан кесишиб, улар блан йиғиндиси $2d$ дан кичик ички биртомонли бурчаклар ташкил қилса, уларни бу йиғинди $2d$ дан кичик томонға қараб давом қилдирганда, улар шу томонда кесишадиган бўлсин.

Бу охириги постулат *параллеллар ҳақидаги машхур 5-нчи постулатдир*. Ундан фойдаланиб, бирор тўғри чизикда ётмаган нуқтадан шу тўғри чизикға фақат битта параллел ўтказиш мумкинлигини исботлаш мумкин; бу исботни Евклиднинг ўзиёқ берган эди. Евклид „Негизларнинг“ баъзи нашрларида бу постулат *II-нчи аксиома* тариқасида берилади. Шундай қилиб, Евклид постулатлари соф геометрик ҳаракатерға эғади. Аксиомаларнинг мазмуни бутунлай бошқади.

Аксиомалар.

I. Учинчи миқдорға тенг бўлган миқдорлар, ўзаро тенгдир, II. агар тенг миқдорларға баравардан қўшилса, уларнинг йиғиндилари ҳам тенг бўлади,

III. агар тенг миқдорлардан баравардан айрилса, қолдиқлар ҳам тенг бўлади,

IV. агар тенг бўлмаган миқдорларға баравардан қўшилса, уларнинг йиғиндилари ҳам тенг бўлмайди,

V. тенг миқдорларни иккилатсак ҳам улар тенг бўлади,

VI. тенг миқдорларнинг яримлари ҳам тенгдир,

VII. бир-бирига жойлашучи (миқдорлар, фигуралар) ўзаро тенгдир,

VIII. бутун ўзининг бўлагидан каттадир.

IX. икки тўғри чизик фазони чегаралайолмайди.

Евклид аксиомалари унинг постулатларига қараганда кенг-роқ характерга эгадир. Аксиомаларда умуман миқдорларнинг хоссалари тавсифланиб, геометрик миқдорлар хусусий ҳолни ташкил қилади.

Биз Евклид "Негизлар"нинг мазмуни, баёнлаш усули ва асосий хусусиятлари билан қисқача танишиб чиқдик. Энди бу асарни қисқача муҳокама қилишга ўтайлик.

§ 34. "Негизлар" нинг ба'зи камчиликлари, яхши жиҳатлари ва тарихий аҳамияти.

Ўзининг "Негизлар" номли асарини ижод этгнш билан, Евклид мантиқ жиҳатдан шундай қат'ий асарни вужудга келтиришни мақсад қилиб қўйган эдики, унда ҳамма теоремалар та'рифлар, постулатлар ва аксиомалардан келиб чиқадиган бўлсин. *Аксиома ёки постулатдан иборат бўлмаган ҳарбир да'во қанчалик аён, равшан бўлса-да, исбот қилиниши керак. Янгидан учраган ҳарбир термин, тушунча асосий та'рифлар воситаси билан аниқланиши керак.* Евклиднинг ўз олдига қўйган мақсади ана шундан иборат эди, лекин биз унинг ўз мақсадига эришаолмаганини кейинроқ кўрамиз. "Негизлар"нинг муҳим тарихий моҳиятларининг бири шундан иборатки, у геометрияни мантиқий жиҳатдан жиддий равишда баёнлаш ғоясини бизнинг давримизгача етказди. Лекин бундай жиддийлик, изчиллик ва бекаму-кўстликка геометрия фақат сўнгги вақтлардагина (XX аср бошида) эришди.

Евклид "Негизларнинг" асосий камчиликлари нимадан иборат?

Евклид асарининг энг заиф жойи олдинги параграфда келтирилган асосий та'рифларидадир. Уларнинг ба'зилари ҳеч нарсани аниқламайди, шунинг учун ҳам улардан Евклид ҳеч фойдаланаолмайди. Масалан, мантиқий хулосалар чиқаришда Евклид "нуқта шудирки, у бўлакларга эга эмас", ёки "чизик энсвз узунликдир" деган та'рифларидан мутлақо фойдаланмайди.

Чизикни "энсвз узунлик" деб та'рифлаганида, Евклид "узунлик" ва "ён" тушунчаларини ма'лум деб ҳисоблаган эди.

Та'рифлар лоақол битта "яхши" хоссага эга бўлишлари керак, я'ни мантиқий хулосалар чиқаришда уларни ишлатиш мумкин бўлсин. Евклиднинг келтирган куп та'рифлари бу хоссадан маҳрумдир. Тўғриси айтганда, ҳамма нарсани ҳам та'рифлаб ўлтириш мумкин эмас, тарифланмайдиган тушунчалар ҳам бўлиши керак ахир! Ба'зи нарсаларга, масалан, нуқталар, тўғри чизиклар, текисликларга та'риф беришга ожизмиз, биз

уларни ҳарбир кишига ма'лум деб ҳисоблашимиз керак. Та'рифланмайдиган ана шундай нарсалар асосий тушунчаларни ташкил этади — бу асосий тушунчалар та'рифланмайдиган нарсаларнинг бизга керак хоссаларини ифодалаш керак" (Клейн*.) Масалан, нуқта, тўғри чизик тушунчаларини ма'лум ҳисоблаб, тўғри чизикнинг иккита турли нуқта билан бирдан-бир равишда аниқланиш хоссаси ҳақида очиқ тапиримиз ва тўғри чизикнинг бу хоссасидан доимо фойдаланиб келамиз. Ҳарбир математик фан сингари, геометрия ҳам та'рифланмайдиган асосий тушунчалардан бошланиши керак. Акс ҳолда биз бепоён "та'рифлаб" борган бўлаемиз.

Евклид ўз китобида та'рифлар рўйхатида келтирилмаган тушунчалардан эркин равишда фойдаланади. Масалан, "Нуқта тўғри чизикда ётади"; Евклид "...да ётади" тушунчасини ҳаммага ма'лум деб ҳисоблаб, унга та'риф бериб ўлтирмайди. "А ва В нуқталар тўғри чизикдан бир тарафда ётади" деган жумладан фойдаланиб, "бир тарафда" деган сўзлардан нимани тушуниш кераклигини та'рифламайди, чунки буни ма'лум деб фарз қилади. Мантиқий жиҳатдан жиримсиз геометрик системани қуришни, я'ни аксиома бўлмаган ҳарқандай да'вони (қанчалик аён бўлса-да) исботлашни, ва ҳарбир тушунчани асосий тушунчалар орқали аниқлашни ўз олдига мақсад қилиб қўйган Евклиднинг ўз муролига етмаганини кўриб турибмиз.

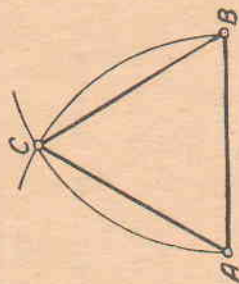
Евклид "мантиқий хизмат қилмайдиган" ортиқча та'рифларни куп киритади. Бундан ташқари, ҳеч жойда та'рифламасдан ёки асосий тушунчалар қаторига киритмасдан, соф геометрик тушунчалардан фойдаланади.

Евклид асарининг яна бир муҳим камчилиги шундан иборатки, у *узлуксизлик аксиомасини киритмай*, куп жойда узлуксизлик тушунчасидан, масалан, чизикларнинг узлуксизлигидан фойдаланади. Ҳеч жойда келтирилмаган узлуксизлик аксиомасини ишлатишини кўрсатиш учун, "Негизлар"нинг биринчи да'восини олиб кўрайлик.

AB кесмада тенгтомонли учбурчак ясалсин. Евклид бу яшашни шундай тавсифлайди: "А нуқтадан АВ радиус билан айлана чизамиз" (чизма 69) дейди ва шу ернинг ўзидаёқ ўзининг учинчи постулатини эслатади: "Истаган нуқтадан истаган радиус билан айлана чизиб мумкин". Сўнгра, В нуқтадан ВА радиус билан айлана чизамиз, чунки учинчи постулатга асосан шундай қилиш мумкин. Икки айлананинг кесишган нуқтасини С билан белгилайди ва сўнгра айлананинг та'рифига асосланиб ABC учбурчакнинг тенгтомонли эканини исботлайди. Буердаги муҳокаманинг камчилиги шундан иборат: чизманинг аёнлигидан фойдаланиб, Евклид, А ва В марказлардан чизилган айланалар С нуқтада кесишди деб да'во қилади. Бу

* Клейн: Элементарная математика с точки зрения высшей, том II, бет 323.

айланаларнинг кесилишини *ифодалови жумла, теоремами ёки аксиомами*? деган суроқ туғилади. Бу жумла теорема бўлаолмайди, чунки тенгтомонли учбурчакни ясагининг ўзи „Негизлар“нинг *биринчи* жумласидир. Бу да'во аксиомалар орасида ҳам учрамайди. Демак, мантикий жиҳатдан буерда кам-чилик бор. Биринчи айлана худди C нуктада узилади, я'ни бу нуктада у узлуксизликка эга эмас, ва иккинчи айлана ана шу „тешик“дан ўтиб, биринчи айлана билан кесилишмайди (чиз-



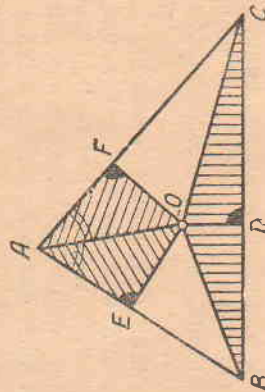
Чизма 69.



Чизма 70.

ма 70) деб фарз қилиш ғайриқонуний эмас. Бу айланаларнинг кесилиш фактини тўғри тавсифлаш учун, геометрия *узлуксизлик аксиомасига* муҳтож. Фақат бу аксиоманинг қиритилишидан кейин биз ясалган айланаларнинг кесилишини чиндан ҳам исбот қилаоламиз. Узлуксизликка доир ҳамма жумлаларни Евклид уз-ўзидан равшан деб ҳисоблайди ва ҳеч жойда ифодаласдан улардан фойдаланади.

Евклид асарида „*орасида*“, „...дан *бир тарафда*“, „*ичида*“, „*ташқарида*“ каён тушунчаларга доир аксиомалар йўқдир. Бу тушунчаларнинг ҳаммаси геометриянинг мантикий қурилишида катта роль ўйнайди. Қуйидаги геометрик софизм (сафсата) айтганимизга далил бўлаолди: *ҳар* қандай *учбурчак* — *тенгёнлидир*. Чиндан ҳам, ABC учбурчакда A бурчакнинг биссектрисасини ўтказамиз ва BC томоннинг ўртасидан (D дан) бу томонга перпендикуляр ўтказамиз (чизма 71). Биссектриса билан бу перпендикуляр параллел бўлса, биссектриса учбурчак учун баланлик ролини ўйнай эди, демак $\triangle ABC$ бу ҳолда тенгёнли, я'ни теорема исботланган бўлар эди. Агар бу перпендикуляр биссектриса билан D нуктада кесилса, D нукта BC нинг ўртаси бўлганидан, биссектриса медиана хизматини қилар эди, демак учбурчак бу ҳолда тенгёнли бўлар эди.

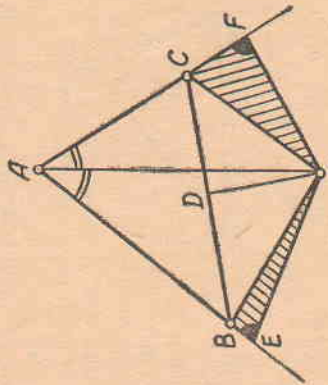


Чизма 71.

Биссектриса билан перпендикуляр бирор O нуктада кесилиб, O нукта D нуктадан фарқли бўлган ҳолни қараш қолади. Аммо O нукта E учбурчакнинг *ичида*, ёки унинг *ташқарида* ётиши мумкин. O нукта учбурчак *ичида* бўлсин. Бу нуктадан AB ва AC томонларга перпендикулярлар туширайлик. У чоғда $\triangle AOE = \triangle AOF$, чунки улар тўғрибурчакли учбурчаклар бўлиб, умумий гипотенуза ва биттадан ўткир бурчаклари тенгдир, демак $AE = AF$ (1). Бундан ташқари, $\triangle BOD = \triangle DOC$, чунки булар ҳам тўғрибурчакли учбурчаклар ва умумий OD гипотенузага эга, ҳамда $BD = DC$. Штрихланмаган учбурчаклар ҳам тенг, чунки улар тенг катетларга ва тенг гипотенузаларга эгадир. Демак, $BE = FC$ (2). Ҳосил қилинган (1), (2) тенгликларни ҳадлаб қўшамиз: $AE + EB = AF + FC$, ёки $AB = AC$, я'ни $\triangle ABC$ — тенгёнлидир.

O нукта учбурчакнинг *ташқарида* ётсин. Ундан AB, AC га перпендикулярлар туширамиз (чизма 72); тўғрибурчакли OEA ва OFA учбурчаклар умумий гипотенузага эга ва $\angle OAB = \angle OAC$. Шу сингари, $ODB = \angle ODC$ учбурчаклар ҳам бир-бирига тенгдир, чунки D нуктадаги бурчаклар тўғри бурчаклардан иборат ва улар учун OD умумий катетдир. Демак, $OE = AF$ (1); $OB = OC$; $OE = OF$. Шундай қилиб, OEB учбурчак $\triangle OFC$ га тенгдир, чунки уларнинг E, F бурчаклари тўғри бурчаклардан иборат ва гипотенузалари тенг: $OB = OC$ ва катетлари ҳам тенг: $OE = OF$. Хуллас, $BE = FC$ (2); энди (1) тенгликдан (2) тенгликни ҳадма-ҳад айирамиз: $AE - BE = AF - CF$; аммо $AE - BE = AB$ ва $AF - CF = AC$, я'ни $AB = AC$; биз шу блан ҳарқандай учбурчакнинг тенгёнли эканини „исботладик“.

Ҳато нимадан иборат? Олиб борилган муҳокамаларнинг ҳаммаси тўғри эди, фақат хулоса нотўғри. Аслини айтганда, айб нотўғри чизилган чизмада. Чизма шундай шаклда бўлиши керакки, биринчидан, O нуктанинг ABC учбурчак *ичида* ётаолмаслиги ундан кўриниб турсин, иккинчидан, E, F нукталар айлани замонда A, B ва A, C орасида ёки айлани замонда AB ва AC кесмалардан *ташқарида* жойлашолмаслиги ундан кўриниб турсин (я'ни уларнинг бири, масалан E , AB дан *ташқарида*, иккинчиси F эса — AC нинг *ичида* бўлсин, чизма 73). Бу муҳокамаларнинг ҳаммасини уларнинг мантикий томонини бир-бирига қолдириб, чизмани кўзларимиз билан кузатиш йўли блан



Чизма 72.

олиб борган эдик. Иботларни ўтказишда Евклид ба'зан аксиомалар ва олдин келган теоремаларга суянамасдан, аёниқ ва равшанликка суянар эди; шунинг учун ҳам, унинг ба'зи теоремалари *мантикий жиҳатдан исботланмай қолади*. Чизманинг аёнлигига ишониб оқибатининг нимадан иборатлигини олган мисолимиз яққол кўрсатиб беради.

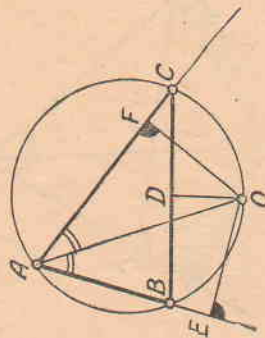
Муҳокамаларнинг ҳаммасини охиригача мантикий жиҳатдан тўғри етказиш учун, биринчидан, F нуқта A ва C нуқталар *орасида ётса*, E нуқтанинг албатта AB кесмадан *ташқарида* ётишини, иккинчидан, O нуқтанинг ABC учбурчак *ичида* ёта-олмаслигини исботлаш керак.

Юқорида баён қилинганлардан, Евклид асарида келтирилган аксиома ва постулатларнинг геометрияни жиддий ривожлантириш учун етишмаслиги яққол кўриниб туради. Бундан ташқари, Евклид берган та'рифларнинг кўпи, масалан, "нуқта шудирки, у булақларга эга эмас" ва бошқалар, бутунлай мазмунсиздир.

"Негизлар"га танқидий нуқтаназардан қараганда, шунини ҳам э'тиборга олиш керакки, унинг асосий камчиликлари фақат 19-нчи асрнинг охиридагина ошкор қилинди, 19-нчи асрнинг бошига ҳатто отоқли олимлар "негизлар"даги аксиомалар ва постулатларга ва Евклиднинг бошқа китобларига ҳечнарсаси қўшиб бўлмади, деган фикрда эдилар. Масалан, Гегель ўзининг "Фалсафа тарихидан лекциялар" деган асарида қуйидагиларни ёзди: "Математикадек фаннинг мазмунига келганда тарихнинг вазифаси, илгариги мазмунни бойитишга хизмат қилучи эришилган ютуқлар ҳақида шодийлик билан ҳикоялаб бериш билан чегараланиб қолади; Евклиддан мерос бўлиб қолган элементар геометрияни олганимизда эса, уни такомиллаштириб бўлган тарихга, я'ни фан ҳазинасига бошқа янги ҳисса киритишга қобилиятсиз деб қараш керак".

Охириг сузларни шундай тушуниш керак: элементар геометрия ўсишдан тўхтаган ва такомиллаштириб бўлган фандир. Брок Евклид геометриясининг бағридан чиққан Лобачевский геометриясининг вужудга келиши Гегельнинг математика ва қисман геометрия ҳақидаги бу фикрини пучка чиқаради.

Ниҳоят, Лобачевский геометрияси, "Евклидга тақлид қилиб, геометрияни бошлашимиз давридаги туманли тушунчаларни" қайтадан қараб чиқишга мажбур этди (Лобачевский).



Чизма 73.

Ф. Клейн Евклиднинг "Негизлари" ҳақида қуйидагиларни ёзди: "1) Евклиднинг "Негизлар" номи асарининг улуг мовҳияти шундан иборатки, бу асар геометрияни мантикий жиҳатдан (камчиликсиз) қуриш йўлидаги юксак мақсадни кейинги даврларгача сақлаб келди. 2) Бу муҳим вазифа кўп жиҳатдан моҳирлик билан бажарилган бўлса-да, лекин ҳозирги замон нуқтаназаридан қараганда бошқа кўп жиҳатдан принципал эскиргандир.

3) Асарнинг бирмунча қисми — жумладан биринчи китобнинг бош қисми — текстнинг ишончли эмаслигидан шубҳалилигига қолади.

4) Евклид даврида тайёр арифметиканинг йўқлигидан, баёнлаш усули бошдан-оёқ тоғат даражада оғир туюлади.

5) Мантикий жиҳатни ҳадеб та'кидлаш, тушунишни ва ички боғланишларни ошкор қилишни қийинлаштиради".

Бу фикрларга қўшилмаслик мумкин эмас. Уларга илова қилиб шунини айтиш лозимки, Евклид асарининг тарихий моҳияти, "геометрияни мантикий жиҳатдан (камчиликсиз) қуриш йўлидаги юксак мақсадни кейинги даврларгача сақлаб келиш" билан чегараланмай, ундан ҳам кенгдир. Евклид "Негизлари" Коперник системаси, механика, электродинамиканинг асоси бўлиб ҳисобланади ва буларнинг ҳаммаси билан бирга, ҳозирги замон техникасининг фундаментида иштирок этади. Геометриядан дарс беручи ҳарбир ўқитучи Евклиднинг бу асари [10] билан танишиб чиқиши зарур.

Лобачевский ҳам ўз системасини ривожлантиришда кенг миқёсда интуиция ва очиқ ифодаланмаган постулатлар, аксиомалар ва бошқа жумлалардан фойдаланади. Барча аксиомаларни ва асосий тушунчаларни ифодалаб чиқиш жуда оғир ишдир — ҳамон бирор нарсани эсдан тушириб қолдириш хавфи бор. Бу масалани қониқарли равишда ечишга биринчи марта Паш киришди ва ўзининг "Янги геометриядан лекциялар" деган асарида (1882), "*орасида*", "*ичида*", "*ташқарида*" тушунчаларига доир тартиб аксиомаларини киритди. Бу аксиомаларнинг бири билан (§ 3) биз юқорида танишдик.

1899 йилда Д. Гильбертнинг "Геометрия асослари" номи асари биринчи марта нашр этилди. 1903 йилда бу асар, математика асосларига доир кўп иловалар билан тўлдрилиб, иккинчи марта нашр этилди ва, Николай Иванович Лобачевский номидаги мукофотни олиш учун, Қозондаги физика-математика жамиятига топирилган эди. Бу асарга француз математиги А. Пуанкаре рецензия ёзиб берди. У ўз рецензиясини қуйидаги сўзлар билан тамомлайди: "Унинг (Гильбертнинг) ишлари фан тарихида айрим даврни нишонлайди ва, шунинг сабабли, у Лобачевский номидаги мукофотни олишга муносибдир" [6].

Ушбу йилнинг (1903) ўзидаёқ Н. И. Лобачевский номидаги мукофот Гильбертга топирилган эди.

* Гегель, Асарлар, т. IX, бет 17, Партиздат. 1932.

1905 йилда рус олими В. Ф. Каганнинг геометрия асосларига бағшланган йirik асарининг биринчи томи чиқди. Бу асарнинг автори оригинал асосдаги ўз аксиоматикасини берди [12].

Аммо классик асарга айланган Д. Гильбертнинг „Геометрия асослари“ ҳаммадан ҳам кўп тарқалди.

Келгуси бобда Гильберт томонидан киритилган асосий тушунчалар ва аксиомаларга ўтамиз [7]. Гильберт асарининг русча иккинчи нашрининг редактори профессор П. К. Рашевский қуйидагиларни ёзди [7]: „Гильберт геометрияда шундай аксиоматикани тузишга муяссар бўлдики, у табiiй равишда гуруҳларга бўлинади ва бунинг натижасида, геометриянинг мантиқий тузилиши (структураси) жуда ойдинлашиб қолади. Аксиоматикани бу тариқада гуруҳларга бўлиш, биринчидан, аксиомаларни энг содда қисқа ифодалашга имконият беради, ва, иккинчидан, геометриянинг асоси сифатида бутун аксиоматикани олмасдан, унинг фақат айрим гуруҳларини қабул қилганда, геометрияни қайси чегарагача, яъни қанчалик ривожлантириш имкониятини текширишга ҳам йўл-йўриқ беради“.

ОЛТИНЧИ БОБ

АСОСИЙ ОБЪЕКТЛАР, БУ ОБЪЕКТЛАР ОРАСИДАГИ АСОСИЙ МУНОСАБАТЛАР ВА ГЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРИ

§ 35. Геометрияни аксиомалар асосида қуриш. Асосий тушунчалар.

Геометрияни (ва ҳарқандай математик назарияни) аксиомалар асосида қуриш иши, биринчидан, *асосий объектлар категориясини, иккинчидан, бу объектлар орасидаги асосий муносабатларни, учинчидан, аксиомаларни* кўрсатишдан бошлаши керак. Геометрияда қараладиган ундан кейинги ҳамма объектлар ва улар орасидаги муносабатлар асосий объектлар орқали та'рифланиши керак, ва барча теоремаларни аксиомаларга суяниб исботлаш керак.

Геометрияда иш кўриладиган асосий объектлар, асосий нарсалар: „*нуқталар*“, „*туғри чизиқлар*“, „*текисликлар*“ дир. Бу тушунчалар та'рифланмайди, тушунтирилмайди, тавсифланмайди.

Асосий объектлар орасидаги асосий муносабатлар: „*бир-бирига қарашлик*“, „*орасида*“, „*конгруэнт бўлиш*“. Бу асосий муносабатлар ҳам та'рифланмайди, тушунтирилмайди, тавсифланмайди. Шунинг эсда тутиш кераки, бир нарсани иккинчи нарса орқали, бу иккинчиси учинчи нарса, учинчиси тўртинчи орқали..... ва ҳ. к. белоён та'рифлай бериш мумкин ҳам эмас. Бу занжирнинг *учи бўлиши керак*. Геометрия шу принцинга асосланиб, *асосий объектлар* ва улар орасидаги *асосий муносабатлардан* бошлайди.

Аксиоматикани бошлаб ўзлаштириш даврида, та'рифланмайдиган асосий тушунчалар ва та'рифланмайдиган асосий муносабатларни ма'лум деб ҳисоблаш мумкин. Ишнинг муҳим томони шундаки, *асосий объектлар* ва *асосий муносабатлардан* биз *фақат аксиомаларга итоат этишни талаб қилмайиз* ва бошқа жиҳатдан уларни *бутунлай ихтиёрий* деб фараз қиламиз.

Шуни ҳам э'тиборга олиш керакки, асосий об'ектлар ва асосий муносабатлар категориялари турлича бўлган турли аксиомалар системаси мавжуд, лекин улар бир-бирига эквивалентдир; бу эквивалентлигининг ма'носи шуки, бу системаларга асосланган геометрия бирхилдир.

§ 36. Аксиомаларнинг биринчи группаси: бирлаштириш (қарашлик) аксиомалари.

Асосий муносабат "бир-бирига қарашлик".

1.¹. Исталган икки A, B нукта учун бу икки A, B нуктанинг ҳарбирига қарашли бўлган a тўғри чизиқ мавжуддир.

1.². Иккита A, B нуктанинг ҳарбирига қарашли бўлган биттадан ортиқ тўғри чизиқ мавжуд эмасдир.

Иккита, учта, ... нукта (тўғри чизиқ, текислик) деганда доимо турли нукталар (тўғри чизиқлар, текисликлар) кўзда тутилади.

Келгуси текстни тўғри тушуниш мақсадида Гильберт буерда жуда муҳим изоҳни беради:

"Қарашли" термини ўрнига биз бошқа терминлардан, я'ни иборалардан ҳам фойдаланамиз. Масалан, a тўғри чизиқ, A, B нукталарнинг ҳарбирига қарашли дейиш ўрнига a тўғри чизиқ A, B нукталардан ўтади ёки a тўғри чизиқ A нуктани B нукта билан туташтиради деймиз. A нукта a га қарашли дейиш ўрнига: A нукта a да ётади, ёки A, a нинг нуктасидир ва ҳ. к. Агар A нукта a тўғри чизиқда ва бундан ташқари, b тўғри чизиқда ётса, a, b тўғри чизиқлар A нуктада кесилиши, улар умумий A нуктага эга деймиз ва ҳ. к.

Буерда "қарашли" термини тушунтирилади, я'ни унга изоҳ берилади деб ўйлаш керак эмас. Та'рифланмайдиган бу термин ўрнига "...да ётади", "...дан ўтади" ва ҳ. к. сўзлари ишлатилади, холос. Шуни ҳам буерда айтиш муҳимки, бу сўзларнинг ёки уларнинг синоними бўлган қарашлик терминини ҳечбир аёний тасаввур билан боғлаш керак эмас.

Кўрсатилган терминларни ҳарфлар билан белгилаб, бу сўзларни мутлақо ишлатмаслик ҳам мумкин эди. Масалан, қарашлик терминини Σ ҳарфи билан белгиласак, исталган икки A, B нукта учун, уларнинг ҳарбири билан Σ муносабатда бўлган a тўғри чизиқ доимо мавжуддир.

Ёки яна дурустроқ: биринчи категориянинг исталган икки A, B об'екти билан Σ муносабатда бўлган иккинчи категориянинг a об'екти доимо мавжуддир.

Ёки, яна қисқароқ: исталган икки A, B учун шундай a мавжудки, $(A, B) \Sigma a$.

Бирор математик муҳокаманинг мантиқий тузилишини яхшироқ ошқор қилиш учун, кўпинча математик логика усуллари билан фойдаланилади; унда сўзлар ишлатилмасдан ҳамма муҳокама белги ва ишоралар билан фақат мантиқий формулалар тилида олиб борилади [8].

Алгебрада ҳарфлар ва амалларда ишлатиладиган ишоралар турли конкрет ма'нога эга бўлган сингари, абстракт геометрияда ҳам, асосий об'ектлар ва улар орасидаги асосий муносабатлар конкрет ҳолга қараб, турли ма'нога эга бўлиши мумкин.

Буерда қўйиладиган фақат битта талаб—белгили қоидаларга иттибот этиш ёки аксиомаларни қаноатлантиришдан иборатдир.

1.³. Тўғри чизиқда ҳеч бўлмаганда иккита нукта мавжуд. Бир тўғри чизиқда ётмаган ҳеч бўлмаганда учта нукта мавжуд.

1.⁴. Бир тўғри чизиқда ётмаган исталган учта A, B, C нукта учун, уларнинг ҳарбирига қарашли a текислик мавжуд. Ҳарбир текислик учун унга қарашли камида битта нукта мавжуд.

1.⁵. Бир тўғри чизиқда ётмаган учта A, B, C нукта учун, шу нукталарга қарашли бўлган биттадан ортиқ текислик мавжуд эмасдир.

1.⁶. Агар a тўғри чизиқнинг икки A, B нуктаси a текисликда ётса, a тўғри чизиқнинг ҳарбир нуктаси ҳам a текисликда ётади.

1.⁷. Агар икки α, β текислик умумий A нуктага эга бўлса, уларнинг камида яна битта умумий B нуктаси бордир.

1.⁸. Бир текисликда ётмаган камида тўртта нукта мавжуддир.

Аксиомаларнинг биринчи группаси шу блан тугайди. Бу группадан аввалги учта аксиома (1,1—3), бир текисликда жойлашган об'ектларга доирдир; бу группанинг қолган бешта аксиомаси (1,4—8) фазовий об'ектларга доирдир.

Гильбертнинг нуктаи назарини қисман тушунтириш ва асосий тушунчалар ҳақидаги масаланинг қўйилиш моҳиятини аниқлаш мақсадида бир мисол олайлик. "Нукталар", "тўғри чизиқлар" ва "текисликлар" терминлари фақат аксиомаларни қаноатлантиручи ҳарқандай нарсаларни белгилатгани сабабли, тўртта A, B, C, D "нукта" оддий Евклид текислигининг оддий нукталари бўлсин ва уларнинг ҳар учтаси бир тўғри чизиқда ётмасин. Бунда "бир тўғри чизиқда ётмайди" деган сўзлар ва "тўғри чизиқ"дан иборат об'ект, биз одатланиб келган ма'ноларни берадиган бўлсин.

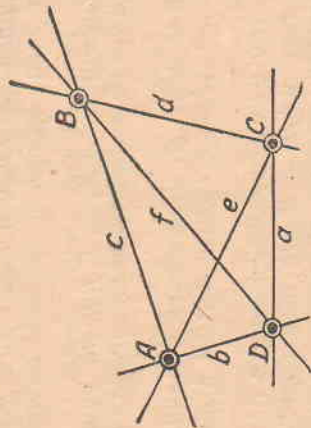
A, B, C, D нукталарни туташтиручи тўғри чизиқ ўтказайлик (чизма 74) ва бу тўғри чизиқлар одадаги тўғри чизиқларни билдирсин. Уларни a, b, c, d, e, f блан белгилайлик.

Бундай модельни тайёрлагач, биринчидан, биринчи категориянинг асосий об'ектлари деб — "нукталар" деб — фақат A, B, C, D дан иборат тўртта нуктани атаймиз ва бошқа ҳечнарсани "нукталар" деб ҳисобламаймиз. Бошқача айтганда, A, B, C, D — биринчи категория нарсаларидир. a, b, c, d, e, f дан иборат олтига тўғри чизиқни иккинчи категориянинг асосий об'ект-

лари (иккинчи категориянинг нарсалари), я'ни "тўғри чизиқлар" деб ҳисоблаймиз. Бошқа ҳечнарсани "тўғри чизиқ" деб олмаймиз. Биринчи гуруҳдаги аввалги учта аксиома (1, 1-3) блан чегараланамиз шу тўғрилай 3-нчи категориянинг объектларини — "текисликлар"ни киритмаймиз. Хуллас, бизнинг ихтиёримизда биринчи категориянинг 4 объект — 4 "нуқта" ва иккинчи категориянинг 6 объект — 6 "тўғри чизиқ" бордир.

Гильберт аксиоматикасида "...да ётади" сўзлари блан ифодалануни асосий муносабат, фақат аксиомаларни қаноатлантириш шартини сақлаб, исталган муносабатдан иборатлиги сабабли, бу сўзларга энди ушбу ма'нони берамиз: A ва B "нуқталар"га a "тўғри чизиқ" мос келади деб фараз этайлик ва буни шундай ётайлик: A, B

$\rightarrow a$; сўнгра: $B, C \rightarrow b; D, C \rightarrow c$,
 $D, A \rightarrow d; A, C \rightarrow f; B, D \rightarrow e$ (ҳар
 икки "нуқтага" улар орқали
 ўтмаган "тўғри чизиқ" мос
 келтирилади). Энди ҳар ик-
 ки "нуқта" уларга мос кел-
 тирилган тўғри чизиқни
 "аниқлайди" деб қабул
 этайлик. У чоғда биринчи
 аксиома, қабул қилинган
 шартларимизда бажариледи:
 "иккита (турли) нуқта
 доимо тўғричизиқни аниқ-
 лайди". Масалан, B ва D нуқталар e тўғри чизиқни аниқлай-
 ди. Гильбертнинг тушунтиришига асосан, B, D нуқталар e "тў-
 ри чизиқни" "аниқлайди" дейиш ўрнига, B ва D нуқталар e
 "тўғри чизиқда" "ётади" деб айтмаймиз. Аксинча, агар иккита
 (турли) B, C нуқта b "тўғри чизиқ"да "ётади" десак, бу b "тў-
 ри чизиқ" B, C нуқталар блан аниқланади деганимиз бўла-
 ди. "...да ётади" сўзлари блан ифодаланган асосий муносабатга
 нисбатан қўйилган талаблар ана шулардан иборатдир. Бу
 муносабатни аёний жиҳатдан тасаввур этсак, у одатдаги тасав-
 вуримиз блан бирхил бўлмаслиги ҳам мумкин. b "тўғри
 чизиқ" B, C "нуқталардан" "утади" деб айтмаймиз. "...дан ута-
 ди" сўзлари 1-нчи аксиоманинг мазмунига эквивалент ма'нони
 беради деб тушуниш керак ва ҳ. к.



Чизма 74.

Ясалган моделимизда 1,2 аксиома ҳам бажариледи. Тўғри чизиқ умуман икки "нуқта"га эга. Чунончи, a тўғри чизиқ A ва B "нуқталар"га эга. Гильбертнинг тушунтиришига асосан, агар A , иккинчи бир нуқта блан бирга a тўғри чизиқни аниқ-
 ласа, A нуқта "а да ётади", ёки A , "а нинг нуқтасидир" деб
 айтмаймиз. Чунончи, бизнинг моделимизда A, a "тўғри чизиқнинг"
 "нуқтасидир", чунки A нуқта B блан бирга a ни "аниқлайди".
 Худди шу сингари A, d "тўғри чизиқнинг" "нуқтасидир".
 Бундан сўнгра, Гильберт қўйидагиларни айтади: "Агар A нуқ-

та a тўғри чизиқда ва ундан ташқари у b тўғри чизиқда ҳам
 "ётса", биз a ва b "тўғри чизиқлар" "умумий A нуқтага
 эга" деймиз. Масалан, моделимизда a ва d "тўғри чизиқлар"
 "умумий A нуқтага эгадир". a ва d "тўғри чизиқлар" A нуқ-
 тада "кесишади" деб айтиш ҳам мумкин.

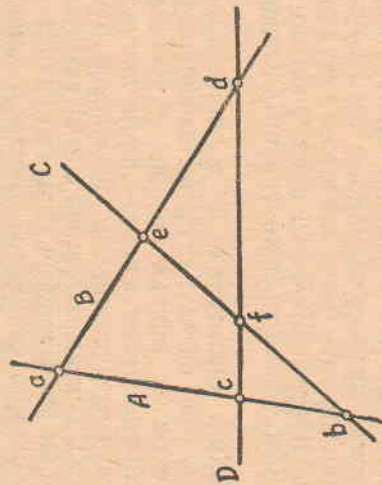
Моделимизда 1,3 аксиома ҳам бажариледи: "тўғри чизиқ-
 да ҳеч бўлмаганда иккита нуқта мавжуд"; "ҳарбир текис-
 ликда ҳеч бўлмаганда шундай учта нуқта мавжудки, улар
 бир тўғри чизиқда ётмайди". Чунончи, моделимиз объектла-
 ри ичида "ҳарбир тўғри чизиқда ётуни ҳеч бўлмаганда икки
 нуқта мавжуддир" (моделимизда расо иккита), масалан, f тў-
 ри чизиқда A ва C нуқталар мавжуддир. Моделимиздаги ҳам-
 ма "нуқталар" ва "тўғри чизиқларни" битта a "текисликка"
 қарашли деб ҳисоблаш мумкин. У чоғда, учинчи аксиома-
 нинг иккинчи қисми ҳам бажариледи: A, B, C нуқталар бир тў-
 ри чизиқда "ётмайди" (C нуқтанинг d да ётмаслигини унут-
 маслик керак!).

Биринчи гуруҳнинг аввалги учта аксиомасига жавоб беру-
 чи моделимиз блан ишни битириб, энди бу муҳокамаларнинг
 моҳиятини тушуниш мақсадида, алгебрадан ушбу аналогияни
 келтирамиз. Алгебрада $a+b=b+a$ формуласи ёзилган бўлса,
 ҳарфлар ўрнига исталган сонларни қўйганда ҳам формула
 ўз кучини сақлайди. Гильберт аксиоматикасида ҳам аҳвол
 шундай: "нуқта", "тўғри чизиқ", "текислик"дан иборат асо-
 сий тушунчалар ўрнига, фақат аксиомаларнинг бажарилиш
 шартини сақлаб, ҳарқандай табииатли объектларни олиш
 мумкин. Кўрсатилган $a+b=b+a$ тенгликда "+" ва "="
 ишоралари блан ифодаланган муносабатларни, векторлар
 алгебрасида қабул қилинган муносабатлар ва a, b эса—вектор-
 ларни белгилайди деб тушунсак, формула тўғрилигича қо-
 лади. Гильберт аксиоматикасида ҳам аҳвол шундай: унда асо-
 сий объектларига эмас, балки улар орасидаги асосий муно-
 сабатлар ўрнига, фақат аксиомаларнинг бажарилиш шартини
 сақлаб, исталган нарсаларни ва истаган табииатдаги муносабат-
 ларни олиш мумкин. Чунончи, келтирилган моделимизда 4
 оддий нуқта ва 6 оддий тўғри чизиқ олинган эди, аммо "...да
 ётади" муносабати бутунлай бошқа ма'нога эга эди.

Яна бир модель олайлик. Бу модельда асосий объектлар
 ва улар орасидаги асосий муносабатлар бирқадар бошқа ха-
 рактерга эгадир (чизма 75). Иккитадан кесишучи 4 тўғри чи-
 зиқ чизамиз ва уларнинг одатдаги кесишган 6 нуқтасини бел-
 гилаб қўямиз.

Тўғри тўғри чизиқни A, B, C, D блан, олти нуқта a, b, c, d, e, f
 блан белгилаймиз. Энди аташга оид қуйидаги шартларни қа-
 бул қиламиз: A, B, C, D ни 1-нчи категорияли асосий объект-
 лар деб ҳисоблаймиз ва уларни "нуқталар" деб атаймиз;
 a, b, c, d, e, f ни 2-нчи категорияли объектлар деб ҳисоблаймиз
 ва уларни "тўғри чизиқлар" деб атаймиз. Улардан ҳосил қи-

линган бутун фигуранинг ўзини 3-нчи категорияли объект деб ҳисоблаймиз ва уни "текислик" деб атаёмиз. Энди ҳарбир нуқта-лар" жуфтга (ҳозиргина киритилган ма'нода) "тўғри чизиқ-ни" (бунда ҳам янги ма'нода) мос келтирамиз: масалан, $A, B \rightarrow f$ (я'ни эски терминларни ишлатиб айтганда, A, B тўғри чизиқ-ларга шундай f нуқта мос келтирилганки, у нуқта оладдаги ма'нода бу тўғри чизиқларда ётмайди). Шу сингари $B, C \rightarrow c$; $C, D \rightarrow a$; $D, A \rightarrow e$; $A, C \rightarrow d$; $D, B \rightarrow b$. Бу мосликни ўр-натиб, 1-нчи гурӯҳдаги аввалги учта аксиомада "аниқлайди" термини ҳозирги ма'нода "мос ке-лади" терминига эквива-лент деб ҳисоблаймиз.



Чизма 75.

A, B нуқталардан ўтади". A ва B нуқталар f тўғри чи-зиқнинг нуқталаридир, ва ҳ. к.

Моделимиздаги a ва c тўғри чизиқларнинг иккаласида ҳам C нуқта борлиги, я'ни C нуқта a ва c тўғри чизиқ-ларда "ёганлиги" сабабли, a ва c тўғри чизиқлар C нуқ-тада "кесимида" деб айтиш мумкин. Бу модельда биринчи гурӯҳдаги 1—3 аксиомалар бажарилди.

Юқорида ясалган икки модель биринчи гурӯҳнинг фақат олдинги учта аксиомасини қаноатлантириб, қолган бешта-сини қаноатлантирмайди, я'ни бу модельлар учун кейинги бешта аксиома бажарилмайди. Гильберт системасидаги қолган груп-палар аксиомалари ҳам, айрим аксиомаларни мустақилоқ қилган-да, бу модельларда бажарилмайди.

§ 37. Аксиомаларнинг иккинчи гурӯҳпаси: тартиб аксиомалари.

Асосий тушунча "орасида".

Гильберт қуйидаги мулоҳазадан бошлайди: "Бу гурӯҳнинг аксиомалари "орасида" тушунчасини аниқлайди ва бу тушунча-га асосланиб, тўғри чизиқ, текислик ва фазода нуқталарнинг жойлашишида тартибни ўрнатишга имконият беради".

II₁. Агар B нуқта (чизма 76) A ва C нуқталар орасида ётса, у чоғда A, B, C — тўғри чизиқнинг учта турли нуқта-ларини билдиради ва B нуқта C блан A орасида ҳам ётади.

II₂. A ва C қандай нуқталар бўлса-да (чизма 77), AC тўғри чизиқда қандай шундай битта B нуқта топиллади-ки, C нуқта A блан B орасида ётади.

II₃. Тўғри чизиқнинг учта нуқтаси берилган бўлса, уларнинг биттадан ортиги қолган иккитаси орасида ёта-олмайди.

Т'ар и ф. Бирор a тўғри чизиқда A ва B дан иборат икки нуқтани олайлик. A ва B дан иборат икки нуқта системасини



Чизма 76.

Чизма 77.

AB ёки BA кесма деб атаймиз. A блан B орасида ётувчи нуқ-таларни — AB кесманинг нуқталари, ёки AB кесма ичида ётувчи нуқталар деб атаймиз; A блан B ни — AB кесманинг четлари дейлади. Тўғри чизиқнинг қолган ҳамма нуқталарини AB кесмадан ташқарида ётувчи нуқталар деймиз.

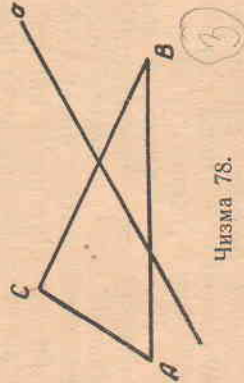
Бу гурӯҳдаги шу учта аксиома (II₁—3) иккинчи группанинг чизиқли аксиомалари дейилади. Қуйидаги аксиома (II₄).

II₄. (Паш аксиомаси).

Бир тўғри чизиқда ётмаган учта A, B, C нуқта ва ABC текисликда ётган ҳамда A, B, C нуқталарнинг бирдан ҳам ўтмаган a тўғри чизиқ берилган бўлсин (чизма 78); агар a тўғри чизиқ AB кесма нуқталарининг бирдан ўтса, у, AC кесма нуқталарининг бирдан ёки BC кесма нуқталарининг бирдан ўтади.

Аёнроқ қилиб айтиш мумкин: агар тўғри чизиқ учбурчак ичига кирса, бу чоғда у учбурчак ичидан чиқади ҳам. a тў-ғри чизиқ бу ҳолда AC, BC кесмаларнинг иккаласи блан бир вақтда кесишиши мумкин эмаслигини исботлаш мумкин*.

Тўртинчи аксиомани ифодалаш олдиан Гильберт "кесма", "кесма ичида ётади", "кесма ташқарисида ётади" деган тушун-чаларни та'рифлаб ўтади. Барча тушунчаларнинг асосий ту-шунчалар орқали та'рифланиши кераклигини эсда сақлаш зарур. Паш аксиомаси ифодасининг узидаёқ "кесма", "кесма



Чизма 78.

* Исроти Гильбертнинг "Геометрия асослари" асарига П. К. Рашеве-кийнинг киритган иловаларида берилган, [7], бет 404.

ичида" тушунчалари бордир. "Орасида ётади" сўзлари блан ифодаланган асосий тушунчага келганда, ".....да ётади" деган муносабатга нисбатан олиб борилган муҳокамаларимиз ўз қучида қолади, я'ни "орасида ётади" деган муносабат, *фақат аксиомаларни қаноатлантириш шарт* блан исталган табиатга эга бўлиши мумкин. Бундан сўнг Гильберт тартиб аксиомаларидан ба'зи хулосалар чиқаради. Улар устида кейинроқ тўхталиб ўтамиз; ҳозирча ба'зи та'рифларни келтирайлик.

Та'рифлар. $AB, BC, CD, \dots, KL$ кесмалар системаси A блан L ни туташтиручи *синиқ* чизиқ дейилади. Бу синиқ чизиқ қисқача шундай белгиланади: $ABCD \dots KL$. $AB, BC, CD, \dots, KL$ кесмаларнинг ички нуқталари ва $A, B, C, D, \dots, K, L$ нуқталарнинг ўзлари, *синиқ чизиқнинг нуқталари* дейилади. Агар L нуқта A блан бирлашиб қолса ва ҳамма нуқталар бир текисликда ётса, синиқ чизиқ *кўпбурчак* деб аталади. $AB, BC, CD, \dots, KL$ кесмалар *кўпбурчакнинг томонлари* дейилади ва $A, B, C, \dots, L$ эса — унинг *учлари* дейилади. Учларининг сонига қараб, *кўпбурчак учбурчак, тўртбурчак, ..., n-бурчак* дейилади. Агар кўпбурчакнинг ҳамма учлари турли бўлса, биронта ҳам уч унинг томонида ётмаса, ва унинг томонларидан истаган иккитаси ички умумий нуқтага эга бўлмаса, *кўпбурчак содда* деб аталади*.

Аксиомаларга асосланган, я'ни исбот вақтида аёнлик, равшанлик мулоҳазаларига суянмаган исботлар блан танишиш учун, Гильберт асарида бир неча теоремалар келтирамыз.

Олдин шўни айтиб ўтамиз: асосий тушунчалар ҳақида одатланиб ҳосил қилган тасавурларимиз нуқтан назаридан бирор да'во қанчалик "аён, равшан" бўлса-да, биз уни ҳарвақт исботлашимиз керак (турган гап, агар у аксиомалар рўйхатида бўлмаса).

Бирор "равшан" да'вонинг бошқа "равшан" бўлган да'воларининг равшан бўлмаган маънавий хулосасидан иборатлигини очиб бериш ишининг ўзи ба'зан қийин бўлиб қолади. Айтганларимизга Гильбертнинг "Геометрия асослари" номли асарининг турли нашрлари далил бўлаолади. Биринчи нашрларида Гильберт томонидан аксиомалар қаторига киритилган ба'зи да'воларни, кейинча турли олимлар томонидан қолган аксиомаларга асосланиб исбот қилинганлиги туфайли, теоремалар сафига киритишга тўғри келди.

Теорема. AC тўғри чизиқдаги *исталган* икки A ва C нуқта учун *камида битта* шундай D нуқта топилдики, у A блан C орасида ётади.

Исбот. I, 3 аксиомага асосан AC тўғри чизиқда ётмаган бирор E нуқта мавжуд; II, 2 аксиомага кўра, шундай F нуқта мавжудки, E нуқта AF кесманинг нуқтасидир. Шу аксиоманинг (II, 2) ўзига ва II, 3 аксиомага кўра FC тўғри чизиқда

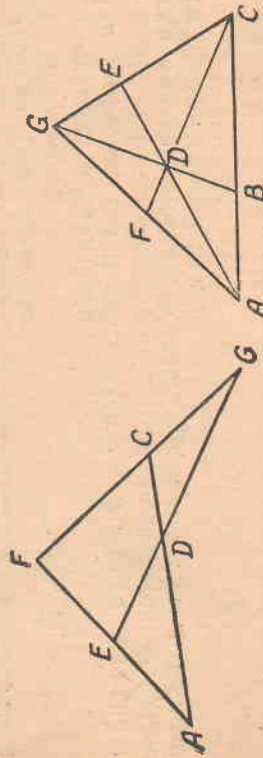
* Қар. Перепелкин, элементар геометрия курси, I қисм, § 7.

FC кесмадан ташқарида ётучи G нуқта бордир. Демак, Паш аксиомасига асосан, EG тўғри чизиқ AC кесма блан бирор D нуқтада кесишади.

Гарчи исбот чизмани талаб қилмаса-да, Гильберт тушунарли бўлиш мақсадида, уни беради (чизма 79). Яна бир аjoyиб теоремани келтирайлик.

Теорема. *Бир тўғри чизиқда ётучи исталган учта A, B, C нуқтадан ҳарвақт бири қолган иккитаси орасида ётади.*

A нуқта B блан C орасида ётмасин ва C нуқта A блан B орасида ётмасин. деб фараз этайлик. AC тўғри чизиқда ётма-



Чизма 79.

Чизма 80.

ган D нуқта ва B нуқтадан тўғри чизиқ ўтказамиз ва (II, 2 аксиомага асосан) бу тўғри чизиқда шундай G нуқтани танлаб оламизки, D нуқта B блан G орасида ётадиган бўлсин, BCG учбурчак ва AD тўғри чизиққа нисбатан Паш аксиомасини қўллаб AD ва CG тўғри чизиқларнинг C блан D орасида ётучи бирор E нуқтада кесишганини исботлаймиз. CD ва AG тўғри чизиқларнинг A блан G орасида ётучи F нуқтада кесишганлиги шу усул блан кўрсатилади. Энди Паш аксиомасини AEG учбурчак ва CF тўғри чизиққа қўлласак, D нуқтанинг A блан E орасида ётишини, ва ниҳоят, ўша аксиомани AEC учбурчак ва DG тўғри чизиққа қўлласак, B нуқтанинг A блан C орасида ётишини исботлаймиз (чизма 80).

Энди қуйидаги теоремани исботсиз келтирамиз: *тўғри чизиқдаги исталган тўртта нуқтани A, B, C, D ҳарфлар блан шу тариқада белгилаш мумкинки, B ҳарфи блан белгиланган нуқта ҳам A, C нуқталар орасида, ҳам A, D нуқталар орасида ётадиган бўлади. C блан белгиланган нуқта эса — ҳам A, D нуқталар, ҳам B, D нуқталар орасида ётади.*

Бу жумлани Гильберт ўз асарининг биринчи нашрида аксиомалар қаторига киритган эди, аммо кейинроқ у бошқалар томонидан исботланган эди.

Бундан сўнг Гильберт кўпбурчак "ичида" ва "ташқарида" сўзлари блан ифодаланган тушунчаларни та'рифлайди ва

ҳарқандай содда кўпбурчак текисликнинг шу кўпбурчакка қарашли бўлмаган нуқталарини ички ва ташқи соҳаларга бўлади, деган теоремани кўрсатади. Бу теореманинг исботи анчагина оғир. Гильберт китобига [7] П. К. Рапесвский томонидан берилган изоҳларнинг ўнбешинчисидан келтирилган исбот, зич ва кичик ҳарфлар билан ёзилган ўн бетни ишғол қилади.

Шу бобнинг ўзидаёқ Гильберт „нур“ тушунчасини киритади. Фараз этайлик, A, A', O, B — бирор a тўғри чизиқнинг шундай тўртта нуқталари бўлсинки, O нуқта A билан B орасида ётиб, A билан A' орасида ётмасин. Бу чоғда биз A, A' нуқталар a тўғри чизиқда O нуқтадан бир томонда ва A, B нуқталар эса — a тўғри чизиқда O нуқтадан



Чизма 81.

турли томонда ётади деб сўзлаймиз. a тўғри чизиқнинг O нуқтадан бир томонда ётучи ҳамма нуқталари, O нуқтадан чиқувчи нур деб аталади. Хуллас, нуқта a тўғри чизиқни икки нурга бўлади (чизма 81).

§ 38. Аксиомаларнинг учинчи группаси: конгруэнтлик ва ҳаракат аксиомалари.

Асосий тушунча: „конгруэнт“ ёки „тенг“.

III.₁. Агар A, B — a тўғри чизиқнинг икки нуқтаси, ва A' — шу тўғри чизиқ ёки бошқа a' тўғри чизиқ нуқтаси бўлса, у чоғда a' тўғри чизиқда A' нуқтадан берилган томонда ётучи биттагина шундай B' нуқтани ҳамиша топиш мумкинки, AB кесма $A'B'$ кесмага конгруэнт (тенг) бўлади.



Чизма 82.

Бу аксиома кесмаларни қўябориш имкониятини беради. Кесмаларнинг конгруэнтлиги шундай белгиланади: $AB \equiv A'B'$.

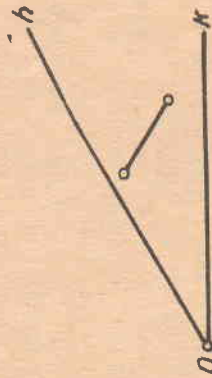
III.₂. Агар $A'B'$ кесма ва $A''B''$ кесма учинчи AB кесмага конгруэнт бўлса, $A'B'$ кесма $A''B''$ кесмага ҳам конгруэнт бўлса; қисқароқ: агар икки кесма учинчи кесмага конгруэнт бўлса, улар бир-бирига ҳам конгруэнтдир.

Исталган кесманинг ўз-ўзига ҳам конгруэнтлигини бу икки (III.₁; III.₂) аксиомалар суяниб исботлаш мумкин.

III.₃. Фараз этайлик, AB ва BC — a тўғри чизиқнинг умумий ички нуқталарга эга бўлмаган икки кесмаси бўлсин; $A'B'$ ва $B'C'$ эса, ўша тўғри чизиқ ёки бошқа a' тўғри чизиқнинг яна умумий нуқталарга эга бўлмаган икки кесмалари бўлсин (чизма 82); агар бунда $AB \equiv A'B'$ ва $BC \equiv B'C'$ бўлса, у чоғда $AC \equiv A'C'$ бўлади.

Бу аксиома кесмаларни қўйиш имкониятини беради. Бунинг кетидан Гильберт бурчакларнинг конгруэнтлигига оид аксиомани киритади, аммо у олдин бурчак терминига таъриф беради.

Таъриф. Фараз этайлик, α — ихтиёрий текислик, h, k — шу текисликнинг бирор O нуқтасидан чиқувчи ва турли тўғри чизиқларга қарашли нурлар бўлсин. Бундай икки нур системасини бурчак деб атаймиз ва уни $\angle(h, k)$ ёки $\angle(k, h)$ билан белгилаймиз. h, k нурлар — бурчакнинг томонлари ва O нуқта — унинг учи дейилади. Ёйиқ ва ундан катта бурчаклар бу таърифдан мустаснодир. Иккинчи группанинг аксиомаларига асосланиб, O нуқта билан бирга олинган h, k нурларнинг текислик нуқталарини икки соҳага бўлишни исботлаш мумкин. Бу соҳаларнинг бири шундай хусусиятга эгаки, бу соҳадagi икки нуқтани туташтиручи ҳарбир кесма бутунича шу соҳада ётади. Бу соҳа hOk бурчакнинг ички соҳаси ва иккинчиси — унинг ташқи соҳаси дейилади (чизма 83).



Чизма 83.

III.₄. α текисликда $\angle(h, k)$ ва α' текисликда a' тўғри чизиқ ва α' текисликнинг a' га нисбатан белгиланган бир тарафи берилган бўлсин. a' тўғри чизиқнинг O' нуқтасидан чиқувчи нури h' бўлсин. У чоғда α' текисликда фақат битта шундай k' нур мавжудки, (h, k) бурчак (h', k') бурчакка конгруэнт (тенг) дир ва шу билан бирга, (h', k') бурчакнинг ички



Чизма 84.

ки нуқталари a' дан юқорида кўрсатилган тарафда ётади. Бурчаклар орасидаги бу муносабат шундай белгиланади: $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

Ҳарбир бурчак ўз-ўзига конгруэнт, яъни ҳамиша: $\angle(h, k) \equiv \angle(h, k)$; $\angle(h, k) \equiv \angle(k, h)$. Биз қисқача: ҳарбир бурчакни берилган текисликда берилган нурдан берилган тарафга фақат ягона равишда қўйиш мумкин деймиз.

III.₅. Агар ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар учун (чизма 84) ушбу конгруэнтликлар мавжуд бўлса: $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$,

$\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, у чоғда $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ конгруэнтлиги ҳам мавжуд бўлади. Ишоралаш тартибини ўзгартиш блан ACB бурчакнинг $A'C'B'$ бурчакка конгруэнтлигини аниқлаймиз:
 $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.

Конгруэнтлик аксиомалари учбурчаклар тенглиги, қўшни бурчаклар ва тенгёли учбурчаклар ҳақидаги ва бошқа теоремаларни исботлашга имконият беради.

Броқ бу исботларда „ҳаракат“ тушунчаси мутлақо ишлатилмайди.

Мактабдаги геометрия курсида ҳаракат тушунчасини дастлабки ва ўз-ўзидан равшан деб ҳисоблаб ва *аксиоматик асосламасдан*, уни бемалол ишлатилади, бир-бири блан устма-уст келадиган фигуралар тенг ёки конгруэнт ҳисобланади. Гильберт аксиоматикасида, аксинча, геометрик „ҳаракат“ тушунчаси конгруэнтлик тушунчаси орқали аниқланади.

Текисликдаги геометрияда буни кўрсатиб ўтайлик.
 α текислиқнинг нуқталари орасида ўзаро бирқийматли мослик ўрнатилган бўлсин, я'ни, α текислиқнинг ҳарбир А нуқтасига, бирор белгили қоида ёки қонунга мувофиқ, фақат битта А' нуқта (А нуқтанинг образи) мос келтирилган, ва аксинча, А' нуқта ягона А нуқтанинг образи бўлсин. Масалан, α текислиқни бирор О нуқта атрофида бирор φ бурчакка бурасак, α текислиқнинг ҳарбир А нуқтаси бирор А' нуқтага олмошинади; О нуқта ўз ўрнида қолади. Иккинчи мисол тариқасида маркази бирор нуқта бўлган гометияни олайлик, α текислиқнинг гометия олмошинишу шу текислиқни ўз-ўзига бирқийматли равишда „акслайиш“дан иборатдир. Бу мисоллардан сўнг ҳаракат тушунчасининг таърифига ўтайлик.

Таъриф. Ҳаракат деб текислик нуқталари тўпламининг ўз ўзига шундай акслайишни айтмаладики, унда ҳарбир АВ кесма, ўзига конгруэнт бўлган А'В' кесмага олмошинади.

Шундай қилиб, „ҳаракат“ конгруэнтлик орқали аниқланди; Гильберт системасида „ҳаракат“ ҳосиллавий тушунчадир. Бундан сўнг конгруэнтлик аксиомаларидан фойдаланиб, „ҳаракат“нинг хоссаларини ифодаловчи бирнеча теоремани исботлаш мумкин. Бу теоремаларнинг баъзиларини келтирайлик.

1°. Ҳаракат ҳарқандай тўғри чизиқни тўғри чизиққа олмоштиради.

2°. Ҳаракат кесинишчи тўғри чизиқларни кесинишчи тўғри чизиқларга, параллелларни яна параллелларга олмоштиради.

3°. Нурларни ҳаракат яна нурларга олмоштиради.

4°. Бурчакнинг ички соҳаси яна бурчакнинг ички соҳасига олмошинади.

Булардан сўнг ҳаракат турларини таърифлаш мумкин. Агар О нуқта ўзининг О' образи блан бирлашса, я'ни О нуқта ўз ўрнида қолса, ҳаракат О нуқта атрофида айлантириш деб

аталади. Агар бирор ҳаракат натижасида ҳамма нуқталар ўз ўрнида қолса, у ҳам айлантиришдир.

Агар ҳаракат натижасида: 1) бирор α тўғри чизиқнинг ҳарбир А нуқтаси шу α текислиқнинг бирор А' нуқтасига олмошинса, 2) α текислиқнинг α тўғри чизиқдан бир тарафда ётган ҳарбир нуқтаси, яна ўша тарафда қолса, биз бу ҳаракатни параллел кучириш ёки силжйтиш деб атаймиз. Ҳамма нуқталарни ўз ўрнида қолдирган ҳаракатни исталган тўғри чизиқ бўйлаб силжйтиш ёки исталган нуқта атрофида айлантириш қаторига кiritиш мумкин.

Агар ҳаракат натижасида: 1) бирор α тўғри чизиқнинг ҳарбир А нуқтаси ўз ўрнида қолса, 2) α текислиқнинг ҳарбир нуқтаси, бундай ҳаракат симметрия деб аталади.

Бирин-кетин бажарилган икки ҳаракатнинг натижасини, бир бор бажарилган ҳаракат блан ҳам ҳосил қилиш мумкин. Агар α текислиқнинг ихтиёрий нуқтасини М блан белгиласак, биринчи ҳаракат М нуқтани М' га, иккинчи ҳаракат—М' нуқтани М'' га олмоштиради. Натижада α текислиқнинг ҳамма нуқталарини шундай олмоштириш юзага келадики, унинг оқибатида ихтиёрий М нуқта М'' нуқтага олмошинади. Кейинги бу олмоштириш, албатта, ҳаракатдир. Ҳосил қилинган ҳаракат олдинги икки ҳаракатнинг кўпайтмаси дейилади.

Шундай қилиб, жуда муҳим теорема ҳосил қилинди: икки ҳаракатнинг кўпайтмаси ҳаракатдир.

Ҳаракатлардан иборат кўпайтучиларнинг тартиби муҳим рольни ўйнайди.

Ҳарбир ҳаракат, икки симметрия ва сони биттадан ошмаган силжйтишни кўпайтиш натижасида ҳосил қилиниши мумкин. Биз бунинг исботига тўхтамаймиз.

α текислиқнинг ҳамма нуқталарини ўз ўрнида қолдирган олмоштиришнинг ҳаракатдан иборатлигини биз биламиз. Бундай ҳаракат айнан ҳаракат деб аталади; ҳаракатларни кўпайтиришда у „бирлик“ ролини ўйнайди.

Агар ҳаракат ихтиёрий М нуқтани М' нуқтага ўтказса, М' нуқталарни ўз ўрнига қайтаруви олмоштириш вужудга келади. Бу олмоштириш ҳам ҳаракатдан иборатдир, чунки у ўзаро бирқийматли бўлиб, исталган кесмани унга конгруэнт кесмага ўтказади. Бу охириги ҳаракат дастлабкига нисбатан тескари дейилади. Ҳаракат блан унга тескари ҳаракатнинг кўпайтмаси, айнан ҳаракатга тенг бўлиб, кўпайтучилар тартибига боғлиқ эмасдир; бундай ҳаракатлар ўзаро тескари дейилади.

Текислиқнинг ўз-ўзи бўйлаб қилган ҳаракатларнинг хоссаларини яқунлайлик.

1°. Икки ҳаракат кўпайтмаси яна ҳаракатдир.

2°. Барча ҳаракатлар тўплами ичида айнан ҳаракат бордир.

3°. Ҳарбир ҳаракат учун тескари ҳаракат мавжуддир.

Агар элементларнинг бирор тўпламини, масалан, α текислик нуқталарини ўз-ўзига ўзаро бирқийматли олмоштирилларнинг тўплами, юқоридаги учта хоссани қаноатлантирса, улар *группани* ташкил қилади деб айтамыз*. Масалан, α текислиكنинг маркази O нуқтада бўлган ҳамма гомотетик олмоштиришлари группани ташкил қилади, чунки:

1°. Маркази O дан иборат икки гомотетия кўпайтмаси, маркази ўша O нуқтада бўлган гомотетиядир.

2°. α текислиكنинг айнан олмоштириши, (ўхшашлик коэффициенти бирга тенг) O марказли гомотетиядир.

3°. O марказли ҳарқандай гомотетия учун тескари гомотетия бордир.

Маркази берилган нуқтадан иборат барча гомотетиялар тўплами гарчи группани ташкил қилса-да, улар *ҳаракатлардан* иборат эмасдир.

Биз *ҳаракат тушунчасини конгруэнтлик тушунчаси орқали аниқладик*, аммо тескарича, яъни *конгруэнтлиكنи ҳаракат орқали аниқлаш* ҳам мумкин. Бу усул Евклид томонидан қабул қилинган эди; унинг изидан бориб, ўрга мактаб дарсликлариди ҳам аксиоматик томонига диққат қилмасдан, шу усул қўлланилади. Ҳаракатнинг юқорида келтирилган хоссаларига асосланиб, конгруэнтлик аксиомалари ўрнига ҳаракат аксиомаларини киритиш мумкинлигини кўрсатамиз.

Аксиомаларнинг учинчи группаси: ҳаракат аксиомалари.

Асосий тушунча: *ҳаракат*.

III' 1°. *Ҳаракатлар текислиكنи ўз-ўзига акслатишларнинг группасини ташкил қилади.*

III' 2°. *Ҳарбир ҳаракат натижасида кесма яна кесмага олмошинади.*

III' 3°. *Ихтиёрий равишда берилган бўлсин: O ва O' нуқталар, OA ва $O'A'$ нурлар; бу нурларнинг ҳарбири α текислиكنи иккита яримтекисликка бўлади, ана шу яримтекисликлардан биттадан олиб, уларни β ва β' билан белгилэйлик. Фақат битта шундай ҳаракат борки, у айни замонда O нуқтани O' нуқтага, OA нурни $O'A'$ нурга ва β яримтекисликни β' яримтекисликка олмоштиради.*

Бу аксиомалар қуйидагиларни исботлашга имкон беради: 1) ҳарқандай ҳаракат тўғри чизиқни яна тўғри чизиққа, 2) бурчакни бурчакка, 3) учбурчакни учбурчакка олмоштиради ва ҳ.к. Бунинг кетидан *конгруэнтлиكنи таърифлаш* мумкин.

Таъриф. Икки кесма, икки бурчак, икки учбурчак ва α

*Ўрга мактабдаги ҳарбир ўқитучи группа тушунчасини ўзлаштириши керак. Умумий таърифлар ва группанинг асосий хоссалари П. С. Александровнинг китобида [3] бордир. Лекин бу китобнинг 67—68-нчи бетларида ҳа-тога йўл қўйилганлигини айтиб ўтиш керак.

текисликдаги умуман икки фигурани бир-бирига ўтказадиган ҳаракат мавжуд бўлса, улар конгруэнт деб аталади.

Ҳаракат аксиомаларига асосланиб конгруэнтликка берилган бу таърифдан сўнг, Гильберт аксиоматикасидаги учинчи группа аксиомаларини исботлаш мумкин; демак янги аксиоматикада бу аксиомалар *теоремаларга* айланади [4].

Бу муҳокамалар, аксиомалар билан теоремаларнинг бир-бири ўрнига ўтишига яна бир мисолни беради; шу билан бирга, бу мисол *асосий тушунчалари* турли бўлган аксиомаларнинг эквивалент системалари борлигини кўрсатиб беради.

§ 39. Аксиомаларнинг тўртинчи группаси: параллеллар аксиомаси.

Олдинги аксиомаларга суяниб, учбурчакнинг ташқи бурчаги ҳақидаги теорема исботланади ва шу билан бирга текисликда кесилмайдиган тўғри чизиқларнинг борлиги исбот қилинади. Даста тўғри чизиқларидан берилган тўғри чизиқ билан кесилмайдиганларининг сони ҳақидаги масала аксиоммага боғлиқдир.

IV. (Евклид аксиомаси). *Агар α — ихтиёрий тўғри чизиқ ва A унда ётмаган нуқта бўлса, уюгда A нуқта ва α тўғри чизиқ билан аниқланувчи текисликда A нуқтадан утиб, α тўғри чизиқ билан кесилмайдиган тўғри чизиқлар биттадан ошиқ эмасдир.*

Таъриф. Олдинги муҳокама ва Евклид аксиомасига асосан α тўғри чизиқ ва A нуқта билан аниқланган текисликка A дан утиб α билан кесилмайдиган фақат битта тўғри чизиқнинг борлигини билиб оламиз. Уни биз A нуқтадан утиб, α га *параллел* тўғри чизиқ деб атаймиз.

§ 40. Аксиомаларнинг бешинчи группаси: узлуксизлик аксиомалари.

V 1°. (Ўлча ш аксиомаси, ёки Архимед аксиомаси). *AB* ва *CD* — ихтиёрий икки кесма бўлсин; u ҳолда *AB* тўғри чизиқда чекли сонли шундай $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ нуқталар мавжудки, $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ кесмалар *CD* кесмага конгруэнт ва B нуқта A билан A_n орасида ётади (чизма 85).

Бу — Лежандрнинг биринчи теоремасини исботлаш вақтида ишлатилган Архимед - Евдокс аксиомасидир.

Уни "равшанроқ" қилиб тушунтирайлик: агар AA_1 кесмага конгруэнт *CD* кесма *AB* га бутун сон марта "жойлашса", аксиоманинг шартларини қаноатлантириш учун, яна бир, икки, уч, ... "қалам" қўйиш мумкин.

Бу группанинг иккинчи аксиомасини келтириш олдиан, ушбу теоремани исботсиз келтирайлик (бу теорема Гильберт асариди 6-нчи номер билан белгиланган).

6-нчи теорема (тўрт нуқтанинг бир тўғри чизикқа жойлашиш тартиби ҳақидаги теоремани умумлаштиради, 92-нчи бетга қаранг). *Чекли* сонда олинган нуқталар тўғри чизикда қандай жойлашса-да, уларни $A, B, C, D, E, \dots, K$ ҳарфлар билан шундай тартибда белгилаш мумкинки, B ҳарфи билан белгиланган нуқта бирёқдан A , иккинчи ёқдан $C, D, E, \dots, K$ нуқталар орасида ётади; C билан белгиланган нуқта бирёқдан A, B нуқталар ва иккинчи ёқдан $D, E, \dots, K$ нуқталар орасида ётади; D —бирёқдан A, B, C ва иккинчи ёқдан



Чизма 85.

$E, \dots, K$ орасида ётади ва x . к. Бу тариқада белгилаш усулидан ташқари шу хоссага эга бўлган тесқари тартибда белгилаш усулига бори: $K, \dots, E, D, C, B, A$.

Иккинчи аксиома таркибига кирочи бу теорема, аксиоманинг ўзига қараганда анча содда. Унинг исботи Гильбертнинг "Геометрия асослари" асарига П. К. Рашевский томонидан берилган изоҳларда бори [7], бет 405—406.

$V, \dots$ (Тўғри чизикда муқаммаллик аксиомаси). Тўғри чизикнинг нуқталари шундай системани ташкил қиладики, у системани, чизикли тартибни сақлаш (6-нчи теорема) шарти билан бирга, конкретлик аксиомаларининг биринчисини ва Архимед аксиомасини (я'ни $I, 1-2; II; III, 1; V, 1$ аксиомаларни) бузмасдан туриб, кенгайтириш мумкин эмасдир, я'ни олдинги системага, аввалги ва кенгайтириш натижасида қўшилган нуқталардан тузилган янги системада келтирилган аксиомаларнинг ҳаммасининг бажарилиш шарт билан, янги нуқталар қўшиш мумкин эмас.

Бу аксиома узундан-узун бўлиб, ундаги тушунчаларни ҳатто оdatлашиб келган нарсаларимиз, я'ни "нуқталар", "тўғри чизиклар" ни оdatдаги нуқталар, тўғри чизиклар деб тушунасак, барибир, бу аксиоманинг ифодаланishi оғир ва уни дарров тушуно бўлмайди. Бу аксиоманинг ифодасида олдинги аксиомаларнинг қарийб ҳаммаси, ва ҳатто, 6-нчи теорема ҳам иштирок etadi.

Бу аксиоманинг келиб чиқиш тарихига тўхталиб ўтайлик. Гильбертнинг "Геометрия асосларининг" биринчи наширида бу аксиома йўқ эди. Бешинчи гуруҳа аксиомалари фақат битта аксиома, я'ни Архимед аксиомасидан иборат эди.

А. Пуанкаре "Геометрия асослари"нинг биринчи наширига бағишлаб ёзган рецензисинда Гильберт аксиоматикасидаги камчиликни кўрсатиб ўтган эди. Камчилик аксиоматиканинг "муқаммал эмаслиги"дир. I; II; III; IV; V, 1 номерли аксиомаларнинг "муқаммал эмаслиги" нимадан иборатлигини билдиш учун, қуйидагича иш қўрамиз.

Тўғри чизик секин-аста нуқталар билан тўldирилмоқда, деб фараз etайлик. Масштаб бирлигини олиб, тўғри чизикқа 1 билан белгиланган нуқтаи "қўййлик". Ҳозирча тўғри чизикда шу "бирлик" нуқтадан бошқа нуқта мавжуд эмасдир. Ана шу "бирлик" нуқтани олиб, абсциссалари, 1 га нисбатан.

тўртта арифметик амални (қўшиш, айириш, кўпайтиш, бўлиш) *чекли марта* қўллаш натижасида ҳосил қилинган нуқталарни тўғри чизикқа қўйиб, рақамлар қисқача айтганда, тўғри чизикқа "рационал нуқталар" ни, я'ни рационал абсциссали нуқталарни жойлаштиришмоқдамиз. Бизнинг ихтиёримизда ҳозирча бошқа нуқталар йўқ. Масалан, томони 1 га тенг квадратнинг диагонаliga тенг OA кесмани O нуқтадан қўйсак, бу кесманинг охири "бўш жойни" кўрсатади, чунки A нуқтанинг абсциссаси иррационал сон $\sqrt{2}$ га тенгдир.

Бундай "бўшлик" лар ҳали жуда кўп. Чиндан ҳам, тўғри чизик, $OA = \sqrt{2}$ кесма микдориди ўнг томонга қараб силжитилган деб ҳаёл қилайлик, у чоғда ҳарбир рационал ва нуқта $a + \sqrt{2}$ дан иборат "бўш жойга" бориб тушади. Қўзғиш шундаки, барча рационал нуқталарнинг тўғри чизикни ҳамма жойида эч тўldиришига қарамай, бўш жойлар яна қолади, ҳамма жойда эч деган сўзлар, бир-бирига ҳарқанча яқин рационал x_1, x_2 нуқталар орасида чексиз кўп яна рационал нуқталар борлигини билдиреди, масалан x_1, x_2 кесманинг ўртаси $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ ва x . к.

Энди арифметик тўрт амалдан ташқари, Гильберт билан биргаликда бешинчи амални олайлик:

$$|\sqrt{1+\omega^2}|.$$

Радикал остидаги ω кўрсатилган бешта амал ёрдами билан илгари ҳосил қилинган сондир. Масалан, $\omega = 1$ бўлса, $\sqrt{2}$ ҳосил бўлади; $\sqrt{2}$ га исталган рационал a сонни қўшсак, $a + \sqrt{2}$ шақдаги нуқталарни вужудга келтирамиз. Агар $\omega = 1 + \sqrt{2}$ деб фараз қилсак, бешинчи амал $\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ ни берилади ва x . к. Бу равнишда ҳосил қилинган барча нуқталарни (булар Ω майдонни ташкил etсин) сонлар ўқига "қўйиб" ва бошқа нуқталар йўқ деб ҳисобласак, тўғри чизикни тўldирган бўлмаймиз. Нуқталари Ω майдон нуқталаридан иборат тўғри чизикнинг ҳали $\frac{3}{2}$ "тешиклари" кўп. Масалан, $\sqrt{2}$ бўш жойни кўрсатади. Тўғри чизикни $\sqrt{2}$ микдорда силжитиб, Ω майдоннинг ҳамма нуқталарини "бўш жойларга", я'ни Ω майдонга қўзғатиш бўлмаган нуқталарга кўчирган бўламиз. Ҳатто Ω майдонга қолган ҳамма алгебранк ҳақиқий сонларни қўшсакда, π ёки e микдорда силжитиш натижасида ҳақиқий сонларнинг бу тўплами яна "бўш жойлар"ни ишғол қилади. Шундай қилиб, Ω майдон нуқталаридан "ясалган" тўғри чизикнинг ҳали "тешиги кўп".

Энди Декарт системасининг учта ўқи OX, OY, OZ — ана шундай "тешикли" тўғри чизиклардан иборат, я'ни уларнинг нуқталари фақат Ω майдон нуқталаридан иборат деб фараз etайлик. Координатлари Ω майдон элементларидан иборат "тешикли" фазога "Омега скелет" номини берамиз.

"Омега скелет" тушунчасини киритгандан сўнг, узлуксизлик аксиомалари фақат Архимед аксиомасидан иборат бўлган Гильберт аксиоматикасининг "муқаммал эмаслиги" нимада эканини кўрсатиш мумкин.

Биринчи категория объектлари, я'ни "нуқталар" сифатида Ω скелет нуқталарини; иккинчи категория объектлари учун, я'ни "тўғри чизиклар" сифатида фақат Ω скелет нуқталари билан тўldирилган олдий тўғри чизикларни ва "текисликлар" сифатида Ω скелет нуқталаридан тузилган "тешикли" текисликларни олайлик, сўнгра, "қарашли", "орасида", "тенг бўлиш" сўзларини оdatдагидек тушунасак, Гильбертнинг $V, 2$ дан бошқа, ҳамма аксиомалари қаноатлантирилган бўлади. Гильберт ўз китобининг иккинчи ва кейинги наширида ана шуларни кўрсатиб ўтади.

Гильберт фазосида бизнинг фазомизда бўлган ҳамма нуқталар мавжуд эмасдир, унда фақат икки нуқтадан** циркуль ва линейка ёрдами билан

* Дурустроқ айтиш мумкин: ҳамма нуқталарнинг бўлмаслиги ҳам мумкин. ** я'ни O билан 1 дан.

кесуш нукта (Дедекинд кесими) дейилади. „Олдин келадн“ термини тартиб аксиомалари ёрдами билан аниқланади.

Дедекинд аксиомаси, Гильберт узлуксизлик аксиомаларининг иккаласини тўла оломштираолади. Дедекинд аксиомасидан Архимед аксиомасининг қандай келиб чиқшини кўрсатайлик. Биз тескарисини фараз этайлик, яъни Дедекинд аксиомаси кучга эга деб фараз этиб, Архимед аксиомаси бирор AB кесма учун нотўғри деб фараз этамиз. Демак, AB кесма *ичида* жойлашган ва бир-бирига конгруэнт $AA_1=A_2A_3=.....=A_nA_{n+1}=...$ кесмаларнинг шундай *чексиз кетма-кетлиги* mavjudки, A_n нукта исталган n учун A_{n+1} нуктадан олдин келади ва A нукта B дан ҳамда барча A_i нукталардан олдин келади, бунга вуждга келтириш учун, A дан B га борган йўналишни n нинг ўсиш томони деб олиш етарли. AB тўғри чизиқнинг ҳамма нукталарини икки синфга тақсимлайлик. Биринчи синфга AB тўғри чизиқнинг шундай нукталарини киритамизки, улар A_i нукталарнинг ҳеч бўлмаганда биридан олдин келсин; бу синфга A нукта ва A дан олдин келган нукталарнинг ҳаммаси ва ҳамма A_{i-1} нукталар кирadi. Иккинчи синф, AB тўғри чизиқнинг биринчи синфга кирмай қолган нукталаридан иборат бўлсин. Иккинчи синф, масалан, B нукта ва ундан кейин келган ҳамма нукталарни ўз ичига олади. Дедекинд аксиомасининг шартлари бажарилади: 1) ҳарбир нукта фақат бир синфга киради ва ҳарбир синф нукталарга эга; 2) биринчи синфнинг ҳарбир нуктаси иккинчи синфнинг ҳарбир нуктасидан олдин келади. Демак, шундай C нукта mavjudки, у *кесмини* вуждга келтиради. Биринчи синфда охириги нукта йўқдир, чунки биринчи синфнинг исталган нуктаси, ўзи биринчи синфга қарашли бирор A_i нуктадан олдин келади. Шундай қилиб, C иккинчи синфга қарашлидир ва унинг ҳамма нукталаридан олдин келади. Конгруэнтлик аксиомаларининг биринчисига (III, 1) асосан, C дан олдин келган шундай D нукта mavjudки, $CD \equiv AA_1$, демак, исталган n учун $CD \equiv A_nA_{n+1}$. D нукта иккинчи синфнинг биринчи нуктаси C дан олдин келади, демак, D — биринчи синфга қарашлидир. Бу эса, D нукта бирор A_n нуктадан олдин келади дейишир. Демак A_n нукта ва $i > n$ бўлганда A_i нукталарнинг ҳаммаси DC кесманинг ички нукталаридир. Шундай қилиб A_nA_{n+1} кесма CD га конгруэнт ва A_nA_{n+1} аини замонда DC кесма ичида ётади. Ҳосил қилинган зидлик Архимед аксиомасини исботлаб беради.

Агар узлуksизлик аксиомалари гуpшаси фақат Дедекннд аксиомасидан иборат бўлса, у чоғда Архимед аксиомасигина эмас, балки мукаммаллик аксиомаси ҳам *теорема*га айланади. Бу ҳудосани биз исботсиз қолдирамиз. Шунинг билан Гильберт аксиомаларининг обзoрини тамoқлаимиз. Узлуksизлик аксиомаларининг бошқа системаси ва узлуksизлик аксиомаларига асосланган улчаш назарияси билан Н. В. Ефимовнинг жуда ажойиб китобидан [3] танишиб олиш мумкин.

ясаш натижасида ҳосил қилиналган нукталарига бор, холос" деб Пуанкаре ёзган эди.

[illegible]

Бу қийинчиликдан қутулиш мақсадида Гильберт ўзининг ана шу суъий геометриялар вужудга келади.

мукаммаллик аксиомасини киргиди.

"Геометрия асосларининг" дастлабки нашрларда мукаммаллик аксиомаси туғри чиққандаки мукаммаллик аксиомаси бўлмасдан, у бутун фазога нисбатан ифодаланган эди.

Хажикатан ҳам ўша дастлабки наشرлардаги мукамаллик аксиомаси, фазисбатан ифодаланган эди.

кўшишга рухсат эгар эди.
Барно этилган фазода "бўш жойлар" бўш жойлар тақдирда, уларни мукамал-
лик аксиомаси "тузидир" эди. Кейинча, "бўш жойларни тузидир" ишини
фақат тўғри чиқиқларга нисбатан бажаринишнинг етарлиги Гильбертга айтил-
ган эди, *тузғри чиқиқ* мукамаллик аксиомасининг вужудга келиш тарихи
шунлиги.

шудир. Бизнинг фикримизча, мукаммаллик аксиомаси бир текисликда ётмаган.

Бизнинг фикримизча, муаммоларни ҳал қилишда фарз эгиш етарлидир.

Бекриим янги аксиоматикани ярашди, шуларни янгиб ўтатиз: П. К. Ра-
яна бир бор диққатни торттиш мақсадида, шуларни янгиб ўтатиз: П. К. Ра-
шевский "Геометрия асослари"нинг янги таржамасига киритган изоҳларида,
мукаммаллик аксиомасининг ифодаланишида рўй берган шундай муҳим ва
нозик камчиликни кўрсатиб ўтатди, унинг натижасида Гильберт аксио-
матикаси умуман эдилятга олиб келиниш мумкин. П. К. Рашевский мукам-

Нихоят, Гильберт тадқиқотларининг асосий мақсидан, геометрининг N_3 -матрикаси умуман эришадиган инфодаланишига тузатиш киритди.

Гильбертнинг узлуксизлик ва бошқа аксиомаларига суяниб, лекин Евклиднинг IV аксиомасидан фойдаланмасдан, Дедекиндининг узлуксизлик ҳақидаги аксиомасини исботлаш (бу аксиомани биз юқорида ишлатган эдик) ва, аксинча, Дедекиндин аксиомасидан бошқа аксиомаларга (IV аксиомадан фойдаланмасдан) си блан бошқа аксиомаларни (V, 1—2) исботлаш мумкин. Суяниб, узлуксизлик аксиомаларини (V, 1—2) исботлаш мумкин. Куйидаги аксиомаларни куйидаги аксиомаларга:

Дедекінд аксиомасын қуыдайтынча профаниламай.
Ағар түггір чизикнің ҳамма нүктелери икки синфга
тақсимланыб;

1) Харбир нуқта фақат битта синфга кирса ва харбир тақсимланио:

2) Биринчи синфнинг ҳарбир нуқтаси, иккинчи синфнинг ҳарбир нуқтасидан олдин келса, у чоғда, ё биринчи синфда шундай нуқта мавжудки, бу синфнинг ҳамма нуқталари ундан олдин келади, ёки иккинчи синфда шундай нуқта мавжудки, бу нуқта, иккинчи синфдан олдин келади.

Аксиомада мавжудлиги ҳақида айтилган нуқта, тўғри чизиқнинг

ЕТТИНЧИ БОБ

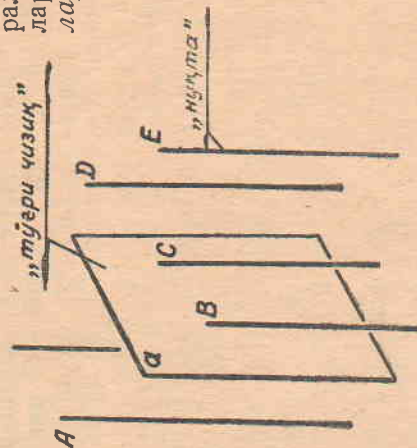
ГЕОМЕТРИК СИСТЕМАНИ ИНТЕРПРЕТАЦИЯЛАШ ҲОЯСИ

Гильбертнинг нуқтаи назардан, *асосий об'ектлар категориялари* (нуқталар, тўғри чизиқлар, текисликлар), ҳамда улар орасидаги *асосий муносабатлар*, фақат *аксиомаларнинг* бажарилиш шартини сақлаб, ҳартурли табиятда бўлишлари мумкин. Бу эса, бир геометрик системани, асосий об'ектлар категориялари ва улар орасидаги асосий муносабатларнинг *белгилари* равишда танлаб олинишига қараб, турлича изоҳлаш (*интерпретациялаш*) имкониятининг борлигини кўрсатади.

§ 41. Евклиднинг текисликдаги геометриясини интерпретациялаш мисоли.

Евклиднинг текисликдаги геометриясини одатдагича тушунилса, унинг ушбу моделини куриш мумкин.

Фазода бир-бирига параллел барча тўғри чизиқлар тўпламини (*параллеллар боғламини*) ва бу боғ-



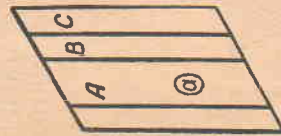
Чизма 86.

I_1, I_2, I_3 аксиомалар

Чизма 87.

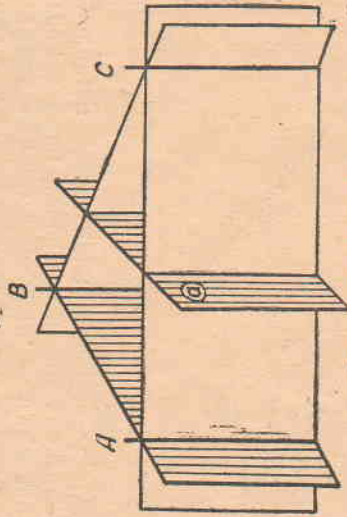
лам тўғри чизиқларининг лоақал бирига параллел бўлган барча текисликлар тўпламини олайлик. Энди *асосий об'ектлар категорияларини* қуйидагича тушунишни шарт қилиб оламиз: 1) боғ-

ламдаги тўғри чизиқларни *“нуқталар”* деб атаймиз; 2) ҳалиги текисликларни *“тўғри чизиқлар”* деймиз; 3) олинган тўғри чизиқлар ва текисликлардан иборат тўпламни *“текислик”* деб атаймиз (чизма 86). Об'ектлар орасидаги асосий муносабатларни қуйидагича тайинлаймиз: *“...да ётади”* муносабати, биринчи категория об'ектининг иккинчи категория об'ектига одатдаги ма-



I_1, I_2, I_3 аксиомалар

Чизма 88.



Паш постулати

Чизма 89.

нода қарашли бўлишини (я'ни тўғри чизиқнинг текисликда ётишини) билдирсин. *“Орасида ётади”* муносабати, боғламдаги уч тўғри чизиқнинг бир текисликда (одатдаги ма'нода) ётишлигини ва бу тўғри чизиқлардан иккитасининг, учинчисидан турли тарафда жойлашини билдирсин; бу учинчи тўғри чизиқни, биз қолган иккитаси *“орасида ётади”* деб ҳисоблаймиз.

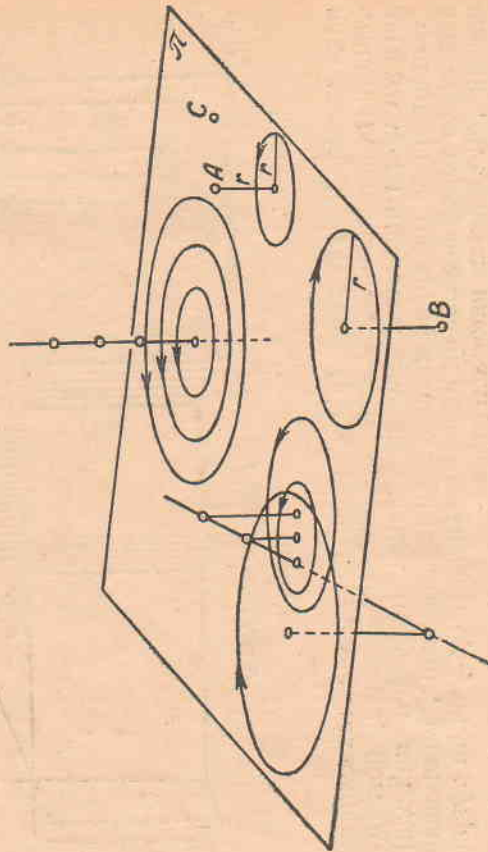
“Конгруэнтлик” асосий муносабати, об'ектлардан бирини, иккинчисининг устига (одатдаги ма'нода) қўйганда уларнинг *устма-уст* келишидан иборат бўлсин. Бундан сўнг, Гильберт системасида бир текисликдаги об'ектларга доир ҳамма аксиомаларнинг бу модельда бажарилишини текшириб куриш осон. *“Кесмаларнинг конгруэнтлиги”* параллел тўғри чизиқлар орасидаги минтақанинг иккинчи минтақа блан устма-уст келалишини билдирсин.

87—90-нчи чизмаларда ба'зи аксиомаларнинг бажарилиши кўрсатилган.

§ 42. Фёдоров интерпретацияси.

Евклид геометриясига машхур рус кристаллографи ва гео- метри академик Евграф Степанович Фёдоров (1853—1919)

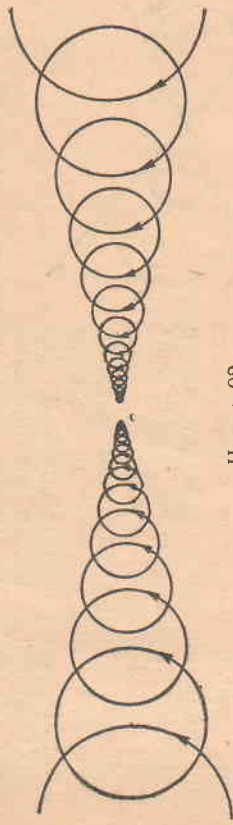
томонидан берилган яна бир интерпретацияни кўриб ўтайлик. Ушбу модельни тайёрлайлик. Фазонинг исталган A нуқтасини олиб, ундан ма'лум π текисликка перпендикуляр туширайлик. Бу перпендикулярнинг тубини (асосини) марказ ҳисоблаб, айлана чизайлик; айлананинг радиуси, A нуқтанинг π текисликкача бўлган масофасига тенг бўлсин. Айлананинг йўналишини шундай танлаб оламизки, A нуқтадан текисликка қараганда стрелка блан кўрсатилган айланани соат стрелкасига тескари бўлсин. π текисликка нисбатан A нуқта блан симметрияк A'



Чизма 91.

нуқта, радиуси ўша, лекин йўналиши тескари бўлган айлана блан тасвирланади. Хуллас, Е. С. Фёдоров сўзлари блан айтганда, π текисликдаги йўналишли — векториал — айлана, шу текисликдан радиусга тенг масофада ва унинг тегингла тарафида жойлашган нуқтани тасвирлайди (π текисликнинг ўзидаги нуқтага шу нуқтанинг ўзи тўғри келади, я'ни масофа нульга тенгдир). Текисликка перпендикуляр тўғри чизикқа π текисликда концентрик айланалар системаси тўғри келади (чизма 91). π текислик блан кесинувчи тўғри чизик, йўналишлари турли ва ўхшашлик маркази тўғри чизикнинг текислик блан кесинган нуқтасидан иборат ўзаро кесинувчи айланалар блан тасвирланади (чизма 92). π текисликка параллел тўғри чизик тенг айланалар блан тасвирланади (чизма 93). π текисликда ётувчи тўғри чизикқа шу тўғри чизикнинг ўзи мос келади. Текисликка перпендикуляр текислик, марказлари шу текисликнинг π блан кесинган чизикда ётувчи айланалар блан тасвирланади. Бу айланаларнинг радиуслари исталганча бўлиши мумкин ва

йўналишлари турли-турлидир. π текисликка параллел текислик йўналишлари бирхил ва радиуслари тенг айланалар блан тасвирланади. π текислик блан 45° ли бурчак ташкил қилиб, унинг блан кесинувчи текислик, кесиниш чизигига уринувчи айланалар блан тасвирланади, ва ҳ. к.



Чизма 92.

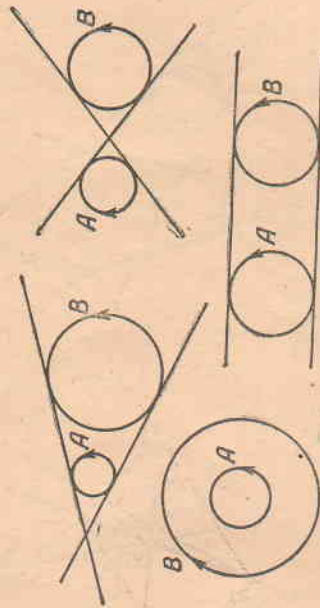
Учўлчовли фазони йўналишли айланалар ёрдами блан текисликка бу йўсида акслатиб, асосий объектлар категорияларини қуйидагича тушунишни шарт қилиб оламиз:



Чизма 93.

„Нуқталар“ — асосий текисликдаги йўналишли айланалардан иборат бўлсин.

„Тўғри чизик“ — йўналишлари турли ва гомотетия марказидан (я'ни радиуси нульга тенг айланадан) турли томонда



I_1, I_2, I_3 аксиомалар

Чизма 94.

жойлашган гомотетик айланалар тўпламидан иборат бўлсин. „Текисликлар“ — юқорида ясалган айланалар системасидан иборат.

„...да ётади“ асосий муносабати шу категорияга оид бўлишини билдирсин. „Орасида ётади“ сўзлари блан ифодалан

прегацияси тилига кўчирилган. a "тўғри чизиқ", A, B, C "нуқта-лар" блан аниқланган a текислиқнинг "изидир". R, S, T "нуқталар" AB, BC, CA "тўғри чиқиқлар"нинг a "тўғри чиқиқ" блан кескишган "нуқталаридан" иборатдир. AB, BC, CA, a "тўғ-ри чиқиқларнинг" ҳаммаси битта a "текислик"да "ётади".

Бу теоремани оддий Евклид геометрияси тилига тескари кўчирганда "янги" теорема ҳосил бўлади: *учта айлананинг ташқи ўхшашлик марказларини белгилловчи R, S, T нуқта-лар бир тўғри чиқиқда ётади* (чизма 96 а); иккита ташқи марказ S, T ва битта ички марказ R бир тўғри чиқиқда ёта-ди (чизма 96 б).

"Янги" теоремаларни ҳосил қилишда, кўрсатилган бу усул-дан ташқари, бошқа интерпретациялардан ҳам фойдаланиш мумкин.

§ 43. Евклид геометриясининг аналитик интерпретацияси.

"Нуқталар" ҳақиқий сонларнинг тартибланган (x, y) жуфт-лари бўлсин. "Тўғри чиқиқлар" — учтови ҳам бир вақтда нуль-га тенг бўлмаган ва тартибланган учта соннинг нисбатлари бўлсин $(u:v:w)$. Бу об'ектларнинг ҳаммасини битта "текис-ликка" қарашли деб ҳисоблаймиз. "...да ётиш" асосий муно-сабати ушбу ма'нога эга бўлсин: агар $ux + vy + wz = 0$ тенг-лик бажарилса, (x, y) нуқта $(u:v:w)$ тўғри чиқиқда ётади. Бундай қарашлик муносабати блан боғланган об'ектлар систе-масида, биринчи группа аксиомаларининг ҳаммаси бажарилади, буни синаб кўриш мумкин. Бу интерпретацияда "орасида", "конгруэнт" сўзлари блан ифодаланувчи асосий муносабатларни қандай тушуниш ва Гильберт аксиомалари ичида бир текис-ликка онд бўлганларининг бу аналитик модельда қандай тек-шириб кўришни ўқучининг ўзи яхши тушунган бўлиши керак. Бу интерпретация натижасида текисликдаги оддий аналитик геометрия вужудга келади; унн, планиметриянинг мумкин бўлган интерпретацияларидан бири деб қараш керак.

Сонларнинг тартибланган (x, y, z) учталиқларини "нуқта-лар" сифатида қаритиб ва шунга ўхшаш иш олиб борсак, фа-зовий геометриянинг аналитик моделини ҳосил қилишимиз мумкин. Геометрия блан арифметика орасидаги чуқур боғла-ниш ана шу аналитик модельлар воситаси блан юзата чиқа-рилади.

§ 44. Лобачевский геометриясига Бельтрами — Клейн моделидан берилган интерпретация.

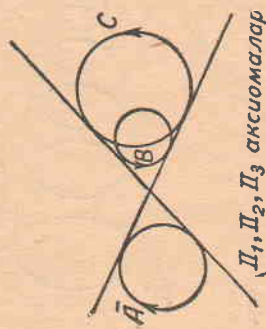
Гильберт аксиоматикасидаги йигирмага аксиомадан ўнўқ-қизтасини ўзгаришсиз қолдириб, фақат параллеллик аксиомаси Урнига Лобачевский аксиомасини қабул қилсак, Лобачевский геометрияси аксиомаларининг беш группасини ҳосил қилган бў-

ган асосий муносабат, бу айланалар системасининг тескари акс-латганда, одадгаги ма'нода "орада ётуши" нуқталарни ҳосил қилинишни билдиради. "Конгруэнт бўлиш" тушунчаси ҳам шу сингари тайинланади.

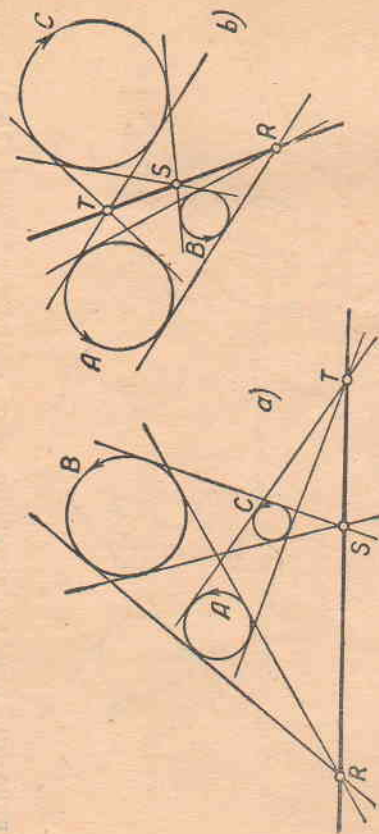
Энди ба'зи аксиомаларнинг бажарилишини текшириб чиқай-лик. Уларнинг бажарилиши 94, 95-нчи ва шуларга ўхшаш чизмалардан яққол кўриниб туради. Бу интерпретацияда Гильберт аксио-маларининг ҳаммаси ҳам бажарилади; бунга ишонч ҳосил қилиш учун, Фёдо-ров об'ектларини фазога қайта аксла-тиш керак. Фёдоровнинг интерпрета-цияси учўлчовли фазони текисликла тасвирлашга имконият беради. Чизма геометрия ҳам учўлчовли фазони те-кисликда тасвирлашга имконият бе-ради, лекин бундай тасвирлаш усули геометриянинг мукамал интерпрета-циясини бераолмайди, чунки буерда диясини бераолмайдн, ўзаро бирқийматли истиснолик ҳоллар бор, ва иккинчидан, ўзаро бирқийматли мослик унда юз бермайди.

Фёдоровнинг интерпретацияси бу жиҳатдан бежирим бўлиб, уни кристалларни ўрганиш учун муваффақият блан қўллаш мумкин.

Интерпретация ғоясини қўллаб, Фёдоров шундай деган эди: "Бизга янги теорема кўрсатсангиз, ундан биз бениҳоя



Чизма 95.



Чизма 96.

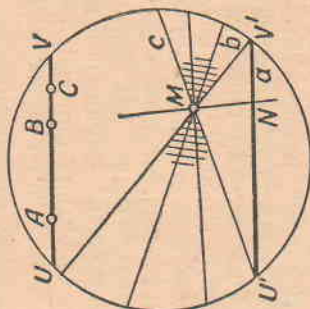
кўп бошқа теоремаларни чиқазиб берамиз". Бу фикрни ушбу мисол блан тушунтирайлик. Бирлаштириш аксиомаларидан, бир тўғри чиқиқда ётмаган учта A, B, C нуқта, шу нуқ-талардан ушучи фақат битта a текислиқни аниқлайди, деган хулоса чиқади. 96-нчи чизмада шу факт Фёдоров интер-

ламиз. Евклид геометриясидагидек, бунда ҳам асосий объектлар ва улар орасидаги асосий муносабатларни шундай қилиб танлаб олиш мумкинки, уларга аксиомаларнинг бу янги системасини (рўйхатини) қўллаш мумкин; шунинг учун, бу аксиомалардан ҳосил қилинган теоремалар ҳам кучга эга бўлади. Бундай интерпретацияларнинг бирини — Бельтрами ва Клейн томонидан кўрсатилган интерпретацияни қараб чиқамиз. Модельни тайёрлайлик. Евклид геометриясининг теоремалари ва унинг методларини бизнинг ихтиёримизда ҳисоблаб, бу модельни оддий Евклид геометриясининг объектларидан ясаймиз. Исталган радиусли ва маркази исталган нуқтада олинган айлана чизмаиз ва *Лобачевский планиметриясининг асосий объектлари* категорияларини киритамиз.

„Нуқталар“ — доира ичидаги оддий нуқталардан иборат. Асосий айлана ва унинг ташқарисида ёгучи нуқталарни биринчи категория объектлари қаторига киритмаймиз. *„Тўғри чизиқлар“* — асосий айлана ватарларидан иборат. *„Қарашли“* ва *„орасида“* терминларини одатдаги маънода тушунамиз. *Асосий доира ичида* бўлишимиз, Евклид геометриясининг шароитидоиранинг ичида I ва II группанинг бир текислик элементларига оид аксиомалари (I₁—3, II₁—4) ва улардан чиққан барча ҳулосалар ҳукмронлик қилади. Айлана ўрнига ички нуқталари блан бирга қаралган сфера олinsa, I ва II группанинг ҳамма аксиомалари ўз кучини сақлайди.

Ясалмоқда бўлган модельда *„конгруэнтлик“* терминига тегишли маъно бериш мақсадида, қуйидагича иш кўрамиз: конструкциямизнинг Евклид геометрияси объектларидан иборатлигини эътиборга олиб, UV ватарнинг четларини U, V блан ишоралаб қўямиз (чизма 97). AB кесманинг боши A ва охири B, UV кесмани қайси нисбатларда бўлса, ўша нисбатларни аниқлаб қўямиз: $\frac{UB}{BV}$ биринчи нисбат; $\frac{UA}{AV}$ иккинчи нисбат.

Бу нисбатлар нисбатини тузайлик: $\frac{UB}{BV} \cdot \frac{UA}{AV}$ бу нисбат ҳар вақт мусбат, чунки A ва B нуқталар UV кесмани ички равишда бўлади. Бу нисбатнинг муайян бир асосга нисбатан *логарифмини* A ва B нуқталар орасидаги *„масофа“* деб атаيمиз. „Масштаб бирлигининг“ ихтиёрий равишда танлаб олинши имкониятини билдириш мақсадида, биз κ кўпайтучини ҳам кири-



Чизма 97.

тамиз. Бу „масофа“ кўпинча *„ғайривеклид масофа“* дейлади:

$$\delta_{AB} = \kappa \cdot \ln \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right).$$

Бу „масофанинг“ ишорасини AB кесманинг UV „тўғри чизиқдаги“ йўналиши аниқлайди. Бу „масофанинг“ абсолют қиймати, кесманинг *„узунлиги“*, ёки унинг *„ғайривеклид узунлиги“* дейлади*.

Агар AB ва CD кесмаларнинг *„узунликлари“* тенг бўлса, уларни бир-бирига *„конгруэнт“* деб ҳисоблашни шарт қилиб оламиз.

Агар $|\delta_{AB}| = |\delta_{CD}|$ бўлса, $AB = CD$.

Моделимизда кесмаларга нисбатан *„конгруэнтлик“* терминига берилган конкрет маънонинг танлаб олиниши, ўнғайми-ўнғайсизмилиги, конгруэнтлик аксиомаларини текшириб утиш натижасида билинади.

III аксиомани текшираимиз: $U'V'$ тўғри чизиқда (U' дан V' га борган) белгили йўналишда шундай B' „нуқтани“ топш керакки, $AB \equiv A'B'$ бўлсин; δ_{AB} — маълум (чизма 98).

$$\text{Ушбу } \delta_{AB} = \kappa \cdot \ln \left(\frac{U'B'}{B'V'} : \frac{U'A'}{A'V'} \right)$$

Чизма 98.

тенгламадан номаълум нисбат $\frac{U'B'}{B'V'}$ ни топамиз; демек, шунинг блан, B' нуқтанинг $U'V'$ тўғри чизиқдаги изланган вазиятини ҳам топамиз. Кесмаларни бирор нуқтадан бошлаб қўйиб *имкониятининг* мавжудлиги тайинланди.

Иккинчи (яъни III₂) аксиоманинг бажарилиши равшан, чунки моделимизда $A'B' \equiv AB$ ва $A''B'' \equiv AB$ бўлса, у чоғда $|\delta_{A'B'}| = |\delta_{AB}|$ ва $|\delta_{A''B''}| = |\delta_{AB}|$, демек, $|\delta_{A'B'}| = |\delta_{A''B''}|$, яъни $A'B' \equiv A''B''$. Учинчи аксиоманинг (III₃) бажарилишини текшириб кўриш учун, икки нуқта орасидаги *„масофа“*нинг *„аддитивлик“* хоссага эгаллигини исбот этамиз, яъни агар $AB + BC = AC$ бўлса (чизма 97), у чоғда $\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{AC}$.

$$\delta_{AB} = \kappa \cdot \ln \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right); \delta_{BC} = \kappa \cdot \ln \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right),$$

$$\text{демак: } \delta_{AB} + \delta_{BC} = \kappa \cdot \ln \left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right) + \kappa \cdot \ln \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right) =$$

$$= \kappa \cdot \ln \left[\left(\frac{UB}{BV} : \frac{UA}{AV} \right) \cdot \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UB}{BV} \right) \right] = \kappa \cdot \ln \left(\frac{UC}{CV} : \frac{UA}{AV} \right) = \delta_{AC}.$$

* Конгруэнтлик аксиомалари, кесмалар ва бурчакларни ўлчаш масаласини кўзда тутмаслигини этиборга олиш керак.

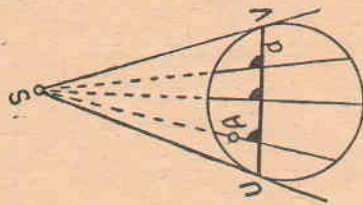
Исбот қилинган хосса йўналишли ҳарқандай кесмалар учун кучга эгадир.

$\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{AC}$ тенглик бланифодаланган хоссадан, учинчи (III,₃) аксиоманинг бажарилиши келиб чиқади.

Қуйидагига э'тибор қилайлик: A нуқтадан AV томонга қараб "гайривеклид тенг" қадамлар блан "юрсак", ҳечвақт V нуқтага етолмаймиз, чунки "гайривеклид масофа" AV — бениҳоя каттадир. Ҳақиқатан, V нуқтага интилучи B нуқта учун $\frac{UB}{BV}$ нисбат чексизликка интилади, $\frac{UA}{AV}$ нисбат эса — ўзгармас; демак $\delta_{AB} \rightarrow \infty$.

Ўзгармас; демак $\delta_{AB} \rightarrow \infty$.

Та қидланган бу ахвол, *Архимед аксиомасининг* (V_1) ҳам *басқарилишига* имконият беради. А дан V га қараб яқинлаша-
борган сари, худди уфқ (горизонт) томонга
узоқлашаборган сари кичиклашиб боручи
поездга ўхшаш, "ғайриевклид тенг" қадам-
лар ҳам "евклидий камаяди". Поезднинг *ас-*
ли узунлиги ўзгармасдан, лекин унинг *ку-*
ринган узунлиги камаёборгандек *қўринади*.



Чизма 99.

нинг кесилган S нуқтасини A блан туташтирамиз. Маркази S дан $йборат$ даста ватарларининг ҳаммаси UV туғри чи-
зиққа "гайрцевскийд перпендикулярлар" бўлади.

Лобачевскийнинг ясалган модельда тасвирланган текис гео-
метрия (планиметрия)си Бельтрами харитаси дййлади.

Евклид геометрияси нуқта назаридан қаратганда, Бельтрами харитасида *узунликлар* ва *бурчаклар сақланмайди*, яъни «гайриевклид тенг» кесма ва бурчакларга евклидий тенг кесма ва бурчаклар мос келмайди. Лекин бундан истисно ҳоллар ҳам бор, баъзи ҳолларда бу хосса сақланади. Бельтрами доира-расининг марказий симметрияга эгаллиги сабабли, *учлари айлана марказида* бўлган ва бир-бирига тенг бурчаклар, аслида (яъни Евклид текислигида) ўзаро тенг бурчакларни тасвирлайди, ва аксинча, аслида тенг бўлган бурчаклар, тасвирда ҳосил қилинган бурчакларга тенгдир. Доира *марказидан чиқиб*, бир-бирига тенг бўлган кесмалар ҳақиқатда ҳам тенг кесмаларни тасвирлайди. Диаметр блан ватар орасидаги бурчак тўғри бурчаклан иборат бўлса, унга ҳақиқатда (яъни Евклид текислигида) яна тўғри бурчак мос келади, чунки доира (Бельт-

110

рами харитаси) ўзининг исталган диаметрига нисбатан симметрикдир (чизма 100). *Бурчакларнинг* ана шу қисман бузилмаслик хосасидан параллеллик бурчаги учун *Лобачевский* формуласини чиқаришда фойдаланамиз.

Параллеллик аксиомасига ўтайлик. Бельтрами харитасида M нуктадан $U'V'$ тўғри чизикқа (чизма 97) шундай тўғри

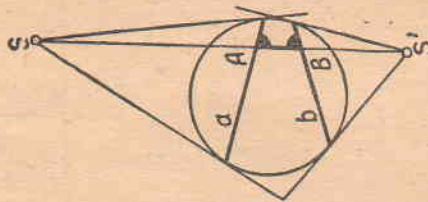


Чизма 100.

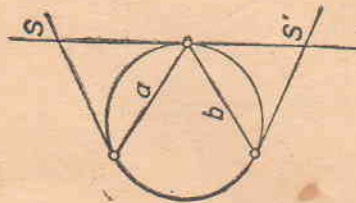
Йўқдир. Ясалган моделида Лобачевский аксиомаси амалга ош-
ди. Бельтрами доирасида, ёки Бельтрами сферасида (фазовий
геометрия учун) Лобачевский геометрияси амалга ошди.

Узлуksизил аксиомалари (V, 1—2), ёки уларга эквивалент Дедекинд аксиомаси, буерда бажарилгиди, бунинг исботига тух-тамаймиз.

Лобачевский геометриясининг ба'зи фактларига тўхталиб ўтайлик. 101-нчи қизмада ўтапараллел бўлган a ва b туғри чи- зикларга умумий (AB)



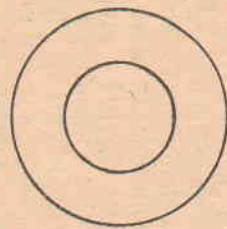
Чызма 101.



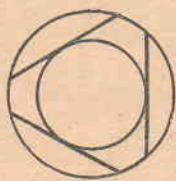
Чызма 102.

таи назаридан узаро тенг кесмалар, *Лобачевский геометрияси* ма'носиди ҳам тенгдир; буни исботлаш осон; буни юқориди *ма'носиди* ҳам утган эдик. 103-нчи қизмада "*айлана*" тасвирланган. Бельтрами хариғасининг бошқа жойида "айлананинг" тасвири (образ)и) анча бузилади. 104 ва 105-нчи қизмалар *Лобачевский геометриясида атрофига ташқи учбурчак қизиб*

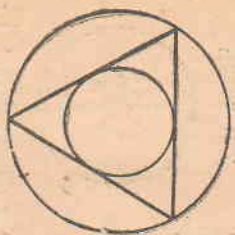
бўлмайдиган „айланалар“ нинг борлигини кўрсатади. 105-нчи чизмада бурчакларнинг учлови ҳам нульга тенг учбурчак тасвирланган. Тўғри чизиқларнинг бир-бирига нисбатан жойлашишида содир бўлиши мумкин бўлган юқоридаги ҳолларни ҳам харитадан кўриш мумкин.



Чизма 103.



Чизма 104.



Чизма 105.

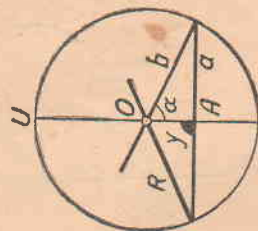
Харитадан „фойдаланиш“ га мисол тариқасида Лобачевский формуласини чиқарамиз.

Узунлиги x га тенг OA кесмага параллеллик бурчаги $\alpha = \Pi(x)$ тўғри келадн деб фараз этайлик (чизма 106). Бельтрами



Чизма 106.

харитасида (чизма 107) ўзаро параллел a, b тўғри чизиқлар a ва b ватарлар блан тасвирланади; A тўғри бурчак (чизма 106), тўғри бурчак A блан тасвирланади (чизма 107). $\alpha = \Pi(x)$ бурчакнинг (чизма 106) катталиги ўзгармайди (чизма 107). Доира радиуси ва OA кесманинг евклидий узунликлари R ва u бўлсин. OA кесманинг *гайри-евклид* x узунлиги ушбу формуладан аниқланади:



Чизма 107.

$$x = \delta_{AB} = k \cdot \ln \left(\frac{UA}{AV} : \frac{VO}{OV} \right) = k \cdot \ln \frac{R+u}{R-u}.$$

чунки $\frac{VO}{OV} = \frac{R}{R} = 1$ ва $AU=R+u$; $AV=R-u$.

Булардан ташқари, харитада евклидий узунликлар ва бурчаклар $u = R \cdot \cos \alpha$ муносабат блан боғлангандир, демак,

$$\frac{R+u}{R-u} = \frac{R+R \cos \alpha}{R-R \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Шундай қилиб, $x = k \cdot \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$,

$$\text{ёки } \ln \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{x}{k},$$

$$\text{бундан } \operatorname{tg} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}.$$

Ана шу — Лобачевскийнинг машҳур формуласидир*.

Лобачевский геометрияси, баъзи асарларда Бельтрами—Клейн интерпретацияси асосида, Евклид геометриясининг во-сигалари блан баён қилинади.

§ 45. Лобачевский планиметриясига Пуанкаре томонидан берилган интерпретация.

Лобачевский планиметриясининг энди биз иккинчи хил интерпретациясини кўрсатиб ўтамиз — яъни унинг иккинчи „харитасини“** тузамиз. Бу интерпретация Евклид текислигида Евклид геометриясининг воситалари блан амал-га оширилиб, U Пуанкаре томонидан кўрсатилган эди. Модель қуйидагича тайёрланади. Оддий Евклид текислигида Ox тўғри чизиқни ўтказайлик. Асо-сий объектлар категориялари қуйидагича танланиб олинган бўлсин: „нуқта-



Чизма 108.

лар“ юқори яримтекисликдаги оддий нуқталар. Ox тўғри чизиқнинг ўзига ва ости яримтекислик нуқталари асосий объектлар категориялари таркибига кирмайди; „тўғри чизиқлар“ — маркалари Ox тўғри чизиқдаги яримайлана-лардан ва Ox га тик нурлардан иборат бўлсин (чизма 108). „Текислик“ ва-

* Тригонометрик функциялардан фойдаланишда улар соф аналитик ра-вишда киритилган, яъни уларнинг евклидий (ёки бошқа) геометрияга дохли йўқ деб фараз этиш мумкин. Масалан, улар қаторлар воситаси блан берилган дейиш мумкин.

$$\sin x = \frac{x^3}{1!} - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!} - \frac{x^9}{7!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots;$$

ёки бу таъриф ўрнига, уларни $d^2y/dx^2 + y = 0$ дифференциал тенгламанинг „бош-ланғич шартлар“ ушбу шартларни қаноатлантиручи ечилишлари сифатида таърифлаш мумкин: синус учун, $x = x_0 = 0$ бўлса, $y = y_0 = 0$; $y' = y'_0 = 1$, ва косинус учун $x = x_0 = 0$ бўлса, $y = y_0 = 1$, $y' = y'_0 = 0$.

** „Харита“ терминининг ишлатилишига асос ҳам бор — Лобачевский геометриясининг моделини тузиш, географияда харита тузиш масаласини эслатади (таржимон).

зифасини юқори яримтексислик бажарсин. „Қарашли“ ва „орасида“ терминларини одатдагича тушунамиз.

109, 110-нчи чизмалар биринчи группанинг аввалги учта аксиомасининг (1, 1—3) бажарилишини кўрсатади. 111, 112, 113-нчи чизмалар тартиб аксиомаларининг (II, 1—4) амалга ошишини далиллайди.



Чизма 110.

Чизма 111.

Кесмаларнинг „конгруэнт бўлиш“ тушунчасини киритиш учун, аввал A ва B нуқталар орасидаги „масофа“ тушунчасини қуйидагича киритамиз:



Чизма 112.

Чизма 113.

агар икки A, B „нуқта“ Пуанкаре харитасида яримлайна блан тасвирланган „тўғри чизикда“ ётса, у чоғда уларнинг орасидаги масофа деб ушбу

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} \right)$$

формуладан аниқланучи сонни айтади, ва бу „нуқталар“ Пуанкаре харитасида нурдан иборат „тўғри чизикда“ ётса, масофа деб ушбу

$$\delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{y_2}{y_1}$$

формула бўйича аниқланучи сонни атаймиз (чизма 114). Бу икки формуладаги φ_1, φ_2 бурчаклар ва y_1, y_2 ординаталар оддий евклидий ма'нода эгандир, бу 114-нчи чизмада яққол кўриниб турипти; ($0 < \varphi < \pi$) ва ($y > 0$). „Масофанинг“ ишораси „кесманинг“ „тўғри чизикдаги“ йўналишига боғлиқ. k кўпайтувчи масштаб бирлигини ихтиёрый равишда танаб олишга имконият беради.

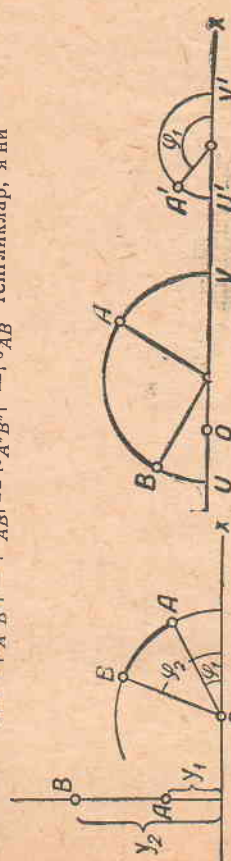
Энди конгруэнтлик тушунчасига ўтамиз. Агар A блан B орасидаги „масофа“нинг абсолют қиймати, C блан D орасидаги „масофанинг“ абсолют қийматига тенг бўлса, AB „кесма“ CD „кесмага“ конгруэнт деб айтамыз, я'ни агар

$$|\delta_{AB}| = |\delta_{CD}| \text{ бўлса, у чоғда } AB \equiv CD.$$

Энди конгруэнтлик аксиомаларининг биринчисини текширамиз (III, 1): U' V' „тўғри чизикдаги“ белгила йўналишда (U' дан V' йўналишида) шундай B', „нуқтани“ топиш керакки, A'B' $\equiv$ AB бўлсин, δ_{AB} ма'лум ҳисобланади (чизма 115).

$$\text{Ушбу } \delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{y_2}{y_1} \text{ (ёки } \delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{y_2}{y_1}) \text{ тенгламадан нома'лум бўлган } \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \text{ (ёки } y_2) \text{ ни ва шунинг блан } \varphi_2 \text{ бурчак (ёки } y_2 \text{ ордината) блан аниқланучи } B_1 \text{ „нуқтани“ ҳам аниқлаймиз. Демак III аксиома — бажарилади. Бу группанинг иккинчи аксиомаси ҳам бажарилди: } A'B' \equiv AB \text{ ва } A'B'' \equiv AB \text{ дан: } |\delta_{A'B'}| = |\delta_{AB}| \text{ ва } |\delta_{A'B''}| = |\delta_{AB}| \text{ тенгликлар, я'ни}$$

ган $\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}$ (ёки y_2) ни ва шунинг блан φ_2 бурчак (ёки y_2 ордината) блан аниқланучи B_1 „нуқтани“ ҳам аниқлаймиз. Демак III аксиома — бажарилади. Бу группанинг иккинчи аксиомаси ҳам бажарилди: $A'B' \equiv AB$ ва $A'B'' \equiv AB$ дан: $|\delta_{A'B'}| = |\delta_{AB}|$ ва $|\delta_{A'B''}| = |\delta_{AB}|$ тенгликлар, я'ни



Чизма 114.

Чизма 115.

$|\delta_{A'B'}| = |\delta_{A'B''}|$ тенглик келиб чиқади, демак: $A'B' \equiv A'B''$. Пуанкаре моделида III аксиоманинг бажарилиши кўрсатилди. Энди, $AB + BC \equiv AC$ дан $\delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{AC}$ нинг келиб чиқишини исбот қиламиз.

Ҳақиқатан, та'рифга кўра: $\delta_{AB} = k \cdot \ln \frac{y_2}{y_1}$; $\delta_{BC} = k \cdot \ln \frac{y_3}{y_2}$; демак:

$$\delta_{AB} + \delta_{BC} = k \cdot \ln \frac{y_2}{y_1} + k \cdot \ln \frac{y_3}{y_2} = k \cdot \ln \frac{y_3}{y_1} = \delta_{AC}$$

(чизма 116). Исбот қилинган аддитивлик хоссаси исталган йўналишдаги „кесмалар“ учун ҳам тўғридир. Харитада нур устида ётувчи кесмалар блан тасвирланган „кесмалар“ учун ҳам исбот шундай ўтказилади.

Аддитивлик хоссасидан учинчи (III, 3) аксиоманинг бажарилиши келиб чиқади. Агар A „нуқта“ U нуқтага итилса ($\varphi_1 \rightarrow 0$), у чоғда „масофа“ $AB \rightarrow \infty$; шу сн. гари, B нуқта V га ($\varphi_2 \rightarrow \pi$) итилса, $\delta_{AB} \rightarrow \infty$. Демак UV тўғри чизикнинг „узунлиги“ чегараланмаган. Бундан ташқари, худди Бельтрами харитасидагидек, Архимед аксиомасининг (V, 1) буерда ҳам бажарилиши кўрсатилади.

Бурчаклар учун „конгруэнтлик“ тушунчасининг ма'носини аниқлайлик. Уни аниқлаш жуда осон. Бурчаклар одатдаги ма'нода бир-бирига конгруэнт бўлса (евклидий ма'нода), у чоғда бу бурчаклар гайрисевклид ма'нода

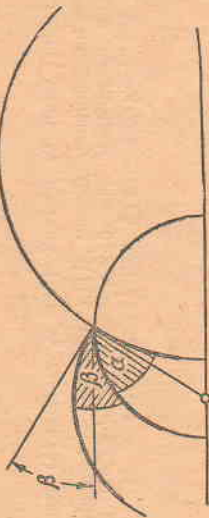


Чизма 116.

конгруэнтдир. Пуанкаре харитаси, Лобачевский текислигининг Евклид ярим-текислигиндэги ($y > 0$) конформ тасвирини берди (конформлик — бурчаклар-нинг бузилмаслигини билдирди). Бурчаклар учун конгруэнтлик аксиомалари-нинг бажарилишини текширамыз.

нинг бақарилишини текширмайсиз.

Агар берилган нурда белгили нукта ва бу нурдан белгили тараф олинган бўлса, учи шу нуктада бўлиб, ўзи кўрсатилган тарафда ётучи ва берилган бурчакка тенг фақат битта бурчак яшаш мумкин (III, 4); бу да'вомизнинг тўғрилиги харитада бурчакларнинг ёвклидий ма'нога эга эканлигидан келиб чиқади. Бурчакларнинг йиғиндисини яшаш мисоли 117-нчи чизмада келтирилган.

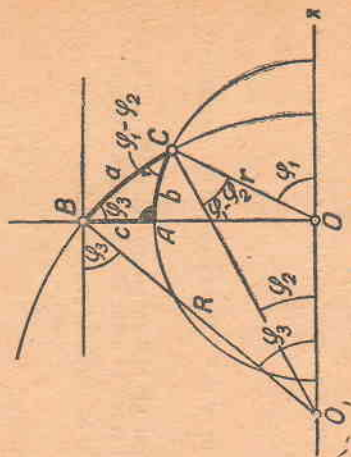


Чизма 117.

дир, чунки бу аксиомада кесмаларнинг "конгруэнтлиги" бурчакларнинг "конгруэнтлиги"га мувофиқдир. Бу аксиоманинг кучга эга бўли-
шини текшириш мақсадида биз
"харита блан ишлай" усули билан ва Ло-
бачевский геометриясининг ан-
ча янги фактлари блан қисман,
Лобачевский тригонометрия-
сининг элементлари блан та-
вирлаб чиқамиз.

“Учбурчак”нинг икки “то-
мони” ва улар орасидаги “бур-
чак”, бу учбурчакдаги бошқа
элементларни ҳам аниқлаши-
ни исботлаймиз.

Бу нисбонни аввал Пуанкаре харитасида A бурчати тўғри бурчакдан иборат ABC унбурчак учун ўтказамиз (чизма 118). Буерда AB катет — тўғри чизик бекмасидан, ва CB гипотенуза катет AC катет эса — марказари O_1 O ва $евклидий радиуслари$ мос равишда R , r иборат афналлар сўларини



Чизма 118.

бўлсин деб фараз қилишимиз мумкин.

9-1

бунда $\varphi_3 = \angle BO_1O$; $\varphi_1 = \angle xOC$; $\varphi_2 = \angle CO_1O$; $\varphi_1 - \varphi_2 = \angle OCO_1$. Ғайриёв-

$$c = k \cdot \ln \frac{OB}{r} \quad (a)$$

$$b = k \cdot \ln \frac{\frac{\pi}{4}}{\lg \frac{\varphi_1}{2}} = -k \cdot \ln \lg \frac{\varphi_1}{2} \quad (\beta)$$

$$a = k \cdot \ln \frac{\frac{\varphi_3}{\lg 2}}{\frac{\varphi_2}{\lg 2}}.$$

a, b, c орасидаги боғланишни, я'ни b, c катетлар блан a гипотенуза орасидаги боғланишни ("Пифагорнинг гайриевклид теоремасини") топайдик.

$$(\beta) \text{ \textit{дан:}} \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} = e; \quad -\frac{b}{k} = e; \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = e^k; \quad \frac{b}{k} + e = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} + \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2} \right) =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_1}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1}{\sin \varphi_1}.$$

Құрсақтичли e ва e функциялардан тузилган ушбу $\frac{b}{\kappa} - \frac{b}{\kappa} \frac{b}{\kappa + e} \frac{b}{\kappa}$ функция, $\frac{b}{\kappa}$ аргументнинг *гиперболик косинуси* дейилади ва шундай белгиланади:

$$\frac{b}{e + e} - \frac{b}{\kappa} = \text{ch } \frac{b}{\kappa},$$

чап томондаги касрнинг суратидаги кўрсаткичли функцияларни қаторга ёйсақ

$$\text{ch } \frac{b}{\kappa} = 1 + \frac{\left(\frac{b}{\kappa}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{b}{\kappa}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{b}{\kappa}\right)^6}{6!} + \dots \quad (\varepsilon)$$

***b* катет учун шۇни ҳосил қиламиз:**

$$\text{ch } \frac{b}{k} = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Энди с катетга ўтайлик. (α) дан:

$$\frac{OB}{r} = e^{\frac{c}{\kappa}}; \quad \frac{r}{OB} = e^{-\frac{c}{\kappa}} + \frac{c}{e\kappa}; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{OB}{r} + \frac{r}{OB} \right),$$

$$\text{ёки ch } \frac{c}{k} = \frac{OB^2 + r^2}{2 \cdot OB \cdot r}.$$

Аммо *харитадаги* O_1OV учбурчакдан Пифагорнинг евклидий теорема-
сига кўра:

$$OB_2^2 = R^2 - OD_1^2 = R^2 - [R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

бу тенгликда OO_1^2 , O_1SO учбурчакдан косинусларнинг евклидий теорема-
сига асосланиб ҳисобланган (қизма 118).

$$OB^2 = -r^2 + 2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2); \text{ бундан}$$

$$OB^2 + r^2 = 2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Шундай қилиб;

$$\operatorname{ch} \frac{c}{\kappa} = \frac{2Rr \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{2 \cdot OB \cdot r} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\frac{(OB)}{R}},$$

аммо O_1OB учбурчакдан: $\frac{OB}{R} = \sin \varphi_3$,

шу сабабли, гайриевклид узунлиги c га тенг катет учун:

$$\operatorname{ch} \frac{c}{\kappa} = \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_3} \quad (\alpha').$$

Нихоят, BC гипотенузанинг гайриевклид узунлиги a нинг ифодасини шаклан узгартамиз:

(γ') дан бирин-кетин қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2}} &= e; \quad \frac{a}{\kappa} \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2} - \frac{a}{\kappa} \frac{a}{\kappa} = \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_2}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_3}{2}}{2}, \\ \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2}} - 1 \right) + \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2}} - 1 \right) &= \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\varphi_3}{2}} - 2, \\ \text{ёки } \operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi_3}{2}}. \end{aligned}$$

Ўнг томоннинг сурат ва махражини $\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} \cos^2 \frac{\varphi_3}{2}$ кўпайтмага кўпайтирамиз:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} &= 2 \cdot \frac{\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} + \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - 2 \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_3}{2}}{2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3}, \\ \text{ёки } \frac{1 + \cos \varphi_3}{2} + \frac{1 + \cos \varphi_2}{2} - \frac{1 + \cos \varphi_2}{2} \cdot \frac{1 + \cos \varphi_3}{2} &= \frac{2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_3}{\sin \varphi_2 \sin \varphi_3}, \\ \operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} &= 2 \cdot \frac{\sin \varphi_2 \sin \varphi_3}{\sin \varphi_2 \sin \varphi_3}. \end{aligned} \quad (\gamma')$$

бу формулани соддалаштирсак, гипотенуза учун формула толамиз:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} = \frac{1 - \cos \varphi_2 \cdot \cos \varphi_3}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3}.$$

Тўғрибурчакли BAC учбурчак томонларининг гайриевклид a, b, c узунликларини *харитадаги* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ бурчакларнинг функциялари орқали ифодаладик. Энди бу бурчаклар орасидаги боғланишни ва бу боғланишга асосланиб, гайриевклид a, b, c узунликлар орасидаги боғланишни толамиз. Синусларнинг евклидий теоремасига асосан O_1CO учбурчакдан (қизма 118):

$$\frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1} = \frac{O_1O}{O_1C} = \frac{O_1O}{R}.$$

Аммо O_1OB учбурчакдан: $\frac{O_1O}{R} = \cos \varphi_3$ десмак:

$$\cos \varphi_3 = \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1}.$$

$\cos \varphi_3$ минг бу ифодасини (γ') га қўямиз:

$$\frac{a}{\kappa} = \frac{1 - \cos \varphi_2 \cdot \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_1}}{\sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3} = \frac{\sin \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cdot (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} &= \frac{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3}, \\ \operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} &= \frac{\sin \varphi_1 \cdot \sin^2 \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_2}{\sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2 \cdot \sin \varphi_3}, \end{aligned}$$

касрнинг сурат ва махражини $\sin \varphi_2$ га бўлсак:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} = \frac{1}{\sin \varphi_1} \cdot \frac{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\sin \varphi_3}.$$

Энди (β') ва (α') боғланишларни эътиборга олсак, гайриевклид *Пифагор теоремаси* ни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{ch} \frac{a}{\kappa} = \operatorname{ch} \frac{b}{\kappa} \cdot \operatorname{ch} \frac{c}{\kappa}. \quad (1)$$

Кўпинча $k=1$ фараз этиб, белгили масштаб бирлиги танлаб олинади; бу ҳолда теорема шундай ўқилади:
Гипотенузанинг гиперболик косинуси, катетлар гиперболик косинусларининг кўпайтмасига тенгдир.

Евклидий Пифагор теоремасининг гайриевклид Пифагор теоремаси учун $k \rightarrow \infty$ даги хусусий ҳол эканини буерда кўрсатайлик.

Гиперболик косинусларни (ε) формула бўйича қаторларга ёйиб чиқамиз; у чоғда (1) формула ушбу шаклни олади:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{a}{k}\right)^4}{4!} + \dots &= \left(1 + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{b}{k}\right)^4}{4!} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{c}{k}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{c}{k}\right)^4}{4!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Қавсларни очамиз ва икки томонни ҳам $2k^2$ га кўпайтамиз:

$$a^4 + 12k^2 + \dots = b^4 + c^4 + \frac{b^4 + c^4 + 2b^2c^2}{12k^2} + \dots \quad (A)$$

бу тенгликда нуқталар қўйиб ёзилиб чиқилмаган барча касрларнинг махражларида k^2 нинг тенгишли даражалари бордир. $k \rightarrow \infty$ да лимитга ўтсак, Пифагорнинг одатдаги теоремасини ҳосил қиламиз:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Бу ҳулосага бошқа муҳокамалар юргизиб келиш ҳам мумкин. Ўзгармас k нинг қиймати муайян бир сонга тенг, деб юқорида ёзилган (A) тенгликда учбурчак томонлари камайборади десак ва у тенгликда тўртинчи ва ундан юқори даражали ҳадларни ташласак, ушбу ҳулосага келамиз: *Лобачевский теңлигинда чексиз кичик учбурчак учун Пифагор теоремасини қўллаш мумкин* (юқори даражали чексиз кичик микролар ташланса).

Пифагор теоремасининг ($a^2 = b^2 + c^2$) Евклид постулатига эквивалентлигини тушуниш энди осон.

(A) формулада φ_3 ўрнига $\angle B$ ва $\varphi_1 - \varphi_2$ ўрнига $\angle C$ қўйиб, (β') формулага кўра $\frac{1}{\sin \varphi_1} \frac{b}{c}$ ўрнига $\operatorname{ch} \frac{b}{k}$ ни қўйсак, янги тенглик келиб чиқади:

$$\cos B = \operatorname{ch} \frac{b}{k} \cdot \sin C,$$

шунга ўхшаш

$$\cos C = \operatorname{ch} \frac{c}{k} \cdot \sin B.$$

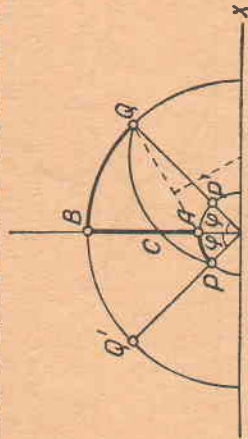
Энли Лобачевский геометриясининг ўзига хос бўлган баъзи теоремаларга ўтайлик.

3. Учбурчак бурчакларининг йиғиндисини $2d$ дан кичикдир. Бу факт 125-нчи чизмада тушунтирилган ва буерда марказлари бир тўғри чизикда ётган айланаларга онд "япти" теорема ҳосил бўлади.

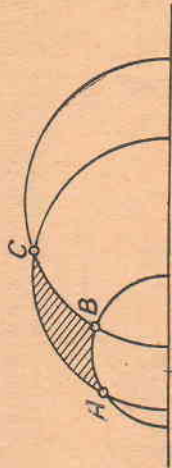
4. Утапараллел икки a, b тўғри чизикнинг фақат битта умумий перпендикуляри мавжуддир.

Бу теорема, умумий нуқталари бўлмаган маълум икки айлана блан ортогонал ҳолда кесишувчи ва маркази бу айланалар марказларини туташтирувчи тўғри чизикда ётувчи фақат, битта айлананинг борлигини билдиради (чизма 126).

Яшаш ишини шундай олиб борамиз: a, b айланаларга умумий AB уринма ўтказиб, унинг (C) ўртасидан Ox га перпендикуляр туширамиз, яъни берилган икки айлананинг радикал ўқини ясаймиз. O' ни марказ қилиб олиб,

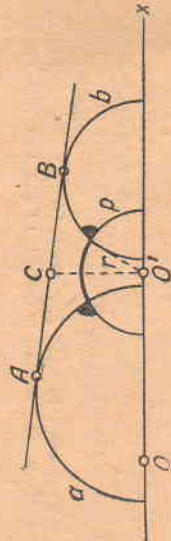


Чизма 124.



Чизма 125.

радиуси r , O' дан берилган икки айланага ўтказилган уринма узунлигига тенг айлана чизамиз. Ана шу айлана, олинган икки ўтапараллел тўғри чизикларга ўтказилган умумий перпендикулярнинг хариталаги тасвиридир.



Чизма 126.

5. Берилган ўткир бурчак қандай бўлмасин, харвақт шундай тўғри чизик топилдики, у шу бурчакнинг бир томонига перпендикуляр ва иккинчи томонига параллелдир.

Берилган ўткир бурчак α ва унинг томонлари a, b тўғри чизиклардан иборат бўлсин.

Харитада яшашни шундай бажарамиз: a айлана блан U нуқтанинг радикал ўқини ясаб, унинг ўртасидан Ox га перпендикуляр туширамиз ва унинг асоси O' нуқтани марказ қилиб $O'U$ радиус блан p айлана ўтказамиз (чизма 127).

6. Эквидистантанинг ҳечқайси учта нуқтаси бир тўғри чизикда ётмайди (чизма 128).

Асоси $OABCD...$ дан иборат эквидистанта харитала $OA'B'C'D'...$ дан иборат тўғри чизик блан тасвирилади, чунки "тўғри чизикни" ушбу кесмалар ўзаро конгруентдир:

$$A'A \equiv BB' \equiv CC' \equiv DD' \equiv \dots$$

Умуман, Ox га оғма барча O_1G тўғри чизиклар эквидистантларни тасвирлайди, улар учун O_1S тўғри чизиклар асослар родини уйнайди. $A'B', C'$ дан



Чизма 127.

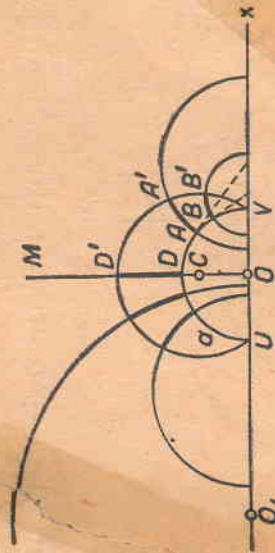
иборат ҳечқандай учта нуқта, маркази Ox да ётган битта айланада ёки Ox га перпендикуляр тўғри чизикда ётмайди.

7. Эквидистанта ўз асосига ўтказилган $(AA', BB', CC'...)$ перпендикулярлар блан ортогонал ҳолда кесишади (чизма 128).

Бу теоремадан исталган асосли эквидистантани яшаш учун фойдаланайлик. a айлана блан ортогонал ҳолда кесишувчи айланалар дастасини ясаймиз. Бу айланаларнинг марказлари Ox тўғри чизикда ётади (чизма 129). Бу дастанинг ҳамма айланалари битта умумий OM радикал ўққа эгадир; бу OM тўғри чизикнинг ўзиёки ҳам дастанинг айланаси деб қараш мумкин—унинг радиуси чексиз каттадир. Асоси a дан иборат эквидистантага яшаш учун, даста айланаларининг ҳаммаси блан ортогонал ҳолда кесишувчи чизикни топиш керак. Айланалар дасталари ва



Чизма 128.



Чизма 129.

боғламлари назариясидан маълумки, бу чизик, дастанинг радикал ўқига ётувчи деб ўталган U, V нуқталардан ўтиб, маркази дастанинг радикал ўқига ётувчи айланадан иборатдир.

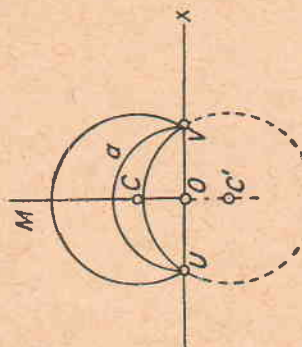
ОМ радиалалардан C (ёки C') нуқтагидан $R = CU = CV$ (ёки $R = C'U = C'V$) радиус билан айлананинг юзоридаги (остдаги) ёйини чизамиз. Асоса a дан иборат эквидистантанинг харитадаги тасвирини хосил қиламиз. Эквидистантанинг икки қисми a асосдан турли тарафда жойлашади. Шундай қилиб, Ox тўғри чизиқ билан тўғри бурчак остида кесилмайдиган айланалар ва тўғри чизиқлар, Пуанкаре харитасида эквидистанталарни тасвирлайди. $AA', BB', DD', \dots$ кесмалар "конгруэнтдир" (чизма 129).

Харитада айланаларга нимагининг мос келишини кўрайлик, я'ни уларнинг образларининг нимадан иборатлигини аён қилайлик. Бу мақсадда фақат айланаларга оид бўлган хоссадан фойдаланайлик.

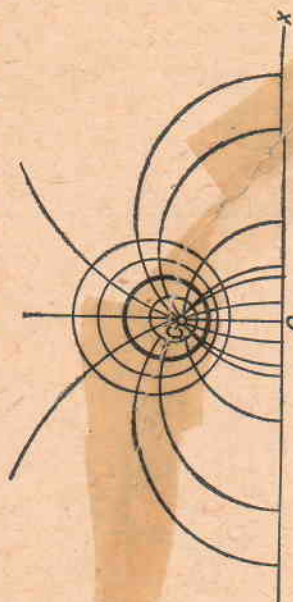
8. Айлана ўзининг марказларидан ўтувчи ҳамма тўғри чизиқлар билан ортогонал ҳолда кесилсади.

Харитада бу хосса қуйидагича инфодаланади: айлананинг образи шундай чизиқдирки, у марказлари Ox да ётувчи ва C нуқтадан "ўтувчи" айланалар билан ортогонал ҳолда кесилсади. Маълумки, дастасига қарши айланалар билан ортогонал "даста" билан ортогонал ҳолда кесилсади.

бундай чизиқ, "олинган даста айланаларига ортогонал" дастанинг айланаси.

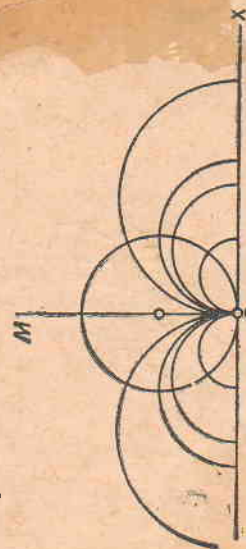


Чизма 130.



Чизма 131.

дан иборатдир. 131-нчи чизмада "маркази" C дан иборат "концентрлик айланалар" тасвирланган.

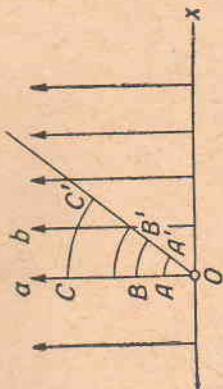


Чизма 132.

Шундай қилиб, устки яримтегисликда жойлашиб, Ox билан кесилмайдиган айланалар, Лобачевский "айланаларини" тасвирлайди. "Айлана" ни ясашни билиш муносабати билан бирга, "конгруэнт кесмаларини" исталган нуқтадан

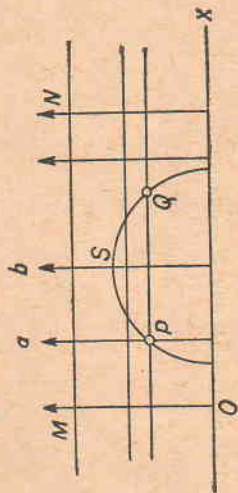
тадан исталган йўналишда қўябориш имконияти туғилди. "Марказ"нинг образи, образ марказидан иборат эмаслигини ҳам аслатиб ўтиш керак.

Праваридида қуйидагига эътибор қилайлик. Бирор йўналишда бир-бирига параллел бўлган тўғри чизиқларнинг ҳаммаси, я'ни Лобачевский тушунишига



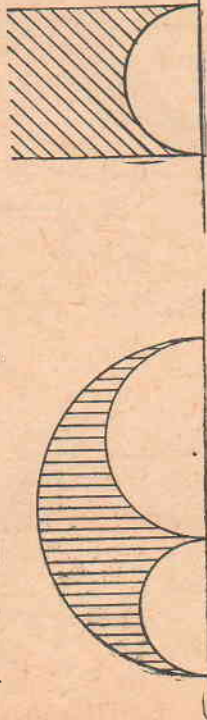
Чизма 133.

даги параллеллар дастасини ортогонал ҳолда кесуши чизиқни Лобачевский предел чизиқ деб атаган эди. 132-нчи чизмада предел чизиқ O нуқтада Ox га уринувчи айлана шаклида тасвирланган. O нуқтада кесилувчи яримайлана



Чизма 134.

лар параллеллар дастасини тасвирлайди. Предел чизиқ номининг берилишини тушуниш учун "айлананинг" образини, "марказининг" Ox га интилабориши билан, я'ни "чексизликка" интилабориши билан, кузатаборамиз (чизма 131). Ox



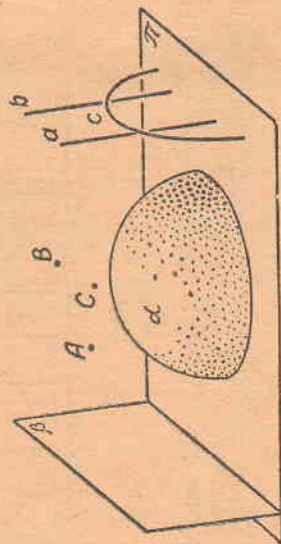
Чизма 135.

Чизма 136.

га ўтказилган перпендикулярлар билан тасвирланувчи "тўғри чизиқлар" ҳам параллеллар дастасига киради, чунки улар орасидаги бурчак нульга тенгдир. a ва b "тўғри чизиқларга" перпендикуляр. MN тўғри чизиқлар ҳам предел чизиқларни тасвирлайди (чизма 134). Масалан, PSQ , предел чизиқнинг юзорида қарб тўнқарилган "ватарини" тасвирлайди. 135 ва 136-нчи чизмаларда, "бурчаклари нульга тенг бўлган учбурчаклар" тасвирлангандир.

§ 46. Фазодаги Лобачевский геометриясига Пуанкаре томонидан берилган интерпретация.

Модельни ясаймиз. Одатдаги Евклид фазосини ва унда бундан бўён асосий текислик деб аталган бир текисликни олайлик. Текисликдан уйнай турган одатдаги евклидий нукталар модельдаги "нукталар" ролини ўйнайди деб фарз этайлик. Марказлари асосий текисликда ётиб, текисликларига унга перпендикуляр бўлган яримланаларга "тўғри чизмалар" номини

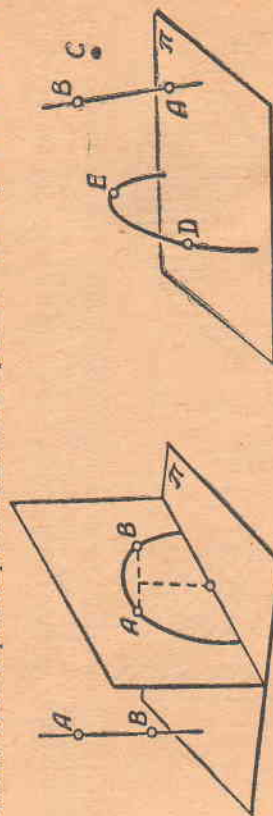


Чизма 137.

берамиз. Асосий текисликка перпендикуляр бўлган одатдаги тўғри чизиклар ҳам модельда "тўғри чизик" лар қаторига кириши. "Текисликлар", марказлари асосий текисликда ётган ўстки яримсфералар ва асосий текисликка тик ярим-текисликлардан иборат бўлиши (чизма 137).

Объектлар орасидаги асосий муносабатлар („қарашли“, „орасида“ ...) ода-
таги маънола олинган бўлсин.

Буриакларнинг конгруэнтлиги, бу интерпретацияда евклидий конгруэнтлик блан бирхилдир. Аксномаларнинг бажарилшини тек-



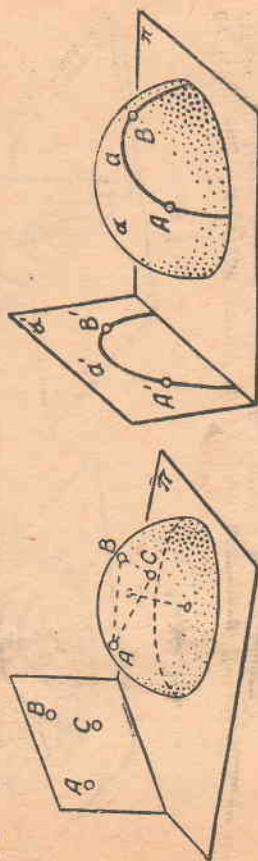
Чизма 138.

шириб кўрайлик. Евклид аксиомасидан бошқа Гильбертнинг ҳамма аксиомалари бажарилади, Евклид аксиомаси бажарилмай, бунда Лобачевский аксиомаси бажарилади.

Биринчи групп а аксиомалари. A, B нукталар орқали асосий текисликка тег текислик ўтказиб, A блан B орқали туғри чиққ ўтказиш- ва AB нинг ўртасидан AB нинг ўртасидан AB нинг ўртасидан перпендикулярни асосий текисликка давом эттирамиз; унинг асосий текислик диккулярни асосий текисликкача давом эттирамиз. Ана шу ари блан кесилган нуктасини марказ қилиб, ярамайидана чиқамиз. Ана шу ари йайдана A, B нукталар блан аниқдануни "туғри чиққидир". Демак биринчи аксиомаси оажарилган.

аксиома бажарилди. Бурда шу группанинг иккинчи аксиомасининг (I_2) ҳам бажарилиши кўринмоқдаир (чизма 138). Учинчи аксиома (I_3) — бажарилди (чизма 139).

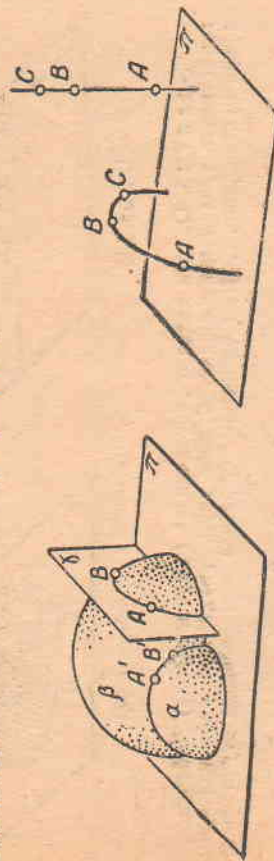
Бир "тўғри чизик" да ётмаган уч нукта "текишликни", яъни учта A, B, C нукталар ўгучи ва маркази асосий текишликда бўлган яримсферани аниқлайди. Демак, тўртинчи аксиома (I_4) ҳам бажарилади, бешинчи ва олтинчи (I_5, I_6) аксиомаларнинг бажарилиши равшан (140, 141-нчи чизмалар);



Цизма 140.

Чизма 141.

еттинчи аксиома (I_7) — агар икки текислиkning битта умумий нуқтаси mavjud бўлса, уларнинг камда яна битта умумий нуқтаси бордир (чизма 142). Саккинчи аксиома (I_8) — ёъ-ўзидан равшан (чизма 137). Иккинчи группа-



Чизма 142.

Чизма 143.

нинг биринчи, иккинчи, учинчи аксиомалари (II, 1—3) бажариллади—буларнинг ҳаммаси чизмага яққол кўринмоқда (чизма 143).

Паш аксиомасига ўтамиз.

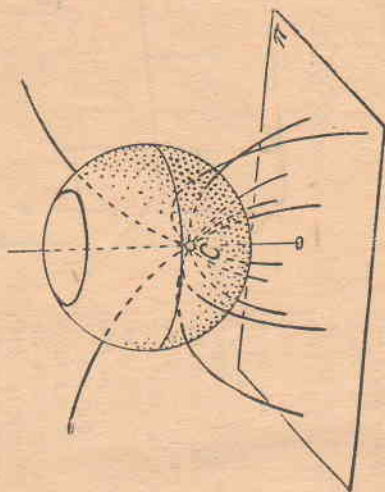
Агар "текислик", асосин текисликти тик ярмтектисликти блан тасвирлашан бўлса, унда Пуанкаренинг юқорида кўрилган интерпретацияси амалга онади (қизма 144). 145-нчи қизма, "тектислик" эримсферадан иборат бўлган ҳолга мос келлади.

мос келди.
Учунчи группа аксиомалари (Π_1-1) ҳам буерда баъжарилан; лекин уларга ва "конгрэнт кесмалар" тушунчасининг конкрет ма'носига тўх-
биз, учунчи маълумотлардан фойдаланиб, ўқучининг ўзи
талиб ўлтирмайиз. Олдиги маълумотлардан аксиомалари ҳам (IV_1-1-2) буерда
уларни текшириб кўрсин. Узулксызлик аксиомалари текширилган.

Параллел аксиомаси IV. Бу интерпретацияда Лобачевский аксиомаси амалга ошад. Агар "тексидагиз" асосий тексидика тик бўлса, у чоғда Лобачевский аксиомаси амалга ошад; бунг биз юқориде § 45 да ба-тафсил текшириб чиққан эдик (изма 146). "Тексидик" яримсфера блан тас-вирланган ҳолда (измаг 147) А ва С нуқта орқали асосий тексидика тик

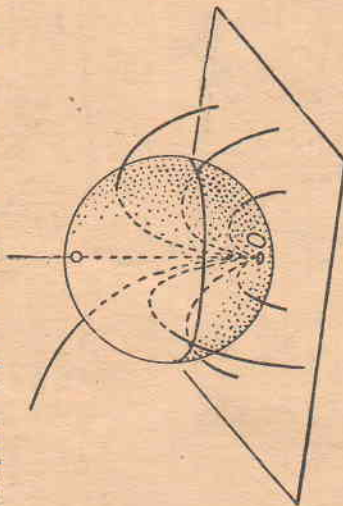
Теорема. *Предел сирта Евклид геометрияси амалга ошади, яъни бу геометриянинг теоремалари кучга эгадир.*

Теоремани исботлаш ва унинг маъносини англаш мақсадида, Лобачевскийга тақлид қилиб, қуйидаги терминологияни киритамиз.



Чизма 154.

Предел сирт блан ортогонал ҳолда кесинишчи параллеллар боғламидаги исталган тўғри чизиқни предел сиртининг ўқи деб атаймиз. Модельда (чизма 156) "тўғри чизиқлар" — асосий текисликка перпендикуляр бўлган $a, b, c, \dots$ нурулардан иборатдир (яъни нурулар блан тасвирланади). Стрелкалар параллеллик йўналишини кўрсатади. Σ ҳарфи блан белгиланган предел сиртининг боғламлиқ томони "юқорига" қаратилган (134-нчи чизма блан солиштиринг.)

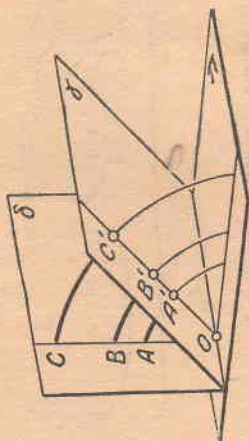


Чизма 155.

Предел сиртининг ўқи орқали ўтуши ҳарқандай текисликни бош текислик деб атаймиз. Бош текисликлар, 156-чизмада асосий текисликка перпендикуляр α яримтекисликлар блан тасвирланади. Бош текислик предел сирт блан предел чизиқ бўйича кесинади; бош текисликдан бошқа ҳарқандай кесуши текислик эса — предел сирт блан айлана бўйича кесинади. 156-нчи чизмада, бош "текислик" α блан кесиниш натижасида ҳосил бўлган кесим, "предел чизиқ" MN дан иборат бўлиб, бош "текислик" бўлмаган β текислик (чизма 157) блан кесинишдан ҳосил қилинган кесим PQR "айлана" дйр. PQR нинг "айлана"лиги шундан келиб чиқадики, уни (с) "сферанинг" β "текислик" блан кесиниш чизиғи деб қараш мумкин.

Узаро кесинишчи учта бош текислик, бир-бири блан йиғиндиси $2d$ га

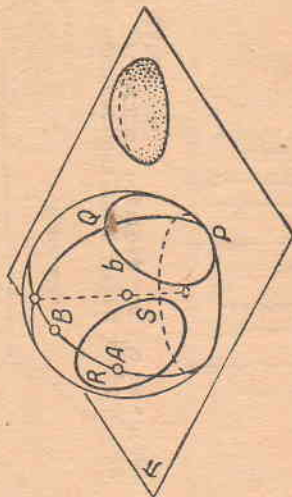
ган перпендикулярлар блан ортогонал равишда кесинади. 45-нчи параграфдаги каби, эквидистант сиртлар Пуанкаре харитасида, маркази асосий текисликда ётмаган ва ўзлари ўндан юқорида жойлашган сферик сегмент шаклида тасвирланади (чизма 153). Асосий текисликка перпендикуляр "те-



Чизма 152.

кисликлар", эквидистант сиртлар блан AB эквидистант чизиқлар, FbQ предел чизиқлар ва RS "айланалар" бўйича кесинади. Уларнинг эквидистант сиртларга уриниши ёки унинг блан сра кесинмаслиги ҳам мумкин.

"Сфералар" тасвири, 131-нчи чизмани CO атрофида айлангириш натижасида ҳосил қилинади. Харитадаги "сфералар" одатдаги сфералардан иборат бўлиб, улар "сфера" F "марказидан" ўтуши "тўғри чизиқлар" боғлами блан ортогонал равишда кесинади (чизма 154). "Предел сиртлар", асосий текисликка уриниши ва уриниш нуқтаси чиқариб ташланган сфералардан (чизма 155), ҳамда асосий текисликка параллел текисликлардан иборатдир. (чизма 156), яъни бундай сфералар блан текисликлар, "предел сиртлар" ни тасвирлайди.

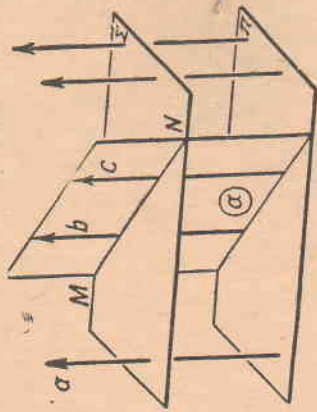


Чизма 153.

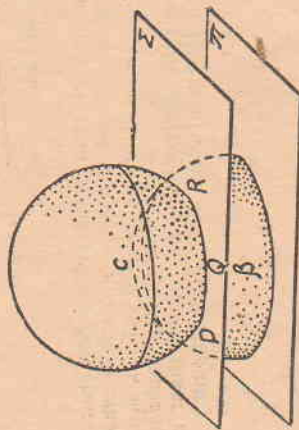
Бу ҳолларнинг ҳаммаси, планиметрияда қаралган тегишли ҳолларга ўхшашдир. 132 ва 134-нчи чизмаларни OI ўқ атрофида айлангириб, 155 ва 156-нчи чизмаларда келтирилган тасвирларни ҳосил қиламиз. Буерда биз чизмаларни айлангириш операциясини одатдаги маънода тушунаемиз. Чизмани (масалан, 156-нчинини) ҳосил қилгач, предел сирт, Лобачевский "параллелининг" боғлами блан ортогонал равишда кесинади, деган ҳулосага келиш қийин эмас. Предел сиртининг бу хосасини унинг тарифи сифатида қабул қилиш мумкин.

Лобачевский геометриясининг муҳим жуда қизик бир теоремасининг маъносини очиб ўқун энди ҳамма маълумотлар тайёрдир. Бу теоремани Лобачевский ўз тадқиқотларига асос қилиб қўйган эди [15], [16].

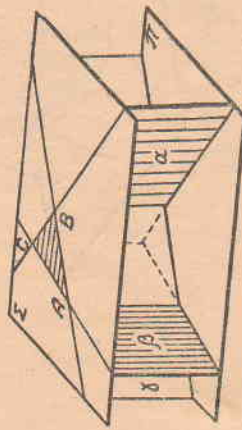
тег бурчаклар ташкил қилади. Бу "текисликлар" модельда асосий текисликка тик α , β , γ текисликлар билан тасвирланади (чизма 158). Бу текисликлар орасидаги ички иккиёқли бурчаклар йиғиндиси $2d$ га тенглик, чунки Пуанкаре моделида бурчаклар микдори сақланади. Буерда шунинг э'тиборга олиш керакки, α , β , γ дан иборат "бош текисликлар"нинг предел сирт Σ билан кесилган AB, BC, CA чизиклари предел чизиклардан иборатдир. Демак, $\triangle ABC$ — "эгри чизиклар" бўлиб, иккиёқли бурчакнинг чизикдан бурчагини яшаш учун, AC, CB, BA дан иборат "эгри чизиклар"га (тўғричиликни) уринмалар ўтказиш керак бўлади. Бу эса — бурчакларни ўзгартирмайди. Биз *предел сиртини учта бош текислик билан кесганда ҳосил қилинган ёйлардан иборат бўлган предел учбурчакнинг бурчаклари деб қараймиз* [16].



Чизма 156.



Чизма 157.



Чизма 158.

Бу муҳим фактдан Лобачевский буюк маҳорат билан фойдаланади — *предел сиртда юз берган евклидий геометрия аппаратида, ўзининг фазосини — Лобачевский фазосини ўрганиш мақсадида* фойдаланади.

Шунинг ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, предел сиртда ётиб, унинг бирор ўқига нисбатан симметрия бўлган фигуралар Гильберт аксиоматикаси ма'носида бир-бирига конгруэнтдир; лекин предел сиртни ағдариб, ўз устига *иккинчи томонга* билан қўйиш мумкин бўлмаса-да, уни *ўз-ўзи бўйлаб сиртга* нинига мазкур этиш мумкиндир.

САККИЗИНЧИ БОБ

АКСИОМАЛАРНИНГ БИРГАЛИГИ ВА ЭРКИНЛИГИ. ИЗОМОРФИЗМ

§ 48. Аксиомалар системасининг биргаллиги.

Ҳарбир аксиоматикага нисбатан қўйиладиган сўроқларнинг бири шундан иборат:

Аксиомаларнинг бу системасидан чиқарилган ҳулосалар занжирини ўзайтираборсак, уларнинг орасида бир-бирига зид келадиган натижалар чиқиши мумкин эмасми?

Зидлик деб аксиомалар системасидан келиб чиқадиган шундай ҳулосани, ёки натижани тушунамизки, уни инкор этиш оқибати ҳам, шу аксиомалар системасидан ҳосил қилинадиган ҳулосадан иборатдир. Масалан, бирор системادا Пифагор теоремаси $(a^2 + b^2 = c^2)$ уринли бўлиб, айни замонда шу аксиомаларнинг ўзидан уни инкор этиш оқибатининг (масалан, $a^2 + b^2 > c^2$) тўғрилиги келиб чиқса, бундай икки "теореманинг" борлиги, аксиомалар системасида зидлик борлигини кўрсатар эди.

Ҳозирги замон геометрия фанида аксиомалар системасининг зидликка эга эмаслиги ушбу ма'нода тушунилади: *агар бирор объектлар тўплами учун аксиомалар системаси ба-жарилса, я'ни бу аксиомалар амалга ошган интерпретация (модель) мавжуд ва бу модельнинг ўзи тўғри бўлса, биз аксиомаларнинг бу системаси зидликка эга эмас деб айтмиз*.

Одатда бундай тўғри модель сифатида аналитик модель қабул қилинади. Масалан, аналитик геометрия, геометрия интерпретация (модель) ларининг бири, холос. Текисликдаги аналитик геометрияда "нуқта" сифатида сонларнинг тартиблаган жуфти (x, y) ва "тўғри чизик" сифатида — уччови ҳам бирданига нуглга тенг бўлмаган учта соннинг нисбати $(u : v : w)$ олинади. $ux + vy + wz = 0$ тенглик тўғри бўлса, (x, y) "нуқта" "тўғри чизик"да "ётади" ва x, k . Бундай шароитда евклидий геометриянинг текисликка оид ҳамма аксиомалари бажарилди — биз буни биламиз. Фазодаги аналитик геометрия — фазовий геометриянинг *интерпретациясидан* иборатдир. Шундай қилиб, аксиомалар системасининг *аналитик* интерпретацияси топилди. Демак, аксиоматик равишда вужудга келтирилган Евклид

геометриясида бирор зидлик юз берса, аналитик интерпретация орқали бу зидлик дарҳол арифметикада ҳам ошкор қилинади. Агар арифметикани тўғри деб ҳисобласак, я'ни у ҳеч вақт зидликка келтирмайди деб фараз қилсак, Гильберт системасидаги аксиомаларни ҳам (I_1-8 , II_1-4 , III_1-5 , IV ; V_1-2) шу ме'ёрга зидсиз деб ҳисоблашимиз керак.

Лобачевский геометрияси асосига қўйилган аксиомалар (I_1-8 , II_1-4 , III_1-5 , IV ; V_1-2) системасининг ҳам зидликка эга эмаслиги шу йўсинда исботланади, бироқ буерда масала, Лобачевский геометрияси учун, Евклид геометрияси объектларидан модель (интерпретация) ясашга келтирилган эди. Бундай модель сифатида, масалан, Лобачевскийнинг планиметрияси ёки стереометрияси учун ясалган Пуанкаре модели хизмат қилиши мумкин. Агар Лобачевский системасининг бирор пунктида зидлик ошкор қилинса, бу зидлик Пуанкаре интерпретация орқали дарҳол Евклид геометриясида ва шунинг билан бирга, арифметикада ҳам ошкор қилинган бўлар эди.

Шундай қилиб, аксиомаларнинг бирор системасининг зидликка эга эмаслиги исботланган ёки қабул қилинган деб фараз этилган тақдирда шу система объектлари воситаси билан берилган система учун интерпретация (модель) яшаш мумкин бўлса, бу, берилган системанинг зидликка эга эмаслигини исботлайди. Евклид геометрияси ва ҳамда Лобачевский геометрияси ҳарқайси ўзича зидликка эга эмасдир. Геометрия аксиомалари системасининг зидсизлиги ҳақида юқорида келтирилган муҳокамалар фақат геометрияга хос бўлмасдан, балки ҳарқандай математик назария учун ҳам ўз кучини сақлайди. Аксиомалар системасида зидлик йўқ дейиш ўрнига — бу система биргалик хоссасига эга деб атайдилар.

§ 49. Аксиомаларнинг эркинлиги.

Гильберт системасидаги йигирмата (I_1-8 , II_1-4 , III_1-5 , IV ; V_1-2) аксиомани олсак, булардан биронтаси қолган ўнўтқизтасининг натижаси эмасми, я'ни уни ана шу қолганлари ёрдами билан исботлаш мумкин эмасми? деган сўроқ туғилади. Бундай исботни бериш мумкин бўлган тақдирда, қаралаётган аксиома теоремалар қаторига кириб, уни қолган ўнўтқизта аксиомадан эркин равишда қараш мумкин бўлмас эди. Бирор аксиоманинг эркинлигини, я'ни унинг системалдаги бошқа аксиомаларга боғлиқ эмаслигини исботлаш усулини биз мисолда кўрсатиб берамиз; бунинг учун Евклид геометриясидаги параллеллик аксиомасининг қолган ўнўтқизта аксиомага боғлиқ эмаслигини қараймиз. Бу ўнўтқизта аксиомани ўзгаришсиз қолдириб, Евклид аксиомаси ўрнига унга қарама-қарши, я'ни унга зид аксиомани оламиз; унинг ўрнига Лобачевский аксиомасини киритамиз. Хуллас, ўнўтқиз аксиома қаторига Евклид аксиомасини қўшиб натижасида ҳосил

бўлган система ўрнига шу ўнўтқизта аксиома ёнига Лобачевский аксиомасини қўшиб натижасида вужудга келган системани олайлик. Бу системаларнинг ҳарбири ўзича зидликка эга бўлма, шунинг билан IV аксиоманинг қолган аксиомаларга боғлиқ эмаслиги исботланади, чунки Евклиднинг параллеллик аксиомаси (IV) бошқа аксиомаларнинг хулосасидан иборат бўлган тақдирда, унга зид, я'ни уни инкор этучи Лобачевский аксиомаси қолган аксиомалар билан биргаликда бўлаолмас эди. Аммо биз юқорида ҳам Евклидий геометрияси аксиомалари системасининг, ҳамда Лобачевский геометрияси аксиомалари системаси учун биргаликда бўлишлик масаласини бартараф қилган ёдиқ — ҳар икки системанинг зидликка эга эмаслиги исботланган эди. Образли та'бир билан айтганда, аксиомаларнинг I , II , III , V группалари билан ҳам Евклид аксиомаси, ҳам Лобачевский аксиомаси бир тарзда „аҳиллик билан кун кечирази“, лекин уларнинг иккалasi бирданига (бир геометрик системада) кучга эга бўлаолмаслиги сабабли, бу муҳокамалардан параллеллик аксиомасининг (IV) қолган аксиомаларга боғлиқ эмаслиги келиб чиқади. Бошқа та'бир билан айтганда, Евклид аксиомасини қолган ўнўтқизта аксиомага асосланиб исботлаш мумкин эмасдир.

Энди мисолдан аксиомаларнинг эркинлиги ҳақидаги тушунча та'рифига ўтамиз; агар n та $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ аксиомадан иборат A система берилган бўлиб [биз бу системани шундай символ билан ишоралаймиз: $A(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$], уларнинг орасидаги α_i аксиома, қолган $n-1$ та аксиомага боғлиқ бўлмаса, бу шунни билдирадики, α_i аксиомадаги да'вои инкор этучи аксиомани α_i билан ишораласак, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n$ аксиомалардан иборат $A_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ система, худди аксиомаларнинг A системаси каби, зидликка эга бўлмайди (биргалик хоссасига эга бўлади). Олган мисолимизда $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ система Гильбертнинг геометрик аксиомаларидан иборат эди, демак $n=20$ ва α_i — Евклид аксиомасини ишоралайди. Аксиомаларнинг янги $A_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$ системасида Евклиднинг α_i аксиомаси ўрнига Лобачевскийнинг α_i аксиомаси қабул қилинган эди.

α_i билан ишораланган аксиоманинг системадаги бошқа аксиомаларга боғлиқ бўлмаслиги тушунчасига берган та'рифимиз, фақатгина геометрия аксиоматикасига оид бўлмасдан, балки у ҳарқандай математик фан аксиоматикасига ҳам жорий қилинади. Агар α_i аксиома қолган ($n-1$) та аксиоманинг натижаси бўлиб чиқса, у чоғда A_1 система зидлик (биргаликда бўлмаслик) хоссасига эга бўлар эди, чунки бу системада, биргаликда юз бериши мумкин бўлмаган ва бир-бирига қарама-қарши α_i ва α_i да'волари мавжуд бўлар эди.

Бу усул билан, ба'зи аксиомаларнинг қолган ҳамма аксиомаларга ёки уларнинг бир қисмига боғлиқ эмаслиги исботла-

нади. Брок, эркинлик масаласини *ҳарбир* аксиомага нисбатан қўйиш, я'ни унинг қолган ҳамма аксиомаларга ёки уларнинг бир қисмига боғлиқ эмаслиги масаласини кўтариш, ба'зан ма'носизликка олиб келади, чунки бу аксиоманинг та'бирида (ифодасида) шундай ҳолатлар бўлиши мумкинки, улар, олдин келган аксиомалар бажарилмай қолса, ма'носини йўқотади.

§ 50. Аксиомалар системаларининг эквивалентлиги.

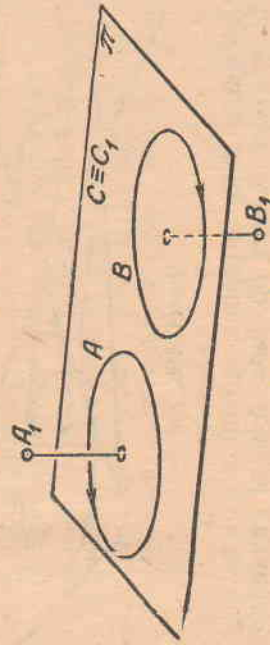
Аксиомаларнинг икки системасининг *эквивалентлиги*, ёки *тенгқувватлиги* тушунчасини ойдинлаштириш мақсадида, аввал мисол устида тўхталиб ўтайлик. Биз, евклидий геометриянинг йиғирмата аксиомасидан: *учбурчак бурчакларининг йиғиндис 2d га тенг* деган ҳулосанинг келиб чиқишини биламиз. Аксинча, агар Евклиднинг параллеллик аксиомаси ўрнига учбурчак бурчакларининг йиғиндис 2d тенг деган жумлани олиб, унинг ёнига (IV дан бошқа) қолган ҳамма аксиомаларни киритсак, улардан параллеллик аксиомаси келиб чиқади. Демак, IV аксиома ўрнига учбурчак бурчаклари йиғиндис туғрисидаги да'вони киритсак, аксиомаларнинг янги системасини ҳосил қиламиз. Бу системада IV аксиома шундай ифодаланади: *бурчакларининг йиғиндис 2d га тенг бўлган лоқақал битта учбурчак мавжуддир*. Қолган ҳамма аксиомалар ўзгаришсиз қолади. Аксиомаларнинг янги системаси дастлабки систематга *эквивалент* бўлади, чунки биринчи системадаги ҳамма теоремалар, иккинчи системада ҳам ўз кучини сақлайди ва аксинча. Олган мисолимизда асосий муносабатлар: "қарашли", "орасида ётиш", "конгруэнт бўлиш" — бутунлай ўзгаришсиз қолади; аммо шундай ҳол юз бериши мумкинки, асосий тушунчалар "нуқталар", "тўғри чизиқлар", "текисликлар" ва асосий муносабатлар: "қарашли", "орасида ётиш", "конгруэнт бўлиш" ўрнига *бошқа асосий тушунчалар*, ёки асосий объектлар ва *улар орасида бошқа муносабатлар* киритилиши мумкин; шунга қарамай, аксиомаларнинг бу икки системаси шундай ма'нода эквивалент бўлиши мумкинки, ҳам биринчи системага, ҳам иккинчи системага онд барча жумлалар тўплами иккала системада ҳам бирхил ифодаланади. Фақат шуниси борки, биринчи системанинг ба'зи теоремалари иккинчи системанинг аксиомаларига айланиб қолиши мумкин; иккинчи системада та'риф блан киритиладиган ба'зи тушунчалар биринчи системада асосий тушунчалар ролини ўйнаши мумкин.

Аксиомаларнинг иккита эквивалент системасига умумийроқ мисол келтирайлик. Аксиомаларнинг $A_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ системасидан бирор m да во келиб чиқади деб фараз этайлик, ва бунинг символик шаклда шундай ёзайлик: $A(a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n) \rightarrow m$. Яна шу аксиомалар системасини олиб, a_i ўрнига m да вони қўйсак, $A_1(a_1, a_2, \dots, m, \dots, a_n)$ системани ҳосил қиламиз. Агар $A_1(a_1, a_2, \dots, m, \dots, a_n) \rightarrow a_i$ бўлса, у чоғда A ва A_1 система-

лар *эквивалент* дейлади. Буерда объектлар категорияларининг сони ва улар орасидаги асосий муносабатлар ўз харақтерини сақлайди деб фараз қилинади. Бундан ҳам кенгроқ ма'нода тушуниладиган эквивалентликни биз буерда қарамаймиз.

§ 51. Изоморфизм тушунчаси тўғрисида.

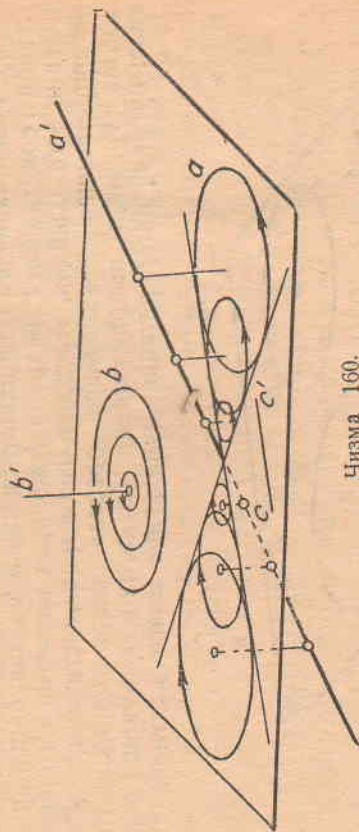
Бу тушунчани ҳам ойдинлаштиришни мисолдан бошлаймиз. Евклид геометриясига Фёдоров томонидан берилган интерпретация эста олайлик. Абстракт геометрик системанинг икки интерпретацияси элементлари орасида ўзаро бирқийматли мослик ўрнатил имкониятининг борлигини тушуниш оғир эмас; бу икки интерпретация қуйилганча юзага келтирилади.



Чизма 159.

а) биринчи интерпретациядаги объектлар одадаги образлардан ва уларнинг орасидаги асосий муносабатлар — одадаги муносабатлардан иборат; б) иккинчи интерпретация Фёдоровникидан иборат. Айтилган мослик шундай ўрнатилади: биринчидан, одадаги ҳарбир нуқтага Фёдоров "нуқтаси" мос келтирилади, ва аксинча, Фёдоровнинг ҳарбир "нуқтасига" одадаги нуқта мос келтирилади; аниқроқ айтганда *асосий тушунчаларнинг биринчи категориялари элементлари орасида ўзаро бирқийматли мослик мослик ўрнатилади* (чизма 159). Иккинчидан, одадаги ҳарбир тўғри чизиққа Фёдоров "тўғри чизигини" мос келтириш мумкин, ва аксинча, я'ни *асосий объектларнинг иккинчи категориялари элементлари орасида ўзаро бирқийматли мослик ўрнатилади* (чизма 160). Учинчидан, *асосий объектларнинг учинчи категориялари элементлари ("текисликлар") орасида ҳам ўзаро бирқийматли мослик ўрнатилади*. Бундан буён бу учта пунктни бирлаштириб, биринчи ва иккинчи интерпретациянинг асосий объектлари орасида ўзаро бирқийматли мослик ўрнатиладиган деб айтмамиз. Энди асосий муносабатларга ўтамиз. Тўртинчидан, биринчи интерпретациядаги асосий муносабатлар, я'ни "...да ётади", *орасида ётади*, *конгруэнт бўлиш* муносабатлари блан иккинчи интерпретациядаги худди шундай муносабатлар орасида

ўзaro бирқийматли мослик ўрнатилади. Бу мослик иккала интерпретацияда асосий муносабатларнинг бирхил ном блан айтилиши туфайли ўрнатилади. Биринчи — тўртинчи пунктларни қисқача шундай ифодалаймиз: *икки интерпретация орасида ўзaro бирқийматли мослик ўрнатилаган*.



Чизма 160.

Қаралмоқдаги *икки интерпретациянинг асосий объектлари ва асосий муносабатлари орасида бундай бирқийматли мосликнинг ўрнатилишидан сўнг, бу мосликнинг ушбу муҳим жиҳатини та'кидлаб ўтамиз. Агар биринчи интерпретациянинг одатдаги нуктаси, шу интерпретация "тўғри чизигида" ётса, унда А нуктага Фёдоровнинг А' нуктаси мос келтирилган бўлса, ва а тўғри чизикқа — Фёдоровнинг а' тўғри чизиги" мос келтирилган бўлса, у чоғда А' нукта" ҳам а' да "ётади". Бу фактни биз қисқача ушбу сўзлар блан та'бирлаймиз: *мослик "қарашлик" муносабатини бузмайди*. Шу сингари, оддий учта А, В, С нуктадан В нукта А блан С орасида ётса, уларга мос А', В', С' нукталардан В' нукта А' блан С' орасида ётади". Бу иккинчи фактни қисқача ушбу сўзлар блан ифодалаймиз: *мослик "орасида ётади" сузлари блан белгиланган асосий муносабатни бузмайди*. Худди шу сингари АВС, PQR дан иборат одатдаги *икки учбурчак бир-бирига конгруэнт бўлса, уларга мос келган Фёдоров "учбурчаклари" ҳам "Фёдоров интерпретацияси ма'носида бир-бирига конгруэнтдир"*; қисқароқ: *мослик "конгруэнт бўлиш" дан иборат асосий муносабатни бузмайди*. Умуман, асосий объектларнинг *икки системаси (иккита қандайдир интерпретация) категориялари-нинг элементлари орасида ўрнатилаган ўзaro бирқийматли мослик, юқорида кўрсатилган "сақланиш" хоссаларига эга бўлса, биз бунни қисқароқ қилиб, мослик асосий объектлар орасидаги асосий муносабатларни сақлайди* деб айтаемиз.*

Агар олинган аксиомалар системаси объектларнинг *икки хил турли тўпламида амалга ошса, я'ни интерпретацияланса, ва бу икки тўпламдаги асосий объектлар категория-*

лари элементлари орасида асосий муносабатларни сақлаш шарти блан ўзaro бирқийматли мослик ўрнатиш мумкин бўлса, у чоғда системанинг бундай *икки интерпретациясини бир-бирига изоморф деб атаймиз, ва мосликнинг ўзини эса — изоморфизм деб атаймиз*.



Чизма 161.

Бу янги тушунчани қиритишдан сўнг, евклидий геометриянинг мисол тариқасида олинган *икки интерпретацияси бир-бирига изоморф* деб жумладан ифодалаймиз мумкин.

Мисол тариқасида Лобачевский геометриясининг *икки интерпретациясини олайлик*. Буларнинг биринчиси Лобачевский планиметриясига Клейн-Бельтрами томонидан берилган интерпретациядан (чизма 97), иккинчиси эса — Пуанкаре томонидан берилган интерпретациядан иборат (чизма 161). Бу *икки интерпретациянинг бир-бирига изоморфлигини* исботлайлик.

Шу мақсад блан Лобачевский геометриясига Пуанкаре томонидан берилган фазовий интерпретацияни қарайлик. Бу интерпретацияда α "текислик" ни олайлик (чизма 162). Бу "текислик" харигала маркази асосий (π) текисликда ётучи яримсфера блан тасвирланган (бу текисликнинг нукталари Пуанкаре моделига қарашли эмас). α "текисликнинг" "тўғри чизиклари", π текисликка перпендикуляр текисликларнинг яримсфера блан кесишиш натижасида ҳосил қилинган яримайланалардан иборатдир. α "текислик"нинг нукталари, шу α "текисликнинг" одатдаги нукталаридан иборат. Энди яримсферани π текисликка ортогонал проекцияласак, А "нукталар" А' "нукталарга" олмашинади; α "текисликнинг" α блан ишораланган яримайланалари эса — а' "тўғри чизикларга" (π текисликдаги Γ доиранинг вагарларига) олмашинади*. Проекциялаш ёрдами блан биз Клейн интерпретациясини вужудга келтирдик. Энди Лобачевский геометриясининг α яримсферала ҳосил қилинган интерпретациясининг, шу геометриянинг Γ айланана ҳосил қилинган интерпретациясига *изоморфлигини* кўриш қийин эмас. "Конгруэнт бўлиш" муносабатига, гарчи у буерда бажарилса-да, тухталиб ўтирмаймиз.

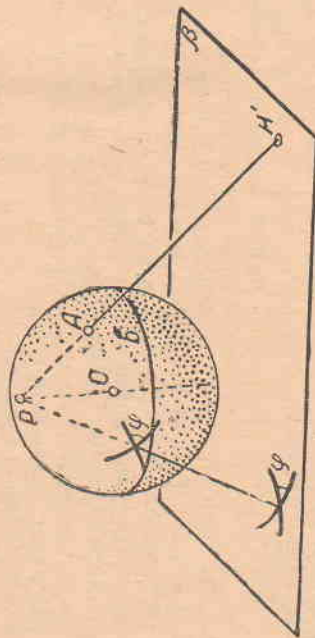


Чизма 162.

* Яримсферанинг ҳамма нукталари π текисликка "тушадди".

Лобачевский геометриясига Клейн томонидан берилган интерпретациянинг, Пуанкаренинг текисликдаги интерпретациясига изоморфлигини исботлашдан илгари, биз *стереографик проекция*нинг хоссаларига тўхталиб ўтамиз.

Агар сферанинг бирор P нуқтасидан ўша сферадаги (A) нуқталарни OP радиусга тик β текисликка проекцияласак, я'ни сферадаги исталган A нуқтани PA нур бўйлаб β текислиكنинг A' нуқтасига кўчирсак, сфера нуқталарини текисликка бу йўсинда проекциялаш *стереографик проекция* деб аталади (чизма 163). Хусусий ҳолда, β текислик сферани b блан бел-



Чизма 163.

гиланган экватор бўйлаб кесиб ўтиши ҳам мумкин. Стереографик проекция математикада муҳим татбиқларга эга бўлиб, географик хариталарни чизиб ишида катта роль ўйнайди. Бу проекциянинг ушбу муҳим хоссаларини кўрсатиб ўтамиз.

1. Агар сферадан P нуқта чиқариб ташланса, сферанинг қолган қисми *стереографик проекция* ёрдами блан β текисликка ўзаро *бирқийматли акс эттирилади*, я'ни сферанинг (P нуқтадан бошқа) ҳарбир A нуқтасига, β текислиكنинг фақат битта A' нуқтаси тўғри келади ва аксинча.

2. Сферадаги *икки чизик орасидаги бурчак*, β текисликда уларга *мос келган чизиклар орасидаги бурчакка тенг*дир. Бу фактни бундай сўзлар блан та бирлайдилар: *стереографик проекция бурчакларни сақлайди* (бузмайди), я'ни *стереографик проекция конформ* олмоштиришидир. Бу хоссаларни биз исботсиз келтирдик [9].

3. Сферадаги ҳарбир айлананинг β текисликдаги проекцияси яна айланадан *ёки тўғри чизикдан иборатдир*. Буерда, тўғри чизикка проекцияланган айланалар P нуқтадан ўтувчи айланалардан иборат. Бу хоссани ҳам биз исботсиз қолдирамиз [9]. Стереографик проекция хоссаларига суяниб, Лобачевский планиметриясига Клейн блан Пуанкаре томонидан берилган *икки интерпретация*нинг изоморфлигини исботлаш осон. 162-нчи чизмага қайтайлик.

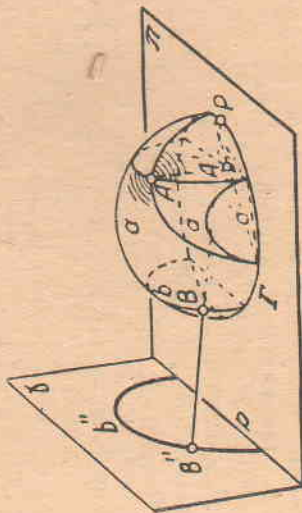
π текислиكنи α "текисликка" ортогонал проекциялаш усулидан фойдаланиб, доирадаги интерпретация элементларини — A "нуқталарни" ва a' "тўғри чизикларни", α "текислиكنинг" A "нуқталарига" ва a "тўғри чизикларига" изоморф равишда акс эттирамиз. Сўнгра, яримсферани Γ айланадаги P нуқтадан π га перпендикуляр γ текисликка стереографик проекциялаймиз, я'ни яримсферани γ текисликка стереографик акс эттирамиз (чизма 164). Γ айлана p тўғри чизикка аксланади. α яримсферанинг ҳарбир B "нуқтаси", γ "текислиكنинг" B' нуқтасига, ва α "текислиكنинг" ҳарбир b "тўғри чизиги", γ текисликдаги b' яримайланага аксланади; бу b' яримайлана Пуанкаре интерпретациясида "тўғри чизик" ролини ўйнайди. Айлананинг яна айланага аксланиши, стереографик проекциянинг учинчи хоссасига асосланади. α "текислиكنинг" P нуқтадан ўтувчи "тўғри чизиклари", γ текисликка p га тик нурларга, я'ни γ "текислиكنинг" "тўғри чизикларига" проекцияланади. "Нуқталар" орасидаги ва "тўғри чизиклар" орасидаги мослик ўзаро бирқийматлидир. Хуллас, Γ доиранинг ички соҳасини α яримсферага акслатиб ва ҳосил қилинган тасвирни γ текисликка акслатиб, биз Клейн ва Пуанкаре интерпретацияларидаги асосий объектлар категориялари элементлари орасида ўзаро бирқийматли мосликни ҳосил қиламиз.

Бельтрами харитасида *бурчакларнинг "конгруэнтлигини"*, хариталарда ўрнатилган мосликка мувофиқ равишда тушуниш керак, я'ни Γ доирадаги харитала олинган *икки бурчакка* γ текисликдаги харитада уларга *мос* бурчаклар бир-бирига "конгруэнт" бўлса, у чоғда Γ да олинган бурчаклар ҳам бир-бирига "конгруэнтдир" (чизма 164). γ харитасидаги бурчакларнинг "конгруэнтлиги", олатдаги конгруэнтлиكنинг ўзидир. "Кесмаларнинг конгруэнт бўлиши" муносабатининг сақланиш масаласига биз тўхталиб ўлтирмаймиз. Бу *икки интерпретация*нинг бир-бирига мослиги, "асосий муносабатларни сақловчи мосликдир".

Лобачевский геометриясининг Клейн интерпретацияси, шу геометриянинг Пуанкаре интерпретациясига изоморфдир. Бу изоморфизмдан фойдаланиб, исталган геометрик фигураларнинг тасвирини бир харитадан иккинчи харитага кўчириш мумкин. Масалан, *айланалар, эквидистанталар ва предел чизиклар*нинг бизга маълум бўлган тасвирларини γ харитадан Γ харитага кўчириш мумкин.

Энди Евклид геометриясига берилган *икки интерпретация*нинг изоморфлигини кўрсатиб ўтамиз. Масалан, текисликдаги Евклид геометриясининг олатдаги интерпретацияси блан текисликдаги аналитик геометрияни таққосласак, бу *икки интерпретация*нинг бир-бирига *изоморфлигини* кўрамиз. Чунончи, *икки кесманинг*, аналитик геометриянинг олатдаги формуллари бўйича ҳисобланган "ўзунликлари" тенг бўлса, улар "конгруэнтдир". Одатдаги аналитик геометрия Евклид геометрия-

ясга берилиш мумкин бўлган интерпретацияларнинг бири, деб айтиш мумкин. Аналитик геометрия деганда биз буерда Евклид системаси билан боғланган геометрияни кузла тутамиз.



Чизма 164.

методи дейлади. Аналитик геометрияни ўрганишдан мақсад, аналитик интерпретация тилидан бошқа интерпретация илгари тезлик билан ўтишни ўзлаштиришдир. Аналитик геометриянинг, геометрик системага берилган жуда қулай интерпретациялардан бири эканини биз биламиз. Геометрик образларни ўрганишда аналитик геометриянинг гоят даражада кучли методи бериши юқорида кўрсатилган изоморфизмга асосланади: аналитик геометрияни ўрганиш билан бирга, биз айни замонда "умумисте молли" (Лобачевский термини) геометрияни ўрганган бўламиз. Турли интерпретацияларнинг борлиги, геометриянинг амалий табиққларини анча ихчамлаштиради.

§ 52. Хулоса.

Ҳарбир аксиоматикага нисбатан учта талаб қўйилади.

1. Аксиомалар системаси биргалик хоссасига эга, яъни зидликка эга бўлмаслиги керак.

2. Аксиомалар системаси шундай бўлиши керакки, ҳарбир аксиома, аксиомаларнинг ҳарбир группаси, қолган аксиомаларга мумкин қадар боглиқ бўлмасин.

3. Аксиомалар системасига нисбатан, ушбу сўроққа аниқ жавоб олинши керак: аксиоматика мукаммаллик хоссасига эгами, йўқми? Агар аксиомалар системасига берилмаган, исталган икки интерпретация бир-бирига изоморф бўлса, у чоғда бу система мукаммаллик хоссасига эгадир. Агар система мукаммаллик хоссасига эга бўлмаса, бу ҳол бир-бирига изоморф бўлмаган лоқал икки интерпретациянинг борлигини кўрсатади. Биз қараб чиққан Евклид геометриясининг аксиоматикаси ва Лобачевский геометриясининг аксиоматикаси мукаммаллик хоссасига эгадир. Масалан, группалар назариясининг аксиоматикаси мукаммаллик хоссасига эга эмасдир [3].

А Д А Б И Ё Т

- [1] Адамар. Элементарная геометрия, ч. 1, Учпедгиз, 1948.
- [2] Адамар. Элементарная геометрия, ч. II, Учпедгиз, 1938.
- [3] П. С. Александров. Введение в теорию групп, Учпедгиз, 1939.
- [4] П. С. Александров. Что такое неевклидова геометрия; статья в сборнике "Н. И. Лобачевский" (1793—1856), Гостехиздат, 1943. 1950
- [5] В. Буняковский. Параллельные линии, Известия Российской Академии наук. СПб 1853.
- [6] Д. Гильберт. Освоения геометрии, Петроград 1923.
- [7] Д. Гильберт. Основания геометрии, перевод с 7-го немецкого издания И. С. Градштейна, под редакцией и с вступительной статьей П. К. Рашевского, М., Гостехиздат, 1948.
- [8] Д. Гильберт и В. Аккерман. Основы теоретической логики. Перевод под редакцией С. А. Яновской, М., ГИИЛ 1947.
- [9] Д. Гильберт и Кон-Фоссен. Наглядная геометрия, М., ОНТИ, 1936.
- [10] Евклид. Начала, книги I—VI, VII—X, XI—XV, перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, М., Гостехиздат, 1948; 1949; 1950.
- [11] Н. В. Ефимов. Высшая геометрия, М., Гостехиздат, 1949.
- [12] В. Ф. Каган. Основания геометрии. Опыт обоснования евклидовой геометрии, Одесса 1905.
- [13] В. И. Костин. Основания геометрии. Учпедгиз, 1948.
- [14] Н. И. Лобачевский. Геометрия, Казань, 1909.
- [15] Н. И. Лобачевский. О началах геометрии, "Казанский вестник", 1929.
- [16] Н. И. Лобачевский. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Перевод, комментарии, вступительные статьи и примечания В. Ф. Кагана Изд-во АН СССР, 1945.
- [17] Н. И. Лобачевский. Полное собрание сочинений, т. I, М., Гостехиздат, 1946.
- [18] Д. И. Перепелкин. Элементарная геометрия ч. I, М., 1948; (Ўзбекча таржимаси бор, 1951 й. Тошкент).

Тўртинчи б.б.б. Лобачевский геометриясида юзларни ўлчаш масаласи 63

§ 26. Саккери тўртбурчакларининг конгруэнглиги (64). § 27. Учбурчакнинг нуқсони ва учбурчакнинг юзи (64). § 28. Учбурчакларнинг лимитик ҳоллари (68). § 29. Юзи ихтиёрий катта бўлган учбурчак мавжуд, деган фараз — Евклид постулатига эквивалентлиги (70). § 30. Лобачевскийнинг математика соҳасидаги хизматлари (70).

Бешинчи б.б.б. Евклиднинг „Негизлар“ номи асарининг обзори 72

§ 31. Евклид „негизларнинг“ мазмунини (72). § 32. „Негизлар“да баёнлаш усули (72). § 33. „Негизлар“нинг асосий хусусиятлари (72). § 34. „Негизлар“нинг баъзи камчиликлари, яхши жиҳатлари ва тарихий аҳамияти (76).

Олтинчи б.б.б. Асосий объектлар, бу объектлар орасидаги асосий муносабатлар ва геометрия аксиомалари 83

§ 35. Геометрияни аксиомалар асосида куриш. Асосий тушунчалар (83). § 36. Аксиомаларнинг биринчи гуруҳи, бириктириш (қарашлик) аксиомалари (84). § 37. Аксиомаларнинг иккинчи гуруҳи: тартиб аксиомалари (88). § 38. Аксиомаларнинг учинчи гуруҳи: Конгруэнглик ва ҳаракат аксиомалари (92). § 39. Аксиомаларнинг тўртинчи гуруҳи: параллеллар аксиомаси (97). § 40. Аксиомаларнинг бешинчи гуруҳи: узлуксизлик аксиомалари (97).

Еттинчи б.б.б. Геометрик системани интерпретациялаш 102

§ 41. Евклиднинг текисликдаги геометриясини интерпретациялаш мисоли (102). § 42. Фёдоров интерпретацияси (103). § 43. Евклид геометриясининг аналитик интерпретацияси (107). § 44. Лобачевский геометриясига Бельтрами-Клейн томонидан берилган интерпретация (107). § 45. Лобачевский планиметриясига Пуанкаре томонидан берилган интерпретация (113). § 46. Фазодаги Лобачевский геометриясига Пуанкаре томонидан берилган интерпретация (128). § 47. Эквидистант сиртлар; предел сиртлар ва сфералар (131).

Саккизинчи б.б.б. Аксиомаларнинг биргалиги ва эркинлиги, изоморфизм 135

§ 48. Аксиомалар системасининг биргалиги (135). § 49. Аксиомаларнинг эркинлиги (136). § 50. Аксиомалар системаларининг эквивалентлиги (138). § 51. Изоморфизм тушунчаси тўғрисида (139). § 52. Хулоса (144).

Адабиёт 145

МУНДАРИЖА

Сўзбоши 2
Муқаддима 3

§ 1. Параллел тўғри чиққлар тушунчасининг киритилишидан олдинги теоремалар (8). § 2. Учбурчак бурчакларининг йиғиндис ҳақида Лежандр-Саккерининг теоремалари (11). § 3. Паш постулати (16). § 4. Икки бурчакни тўғри бўлган тўртбурчак ва унинг хоссалари (16).

Биринчи б.б.б. Евклид постулатига (эквивалент) тенгкучли даъволар 19

§ 5. Учбурчак бурчакларининг йиғиндис 2d га тенг деган даъво — Евклид постулатига тенгкучлидир (20). § 6. Хамма учбурчакларда бурчаклар йиғиндис бирхил деган даъво Евклид постулатига тенгкучлидир (23). § 7. Учбурчак бурчакларининг йиғиндис 2d дан кичик бўлаолмайди деган теореманинг Лежандр томонидан ҳаттолик исботи (25). § 8. Евклид постулатига эквивалент яна бир даъво — бурчак ичидagi исталган нуқтадан бурчакнинг иккала томони блан ҳам кесилуши тўғри чиқиқ ўтказиш мумкин. (27). § 9. Ўхшаш, лексин тенг бўлмаган иккита учбурчак мавжуд, деган жумла Евклид постулатига тенг кучлидир (28). § 10. Евклид постулатининг яна бир сохта исботи (Клавий) (29). § 11. В. Болиан теоремаси (30). § 12. Евклид постулатига эквивалент яна бир аксиома (31). § 13. Икки чиқилган олтибурчак томони радиусга тенг деган жумла (32). Иккинчи б.б.б. Лобачевский геометриясининг баъзи фактлари ҳақида 34

§ 14. Лобачевский постулати (35). § 15. Лобачевский текислигида учбурчак бурчакларининг йиғиндис (36). § 16. Бурчакнинг бир томони блан кесилмай, унинг иккинчи томониға перпендикуляр бўлган тўғри чиқиқ ҳақида теорема (37). § 17. Эквидистанта (40). § 18. Лобачевский геометриясининг яна баъзи теоремалари (41). § 19. Евклид постулатига эквивалентдир. Ташқарисига айлана чиқиб бўлмайдиган учбурчаклар тўғрисида (42). § 20. Доирага икки чиқилган мунтазам олтибурчак томони бу доиранинг радиусидан каттадир (43).

Учинчи б.б.б. Лобачевский текислигидаги тўғри чиққларнинг ўзаро вазияти 44

• § 21. Параллел ва ўтапараллел тўғри чиққлар (44). § 22. Параллел тўғри чиққларнинг хоссалари (47). § 23. Параллеллик бурчаги (51). § 24. Ўтапараллеллар хоссалари (57). § 25. Лобачевский текислигидаги тўғри чиққлар ўзаро вазиятининг баъзи хусусий ҳоддалари. (60).