Н. ДОДАЖОНОВ, Р. ЮНУСМЕТОВ, Т. АБДУЛЛАЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

II ҚИСМ

ЎзССР Маориф министрлиги педагогика институтларининг студентлари учун ўқув қўлланмаси сифатида тасдиқлаган

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1988

Тақризчи— физика-математика фанлари кандидати, доцент *Х. Назаров*

Махсус муҳаррир — ТошДУ профессори *М. А. Собиров*

Д 65 **Додажонов Н.** ва бошқ.

Геометрия: Пед. ин-тларининг студ. учун ўқув қўлл. /Н. Додажонов, Р. Юнусметов, Т. Абдуллаев: Махсус муҳарр. М. А. Собиров. Қ. II.—Т.: Ўқитувчи, 1987.— 176 б.

1, 2 Автордош.

Дадажонов Н. и др. Геометрия: Учебное пособие для студ. Ч. 2.

Ушбу қўлланма Н. Додажонов ва М. Жўраеванинг «Ўқитувчи» нашриёти томонидан 1982 йилда нашр қилинган «Геометрия, I» китобининг давоми ҳисобланади. Унда геометрия курсининг геометрия асослари, проектив геометрия ва дифференциал геометрия бўлимлари баён қилинади. Геометрия асослари бўлими Гильберт аксиомалари асосида ёзилган бўлиб, А. В. Погорелов ва Вейль аксиомалари обзор тариқасида ёритилган.

Қўлланма педагогика институтларининг студентлари учун мўлжалланган.

ББК 22.151 я 73

Д $\frac{1702040000-82}{353\ (04)-88}$ Бланк заказ — 88

ISBN 5-645-00019-6

СЎЗ БОШИ

Ўқувчига ҳавола қилинаётган ушбу қўлланма Н. Д. Додажонов ва М. Ш. Жўраева томонидан ёзилган «Геометрия, I қисм («Ўқитувчи» нашриёти, 1982 йил) китобининг давоми ҳисобланади.

Унда асосий геометрия курсининг учта бўлими: геометрия асослари (I—IV боблар), проектив геометрия ва тасвирлаш методлари (V—VII боблар), дифференциал геометрия (VIII боб) баён қилинди.

Қўлланмадаги материаллар СССР Маориф Министрлигининг 1983 йилда педагогика институтлари учун тасдиқлаган программаси асосида ёзилди. Унинг геометрия асослари бўлими, асосан Гильберт аксиомалари асосида ёзилиб, унга Лобачевский геометриясининг баъзи фактлари келтирилди. А. В. Погорелов ва Вейль аксиомалари обзор тариқасида ёритилди. Миқдорлар (узунлик, юз, ҳажм) ни ўлчаш масаласи Гильберт аксиомалари бўйича жуда мураккаб баён қилинганлиги учун, уни бу аксиоматика бўйича ёритилишини лозим топмадик, чунки А. В. Погорелов аксиомалари бўйича бу масала осон ҳал қилинган.

Қўлланмадаги белгилар, аввалги китобдаги белгилардан фарқ қилиб, асосан А. В. Погореловнинг «Геометрия» китобидаги белгилашлар олинди. Чунки яқин йилларда мактабни битириб чиқадиган ўқувчилар А. В. Погореловнинг «Геометрия 6—10» дарслиги бўйича ўқиган бўлади.

Қўлланмани нашрга тайёрлашда актив иштирок этган Низомий номли Тошкент Давлат педагогика институтининг геометрия кафедраси аъзоларига ва ўз қимматли маслаҳатлари учун Тошкент Давлат университетининг профессори М. А. Собировга чуқур миннатдорчилик билдирамиз.

Авторлар

I БЎЛИМ

ГЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ

I БОБ. АКСИОМАТИКАНИНГ УМУМИЙ МАСАЛАЛАРИ ВА ГЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИНИНГ ТАРИХИЙ ОБЗОРИ

1- §. Аксиоматик метод ҳақида тушунча

Геометрия асослари математиканинг бир қисми бўлиб, унда геометриянинг асосий тушунчалари, аксиомалари ва умуман геометрик системанинг дедуктив тарзда қурилиши, шунинг билан бирга аксиомалар орасидаги муносабатлар ўрганилади. Бу ғоялар моҳиятини тушуниш ва уларнинг юзага келиш сабабларини фаҳмлаш учун қисқача бўлса- да, тарихга назар ташлаш зарур.

Математикада аксиоматик (дедуктив) методнинг яратилишига грек олимларидан Пифагор, Аристотель, Платон, Евклид илк қадам қўйганлар. Бу борада айниқса Евклиднинг (эрамиздан аввалги 340—287 й.й.) хизмати каттадир. Евклид «Негизлар» («Асослар») деб аталган асарида геометрияни мантиқий жиҳатдан мукаммал асослаш мақсадида аввал таърифлар келтириб, кейин аксиомалар, постулатлар системасини қабул қилди. Шу асосда у ўз замонаси талабларига тўла-тўкис жавоб берадиган геометрия «биносини» қуришга эришди.

Ноевклидий геометриянинг вужудга келиши ва тўпламлар назариясининг яратилиши фаннинг деярли барча тармоқлари учун муҳим омил ролини ўйнади.

Аксиоматик методнинг моҳиятини тушуниш мақсадида мактабда ўрганиладиган геометрия курсига мурожаат қилайлик. Унда бир қанча теоремалар исботланган бўлиб, исботланган ҳар бир теорема ўзидан олдин келган теоремаларга асосланади, шу йўсинда иш кўришда исботсиз қабул қилиниши зарур бўлган ибора (жумла) лар ва тушунчаларга дуч келамиз: натижада таърифсиз қабул қилинган объектлар (масалан, нуқта, тўғри чизиқ, текислик, масофа тушунчалари), уларни боғловчи нисбатлар (масалан, нуқтанинг тўғри чизиқда ётиши, тўғри чизиқдаги нуқтанинг шу тўғри чизиқдаги бошқа икки нуқта «орасида» ётиши, кесма ва бурчакларнинг тенг (конгруэнт) лиги) вужудга келади.

Асосий объектлар, уларни боғловчи нисбатлар ва тегишли аксиомалар системасини танлаб олиш муҳим масаладир. Аксиоматик метод асосида муҳокама юритишни қисқароқ қилиб қуйидагича тавсифлаш мумкин: аввало таърифланмайдиган асосий объектлар танлаб олинади, кейин уларни ўзаро боғловчи асосий муносабатлар — аксиомалар системаси танлаб олинади, сўнгра эса шу аксиомалар асосида мантиқ (логика) қоидаларига асосланган ҳолда янги-янги жумлалар (теоремалар) исботланади.

2- §. Аксиомалар системасига қўйиладиган талаблар

Қабул қилинадиган аксиомалар системаси қуйидаги талабларга жавоб бериши керак:

1) мантиқ қонунлари асосида аксиомалар системасидан бир-бирини инкор этувчи иккита жумла (гап) келиб чиқмайдиган бўлсин, яъни аксиомалар системаси зидликка эга бўлмасин;

2) муайян аксиомалар системасида иштирок этадиган ҳар бир аксиома қолганларининг мантиқий хулосаси бўлмаслиги—теорема сифатида исботланмаслиги, яъни аксиомалар системасидаги ҳар бир аксиома эркинлик хусусиятига эга бўлиши керак;

3) аксиомалар системаси қаторига шу системадан мантиқан келиб чиқмайдиган янги аксиомани қўшиш мумкинми, яъни аксиомалар системаси тўлиқ (мукаммал)лик хоссасига бўйсунадими?

Геометрияни аксиоматик қуришдаги бу муҳим саволларга XIX асрдагина тўла жавоб топилди. Бу саволга жавоб беришда улуғ рус математиги Н. И. Лобачевский ижоди ва XIX аср олимларидан Е. Бельтрами, А. Пуанкаре, Ф. Клейн тадқиқотлари ҳал қилувчи роль ўйнади. Аксиомаларнинг белгили системаси асосида олиб бориладиган муҳокамаларнинг зидликка олиб келиш - келмаслиги масаласини ҳал қилиб бериш учун математикада модель (интерпретация, шарҳланиш) ғояси ишлатилади.

Таъриф. Маълум объектларнинг бирор тўплами аниқланган бўлиб, шу тўплам элементлари орасида асосий муносабат (нисбатлар) сақланиб, унда аксиомаларнинг барча шартлари бажарилса, бу аксиомалар системасининг модели қурилган дейилади.

Мисоллар. 1. Бутун сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан, группа ташкил қилгани учун, бу тўплам группавий аксиомалар системасининг модели бўла олади (бунда асосий объектлар бутун сонлар бўлиб, асосий муносабат қўшиш амалидир).

2. Текисликдаги барча геометрик векторлар тўплами чизиқли фазо ҳосил қилгани учун, у чизиқли фазо аксиомалари системасининг модели бўла олади (бунда асосий объект геометрик вектор бўлиб, асосий нисбатлар векторлар устидаги чизиқли амаллар — қўшиш, векторни сон (скаляр) га кўпайтиришдир).

Таъриф. Аксиомалар системасидан бир-бирини инкор қиладиган иккита жумла мантиқан келиб чиқмаса, бу система *зидсиз (қарама қаршиликсиз) система* деб аталади. Акс ҳолда аксиомалар системаси *зидли система* дейилади.

Математикада зидли система билан иш кўрилмайди. Аксиомалар системасининг зидсизлиги қандай исбот қилинади?

Аксиомалар системасининг зидсизлиги шу система моделининг танлаб олиниши билан ҳал қилинади. Агар текшириладиган аксиомалар бирор усул билан моделда бажарилса ва бу модель объектларининг табиатида зидликнинг йўқлигига ишонч ҳосил қилинса, у ҳолда бу аксиомалардан бир-бирини мантиқан инкор этадиган иккита жумла келиб чиқмаслиги, яъни битта фактни ҳам тасдиқлаб, ҳам инкор этиб бўлмаслиги маълум бўлади. Демак, биз юқорида келтирган мисолимизда группавий аксиомалар системасининг ва чизиқли фазо аксиомалари системасининг зидсиз эканини кўрсатдик, дейишимиз мумкин.

Таъриф. Зидсиз аксиомалар системасидаги ҳар бир аксиома шу системадаги қолган барча аксиомаларнинг мантиқий хулосаси бўлмаса, бундай аксиомалар системаси *эркин система* деб аталади.

Бундан кўринадики, аксиомалар системасининг эркин бўлиш талаби ҳар бир аксиоманинг қолган аксиомаларнинг хулосаси (натижа) си эмаслигини текшириш билан исботланади. Бу масала қуйидагича ҳал қилинади.

Аксиомаларнинг зидсиз $A_1, A_2, \ldots, A_n$ системасига қарашли, масалан, A_n аксиоманинг эркин эканлигини кўрсатиш учун бу системадан A_n ни чиқариб ташлаб, унинг ўрнига $\overline{A_n}$ аксиома, яъни A_n нинг мазмунини инкор этувчи жумла—иборани киритиб, аксиомаларнинг янги системасини ҳосил қилиш ва унинг зидсизлигини исботлаш керак. Ҳақиқатан ҳам, агар A_n аксиома $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ аксиомаларнинг натижаси сифатида ҳосил қилинса, у ҳолда бу аксиома $A_1, A_2, \ldots, \overline{A_n}$ аксиомаларининг ҳам натижаси бўлиб чиқади. Бу эса аввалги системанинг зидлигини билдиради.

Аксиомалар системасидаги бирор аксиоманинг эркинлиги,[1] яъни, унинг мустақил аксиома эканлигини бу системадаги аксиомалар сонини камайтириш мумкин эмаслигидан дарак беради.

Аксиомалар системасининг эркинлигини текширишда ҳар бир аксиоманинг эркинлиги алоҳида текширилмайди, чунки тегишли исботлар жуда сермеҳнатдир, лекин баъзи «шубҳали» аксиомаларга нисбатан эркинлик талаби текширилади. (Бунга биз мисол тариқасида 23-§ да V постулатнинг эркинлигини кўрсатамиз.)

Аксиомалар системасининг тўлиқлигининг мазмуни шундан иборатки, янги аксиомалар қўшмасдан туриб, шу назарияга тааллуқли ҳар бир даъвонинг шу системага таянган ҳолда ўринлилигини ёки инкорини айтиш мумкин бўлсин. Бу талабнинг амалга оширилиши одатда система учун қурилган *икки модель орасидаги изоморфизм* деб аталадиган тушунчага асосланади.

Таъриф. Аксиомалар системасининг икки E, E' моделининг асосий объекти (нуқта, тўғри чизиқ, текисликлар) орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатилган бўлиб, бу мосликда элемент (объект) лар иккала моделда ҳам бир хил нисбатда бўлса, яъни $A \in E \Rightarrow A' \in E'$ бўлса, бу икки модель *изоморф* дейилади.

Таъриф. Аксиомалар системасига тааллуқли исталган жумланинг тўғри ёки нотўғри эканини аниқлаш мумкин бўлса, аксиомаларнинг бу системаси *тўлиқ (мукаммал)* деб аталади.

Аксиомаларнинг зидсиз Σ системаси берилган бўлсин, шу система асосида қурилган назариянинг барча жумлаларини уч синфга ажратиш мумкин:

I. $\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида исботлаш мумкин бўлган жумлалар.

II. $\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида инкор этиш мумкин бўлган жумлалар.

III. $\sum$ ва ундан мантиқан келиб чиққан натижалар ёрдамида исбот ҳам қилиб бўлмайдиган, инкор ҳам қилиб бўлмайдиган жумлалар.

Демак, $\sum$ нинг бирор модели қурилган бўлса, I синфга кирувчи барча жумлалар шу моделда ўринли бўлади, II синфга кирувчи барча жумлалар шу моделда ўринли бўлмайди, ниҳоят, III синфга кирувчи жумлалар шу моделда ўринли бўлиб, $\sum$ нинг бошқа шундай модели мавжуд бўлиши мумкинки, унда бу жумлалар ўринли бўлмайди. Бундан кўринадики, $\sum$ нинг исталган икки модели ўзаро изоморф бўлса, аксиомаларнинг бундай системаси тўлиқ бўлади. Бунинг маъноси шундан иборатки, аксиомаларнинг тўлиқ системаси учун турли моделлар фақат ўзининг асосий объект (элемент) ларга бериладиган конкрет мазмуни билан фарқ қилади, мантиқий жиҳатдан улар бир хилдир.

Демак, аксиомаларнинг бирор системасининг тўлиқлигини исботлаш учун унинг камида иккита моделини олиб, уларнинг ўзаро изоморфлигини кўрсатиш кифоя. Бу фикрдан биз кейинги бобларда фойдаланамиз.

Математикада аксиомаларнинг тўлиқ бўлмаган системаси билан ҳам иш кўришга тўғри келади. Масалан, группавий аксиомалар системаси тўртта аксиомадан иборат бўлиб, у тўлиқ эмас, чунки бу системанинг бир-бирига изоморф бўлмаган иккита моделини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, рационал сонлар тўплами қўшиш амалига нисбатан группа ташкил қилади, бундан ташқари барча ҳақиқий сонлар тўплами ҳам қўшиш амалига нисбатан группа ҳосил қилади. Лекин бу икки модель орасида изоморф мослик ҳосил қилиш мумкин эмас, чунки рационал ва ҳақиқий сонлар тўпламлари орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд эмас.

3- §. Евклид давригача геометрия

Геометрия энг қадимги фанлардан бири ҳисобланади. Бизгача етиб келган тарихий ёдгорликларга асосан, геометриядан олинган энг биринчи маълумотлар Ҳиндистонда, Вавилон (Бобил) да, Миср ва Хитойда вужудга келган бўлиб, улар соф амалий фаолият талабларини кўзда тутган. Геометриянинг Евклидгача ривожланиш жараёнига қисқача бўлса-да назар ташлайлик. Эрамиздан аввалги VII — VI асрларда Грециянинг Милет шаҳрида яшаган Фалес ўз давридан олдин тўпланган тарқоқ ҳолдаги геометрик фактларни умумлаштириб, мантиқ қоидалари асосида исботлашга ҳаракат қилган. Фалес қуйидаги теоремаларни исботлаган:

1. *Диаметрга тиралган ички чизилган бурчак тўғри бурчакдир.*
2. *Доира диаметри уни тенг иккига ажратади.*
3. *Вертикал бурчаклар тенг.*
4. *Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг* ва ҳоказо.

Эрамиздан аввалги VI — V асрларда геометрия кўпроқ Жанубий Италияда ривожлана борди. Бу даврни Пифагор даври дейиш мумкин. Бу даврда ҳам фактларни илмий асослашга уриниш бўлган. Қуйидаги теоремаларининг мантиқан исботи ҳам шу даврга тўғри келади:

1. *Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг.*

2. *Текисликни мунтазам учбурчаклар, тўртбурчаклар ва олтибурчаклар билан қоплаб чиқиш мумкин.*

3. *Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасига ясалган квадрат юзи катетларига ясалган квадратлар юзлари йиғиндисига тенг.*

Бундан бошқа кўпгина маълумотлар ҳам бу даврнинг маҳсули бўлган. Масалан, квадрат тенгламани геометрик ечиш усули, мунтазам кўпёқнинг беш тури (тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр ва икосаэдр). Эришилган ютуқларнинг энг муҳими—умумий ўлчовга эга бўлмаган кесмаларнинг мавжудлигини исботлаш катта илмий ютуқ ҳисобланади.

Эрамиздан аввалги IV асрда геометриянинг ривожланиш маркази Афина шаҳрига кўчади. Математика фанининг бу даврдаги ривожида Платон, Аристотель, Демокритнинг фалсафа мактаблари ва Евдокс, Менехм каби улкан математикларнинг ҳиссалари катта. Бу илмий мактаб намояндалари қуйидаги икки масалани ҳал қилишга уринган:

1) геометрияни илмий асосда баён этиб бериш принципи, унинг жумла-ибораларини аксиома, таъриф ва теоремаларга ажратиш; 2) исботлашнинг формаси ва методини ишлаб чиқиш: анализ, синтез, тескарисидан исбот қилиш ва ҳоказо.

Бу масалалар асосан мантиқ (логика) фанининг яратувчиси Аристотель (эрамиздан аввалги 384 — 322 йиллар) ишларида ўз аксини топди. Хулоса қилиб айтганда, Евклидгача бўлган даврда фанни (айниқса геометрияни) дедуктив негизда қуришнинг асосий принциплари мукаммал ишлаб чиқилган, улар қуйидагилардир:

1. Асосий тушунчалар (объектлар, уларни ўзаро боғловчи нисбатлар) кўрсатилади.
2. Барча керакли аксиомалар баёни берилади.
3. Теоремалар келтирилади.
4. Ҳар бир теорема ўзидан аввалги теоремаларга ва аксиомаларга асосланиб исботланади.
5. Янги киритилган тушунчаларга таъриф берилади.

Геометрияни дедуктив принципда қуришни грек олими Евклид ўз замонасига нисбатан қониқарли ҳал қилиб, 13 та китобдан иборат «Негизлар» номли асарини ёзди.

4- §. Евклиднинг «Негизлар» асари, унинг ютуқ ва камчиликлари

Евклид ҳаёти ҳақида тўла маълумот бизгача етиб келмаган. У бизнинг эрамиздан аввалги 300 йилларда яшаган бўлиб, Птолемей подшолик қилган даврда Александрияда математикадан дарс берган ва шоҳ томонидан ташкил қилинган музейнинг математика бўлимини яратган. Айтишларича, кунлардан бир кун шоҳ Евклидни чақириб «геометрияни ўрганишга «Негизлар» дан кўра қисқароқ йўл борми?» деб сўраганда Евклид мағрурона шундай деган экан: «Геометрияда шоҳлар учун махсус йўл йўқ». Бундан ташқари Евклиднинг «Оптика» ва бошқа асарлари ҳам маълумдир.

Инсоният тарихида Евклиднинг «Негизлар» асари билан таққослаш мумкин бўлган ва ҳанузгача ўз қадр-қимматини йўқотмай келган, ўз замонасига нисбатан чуқур илмий асосда яратилган бирорта асарни кўрсатиб бўлмайди. Унинг фақат 1482 йилдан бошлаб 500 мартадан кўпроқ қайта нашр қилингани ва дунёдаги жуда кўп тилларга таржима қилингани юқоридаги фикримизнинг ёрқин далилидир. «Негизлар» нинг қисқача мазмунига тўхталиб ўтайлик.

I китобда учбурчакларнинг тенглик шартлари, учбурчак томонлари билан бурчаклари орасидаги муносабатлар, учбурчакларни ясаш, тўғри чизиқларнинг параллеллиги ва перпендикулярлиги, параллелограмм ва учбурчакнинг юзлари ҳамда Пифагор теоремаси бор.

II китобда $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)b=ab-b^2$ ва шу каби айниятлар геометрик формада талқин қилинади. Бу китоб квадрат тенгламани геометрик усулда ечиш билан тугалланади.

III китоб айланага бағишланади. Бунда асосан айланага ўтказилган кесувчи, уринма, марказий бурчаклар, ички чизилган бурчаклар қаралади.

IV китобда айланага ички ва ташқи чизилган кўпбурчаклар қаралиб, мунтазам тўртбурчак, бешбурчак, олтибурчак ва ўн бешбурчакларни ясаш кўрсатилади.

V китоб асосан пропорциялар назариясига бағишланган.

VI китобда пропорциялар назариясининг татбиқи сифатида кўпбурчаклар ўхшашлиги назарияси ва кўпбурчак юзларини топиш берилади.

VII—IX китоблар арифметика ва сонлар назариясига бағишланган. Шуниси диққатга сазоворки, бу китобларда икки бутун соннинг энг катта умумий бўлувчисини топиш алгоритми ҳамда туб сонларнинг чексиз кўп эканлиги исботланади.

X китобда иррационал миқдорлар назарияси қаралади.

XI — XIII китоблар стереометрияга бағишланган бўлиб, уларда кўпёқлар, айланма жисмлар ва уларнинг ҳажмлари қаралиб, мунтазам кўпёқлар ҳақида маълумот берилади. Келтирилган 13 та китобнинг ҳар бири тушунчаларнинг таърифларидан бошланади, масалан, I китобда 23 та таъриф берилган, улардан баъзиларини келтирамиз.

I. Нуқта шундирким, у бўлакларга эга эмас.

II. Чизиқ энсиз узунликдир.

III. Чизиқнинг чегаралари нуқталардир.

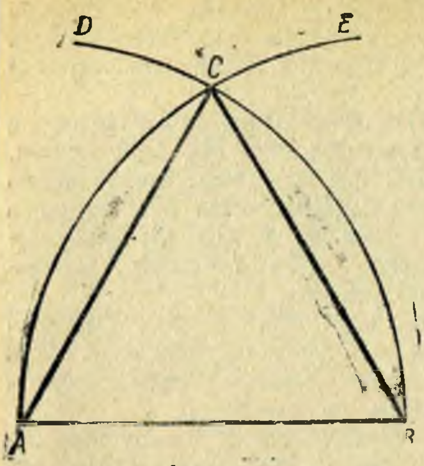
IV. Тўғри чизиқ деб шундай чизиққа айтиладики, у ўзининг ҳамма нуқталарига нисбатан бир хил жойлашгандир.

V. Сирт шундирким, у узунликка ва энга эга.

VI. Сиртнинг чегаралари чизиқлардир.

VII. Текислик шундай сиртки, у ўзидаги ҳамма тўғри чизиқларга нисбатан бир хил жойлашгандир.

VIII. Ясси бурчак деб, бир-бири билан кесишган ва бир текисликда жойлашган, лекин бир тўғри чизиқда ётмаган икки чизиқнинг бир-бирига қиялигига айтилади ва ҳоказо.



1- чизма

Таърифлардан сўнг постулатлар (ҳозирги вақтда постулат билан аксиома бир-биридан фарқлаимайди) ва аксиомалар берилади.

Постулатлар:

I. Ҳар бир нуқтадан исталган нуқтагача тўғри чизиқ ўтказиш мумкин бўлсин.

II. Чегараланган ҳар бир тўғри чизиқни исталганча давом эттириш мумкин бўлсин.

III. Исталган марказдан ҳар қандай радиус билан айлана чизиш мумкин бўлсин.

IV. Ҳамма тўғри бурчаклар ўзаро тенг бўлсин.

V. Бир тўғри чизиқ икки тўғри чизиқ билин кесишиб, улар билан йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлган ички бир томонли бурчаклар ташкил қилса, уларни бу йиғинди $2d$ дан кичик томонга қараб давом қилдирганда, улар шу томонда кесишадигаи бўлсин.

Бу охирги постулат параллеллар ҳақидаги Евклиднинг машҳур бешинчи постулатидир.

Аксиомалар:

I. Учинчи миқдорга тенг бўлгаи миқдорлар ўзаро тенг.

II. Тенг миқдорларга баравардан қўшилса, уларнинг йиғиндилари ҳам тенг бўлади.

III. Тенг миқдордан баравардан айирилса, қолдиқлари ҳам тенг бўлади ва ҳоказо.

Постулат ва аксиомалардан сўнг жумлалар номи билан теоремалар ва ясашга доир масалалар келтирилади.

1. Жумла (**теорема**). Белгили кесмада (тўғри чизиқда) тенг томонли учбурчак ясалсин.

Ясаш: AB кесма (тўғри чизиқ) берилган бўлсин (1-чизма). A ни марказ қилиб AB радиус билан циркуль ёрдамида BCD ёй чизамиз (III постулат), сўнгра B ни марказ қилиб BA радиус билан ACE ёй чизамиз (III постулат), бу ёйларнинг кесишиш нуқтаси C орқали CA, CB тўғри чизиқларни ўтказамиз (I постулат). A нуқта DBC айлананинг маркази бўлгани учун AC кесма AB га тенгдир (XV таъриф), сўнгра B нуқта ACE айлананинг маркази бўлгани учун BC кесма AB га тенгдир (XV таъриф). I аксиомага асосан CA кесма CB га тенг. Демак, CA, AB, BC кесмалар ўзаро тенг, демак ABC тенг томонли учбурчак (XX таъриф). Шуни исботлаш (ясаш) талаб қилинган эди.

«Негизлар» нинг муҳим тарихий аҳамиятидан яна бири шундан иборатки, у геометрияни мантиқий жиҳатдан жиддий равишда баён этиш ғоясини бизнинг давримизгача етказди. Бизнинг давримизгача бўлган фан тарихининг буюк намояндаларидан Коперник, Галилей, Декарт, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Ломоносов, Лобачевский, ал-Хоразмий, Беруний, Ибн-Сино, Улуғбек, Умар Хайём ва бошқалар ҳам математикани Евклиднинг «Негизлар» идан ўрганишган. Лекин бу асар ҳам камчиликлардан холи эмас. «Негизлар» нинг асосий камчиликлари нималардан иборат?

1. Евклид томонидан берилган баъзи таърифлар ҳеч нарсани аниқламайди (масалан, нуқта таърифи) ва Евклиднинг ўзи бу таърифлардан фойдаланмайди. Таърифларда ўзи таърифланиши керак бўлган тушунчалар бор, масалан «узунлик», «эн», «чегара» ва ҳоказо. Лекин айлана, учбурчак, тўғри бурчак, ўтмас ва ўткир бурчакка берган таърифлари қониқарли.

2. Евклид айрим жумлаларни постулат, айримларини эса аксиома деб атаган, бу икки тушунча орасида мантиқий фарқ йўқ, баъзи кишиларнинг фикрига қараганда у постулат деб фақат геометрик фигураларнинг хоссаларини аниқлайдиган жумлаларни олган, қолган ҳар қандай миқдорлар хоссаларини аниқловчи жумлаларни аксиомалар сифатида қабул қилган. Замонавий адабиётда аксиома билан постулат бир маънода ишлатилади.

«Негизлар» нинг асосий камчиликларидан яна бири унда берилмаган аксиомалардан, масалан, узлуксизлик аксиомасидан фойдаланиш ҳолларининг юз беришидир. Юқорида тенг томонли учбурчакни ясаш масаласини кўрганимизда икки айлананинг С нуқтада кесишиш факти ҳеч жойда қайд қилинмаган. Мантиқий жиҳатдан бу ерда нуқсон бор, бу айланаларнинг кесишиши кейинчалик келадиган мулоҳаза (узлуксизлик тушунчаси) га асосланади.

Худди шунга ўхшаш тартиб ва ҳаракат аксиомалари ҳам етишмайди (бу аксиомаларнинг мазмуни билан кейинроқ танишамиз).

«Негизлар» га танқидий нуқтаи назардан қараганда, шуни ҳам эътиборга олиш керакки, унинг асосий камчиликлари фақат XIX асрнинг охирларидагина ошкор қилинди.

5- §. Бешинчи постулатни исботлаш учун уринишлар

Геометрия тарихида Евклиднинг бешинчи постулати ғоят муҳим роль ўйнайди. Бу постулат қадимги замондан буён математиклар диққатини ўзига жалб қилиб келди, улар геометрияни бу постулатдан халос қилиш, ундаги даъвони исботлаш, уни олдинги постулат ва аксиомалардан келтириб чиқаришга интилдилар. Бундай қизиқишларнинг сабабларидан бири, берилган постулатлардан аввалги тўрттаси ўз- ўзидан аён бўлиб, бешинчи постулатнинг аёнлиги бевосита кўриниб турмаганлигидадир, иккинчиси эса, бешинчи постулатдан Евклиднинг ўзи иложи борича кам фойдаланишга ҳаракат қилганлигидадир, ундан фақат биринчи марта 29- жумлани исботлашда фойдаланган. Шуниси қизиқки, Евклиддан сўнг қарийб 2000 йил мобайнида бешинчи постулатни исботлаш учун уриниб кўрмаган бирорта ҳам йирик математик қолмаган. Лекин бу олимларнинг кўпчилиги Евклиднинг постулат ва аксиомаларидан аслида мантиқан келиб чиқадиган бирорта жумлани олиб (кўплари учун у жумла аён туюлган), сўнгра бешинчи постулатни исботладим, деб даъво қилганлар. Шундай олимлардан баъзиларининг ишларини таъкидлаб ўтамиз.

1. Эрамиздан аввалги I асрда яшаган Посидоний «Текисликда тўғри чизиқдан бир томонда ва бир хил масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрни тўғри чизиқ бўлади» деган жумлани исботсиз қабул қилиб бешинчи постулатни исботлашга эришади.

2. Грек математикларидан Проклнинг (410—485) «Кесишмайдиган икки тўғри чизиқ орасидаги масофа чегараланган миқдорда» (Прокл фикрича хатто ўзгармас миқдордир) тасдиқлаши бешинчи постулатга эквивалентдир.

3. Озарбайжон олими Насриддин Тусий (1201 — 1274) ушбу фикрга асосланади: «Агар икки a, b тўғри чизиқдан биринчиси AB кесмага перпендикуляр ($A\in a$, $B\in b$), иккинчиси эса оғма бўлса, у вақтда b тўғри чизиқдан a тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг AB нинг b билан ўткир бурчак ташкил қилган томондагиси AB дан кичик, b билан ўтмас бурчак ташкил қилган томондагиси эса AB дан каттадир». Шу фаразга асосланиб бешинчи постулатга ўз «исботини» беради.

4. Инглиз математиги, Оксфорд университетининг профессори Джон Валлис (1616 — 1703) «Бир-бирига ўхшаш, лекин тенг бўлмаган иккита учбурчак мавжуд» деган фаразни қабул қилиб, бешинчи постулатни «исботлайди».

5. Венгр математиги Фаркаш Больян (1775 — 1856) «Бир тўғри чизиқда ётмаган ҳар қандай учта нуқта битта айланада ётади» ёки шундай табиатли уч нуқтадан айлана ўтказиш мумкин деган фаразга асосланиб, бешинчи постулат «исботини» беради ва ҳоказо.

Шунга ўхшаш кўпгина олимларнинг номларини келтириш мумкинки, улар ўзлари учун аён ҳисобланган бирор жумлани олиб, бешинчи постулатни «исботлашга» муваффақ бўлганлар. Лекин уларнинг кўпчилиги, ўзлари қабул қилган жумланинг бешинчи постулатга эквивалент эканини сезмай қолганлар. Энди V постулатнинг баъзи эквивалентларини келтирайлик. Аввало исботлари шу постулатга суянмаган бир неча фактни келтирайлик (Евклид ҳам уларни бешинчи постулатдан фойдаланмай исботлаган):

а) Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакнинг ҳар биридан катта.

б) Текисликда тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан бу тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

в) Бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади.

г) Агар икки тўғри чизиқ бирор тўғри чизиқ билан кесишса ва кесишишда ҳосил бўлган ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, бу тўғри чизиқлар параллел бўлади.

д) Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесганда мос бурчаклар (ҳамда ички алмашинувчи бурчаклар) ўзаро тенг бўлса, бу тўғри чизиқлар параллел бўлади ва ҳоказо.

Теорема. «Текисликда тўғри чизиқда ётмаган нуқта орқали шу тўғри чизиққа параллел бўлган фақат битта тўғри чизиқ ўтади» деган фараз бешинчи постулатга эквивалент. (Джон Плейфер ифодалаган параллеллик аксиомаси.)

Исбот. 1. a тўғри чизиқ ва $D\overline{\in} a$ нуқта берилган бўлсин (2-чизма). D нуқтадан a тўғри чизиққа DA га перпендикуляр тушириб, D нуқтадан DA га перпендикуляр b тўғри чизиқни ўтказамиз: юқоридаги в) жумлага асосан $a \parallel b$; D нуқтадан ўтиб, b дан фарқли бўлган ҳар қандай l тўғри чизиқ DA тўғри чизиқ билан унинг бирор томонида ўткир бурчак ҳосил қилади. a билан b ни кесиб ўтган DA тўғри чизиқнинг улар билан ҳосил қилган ички бир томонли бурчакларидан бири 90°, иккинчиси α бўлиб, равшанки, $\alpha + 90° < 180°$. У ҳолда бешинчи постулатга асосан l тўғри чизиқ a билан кесишади. Демак, D нуқтадан ўтиб, a билан кесишмайдиган фақат битта b тўғри чизиқ мавжуд.

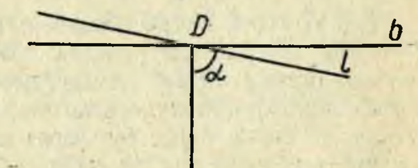
2. Энди тескари даъвони, яъни бешинчи постулатни теорема сифатида исботлайлик.

a, b тўғри чизиқлар берилган бўлсин. Иккала тўғри чизиқ билан кесишадиган бирор l тўғри чизиқ ўтказайлик. $a \cap l = C$, $b \cap l = D$ бўлсин (3-чизма). Ички бир томонли бурчакларни мос равишда, α, β деб белгилаб, $\alpha + \beta < 180°$ шартда a билан b нинг шу томонда кесишишини кўрсатайлик. D нуқтадан шундай c тўғри чизиқ ўтказайликки, унинг l тўғри чизиқ билан ҳосил қилган ички бир томонли бурчаги $\gamma' = \alpha$ бўлсин. Аммо $\gamma' + \gamma = 2d \Rightarrow \alpha + \gamma = 2d$, демак, $\gamma > \beta$ ва c тўғри чизиқ b дан фарқли. Юқорида келтирилган г) жумлага асосан $a \parallel c$. Плейфер аксиомасига асосан b билан a тўғри чизиқ кесишади (параллел тўғри чизиқнинг ягоналигига асосан).

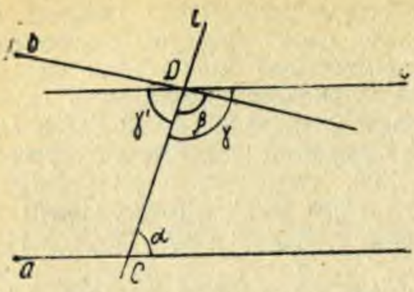
Теорема. «Учбурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг» деган тасдиқ бешинчи постулатга эквивалентдир.

Исбот. 1. Ихтиёрий a, b тўғри чизиқларни l тўғри чизиқ билан кесганда ҳосил бўлган ички бир томонли α, β бурчакларнинг йиғиндиси 180° дан кичик бўлсин (4- чизма). b тўғри чизиқнинг D нуқтасидан a га перпендикуляр DE тўғри чизиқни ўтказамиз, сўнгра D нуқтадан DE тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган c тўғри чизиқни ўтказамиз. b билан c тўғри чизиқ орасидаги ўткир бурчакни θ деб, b билан DE тўғри чизиқ орасидаги бурчакни эса γ деб белгилайлик (равшанки, $\gamma + \theta = 90°$).

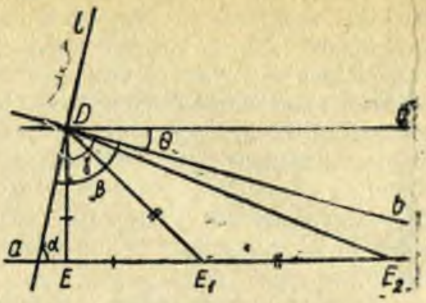
a тўғри чизиқда $DE = EE_1$, $DE_1 = E_1E_2$, $DE_2 = E_2E_3 = \ldots = E_{n-1}E_n$ шартларни қаноатлантирувчи $E_1, E_2, \ldots, E_n$ нуқталарни ҳосил қилиб, $\triangle DEE_1$, $\triangle DE_1E_2, \ldots, \triangle DE_{n-1}E_n$ ларни текширамиз. Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси π га тенг бўлгани ва $\triangle DEE_1$ нинг тенг ёнли учбурчак эканлигидан $\angle EE_1D = \frac{\pi}{4}$ бўлади. $\triangle DE_1E_2$ ҳам тенг ёнли бўлгани учун $\angle EE_2D = \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2^3}$ бўлади. Ниҳоят, $\angle EE_nD = \frac{\pi}{2^{n+1}}$ бўлиб, $\angle EDE_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2^{n+1}}$ (*). $\gamma < \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун (*) тенгликда n ни шундай катта қилиб олиш мумкинки, $\angle EDE_n > \gamma$ бўлади. У ҳолда b тўғри чизиқ $\triangle EDE_n$ нинг учидаги бурчакнинг ичида қолиб, шу бурчак қаршисидаги томонни, яъни a ни кесиб ўтади.



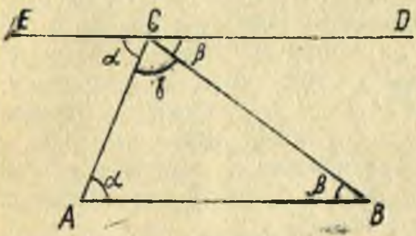
2- чизма



3- чизма



4- чизма



5- чизма

2. Энди бешинчи постулатни ўринли деб олиб, учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенглигини исботлайлик.

$\triangle ABC$ берилган бўлсин (5- чизма). Унинг ички бурчакларини мос равишда α, β, γ деб белгилайлик. C нуқтадан AB томонга параллел қилиб CD тўғри чизиқни ўтказамиз (аввалги исботланган теоремага асосан бу тўғри чизиқ ягонадир). У ҳолда юқоридаги д) жумлага асосан $\angle BCD = \beta$, $\angle ACE = \alpha$ бўлиб, $\angle ACB + \angle BCD + \angle ACE = 180°$ (ёйиқ бурчак) бўлгани учун $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Қуйидаги жумлалар ҳам бешинчи постулатга эквивалентдир.

1. Учбурчакнинг баландликлари доимо кесишади.
2. Юзи етарлича катта бўлган учбурчак мавжуд.
3. Айланага ички чизилган мунтазам олтибурчак томони шу айлана радиусига тенг.
4. Пифагор теоремаси.
5. Бурчак ичида олинган нуқтадан шу бурчакнинг иккала томонини кесувчи тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва ҳоказо. Булардан ташқари Посидоний, Прокл, Насриддин Тусий, Валлис, Больян томонидан қабул қилинган жумлалар ҳам бешинчи постулатга эквивалентдир.

6- §. Саккери, Ламберт ва Лежандр ишлари

XVIII асрга келиб бешинчи постулатни исботлаш учун қуйидаги принцип асосида иш тутилди: бешинчи постулат уни инкор этувчи жумла (фараз) билан алмаштирилиб, ҳосил қилинган янги система асосида мантиқий хулосалар чиқарила бошланди. Бу вақтда бешинчи постулат билан бирга бу фараз асосида чиқарилган хулосалар орасида эртами-кечми зидлик пайдо бўлади, яъни бир-бирини инкор этувчи камида иккита жумла вужудга келади. Худди шу усул билан бешинчи постулатни исботлашга Саккери, Ламберт ва Лежандр уриниб кўришган. Италиялик олим Саккери (1667 — 1733) муҳокамаларида асосидаги иккита бурчаги тўғри ва ён томонлари тенг бўлган тўртбурчак олинган. (Бундай тўртбурчак одатда Хайём — Тусий—Саккери тўртбурчаги деб юритилади, чунки худди шундай тўртбурчакни XI асрда Хайём, кейинчалик ал-Тусий ҳам текширган.) У бундай тўртбурчакнинг қолган иккита бурчагининг тенглигини осонгина исботлаб, уларнинг катталиги ҳақида учта гипотезани қўяди: 1) ўтмас бурчак; 2) тўғри бурчак; 3) ўткир бурчак. Ўтмас бурчак гипотезасини қабул қилиб, ундан натижалар чиқара бориш билан зидликка учрайди, шунинг учун бу гипотезани қарамайди. Тўғри бурчак гипотезасини текшириб, унинг бешинчи постулатга эквивалентлигини исботлайди. Ниҳоят, ўткир бурчак гипотезасини қабул қилиб, ундан мантиқ қонунлари асосида натижалар чиқара бошлайди. Саккери бу гипотезани зидликка учратиш учун кўп ҳаракат қилади, чунки ўткир бурчак гипотезаси ҳам зидликка учраса, фақат тўғри бурчак гипотезаси ўринли бўлиб, бешинчи постулатни тескарисидан исботлаш усули билан исботлашга муваффақ бўлган бўлар эди. Ўткир бурчак гипотезасини қабул қилиб, Саккери қуйидаги **теоремаларни** исботлашга эришади:

1. Битта тўғри чизиққа ўтказилган перпендикуляр ва оғма тўғри чизиқлар ўзаро доимо кесишавермайди.

2. Текисликда тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан бу тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида иккита тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

3. Текисликда тўғри чизиқдан бир хил масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрни эгри чизиқдир ва ҳоказо.

Бу жумлалар Евклид геометриясида ўринли эмас, албатта. «Евклид геометриясидан бошқа геометрияни бўлиши мумкин эмас» деган фикрга қатъий ишонган Саккери ўткир бурчак гипотезасини зидликка учратишга ҳаракат қилиб, ҳисоблашда баъзи хатоларга йўл қўйиш билан бунга эришади.

Немис математиги Ламбертни (1728 — 1777) бешинчи постулат устида иш олиб борган Саккери ишининг давомчиси деса бўлади. У 1766 йилда ёзган «Параллел тўғри чизиқлар назарияси» номли асарида, иккита бурчаги эмас, балки учта бурчаги тўғри бурчакдан иборат бўлган тўртбурчакни текширади. Шундай тўртбурчакнинг тўртинчи бурчагининг катталиги ҳақида Ламберт ҳам учта гипотезани қўяди: 1) ўтмас бурчак: 2) тўғри бурчак; 3) ўткир бурчак. Саккерига ўхшаш, Ламберт ҳам ўтмас бурчак гипотезасини зидликка учратиб, тўғри бурчак гипотезасининг бешинчи постулатга эквивалентлигини кўрсатиб, бутун диққат эътиборини ўткир бурчак гипотезасига қаратади. Ламберт ўткир бурчак гипотезасидан мантиқий хулосалар чиқара бориб, Саккери олган натижаларга келади, ҳатто унга қўшимча тарзда қуйидагиларнинг ҳам ўринли эканини исботлайди:

1. Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси ёйиқ бурчакдан кичик.

2. Учбурчакнинг юзи унинг нуқсонига, яъни $[2d - (\alpha + \beta + \gamma)]$ га пропорционал.

Ламберт ўткир бурчак гипотезасини яна ҳам чуқурлаштира бориб, ҳеч қандай зидликка кела олмади, демак ўткир бурчак гипотезасини тадқиқотларимни босмага бериш ҳолатида эмасман ва умрим бўйи бунга журъат қилолмасам керак» деган фикрни айтган.

Ноевклидий геометриянинг яратилишига ҳисса қўшган математиклардан бири венгриялик офицер Больяидир (1802 — 1860). 1823 йили Янош Больяи ноевклидий геометрияни очишга муваффақ бўлди. У 1832 йили (Лобачевскийдан кейин) ўзининг отаси қаламига мансуб китобга илова тариқасида «Аппендикс» деб аталган асарини эълон қилади. Бу иш билан танишган Гаусс Яношнинг отасига ёзган хатида «бу ишни мен мақтолмайман, уни мақташ ўзимни мақташдир, чунки бу иш сўнгги 30 — 35 йил давомида менинг бу соҳада қилган ишларимнинг худди ўзидир» деб ёзади. Катта обрўга эга бўлган Гауссдан бундай жавобни олиш Янош Больяини жуда ҳаяжонга келтиради ва бу соҳадаги ишини тарк этиб, қолган ҳаётини оғир мусибатда ўтказади.

Гаусс ва Больяи томонидан ноевклидий геометрия соҳасида қилинган илмий ишлар улуғ рус математиги Николай Иванович Лобачевский томонидан бу соҳада қилинган ишларнинг фақат бир қисмидир.

Николай Иванович Лобачевский 1792 йил 1 декабрда Нижний Новгород шаҳрида майда чиновник оиласида дунёга келади. 1811 йили Қозон университетини муваффақиятли тугатганидан сўнг, унинг қобилиятига ва меҳнатсеварлигига қойил қолган олимлар уни шу университетда ишга олиб қолишади. У 1816 йилдан бошлаб профессор лавозимида ишлай бошлайди. Лобачевский биринчи педагогик фаолиятини студентларга геометриядан лекция ўқишдан бошлайди. У айниқса «Геометрия асослари» ни чуқур ўрганади, натижада Евклиднинг «Негизлар» ида катта етишмовчиликлар борлигини сезади, умуман геометрияни негизидан бошлаб қайта кўриб чиқишни ўз олдига мақсад қилиб қўяди. 1815 — 1817 йиллардан бошлаб у ҳам ишни бошқа олимлар каби, бешинчи постулатни таҳлил қилишдан бошлайди. Лобачевский бешинчи постулатга берилган исботларда қатъийлик йўқлигини сезади. Ўзининг дастлабки ишларида бешинчи постулат ҳақида бундай дейди: «Унинг жиддий исботи ҳали топилганича йўқ».

1826 йил 11 февралда Қозон университети физика-математика факультетининг илмий советида Лобачевский «Геометриядаги принциплар ҳақида мулоҳазалар» номли доклад қилиб, уни 1829 йили шу университетнинг «Казанский вестник» журналида «О началах геометрии» номи билан бостириб чиқаради. Илмий советда қилинган доклад ва журналда чиққан юқоридаги мақола Лобачевскийни ноевклидий геометрия бўйича қилган илмий ишининг илк натижалари ҳисобланади. Шунинг учун 11 февраль (1826 йил) ноевклидий геометриянинг туғилиш санаси ҳисобланади. Лобачевский бу асардаги натижа—хулосаларни янада такомиллаштириб, қуйидаги асарларни яратди.

1. Хаёлий геометрия (Воображаемая геометрия) (1835 й).
2. Хаёлий геометриянинг баъзи интегралларга татбиқи (1836).
3. Параллеллар назарияси билан тўлдирилган геометрия негизлари (1838).
4. Параллел тўғри чизиқлар назарияси бўйича тадқиқот (1840).
5. Пангеометрия (1855).

Лобачевскийнинг илмий тадқиқотини қуйидагича якунлаш мумкин:

инкор қила олмади. Лекин, сфера устида тўғри чизиқлар ролини бажарувчи катта айланалар олинса, ўтмас бурчак гипотезаси шу сфера устида ўринли бўлишини биринчи бор Ламберт сезган, шундан сўнг ўткир бурчак гипотезаси «қандайдир мавҳум сфера устида ўринли бўлиши керак» деган хулосага келади. (Бу фактнинг тўғрилигини III бобда кўрамиз.)

Математиканинг кўпгина соҳаларида йирик ишлари билан машҳур бўлган француз олими Лежандр (1752 — 1833) 1794 йили «Геометрия негизлари» номли асарини ёзади. Бу китоб Евклиднинг «Негизлар» асари ўрнига яратилган асар бўлиб, фақат Францияда эмас, балки бошқа мамлакатларда ҳам катта обрў қозонган. Бу китобнинг Евклид «Негизлари» дан фарқи шу эдики, баъзи исботлашлар соддалаштирилиб, ўқиш анча осонлаштирилган, бундан ташқари геометрия асосларига катта эътибор берилиб, параллеллар назариясига муфассал тўхталган. Лежандр тўртбурчакнинг эмас, балки учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси ҳақида учта гипотеза қўяди, яъни учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси: 1) 180° дан катта; 2) 180° га тенг; 3) 180° дан кичик. Иккинчи гипотезанинг бешинчи постулатга эквивалентлигини исботлайди (унинг исботи билан биз 5- § да танишганмиз). Лежандр биринчи ва учинчи гипотезаларни текшириб, қуйидаги теоремаларни исботлайди.

1. Ҳар қандай учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° дан катта бўла олмайди. Шу билан биринчи гипотезани йўққа чиқаради.

2. Агар бирорта учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° дан кичик бўлса, қолган ҳар қандай учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси ҳам 180° дан кичик бўлади.

Бу теоремани Лежандр мантиқий жиҳатдан бекам-кўст исботлайди. Лекин учинчи гипотезани ҳам зидликка учратиш учун, яъни бешинчи постулат исботига эришиш мақсадида унга аёний жиҳатдан тўғри туйилган «битта тўғри чизиққа ўтказилган оғма ва перпендикуляр доимо кесишади» ёки «ўткир бурчак ичида олинган ихтиёрий нуқтадан бу бурчакнинг иккала томонини кесадиган тўғри чизиқни доимо ўтказиш мумкин» ибораларни киритади. Бунинг натижасида у бешинчи постулатни исботладим деб даъво қилади.

Демак, Саккери, Ламберт ва Лежандрлар бешинчи постулат инкорини олиб, уни зидликка учратиш йўли асосида иш олиб бордилар. Бу йўл ноевклидий геометриянинг яратилишига илк қадам эди.

7-§. Ноевклидий геометриянинг вужудга келиши. Н. И. Лобачевский

Бешинчи постулатни исботлашга доир уринишлар геометрия структурасини ойдинлаштириш борасида муҳим роль касб этди ва V постулатни қолган аксиомалар ва улардан чиққан натижалар ёрдамида исботлаб бўлмайди деган фикрлар туғилишига замин яратиб берди.

Шундай хулосага келган олимлардан бири, улуғ немис математиги Карл Фридрих Гауссдир (1777 — 1855). Ноевклидий геометрияни яратиш соҳасидаги Гаусснинг ишлари унинг вафотидан кейингина фан аҳлига маълум бўлди. 1829 йилда Гаусс ўз дўсти Бесселега ёзган хатида: «Эҳтимол, мен яқин орада бу масала бўйича ниҳоятда кенг

1) бешинчи постулатни Евклиднинг қолган аксиома ва постулатларидан мантиқ қонунлари асосида келтириб чиқариш мумкин эмас;

2) бешинчи постулат ўринли бўлмаган геометрия ҳам мавжуд.

Шуниси ачинарлики, Лобачевский ғоясини кўпчилик олимлар тушуниб етмадилар, унинг очган буюк янгиликларини эътироф этмадилар, бунинг устига, баъзилар Лобачевский «ақлдан озибди» деган ибораларни ишлатишгача бориб етдилар. Лобачевский ғоялари унинг вафотидан сўнг кенг эътироф этилди.

Лобачевский илмий ишлар билан бир вақтда ташкилотчилик ишларда ҳам актив қатнашди, 20 йил давомида (1827 — 1846) Қозон университетининг ректори лавозимида ишлади. Ҳаётининг сўнгги йилларида иккала кўзи ожиз бўлиб қолади, лекин шунга қарамай, илмий ишни давом эттириб, ўзининг сўнгги асари «Пангеометрия» ни диктовка қилиб ёздиради.

II БОБ. ЕВКЛИД ГЕОМЕТРИЯСИНИ ГИЛЬБЕРТ АКСИОМАТИКАСИ БЎЙИЧА АСОСЛАШ

I бобда таъкидлаганимиздек геометрияни аксиоматик метод асосида қуриш принципи қуйидагича эди. Аввало таърифсиз қабул қилинадиган асосий объектлар олиниб, уларни боғловчи нисбатлар аниқланиб, асосий тушунчалар номини оладиган объектлар ва нисбатларнинг хусусиятлари аксиомаларда ўз ифодасини топади. Сўнгра теоремалар, леммалар, фактлар мантиқий мулоҳазалар асосида исботланади.

Бу принципнинг энг муҳим томони шундаки, асосий объектлар ва уларни боғловчи асосий нисбатлардан уларнинг фақат аксиомалар шартларинигина қаноатлантириши талаб қилиниб, бошқа жиҳатдан уларни бутунлай ихтиёрий деб фараз қилинади.

Геометрия фанини шу йўсинда қуриш ғояси, асосан Лобачевский тадқиқотлари тўла эътироф этилгандан сўнг пайдо бўлди. Ўтган асрнинг охирига келиб, шу масалага доир Паш, Пеано, Пьери, Каган ва бошқа авторларнинг кўпгина илмий асарлари пайдо бўлди. Лекин машҳур немис математиги Давид Гильбертнинг 1899 йилда чоп этилган «Геометрия асослари» номли асари шундай асарлардан энг машҳуридир. Бу китобнинг русча таржимасига ёзилган сўз бошида профессор П. К. Рашевский унга қуйидагича характеристика беради: «Бизнинг кўз олдимизда бу асарнинг классик асарга айланиб кетишида Гильбертнинг кўрсатган асосий хизмати қуйидагидан иборат. Гильберт табиий равишда бўлакларга ажралган ва бунинг натижасида геометриянинг мантиқий тузилиши жуда ойдинлашиб қолган геометрия аксиоматикасини тузишга муваффақ бўлди. Аксиоматиканинг бу тариқа қисмларга бўлиниши, биринчидан, аксиомаларни содда ва қисқа ифодалашга имконият беради ва, иккинчидан, агар геометрияни бутун аксиоматикага асосланмасдан, фақат унинг таркибидаги айрим бўлакларга асосланиб, геометрияни қай даражада ривожлантириш мумкинлигини текширишга имкон беради. Аксиомаларнинг айрим груҳлар ролини аниқловчи бундай мантиқий анализи ҳақиқатда Гильбертнинг бир қанча ажойиб тадқиқотларида келтирилган, бу тадқиқотлар Гильберт асарининг анча қисмини ташкил этади. Ундан ташқари, Гильбертнинг асари бу соҳадаги яна бир қатор тадқиқотларни бошлаб юборишга сабаб бўлди».

Гильберт аксиоматикасидаги асосий объектлар «нуқта», «тўғри чизиқ», «текислик» дан иборат бўлиб, улар орасидаги нисбатлар «Тегишли» (ёки «. . . да ётади», «. . . дан ўтади»), «орасида», «конгруэнтлик» дир, буларнинг хоссаларини аниқловчи аксиомалар беш группага бўлинади. Бу аксиомаларнинг ҳар бир группаси ва улар асосида ҳосил қилинадиган баъзи натижалар билан танишиб чиқамиз.

Геометрияни Гильберт аксиоматикаси асосида баён этиш ҳозирги замон математикасида кам учрайди, шу сабабдан бу китобда унинг қисқача обзори келтирилади.

8-§. Тегишлилик (боғланиш) аксиомалари

Бу группа аксиомалари «тегишли» нисбатининг хоссаларини аниқлайди.

I_1. Ҳар қандай икки нуқта учун уларнинг ҳар бирига тегишли бўлган тўғри чизиқ мавжуд.

I_2. Иккита нуқтанинг ҳар бирига тегишли бўлган биттадан ортиқ тўғри чизиқ мавжуд эмас.

I_3. Тўғри чизиқда ҳеч бўлмаганда иккита нуқта мавжуд. Бир тўғри чизиқли ётмаган камида учта нуқта мавжуд.

I_4. Бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта учун уларнинг ҳар бирига тегишли текислик мавжуд. Ҳар бир текислик учун унга тегишли камида битта нуқта мавжуд.

I_5. Бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта учун шу нуқталарга тегишли бўлган биттадан ортиқ текислик мавжуд эмас.

I_6. Икки нуқтаси бирор текисликка тегишли бўлган тўғри чизиқнинг барча нуқталари ҳам шу текисликка тегишли бўлади.

I_7. Умумий нуқтага эга бўлган икки текислик бу нуқтадан фарқли камида яна битта умумий нуқтага эга бўлади.

I_8. Битта текисликка бир вақтда тегишли бўлмаган камида тўртта нуқта мавжуд.

Эслатмалар. 1. Иккита, учта ва ҳоказо нуқталар (тўғри чизиқлар, текисликлар) дейилганда турли нуқталар (тўғри чизиқлар, текисликлар) кўзда тутилади.

2. Келгусида «тегишли» сўзи ўрнига «қарашли» тушунилади. «. . . да ётади» , «. . . дан ўтади» ибораларини ҳам ишлатаверамиз. Масалан, A нуқта тўғри чизиқда тегишли дейиш ўрнига, A нуқта тўғри чизиққа қарашли, ёки A нуқта тўғри чизиқда ётади, ёки тўғри чизиқ A нуқтадан ўтади, деб олаверамиз.

Аксиомаларнинг биринчи группаси шу билан тугайди. Бу группадаги биринчи учта аксиома (I_{1-3}) текисликка тегишли образларга тааллуқли, қолган бешта аксиома (I_{4-8}) фазовий образларга тааллуқлидир. Юқорида келтирилган аксиомаларга асосланиб, баъзи теоремаларни исботлайлик.

1- теорема. Икки тўғри чизиқ биттадан ортиқ умумий нуқтага эга бўлмайди.

Исбот. Фараз қилайлик, икки тўғри чизиқ биттадан ортиқ умумий нуқтага эга бўлсин. Шу умумий нуқталардан иккитасини олсак, I_1, I_2 аксиомаларга асосан, бу тўғри чизиқлар устма-уст тушиб қолади. Б эса теорема шартига зиддир.

2- теорема. Икки текислик умумий нуқтага эга бўлса, уларнинг умумий нуқталари тўғри чизиқни ҳосил қилади.

Исбот. Ҳақиқатан Π_1, Π_2 текисликлар A умумий нуқтага эга бўлса, I_7 га асосан улар яна бирорта B умумий нуқтага эга бўлади. A, B нуқталардан ўтган ягона (I_{1-2} га асосан) AB тўғри чизиқнинг икки нуқтаси Π_1, Π_2 текисликларга тегишли. У ҳолда I_6 га асосан AB тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари Π_1, Π_2 текисликларга тегишли бўлади.

3- теорема. Кесишадиган икки тўғри чизиқ фақат битта текисликни аниқлайди.

Исбот. a, b тўғри чизиқлар бирор C нуқтада кесишсин. I_3 га асосан a тўғри чизиқда C дан фарқли A нуқта, b тўғри чизиқда C дан фарқли B нуқта мавжуддир. Равшанки, A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди, акс ҳолда I_{1-2} га асосан a, b устма-уст тушиб қолади. I_4 га асосан A, B, C нуқталардан ўтувчи П текислик мавжуддир, I_5 га асосан эса П текислик ягонадир. A, C нуқталар П га тегишли бўлгани учун тўғри чизиқ I_6 га асосан П га тегишли. Худди шунга ўхшаш b ҳам П га тегишлидир.

Юқоридаги I_{1-8} аксиомаларга ва исботланган учта теоремага асосланиб, машқ сифатида қуйидаги теоремаларни исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз:

4- теорема. Тўғри чизиқ ва унга тегишли бўлмаган нуқта фақат битта текисликни аниқлайди.

5- теорема. Агар тўғри чизиқ текисликка тегишли бўлмаса, улар кўпи билан битта умумий нуқтага эга бўлади.

6- теорема. Битта текисликка тегишли бўлиб, бир тўғри чизиқда ётмаган камида учта нуқта мавжуд.

9- §. Тартиб аксиомалари

Бу группадаги аксиомалар «орасида» деган нисбатнинг асосий хоссаларини аниқлайди ва бу нисбатга асосланиб, тўғри чизиқдаги нуқталарнииг бир-бирига нисбатан қандай тартибда жойлашганини аниқлашга имкон беради.

II_1. Агар B нуқта A нуқта билан C нуқта орасида ётса, у ҳолда A, B, C бир тўғри чизиқдаги учта турли нуқта бўлиб, B нуқта C нуқта билан A нуқта орасида ҳам ётади.

II_2. A, B бирор тўғри чизиқнинг нуқталари бўлса, шу тўғри чизиқда камида шундай битта C нуқта топиладики, B нуқта A билан C ни орасида ётади.

II_3. Тўғри чизиқнинг ҳар қандай учта нуқтасидан биттадан ортиғи қолган иккитаси орасида ётмайди.

Сўнгги аксиомани киритишдан аввал, баъзи тушунчаларни киритайлик.

1- таъриф. A, B дан иборат икки нуқта системаси AB ёки BA кесма деб аталади. A, B эса шу кесманинг учлари дейилади. A билан B орасидаги нуқталар кесманинг ички нуқталари дейилади. AB тўғри чизиқнинг қолган бошқа ҳамма нуқталари AB кесмага нисбатан ташқи нуқталар дейилади.

2- таъриф. Бир тўғри чизиқда ётмаган A, B, C нуқталар системаси ABC учбурчак деб аталади, A, B, C — учбурчакнинг учлари, ички нуқталари билан олинган AB, BC, AC кесмалар учбурчакнинг томонлари деб аталади.

Энди II_4 аксиомани келтирамиз, бу аксиома адабиётда венгриялик математик Паш номи билан юритилади.

II_4. ABC учбурчакнинг бирорта ҳам учидан ўтмайдиган ва унинг текислигида ётадиган a тўғри чизиқ шу учбурчакнинг AB томони билан умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда бу тўғри чизиқ ё BC кесма, ёки AC кесма нуқтаси орқали ўтади.

Энди аксиомаларнинг биринчи ва иккинчи группаси ёрдамида баъзи теоремаларни исботлайлик.

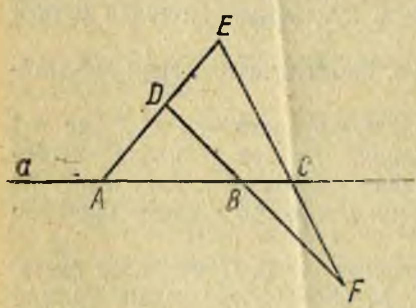
7- теорема. Тўғри чизиқнинг ихтиёрий икки нуқтаси орасида унинг камида битта нуқтаси мавжуд*.

Исбот. a тўғри чизиқ ва унда A ва C нуқталар берилган бўлсин (6- чизма). I_3 га асосан a га тегишли бўлмаган D нуқта мавжуд бўлиб, II_2 га асосан AD тўғри чизиқда шундай E нуқта топиладики, D нуқта A билан E орасида ётади, худди шунга ўхшаш EC тўғри чизиқда F нуқта мавжуд бўлиб, C нуқта E билан F орасида ётади. У ҳолда DF тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг учларидан ўтмай, унинг бир томонини кесиб (AE томонини D нуқтада) ўтади, демак Паш аксиомасига асосан бу тўғри чизиқ қолган томонлардан бири (EC томонини кесмайди, акс ҳолда EC тўғри чизиқ FD билан устма-уст тушиб қолади), яъни AC томонини B нуқтада кесади. Равшанки, B нуқта AC кесмага тегишли бўлиб, унинг учларидан бири эмас, демак B нуқта A билан C орасида ётади.

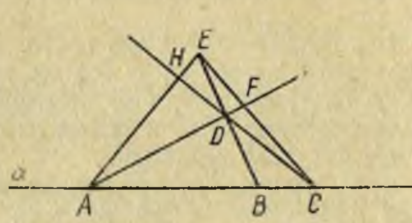
8- теорема. Бир тўғри чизиқда ётган учта нуқтадан фақат биттаси қолган иккитаси орасида ётади.

Исбот. a тўғри чизиқда A, B, C нуқталар берилган бўлсин (7- чизма). A нуқта B билан C, C эса B билан A орасида ётмасин, у ҳолда B нуқтанинг A билан C орасида ётишлигини исботлаймиз.

I_3 га асосан a га тегишли бўлмаган бирор D нуқтани оламиз. II_2 ни эътиборга олсак, BD тўғри чизиқда шундай E нуқта мавжудки, D нуқта B билан E орасида ётади. AD тўғри чизиқ ва BEC учбурчак учун Паш аксиомасини татбиқ қилсак, у тўғри чизиқ EC томонни F нуқтада кесади. Шунга ўхшаш CD тўғри чизиқ ва AEF учбурчак учун ҳам Паш аксиомасини қўлласак, AE тўғри чизиқда A билан E орасида П нуқта топилади ҳамда бундан D нуқтанинг A билан F орасида ётишлиги келиб чиқади. Энди AFC учбурчак ва ED тўғри



6- чизма



7- чизма

---

*Иккинчи группанинг олдинги учта аксиомаси A ва B нуқталар орасида бошқа (яъни ички) нуқталарнинг мавжудлигини тасдиқламайди.

чизиқ учун ҳам шу аксиомани қўлласак, B нуқтанинг A билан C орасида ётишлиги келиб чиқади.

Шунга ўхшаш қуйидаги теоремани мустақил исботланг.

9- теорема. Тўғри чизиқда берилган тўртта нуқтани A, B, C, D ҳарфлари билан шундай белгилаш мумкинки, унда B нуқта A билан C ҳамда A билан D орасида; C нуқта эса A билан D ҳамда B билан D орасида ётади.

Паш аксиомаси ва исбот қилинган кейинги икки теоремадан қуйидаги хулоса келиб чиқади: ҳар қандай кесманинг ҳам ички, ҳам ташқи нуқталари мавжуд бўлади.

I, II группа аксиомалари тўғри чизиқдаги нуқталарнинг жойланиш тартибини, нур (ярим тўғри чизиқ), ярим текислик, ярим фазо тушунчаларини киритиш имконини, ҳар қандай тўғри чизиқдаги нуқта уни иккита нурга ажратиб юборишини, текисликдаги ҳар қандай тўғри чизиқ шу текисликни иккита ярим текисликка ажратишини исботлаш имконини беради. Шунингдек, бурчак, синиқ чизиқ, кўпбурчак (учбурчак, тўртбурчак, . . .), содда кўпбурчак тушунчаларини ҳам муносиб равишда таърифлаш имконияти вужудга келади. Қатор муҳим факт-маълумотлар қўлга киритилади. Бу ўринда қийинроқ исбот қилинадиган теоремалар ҳам бор. Чунончи, ҳар қандай содда кўпбурчакнинг текисликни икки соҳага ажратиб юборишини исботлаш шулар жумласидандир.

10- §. Конгруэнтлик аксиомалари

Бу группа аксиомалари кесма ва бурчакларнинг конгруэнтлик (тенглик) тушунчасини аниқлайди.

III_1. Икки A ва B нуқта a тўғри чизиқнинг нуқтаси, A' эса шу тўғри чизиқнинг ёки бошқа бирор a' тўғри чизиқнинг нуқтаси бўлса, у ҳолда шу тўғри чизиқнинг A' нуқтадан берилган томонида ётувчи фақат битта B' нуқтани доимо топиш мумкинки, AB кесма $A'B'$ кесмага конгруэнт бўлади.

Бу аксиома кесмаларни кетма-кет қўяборишимкониятини беради. Кесмалар конгруэнтлигини $\equiv$ ишора билан белгилаймиз: $AB \equiv A'\ B'$, ҳар қандай AB кесма учун $AB \equiv BA$ муносабат ўринли ҳисобланади.

III_2. Икки кесма учинчи кесмага конгруэнт бўлса, улар бир-бирига конгруэнтдир, яъни $A'\ B' \equiv AB$, $A''\ B'' \equiv AB$ бўлса, $A'B' \equiv A''\ B''$.

III_3. AB ва BC кесмалар a тўғри чизиқнинг ички умумий нуқталарга эга бўлмаган кесмалари бўлсин. Шу тўғри чизиқнинг ёки бошқа a' тўғри чизиқнинг $A'B'$, $B'C'$ кесмалари ҳам ички умумий нуқталарга эга бўлмай, $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ бўлса, $AC \equiv A'\ C'$ бўлади.

III_4. П текисликда $\angle (h, k)$ бурчак ва шу текисликда ёки бирор П$'$ текисликда a' тўғри чизиқ берилган бўлиб, a' тўғри чизиқ билан аниқланган ярим текисликлардан бири ҳамда a' тўғри чизиқдаги O' учли h' нур тайин бўлсин. У ҳолда O' нуқтадан чиқувчи ва аниқланган ярим текисликда ётган шундай ягона k' нур мавжудки, $\angle (h, k)$ бурчак $\angle (h', k')$ бурчакка конгруэнт бўлади.

Бурчаклар орасидаги бундай нисбат $\angle(h,k) \equiv \angle(h', k')$ кўринишда белгиланади. Ҳар бир бурчак ўз-ўзига конгруэнт деб олинади.

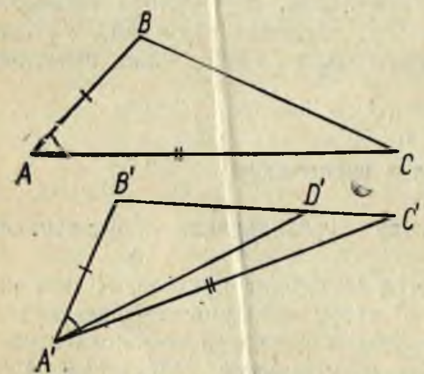
III_5. ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар учун $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ бўлса, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ бўлади.

Таъриф. ABC ва $A'B'C'$ учбурчакларнинг учта бурчаклари ва учта томонлари мос равишда конгруэнт бўлса, бу учбурчаклар *ўзаро конгруэнт* дейилади ва $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ кўринишда белгиланади.

Конгруэнтлик аксиомалари ёрдамида учбурчакларнинг тенглик аломатларини исботлаш мумкин.

10- теорема. ABC ва $A'B'C$ учбурчакларда $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ бўлса, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ бўлади.

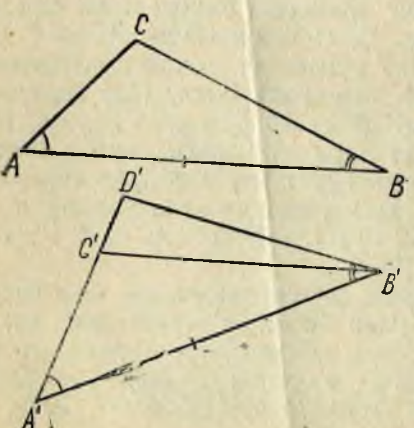
Исбот. III_1 га асосан: $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$ (8- чизма). Энди $BC \equiv B'C'$ ни исботлаймиз. Фараз қилайлик, $BC \not\equiv B'C'$ бўлсин. У ҳолда III_1 га асосан $B'C'$ нурда шундай D' нуқта топиладики, унинг учун $BC \equiv B'D'$ бўлади. ABC ва $A'B'D'$ учбурчакларда $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'D'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'D'$ бўлгани учун III_5 га кўра $\angle BAC \equiv \angle B'A'D'$. Демак, $A'B'$ нурнинг бир томонида $\angle BAC$ га конгруэнт бўлган иккита $\angle B'A'D'$, $\angle B'A'C'$ бурчак ҳосил бўлади, бу эса III_4 га зиддир. Фаразимиз нотўғри, демак, $BC \equiv B'C'$.



8- чизма

11- теорема. ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар учун $AB \equiv A'B'$, $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ бўлса, $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ бўлади.

Исбот. Аввал AC ва $A'C'$ томонларнинг ўзаро конгруэнтлигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $AC \not\equiv A'C'$ бўлсин. III_1 га асосан $A'C'$ нурда шундай D' нуқта (9- чизма) мавжудки, $AC \equiv A'D'$ бўлади. Бу вақтда 10- теоремага асосан $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'D'$ бўлиб, $\angle ABC \equiv \angle A'B'D'$ бўлади. Лекин шартга кўра $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Бу эса III_4 аксиомага зид. Демак, $AC \equiv A'C'$ бўлади. У ҳолда 10- теоремага асосан $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.



9- чизма

Тенг ёнли учбурчак, вертикал ва қўшни бурчаклар ва шу каби тушунчаларни мустақил таърифлаб, қуйидаги теоремаларни исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

12- теорема. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари ўзаро конгруэнтдир.

13- теорема. Вертикал бурчаклар конгруэнтдир.

14-теорема. ABC, $A'B'C'$ учбурчакларда $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $BC = B'C'$ бўлса, $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ бўлади.

15-теорема. Ҳар бир кесмани тенг иккига бўлиш мумкин, кесма ягона ўрта нуқтага эгадир.

16-теорема. Бурчакнинг биссектрисаси ягонадир.

Охирги теоремаларни исботсиз келтирдик. Булардан ташқари тўғри бурчакнинг мавжуд бўлишини, барча тўғри бурчакларнинг ўзаро тенглигини ва бир қатор теоремаларни исботлаш мумкин. Кесма, бурчакларга нисбатан «катта», «кичик» тушунчаларини киритиш мумкин.

11-§. Узлуксизлик аксиомаси

Бу аксиоманинг моҳияти шундан иборатки, у тўғри чизиқ нуқталари тўплами билан барча ҳақиқий сонлар тўплами орасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатишга имкон беради.

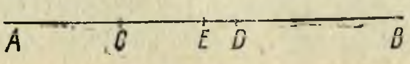
Узлуксизлик тушунчаси XIX асрнинг ўрталаригача аёнийдек туюлиб келган, тўғри чизиқнинг ёки айлананинг узлуксизлигига шубҳа қилинмаган, лекин буларнинг узлуксизлиги мантиқий равишда асосланмаган. Математикадаги узлуксизлик масаласини биринчи марта немис математиги Рихард Дедекинд (1831 — 1916) туб моҳияти билан ҳал қилган. Дедекинд қуйидаги аксиомани берган.

IV. AB кесманинг барча нуқталари шу кесма учлари билан биргаликда қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган қилиб икки синфга ажратилган бўлиб: а) AB кесманинг ҳар бир нуқтаси фақат битта синфга тегишли бўлиб, A нуқта биринчи синфга, B нуқта эса иккинчи синфга тегишли бўлсин, бу синфлар бўш бўлмасин; б) биринчи синфнинг A дан фарқли ҳар бир нуқтаси A билан иккинчи синфнинг ихтиёрий нуқтаси орасида ётсин. У ҳолда AB кесмада шундай C нуқта топиладики, A билан C орасидаги барча нуқталар биринчи синфга, C билан B орасидаги барча нуқталар иккинчи синфга тегишли бўлиб, C нуқтанинг ўзи биринчи ёки иккинчи синфга тегишли бўлади. C нуқта эса AB кесма нуқталарини икки синфга ажратувчи (кесадиган) нуқта деб аталади.

17-теорема. Узлуксизлик аксиомасидаги C нуқта ягонадир.

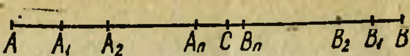
Исбот. Фараз қилайлик, аксиома шартини қаноатлантирадиган C дан фарқли яна D нуқта ҳам мавжуд бўлсин. Умумийликни бузмаслик учун D нуқта C билан B ни орасида ётади дейлик (10-чизма). У ҳолда C нуқта A билан D ни орасида ётади. C билан D ҳар хил нуқталар бўлгани учун 7-теоремага асосан улар орасида ётувчи бирор E нуқта A билан D орасида бўлгани учун биринчи синфга тегишли, E нуқта C билан B орасида бўлгани учун иккинчи синфга тегишли. Бу эса аксиома шартига зиддир. Демак C ягона экан.

18-теорема. Узлуксизлик аксиомасидаги иккинчи синфнинг B дан фарқли ҳар бир нуқтаси биринчи синфнинг ихтиёрий нуқтаси билан B орасида ётади.



10-чизма

20- теорема (*Кантор* **теоремаси**). Бирор a тўғри чизиқда бир-бирининг ичига жойлашган A_1B_1, A_2B_2 ,. . . , A_nB_n , . . . кесмаларнинг чексиз кетма-кетлиги берилган бўлиб, уларнинг ҳаммаси ичига жойлашган кесма мавжуд бўлмаса, у ҳолда a тўғри чизиқда шундай C нуқта мавжудки, у барча кесмага тегишли бўлади.



13- чизма

Исбот. Кесмалар ичма-ич жойлашганлиги учун A_i нуқта A билан B орасида бўлади ($i \geqslant 1$). A_1B_1 кесма нуқталарини икки синфга ажратамиз (13- чизма). Биринчи синфга A_i ларни ва A_1 билан A_i лар орасидаги барча нуқталарни киритамиз. A_1B_1 кесманинг қолган нуқталарини иккинчи синфга киритамиз. (Жумладан, B_i лар ҳам иккинчи синфга тегишли.) A_1B_1 кесма нуқталарини икки синфга бундай тариқада ажратиш Дедекинд аксиомасининг шартларини қаноатлантиради ва бирор C нуқта кесимни аниқлайди. Равшанки, C нуқта A_1 билан A_i ($i > 1$) орасида ётмагани ва улар билан устма-уст тушмагани учун биринчи синфга тегишли эмас. Демак, C нуқта иккинчи синфга тегишли, лекин C билан B орасидаги барча нуқталар иккинчи синфга тегишли бўлгани учун C нуқта $A_i\ B_i$ кесмаларнинг барчасига тегишли бўлади. C нинг ягоналигини кўрсатайлик. C дан фарқли C' нуқта ҳам шундай хоссага эга бўлсин десак, CC' кесма $A_i\ B_i$ кесмаларнинг барчасига тегишли бўлиб қолади, бу эса теорема шартига зидлик қилади.

I — IV группа аксиомаларига асосланиб қурилган геометрияни *абсолют геометрия* деб аталади. Юқорида исботланган теоремалар қатори қуйидаги теоремалар ҳам абсолют геометрияга тааллуқлидир. Тегишли исботлашларни ўқувчига ҳавола этамиз.

Эслатма. Бу теоремаларда учрайдиган тушунчаларни, масалан, учбурчакнинг баландлиги, медианаси, биссектрисаси, перпендикуляр, оғма, ички чизилган айлана, бурчакларнинг катта-кичиклиги, ички алмашинувчи бурчаклар ва ҳ. к. ўрта мактаб курсидан маълум.

21- теорема. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш мумкин ва у фақат биргина.

22- теорема. Тенг ёнли учбурчак биссектрисаси шу учбурчак учун ҳам медиана, ҳам баландлик бўлади.

23- теорема. Перпендикуляр оғмадан кичик.

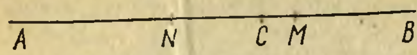
24- теорема. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакларнинг ҳар биридан катта.

25- теорема. Ҳар қандай учбурчакда тўғри ёки ўтмас бурчакларнинг сони биттадан ортиқ эмас.

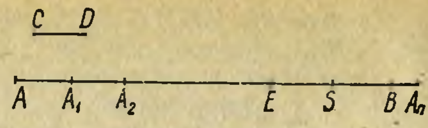
26- теорема. Учбурчакда катта томон қаршисида катта бурчак ётади ва аксинча.

27- теорема. Учбурчак икки томонининг йиғиндиси учинчи томонидан катта.

28- теорема. Икки тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ билан кесганда мос бурчаклар тенг бўлса ёки ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса, ёки ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, берилган икки тўғри чизиқ кесишмайди.



11- чизма



12- чизма

Исбот. N ва M нуқталар мос равишда биринчи ва иккинчи синф нуқталари бўлсин ($A \neq N$, $B \neq M$). У холда N нуқта A билан M нуқта орасида бўлгани учун ҳамда 8- теоремага асосан M нуқта N билан B орасида ётади (11- чизма).

Дедекинд аксиомаси ёрдамида қуйидаги икки муҳим теоремаии исботлаш мумкин.

19- теорема (*Архимед* теоремаси). Ихтиёрий AB, CD кесмалар берилган бўлсин (12- чизма). Учи A нуқтада бўлган AB нурда $CD \equiv AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv \ldots$ шартни қаноатлантирувчи $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталар олиниб, A_1 нуқта A билан A_2 орасида, A_2 нуқта A_1 билан A_3 орасида ва ҳ. к. бўлса, шундай n сон топиладики, B нуқта A билан A_n орасида ётади.

Исбот. Тескарисини фараз қилиш усули билан исботлаймиз, яъни n ҳар қандай олинганда ҳам A_1, A_2, . . . , A_n нуқталар A билан B орасида ётади дейлик. AB кесманинг барча нуқталарини қуйидагича икки синфга ажратайлик: биринчи синфга A нуқтани ва AB кесманинг шундай X нуқталарини киритамизки, уларнинг ҳар бири учун шундай натурал n сон мавжудки, ҳар бир X нуқта A билан A_n орасида бўлсин; иккинчи синфга шундай Y нуқталарни киритамизки, натурал n ҳар қандай бўлганда ҳам A_n нуқта A билан Y орасида ётсин. фаразга кўра B нуқта иккинчи синфга тегишли бўлади. Бу тариқада бўлинишдан кўриниб турибдики, AB кесманинг ҳар бир нуқтаси биринчи ёки иккинчи синфларнинг бирига тегишли. Хусусий ҳолда $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ лар биринчи синфга, B нуқта эса иккинчи синфга тегишли. Бундан ташқари биринчи синфнинг ҳар бир нуқтаси A билан иккинчи синфнинг нуқталари орасида ётади. Демак, Дедекинд аксиомасининг иккала шарти бажарилади. У ҳолда AB кесмада шундай S нуқта топиладики, A билан S орасидаги барча нуқталар биринчи синфга, S билан B орасидаги барча нуқталар иккинчи синфга тегишли бўлади. S нуқта бу синфнинг бирига тегишли бўлади. Лекин S нуқта биринчи синфга тегишли бўлолмайди, акс ҳолда шундай натурал n сони топилиб, S нуқта A билан A_n орасида бўлади, бу вақтда шартга кўра A_n нуқта иккинчи синфга тегишли деган хулоса чиқади. Бу ҳолнинг бўлиши мумкин эмас. Демак, S нуқта иккинчи синфга тегишли. У ҳолда III_1 га асосан SA нурда $SE = CD$ шартни қаноатлантирадиган E нуқтани оламиз, E нуқта A билан S орасида бўлгани учун E нуқта биринчи синфга тегишли бўлиб, шундай натурал n топиладики, E нуқта A билан A_n орасида бўлади. Лекин шу вақтнинг ўзида A_n нуқта A билан S орасида ётади. Равшанки, бу ҳолда S нуқта A билан A_{n+1} орасида ётади. Демак A_{n+1} ҳам, S ҳам биринчи синфга тегишли бўлиб қолади. Бу ҳолнинг юз бериши эса мумкин эмас. Демак, қилинган фаразимиз нотўғри.

29- теорема. Бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ бир-бири билан кесишмайди.

30- теорема. Тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида битта тўғри чизиқ ўтади.

31- теорема. Учбурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси 180° дан катта эмас.

32- теорема. Учбурчакнинг бирор учидан чиққан нур шу бурчак ичидан ўтса, бу нур шу бурчак қаршисидаги томонни кесади.

33- теорема. Учбурчакнинг учта биссектрисаси битта нуқтада кесишади ва бу нуқта учбурчакнинг ички нуқтаси бўлади.

12- §. Параллеллик аксиомаси

Юқорида абсолют геометриянинг теоремаларидаги 30- теоремага эътибор қилсак, унда тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида битта тўғри чизиқнинг ўтиши таъкидланиб, бироқ шундай тўғри чизиқнинг ягоналиги ҳақида ҳукм чиқарилмаган. Бундай тўғри чизиқнинг ягоналиги ёки ягона эмаслиги тўғрисида қўшимча талабнинг қўйилишига қараб Евклид геометрияси ёки Лобачевский геометрияси тўғрисидаги таълимотни ҳосил қиламиз. I — IV группа аксиомаларига суянган геометрия бу икки геометриянинг умумий қисмидир. Евклид геометриясида параллеллик аксиомаси қуйидагича ифодаланади.

V. Тўғри чизиқ ташқарисидаги нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиқ билан кесишмайдиган тўғри чизиқ биттадан ортиқ эмас.

Бу аксиома билан 30- теоремани назарда тутсак, қуйидаги теорема келиб чиқади.

34- теорема. Тўғри чизиқ ташқарисидаги нуқтадан бу тўғри чизиқ билан кесишмайдиган фақат битта тўғри чизиқ ўтади.

Энди I — V группа аксиомаларига асосланиб, Евклид геометриясини (яъни мактабда ўқитиладиган геометрияни) баён қилиш мумкин. Масалан:

35- теорема. Учбурчак ички бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг (31- теорема билан таққосланг).

36- теорема. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ички бурчакларнинг йиғиндисига тенг (24- теорема билан таққосланг).

37- теорема. Бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтадан фақат битта айлана ўтади.

38- теорема. Айланага ички чизилган мунтазам олтибурчак томони шу айлаиа радиусига тенг.

Ва ҳоказо.

Бу бобда биз Лобачевский геометриясининг батафсил баёнига тўхталмасдан, баъзи асосий фактлари билан танишамиз. Бу фактларни ўрганишда геометрияни аксиоматик равишда баён этишдаги қабул қилинган асосий қоидани назарда тутишимиз керак.

13-§. Лобачевский аксиомаси ва ундан келиб чиқадиган дастлабки хулосалар

Лобачевский геометриясининг аксиоматикаси абсолют геометрия аксиомалари қаторига Лобачевский аксиомасини қўшиш билан ҳосил қилинади. Демак, Лобачевский геометриясида абсолют геометриянинг барча таъриф ва теоремалари ўз кучини сақлайди.

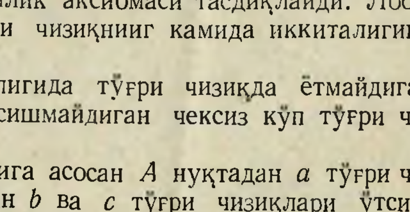
V.′ Лобачевский аксиомаси. Текисликда тўғри чизиқ ташқарисида олинган нуқтадан бу тўғри чизиқ билан кесишмайдиган камида иккита тўғри чизиқ ўтади.

Шуни таъкидлаб ўтамизки, тўғри чизиқда ётмайдиган нуқтадан унинг билан кесишмайдиган тўғри чизиқ ўтишлигини тасдиқловчи факт абсолют геометрияга тааллуқлидир (II боб, 30-теорема), бу тўғри чизиқнинг ягоналигини параллеллик аксиомаси тасдиқлайди. Лобачевский аксиомаси эса бундай тўғри чизиқнинг камида иккиталигини тасдиқлайди.

1-теорема. Лобачевский текислигида тўғри чизиқда ётмайдиган нуқтадан бу тўғри чизиқ билан кесишмайдиган чексиз кўп тўғри чизиқ ўтади.

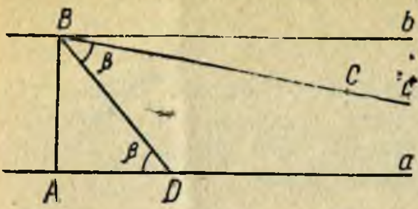
Исбот. Лобачевский аксиомасига асосан A нуқтадан a тўғри чизиқ билан (14-чизма) кесишмайдиган b ва c тўғри чизиқлари ўтсин. c тўғри чизиқда шундай C нуқтани оламизки, бу нуқта ва a тўғри чизиқ b тўғри чизиқ билан аниқланадиган турли ярим текисликларга тегишли бўлсин. a тўғри чизиқда ихтиёрий D нуқтани олиб, CD тўғри чизиқни ўтказсак, бу тўғри чизиқ b билан бирор B нуқтада кесишади, B нуқта C билан D орасида ётади. BC кесманинг ихтиёрий E нуқтасини олиб, AE тўғри чизиқни ўтказсак, бу тўғри чизиқ a билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам, AE билан a тўғри чизиқ бирор нуқтада кесишади деб фараз қилиб, DEF учбурчак ва b тўғри чизиққа нисбатан Паш аксиомасини қўлласак, a билан b кесишади, деган хулосага келамиз. Бу эса шартга зид.

Демак, BC кесма нуқталари чексиз кўп бўлгани учун AE га ўхшаш чексиз кўп тўғри чизиқлар A нуқтадан ўтиб, a билан кесишмайди.



14-чизма

Бешинчи постулатнинг барча эквивалентлари ҳам Лобачевский геометриясида ўз кучини йўқотади, жумладан, учбурчак ички бурчак-



15- чизма

ларнинг йиғиндиси энди 180° га тенг эмас. Лекин 11-§ даги 31-теоремани назарда тутсак, мантиқан қуйидаги натижа келиб чиқади.

2-теорема. Лобачевский текислигида учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° дан кичик.

3-теорема. Агар учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° дан кичик бўлса, Лобачевский аксиомаси ўринли бўлади.

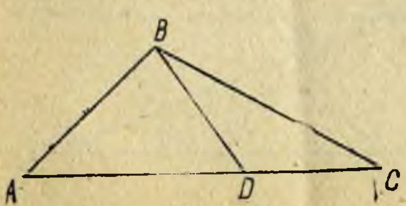
Исбот. AB кесманинг учларидан шу кесмага перпендикуляр бўлган a, b тўғри чизиқларни ўтказамиз. Абсолют геометриядан маълумки, a, b тўғри чизиқлар кесишмайди (15-чизма). B нуқтадан ўтиб, b дан фарқли a билан кесишмайдиган яна битта тўғри чизиқнинг мавжудлигини исботласак, мақсадга эришган бўламиз. a тўғри чизиқда ихтиёрий D нуқтани олиб, BD нурни ўтказсак, $\angle ADB = \beta$ бурчак ҳосил қилинади, сўнгра шу бурчакни В нуқтадан бошлаб, бир томони BD нурдан иборат қилиб қўямиз (ABD бурчакдан ташқарига), бу бурчакнинг иккинчи томони BC нур бўлсин. Шартга кўра, ABD учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° дан кичик бўлгани учун, яъни $90° + \beta + \angle ABD < 180°$ ёки $\beta + \angle ABD < 90°$, бундан $\angle ABC < 90°$. Бу вақтда BC тўғри чизиқ a билан кесишмайди. Аксинча BC тўғри чизиқ билан a бирор E нуқтада кесишади деб фараз қилсак, DBE учбурчак ҳосил бўлиб, $\angle ADB$ бу учбурчак учун ташқи бурчакдир. У ҳолда $\angle ADB = \angle DBE = \beta$ бўлгани учун, бу шарт 11-§ даги 24-теоремага зидлик қилади. Демак, BC билан a кесишмайди. Ушбу хулосага келдик: Лобачевский аксиомаси «учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° дан кичик» деган фаразга эквивалент.

ABC учбурчак ички бурчакларининг йиғиндисини $S_{\Delta ABC}$ билан белгиласак, $180° - S_{\Delta ABC}$ айирма мусбатдир, уни ABC учбурчакнинг *нуқсони* (дефекти) деб аталади ва $\delta_{\Delta ABC}$ билан белгиланади.

4-теорема. Учбурчакнинг нуқсони аддитивлик хоссасига бўйсунади, яъни (16-чизма) $\delta_{\Delta ABC} = \delta_{\Delta ABD} + \delta_{\Delta BDC}$.

Исбот. $\delta_{\Delta ABC} = 180° - S_{\Delta ABC} = 180° - (S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} - 180°) = (180° - S_{\Delta ABD}) + (180° - S_{\Delta BDC}) = \delta_{\Delta ABD} + \delta_{\Delta BDC}$.

5-теорема. Лобачевский текислигида учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси турли учбурчаклар учун турлича қийматга эга, яъни ўзгарувчи миқдордир.



16- чизма

Исбот. Фараз қилайлик, барча учбурчаклар ички бурчакларининг йиғиндиси ўзгармас γ бўлсин. (Равшанки, $\gamma < 180°$.) ABC учбурчакнинг (16-чизма) B учидан ўтувчи, AC томонини D нуқтада кесувчи BD нур ўтказсак, фаразга асосан, $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BDC} = \gamma$ бўлиб

$S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDC} = S_{\Delta ABC} + 180°$. Демак, $\gamma + \gamma = \gamma + 180°$ ёки $\gamma = 180°$. Бу эса юқоридаги теоремага зид.

Ҳар қандай тўртбурчакни иккита учбурчакка ажратиш мумкин бўлгани учун қуйидаги икки натижани чиқарамиз.

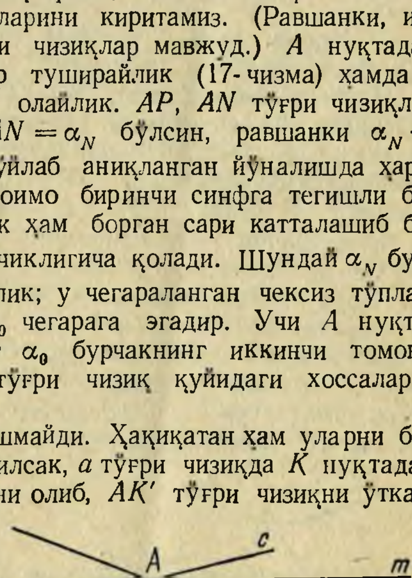
1. Лобачевский текислигида ҳар қандай тўртбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 360° дан кичик бўлиб, бу сон ҳар хил тўртбурчаклар учун ҳар хилдир.

2. Лобачевский текислигида бурчак катталиклари билан чизиқли катталиклар орасида боғланиш мавжуд (буни кейинроқ кўрамиз).

14- §. Лобачевский текислигидаги параллел тўғри чизиқлар

Лобачевский геометриясининг Евклид геометриясидан яна бир асосий фарқи текисликдаги тўғри чизиқларнинг жойланишида юз берадиган янги ҳоллардан иборат. Евклид геометриясида бир текисликдаги умумий нуқтаға эга бўлмаган тўғри чизиқлар параллел дейилади; Лобачевский текислигида эса параллел тўғри чизиқларни бошқача таърифлашга тўғри келади. 13- § даги 1- теоремага асосан a тўғри чизиқда ётмайдиган A нуқтадан a билан кесишмайдиган чексиз кўп тўғри чизиқ ўтади. Демак, маркази A нуқтада бўлган тўғри чизиқлар дастаси икки синфга ажралади. Биринчи синфга дастанинг a тўғри чизиқ билан кесишадиган барча тўғри чизиқларини, иккинчи синфга эса дастанинг қолган ҳамма тўғри чизиқларини киритамиз. (Равшанки, иккала синфда ҳам чексиз кўп тўғри чизиқлар мавжуд.) A нуқтадан a тўғри чизиққа AP перпендикуляр туширайлик (17- чизма) ҳамда a тўғри чизиқда йўналишни аниқлаб олайлик. AP, AN тўғри чизиқлар биринчи синфга тегишлидир. $\angle PAN = \alpha_N$ бўлсин, равшанки $\alpha_N < 90°$. N нуқта a тўғри чизиқ бўйлаб аниқланган йўналишда ҳаракатланиб борса, AN тўғри чизиқ доимо биринчи синфга тегишли бўлиб бораверади, у ҳолда α_N бурчак ҳам борган сари катталашиб бораверади, лекин доимо 90° дан кичиклигича қолади. Шундай α_N бурчаклар тўпламини ω деб белгилайлик; у чегараланган чексиз тўплам бўлганлиги сабабли, аниқ юқори α_0 чегарага эгадир. Учи A нуқтада, бир томони AP нурдан иборат α_0 бурчакнинг иккинчи томони AD нурни ҳосил қилади. AD тўғри чизиқ қуйидаги хоссаларга эга:

1°. AD тўғри чизиқ a билан кесишмайди. Ҳақиқатан ҳам уларни бирор K нуқтада кесишади деб фараз қилсак, a тўғри чизиқда K нуқтадан ўнг томонда ундан фарқли K' нуқтани олиб, AK' тўғри чизиқни ўтказсак, AK тўғри чизиқ биринчи синфга тегишли бўлиб, $\angle PAK$ ҳам ω га тегишли бўлади, лекин $\angle PAK > \alpha_0$. Бунинг бўлиши мумкин эмас, чунки α_0 бурчак ω нинг аниқ юқори чегараси.



17- чизма

2°. A нуқтадан ўтиб, PA билан α_0 дан кичик бурчак ҳосил қилган ҳар қандай тўғри чизиқ a билан кесишади, чунки бу вақтда у тўғри чизиқ биринчи синфга тегишли бўлади.

Лобачевский юқоридаги икки хоссага эга бўлган шундай AD тўғри чизиқни a тўғри чизиққа берилган йўналишда *параллел* деб атайди. Демак, Лобачевский геометриясида параллел тўғри чизиқлар тушунчаси бошқача таърифланади: берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа роппа-роса иккита параллел тўғри чизиқ ўтади, булардан бири a билан бир хил йўналишда, иккинчиси эса қарама-қарши йўналишдадир. Евклид геометриясидаги каби параллел тўғри чизиқларни // билан белгилаймиз.

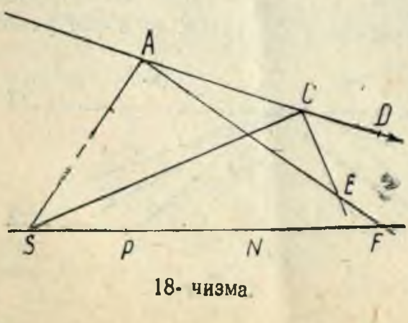
Хулоса қилиб айтиш керакки, Лобачевский текислигидаги a тўғри чизиқда ётмаган A нуқтадан ўтган барча тўғри чизиқлар икки синфга ажралиб, биринчи синфга a билан кесишадиганлари, иккинчи синфга эса a билан кесишмайдиганлари киради; бу иккинчи синфга қарашли тўғри чизиқлар узоқлашувчи дейилади. Бу икки синф тўғри чизиқларини ажратиб турувчи AD, AD' тўғри чизиқларни a га параллел деб атаймиз. α_0 — параллеллик бурчаги, AP — шу бурчакка мос параллеллик кесмаси деб аталади.

Энди параллел тўғри чизиқларнинг баъзи хоссаларига тўхтаб ўтайлик: параллел тўғри чизиқларга таъриф берилганда A нуқта махсус роль ўйнаган эди, ҳозир бу нуқта ўрнига AD тўғри чизиқдаги бошқа нуқтани олсак ҳам параллеллик таърифига халал етмаслигини кўрсатамиз.

6-теорема. Агар A нуқтага нисбатан $AD \| PN$ бўлса, у ҳолда AD тўғри чизиқнинг ихтиёрий C нуқтаси учун ҳам $AD \| PN$ бўлади.

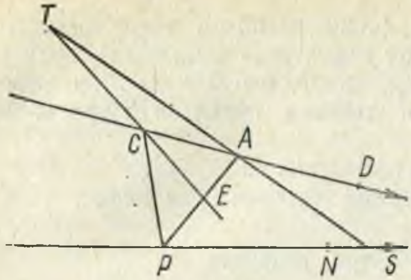
Исбот. Аввало шуни таъкидлаймизки, $AD \| PN$ бўлгани учун AD билан PN кесишмайди (18-чизма). Икки ҳолни текширамиз:

1-ҳол. C нуқта AD нурга тегишли бўлсин. PN тўғри чизиқнинг ихтиёрий S нуқтасини олиб, SA ва SC тўғри чизиқларни ўтказамиз, сўнгра $\angle SCD$ нинг ичидан CE нурни ўтказамиз. CE билан PN тўғри чизиқларнинг кесишишлигини кўрсатамиз. CE нурда ихтиёрий E нуқтани олайлик, агар E нуқта PN га тегишли бўлса, ёки E нуқта SN тўғри чизиққа нисбатан C билан ҳар хил томонда жойланиб қолса теорема исбот этилган бўлади. E нуқта C нуқта билан бирга SN тўғри чизиқнинг бир томонида ётсин. У ҳолда AE нур PN билан бирор F нуқтада кесишади (чунки $AD \| PN$). SAF учбурчак ва CE тўғри чизиқ учун Паш аксиомасини татбиқ қилсак, CE тўғри чизиқ SA ёки SF кесмалардан бирини кесиши керак, лекин SA ни кесмайди, чунки, у кесма $\angle DCS$ нинг ташқарисида, CE нур эса бурчакнинг ичида, демак CE нур SF ни кесади ва $AD \| PN$.

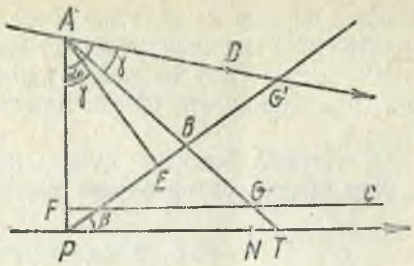


18- чизма

2-ҳол. C нуқта AD нурга тегишли бўлмасдан, унинг тўлдирувчисига тегишли бўлсин, яъни A нуқта C билан D нинг орасида ётсин. P, C, A нуқталардан PCA учбурчакни ҳосил қиламиз (19-чизма). $\angle PCA$ нинг ичидан ўтган CE их-



19- чизма



20- чизма

тиёрий нурни PN билан кесишишлигини исботласак, мақсадга эришган бўламиз. CE нинг тўлдирувчисида бирор T нуқтани олиб, TA тўғри чизиқни ўтказсак, у $\angle PAD$ нинг ичидан ўтади ва $AD \| PN$ бўлгани учун PN билан бирор S нуқтада кесишади. У ҳолда PAS учбурчак ва CE тўғри чизиқ учун Паш аксиомасидан CE нур PS билан кесишади деган натижага келамиз. Параллел тўғри чизиқлар ҳақида гапирилганда уларнинг қайси нуқтасига нисбатан параллеллиги таъкидланмайди.

7- теорема. $AD \| PN \Rightarrow PN \| AD$.

Исбот. AD тўғри чизиқнинг ихтиёрий A нуқтасидан PN га AP перпендикуляр туширамиз (20- чизма). Шартга кўра PN билан AD тўғри чизиқлар кесишмайди. $\angle APN$ нинг ичидан ўтган ихтиёрий PE нурнинг AD_{PN} билан кесишишини кўрсатсак кифоя. Бунинг учун PE тўғри чизиқнинг PN билан ҳосил қилган β бурчак α_0 дан (параллеллик бурчагидан) кичик бўлган ҳолни кўрсатсак бўлади. $AE \perp PE$ ни ўтказиб, $\angle PAE = \gamma$ десак, APE учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $180°$ дан кичик бўлгани учун $\gamma + 90° - \beta + 90° < 180°$ ёки $\gamma < \beta$ бўлади. $AE < AD$ бўлгани учун (гипотенуза катетдан катта) AP га A дан бошлаб AE кесмани ўлчаб қўйиб ($AE = AF$), F нуқтани топамиз. $AP \perp FC$ ни ўтказиб, FC нурни ҳосил қиламиз. $PN \perp AP$, $AP \perp FC$ бўлгани учун PN билан FC кесишмайди, $\angle DAE$ нинг ичига γ ни қўямиз, унинг бир томони AB нур PN билан T нуқтада кесишади (чунки AB нур параллеллик бурчаги ичидан ўтади). Паш аксиомасига асосан FC тўғри чизиқ AT билан бирор G нуқтада кесишади. AD нинг устига $AG = AG'$ ни қўйиб, G' нуқтани ҳосил қиламиз. У ҳолда $AG' \equiv AG$, $AE \equiv AF$ ва $\angle FAB \equiv \angle EAG'$ бўлгани учун $\triangle AEG' \equiv \triangle AFG$, бундан $\angle AEG' = \angle AFG = 90°$. Лекин $AE \perp PE$ бўлгани учун EG' кесма PE нурга тегишли, демак PE нур AD ни G' нуқтада кесади.

Қуйидаги теоремаларни юқоридаги каби исботлаш мумкин.

8- теорема. Икки тўғри чизиқнинг ҳар бири маълум йўналишдаги битта тўғри чизиққа параллел бўлса, улар ҳам шу йўналишда ўзаро параллел бўлади.

9- теорема. Икки параллел тўғри чизиқдан биридаги нуқтадан иккинчисигача бўлган масофа параллеллик йўналиши томон етарлича кичиклашиб боради, параллеллик йўналишига тескари томонда эса бу масофа етарлича катталашиб боради (яъни параллел тўғри чизиқлар параллеллик йўналиши томон бир-бирига асимптотик яқинлашиб боради).

10- теорема. Ҳар қандай ўткир бурчакнинг бир вақтда бир томонига перпендикуляр бўлиб, иккинчи томонга параллел тўғри чизиқ мавжуд.

Бу теорема бошқача қуйидагича ифодаланади:

Ҳар қандай ўткир бурчак параллеллик бурчаги бўла олади.

15-§. Узоқлашувчи тўғри чизиқлар

11- теорема. Битта тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ узоқлашувчидир.

Исбот. a тўғри чизиқ b, c тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлсин. 11- § даги 29- теоремага асосан b билан c кесишмайди (21- чизма). Лобачевский маъносида b билан c параллел эмас, чунки бу ҳолда параллеллик бурчаги $\alpha_0 = 90°$ бўлади. Демак, b ва c тўғри чизиқлар яқинлашувчи ҳам эмас, параллел ҳам эмас.

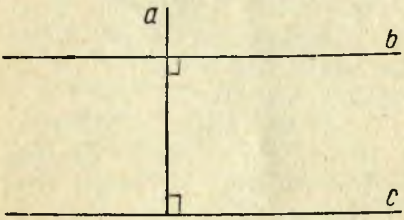
Шунга ўхшаш қуйидаги теорема ҳам ўринлидир.

12- теорема. Икки тўғри чизиқ билан учинчи тўғри чизиқ кесишиб, ҳосил қилинган мос бурчаклар тенг бўлса, бу тўғри чизиқлар узоқлашувчи бўлади.

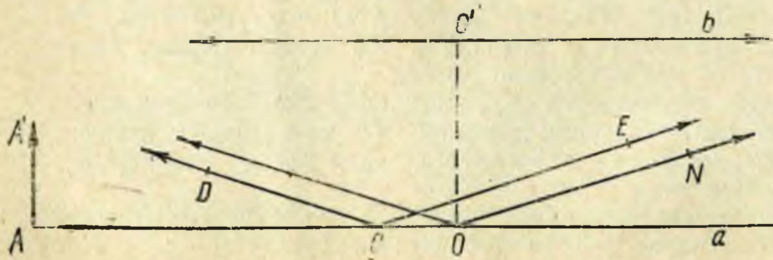
Хуллас, Евклид маъносидаги параллел тўғри чизиқлар Лобачевский маъносида узоқлашувчидир.

13- теорема. Узоқлашувчи икки тўғри чизиқ ягона умумий перпендикулярга эга бўлиб, бу перпендикулярнинг икки томонида улар бир-биридан етарлича узоқлашади.

Исбот. Икки узоқлашувчи тўғри чизиқ иккита умумий перпендикулярга эга бўлолмайди, акс ҳолда ҳамма бурчаклари 90° дан иборат тўғри тўртбурчак ҳосил қилинар эди, бу эса 13- § даги 5- теоремадан чиққан 1- натижага зиддир. Энди умумий перпендикулярнинг мавжудлигини исботлаймиз. a ва b тўғри чизиқлар узоқлашувчи бўлсин (22- чизма). a нинг ихтиёрий C нуқтасини олиб, ундан b га параллел CD ва CE тўғри чизиқларни ўтказамиз. $\angle ACD$ ва $\angle FCE$

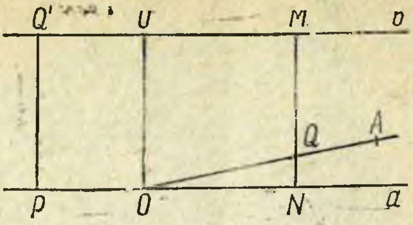


21- чизма



22- чизма

ларни текширайлик. Булардан бири, масалан, $\angle ACD$ ўткир бўлиб, иккинчиси, ўткир, тўғри ва ўтмас бўлиши мумкин (чизмада иккала бурчак ўткир бўлган ҳол кўрсатилган). Бу вақтда 14-§ даги 10-теоремага асосан $\angle ACD$ нинг CA томонига перпендикуляр ва CD томонига параллел AA' тўғри чизиқ мавжуддир, у ҳолда $CD \parallel b$ бўлгани учун 8-теоремага асосан $AA' \parallel b$. Шунинг сингари b нинг бошқа йўналишида унга параллел бўлган FF' ни топамиз. AF кесманинг ўрта нуқтаси O дан b га перпендикуляр OO' ни ўтказамиз. Энди OO' нинг a, b га умумий перпендикулярлигини исботлаймиз. Бунинг учун O нуқтадан b нинг икки йўналишига параллел қилиб $OM \parallel b$, $ON \parallel b$ тўғри чизиқларни ўтказамиз; $AO \equiv OF$ бўлгани учун (8-теоремага асосан) $\angle MOA \equiv \angle NOF$, $\angle MOO'$ ва $\angle NOO'$ бурчаклар ҳам параллеллик кесмаси OO' га мос келгани учун: $\angle MOO' \equiv \equiv \angle NOO'$. Демак, OO' кесма a, b га умумий перпендикуляр экан.



23- чизма

Энди теореманинг иккинчи қисмини исботлайлик, яъни узоқлашувчи икки тўғри чизиқнинг умумий перпендикулярдан иккала томонга қараб бир-биридан етарлича узоқлашишини кўрсатайлик. b тўғри чизиқдаги M нуқта O' нуқтадан шу тўғри чизиқ бўйлаб маълум йўналишда етарлича узоқлашсин (23- чизма). M дан a тўғри чизиққа перпендикуляр тушириб, унинг a билан кесишган нуқтасини N билан белгилайлик. O нуқтадан b тўғри чизиқдаги O' нуқтадан M га қараб йўналишида OA параллел тўғри чизиқни ўтказайлик. Равшанки, $\angle O'OA = = 90°$ бўлгани учун OA нур a билан b орасида тўлиқ жойлашади ва MN кесма билан бирор Q нуқтада кесишади. Q нуқта M билан N орасида ётгани учун $MN > QN$ (*). M нуқта b бўйлаб ҳаракатланганда Q нуқта OA нур бўйича ҳаракатланади. N нуқта ҳам $\angle AON$ ўткир бурчакнинг бир томонида O дан етарлича узоқлашганда QN кесма ҳам етарлича катталашади, у ҳолда (*) га асосан MN ҳам чексиз катталашади.

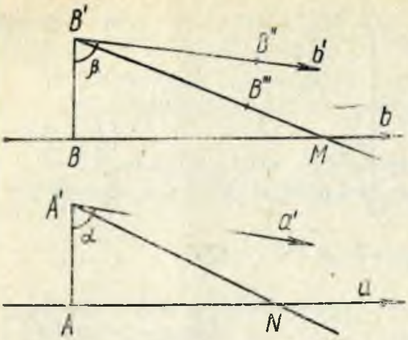
OO' умумий перпендикулярнинг ҳар икки томонида a, b тўғри чизиқлар бир биридан узоқлашиб кетади.

16-§. Лобачевский функцияси

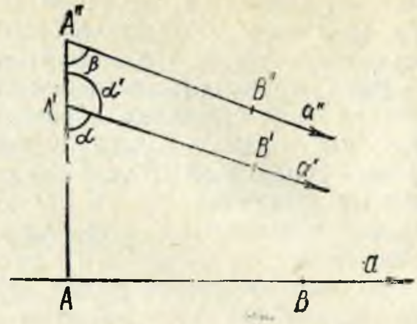
Параллеллик бурчаги билан параллеллик кесмасини боғловчи муносабатни муфассалроқ текширайлик.

14-теорема. Параллеллик кесмаси параллеллик бурчагини бир қийматли аниқлайди.

Исбот. A' ва B' нуқталар a ва b тўғри чизиқлардан бир хил масофада ётсин (24- чизма), яъни $AA' \equiv BB'$ ($AA' \perp a$, $BB' \perp b$). Бир хил йўналишда A' нуқтадан a га параллел қилиб a', B' нуқтадан b га параллел қилиб b' тўғри чизиқларни ўтказайлик, у вақтда $\angle AA'A'' = \alpha$, $\angle BB'B'' = \beta$ бурчаклар параллеллик бурчаклари бўлади. $\alpha = \beta$ эканини кўрсатсак, мақсадга эришган бўламиз. Фараз қилайлик, $\alpha \neq \beta$,



24- чизма



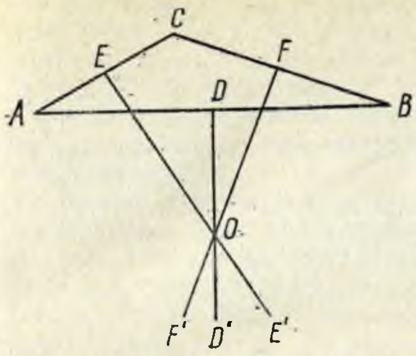
25- чизма

аниқроги $\alpha < \beta$ бўлсин. У ҳолда $\angle BB'B'' = \alpha$ қўйсак, $\alpha < \beta$ бўлгани учун $B'B'''$ нур b тўғри чизиқни бирор M нуқтада кесади. A дан бошлаб параллеллик йўналиши томон $BM = AN$ кесмани қўйиб, N нуқтани ҳосил қилсак: $\Delta BB'M = \Delta A'AN$ (икки катети бўйича), у ҳолда $\angle AA'N = \angle BB'M = \alpha$ бўлиб, $A'N$ нур a' билан устма-уст тушиши керак, лекин $a' \parallel a$, демак, улар кесишмайди, яъни $\alpha = \beta$. Шундай қилиб, тенг кесмаларга мос келган параллеллик бурчаклари ҳам тенг.

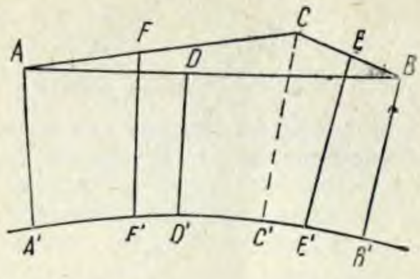
15- теорема. Параллеллик кесмаси ошган сари параллеллик бурчаги камая боради: катта кесмага кичик параллеллик бурчаги тўғри келади.

Исбот. a тўғри чизиқнинг бир томонидаги A', A'' нуқталардан (25- чизма) $a' \parallel a$, $a'' \parallel a$ тўғри чизиқлар ўтган бўлсин. $AA' = p$, $AA'' = p'$ параллеллик кесмалари бўлиб, $p' > p$ бўлсин, бу вақтда тегишли параллеллик бурчаклари учун $\alpha > \beta$ тенгсизликнинг ўринли бўлишини исботлаймиз. α' бурчак α нинг қўшни бурчаги бўлсин, яъни $\alpha + \alpha' = 180°$ (*), аммо $a' \parallel a''$, шу сабабдан $\alpha' + \beta < 180°$, бу икки тенгликдан $\alpha > \beta$. Бундай боғланишни Лобачевский $\alpha = \Pi(p)$ символи билан белгилайди. $\Pi(p)$ — *Лобачевский функцияси* деб юритилади. Бу функция Лобачевский геометриясида асосий роль ўйнайди, шунинг учун биз бу функциянинг баъзи содда хоссалари билан қисқача танишамиз.

1. Лобачевский функциясининг аниқлаш соҳаси $0 < p < \infty$, қийматлари соҳаси эса $0 < \alpha < 90°$.
2. $\alpha = \Pi(p)$ функция монотон камаювчилар.
3. $\alpha = \Pi(p)$ функция узлуксиз.
4. Лобачевский функцияси элементар функциялар орқали қуйидагича ифодаланади: $\Pi(p) = 2 \operatorname{arc\,tg} e^{-\frac{p}{k}}$ (**) (бунда e — натурал логарифмлар асоси, p — параллеллик кесмаси, k — доимий сон бўлиб, уни маълум сабабларга кўра Лобачевский фазосининг эгрилик радиуси деб аталади). Шуниси диққатга сазоворки, $p \to 0$ да $\Pi(p) = \alpha \to 90°$ бўлади, бундан қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: Лобачевский текислигининг етарлича кичик қисмида Евклид геометриясининг қоида-қонунлари ўринлидир.



26- чизма



27- чизма

Лобачевский текислигидаги тўғри чизиқларни жойлашишида юз берадиган бир ҳолини кўздан кечирайлик.

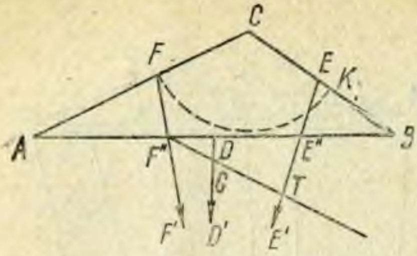
16- теорема. Учбурчакнинг учала томонлари ўрталаридан чиқарилган учта перпендикуляр ё бир нуқтада кесишади, ёки учаласи узоқлашувчи, ёки учаласи ҳам бир йўналишда параллел бўлади.

Исбот. 1- *ҳол.* ABC учбурчакнинг AC, CB томонлари ўрталарига ўтказилган перпендикуляр EE', FF' бўлиб (26- чизма), улар O нуқтада кесишади дейлик. O нуқта учбурчакнинг учала учидан баробар узоқликда ётгани учун, у AB нинг ўрта перпендикуляри DD' да ҳам ётиши керак, демак, ўрта перпендикулярдан иккитаси кесишса, учинчиси ҳам шу нуқтадан ўтади.

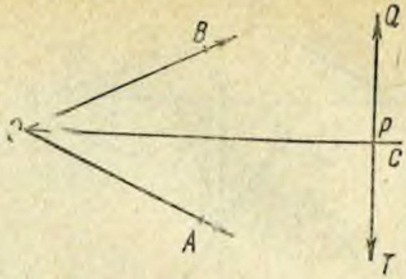
2- *ҳол.* DD', EE' ўрта перпендикулярлар узоқлашувчи бўлсин (27- чизма). У ҳолда FF' нинг ҳам DD', ҳам EE' билан узоқлашувчанлигини исботлаймиз. 15- § даги 13- теоремага асосан DD', EE' узоқлашувчи бўлгани учун улар ягона умумий перпендикулярга эгадирлар, у умумий перпендикуляр $D'E'$ бўлсин. D' E' тўғри чизиққа A, B, C нуқталардан перпендикулярлар туширайлик, улар мос равишда бу тўғри чизиқ билан A, B', C' нуқталарда кесишсин. Ҳосил бўлган $AA'B'B$ тўртбурчакка назар солсак, DD' бу тўртбурчакнинг AB ва $A'B'$ томонларига умумий перпендикуляр бўлиб, тўртбурчак DD' га нисбатан симметрик жойлашган, демак, $AA' = BB'$. У ҳолда $AA'\,BB''$ ва $CC'\,B'B$ тўртбурчакларнинг ҳар бири Саккери тўртбурчаги бўлади. Шунга ўхшаш $AA'\,C'\,C$ ҳам Саккери тўртбурчаги бўлади. FF' бу тўртбурчакнинг ўрта чизиғи бўлгани учун $FF' \perp A'\,C'$.

Демак, EE', DD', FF' ларнинг ҳар бири $A'\,B'$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиб, 15- § даги 11- теоремага асосан улар ўзаро узоқлашувчидир.

3- *ҳол.* EE' ва DD' лар 28- чизмада кўрсатилган йўналишда ўзаро параллел бўлсин. У ҳолда FF' тўғри чизиқ EE', DD' билан кесиша олмайди ва узоқлашувчи бўлолмайди (акс ҳолда биринчи ва иккинчи ҳолларга қайтар эдик). Демак, улар бир- бирига параллел. Энди учала тўғри чизиқнинг умумий йўналишда параллел бўлишини кўрсатамиз. Бу ҳол учун ABC учбурчак тенг томонли ёки тенг ёнли бўлмасин (акс ҳолда учала ўрта перпендикуляр кесишади). AB томон энг катта томон



28- чизма



29- чизма

бўлсин. EE', FF' лар AB ни албатта кесиб ўтади, чунки FF' тўғри чизиқ AB ни кесмаса, Паш аксиомасига асосан, CB ни бирор K нуқтада кесади. У ҳолда $KA \equiv KC$. Лекин $KB + KA > AB$ бўлиб, $KB + KA = KB + KC = BC$, демак, $BC > AB$. Бу AB нинг катта томон бўлишига зиддир. Учала перпендикулярнинг AB билан кесишган нуқталари F'', D, E'' бўлсин. Бу учта нуқтадан бири қолган иккитаси орасида ётади, масалан, D нуқта F'' билан E'' орасида ётсин. У ҳолда $EE' \parallel FF'$ бўлгани учун $E''F''F'$ бурчак ичидан чиққан ҳар қандай $F''T$ нур албатта $E''E'$ ни бирор T нуқтада кесади. Бу вақтда DD' тўғри чизиқ $E''E'$, $F''F'$ параллел тўғри чизиқлар орасида ётгани учун уни ҳам $F''T$ нур бирор G нуқтада кесади, демак D $F''F'$ бурчак ичидан чиққан ҳар қандай нур DD' билан кесишар экан. Бинобарин, D дан D' га қараб $DD' \parallel FF'$ экан. Бу теоремадан, Лобачевский текислигида ташқи айланага эга бўлмаган учбурчак мавжуд, деган хулоса чиқариш мумкин.

Пировардида Лобачевский текислигидаги тўғри чизиқларнинг жойлашишидаги хусусий бир ҳол билан танишиб чиқайлик. Тайин AOB бурчак берилган бўлсин, унинг O учидан ички биссектрисасини ўтказайлик (29- чизма). 14- теоремага асосан $\angle AOC = \angle COB = \alpha$ ўткир бурчакка OP параллеллик кесмаси мос келади. P нуқтадан OC га перпендикуляр PQ ни ўтказсак, 14- § даги 10- теоремага асосан $OB \parallel PQ$ (P дан Q га қараб йўналишда) бўлади, худди шунга ўхшаш $OA \parallel PT$ (P дан T га қараб йўналишда). Натижада OA, OB нурлардан ва QT тўғри чизиқдан иборат фигура ҳосил бўлади, буни «учбурчак» деб атасак ҳам бўлади, бу учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси берилган $\angle AOB$ га тенгдир, чунки параллел тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни нолга тенг деб олиш мумкин.

17- §. Айлана, эквидистанта ва орицикл чизиқлар

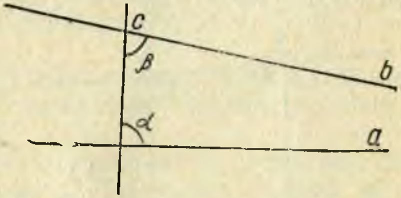
Маълумки, Евклид текислигидаги икки чизиқ — тўғри чизиқ билан айлана ўзининг ажойиб бир хоссаси билан бошқа чизиқлардан ажралиб туради. Бу хосса шундан иборатки, бу чизиқлар ўз шаклини ўзгартирмасдан ўз- ўзи бўйлаб сирпанади. Бундай хоссага эга чизиқларни *ўзгармас эгриликка эга чизиқлар* деб аталади. Бундай хоссали икки чизиқнинг мавжудлиги Евклид текислигида икки тўғри чизиқнинг ўзаро икки хил — кесишувчи ва параллел ҳолда жойланиши билан узвий боғлангандир. Бу эса ўз йўлида Евклид текислигида тўғри чизиқларнинг икки хил дастаси борлигининг натижасидир: 1) даста маркази деб аталадиган нуқтадан ўтган барча тўғри чизиқлар тўплами (марказли даста); 2) бир тўғри чизиққа параллел бўлган барча тўғри чизиқлар тўплами (марказсиз даста). Марказли дастанинг ортогонал траекторияси айланадан, марказсиз дастанинг ортогонал траекторияси эса тўғри чизиқдан иборат.

Лобачевский текислигида ҳам юқоридаги хоссага эга бўлган бундай чизиқларнинг мавжудлиги тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашувига боғлиқдир. Лобачевский текислигида икки тўғри чизиқ кесишувчи (яқинлашувчи), ўзаро параллел (маълум йўналишда) ва узоқлашувчи бўлиши мумкин, яъни Лобачевский текислигида тўғри чизиқларнинг уч хил дастаси мавжуд: 1) *битта нуқтада кесишувчи барча тўғри чизиқлар тўплами эллиптик даста* деб юритилади; 2) *бирор тўғри чизиқнинг белгили йўналишида унга параллел бўлган барча тўғри чизиқлар тўплами параболик даста* деб аталади; 3) *тайин тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган барча тўғри чизиқлар, яъни узоқлашувчи тўғри чизиқлар тўплами гиперболик даста* деб аталади. Бу уч хил дастанинг мавжудлиги муносабати билан доимий эгриликка эга бўлган уч хил эгри чизиқ борлигини кўрсатамиз. Бунинг учун аввал баъзи тушунчаларни киритайлик.

Ихтиёрий икки a, b тўғри чизиқни учунчи c тўғри чизиқ кесиб ўтганда ҳосил бўлган ички бир томонли бурчаклар тенг бўлса (яъни $\alpha = \beta$), c тўғри чизиқ a, b нинг тенг оғишли кесувчиси деб аталади (30- чизма).

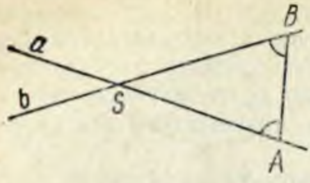
17- теорема. Тўғри чизиқлар дастасига тегишли ихтиёрий икки тўғри чизиқнинг биридаги нуқтадан иккинчисига тенг оғишли фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Исбот. 1- ҳол. a, b тўғри чизиқлар марказли дастага тегишли бўлсин (31- чизма). a тўғри чизиқдаги ихтиёрий A нуқтани олиб, S нуқтадан бошлаб b тўғри чизиқ устига SA га тенг кесма қўйсак, b да B – нуқта ($SA = SB$) ҳосил бўлади. ΔASB тенг ёнли бўлгани учун $\angle SAB = \angle SBA$. Бу бурчакларни тўлдирувчилари ҳам ўзаро тенг бўлгани учун AB тўғри чизиқ a, b учун тенг оғишли кесувчи бўлади. Равшанки, A нуқтадан a, b ни тенг оғишда кесувчи бошқа тўғри чизиқ ўтмайди.

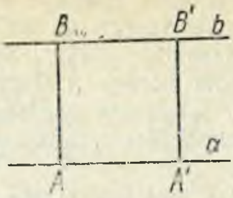


30- чизма

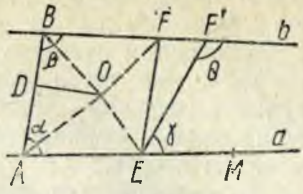
2- ҳол. a, b тўғри чизиқлар гиперболик дастага тегишли бўлсин (32- чизма). Бу ҳолда a, b тўғри чизиқлар ўзаро узоқлашувчи тўғри чизиқлар бўлиб, бундай тўғри чизиқлар ягона умумий AB перпендикулярга эгадир, бу перпендикуляр a, b нинг тенг оғишли кесувчиси бўлади. У ҳолда a даги A нуқтадан тенг оғишли кесувчини ўтказиш учун B дан бошлаб b нинг устида (A' нуқта AB нинг қайси томонида бўлса, шу томонда) $AA' \equiv BB'$ шарт билан аниқланадиган B' нуқтани топамиз. У ҳолда A' B' тўғри чизиқ изланган кесувчи бўлади, чунки $A'ABB'$ тўртбурчак Саккери тўртбурчагидир:



31- чизма



32- чизма



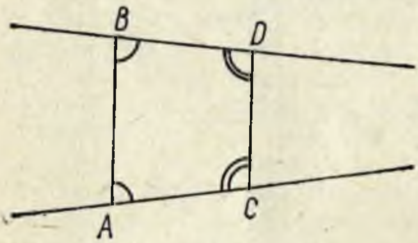
33- чизма

$$\angle A = \angle B = \frac{\pi}{2};\ AA' \equiv BB' \Rightarrow \angle AA'B' = \angle BB'A'.$$

3- ҳ о л. a, b тўғри чизиқлар параболик дастага тегишли бўлсин. У ҳолда a, b да мос равишда ихтиёрий A ва B нуқталарни олиб, AB кесувчини ўтказайлик (33- чизма). Унинг a, b билан ҳосил қилган ички бир томонли бурчакларини α ва β билан белгиласак, уларнинг биссектрисалари O нуқтада кесишади. O нуқтадан AB, a ва b га перпендикулярлар тушириб D, E, F нуқталарни топамиз. Бу вақтда EF кесувчи изланган тўғри чизиқ бўлади, чунки $OF \equiv OE$, $\Delta\, OEF$ да $\angle OEF = \angle OFE$ бўлиб, $\angle BFE = \angle AEF$. Энди EF ни E дан ўтувчи ягона кесувчи эканини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, E дан (EF дан фарқли) тенг оғишли EF' кесувчи ўтсин. Унинг a, b билан ҳосил қилган ички бир томонли бурчакларини γ, θ деб белгиласак, фаразга асосан, $\gamma = \theta$ бўлиб, $\Delta EFF'$ учун θ ташқи бурчак бўлганлигидан $\theta > \angle EFF'$. Лекин $\angle F'FE = \angle FEM$ ва $\gamma < \angle FEM$ бўлгани учун $\gamma < \theta$ — бу зиддир.

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади:

Бир дастага тегишли a, b тўғри чизиқларга AB ва CD тенг оғишли кесувчилар ўтказилган бўлса, $AC \equiv BD$ бўлади (34- чизма).



34- чизма

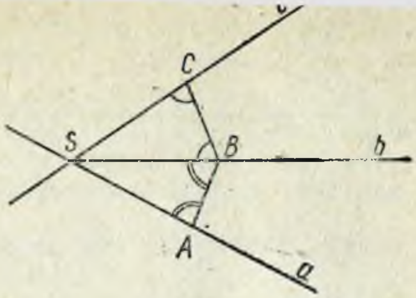
Бу натижа тенг оғишли кесувчининг ягоналиги натижасидир.

Т а ъ р и ф. a, b тўғри чизиқлар бирор дастага тегишли бўлиб, AB уларнинг тенг оғишли кесувчиси бўлса, $A \in a$, $B \in b$ нуқталар шу дастага нисбатан *ўзаро мос нуқталар* деб аталади.

Дастага тегишли тайин тўғри чизиқни олиб, ундаги бирор A нуқта қаралса, дастанинг қолган ҳар бир тўғри чизиғида A нуқтага мос нуқтани топиш мумкин, бундай нуқталар тўпламини ω деб белгилайлик (A нуқта ҳам ω га тегишли). Дастанинг турига қараб ω тўплам қуйидагича номланади:

1. Эллиптик даста учун ω *айлана* деб аталади.
2. Параболик даста учун ω *орицикл чизиқ* деб юритилади.
3. Гиперболик даста учун ω *эквидистант чизиқ* деб номланади.

ω тўплам учала ҳолда ҳам даста ва шу дастага тегишли тўғри чизиқнинг битта нуқтаси билан тўлиқ аниқланади. Эллиптик даста ҳолда ω нинг айлана деб аталиши айлана таърифига мос келади, чунки тенг оғишли кесувчининг хоссасига асосан (35- чизма) $SA = SB = SC$ (бунда A, B, C ω нинг элементлари) бўлиб, ω тўпламнинг ҳар бир нуқтаси S дан бир хил узоқликда ётади. Демак, даста маркази айлана марказидан иборатдир. Шунинг учун айлана билан иш кўрмасдан, қолган икки чизиқни, яъни орицикл ва эквидистант хоссаларини текширайлик.



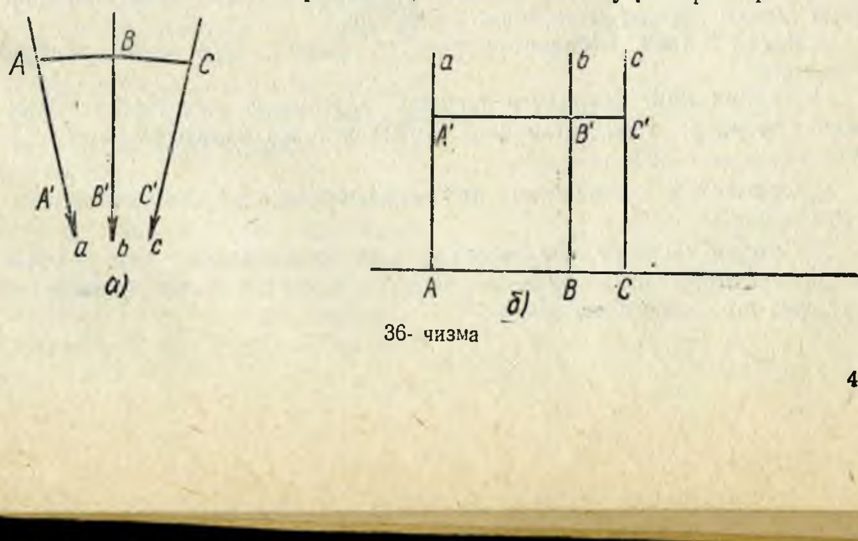
35- чизма

18- теорема. Орицикл ва эквидистант чизиқларнинг ихтиёрий учта нуқтаси бир тўғри чизиқда ётмайди.

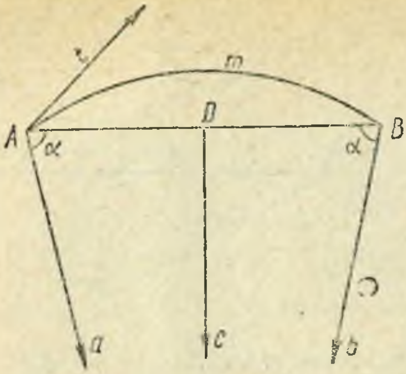
Исбот. 1) Фараз қилайлик, орициклнинг учта A, B, C нуқтаси (36- *а* чизма) бир тўғри чизиқда ётсин. У ҳолда AB, BC, AC тўғри чизиқларнинг ҳар бири дастанинг a, b, c тўғри чизиқлари учун тенг оғишли кесувчисидир, бинобарин $\angle A'AB = \angle ABB'$, $\angle B'BC = \angle BCC'$, демак, $\angle ABB' = \angle B'BC = \frac{\pi}{2}$ бўлиб, $\angle A'AB = \angle BCC' = \frac{\pi}{2}$. У ҳолда a, b, c тўғри чизиқлар AC га перпендикуляр бўлиб, a, b, c лар узоқлашувчи бўлади, бу $a \parallel b \parallel c$ шартга зиддир.

2) A', B', C' нуқталар мос равишда гиперболик дастанинг a, b, c тўғри чизиқларига тегишли бўлиб, ω тўпламнинг элементлари бўлсин. Фараз қилайлик, A', B', C' лар бир тўғри чизиқда ётсин (36- *б* чизма). Гиперболик дастанинг барча тўғри чизиқлари тайин u тўғри чизиққа перпендикуляр бўлсин. У ҳолда $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$ кесмалар тенг оғишли кесувчилар бўлгани учун $\angle AA'B' = \angle A'B'B = \angle BB'C' = \angle B'C'C = \frac{\pi}{2}$ бўлади, демак $AA'B'B$ ва $BB'C'C$ тўртбурчакларнинг ички бурчаклари йиғиндиси 2π га тенг, бу ҳол эса Лобачевский текислигида юз бермайди.

Илова тариқасида, бир хил оғишли кесувчининг хоссасига асосан $AA' = BB' = CC'$ бўлиб, гиперболик даста учун ягона умумий перпендикуляр бўлган u тўғри чизиқдан (*бу тўғри чизиқ* одатда *эквидистантнинг базаси* деб юритилади) эквидистант нуқталари бир хил ма-



36- чизма



37- чизма

софада жойлашганлигини таъкидлаб ўтамиз. Шу сабабдан ҳам эквидистантни тўғри чизиқнинг (базанинг) бир томонида бир хил узоқликда жойлашган нуқталар тўплами деб аташга ҳақлимиз. $h = AA' = BB'$ масофани эквидистантнинг баландлиги деб юритилади, $h = 0$ ҳолида тўғри чизиқ баландлиги нолга тенг эквидистант деб айтиш мумкин.

19- теорема. Тўғри чизиқлар дастаси ёрдамида ҳосил килинган орицикл учун шу дастанинг ҳар бир тўғри чизиғи нормал вазифасини бажаради.

Исбот. 37- чизмада кўрсатилган орицикл берилган бўлиб, унинг ихтиёрий A нуқтасини олайлик, шу нуқтадан ўтган орициклни ҳосил қилган дастанинг тўғри чизиғи a бўлсин. A нуқтадан a га перпендикуляр қилиб t тўғри чизиқни ўтказамиз. Орициклда яна B нуқтани олиб, у орқали дастага тегишли тўғри чизиқни ўтказсак, AB тўғри чизиқ a, b учун тенг оғишли кесувчи бўлади. AB кесманинг ўрта нуқтаси D ни топиб, ундан AB га перпендикуляр c тўғри чизиқни ўтказамиз, у ҳолда $c \parallel a$, $c \parallel b$ бўлади.

Шунинг учун AB ватарнинг a ёки b билан ташкил қилган бурчаги $AD = BD = \frac{AB}{2}$ га мос келган параллеллик бурчагидир, яъни $\alpha = \Pi\left(\frac{AB}{2}\right)$. Демак, $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

B нуқта орицикл бўйлаб A нуқтага яқинлашса, $AB \to 0$ бўлиб, $\lim \alpha = \lim \Pi\left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$. t тўғри чизиқ AB кесувчининг лимит ҳолати бўлиб, у берилган орициклга уринмадир ва a тўғри чизиқ орициклнинг нормали ҳисобланади.

Худди шунга ўхшаш қуйидаги теорема ҳам ўринлидир (мустақил исботланг).

20- теорема. Эквидистант чизиқ учун ҳам шу дастанинг ҳар бир тўғри чизиғи нормал вазифасини бажаради.

Орицикл билан эквидистантнинг қуйидаги хоссаларини эслатиб ўтайлик:

1) Орициклнинг ботиқлиги тегишли дастанинг параллеллик йўналиши томонида, эквидистантнинг ботиқлиги эса базаси томонида бўлади.

2) Орицикл ва эквидистант тегишли дасталарининг ортогонал траекторияларидир.

3) Бундан ташқари, шу параграф бошида айлананинг ўзи ўз устида сирпанадиган чизиқлигини таъкидлаган эдик. Орицикл ва эквидистант ҳам шу хоссага эгадир.

18- §. Лобачевский фазосида тўғри чизиқ ва текисликларнинг ўзаро жойлашуви

Абсолют геометриянинг барча аксиомалари билан биргаликда Лобачевский аксиомаси ўринли бўлган фазо Лобачевский фазоси деб аталади, унда абсолют геометриянинг барча аксиомалари ўз кучини сақлайди, шунинг учун биз абсолют геометрияга тааллуқли баъзи фактларни эслатиб ўтамиз.

1. Берилган нуқтадан берилган текисликка фақат битта перпендикуляр тўғри чизиқ ўтади.

2. Икки текислик кесишса, кесимда тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

3. Агар тўғри чизиқ бирор текисликда кесишган икки тўғри чизиқнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқ шу текисликка перпендикуляр бўлади.

4. Тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқ орқали ўтувчи ҳар бир текислик ҳам шу текисликка перпендикуляр бўлади.

5. Берилган нуқта орқали берилган тўғри чизиққа перпендикуляр қилиб фақат битта текислик ўтади.

6. Агар тўғри чизиқ берилган текисликка перпендикуляр бўлмаса, бу чизиқ орқали берилган текисликка перпендикуляр қилиб фақат битта текислик ўтади ва ҳоказо.

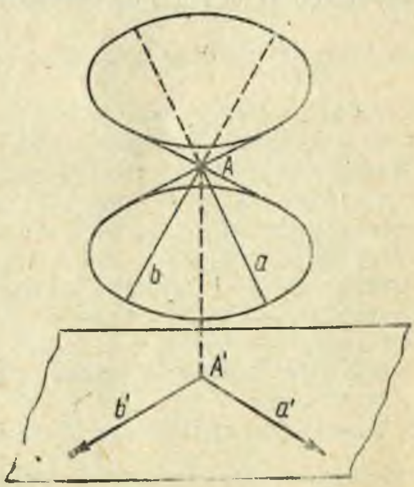
Лобачевский фазосида тўғри чизиқларнинг, тўғри чизиқ билан текисликнинг, шунингдек текисликларнинг ўзаро жойлашуви қуйидаги таърифлар орқали киритилади.

1-таъриф. Фазодаги икки тўғри чизиқ бир текисликда ётиб, ўзаро параллел (узоқлашувчи) бўлса, улар параллел (узоқлашувчи) деб аталади.

2-таъриф. Тўғри чизиқ ўзининг бирор текисликдаги проекциясига параллел (ёки унинг билан узоқлашувчи) бўлса, бу тўғри чизиқ шу текисликка параллел (ёки унинг билан узоқлашувчи) деб аталади.

Бу таърифлардан кўринадики, тўғри чизиқ текисликка параллел бўлса, улар параллеллик йўналиши томон бир-бирига яқинлашади, улар узоқлашувчи бўлса, тўғри чизиқ билан текислик битта умумий перпендикулярга эга бўлиб, шу перпендикулярнинг икки томонида улар бир-биридан етарлича узоқлаша боради.

Икки текисликнинг параллеллиги ёки узоқлашувчилигини таърифлаш мақсадида параллеллик конуси деб аталган сирт тушунчасини киритайлик. П текислик ва унинг ташқарисида A нуқта берилган бўл-



38- чизма

син (38-чизма). A нинг П даги ортогонал проекцияси A'. A нуқтадан П текисликка параллел қилиб a, b, c тўғри чизиқларни ўтказайлик. Бу тўғри чизиқларнинг П даги проекциялари $a', b', c', \ldots$ бўлиб, $a \parallel a'$, $b \parallel b', c \parallel c', \ldots$ дир. Буларнинг A нуқтадаги параллеллик бурчагини мос равишда α, β, γ, десак, уларнинг барчаси учун параллеллик кесмаси AA' бўлади. Лобачевский функциясининг хоссасига асосан $\alpha = \beta = \lambda = \ldots$ Демак, A нуқтадан П текисликка параллел қилиб ўтказилган барча тўғри чизиқлар AA' билан бир хил ўткир бурчак ҳосил қилиб, учи A нуқтада бўлган конус ҳосил қилади. Шу сирт П текисликка нисбатан A нуқтадаги параллеллик конуси деб аталади, бу конуснинг ясовчилари П текисликка параллел бўлган тўғри чизиқлардир.

Параллеллик конусининг таърифидан кўринадики, A нуқтадан ўтиб, (конус ичида жойлашган тўғри чизиқ П текислик билан кесишади яқинлашади), A нуқтадан ўтиб, конус ташқарисида жойлашган тўғри чизиқ эса П дан узоқлашади.

Параллеллик конуси A нуқтадан ўтган барча текисликларни қуйидаги уч синфга ажратади: 1) конусни икки ясовчиси бўйлаб кесувчи текисликлар; 2) конусга уринадиган текисликлар; 3) конус билан фақат A нуқтада кесишувчи текисликлар. Биринчи синфга тегишли текисликлар A нуқтадан ўтган ва конус ичида жойлашган тўғри чизиқларни ўз ичига олади, демак бу текисликлар П текислик билан албатта кесишади, лекин иккинчи ва учинчи синфдаги текисликлар A нуқтадан ўтган ва П билан яқинлашувчи тўғри чизиқларни ўз ичига олмаганлиги учун П билан кесишмайди. У ҳолда қуйидаги таърифлар ўринли бўлади.

3-таъриф. A нуқтадан ўтиб, параллеллик конусига уринган текисликлар (яъни, иккинчи синфдаги текисликлар) П га параллел деб аталади.

4-таъриф. A нуқтадан ўтиб, параллеллик конуси билан бошқа умумий нуқтага эга бўлмаган текисликлар (яъни учинчи синфдаги текисликлар) П билан узоқлашадиган дейилади.

IV БОБ. АКСИОМАЛАРНИНГ БОШҚА СИСТЕМАЛАРИ. АКСИОМАЛАР СИСТЕМАСИНИ ТЕКШИРИШ

Евклид геометриясининг Гильберт аксиомалари асосида қурилишини қисқача баён қилдик. Лекин геометрияни бошқа аксиомалар асосида ҳам қуриш мумкин. Қуйида биз шундай системалардан баъзилари билан танишиб ўтамиз.

19-§. Погорелов аксиомалари

Геометриядан мактаб курси учун дарслик сифатида қабул қилинган китобида А. В. Погорелов ўз аксиоматикасини таклиф этган. Бу система учун асосий тушунчалар нуқта, тўғри чизиқ, текислик, тегишли, орасида ётади, узунлик, бурчакнинг градус ўлчови. Бу тушунчаларнинг асосий хоссалари қуйидаги аксиомаларда баён қилинади.

I. Тегишлилик аксиомалари

I_1. Исталган икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ мавжуд ва у фақат биттадир.

I_2. Исталган тўғри чизиқда камида иккита нуқта ётади. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқта мавжуд.*

I_3. Исталган текисликка тегишли нуқталар ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.

I_4. Агар икки текислик умумий нуқтага эга бўлса, улар тўғри чизиқ бўйлаб кесишади.

I_5. Агар иккита турли тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлса, улар орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

Бу аксиомалар ёрдамида ушбу теоремаларни исботлаш мумкин (текисликдаги теоремалар билан чекланамиз).

1. Иккита турли тўғри чизиқ ё кесишмайди, ёки фақат битта нуқтада кесишади.

2. Ҳар қандай тўғри чизиққа тегишли бўлмаган нуқта мавжуд.

II. Тартиб аксиомалари.

II_1. Тўғри чизиқдаги учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитаси орасида ётади.

II_2. Текисликдаги тўғри чизиқ шу текисликнинг тўғри чизиқда ётмаган нуқталарини иккита ярим текисликка шундай ажратадики, битта ярим текисликка тегишли нуқталарни туташтирувчи кесма берилган тўғри чизиқ билан кесишмайди, ҳар хил ярим текисликларга тегишли нуқталарни туташтирувчи кесма берилган тўғри чизиқ билан кесишади.**

Тартиб аксиомаларидан сўнг, нур, кесма, синиқ чизиқ, кўпбурчак, учбурчак ва ҳоказо тушунчалар киритиш мумкин. Гильберт аксиомалари системасидаги Паш аксиомаси теорема сифатида исботланади.

III. Кесма ва бурчаклар учун ўлчов аксиомалари.

III_1. Ҳар бир кесма нолдан катта тайин узунликка эга. Агар C

* Ўрта мактабга мўлжалланган дарсликда бу аксиома енгилроқ формада ифодаланган. (Ред.)

** Мактаб дарслигида бу аксиома соддароқ ифодаланади: тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади.

нуқта кесмада ётса, AB нинг узунлиги AC ва CB кесмалар узунликларининг йиғиндисига тенг.

III_2. Ҳар бир бурчак нолдан катта тайин градус ўлчовига эга. Ёйиқ бурчак 180° га тенг. Бурчакнинг градус ўлчови ўзининг томонлари орасидан ўтувчи хар қандай нур ёрдамида ажратилишидан ҳосил қилинган бурчакларнинг градус ўлчовлари йиғиндисига тенг.*

Бу группадаги аксиомалар ёрдамида кесма узунлиги ва бурчак катталигини ўлчаш масаласи тўла ҳал қилинади, бундан ташқари тўғри чизиқда координаталар системасини киритиш имконияти яратилади. Тўртинчи группа аксиомасини киритишдан олдин кесмалар, бурчаклар, учбурчаклар тенглиги тушунчаларига таъриф берилади.

IV. Берилган учбурчакка тенг учбурчакнинг мавжудлиги ҳақида аксиома.

IV. ABC учбурчак ва a нур берилган бўлсин. У ҳолда ABC учбурчакка тенг шундай $A_1B_1C_1$ учбурчак мавжудки, унинг A_1 нуқтаси a нурнинг учи билан устма-уст тушади, B_1 нуқта эса a нурда ётади. C нуқта эса a нур орқали ўтувчи тўғри чизиқ билан аниқланадиган ярим текисликлардан берилганида ётади.**

V. Узунлиги берилган кесманинг мавжудлиги ҳақида аксиома.

V. Ҳар қандай ҳақиқий d мусбат сон учун узунлиги шу d га тенг кесма мавжуд.

VI. Параллеллик аксиомаси.

VI. Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали текисликда берилган тўғри чизиққа биттадан ортиқ параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин эмас.

Погорелов аксиомалари системаси 12 та аксиомадан иборат бўлиб, I_{3-5} аксиомалар фазога тааллуқлидир. Шу аксиомалар асосида Евклид геометрияси тўла баён қилинади. Бу аксиоматиканинг муҳим томонларидан бири кесма узунлиги ва бурчак ўлчови тушунчалари асосий тушунчалар қаторига киритилган, бу эса умуман геометрияни мантиқан ихчамроқ қилиб қуришга йўл очади.

20- §. Вейль аксиомалари системаси

1916 йилда немис математиги Герман Вейль (1885—1955) томонидан таклиф қилинган аксиоматика фанда векторли аксиоматика деб юритилиб, Гильберт аксиомалари системасига нисбатан соддалиги билан фарқ қилади, бундан ташқари бу аксиоматика ҳозирги замон математикасини талай бўлимлари билан узвий боғланганлиги билан ажралиб туради.

Бу системада асосий тушунчалар сифатида «Вектор» ва «Нуқта» қабул қилинган.

Векторлар ва нуқталарни бир-бири билан боғловчи муносабатлар «векторларни қўшиш», «векторни сонга кўпайтириш», «векторларни

---

* Бу аксиомани киритишдан аввал бурчак, ёйиқ бурчак тушунчаларига таъриф берилади (*ред.*)

** Мактаб дарслигида бу аксиома ҳам соддароқ ифодаланади.

скаляр кўпайтириш», «векторларни нуқтадан бошлаб қўйиш» дир. Бу муносабатларнинг барча хоссалари қуйидаги беш группа аксиомаларида ўз ифодасини топган. (Биз бу ерда аксиомаларни келтириш билан чегараланамиз, улар асосида ҳосил қилинадиган натижалар [13] китоб, II бўлим, IV бобда келтирилган.)

I. Векторларни қўшиш аксиомалари.

Исталган икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторга уларнинг йиғиндиси деб аталадиган $\vec{a}+\vec{b}$ вектор мос келтирилиб, бу амал хоссалари ушбу аксиомаларда ифодаланади:

I_1. Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ тенглик бажарилади.

I_2. Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ тенглик бажарилади.

I_3. Ноль вектор деб аталган $\vec{0}$ вектор мавжуд бўлиб, ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

I_4. Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $\vec{a}'$ вектор мавжудки, унинг учун $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$.

II. Векторни сонга кўпайтириш аксиомалари.

Истаган $\vec{a}$ вектор ва истаган ҳақиқий k сонга уларнинг кўпайтмаси деб аталадиган $k\vec{a}$ вектор мос келтирилиб, бу амал хоссалари ушбу аксиомаларда ифодаланади:

II_1. Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар ва k ҳақиқий сон учун $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ тенглик бажарилади.

II_2. Ихтиёрий k, t ҳақиқий сонлар ва ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун $(k+t)\vec{a}=k\vec{a}+t\vec{a}$ бўлсин, яъни векторни сонга кўпайтириш муносабати ҳақиқий сонларни қўшиш амалига нисбатан дистрибутив қонунига бўйсуниши талаб қилинади.

II_3. Ихтиёрий k,t ҳақиқий сонлар ва ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун $k(t\vec{a})=(kt)\vec{a}$ тенглик бажарилади.

II_4. Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Бу икки группа аксиомалари ёрдамида векторларнинг чизиқли комбинацияси, чизиқли эркинлиги, чизиқли боғлиқлиги ва шу каби тушунчаларни киритиш мумкин.

III. Ўлчов аксиомалари.

III_1. Фазода учта чизиқли эркин вектор мавжуд.

III_2. Фазодаги ҳар қандай тўртта вектор чизиқли боғлиқдир.

IV. Векторларни скаляр кўпайтириш аксиомалари.

IV_1. Ихтиёрий икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор учун $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

IV_2. Ихтиёрий учта $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор учун $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}$.

IV_3. Ихтиёрий $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор ва ҳақиқий k сон учун $(k\vec{a}\cdot\vec{b})=k(\vec{a}\vec{b})$.

IV_4. Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор учун $\vec{a}\vec{a}\geqslant 0$.

V. Векторни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомалари.

V_1. Ихтиёрий вектор ва ҳар қандай M нуқта учун ягона шундай N нуқта мавжудки, унинг учун $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$.

V_2. Ихтиёрий A, B, C нуқталар учун $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Вейль аксиомалари ёрдамида ҳам Евклид геометриясини тўла баён қилиш мумкин.

Биз шу параграфнинг бошида Вейль аксиомалари ҳозирги замон математикасининг бошқа бўлимлари билан узвий боғланганлигини таъкидлаган эдик, ҳақиқатан ҳам, юқорида келтирилган аксиомалар системасига диққат билан назар ташласак, I группа аксиомалари алгебрадаги коммутатив группа аксиомалари, I, II группа аксиомалари эса биргаликда ҳозирги замон математикасида муҳим роль ўйнайдиган чизиқли фазо аксиомаларидир. Бундан ташқари I, II, III, V группа аксиомалари биргаликда уч ўлчовли аффин фазосининг аксиоматикаси ҳисобланади.

Энди, якун сифатида юқорида қўйилган Евклид геометриясининг уч хил аксиоматикасини қуйидаги жадвалга жойлаштирайлик.

Аксиомалар системаси	Асосий объектлар (тушунчалар)	Асосий муносабатлар (нисбатлар)	Аксиомалар группасининг номи
Д. Гильберт	нуқта, тўғри чизиқ, текислик	«Тегишли» «Орасида» «Конгруэнтлик»	Тегишлилик аксиомалари Тартиб аксиомалари Конгруэнтлик аксиомалари Узлуксизлик аксиомаси Параллеллик аксиомаси
Г. Вейль	вектор, нуқта	«Векторларни қўшиш», «Векторларни сонга кўпайтириш», «Векторни скаляр кўпайтириш», «Векторни нуқтадан бошлаб қўйиш»	Векторларни қўшиш аксиомалари Векторларни сонга кўпайтириш аксиомалари Ўлчов аксиомалари Векторларни скаляр кўпайтириш аксиомалари Векторларни нуқтадан бошлаб қўйиш аксиомалари
А. Погорелов	нуқта, тўғри чизиқ, текислик, узунлик, бурчакнинг градус ўлчови	«Тегишли» (ёки «... да ётади»), «Орасида ётади»	Тегишлилик аксиомалари Тартиб аксиомалари Кесма ва бурчаклар учун ўлчов аксиомалари Берилган учбурчакка тенг учбурчакнинг мавжудлиги ҳақида аксиома Узунлиги берилган кесманинг мавжудлиги ҳақида аксиома Параллеллик аксиомаси

21- §. Гильберт аксиоматикасида зидсизлик масаласи

Аксиомалар системасининг зидсизлигига ишонч ҳосил қилиш учун камида битта модель мавжудлигининг етарли эканини юқорида таъкидлаган эдик. Шу мақсадни кўзда тутиб, бирор модель ясашга ҳаракат қиламиз. Биз бу ўринда арифметик воситаларга асосланган моделни келтирамиз. Бу моделни ясашда ҳақиқий сонлар, чизиқли тенгламалар тўғрисидаги таълимот маълум деб фараз қилинади. Қискалик учун планиметрияга тааллуқли аксиомалар учун модель қурамиз. Асосий тушунчаларни, яъни нуқта ва тўғри чизиқни қуйидагича танлаб оламиз.

1. A нуқта деб маълум тартибда олинган бир жуфт тайин ҳақиқий x, y сонларни қабул қиламиз, уни $A = (x, y)$ кўринишда белгилаймиз, *x, y сонларни A нуқтанинг аниқловчилари* деб аталади. Масалан, $A = (2,3)$, $B = \left(0, \frac{1}{5}\right)$, $C = (-\sqrt{5}, \pi)$. Тегишли аниқловчилари мос равишда тенг бўлган нуқталар устма- уст тушади.

2. u тўғри чизиқ деб маълум тартибда олинган, тайин учта a, b, c ҳақиқий сонларнинг $a{:}b{:}c$ нисбатларини қабул қиламиз, уни $u = (a{:}b{:}c)$ деб белгилаймиз, бунда a, b лардан камида биттаси нолдан фарқли деб олинади. *a, b, c сонлар u тўғри чизиқнинг аниқловчилари* деб аталади. Масалан, $u = (1{:}2{:}3)$, $v = (\sqrt{3}{:}0{:}4)$, $w = (-7{:}5{:}0)$.

Мос аниқловчилари тенг ёки пропорционал бўлган икки тўғри чизиқ устма- уст тушади. Асосий муносабатлардан бири «. . . да ётади» (ёки «тегишли») ни қуйидагича аниқлаб оламиз: $A = (x, y)$ нуқта билан $u = (a{:}b{:}c)$ тўғри чизиқнинг аниқловчилари орасида $ax + by + c = 0$ (*) шарт бажарилса, A нуқта u тўғри чизиқда ётади деймиз; (*) шарт бажарилмаса, A нуқта u тўғри чизиқда ётмайди. Масалан $M = (-1,4)$ нуқта $m = (3{:}1{:}-1)$ тўғри чизиқда ётади, чунки $3(-1) + 1 \cdot 4 + (-1) = 0$; $(0;5)$ нуқта $n = (-6{:}-2{:}3)$ тўғри чизиқда ётмайди, чунки $-6 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 + 3 = -7 \neq 0$.

Қолган асосий муносабатларга ва тушунчаларга кейинроқ қайтамиз. Энди I_{1-3} аксиомаларнинг бажарилишини кўрсатамиз.

I_1 нинг бажарилишини кўрсатамиз. $A = (x_1; y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ иккита турли нуқта бўлсин, бу ерда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ лардан камида биттасини ўринли деб олайлик. Шу икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг мавжуд эканини исботлайлик. Бунинг учун шундай $(a{:}b{:}c)$ тўғри чизиқ топайликки, унда A, B нуқталар ётсин, яъни

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad ax_2 + by_2 + c = 0 \qquad (1)$$

шартлар бажарилсин. Аниқроғи бу шартларни қаноатлантирувчи a, b, c сонларини топайлик. (1) даги тенгламалардан бирини иккинчисидан ҳадлаб айирамиз:

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0.$$

$x_1 \neq x_2$ десак, бу тенгликдан $a{:}b = -(y_1 - y_2) : (x_1 - x_2)$. Бу пропорциядан: $a = -\lambda(y_1 - y_2)$, $b = \lambda(x_1 - x_2)$ десак ва бу қийматларни (1) нинг биринчи тенгламасига қўйсак: $-\lambda(y_1 - y_2)x_1 + \lambda(x_1 - x_2)y_1 + c = 0$, бундан: $c = \lambda(x_2 y_1 - x_1 y_2)$. У ҳолда $u = a : b : c = -(y_1 - y_2) : (x_1 - x_2) : (x_2 y_1 - x_1 y_2)$, яъни тўғри чизиқ аниқланди.

I_2 аксиоманинг бажарилишини кўрсатиш учун топилган тўғри чизиқнинг ягона эканлигини кўрсатиш кифоя. $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ нуқталардан яна бошқа $u' = (a':b':c')$ тўғри чизиқ ўтади деб фараз қилиб, юқоридаги сингари муҳокама юритсак, $u' = (a':b':c') = (a:b:c)$ ни ҳосил қиламиз.

I_3. $u = (a:b:c)$ тўғри чизиқда ётувчи $A = (x, y)$ нуқта аниқловчилари $ax + by + c = 0$ шартни қаноатлантиради. Бу ерда иккита x, y сон битта тенгламани қаноатлантирганлиги сабабли унинг x, y га нисбатан ечимлари иккитадан ҳам кўп нуқтадан иборат.

Энди $A = (0,0)$, $B = (0,1)$, $C = (1,0)$ нуқталарни олиб, уларнинг битта тўғри чизиқда ётмаслигини кўрсатайлик:

$$a\cdot 0 + b\cdot 0 + c = 0,$$
$$a\cdot 0 + b\cdot 1 + c = 0,$$
$$a\cdot 1 + b\cdot 0 + c = 0.$$

Бу учта тенгламадан $a = b = c = 0$, лекин шартга кўра a, b, c бир вақтда нолга тенг эмас. Демак, A, B, C нуқталар битта тўғри чизиқда ётмайди.

Энди II_{1-4} аксиомалар шартларининг бажарилишини текширайлик. Аввало «орасида» муносабатини аниқлайлик.

$A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ нуқталар $u = (a:b:c)$ тўғри чизиқда ётсин, яъни

$$ax_1 + by_1 + c = 0,$$
$$ax_2 + by_2 + c = 0,$$
$$ax_3 + by_3 + c = 0.$$

Бунда a, b, c ларни номаълумлар деб қарасак, у ҳолда бу бир жинсли тенгламалар нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

бўлиши керак, бундан $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$ (*). Бу икки касрнинг умумий қийматини λ_{ABC} деб белгилаймиз ва $\lambda_{ABC} > 0$ ҳолда B нуқта A билан C орасида ётади деб айтамиз. A, C нуқталар орасида ётган барча нуқталар тўпламига AC кесма деб аталади. Аналитик геометрияда λ_{ABC} сон учта A, B, C нуқтанинг оддий нисбати деб аталади, яъни $\lambda_{ABC} = (ABC) = \frac{AB}{BC}$.

II_1. $\lambda_{ABC} > 0 \Rightarrow \lambda_{CBA} > 0$, чунки $\lambda_{CBA} = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{y_1 - y_2} = \frac{1}{\lambda_{ABC}} > 0$, демак, B нуқта C билан A орасида ётади.

II_2. B нуқта A билан C орасида ётса, $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} > 0$.

Бу ифодаларнинг ҳар бирини $t > 0$ билан белгилаймиз:

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=t,\ \frac{y_2-y_1}{y_3-y_2}=t. \text{ Булардан: } x_3=x_2+\frac{x_2-x_1}{t},$$

$$y_3=y_2+\frac{y_2-y_1}{t}.$$

A, B нуқталар берилганда t га ҳар хил мусбат қийматлар бериш билан x_3, y_3 ни топиш мумкин. Топилган бир жуфт сон AB тўғри чизиққа тегишли шундай C нуқтани аниқлайдики, B нуқта A билан C орасида ётади.

Энди II_3 аксиома шартининг бажарилишига ишонч ҳосил қилиш мақсадида бир тўғри чизиқда берилган $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$ нуқталар учун $\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}=\lambda_{ABC}$, $\frac{x_3-x_2}{x_1-x_3}=\lambda_{BCA}$, $\frac{x_1-x_3}{x_2-x_1}=\lambda_{CAB}$ (**) сонлардан фақат биттаси мусбат бўлишини кўрсатишимиз керак. Аммо бу учта сон қуйидаги муносабатга бўйсунади:

$$\lambda_{ABC}\cdot\lambda_{BCA}\cdot\lambda_{CAB}=1. \tag{***}$$

Фараз қилайлик, $\lambda_{ABC}>0$, $\lambda_{BCA}>0$ бўлсин. У ҳолда бир вақтда $x_2-x_1>0$, $x_3-x_2>0$, $x_1-x_3>0$ ёки $x_2-x_1<0$, $x_3-x_2<0$, $x_1-x_3<0$ бўлиши керак. Буларнинг биринчи иккитасини ҳадлаб қўшсак, $x_3-x_1>0$ бўлиб, учинчисига қарама-қарши бўлади. Худди шу хулосага кейингисида ҳам келиш мумкин. Демак, (**) даги сонлардан иккитаси мусбат бўлиши мумкин эмас экан. (***) га асосан бу сонларнинг учтаси ҳам манфий бўла олмайди. Хуллас, (**) даги учта сондан фақат биттасигина мусбат бўлиши мумкин. Бу деган сўз, учта нуқтадан фақат биттаси қолган иккитаси орасида ётишлигини билдиради.

II_4. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётса, (*) ўринлидир. Шу тенгликнинг ҳар бирини бирор t га тенглаб, уларнинг биринчисини x_2 га, иккинчисини y_2 га нисбатан ечамиз: $x_2=\frac{x_1+tx_3}{1+t}$, $y_2=\frac{y_1+ty_3}{1+t}$.

Равшанки, $t>0$ бўлса шартимизга асосан B нуқта A билан C орасида ётади. Демак, t га исталган мусбат қиймат бериб, AC кесманинг нуқталарини топа оламиз. ($t=0$ га A нуқта, $t=\infty$ га C нуқта мос келади.) t га манфий қийматлар берсак, AC тўғри чизиқнинг AC кесмага тегишли бўлмаган нуқталари ҳосил бўлади. Энди II_5 аксиомасига ўтайлик.

A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётмасин, яъни:

$$\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}\neq\frac{y_2-y_1}{y_3-y_2} \text{ ёки } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\neq 0,$$

у ҳолда бу нуқталар аниқлаган ABC учбурчакни ҳосил қиламиз. Бирор u тўғри чизиқ шу учбурчак учларидан ўтмай, томонларини ёки унинг давомларини мос равишда N_1 (AB томонни), N_2 (BC томонни), N_3 (CA томонни) нуқталарда кессин. N_1 нуқта AB ни t_1 нисбатда, N_2 нуқта BC ни t_2 нисбатда, N_3 нуқта CA ни t_3 нисбатда бўлсин. Шартга кўра, t_1, t_2, t_3 ларнинг бирортаси ноль ҳам эмас, чексиз ҳам эмас.

$N_1=(x_1', y_1')$, $N_2=(x_2', y_2')$, $N_3=(x_3', y_3')$ десак,

$$x_1' = \frac{x_1 + t_1x_2}{1+t_1}, \quad y_1' = \frac{y_1 + t_1y_2}{1+t_1}, \quad x_2' = \frac{x_2 + t_2x_3}{1+t_2}, \quad y_2' = \frac{y_2 + t_2y_3}{1+t_2},$$

$$x_3' = \frac{x_3 + t_3x_1}{1+t_3}, \quad y_3' = \frac{y_3 + t_3y_1}{1+t_3}.$$

N_1, N_2, N_3 нуқталар битта тўғри чизиқда ётади, демак:

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Бу тенгликка улар қийматларини қўямиз ва детерминант хоссаларидан фойдаланиб соддалаштирамиз:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & t_1 & 0 \\ 0 & 1 & t_2 \\ t_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)} = 0.$$

Бу ифодадаги биринчи кўпайтувчи нолдан фарқли, учинчи кўпайтувчи ҳам t_1, t_2, t_3 ларни танлаб олинган шартларига кўра нолдан фарқли. Демак, фақат иккинчи кўпайтувчигина ноль бўлиши мумкин:

$$\begin{vmatrix} 1 & t_1 & 0 \\ 0 & 1 & t_2 \\ t_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } 1 + t_1t_2t_3 = 0 \Rightarrow t_1t_2t_3 = -1.$$

Агар тўғри чизиқ ABC учбурчак учидан ўтмасдан, унинг бир томонини, масалан AB ни кесса, демак $t_1 > 0$; у ҳолда $t_1t_2t_3 = -1$ муносабат t_2 ёки t_3 дан бири албатта мусбат бўлишини билдиради, яъни шу тўғри чизиқ BC ёки CA кесмалардан бирини кесади. Бу эса Паш аксиомасининг мазмунидир.

Конгруэнтлик аксиомаларининг бажарилишини кўрсатишдан аввал, нур ва бурчак тушунчаларини киритайлик.

$u = (a{:}b{:}c)$ тўғри чизиқда тайин $0 = (x_0, y_0)$ ва $A = (x_1, y_1)$ нуқталарни олайлик. Унинг ихтиёрий (x, y) нуқтаси учун

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{ёки} \quad \begin{matrix} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt \end{matrix}$$

ўринли бўлади, бу ерда $m = x_1 - x_0$, $n = y_1 - y_0$, t эса параметр. t га исталган сон қийматларни бериб, тўғри чизиқнинг нуқталарини топиш мумкин. Тўғри чизиқнинг барча нуқталарини икки синфга ажратамиз. $t > 0$ га мос келган барча нуқталарни биринчи синфга, $t < 0$ га мос келган нуқталарни эса иккинчи синфга киритайлик. $t = 0$ га мос $0 = (x_0, y_0)$ нуқта турли синфга қарашли ихтиёрий икки нуқтанинг орасида ётади. u тўғри чизиқнинг биринчи (ёки иккинчи) синфга кирган барча нуқталари тўпламини учи 0 бўлган нур деб атаймиз ва $h = (x_0, y_0; m{:}n)$ ёки $\overline{h} = (x_0, y_0; -m{:}-n)$ кўринишда белгилаймиз. Умумий учга эга бўлган *икки h,k нурдан ташкил топган фигура бурчак* деб аталади, уни $\angle(h,k)$ кўринишда белгилаймиз. «Конгруэнтлик» муносабатини қуйидагича таърифлаймиз:

$A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$, $D=(x_4, y_4)$ нуқталар берилган бўлсин. Агар $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_4-x_3)^2+(y_4-y_3)^2}$ тенглик ўринли бўлса, AB кесма CD кесмага *конгруэнт (тенг)* деб аталади ва $AB\equiv CD$ кўринишда белгиланади. $h_1=(x_1, y_1; m:n)$, $k_1=(x_1, y_1; m_1':n_1')$ нурлардан ташкил топган $\angle(h_1, k_1)$ бурчак $h_2=(x_2, y_2; m_2:n_2)$, $k_2=(x_2, y_2; m_2':n_2')$ нурлардан ташкил топган $\angle(h_2, k_2)$ бурчак берилган бўлсин. Агар $\frac{m_1m_1'+n_1n_1'}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_1'^2+n_1'^2}}=\frac{m_2m_2'+n_2n_2'}{\sqrt{m_2^2+n_2^2}\sqrt{m_2'^2+n_2'^2}}$ тенглик ўринли бўлса, $\angle(h_1, k_1)$, $\angle(h_2, k_2)$ бурчаклар ўзаро *конгруэнт (тенг)* деб аталади. Энди конгруэнтлик аксиомаларининг бажарилишини текширайлик.

III_1. $u=(a:b:c)$ тўғри чизиқ ҳамда $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$ нуқталар билан аниқланган AB кесма берилган бўлсин. u тўғри чизиқдаги $0=(x_0, y_0)$ нуқтанинг бир томонида шундай $M=(x, y)$ нуқта топайликки, унинг учун $OM\equiv AB$ тенглик бажарилсин. Ҳақиқатан ҳам, шундай M нуқта учун қуйидаги тенглик ўринли бўлиши керак:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Бу тенгликда x, y ўрнига x_0+mt, y_0+nt ни қўямиз:

$$m^2t^2+n^2t^2+(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2\Rightarrow t=\frac{\pm\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}{m^2+n^2}.$$

Бу ифодадаги t нинг иккита қийматига u тўғри чизиқдан иккита нуқта мос келиб, O нуқта бу нуқталарнинг орасида ётади. Демак, O нинг бир томонида $OM=AB$ шартни қаноатлантирувчи ягона нуқта мавжуд.

III_2, III_3, III_4 аксиомаларнинг бажарилиши ҳам худди шундай исботланади.

III_5. ABC учбурчакнинг учлари: $A=(x_1, y_1)$, $B=(x_2, y_2)$, $C=(x_3, y_3)$; $\triangle A'B'C'$ учбурчакнинг учлари: $A'=(x_1', y_1')$, $B'=(x_2', y_2')$, $C=(x_3', y_3')$. $AB\equiv A'B'$, $AC\equiv A'C'$, $\angle A=\angle A'$ бўлсин. $\angle B=\angle B'$ ни исботлашимиз керак. $AB\equiv A'C'$ дан: $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2$ ва $AC\equiv A'C'$ дан: $(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2=(x_3'-x_1')^2+(y_3'-y_1')^2$. Шартга кўра $\angle A=\angle A'$, бу муносабатлардан:

$$(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)=(x_2'-x_1')(x_3'-x_1')+(y_2'-y_1')(y_3'-y_1').$$

$\angle B=\angle B'$ ни исботлаш учун қуйидаги тенгликнинг ўринли эканини кўрсатиш кифоя:

$$\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_2)+(y_2-y_1)(y_3-y_2)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\cdot\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}}=$$

$$=\frac{(x_2'-x_1')(x_3'-x_2')+(y_2'-y_1')(y_3'-y_2')}{\sqrt{(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2}\cdot\sqrt{(x_3'-x_2')^2+(y_3'-y_2')^2}}.$$

Кенгроқ муҳокамалар бу тенгликнинг ўринли эканидан дарак беради.

Энди Дедекинд аксиомасига ўтайлик.

IV. Конгруэнтлик муносабатига асосланиб, текисликда ҳаракат тушунчасини киритиш мумкин. Ҳаракат натижасида «орасида» муносабати сақланади, яъни AB кесма бирор ҳаракат натижасида $A'B'$ кесмага ўтса, A нуқта билан B нуқта орасидаги барча нуқталар A' билан B' орасидаги нуқталарга ўтади. Шунинг учун Дедекинд аксиомасини бирор кесма, масалан, $y=0$ тўғри чизиқдаги кесма учун бажарилишини кўрсатиш кифоя.

$(0{:}1{:}0)$, яъни $0\cdot x+1\cdot y+0=0$ тўғри чизиқдаги $A=(0,0)$, $B=(d,0)$ $(d>0)$ нуқталардан ҳосил бўлган AB кесмани текширайлик. Бу ерда B нуқтанинг биринчи аниқловчиси мусбат сон, иккинчи аниқловчиси — ноль. Бу вақтда $(0{:}1{:}0)$ тўғри чизиқдаги $N=(x_1, 0)$ нуқтанинг A билан B нуқталар орасида бўлиши учун $0<x<d$ шарт бажарилиши керак. Аксинча, бу шартни қаноатлантирувчи ҳар бир x сонга A билан B орасида ётган нуқта мос келади. Демак, AB кесма нуқталарини Дедекинд аксиомалари шартини қаноатлантирадиган қилиб икки синфга ажратиш $(0, d)$ интервалдаги сонларни Дедекинд аксиомаси шартларини қаноатлантирадиган қилиб икки синфга бўлиш демакдир. Ҳақиқий сонлар тўпламида Дедекинд аксиомаси ўринлидир. Агар $(0,d)$ интервални икки синфга ажратувчи Дедекинд сони t бўлса, бу сонга AB кесмада мос келувчи нуқта $M=(t, 0)$ бўлади.

Ниҳоят, V параллеллик аксиомасини текширайлик. $u=(a{:}b{:}c)$ тўғри чизиқ ва унда ётмаган $A=(x_0, y_0)$ нуқта берилган бўлсин: $ax_0+by_0+c\neq 0$. A нуқтадан ўтувчи бирор тўғри чизиқ $u'=(a'{:}b'{:}c')$ ни, яъни $a'x_0+b'y_0+c'=0$ ни олайлик. Бу тенгликдан: $c'=-(a'x_0+b'y_0)$. Параллеллик аксиомасининг шартига кўра

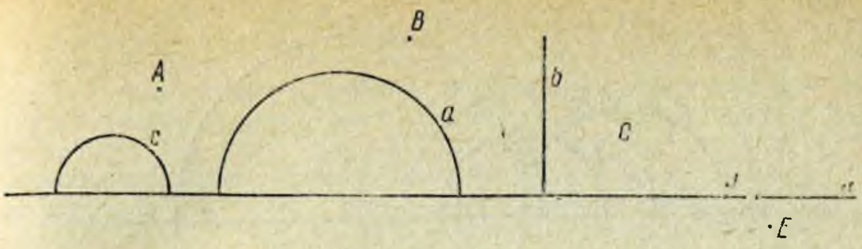
$$ax+by+c=0,$$
$$a'x+b'y+c'=0$$

система умумий ечимга эга эмас, яъни $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$, бундан $a'=\lambda a$, $b'=\lambda b$; c' учун $c'=-(a'x_0+b'y_0)=-\lambda(ax_0+by_0)$. Шундай қилиб, $u'=(a'{:}b'{:}c')=(a{:}b{:}-(ax_0+by_0))$ тайин ягона тўғри чизиқдир. Демак, юқорида келтирилган арифметик моделда Гильберт аксиомалари системасининг (текисликка тааллуқли аксиомалари) барча шартлари бажарилган, демак шу аксиомалар ёрдамида исбот қилинадиган барча теоремалар ҳам ўринли. Қуйидаги хулосага келамиз: арифметиканинг қонун-қоидалари зидликдан ҳоли бўлса, Евклид геометрияси ҳам мантиқий зидсиздир.

22-§. Лобачевский геометриясининг зидсизлиги

Олдинги параграфда Евклид геометрияси учун зидсизлик масаласини текширдик. Унда ҳосил қилинган натижага асосланиб, Лобачевский геометриясида зидсизлик йўқлигини кўрсатамиз. Лобачевский геометриясининг зидсизлигини далилловчи талай моделлар мавжуд. Қуйида биз шундай моделлардан бири — француз *Пуанкаре* номи билан юритилувчи моделни келтирамиз.

Евклид текислигида тайин u тўғри чизиқ берилган бўлсин. Лобачевский геометриясидаги асосий тушунча ва муносабатларга қуйида-



39- чизма

гича маъно берамиз. Маълумки, u тўғри чизиқ Евклид текислигини иккита ярим текисликка ажратади, улардан бирини (39- чизма), аниқроғи u тўғри чизиқнинг юқорисидаги ярим текисликни *Лобачевский текислиги* деб қабул қилайлик (унга u тўғри чизиқ кирмайди). *Лобачевский нуқтаси* деб шу ярим текисликдаги нуқталарни оламиз. *Лобачевский тўғри чизиғи* деб маркази u тўғри чизиқда, ўзи эса юқори ярим текисликда жойлашган ярим айланаларни ва u га перпендикуляр нурларни оламиз. a, c — ярим айланалар ва b нур Лобачевский тўғри чизиқларидир. Қолган тушунчаларни, зарурат туғилганда, аниқлаб олаверамиз. Лобачевский аксиоматикаси абсолют геометрия аксиоматикаси қаторига Лобачевский аксиомасини қўшиш билан ҳосил қилинар эди. Демак, биз юқорида келтирилган моделда I_{1-3}, II_{1-4}, III_{1-5}, IV, V' аксиомалар шартларининг бажарилишини текшириб чиқишимиз керак.

$\mathrm{I}_{1,2}$ аксиомалар ўринли бўлади. Ҳақиқатан ҳам A, B нуқталар берилган бўлса, бу нуқталардан маркази u тўғри чизиқда бўлган фақат битта ярим айлана ўтади ёки AB кесманинг ўрта перпендикулярлари u билан кесишмаса, A, B нуқталар u га перпендикуляр нурда ётади.

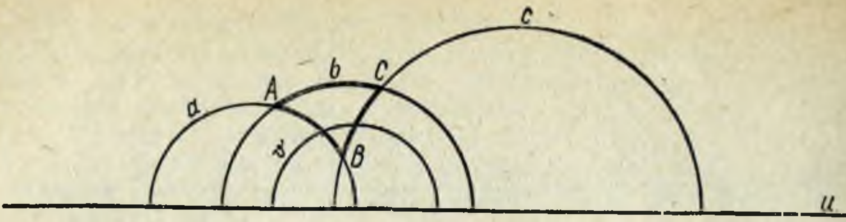
I_3 аксиома бажарилади, чунки ярим айланада ёки нурда (Евклид маъносида) ётган нуқталар ҳам, ётмаган нуқталар ҳам мавжуддир.

Тартиб аксиомаларини текшириш учун «орасида» тушунчасини қуйидагича аниқлаймиз. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқдаги (яъни битта ярим айланадаги ёки битта нурда ётган) нуқталар бўлсин. Агар B нуқта оддий маънода A билан C орасида ётса, B нуқта билан C орасида ётади деймиз.

У ҳолда нур устидаги ёки ярим айлана устидаги нуқталар учун II_{1-3} лар ўринли бўлади.

Лобачевский маъносидаги учбурчакни қуйидагича таърифлаймиз. Маркази тўғри чизиқда ётган учта ярим айлананинг кесишишидан ҳосил бўлган учта нуқта ва уларни туташтирувчи шу айланалар ёйларидан ҳосил қилинган фигура *учбурчак* деб аталади; нуқталар учбурчакнинг учлари, ёйлар эса учбурчак томонлари деб аталади. (40- расмда ABC учбурчак тасвирланган.)

u тўғри чизиқни абсцисса ўқи деб қабул қилсак, Лобачевский маъносидаги тўғри чизиқ тенгламаси $f = (x-x_0)^2 + y^2 - t^2 = 0$; $(x_0,0)$ нуқта айлана маркази. Лобачевский текислигидаги ихтиёрий M нуқтани олсак, агар M нуқта юқоридаги ярим айланада ётса, $f_M = 0$, агар M



40- чизма

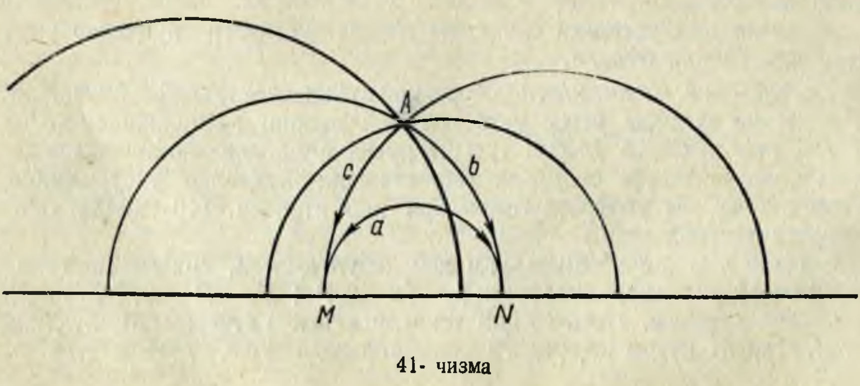
нуқта шу ярим айлана билан чегараланган ярим доирага тегишли бўлса, $f_m < 0$, ва ниҳоят, M ярим доирага тегишли бўлмаса, $f_m > 0$.

II_4 аксиома шартининг бажарилишини текширайлик. ABC учбурчакнинг учларидан ўтмаган, лекин бирор томонини кесиб ўтган v тўғри чизиқ AB ёйни кесиб ўтади дейлик. У ҳолда $f_A > 0$, $f_B < 0$ ёки $f_A < 0$, $f_B > 0$, хуллас, $f_A, f_Б$ нинг ишоралари бир-бирига қарама-қарши, C нуқта v га тегишли эмас, демак, $f_C > 0$ ёки $f_C < 0$. Шу сабабдан f_A билан f_C нинг ёки f_B билан f_C нинг ишоралари турли. Демак, v тўғри чизиқ AC ёки BC томонни кесиб ўтади. Бу II_4 аксиомаси бажарилганини билдиради.

Кесмалар ва бурчакларнинг «конгруэнтлик» муносабати инверсия тушунчасига асосланган ([13] китоб, 121-бет). Аниқроғи, AB кесмани (ёйни) CD кесмага (ёйга) ўтказувчи, маркази u тўғри чизиқда бўлган инверсион алмаштиришлар кетма-кетлиги мавжуд бўлса, AB кесма CD кесмага *конгруэнт* деб аталади. Шунга ўхшаш бурчакларнинг ҳам конгруэнтлиги таърифланади. Инверсия хоссалари билан мукаммал танишиб чиққан ўқувчи III_{1-5} аксиомаларнинг Лобачевский текислигида бажарилишига ишонч ҳосил қилади.

Худди шунга ўхшаш Дедекинд аксиомаси ҳам Евклид геометриясидаги айлана ёйлари учун ўринли бўлганидан, уни Лобачевский текислигида ҳам ўринли бўлишига ишонч ҳосил қиламиз.

Ниҳоят, Лобачевский аксиомасининг бажарилишини текширайлик. Лобачевский текислигида u тўғри чизиқ ва унда ётмаган A нуқта берил-



41- чизма

ган бўлсин (41-чизма). A нуқта орқали a ярим айлананинг M ва N нуқталарида уринувчи фақат иккита b, c айлана (тўғри чизиқлар) ўтказиш мумкин: b ярим айлананинг маркази NA кесма ўрта перпендикулярининг u тўғри чизиқ билан кесишган нуқтасида, c ярим айлана маркази эса MA кесма ўрта перпендикулярининг u тўғри чизиқ билан кесишган нуқтасида бўлади. Бундан ташқари, A нуқта орқали a билан кесишмайдиган (узоқлашувчи) ва кесишадиган чексиз кўп тўғри чизиқлар ўтади. Хуллас, A нуқта орқали u билан кесишмайдиган камида иккита тўғри чизиқ ўтади. Бу Лобачевский аксиомасининг бажарилишини кўрсатади. Демак, Пуанкаре моделида Лобачевский геометриясининг барча аксиомалари бажарилади. Бу модель Евклид геометрияси объектларидан қурилгани учун Евклид геометриясида зидлик бўлмагани каби Лобачевский геометриясида ҳам зидликнинг йўқлигидан дарак беради. Биз Лобачевский геометриясининг планеметрик аксиомаларини текшириш билангина чекландик.

23-§. Гильберт аксиомалари системасининг тўлиқлиги ва параллеллик аксиомасининг эркинлиги ҳақида

2-§ да аксиомалар системасининг тўлиқлик шартига итоат қилишини текшириш усулини таъкидлаган эдик. Аксиомалар системасининг тўлиқ эканини кўрсатиш учун унинг қурилган исталган икки моделининг изоморф эканини кўрсатиш кифоядир. 21-§ да Гильберт аксиомалари учун арифметик моделини тузган эдик. Худди шунга ўхшаш Гильберт аксиомалари системасининг иккинчи модели сифатида Декарт модели деб номланган моделни киритиш мумкин. Бу моделнинг моҳияти қуйидагича: текисликда декарт системасини киритиб, ҳар бир нуқтага унинг координаталари деб аталган бир жуфт (x, y) сонни мос келтирамиз ва аксинча.

Тўғри чизиқ деб $ax + by + c = 0$ тенгламани (a, b, c тайин сонлар бўлиб, a ёки b лардан камида биттаси нолдан фарқли) қаноатлантирувчи барча x, y сонлар жуфтини, яъни нуқталарни оламиз. $x = 0$, $y = 0$ тўғри чизиқларни координата ўқлари деб атаймиз. $(0, 0)$ нуқтани координаталар боши деб юритамиз. Тўғри чизиқда $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$ нуқталар берилган бўлсин. $b \neq 0$ ҳолда $x_1 < x_2 < x_3$ ёки $x_1 > x_2 > x_3$ бўлса, $b = 0$ ҳолда эса $y_1 < y_2 < y_3$ ёки $y_1 > y_2 > y_3$ бўлса, B нуқта A билан C орасида ётади деб аталади.

Бундан ташқари, конгруэнтлик тушунчаси учун нур, бурчак ва ҳоказо тушунчаларга аналитик геометрияда берилган таърифларни кўзда тутамиз. Асосий тушунча ва муносабатлар Гильберт аксиомалари системасининг барча шартларини қаноатлантиради. Бу моделда ҳосил қилинган барча формулалар 21-§ да келтирилган арифметик моделдаги формулалар билан бир хил бўлади. Демак, бу икки моделдаги асосий тушунчалар (объектлар, муносабатлар) орасида ўзаро бир қийматли мослик мавжуд бўлиб, асосий муносабатлар сақланар экан, бу эса арифметик модель билан декарт модели орасида изоморф мосликнинг мавжудлигидан дарак беради.

Қуйидаги хулосага келамиз: Гильберт аксиомалари системаси тўлиқлик талабига жавоб беради.

Энди Гильберт аксиомалари системасидаги аксиомаларнинг эркинлиги масаласига тўхтайлик. 2- § да таъкидлаганимиздек, бирор аксиоманинг бошқа аксиомаларга нисбатан эркин эканлигини кўрсатиш учун унинг инкорини олиб, қолган аксиомалар билан биргаликда янги системани ҳосил қилиб, бу системанинг зидсиз эканлигини кўрсатиш, яъни бирорта моделда янги система аксиомаларининг бажарилишини исботлаш керак. Юқорида худди шундай ишни Гильбертнинг параллеллик аксиомаси учун бажардик. Чунки бу аксиоманинг инкори сифатида Лобачевский аксиомасини олиб, янги аксиомалар системасини ҳосил қилдик ва бу системанинг зидсиз эканлигини исботладик. Бошқача қилиб айтганда, параллеллик аксиомаси мустақил аксиома бўлиб, уни абсолют геометрия аксиомалари ёрдамида теорема сифатида исботлаш мумкин эмас экан.

24- §. Циркуль ва чизғич ёрдамида ясаш аксиомалари

1. **Конструктив геометрия.** Нуқталарнинг ҳар қандай тўплами фигура деб аталиши маълум. Маълум талабларга жавоб берувчи фигурани бир ёки бир нечта ясаш қуроллари (чизғич, циркуль, чизмачилик учбурчаги ва бошқалар) ёрдамида ясашни талаб этган масала *конструктив масала* дейилади.

Чизғич, циркуль, учбурчакли чизғич ва транспортир ёрдамида ечиладиган текисликдаги ҳар қандай конструктив масалаларни фақат циркуль ва чизғич воситасида ечиш мумкин. Шунинг учун бошқа ясаш қуролларининг қолганларидан фойдаланмаса ҳам бўлади.

2. **Конструктив геометрия аксиомалари.** Конструктив геометрияда геометрик фигурани «ясаш» деганда унинг барча элементларини топишни тушунамиз. Геометриянинг ясашга доир асосий талаблари тегишли аксиомалар орқали ифода қилинади. Конструктив геометрия масалаларини ихтиёрий қуроллар воситасида ечишда қуйидаги аксиомалар ўринли деб қабул қилинади:

1. Берилган $F_1, F_2, \ldots, F_к$ фигураларнинг ҳар бири ясалган. Бу ерда «берилган фигура» ва «фигура аниқлангаи» тушунчаларини аралаштириб юбормаслик керак. Агар бирор «фигура берилди» деб айтилса, бу фигура тасвирланган, чизилган, яъни ясалган деб тушуниш керак. Агар бирор «фигура аниқланган» деб айтилса, бу ибора орқали фигуранинг ўзи берилмаган бўлиб, фақат фигуранинг вазиятини аниқлайдиган элементлар берилган деган маънони тушунмоқ керак. Масалан, тўғри чизиқнинг икки нуқтаси берилган бўлса, бу нуқталарни бирлаштирадиган ягона тўғри чизиқ мавжуд, яъни бу тўғри чизиқ ўзининг икки нуқтаси билан аниқланган, бироқ бу тўғри чизиқ ясалмаган (чизилмаган), уни ясаш керак.

2. Иккита фигура ясалган бўлса, у ҳолда бу фигураларнинг бирлашмаси ҳам ясалган.

3. Иккита F_1 ва F_2 фигура ясалган бўлиб, уларнинг кесишмаси бўш бўлмаса, уларнинг $F_1 \cap F_2$ кесишмаси ясалган бўлади.

4. Агар F_1, F_2 фигуралар ясалган ва $F_2 \subset F_1$, $F_1 \neq F_2$ бўлса, $F_1 \setminus F_2$ фигура ясалган ҳисобланади.

5. Агар F фигура ясалган бўлса, бу фигурага қарашли нуқтани ясаш мумкин.

Биз евклид текислигига тааллуқли ясашга доир масалалар билангина шуғулланамиз. Текисликда ясашга доир масалаларни ечишда ясаш қуролларидан одатда чизғич ва циркуль ишлатилади. Ясашга доир масалаларни чизғич ва циркуль ёрдамида ечишда чизма практикасида қўлланиладиган чизғич ва циркуль эмас, балки абстракт чизғич ва циркуль эътиборга олинади. Бу қуролларнинг конструктив имкониятлари қуйидаги иккита аксиома орқали ифода қилинади.

6. Агар A, B нуқталар ($A \neq B$) белгиланган бўлса, AB нурни ясаш мумкин.

7. Агар O нуқта ва AB кесма ясалган бўлса, маркази O нуқтада

ва радиуси $r = AB$ бўлган айланани чизиш мумкин. Бу айланани $S(o, r)$ кўринишда белгилаймиз.

3. Шу аксиомаларга суяниб, қуйидаги баъзи содда масалаларни ечиш мумкин.

1) A, B нуқталар берилган бўлса, AB нурни ясанг (6-аксиома).

2) A, B нуқталар берилган бўлса, AB кесмани ясанг.

6-аксиомага асосан, AB ва BA нурларни ясаймиз. 3-аксиомага кўра, бу нурларнинг кесишмаси изланган AB кесма бўлади.

3) A, B нуқталар берилган бўлса, AB тўғри чизиқни ясанг.

4) Агар айлана маркази ва радиусига тенг кесма ясалган бўлса, айланани ясанг.

5) Параллел бўлмаган иккита тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасини ясанг.

6) Берилган тўғри чизиқ билан айлананинг кесишган нуқтасини ясанг (бундай нуқталар мавжуд бўлса).

7) Берилган иккита айлананинг кесишган нуқтасини ясанг (бундай нуқталар мавжуд бўлса).

8) Берилган фигурага тегишли бўлган нуқтани ясанг.

Ясашга доир масалаларни ечиш деганда уларни чекли марта ишлатиш йўли билан бажарилган энг содда масалаларга келтиришни тушунамиз.

Мактабда ўқиладиган геометрия курсидан маълум бўлг н қуйидаги масалаларни энг содда масалаларга келтириш усулида ечайлик.

1-масала. Берилган кесманинг ўрта нуқтасини ясанг (42-чизма).

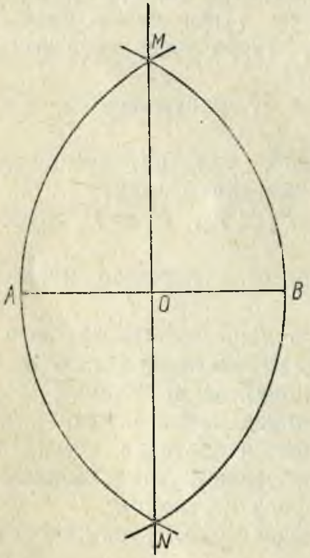
Ечиш. 1) AB тўғри чизиқни ясаймиз (3-энг содда ясаш).

2) $S_1(A, a)$ айланани ясаймиз. $AB = a$ (4-энг содда ясаш).

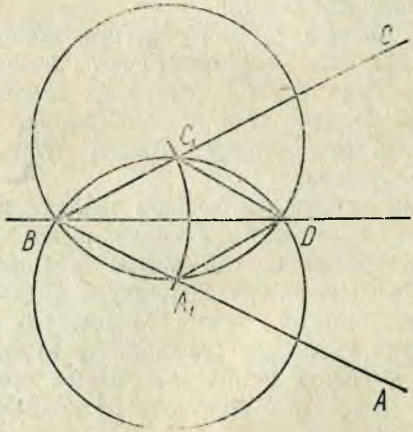
3) $S_2(B, a)$ айланани чизамиз.

4) S_1, S_2 айланаларнинг умумий M, N нуқталарини топамиз (7-энг содда ясаш).

5) MN тўғри чизиқни чизамиз,



42- чизма



43- чизма

$AO=OB$ эканлиги осон исботланади. Демак, O нуқта изланган нуқта бўлади.

2-масала. Берилган ABC бурчакни тенг иккига бўлинг, яъни бурчак биссектрисасини чизинг.

Ечиш (43-чизма):

1) Ихтиёрий r градус билан S (B, r) айлана чизамиз (4-энг содда ясаш).

2) S айлананинг бурчак томонлари билан кесишган A_1, C_1 нуқталарини топамиз (6-энг содда ясаш).

3) S_1 (A_1, r), S_2 (C_1, r) айланаларни чизамиз (7-энг содда ясаш).

4) S_1, S_2 айланаларнинг кесишган B, D нуқталарини белгилаймиз (7 энг содда ясаш).

5) BD нурни чизамиз (1-энг содда ясаш). Бу BD нур изланган биссектриса бўлади, чунки BC_1D ва BA_1D учбурчаклар тенг.

4. Ясашга доир элементар масалалар. Конструктив масалаларни юқоридаги усул билан ечиш масала ечишни анча чўзиб юборади ва ечишнинг муҳим ўринларини яққол кўрсата олмайди. Шунинг учун кўпгина масалалар содда масалаларга ажратилмай, балки ўша содда масалаларга суяниб ечиладиган ва кўп учраб турадиган масалаларга келтирилиб ечилади. Бундай масалаларни одатда элементар масалалар ёки асосий геометрик ясашлар деб аталади. Одатда элементар масалаларга қуйидагилар киради:

1. Берилган кесмани тенг иккига бўлиш.
2. Берилган бурчакни тенг иккига бўлиш.
3. Берилган бурчакка тенг бурчак ясаш.
4. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш.
5. Берилган тўғри чизиққа берилган нуқтадан перпендикуляр ўтказиш.
6. Учта томони берилган учбурчак ясаш.
7. Бир томони ва унга ёпишган икки бурчаги берилган учбурчак ясаш.
8. Икки томони ва улар орасидаги бурчаги берилган учбурчак ясаш.
9. Гипотенузаси ва бир ўткир бурчаги берилган тўғри бурчакли учбурчак ясаш.
10. Гипотенузаси ва бир катети берилган тўғри бурчакли учбурчак ясаш.
11. Берилган кесмани берилган нисбатда бўлиш.
12. Берилган нуқтадан берилган айланага уринма ўтказиш.

Бу масалаларнинг иккитаси юқорида тўла ечиб кўрсатилган, қолган масалаларни ўша намуна бўйича мустақил ечишни ўқувчига тавсия қиламиз ([17], [11] дан фойдаланинг). Мураккаб масалалар ечишда элементар геометрик масалалардан жуда кўп марта фойдаланамиз, шунинг учун бу м салаларнинг ечимларини пухта ўрганиш зарур.

25-§. Ясашга доир масалаларни ечишдаги босқичлар

Одатда ясашга доир геометрик масалаларни ечишда масала ечилишини осонлаштириш ва тўла ечимини таъминлаш мақсадида юритиладиган муҳокама аниқ бир умумий схемада олиб борилади. Бу схема қуйидаги тўртта босқичдан иборат:

Анализ. Анализ конструктив масалаларни ечишнинг дастлабки тайёрлов босқичидир. Бу босқичнинг асосий вазифаси масалани ечилиши олдиндан маълум бўлган масалаларга ажратиш ва уларнинг ечилиши тартибини аниқлашдан иборат. Бундан ташқари, масала ечилди деб фараз қилиниб, изланган ва берилган фигуралар масала талабига мумкин қадар тўларoқ жавоб берадиган тарзда тахминан чизиб қўйилади. Сўнгра керакли геометрик фактлардан фойдаланиб, сўралган ва берилган фигура орасидаги боғланишлар аниқланади ва фигуранинг қайси элементини қай тартибда ясаш мумкинлиги белгиланади. Шундай қилиб изланган фигуранинг ясаш плани тузилади.

Сўралган ва берилган фигура элементлари орасидаги боғланишни топишни осонлаштириш учун одатда ёрдамчи фигурадан фойдаланилади. Ёрдамчи фигура шундай бўлиши керакки, уни берилганларга асосан ясаш ва ундан изланган фигурага ўтиш мумкин бўлсин.

Ясаш. Масалада сўралган фигурани топиш учун керак бўлган асосий ясашлар кетма-кетлиги анализ босқичида тузилган план асосида, чизғич ва циркуль ёрдамида ҳосил қилинади.

Исбот. Бу босқичда ясалган фигура масалада изланган фигура эканлиги исбот қилинади, яъни унинг масалада берилган барча шартларга жавоб бериши исботланади. Исботлаш ясашда бажарилган ишларга ва тегишли геометрия теоремаларига асосланади.

Текшириш. Ясашга доир масалаларни тўла ечиш учун қуйидаги саволларни ойдинлаштириш керак:

1. Масалада берилган элементларни ихтиёрий танлаб олганда ҳам масала ечимга эга бўладими, агар берилган элементлар ихтиёрий танлаб олинганда масала ечимга эга бўлмаса, у ҳолда қандай танлаб олганда масала ечимга эга бўлади, қандай ҳолларда ечимга эга бўлмайди?

2. Берилган элементлар имконияти борича танлаб олинганда масала нечта ечимга эга бўлади?

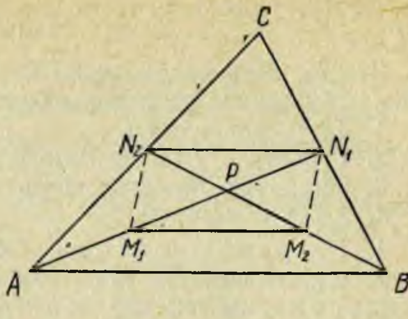
Бу саволларга жавоб бериш учун ясашнинг боришини текшириш керак. Бу деган сўз, ясаш босқичида бажарилган энг содда ва асосий ясашларни бирин-кетин яна бир бор текшириш керак ҳамда бу масалаларни ҳамма вақт ечиш мумкинми, ечиш мумкин бўлса, нечта ечим борлигини аниқлаш керак.

Ясашга доир масалаларни босқичлаб ечиш масалани тўғри ечишнинг гаровидир. Лекин шуни эсдан чиқармаслик керакки, ҳар қандай масалани ечишда ҳам бу тўртта босқичга қатъий риоя қилиш шарт эмас. Масаланинг оғир-енгиллигига, содда-мураккаблигига қараб, бу босқичларнинг баъзиларига тўхталмасдан кетиш ҳам мумкин.

Бу ғояларни қуйидаги масалаларга татбиқ қилайлик.

Масала. Асоси ва ён томонларига ўтказилган иккита медианаси бўйича учбурчак ясанг.

Ечиш (44-чизма). Анализ. ABC изланган учбурчак бўлсин. AB—асоси, AN_1, BN_2—ён томонларига ўтказилган медианалари, P—медианалар кесишган нуқтаси. Шартга кўра c, m_a, m_b маълум ($AB=c$, $AN_1=m_a$, $BN_2=m_b$). ABC учбурчакни ясаш учун унинг учларини топиш кифоя. AB кесмани ясаб, учбурчакнинг иккита A, B учларини топамиз. C учини топиш учун N_1, N_2 нуқталарни ясаш керак; AN_2, BN_1 нурлар кесишиб, C учни ҳосил қилади. N_1, N_2 нуқталар мос равишда AP, BP нурларда ётади, бу ерда N_1 нуқта A нуқтадан m_a масофада, N_2 нуқта B нуқтадан m_b масофада ётади. Шунинг учун масала P нуқтани ясашга келтирилади. Бу нуқтани ABP учбурчакнинг учинчи учи сифатида ясаш мумкин. $AP=\frac{2}{3}m_a$, $BP=\frac{2}{3}m_b$ бўлганидан ABP учбурчакнинг ҳамма томонлари маълум.



44- чизма

Ясаш. Анализ натижасига мувофиқ қуйидаги планда ясашни бажарамиз.

1. Учта c, AP, BP томонларига кўра ABP учбурчак ясалади (6-асосий ясаш) ва P нуқта топилади.

2. AP, BP нуқталар устига мос равишда m_a, m_b кесмаларни қўйиб ва N_1, N_2 нуқталарни топиб, C нуқтани ясаймиз, ABC изланган учбурчак бўлади.

Исбот. AP кесманинг ўрта нуқтасини M_1 билан, BP кесманинг ўрта нуқтасини M_2 билан белгилайлик, у ҳолда ҳосил қилинган $N_1N_2M_1M_2$ тўртбурчак параллелограммдир, чунки тўртбурчакнинг диагоналлари кесишиб тенг иккига бўлинади. Демак, $M_1M_2=N_1N_2$ ва $M_1M_2 \parallel N_1N_2$. M_1M_2 кесма ABP учбурчакнинг ўрта чизиғи, $N_1N_2 \parallel AB$ ва $N_1N_2=\frac{1}{2}AB$, буидан N_1N_2 кесма ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи деган хулоса чиқади. Демак, AN_1, BN_2 кесмалар ҳақиқатан ҳам ABC учбурчакнинг медианасидир.

Текшириш. Биринчи ясашнинг бир қийматли бажарилиши учун:

$$\frac{2}{3}(m_a-m_b)<c<\frac{2}{3}(m_a+m_b)$$

шартнинг ўринли бўлиши зарур ва етарлидир. Энди биз иккинчи ясашни ҳамма вақт бажариш мумкин эканлигини кўрсатайлик.

AN_2, BN_1 нурлар доимо AB тўғри чизиқнинг P нуқта ётган томонида кесишади. Ҳақиқатан ҳам, агар $AN_2 \parallel BN_1 \Rightarrow N_2N_1 \parallel AB$ ва $N_2N_1=AB$ деган натижа оламиз, бу ҳол эса юз бера олмайди, чунки $N_2N_1=\frac{1}{2}AB$ (исботга қаранг).

Агар AN_2, BN_1 тўғри чизиқлар AB тўғри чизиқнинг иккинчи томонида кесишади деб фараз қилсак, N_1N_2 кесма AB кесмадан катта бўлади. Шундай қилиб, 1 — 2 ясашлар бир қийматли бажарилади.

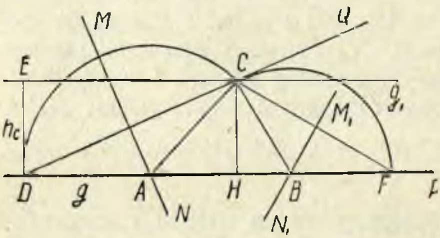
26-§. Текисликда геометрик ясашларнинг турли методлари

Ясашга доир масалаларни ечишда турли методлар мавжуд бўлиб, қуйида буларнинг асосийлари билан танишиб ўтамиз:

1. Тўғрилаш методи.
2. Геометрик ўринлар методи.
3. Геометрик алмаштиришлар методи.
4. Алгебраик метод.

1. Тўғрилаш методи. Синиқ чизиқ бўғинларининг йиғиндисидан ясалган кесмани ясаш *синиқ чизиқни тўғрилаш* дейилади.

Масала. Баландлиги, периметри, асосига ёпишган битта бурчаги берилган учбурчак ясанг.



45- чизма

Ечиш (45-чизма). Анализ. Масала ечилди деб фараз қилиб изланган ABC учбурчакни тахминан чизиб қўямиз.

Масала шартига кўра:

1. $AB + BC + CA = p$,
2. $CH = h_c$,
3. $\angle BAC = \alpha$.

AB тўғри чизиқ устига A нуқтадан чап томонга $AD = AC$ кесмани, B нуқтадан ўнг томонга $BF = BC$ кесмани ўлчаб қўямиз. D, F нуқталарни C нуқта билан туташтирсак, тенг ёнли иккита ADC ва BCF учбурчак ҳосил бўлади. Асоси $DF = p$, баландлиги $CH = h_c$ ва $\angle CDA = \frac{\alpha}{2}$ бурчагига кўра DCF учбурчакни, яъни ёрдамчи фигурани ясаш мумкин. Бу ёрдамчи фигурадан изланган фигурага ўтиш учун CD ва CF кесмаларнинг ўртасидан мос равишда уларга MN, M_1N_1 перпендикуляр тўғри чизиқлар ўтказиб, $MN \cap DF = A$, $M_1N_1 \cap DF = B$ нуқталарни топиш мумкин. Шундай қилиб, масаланинг ечиш йўли аниқланди.

Ясаш.

1. Ихтиёрий g тўғри чизиқ олиб, $DF = p$ кесмани қўямиз.
2. $DE \perp g$ тўғри чизиқ ўтказамиз ва D нуқтадан бошлаб DE устига $DE = h_c$ кесмани қўямиз.
3. $\angle PDG = \frac{\alpha}{2}$ бурчакни ясаймиз.
4. E нуқтадан g тўғри чизиққа параллел g_1 тўғри чизиқни ўтказамиз.
5. $g_1 \cap DG = C$. C нуқтани F нуқта билан бирлаштириб, $\triangle DCF$ ни ҳосил қиламиз.
6. DC, DF кесмаларнинг ўрта перпендикулярини ўтказамиз.
7. $MN \cap g = A$, $M_1N_1 \cap g = B$ нуқталарни топамиз. ABC изланган учбурчакдир.

Исбот. Ясашга кўра $DE = CH = h_c$. ($\triangle DAC$ ва $\triangle FBC$ лар ясашга кўра тенг ёнли) $\Rightarrow$ $DA = AC$ ва $BF = CB \Rightarrow AC + BC + AB =$

$= p$. $\angle ACD = \angle CDA = \frac{\alpha}{2}$ — ясашга кўра, $\angle CAB = \alpha$.

Текшириш. Юқоридаги 1 — 7 содда ясашлар бу ерда бажарилади. Демак, масала битта ечимга эга, лекин ABC учбурчакнинг мавжуд бўлиши учун $h_c < \frac{p}{2}$ тенгсизлик бажарилиши керак. Ҳақиқатан ҳам: $h_c < b + AH$, $h_c < a + HB$, бундан $h_c < \frac{a+b+c}{2}$, яъни $h_c < \frac{p}{2}$. Акс ҳолда масала ечимга эга эмас.

2. Геометрик ўринлар методи. Геометрик ўринлар методида масала қуйидаги иккита шартни қаноатлантирувчи нуқтани топишга келтирилади. Биринчи шартни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни Φ_1 фигурадан, иккинчи шартни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни Φ_2 фигурадан иборат бўлсин. Ҳар иккала шартни қаноатлантирадиган нуқталар $\Phi_1 \cap \Phi_2$ кесишмага тегишли бўлади. Бу шартлардан камида биттасини қаноатлантирмайдиган ҳар қандай нуқта кесимда ётмайди. $\Phi_1 \cap \Phi_2$ фигуранинг ҳар бир нуқтаси масаланинг ечимларини топишга имкон беради.

Масала. Асоси, учидаги ўткир бурчаги ва шу учидан асосига туширилган баландлиги берилган учбурчак ясанг.

Ечиш. Анализ. Изланган ABC учбурчак топилди деб фараз қилиб, унинг тахминий шаклини чизиб қўямиз. Масалада $AB = c$, $CD = h_c$ ва $\angle ACB = \alpha$ берилган. ABC учбурчакнинг учта учини топиш кифоя.

Берилган кесмани бирор тўғри чизиқ устига ўлчаб қўйиш билан изланган учбурчакнинг A, B учлари топилади, C учи эса қуйидаги иккита шартни қаноатлантиради:

1) C нуқта AB тўғри чизиқдан берилган h_c масофада ётади.

2) AB кесма C нуқтадан берилган α бурчак остида кўринади.

Биринчи шарт — берилган тўғри чизиқдан маълум масофада ётган нуқталарнинг геометрик ўрни AB тўғри чизиқнинг иккала томонида ётувчи ва унга параллел иккита тўғри чизиқдан иборат.

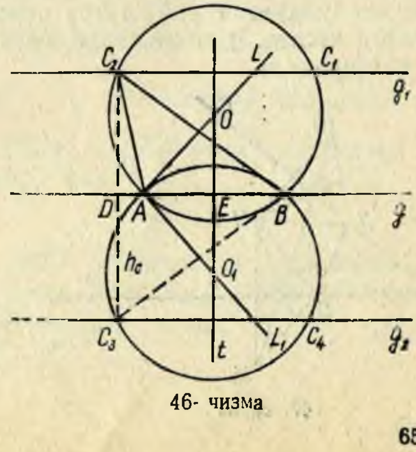
Иккинчи шарт — берилган кесма берилган бурчак остида кўринувчи нуқталарнинг геометрик ўрни берилган бурчакни сиғдирувчи иккита тенг сегментнинг берилган кесмани тортиб турувчи ёйларидан иборат.

Ясаш. 1. Ихтиёрий тўғри чизиқ олиб, $AB = c$ кесмани ажратамиз (46-чизма).

2. A нуқтадан g тўғри чизиқнинг иккала томонига $\angle BAL = \angle BAL_1 = 90° - \alpha$ бурчакларини ясаймиз.

3. AB кесманинг ўрта перпендикуляри t тўғри чизиқни ўтказамиз.

4. $t \cap AL = 0$, $t \cap AL_1 = 0_1$ нуқталарни топамиз.



46- чизма

5. $S\ (0, 0A)$ ва $S_1\ (0_1,\ 0_1A)$ айланаларни ясаймиз ($0A = 0_1A$).

Бу айланаларнинг AB кесма тортиб турган катта ёйларини F_1, F_2 билан белгилаймиз.

6. g тўғри чизиқдан h_c масофада турувчи g_1, g_2 тўғри чизиқлар $g_1 \cap F_1$, $g_2 \cap F_2$ кесишмаларга тегишли ҳар бир C нуқта масала ечимини топишга имкон беради. ABC учбурчак масала ечимидир.

Исбот. Ясашга кўра $AB = c$, g тўғри чизиқдан g_1, g_2 тўғри чизиқларгача бўлган масофа h_c га тенг ва $\angle LAB = \angle L_1AB = 90° - \alpha$. Бундан: $\angle AOE = \alpha$, $\angle ACB = \alpha$. ABC учбурчак масала талабига жавоб беради.

Текшириш. 1 — 6 ясашлар бир қийматли бажарилади. Охирги ясашни текширайлик. $F_1 \cap g_1$, $F_2 \cap g_2$ фигуралар 0, 2, 4 та умумий нуқталарга эга бўлиши мумкин. Шунга кўра масала ечимга эга бўлмаслиги, иккита ечимга эга бўлиши ва тўртта ечимга эга бўлиши мумкин. Бир-бирига тенг учбурчаклардан фақат биттаси масала ечимини беради деб қабул қилинади.

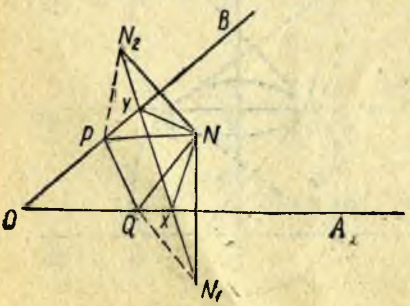
3. Геометрик алмаштиришлар методи.

Геометрик алмаштиришлардан фойдаланиб, ясашга доир масалаларни ечиш мумкин. Бу метод билан масала ечишни анализ босқичида, берилган ва изланган фигуралардан ташқари, берилган фигурани ёки унинг бирор қисмини у ёки бу геометрик алмаштиришлар натижасида ҳосил қилинган фигуралар ҳам қаралади. Бу фигура қайси геометрик алмаштиришни қўллаб ҳосил қилинган бўлса, ясашга доир масала ўша метод билан ечилган деб айтилади. Жумладан, симметрия методи, параллел кўчириш методи, гомотетия методи, инверсия методи.

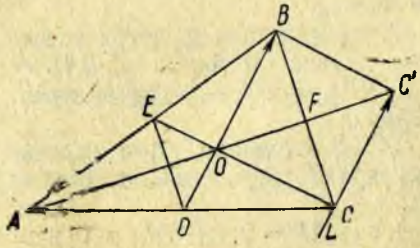
Бу методлар ёрдамида ечиладиган баъзи масалаларни кўриб чиқайлик.

1-масала. Бурчак ва унинг ичида бир нуқта берилган. Бир учи берилган нуқтада, қолган икки учи бурчак томонларида ётувчи ва периметри энг кичик бўлган учбурчак ясанг.

Ечиш (47-чизма). Анализ. Масала ечилган деб фараз қилайлик. AOB берилган бурчак, N эса бурчак ичида ётувчи нуқта бўлсин. N нуқтага OA, OB бурчак томонларига нисбатан симметрик N_1, N_2 нуқталарни топамиз. N_1, N_2 тўғри чизиқ бурчак томонларини X, Y нуқталарда кесади. Шундай қилиб, масалани ечиш X, Y нуқталарни топишга келтирилади.



47- чизма



48- чизма

Ясаш. 1. N нуқтага бурчак томонларига нисбатан симметрик бўлган N_1, N_2 нуқталарни топамиз.

2. $N_1N_2 \cap OA = X, N_1N_2 \cap OB = У$. $XNУ$ учбурчак — изланган фигура.

Исбот. Биз $XNУ$ учбурчакнинг периметри энг кичик эканлигини исботлаймиз. Ҳақиқатан, бурчакнинг OA, OB томонларидан мос равишда ҳар қандай ихтиёрий Q, P нуқталарни олмайлик,

$$QN_1 = QN,\ N_2P = PN \text{ бўлади.}$$

$XNУ$ учбурчакнинг периметри N_1N_2 кесмага тенг:

$$N_1N_2 = N_2У + XУ + XN_1 \quad (NУ = N_2У,\ NX = N_1X).$$

PQN учбурчак периметри $N_2P + PQ + QN_1$ га тенг. N_2PQN_1 синиқ чизиқ узунлиги N_1N_2 кесма узунлигидан катта. Демак, $XNУ$ учбурчак периметри энг кичик бўлади.

2-масала. Учта медианаси берилган учбурчак ясанг.

Ечиш (48-чизма).

Анализ. Изланган учбурчак ABC топилди деб фараз қилиб, унинг тахминий шаклини чизиб қўямиз. $BD = m_b$, $CE = m_c$, $AF = m_a$ учбурчак медианалари, O — учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси.

$$OA = \frac{2}{3} m_b,\ OB = \frac{2}{3} m_b,\ OC = \frac{2}{3} m_c.$$

Аввал $\overrightarrow{OB}$ воситасида аниқланган параллел кўчиришни текширайлик. Бу параллел кўчиришда OC кесма BC' кесмага ўтади. Параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган BOC' учбурчакни ясаш мумкин, чунки унинг ҳамма томонлари маълум:

$$OB = \frac{2}{3} m_b,\ OC' = \frac{2}{3} m_a,\ BC' = \frac{2}{3} m_c.$$

Бу $\Delta OBC'$ дан изланган фигурага ўтиш учун бу фигурани ҳосил қилишда бажарилган параллел кўчиришга тескари алмаштириш бажарилади.

Ясаш.

1. Томонлари маълум бўлган OBC' учбурчакни ясаймиз.
2. C' нуқтадан $OB \parallel C'L$ тўғри чизиқ ўтказамиз.
3. $C'L$ тўғри чизиқдан $BO = CC' = \frac{2}{3} m_b$ кесмани ажратамиз.
4. CO ва BO нурларга тегишли $CE = m_c$, $BD = m_b$ медианаларни ўлчаб қўйсак, E ва D нуқталар ҳосил бўлади.
5. $BE \cap CD = A$.

ABC изланган учбурчак.

Исбот. CE ва BD кесмалар ABC учбурчакнинг медианалари эканлигини исбот қилайлик. Бунинг учун D ва E нуқталарни бирлаштирсак, DOE ва BOC ўхшаш учбурчаклар ҳосил бўлади, чунки $\angle EOD = \angle BOC$, ясашга кўра: $\frac{DO}{OB} = \frac{EO}{OC}$.

$$(\Delta\, DOE \backsim \Delta\, BOC) \Rightarrow \frac{DO}{OB} = \frac{EO}{OC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow DE \parallel BC,$$

$\frac{DE}{BC} = \frac{EO}{OC} = \frac{1}{3} m_c : \frac{2}{3} m_c = \frac{1}{2} \Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$, DE кесма ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи. Демак, BD ва CD лар учбурчакнинг медианалари бўлади. $BOCC'$ ясашга кўра параллелограмм, F — BC томоннинг ўрта нуқтаси. Учбурчакнинг A учини F нуқта билан бирлаштирсак, AF медиана ҳосил бўлади. Бу медиана O нуқтадан ўтиб, $2:1$ нисбатда бўлинади. $AO = 2\,OF$, лекин $OF = \frac{1}{2} OC' \Rightarrow OF = \frac{1}{3} m_a \Rightarrow$ $\Rightarrow AO = \frac{2}{3} m_a$, демак, $AF = m_a$, учбурчакнинг учинчи медианаси ҳам берилган кесмага тенг.

Т е к ш и р и ш. 1 — 5 ясашлар бир қийматли бажарилади. Агар

$$|m_a - m_b| < m_c < m_a + m_b$$

шарт бажарилса, масала ягона ечимга эга бўлади.

3- м а с а л а. Берилган квадратга учларидан бири (квадрат томонида) берилган ички тенг томонли учбурчак чизинг.

Е ч и ш (49 - чизма).

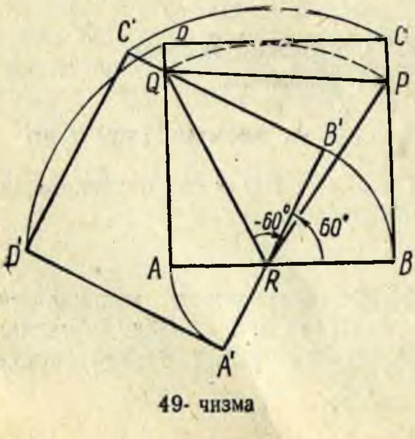
А н а л и з. Берилган $ABCD$ квадратга тенг томонли ички PRQ учбурчак чизилган бўлсин. Унинг R учи квадратнинг AB томонида ётсин дейлик.

Тенг томонли учбурчакнинг ҳар бир бурчаги 60° га тенглиги сабабли фигурани R нуқта атрофида 60° бурчакка буриш RP томонни RQ томонга ва P учни Q учга ўтказади. Иккинчи томондан ўша буришнинг ўзи $ABCD$ квадратни $A'\,B'\,C'\,D'$ квадратга айлантиради. Унинг $B'\,C'$ томони Q нуқтадан ўтиши керак, чунки P нуқта Q нуқтага тушади. P нуқтани топиш учун Q нуқтани R нуқта атрофида — 60° бурамиз. Шунинг ўзи масала ечиш тартибини аниқлайди.

Я с а ш 1. Квадратнинг BC томонини R нуқта атрофида 60° га буриб, $B'\,C'$ кесмани ясаймиз.

2. $B'\,C'$ томон AD томон билан Q нуқтада кесишади.

3. Q нуқтани R нуқта атрофида — 60° бурсак, P нуқта ҳосил бўлади. RPQ учбурчак изланган фигурадир.



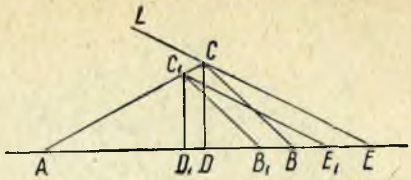
49- чизма

И с б о т. Ясашга кўра $RQ = RP$, $\Delta\, RPQ$ эса тенг ёнли, унинг R учидаги $\angle PRQ$ бурчак 60°. Шундай қилиб, RPQ учбурчак тенг томонлидир.

Т е к ш и р и ш. R нуқтани квадратнинг қайси томонида олмайлик, ягона ечимни ҳосил қиламиз.

4- м а с а л а. Асосидаги икки бурчаги, асоси билан бу асосга туширилган баландлик йиғиндиси берилган учбурчак ясанг.

Ечнш (50-чизма).



50- чизма

Анализ. Масалада берилган шартлардан A ва B бурчаклар изланган ABC учбурчакнинг шаклини, асос билан баландлик йиғиндиси эса бу учбурчакнинг катталигини аниқлайди. Демак, масала қуйидаги икки ёрдамчи масалага ажралади:

1. $\angle A$, $\angle B = \angle B_1$ берилган; AB_1C_1 учбурчак ясаш.

2. AB_1C_1 учбурчакка ўхшаш, асоси ва асосига туширилган баландлик йиғиндиси берилган $c + h_c = m$ кесмага тенг бўлган учбурчак ясаш.

AB_1C_1 учбурчакнинг C_1 учидан туширилган баландликини C_1D_1 билан белгилайлик. AB_1C_1 учбурчак изланаётган учбурчакка ўхшаш бўлгани учун (яъни $AB_1C_1 \sim ABC$):

$$\frac{AB_1}{AB} = \frac{C_1D_1}{CD} \Rightarrow \frac{AB_1}{C_1D_1} = \frac{AB}{CD}, \quad \frac{C_1D_1}{AB_1} = \frac{CD}{AB},$$

$$1 + \frac{C_1D_1}{AB_1} = \frac{CD}{AB} + 1 \Rightarrow \frac{AB_1 + C_1D_1}{AB_1} = \frac{AB + CD}{AB} = \frac{c + h_c}{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB_1 + C_1D_1}{AB_1} = \frac{c + h_c}{c}.$$

Бу пропорцияда c асос номаълум, уни $AB_1 + C_1D_1$, AB_1, m кесмаларга пропорционал тўртинчи кесма сифатида топиш мумкин.

Ясаш. 1. Ихтиёрий AB кесмани олиб, берилган бурчакларга тенг B_1AC_1 ва C_1B_1A бурчакларни ясаймиз. ΔAB_1C_1 ҳосил қиламиз. C_1D_1 кесма AB_1C_1 учбурчак баландлигидир.

2. B_1 нуқтанинг ўнг томонига $C_1D_1 = B_1E_1$ кесмани қўямиз. $AE_1 = AB_1 + B_1E_1$, C_1 нуқтани E_1 нуқта билан туташтирамиз.

3. AB_1 тўғри чизиқ устига A нуқтадан бошлаб $AE = c + h_c = m$ кесмани қўйиб, E нуқтани топамиз.

4. E нуқта орқали $C_1E_1 \parallel EL$ тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ AC_1 нур билан C нуқтада кесишади.

5. C нуқта орқали $CB \parallel C_1B_1$ ўтказамиз.

6. AB_1 тўғри чизиқ билан CB тўғри чизиқ B нуқтада кесишади. ABC учбурчак изланган фигурадир.

Исбот. Ясашга кўра CAB бурчак берилган A бурчакка тенг,

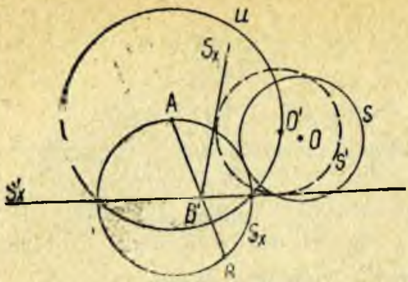
$$CB \parallel C_1B_1 \Rightarrow \angle CBA = \angle C_1B_1A. \quad \Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AB_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AC}{AC_1}, \quad \frac{AB + CD}{CD} = \frac{AB_1 + C_1D_1}{C_1D_1},$$

$$\frac{AB + CD}{AB_1 + C_1D_1} = \frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}; \qquad (1)$$

$$\Delta ACE \sim \Delta AC_1E_1 \Rightarrow \frac{AE}{AE_1} = \frac{AC}{AC_1}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) дан $\dfrac{AB + CD}{AB_1 + C_1D_1} = \dfrac{AE}{AE_1}$, $AB_1 + C_1D_1 = AE_1$.



51- чизма

Шунинг учун $AB + CD = m$. Шундай қилиб, ΔABC масаланинг ҳамма шартларини қаноатлантиради.

Текшириш. Юқоридаги 1 — 6 ясашлар бажарилган.

Агар A, B бурчаклар йиғиндиси $2d$ дан кичик бўлса, масала ягона ечимга эга бўлади.

5- масала. Берилган икки нуқтадан ўтадигаи ва берилган айланага уринадиган айлана ясалсин.

Ечиш (51- чизма).

Анализ. Берилган A, B нуқталардан ўтиб, берилган S (O, R) айланага уринадиган S_x айлана ясалган деб фараз қилайлик. Инверсия маркази деб A (ёки B) нуқтани қабул қилиб, ихтиёрий радиус билан инверсия U (A, r) айланасини чизамиз.

Инверсия айланасига нисбатан B нуқтани, S ва S_x айланаларни инверсион алмаштириб, B' нуқта, S' айлана ва S'_x тўғри чизиқни ҳосил қиламиз. Фаразга кўра, изланган S_x айлана берилган нуқталардан ўтиб, S айланага уринганн учун S'_x тўғри чизиқ ҳам B' нуқтадан ўтиб, S' айланага уринади. Демак, S'_x тўғри чизиқни «маълум B' нуқтадан маълум S' айланага уринма ўтказинг» деган ёрдамчи масалани ечиб топамиз, кейин топилган S'_x ни U га нисбатан инверсион алмаштириб, S_x айланани топамиз.

Ясаш 1. U (A, r) — инверсия айланасини чизамиз.

2. Берилган B нуқта ва S (O, R) айланани инверсион алмаштириб, B' ва S' айланани ҳосил қиламиз.

3. B' нуқтадан S' айланага иккита S'_x, S''_x уринмаларни ўтказамиз.

4. Уринмаларни U айланага нисбатан инверсион алмаштириб, изланган айланаларга эга бўламиз.

27- §. Алгебраик метод

Айрим конструктив масалалар билан иш кўрганда юқорида баён қилинган методлардан фойдаланиш анча мураккаблашади, баъзи масалалар—муаммоларни эса бу методлардан фойдаланиб ҳал қилиб бўлмайди. Бундай ҳолларда масалада берилган элементлар орасидаги муносабатлар аниқланиб, номаълум элемент маълум элементлар орқали ифодаланади.

Агар бирлик кесма (узунлиги бирга тенг кесма) танлаб олинган бўлса, ҳар бир кесмани бирлик кесма билан ўлчаб, унинг узунлигини аниқлашни биламиз, натижада ҳар бир кесма узунлигини ифодаловчи мусбат сон ҳосил қилинади.

Чизғич ва циркуль ёрдамида ясаладиган ушбу содда ифодалар билан берилган кесмаларни ясаш биллан шуғулланайлик.

1. $x = a + b$.

2. $x = a - b \quad (a > b)$.

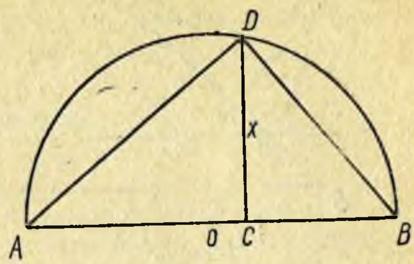
3. $x = \frac{n}{m} a$ (n, m — натурал сон).

4. $x = \frac{a \cdot b}{c}$.

5. $x = \sqrt{a \cdot b}$.

6. $x = \sqrt{a^2 + b^2}$.

7. $x = \sqrt{a^2 - b^2}$.



52- чизма

Масала. Берилган a, b кесмаларга ўрта пропорционал кесмани ясанг:

$$x = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Ечиш (52-чизма). Ясаш. 1. Ихтиёрий тўғри чизиқда $AC = a$, $CB = b$ кесмаларни ажратамиз.

2. $AB = a + b$ кесмани диаметр қилиб, ярим айлана чизамиз.

3. C нуқтадан AB диаметрга перпендикуляр ўтказамиз ва ярим айлана билан кесишган D нуқтани топамиз. $x = CD$ изланган кесма бўлади.

Исбот. $\Delta ACD \backsim \Delta BDC$, бундан: $\frac{AC}{CD} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$, $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ кесма катетлари a, b кесмаларга тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак гипотенузаси сифатида ясалади.

Алгебраик метод билан ясашга доир масалаларни ечишда юқорида санаб ўтилган энг содда ифодалар муҳим роль ўйнайди. Бу метод билан ечиладиган масалаларни содда ифодаларнинг чекли сондаги комбинацияларига келтириб ечилади.

Юқорида кўриб ўтилган барча алгебраик ифодалар битта умумий хоссага — бир жинслилик хоссасига эга.

Таъриф. Агар $f(x, y, \ldots, t)$ функция ҳар қандай мусбат k сони учун $f(kx, ky, \ldots kt) = k^n f(x,, y, \ldots t)$ шартни қаноатлантирса, у ҳолда $f(x, y \ldots t)$ функция n ўлчовли *бир жинсли функция* деб аталади. $n = 1$ бўлса, бир ўлчовли бир жинсли функция деб аталади.

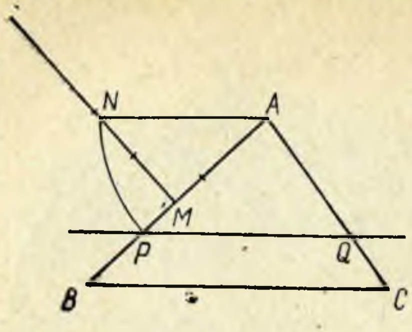
Мисоллар: 1. $x = (a^3 + b^3) : (a^2 - b^2)$.

$$y = [(ka)^3 + (kb)^3] : [(ka)^2 - (kb)^2] = \frac{k^3 (a^3 + b^3)}{k^2 (a^2 - b^2)} = kx.$$

Бу ифода бир ўлчовли бир жинслидир.

2. $x = a^3 - 3ab^2 - 2b^3$ — уч ўлчовли бир жинсли ифодадир.

Масала, Берилган учбурчакнинг асосига параллел бўлиб, унинг юзини тенг иккига ажратувчи тўғри чизиқ ўтказинг.



53- чизма

Ечиш (53-чизма). Анализ. ABC берилган учбурчак ва PQ — изланган тўғри чизиқ деб фараз қиламиз. У ҳолда:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta APQ}} = \frac{AB \cdot AC}{AP \cdot AQ} = \frac{2}{1}. \qquad (1)$$

Иккинчи томондан: $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$. (2)

(1), (2) дан: $\frac{AB}{AP} \cdot \frac{AC}{AQ} = \frac{AB^2}{AP^2} = \frac{2}{1}$,

бундан

$$AP = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{AB}{\sqrt{2}}.$$

$AP = x$, $AB = c$ деб фараз қилинса, изланган фигурани ясаш $x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ кесмани ясашга келтирилади.

Ясаш. **1.** AB кесмани M нуқтада тенг иккига бўламиз.

2. Тўғри бурчакли ANM учбурчакни ясаймиз:

$$AN = AP = x.$$

3. P нуқтадан AB тўғри чизиққа параллел қилиб ўтказилган PQ тўғри чизиқ изланган тўғри чизиқ бўлади.

Исбот. Ясашга кўра $MA = MN$;

$$AN = \sqrt{MN^2 + MA^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}} = x.$$

Текшириш. Масала ечими доим мавжуд ва ягона.

Ифодани циркуль ва чизғич воситасида ясашнинг зарур ва етарли шартлари.

Теорема. Ифодани (кесмани) циркуль ва чизғич воситасида ясаш учун бу кесма узунлиги рационал сонлар ва берилган кесма узунлиги орқали чекли сондаги рационал амаллар ёрдамида ифодаланган ва фақат квадрат илдиз қатнашган биринчи даражали бир жинсли ифода бўлиши зарур ва етарлидир.

Бу теорема исботини келтирмаймиз.

28-§. Циркуль ва чизғич ёрдамида ечилмайдиган классик масалаларга мисоллар. Масалаларни бошқа воситалар билан ечиш ҳақида тушунча

Циркуль ва чизғич ёрдамида бевосита ечиб бўлмайдиган классик масалалар билан танишиб чиқайлик. Булар кубни иккилантириш, бурчакни учта тенг қисмга бўлиш ва доира квадратураси масалаларидир. Бу масалаларни бошқа қуроллар воситасида ечиш мумкин. Шунингдек, уларни циркуль ва чизғич ёрдамида тақрибан ечиш ҳам мумкин.

Кубни иккилантириш масаласи — қадимги Грециядан маълум бўлган ясашга доир учта асосий масаланинг биридир.

Масала (**Делос** масаласи). Ҳажми берилган куб ҳажмидан икки марта катта бўлган куб ясанг.

Берилган кубнинг қиррасини a, ясалиши керак бўлган кубнинг қиррасини x билан белгилаймиз. Масала шартига кўра:

$$x^3 = 2a^3.$$

Берилган кубнинг қиррасини $a = 1$ деб олсак,

$$x^3 - 2 = 0$$

тенглама ҳосил қилинади.

Алгебрадан маълумки, энг катта ҳади олдидаги коэффициенти 1 га тенг, қолган коэффициентлари бутун сонлардан иборат бир номаълумли алгебраик тенгламанинг рационал илдизлари фақат бутун соилардан иборат бўла олиши билан бирга, улар озод ҳаднинг бўлувчилари таркибига кириши керак. Лекин 2 сониниг бўлувчилари фақат ± 1, ± 2 сонлардан иборат бўлиб, улар тенгламани қаноатлантирмайди.

Демак, $x^3 - 2 = 0$ тенглама рационал илдизларга эга эмас, яъни кубни иккилантириш масаласи циркуль ва чизғич ёрдамнда ҳал қилинмайди. Аммо масала циркуль ва чизғич ёрдамида тақрибий ечилиши мумкин.

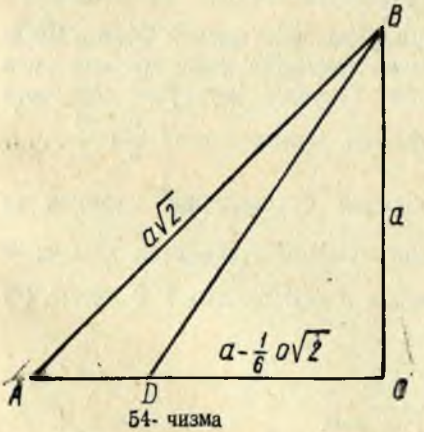
Масалан, катетлари $AC = CB = a$ га тенг тўғри бурчакли учбурчак ясаймиз (54-чизма). $AB = a\sqrt{2}$, $AD = \frac{1}{6} AB$ кесмани ясаймиз, у қолда: $DC = a - \frac{a\sqrt{2}}{b}$.

$$BD = \sqrt{a^2 + DC^2} = a\sqrt{1 + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \frac{a}{6}\sqrt{74 - 12\sqrt{2}} \approx$$
$$\approx a \cdot 1{,}2586.$$

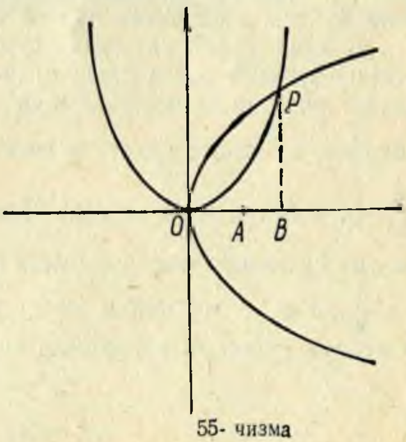
Ваҳоланки: $x = a\sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599\,a$.

Бу икки сон бир-биридан кам фарқ қилади.

Бу муаммони бошқа воситалар ёрдамида ҳам ҳал этиш мумкин.



54- чизма



55- чизма

Шу мақсадда икки нараболани оламиз. $y^2 = 2ax$, $x^2 = ay$ параболалар берилган бўлсин (55-чизма).

Параболаларнинг кесишган нуқталарининг координаталари ушбу

$$y^2 = 2ax,$$
$$x^2 = ay$$

системадан топилади.

$$x^4 - 2a^3x = 0, \; x(x^3 - 2a^3) = 0,$$

бундан $x_1 = 0$, $x_2 = a\sqrt[3]{2}$. Биринчи илдиз параболаларнинг координаталар бошидаги умумий нуқтасининг абсциссасини беради, иккинчи илдиз изланган кесмани беради, яъни $OB = x = a\sqrt[3]{2}$ — изланган кубнинг қирраси бўлади.

Масала. Ихтиёрий бурчакни учта тенг қисмга бўлинг.

Бу масалани ечиш $x^3 + px + q = 0$ кўринишдаги учинчи даражали тенгламанинг илдизларини ясашга келтирилади, бу тенглама эса рационал илдизга эга бўлгандагина квадрат илдизларда ечилади.

Берилган бурчак катталигини α билан, изланган бурчак катталигини φ билан белгилайлик. $\alpha = 3\varphi$ бўлади. Маълумки,

$$\cos\alpha = \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

Бу ерда $\cos\alpha$ ни маълум деб ҳисоблаш мумкин, $\cos\varphi$ эса номаълум. $\cos\alpha = \frac{a}{2}$, $\cos\varphi = \frac{x}{2}$ деб олайлик, у ҳолда юқоридаги тенглама

$$x^3 - 3x - a = 0 \qquad (*)$$

кўринишни олади. Бу тенглама илдизини циркуль ва чизғич билан ясаш мумкин эмаслигига битта мисол келтириш етарлидир. Масалан, $\alpha = 60°$, у ҳолда $a = 1$ бўлади, тенглама $x^3 - 3x - 1 = 0$ кўринишни эгаллайди.

Учинчи даражали бу тенглама рационал илдизга эга эмас, бундан $\alpha = 60°$ бурчакни циркуль ва чизғич ёрдамида учта тенг қисмга бўлиш мумкин эмас деган хулоса чиқади.

Шундай қилиб, ихтиёрий бурчакни учта тенг қисмга бўлиш масаласини умумий ҳолда циркуль ва чизғич ёрдамида ечиш мумкин эмас деган хулосага келамиз. Лекин баъзи хусусий ҳолларда масалани циркуль ва чизғич ёрдамида ечиш мумкин, чунончи $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \ldots, \frac{\pi}{2n}$ (n — бутун натурал сон) бўлса, бундай бурчакларни циркуль ва чизғич ёрдамида тенг қисмларга бўлиш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ бўлганда, мос равишда $a = 0$ ва $a = \sqrt{2}$ бўлиб, (*) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$x^3 - 3x = 0,$$
$$x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0.$$

Булардан биринчисининг илдизлари $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{3}$;

иккинчисининг илдизлари эса $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_{2,3} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$.

Агар циркуль ва иккита (A, B) нуқтаси белгиланган бир томонли чизғичдан фойдалансак, бурчакни тенг учга бўлиш мумкин [18].

Мунтазам кўпбурчакларни ясаш (айланани тенг қисмларга бўлиш).

Ўрта мактаб геометриясидан мунтазам учбурчак ва квадратни ясаш усуллари маълум, шуингдек мунтазам n бурчак ясаш маълум бўлса, мунтазам $2n$ бурчакни ясаш ҳам маълум.

Циркуль ва чизғич ёрдамида ($n > 2$) мунтазам n бурчаклик ясаш мумкинми, яъни айланани ҳамма вақт n та тенг бўлакка ажратиш мумкинми деган саволга қуйидаги теорема жавоб беради.

Гаусс теоремаси. Агар n сонини $n = 2^m p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots p_s$ туб кўпайтирувчиларга ажратиш мумкин бўлса, у ҳолда циркуль ва чизғич ёрдамида мунтазам n бурчакни ясаш (айланани n та тенг бўлакларга ажратиш) мумкин.

Бу ерда m манфий бўлмаган бутун сонлар, $p_1, p_2, \ldots, p_s$ лар $2^{2^k} + 1$ кўринишидаги ўзаро туб ҳар хил сонлар ($2^{2^k} + 1$ — Ферманинг туб сонлари дейилади).

1-мисол. $m = 0$, $S = 1$.

$k = 0, 1, 3, 4$ бўлганда p_1 мос равишда 3, 5, 17, 257, 65537 туб сонларидир. $k = 5$ ҳолда p_1 туб сон бўлмайди. 7 туб сон, лекин Ферма туб сони эмас. Демак, циркуль ва чизғич ёрдамида мунтазам 7 бурчаклик ясаш мумкин эмас.

2-мисол. $m = 0$, $s = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$.

Циркуль ва чизғич ёрдамида 15 бурчакликни ясаш мумкин.

3-мисол. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Бу сон Гаусс теоремасини қаноатлантирмайди (бу сон ёйилмасида Ферманинг туб сони 3 икки марта учрайди). Демак, циркуль ва чизғич ёрдамида айланани 360 та тенг бўлакка ажратиш мумкин эмас, шунинг учун циркуль ва чизғич ёрдамида 1° бурчакни ясаш мумкин эмас.

II БЎЛИМ.

ПРОЕКТИВ ГЕОМЕТРИЯ

VI БОБ. ПРОЕКТИВ ГЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ

29-§. Евклид текислигини хосмас элементлар билан тўлдириш

1. Тўғри чизиқдаги нуқтанинг бир жинсли координаталари.

Евклид тўғри чизиғига декарт координаталари системаси киритилган бўлсин. У ҳолда тўғри чизиқдаги ҳар бир N нуқта x координатага эга бўлади. Энди битта x сон ўрнига қуйидаги шартни қаноатлантирувчи иккита x_1, x_2 сонларни олайлик:

$$x=\frac{x_1}{x_2}.$$

Бу x_1, x_2 $(x_2 \neq 0)$ сонлар N нуқтанинг бир жинсли координаталари дейилади. x_1, x_2 $(x_2 \neq 0)$ сонлар берилган бўлса, N нуқта тўлиқ аниқланади. Лекин N нуқта, яъни x абсцисса берилган бўлса, у ҳолда N нуқтанинг бир жинсли координаталари аниқланган деб бўлмайди: фақат бир жинсли координаталарининг нисбати $\frac{x_1}{x_2}$ аниқланган, холос. Бошқача айтганда, агар x_1, x_2 сонлар N нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлса, у ҳолда λx_1 ва λx_2 ($\lambda \neq 0$ — ихтиёрий ҳақиқий сон) сонлар ҳам N нуқтани аниқлайди. Бу сонлар N нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлиб, $N(x_1, x_2)$ ёки $N(x_1:x_2)$ кўринишда ёзилади.

Юқорида бир жинсли координаталарга берилган таърифни умумийроқ бўлган таъриф билан алмаштирамиз.

1) Бир вақтда нолга тенг бўлмаган x_1, x_2 сонлар тўғри чизиқда фақат битта $N(x_1: x_2)$ нуқтани аниқлайди.

2) λx_1, λx_2 сонлар ($\lambda \neq 0$ — ихтиёрий ҳақиқий сон) ҳам фақат $N(x_1 : x_2)$ нуқтани аниқлайди.

3) $x_2 \neq 0$ шартда $N(x_1:x_2)$ нуқта абсциссаси $x=\frac{x_1}{x_2}$дан иборат нуқтадир.

4) Агар $x_2=0$ бўлса, $N_1(x_1:0)$ нуқтани тўғри чизиқнинг чексиз узоқлашган нуқтаси ёки хосмас (ноўзлик) нуқтаси деб олиб, N_∞ $(x_1:0)$ кўринишда ёзамиз.

2. Текисликда бир жинсли декарт координаталари.

Текисликда декарт координаталари системаси киритилган бўлсин. Текисликдаги ихтиёрий N нуқтанинг координаталари x, y бўлсин.

Иккита x, y сонлар ўрнига бир вақтда нолга тенг бўлмаган ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи учта x_1, x_2, x_3 сонларни олайлик:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{1}$$

Таъриф. (1) тенгликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x_1, x_2, x_3 ($x_3 \neq 0$) сонлар учталиги N нуқтанинг бир жинсли декарт координаталари дейилади.

Агар x_1, x_2, x_3 сонлар N нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлса, λx_1, λx_2, λx_3 ($\lambda \neq 0$) сонлар ҳам таърифга кўра шу нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлади.

Шундай қилиб, нуқтанинг бир жинсли координаталари сонлар учталикларининг пропорционал синфини ҳосил қилади. Бу синф N нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлиб, N (x_1, x_2,x_3) ёки N (x_1: : x_2: x_3) кўринишда ёзилади.

Мисол. Агар (1:2: — 2) сонлар учталиги N нуқтанинг координаталари бўлса, ($\frac{1}{2}$, 1, — 1) ёки (2,4, — 4), шунингдек (— 3, — 6, 6) сонлар учталиги ҳам N нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлади. N нуқтанинг бир жинсли бўлмаган декарт координаталари:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = -1.$$

Текисликдаги тўғри чизиқ декарт координаталари системасига нисбатан

$$ax + by + c = 0 \quad (a \neq 0, b \neq 0) \tag{2}$$

чизиқли тенглама билан берилади. Бу тенгламага x, y нинг (1) даги қийматларини қўйиб ($x_3 \neq 0$ шартни эътиборга олиб), тўғри чизиқнинг бир жинсли координаталардаги ушбу

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{3}$$

тенгламасини ҳосил қиламиз.

Текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиқ биринчи даражали бир жинсли тенглама орқали ифодаланади ва аксинча, ихтиёрий бундай тенглама текисликдаги бирор тўғри чизиқ тенгламаси бўлади.

Ҳар бир (x_1, x_2, x_3) ($x_3 \neq 0$) сонлар учталиги (1) формулага кўра бир жинсли бўлмаган бир жуфт x, y координаталарни, яъни битта нуқтани аниқлайди.

Лекин бир вақтда нолга тенг бўлмаган x_1, x_2, $x_3 = 0$ сонлар учталиги (2) тўғри чизиқда бирорта ҳам нуқтани аниқламайди, яъни (x_1: x_2:0) координатали нуқта (2) тенгламани қаноатлантирмайди. Бундай сонлар учталигини чексиз узоқлашган нуқтага ёки хосмас нуқтага мос келади деб шартлашиб оламиз ва N_∞ (x_1:x_2:0) кўринишда белгилаймиз. Тўғри чизиқнинг хосмас нуқтасидан бошқа барча нуқталарини хос нуқталари дейилади. Лекин N_∞ нуқтанинг координаталари (3) тенгламани қаноатлантириши мумкин.

Тўғри чизиқнинг бир жинсли бўлмаган тенгламасидан бир жинсли тенгламасига ўтиш билан биз ҳар бир тўғри чизиққа хосмас нуқтани қўшамиз.

Шундай қилиб, текисликдаги ҳар бир тўғри чизиққа чексиз узоқлашган ёки хосмас нуқтани қўшиб, кенгайтирилган евклид тўғри чизиғини ҳосил қиламиз. Бундай тўғри чизиқ *проектив тўғри чизиқ* дейилади [28].

Агар бирор N $(x_1: x_2: x_3)$ нуқтанинг учинчи координатаси x_3 нолга тенг бўлмаса, бу нуқта хос нуқта бўлади, агар нуқтанинг учала координатасини бирор $\lambda \neq 0$ сонга кўпайтирсак, яна шу нуқтани ҳосил қиламиз. Энди (1) тенгликка эътибор берайлик.

Агар: а) $x_1 = 0$ бўлса, $x = 0$ бўлиб, ординаталар ўқида ётувчи хос нуқтага, б) $x_2 = 0$ бўлса, $y = 0$ бўлиб, абсцисса ўқида ётувчи хос нуқтага эга бўламиз.

Демак, $(0:1:0)$ ва $(1:0:0)$ нуқталар мос равишда ордината ва абсцисса ўқларида ётувчи хосмас нуқталардир.

Таъриф. Хосмас нуқталар билан тўлдирилган евклид текислигини кенгайтирилган евклид текислиги ёки *проектив текислик* дейилади [28.]

30-§. Евклид фазосини хосмас элементлар билан тўлдириш

Евклид фазосида декарт координаталари системаси берилган бўлсин. Ихтиёрий N нуқта бу системага нисбатан x, y, z координаталарга эга бўлади. Қуйидаги тенглик билан аниқланган

$$x = \frac{x_1}{x_4},\ y = \frac{x_2}{x_4},\ z = \frac{x_3}{x_4} \tag{1}$$

тўртта x_1, x_2, x_3, x_4 сонни олайлик.

Таъриф. (1) тенгликни қаноатлантирувчи ихтиёрий x_1, x_2, x_3, x_4 $(x_4 \neq 0)$ тўртта сон фазодаги N нуқтанинг бир жинсли декарт координаталари дейилади.

Демак, фазодаги нуқтанинг бир жинсли координаталари бир қийматли аниқланмайди. Агар (x_1, x_2, x_3, x_4) нуқтанинг бир жинсли координаталари бўлса, у ҳолда таърифга кўра λx_1, λx_2, λx_3, λx_4 $(\lambda \neq 0)$ сонлар ҳам ўша нуқтанинг бир жинсли координаталаридир. Декарт координаталари системасига нисбатан текислик

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0)$$

тенглама билан ифодаланади. Бу тенгламадаги x, y, z координаталарни (1) ифодадан фойдаланиб ва $x_4 \neq 0$ эканлигини эътиборга олиб, бир жинсли координаталар билан алмаштирсак, чизиқли бир жинсли

$$ax_1 + by_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \tag{2}$$

текислик тенгламасига эга бўламиз.

Демак, фазода текислик бир жинсли чизиқли тенглама билан берилади.

Фазодаги тўғри чизиқ эса (2) кўринишдаги иккита бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси билан берилади:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + d_1x_4 = 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + d_2x_4 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Сонлар (x_1, x_2, x_3, x_4) $(x_4 \neq 0)$ тўртлигига фазода аниқ бир нуқта мос келади. $x_4 = 0$ ҳолда x_1, x_2, x_3, x_4 сонлар тўртлигига евклид фазосида бирорта ҳам нуқта мос келмайди. Бундай сонлар тўртлигига (агар ҳаммаси бир вақтда нолга тенг бўлмаса) хосмас ёки чексиз узоқлашган нуқта мос келади деб айтишни шартлашиб оламиз.

Бир жинсли координаталари (2) тенгламани қаноатлантирувчи проектив фазодаги барча нуқталар тўпламини текислик деб, (3) тенгламаларни қаноатлаитирувчи барча нуқталар тўпламини эса проектив фазодаги тўғри чизиқ деб айтилади,

Евклид фазосидаги тўғри чизиқни хосмас нуқта билан, ҳар бир текисликни хосмас тўғри чизиқ билан, фазони эса хосмас текислик билан тўлдириб, проектив фазони ҳосил қиламиз [28].

31-§. Проектив текислик

1. Евклиднинг кеигайтирилган текислигидаги хосмас элементлар

Евклид текислигидаги хосмас нуқталар таърифидан қуйидаги натижаларни чиқарамиз:

1-теорема. Евклид текислигидаги барча хосмас нуқталарнинг геометрик ўрни хосмас тўғри чизиқдир.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $x_3 = 0$ тенгламани текисликнинг ўзгарувчи координаталарига нисбатан биринчи даражали тенглама сифатида қараш мумкин. Биринчи даражали бундай тенглама тўғри чизиқни аниқлагани сабабли, $x_3 = 0$ тенглама тўғри чизиқ тенгламасидир. Бу тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари текисликнинг барча хосмас нуқталарини ўз ичига олади,

2-теорема. Текисликииг ҳар бир хосмас тўғри чизиғи фақат битта хосмас нуқтага эга.

Исбот. $x_3 = 0$ шартда:

$$ax_1 + bx_2 = 0$$

тенгламани ҳосил қиламиз, бундан:

$$x_1 : x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{ва} \quad x_1 = \lambda b, \; x_2 = -\lambda a.$$

$a \neq 0$, $b = 0$ ҳол учун $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 = 0$ га, яъни ординаталар ўқидаги хосмас нуқтага эга бўламиз.

$b \neq 0$ ҳолда (2) дан

$$x_2 : x_1 = -\frac{a}{b}$$

аниқ қийматга эга бўламиз.

3-теорема. Текисликдаги ҳамма параллел тўғри чизиқлар фақат битта умумий хосмас нуқтага эга.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k = -\frac{a}{b}$ га тенг, буни эътиборга олиб, (2) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x_2 : x_1 = k.$$

Демак, тўғри чизиқнинг хосмас нуқтаси унинг бурчак коэффициентининг берилиши билан тўлиқ аниқланади. Параллел тўғри чизиқларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг.

2. Уч нуқтанинг коллинеарлик шарти ва тўғри чизиқ тенгламаси. Тўғри чизиқ координаталари.

Текисликда координаталари билан берилган $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$, $C(c_1 : c_2 : a_3)$ учта нуқтанинг коллинеарлик шартини аниқлайлик.

Бу нуқталарнинг

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \tag{3}$$

тўғри чизиқда ётиши учун

$$\begin{aligned} aa_1 + ba_2 + ca_3 &= 0, \\ ab_1 + bb_2 + cb_3 &= 0, \\ ac_1 + bc_2 + cc_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

шартлар бажарилиши керак.

Агар (4) тенгламалар системасини қаноатлантирувчи ва бир вақтда нолга тенг бўлмаган a, b, c сонлар мавжуд бўлса, у ҳолда A, B, C нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ мавжуд бўлади. (4) тенглама эса a, b, c ларга нисбатан бир жинсли тенгламалар системаси бўлгани учун ҳамма вақт ноль ечимга эга, лекин шартга кўра a, b, c лар бир вақтда нолга тенг эмас, шу сабабли бу системанинг нолдан бошқа ечимга эга бўлиши учун (4) система коэффициентларидан тузилган детерминант нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

Изланган шарт шудир.

Энди биз иккита $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$ нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузайлик.

AB тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий $X(x_1 : x_2 : x_3)$ нуқтани оламиз. (5) тенгликни қўллаб,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

ни ёки

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} x_3 = 0$$

ни ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг коэффициентлари бир вақтда нолга тенг эмас, чунки $A \neq B$. Тенглама коэффициентларини мос равишда u_1, u_2, u_3 билан белгилаб, қуйидагича ёзамиз:

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \tag{7}$$

Таъриф. Бир вақтда нолга тенг бўлмаган $(u_1 : u_2 : u_3)$ сонлар учталикларининг пропорционал синфи тўғри чизиқ координаталари ёки тўғри чизиқнинг *тангенциал координаталари* дейилади.

(7) тенгламани символик кўринишда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$ux = 0. \qquad (8)$$

(6) да детерминант нолга тенг, лекин $A \neq B$, шунинг учун детерминантнинг иккинчи ва учинчи сатрларида турган элементлар пропорционал эмас. Биринчи сатр элементларини қолган сатр элементлари орқали чизиқли ифодалаш мумкин:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1, \\ x_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2, \\ x_3 &= \alpha a_3 + \beta b_3. \end{aligned} \qquad (9)$$

Бу тенгламалар тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади. Бу тенгламаларни символик равишда ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$X = \alpha A + \beta B. \qquad (10)$$

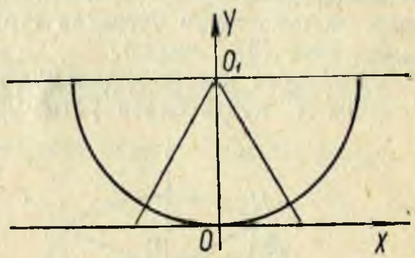
Бир жуфт $(\alpha : \beta)$ соннинг турли қийматларига AB тўғри чизиқнинг турли нуқталари мос келади, лекин ҳар бир жуфт $(\alpha : \beta)$ га AB тўғри чизиқда битта нуқта мос келади.

32-§. Проектив тўғри чизиқ ва текисликнинг топологик тузилиши

Биз юқорида тўғри чизиқ ва евклид текислигига уларнинг хосмас элементларини қўшиб, проектив тўғри чизиқ ва проектив текисликнинг қулай ва энг содда моделларини кўрган эдик. Булар қурилиши мумкин бўлган моделлардан биттаси, холос.

Энди проектив тўғри чизиқ ва проектив текисликларнинг кўзга яхши кўринадиган шаклдаги, энг содда топологик эквивалентларидан бирини, яъни моделларидан бирини топайлик. Шу сабабли проектив фазода яқинлик тушунчасини киритамиз. Проектив фазодаги $X(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$ нуқталарнинг атрофи деб

$$|x_1 - y_1| < \varepsilon, \ |x_2 - y_2| < \varepsilon,$$
$$|x_3 - y_3| < \varepsilon, \ |x_4 - y_4| < \varepsilon$$



56- чизма

шартни қаноатлантирувчи барча $Y(y_1 : y_2 : y_3 : y_4)$ нуқталар тўпламига айтилади. Агар ε етарлича кичик сон бўлса, Y нуқтани X нуқтага яқин нуқта деб айтилади.

XOY текислигида ётувчи $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ $(y < 1)$ ярим айланани олиб, унинг нуқталарини O_1 марказдан OX ўққа проекциялаймиз (56-чизма). OX ўқни проектив тўғри чизиқ деб қарасак, $(1 : 0 : 0)$ нуқта унинг чексиз узоқлашган нуқтаси бўлади. Бу тўғри чизиқдан бир жинсли $\left(1,0, \frac{1}{x}\right)$ координаталарга эга бўлган нуқта $|x| \to \infty$ шартда чексиз узоқлашган нуқтага жуда яқин бўлади. Бу эса ярим айлананинг четки нуқталарини битта нуқта деб ҳисоблашга имкон беради; бу нуқтани Ox ўқдаги чексиз узоқлашган нуқтага мос келади деб ҳисобласак, тўғри чизиқни ярим айланага марказий проекциялашни *топологик акслантириш* деб қараш мумкин.

Шундай қилиб, топологик акслантириш проектив тўғри чизиқни четлари устма-уст туширилган ёпиқ эгри чизиққа акслантиради. Демак, проектив тўғри чизиқ ёпиқ эгри чизиққа, масалан, айланага топологик эквивалентдир.

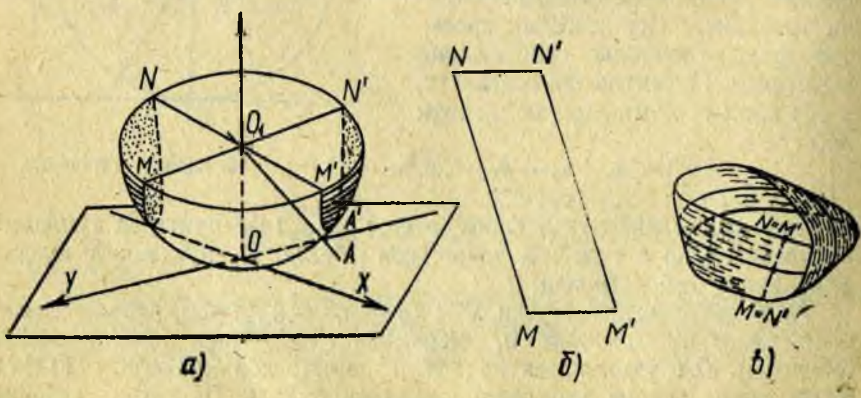
Юқоридагига ўхшаш муҳокама юритиб, проектив текисликка топологик эквивалент фигурани топайлик. Бунинг учун фазода

$$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1 \quad (z < 1)$$

ярим сферани олиб, унинг бирор нуқтасидан экватор текислигига параллел қилиб уринма XOY текислигини ўтказамиз. XOY текислик нуқталарини O_1 марказдан ярим сферага проекциялаймиз. Шу текисликдаги ҳар бир тўғри чизиқ катта ярим айланага аксланади (57-чизма). Тўғри чизиқнинг хосмас нуқтаси, катта ярим айлана четларига, яъни экваторнинг диаметрал қарама-қарши иккита нуқтасига аксланади. Диаметрал қарама-қарши нуқталарни айнан битта нуқта деб ҳисоблаймиз. Демак, XOY текислигининг хосмас тўғри чизиғи экваторнинг образи бўлади.

Ярим сферани $x = \pm \varepsilon$ текислик билан кессак, ярим сегментлар ҳосил бўлади. Бу ярим сегментларнинг экваториал чеккаларини шундай бирлаштирайликки, диаметрал қарама-қарши нуқталар устма-уст тушсин (57-*а* чизма), у ҳолда биз доирага (конусга) топологик эквивалент бўлган тўлиқ сегментга эга бўламиз. Ярим сферанинг қолган қисмини, яъни $x = \pm \varepsilon$ орасидаги қисмини топологик алмаштириш ёрдамида ингичка тўғри бурчакли тўртбурчакка ўтишини тасаввур қилиш қийин эмас (57-*б* чизма).

Диаметрал қарама-қарши нуқталар N нуқтани M' нуқта билан, M нуқтани N' нуқта билан устма-уст тушадиган қилиб тўғри тўртбур-



57- чизма

чакнинг NN' томонини $M'M$ томони билан елимласак, *Мёбус вараги* деб аталадиган сирт ҳосил бўлади. Бу сиртнинг чети тўғри тўртбурчакнинг кетма-кет жойлашган MN ва $N'M'$ томонларидан иборат (57-*в* чизма). Мёбус вараги бир томонли сиртдир.

Ҳақиқатан ҳам, агар сиртнинг A нуқтасига ўтказилган нормални пунктир чизиқ бўйича силжитиб, қайтадан A нуқтага келтирсак, нормаль олдинга айланишга қарама-қарши йўналишга эга бўлади.

Тўлиқ сегментни (доирага ёки конусга топологик эквивалент бўлган) Мёбус варағига елимлаб, проектив текисликка топологик эквивалент бўлган ёпиқ сиртга эга бўламиз, яъни асоси Мёбус варағидан иборат конус сиртга эга бўламиз.

33-§. Текисликдаги проектив координаталар ва проектив алмаштириш

Проектив текисликда нуқтанинг бир жинсли x_1, x_2, x_3 координаталаридан фойдаланиб, нуқтанинг проектив координаталари тушунчасини киритамиз. Текисликдаги нуқтанинг проектив координаталари деб қуйидагича ифодаланадиган x_1', x_2', x_3' сонларга айтилади:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1)$$

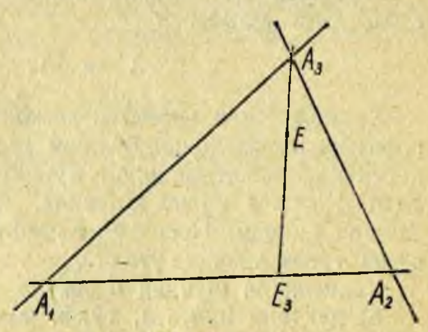
Нуқтанинг бир жинсли координаталари бир вақтда нолга тенг бўлганидек, проектив координаталари ҳам бир вақтда нолга тенг бўлмайди. Агар x_i' — нуқтанинг проектив координаталари бўлса, $\lambda x_i'$, $\lambda \neq 0$, ҳам шу нуқтанинг проектив координаталари бўлади.

Текисликдаги тўғри чизиқ проектив координаталар орқали чизиқли тенглама билан берилади. Ҳақиқатан ҳам, (1) формуладаги x_i ларни x_i' орқали ифодалаб, тўғри чизиқнинг умумий тенгламасига қўйсак, x_i' га нисбатан чизиқли тенглама ҳосил бўлади.

Проектив координаталар орқали чизиқли $x_1' = 0$, $x_2' = 0$, $x_3' = 0$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар *координат тўғри чизиқлар* дейилади.

Учлари бу тўғри чизиқларда ётувчи учбурчакни *координат учбурчак* дейилади ва $A_1A_2A_3$ билан белгиланади. Бу учбурчак учлари ушбу $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$ координаталарга эга; $(1:1:1)$ координатали нуқта *бирлик нуқта* дейилади ва E билан белгиланади (58-чизма).

Текисликдаги бир нуқтадан ўтмайдиган ихтиёрий учта тўғри чизиқни *координат чизиқлар*, бу тўғри чизиқларда ётмайдиган ихтиёрий нуқтани эса *бирлик нуқта* деб олиш мумкин.



58- чизма

Ҳақиқатан ҳам,

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0 \tag{2}$$

учта тўғри чизиқ тенгламаси бўлсин. Ушбу формула ёрдамида янги x'_i координаталарни киритайлик:

$$x'_i = \lambda_i(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3).$$

Бу янги координаталар системасида берилган (2) тўғри чизиқлар координат чизиқлар бўлади, чунки $x'_i = 0$. Берилган $(x_1 : x_2 : x_3)$ нуқта янги координаталар системасида бирлик нуқта бўладиган қилиб λ_i кўпайтувчини шундай танлаб оламизки, $x'_i = 1$ бўлади.

Шундай қилиб, ҳар учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган A_1, A_2, A_3, E нуқталарнинг берилиши билан текисликда проектив координаталар системаси аниқланади, буни биз $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ кўринишда белгилаймиз ва *проектив репер* деб ҳам атаймиз. Тўғри чизиқдаги проектив координаталар системаси A_1, A_2, E нуқталарнинг берилиши билан аниқланади.

Текисликдаги бир проектив координаталар системасидан иккинчи проектив координаталарга ўтиш формуласи кўриниш жиҳатдан (1) формуладан фарқ қилмайди. Ҳақиқатан, x_i бир жинсли координаталардан x'_i проектив координаталарга ўтиш (1) формуладан x_i ларни топиб, x_i бир жинсли координаталардан x''_i проектив координаталарга ўтиш формуласи

$$x''_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$$

га қўйсак, у ҳолда x'_i проектив координаталардан x''_i координаталарга ўтиш формуласига эга бўламиз. Бу формула ташқи кўриниши жиҳатидан (1) дан фарқ қилмайди.

Тўғри чизиқдаги проектив алмаштириш ушбу формула билан берилади:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

Проектив алмаштиришнинг (1) формуласини символик равишда қуйидагича ёзамиз:

$$X' = AX, \quad A = \| a_{ij} \|. \tag{4}$$

Текисликдаги проектив алмаштиришга тескари алмаштириш ҳам проектив алмаштириш бўлиши равшан. Кетма-кет бажарилган иккита проектив алмаштиришнинг кўпайтмаси яна проектив алмаштириш бўлади. Қисқача қилиб айтганда, проектив алмаштиришлар группани ташкил қилади. Проектив алмаштиришда текислик текисликка, тўғри чизиқ тўғри чизиққа ўтади.

Текисликда шундай проектив алмаштиришлар ҳам борки, улар:

а) нуқтани нуқтага, тўғри чизиқни тўғри чизиққа ўтказади. Бундай алмаштиришлар *коллинеация* дейилади;

б) нуқтани тўғри чизиққа, тўғри чизиқни нуқтага ўтказади. Бундай алмаштиришлар *корреляция* дейилади.

Текисликдаги коллинеациялар тўплами группани ташкил қилади. Лекин корреляциялар тўплами группа ташкил қилмайди, чунки икки корреляция кўпайтмаси корреляция бўлмайди (фазода корреляция: нуқта $\longleftrightarrow$ текислик).

34-§. Проектив алмаштиришга мисоллар

1. Гомология. Проектив текисликда бирор s тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасини ўз-ўзига ўтказувчи коллинеация берилган бўлсин. Бундай коллинеация *гомология*, бу тўғри чизиқ эса *гомология ўқи* дейилади.

Гомологияни ва унинг хоссаларини ўрганиш учун аналитик усулдан фойдаланамиз. Бунинг учун проектив координаталар системасини шундай танлаб олайликки, A_1, A_2 нуқталар s тўғри чизиқда ётсин, у ҳолда s тўғри чизиқ тенгламаси: $x_3 = 0$.

(1) проектив алмаштириш $A_1(1:0:0)$ ва $A_2(0:1:0)$ нуқталарини мос равишда $A_1'(a_{11}' : a_{21}' : a_{31}')$, $A_2'(a_{12}' : a_{22}' : a_{32}')$ нуқталарга ўтказади. Таърифга кўра s тўғри чизиқнинг барча нуқталари қўзғалмас нуқталар, шунинг учун $A_1 = A_1'$, $A_2 = A_2'$, бундан:

$$a_{21} = a_{31} = 0, \quad a_{12} = a_{32} = 0. \tag{5}$$

Проектив алмаштириш $E_3(1:1:0)$ нуқтани, (5) ни эътиборга олсак, $E_3'(a_{11} : a_{22} : 0)$ нуқтага ўтказади. Таърифга кўра $E_3 = E_3'$, бундан

$$a_{11} = a_{22}.$$

Топилган коэффициентларни 33-§ даги (1) га қўйиб, ушбу формулага эга бўламиз:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{11}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= \qquad\quad\;\; a_{33}x_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Бу гомология формуласидир. Энди гомологиянинг s тўғри чизиқда ётмайдиган бошқа қўзғалмас нуқтаси мавжуд бўлиш-бўлмаслигини текширайлик. Бундай нуқта $O(x_1 : x_2 : x_3)$ мавжуд бўлсин, у ҳолда бу нуқта учун

$$x_1' = \lambda x_1, \quad x_2' = \lambda x_2, \quad x_3' = \lambda x_3$$

тенгликлар бажарилади. Бу қийматларни (6) тенгламага қўйиб, ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})x_1 - a_{13}x_3 &= 0, \\ (\lambda - a_{11})x_2 - a_{23}x_3 &= 0, \\ (\lambda - a_{33})x_3 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Қўзғалмас O нуқта s тўғри чизиқда ётмайди, шунинг учун $x_3 \neq 0$, бундан $\lambda = a_{33}$. $\lambda \neq a_{11}$ бўлса, қолган икки тенгликдан

$$x_1 : x_3 = \frac{a_{13}}{\lambda - a_{11}},$$
$$x_2 : x_3 = \frac{a_{23}}{\lambda - a_{11}}$$

ни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, $\lambda \neq 0$ ҳолда гомология s ўқда ётмайдиган фақат битта қўзғалмас $O(a_{13} : a_{23} : \lambda - a_{11})$ нуқтага эга бўлади ва бу нуқта *гомология маркази* дейилади. Агар $\lambda = a_{11}$ бўлса, гомологиянинг ҳамма қўзғалмас нуқталари гомология ўқида ётади.

Гомология қуйидаги турларга бўлинади:

1) Гомология маркази гомология ўқида ётмаса ($\lambda \neq a_{11}$), бундай гомология *гиперболик гомология* дейилади.

2) O нуқта s ўқда ётса ($\lambda = a_{11}$), бу ҳолдаги гомология *параболик гомология дейилади.*

Гомология маркази O нуқта, s ўқ ва s ўқда ётмайдиган бир жуфт A, A' нуқталар берилса (O, A, A' нуқталар коллинеар), гомология бир қийматли аниқланади.

2. Инволюция.

Таъриф. Тўғри чизиқдаги иоайнан ихтиёрий проектив алмаштириш ўзининг тескари алмаштириши билан бир хил бўлса (фарқ қилмаса), бундай алмаштириш *инволюцион алмаштириш* ёки *инволюция* дейилади.

Тўғри чизиқдаги проектив f алмаштириш

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + bx_2, \\ x_2' &= cx_2 + dx_2 \end{aligned} \tag{8}$$

формула билан берилган бўлсин. Таърифга кўра $f = f^{-1}$ шарт бажарилиши керак, яъни $f \cdot f^{-1} = e$ айнан алмаштириш бўлиши керак. (8) алмаштиришнинг матрицасини $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ билан белгилайлик. Алмаштириш айний алмаштириш бўлиши учун

$$a = d, \ b = c = 0$$

шарт башарилиши керак.

Проектив алмаштиришни кўпайтиришда уларнинг матрицаларини кўпайтириш лозим:

$$A \cdot A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{Vmatrix}.$$

Алмаштиришлар кўпайтмаси айнан алмаштириш бўлиши учун ҳосил қилинган кейинги матрицанинг бош диагоналида турган элементлар бир-бирига тенг бўлиши, қолган элементлар эса нолга тенг бўлиши керак, яъни:

$$\begin{aligned} b\ (a + d) &= 0, \\ c\ (a + d) &= 0, \\ (a - d)\ (a + d) &= 0. \end{aligned}$$

Агар $a + d \neq 0$ бўлса, $b = c = 0$, $a = d$ бўлиб, айнан алмаштиришга эга бўламиз.

$a+d=0$ бўлганда инволюцион алмаштиришга эга бўламиз.

Шундай қилиб, инволюция ушбу формула билан ифодаланади:

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1 + вx_2, \\ x_2' &= cx_1 - ax_2. \end{aligned} \tag{9}$$

Энди биз инволюциянинг қўзғалмас нуқталарини топайлик. Бунинг учун

$$x_1' = \rho x_1, \ x_2' = \rho x_2$$

шарт бажарилиши керак. Бу қийматларни (9) формулага қўйиб, ушбу бир жинсли тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{aligned} (\rho - a)\ x_1 - bx_2 &= 0, \\ -cx_1 + (\rho + a)\ x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Бу тенгламалар системаси нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун

$$\begin{vmatrix} \rho - a & -b \\ -c & \rho + a \end{vmatrix} = 0$$

шарт бажарилиши керак, бундан:

$$\begin{aligned} \rho^2 - a^2 - bc &= 0, \\ \rho &= \pm\sqrt{a^2 + bc}. \end{aligned}$$

Инволюциянинг қуйидаги турлари мавжуд:

1) $a^2 + bc < 0$ ҳолда инволюция қўзғалмас нуқтага эга бўлмайди. Бундай инволюция *эллиптик инволюция* дейилади;

2) $a^2 + bc > 0$ ҳолда инволюция иккита қўзғалмас нуқтага эга бўлади. Бундай инволюция *гиперболик инволюция* дейилади;

3) $a^2 + bc = 0$ ҳолда инволюция битта қўзғалмас нуқтага эга бўлади. Бу инволюцияни *параболик инволюция* дейилади.

35- §. Текисликда дуаллик (икки тарафламалик) принципи

Проектив геометриянинг асосий факторларидан бири бўлган дуаллик принципига тўхталиб ўтамиз. Текисликда тегишлилик аксиомалари ифодаланишига ўзгариш киритиб, эндиликда тегишли (ётади, қарашли) термини ўрнига «инцидент» терминини ишлатамиз.

I_1. Иккита A, B нуқта учун уларнинг ҳар бирига инцидент бўлган тўғри чизиқ мавжуд.

II_2. Иккита a, b тўғри чизиқ учун уларнинг ҳар бирига инцидент бўлган нуқта мавжуд.

Бу аксиомаларда «нуқта» сўзини «тўғри чизиқ» сўзи билан, «тўғри чизиқ» сўзини эса «нуқта» сўзи билан алмаштирсак, I_1 аксиомадан I_2, I_2 аксиомадан эса I_1 аксиомани ҳосил қиламиз. Демак, I_1, I_2 аксиомалар ўзаро *муносиб* жумлалардир.

Проектив текисликдаги иккилик принципи қуйидагидан иборат: Агар проектив текислик элементлари — нуқта ва тўғри чизиқларнинг (боғланишлиги) инцидентлиги терминида ифода этилган бирор жумла ўринли бўлса, у ҳолда «нуқта» сўзи ўрнида «тўғри чизиқ» сўзи ишлатилган ва аксинча, «тўғри чизиқ» сўзи ўрнида «нуқта» сўзи ишлатилган бошқа жумла (биринчи жумлага муносиб) ҳам ўринли бўлади. Иккилик принципи бўйича бир-бирига мос келувчи жумлаларнинг бирини исботлаш етарлидир.

Таъриф. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқта ва ҳар икки нуқта орқали ўтадиган учта тўғри чизиқдан иборат фигура *уч учлик* (трёхвершинник) деб аталади.

Бу учта нуқта уч учликнинг учлари, учта тўғри чизиқ эса унинг томонлари дейилади.

Дезарг теоремалари. 1. Агар ABC ва $A'B'C'$ дан иборат иккита уч учликнинг мос учларини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар бирор S нуқтадан ўтса, у ҳолда бу уч учликлар мос томонларининг кесишган учта нуқтаси битта тўғри чизиқда ётади.

Исбот. Уч учликнинг мос учларини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар S нуқтадан ўтсин (59-чизма), BC ва $B'C'$, AC ва $A'C'$, AB ва $A'B'$ томонлари эса мос равишда P, Q, R нуқталарда кесишсин. Бир тўғри чизиқда ётгани учун S, A, A' нуқталар ҳам, S, B, B' нуқталар ҳам, S, C, C' нуқталар ҳам коллинеар бўлади, 31-§ даги (10) формулага кўра қуйидагиларни ёза оламиз:

$$\begin{aligned} S &= \lambda A + \lambda' A', \\ S &= \mu B + \mu' B', \\ S &= \nu C + \nu' C', \end{aligned} \tag{1}$$

буидан:

$$\left.\begin{aligned} \mu B - \nu C &= \nu' C' - \mu' B' \\ \nu C - \lambda A &= \lambda' A' - \nu' C' \\ \lambda A - \mu B &= \mu' B' - \lambda' A' \end{aligned}\right| \begin{aligned} &= P, \\ &= Q, \\ &= R. \end{aligned} \tag{2}$$

P нуқта BC ва $B'C'$ тўғри чизиқларда ётади, демак, $P = BC \cap B'C'$; худди шунга ўхшаш $Q = AC \cap A'C'$, $R = AB \cap A'B'$. (2) дан $P + Q + R = 0$ тенгликни ҳосил қиламиз. Бу эса P, Q, R нуқталарнинг коллинеарлигини билдиради, демак, улар битта тўғри чизиқда ётади.

2. Агар ABC, $A'B'C'$ уч учликларнинг мос томонлари кесишган учта нуқта бир тўғри чизиқда ётса, у ҳолда уч учликларнинг мос учларини бирлаштирувчи учта тўғри чизиқ бир нуқтадан ўтади.

Дезаргнинг 2-теоремасини 1-теоремасидан иккилик принципига суяниб ҳосил қилиш мумкин.

Дезарг теоремасида айтилган S нуқтани ABC ва $A'B'C'$ уч учликларнинг перспектив маркази, s тўғри чизиқни эса перспектив ўқи дейилади. Буларни эътиборга олиб, Дезарг теоремасини қуйидагича ифодалаш мумкин.

Теорема. Иккита уч учлик перспектив марказга эга бўлиши учун улар перспектив ўққа эга бўлиши зарур ва етарлидир.

36-§. Тўртта нуқтанинг мураккаб (қўш, ангармоник) нисбати

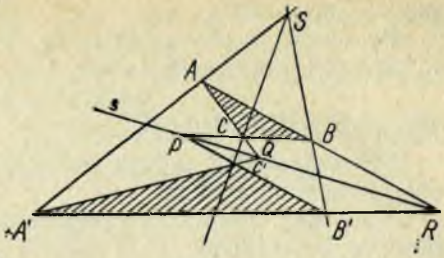
1. Проектив тўғри чизиқда проектив координаталар системаси ва белгили тартибда берилган тўртта A, B, C, D нуқтани олайлик. Бу нуқталар проектив координаталар системасига нисбатан A $(x_1 : x_2)$, B $(y_1 : y_2)$, C $(z_1 : z_2)$, D $(t_1 : t_2)$ координаталарга эга дейлик.

Тўртта A, B, C, D нуқтанинг мураккаб нисбати деб

$$(ABCD)=\frac{\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ t_1 & t_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ t_1 & t_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}y_1 & y_2\\ z_1 & z_2\end{vmatrix}}=\nu$$

сонга айтилади. Қисқача

$$(ABCD)=\frac{(AC)\ (BD)}{(AD)\ (BC)}, \qquad (2)$$



59- чизма

бу ерда (xy) белги, X, $У$ нуқталарниг координаталаридан тузилган иккинчи тартибли детермнантлар. 31-§ даги (9) ва (10) формулаларни эътиборга олиб, C, D нуқталарни A, B нуқталарнинг чизиқли комбинацияси кўринишида ёзиш мумкин:

$$C=A+\lambda B,$$
$$D=A+\mu B$$

ёки параметрик формада:

$$z_1=x_1+\lambda y_1, \quad t_1=x_1+\mu y_1,$$
$$z_2=x_2+\lambda y_2, \quad t_2=x_2+\mu y_2.$$

Бу ифодаларни мураккаб нисбат формуласига қўйиб топамиз:

$$(ABCD)=\frac{\lambda}{\mu}.$$

1-теорема. Тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати проектив координаталар системасини танлаб олишга боғлиқ эмас.

Исбот. Координаталарниг эски системасидан янги системасига ўтиш

$$x'=Ax \qquad (4)$$

формула орқали амалга оширилган бўлсин.

У ҳолда

$$x'=Ax, \quad z'=Az,$$
$$y'=Ay, \quad t'=At;$$

бундан

$$z'=Az=A\ (x+\lambda y)=Ax+\lambda xy=x'+\lambda y',$$
$$t'=At=A\ (x+\lambda y)=Ax+\lambda Ay=x'+\mu y'.$$

Шундай қилиб, C, D нуқталарнинг эски координаталари A, B нуқталарнинг эски координаталари орқали қандай формула ёрдамида ифодаланган бўлса, C, D нуқталарнинг янги координаталари ҳам A, B нуқтанинг янги координаталари орқали шундай формула билан ифодаланади.

Демак. A, B, C, D нуқталарнинг янги координаталаридаги мураккаб нисбати ҳам $\frac{\lambda}{\mu}$ га тенг бўлади.

2-теорема. Тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати проектив алмаштиришда ўзгармайди.

Бу проектив алмаштириш A, B, C, D нуқталарни A', B', C', D' нуқталарга ўтказса, у ҳолда

$$(ABCD) = (A'B'C'D') \tag{5}$$

деган маънони билдиради.

Бу теореманинг исботи олдинги теореманинг исботидан расмий равишда фарқ қилмайди.

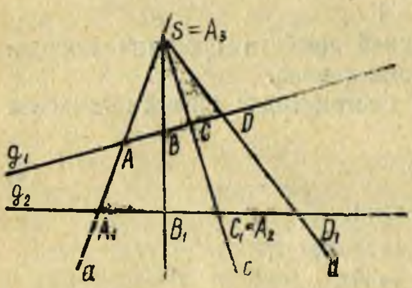
3-теорема. Марказий проекциялашда тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати ўзгармайди.

Исбот. Проектив текисликда иккита тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқларда ётмайдиган S нуқта берилган бўлсин. Биринчи тўғри чизиқдан ихтиёрий тўртта A, B, C, D нуқтани олиб, уларни S нуқта билан туташтирамиз, ҳосил бўлган тўғри чизиқлар иккинчи тўғри чизиқни мос равишда A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталарда кесади. Бу нуқталарни A, B, C, D нуқталарнинг иккинчи тўғри чизиқдаги *марказий проекцияси* дейилади (60-чизма).

Биринчи тўғри чизиқ $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ тенглама билан берилган бўлсин. Координат $A_1A_2A_3$ учбурчакда $A_3 = S$ бўлиб, A_1, A_2 нуқталар иккинчи тўғри чизиқда ётсин, у ҳолда бу тўғри чизиқ тенгламаси $x_3 = 0$ кўринишда бўлади.

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3$$

формула билан берилган проектив алмаштириш S нуқта орқали ўтувчи чизиқларни ўзгартирмайди, $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ тўғри чизиқда ётувчи тўртта A, B, C, D нуқтани мос равишда $x_3 = 0$ тўғри чизиқда ётувчи (уларнинг проекциялари) A_1, B_1, A_2, D_1 нуқталарга ўтказади.



60- чизма

Проектив алмаштиришда тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати ўзгармаслиги учун:

$$(ABCD) = (A_1 B_1 A_2 D_2).$$

Текисликда ётиб, S нуқта орқали ўтувчи тўртта a, b, c, d тўғри чизиқнинг мураккаб нисбати деб бу тўртта тўғри чизиқни ихтиёрий чизиқ билан кесганда ҳосил бўлган A, B, C, D нуқталарнинг мураккаб нисбатига айтилади:

$$(a\,b\,c\,d) = (A\,B\,C\,D). \tag{6}$$

Марказий проекциялашда тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати ўзгармаганлиги сабабли тўртта тўғри чизиқнинг мураккаб нисбати кесувчи чизиқ вазиятига боғлиқ бўлмайди.

4-теорема. Тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати содда нисбатлар орқали ушбу формула билан ифода қилинади:

$$(A\,B\,C\,D) = \frac{(ABC)}{(ABD)}\,. \tag{7}$$

Исбот. Кенгайтирилган евклид тўғри чизиғида бир жинсли декарт координаталарнинг $R = \{A_{1\infty}\ A_1 E\}$ системаси ва тўртта хос A, B, C, D нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталар R реперга нисбатан $A\ (x{:}1)$, $B\ (y:1)$, $C\ (z:1)$, $D\ (t:1)$ $\left(x = \frac{x_1}{x_2}, \ldots\right)$ координаталарга эга бўлади. Бу нуқталарнинг мураккаб нисбати (1) формулага кўра:

$$(ABCD) = \frac{(x-z)\ (y-t)}{(x-t)\ (y-z)}. \tag{8}$$

Бир жинсли бўлмаган декарт координаталар системасига нисбатан $A\ (x)$, $B\ (y)$, $C\ (z)$, $D\ (t)$ координаталарга эга бўлсин.

$$(ABC) = \lambda,\ \overline{AC} = \lambda\,\overline{CB},\ \lambda = \frac{z-x}{y-z};$$

$$(ABD) = \mu,\ A\overline{D} = \lambda\overline{D}B,\ \mu = \frac{t-x}{y-t};$$

$$\frac{(ABC)}{(ABD)} = \frac{(z-x)\ (y-t)}{(t-x)\ (y-z)} = \frac{(x-z)\ (y-t)}{(x-t)\ (y-z)}.$$

Агар A, B, C нуқталар хос нуқталар бўлиб, $D_\infty\ (t:0)$ хосмас нуқта бўлса, у ҳолда

$$(ABCD_\infty) = \frac{(x-z)\ (-t)}{(-t)\ (y-z)} = \frac{x-z}{y-z} = -(ABC).$$

Шундай қилиб, кенгайтирилган евклид тўғри чизиғидаги тўртта нуқтадан биринчи учтаси хос нуқталар бўлиб, тўртинчи нуқтаси хосмас нуқта бўлса, тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати биринчи учта нуқта оддий нисбатининг тескари ишораси билан олинганига тенг.

2. Мураккаб нисбат хоссалари. Бир тўғри чизиқда ётувчи тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати қуйидаги хоссаларга эга.

1. Мураккаб нисбатдаги нуқталарнинг бириичи ва иккинчи жуфтларининг ўринларини алмаштирсак, мураккаб нисбат қиймати ўзгармайди:

$$\nu = (ABCD) = (CDAB).$$

Ҳақиқатан ҳам,

$$(CDAB) = \frac{(CA)\ (DB)}{(CB)\ (DA)} = \frac{(AC)\ (BD)}{(AD)\ (BC)} = (ABCD).$$

2. Мураккаб нисбатда жуфтларнинг биридаги нуқталарнинг ўринларини алмаштирсак, мураккаб нисбат қиймати тескарисига алмашади:

$$(ABDC) = \frac{(ABD)}{(ABC)} = \frac{1}{\frac{(ABC)}{(ABD)}} = \frac{1}{(ABCD)} = \frac{1}{\nu}.$$

3. $(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA)$.

Бу хосса 1- ва 2- хоссалар натижасидир.

4. $(AC\,BD) = 1 - \nu$.

5. $(ADBC) = 1 - \frac{1}{\nu}$ ·

6. $(ADCB) = \frac{\nu}{\nu - 1}$ ·

3 — 6 хоссаларни координаталар методидан фойдаланиб исботлаш қулай.

37- §. Нуқталарнинг гармоник тўртлиги. Тўлиқ тўрт учлик

Таъриф. Агар тўртта A, B, C, D нуқтанинг мураккаб нисбати $(ABCD) = -1$ бўлса, A, B, C, D нуқталарни гармоник жойлашган дейилади.

Нуқталарнинг гармоник тўртлиги проектив геометрияда муҳим роль ўйнайди ва ажойиб хоссаларга эга.

1. $C, D \div A, B \Rightarrow A, B \div C, D.$

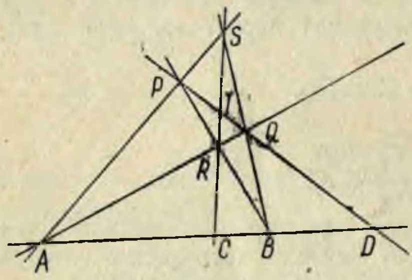
Бу хосса таърифдан бевосита келиб чиқади.

2. Агар A, B, C, D гармоник нуқталар бўлса, нуқталар жуфтларининг ўринларини алмаштирсак ва ҳар бир жуфтдаги нуқталарнинг ўринларини ҳам алмаштирсак, гармоник тўртликнинг мураккаб нисбати ўзгармайди.

Бу хоссадан, агар $(ABCD) = -1$ бўлса, $(BACD) = (ABDC) = (CDAB) = (DCAB) = (CDBA) = (DCBA) = -1$ муносабатлар келиб чиқади.

Таъриф. Ҳар учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган тўртта P, Q, R, S нуқталар ва бу нуқталарнинг ҳар иккитаси орқали ўтувчи олтита тўғри чизиқдан иборат фигура тўлиқ *тўрт учлик* деб аталади.

Нуқталар тўртучликнинг учлари, бу нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқлар унинг томонлари дейилади (61- чизма).



61 - чизма

Тўлиқ тўрт учликнинг RP ва QS, PS ва RQ, RS ва PQ қарама-қарши томонлари мос равишда A, B, T нуқталарда кесишади, бу нуқталарни тўрт учликнинг диагонал нуқталари, уларни бирлаштирувчи AT, TB ва AB тўғри чизиқлар эса диагоналлари дейилади. Учинчи диагонал нуқта T дан ўтувчи PQ ва RS томонларнинг AB диагонал билан кесишган нуқталарини C, D деб олайлик. Биз

$$(ABCD) = -1 \tag{1}$$

эканлигини исбот қиламиз.

R нуқтани марказ қилиб A, B, C, D нуқталарни PQ тўғри чизиққа проекциялаб, ушбу муносабатга эга бўламиз:

$$(ABCD) = (QPTD). \tag{2}$$

S нуқтани марказ қилиб Q, P, T, D нуқталарни AB тўғри чизиққа проекциялаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$(QPTD) = (BACD). \tag{3}$$

(2) ва (3) ларни эътиборга олиб,

$$(ABCD) = (BACD)$$

ни ёза оламиз.

Мураккаб нисбат хоссасига асосан:

$$(ABCD) = (ABCD)^{-1},$$

бундан

$$(ABCD) = \pm 1.$$

$(ABCD) = 1$ тенглик юз бериши мумкин эмас, чунки бу ҳолда C, D нуқталар устма-уст тушади, демак, TC ва TD тўғри чизиқлар ҳам устма-уст тушади. Бу эса P, Q, R, S нуқталар бир тўғри чизиқда ётади, деган натижага келтиради, бу шартга зиддир. Шунинг учун:

$$(ABCD) = -1,$$

$$(2) \Rightarrow (QPTD) = -1.$$

Шундай қилиб, қуйидагича теоремани исботладик.

Теорема. 1) Тўлиқ тўрт учликнинг ҳар бир диагоналида биринчи жуфти диагонал нуқталардан, иккинчи жуфти эса учинчи диагонал нуқтадан ўтувчи қарама-қарши томонларнинг бу диагонал билан кесишишидан ҳосил бўлган нуқталарнинг гармоник тўртлиги мавжуд.

2) Тўлиқ тўрт учликнинг ҳар бир томонида биринчи жуфти тўрт учликнинг учларидан, иккинчи жуфти диагонал нуқта ва бу томон билан қолган иккита диагонал нуқталаридан ўтувчи тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган нуқталарнинг гармоник тўртлиги мавжуд.

Агар D_∞ чексиз узоқ нуқтани билдирса,

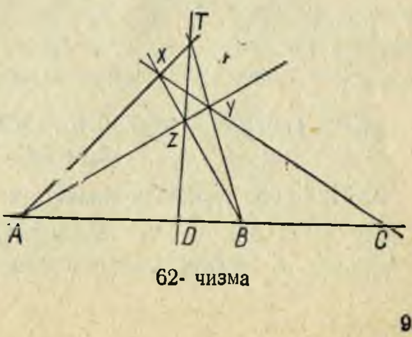
$$(ABCD_\infty) = -(ABC), \; -\frac{AC}{CB} = -1;$$

$$AC = BC.$$

Демак, C нуқта AB кесманинг ўрта нуқтаси бўлади.

Масала. Берилган учта A, B, C нуқтага гармоник тўртинчи D нуқтани ясанг.

Ечиш. A, B — диагонал нуқталари, AB — диагонал тўғри чизиғи бўлган тўлиқ тўрт учликни ясайлик. Бунинг учун A нуқта орқали ихтиёрий иккита тўғри чизиқ, C нуқта орқали эса битта тўғри чизиқ ўтказамиз (62-чизма). Бу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталарини X, $У$ билан белгилаймиз, улар тўлиқ тўрт учликнинг учлари бўлади. Шун-



62- чизма

га ўхшаш тўрт учликнинг қолган учлари — Z, T нуқталарни топамиз. TZ тўғри чизиқ билан AB тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтаси изланган D нуқта бўлади.

38-§. Проектив текисликдаги иккинчи тартибли чизиқлар

1. Проектив координаталари

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0 \quad (1)$$

тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами иккинчи тартибли эгри чизиқ ёки квадрика дейилади ва K билан белгиланади. Юқоридаги тенгламанинг чап томони ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли кўпҳаддир. Унинг даражаси (1) тенглама билан берилган алгебраик чизиқнинг тартибини белгилайди.

Биз иккинчи тартибли ҳақиқий чизиқларни ўрганиш билан чекланамиз. Шунинг учун умумийликни бузмасдан a_{ij} коэффициентларни бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳақиқий сонлар деб ҳисоблаймиз ($a_{ij} = a_{ji}$).

(1) тенгламанинг чап томони ўзгарувчиларга нисбатан квадратик формада, уни $g(x, x) = g(x)$ билан белгилаймиз:

$$g(x, x) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j. \quad (2)$$

Квадратик форманинг

$$G = \| a_{ij} \| \quad (3)$$

симметрик матрицаси бўлади, яъни $G = G^T$, бу ерда «T» матрицани транспонирлаш белгиси.

Агар (2) квадратик форма берилган бўлса, ундан қуйидаги бир чизиқли формани аниқлаш мумкин:

$$g(x, y) = \sum_{i, j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j. \quad (4)$$

Бу форма x_1, x_2, x_3 ва y_1, y_2, y_3 ўзгарувчиларга нисбатан бир жинсли ва чизиқлидир. Шунинг учун

$$\begin{aligned} g(a + \lambda x, y) &= g(a, y) + \lambda g(x, y), \\ g(x, b + \mu y) &= g(x, b) + \mu g(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

бу ерда (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (x_1, x_2, x_3) ва (y_1, y_2, y_3) лар мос равишда қисқача a, b, x, y билан белгиланган. (2) ва (5) формулани эътиборга олиб, қуйидагини ёза оламиз:

$$g(a + \lambda x) = g(a + \lambda x, a + \lambda x) = g(a, a) + 2\lambda g(a, x) + \lambda^2 g(x, x). \quad (6)$$

2. Иккинчи тартибли чизиқнинг тўғри чизиқ билан кесишиши.

Иккита $A(a_1 : a_2 : a_3)$, $B(b_1 : b_2 : b_3)$ нуқта орқали ўтувчи AB тўғри чизиқнинг K чизиқ билан кесишган нуқтасини топайлик. AB тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий $X\ (x_1 : x_2 : x_3)$ нуқтани олайлик. AB тўғри чизиқнинг параметрик тенгламасини

$$x_i = a_i + \lambda b_i \tag{7}$$

кўринишда ёзиш мумкин. λ сон X нуқтанинг тўғри чизиқдаги вазиятини аниқлайди. λ нинг қийматини шундай танлаб олайликки, X нуқта K чизиқда ётсин. Бунинг учун x_i ларнинг қийматларини K чизиқ тенгламасига қўямиз:

$$g\ (a_i + \lambda b_i) = 0.$$

Бундан (6) формулага асосан:

$$g\ (a,\ a) + 2\lambda\ g\ (a,\ b) + \lambda^2\ g\ (b,\ b) = 0. \tag{8}$$

Шундай қилиб, иккинчи тартибли чизиқ билан тўғри чизиқнинг кесишиш масаласи λ га нисбатан квадрат тенгламани ечиш масаласига келтирилади. Тенглама коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат, демак, иккита ҳар хил (ҳақиқий ёки мавҳум) қўшма ёки каррали илдизларга эга бўлади. $g\ (a) = g\ (b) = g\ (a,\ b) = 0$ шартда тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси K чизиққа тегишли бўлади, демак, тўғри чизиқ K да ётади.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли чизиқ билан унда ётмаган тўғри чизиқ иккита ҳақиқий нуқтада ёки иккита мавҳум қўшма иккита нуқтада, ёки устма-уст тушадиган ҳақиқий нуқталарда кесишади.

3. Иккинчи тартибли чизиқнинг уринмаси.

Агар (AB) тўғри чизиқнинг иккинчи тартибли чизиқ билан кесишган нуқталари устма-уст тушса, AB тўғри чизиқ иккинчи тартибли чизиқнинг уринмаси деб айтилади. K чизиқнинг ихтиёрий $A(a_1 : a_2 : a_3)$ нуқтасига ўтказилган уринма тенгламасини тузайлик. A нуқта орқали ўтган кесувчида ихтиёрий $X \neq A$ нуқтани олайлик, у ҳолда AX тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаси:

$$y_i = a_i + \lambda x_i\ (i = 1,\ 2,\ 3).$$

(AX) тўғри чизиқнинг K билан кесишган нуқталарини топиш учун (8) га ўхшаган ушбу тенгламани ечиш керак:

$$g\ (a) + 2\lambda\ g\ (a,\ x) + \lambda^2\ g\ (x) = 0. \tag{9}$$

A нуқта K чизиқда ётади, демак, $g\ (a) = 0$. (9) тенглама қуйидаги кўринишни эгаллайди:

$$\lambda\ [2g\ (a, x) + \lambda\ g\ (x)] = 0. \tag{10}$$

Бундан $\lambda_1 = 0$, демак, A нуқта аниқланади. Иккинчи кесишиш нуқтаси учун λ параметр

$$2g\ (a,\ x) + \lambda g\ (x) = 0 \tag{11}$$

тенгламани қаноатлантириши керак. Иккинчи кесишиш нуқтаси A нуқта билан устма-уст тушиши учун (11) тенглама $\lambda_2 = 0$ ечимга эга бўлиши керак. Бу шарт фақат

$$g(a, x) = \sum_{i,\ j=1}^{3} a_{ij}\ a_j\ x_i = 0 \tag{12}$$

тенглик бажарилганда ўринли бўлади.

Бу тенглама иккинчи тартибли чизиқнинг A нуқтасига ўтказилган уринма тенгламасидир.

39- §. Қутб ва поляра

Иккинчи тартибли чизиқларнинг хоссаларини ўрганишда қутб ва поляра тушунчалари муҳим аҳамиятга эга.

Аввало биз иккинчи тартибли чизиққа нисбатан иккита нуқтанинг қовушганлик тушунчасини киритайлик.

(AB) тўғри чизиқ K чизиқни иккита X, $У$ нуқтада кессин. X, $У$ нуқталарнинг координаталари A, B нуқталарнинг координаталари орқали чизиқли ифодаланади:

$$\begin{aligned} x_i &= a_i + \lambda_1 b_i, \\ y_i &= a_i + \lambda_2 b_i. \end{aligned} \tag{1}$$

1-таъриф. Агар $(ABXУ) = -1$ бўлса, у ҳолда A, B нуқталар иккинчи тартибли K чизиққа нисбатан *гармоник қўшма* (қовушган) нуқталар деб айтилади.

36-§, 1-п. (3) формулага кўра

$$(ABXУ) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1,$$

бундан:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \tag{2}$$

X, $У$ нуқталар K чизиқда ётади, шунинг учун λ_1 ва λ_2 сонларни

$$g\ (b)\ \lambda^2 + 2\lambda\, g\ (a,\ b) + g\ (a) = 0$$

квадрат тенгламанинг илдизлари деб олиш мумкин. Квадрат тенглама илдизлари йиғиндиси нолга тенг. Виет теоремасига кўра:

$$g\ (a,\ b) = 0. \tag{3}$$

Шундай қилиб, A, B нуқталар K чизиққа нисбатан қўшма бўлиши учун (3) шартнинг бажарилиши зарур ва етарлидир. Агар A нуқта K да ётса, бу нуқта K чизиққа нисбатан ўз-ўзига қўшма бўлади.

2-таъриф. Иккинчи тартибли чизиққа нисбатан A нуқтага (ёки B нуқтага) қўшма бўлган барча нуқталарнинг геометрик ўрнини A нуқтанинг (ёки B нуқтанинг) K чизиққа нисбатан *поляраси* дейилади. A нуқтани эса поляранинг K чизиққа нисбатан *қутби* дейилади.

Ихтиёрий X $(x_1{:}x_2{:}x_3)$ нуқта A $(a_1{:}a_2{:}a_3)$ нуқтанинг полярасида ётиши учун

$$g\ (a,\ x) = \sum_{i\,j=1}^{3} a_{ij}\ a_j\ x_i = 0 \tag{4}$$

қўшмалик шарти ўринли бўлиши керак. Бу тенглама A нуқтанинг K чизиққа нисбатан поляра тенгламасидир.

Қутб ва поляра қуйидаги хоссаларга эга.

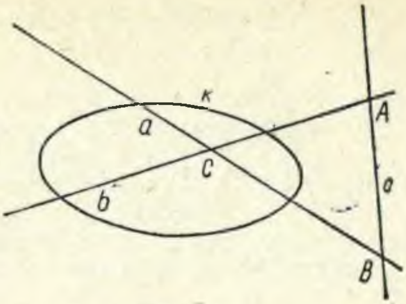
1. Текисликдаги ихтиёрий нуқтанинг K чизиққа нисбатан поляраси тўғри чизиқдир.

Ҳақиқатан ҳам, (4) тенглама x_1, x_2, x_3 ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали бир жинсли. Шу сабабли A нуқтанинг поляраси тўғри чизиқдан иборат.

(4) поляра тенгламасининг коэффициентларини

$$P_i = \sum_{i,\, j=1}^{3} a_{ij} a_j \qquad (5)$$

кўринишда белгиласак, поляра тенгламасини



63- чизма

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3 = 0 \qquad (6)$$

каби ёзиш мумкин. Агар поляра тенгламаси берилса, (5) тенгламалар системасини a_j ларга нисбатан ечиб, қутб нуқта A нинг координаталарини топамиз.

2. Агар A нуқтанинг поляраси B нуқтадан ўтса, B нуқтанинг поляраси A нуқтадан ўтади (63- чизма).

Ҳақиқатан ҳам, A нуқтанинг поляраси

$$\sum a_{ij} a_j x_i = 0$$

тенгламага эга.

B нуқтанинг поляраси

$$\sum a_{ij} b_j x_i = 0$$

тенгламага эга.

Агар A нуқтанинг поляраси B нуқтадан ўтса,

$$\sum a_{ij} a_j b_i = 0$$

бўлади, $a_{ij} = a_{ji}$ ни эътиборга олиб,

$$\sum a_{ji} b_j a_i = 0$$

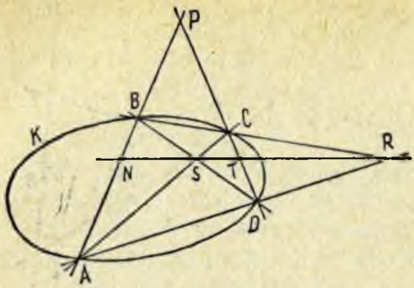
ёзишимиз мумкин, яъни B нуқтанинг поляраси A нуқтадан ўтади.

1- натижа. Агар нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилса, бу нуқтанинг поляраси ҳамма вақт тўғри чизиқнинг қутбидан ўтади. Аксинча, агар бирор тўғри чизиқ берилган нуқтадан ўтиб, шу нуқта атрофида айланса, у ҳолда тўғри чизиқнинг қутби берилган нуқтанинг поляраси устида ҳаракатланади.

Таъриф. Иккита тўғри чизиқдан бири иккинчисининг қутбидан, иккинчиси биринчисининг қутбидан ўтса, у ҳолда бундай тўғри чизиқлар *қутбий қўшма чизиқлар* деб аталади.

Масала. Овал типидаги иккинчи тартибли чизиқ K ва $P \notin K$ нуқта берилган бўлсин. Берилган нуқтанинг полярасини ясанг.

Ечиш. P нуқта орқали K чизиқни икки нуқтада кесувчи иккита тўғри чизиқ ўтказамиз, кесишган A, B, C, D нуқталар K чизиққа ички чизилган тўлиқ тўрт учликнинг учлари, P ва R нуқталар диагонал нуқталари бўлади (64- чизма).



64- чизма

Тўлиқ тўрт учликнинг гармоник хоссаларига асосан $(PNAB) = -1$, $(PTCD) = -1$. Демак, N, T нуқталар P нуқтанинг полярасида, яъни NT тўғри чизиқда ётади.

40- §. Иккинчи тартибли чизиқлар классификацияси

Таъриф. Агар уч учликнинг ҳар бир учи, иккинчи тартибли чизиққа нисбатан, қаршисида ётган томонининг қутби бўлса, бундай уч учлик автополяр уч учлик дейилади. ABC таърифга кўра, автополяр учбурчакдир (63- чизма).

Текисликда иккинчи тартибли чизиқ

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j = 0 \tag{1}$$

тенглама билан берилган бўлсин. Агар $A_1 A_2 A_3$ координат учбурчак чизиққа нисбатан автополяр бўлса, $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$ нуқталар ўзаро қўшма бўлади. Бу нуқталарнинг қўшмалик шартларидан фойдаланиб, a_{12}, a_{13}, a_{23} коэффициентларни нолга айлантирамиз:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

У ҳолда биринчи тенглама ушбу кўринишга эга бўлади:

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 = 0. \tag{2}$$

Бу тенгламанинг нолдан фарқли коэффициентларини

$$x_1 = \alpha x_1', \quad x_2 = \beta x_2', \quad x_3 = \gamma x_3', \quad \alpha\beta\gamma \neq 0 \tag{3}$$

проектив алмаштириш ёрдамида ± 1 айлантириш мумкин (масалан.

$$a_{11} \neq 0, \ \alpha = \frac{1}{\sqrt{|a_{11}|}}.$$

Шундай қилиб, проектив координаталар системасини алоҳида танлаб олиш билан иккинчи тартибли ихтиёрий чизиқ тенгламасини қуйидаги каноник кўринишларнинг бирига келтириш мумкин:

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ — ноль чизиқ;

2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ — овал чизиқ;

3) $x_1^2 + x_2^2 = 0$ — бир жуфт мавҳум тўғри чизиқ;

4) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — бир жуфт ҳақиқий тўғри чизиқ;

5) $x_1^2 = 0$ — устма-уст тушадиган бир жуфт тўғри чизиқ.

41-§. Штейнер, Паскаль ва Брианшон теоремалари

1. Штейнер теоремаси.

Текисликдаги бирорта S нуқтадан ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўпламини тўғри чизиқлар дастаси, S нуқтани даста маркази дейилади.

Агар дастани бирор тўғри чизиқ билан кессак, у ҳолда тўғри чизиқ билан даста ўзаро перспектив жойлашган дейилади.

1-таъриф. Агар иккита тўғри чизиқ битта дастани кесса, у ҳолда бу тўғри чизиқлар *перспектив тўғри чизиқлар* дейилади (60-чизма).

Перспектив тўғри чизиқларнинг мос нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар битта нуқтадан ўтади.

Марказлари S_1, S_2 нуқталарда бўлган иккита даста берилган бўлсин.

2-таъриф. Агар S_1 дастанинг ҳар бир тўғри чизиғини S_2 дастанинг унга мос тўғри чизиғига ўтказувчи проектив алмаштириш мавжуд бўлса, у ҳолда бу дасталарни *проектив дасталар* дейилади.

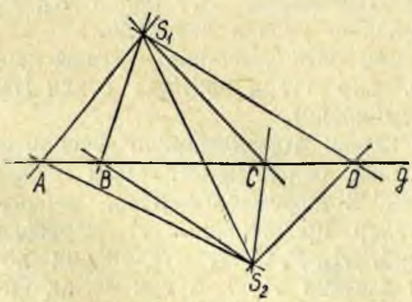
Агар иккита дастанинг мос тўғри чизиқлари битта тўғри чизиқда кесишса, у ҳолда бундай дасталар *перспектив дасталар* дейилади (65-чизма).

1-теорема. Перспектив бўлмаган иккита проектив даста мос тўғри чизиқларининг кесишган нуқталари тўплами иккинчи тартибли (айнимайдиган) чизиқни ташкил қилади.

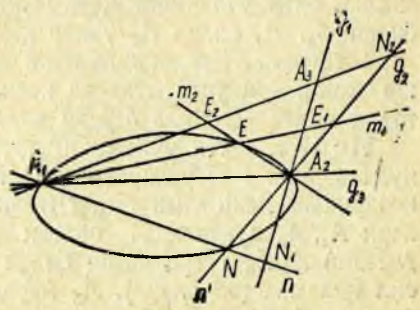
Исбот. Текисликда $R = \{A_1 A_2 A_3 E\}$ проектив координаталар системаси ва марказлари A_1, A_2 нуқталарда бўлган иккита проектив даста берилган бўлсин (66-чизма).

Дасталар проектив, шунинг учун $A_1 A_2 = g_3$ тўғри чизиқ ўз-ўзига ўтмайди. Агар g_3 тўғри чизиқни A_1 дастага тегишли деб олсак, A_2 дастадан қандайдир g_1 тўғри чизиқ унга мос келади, агар g_3 тўғри чизиқни A_2 дастага тегишли деб олсак, A_1 дастадан g_2 тўғри чизиқ мос келади. Дастага тегишли g_1, g_2, g_3 тўғри чизиқлардан ташқари, иккита мос m_1, m_2 тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини E билан, $g_1 \cap g_2 = A_3$ билан белгилайлик. У ҳолда S проектив алмаштиришда:

$$S(g_3) = g_1, \quad S(g_2) = g_3, \quad S(m_1) = m_2. \qquad (1)$$



65-чизма



66-чизма

A_1 дастани g_1 тўғри чизиқ билан, A_2 дастани g_2 тўғри чизиқ билан кесиб, даста чизиқлари билан тўғри чизиқ нуқталари орасида мос равишда T_1, T_2 перспектив мосликларни ҳосил қиламиз. $T = T_2 S T_1^{-1}$ проектив алмаштиришда (1) ни эътиборга олсак,

$$T(A_2) = A_3,\ T(A_3) = A_1,\ T(E_1) = E_2 \tag{2}$$

ҳосил бўлади, бу ерда $E_1 = m_1 \cap g_1$, $E_2 = m_2 \cap g_2$. nA_1 дастанинг ихтиёрий тўғри чизиғи, $n' = S(n)$ эса A_2 дастадаги унинг образи бўлсин. $N = n \cap n'$, $N_1 = n \cap g_1$, $N_2 = n' \cap g_2$, у ҳолда $T(N_1) = N_2$. Проектив алмаштиришда тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати ўзгармайди:

$$(A_2 A_3 E_1 N_1) = (A_3 A_1 E_2 N_2). \tag{3}$$

Агар N нуқта R реперга нисбатан $(x_1{:}x_2{:}x_3)$ координаталарга эга бўлса, $\{A_2 A_3 E_1\}$ реперда эса $E_1(1{:}1)$, $N_1(x_2{:}x_3)$ координаталарга, $\{A_1 A_3 E\}$ реперда эса $E_2(1{:}1)$, $N_2(x_2{:}x_3)$ координаталарга эга бўлади.

$$(A_2A_3E_1N_1) = \frac{x_2}{x_3},\ (A_3A_1E_2N_2) = \frac{x_3}{x_1}.$$

(3) ни эътиборга олиб,

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{x_3}{x_1} \quad \text{ёки} \quad x_2 x_1 - x_3^2 = 0$$

тенгламага эга бўламиз. N нуқтанинг координаталари учун бир жинсли иккинчи даражали тенглама ҳосил қилдик. Демак, N нуқталарнинг геометрик ўрни иккинчи тартибли чизиқдан иборат.

2- теорема (тескари теорема). Марказлари иккинчи тартибли чизиқда ётувчи иккита дастанинг мос тўғри чизиқлари ўша иккинчи тартибли чизиқда кесишса, дасталар проективдир. (Теорема исботи [10] 212-бетда берилган.)

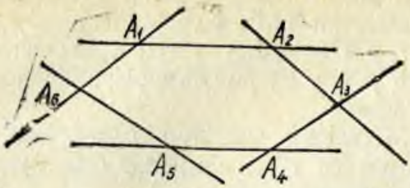
2. Паскаль теоремаси.

Текисликдаги ҳар учтаси бир тўғри чизиқда ётмайдиган ва маълум тартибда олинган олтита $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ нуқта (учлари) ва $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ тўғри чизиқлардан (томонлари) тузилган фигура олти учлик дейилади (67- чизма).

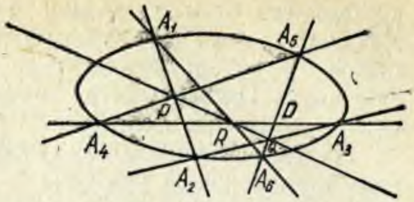
$A_1 A_2$ билан A_4A_5, A_2A_3 билан A_5A_6, A_3A_4 билан A_6A_1 тўғри чизиқлар олти учликнинг қарама-қарши томонлари, A_1 билан A_4, A_2 билан A_5, A_3 билан A_6 учлар қарама-қарши учлари дейилади.

1- теорема. Квадрикага ички чизилган олти учликнинг қарама-қарши томонлари учта нуқтада кесишиб, бир тўғри чизиқда ётади (бу тўғри чизиқ *Паскаль тўғри чизиғи* дейилади).

Исбот. Олти учликнинг қарама-қарши томонларининг кесишган нуқталарини мос равишда P, Q, R билан белгилайлик. Олти учлик квадрикага ички чизилган. Штейнернинг 2- теоремасига кўра, марказлари A_1, A_3 нуқталарда бўлган дасталар проективдир. A_1 марказли дастани $A_4 A_5$ тўғри чизиқ билан кесиб, A_4, P, C, A_5 нуқталарни ҳосил қиламиз (68- чизма). A_3 марказли дастани $A_6 A_5$ тўғри чизиқ билан кесиб, D, Q, A_6, A_5 нуқталарни ҳосил қиламиз. Проектив алмаштиришда: $A_4 \to D$, $P \to Q$, $C \to A_6$, $A_5 \to A_5$ ва A_4A_5 тўғри чизиқ



67- чизма



68- чизма

A_5A_6 тўғри чизиққа алмашинади ($A_4A_5 \cap A_5A_6 = A_5$, яъни A_5 нуқта ўз-ўзига ўтади). Демак, A_6A_5 ва A_4A_5 тўғри чизиқлар перспективдир. Перспектив тўғри чизиқларнинг мос нуқталарини бирлаштирувчи CA_6, A_4D, PQ тўғри чизиқлар битта R нуқтадан ўтади.

Паскаль теоремасидан фойдаланиб, Папп исботлаган теоремани келтирамиз.

1-теорема. Иккита тўғри чизиқ берилган бўлиб, биринчи тўғри чизиқда A_1, A_3, A_5 нуқталар, иккинчи тўғри чизиқда A_2, A_4, A_6 нуқталар ётсин. У ҳолда A_1A_2 билан A_4A_5, A_2A_3 билан A_5A_6, A_3A_4 билан A_6A_1 тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси бир тўғри чизиқда ётади.

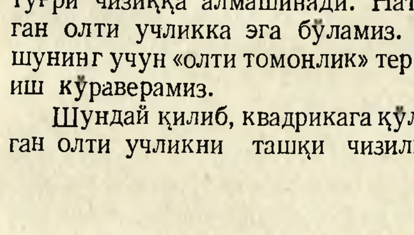
Исбот. Квадрика иккита тўғри чизиққа ажратилган бўлсин. У ҳолда биз айнигаи иккинчи тартибли чизиққа ички чизилган олти учлик ҳақида гапиришимиз мумкин. Паскаль теоремасига асосан, қарама-қарши томонларнинг кесишган нуқталари бир тўғри чизиқда ётади (69- чизма).

3. Брианшон теоремаси. Текисликда айнимайдиган квадрика берилган бўлсин.

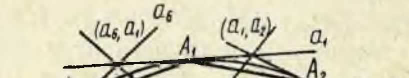
Энди Паскаль теоремасига иккилик принципига кўра мос келган Брианшон томонидан исбот қилинган теоремани қарайлик.

Паскаль теоремаси учун чизилган (70-чизма) олти учлик (олтитомонлик) ка эътибор берайлик; қаралган квадрикага нисбатан иккилик принципини қўлласак, олти учликнинг учлари квадрикага уринувчи тўғри чизиққа алмашинади. Натижада томонлари квадрикага уринадиган олти учликка эга бўламиз. Бу фигуранинг ҳам олтита учи бор, шунинг учун «олти томонлик» терминини ишлатмасдан, олти учлик билан иш кўраверамиз.

Шундай қилиб, квадрикага қўлланилган дуаллик принципи ички чизилган олти учликни ташқи чизилган олти учликка алмаштиради. Ич-



69- чизма



70- чизма

ки чизилган олти учликнинг қарама-қарши томонларининг кесишган P, R, Q нуқталари (68-чизма) ташқи чизилган олти учликнинг қарама-қарши учларини бирлаштирувчи P, r, g (70-чизма) тўғри чизиқларга аксланади. Паскаль тўғри чизиғи эса p, r, g тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасига аксланади.

Теорема. Айнимайдиган квадрикага ташқи чизилган олтибурчакниңг қарама-қарши учларини бирлаштирувчи тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади. (Бу нуқта *Брианшон нуқтаси* дейилади.)

42-§. Аффин ва Евклид геометриясининг проектив схемаси

1. Проектив геометрия предмети.

Феликс Клейн 1872 йили Германиянинг Эрланген шаҳридаги университетда ўқиган лекциясида геометрия программасини баён этади. Бу программада турли хил геометрияларни алмаштиришлар группаси нуқтаи назаридан таърифлайди. Масалан, евклид геометриясини ҳаракат группаси билан, аффин геометрияни аффин алмаштиришлар группаси билан, проектив геометрияни проектив алмаштириш группаси билан таърифлайди. Бирор доира ёки ихтиёрий конус кесимини ўз-ўзига ўтказувчи проектив алмаштиришлар группаси Лобачевский геометриясини аниқлайди.

Ф. Клейн томонидан берилган таъриф билан танишиб чиқайлик:

Геометрия — алмаштиришларнинг бирор группасига нисбатан фигураларининг инвариант хоссалари ҳақидаги фандир.

2. Проектив нуқтаи назардан қаралган аффин геометрия Ф. Клейн ғоясига кўра аффин, евклид ва ноевклидий геометриялар проектив алмаштиришлар группасининг қисм группалари геометриясидан иборат бўлади.

Проектив текисликда ихтиёрий a тўғри чизиқ ва проектив алмаштиришлар группаси берилган бўлсин. a тўғри чизиқни ўз-ўзига ўтказувчи барча алмаштиришлар тўплами проектив группанинг қисм группасини ташкил қилади (a тўғри чизиқ абсолют деб айтилади). Бу қисм группа аффин алмаштиришлар группаси бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $A_1 A_2 A_3$ координат учбурчакнинг A_1, A_2 учлари a тўғри чизиқда ётади деб олсак, a тўғри чизиқ $x_3 = 0$ тенгламага эга бўлади. Проектив алмаштириш a тўғри чизиқни

$$a_3' x_1' + b_3' x_2' + c_3' x_3' = 0$$

тенглама билан аниқланган a' тўғри чизиққа ўтказади, бу тўғри чизиқлар устма-уст тушиши учун $a_3' = b_3' = 0$ шарт бажарилиши керак.

Демак, қисм группанинг ихтиёрий алмаштириши

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1' x_1' + b_1' x_2' + c_1' x_3', \\ x_2 &= a_2' x_1' + b_2' x_2' + c_2' x_3', \\ x_3 &= \qquad\qquad\qquad\quad c_3' x_3'. \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$

формула билан берилади.

Проектив алмаштиришни евклид текислигида қараш учун $x_3 \neq 0$, $x_3' \neq 0$ деб олиш етарлидир. (1) тенгламанинг ўнг томонини $x_3 \neq 0$ га, чап томонини $c_3' x_3'$ га бўлиб ва

$$\frac{x_1}{x_3} = x, \quad \frac{x_2}{x_3} = y, \quad \frac{x_1'}{x_3'} = x', \quad \frac{x_2'}{x_3'} = y'$$

белгилаб, (1) формулани ушбу кўринишда ёзамиз:

$$x = ax' + by' + c,$$
$$y = a_1x' + b_1y' + c_1. \qquad (2)$$

(2) формула евклид текислигидаги аффин алмаштиришларни ифодалайди.

Энди проектив P_2 текисликда аффин геометрияга назар ташлайлик. Бунинг учун проектив текисликдаги хосмас тўғри чизиқни алмаштиришимиз керак. Бу текисликдаги ҳар бир тўғри чизиқ бир хил ҳуқуққа эга бўлгани учун текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиқни хосмас тўғри чизиқ деб олишимиз мумкин. Юқорида олинган натижаларга кўра ҳамма аффин тушунчаларни проектив геометрия терминлари орқали таърифлашимиз мумкин:

1. $P_2 \setminus a_\infty = \Pi$ аффин текислик.

2. Аффин алмаштиришлар группаси — $P_2 \setminus a_\infty$ текисликдаги a_∞ тўғри чизиқни ўз-ўзига ўтказувчи проектив алмаштиришнинг қисм группаси.

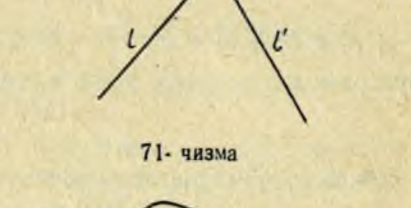
3. l билан l' тўғри чизиқлар кесишган A_∞ нуқта a_∞ абсолютга қарашли бўлиб, бу тўғри чизиқлар проектив текисликнинг иккита тўғри чизиғи бўлсин (71-чизма). У ҳолда $l \setminus A_\infty$ ва $l' \setminus A_\infty$ аффин текисликдаги иккита параллел тўғри чизиқлар бўлади.

4. 72-чизмада $ABCD$ «параллелограмм» тасвирланган.

5. Агар A, B, C нуқталар аффин текисликдаги коллинеар нуқталар бўлса, у ҳолда учта нуқтанинг (ABC) оддий нисбати ушбу формула билан аниқланади:

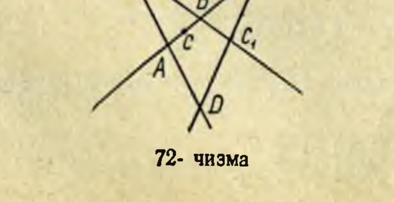
$$-(ABC) = (ABCD_\infty),$$

бу ерда D_∞ нуқта абсолютда ётади. $(ABCD_\infty) = 1$ шарт бажарилганда C нуқта AB кесманинг ўрта нуқтаси бўлади (72-чизма).

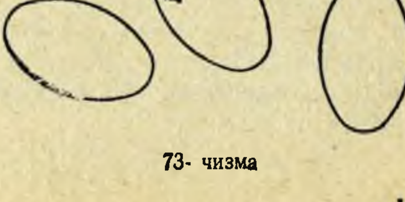


71- чизма

6. Иккинчи тартибли овал чизиқ абсолют билан кесишмаса, ёки битта умумий нуқтага эга бўлса, ёки иккита умумий нуқтага эга бўлса, у ҳолда овал чизиқ мос равишда эллипс, парабола, гиперболадан иборат конус кесимлари бўлади (73-чизма.)



72- чизма



73- чизма

3. Проектив нуқтаи назардан евклид геометрияси.

Теорема. Евклид текислигидаги аффин алмаштиришлар ўхшаш алмаштириш бўлиши учун ихтиёрий бир жуфт перпендикуляр тўғри чизиқларни яна перпендикуляр бир жуфт тўғри чизиқларга ўтказиш зарур ва етарлидир.

Исбот. Зарурий шартнинг ўринли бўлиши равшан, етарли шартни исботлайлик.

Маълумки, аффин алмаштириш

$$x' = ax + by + c,$$
$$b' = a_1x + b_1y + c_1$$

ихтиёрий $\overleftrightarrow{p}(p_1, p_1)$ векторни $\overrightarrow{p}'(p_1', p_2')$ векторга алмаштиради:

$$p_1' = ap_1 + bp_2 + c,$$
$$p_2' = a_1p_1 + b_1p_2 + c_1.$$

Иккита перпендикуляр $\overleftrightarrow{m}_1(1, 0)$, $\overleftrightarrow{m}_2(0, 1)$ вектор $\overleftrightarrow{m}_1'(a; a_1)$, $\overleftrightarrow{m}_2(b; b_1)$ векторларга алмаштирилади. Бу векторлар ҳам перпендикуляр бўлсин, яъни:

$$\overleftrightarrow{m}_1' \overleftrightarrow{m}_2' = ab + a_1b_1 = 0.$$

Энди бошқа икки перпендикуляр $\overrightarrow{m}_3(1, 1)$ ва $\overleftrightarrow{m}_4(1, -1)$ векторларни олайлик, уларнинг образлари $m_3'(a + b,\ a_1 + b_1)$ ва $m_4'(a - b,\ a_1 - b_1)$ координаталарга эга бўлади. Уларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$\overrightarrow{m}_3' \overrightarrow{m}_4' = (a + b)(a - b) + (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = 0.$$

Шундай қилиб, тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} ab + a_1 b_1 = 0, \\ a_1^2 + a^2 = b^2 + b_1^2. \end{cases}$$

$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = k^2$, $a = k\cos\varphi$, $a_1 = k\sin\varphi$, $b = k\sin\psi$, $b_1 = k\cos\varphi$.

Булардан фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$\sin(\varphi + \psi) = 0,$$
$$\psi = -\varphi + \pi n \ (n = 0; 1).$$

Энди b, b_1 коэффициентларни φ орқали ифодалашимиз мумкин, яъни:

а) $n = 0$; $b = -k\sin\varphi$, $b_1 = k\cos\varphi$,

б) $n = 1$; $b = k\sin\varphi$, $b_1 = -k\cos\varphi$,

ёки

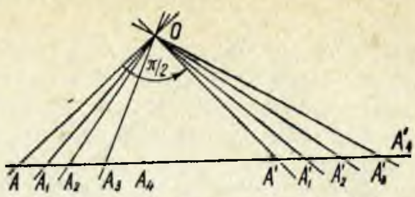
$$b = -\varepsilon k\sin\varphi,\ b_1 = \varepsilon k\cos\varphi,$$

бу ерда $\varepsilon = \pm 1$.

Бу коэффициентларнинг топилган қийматларини алмаштириш формуласига қўйиб топамиз:

$$x' = k(x\cos\varphi - \varepsilon y\sin\varphi) + c,$$
$$y' = k(x\sin\varphi + \varepsilon y\cos\varphi) + c_1.$$

Бизга a_∞ — тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ётмайдиган O нуқта берилган бўлсин. Тўғри чизиқнинг ҳар бир A нуқтасини A' нуқтасига ўтказувчи ва AOA' тўғри бурчакни ўзгартирмайдиган (74-чизма) f алмаштиришни олайлик. Бу алмаштириш O нуқтани танлаб олишга боғлиқ эмаслиги равшан, $OA_i = a_i$, $OA'_i = a'_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ билан белгилайлик.



74- чизма

a'_1, a'_2, a'_3, a'_4 тўғри чизиқлар a_1, a_2, a_3, a_4 тўғри чизиқларнинг ҳар бирини O нуқта атрофида $\frac{\pi}{2}$ бурчакка буриш натижасида ҳосил қилинган.

Буришда мураккаб нисбат ўзгармайди, яъни $(a_1\,a_2\,a_3\,a_4) = (a'_1\,a'_2\,a'_3\,a'_4)$, бундан эса $(A_1\,A_2\,A_3\,A_4) = (A'_1\,A'_2\,A'_3\,A'_4)$. Демак, f проектив алмаштиришдир. Бу алмаштириш таърифига кўра инволюция бўлиб, қўзғалмас нуқтага эга эмас, демак, эллиптик инволюциядир. Бундай инволюция абсолют инволюция дейилади.

Энди кенгайтирилган евклид текислигида a_∞ тўғри чизиқни ўз- ўзига ўтказиш билан бирга ундаги абсолют инволюцияни ўзгартирмайдиган проектив алмаштиришни қарайлик.

Юқоридаги теоремаларни ва аффин группасини эътиборга олсак, қуйидаги натижага келамиз.

Коллинеациялар группаси таъсир қилган кенгайтирилган евклид текислигида, абсолют сифатида, абсолют инволюция мавжуд бўлган a_∞ хосмас тўғри чизиқни олсак, у ҳолда коллинеациянинг қисм группаси $P_2 \setminus a_\infty = \Pi$ евклид текислигидаги ўхшаш алмаштиришлар группаси бўлади.

Энди проектив текисликда евклид геометриясини қуришимиз мумкин. Бунинг учун проектив P_2 текисликда абсолютни танлаш лозим. Абсолют сифатида хосмас тўғри чизиқ ва ундаги абсолют инволюцияни оламиз.

Юқорида олинган натижаларга асосан евклид тушунчаларига қуйидагича таърифлар бериш мумкин:

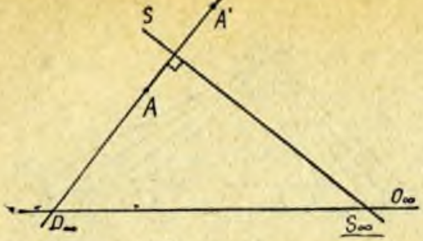
1. $P_2 \setminus a_\infty$ — евклид текислиги, бу текислик аффин текислиги билан бир хилдир.

2. Тўғри чизиқ, тўғри чизиқнинг параллеллиги, «орасида» муносабати, кесма, учта нуқтанинг оддий нисбати ва шунга ўхшаш аффин тушунчалардаги каби таърифланади.

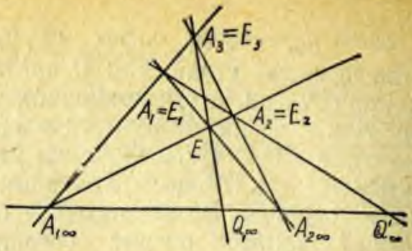
3. Ўхшаш алмаштиришлар группаси $P_2 \setminus a_\infty$ текисликдаги абсолютни сақловчи проектив алмаштиришлар группасининг қисм группасидир.

4. l, m — проектив тўғри чизиқлар. Агар бу тўғри чизиқлар абсолютни L_∞, M_∞ нуқталарда кесса ва бир- бирига абсолют инволюцияда мос бўлса, у ҳолда $l \setminus L_\infty$, $m \setminus M_\infty$ евклид тўғри чизиқлари перпендикуляр бўлади.

5. Маркази P_∞ нуқтада, ўқи s эса P_∞ нуқтага абсолют инволюция-



75- чизма



76- чизма

да мос келган S_∞ нуқтадан ўтувчи инволюцион гомологияни олайлик. Бу алмаштириш текисликнинг A нуқтасини A' нуқтасига ўтказади (75- чизма). Агар $(P_\infty X AA') = -1$ бўлса, X нуқта AA' кесманинг ўрта нуқтаси бўлади, ундан ташқари $(AA')\setminus P_\infty$ ва $s\setminus S_\infty$ тўғри чизиқлар перпендикуляр. Демак, биз қараётган алмаштириш s ўққа нисбатан симметрик алмаштириш бўлади.

6. Декарт координаталари системасини кўрайлик. $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$ ва Q_∞, Q'_∞ нуқталар абсолют иволюцияда бир-бирига мос келувчи ва бир-бирини гармоник ажратувчи икки жуфт нуқта бўлсин. $(E_3 Q_\infty)\setminus Q_\infty$ тўғри чизиқда ётувчи A_3 ва E хос нуқталарни олайлик. У ҳолда $R = \{A_1 A_2 A_3 E\}$ проектив координаталар системаси бир жинсли аффин $R = \{A_{1\infty} A_{2\infty} A_3 E\}$ координаталар системасига айланади. Бу системанинг $A_3 A_{1\infty}$ ва $A_3 A_{2\infty}$ координат ўқлари перпендикуляр. Бундан ташқари

$$E_1 = A_3 A_{1\infty} \cap E A_{2\infty}, E_2 = A_3 A_{2\infty} \cap E A_{1\infty}$$

бўлса, у ҳолда бирлик $A_3 E_1$ ва $A_3 E_2$ кесмаларнинг узунликлари тенг (76- чизма).

Ҳақиқатан ҳам, тўлиқ тўрт учликнинг гармоник хоссаларига кўра, $E_1 E_2$ тўғри чизиқ $A_{1\infty}$, $A_{2\infty}$, Q_∞ нуқталарга гармоник бўлган Q'_∞ нуқтадан ўтади.

Шунинг учун Q'_∞ марказли ва $A_3 Q_\infty$ ўқли инволюцион гомология $A_3 E_1$ ва $A_3 E_2$ кесмаларни бир-бирига ўтказади, бундан кесма узунликларининг тенглиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, $R = \{A_1 A_2 A_3 E\}$ координаталар системаси — абсолюти билан берилган проектив текисликдаги тўғри бурчакли бир жинсли декарт системасидан иборат бўлади. $P_2 \setminus a_\infty$ текисликдаги бир жинсли бўлмаган тўғри бурчакли декарт системаси одатдагидек кўрилади. Нуқтанинг бир жинсли бўлмаган координаталари сифатида бир жуфт (x, y) сонлар олинади. Бу сонлар шу нуқтанинг бир жинсли (x_1, x_2, x_3) координаталари билан

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \; y = \frac{x_2}{x_3}$$

муносабат орқали боғланган.

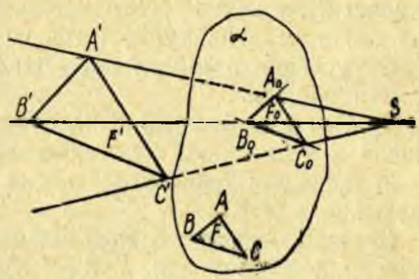
Фазодаги фигураларнинг геометрик хоссаларини текширишда бевосита фигураларнинг ўзларидан эмас, балки унинг текисликдаги тасвирларидан фойдаланилади. Тасвирланадиган шаклларни чизиш қоидалари проекциялаш методига асослангандир. Тасвирлашда асосан марказий проекциялаш ва параллел проекциялаш методларидан фойдаланилади. Бу методларни алоҳида-алоҳида кўриб чиқайлик.

43-§. Проекциялаш назариясининг баъзи бир масалалари

1. Марказий проекциялаш.

Евклид фазосида α текислик ва шу текисликдан ташқарида ётган A' нуқта берилган деб фараз қилайлик (77-чизма). A' дан фарқли ихтиёрий S ($S \notin \alpha$) нуқтани танлаб олиб, уни A' нуқта билан туташтирамиз, ҳосил бўлган SA' тўғри чизиқнинг α текислик билан кесишган нуқтасини A_0 билан белгилайлик. A_0 нуқтани фазодаги A' нуқтанинг α (проекция) текисликдаги марказий проекцияси, S нуқтани проекциялар маркази, SA' чизиқни проекцияловчи тўғри чизиқ, α текисликниг эса проекциялар текислиги дейилади.

Юқоридаги усул билан F' фигуранинг α текисликдаги F_0 проекциясини ясаганимиздан кейин, уни ўхшаш алмаштириб, F' фигуранинг α текисликдаги F тасвирини ҳосил қиламиз. Баъзи ҳолларда ўхшаш алмаштиришга зарурият туғилмайди, у ҳолда F' фигуранинг α текисликдаги проекцияси унинг тасвири бўлади.

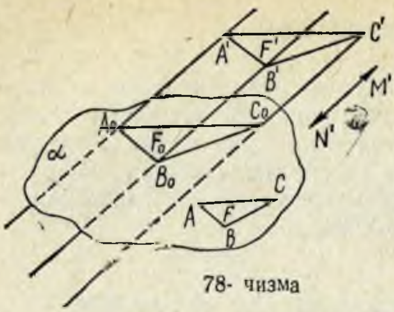


77- чизма

Фигура проекциясининг кўриниши проекциялар текислигининг проекциялар марказига нисбатан жойланишига боғлиқдир. Марказий проекциялашда киши кўзининг кўриш нурлари проекцияловчи нурларга мос келганлиги сабабли тасвир яққол кўринади. Марказий проекциялар бўйича фигуранинг ҳақиқий шакли ва ўлчамларини аниқлаш қийин ва ноқулай. Шунинг учун бу усулдан кўпгина йирик иншоотларнинг умумий кўринишларини тасвирлашда фойдаланилади. Марказий проекциялаш усули билан ясалган тасвир перспектива ва бу усул билан шуғулланувчи фан ҳам перспектива деб аталади ва у чизма геометриянинг махсус бўлимидан бири ҳисобланади.

2. Параллел проекциялаш.

Параллел проекциялашни марказий проекциялашнинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин. Бунда, проекциялаш маркази S бирор $M'N'$ тўғри чизиқ йўналиши бўйича ҳаракатланиб, проекциялар текислигидан чексиз узоқлашган деб фараз қиламиз (78-чизма). Бу ерда $M'N'$ чизиқ *проекциялаш йўналиши* дейилади.



78- чизма

Фазода олинган бирор F' фигурани α текисликка проекциялаш учун F' фигуранинг ҳар бир нуқтаси орқали $M'N'$ йўналишга параллел қилиб проекцияловчи тўғри чизиқларни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг α текислик билан кесишган F_0 нуқталар тўплами F' фигуранинг α текислигидаги параллел проекцияси деб аталади. Агар F_0 фигурани ўхшаш алмаштирсак, F' фигуранинг α текисликдаги F тасвири ҳосил бўлади.

Параллел проекциянинг кўриниши ва ўлчамларининг ўзгариши фақат проекциялар текислигининг проекциялаш йўналишига нисбатан қандай жойланишига боғлиқ. Проекцияловчи тўғри чизиқларнинг проекциялар текислигига нисбатан қандай йўналишда бўлишига қараб, параллел проекциялаш қийшиқ бурчакли ва тўғри бурчакли бўлади.

Агар проекциялаш йўналиши проекциялар текислиги билан ўткир бурчак ташкил қилса, бундай параллел проекциялаш қийшиқ бурчакли деб айтилади.

Агар проекциялаш йўналиши проекциялар текислиги билан тўғри бурчак ташкил қилса, бундай параллел проекциялаш тўғри бурчакли ёки ортогонал проекциялаш дейилади. Бундай проекциялашда проекциялаш йўналиши кўрсатилмайди, чунки бир нуқтадан текисликка фақат битта перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

Фигуранинг параллел проекциялашдаги тасвири асосан қуйидагича ҳосил қилинади:

1) берилган фазовий фигуранинг барча нуқталари берилган йўналишда α текисликка проекцияланади;

2) проекция текислигида ҳосил қилинган фигура ўхшаш алмаштирилади.

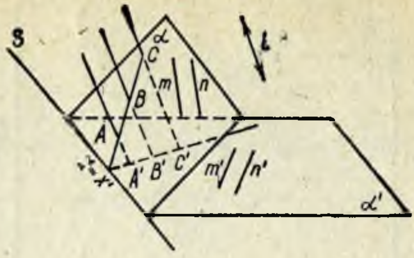
Бу икки қадамни бажаргандан кейин берилган фазовий фигуранинг тасвири ҳосил этилади. Бундан кўриниадики, тасвирдаги ҳар бир нуқта умуман олганда, оригиналдаги мос нуқтанинг проекцияси бўлмайди. Иккинчи қадам бизга керакли ўлчамлардаги чизмани ҳосил қилишга имкон беради. Баъзи ҳолларда иккинчи қадамни бажаришга зарурият туғилмайди, у ҳолда F' фигуранинг α текисликдаги проекцияси унинг тасвири бўлади. Умуман айтганда, иккинчи қадам ишнинг моҳиятини ўзгартмайди.

Педагогик процессда қўлланиладиган тасвирларга қуйидаги талаблар қўйилади:

1) тасвир оригиналнинг бирор проекциясига ўхшаш;
2) тасвир кўргазмали;
3) тасвир эркин бажариладиган бўлиши керак.

Параллел проекциялаш усули билан ҳосил қилинган тасвир тўғри, яъни оригиналга муносиб ва етарлича кўргазмалидир. Бундай тасвир, марказий проекциялаш усули билан ҳосил қилинган тасвирга нисбатан соддароқ ясалади. Шунинг учун мактабда ўқитиладиган геометрия курси бўйича тасвирни ясашда параллел проекциялаш усулидан фойдаланилади.

3. Икки текисликнинг перспектив-аффин мослиги.



79-чизма

s тўғри чизиқ бўйича кесишувчи иккита α', α текисликлар ва бу текисликларни кесувчи l йўналиш берилган бўлсин. Параллел проекциялаш усули билан α', α текисликлар нуқталари орасида бир қийматли мослик ўрнатамиз (79-чизма). Бундай мосликни перспектив-аффин мослиги ёки жинсдош мослик дейилади. Бу мосликда ихтиёрий иккита мос A', A нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқлар l йўналишга параллел бўлади.

Энди перспектив-аффин мослигининг хоссалари билан танишиб чиқайлик. (Буни параллел проекциялаш хоссалари деб ҳам юритилади.)

Аввало, иккита текисликнинг кесишган чизиғининг ҳар бир нуқтаси бундай мосликда ўз-ўзига ўтишини эслатиб ўтишимиз лозим.

1. Перспектив-аффин мослигида коллинеар нуқталар яна коллинеар нуқталарга ўтади.

Агар A нуқта a тўғри чизиқда ётса, бу нуқта ва шу тўғри чизиқ бир-бирига *инцидент* дейилади. Нуқта ва текисликнинг, тўғри чизиқ ва текисликнинг инцидентлиги шунга ўхшаш аниқланади.

2. Перспектив-аффин мослигида нуқта ва тўғри чизиқнинг инцидентлиги сақланади.

3. Перспектив-аффин мослигида параллел тўғри чизиқлар яна параллел тўғри чизиқларга ўтади (79-чизма.)

4. Перспектив-аффин мосликда учта нуқтанинг оддий нисбати сақланади.

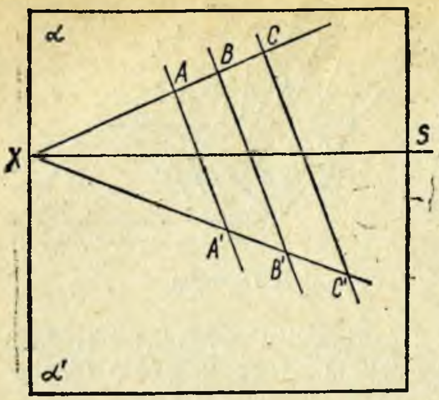
Ҳақиқатан ҳам, α текисликдаги коллинеар учта A, B, C нуқтага α' текисликда A', B', C' нуқталар мос келади. AA', BB', CC' проекцияловчи тўғри чизиқлар параллел, шунинг учун ушбу тенгликни ёза оламиз

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'}, \quad (ABC) = (A'B'C').$$

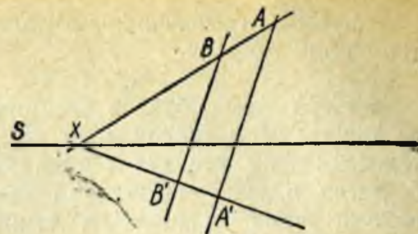
4. Текисликдаги перспектив-аффин алмаштириш.

Текисликлардан бирини s тўғри чизиқ атрофида айлантирайлик, айланаётган текислик қандай вазиятда бўлишидан қатъи назар проекцияловчи AA', BB', CC' тўғри чизиқлар параллеллигича қолаверади. Жумладан α, α' текисликлар устма-уст тушган ҳолда ҳам (80-чизма). Бу ҳолда α текисликни α' текисликка перспектив акслаитиришни битта $\alpha = \alpha'$ текислик нуқталарини ўз-ўзига акслантириш деб қараш мумкин. Бундай перспектив-аффин аксланитиришни перспектив-аффин алмаштириш деб айтилади. s тўғри чизиқни алмаштириш ўқи деб юритилади. Бу ҳол тасвирлаш методларини ўрганишда муҳим аҳамиятга эга.

Текисликни перспектив-аффин алмаштириш бир жуфт мос (A, A') нуқталарнинг ва s ўқнинг берилиши билан тўла аниқланади.



80- чизма



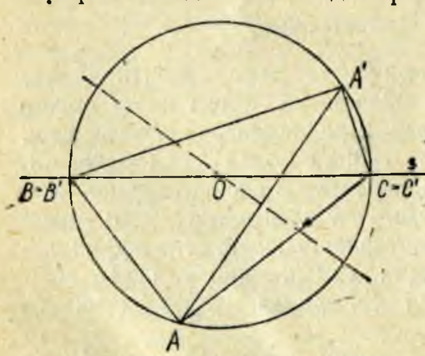
81- чизма

Ҳақиқатан ҳам, бизга бир жуфт (A, A') нуқталар ва s ўқ берилган бўлсин $(A \notin s, A' \notin s)$. У ҳолда текисликка қарашли ихтиёрий B нуқтанинг образини ясашимиз мумкин (81- чизма). Бунинг учун AB тўғри чизиқни ўтказиб, унинг s тўғри чизиқ билан кесишган нуқтасини X билан белгилайлик, AX тўғри чизиқнинг образи $A'X$ тўғри чизиқдир. Изланган нуқта $A'X$ тўғри чизиқда ва B нуқта орқали AA' тўғри чизиғига параллел қилиб ўтказилган g тўғри чизиқда ётиши шарт. Демак, B нуқтага жинсдош B' нуқта g тўғри чизиқ билан $A'X$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси бўлади. Иккита жинсдош фигуралардан ҳар бирини иккинчисидан параллел проекциялаш усули билан ҳосил қилинган деб қараш мумкин.

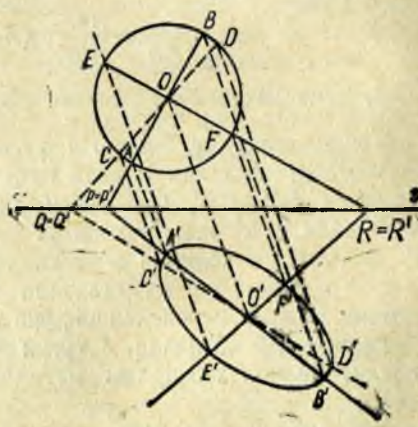
5. Перспектив-аффин мосликнинг бош йўналишлари.

Теорема. Текисликнинг ҳар бир нуқтаси орқали ўзаро перпендикуляр бўлган фақат бир жуфт шуидай тўғри чизиқлар ўтадики, уларга жинсдош бўлган тўғри чизиқлар ҳам ўзаро перпендикуляр бўлади.

Исбот. Жинсдош мослик s ўқ ва бир жуфт A, A' нуқталарнинг берилиши билан аниқланган бўлсин. Перпендикуляр AB, AC тўғри чизиқларга жинсдош мосликда перпен-



82- чизма



83- чизма

дикуляр $A'B'$, $A'C'$ тўғри чизиқлар мос келсин (82-чизма). $ABA'C$ тўртбурчакнинг қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси $2d$ га тенг бўлгани учун бу тўртбурчак ташқарисига диаметри $BC = B'C'$ кесмадан иборат айлана чизиш мумкин. Айлананинг маркази AA' кесманинг ўрта перпендикуляри билан s ўқнинг кесишган $O = O'$ нуқтаси бўлади, радиуси $r = OA$ тенг. Бу айланани чизиб, унинг s ўқ билан кесишган $B = B'$ ва $C = C'$ нуқталарини топамиз. Перпендикуляр AB, AC тўғри чизиқларга жинсдош $A'B'$, $A'C'$ тўғри чизиқлар ҳам ўзаро перпендикуляр бўлади.

AB, AC ва $A'B'$, $A'C'$ тўғри чизиқларнинг йўналишини жинсдош мосликнинг бош йўналишлари дейилади.

6. Эллипс—айланага жинсдош фигура. Эллипснинг хоссалари ва уни ясаш.

Жинсдош мослик s ўқ ва бир жуфт мос A, A' нуқталарнинг берилиши билан аниқланган бўлсин. Маркази O нуқтада ва A нуқта орқали ўтадиган айлана чизиб (83-чизма), унга жинсдош фигурани ясайлик. OA тўғри чизиқ s ўқ билан $P = P'$ нуқтада, айлана билан A дан бошқа B нуқтада кесишади. B нуқтага жинсдош B' нуқта $P'A'$ тўғри чизиқ билан B нуқтадан AA' йўналишига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқда ётади. O нуқтага O' нуқта жинсдош.

O нуқта орқали айлананинг ҳар хил диаметрларини ўтказамиз. Масалан CD, EF ва ҳоказо, айланада ётувчи нуқталарга керагича жинсдош бўлган нуқталарни ясаш мумкин. Масалан, C', D', E', F' ва ҳоказо. Шундай қилиб, айланага жинсдош фигурани ясаймиз. Иккита жинсдош фигуралардан бирини иккинчисининг параллел проекцияси деб олиш мумкин. Айланаии проекцияловчи тўғри чизиқлар тўплами қандайдир оғма цилиндрни ҳосил қилади. Бу цилиндрни бирор текислик билан кессак, айланага жинсдош фигура ҳосил бўлади. Маълумки, йўналтирувчи эгри чизиғи айланадан иборат бўлган цилиндрик сиртни текислик билан кессак, кесимда эллипс ёки айлана ҳосил қилинади. Агар цилиндрик сиртни кесувчи текислик айлана ётган текисликка параллел бўлса, кесим айлаиадан иборат бўлади. Бу ҳолни қараймиз.

Демак, айланага жинсдош фигура эллипсдан иборат.

Жинсдош мослик хоссаларидан фойдаланиб, айлана хоссаларидан эллипс хоссаларини келтириб чиқариш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам:

а) маълумки, айлана маркази AB диаметрни тенг иккига бўлади. Жинсдош мосликнинг 4-хоссасига кўра:

$$\frac{A'O'}{O'B'} = \frac{AO}{OB} = 1,$$

яъни O' нуқта эллипснинг $A'B'$ ватарини тенг иккига бўлади. Айлананинг барча диаметрлари O нуқтада тенг иккига бўлинади, демак, эллипснинг ҳам O' нуқтадан ўтувчи барча ватарлари тенг иккига бўлинади. O нуқтани эллипс маркази, бу нуқта орқали ўтувчи барча ватарларни эллипс диаметрлари дейилади;

б) айлананинг параллел ватарларига эллипснинг ҳам параллел ватарлари мос келади. Агар AB ва EF—айлананинг ўзаро перпендикуляр диаметрлари бўлса, уларнинг ҳар бири иккинчисига параллел бўлган ватарларни теиг иккига бўлади. Жинсдош мослик хоссасига асосан, эллипснинг ҳар бир $A'B'$ ва $E'F'$ диаметрлари иккинчисига параллел бўлган ватарларни тенг иккига бўлади. Эллипснииг бундай диаметрлари *қўшма диаметрлар* дейилади;

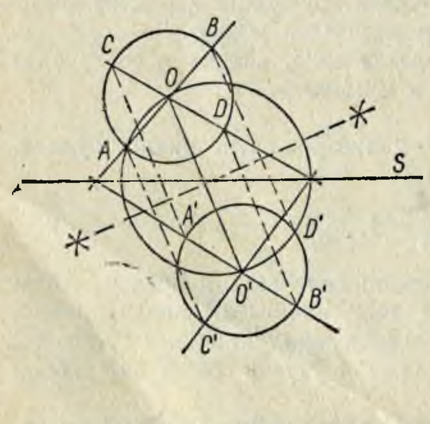
в) ҳар бир эллипс бир жуфт ўзаро перпендикуляр қўшма диаметрга эга. Ҳақиқатан ҳам, O марказли айлана ва унга жинсдош O' марказли эллипс берилган бўлсин. O, O' иуқталар жинсдош мос нуқталар. Бу нуқталардаги жинсдош мосликнинг бош йўналишларини ясаймиз. Ясалган тўғри чизиқлар айлананинг ўзаро перпендикуляр диаметрлари ва эллипснинг ўзаро перпендикуляр ва қўшма диаметрлари бўлади (84-чизма). 5-п. даги теоремага кўра, эллипс ҳам перпендикуляр, ҳам қўшма бўлгаи бир жуфт диаметрга эга бўлади. Бу диаметрларнинг ҳар бири иккинчисига параллел бўлган ватарларни тенг иккига бўлади. Шундай қилиб, эллипснинг бундай диаметрлари эллипснинг симметрия ўқларидир. Эллипс ўқларининг эллипс билан кесишган A', B', C', D' нуқталари эллипснинг учларидир.

Айлананинг бирор K нуқтасига ўтказилган t уринма тўғри чизиққа эллипснииг K нуқтасига ўтказилган t' уринмага жинсдош мос бўлади.

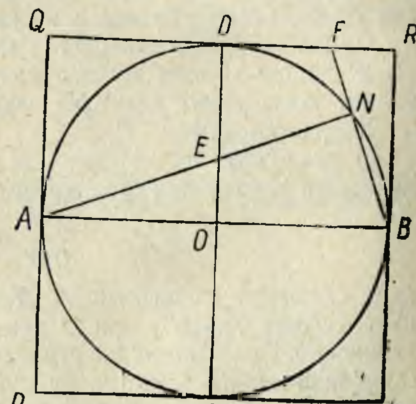
7. Қўшма диаметрларига кўра эллипс ясаш

Айлана ва унинг AB, CD перпендикуляр диаметрлари берилган бўлсин. Буларга жинсдош $A'B'$, $C'D'$ кесмалар айланага жинсдош бўлган эллипснинг қўшма диаметрларидир. Айлананинг A, B, C ва D нуқталарига ўтказилган уринмалар айланага ташқи чизилган $PQRS$ квадратии ҳосил қилади. Бу квадратга жинсдош фигура эллипсга ташқи чизилган $P'Q'R'S'$ параллелограммдан иборат.

Айланада ётувчи ихтиёрий N нуқтани олиб, AN, BN тўғри чизиқларни ясаймиз: $AN \cap CD = E$, $BN \cap QP = F$. AOE ва BFR тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан ($AO = BR$, $\angle EAO = \angle RBE$) OE, RF кесмалар тенг деган хулоса чиқади, бундан (85-чизма):



84- чизма



85- чизма

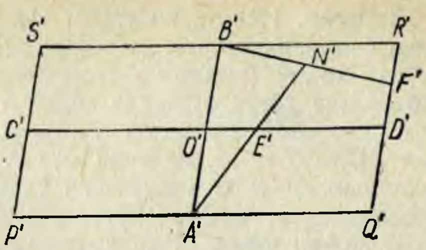
$$\frac{OE}{ED} = \frac{RF}{FD}.$$

4- хоссага кўра (86- чизма):

$$\frac{OE}{ED} = \frac{O'E'}{E'D'}, \frac{RF}{FD} = \frac{R'F'}{F'D'},$$

булардан:

$$\frac{O'E'}{E'D'} = \frac{R'F'}{F'D'}.$$



86- чизма

$A'E' \cap B'F' = N'$ нуқта N нуқтага жинсдош бўлади ва берилган айланага жинсдош бўлган эллипсда ётиши керак. Бундан эллипсни ясаш йўли ҳосил қилинади.

B' нуқта орқали параллелограмм томонини F' нуқтада кесадиган ихтиёрий тўғри чизиқ ўтказамиз. $O'D'$ ярим диаметрда

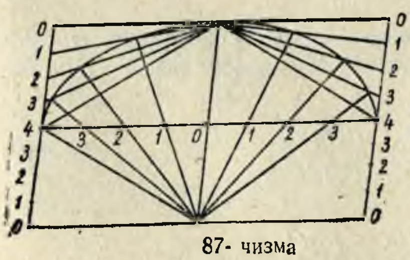
$$\frac{O'E'}{E'D'} = \frac{R'F'}{F'D'} \qquad (1)$$

шартни қаноатлантирувчи E' нуқтани ясаймиз. $B'F'$, $A'E'$ тўғри чизиқларни ўтказамиз, улар $B'F' \cap A'E' = N'$ нуқтада кесишади.

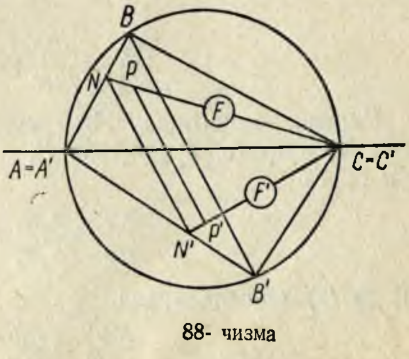
Қўшма диаметрларига кўра эллипснинг хоҳлаганча нуқталарини ясаш учун томонлари қўшма диаметр учларидан ўтувчи ва уларга параллел бўлган параллелограмм ясаймиз. Диаметрларидан бирини ва унга параллел бўлмаган параллелограмм томонларини жуфт сондаги тенг бўлакларга бўламиз. 87- чизмада кўрсатилгандек номерлаб чиқиб, диаметрнинг битта учидан диаметрда номерланган нуқталарни, иккинчи учидан параллелограмм томонларида номерланган нуқталарни проекциялаймиз, бир хил номерлар—проекцияловчи чизиқларнинг кесишган нуқталари эллипс нуқталари бўлади, чунки бундай нуқталар учун (1) шарт бажарилади.

8. Жинсдош фигуралар ва ортогонал проекциялар.

Агар параллел проекциялаш йўналиши проекциялар текислигига ортогонал бўлса, берилган фигура проекциясини унинг ортогонал проекцияси дейилади.



87- чизма



88- чизма

Теорема. Иккита жинсдош фигуранинг ҳар бири иккинчисига ўхшаш фигуранинг ортогонал проекцияси бўлади.

Исботи. Аввало бу теоремани умумий $AC = A'C'$ гипотенузага эга бўлган тўғри бурчакли ABC, $A'B'C'$ учбурчаклар учун исботлайлик (88- чизма). Бу ҳолда учбурчаклар жинсдош бўлиб, жинсдошлик ўқи $AC = A'C'$ ва жинсдош мос нуқталар B, B' дан иборат. Биз $A'B'C'$ учбурчакнинг ABC учбурчакка ўхшаш бўлган учбурчакнинг ортогонал проекцияси эканлигини кўрсатайлик.

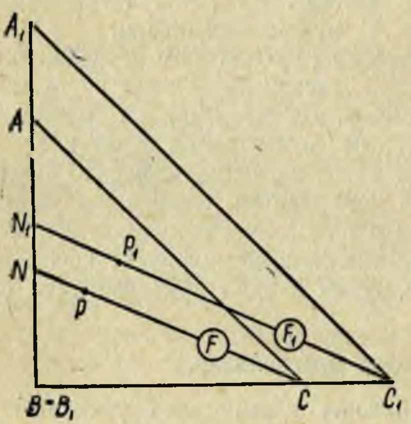
Берилган учбурчаклар умумий гипотенузага эга, шунинг учун

$$AB^2 + BC^2 = A'B'^2 + B'C'^2$$

муносабатни ёза оламиз.

$AB < A'B'$ шартда $BC > B'C'$ ва аксинча. $AB < A'B'$ бўлсин. ABC учбурчакка ўхшаш шундай $A_1B_1C_1$ учбурчак олайликки, $A_1B_1 = A'B'$ бўлсин (89- чизма). $(A_1B_1C_1)$ текислик $(A'B'C')$ текислик билан (90- чизма)

$$\cos\varphi = \frac{B'C'}{B_1C_1}$$



89- чизма

шартни қаноатлантирувчи φ бурчак ташкил қилсин. Бу ҳолда C_1C' тўғри чизиқ $(A'B'C')$ текисликка перпендикуляр ва $A'B'C'$ учбурчак $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг ортогонал проекцияси бўлади.

Энди биз F фигурага жинсдош ихтиёрий F' фигуранинг F фигурага ўхшаш бўлган F_1 фигуранинг ортогонал проекцияси эканлигини исботлаймиз. $P \in F$ ва $P' \in F'$ нуқталар бир жуфт жинсдош нуқталар бўлсин (88- чизма), у ҳолда PC ва $P'C'$ тўғри чизиқлар ҳам жинсдош. Бу тўғри чизиқларнинг $AB, A'B'$ катетлар билан кесишган N, N' нуқталари ҳам жинсдош. Жинсдош мосликнинг 4- хоссасига асосан:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{A'N'}{N'B'} \text{ ва } \frac{CP}{PN} = \frac{C'P'}{P'N'}. \tag{1}$$

Ўхшаш алмаштириш ABC учбурчакни $A_1B_1C_1$ учбурчакка, N нуқтани N_1 нуқтага, P нуқтани P_1 нуқтага ўтказади (89- чизма). Шу билан бирга

$$\frac{AN}{NB} = \frac{A_1N_1}{N_1B_1} \text{ ва } \frac{CP}{PN} = \frac{C_1P_1}{P_1N_1}. \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгликлардан:

$$\frac{A'N'}{N'B'} = \frac{A_1N_1}{N_1B_1}, \quad \frac{C'P'}{P'N'} = \frac{C_1P_1}{P_1N_1}.$$

Биринчи пропорциядан ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{A'N' + N'B'}{N'B'} = \frac{A_1N_1 + N_1B_1}{N_1B_1} \text{ ёки } \frac{A'B'}{N'B'} = \frac{A_1B_1}{N_1B_1}.$$

$A'B' = A_1B_1$ бўлгани учун: $N'B' = N_1B_1$, демак, N_1 нуқта N' нуқта билан устма-уст тушади (90-чизма).

$$\frac{C'P'}{P'N'} = \frac{C_1P_1}{P_1N_1}$$

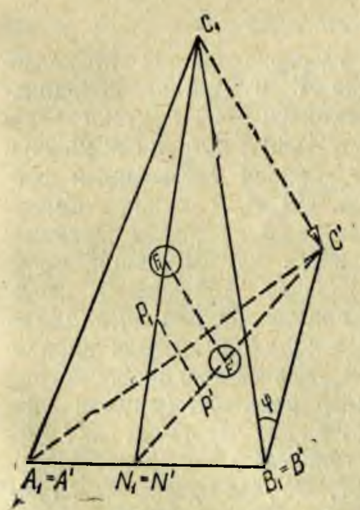
муносабатга асосан PP' тўғри чизиқнинг C_1C' тўғри чизиққа параллел эканлиги келиб чиқади. Демак P' нуқта P_1 нуқтанинг ортогонал проекцияси экан.

Ўхшаш алмаштириш F фигурани F_1 фигурага ўтказади. $P'\in F'$ ва $P_1\in F_1$ нуқталар қандай хоссага эга бўлса, F' ва F_1 фигураларнинг ҳар бир жуфт мос нуқталари ҳам шундай хоссага эга.

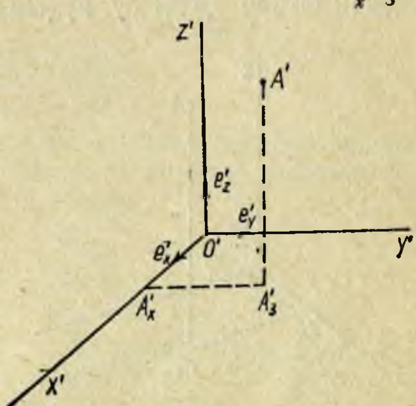
Шундай қилиб, F' фигура F фигурага ўхшаш F_1 фигуранинг ортогонал проекцияси бўлади.

44-§. Аксонометрия. Польке-Шварц теоремаси

Параллел проекциялаш усули билан фазодаги F фигуранинг кўргазмали проекциясини (тасвирини) ҳосил қилиш учун унинг билан чамбарчас боғланган тўғри бурчакли декарт $O'X'Y'Z'$ системаси қаралади. Бирорта e' кесмани олиб, уни ўлчам бирлиги сифатида қабул қиламиз ва уни табиий масштаб бирлиги деб атаймиз. $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ ўқлардаги (олинган бирликдаги) масштаб бирликларини мос равишда e'_x, e'_y, e'_z лар билан белгилаймиз (91-чизма). F фигура ва $O'X'Y'Z'$ система берилган бўлсин. $A'\in F'$ нуқтадан $X'O'Y'$ координат текислигига перпендикуляр туширамиз, перпендикуляр асосини A'_3 билан белгилаб, бу нуқтадан $O'X'$ ўққа перпендикуляр ўтказамиз. Бу перпендикуляр $O'X'$ ўқ билан A'_x нуқтада кесишади. Ҳосил қилинган $O'A'_xA'_3A'$



90-чизма



91-чизма

синиқ чизиқни A' нуқтанинг координат синиқ чизиғи дейилади. Бу синиқ чизиқнинг бўғинлари координата ўқларига параллел $A'_xA'_3 \| O'У'$, $A'_3A \| O'Z'$. $O'A'_x$ кесма эса $O'X'$ ўқда ётади.

Синиқ чизиқнинг ҳар бир бўғинини табиий бирлик билан ўлчаб,

$$\frac{O'A'_x}{e'_x}=x, \frac{A'_xA'_3}{e'_y}=y, \frac{A'_3A'}{e'_x}=z$$

нисбатларни ҳосил қиламиз. Бу сонлар A' нуқтанинг координаталари дейилади ва $A'(x,y,z)$ кўринишда ёзилади.

Демак, F' фигуранинг ҳар бир нуқтаси маълум координаталарга эга.

Энди биз F' фигурани $O'X'У'Z'$ система билан биргаликда l йўналиш бўйича α текисликка параллел проекциялайлик.

У ҳолда $O'X', O'У', O'Z'$ координат ўқлари мос равишда $OX, OУ, OZ$ тўғри чизиқларга, бирлик e'_x, e'_y, e'_z кесмалар e_x, e_y, e_z кесмаларга, A' нуқта A нуқтага, $O'A'_xA'_3A'$ координат синиқ чизиқ OA_xA_3A синиқ чизиққа проекцияланади (92-чизма). Учта

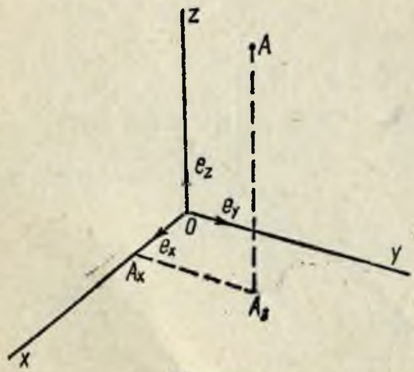
$$p=\frac{e_x}{e'_x}, q=\frac{e_y}{e'_y}, r=\frac{e_z}{e'_z}$$

сон координат ўқларидаги *ўзгариш коэффициентлари* дейилади.

Агар e_x, e_y, e_z кесмаларни $OX, OУ, OZ$ тўғри чизиқлардаги масштаб бирликлари деб олсак, параллел проекциялаш хоссасига асосан ушбу тенгликларга эга бўламиз:

$$\frac{OA_x}{e_x}=\frac{O'A'_x}{e'_x}=x, \quad \frac{A_xA_3}{e_y}=\frac{A'_xA'_3}{e'_y}=y, \quad \frac{A_3A}{e_z}=\frac{A'_3A'}{e'_z}=z.$$

Демак, агар координат ўқларининг ва улардаги бирлик кесмаларнинг проекциялари берилган бўлса, у ҳолда A' нуқтанинг координаталарини билган ҳолда бу нуқтанинг проекцияси — A нуқтани ясаш мумкин. Яъни A нуқтани ясаш учун e_x, e_y, e_z бирлик кесмалардан фойдаланиб, OA_xA_3A синиқ чизиқни ясаймиз. Фазодаги фигура проекциясини фигура нуқталарининг координаталаридан фойдалаиб ясашни *аксонометрия* ёки *аксонометрик проекциялаш методи* дейилади. e_x, e_y, e_z кесмалар аксонометрик бирликлар дейилади (умуман айтганда бу бирликлар ҳамма вақт бир-бирига тенг эмас), координат ўқларнинг OX, $OУ$, OZ проекциялари аксонометрик ўқлар дейилади.



92- чизма

Фақат A^* нуқтанинг аксонометрик A проекциясининг берилиши билан OA_xA_3A координат синиқ чизиқни аниқлаб бўлмайди, чунки проекцияловчи $A'A$ тўғри чизиқнинг барча нуқталари умумий аксонометрик проекцияга эга. A' нуқта координат синиқ чизиғининг аксонометрик проекциясини тўла аниқлаш учун A нуқтадан ташқари A_3 нуқта ҳам маълум бўлиши керак. Бу ерда A_3 нуқта A' нуқтадан $X'O'У'$ текисликка туширилган перпендикуляр асоси A_3' нуқтанинг аксонометрик проекцияси. Бу нуқта A нуқтанинг иккинчи проекцияси дейилади. Проекция текислигида A_1, A_3 нуқталарнинг берилиши билан A' нуқтанинг фазодаги вазияти бирдан-бир аниқланади. Агар проекциялар текислигида, ихтиёрий A' нуқтанинг, биринчи ва иккинчи проекциялари A, A_3 берилган бўлса, ихтиёрий нуқта проекция текислигида берилган дейилади ва A/A_3(ёки $A(A_0)$ кўринишда ёзилади.

Аксонометрия ўқлари ва аксонометрик бирикмаларнинг табиий координаталари системасига ва проекциялаш йўналишига қандай боғлиқ бўлиш масаласи аксонометриянинг асосий масаласи ҳисобланади. Бу масалани Берлин қурилиш академиясининг профессори Польке томонидан ҳал қилинди. Польке ишини 1864 йил унинг шогирди Шварц умумлаштирди.

Лемма. Агар $ABCD$, $A'B'C'D'$ тўртбурчакларнинг диагоналлари кесишган N, N' нуқталар

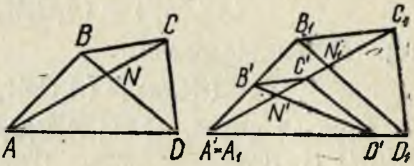
$$(ACN) = (A'C'N'), (BDN) = (B'D'N') \qquad (1)$$

шартларни қаноатлантирса, у ҳолда ҳар бир тўртбурчак иккинчисига ўхшаш тўртбурчакнинг ортогонал проекцияси бўлади.

Исботи. Леммада таъкидланган N, N' нуқталар (1) шартларни қаноатлантирсин, яъни

$$\frac{AN}{NC} = \frac{A'N'}{N'C'}, \quad \frac{BN}{ND} = \frac{B'N'}{N'D'} \qquad (2)$$

бўлсин. $A'B'C'D'$ тўртбурчакка ўхшаш шундай $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакни ясайликки, $AD = A_1D_1$ бўлсин (93-чизма). Бу тўртбурчакларнинг ўхшашлигидан:



93- чизма

$$\frac{A_1N_1}{N_1C_1} = \frac{A'N'}{N'C'}, \quad \frac{B_1N_1}{N_1D_1} = \frac{B'N'}{N'D'} \qquad (3)$$

$A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчак $ABCD$ тўртбурчакка нисбатан шундай жойлашганки, A_1D_1 томон AD томон билан устма-уст тушган (94-чизма). (2), (3) муносабатлардан қуйидагиларни ёза оламиз:

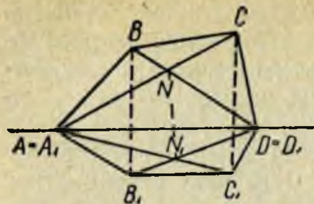
$$\frac{AN}{NC} = \frac{A_1N_1}{N_1C_1}, \quad \frac{BN}{ND} = \frac{B_1N_1}{N_1D_1}.$$

Булардан $NN_1 || CC_1$ ва $NN_1 || BB_1$.

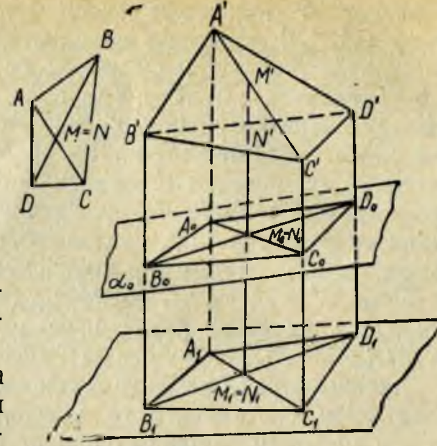
Демак, жинсдошлик ўқи $AD = A_1D_1$ ва бир жуфт мос N, N_1 нуқталари билан аниқланган жинсдошлик мослигига кўра $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчаклар жинсдошдир (43-§, $8 = n$. даги теоремага кўра).

Польке-Шварц теоремаси. Ҳар қандай тўлиқ тўртбурчакни ихтиёрий

2вар 1 савол



94- чизма



95- чизма

тетраэдрга ўхшаш тетраэдрнинг параллел проекцияси деб қараш мумкин.

Исботи. $A'B'C'D'$ тетраэдр ва $ABCD$ тўлиқ тўртбурчак берилган бўлсин. Тўлиқ тўртбурчак диагоналларининг кесишган нуқталарини $AC \cap BD = M\,(N)$ билан белгилайлик. Тетраэдрнинг $A'C'$ ва $B'D'$ қирраларини (95- чизма)

$$(ACM) = (A'C'M') \text{ ва } (BDN) = (B'D'N') \qquad (4)$$

нисбатда бўлувчи M', N' нуқталарни оламиз.

$A'B'C'D'$ тетраэдрни $M'N'$ йўналишда α_1 текисликка ортогонал проекциялаб, тетраэдрнинг α_1 текисликдаги проекцияси бўлган тўлиқ $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакни ҳосил қиламиз. Проекцияловчи $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1'$, $D'D_1$ тўғри чизиқлар проекцияловчи призмани ҳосил қилади. Параллел проекциялаш хоссасига кўра

$$(A'C'M') = (A_1C_1M_1), \; (B'D'N') = (B_1D_1N_1). \qquad (5)$$

(4), (5) тенгликлардан

$$(ACM) = (A_1C_1M_1), \; (B_1D_1N_1) = (BDN).$$

Шундай қилиб, тўлиқ $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчак, леммага асосан, тўлиқ $ABCD$ тўртбурчакка ўхшаш тўртбурчакнинг ортогонал проекцияси бўлади.

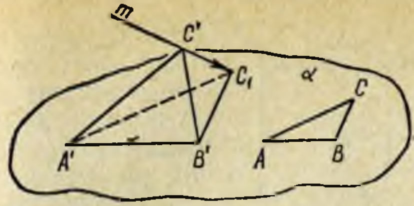
Ҳақиқатан ҳам, призмани доим шуидай α_0 текислик билан кесиш мумкинки, кесимда ҳосил бўлган тўлиқ $A_0B_0C_0D_0$ тўртбурчак тўлиқ $ABCD$ тўртбурчакка ўхшаш бўлади.

$A'B'C'D'$ тетраэдрни унинг проекцияловчи тўғри чизиқлари билан бирга ҳамма вақт шундай ўхшаш алмаштириш мумкинки, ҳосил бўлган янги тетраэдрнинг проекцияси тўлиқ $ABCD$ тўртбурчакка тенг бўлади.

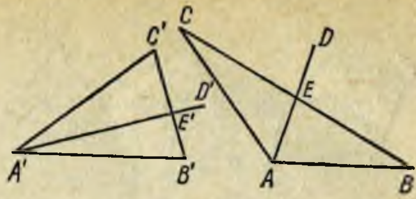
45- §. Ясси ва фазовий фигуралар тасвирини ясаш

1. Параллел проекциялаш усулидан фойдаланиб, баъзи бир геометрик фигураларнинг тасвирини ясаш масаласини кўрайлик. Ясси фигураларни тасвирлаш қуйидаги икки теоремага асосланади.

1- теорема. Ҳар қандай учбурчакнинг параллел проекцияси олдиндан берилган ихтиёрий учбурчакка ўхшаш бўлади.



96- чизма



97- чизма

Исботи. $A'B'C'$ учбурчак берилган бўлсин. $A'B'$ томон орқали $A'B'C'$ текисликдан фарқли α текислик ўтказиб, бу текисликда ётувчи ихтиёрий ABC учбурчакни оламиз (96- чизма). α текисликда, $A'B'$ томондан фойдаланиб, ABC учбурчакка ўхшаш $A'B'C_1$ учбурчакни ясаймиз. Берилган $A'B'C'$ учбурчакни $C'C_1 = m$ йўналиши бўйича проекциялаб, $A'B'C_1$ учбурчакни ва бу учбурчакни ўхшаш алмаштириб, ABC учбурчакни ҳосил қиламиз.

2- теорема. Параллел проекциялашда $A'B'C'$ учбурчакнинг проекцияси берилган бўлса, бу учбурчак ётган текисликнинг ҳар бир нуқтасининг проекцияси бир қийматли аниқланади.

Исботи. $\triangle A'B'C'$ — оригинал, $\triangle ABC$ — унинг проекцияси бўлсин (97- чизма). $A'B'C'$ учбурчак текислигидан ихтиёрий D' нуқтани олиб, учбурчакнинг ихтиёрий учи билан бирлаштирамиз, масалан, A' учи билан. $A'D'$ кесма $B'C'$ билан E' нуқтада кесишсин деб олайлик, улар параллел бўлиб қолиши ҳам мумкин. 1 — 4- асосий хоссалардан фойдаланиб, E' нуқтанинг проекциясини ясаш мумкин: E нуқта BC кесмада ётиб, бу кесмани

$$\frac{B'E'}{E'C'} = \frac{BE}{EC}$$

нисбатда, яъни $B'C'$ кесмани E' нуқта қандай нисбатда бўлса, BC кесмани E нуқта шундай нисбатда бўлади. D нуқта AE тўғри чизиқда ётиши керак. Унинг тўғри чизиқдаги вазияти

$$\frac{A'D'}{D'E'} = \frac{AD}{DE}$$

пропорция ёрдамида аниқланади.

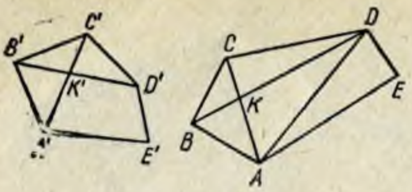
$A'D' \parallel B'C'$ бўлганда $AD \parallel BC$, яъни

$$\frac{AD}{BC} = \frac{A'D'}{B'C'}$$

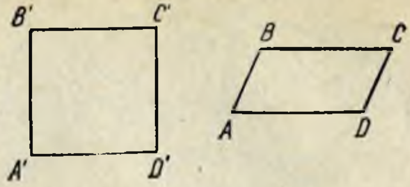
бўлади.

Исбот қилинган теоремаларга асосан ясси фигураларнинг тасвирларини амалий ясаш усулини қўлга киритамиз.

Табиий (натурал) F' фигурага тегишли бир тўғри чизиқда ётмайдиган, базис нуқталар деб аталувчи ихтиёрий учта нуқтани олиб, α текисликка (бу текислик проекциялар текислиги ёки расм текислиги деб ҳам аталади) параллел проекцияланади. Кейин бу нуқталарни ўхшаш алмаштириб, уларнинг тасвирлари ҳосил қилинади (баъзи ҳолларда



98- чизма



99- чизма

ўхшаш алмаштиришга ўрин қолмайди); ҳосил қилинган нуқталарни проекциялар текислигидаги, яъни расм текислигидаги базис нуқталар дейилади. Базис нуқталар воситасида аниқланган учбурчакни базис учбурчак дейилади.

Шундай қилиб, ясси фигураларнинг тасвирларини ясашни қуйидаги уч босқичга ажратишимиз мумкин.

1. Берилган табиий фигура хаёлан тасаввур қилинади ёки ҳеч қандай ўзгаришсиз чизиб қўйилади. Кейин фигуранинг тасвирини ясаш учун етарли хоссалари ажратилади.

2. Берилган фигурадан базис учбурчак ажратиб, ихтиёрий учбурчакка тасвирланади.

3. Берилган фигуранинг қолган элементлари 1—4- хоссаларга асосан ясалади.

2. Ясси фигураларнинг тасвирларини ясашга доир мисоллар.

1- м и с о л. Ихтиёрий бешбурчакнинг тасвирини ясанг.

$A'B'C'D'E'$ бешбурчак берилган бўлсин (98- чизма). Бешбурчакнинг ихтиёрий учта A', B', C' нуқталари базис нуқталар бўлсин. Бу нуқталарнинг тасвири сифатида расм текислигидаги ихтиёрий учта (бир тўғри чизиқда ётмайдиган) нуқталарни оламиз. AB, BC кесмалар бешбурчакнинг $A'B', B'C'$ томонларининг тасвирлари, D' нуқтанинг тасвирини ясаш учун бешбурчакнинг $A'C, B'D'$ диагоналларини ўтказиб, кесишган нуқтасини K' билан белгилаймиз, AC кесма $A'C'$ диагоналнинг, K нуқта эса K' нуқтанинг тасвири. K нуқта AC кесмани

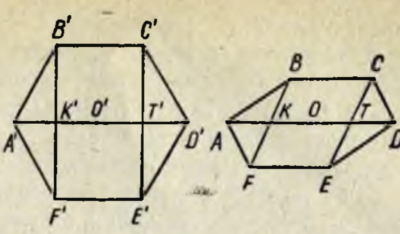
$$A'K':K'C' = AK:KC$$

нисбатда бўлади. B, K нуқталар D' нуқтанинг тасвири ётган тўғри чизиқни аниқлайди. D' нуқтанинг тасвирини ясаш учун BK нур устига K нуқтадан ўнг томонга маълум $B'K', K'D'$ ва BK кесмаларга тўртинчи пропорционал бўлган KD кесмани ўлчаб қўйиб, D нуқтани ясаймиз.

Юқоридаги муҳокамаларни юритиб, E' нуқтанинг тасвири E нуқтани ясаймиз. Ҳосил бўлган $ABCDE$ бешбурчак $A'B'C'D'E'$ бешбурчакнинг тасвири бўлади.

2- м и с о л. Квадрат, ромб, тўғри бурчакли тўртбурчак ва параллелограммнинг тасвирларини ясанг.

Базис нуқталарини эркин танлаб олиш ва 1 — 4- хоссаларга асосан, санаб ўтилган кўпбурчакларнинг тасвирларини ясашнинг осон усули мавжуд. Масалан, квадратнинг D', A' ва B' учларининг тасвири сифатида ихтиёрий учта D, A, B нуқталарни олиш мумкин. B ва D нуқталардан мос равишда AD, AB кесмаларга параллел тўғри чизиқлар ўтказиб C нуқтани топамиз. $ABCD$ параллелограмм $A'B'C'D'$ квадратнинг тасвири бўлади (99-чизма).



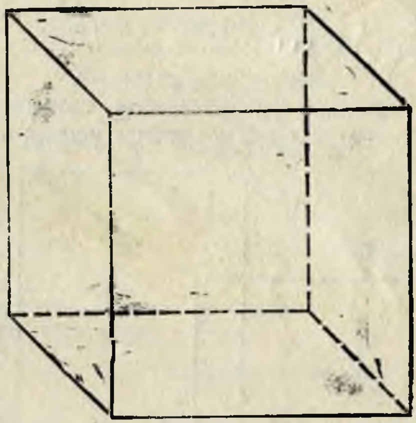
100- чизма

Худди шунга ўхшаш, ромб, тўғри бурчакли тўртбурчак ва параллелограммнинг тасвирларини ясаймиз.

Шундай қилиб, бу фигуралардан ҳар бирининг тасвири ихтиёрий параллелограммдан иборат бўлади.

3- м и с о л. Мунтазам олтибурчакнинг тасвирини ясанг.

Аввало мунтазам олтибурчакнинг аслини чизиб, тасвирини ясаш учун керак бўладиган хоссалари билан танишиб чиқамиз (100-чизма).



101- чизма

Олтибурчакнинг $B'F'$, $C'E'$ диагоналларини ўтказиб, $B'C'E'F'$ тўғри тўртбурчакни ҳосил қиламиз. $A'D'$ диагональ тўғри тўртбурчакнинг $B'F'$, $C'E'$ томонларини мос равишда K', T' нуқталарда тенг иккига бўлади. $K'T'$ кесманинг ўрта нуқтасини O' деб олсак:

$$A'K' = K'O' = O'T = T'D'.$$

Бу хоссалар олтибурчакнинг тасвирини ясаш учун етарлидир. Ҳақиқатан ҳам тўғри бурчакли $B'C'E'F'$ тўртбурчакнинг расм текислигидаги тасвирини ихтиёрий $BCEF$ параллелограммдан иборат деб олсак, K', T' нуқталарнинг тасвирлари 4-асосий хоссага асосан BF, CE томонларни тенг иккига бўлувчи K, T нуқталардан иборат. O' нуқта KT кесманинг ўрта нуқтаси O га тасвирланади. $\frac{KT}{2} = KO'$ кесмани KT тўғри чизиқ устига K нуқтадан чап томонга қўйиб, A нуқтани, T нуқтадан ўнг томонга қўйиб, D нуқтани (A' ва D' нуқталарнинг тасвирларини) топамиз.

3. Фазовий фигура тасвирини ясаш.

К у б н и н г т а с в и р и. Кубнинг бир учидан чиққан учта қирраси, Польке теоремасига асосан, бир нуқтадан чиққан учта кесмага тасвирланади. Бу учта кесмага асосан кубнинг тасвирини осон ясаш мумкин; шуни ҳам эътиборга олиш керакки, кубнинг ҳамма ёқлари квадратлардан иборат; улар параллелограммларга тасвирланади (101-чизма).

Ихтиёрий вазиятда берилган параллелепипеднинг бир учидан чиққан учта қиррасининг учларини бирлаштириб, қандайдир тетраэдр ҳосил қиламиз. Польке-Шварц теоремасига асосан, тетраэдр $ABCD$ тўлиқ тўртбурчакка тасвирланади. Параллелепипеднинг қолган қирраларини энди хоҳлаганча тасвирлаш мумкин эмас. 1 — 4-хоссалардан фойдаланиб параллелепипед тасвирини ясаймиз (102-чизма).

Пирамида тасвири. Пирамиданинг тасвирини ясаш учун асосининг тасвирини ясаб оламиз. Учининг тасвири ихтиёрий танлаб олинади (Польке-Шварц теоремаси) (103-чизма).

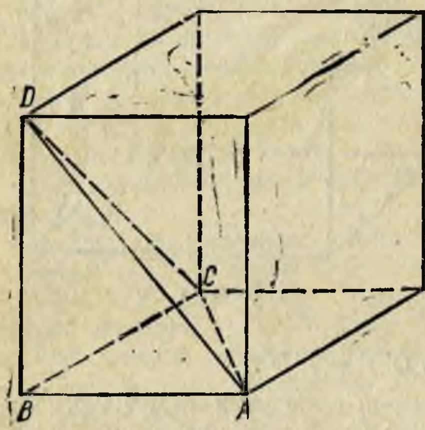
Доиравий конус. Доиравий конуснинг асоси эллипсга тасвирланади. Учининг тасвирини ихтиёрий танлаб олиб, бу нуқтада эллипсга иккита SA, SB уринма ўтказамиз. Уриниш нуқталари A, B диаметрал қарама-қарши нуқталар бўлмаслиги керак (104-чизма).

46-§. Позицион масала. Тўлиқ ва нотўлиқ тасвирлар

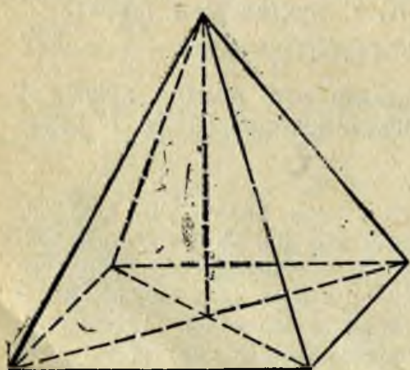
1. Асосий текислик усули.

Фазовий фигураларнинг тасвирини ясаш учун Н. Ф. Четверухин томонидан таклиф қилинган асосий текислик усули деб аталувчи методдан фойдаланамиз. Бу метод аксонометрик проекциялаш усулининг бир туридир. [20]

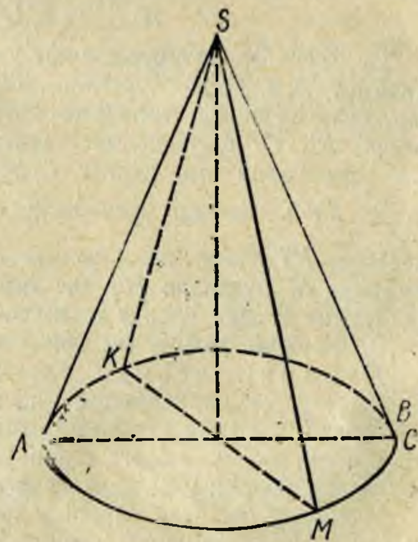
Бу метод билан танишиб чиқайлик. Фазода бирорта α' текисликни ажратиб, уни асосий текислик деб атаймиз. Бирор йўналишни танлаб олиб, A', B', C', . . . фазо нуқталарини α' текисликка параллел проекциялаб, α' текисликда A_1', B_1', C_1', . . . нуқталарни ҳосил қиламиз. Бу проекциялаш ички проек-



102- чизма



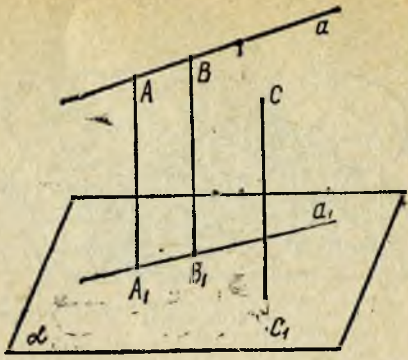
103- чизма



104- чизма

циялаш деб аталади (ички проекциялаш марказий проекциялаш ҳам бўлиши мумкин).

Кейин расм (тасвир) текислиги деб аталувчи текислик олиб, α' текисликни, A', B', C', . . . нуқталарни ва уларнинг A_1', B_1', C_1', . . . проекцияларини, $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1'$, . . . проекцияловчи тўғри чизиқларни бирор йўналиш бўйича бирор текисликка параллел проекциялаймиз.



105- чизма

Натижада, расм текислигида 105-чизмада кўрсатилганидек тасвирларга эга бўламиз. Бу ерда α текислик α' текисликнинг, A, B, B, . . . нуқталар A', B', C', . . . нуқталарнинг, A_1, B_1, C_1, . . . нуқталар A_1', B_1', C_1', . . . нуқталарнинг, AA_1, BB_1, CC_1, . . . тўғри чизиқлар проекцияловчи $A'A_1'$, $B'B_1'$, $C'C_1$, . . . тўғри чизиқларнинг тасвирларидир.

A_1, B_1, C_1, . . . нуқталарни A, B, C, . . . нуқталарнинг иккинчи проекциялари (тасвирлари) деб айтилади, баъзи ҳолларда A_1, B_1, C_1, . . . нуқталарни A, B, C, . . . нуқталарнинг асослари деб ҳам айтилади.

Агар фазодаги бирорта A' нуқтанинг расм текислигидаги тасвири A ва унинг иккинчи проекцияси A_1 берилса, нуқта расм текислигида берилган деб айтилади ва A (A_1) кўринишда ёзилади.

Фазода иккита нуқтаси билан аниқланган $A'B' = a'$ тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Агар расм текислигида A (A) ва B (B) $(AB = a,\ A_1B_1 = a_1)$ лар берилган бўлса, тўғри чизиқ расм текислигида берилган деб айтилади ва a (a_1) кўринишда ёзилади.

Ихтиёрий текислик бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта A', B', C' нуқталарнинг берилиши билан, ёки кесишадиган a', b' тўғри чизиқларнинг берилиши билан, ёки параллел p', q' тўғри чизиқларнинг берилиши билан аниқланади $(p' \neq q')$ (106-чизма).

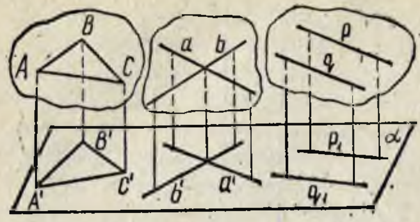
Агар текисликни аниқловчи элементларнинг расм текисликдаги тасвирлари ва иккинчи проекциялари берилган бўлса, текислик расм текислигида берилган дейилади ва β (β_1) кўринишда ёзилади.

Агар p' ва q' параллел бўлса, уларнинг p ва q тасвирлари ва иккинчи проекциялари p_1 ва q_1 ҳам параллел бўлади (106-чизма).

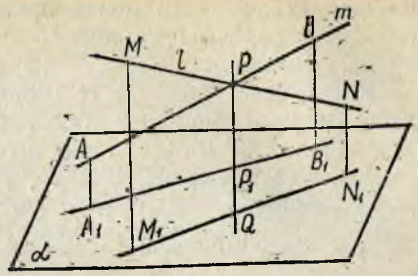
Агар a ва b тўғри чизиқлар кесишса, у ҳолда a, b ва q_1, b_1 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталари бир тўғри чизиқда ётади.

Агар l' ва m' тўғри чизиқлар айқаш бўлса, уларнинг тасвири 107-чизмада кўрсатилганидек бўлади.

2. Фазодаги F_1', F_2' фигураларнинг расм текислигида F_1, F_2 тасвирлари берилган бўлсин. F_1', F_2' фигураларнинг кесишиш нуқтасининг тасвирларини ясаш масаласи позицион масала деб айтилади. Бундай маса-



106- чизма



107- чизма

лалар асосий текислик усули ёки аксонометрик метод ёрдамида осон ечилади.

Агар фигуранинг ҳар бир нуқтаси расм текислигида берилган бўлса, у ҳолда бу фигура тасвирини *тўлиқ тасвир* деб айтилади. Акс ҳолда *нотўлиқ тасвир* дейилади.

Тўлиқ тасвир таърифидан қуйидаги натижалар келиб чиқади:

1) ясси фигураларнинг тасвири ҳамма вақт тўлиқ;

2) агар тасвирнинг ҳамма элементлари аниқланган бўлса, тасвир тўлиқ бўлади;

3) тўлиқ тасвирнинг ихтиёрий икки текислигини асосий текисликлар деб олиш мумкин.

Энди биз тўлиқ тасвирларда позицион масалаларни ечишга ўтайлик.

1-масала. AB тўғри чизиқнинг α текислик билан кесишган нуқтасини ясанг.

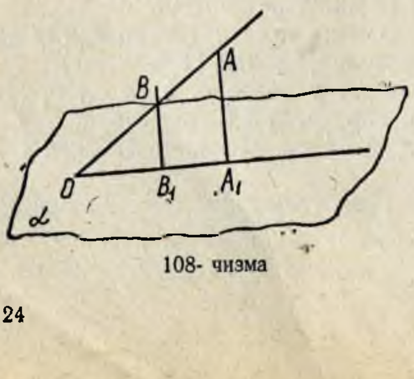
AB тўғри чизиқ билан унинг A_1B_1 проекцияси кесишган O нуқта изланган нуқта бўлади (108-чизма).

2-масала. ABC текисликнинг α текислик билан кесишган чизиғини (ABC текисликнинг α текисликдаги изини) ясанг.

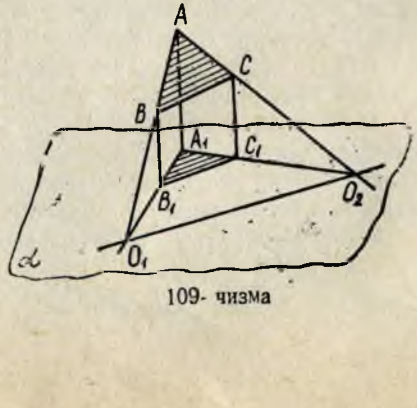
Бу масалани ечиш биринчи масалага келтирилади. $AB \cap A_1B_1 = O_1$, $AC \cap A_1C_1 = O_2$ нуқталарни ясаб, изланган O_1O_2 тўғри чизиқни топамиз (109-чизма).

3-масала. ABC ва MNP текисликларнинг кесишган чизиғини ясанг.

Текисликларнинг кесишган тўғри чизиғини ясаш учун бу текисликларга тегишли иккита T, R нуқталарни ясаш етарли. Асосий текис-

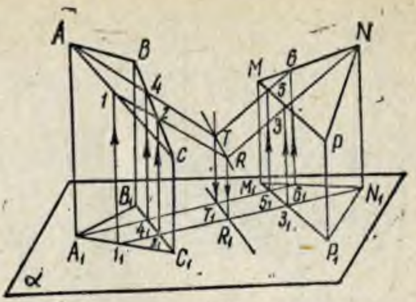


108- чизма



109- чизма

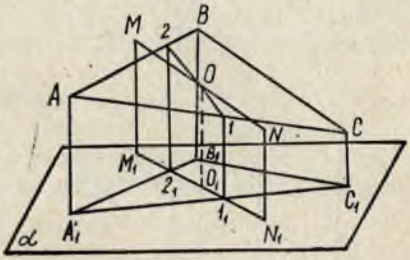
ликдаги A_1 нуқта орқали B_1C_1, M_1P_1, M_1N_1 тўғри чизиқларни мос равишда 4_1, 5_1, 6_1 нуқталарда кесадиган тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу нуқталар мос равишда BC, MP, MN тўғри чизиқларда ётувчи 4,5, 6 нуқталарнинг асосларидир. $A4$ ва 5 6 тўғри чизиқлар T нуқтада кесишади (чунки у тўғри чизиқлар AA_1 ва 6 6_1 тўғри чизиқлар ёрдамида аниқланган текисликда ётади). T нуқта ABC ва MNP текисликларнинг ҳар иккаласида ётади. Шунга ўхшаш R нуқтани топамиз. TR изланган тўғри чизиқ (110- чизма).



110- чизма

4- масала. ABC текислик билан MN тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини ясанг.

1_1, 2_2 — нуқталар мос равишда AB, AC тўғри чизиқларда ётувчи 1 ва 2 нуқталарнинг асослари. MN ва 1 2 тўғри чизиқлар MM_1, NN_1 тўғри чизиқлар билан аниқланган проекцияловчи текисликда ётади, улар изланган O нуқтада кесишади. Унинг асоси O_1 нуқта M_1N_1 тўғри чизиқда ётади (111- чизма).

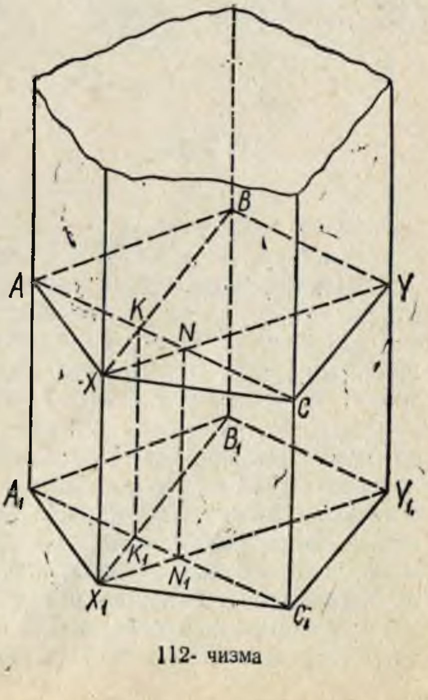


111- чизма

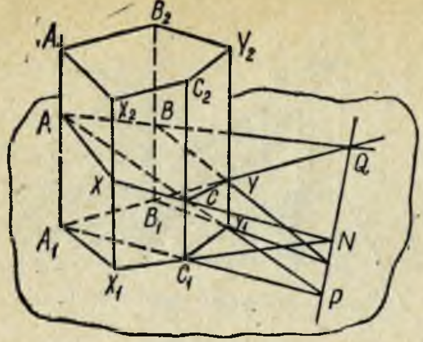
Шундай қилиб, барча позицион масалалар бир қийматли ечилади. Расм текислигида фазовий фигура элементларининг тасвири ва иккинчи проекциясининг (асосининг) берилиши шарти етарли шарт бўлиб қолмасдан, зарурий шарт ҳам эканлигини кўриш қийин эмас.

5- масала. Беш бурчакли призма билан призма қирраларида ётувчи A, B, C нуқталар орқали аниқланган текислик кесимини ясанг.

Биринчи усул. Асосий текислик сифатида призма асосини, ички проекциялаш деб призма қирраларига параллел проекциялашни олсак, шу билан тасвирнинг тўлиқлиги таъминланади. Кесимни ясаш учун ABC текислик билан призма икки қиррасининг кесишган X, $У$ нуқталарини топиш кифоя (112- чиз-



112- чизма



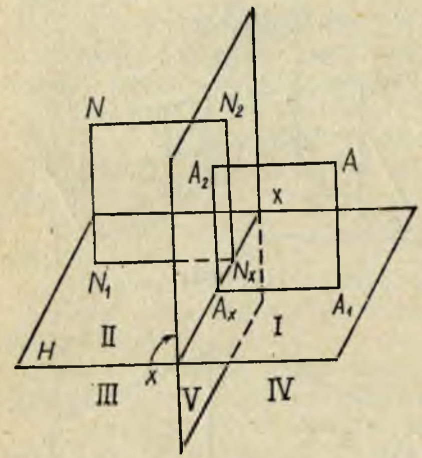
113- чизма

ма). Бу нуқталарнинг иккинчи проекциялари (асослари) X_1, $У_1$ нуқталардан иборат. A_1C_1, B_1X_1 тўғри чизиқлар K_1 нуқтада кесишади. K_1 нуқтадан проекцияловчи тўғри чизиқ ўтказсак, бу тўғри чизиқ ABC текисликни K нуқтада кесади, BK тўғри чизиқ призма қирраси билан изланган X нуқтада кесишади. Шу усул билан N нуқтани ясаймиз (чизмада кўрсатилган). XN тўғри чизиқ призма қиррасини изланган $У$ нуқтада кесади. Изланган кесим— бешбурчакдир.

Иккинчи усул. Қесувчи текисликнинг асос текислигидаги изидан (яъни кесишиш чизиғидан) фойдаланиб масалани ечиш, кўп ҳолларда кесим ясаш осонлашади.

Иккинчи масаладан фойдаланиб, кесувчи текисликнинг PQ изини топамиз (113- чизма). Призманинг $X_1X_2C_2C_1$ ёғининг асос текисликдаги X_1C_1 изи PQ тўғри чизиқ билан N нуқтада кесишади. NC тўғри «чизиқ X_1X_2 қирра билан изланган X нуқтада кесишади. Шунга ўхшаш $У$ нуқтани ҳам топамиз.

Агар кесувчи текисликни аниқловчи нуқталарни призма ёқларида олсак, кесимни ясаш кўриб ўтилган усуллардан принципиал фарқ қилмайди.



114- чизма

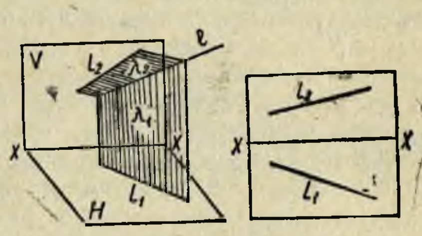
47- §. Монж методи ҳақида тушунча

1. Нуқтанинг эпюрдаги тасвири. Геометрик объектнинг битта проекцияси унинг фазодаги вазиятини ва ҳамма ўлчамларини аниқлаб бера олмайди, шунинг учун унинг икки ёки учта текисликдаги проекциясини ясаш зарур. Шунга кўра, фазода ўзаро перпендикуляр бўлган иккита H, V текислик оламиз. H текисликни горизонтал проекциялар текислиги, V текисликни вертикал ёки фронтал проекциялари текислиги деб айтилади. Бу текисликларнинг кесишиш чизиғи XX ни проекция ўқи (114- чизма) деб айтилади. Иккита текислик фазони тўртта қисмга, яъни чоракка бўлади, чораклар 114- чизмада кўрсатилгандек номерланган. Фазодаги ихтиёрий A нуқтани H, V текисликларга ортогонал проекциялаб, A_1, A_2 нуқталар ҳосил қиламиз. Бу нуқталарни мос равишда A нуқтанинг горизонтал ва вертикал (фронтал) проекциялари дейилади.

Энди H текисликни, чизмада кўрсатилгандек, проекциялар ўқи XX атрофида V текислик билан устма-уст тушгунча айлантирамиз. Устма-уст тушишдан ҳосил бўлган тасвир *эпюр* ёки *комлекс чизма* дейилади. (Эпюр сўзи французча «ёриге» сўзидан олинган бўлиб, «чизма» деган маънони билдиради.) Бунда A_1, A_2 нуқталар XX ўққа перпендикуляр тўғри чизиқда ётади. Ҳосил қилинган комплекс чизма тескариланиш хусусиятига эга. Ҳақиқатан ҳам, A_1 нуқтадан H текисликка перпендикуляр ўтказиб, унинг устига $A_1A = A_xA_2$ кесмани қўйсак, фазодаги A нуқтанинг вазияти аниқланади. A_1, A_2 проекцияларга эга бўлган нуқтани (A_1; A_2) кўринишда ёзамиз.

Фазодаги нуқтанинг қайси чоракларда ётишига қараб, унинг проекциялари XX проекциялаш ўқига нисбатан мос равишда маълум бир вазиятларга эга бўлади, ва аксинча, проекцияларнинг жойлашишига қараб, фазодаги нуқта қайси чоракка тегишли эканлигини аниқлаш мумкин. Агар нуқта II ва IV чоракларнинг биссектриса текислигида ётса, у ҳолда $A_1 = A_2$ бўлади.

2. Тўғри чизиқнинг эпюрдаги тасвири. Фазода ихтиёрий l тўғри чизиқ берилган бўлсин. l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар l тўғри чизиқнинг H ва V текисликлардаги проекциялари. Комплекс чизмадаги ихтиёрий иккита l_1, l_2 тўғри чизиқлар бирор тўғри чизиқнинг проекцияси бўла оладими?



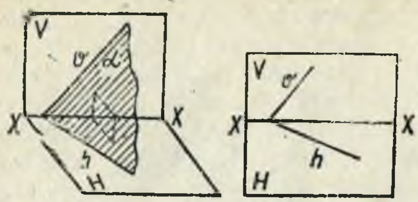
115- чизма

Эпюрда берилган l_1, l_2 тўғри чизиқларга асосан, l тўғри чизиқни ясаш учун, H текисликни XX — ўқ атрофида шундай буриш керакки, H текислик V текисликка перпендикуляр бўлсин. Кейин l_1 орқали H текисликка перпендикуляр λ_1 ва l_2 орқали V текисликка перпендикуляр λ_2 текисликни ўтказамиз, λ_1 ва λ_2 текисликлар кесишиб l тўғри чизиқни аниқлайди. (115-чизма). Агар l_1, l_2 тўғри чизиқлар XX ўққа перпендикуляр бўлса, λ_1, λ_2 текисликлар параллел бўлади. Бу ҳолда l тўғри чизиқ мавжуд бўлмайди, бундан ташқари l_1, l_1 тўғри чизиқлар XX ўқ билан бир нуқтада кесишса, $\lambda_1 = \lambda_2$ бўлиб, l_1, l_2 тўғри чизиқлар бу текисликлардаги ихтиёрий тўғри чизиқнинг проекцияси бўлади.

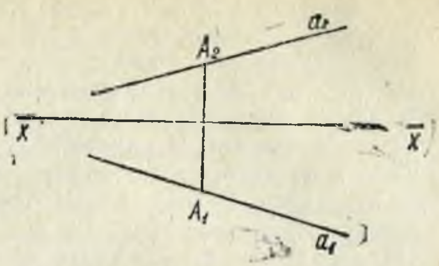
Шундай қилиб, агар эпюрдаги ихтиёрий l_1, l_2 тўғри чизиқлар XX ўққа бир вақтда перпендикуляр бўлмаса, улар ягона тўғри чизиқнинг проекцияси бўлади. l_1, l_2 проекциялари билан берилган тўғри чизиқ (l_1; l_2) кўринишда белгиланади.

3. Текисликнинг эпюрдаги тасвири. Агар бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтанинг проекцияси, ёки битта нуқта ва битта тўғри чизиғининг проекцияси, ёки иккита тўғри чизиғи проекциялари комплекс чизмада берилса, текисликнинг эпюрдаги тасвири берилган деб ҳисобланади. Текислик, кўп ҳолларда, H, V текисликлар билан кесишган h, v чизиқларнинг берилиши билан аниқланади. Бу изларнинг XX ўқ билан бир нуқтада кесишиши равшан (116-чизма).

1-масала. a тўғри чизиқ ўзининг эпюрдаги проекциялари билан,



116- чизма



117- чизма

$A \in a$ нуқта горизонтал проекцияси билан берилган. Вертикал проекциясини топинг.

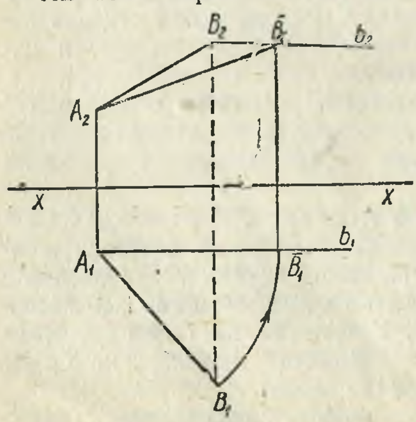
a_1, a_2 тўғри чизиқлар a тўғри чизиқнинг горизонтал ва вертикал проекциялари, A_1 нуқта A нуқтанинг горизонтал проекцияси бўлсин (117-чизма). Бу нуқтанинг вертикал проекцияси A_1 нуқтадан ўтиб, XX ўққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг a_2 тўғри чизиқ билан кесишган нуқтасидан иборат.

2-масала. (Кесма узунлигини аниқлаш.) AB кесманинг эпюрдаги проекцияларига кўра узунлигини аниқланг.

Агар AB кесма проекциялар текислигининг бирортасига, масалан, вертикал текисликка параллел бўлса, унинг узунлиги ўша текисликдаги AB кесма проекцияси узунлигига тенг. AB кесманинг вертикал текисликка параллел эканлигини унинг горизонтал проекциясидан биламиз. Агар горизонтал проекция XX ўққа параллел бўлса, AB кесма вертикал текисликка параллел бўлади.

AB кесма проекциялар текисликларининг бирортасига ҳам параллел бўлмасин. AB кесманинг A учини горизонтал текисликка проекцияловчи тўғри чизиқ атрофида айлантирсак, B учининг проекцияси ўзгаради. Масалан, B нуқтанинг горизонтал проекцияси маркази A_1 нуқтада бўлган айлана бўйича ҳаракат қилади, вертикал проекцияси b_2 нуқтадан ўтувчи, XX ўққа параллел бўлган тўғри чизиқда ҳаракатланади (118-чизма).

AB кесма вертикал текисликка параллел бўлган ҳолда, B_1 проекция A_1 нуқтадан ўтиб, XX ўққа параллел бўлган b_1 тўғри чизиғида ётади. B_1 нуқтанинг бундай ҳолатини $\overline{B}_1$ билан белгилаймиз. $A_1\overline{B}_1$ кесма AB кесмага тенг бўлиб, вертикал текисликка параллел бўлган AB кесманинг горизонтал проекциясидир. AB кесманинг вертикал проекциясини топиш учун. $\overline{B}_1$ нуқтадан XX ўққа перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиб, b_2 тўғри чизиқ билан кесишган $\overline{B}_2$ нуқтани топамиз. $A_2\overline{B}_2$ кесма AB кесманинг $A_2\overline{B}_2$ вертикал проекцияси бўлади ($AB = A_2\overline{B}_2$).



118- чизма

III БЎЛИМ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ

VIII БОБ. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ

48-§. Скаляр аргументли вектор функция

Математикада вектор аргументли вектор ва скаляр функциялар билан бир қаторда скаляр аргументли вектор функциялар ҳам ўрганилади.

Уч ўлчовли евклид фазоси V ва $(a, b) \in R$ интервал берилган бўлсин.

1-таъриф. Агар бирор қоида бўйича ҳар бир $t \in (a, b)$ га V фазонинг бирор $\vec{v}$ вектори мос қўйилган бўлса, у ҳолда $\vec{v}: (a,b) \rightarrow V$ *акслантириш* аниқлангаи дейилади.

Бу ҳолда биз (a, b) интервалда скаляр аргументли $\vec{v} = \vec{v}(t)$ вектор-функция аниқланган деб айтамиз. (a, b) интервал $\vec{v}(t)$ вектор функциянинг *аниқланиш соҳаси* бўлиб, V фазо унинг *қийматлари* ёки *ўзгариш соҳасидир.*

Агар $t_0 \in (a, b)$ нуқтанинг атрофида $\vec{v}(t)$ вектор функцияиинг $|\vec{v}(t)|$ нормаси чексиз кичик функция бўлса, яъни $t \rightarrow t_0$ да $|\vec{v}(t)| \rightarrow 0$ бўлса, $\vec{v}(t)$ вектор функция t_0 нуқтада *чексиз кичик* дейилади.

2-таъриф. Агар ихтиёрий $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топилиб, $|t - t_0| < \delta$ бажарилганда $|\vec{v}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$ муносабат ўринлн бўлса, $\vec{a}$ вектор $\vec{v}(t)$ вектор функциянинг аргумент t нннг t_0 га интилгандаги лимити дейилади.

Узунлиги нолга тенг вектор чексиз кичик вектор дейилади, яъни $|\vec{v}_{t_0}(t)| = 0$ бўлса, $\vec{v}(t)$ вектор t_0 нуқтада чексиз кичик бўлади. $\vec{v}(t)$ функциянинг t_0 нуқтадаги лимити $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$ кўринишда ёзилади. Таърифдан вектор-функция лимитининг қуйидаги хоссалари келиб чиқадн:

1) ўзгармас векторнинг лимити ўзига тенг;

2) $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{b}$ бўлса, $\lim\limits_{t \to t_0} (\vec{v}(t) + \vec{u}(t)) = \vec{a} + \vec{b}$;

3) $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{v}(t) = \vec{a}$ ва $\alpha \in R$ ихтиёрий ҳақиқий сон бўлса, $\lim (\alpha \vec{v}(t)) = \alpha \vec{a}$;

4) икки векторнинг скаляр ёки вектор кўпайтмаларининг лимити шу векторлар лимитларининг скаляр ёки вектор кўпайтмаларига тенг:

$$\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{a},\quad \lim_{t\to t_0}\vec{u}(t)=\vec{b},$$

$$\lim_{t\to t_0}(\vec{v}(t)\cdot\vec{u}(t))=\vec{a}\cdot\vec{b}\ (*),\quad \lim_{t\to t_0}[\vec{v}(t),\vec{u}(t)]=[\vec{a},\vec{b}]\ (**).$$

1), 2), 3) хоссалар исботини ўқувчига ҳавола қилган ҳолда 4) хосса исботини келтирамиз:

а) скаляр кўпайтма учун: $\vec{v}(t)\cdot\vec{u}(t)-\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{v}(t)-\vec{a})\vec{u}(t)+\vec{a}(\vec{u}(t)-\vec{b})$, бу ерда $t\to t_0$, да $\vec{v}(t)-\vec{a}\to\vec{0}$, $\vec{u}(t)-\vec{b}\to\vec{0}$, шунинг учун (*) муносабат ўринлидир.

б) вектор кўпайтма учун:

$$|[\vec{v}(t),\vec{u}(t)]-[\vec{a},\vec{b}]|=|[\vec{v}(t)-\vec{a},\vec{u}(t)-\vec{b}]+[\vec{v}(t)-\vec{a},\vec{b}]-$$
$$-[\vec{u}(t)-\vec{b},\vec{a}]\leqslant|\vec{v}(t)-\vec{a}||\vec{u}(t)-\vec{b}|+|\vec{v}(t)-\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{u}(t)-\vec{b}||\vec{a}|$$

бу ерда ҳам $t\to t_0$ да $\vec{v}(t)-\vec{a}$, $\vec{u}(t)-\vec{b}$ векторлар чексиз кичик векторлардир, яъни улар $\vec{0}$ га интилади. Хосса исбот қилинди.

3-таъриф. $\vec{v}=\vec{v}(t)$ вектор функция учун $t_0\in(a,b)$ нуқтада $\lim_{t\to t_0}\vec{v}(t)=\vec{v}(t_0)$ муносабат ўринли бўлса, $\vec{v}(t)$ функция t_0 нуқтада узлуксиз дейилади.

Агар $\vec{v}(t)$ функция (a,b) интервалнинг ҳамма нуқталарида узлуксиз бўлса, $\vec{v}(t)$ функция шу интервалда узлуксиз дейилади.

$\vec{v}(t)$ функцияга t нинг ҳар бир қийматида бирор $\overrightarrow{OM}=\vec{v}(t)$ вектор мос келади. t аргумент (a,b) интервалда a дан b гача узлуксиз ўзгарганда $\overrightarrow{OM}$ векторнинг M учи фазода бирор чизиқ чизади. $\vec{v}=\vec{v}(t)$ тенглама шу чизиқнинг вектор кўринишдаги параметрик тенгламаси дейилади.

Агар фазода $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ декарт координатлари системасини олиб, $\vec{v}(t)$ векторни $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ базис бўйича ёйсак, $\vec{v}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ҳосил бўлади. Бу ерда $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $(a\leqslant t\leqslant b)$ тенгламаларни $\vec{v}=\vec{v}(t)$ чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади.

49-§. Вектор функциянинг ҳосиласи

(a,b) интервалдан бирор t нуқтани олиб, унга шундай Δt орттирма берайликки $(t+\Delta t\in(a,b))$, унда t аргументнинг Δt орттирмасига $\vec{v}(t)$ вектор функциянинг $\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$ орттирмаси мос келади.

Таъриф. Агар $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to t_0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$ (1) чекли лимит мавжуд бўлса, $\vec{v}(t)$ функция $t\in(a, b)$ нуқтада *дифференциалланувчи* дейилади.

Бу лимитни $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ёки $\vec{v}'(t)$ каби ёзилади ва $\vec{v}(t)$ функциянинг $t\in\in(a, b)$ *нуқтадаги ҳосиласи* дейилади.

Агар $\vec{v}(t)$ векторнинг $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ системадаги $\vec{v}(t)=x(t)\vec{i}+ + y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ ёйилмасини олсак, t аргументнинг Δt орттирмасига $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ фуикцияларнинг

$\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)$, $\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$, $\Delta z=z(t+\Delta t)-z(t)$

орттирмалари мос келади, демак, $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j}+\frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$.

Бундан эса $\vec{v}(t)$ вектор функция дифференциалланадиган бўлиши учун $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функцияларинг дифференциалланадиган бўлиши керак деган хулоса чиқади. Демак, вектор-функцияни дифференцияллаш унинг координаталарини дифференциаллаш демакдир. Агар $\vec{v}=\vec{v}(t)$ вектор-функцияиинг координаталари дифференциалланувчи бўлса,

$$\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$$

бўлади, вектор-функцияни дифференциаллаш қоидалари қуйидагича бўлади:

1. Икки вектор функция йиғиндисининг ҳосиласи шу функциялар ҳосилаларниинг йиғиндисига теиг:

$$(\vec{v}(t)+\vec{u}(t))'=\vec{v}'(t)+\vec{u}'(t).$$

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{w}(t)=\vec{v}(t)+\vec{u}(t)$ бўлсин. У ҳолда

$$\Delta\vec{w}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)+\vec{u}(t+\Delta t)-\vec{u}(t)=\Delta\vec{v}+\Delta\vec{u}.$$

Бундан:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{w}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t};\ \vec{w}'(t)=\vec{v}'(t)+\vec{u}'(t).$$

2. Скаляр кўпайтманинг ҳосиласи:

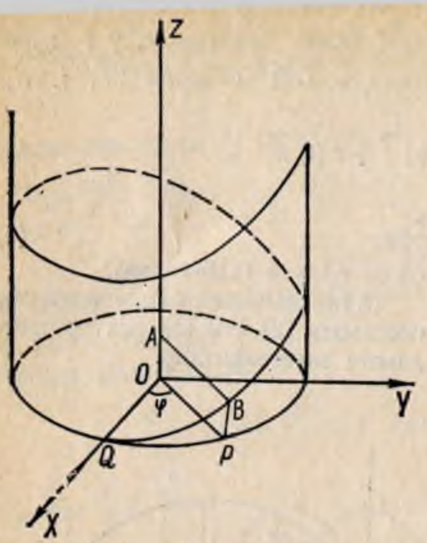
$$(\vec{v}\cdot\vec{u})'=\vec{u}\cdot\vec{v}'+\vec{v}\cdot\vec{u}'.$$

3. Вектор кўнайтманинг ҳосиласи:

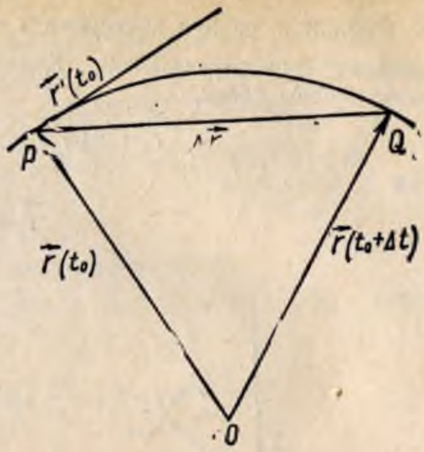
$$[(\vec{v}, \vec{u})]'=[\vec{v}', \vec{u}]+[\vec{v}, \vec{u}'].$$

Ҳақиқатан ҳам, $\Delta[\vec{v}, \vec{u}]=[(\vec{v}+\Delta\vec{v}), (\vec{u}+\Delta\vec{u})]-[\vec{v}, \vec{u}]$

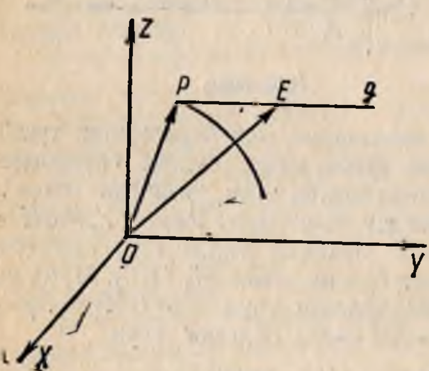
ёки $\Delta[\vec{v}, \vec{u}]=[(\vec{v}+\Delta\vec{v})(\vec{u}+\Delta\vec{u})]-[\vec{v}', (\vec{u}+\Delta\vec{u})]+[\vec{v}', (\vec{u}+\Delta\vec{u})]-$



121- чизма



122- чизма



123- чизма

$= x$, $QP = y$, $BP = z$ дан винт чизиқнинг параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$x = a\cos\varphi,\ \ y = a\sin\varphi,\ \ z = \lambda\varphi.$$

51- §. Эгри чизиқнинг уринмаси

γ — силлиқ эгри чизиқ $\vec r = \vec r\,(t)$ тенглама билан берилган бўлсин. Унда ётган $P(t_0)$, $Q(t_0 + \Delta t)$ нуқталардан ўтувчи $l = (PQ)$ кесувчини олайлик (122-чизма).

Таъриф. l кесувчини $\Delta t \to 0$ даги лимит ҳолати γ эгри чизиққа P нуқтада ўтказилган *уринма* дейилади.

t параметрнинг Δt орттирмасига $\vec r\,(t)$ функциянинг $\Delta\vec r = \vec r\,(t_0 + \Delta t) - \vec r\,(t_0)$ орттирмаси мос келади. Бу $\Delta\vec r$ вектор l кесувчининг йўналтирувчи вектори бўлади. У ҳолда $\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t} = \dfrac{\vec r\,(t_0 + \Delta t) - \vec r\,(t_0)}{\Delta t}$ вектор ҳам $\Delta\vec r$ векторга коллинеар бўлиб, кесувчининг йўналтирувчи векторидир. $\Delta t \to 0$ да Q нуқта γ чизиқ бўйлаб P нуқтага интилади. Шартга кўра $\vec r\,(t)$ дифференциалланувчи функция бўлгани учун $\vec r\,'(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec r}{\Delta t}$ ҳосила мавжуд ва $\vec r\,'(t)$ вектор уринма бўйлаб йўналгандир. γ эгри чизиққа P нуқтадан ўтган уринмани g билан белгилайлик ва унда бирор E нуқтани олайлик. У ҳолда (123-чизма) $\overrightarrow{PE}$ ва $\overrightarrow{r'}(t)$ векторлар коллинеар бўлгани учун $\overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{r'}(t)$, $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \overrightarrow{PE}$ ёки $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r}(t_0) + \lambda \overrightarrow{r'}(t)$ (1):

(1) тенглик γ эгри чизиққа P нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламасидир. Эгри чизиқ бу системада $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (2) параметрик кўринишда берилган бўлса, унинг P нуқтадаги уринмасининг тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \lambda x'(t_0), \\ y(t) &= y(t_0) + \lambda y'(t_0), \\ z(t) &= z(t_0) + \lambda z'(t_0) \end{aligned}\right|$$

ёки

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y(t) - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z(t) - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Текисликда берилган эгри чизиқ учун параметрик тенглама $x = x(t)$, $y = y(t)$ кўринишда бўлиб, унинг бирор нуқтасига ўтказилган уринманинг тенгламаси $\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$ кўринишни олади. Эгри чизиқ текисликда $F, (x,y) = 0$ тенглама билан берилса, уринма $y - y_0 = -\frac{F'_{x_0}}{F'_{y_0}}(x - x_0)$ шаклни қабул қилади. Эгри чизиқ XOY текислигида $y = f(x)$ тенглама билан ифодаланса, уринманинг тенгламаси $\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0}$ кўринишга эга. Бундан: $y = \frac{y'_0}{x'_0}(x - x_0) + y_0$. Бу ерда x ни параметр сифатида қабул қилсак, $x'_0 = 1$ бўлиб, уринманинг тенгламаси:

$$y = y'_0(x - x_0) + y_0.$$

Мисоллар. 1.

$$\begin{aligned} x &= a\sin^2 t, \\ y &= b\sin t\cos t, \\ z &= c\cos^2 t \end{aligned}$$

эгри чизиққа $t = \frac{\pi}{4}$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси тузилсин. Бунинг учун берилган функциялардан ҳосила оламиз:

$$\begin{aligned} x' &= 2a\sin t\cos t = a\sin 2t, \\ y' &= b(\cos t\cos t - \sin t\sin t) = b\cos 2t, \\ z' &= -2c\cos t\sin t = -c\sin 2t. \end{aligned}$$

$$t = \frac{\pi}{4} \text{ да } x_0 = \frac{a}{2},\ y_0 = \frac{b}{2},\ z_0 = -c,$$

$$x'_0 = a,\ y'_0 = 0,\ z'_0 = -c.$$

Уринманинг тенгламаси:

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{a}=\frac{y-\frac{b}{2}}{0}=\frac{z-\frac{c}{2}}{-c}.$$

2. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ эгри чизиқ уринмасииинг тенгламаси топилсин.

Ву ерда $x'=-3a\cos^2 t\sin t,\ y'=3a\sin^2 t\cos t$ ва $\frac{x-a\cos^3 t}{-3a\cos^2 t\sin t}=$ $=\frac{y-a\sin^3 t}{3a\sin^2 t\cos t}$,

бундан

$$x\sin t+y\cos t-a\sin t\cos t(\cos^2 t+\sin^2 t)=0$$

ёки

$$2x\sin t+2y\cos t-a\sin 2t=0.$$

Таъриф. Эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги уринмасига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ унинг шу нуқтадаги *нормали* дейилади.

Фазовий чизиқнинг белгили нуқтасидаги нормаллари чексиз кўп бўлиб (нега?), улар бир текисликда ётади ва бу текислик чизиқнинг шу нуқтадаги *нормал текислиги* деб аталади. Ҳамма нуқталари битта текисликда ётган ясси чизиқнинг ҳар бир нуқтасида битта *нормаль* мавжуд.

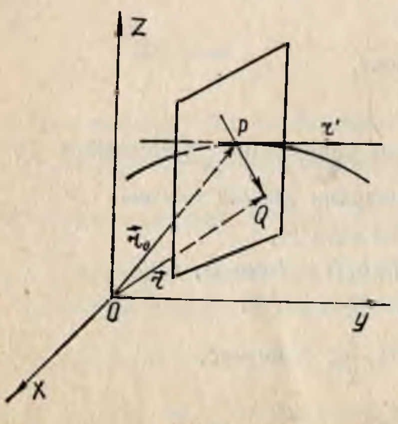
Агар чизиқдаги берилган нуқта $P(t_0)$, нормал текисликдаги ихтиёрий нуқта $Q(t)$ дан иборат бўлса (124- чизма),

$$\vec{PQ}=\vec{r}-\vec{r}_0=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k},$$
$$\vec{PQ}\perp\vec{r}'(t_0)\Rightarrow(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{r}'_0=0$$

ёки

$$(x-x_0)x'_0+(y-y_0)y'_0+(z-z_0)z'_0=0$$

тенглама эгри чизиқнинг P нуқтасидаги нормал текислигининг тенгламасидир. Юқорида таъкидлаганимизга асосан, текисликдаги чизиқ нормали учун



124- чизма

$(x-x_0)x'_0+(y-y_0)y'_0=0$ ёки

$$y-y_0=-\frac{x'_0}{y'_0}(x-x_0)$$

тенгламани ҳосил қиламиз.

Мисол. Винт чизиқ $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $z=4t$ нинг $t=0$ нуқтадаги нормал текислигининг тенгламасини тузайлик. $t=0$ га мос M_0 нуқтанинг координаталари: $x_0=$ $=2$, $y_0=0$, $z_0=0$, M_0 нуқтанинг координаталари: $(2,0,0)$;

$x' = -2\sin t,\ y' = 2\cos t,\ z' = 4.\ t = 0$ да $x'_0 = 0,\ y'_0 = 2,\ z'_0 = 4.$

Нормал текисликнинг тенгламаси

$$(x-2)\cdot 0 + (y-0)\cdot 2 + (z-0)\cdot 4 = 0 \text{ ёки } y + 2z = 0.$$

52-§. Эгри чизиқ ёйининг узунлиги. Эгри чизиқнинг табиий тенгламалари

Силлиқ эгри чизиқ $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$ тенглама билан берилган бўлсин. Математик анализ курсидан маълумки, унинг $[a, t]$ кесмага мос келган $\gamma_1 \subset \gamma$ ёйининг узунлигини топиш учун γ_1 ёйга ички чизилган синиқ чизиқ бўғинлари чексиз иккилаитирилади.

Ана шу синиқ чизиқ кесмаларининг энг каттаси нолга интилгандаги синиқ чизиқ периметрининг лимити γ_1 ёйнинг узунлиги деб аталади ва

$$s = \int_a^t |\vec{r}\,'(t)|\,dt \tag{1}$$

кўринишда ёзилади.

Агар эгри чизиқ

$$x = x(t),,\ y = y(t),\ z = z(t) \tag{1'}$$

параметрик тенглама билан берилган бўлса, унинг ёйи узунлиги

$$s = \int_a^t \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\ dt \tag{2}$$

ёки

$$s = \int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\ dt \tag{2'}$$

формулаларга асосланиб ҳисобланади.

XOY текислигида ётган чизиқ учун ёй узунлиги $s = \int_a^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$ га тенг.

Демак, эгри чизиқ ёйининг узунлиги t параметрнинг функциясидир, яъни $s = s(t)$. Бу функция $t > a$ бўлганда мусбат, $t < a$ бўлганда эса манфий бўлиб, t монотон ўзгарса, $s(t)$ функция монотон ўсувчидир. Ҳақиқатан, (2) дан $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ ёки $\frac{ds}{dt} = |\vec{r}\,'(t)| > 0$ эканлигини топамиз, чунки фаразимизга кўра $\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}$, шу сабабли $s = s(t)$ функцияга тескари функция мавжуд: $t = t(s)$.

Шундай қилиб, s нинг ҳар бир қийматига t нинг аниқ битта қиймати мос келади, яъни s ёй узунлигини параметр сифатида олиш мумкин. У ҳолда (1) ва (1′) тенгламалар қуйидаги кўринишга келади:

$$\vec{r} = \vec{r}\,(t\,(s)) \qquad (3)$$

ёки

$$x = x\,(t\,(s)),\ y = y\,(t\,(s)),\ z = z\,(t\,(s)). \qquad (3')$$

(3) ва (3′) тенгламаларни қуйидагича ҳам ёзиш мумкин: $\vec{r} = \vec{r}\,(s)$

ёки $x = x\,(s),\ y = y\,(s),\ z = z\,(s).$

Бу тенгламалар эгри чизиқнинг табиий параметрга нисбатан тенгламаларидир.

Бу ҳолда

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = |\vec{r}_s'| = 1, \qquad (4)$$

яъни $\vec{r}\,(s)$ нинг табиий параметрга нисбатан ҳосиласи бирлик вектордир, чунки P ва Q нуқталарни туташтирувчи ватарнинг узунлиги $|\Delta\vec{r}| = |\vec{r}\,(t + \Delta t) - \vec{r}\,(t)|$ бўлса ва

$$|\Delta s| = |s\,(t + \Delta t) - s\,(t)|$$

бўлса (124- чизма):

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right|.$$

$\Delta s \to 0$ ва $\Delta t \to 0$ шартлар тенг кучли бўлгани учун

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = 1.$$

Мисоллар. 1. $x = a\,(\cos t + t \sin t),\ y = a\,(\sin t - t\cos t)$ чизиқнинг $[t_1, t_2]$ оралиқдаги ёйининг узунлиги топилсин.

Эгри чизиқ тенгламаларидан ҳосила оламиз:

$$x' = a\,(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t,$$
$$y' = a\,(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

Ёй узунлиги

$$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{a^2 t^2\cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t}\;dt = \int_{t_1}^{t_2} at\,dt = a\,\frac{t^2}{2}\bigg|_{t_1}^{t_2} = a\,\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$$

га тенг.

2. $y = \ln\cos x$ чизиқнинг $\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$ оралиқдаги ёй узунлиги ҳисоблансин.

$$y' = (\ln\cos x)' = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$s=\int_0^{\pi/3}\sqrt{1+\left(-\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}\,dx=\int_0^{\pi/3}\frac{1}{\cos x}\,dx=\ln\left(tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)\Big|_0^{\pi/6}=$$

$$=\ln\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

3. $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ чизиқнинг $t=0$ дан t гача бўлган ёй узунлигини ҳисобланг ва бу чизиқнинг s параметр орқали ифодаланган тенгламаларини тузинг.

$$s=\int_0^t\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\,dt=at,\ \text{бундан}\ t=\frac{s}{a}.$$

Изланган тенгламалар: $x=a\cos\frac{s}{a}$, $y=a\sin\frac{s}{a}$.

53-§. Табиий уч ёқлик ва Френе формулалари

Регуляр эгри чизиқ $\vec r=\vec r\,(t)$ (1) тенглама билан берилган бўлсин. t параметр учун s ёйни қабул қилсак,

$$\frac{d\vec r}{ds}=\vec\tau \tag{2}$$

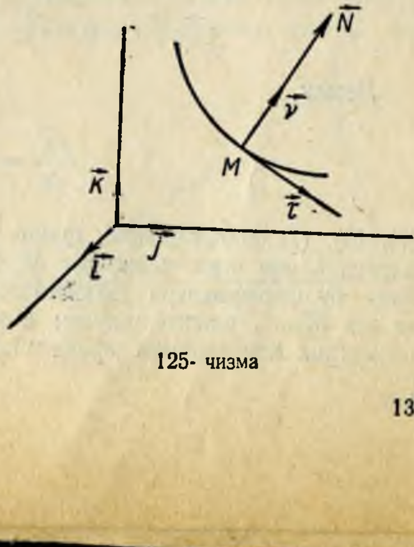
вектор эгри чизиқнинг M нуқтасидаги уримасининг бирлик вектори бўлади (125-чизма).

$$\frac{d^2\vec r}{ds^2}=\frac{d\vec\tau}{ds}=\vec N \tag{3}$$

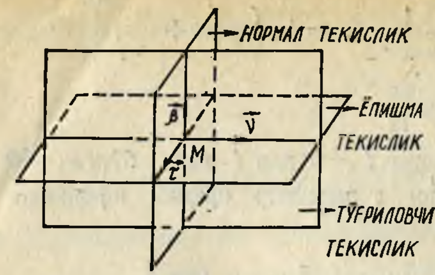
вектор эгри чизиқнинг M нуқтасидаги эгрилик вектори, унинг узунлиги $|\vec N|=k$ унинг шу нуқтадаги эгрилиги дейилади. Уринманинг бирлик вектори $\vec\tau$ билан унинг ҳосиласи бўлмиш $\vec N$ ўзаро ортогоналдир. Шу $\vec N$ вектор бўйича йўналган тўғри чизиқ эгри чизиқни M нуқтадаги бош нормали дейилади. $\vec N$ векторнинг бирлик векторини $\vec\nu$ билан белгиласак,

$$\vec N=k\vec\nu\quad \text{ёки}\quad \frac{d\vec\tau}{ds}=k\vec\nu \tag{4}$$

ҳосил бўлади. M нуқтада яна битта бирлик векторни аниқлаймиз: $\vec\beta=[\vec\tau,\ \vec\nu]$. Бу вектор ҳам $\vec\tau$ га, ҳам $\vec\nu$ га ортогоналдир. Шу вектор йўналишдаги $[M;\ \vec\beta]$ тўғри чизиқ эгри чизиқниг *бинормали* дейилади. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги бош нормали ва бинормали ўзаро



125- чизма



126- чизма

перпендикуляр. Уринма билан бош нормал орқали ўтувчи текисликни *ёпишма текислик*, уринма билан бинормал орқали ўтувчи текисликни *тўғриловчи текислик* дейилади. Бош нормал билан бинормал орқали ўтувчи текислик *нормал текисликдир*. Эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги бош нормал, бинормал уринма ҳамда ёпишма текислик, тўғриловчи текислик ва нормал текисликлардан ташкил топган уч ёқлик табиий *уч ёқлик* дейилади (126-чизма). $\vec\tau$ билан $\vec\beta$ нинг вектор кўпайтмаси $\vec\nu$ векторга перпендикуляр ва демак, $\frac{d\vec\nu}{ds}$ векторга параллелдир. Шунинг учун шундай α, λ сонлар топиладики, $\frac{d\vec\nu}{ds} = \alpha\vec\tau + \lambda\vec\beta$ (5) бўлади. $\vec\tau, \vec\nu$ векторлар ҳам ортогонал: $\vec\tau \cdot \vec\nu = 0$. Бу тенгликни s параметр бўйича дифференциалласак, $\vec\nu\frac{d\vec\tau}{ds} + \vec\tau\frac{d\vec\nu}{ds} = 0$. (4), (5) га кўра $\vec\nu \cdot k\vec\nu + \vec\tau(\alpha\vec\tau + \lambda\vec\beta) = 0$, бундан эса $k + \alpha = 0$ ёки $\alpha = -k$.

(5) дан: $\frac{d\vec\nu}{ds} = -k\vec\nu + \lambda\vec\beta$ (6).

$\vec\beta = [\vec\tau, \vec\nu]$ ни s параметр бўйича дифференциаллаб, (5) ва (6) ни ҳисобга олсак.

$$\frac{d\vec\beta}{ds} = \left[\frac{d\vec\tau}{ds}, \vec\nu\right] + \left[\vec\tau, \frac{d\vec\nu}{ds}\right] = [k\vec\nu, \vec\nu] + [\vec\tau, -k\vec\tau + \lambda\vec\beta] =$$
$$= k[\vec\nu, \vec\nu] - k[\vec\tau, \vec\tau] - \lambda[\vec\tau, \vec\beta].$$

Лекин

$$[\vec\nu, \vec\nu] = 0, \quad [\vec\tau, \vec\tau] = 0, \quad [\vec\tau, \vec\beta] = \vec\nu.$$

Демак,

$$\frac{d\vec\beta}{ds} = -\lambda\vec\nu. \tag{7}$$

(2), (6), (7) формулаларни Френе формулалари дейилади. (7) формуладаги λ сон эгри чизиқнинг M нуқтадаги буралиши дейилади. Френинг бу формулалари фазовий чизиқлар назариясида катта аҳамиятга эга бўлиб, уларга кирувчи k эгрилик ва λ буралиш чизиқнинг соф геометрик хоссаларини ифодалайди.

Регулятор эгри чизиқ $\vec{r} = \vec{r}(s)$ тенглама билан берилган бўлсин. Унда P ва унга яқин ётган Q нуқталарни оламиз. P, Q нуқталарда эгри чизиққа ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакни α билан белгилаймиз, PQ ёй узунлиги h га теиг бўлсин (127-чизма).

1-таъриф. Эгри чизиқнинг P нуқтадаги *эгрилиги* деб $\left|\lim\limits_{Q\to P} \frac{\alpha}{h}\right|$ лимитга айтилади.

Бу чизиқнинг P, Q нуқталарига ўтказилган уринмаларнинг бирлик векторлари $\vec{r}'(s)$ ва $\vec{r}'(s+h)$ бўлсин. Бу векторларни битта умумий учга келтирамиз: $\vec{r}'(s) = \overrightarrow{MA}$, $\vec{r}'(s+h) = \overrightarrow{MB}$, $\angle AMB = \alpha$ (128-чизма). $\overrightarrow{AB} = \vec{r}'(s+h) - \vec{r}'(s)$ бўлсин. Эгри чизиқнинг эгрилигини k билан белгиласак,

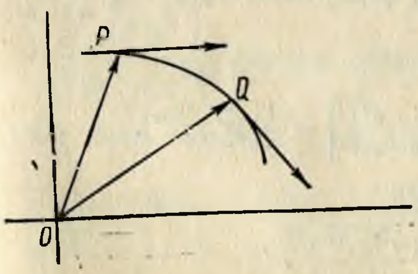
$$k = \left|\lim_{h\to 0} \frac{\alpha}{h}\right| = \lim_{h\to 0} \frac{\alpha}{|\overrightarrow{AB}|}\left|\lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{AB}}{h}\right|.$$

Чизмадан $|\overrightarrow{AB}| = 2\sin\frac{\alpha}{2}$. Шунинг учун $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\alpha}{|\overrightarrow{AB}|} = 1$, чунки $h\to 0$ да $\alpha\to 0$ бўлиб, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|h|} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|\vec{r}'(s+h) - \vec{r}'(s)|}{|h|} = |\vec{r}''(s)|$. Демак, эгри чизиқнинг эгрилиги $k = |\vec{r}''(s)|$ га тенг. Таърифдан тўғри чизнқнинг ҳамма нуқталардаги эгрилиги нолга тенглиги аён, қолган чизиқлар учун эгрилик нолдан фарқлидир. Демак, чизиқнинг эгрилиги унинг тўғри чизиқдан четлашиш даражасини билдиради.

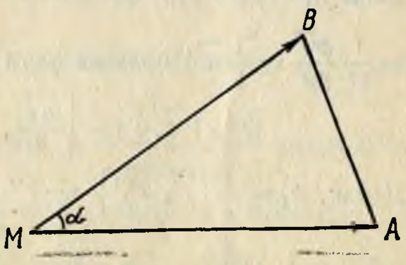
2-таъриф. Эгри чизиқнинг берилган нуқтасидаги эгрилигига тескари миқдор $R = \frac{1}{k}$ шу нуқтадаги *эгрилик радиуси* дейнлади.

Эгри чизиқда ихтиёрий P нуқта ва унга яқин ётган Q нуқтани оламиз. P, Q нуқталардан ёпишма текисликлар ўтказамиз ва улар орасидаги бурчакни $\Delta\Theta$ билан белгилаймиз. Эгри чизиқнинг P ва Q нуқталари орасига жойлашган ёйнинг узунлиги Δs бўлсин (129-чизма).

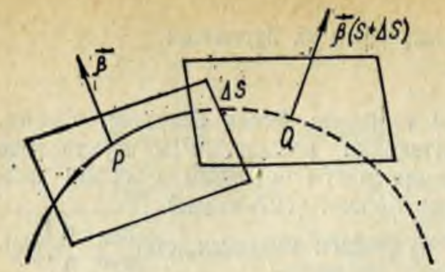
3-таъриф. Эгри чизиқнинг P нуқтадаги *буралиши* деб Q нуқта



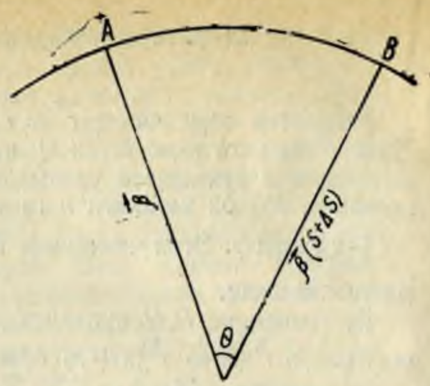
127-чизма



128-чизма



129- чизма



130- чизма

P га интилганда $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ нисбатнинг лимитига айтилади ва у k_1 билан белгиланади:

$$k_1 = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\theta}{|\Delta s|}.$$

$\vec{\beta}(s)$, $\vec{\beta}(s+\Delta s)$ векторлар P, Q нуқталардаги бинормалнинг бирлик векторлари бўлиб, улар орасидаги бурчак $\Delta\theta$ га тенг. У ҳолда (130-чизма)

$$|\vec{AB}| = |\vec{\beta}(s+\Delta s) - \vec{\beta}(s)| = 2\sin^2\frac{\Delta\theta}{2},$$

$$k_1 = \left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\vec{AB}|}\cdot\left|\lim_{\Delta s\to 0}\frac{|\vec{AB}|}{\Delta s}\right|,$$

бу ерда

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{|\vec{AB}|} = 1,$$

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{AB}}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{\beta}(s+\Delta s)-\vec{\beta}(s)}{\Delta s} = \vec{\beta}'(s).$$

Демак, чизиқнинг буралиши $k_1 = |\vec{\beta}'(s)|$. $\vec{\beta}'$ вектор $\vec{\beta}$ га ва $\vec{\tau}$ ортогоналдир. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{\beta}' = [\vec{\tau}, \vec{\nu}]' = [\vec{\tau}', \vec{\nu}] + [\vec{\tau}, \vec{\nu}']$. Бу ердан $[\vec{\tau}', \vec{\nu}] = \vec{0}$, чунки $\vec{\tau}'$ $\vec{\nu}$ га параллел. Шунинг учун $\vec{\beta}' = [\vec{\tau}, \vec{\nu}']$. Бундан эса $\vec{\beta}' \perp \vec{\tau}$ ва $\vec{\beta}' \perp \vec{\nu}'$. Шундай қилиб, $\vec{\beta}'$ $\vec{\nu}$ га параллел. У ҳолда $k_1 = |(\vec{\beta}'\cdot\vec{\nu})|$. Френенинг (1) формуласига кўра $\vec{\nu} = \frac{1}{k}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{k^2}\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{1}{k}\vec{r}''$ бўлгани учун

$$\vec{\beta}' = [\vec{\tau}, \vec{\nu}'] = \left[\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{1}{k}\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right] = \frac{1}{k}[\vec{r}', \vec{r}'''].$$

Демак, $k_1 = \frac{1}{k}\left[\vec{r}', \vec{r}'''\right]\cdot\frac{1}{k}\vec{r}''$ ёки

$$k_1 = \frac{|(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{r}''')|}{k^2}.$$

55-§. Эгри чизиқнинг эгрилиги ва буралишини ҳисоблаш

Эгри чизиқ $\vec{r}=\vec{r}(t)$ тенглама билан берилган бўлсин. У ҳолда $\vec{r}'=\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\vec{\tau}\frac{ds}{dt}$, $\vec{r}''=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2r}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$. Бу ерда $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=k\vec{\nu}$, $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\tau}$ эканлигини ҳисобга олсак, $\vec{r}''=k\vec{\nu}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}$. Буидан $\vec{r}''$ векторнинг $[M,\vec{\tau},\vec{\nu}]$ ёпишма текисликка параллел эканлигини кўрамиз.

$$[\vec{r}',\vec{r}'']=\left[\vec{\tau}\frac{ds}{dt},k\vec{\nu}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}\right]=\left[\vec{\tau}\frac{ds}{dt},k\vec{\nu}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\right]+$$
$$+\left[\vec{\tau}\frac{ds}{dt},\vec{\tau}\frac{d^2s}{dt^2}\right]=k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\left[\vec{\tau},\vec{\nu}\right]+\frac{ds}{dt}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}\left[\vec{\tau},\vec{\tau}\right]=k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3[\vec{\tau},\vec{\nu}].$$

$\frac{ds}{dt}=|\vec{r}'(t)|$, $[\vec{\tau},\vec{\nu}]=\vec{\beta}$ бўлгани учун $[\vec{r}',\vec{r}'']=|\vec{r}'(t)|^3\vec{\beta}\cdot k$, бундан $k=\left|\frac{[\vec{r}',\vec{r}'']}{|\vec{r}'(t)|^3}\right|\frac{1}{|\vec{\beta}|}$. $\vec{\beta}$ бирлик вектор, шунинг учун $k=\frac{|[\vec{r}',\vec{r}'']|}{|\vec{r}'(t)|^3}$.

Эгри чизиқ $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ тенгламалар билан берилган бўлса:

$$[\vec{r}',\vec{r}'']=\sqrt{\begin{vmatrix}x'' & y''\\ x' & y'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y'' & z''\\ y' & z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z'' & x''\\ z' & x'\end{vmatrix}^2},$$

$$|\vec{r}'|=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},$$

$$k=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x'' & y''\\ x' & y'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}y'' & z''\\ y' & z'\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z'' & x''\\ z' & x'\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x'^2+y'^2+z'^2)^3}}.$$

Эгри чизиқ XOY текисликда жойлашган бўлса, яъни $x=x(t), y=y(t)$ тенгламалар билан берилган бўлса, унинг эгрилиги $k=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}x'' & y''\\ x' & y'\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{(x'^2+y'^2)^3}}$ формула бўйича ҳисобланади. Чизиқ $y=y(x)$ тенглама билан берилса, унинг эгрилиги $k=\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$ формула бўйича ҳисобланади. Шунга ўхшаш эгри чизиқнинг буралиши $k_1=\frac{|(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')|}{k^2}=\frac{|(\vec{r}',\vec{r}'',\vec{r}''')|}{(\vec{r}',\vec{r}'')^2}$ га тенг эди. Бундан $x=x(t)$, $y=$

$= y(t)$, $z = z(t)$ параметрик тенгламага ўтсак, буралиш

$$k_1 = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}$$

формула бўйича ҳисобланади.

Мисоллар. 1. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ винт чизиғининг эгрилиги ва буралиши ҳисоблансин.

Эгри чизиқ тенгламаларидан:

$$x' = -a\sin t, \qquad y' = a\cos t, \qquad z' = b;$$
$$x'' = -a\cos t, \qquad y'' = -a\sin t, \qquad z'' = 0;$$
$$x''' = a\sin t, \qquad y''' = -a\cos t, \qquad z''' = 0,$$

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -a\cos t & -a\sin t \\ -a\sin t & a\cos t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -a\sin t & 0 \\ a\cos t & b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -a\cos t \\ b & -a\sin t \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{((1 - a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + b^2)^3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(-a^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t) + a^2b^2\sin^2 t + a^2b^2\cos^2 t}}{\sqrt{(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2)^3}} = \frac{\sqrt{a^4 + a^2b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} =$$

$$= \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(a^2+b^2)^3}} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Демак, $k = \frac{a}{a^2+b^2}$.

γ эгри чизиқнинг буралиши

$$k = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a\cos t & -a\sin t \\ -a\sin t & a\cos t \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -a\sin t & 0 \\ a\cos t & b \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -a\cos t \\ b & -a\sin t \end{vmatrix}^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

2. $y = -x^3$ эгри чизиқнинг абсциссаси $x = \frac{1}{2}$ га тенг бўлган нуқтасидаги эгрилиги топилсин.

Ечиш. $y' = -3x^2$; $y'' = -6x$. $x = \frac{1}{2}$ нуқтада $y'' = -\frac{3}{4}$; $y'' = -3$ га тенг, у ҳолда

$$k = \left|\frac{-3}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{16}\right)^3}}\right| = \frac{3}{\sqrt{\left(\frac{25}{16}\right)^3}} = \frac{192}{125}.$$

56- §. Ясси эгри чизиқлар

Силлиқ ясси эгри чизиқ ва унинг ҳар бир нуқтасидаги эгрилиги $k \neq 0$ бўлсин. Бу чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги буралиши нолга тенг: $k_1 = 0$. Ҳақиқатан ҳам, ясси чизиқ учун $\vec{\tau}$ ва $\vec{\nu}$ векторлар γ эгри чизиқ текислигига параллел, демак, $\vec{\beta}$ ўзгармас векторлардир. Шунинг учун $\frac{d\vec{\beta}}{ds} = 0$.

Бундан $k_1 = |(\vec{\beta}'\ \vec{\nu})| = 0$.

1-таъриф. Агар $\vec{N} = k\vec{\nu}$ — вектор M нуқтадан $\rho = \frac{1}{k}$ масофада ётса, ясси чизиқ учун $[M, \vec{\nu}]$ бош нормалда ётувчи P нуқта эгри чизиқнинг M нуқтадаги *эгрилик маркази* дейилади.

P нуқтанинг радиус векторини $\vec{p}$ билан белгиласак,

$$\vec{p} = \vec{r} + \rho\vec{\nu} \tag{1}$$

ҳосил бўлади. Френе формуласига кўра $k\vec{\nu} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}$, бундан $\vec{\nu} = \frac{1}{k}\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ ни топамиз, у ҳолда (1) формула қуйидаги кўринишга келади: $\vec{p} = \vec{r} + \frac{1}{k^2}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{ds}$.

Эгри чизиқ $y = y(x)$ тенглама билан берилган бўлсин. Бу тенгламани вектор кўринишда ёзсак, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. (2)

Бундан

$$\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dx} = \vec{i} + y'\vec{j}, \quad \frac{ds}{dx} = |\vec{r}'| = \sqrt{1 + y'^2}, \quad \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}},$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = (\vec{i} + y'\vec{j})\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\vec{j}.$$

$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}$ ни ҳисоблаб чиқайлик:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{-y'y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}\vec{i} + \frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}j = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}\cdot(-y'\vec{i} + \vec{j}).$$

У ҳолда

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = (-y'\vec{i} + \vec{j})\frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ёки

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{y''}{(1+y'^2)^3}(-y'\vec{i} + \vec{j}). \tag{3}$$

(3) дан $\frac{d\vec{\tau}}{ds}$ нинг қийматини (1) га қўямиз:

$$\vec{p} = \vec{r} + \frac{1}{k^2}\cdot\frac{y''}{(1+y'^2)^3}(-y'\vec{i} + \vec{j}) \text{ ёки } k = \frac{(y'')}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}.$$

Бундан:

$$\vec{p} = \vec{r} + \frac{1+y'^2}{y''}(-y'\vec{i} + \vec{j}).$$

Агар P нуқтанинг координатаси (ζ, η) бўлса,

$$\zeta\vec{i}+\zeta\vec{j}=x\vec{i}+y\vec{j}+\frac{1+y'^2}{y''}(-y'\vec{i}+\vec{j})=\left(x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''}\right)\vec{i}+$$
$$+\left(y+\frac{1+y'^2}{y''}\right)\vec{j}.$$

Бундан эгрилик марказининг координаталарини топамиз:

$$\zeta=x-\frac{(1+y'^2)y'}{y''},\quad \eta=y+\frac{1+y'^2}{y''}.$$

2- таъриф. Эгри чизиқ эгрилик марказларининг геометрик ўрни шу эгри чизиқнинг *эволютаси* дейилади. Эгри чизиқ $x=x(t)$, $y=y(t)$ тенгламалар билан берилган бўлса, эволютанинг параметрик тенгламалари:

$$\zeta=x(t)-y'(t)\frac{x'^2(t)-y'^2(t)}{x'(t)y'(t)-x''(t)y'(t)},\ \eta=y(t)+x'(t)\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}.$$

Мисоллар. 1. $y=\sin x$ эволютасининг тенгламалари тузилсин.
Ечиш:

$$y'=\cos x,\ y''=-\sin x,$$
$$\zeta=x-\cos x\frac{1+\cos^2 x}{-\sin x}=x+\cos x\frac{1+\cos^2 x}{\sin x},$$
$$\eta=\sin x+\frac{1+\cos^2 x}{-\sin x}=\frac{\sin^2 x-1-\cos^2 x}{\sin x}=-\frac{2\cos^2 x}{\sin x}.$$

2. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ эллипс эволютасининг параметрик тенгламалари тузилсин.

Ечиш:

$$x'=-a\sin t,\ x''=-a\cos t;$$
$$y'=b\cos t,\ y''=-b\sin t.$$
$$\zeta=a\cos t-b\cos t\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t;$$
$$\eta=b\sin t-a\sin t\frac{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}{ab\sin^2 t+ab\cos^2 t}=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

Демак, эволютанинг тенгламаси:

$$\zeta=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\ \eta=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t.$$

57- §. Евклид фазосида сиртлар. Сирт тушунчаси

1- таъриф. Очиқ доиранинг евклид текислигидаги гомеоморф образи *элементар соҳа* дейилади.

Тўғри тўртбурчак, квадрат, трапеция ва эллипснинг ички қисмлари элементар соҳалардир.

2-таъриф. Текисликдаги элементар соҳанинг E_3 фазодаги гомеоморф образи *элементар сирт* дейилади.

Текислик, эллиптик ва гиперболик параболоидлар, параболик цилиндр элементар сиртдир.

3-таъриф. Фазода нуқталарнинг Φ тўплами боғланган бўлиб, унинг ҳар бир X нуқтаси шундай G атрофга эга бўлсаки, Φ тўпламининг G атрофга жойлашган қисми элементар сирт бўлса, Φ тўплам *содда сирт* дейилади.

Таърифдан кўринадики, ҳар қандай элементар сирт содда сиртдир. Лекин ҳар қандай содда сирт доим элементар сирт бўлавермайди. Масалан, сфера содда сирт, лекин элементар сирт эмас, ёки эллиптик цилиндр содда сирт, лекин элементар сирт эмас.

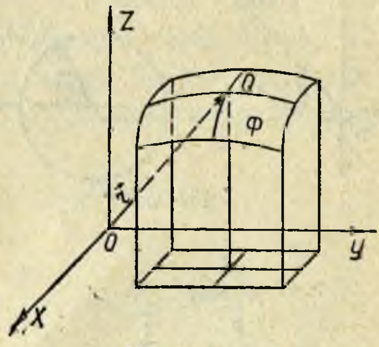
G — текисликдаги элементар соҳа бўлсин, у ҳолда 1-таърифга кўра $f{:}G \to E_3$ гомеоморфизм E_3 фазода содда Φ сиртни аниқлайди. $P \in G$ нуқтанинг декарт координаталари (u,v), $Q = f(P) \in \Phi$ нуқтанинг координаталари эса x,y,z бўлсин. Демак, Φ сиртдаги Q нуқтанинг x,y,z координаталари G соҳадаги P нуқта координаталарининг функцияларидан иборатдир:

$$x = f_1(u,v), \quad y = f_2(u,v), \quad z = f_3(u, v). \tag{1}$$

(1) тенгламалар содда сиртнинг параметрик тенгламалари дейилади. Таърифга кўра f_1, f_2, f_3 функциялар G соҳада узлуксиз функциялардир. Агар (1) тенгламалар системасида f_1, f_2, f_3 функциялар k-тартиблигача узлуксиз ҳосилаларга эга бўлса, Φ сирт *регуляр* дейилади. $k = 1$ да Φ сирт *силлиқ* сирт дейилади. (1) нинг учта тенгламаси битта

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) = f_1(u,v)\,\vec{i} + f_2(u,v)\,\vec{j} + f_3(u,v)\,\vec{k} \tag{2}$$

вектор тенгламага эквивалентдир.



131- чизма

Бу ерда $\vec{r} = \vec{OQ}$ сиртга (131- чизма) қарашли Q нуқтанинг радиус-вектори $Q \in \Phi$ нуқтани аниқлайди. (1) тенгламаларда u (ёки v) ўзгармас ҳисобланса, бу тенгламалар сирт устидаги эгри чизиқни аниқлайди. u,v сонлар сиртдаги нуқтанинг эгри чизиқли координаталари дейилади. Агар Φ сиртнинг (1) параметрик тенгламаларида $x = u, y = v$ десак, $z = f(x,y)$ кўринишдаги тенгламани ҳосил қиламиз. Демак, сирт параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, улардан ошкор кўринишли тенгламага ўтиш мумкин. Кўп ҳолларда сирт деб $F(x,y,z) = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламига айтилади. Бу ерда $F(x,y,z)$ функция бирор V соҳада узлуксиз ва биринчи тартибли F'_x, F'_y, F'_z узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга. Агар сиртнинг бирор M_0 нуқтасида $F'_{x_0} = F'_{y_0} = F'_{z_0} = 0$ бўлса, бу нуқта сиртнинг *махсус нуқтаси* дейилади.

Мисоллар. 1. Торнинг параметрик тенгламалари тузилсин.

Тор деб $(x-a)^2+y^2=r^2$ айланани унинг текислигида ётган ва Oz ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сиртга айтилади. Айлана Oz ўқ билан кесишмайди деб фараз қиламиз: $r<a$ (132-чизма). Айлананинг параметрик тенгламалари:

$$x-a=r\cos\theta,\quad y=0,\quad z=r\sin\theta$$

ёки

$$x=a+r\cos\theta,\quad y=0,\quad z=r\sin\theta.$$

Бу айланани OZ ўқ атрофида айлантирганда $\rho=\sqrt{x^2+y^2}=a+$ $+r\cos\theta$ масофа ўзгармайди. OZ ўқ атрофида буриш бурчагини φ билан белгиласак, торнинг параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз:

$$x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi,\quad z=r\sin\theta$$

ёки

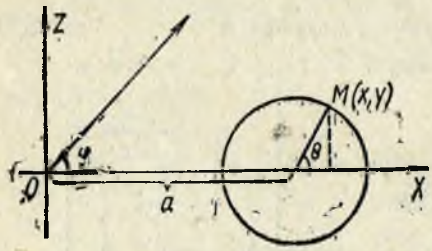
$$x=(a+r\cos\theta)\cos\varphi,\quad y=(a+r\cos\theta)\sin\varphi,\quad z=r\sin\theta,$$

бу ерда $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$.

2. Геликоиднинг параметрик тенгламалари тузилсин.

Тўғри геликоид деб Oz ўққа тик AB нурни шу ўқ атрофида текис айланишидан ва айланиш бурчагига пропорционал тезлик билан Oz ўқ бўйлаб силжишидан ҳосил қилинган сиртга айтилади.

Геликоиднинг параметрик тенгламаларини тузайлик (133-чизма). Геликоид устидаги нуқтанинг эгри чизиқли координаталари сифатида ундан OZ ўққача бўлган масофа $MA=u$ ва геликоидни ҳосил қиладиган нур MA (ясовчи) нинг бошланғич ҳолати деб ҳисоблаиган OP нинг OX ўқ билан ташкил этган $\angle XOP=v$ бурчагини оламиз.



132- чизма

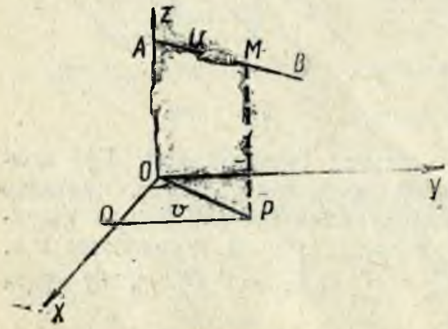
У ҳолда $\Delta\,OQP$ дан

$$x=OQ=OP\cos v=u\cos v,$$

$$y=QP=u\sin v,\quad z=OA=av,$$

чунки Q нуқтадан бошлаб ўтилган йўл v бурчакка пропорционалдир. Демак, геликоиднинг параметрик тенгламалари:

$$x=u\cos v,\quad y=u\sin v,\quad z=av.$$



133- чизма

3. $x=x_0+a\cos u\cos v,$
$y=y_0+b\cos u\sin v,$
$z=z_0+c\sin u$

параметрик тенгламалар билан берилган сиртнинг ноошкор тенгламаси тузилсин.

Ечиш. Бунинг учун берилган тенгламалардан u, v параметрларни йўқотамиз:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= a\cos u\cdot\cos v,\\ y - y_0 &= b\cos u\cdot\sin v,\\ z - z_0 &= c\sin u \end{aligned}\right\} \text{ёки}$$

$$\frac{x-x_0}{a} = \cos u\cos v,\quad \frac{y-y_0}{b} = \cos u\cdot\sin v,\quad \frac{z-z_0}{c} = \sin u.$$

Бу тенгламалардан:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2} = 1.$$

Бу эллипсоиднинг тенгламасидир.

58- §. Сиртнинг уринма текислиги

Φ сирт $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ тенглама билан берилган бўлсин. G соҳада $u = u(t)$, $v = v(t)$, $t \in [t_0, t_1] \subset R$ тенгламалар билан аниқланган силлиқ чизиқ олайлик. $[t_0, t_1]$ оралиқда $u(t)$, $v(t)$ функциялар k- тартиблигача ҳосилаларга эга бўлиб, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ ҳосилалар бир вақтда нолга айланмасин. $\vec{r}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$ тенглама сиртда бирор регуляр чизиқни аниқлайди. Бу тенгликдан

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}'_u u'(t) + \vec{r}'_v v'(t).$$

Демак, $\vec{r}'(t)$ вектор $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторлар билан битта текисликда ётади. Шундай қилиб, сиртда олинган силлиқ эгри чизиқнинг P нуқтасидаги уринмаси $u = \text{const}$ ва $v = \text{const}$ чизиқларнинг $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ уринмалари билан битта текисликда ётади. Бу текисликни сиртга P нуқтада ўтказилган *уринма текислик* дейилади. Агар $\vec{R} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ вектор уринма текисликдаги ўзгарувчи Q нуқтанинг радиус вектори бўлса, $\vec{PQ} = \vec{R} - \vec{r}$ вектор ҳам уринма текисликда ётади (134- чизма). Шундай қилиб, $\vec{PQ} = \vec{R} - \vec{r}$, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторлар компланар векторлардир, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, яъни

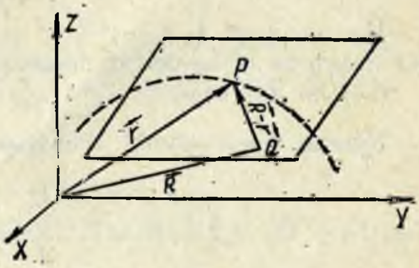
$$(\vec{R} - \vec{r}(u,v),\ \vec{r}_u(u,v),\ \vec{r}_v(u,v)) = 0.$$

Бу тенглама уринма текисликнинг тенгламасидир.

Агар сирт $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, уринма текисликнинг тенгламаси

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x(u,v) & \tilde{y} - y(u,v) & \tilde{z} - z(u,v) \\ x_u(u,v) & y_u(u,v) & z_u(u,v) \\ x_v(u,v) & y_v(u,v) & z_v(u,v) \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда бўлади.



134- чизма

Сирт $z = z(x,y)$ тенглама билан берилса, яъни

$$x = u, \; y = v, \; z = z(u,v)$$

деб фараз қилинса, уринма текисликнинг тенгламаси

$$\begin{vmatrix} \tilde{x} - x & \tilde{y} - y & \tilde{z} - z \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = 0$$

ёки

$$\tilde{z} - z = z_x(\tilde{x} - x) + z_y(\tilde{y} - y) = 0$$

кўринишни қабул этади.

Агар $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ чизиқ $F(x,y,z) = 0$ сиртда ётса, $F(x(t), \; y(t), \; z(t)) = 0$. Бундан:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = 0.$$

Сиртнинг оддий нуқтасида $\vec{N} = \left\{\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}\right\}$ вектор нолдан фарқли бўлса, охирги тенгликни $\vec{N} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$ кўринишда ёзиш мумкин. $\vec{r}'(t)$ вектор сирт устидаги чизиқнинг уринма векторидир. Энди уринма текисликдаги ўзгарувчи (ихтиёрий) Q нуқтанинг радиус-векторини $\vec{R}$ билан белгиласак, $\vec{N}$ вектор уринма текисликка қарашли $\vec{R} - \vec{r}$ вектор билан ҳам ортогонал бўлади, яъни $\vec{N} \cdot (\vec{R} - \vec{r}) = 0$. Q нуқтанинг координаталарини $(X,У,Z)$ десак, уринма текисликнинг тенгламаси

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0$$

кўринишда бўлади. Уринма текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ сиртнинг *нормали* дейилади. Нормалнинг тенгламалари:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Мисоллар. 1. $z = x^3 + y^3$ сиртнинг $M(1, 2, 9)$ нуқтадаги уринма текислиги ва нормалининг тенгламалари тузилсин.

Ечиш. Тенгламадан $z_x\Big|_{x=1} = (3x^2)\Big|_{x=1} = 3$, $z_y\Big|_{y=2} = (3y^2)\Big|_{y=2} = 12$.

Уринма текисликнинг тенгламаси:

$$z - 9 = 3(x - 1) + 12(y - 2)$$

ёки $3x + 12y - z - 18 = 0$. Нормалнинг тенгламалари:

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{12} = \frac{z - 9}{-1}.$$

2. Ушбу $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ сиртнинг уринма текислиги ва нормалининг тенгламалари тузилсин.

Ечиш. $x_u = \cos v$, $y_u = \sin v$, $z_u = 0$,

$x_v = -u\sin v$, $y_v = u\cos v$, $z_v = a$.

Уринма текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-u\cos v & y-u\sin v & z-av \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix} = ax\sin v - ay\cos v + zu - auv = 0;$$

нормаль тенгламалари:

$$\frac{x-u\cos v}{a\sin v} = \frac{y-u\sin v}{-a\cos v} = \frac{z-av}{v}.$$

3. $x^2+y^2-z^2=1$ сиртнинг M (2,2,3) нуқтасидаги уринма текислиги ва нормалининг тенгламалари тузилсин.

Ечиш.

$$F(x,y,z) = x^2+y^2-z^2-1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y,\ \frac{\partial F}{\partial z} = -2z;$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=2} = 4,\ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=2} = 4,\ \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=3} = -6.$$

Уринма текислигининг тенгламаси: $2x+2y-2z+1=0$; нормалнинг тенгламалари: $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-3}$.

59. §. Сиртнинг биринчи квадратик формаси. Сирт устидаги чизиқнинг узунлиги

Сиртлар тузилишини ўрганишда шу сирт устида ётган эгри чизиқлар хусусиятларини билиб олиш муҳим роль касб этади. Регуляр сирт $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ тенглама билан берилган бўлсин. Сиртда ётган ва $u = u(t)$, $v = v(t)$ тенглама билан берилган эгри чизиқни оламиз: $\vec{r} = \vec{r}\,(u(t), v(t))$. Бундан:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\frac{dv}{dt},$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\vec{r}_u\cdot\frac{du}{dt} + \vec{r}_v\cdot\frac{dv}{dt}\right| = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + \vec{r}_v^{\,2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}.$$

Аммо $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$. Демак,

$$ds = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + \vec{r}_v^{\,2}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{1}$$

Бу ерда $E = \vec{r}_u^{\,2}$, $G = \vec{r}_v^{\,2}$, $F = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v$ белгилашлар киритамиз.

$\vec{r} = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$ дан:

$$E = \vec{r}_u^{\,2} = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,\quad G = \vec{r}_v^{\,2} = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2,$$

$$F = \vec{r}_u\,\vec{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v.$$

Натижада $ds = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt.$

Бу тенгликниг ҳар икки томонини квадратга кўтарсак:

$$ds^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 dt^2$$

ёки

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2. \qquad (2)$$

Тенглнкнинг ўнг томонидаги ифода сиртнинг *биринчи квадратик формаси* дейилади. E,F,G лар биринчи квадратик форманинг коэффициентлари дейилади. Агар бу коэффнциентлар маълум бўлса, берилган эгри чизиқнинг $t = t_1$, $t = t_2$ қийматларига мос келган нуқталари орасидаги ёй узунлигини (1) дан топамиз:

$$S = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\cdot dt.$$

Мисоллар. 1. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = au$ геликоиднинг биринчи квадратик формаси топилсин.

Ечиш. $x_u = \cos v$, $\quad y_u = \sin v$, $\quad z_u = a$

$x_v = -u\sin v$, $\quad y_v = u\cos v$, $\quad z_v = 0$.

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + a^2 = 1 + a^2,\quad G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2;$$

$$F = -u\sin v\cos v + u\sin v\cos v = 0,$$

$$ds^2 = (1 + a^2)\,du^2 + u^2dv^2.$$

2. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ сирт устида ётган $v = au$ чизиқ ёйи узунлигининг дифференциали топилсин.

Ечиш: $x_u = 2u$, $\quad y_u = 2u$, $\quad z_u = v$;

$x_v = 2v$, $\quad y_v = -2v$, $\quad z_v = u$.

$$E = 4u^2 + 4u^2 + v^2 = 8u^2 + v^2,\quad G = 4v^2 + 4v^2 + u^2 = 8v^2 + u^2;$$

$$F = 4uv - 4uv + uv = uv;$$

$$ds^2 = (8u^2 + v^2)\,du^2 + 2uvdudv + (8v^2 + u^2)\,dv^2 \qquad (*)$$

$v = au$ дан: $dv = adu$. (*) тенгликни қуйидагича ёзамиз:

$$ds^2 = (8u^2 + a^2u^2)\,du^2 + 2u\cdot au\cdot adu^2 + (8a^2u^2 + u^2)\,a^2\,du^2 = (8u^2 +$$
$$+ a^2u^2 + 2a^2u^2 + 8a^4u^2 + a^2u^2)\,du^2 = (8u^2 + 4a^2u^2 + 8a^4u^2)\,du^2 =$$
$$= 4\,(2a^4 + a^2 + 2)\,u^2du^2.$$

Демак, $ds = 2\cdot\sqrt{2a^4 + a^2 + 2}\;udu.$

60- §. Сирт устидаги чизиқлар орасидаги бурчак

Сиртда ётувчи кесишувчи γ, γ_1 силлиқ чизиқларни олайлик. γ, γ_1 чизиқлар орасидаги бурчак деб уларнинг кесишган нуқтасига ўтказилган уринмалари орасидаги бурчакка айтилади.

Сирт $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ тенглама билан берилган бўлсин. γ, γ_1 чизиқларининг кесишган нуқтасини M_0 билан ва шу нуқтада уларга ўтказилган уринмаларни (M_0M) ва (M_0N) билан белгилаймиз. Бу уринмаларнинг йўналтирувчи векторлари $d\vec{r}$ ва $\delta\vec{r}$ бўлсин. У ҳолда γ, γ_1 чизиқлар орасидаги φ бурчакни ҳисоблаш $d\vec{r}$ ва $\delta\vec{r}$ векторлар орасидаги бурчакни ҳисоблаш демакдир.

$$\cos\varphi = \frac{d\vec{r}\cdot\delta\vec{r}}{|d\vec{r}|\cdot|\delta\vec{r}|},$$

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv, \quad \delta\vec{r} = \vec{r}_u\,\delta u + \vec{r}_v\,\delta v,$$

$$d\vec{r}^2 = \vec{r}_u^2\, du^2 + 2\vec{r}_u\vec{r}_v\, du\, dv + \vec{r}_v\, dv^2,$$

$$\delta\vec{r}^2 = \vec{r}_u^2\,\delta u^2 + 2\,\vec{r}_u\vec{r}_v\,\delta u\,\delta v + \vec{r}_v^2\,\delta v^2$$

ёки

$$d\vec{r}^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \quad \delta\vec{r}^2 = E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2,$$

$$d\vec{r}\cdot\delta\vec{r} = \vec{r}_u^2\cdot du\,\delta u + \vec{r}_u\vec{r}_v\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \vec{r}_v^2 dv\,\delta v =$$

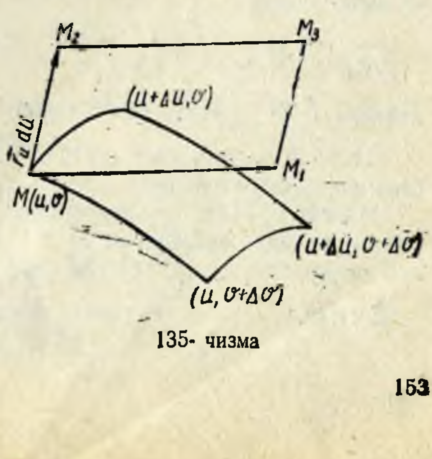
$$= Edu\,\delta u + F\cdot(du\,\delta v + dv\,\delta u) + Gdv\,\delta v;$$

у ҳолда

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F\,(du\,\delta v + dv\,\delta u) + Gdv\,\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

61- §. Сирт устидаги соҳанинг юзи

Юқорида эгри чизиқ ёйининг узунлиги ва эгри чизиқлар орасидаги бурчакни ҳисоблаш учун сиртнинг биринчи квадратик формасини билиш етарли эканлигини кўрдик. Энди сирт устидаги соҳа юзини ҳисоблаш учун ҳам сиртнинг биринчи квадратик формасини билиш етарли эканлигини кўрсатамиз. Сирт $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ тенглама билан берилган бўлсин. Сиртда бирор G ёпиқ соҳа олиб, уни $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ координат чизиқлар билан тўртбурчакларга ажратиб чиқамиз. Бу тўртбурчакларнинг ҳар бирини M нуқтадаги уринма векторларга қурилган параллелограммларга проекциялаймиз (135- чизма). M_1, M_2 нуқталарнинг радиус векторларини OM_1, OM_2 десак,



135- чизма

$\vec r(u+\Delta u,\ v)-\vec r(u,\ v)=\vec r_u\Delta u+\vec\varepsilon_1\Delta u,\ \vec r(u,\ v+\Delta v)-\vec r(u,\ v)=$
$=\vec r_v\Delta v+\vec\varepsilon_2\Delta v$, бу ерда $\vec\varepsilon_1,\ \vec\varepsilon_2$ лар $\Delta u,\ \Delta v$ билан бирга нолга интилади.

Шунинг учун:

$$\overrightarrow{OM_2}=\vec r(u+\Delta u,\ v)=\vec r(u,\ v)+\vec r_u\Delta u+\vec\varepsilon_1\Delta u,$$
$$\overrightarrow{OM_1}=\vec r(u,v+\Delta v)=\vec r(u,v)+\vec r_v\Delta v+\vec\varepsilon_2\Delta v,$$
$$\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM}=\vec r(u,v+\Delta v)-\vec r(u,\ v),$$
$$\overrightarrow{MM_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM}=\vec r(u+\Delta u,v)-\vec r(u,v).$$

Бу тенгликларга Лагранжнинг чекли орттирмалар ҳақидаги теоремасини қўллаймиз:

$$\overrightarrow{MM_1}=\Delta v\cdot\vec r_v(u,v+\theta\Delta v),$$
$$\overrightarrow{MM_2}=\Delta u\cdot\vec r_u(u+\theta\Delta u,v).$$

Юқори тартибли чексиз кичикларии ҳисобга олмасак,

$$\overrightarrow{MM_1}=\vec r_v\Delta v,\ \overrightarrow{MM_2}=\vec r_u\Delta u.$$

Эгри чизиқли тўртбурчак юзини $\overrightarrow{MM_1},\ \overrightarrow{MM_2}$ векторларга қурилган параллелограмм юзи билан алмаштирсак, $\Delta S_i=|[\vec r_u,\ \vec r_v]|\Delta u\cdot\Delta v$ бўлади. Агар бундай юзларни ҳар бир эгри чизиқли тўртбурчаклар учун ҳисобласак, G соҳанинг юзи $\sum\limits_i\Delta S_i=\sum\limits_i|[\vec r_u,\ \vec r_v]|\Delta u\Delta v$ га тенг. Бундан $\Delta u,\ \Delta v$ нолга интилганда лимитга ўтсак, эгри чизиқли тўртбурчакларнинг сони чексизликка интилади ва G соҳаиинг юзи

$$S=\lim_{\substack{\Delta u\to0\\ \Delta v\to0}}\sum_i\Delta S_i=\iint\limits_G\left|\left[\vec r_u,\ \vec r_v\right]\right|dudv$$

га тенг. Аммо

$$\left|\left[\vec r_u,\ \vec r_v\right]\right|=\sqrt{\left[\vec r_u,\ \vec r_v\right)^2}=\sqrt{\vec r_u^{\,2}\vec r_u^{\,2}-\left(\vec r_u\vec r_v\right)^2}=\sqrt{EG-F^2}.$$

Демак, $S=\iint\limits_G\sqrt{EG-F^2}\,dudv.$

Шундай қилиб, сирт устидаги соҳа юзини ҳисоблаш учун сиртнинг биринчи квадратик формасини билиш етарлидир.

Мисол. Тўғри геликоид берилган: $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ x=av$. Унинг устида жойлашган ва $u=0,\ u=a;\ v=0,\ v=1$ чизиқлар билан чегараланган тўртбурчакнинг юзи топилсин.

Ечиш. $x_u=\cos v,\quad y_u=\sin v,\quad z_u=0;$
$x_v=-u\sin v,\quad y_v=u\cos v,\quad z_v=a;$

$$E=\cos^2 v+\sin^2 v+0=1,\quad F=-u\cos v\cdot\sin v+u\cos v\cdot\sin v=0,$$
$$G=u^2\sin^2 v+u^2\cos^2 v+a^2=a^2+u^2.$$
$$S=\int_0^1\int_0^a\sqrt{a^2+u^2}\,du\,dv=\int_0^1 dv\int_0^a\sqrt{a^2+u^2}\,du.$$

$\int_0^a\sqrt{a^2+u^2}\,du$ интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$t=\sqrt{a^2+u^2},\quad dt=\frac{udu}{\sqrt{a^2+u^2}};\quad dx=du,\ x=u.$$
$$\int_0^a\sqrt{a^2+u^2}\,du=u\sqrt{a^2+u^2}\,\Big|_0^a-\int_0^a\frac{u^2du}{\sqrt{u^2+a^2}}=a^2\sqrt{2}-$$
$$-\int_0^a\frac{u^2+a^2-a^2}{\sqrt{u^2+a^2}}\,du=a^2\sqrt{2}-\int_0^a\sqrt{u^2+a^2}\,du+a^2\int_0^a\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}.$$

Бунда $\int_0^a\sqrt{u^2+a^2}\,du$ ни тенгликнинг чап қисмига олиб ўтсак,

$$2\int_0^a\sqrt{u^2+a^2}\,du=a^2\sqrt{2}+a^2\ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)\Big|_0^a=a^2\sqrt{2}+$$
$$+a^2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

ёки

$$\int_0^a\sqrt{u^2+a^2}\,du=\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right);\quad S=\int_0^1\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2}+\right.$$
$$\left.+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)dv=\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right).$$

62- §. Сирт устидаги чизиқнинг эгрилиги. Сиртнинг иккинчи квадратик формаси

$\vec{r}=\vec{r}(u(s),\,v(s))$ (1) сиртда бирор γ эгри чизиқ олайлик. $\vec{r}$ дан s параметр бўйича олинган $\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}_u\frac{du}{ds}+\vec{r}_v\frac{dv}{ds}$ (2) ҳосила γ чизиқнинг M нуқтасига ўтказилган уринманинг бирлик векторидир. (2) ифодани s бўйича яна бир марта дифференциялаймиз:

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}+$$
$$+\vec{r}_{vu}\frac{dv}{ds}\frac{du}{ds}=\vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+$$
$$+\vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Френе формуласидан $\vec{r}'' = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{\nu}$ эканлиги маълум, бу ерда $\vec{\nu}$ бош нормалнинг бирлик вектори бўлиб, k эса γ эгри чизиқнинг эгрилигини билдиради. $\vec{r}'' = k\vec{\nu}$ эгрилик векторини сиртнинг $\vec{n}$ нормалига проекциялаймиз. Бунинг учун $\vec{r}''$ ни $\vec{n}$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$\vec{n}\cdot\vec{r}'' = \vec{n}\cdot k\vec{\nu} = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uu}\cdot u'^2 + 2\vec{n}\vec{r}_{uv}u'v' + \vec{n}\vec{r}_{vv}\cdot v'^2 +$$
$$+\vec{n}\cdot\vec{r}_u u'' + \vec{n}\cdot\vec{r}_v\cdot v''.$$

Сирт нормалининг бирлик $\vec{n}$ вектори $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторларга ортогонал бўлгани учун $\vec{n}\cdot\vec{r}_u = 0$, $\vec{n}\cdot\vec{r}_v = 0$,

$$\vec{n}\cdot\vec{r}'' = \vec{n}\vec{r}_{uu}u'^2 + 2\vec{n}\vec{r}_{uv}u'v' + \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv}v'^2.$$
$$\vec{n}\cdot\vec{r}_{uu} = L,\quad \vec{n}\cdot\vec{r}_{uv} = M,\quad \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv} = N$$

деб белгиласак, $\vec{n}\cdot\vec{r}'' = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ ифодани—сиртнинг иккинчи квадратик формасини ҳосил қиламиз. L, M, N лар эса унинг коэффициентлари дейилади. Бирлик $\vec{n}$ вектор $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторларга перпендикуляр бўлгани учун $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{\left|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\right|}$. Бу ерда $\left|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\right| = \sqrt{EG - F^2}$. Иккинчи квадратик форманинг коэффициентлари қуйидагича ифодаланади:

$$L = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uu} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uu}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}};$$

$$M = \vec{n}\cdot\vec{r}_{uv} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{uv}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}};$$

$$N = \vec{n}\cdot\vec{r}_{vv} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]\vec{r}_{vv}}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_u, \vec{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} = \frac{\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилган бўлса, L, M, N коэффициентлар қуйидагича ифодаланади:

$$L = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};\quad M = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}};$$

$$N = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}.$$

Мисоллар. 1. $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$ айланма параболоиднинг квадратик формаси ҳисоблансин.

Ечиш. $x_u = \cos v,\ y_u = \sin v,\ z_u = 2u;$
$x_v = -u\sin v,\ y_v = u\cos v,\ z_v = 0;$
$x_{uu} = 0,\ y_{uu} = 0,\ z_{uu} = 2;$
$x_{uv} = -\sin v,\ y_{uv} = \cos v,\ z_{uv} = 0;$
$x_{vv} = -u\cos v,\ y_{vv} = -u\sin v,\ z_{vv} = 0.$

$$E = \cos^2 v + \sin^2 v + 4u^2 = 1 + 4u^2;$$

$$F = -u\cos v\sin v + u\cos v\sin v = 0,\ G = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v = u^2.$$

$$L = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2(1+4u^2)}} = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}};\quad M = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2(1+4u^2)}} = 0;$$

$$N = \frac{\begin{vmatrix} u\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2(1+4u^2)}} = \frac{2u^2}{\sqrt{1+4u^2}}.$$

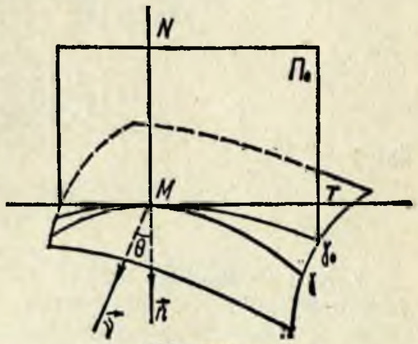
Демак:

$$\frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}du^2 + \frac{2u^2}{\sqrt{1+4u^2}}dv^2 = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}du^2 + \frac{2u^2}{\sqrt{1+4u}}dv^2.$$

63-§. Дюпен индикатрисаси

Сирт $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ тенглама билан берилган бўлсин, бу сиртда бирор M нуқта оламиз ва MT уринмани ўтказамиз. MT уринма ва сиртнинг M нуқтасидаги нормалидан ўтувчи кесувчи текислик сиртни эгри чизиқ бўйлаб кесади. Бу эгри чизиқ сиртнинг *нормал кесими* дейилади (136-чизма).

Кесувчи текисликни Π_0 билан, кесимни γ_0 билан, M нуқтадаги бош нормал билан сиртнинг $\vec{n}$ бирлик нормали орасидаги бурчакни θ билан белгиласак, γ_0 чизиқ учун $\theta = 0$ ёки $\theta = \pi$ га тенг бўлади, чунки γ_0 учун ёпишма текислик нормал текислик билан устма-уст тушади. Иккинчи квадратик форма $\vec{n}\vec{r}'' = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ ни биринчи квадратик форма $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ га бўлиб, $\frac{d^2\vec{\tau}}{ds^2} = k\vec{\nu}$ ни ҳисобга олсак, ушбу формула ҳосил бўлади:



136- чизма

$$k(\vec{\nu}\cdot\vec{n}) = k\cos\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

$\theta = 0$ ёки $\theta = \pi$ бўлганда $|\cos\theta| = 1$, демак, $k\,|\cos\theta| = k_0$ ёки $k\cos\theta = \pm k_0 = k_n$. Бу ерда k_n сирт нормал кесимининг эгрилиги. Нормал кесимнинг ботиқлиги сиртнинг $\vec{n}$ нормали томонига қаратилган бўлса, бу кесимнинг эгрилиги $k_n > 0$, акс ҳолда $k_n < 0$ бўлади. Шундай қилиб,

$$k_n = k\cos\theta = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}. \tag{1}$$

M нуқтада ҳар бир нормал кесим уринмасига M дан бошлаб узунлиги $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$ га тенг бўлган кесмаларни қўйиб чиқамиз. Бу кесмаларнинг учларидан тузилган эгри чизиқ сиртнинг *эгрилик индикатрисаси* ёки *Дюпен индикатрисаси* дейилади.

Дюпен индикатрисаси қандай эгри чизиқ эканлигини билиш учун урннма текисликда координат боши уриниш нуқтасида ётган Декарт системасини оламиз. Декарт системасининг ўқлари учун $\vec{r}_u$ ва $\vec{r}_v$ векторлар ётган тўғри чизиқларни қабул қиламиз ҳамда $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторларни базис векторлар сифатида қабул қиламиз.

$P(x, y)$ индикатрисанинг бирор нуқтаси бўлсин. У ҳолда

$$\vec{MP} = \frac{\vec{\tau}}{\sqrt{|k_n|}} = \left|\frac{1}{k_n}\right|^{\frac{1}{2}}\vec{\tau},$$

бу ерда

$$\vec{MP} = x\vec{r}_u + y\vec{r}_v \quad \text{ва} \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}.$$

$\vec{MP}$ — векторнинг бирлик вектори. Булардан:

$$x\vec{r}_u + y\vec{r}_v = \left|\frac{1}{k_n}\right|^{\frac{1}{2}}\left(\vec{r}_u\frac{du}{ds} + \vec{r}_v\frac{dv}{ds}\right),$$

$$x = \left|\frac{1}{k_n}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{du}{ds}, \qquad y = \left|\frac{1}{k_n}\right|^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{ds}$$

ёки

$$\frac{du}{ds} = \sqrt{|k_n|}\,x, \quad \frac{dv}{ds} = \sqrt{|k_n|}\,y.$$

γ эгри чизиқнинг нормал кесим эгрилигини ушбу кўринишда ифодалаш мумкин:

$$k_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Бу формулага $\frac{du}{ds}$, $\frac{dv}{ds}$ ларнинг қийматларини қўйиб,

$$Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1 \tag{2}$$

тенгламага келамиз, чунки бу ерда $k_n > 0$ бўлганда тенгламанинг ўнг томонида $+1$, $k_n < 0$ бўлганда -1 олинади. (2) Дюпен индикатрисасининг тенгламасидир. Бу тенглама қуйидаги чизиқларни аниқлайди:

а) тенглама дискриминанти $\Delta = LN - M^2 > 0$ бўлса, индикатриса эллипсдан иборат. Бу ҳолда, M *эллиптик нуқта* дейилади;

б) $\Delta = LN - M^2 < 0$ ҳолда индикатриса бир жуфт қўшма гиперболадан иборат бўлиб, M нуқта *гиперболик нуқта* дейилади;

в) $\Delta = LN - M^2 = 0$ бўлса, индикатриса бир жуфт параллел тўғри чизиқдан иборатдир, бу ҳолда M параболик нуқта дейилади.

Агар $\frac{1}{k_n}$ эгрилик ҳамма йўналишлар бўйича бир хил бўлса, Дюпен индикатрисаси айланадан иборат. Бу ҳолда M *юмалоқланиш нуқтаси* дейилади. Индикатрисанинг бош йўналишларидаги нормал кесимлар эгриликлари *бош эгриликлар* деб аталадилар, улар k_n нинг максимал ва минимал қийматларига мос келади. Биз бу факт исботини бермадик. Бош эгриликлар билан нормал эгрилик орасидаги муносабат Эйлернинг қуйидаги формуласи билан берилади:

$$k_n = k' \cos^2 \theta + k'' \sin^2 \theta.$$

64- §. Сиртнинг ўрта ва тўлиқ эгрилиги

Φ сиртнинг нормал эгрилиги

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

формуласида ўнг томонни du^2 га бўлиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$k_n = \frac{L + 2M\frac{dv}{du} + N\left(\frac{dv}{du}\right)^2}{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}.$$

Бу ерда $\frac{dv}{du} = \theta$ белгилашни киритсак:

$$k_n = \frac{L + 2M\theta + N\theta^2}{E + 2F\theta + G\theta^2} \quad \text{дан}$$

$$Ek_n + 2Fk_n\theta + Gk_n\theta^2 - L - 2M\theta - N\theta^2 = 0$$

ёки

$$(N - k_nG)\theta^2 - 2(M - k_nF)\theta + L - Ek_n = 0.$$

Бу тенглик θ га нисбатан квадрат тенгламадир. Бу тенгламада k_n фақат шундай қийматларни қабул қилиши керакки, тенглама ҳақиқий илдизларга эга бўлсин. Бунинг учун тенгламанинг дискриминанти $\Delta = (M - k_nF)^2 - (N - k_nG)(L - k_nE) \geqslant 0$ бўлиши керак, бу ерда қавсларни очиб, $(EG - F^2)k_n^2 - (LG + NE - 2MF)k_n + LN - M^2 = 0$ (k_n га нисбатан) тенглама ҳосил қиламиз. Унинг иккита k_{n_1}, k_{n_2} илдизлари бош эгриликлардир. Сиртнинг бош эгриликлари йиғиндисининг ярми сиртнинг *ўрта эгрилиги* дейилади. Сирт бош эгриликларининг кўпайтмаси *тўлиқ эгрилик* ёки баъзан *Гаусс эгрилиги* дейилади. Ўрта эгриликни H билан, тўлиқ эгриликни K билан белгиласак: $H = \frac{1}{2}(k_{n_1} + k_{n_2})$;

$$K = k_{n_1} \cdot k_{n_2}.$$

Виет теоремасига асосан

$$H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}; \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Мисол. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ билан берилган геликоиднинг ўрта ва тўлиқ эгрилиги топилсин.

Ечиш. $x_u = \cos v$, $\quad y_u = \sin v$, $\quad z_u = 0$;
$x_v = -u\sin v$, $\quad y_v = u\cos v$, $\quad z_v = a$;
$x_{uu} = 0$, $\quad y_{uu} = 0$, $\quad z_{uu} = 0$;
$x_{uv} = -\sin v$, $\quad y_{uv} = \cos v$, $\quad z_{uv} = 0$;
$x_{vv} = -u\cos v$, $\quad y_{vv} = -u\sin v$, $\quad z_{vv} = 0$;

$$E = 1, \ F = 0, \ G = u^2 + a^2, \ EG - F^2 = u^2 + a^2.$$

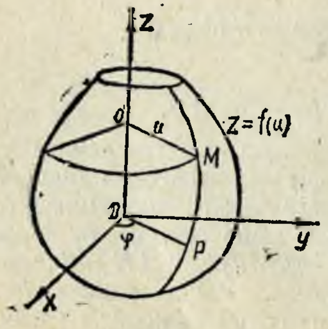
$$L = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0;$$

$$M = \frac{\begin{vmatrix} -\sin v & \cos v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{a^2 + u^2}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}}; \quad N = \frac{\begin{vmatrix} -a\cos v & -u\sin v & 0 \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & a \end{vmatrix}}{\sqrt{u^2 + a^2}} = 0.$$

Демак,

$$H = \frac{1}{2}\,\frac{0\,(u^2 + a^2) - 2\left(-\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}\right)\cdot 0 + 0\cdot 1}{u^2 + a^2} = 0,$$

$$K = \frac{0 - \frac{a^2}{a^2 + u^2}}{u^2 + a^2} = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)}.$$



137- чизма

65- §. Эгрилиги ўзгармас сиртлар

Тўлиқ эгрилиги ўзгармас сиртлар синфини текширишга ўтамиз. Аввало айланма сирт ҳақида тушунча ҳосил қилайлик. Ясси эгри чизиқни шу чизиқ текислигидаги бирор ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган сирт *айланма сирт* дейилади.

Π текисликда ётган γ чизиқни Oz ўқ атрофида айлантирайлик (137- чизма). Бу чизиқ XOZ текислигида $z = f(u)$ тенглама билан берилган бўлсин ва $\angle XOP = \varphi$. γ

чизиқда M нуқтани оламиз, φ бурчак $[0, 2\pi]$ оралиқда ўзгарганда M нуқта маркази O' нуқтада бўлган γ_M айланани чизади. У ҳолда $F = \bigcup_{M \in \gamma} \gamma_m$. M нуқтанинг Декарт координаталари x, y, z бўлса, у ҳолда айланма F сиртнинг параметрик тенгламалари:

$$x = u\cos\varphi,\ y = u\sin\varphi,\ z = f(u).$$

Агар $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ M нуқтанинг радиус вектори бўлса, сиртнинг вектор тенгламаси

$$\vec{r} = \vec{r}(u, \varphi) = \vec{i}\, u\cos\varphi + \vec{j}\, u\sin\varphi + \vec{k} f(u)$$

кўринишда бўлади. Бундан

$$\vec{r}_u = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi + \vec{k} f'(u), \quad \vec{r}_\varphi = -\vec{i}\, u\sin\varphi + \vec{j}\, u\cos\varphi.$$

Демак,

$$x_u = \cos\varphi,\ y_u = \sin\varphi,\ z_u = f'(u);$$
$$x_\varphi = -u\sin\varphi,\ y_\varphi = u\cos\varphi,\ z_\varphi = 0.$$

У ҳолда

$$E = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi + f'^2(u) = 1 + f'^2(u),\ F = 0,\ G = u^2,$$
$$EG - F^2 = u^2(1 + f'^2(u));$$
$$x_{uu} = 0,\ y_{uu} = 0,\ z_{uu} = f''(u);$$
$$x_{u\varphi} = -\sin\varphi,\ y_{u\varphi} = \cos\varphi,\ z_{u\varphi} = 0,$$
$$x_{\varphi\varphi} = -u\cos\varphi,\ y_{\varphi\varphi} = -u\sin\varphi,\ z_{\varphi\varphi} = 0$$
$$L = \frac{uf''(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}};\quad M = 0;$$
$$N = \frac{u^2 f'(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}}.$$

Сиртнинг M нуқтадаги тўлиқ эгрилиги:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\dfrac{uf''(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}} \cdot \dfrac{u^2 f'(u)}{u\sqrt{1 + f'^2(u)}}}{u^2(1 + f'^2(u))} = \frac{f'(u)\cdot f''(u)}{u(1 + f'^2(u))^2}.$$

Мисол. Сферанинг тўлиқ эгрилиги ҳисоблансин.

Сферанинг параметрик тенгламаси:

$$x = a\cos u\cos v,\ y = a\cos u\sin v,\ z = a\sin u.$$

Булардан:

$$x_u = -a\sin u\cos v,\ y_u = -a\sin u\sin v,\ z_u = a\cos u;$$
$$x_v = -a\cos u\sin v,\ y_v = a\cos u\cos v,\ z_v = 0;$$
$$E = a^2,\ F = 0,\ G = a^2\cos^2 u;$$
$$EG - F^2 = a^2\cdot a^2\cos^2 u - 0 = a^4\cos^2 u.$$

У ҳолда биринчи квадратик форма:

$$\mathrm{I} = a^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2);$$

$$x_{uu} = -a \cos u \cos v, \quad y_{uu} = -a \cos u \sin v, \quad z_{uu} = -a \sin u;$$

$$x_{uv} = a \sin u \sin v, \ y_{uv} = -a \sin u \cos v, \ z_{uv} = 0;$$

$$x_{vv} = -a \cos u \cos v, \ y_{vv} = -a \cos u \sin v, \ z_{vv} = 0.$$

Бундан

$$L = a, \ M = 0, \ N = a \cos^2 u.$$

Иккинчи квадратик форма: $\mathrm{II} = a (du^2 + \cos^2 u \, dv^2)$; ўрта эгрилиги

$$K_n = \frac{a(du^2 + \cos^2 u dv^2)}{a^2 (du^2 + \cos^2 u dv^2)} = \frac{1}{a};$$

тўлиқ эгрилиги

$$K = \frac{a \cdot a \cos^2 u}{a^4 \cos^2 u} = \frac{1}{a^2}.$$

Демак, сферанинг ихтиёрий нуқтасидаги тўлиқ эгрилиги ўзгармасдир.

66- §. Сиртнинг ички геометрияси

Сиртни ўрганишда биз унинг ички ва ташқи хоссаларини алоҳида ўрганамиз. Сиртнинг ички хоссаларига сиртнинг биринчи квадратик формаси ёрдамида ошкор этиладиган хоссалари киради. Масалан, сирт устидаги чизиқларнинг узунликларига боғлиқ хоссалар.

1- таъриф. Φ, Φ' сиртнинг мос чизиқлари узунликларини сақлайдиган φ: $\Phi \to \Phi'$ биектив акслантириш *изометрик акслантириш* дейилади.

Таърифдан кўринадики, изометрик акслантиришда сиртларнинг ички хоссалари ўзгармайди. Масалан, агар Φ сиртни чўзилмайдиган мустаҳкам плёнкадан иборат деб қараб уни деформацияласак, янги Φ' сирт ҳосил бўлади. Ҳосил бўлган Φ' сирт билан Φ сиртнинг ички хоссалари бир хил эканлиги равшан.

2- таъриф. Агар Φ' сирт Φ сиртни узлуксиз деформациялаш натижасида ҳосил қилинган бўлса, у ҳолда Φ' сиртни Φ сиртнинг *эгилиш натижаси* дейилади.

Масалан, оддий қоғоз варағидан цилиндр ва конус ҳосил қилинса, варақ сиртига изометрик бўлган сирт ҳосил бўлади. Иккита сиртнинг изометрик бўлиш шартини келтирамиз.

Теорема. Биринчи квадратик формалари бир хил бўлган икки сирт изометрик бўлади ва аксинча.

Исботи. Ҳақиқатан ҳам, φ: $\Phi \to \Phi'$ акслантириш берилган бўлиб, у изометрик акслантириш бўлсин. $M \in \Phi$ нуқтани олайлик. Унинг координаталари (u, v) бўлса, у ҳолда $\varphi(M) = M' \in \Phi'$ нуқтанинг координаталари ҳам (u, v) дан иборат бўлади. Демак, агар Φ сиртда γ эгри чизиқ олинган бўлиб, унинг тенгламалари $u = u(t)$, $v = v(t)$ бўлса, у ҳолда $\varphi(\gamma) = \gamma' \subset \Phi'$ эгри чизиқнинг тенгламалари ҳам $u = u(t)$, $v = v(t)$ кўринишида бўлади. Шунинг учун изометрик акслантиришда ёй узунлиги сақланади:

$$\int_a^t \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \, dt = \int_a^t \sqrt{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2} \, dt.$$

Бу тенглик ихтиёрий M нуқта учун ўринли бўлгани учун

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2,$$

бундан $E = E'$, $F = F'$, $G = G'$ (*). Демак, Φ, Φ' сиртлар изометрик бўлса, уларнинг биринчи квадратик формалари бир хил бўлади. Аксинча, агар (*) муносабатлар ўринли бўлса, у ҳолда ундан Φ, Φ' сиртлардаги мос ёйларнинг узунликлари тенглиги келиб чиқади.

67-§. Сиртлар назариясининг асосий формулалари

Чизиқлар назариясидаги Френе формулалари каби сиртлар назариясида координат чизиқларнинг $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ дан иборат уринма векторлари ва нормалнинг бирлик $\vec{n}$ вектори хоссаларини шу векторлар ҳамда биринчи ва иккинчи квадратик формаларнинг коэффициентлари орқали ифодаловчи формулалар мавжуд. Бу формулаларни келтириб чиқариш мақсадида $\vec{r}_{uu}$, $\vec{r}_{uv}$, $\vec{r}_{vv}$ векторларни $\vec{r}_u$ $\vec{r}_v$, $\vec{n}$ векторлар орқали ифодалаймиз:

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{uu} &= A_1\vec{r}_u + B_1\vec{r}_v + C_1\vec{n}, \\ \vec{r}_{uv} &= A_2\vec{r}_u + B_2\vec{r}_v + C_2\vec{n}, \\ \vec{r}_{vv} &= A_3\vec{r}_u + B_3\vec{r}_v + C_3\vec{n} \end{aligned}\right\}. \qquad (1)$$

Бу ердаги A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 коэффициентларни аниқлаш учун (1) системани навбати билан $\vec{n}$, $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ векторларга скаляр кўпайтирамиз. Биринчи навбатда C_1, C_2, C_3 коэффициентларни аниқлаймиз. Бунинг учун (1) ни $\vec{n}$ векторга скаляр кўпайтирамиз. Натижада: $(\vec{r}_{uu}, \cdot\vec{n}) = C_1$, $(\vec{r}_{uv}\cdot\vec{n}) = C_2$, $(\vec{r}_{vv}\cdot\vec{n}) = C_3$ (2), (2) дан эса $C_1 = L$, $C_2 = M$, $C_3 = N$. Шунингдек, A_i, B_i, C_i ларни ($i = 1, 2, 3$) топиш учун (1) тенгликларни мос равишда $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ га скаляр кўпайтирамиз:

$$(\vec{r}_{uu}; \vec{r}_u) = A_1\vec{r}_u^{\,2} + B_1(\vec{r}_u, \vec{r}_v),$$

$$(\vec{r}_{uu}; \vec{r}_v) = A_1(\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v) + B_1\vec{r}_v^{\,2}.$$

Бу ерда $\vec{r}_u^{\,2} = E$, $(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = F$, $\vec{r}_v^{\,2} = G_1$ (3) эканлигини ҳисобга олиб, (3) ни u ва v бўйича дифференциялаймиз, у ҳолда

$$(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_u) = \frac{1}{2}E_u,$$

$$(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_u) = \frac{1}{2}E_v,$$

$$(\vec{r}_{vv}, \vec{r}_v) = \frac{1}{2}G_v.$$

Сўнгра $(\vec{r}_u, \vec{r}_v)_u = (\vec{r}_{uu}, \vec{r}_v) + (\vec{r}_u, \vec{r}_{uv})$ ёки $(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_v)_u = (\vec{r}_u, \vec{r}_v)_u - (\vec{r}_u, \vec{r}_{uv})$ бўлгани учун $(\vec{r}_{uv}, \vec{r}_v) = F_u - \frac{1}{2}E_v$. Шундай қилиб, A_i, B_i

лар учун $A_1E + B_1F = \frac{1}{2}E_u$, $A_1F + B_1G_1 = F_u - \frac{1}{2}E_v$ тенгламаларни ҳосил қиламиз. Бундан:

$$A_1 = \frac{E_uG - 2F_u + FE_v}{2(EG - F^2)}; \quad B_1 = \frac{-E_uF + 2EF_v - EE_v}{2(EG - F^2)}.$$

A_2, B_2, A_3, B_3 коэффициентлар ҳам шу усулда топилади.

A_2, B_2; A_3, B_3 коэффициентларнинг топилган қийматлари фақат биринчи квадратик форманинг коэффициентларига боғлиқ эканлигини алоҳида қайд қиламиз, A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3 коэффициентлар *Кристофелл коэффициентлари* дейилади ва

$$A_1 = \Gamma^1_{11}, \ A_2 = \Gamma^1_{12}, \ A_3 = \Gamma^1_{22},$$

$$B_1 = \Gamma^2_{11}, \ B_2 = \Gamma^2_{12}, \ B_3 = \Gamma^2_{22}$$

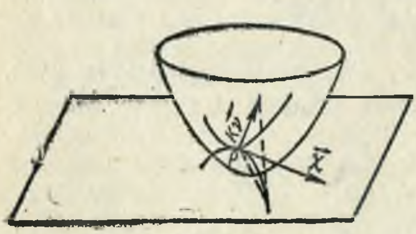
каби белгиланади. Буларни (1) га қўйиб,

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}_v + L\vec{n}, \\ \vec{r}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\vec{r}_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}_v + M\vec{n}, \\ \vec{r}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\vec{r}_u + \Gamma^2_{22}\vec{r}_v + N\vec{n} \end{aligned}\right\}$$

формулаларни ҳосил қиламиз. Бу формулалар сиртлар назариясининг асосий формулалари ёки *деривацион формулалари* дейилади. Улар $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$, $\vec{n}$ векторлардан олинган хусусий ҳосилаларни шу векторларнинг ўзлари орқали ифодалайди. Фазодаги чизиқ учун Френе формулалари қандай роль ўйнаса, сирт учун бу формулалар ўша ролни ўйнайди.

68-§. Сиртдаги эгри чизиқнинг геодезик эгрилиги

Регуляр сирт $\vec{r} = \vec{r}\,(u, v)$ тенглама билан берилган бўлсин. Бу сиртда регуляр чизиқ оламиз ва унинг ихтиёрий P нуқтасидан сиртга уринма текислик ўтказамиз. Олинган чизиқнинг P нуқтадаги бош нормали $\vec{\nu}$, эгрилиги эса k бўлсин. Эгри чизиқнинг P нуқтадаги эгрилик вектори $k\vec{\nu}$ ни уринма текисликка проекциялаймиз (138-чизма).



138- чизма

Таъриф. Эгрилик векторининг уринма текислигидаги проекциясининг тегишли ишора билан олинган узунлиги эгри чизиқнинг P нуқтадаги *геодезик эгрилиги* дейилади.

Эгри чизиқнинг P нуқтадаги геодезик эгрилигини топиш учун проекциянинг узунлигини ҳисоблаш керак. Френе формуласига кўра

$$k\vec{\nu} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

γ эгри чизиқ $\vec r = \vec r(u(s), v(s))$ тенглама билан берилган бўлса,
$\frac{d\vec r}{ds} = \vec r_u \frac{du}{ds} + \vec r_v \frac{dv}{ds}$,

$$\frac{d^2\vec r}{ds^2} = \vec r_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec r_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec r_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec r_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec r_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Деривацион формулалардан фойдаланамиз:

$$\frac{d^2\vec r}{ds^2} = (\Gamma^1_{11}\vec r_u + \Gamma^2_{11}\vec r_v + L\vec n)\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2(\Gamma^1_{12}\vec r_u + \Gamma^2_{12}\vec r_v + M\vec n)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} +$$

$$+ (\Gamma^1_{22}\vec r_u + \Gamma^2_{22}\vec r_v + N\vec n)\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec r_u\frac{d^2u}{ds^2} + \vec r_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Бу ерда

$$A = \Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^1_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$B = \Gamma^2_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^2_{12}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \Gamma^2_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

деб белгиласак,

$$\frac{d^2\vec r}{ds^2} = \left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right)\vec r_u + \left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right)\vec r_v + \left(L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right)\vec n.$$

Бу векторни уринма текисликка проекциялаймиз, яъни $\frac{d^2\vec r}{ds^2}\cdot\vec n$ ни ҳисоблаймиз. Натижада $np_\alpha k\vec\nu = np_\alpha \vec r'' = \vec g$ вектор $\vec g = \left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right)\vec r_u + \left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right)\vec r_v$ га тенг бўлади. Унинг узунлиги

$$K_\Gamma = |\vec g||\vec\tau|\sin(\vec\tau, \vec g) = |[\vec\tau, \vec g]|;$$

$$[\vec\tau, \vec g] = \left[\vec r_u\frac{du}{ds} + \vec r_v\frac{dv}{ds}, \left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right)\vec r_u + \left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right)\vec r_v\right] =$$

$$= [\vec r_u, \vec r_v]\left(\left(\frac{d^2v}{ds^2} + B\right)\frac{du}{ds^2} - \left(\frac{d^2u}{ds^2} + A\right)\frac{dv}{ds}\right),$$

$$K_\Gamma = |[\vec r_u, \vec r_v]|\left(B + \frac{d^2v}{ds^2}\right)\frac{du}{ds} - \left(A + \frac{d^2u}{ds^2}\right)\frac{dv}{ds}.$$

Бу ерда $|[\vec r_u, \vec r_v]| = \sqrt{EG - F^2}$ бўлгани учун геодезик эгрилик

$$K_\Gamma = \sqrt{EG - F^2}\left(\frac{d^2v}{ds^2}\cdot\frac{du}{ds} - \frac{d^2u}{ds^2}\frac{dv}{ds}\right) + \Gamma^1_{11}\left(\frac{du}{ds}\right)^3 +$$

$$+ (2\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11})\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds} + (\Gamma^2_{22} - 2\Gamma^1_{12})\frac{du}{ds}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - \Gamma^1_{22}\left(\frac{dv}{ds}\right)^3$$

формула билан аниқланади. Геодезик эгриликнинг формуласи биринчи квадратик форма коэффициентлари орқали ифодалангани учун геодезик эгрилик сиртнинг ички геометриясига тааллуқли объектдир.

69- §. Геодезик чизиқлар

Таъриф. Ҳар бир нуқтасидаги геодезик эгрилиги нолга тенг бўлган сиртдаги эгри чизиқ *геодезик чизиқ* дейилади.

Геодезик чизиқлар сирт устидаги «энг тўғри» чизиқлардир. Текисликда икки нуқта орасидаги қисқа масофа тўғри чизиқ кесмаси билан аниқланса, сиртда икки нуқтаии бирлаштирувчи энг қисқа чизиқ геодезик чизиқ бўлади. Сирт $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ тенглама билан берилган бўлиб, сиртдаги геодезик чизиқ $u=u(s)$, $v=v(s)$ тенглама билан берилган бўлсин. Сирт устидаги эгри чизиқли координатларнинг u, v системаси киритилган:

$$E=\vec{r}_u^{\,2},\ F=\vec{r}_u\cdot\vec{r}_v=0,\ \ G_1=\vec{r}_v^{\,2}.$$

$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ вектор эгри чизиқнинг бош нормали бўйича йўналгандир. Геозик чизиқ учун $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ вектор сиртнинг уринма текислигига перпендикуляр, шуниг учун

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\vec{r}_u=0,\qquad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\vec{r}_v=0.$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds}=\vec{r}_u\frac{du}{ds}+\vec{r}_v\frac{dv}{ds}$$

тенгликдан

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\vec{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\vec{r}_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}.$$

Бу тенгликни аввал $\vec{r}_u$ га, кейин $\vec{r}_v$ га скаляр кўпайтириб, юқоридаги тенгликларни назарга олганда ушбуни топамиз:

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}_{vv}\,\vec{r}_u\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+E\frac{d^2u}{ds^2}=0, \qquad (*)$$

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}_{uv}\,\vec{r}_v\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_v\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+G\frac{d^2v}{ds^2}=0. \qquad (**)$$

E, F, G ифодаларидан:

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_u=\frac{1}{2}Eu,\ \vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v=\frac{1}{2}E_v;\ \ F_u=\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v+\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_u=0;$$

$$F_v=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v+\vec{r}_{vv}\vec{r}_u=0;\ \ \frac{1}{2}G_u=\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_u,\ \frac{1}{2}G_v=\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_v.$$

Булардан:

$$\vec{r}_{uu}\cdot\vec{r}_v=-\vec{r}_{uv}\,\vec{r}_u=-\frac{1}{2}E_v,$$

$$\vec{r}_{vv}\cdot\vec{r}_u=-\vec{r}_{uv}\cdot\vec{r}_v=-\frac{1}{2}G_u.$$

У ҳолда (*) ва (**) формулалар қуйидаги кўринишга келади:

$$E\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{1}{2}E_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2-E_v\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{1}{2}G_u\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$G\frac{d^2v}{ds^2}=\frac{1}{2}E_v\left(\frac{du}{ds}\right)^2-G_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}-\frac{1}{2}G_v\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

ёки

$$\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{E_u}{2E}\left(\frac{du}{ds}\right)^2-\frac{1}{E}E_v\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{1}{2E}G_u\left(\frac{dv}{ds}\right)^2, \qquad (A)$$

$$\frac{d^2v}{ds^2}=\frac{1}{2G}E_v\left(\frac{du}{ds}\right)^2-\frac{1}{G}G_u\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}-\frac{1}{2G}E_v\left(\frac{dv}{ds}\right)^2. \qquad (B)$$

Геодезик чизиқнинг дифференциал тенгламалари системаси шулардир. Бу тенгламаларни интеграллашда

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=1$$

экаилигини ҳисобга олиш керак. Биз қуйидаги хулосага келамиз. Геодезик чизиқ ҳам сирт ички геометриясининг объектидир. Ҳосил қилинган дифференциал тенгламалар системасини текширишни қулай ҳолга келтириш учун s параметр ўрнига u ёки v ни олиб, бу икки тенгламалар ўрнига битта дифференциал тенглама ҳосил қиламиз. Бунинг учун $\frac{dv}{du}=\frac{\frac{dv}{ds}}{\frac{du}{ds}}$ муносабатдан фойдаланамиз:

$$\frac{d^2v}{du^2}=\frac{\frac{du}{ds}\cdot\frac{d^2v}{ds^2}-\frac{dv}{ds}\frac{d^2u}{ds^2}}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2}.$$

Энди $\frac{d^2u}{ds^2}$, $\frac{d^2v}{ds^2}$ лар ўрнига уларнинг (A), (B) қийматларини қўямиз, у ҳолда:

$$\frac{d^2v}{du^2}=\frac{\frac{1}{2G}E_v\left(\frac{du}{ds}\right)^3-\frac{1}{G}G_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}-\frac{1}{2G}G_v\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\frac{du}{ds}+\frac{1}{E}E_v\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\frac{du}{ds}}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2}-$$

$$-\frac{\frac{1}{2E}G_u\left(\frac{dv}{ds}\right)^3-\frac{1}{2E}E_u\left(\frac{du}{ds}\right)^2\frac{dv}{ds}}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2}=\frac{1}{2G}E_v-\frac{1}{2E}G_u\left(\frac{dv}{du}\right)^3+$$

$$+\left(\frac{1}{E}E_v-\frac{1}{2G}G_v\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\left(\frac{1}{2E}E_u-\frac{1}{G}G_u\right)\frac{dv}{dv}.$$

Шундай қилиб, геодезик чизиқнинг дифференциал тенгламаси

$$\frac{d^2v}{du^2}=\frac{1}{2G}E_v-\frac{1}{2E}G_u\left(\frac{dv}{du}\right)^3+\left(\frac{1}{E}E_v-\frac{G_v}{2G}\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\left(\frac{1}{2E}E_u-\frac{1}{G}G_u\right)\frac{dv}{du}$$

шаклни олади.

70-§. Гаусс ва Гаусс-Бонне теоремалари

Сиртнинг ички геометрияси учун муҳим аҳамиятга эга бўлган теоремалардан Гаусс ва Гаусс-Бонне теоремаларини келтирамиз.

Гаусс теоремаси. Сиртнинг тўлиқ ёки Гаусс эгрилиги сиртнинг биринчи квадратик формасининг коэффициентлари ва уларнинг ҳосилалари орқали ифодаланади.

Исботи. Сиртнинг тўлиқ эгрилик формуласи $K=\dfrac{LN-M^2}{EG-F^2}$ кўринишда эди, бунга L, M, N ларнинг қийматларини қўямиз:

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\cdot\left[(\vec r_{uu},\vec r_u,\vec r_v)(\vec r_{vv},\vec r_u,\vec r_v)-(\vec r_{uv},\vec r_u,\vec r_v)^2\right] \tag{1}$$

Иккита аралаш кўпайтмани кўпайтириш қоидасига кўра

$$(\vec r_{uu},\vec r_u,\vec r_v)(\vec r_{vv},\vec r_u,\vec r_v)=\begin{vmatrix}(\vec r_{uu},\vec r_{vv}) & (\vec r_{uu},\vec r_u) & (\vec r_{uu},\vec r_v)\\ (\vec r_u,\vec r_{vv}) & (\vec r_u,\vec r_v) & (\vec r_u,\vec r_v)\\ (\vec r_v,\vec r_{vv}) & (\vec r_v,\vec r_u) & (\vec r_v,\vec r_v)\end{vmatrix} \tag{2}$$

Бу ерда $(\vec r_u,\vec r_u)=E$, $(\vec r_u,\vec r_v)=(\vec r_v,\vec r_u)=F$, $(\vec r_v,\vec r_v)=G$
ҳамда

$$(\vec r_{uu},\vec r_u)=\frac{1}{2}E_u,\qquad (\vec r_{uv},\vec r_u)=\frac{1}{2}E_v,$$

$$(\vec r_{vv},\vec r_v)=\frac{1}{2}G_v,\qquad (\vec r_{uv},\vec r_v)=\frac{1}{2}G_u,$$

$$(\vec r_{uu},\vec r_v)=F_u-\frac{1}{2}E_v,\qquad (\vec r_{vv},\vec r_u)=F_v-\frac{1}{2}G_u.$$

Демак:

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix}(\vec r_{uu},\vec r_{vv}) & \frac{1}{2}E_u & F_u-\frac{1}{2}E_v\\ F_v-\frac{1}{2}G_u & E & F\\ \frac{1}{2}G_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\vec r_{uv}^{\,2} & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_v\\ \frac{1}{2}E_v & E & F\\ \frac{1}{2}G_u & F & G\end{vmatrix}\right\}=$$

$$= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} (\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{vv}) - \vec{r}^{\,2}_{uv} & \frac{1}{2}F_u & F_v - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & G & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix}\right\}$$

Аммо

$$(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{vv}) - \vec{r}^{\,2}_{uv} = (\vec{r}_{uu}, \vec{r}_v)_v - (\vec{r}_{uv}, \vec{r}_v)_u,$$

шуниинг учун

$$(\vec{r}_{uu}, \vec{r}_{vv}) - \vec{r}^{\,2}_{uv} = \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right)_v - \left(-\frac{1}{2}G_u\right)_u = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} + \frac{1}{2}G_{uu}.$$

У ҳолда сиртнинг тўлиқ эгрилиги:

$$K = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} + \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}G_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}\right\}.$$

Демак, сиртнинг тўлиқ эгрилиги сирт биринчи квадратик формасининг коэффициентлари ва уларнинг ҳосилалари орқали тўла аниқланади. Буидан эса сиртнииг тўлиқ эгрилиги ҳам сирт ички геометриясининг объекти деган хулоса чиқади. Агар сиртиинг биринчи квадратик формаси $du^2 + Gdv^2$ кўринишида бўлса, сиртнинг тўлиқ эгрилиги $K = \frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})_{uu}$ кўринишида бўлади. Φ регуляр сиртда γ эгри чизиқ билан чегараланган G соҳа олайлик. G соҳа доиранинг гомеоморф образи бўлиб, γ эгри чизиқ чекли сондаги бир-бирига туташувчи γ_i регуляр эгри чизиқлардан иборат бўлсин. G соҳанинг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ томонлари ҳосил қилган бурчакларни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ билан белгилаймиз. У ҳолда қуйидаги теорема ўринлидир.

Гаусс-Бонне теоремаси.

Сиртлар назариясида ушбу формула муҳим роль касб этади:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} K_\Gamma\, ds + \sum_{i=1}^{n}(\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint_G K d(\sigma). \qquad (3)$$

Биз бу формулани исботсиз келтирдик. Бу ерда K_Γ γ эгри чизиқнинг геодезик эгрилиги, K билан сиртнинг тулиқ эгрилиги, $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}$ $dudv$ билан сирт юзининг элементи белгиланган. Агар G соҳа γ_1, γ_2, γ_3 учта геодезик чизиқ билан чегараланган бўлса, бу эгри чизиқлар учун $K_г = 0$ бўлиб, (3) формула $\sum_{i=1}^{3} (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint_G K d\sigma$ ёки

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_G K d\sigma \tag{4}$$

кўринишга келади. Демак, геодезик учбурчакниг ички бурчакларининг йиғиндиси:

1) $K > 0$ бўлган сирт учун π дан катта;
2) $K < 0$ бўлган сирт учун π дан кичик;
3) $K = 0$ бўлган сирт учун π га тенг.

Биз юқорида (65- §) сферанинг тўлиқ эгрилиги $K = \frac{1}{a^2}$ (a — сферанинг радиуси) эканлигини кўрсатган эдик. (4) формулага K нинг қийматини қўямиз: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \frac{1}{a^2} \iint_G d\sigma$, бу ерда $\iint_G d\sigma = S_\Delta$ сферик учбурчакнинг юзи бўлиб, $S_\Delta = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi) a^2$. Демак, сферада сферик учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси π дан катта. Агар сирт параметрик тенгламалари билан берилган

$$x = a \sin u \cos v, \ y = a \sin u \sin v, \ z = a \left(\ln \left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) + \cos u\right)$$

псевдосферадан иборат бўлса, унинг тўлиқ эгрилиги $K = -\frac{1}{a^2}$ га тенглигини ҳисоблаш қийин эмас. Бу ердан K нинг қийматини (4) га қўйсак, $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = \pi - \frac{1}{a^2} \iint_G d\sigma$.

Бундан:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < \pi.$$

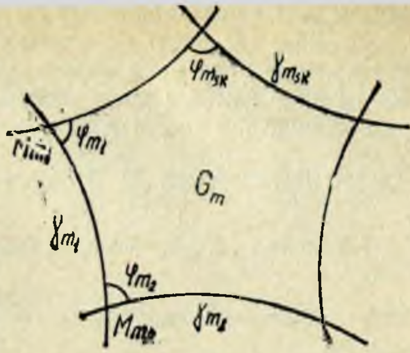
Демак, псевдосферадаги геодезик учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси π дан кичик. $\sigma = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ сонни псевдосферадаги геодезик учбурчакнинг *нуқсони* ёки *камчилиги* дейилади. Бундан кўринадики, псевдосферада Лобачевский геометрияси локал равишда бажарилади.

71- §. Ориентирланган ёпиқ сирт учун Эйлер характеристикаси

Ориентирланган силлиқ ёпиқ сирт берилган бўлсин. Бу сиртнинг Эйлер характеристикаси билан унинг тўлиқ эгрилиги орасидаги боғланиш қуйидаги теорема билан берилади.

Теорема. Агар Φ ориентирланган ёпиқ сирт бўлиб, унинг $M \in \Phi$ нуқтасидаги тўлиқ эгрилиги K га тенг бўлса, $\chi(\Phi) = \frac{1}{2\pi} \iint_\Phi K d\sigma$ (1) формула ўринлидир. Бу ерда $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dudv$.

Исботи. $G\Phi$ сиртнинг топологик кўпбурчакларга ёйилмаси бўлсин. Ёйилмадаги ҳар бир кўпбурчак томонлари регуляр чизиқлардан иборат бўлиб, бу кўпбурчаклар бир хил ориентирланган бўлсин. G ёйилмада бирор G_m кўпбурчак оламиз. Бу кўпбурчакнинг учлари $M_{m_1}, M_{m_2}, \ldots, M_{msk}$ нуқталардан иборат бўлиб, бу учларни туташтирувчи $S_к$ та томон $\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2}, \ldots, \gamma_{msк}$ регуляр чизиқлардан иборат бўлсин. G_m кўпбурчак учларидаги бурчаклар катталикларини $\varphi_{m_1}, \varphi_{m_2}, \ldots, \varphi_{msк}$ билан белгилаймиз (139- чизма). Гаусс-Бонне теоремасига кўра кўпбурчак учун



139- чизма

$$\sum_{i=1}^{S_к} \int_{\gamma m_i} K_Г ds + \sum_{i=1}^{S_к} (\pi - \varphi_{m_i}) = 2\pi - \iint_{G_m} K d\sigma, \tag{2}$$

бу ерда

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, dudv, \quad K_Г \text{ эса } \gamma_{m_i}$$

чизиқнинг геодезик эгрилиги. Бундай тенгликни G ёйилманинг ҳар бир кўпбурчаги учун тузиб, уларнинг йиғиндисини оламиз. (2) тенгликдаги $\sum\limits_{i=1}^{S_к} \int K_Г ds$ ифодада γ_{m_i} ёй бўйича олинган интеграл икки марта учрайди, чунки γ_{m_i} қўшни кўпбурчаклар учун умумий томондир. Бу қўшни кўпбурчаклар бир хил ориентирланган бўлса, γ_{m_i} томон бу кўпбурчаклар учун қарама-қарши ориентирлангандир. Шунинг учун

$$\sum_{m=i}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{S_к} \int_{\gamma m_i} K_Г ds = 0.$$

Бу ҳолда (2) формуладан G ёйилманинг ҳамма кўпбурчаклари бўйича олинган йиғинди

$$\sum_{m=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{S_к} (\pi - \varphi_{m_i}) = \sum_{m=1}^{\alpha_2} (2\pi - \iint_{G_m} K d\sigma)$$

ёки

$$\sum_{m=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{S_к} \pi - \sum_{m=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{S_к} \varphi_{m_i} = \sum_{m=1}^{\alpha_2} 2\pi - \sum_{m=1}^{\alpha_2} \iint_{G_m} K d\sigma. \tag{3}$$

Бундан:

$$\sum_{m=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{S_к} \pi = \sum_{m=1}^{\alpha_2} \pi S_к = \pi \sum_{m=1}^{\alpha_2} S_к = 2\pi\alpha.$$

$$\sum_{m=1}^{\alpha_2} \sum_{i=1}^{S_к} \varphi_{m_i} -$$

Бу йиғиндини ҳисоблаш учун аввал ёйилмани битта учига бирлашти-
рувчи кўпбурчаклар ички бурчакларнинг йиғиндисини оламиз, сўнгра G ёйилманинг ҳамма учлари бўйича йиғинди оламиз. Ҳар бир учдаги бурчакларнинг йиғиндиси π га тенг бўлгани учун ҳамда G ёйилмада α_0 та уч бўлгани учун $\sum\limits_{m=1}^{\alpha_2} \sum\limits_{i=1}^{s_k} \varphi_{mi} = 2\pi\alpha_0$ бўлади. Аммо $\sum\limits_{m=1}^{\alpha_2} 2\pi = 2\pi\alpha_2$, $\sum\limits_{m=1}^{\alpha_2} \iint\limits_{Gm} K d\sigma = \iint\limits_{\Phi} K d\sigma$. Энди йиғиндиларнинг қийматларини (3) га қўйиб, $2\pi\alpha_1 - 2\pi\alpha_0 = 2\pi\alpha_2 - \iint\limits_{\Phi} K d\sigma$ ёки $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\Phi} K d\sigma$ ни ҳосил қиламиз. Бу ерда

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(\Phi)$$

сирт учун *Эйлер характеристикасидир.*

АДАБИЁТ

1. Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б. Геометрия, часть 2. М. «Просвещение», 1976.
2. Базылев Б. Т. и др. Геометрия, П. М. «Просвещение», 1975.
3. Бакельман И. Я. Высшая геометрия, М. «Просвещение», 1967.
4. Гильберт Д. Основания геометрии, М-Л, Гостехиздат, 1948.
5. Ефимов Н. В. Высшая геометрия, М. Физматгиз, 1971.
6. Трайнин Я. Л. Основания геометрии, Л. Учпедгиз, 1961.
7. Атанасян Л. С. Геометрия асослари, Т. «Ўрта ва олий мактаб», 1962.
8. Костин В. И. Основания геометрии. Учпедгиз, 1946.
9. Егоров И. Н. Лекции по аксиоматике Вейля и неевклидовым геометриям, Рязань, 1973.
10. Погорелов А. В. Геометрия, М. «Наука», 1983.
11. Погорелов А. В. Геометрия, 6-10, Ташкент, «Ўқитувчи», 1984.
12. Бахвалов С. Б., Иваницкая В. П. Основания геометрии. М., «Высшая школа», 1972.
13. Дадажанов Н. Д., Жураева М. Ж. Геометрия, 1 қисм, Тошкент, «Ўқитувчи», 1982.
14. «Начала». Евклид. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, ОГИЗ, 1948—1950.
15. Қаган В. Ф. Великий русский учёный Лобачевский Н. И. и его место в мировой науке. ГТТИ, 1948.
16. Кольман Э. Великий русский мыслитель Лобачевский Н. И. Госполитиздат, 1956.
17. Отажонов Р. Қ. Геометрнк ясаш методлари. Т., «Ўқитувчи», 1970.
18. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Геометрические построения на плоскости. М. «Учпедгиз», 1957.
19. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия, М., 1953.
20. Четверухин Н. Ф. Изображения фигур.
21. Панкратов А. А. Начертательная геометрия. «Учпедгиз», 1963.
22. Собиров М. А., Юсупов А. Я. Дифференциал геометрия курси, Тошкент, 1965.
23. Решевский П. Қ. Курс дифференциальной геометрии. Москва, 1956.
24. Норден А. П. Краткий курс дифференциальной геометрии. Москва, 1958.
25. Фининов С. П. Дифференциальная геометрия, 1961.
26. Выгодский М. Я. Дифференцнальная геометрия, 1949.
27. Собиров М. А. Математик фанлардан русча-ўзбекча луғат. Т. «Ўқитувчи», 1983.
28. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., «Наука», 1973.

МУНДАРИЖА

II БЎЛИМ. ПРОЕКТИВ ГЕОМЕТРИЯ

VI БОБ. ПРОЕКТИВ ГЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ

VII боб. ТАСВИРЛАШ МЕТОДЛАРИ

III бўлим. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ

VIII боб. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ