

Пятидесятилетию
Московского физико-технического института
посвящается

Московский физико-технический институт
Кафедра высшей математики МФТИ

Серия

ЛЕКЦИИ КАФЕДРЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ МФТИ

Редактор серии,
заведующий кафедрой
высшей математики МФТИ,
проф. *Г.Н.Яковлев*

А.Е. УМНОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

*Рекомендовано кафедрой высшей математики
Московского физико-технического института в
качестве учебного пособия для студентов МФТИ*

ЗАО “Оптимизационные системы и технологии”
г. Долгопрудный Московской обл., 2004

Рецензенты:

кафедра высшей математики
Московского инженерно-физического института
(зав. кафедрой, доц. Шолохов Н.В.)

д.ф.-м.н., проф. В.А.Треногин

УМНОВ А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Учеб. пособие: Для вузов - М.О.:
Издание ЗАО "Оптимизационные системы и технологии" 2004. - 368 стр., с илл.

Книга предназначена для студентов физических и технических специальностей университетов и вузов, является введением в теорию линейных пространств, состав и упорядочение материала которого определен ориентацией на прикладной характер специализации читателя. Книга написана на основе лекций, читавшихся автором студентам МФТИ.

Учебное издание

Умнов Александр Евгеньевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Редакторы *В.И. Чехлов, И.А. Чубаров*

Художник *Г.Ю. Капустин*

Корректор *Ю.П. Баклакова*

ОГЛАВЛЕНИЕ

	От редактора серии	8
	Введение	10
Раздел	1. Векторы и линейные операции с ними	12
	1.1. Матричные объекты	12
	1.2. Направленные отрезки	18
	1.3. Определение множества векторов	21
	1.4. Линейная зависимость векторов	23
	1.5. Базис. Координаты вектора в базисе	28
	1.6. Действия с векторами в координатном представлении.....	30
	1.7. Декартова система координат	34
	1.8. Изменение координат при замене базиса и начала координат	36
Раздел	2. Произведения векторов	41
	2.1. Ортогональное проектирование	41
	2.2. Скалярное произведение векторов и его свойства	43
	2.3. Выражение скалярного произведения в координатах	45
	2.4. Векторное произведение векторов и его свойства	46
	2.5. Выражение векторного произведения в координатах	49
	2.6. Смешанное произведение	50
	2.7. Выражение смешанного произведения в координатах	52
	2.8. Двойное векторное произведение.	54
	2.9. Замечания об инвариантности произведений векторов	54
Раздел	3. Прямая и плоскость	56
	3.1. Прямая на плоскости	56
	3.2. Формы задания прямой на плоскости	59
	3.3. Плоскость в пространстве	65
	3.4. Формы задания прямой в пространстве	72
	3.5. Решение геометрических задач методами векторной алгебры	75
Раздел	4. Нелинейные объекты на плоскости и в пространстве	83
	4.1. Линии на плоскости и в пространстве	83
	4.2. Поверхности в пространстве	86
	4.3. Цилиндрические и конические поверхности	88
	4.4. Линии второго порядка на плоскости	91
	4.5. Поверхности второго порядка в пространстве	96
	4.6. Альтернативные системы координат	98
Раздел	5. Преобразования плоскости	103
	5.1. Умножение матриц	103

	5.2. Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости	111
	5.3. Линейные операторы на плоскости	113
	5.4. Аффинные преобразования и их свойства	118
	5.5. Ортогональные преобразования плоскости	127
	5.6. Понятие группы	131
Раздел	6. Системы линейных уравнений	132
	6.1. Определители	132
	6.2. Свойства определителей	133
	6.3. Разложение определителей	138
	6.4. Правило Крамера	142
	6.5. Ранг матрицы	144
	6.6. Системы m линейных уравнений с n неизвестными	148
	6.7. Фундаментальная система решений	150
	6.8. Метод Гаусса	157
Раздел	7. Линейное пространство	163
	7.1. Определение линейного пространства	163
	7.2. Линейная зависимость, размерность и базис в линейном пространстве	166
	7.3. Операции с элементами линейного пространства в координатном представлении	169
	7.4. Подмножества линейного пространства	171
	7.5. Изоморфизм линейных пространств	176
Раздел	8. Линейные зависимости в линейном пространстве	184
	8.1. Линейные операторы	184
	8.2. Действия с линейными операторами	185
	8.3. Координатное представление линейных операторов	190
	8.4. Область значений линейных операторов	195
	8.5. Инвариантные подпространства и собственные векторы	203
	8.6. Свойства собственных векторов и собственных значений	208
	8.7. Линейные функционалы	217
Раздел	9. Нелинейные зависимости в линейном пространстве	223
	9.1. Билинейные функционалы	223
	9.2. Квадратичные функционалы	226
	9.3. Исследование знака квадратичного функционала	230
	9.4. Инварианты линий второго порядка на плоскости	238
	9.5. Экстремальные свойства квадратичного функционала	241
	9.6. Полилинейные функционалы	242
Раздел	10. Евклидово пространство	244
	10.1. Определение и основные свойства	244
	10.2. Ортонормированный базис. Ортогонализация базиса	247
	10.3. Координатное представление скалярного произведения	249
	10.4. Ортогональные матрицы в евклидовом пространстве	253
	10.5. Ортогональные дополнения и ортогональные проекции в евклидовом пространстве	255
	10.6. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве	259
	10.7. Самосопряженные операторы	263
	10.8. Ортогональные операторы	267

Раздел 11. Унитарное пространство	272
11.1. Определение унитарного пространства	272
11.2. Линейные операторы в унитарном пространстве	274
11.3. Эрмитовы операторы	276
11.4. Эрмитовы функционалы. Среднее значение и дисперсия эрмитова оператора	278
11.5. Соотношение неопределенностей	281
Раздел 12. Прикладные задачи линейной алгебры	283
12.1. Приведение квадратичных функционалов к диагональному виду	283
12.2. Классификация поверхностей второго порядка	293
12.3. Аппроксимация функций многочленами	296
Приложение 1. Свойства линий второго порядка на плоскости	301
Пр.1.1. Вырожденные случаи линий второго порядка	301
Пр.1.2. Эллипс и его свойства	302
Пр.1.3. Гипербола и ее свойства	307
Пр.1.4. Парабола и ее свойства	312
Приложение 2. Свойства поверхностей второго порядка	317
Пр.2.1. Вырожденные поверхности второго порядка	317
Пр.2.2. Эллипсоид	318
Пр.2.3. Эллиптический параболоид	318
Пр.2.4. Гиперболический параболоид	319
Пр.2.5. Однополостный гиперболоид	321
Пр.2.6. Двуполостный гиперболоид	322
Пр.2.7. Поверхности вращения	323
Приложение 3. Комплексные числа	325
Приложение 4. Элементы тензорного исчисления	331
Пр.4.1. Замечания об определении объектов в линейном пространстве	331
Пр.4.2. Определение и обозначение тензоров	336
Пр.4.3. Операции с тензорами	341
Пр.4.4. Тензоры в евклидовом пространстве	348
Пр.4.5. Тензоры в ортонормированном базисе	351
Рекомендуемая литература	357
Предметный указатель	358

ОТ РЕДАКТОРА СЕРИИ

Отличительной чертой системы подготовки специалистов в Московском физико-техническом институте — "Школы Физтеха", является сочетание интенсивности обучения с высоким уровнем детализации и глубины изучаемых предметов, в первую очередь естественных наук. Кафедра высшей математики МФТИ как важный элемент этой системы с момента образования института продолжает вносить существенный вклад в ее формирование и совершенствование.

В активе кафедры колоссальный опыт в виде учебных курсов, оригинальных лекций по многим разделам современной математики, системы заданий, методических разработок, приемов, внутрикафедральных материалов, наконец педагогического фольклора. На кафедре сформировался коллектив преподавателей, педагогически одаренных и обладающих педагогическим мастерством. Поэтому вполне естественно стремление сделать этот опыт всеобщим достоянием.

Многое уже отражено в известных учебниках, задачниках, созданных выдающимися математиками и педагогами, среди которых В.С.Владимиров, С.М. Никольский, Л.Д.Кудрявцев, М.В.Федорюк и многие другие. Без сомнения, эти ставшие уже классическими учебные пособия оказали и оказывают существенное влияние на математическое образование как в России, так и за ее пределами.

Вместе с тем, есть еще немало того, что несомненно будет существенно полезным для улучшения подготовки специалистов. Естественным путем для выявления этого опыта, как нам представляется, могла бы быть серия *"Лекции кафедры высшей математики МФТИ"*, и мы будем благодарны всем, кто окажет поддержку и посильную помощь в осуществлении данного проекта.

В настоящем издании читателю предлагается одна из книг задуманной серии — расширенный курс лекций, который профессор А.Е.Умнов ряд лет читает студентам первого курса Московского физико-технического института. Подготовка первого издания осуществлена при поддержке ООО "Промфинэнерго".

По содержанию и стилю изложения материала данная книга рассчитана на студентов физико-математических и технических специальностей высших учебных заведений с углубленной подготовкой по математике. В ней представлены как традиционные разделы аналитической геометрии, теории матриц, теории линейных систем и конечномерных векторных пространств, так и некоторые дополнительные разделы линейной алгебры, важные для студентов физических специальностей.

На кафедре высшей математики МФТИ лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре в разное время читали многие выдающиеся ученые и педагоги, такие как Ф.Р.Гантмахер, В.Б.Лидский, А.А.Абрамов, Д.В.Беклемишев, В.А.Треногин и другие.

Сам автор, будучи последовательно студентом, аспирантом, преподавателем и профессором этой кафедры, не мог не испытать влияния своих учителей. Структура и дух его лекций вполне традиционны для кафедры высшей математики МФТИ. В изложении материала автор успешно сочетает, не злоупотребляя абстракциями, достаточно высокий уровень строгости с простотой и ясностью.

Предлагаемый читателям курс лекций А.Е.Умнова "Аналитическая геометрия и линейная алгебра" рекомендован кафедрой высшей математики Московского физико-технического института в качестве учебного пособия для студентов МФТИ. Эта книга также может быть использована в качестве учебного пособия и в других учебных заведениях с расширенной подготовкой по высшей математике.

Г.Н.Яковлев

*Заведующий кафедрой
высшей математики МФТИ,
профессор*

ВВЕДЕНИЕ

От автора

Данное пособие предназначено для студентов физических и технических специальностей высших учебных заведений с расширенной подготовкой по высшей математике. Его основной целью является введение в теорию линейных пространств — математический аппарат, используемый в разнообразных прикладных дисциплинах: от квантовой механики до методов оптимального управления. Имея в виду особую терминологическую специфику этой теории, ее описание предваряется изложением основ евклидовой геометрии, выполненным при помощи понятий, характерных для теории линейных пространств.

Включенный в пособие материал в основном соответствует программе курса “Аналитическая геометрия и линейная алгебра”, читаемого для студентов первого курса Московского физико-технического института. В пособии также рассматриваются некоторые дополнительные вопросы, облегчающие изучение студентами математического аппарата теоретической физики и, в первую очередь, квантовой механики. Задачи, не большое число которых включено в состав пособия, по мнению автора, существенны для понимания курса в целом.

Предполагается, что читатель владеет основными понятиями курса элементарной геометрии, а также знаком в минимальном объеме с дифференциальным и интегральным исчислением.

Используемая система обозначений единообразна для всех разделов пособия, что привело к небольшим отличиям от традиционной системы обозначений, в частности:

- действительные числа, как правило, обозначаются строчными греческими буквами (исключение сделано лишь для декартовых координат x , y и z , целочисленных индексов и некоторых других стандартных обозначений);
- строчные латинские буквы, в основном, использованы для обозначения более сложных, чем действительные числа, объектов: векторов, комплексных чисел, элементов линейных пространств, функций, функционалов, операторов, а также различных геометрических объектов;
- матрицы обозначаются прописными латинскими буквами с двойными вертикальными ограничителями: например, $\|A\|$;

- во избежание конфликтов, для обозначений длин, абсолютных величин, модулей и норм используются одинарные вертикальные ограничители: на – пример, $\left| \vec{a} \right|$, в то время как для обозначения определителей матриц этот вид ограничителей не применяется, а используется обозначение функционального вида: например, $\det \| A \|$.

Автор выражает глубокую признательность преподавателям и сотрудникам кафедры высшей математики МФТИ, советы и замечания которых в большой степени способствовали улучшению пособия, и в первую очередь И.А.Чубарову, В.И.Чехлову, С.В.Ивановой и В.Б.Трушину.

Раздел 1

ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ С НИМИ

1.1. Матричные объекты

Аналитическое описание геометрических фигур и тел, равно как и операций с ними, может быть в большом числе случаев упрощено за счет использования специального математического объекта, называемого *матрицей*.

Определение 1.1.1. Матрицей размера $m \times n$ называется упорядоченная прямоугольная таблица (или массив) чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Числа, входящие в описание матрицы, называемые ее *элементами* (или *компонентами*), характеризуются как своим значением, так и номерами строк и столбцов. Условимся обозначать элемент матрицы, расположенный в i -й строке и j -м столбце, как α_{ij} ¹⁾.

Определение 1.1.2. Числа m , n и $m \times n$ называются *размерами* матрицы.

Матрицы обозначаются и записываются перечислением их элементов. Например, как: матрица с элементами $\alpha_{ij}; i = [1, m]; j = [1, n]$, или же в развернутой форме

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} ; \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} ; \left\| \begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right\| ,$$

¹⁾ Читается "альфа i - j "

из которых мы будем использовать последнюю. Если же нам потребуется *неразвернутое* представление матрицы, то мы будем ее записывать в виде $\|\alpha_{ij}\|$ или просто $\|A\|$.

Матрицы принято классифицировать по количеству их строк и столбцов.

Определение 1.1.3. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной, порядка n* .

Матрица размера $m \times 1$ называется *m -мерным (или m -компонентным) столбцом*. Матрица размера $1 \times n$ называется *n -мерной (или n -компонентной) строкой*.

Отметим, что, хотя формально для обозначения строк или столбцов следует использовать двухиндексные записи $\|\alpha_{1j}\|$ или $\|\beta_{i1}\|$, не меняющиеся индексы принято опускать, в результате чего обозначения строк или столбцов принимают вид $\|\alpha_j\|$ или, соответственно, $\|\beta_i\|$. В этих случаях, разумеется, необходимо явно указывать, о чем идет речь: о строке или о столбце.

Некоторые часто используемые матрицы с особыми значениями элементов, имеют специальные названия и обозначения.

Определение 1.1.4. Квадратная матрица, для которой $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \forall i, j = [1, n]$, называется *симметрической*.

Матрица $\|O\|$, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*.

Квадратная матрица $\|E\|$ порядка n вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной*.

Операции с матрицами

Определение 1.1.5.	Две матрицы $\ A\ $ и $\ B\ $ называются <i>равными</i> , если они одинаковых размеров и если их соответствующие компоненты равны, то есть $\alpha_{ij} = \beta_{ij}, \forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$.
Определение 1.1.6.	Матрица $\ C\ $ называется <i>суммой матриц</i> $\ A\ $ и $\ B\ $ (которая обозначается как $\ C\ = \ A\ + \ B\ $), если матрицы $\ A\ , \ B\ , \ C\ $ одинаковых размеров и $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}, \forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$, где числа $\gamma_{ij}, \forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$ являются соответствующими компонентами матрицы $\ C\ $.
Определение 1.1.7.	Матрица $\ C\ $ называется <i>произведением числа λ на матрицу $\ A\$</i> (обозначаемое как $\ C\ = \lambda \ A\ $), если матрицы $\ A\ $ и $\ C\ $ одинаковых размеров и $\gamma_{ij} = \lambda \alpha_{ij}, \forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$.

Отметим, что умножать на число можно матрицу любого размера.

Замечание: в качестве всех или некоторых элементов матрицы возможно использование других математических объектов, для которых подходящим образом определены операции сравнения, сложения и умножения на число, например, векторы, функции или те же матрицы.

Определение 1.1.8.	<i>Транспонированием</i> матрицы называется операция, в результате которой образуется новая матрица, где строками служат столбцы исходной, записанные с сохранением порядка их следования.
--------------------	--

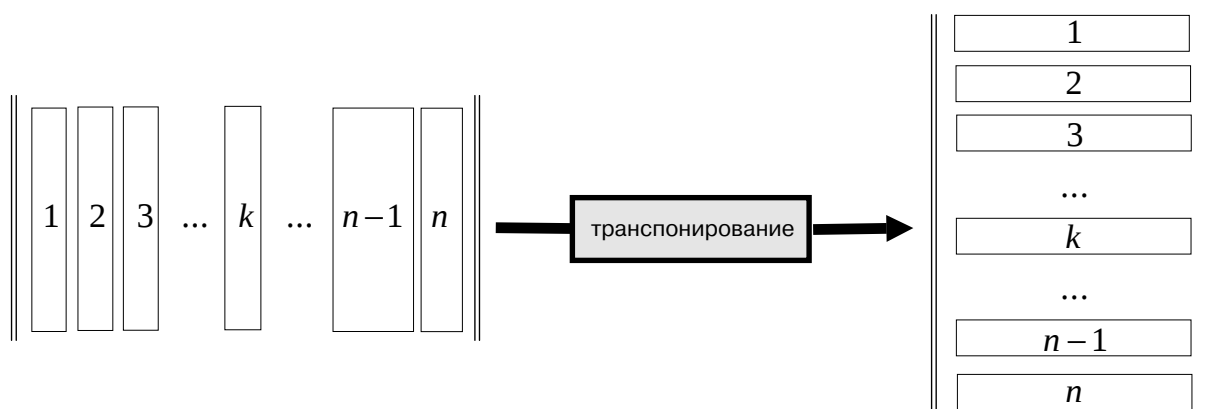


Рисунок 1.1.1.

Матрица, получающаяся в результате транспонирования матрицы $\|A\|$, обозначается $\|A\|^T$, при этом (см. рис.1.1.1.)

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \alpha_{m3} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right\|^T = \left\| \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{m2} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{m3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{mn} \end{array} \right\|,$$

то есть для элементов транспонированной матрицы $\|A\|^T$ при $\forall i = [1, m], \forall j = [1, n]$ верно равенство: $\alpha_{ij}^T = \alpha_{ji}$.

Операция транспонирования, например, не изменяет симметрическую матрицу, но переводит строку размера $1 \times m$ в столбец размера $m \times 1$ и наоборот.

Детерминанты (определители) матриц 2-го и 3-го порядка

Для квадратных матриц существует специальная числовая характеристика, называемая *детерминантом* (или *определителем*) и обозначаемая как $\det \|A\|$ ¹⁾. Детальное изучение определителей будет выполнено в разделе 6, здесь же ограничимся рассмотрением определителей квадратных матриц 2-го и 3-го порядков.

Определение 1.1.9. Детерминантом (или определителем) квадратной матрицы 2-го порядка $\left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\|$ называется число $\det \left\| \begin{array}{cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{array} \right\| = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Определение 1.1.10. Детерминантом (или определителем) квадратной матрицы 3-го порядка $\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{array} \right\|$ называется число

¹⁾ Детерминант квадратной матрицы также часто обозначают при помощи одинарных вертикальных ограничителей $|\dots|$. Мы не будем использовать этот вид обозначения, чтобы избежать конфликта с представлением абсолютных величин, модулей, длин и норм.

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{13}\alpha_{21}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - \\ - \alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31} - \alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32} \quad .$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема
1.1.1.

Определитель матрицы 3-го порядка может быть выражен через определители 2-го порядка формулой следующего вида:

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = \\ = \alpha_{11} \det \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} - \alpha_{12} \det \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \det \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \quad ,$$

называемой разложением определителя по первой строке.

Доказательство:

Данная формула проверяется непосредственно при помощи определений 1.1.9. и 1.1.10.

Замечания: 1°. Формулы, аналогичные приведенной в формулировке теоремы 1.1.1., могут быть получены как для каждой из остальных строк матрицы, так и для любого из ее столбцов.

2°. Иногда подсчет значения определителя матрицы третьего порядка удобнее выполнить по следующему правилу:

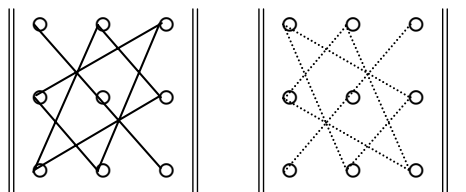


Рисунок 1.1.2.

каждое слагаемое в определении 1.1.10. есть произведение некоторой тройки элементов матрицы, причем элементы, входящие в

произведения, берущиеся со знаком "плюс", соединены на рис.1.1.2. сплошными линиями, элементы, входящие в произведения, берущиеся со знаком "минус", — штриховыми линиями.

Непосредственная проверка показывает, что из определений 1.1.9. и 1.1.10. вытекает

Следствие 1.1.1. **При транспонировании квадратных матриц второго или третьего порядка их определители не меняются.**

В терминах определителей матриц второго порядка достаточно удобно формулируется условие однозначной разрешимости системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Теорема 1.1.2. **Для того чтобы система линейных уравнений**
$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$
 имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть данная система линейных уравнений имеет единственное решение — упорядоченную пару чисел $\{\xi_1, \xi_2\}$, тогда должны быть справедливыми следующие из ее уравнений соотношения:

$$\xi_1(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = (\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}) \quad ; \quad \xi_2(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = (\beta_1\alpha_{21} - \beta_2\alpha_{11})$$

$$\text{или} \quad \xi_1\Delta = \Delta_1 \quad ; \quad \xi_2\Delta = \Delta_2, \quad \text{где}$$

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \det \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Равенства $\xi_1\Delta = \Delta_1 \quad ; \quad \xi_2\Delta = \Delta_2$ не верны при $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_1 \neq 0 \end{cases}$ или при $\begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta_2 \neq 0 \end{cases}$, и удовлетворяются бесчисленным множеством пар чисел (ξ_1, ξ_2) при $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Поэтому из условия существования и единственности решения следует, что $\Delta \neq 0$.

Докажем достаточность.

Если $\Delta \neq 0$, то данная система линейных уравнений имеет решение $\{\xi_1, \xi_2\}$, однозначно определяемое значениями $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}, \alpha_{22}, \beta_1, \beta_2$ по формулам $\xi_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ и $\xi_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Теорема доказана.

1.2. Направленные отрезки

Определение 1.2.1. Отрезок прямой, концами которого служат лежащие на ней точки A и B , называется *направленным отрезком*, если указано, какая из этих двух точек является *началом* и какая — *концом* отрезка.

Направленный отрезок будем изображать символически $\overline{AB}$, полагая, что точка A является началом отрезка, а точка B — его концом. Иногда направленный отрезок обозначается просто как $\overline{a}$. Длина отрезка обозначается как $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$ соответственно. Направленный отрезок, у которого начало и конец совпадают, называется *нулевым* направленным отрезком.

Действия с направленными отрезками

Определение 1.2.2. Два ненулевых направленных отрезка $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ считаются *равными*, если они

- лежат на параллельных прямых;
- направлены в одну сторону;
- имеют равные длины, т.е. $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.¹⁾

Все нулевые отрезки считаются равными друг другу.

Заметим, что в силу определения 1.2.2. параллельный перенос направленных отрезков их не меняет.

Пусть даны два направленных отрезка $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

¹⁾ В рамках данного курса предполагается знакомство читателя с основными понятиями, аксиомами и теоремами элементарной геометрии, и потому они здесь не рассматриваются.

Определение 1.2.3. Совместим начало отрезка $\vec{b}$ с концом $\vec{a}$ (то есть построим направленный отрезок $\vec{b}'$ равный $\vec{b}$, начало которого совпадает с концом отрезка $\vec{a}$), тогда направленный отрезок $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом $\vec{a}$ и конец с концом $\vec{b}$, называется *суммой направленных отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$* ¹⁾.

Это определение иногда называют *правилом треугольника*. (Рис. 1.2.1.)

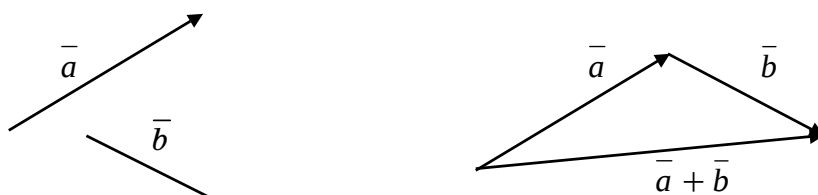


Рисунок 1.2.1.

Отметим, что для операции сложения направленных отрезков:

- 1°. Обобщение правила треугольника на любое число слагаемых носит название *правила замыкающей*, смысл которого ясен из рис. 1.2.2.

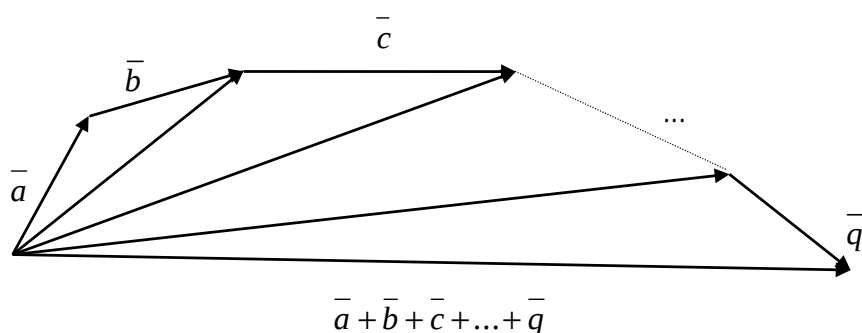


Рисунок 1.2.2.

- 2°. Операция сложения направленных отрезков может быть выполнена по

¹⁾ Для операции замены направленного отрезка на равный, но не совпадающий с ним направленный отрезок будем употреблять термин "*параллельный перенос направленного отрезка*".

правилу параллелограмма, равносильному определению 1.2.3. (см. рис. 1.2.3.).

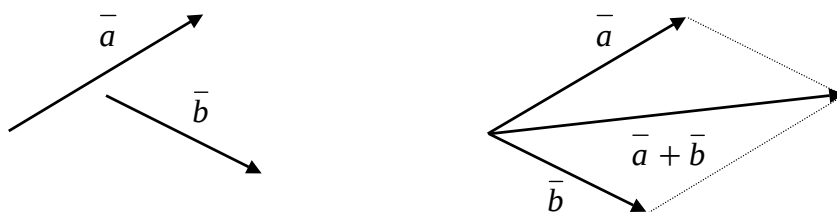


Рисунок 1.2.3.

- 3°. Разностью $\vec{a} - \vec{b}$ направленных отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется направленный отрезок $\vec{c}$, удовлетворяющий равенству $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.
- 4°. Любой направленный отрезок при сложении с нулевым не изменяется.

Определение
1.2.4.

Под произведением $\lambda \vec{a}$ направленного отрезка $\vec{a}$ на число λ понимают:

при $\lambda=0$ нулевой направленный отрезок,

при $\lambda \neq 0$ направленный отрезок, для которого

- длина равна $|\lambda| |\vec{a}|$;
- направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$,
- направление противоположно направлению $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

1.3. Определение множества векторов

Определение 1.3.1. Совокупность всех направленных отрезков, для которых введены описанные в п.1.2. операции:

- сравнения;
- сложения;
- умножения на вещественное число,

называется *множеством векторов*.

Конкретный элемент этого множества будем называть *вектором* и обозначать символом с верхней стрелкой, например $\vec{a}$.

Нулевой вектор обозначается символом $\vec{0}$.

Теорема 1.3.1. **Операции сложения и умножения на вещественное число на множестве векторов обладают свойствами:**

1°. Коммутативности

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};$$

2°. Ассоциативности

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c};$$

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a};$$

3°. Дистрибутивности

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b};$$

$$(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$$

для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любых вещественных чисел λ и μ .

Данные свойства следуют из определения множества векторов и нуждаются в доказательстве. В качестве примера приведем

Доказательство свойства коммутативности:

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Совместим начала этих векторов и построим на них параллелограмм $ABDC$. (Рис. 1.3.1.)

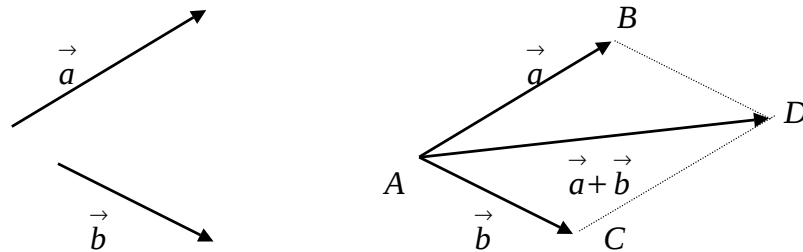


Рисунок 1.3.1.

Поскольку у параллелограмма противоположные стороны параллельны и имеют равные длины, то $\vec{CD} = \vec{a}$; $\vec{BD} = \vec{b}$, но тогда, по правилу треугольника, из треугольников ACD и ABD следует, что $\vec{AD} = \vec{b} + \vec{CD}$; $\vec{AD} = \vec{a} + \vec{BD}$, то есть $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Свойство 1° теоремы 1.3.1. доказано.

Замечания об определении вектора

- 1°. Иногда вектор определяют просто как объект, характеризующийся числовой величиной и направлением. Хотя формально такой подход и допустим, он может оказаться причиной некоторых проблем, суть которых иллюстрируется следующим примером.

Поток автомобилей на конкретной дороге в единицу времени является объектом, для характеристики которого нужно указать величину и направление. Предположим, что этот объект векторный (в смысле определения 1.3.1.), и рассмотрим перекресток трех дорог, показанный на рис. 1.3.2., на котором сливаются два потока автомобилей по 500 автомашин в час каждый.

Если суммировать потоки как векторы, то вместо очевидного результата 1000 ам./час мы получим (по правилу параллелограмма)

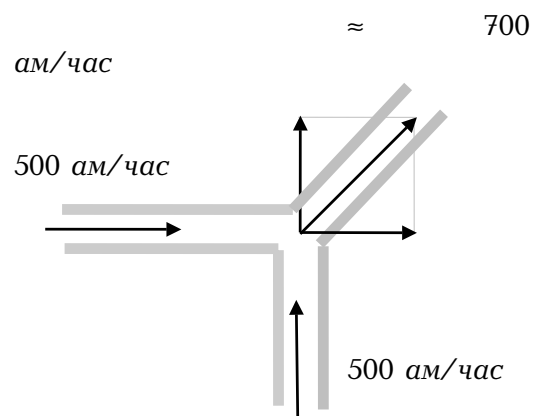


Рисунок 1.3.2.

заведомо бессмысленное значение $500\sqrt{2} \approx 700$ ам./час. Отсюда следует, что хотя поток автомашин характеризуется числовым значением и направлением, но тем не менее вектором (в смысле определения 1.3.1.) не является.

- 2°. С другой стороны, необходимо иметь в виду, что данное определение множества векторов 1.3.1. допускает их дальнейшую, более тонкую дифференциацию. На — пример, в некоторых физических и технических приложениях различают векторы полярные и аксиальные. К первым относятся, например, векторы скорости, силы, напряженности электрического поля; ко вторым — векторы момента силы, напряженности магнитного поля. Кроме того, в механике векторы подразделяются на свободные, скользящие и закрепленные, в зависимости от той роли, которую играет точка их приложения.
- 3°. К заключению о векторной природе тех или иных физических характеристик можно прийти путем рассуждений, основанных на определении 1.3.1. и экспериментальных данных.

Например, пусть некоторая материальная точка, имеющая электрический заряд, перемещается в пространстве под действием электрического поля. Положение этой точки в пространстве в момент времени τ_0 можно задать вектором $\vec{r}(\tau_0)$, а в момент времени τ вектором $\vec{r}(\tau)$. Поскольку перемещение $\vec{r}(\tau) - \vec{r}(\tau_0)$ (как разность двух векторов) является вектором, то и скорость движения материальной точки будет вектором в силу определения 1.3.1. Рассуждая аналогично, можно прийти к заключению, что вектором является также и ускорение.

С другой стороны, согласно второму закону Ньютона, ускорение материальной точки пропорционально действующей на нее силе, и, следовательно, по определению 1.3.1. сила есть вектор.

Наконец, принимая во внимание пропорциональность силы, действующей на заряженное тело, и напряженности электрического поля, заключаем, что последняя характеристика также векторная.

1.4. Линейная зависимость векторов

Вначале введем часто используемые в приложениях, понятия коллинеарности и компланарности векторов.

Определение 1.4.1.	Два вектора, параллельные одной и той же прямой, называются <i>коллинеарными</i> .
	Три вектора, параллельные одной и той же плоскости, называются <i>компланарными</i> .

Нулевой вектор считается коллинеарным любому другому вектору. Нулевой вектор считается компланарным любой паре векторов.

Определение
1.4.2.

Выражение вида $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — некоторые числа, называется *линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ равны нулю одновременно (что равносильно условию $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| = 0$), то такая линейная комбинация называется *тривиальной*.

Если хотя бы одно из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ отлично от нуля (то есть $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$), то данная линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Соглашение о суммировании

В тех случаях, когда явная запись суммы некоторого числа слагаемых нецелесообразна или невозможна, но известно, как зависит значение каждого из слагаемых от его номера, то допускается использование специальной формы записи операции суммирования:

$$F(n) + F(n+1) + \dots + F(N) = \sum_{k=n}^N F(k),$$

(читается: "Сумма $F(k)$ по k от n до N "), где k — индекс суммирования, n — минимальное значение индекса суммирования, N — максимальное значение индекса суммирования и, наконец, $F(k)$ — общий вид слагаемого.

Пример
1.4.1.

По соглашению о суммировании будут справедливы следующие равенства

$$1^2 + 2^2 + \dots + (N-1)^2 + N^2 = \sum_{k=1}^N k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (N-1)^3 + N^3 = \sum_{i=1}^N i^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \left(\sum_{j=1}^N j \right)^2$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(N-1)N} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{N-1}{N}.$$

Используя данную символику, линейную комбинацию $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$ можно записать в виде $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k$.

Приведем теперь определение важного понятия *линейной зависимости* системы векторов.

Определение 1.4.3. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k$ такая, что

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}.$$

Определение 1.4.4. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если из условия $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$ следует тривиальность линейной комбинации $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k$, то есть, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Иначе говоря, векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно независимы, если для любого набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не равных нулю одновременно, линейная комбинация $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k$ не равна $\vec{0}$.

Справедливы следующие утверждения:

- | | |
|-------------------|--|
| Теорема
1.4.1. | Один вектор линейно зависим тогда и только тогда, когда он нулевой. |
| Теорема
1.4.2. | Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. |
| Теорема
1.4.3. | Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны. |

Теоремы 1.4.1. и 1.4.2. предлагаются для самостоятельного доказательства. Здесь же мы рассмотрим подробно теорему 1.4.3., доказав предварительно следующее вспомогательное утверждение:

Лемма
1.4.1.

Для линейной зависимости векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство:

Докажем необходимость. Пусть векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ линейно зависимы, тогда существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, одновременно не равные нулю, такие, что $\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$. Для определенности можно считать, что $\lambda_1 \neq 0$, но тогда

$$\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^n \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right) \vec{a}_k,$$

что и доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть, для определенности, $\vec{a}_1 = \sum_{k=2}^n \lambda_k \vec{a}_k$, тогда

$(-1)\vec{a}_1 + \sum_{k=2}^n \lambda_k \vec{a}_k = \vec{0}$, причем $|-1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| > 0$. То есть нетривиальная линейная комбинация векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ равна нулевому вектору.

Лемма доказана.

Докажем теперь теорему 1.4.3.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть три вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно зависимы, то есть существуют три, одновременно не равных нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, таких, что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$. Тогда, по лемме 1.4.1. один из векторов есть линейная комбинация двух остальных и, значит, данные три вектора компланарны.

Докажем достаточность в предположении, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны. Пусть даны три компланарных вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$. Перенесем эти векторы таким образом, чтобы их начала попали в одну точку.

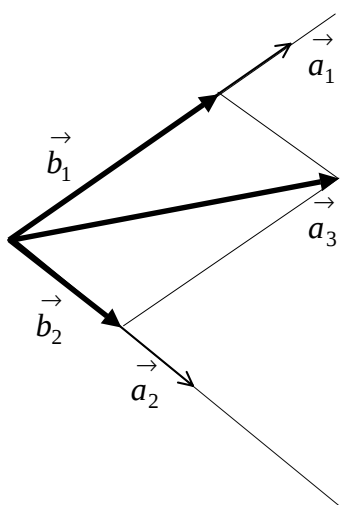


Рисунок 1.4.1.

Через конец вектора $\vec{a}_3$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. При этом получим пару векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ таких, что $\vec{a}_3 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. (Рис. 1.4.1.)

Поскольку вектор $\vec{b}_1$ коллинеарен вектору $\vec{a}_1$, а вектор $\vec{b}_2$ коллинеарен вектору $\vec{a}_2$, по теореме 1.4.2. получаем, что $\vec{b}_1 = \lambda_1 \vec{a}_1$; $\vec{b}_2 = \lambda_2 \vec{a}_2$, но, с другой стороны, имеем $\vec{a}_3 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$, и векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ по лемме 1.4.1., линейно зависимы.

Случай коллинеарных $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ рассмотрите самостоятельно.

Теорема доказана.

Свойства линейно независимых векторов

- 1°. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он ненулевой.
- 2°. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.
- 3°. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.

Теорема
1.4.4.

Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ имеется подмножество линейно независимых, то и все векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.

Доказательство:

Без ограничения общности можно считать, что линейно зависимы первые $k < n$ векторов (иначе, просто перенумеруем эти векторы), то есть существуют не равные нулю одновременно, числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ такие, что

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}_i = \vec{0}.$$

Построим нетривиальную линейную комбинацию векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$, взяв в качестве первых k коэффициентов числа $\lambda_i, i=[1, k]$ и нули в качестве остальных. Тогда получим, что
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{a}_i + \sum_{i=k+1}^n 0 \cdot \vec{a}_i = \vec{0}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1.4.1. Если среди векторов $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ имеется хотя бы один нулевой, то векторы $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ линейно зависимы.

1.5. Базис. Координаты вектора в базисе

Определение 1.5.1. Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор, принадлежащий этой прямой.

Базисом на плоскости называется любая пара линейно независимых векторов, принадлежащих этой плоскости.

Базисом в пространстве называется любая тройка линейно независимых векторов.

Определение 1.5.2. Базис называется ортогональным, если образующие его векторы попарно ортогональны (взаимно перпендикулярны).

Определение 1.5.3. Ортогональный базис называется ортонормированным, если образующие его векторы имеют единичную длину.

Пространственный базис, составленный из линейно независимых векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, будем обозначать $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$. Ортогональный или ортонормированный базис условимся обозначать как $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Теорема 1.5.1. Пусть дан базис $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, тогда любой вектор $\vec{x}$ в пространстве может быть представлен, и притом единственным образом, в виде
$$\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3,$$
 где α, β, γ - некоторые числа.

Доказательство:

1°. Докажем вначале существование таких чисел.

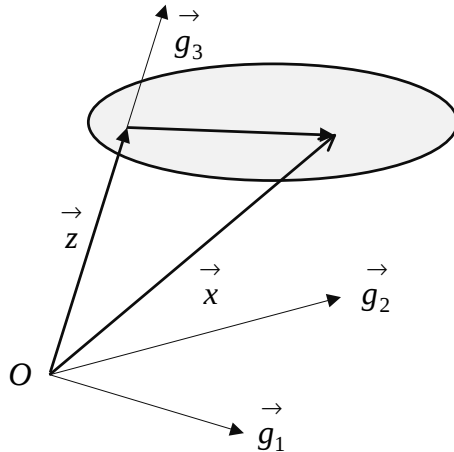


Рисунок 1.5.1.

Совместим начала всех векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и $\vec{x}$ в точке O и проведем через конец вектора $\vec{x}$ плоскость, параллельную плоскости $O, \vec{g}_1, \vec{g}_2$. (Рис. 1.5.1.)

Построим новые векторы $\vec{y}$ и $\vec{z}$ так, чтобы $\vec{x} = \vec{z} + \vec{y}$, а $\vec{z}$ и $\vec{g}_3$ были коллинеарны, тогда, в силу коллинеарности вектора $\vec{z}$ вектору $\vec{g}_3$, $\vec{z} = \gamma \vec{g}_3$.

Перенеся начало вектора $\vec{y}$ в точку O и рассуждая как при доказательстве теоремы 1.4.3., получим $\vec{y} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$ и, следовательно, $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$, что и доказывает существование разложения.

2°. Докажем единственность разложения по базису. Мы имеем $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$. Предположим, что существует другая тройка чисел α', β', γ' таких, что $\vec{x} = \alpha' \vec{g}_1 + \beta' \vec{g}_2 + \gamma' \vec{g}_3$.

Вычитая почленно эти равенства, получаем

$$(\alpha - \alpha') \vec{g}_1 + (\beta - \beta') \vec{g}_2 + (\gamma - \gamma') \vec{g}_3 = \vec{0},$$

где, в силу сделанного предположения о неединственности разложения, $|\alpha - \alpha'| + |\beta - \beta'| + |\gamma - \gamma'| > 0$

Но это означает, что векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно зависимы и, следовательно, не могут быть базисом в силу определения 1.5.1. Полученное противоречие доказывает единственность разложения.

Теорема доказана.

Определение 1.5.4. Числа α, β, γ — коэффициенты в разложении $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$ на — зываются *координатами* (или *компонентами*) вектора $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Для записи вектора $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2 + \gamma \vec{g}_3$ в координатном представлении используются формы:

$$1^\circ. \vec{x}(\alpha; \beta; \gamma)$$

$$2^\circ. (\alpha; \beta; \gamma)$$

$$3^\circ. \|\alpha \quad \beta \quad \gamma\|$$

$$4^\circ. \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$5^\circ. \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\|,$$

из которых в дальнейшем мы будем использовать последнюю.

В общем случае утверждение "вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ имеет координатное представление $\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\|$ " записывается как $\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\|$, но иногда, если это не приводит к неоднозначности толкования, мы будем использовать и сокращенную запись вида

$$\vec{x} = \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \right\|.$$

Наконец, если вектор $\vec{x}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости представим как $\vec{x} = \alpha \vec{g}_1 + \beta \vec{g}_2$, то его координатная запись имеет вид $\left\| \vec{x} \right\|_g = \left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\|$.

1.6. Действия с векторами в координатном представлении

Поскольку в конкретном базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ каждый вектор находится во взаимно однозначном соответствии с упорядоченной тройкой чисел α, β, γ — своими ко —

ординатами, то естественным представляется вопрос о том, как выполняются операции с векторами в координатном представлении.

Оказывается, возможно не только записывать векторы при помощи матриц (столбцов), но и оперировать с ними в матричной форме, поскольку правила действий с векторами в координатной форме совпадают с правилами соответствующих операций с матрицами.

Имеет место

Теорема 1.6.1. В координатном представлении операции с векторами имеют следующий вид:

1°. Сравнение векторов

Два вектора $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **и** $\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ **равны тогда и только тогда, когда**

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \xi_3 = \eta_3 \end{cases}.$$

2°. Сложение векторов

Координаты суммы двух векторов $\vec{x} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ **и** $\vec{y} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ **равны суммам соответствующих координат слагаемых.**

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{pmatrix}.$$

3°. Умножение векторов на число

Координаты произведения вектора на число λ равны произведениям соответствующих координат вектора $\vec{x}$ на это число λ

$$\lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 \\ \lambda \xi_2 \\ \lambda \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Доказательство:

Доказательство всех трех пунктов аналогично, поэтому рассмотрим лишь правило сложения векторов в координатной форме.

По свойствам операций сложения и умножения на вещественное число векторов (теорема 1.3.1.) имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} &= \vec{x} + \vec{y} = (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3) + (\eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) = \\ &= (\xi_1 + \eta_1) \vec{g}_1 + (\xi_2 + \eta_2) \vec{g}_2 + (\xi_3 + \eta_3) \vec{g}_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Следствие
1.6.1.

Координаты линейной комбинации векторов $\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}$ являются теми же линейными комбинациями соответствующих координат векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$:

$$\lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 + \mu \eta_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 \\ \lambda \xi_3 + \mu \eta_3 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в координатном представлении записываются условия линейной зависимости и независимости векторов.

Теорема
1.6.2.

Для того чтобы два вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ и $\vec{y} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ на плоскости были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты в некотором базисе удовлетворяли условию $\det \begin{pmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{pmatrix} = 0$.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ линейно зависимы, тогда в силу леммы 1.4.1. имеет место равенство $\vec{x} = \lambda \vec{y}$ или, в координатной форме, $\begin{cases} \xi_1 = \lambda \eta_1 \\ \xi_2 = \lambda \eta_2 \end{cases}$. Исключив λ из этих двух скалярных соотношений, получим $\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0$, но это и озна —

чает, что $\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0$.

Докажем достаточность.

Пусть $\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0$, тогда имеем что $\frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2}$ при $\eta_1 \neq 0$; $\eta_2 \neq 0$, то есть соответствующие координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ пропорциональны, что и доказывает линейную зависимость этих векторов.

Случай $\eta_1 \eta_2 = 0$ предлагается рассмотреть самостоятельно.

Теорема доказана.

Теорема
1.6.3.

Для того чтобы три вектора $\vec{x} = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$, $\vec{y} = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}$ и $\vec{z} = \begin{vmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{vmatrix}$ в пространстве были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы их координаты в некотором базисе удовлетворяли условию

$$\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доказательство:

Приводится в разделе "Смешанное произведение векторов" (см. п.2.6.).

Следствие
1.6.2.

Равенства $\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0$ и $\det \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \kappa_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \kappa_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \kappa_3 \end{vmatrix} = 0$ соответственно являются необходимыми и достаточными условиями коллинеарности пары векторов на плоскости и компланарности тройки векторов в пространстве.

1.7. Декартова система координат

Определение 1.7.1. Совокупность базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и точки O , в которую помещены на — начала всех базисных векторов, называется *общей декартовой систе- мой координат* и обозначается $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 1.7.2. Система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, порождаемая ортонормированным базисом, называется *нормальной прямоугольной (или ортонормирован- ной) системой координат*.

Если задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$, то произвольной точке M в про — странстве можно поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\vec{r}$, начало ко — торого находится в точке O , а конец — в точке M .

Определение 1.7.3. Вектор $\vec{r} = \vec{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M в системе коор — дина $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 1.7.4. Координаты радиус — вектора точки M называются координатами точки M в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Проиллюстрируем особенности использования векторного описания геометри — ческих объектов на примере решения следующих задач:

Задача 1.7.1. В некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ зада — ны координаты радиус-векторов точек M и N , которые являются нача — лом и концом вектора $\vec{MN}$. Требуется найти координаты вектора $\vec{MN}$.

Решение:

Решение очевидно из рис. 1.7.1. и свойств

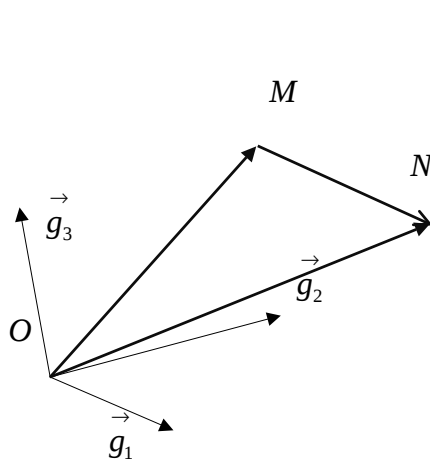


Рисунок 1.7.1.

динат векторов.

Пусть $\vec{OM} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{ON} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$. Тогда

$$\vec{OM} + \vec{MN} = \vec{ON} \quad ; \quad \vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$$

и окончательно

$$\vec{MN} = \begin{pmatrix} \eta_1 - \xi_1 \\ \eta_2 - \xi_2 \\ \eta_3 - \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Задача
1.7.2.

В некоторой общей декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ заданы координаты несовпадающих точек M_1 и M_2 , для которых соответственно

$$\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти точку M такую, что $\vec{M}_1 M = \lambda \vec{M M}_2$.

Решение:

Заметим, что λ может принимать любое значение, кроме -1 , при котором точка M уходит в бесконечность (Рис. 1.7.2.). Найдём радиус-вектор точки M . Из соотношений в треугольниках OM_1M и OMM_2 получаем

$$\vec{OM}_1 + \vec{M}_1 M = \vec{OM} \quad ; \quad \vec{OM} + \vec{M M}_2 = \vec{OM}_2,$$

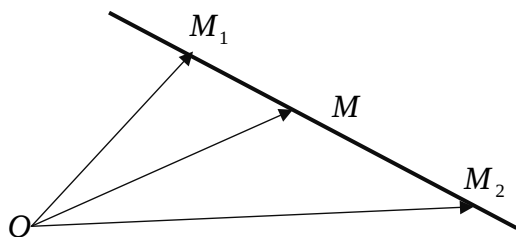


Рисунок 1.7.2.

но, так как $\vec{M}_1 M = \lambda \vec{M M}_2$, то

$$\vec{OM} - \vec{OM}_1 = \lambda(\vec{OM}_2 - \vec{OM})$$

и окончательно, $\vec{OM} = \frac{1}{1+\lambda} \vec{OM}_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda} \vec{OM}_2$.

Радиус – вектор точки M равен $\vec{OM} = \left\| \begin{array}{c} \frac{\xi_1 + \lambda \eta_1}{1 + \lambda} \\ \frac{\xi_2 + \lambda \eta_2}{1 + \lambda} \\ \frac{\xi_3 + \lambda \eta_3}{1 + \lambda} \end{array} \right\|$, в силу следствия 1.6.1.

Замечание: к задаче 1.7.2. приводит решение задачи отыскания центра масс системы материальных точек.

1.8. Изменение координат при замене базиса и начала координат

Поскольку выбор системы координат может быть сделан различными способами, вопрос об изменении координат при переходе от одного базиса к другому и замене начала координат представляет значительный практический интерес. Найдем правила, выражающие зависимость координат произвольной точки пространства, заданных в одной системе координат, от координат этой же точки в другой.

Пусть даны две декартовы системы координат: "старая" $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и "новая" $\{\vec{O}', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$ (Рис. 1.81.) Выразим векторы "нового" базиса, а также вектор $\vec{OO'}$, через векторы "старого". Это можно сделать всегда и притом единственным способом.

$$\begin{aligned} \vec{g}'_1 &= \sigma_{11} \vec{g}_1 + \sigma_{21} \vec{g}_2 + \sigma_{31} \vec{g}_3 \\ \vec{g}'_2 &= \sigma_{12} \vec{g}_1 + \sigma_{22} \vec{g}_2 + \sigma_{32} \vec{g}_3 \\ \vec{g}'_3 &= \sigma_{13} \vec{g}_1 + \sigma_{23} \vec{g}_2 + \sigma_{33} \vec{g}_3 \end{aligned} \quad (1.8.1.)$$

$$\vec{OO'} = \beta_1 \vec{g}_1 + \beta_2 \vec{g}_2 + \beta_3 \vec{g}_3.$$

Теорема
1.8.1.

Координаты произвольной точки в "старой" системе координат связаны с ее координатами в "новой" соотношениями:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_{11} \xi'_1 + \sigma_{12} \xi'_2 + \sigma_{13} \xi'_3 + \beta_1 \\ \xi_2 &= \sigma_{21} \xi'_1 + \sigma_{22} \xi'_2 + \sigma_{23} \xi'_3 + \beta_2 \\ \xi_3 &= \sigma_{31} \xi'_1 + \sigma_{32} \xi'_2 + \sigma_{33} \xi'_3 + \beta_3. \end{aligned}$$

Доказательство:

Пусть некоторая точка M в "старой" системе $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ имеет координаты

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \text{ а в "новой" системе } \{O', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\} - \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{pmatrix}.$$

Получим связь между "старыми" и "новыми" координатами точки M . Имеют место соотношения:

$$\vec{OM} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3 \text{ и}$$

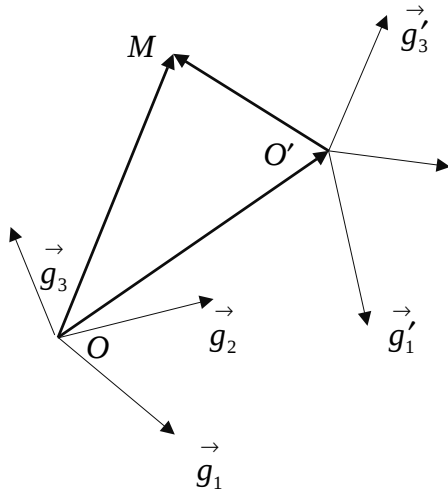


Рисунок 1.8.1.

$$\begin{aligned} \vec{O'M} &= \xi'_1 \vec{g}'_1 + \xi'_2 \vec{g}'_2 + \xi'_3 \vec{g}'_3 = \\ &= \xi'_1 (\sigma_{11} \vec{g}_1 + \sigma_{21} \vec{g}_2 + \sigma_{31} \vec{g}_3) + \\ &+ \xi'_2 (\sigma_{12} \vec{g}_1 + \sigma_{22} \vec{g}_2 + \sigma_{32} \vec{g}_3) + \\ &+ \xi'_3 (\sigma_{13} \vec{g}_1 + \sigma_{23} \vec{g}_2 + \sigma_{33} \vec{g}_3). \end{aligned}$$

Подставив выражения для векторов $\vec{OM}$, $\vec{O'M}$ и $\vec{OO'}$ в равенство

$$\vec{OM} = \vec{O'M} + \vec{OO'}$$

и перегруппировав слагаемые, получим соотношение вида $\lambda_1 \vec{g}_1 + \lambda_2 \vec{g}_2 + \lambda_3 \vec{g}_3 = \vec{0}$, где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\xi_1 + \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1 \\ \lambda_2 &= -\xi_2 + \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2 \\ \lambda_3 &= -\xi_3 + \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3. \end{aligned}$$

Поскольку векторы $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ линейно независимы, то их линейная комбинация, равная $\vec{0}$, тривиальна, и потому $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ или, окончательно

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sigma_{11}\xi'_1 + \sigma_{12}\xi'_2 + \sigma_{13}\xi'_3 + \beta_1 \\ \xi_2 &= \sigma_{21}\xi'_1 + \sigma_{22}\xi'_2 + \sigma_{23}\xi'_3 + \beta_2 \\ \xi_3 &= \sigma_{31}\xi'_1 + \sigma_{32}\xi'_2 + \sigma_{33}\xi'_3 + \beta_3 \end{aligned} \quad (1.8.2.)$$

Теорема доказана.

Определение 1.8.1. Формулы (1.8.2.) называются *формулами перехода* от системы координат $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к системе координат $\{\vec{O}', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

Сравнивая формулы 1.8.1. и 1.8.2., можно заметить, что коэффициенты уравнений в формулах перехода, выражающих "старые" координаты через "новые", образуют матрицу $\|S\|$, столбцы которой есть координаты "новых" базисных векторов в "старом" базисе. Столбец $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$ содержит координаты "нового" начала координат в "старом" базисе.

Определение 1.8.2. Матрица $\|S\| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ к базису $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$.

Теорема 1.8.2. Для матрицы перехода $\det \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \neq 0$.

Доказательство:

Столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ образованы коэффициентами разложения линейно независимых векторов базиса $\{\vec{g}'_1, \vec{g}'_2, \vec{g}'_3\}$ по векторам базиса $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

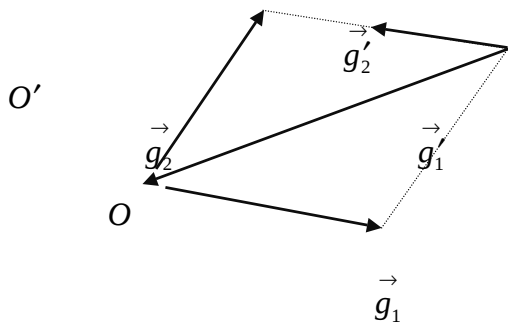
Тогда из теорем 1.4.3. и 1.6.3. следует доказываемое утверждение.

Теорема доказана.

Задача
1.8.1.

На параллелограмме построены две системы координат: "старая" $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ и "новая" $\{\vec{O}', \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$, как показано на рис. 1.8.2. Найти формулы перехода, выражающие "новые" координаты через "старые", если $\vec{g}'_1 = \vec{O'O}$ и $\vec{g}'_2 = -\frac{1}{2}\vec{g}_1$.

Решение:



Из свойств параллелограмма находим соотношения, выражающие векторы "старого" базиса через "новые"

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= -2\vec{g}'_2 \\ \vec{g}_2 &= -\vec{g}'_1 + 2\vec{g}'_2.\end{aligned}$$

Тогда матрица перехода

$$\|S\| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \text{ а } \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Рисунок 1.8.2.

Следовательно, выражения "новых" координат через "старые" имеют вид

$$\begin{cases} \xi'_1 = -\xi_2 + 1 \\ \xi'_2 = -2\xi_1 + 2\xi_2 \end{cases}.$$

Переход между ортонормированными системами координат на плоскости

Рассмотрим две ортонормированные системы координат $\{\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{O}', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$. Получим формулы перехода для случая, показанного на рис. 1.8.3.

Из геометрически очевидных соотношений

$$\begin{aligned}\vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi \\ \vec{e}'_2 &= -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi\end{aligned}$$

получаем матрицу перехода $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$, и, если $\vec{OO'} = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix}$, то "старые" координаты

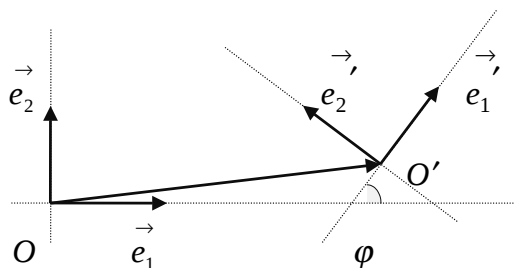


Рисунок 1.8.3.

ты будут связаны с "новыми" как

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos \varphi - \xi'_2 \sin \varphi + \beta_1 \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin \varphi + \xi'_2 \cos \varphi + \beta_2 \end{cases}.$$

В рассмотренном случае обе системы координат могли бы быть совмещены последовательным выполнением параллельного переноса "старой" системы на вектор $\vec{OO'}$ и поворота на угол φ вокруг точки O' .

Однако добиться такого совмещения, используя *только* параллельный перенос и поворот, вообще говоря, нельзя. Соответствующий случай показан на рис. 1.8.4.

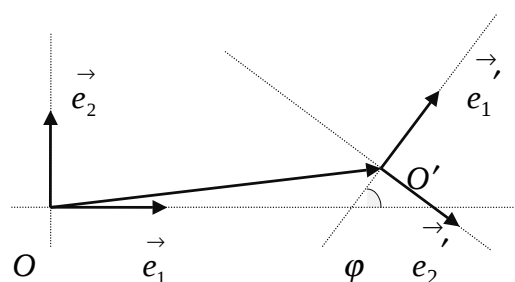


Рисунок 1.8.4.

Здесь, после совмещения векторов $\vec{e_1}$ и $\vec{e'_1}$, еще потребуется зеркальное отражение вектора $\vec{e_2}$ относительно прямой, проходящей через совмещенные векторы.

Формулы перехода будут иметь вид

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 \cos \varphi + \xi'_2 \sin \varphi + \beta_1 \\ \xi_2 = \xi'_1 \sin \varphi - \xi'_2 \cos \varphi + \beta_2 \end{cases}.$$

Формально случаи, показанные на рис. 1.8.3. и Рис. 1.8.4., можно различать, используя

Определение
1.8.3.

Упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости с совмещенными началами называется *право ориентированной*, если кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден выполняющимся против часовой стрелки. В противном случае эта пара векторов называется *лево ориентированной*.

Отметим, что для матрицы перехода $\|S\|$, связывающей два ортонормированных базиса $\det \|S\| = \pm 1$, причем $\det \|S\| = 1$, если ориентация у обеих пар базисных векторов одинаковая (то есть, если отражения не требуется), и $\det \|S\| = -1$ для случая базисных пар различной ориентации.

Раздел 2 ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

2.1. Ортогональное проектирование

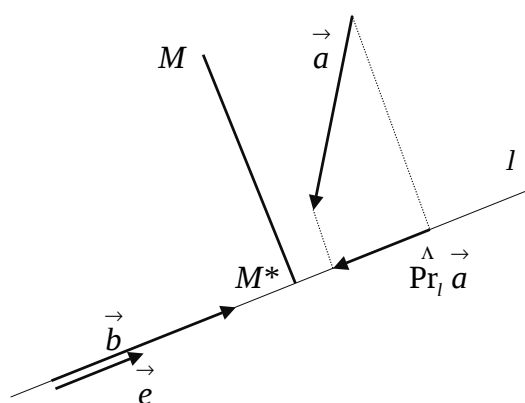


Рисунок 2.1.1.

Определение 2.1.1. Прямую l , с расположенным на ней ненулевым вектором $\vec{b}$, будем называть *осью*.

Вектор $\vec{b}$ называется *направляющим* вектором оси l .

Определение 2.1.2. Пусть дана точка M , не лежащая на оси l , тогда основание перпендикуляра, опущенного из M на ось l — точку M^* будем называть *ортогональной проекцией* точки M на ось l .

Примером оси может служить *ось координат* — прямая, проходящая через начало координат, направляющим вектором которой служит один из базисных векторов.

Определение 2.1.3. Ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l называется вектор $\overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}$, лежащий на оси l , начало которого есть ортогональная проекция начала вектора $\vec{a}$ на ось l , а конец — ортогональная проекция конца вектора $\vec{a}$ на ось l ¹⁾.

¹⁾ Верхний символ Λ будет использоваться для условного обозначения различного рода операций, например: проектирования, поворота, отражения, дифференцирования и т.д.

Выполним нормировку направляющего вектора $\vec{b}$, то есть заменим его на вектор $\vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ и рассмотрим нормированный базис $\{\vec{e}\}$ на оси l . (Рис. 2.1.1.)

Определение 2.1.4. Численным значением ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l называется координата вектора $\overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}\}$.

Численное значение ортогональной проекции вектора $\vec{a}$ на ось l обозначим как $\overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}$. Из рис. 2.1.2. очевидно, что $\overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$, где φ есть угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$. Под углом между векторами будем понимать (если не указано иное) наименьший угол между данными векторами с совмещенными началами.

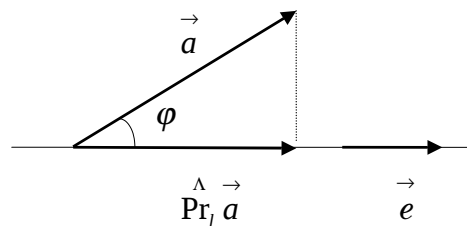


Рисунок 2.1.2.

Свойства ортогональных проекций

1.1°. Проекция суммы двух векторов равна сумме проекций этих векторов

$$\overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}_1 + \overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}_2 .$$

Данное свойство иллюстрирует рис. 2.1.3.

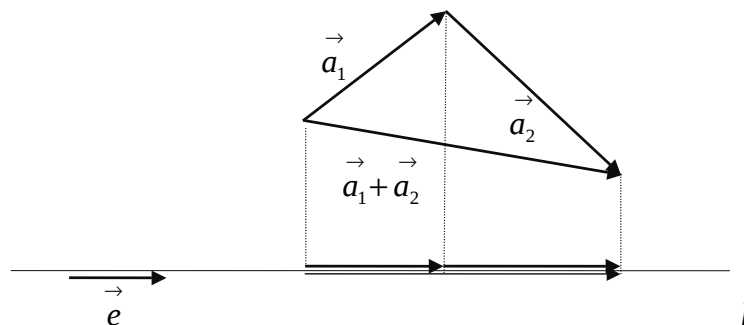


Рисунок 2.1.3.

- 1.2°. Если вектор умножить на вещественное число, то его проекция также умножится на это число

$$\overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l(\lambda \vec{a}) = \lambda \overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}.$$

Заметим, что свойства 1.1° и 1.2° можно объединить в следующее утверждение:

Проекция линейной комбинации векторов равна той же линейной комбинации проекций

$$\overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \overset{\Lambda}{\text{Pr}}_l \vec{a}_2.$$

Справедливость свойств 1° и 2° вытекает из определения операции ортогонального проектирования и правил действия с векторами.

Свойства численных значений ортогональных проекций

$$2.1°. \text{Pr}_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr}_l \vec{a}_1 + \text{Pr}_l \vec{a}_2;$$

$$2.2°. \text{Pr}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{Pr}_l \vec{a}.$$

Или, объединяя 2.1° и 2.2°,

$$\text{Pr}_l(\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2) = \lambda_1 \text{Pr}_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \text{Pr}_l \vec{a}_2.$$

Отметим, что эти равенства следуют из свойств ортогональных проекций и свойств координат векторов.

2.2. Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение 2.2.1. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

В случае, если хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор, скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение обозначается как $(\vec{a}, \vec{b})$. По определению:
 $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$; $0 \leq \varphi \leq \pi$, где φ — угол между векторами — сомножителями. Если $\vec{b} \neq \vec{o}$, то имеет место равенство $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \operatorname{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}$.

Свойства скалярного произведения

- 1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ при $\vec{a} \neq \vec{o}$ и $\vec{b} \neq \vec{o}$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно ортогональны;
- 2°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ (коммутативность). Следует из определения скалярного произведения и свойств косинуса;
- 3°. $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})$ (дистрибутивность).

Доказательство:

Если $\vec{b} = \vec{o}$, то 3° очевидно. Пусть $\vec{b} \neq \vec{o}$, тогда
 $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = |\vec{b}| \operatorname{Pr}_{\vec{b}} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = |\vec{b}| \operatorname{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}_1 + |\vec{b}| \operatorname{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}_2 = (\vec{a}_1, \vec{b}) + (\vec{a}_2, \vec{b})$.

Свойство доказано.

$$4^\circ. (\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b});$$

$$5^\circ. (\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geq 0 \quad \forall \vec{a}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})};$$

(заметим также, что условия $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ и $\vec{a} = \vec{o}$ равносильны);

$$6^\circ. \text{ При } \vec{a} \neq \vec{o} \text{ и } \vec{b} \neq \vec{o} \quad \cos \varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| |\vec{b}|}.$$

2.3. Выражение скалярного произведения в координатах

Пусть задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ и $\vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$.

По свойствам скалярного произведения

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}) &= (\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3, \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3) = \\ &= \xi_1 \eta_1 (\vec{g}_1, \vec{g}_1) + \xi_1 \eta_2 (\vec{g}_1, \vec{g}_2) + \xi_1 \eta_3 (\vec{g}_1, \vec{g}_3) + \\ &+ \xi_2 \eta_1 (\vec{g}_2, \vec{g}_1) + \xi_2 \eta_2 (\vec{g}_2, \vec{g}_2) + \xi_2 \eta_3 (\vec{g}_2, \vec{g}_3) + \\ &+ \xi_3 \eta_1 (\vec{g}_3, \vec{g}_1) + \xi_3 \eta_2 (\vec{g}_3, \vec{g}_2) + \xi_3 \eta_3 (\vec{g}_3, \vec{g}_3) = \\ &= \sum_{j=1}^3 (\xi_j \eta_1 (\vec{g}_j, \vec{g}_1) + \xi_j \eta_2 (\vec{g}_j, \vec{g}_2) + \xi_j \eta_3 (\vec{g}_j, \vec{g}_3)) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \xi_j \eta_i (\vec{g}_j, \vec{g}_i). \end{aligned}$$

В случае ортонормированного базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ эта формула упрощается, поскольку для попарных скалярных произведений базисных векторов справедливо равенство:

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},$$

где δ_{ij} так называемый символ Кронекера. Откуда, для скалярного произведения векторов в ортонормированном базисе, получаем формулу

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3,$$

из которой следуют полезные соотношения:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2},$$

$$\text{а для } \vec{a} \neq \vec{0} \text{ и } \vec{b} \neq \vec{0} \quad \cos \varphi = \frac{\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}}.$$

Отметим, что последнее равенство в сочетании с условием $|\cos \varphi| \leq 1$ приводит к неравенству Коши-Буняковского:

$$|\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3| \leq \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2}; \quad \forall \xi_i, \eta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Задача 2.3.1. Найти расстояние между двумя точками в ортонормированной системе координат, если известны радиус-векторы этих точек.

Решение: Пусть задана ортонормированная система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и радиус-векторы двух точек $\vec{OM}_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ и $\vec{OM}_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ в ней. Тогда, используя решение задачи 1.7.1., из равенства

$$\vec{M_1M_2} = (\xi_1 - \eta_1)\vec{e}_1 + (\xi_2 - \eta_2)\vec{e}_2 + (\xi_3 - \eta_3)\vec{e}_3$$

и свойств скалярного произведения, получаем

$$|\vec{M_1M_2}| = \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + (\xi_3 - \eta_3)^2}.$$

2.4. Векторное произведение векторов и его свойства

Определение 2.4.1. Упорядоченная тройка некопланарных векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ называется *правой*, если после совмещения их начал кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден из конца вектора $\vec{c}$ совершающимся против часовой стрелки.

Определение 2.4.2. Векторным произведением неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что

- 1°. $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где φ угол между векторами $\vec{a}, \vec{b}$; $0 < \varphi < \pi$.
- 2°. Вектор $\vec{c}$ ортогонален вектору $\vec{a}$ и вектору $\vec{b}$.
- 3°. Тройка векторов $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ правая.

В случае, когда сомножители коллинеарны (в том числе, когда хотя бы один из сомножителей есть нулевой вектор), векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение обозначается как $[\vec{a}, \vec{b}]$. Из определения следует, что

1°. $|\vec{a}, \vec{b}|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2°. Для коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.

Свойства векторного произведения

1°. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ (антикоммутативность, следует из определения 2.4.2. и нечетности функции $\sin \varphi$)

2°. $[\lambda \vec{a}, \vec{b}] = \lambda [\vec{a}, \vec{b}]$ (следует из определения векторного произведения и того факта, что векторы $[\lambda \vec{a}, \vec{b}]$ и $[\vec{a}, \vec{b}]$ ортогональны одной и той же плоскости при неколлинеарных $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\lambda \neq 0$).

3°. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ (дистрибутивность).

Для доказательства дистрибутивности векторного произведения нам будут необходимы следующие вспомогательные утверждения:

Лемма
2.4.1.

Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, начала которых находятся в общей точке на оси l . Тогда результат поворота суммы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на угол φ вокруг оси l равен сумме результатов поворота каждого из этих векторов вокруг оси l на угол φ .

Утверждение леммы 2.4.1. будем обозначать как

$$\text{Пов}_{\varphi, l}^{\wedge}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{Пов}_{\varphi, l}^{\wedge} \vec{a} + \text{Пов}_{\varphi, l}^{\wedge} \vec{b}.$$

Его справедливость ясна из рис. 2.4.1.

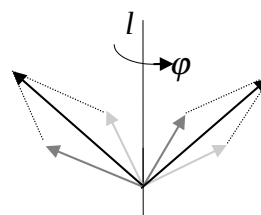


Рисунок 2.4.1.

Лемма
2.4.2.

Если $\left| \vec{e} \right| = 1$, то вектор $[\vec{p}, \vec{e}]$ равен результату поворота проекции вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{e}$, вокруг вектора $\vec{e}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке.

Доказательство:

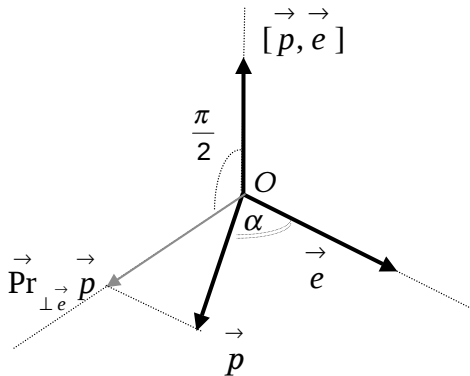


Рисунок 2.4.2.

Проведем две плоскости, одна из которых проходит через точку O — общее начало векторов $\vec{p}$ и $\vec{e}$, перпендикулярно $\vec{e}$, а вторая проходит через векторы $\vec{p}$ и $\vec{e}$.

Ортогональная проекция вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную $\vec{e}$, будет лежать на линии пересечения построенных плоскостей, и тогда из определения векторного произведения следует

$$|\vec{p}, \vec{e}| = |\vec{p}| |\vec{e}| \sin \alpha = |\vec{p}| \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right|,$$

поскольку $|\vec{e}| = 1$. (Рис. 2.4.2.)

Следовательно, в рассматриваемом случае

$$[\vec{p}, \vec{e}] = \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \vec{e}}^{\wedge} \text{Pr}_{\perp \vec{e}}^{\wedge} \vec{p},$$

где $\text{Pr}_{\perp \vec{e}}^{\wedge} \vec{p}$ означает ортогональное проектирование вектора $\vec{p}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{e}$.

Лемма доказана.

Теперь, опираясь на утверждения лемм 2.4.1. и 2.4.2., докажем дистрибутивность векторного произведения.

Доказательство свойства 3°:

Если $\vec{c} = \vec{0}$, то 3° очевидно. Пусть $\vec{c} \neq \vec{0}$, тогда

$$\begin{aligned} [\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] &= |\vec{c}| \left[\vec{a} + \vec{b}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right] = (\text{по лемме 2.4.2.}) = |\vec{c}| \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} \text{Pr}_{\perp \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} (\vec{a} + \vec{b}) = \\ &= (\text{по свойству 1.1}^0 \text{ п.2.1.}) = |\vec{c}| \left(\text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} (\text{Pr}_{\perp \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} \vec{a} + \text{Pr}_{\perp \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} \vec{b}) \right) = \\ &= (\text{по лемме 2.4.1.}) = |\vec{c}| \left(\text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} \text{Pr}_{\perp \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} \vec{a} + \text{Пов}_{\frac{\pi}{2}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} \text{Pr}_{\perp \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}}^{\wedge} \vec{b} \right) = \\ &= (\text{по лемме 2.4.2.}) = |\vec{c}| \left(\left[\vec{a}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right] + \left[\vec{b}, \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} \right] \right) = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]. \end{aligned}$$

Свойство доказано.

2.5. Выражение векторного произведения в координатах

Пусть задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ такая, что векторы $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ образуют правую тройку, и два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$ и $\vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$.

По свойствам векторного произведения

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= [\xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3, \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3] = \\ &= \xi_1 \eta_1 [\vec{g}_1, \vec{g}_1] + \xi_1 \eta_2 [\vec{g}_1, \vec{g}_2] + \xi_1 \eta_3 [\vec{g}_1, \vec{g}_3] + \\ &+ \xi_2 \eta_1 [\vec{g}_2, \vec{g}_1] + \xi_2 \eta_2 [\vec{g}_2, \vec{g}_2] + \xi_2 \eta_3 [\vec{g}_2, \vec{g}_3] + \\ &+ \xi_3 \eta_1 [\vec{g}_3, \vec{g}_1] + \xi_3 \eta_2 [\vec{g}_3, \vec{g}_2] + \xi_3 \eta_3 [\vec{g}_3, \vec{g}_3] = \\ &= \sum_{j=1}^3 (\xi_j \eta_1 [\vec{g}_j, \vec{g}_1] + \xi_j \eta_2 [\vec{g}_j, \vec{g}_2] + \xi_j \eta_3 [\vec{g}_j, \vec{g}_3]) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \xi_j \eta_i [\vec{g}_j, \vec{g}_i] . \end{aligned}$$

Обозначим через $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ и $\vec{f}_3$ попарные векторные произведения базисных векторов $[\vec{g}_i, \vec{g}_j]$ следующим образом:

$$\vec{f}_1 = [\vec{g}_2, \vec{g}_3] ; \quad \vec{f}_2 = [\vec{g}_3, \vec{g}_1] ; \quad \vec{f}_3 = [\vec{g}_1, \vec{g}_2] .$$

Подставляя эти обозначения в выражение для $[\vec{a}, \vec{b}]$ и используя утверждение теоремы 1.1.1., получим

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= (\xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2) \vec{f}_1 - (\xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1) \vec{f}_2 + (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1) \vec{f}_3 = \\ &= \det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_1 - \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_2 + \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \vec{f}_3 = \det \begin{vmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Случай ортонормированного базиса

Пусть исходный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ортонормированный, образующий правую тройку векторов, тогда по определению 2.4.2., $\vec{f}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{f}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{f}_3 = \vec{e}_3$.

Тогда для векторного произведения векторов в ортонормированном базисе получаем

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}] &= (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)\vec{e}_1 - (\xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1)\vec{e}_2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)\vec{e}_3 = \\ &= \det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_1 - \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{e}_2 + \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \vec{e}_3 = \det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Из вышеприведенных формул вытекают полезные следствия:

Следствие 2.5.1. Для того чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы в любой декартовой системе координат

$$\det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ или же, } \frac{\xi_1}{\eta_1} = \frac{\xi_2}{\eta_2} = \frac{\xi_3}{\eta_3}.$$

Следствие 2.5.2. В ортонормированной системе координат площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\det^2 \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} + \det^2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + \det^2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}},$$

причем для плоского случая $S = \left| \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \right|$.

2.6. Смешанное произведение

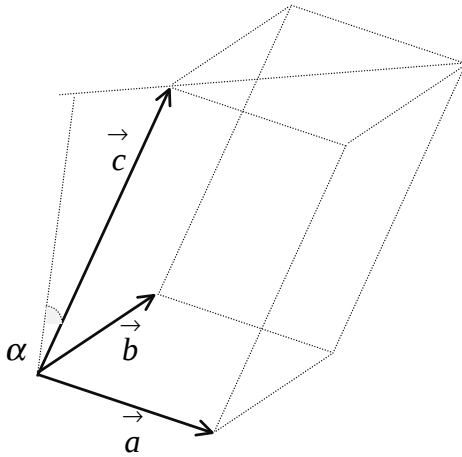
Определение 2.6.1. Смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, обозначаемым как $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, называется число $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$.

Теорема 2.6.1. Абсолютная величина смешанного произведения векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ равна объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Знак смешанного произведения положительный, если тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и отрицательный, если - левая.

Доказательство:

Если $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть $\vec{a}$ неколлинеарен $\vec{b}$, тогда, по определению скалярного произведения,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| \text{Pr}_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c},$$



где $S = |[\vec{a}, \vec{b}]|$ есть площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а $|\text{Pr}_{[\vec{a}, \vec{b}]} \vec{c}| = |\vec{c}| \cos \alpha$ — высота параллелепипеда с основанием S , откуда (см. рис. 2.6.1.)

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Наконец,

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a}, \vec{b}]| |\vec{c}| \cos \alpha,$$

что и позволяет сделать заключение о знаке смешанного произведения.

Рисунок 2.6.1.

Теорема доказана.

Свойства смешанного произведения

Для смешанного произведения справедливы тождества:

$$1^\circ. (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b});$$

$$2^\circ. (\lambda \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \lambda (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c});$$

$$3^\circ. (\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}_2, \vec{b}, \vec{c}),$$

справедливость которых следует из определения смешанного произведения и теоремы 2.6.1.

Отметим, наконец, что смешанное произведение равно нулю, если среди со-множителей имеется хотя бы одна пара коллинеарных векторов.

2.7. Выражение смешанного произведения в координатах

Пусть задана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, для которых $\vec{a} = \xi_1 \vec{g}_1 + \xi_2 \vec{g}_2 + \xi_3 \vec{g}_3$, $\vec{b} = \eta_1 \vec{g}_1 + \eta_2 \vec{g}_2 + \eta_3 \vec{g}_3$ и $\vec{c} = \kappa_1 \vec{g}_1 + \kappa_2 \vec{g}_2 + \kappa_3 \vec{g}_3$.

По свойствам векторного произведения имеем

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_1 - \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} \vec{f}_2 + \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \vec{f}_3,$$

где векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ были определены в п.2.5.

Из этого определения вытекает, что $(\vec{g}_k, \vec{f}_j) = \begin{cases} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3), & k = j, \\ 0, & k \neq j \end{cases}$, поэтому для

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, получим

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \left(\kappa_1 \det \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix} - \kappa_2 \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_3 \end{vmatrix} + \kappa_3 \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} \right) (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3) = \\ &= \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{vmatrix} (\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3), \end{aligned}$$

поскольку выражение, стоящее в больших круглых скобках, является разложением определителя 3-го порядка по последней строке. (См. теорему 1.1.1.)

Замечания: 1°. Из последней формулы и теоремы 2.6.1. следует справедливость теоремы 1.6.3.

2°. В случае ортонормированного правого базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$, поэтому

$$\text{в таком базисе } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \det \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{vmatrix}.$$

3°. Для введенных в п.2.5. векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ справедлива

Теорема 2.7.1. **Тройка векторов $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ образует базис (называемый взаимным базисом $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$).**

Доказательство:

Для доказательства достаточно показать, что векторы $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ линейно независимы.

Предположим противное. Пусть существуют, не равные одновременно нулю, числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что $\lambda_1 \vec{f}_1 + \lambda_2 \vec{f}_2 + \lambda_3 \vec{f}_3 = \vec{0}$. Умножив последовательно обе части этого равенства скалярно на $\vec{g}_j, j=[1,3]$, получим

$$\lambda_1(\vec{f}_1, \vec{g}_j) + \lambda_2(\vec{f}_2, \vec{g}_j) + \lambda_3(\vec{f}_3, \vec{g}_j) = 0, \quad j=[1,3]. \quad (2.7.1.)$$

Для девяти выражений $(\vec{f}_i, \vec{g}_j), i=[1,3], j=[1,3]$ имеем $(\vec{f}_i, \vec{g}_j) = \begin{cases} \alpha, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, где

$\alpha \neq 0$. Действительно, выражения $(\vec{f}_i, \vec{g}_i), i=[1,3]$ суть смешанные произведения некопланарных векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ и потому отличны от нуля. Остальные шесть выражений $(\vec{f}_i, \vec{g}_j), i \neq j$ будут смешанными произведениями векторов, среди которых имеется пара равных, и, следовательно, равными нулю.

Подставляя значения выражений в систему равенств (2.7.1.), получим, что все $\lambda_i = 0, i=[1,3]$, что противоречит сделанному предположению о линейной зависимости векторов $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$.

Теорема доказана.

2.8. Двойное векторное произведение

Определение 2.8.1. **Двойным векторным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ называется вектор $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}]$.**

Для ряда задач оказывается полезным применение формулы

$$[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}),$$

доказательство которой приводится в приложении 4 (см. Пр.4.5.).

2.9. Замечания об инвариантности произведений векторов

Операции векторных произведений были введены независимо от координатного представления сомножителей и, значит, независимо и от используемого базиса. С другой стороны, естественным представляется вопрос о возможности (и, соответственно, целесообразности) введения операций произведения векторов непосредственно в координатной форме.

В общем случае, каждой упорядоченной паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ координатные представления $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$, естественно поставить в

соответствие девятку попарных произведений $\xi_k \eta_i$; $k, i = 1, 2, 3$, которую можно записать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \eta_1 & \xi_1 \eta_2 & \xi_1 \eta_3 \\ \xi_2 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \xi_2 \eta_3 \\ \xi_3 \eta_1 & \xi_3 \eta_2 & \xi_3 \eta_3 \end{pmatrix}$$

(2.9.1.)

На первый взгляд, зависимость компонент этой матрицы от выбора базиса делает координатный способ введения произведений векторов малоцелесообразным, ибо, в общем случае, придется давать их определение для каждого из возможных базисов. Однако было замечено, что существуют некоторые линейные комбинации чисел $\xi_k \eta_i$; $k, i = 1, 2, 3$, инвариантные (то есть не изменяющиеся) при замене базиса, которые можно принять за определение произведений векторов в координатном представлении.

Покажем, в качестве примера, что сумма элементов матрицы 2.9.1., стоящих на ее главной диагонали, не меняется при переходе от одного ортонормированного базиса к другому.

Пусть даны два ортонормированных базиса $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ и $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ с матрицей перехода $\|S\| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$. Согласно п.1.8., в этом случае для базисных векторов

имеют место соотношения $\vec{e}'_t = \sum_{p=1}^3 \sigma_{pt} \vec{e}_p$; $t = 1, 2, 3$, а для координат соответственно

$$\xi_s = \sum_{i=1}^3 \sigma_{si} \xi'_i; s = 1, 2, 3 \quad ; \quad \eta_s = \sum_{t=1}^3 \sigma_{st} \eta'_t; s = 1, 2, 3 .$$

Пусть δ_{it} — символ Кронекера (см. п.2.3.). Из условия ортонормированности базисов $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ и $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ имеем

$$(\vec{e}_i', \vec{e}_t') = \delta_{it} = \left(\sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \vec{e}_s, \sum_{p=1}^3 \sigma_{pt} \vec{e}_p \right) = \sum_{s=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{pt} (\vec{e}_s, \vec{e}_p) = \sum_{s=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sigma_{pi} \sigma_{st} \delta_{sp} = \sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{st} .$$

Отметим, что полученные здесь соотношения $\sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{st} = \delta_{it}$; $i, t = 1, 2, 3$ являются свойством матрицы перехода $\|S\|$ от одного ортонормированного базиса к другому.

Найдем теперь выражение для линейной комбинации $\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$ в базисе $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'\}$, используя зависимости между компонентами матрицы перехода и определение символа Кронекера

$$\sum_{s=1}^3 \xi_s \eta_s = \sum_{s=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{si} \xi_i' \right) \left(\sum_{t=1}^3 \sigma_{st} \eta_t' \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^3 \xi_i' \eta_t' \sum_{s=1}^3 \sigma_{si} \sigma_{st} = \sum_{i=1}^3 \sum_{t=1}^3 \xi_i' \eta_t' \delta_{it} = \sum_{i=1}^3 \xi_i' \eta_i' .$$

Полученное равенство доказывает инвариантность суммы $\xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$ при замене одного ортонормированного базиса другим, которая может быть принята в этих базисах за определение скалярного произведения векторов.

Раздел 3

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Как было показано, использование системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством точек пространства и множеством их радиус–векторов. Это, в свою очередь, позволяет свести исследование свойств линий, поверхностей или тел к изучению множеств радиус–векторов, соответствующих точкам, образующим исследуемые геометрические объекты.

Раздел 3 посвящен методам описания и исследования свойств простейших геометрических объектов — прямой и плоскости — средствами векторной алгебры. В разделах 3, 4 и 5 настоящего пособия будут использоваться обозначения координаты по оси абсцисс через x , координаты по оси ординат через y и координаты по оси аппликат через z , равно как и стандартные формы записи уравнений.

3.1. Прямая на плоскости

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L , проходящая через точку $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ с лежащим на ней ненулевым вектором $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$.

Определение 3.1.1. Вектор $\vec{a}$ называется *направляющим вектором* прямой L .

Теорема 3.1.1. Множество радиус–векторов точек на прямой L представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, где τ - произвольный вещественный параметр.

Доказательство:

Пусть $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ некоторая точка на прямой, тогда вектор $\vec{a}$ должен быть коллинеарен вектору $\vec{r} - \vec{r}_0$. (Рис. 3.1.1.) Или, иначе, $\vec{r} - \vec{r}_0 = \tau \vec{a}$.

Откуда получаем параметрическое представление прямой

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a},$$

где $\tau \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема доказана.

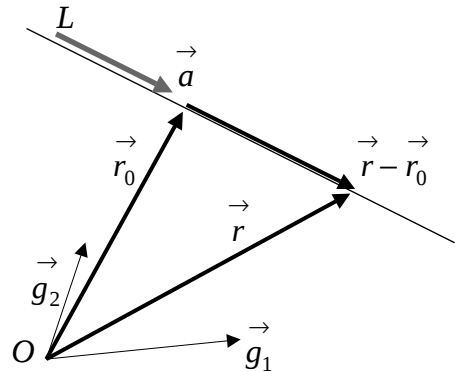


Рисунок 3.1.1.

Теорема
3.1.2.

Всякая прямая в любой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$.

Доказательство:

Условие коллинеарности ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ в координатной форме имеет вид

$$\frac{\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x \\ a_y \end{vmatrix}} = \tau \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - x_0 = \tau a_x \\ y - y_0 = \tau a_y \end{cases}.$$

Откуда $a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0) = 0$, или же, $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, где $A = a_y$; $B = -a_x$; $C = -a_y x_0 + a_x y_0$, и мы получили, что уравнение прямой есть алгебраическое уравнение первой степени. Заметим, что справедливость неравенства $|A| + |B| > 0$ следует из условия $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Теорема доказана.

Теорема
3.1.3.

Всякое уравнение вида $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой прямой.

Доказательство:

Пусть дано уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$. Выберем пару чисел x_0 и y_0 таких, что $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Вычитая почленно два эти равенства, получим $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Возьмем точку $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ и вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} -B \\ A \end{pmatrix}$. По теореме 3.1.2. имеем, что

прямая, проходящая через точку $\vec{r}_0$ в направлении вектора $\vec{a}$, имеет уравнение вида $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Следовательно, исходное уравнение есть уравнение прямой.

Теорема доказана.

Теорема
3.1.4.

Для того чтобы уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| > 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| > 0$ были уравнениями одной и той же прямой, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$.

Доказательство:

Докажем достаточность.

Пусть коэффициенты уравнений пропорциональны и имеет место $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

$$A_2x + B_2y + C_2 = \frac{1}{\lambda} A_1x + \frac{1}{\lambda} B_1y + \frac{1}{\lambda} C_1 = \frac{1}{\lambda} (A_1x + B_1y + C_1) = 0,$$

но поскольку $\lambda \neq 0$, то $A_1x + B_1y + C_1 = 0$.

Аналогично из $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ следует $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Докажем необходимость.

Пусть уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ есть уравнения одной и той же прямой в некоторой декартовой системе координат. Тогда их направляющие векторы коллинеарны и существует (по теореме 3.1.2.) $\lambda \neq 0$ такое, что $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$.

С другой стороны, из равносильности уравнений $\lambda A_2x + \lambda B_2y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ следует, что $C_1 = \lambda C_2$ и, окончательно, $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$.

Теорема доказана.

Замечание: уравнение прямой не в любой системе координат является алгебраическим уравнением первой степени. Например, в полярной системе координат (см. п. 4.6.) оно может иметь вид $\rho = P \sec(\varphi + \varphi_0)$.

3.2. Формы задания прямой на плоскости

В произвольной декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ существуют различные формы задания прямой на плоскости. Рассмотрим основные из них.

- 1°. *Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки*
- Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{vmatrix}$, то ее уравнение в векторной форме будет иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ или $\vec{r} = (1 - \tau)\vec{r}_1 + \tau\vec{r}_2$.
- Соответственно в координатах, исключив параметр τ , получим одну из следующих формул:
- $$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}; \quad (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$$
- $$y = y_1; \quad \forall x, \quad \text{если} \quad y_2 = y_1$$
- $$x = x_1; \quad \forall y, \quad \text{если} \quad x_2 = x_1.$$

Заметим, что эти три случая могут быть описаны условием

$$\det \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие 3.2.1. Для того, чтобы три точки $\vec{r}_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix}$ и $\vec{r}_3 = \begin{vmatrix} x_3 \\ y_3 \end{vmatrix}$ лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли уравнению

$$\det \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

2°. Векторное уравнение прямой (уравнение прямой, проходящей через данную точку

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

перпендикулярно заданному ненулевому вектору

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}).$$

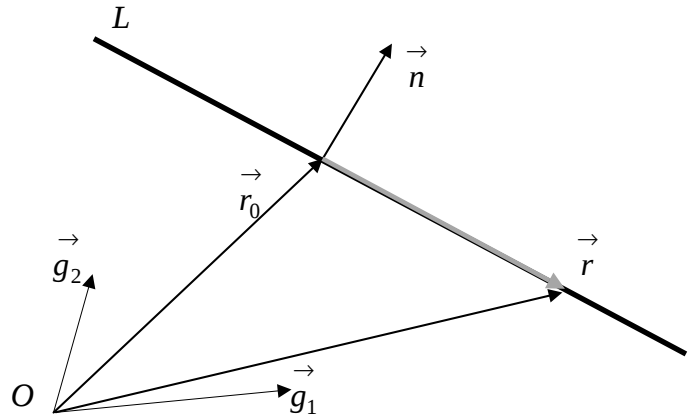


Рисунок 3.2.1.

Возьмем в качестве направляющего вектора данной прямой $\vec{a} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$, где вектор $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ есть радиус-вектор некоторой точки на прямой (Рис. 3.2.1.). Тогда из условия ортогональности векторов $\vec{n}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ получим $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, или $(\vec{n}, \vec{r}) = d$, где $d = (\vec{n}, \vec{r}_0)$.

При обратном переходе от записи уравнения прямой в виде $(\vec{n}, \vec{r}) = d$ к $(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, в качестве $\vec{r}_0$ можно взять, например, $\vec{r}_0 = \frac{d}{(\vec{n}, \vec{n})} \vec{n}$.

В ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ векторное уравнение прямой приобретает вид $n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) = 0$ или же $n_x x + n_y y = d$, где $d = n_x x_0 + n_y y_0$.

Сравнивая последнюю запись с общим видом уравнения прямой $Ax + By + C = 0$, приходим к заключению, что в ортонормированной системе координат вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ будет ортогонален этой прямой.

Определение 3.2.1. Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* прямой L .

3°. *Нормальное уравнение прямой* Рассмотрим скалярное уравнение прямой в ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$ и преобразуем его, разделив обе части на $\sqrt{A^2 + B^2}$. Подставляя обозначения

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \rho = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

получим так называемую *нормальную* форму записи уравнения

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi + \rho = 0.$$

Геометрический смысл параметров ρ и φ ясен из следующего рис. 3.2.2.

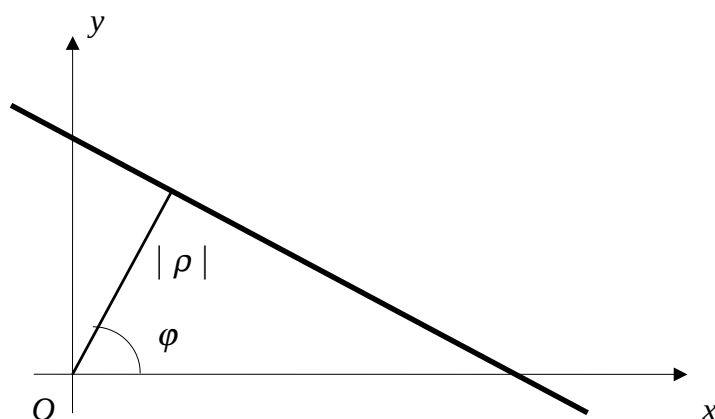


Рисунок 3.2.2.

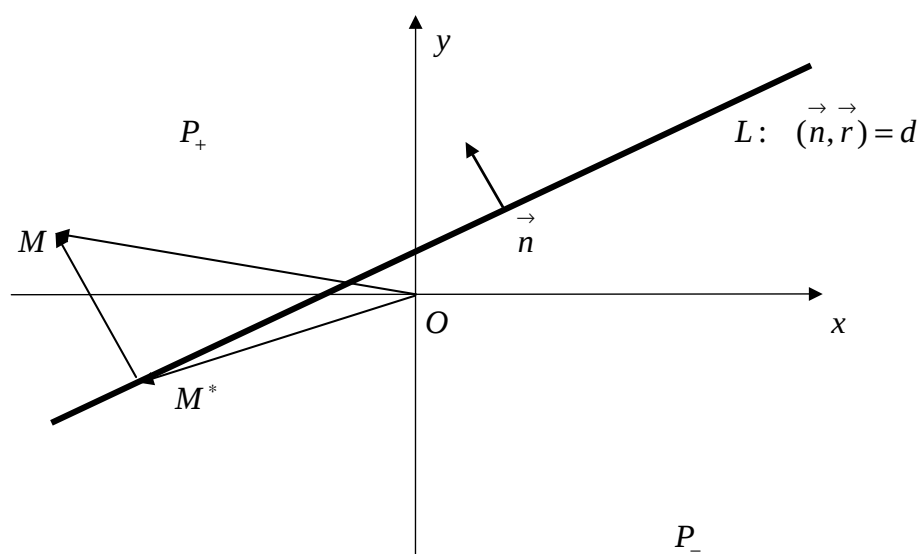


Рисунок 3.2.3.

Замечание о линейных неравенствах

Аналогично тому, как линейное уравнение задает на плоскости прямую, линейное неравенство $Ax + By + C > 0$, $|A| + |B| > 0$ определяет полуплоскость (множество точек, координаты которых x и y удовлетворяют данному неравенству), ограниченную прямой $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$. Покажем справедливость данного утверждения для случая, когда прямая $L: \vec{n}, \vec{r} = d$ делит плоскость P на две полуплоскости, обозначаемые P_+ и P_- (См. рис. 3.2.3.)

Будем говорить, что точка M с радиус-вектором $\vec{R}$ принадлежит полуплоскости P_+ (или, соответственно, P_-), если существует $\lambda > 0$ (соответственно, $\lambda < 0$) такое, что $\vec{M}^* M = \lambda \vec{n}$, где M^* есть ортогональная проекция M на прямую L . Тогда имеет место

Теорема 3.2.1. **Для того, чтобы $M \in P_+$, необходимо и достаточно выполнения неравенства $\vec{n}, \vec{R} > d$.**

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть $M \in P_+$, то есть существует $\lambda > 0$ такое, что $\vec{M}^* M = \lambda \vec{n}$. Оценим величину $\vec{n}, \vec{R}$. Поскольку $M^* \in L$, то $\vec{n}, \vec{OM}^* = d$, и тогда

$$\vec{n}, \vec{R} = \vec{n}, \vec{OM}^* + \vec{M}^* M = \vec{n}, \vec{OM}^* + \vec{n}, \vec{M}^* M = d + \lambda \vec{n}, \vec{n} > d$$

в силу положительности λ .

Докажем достаточность.

Пусть $\vec{n}, \vec{R} > d$ и $\vec{M}^* M = \lambda \vec{n}$, тогда, в силу $\vec{n}, \vec{OM}^* = d$, получаем

$$\vec{n}, \vec{R} = \vec{n}, \vec{OM}^* + \vec{M}^* M = \vec{n}, \vec{OM}^* + \vec{n}, \vec{M}^* M = d + \lambda \vec{n}, \vec{n} > d.$$

Откуда, из $\vec{n} \neq 0$ следует, что $\lambda > 0$ и, значит, $M \in P_+$.

Теорема доказана.

Задача 3.2.1. Дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и прямая L , с уравнением $\vec{n}, \vec{r} - r_0 = 0$. Найти расстояние до этой прямой от точки M , радиус-вектор которой $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Решение

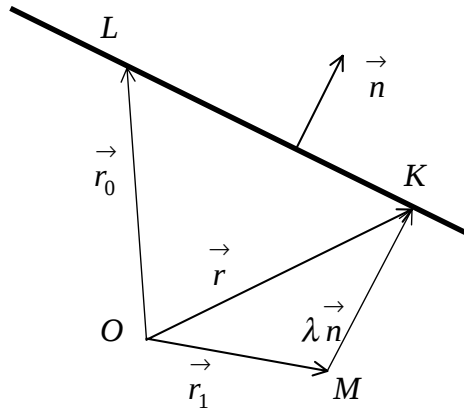


Рисунок 3.2.4.

1°. Пусть $\vec{MK} = \lambda \vec{n}$, тогда $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{n}$. (Рис. 3.2.4.)

2°. Точка K принадлежит данной прямой, поэтому имеет место соотношение

$$(\vec{n}, \vec{r}_1 + \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0.$$

Откуда
$$\lambda = -\frac{(\vec{n}, \vec{r}_1 - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2}.$$

3°. Подставляя λ в выражение для $\vec{MK}$, получим $|\vec{MK}| = |(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|})|.$

4°. Пусть система координат ортонормированная. Для уравнения $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, как было показано, вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ перпендикулярен прямой. Поэтому $|\vec{MK}| = \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Принимая во внимание, что точка $\vec{r}_0$ лежит на прямой L и, следовательно, $Ax_0 + By_0 + C = 0$, можно записать окончательный ответ в виде $|\vec{MK}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$

Определение 3.2.2. Пучком прямых на плоскости называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую данную точку, именуемую вершиной пучка.

Теорема 3.2.2.

Пусть точка, общая для всех прямых пучка, является точкой пересечения непараллельных прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда

1°. Для любой прямой пучка найдется пара не равных нулю одновременно чисел α и β таких, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

есть уравнение данной прямой.

2°. При любых, не равных нулю одновременно α и β , уравнение $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ есть уравнение некоторой прямой данного пучка.

Доказательство:

1°. Возьмем некоторую точку $\vec{r}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, не совпадающую с вершиной пучка, и примем в качестве $\alpha = A_2x^* + B_2y^* + C_2$, а в качестве $\beta = -(A_1x^* + B_1y^* + C_1)$.

Заметим, что $|\alpha| + |\beta| > 0$, поскольку точка $\vec{r}^*$ не принадлежит данным прямым одновременно. Кроме того, прямая

$$(A_2x^* + B_2y^* + C_2)(A_1x + B_1y + C_1) - (A_1x^* + B_1y^* + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

проходит как через точку $\vec{r}^*$, так и через вершину пучка и, следовательно, принадлежит пучку.

2°. Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пара пересекающихся прямых из рассматриваемого пучка, тогда очевидно, что

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

При этом уравнение $(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + (\alpha C_1 + \beta C_2) = 0$ является уравнением прямой, поскольку из $|A_1| + |B_1| > 0$, $|A_2| + |B_2| > 0$ и $|\alpha| + |\beta| > 0$ следует, что

$$|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0.$$

Действительно, допустим противное:

$$\begin{cases} A_1\alpha + A_2\beta = 0 \\ B_1\alpha + B_2\beta = 0 \end{cases} \quad (3.2.1.)$$

Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ по построению имеют по крайней мере одну общую точку. Поэтому они либо совпадают, либо пересекаются. По теореме 3.1.4. они совпадают тогда и только тогда, когда

$\lambda \neq 0$, для которого $A_1 = \lambda A_2$ и $B_1 = \lambda B_2$. Последние два равенства по теореме 1.6.2. равносильны условию $\det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.

В рассматриваемом случае прямые пересекаются, поэтому $\det \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и, в силу теоремы 1.1.2., система линейных уравнений 3.2.1. может иметь лишь единственное решение. С другой стороны, очевидно, что эта система имеет тривиальное решение $\alpha = \beta = 0$, что в совокупности противоречит неравенству $|\alpha| + |\beta| > 0$. Следовательно, $|\alpha A_1 + \beta A_2| + |\alpha B_1 + \beta B_2| > 0$.

Теорема доказана.

Определение 3.2.2. Уравнение $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ с неравными одновременно нулю параметрами α и β называется уравнением *пучка прямых* на плоскости.

3.3. Плоскость в пространстве

Пусть даны система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ в пространстве и плоскость S , проходящая через точку $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ с лежащими на S неколлинеарными векторами

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \text{ и } \vec{q} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}.$$

Определение 3.3.1. Векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ называются *направляющими векторами* плоскости S .

Теорема 3.3.1. Множество радиус-векторов точек на плоскости S представимо в виде $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$, где φ и θ - произвольные вещественные параметры.

Доказательство:

Пусть $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ некоторая точка на плоскости, тогда векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ будут компланарны. (Рис. 3.3.1.)

Откуда, в силу теоремы 1.4.3. и леммы 1.4.1., получаем $\vec{r} - \vec{r}_0 = \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$ и, следовательно, уравнение плоскости будет иметь вид

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q},$$

где $\varphi \in (-\infty, +\infty)$; $\theta \in (-\infty, +\infty)$.

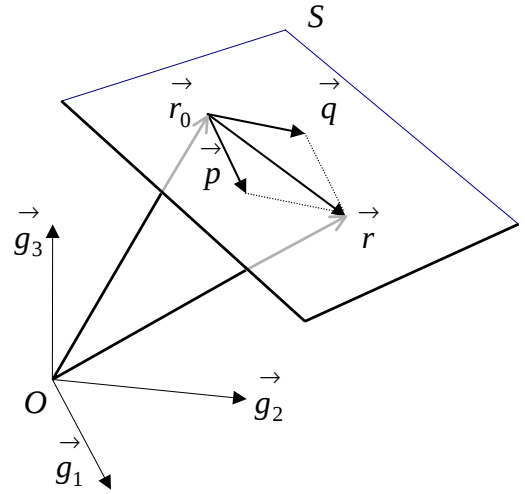


Рисунок 3.3.1.

Теорема доказана.

Теорема
3.3.2.

Всякая плоскость в любой декартовой системе координат может задана уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| > 0.$$

Доказательство:

Условие компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ в координатной форме имеет, в силу теоремы 1.6.3., вид

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{pmatrix} = 0.$$

Откуда $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, или, окончательно, $Ax + By + Cz + D = 0$, где числа A , B и C находятся по теореме 1.1.1. и равны соответственно

$$A = \det \begin{pmatrix} p_y & p_z \\ q_y & q_z \end{pmatrix}; \quad B = -\det \begin{pmatrix} p_x & p_z \\ q_x & q_z \end{pmatrix}; \quad C = \det \begin{pmatrix} p_x & p_y \\ q_x & q_y \end{pmatrix},$$

а $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, и таким образом, мы получили, что уравнение плоскости есть уравнение первой степени.

Условие неравенства нулю одновременно чисел A , B и C вытекает из неколлинеарности векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и следствия 2.5.1.

Теорема доказана.

Теорема
3.3.3.

Всякое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$ в любой декартовой системе координат есть уравнение некоторой плоскости.

Доказательство:

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$ в случае $C \neq 0$ может быть записано в виде

$$\det \begin{vmatrix} x + \frac{DA}{A^2 + B^2 + C^2} & y + \frac{DB}{A^2 + B^2 + C^2} & z + \frac{DC}{A^2 + B^2 + C^2} \\ 0 & -C & B \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0,$$

а в случае $C=0$ в виде

$$\det \begin{vmatrix} x + \frac{DA}{A^2 + B^2} & y + \frac{DB}{A^2 + B^2} & z + 0 \\ -B & A & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

В обоих случаях эти уравнения определяют плоскость, проходящую через некоторую заданную точку параллельно двум неколлинеарным векторам.

Теорема доказана.

Задача
3.3.1.

В системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные, попарно несовпадающие и не лежащие на одной прямой точки

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}; \quad \vec{r}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Из условия задачи следует, что неколлинеарные векторы $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$ параллельны искомой плоскости. Кроме того, для радиус-вектора

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ любой принадлежащей этой плоскости точки вектор $\vec{r} - \vec{r}_1$ также

будет ей параллелен.

Из условия компланарности векторов $\vec{r} - \vec{r}_1$, $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ и $\vec{r}_3 - \vec{r}_1$, получаем искомое уравнение плоскости, имеющее вид $(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0$, или, в координатной форме (согласно п.2.7.)

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0.$$

Задача
3.3.2.

В системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ составить уравнение плоскости,

проходящей через заданную точку $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ перпендикулярно ненулево-

му вектору $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix}$.

Решение:

Из условия задачи следует, что для радиус-вектора $\vec{r}$ любой точки, принадлежащей этой плоскости, векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$ и $\vec{n}$ будут ортогональны, т.е. $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$.

В ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ это условие принимает вид

$$n_x(x - x_0) + n_y(y - y_0) + n_z(z - z_0) = 0$$

или, обозначая $A = n_x$; $B = n_y$; $C = n_z$; $D = -n_x x_0 - n_y y_0 - n_z z_0$, получим $Ax + By + Cz + D = 0$.

Следствие
3.3.1.

Если плоскость задана в ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где $|A| + |B| + |C| > 0$, то

вектор $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ ортогонален этой плоскости.

Определение
3.3.2.

Вектор $\vec{n}$ называется *нормальным вектором* плоскости $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$.

Определение
3.3.3.

Вектор $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$ называется *главным вектором* плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, $|A| + |B| + |C| > 0$.

В ортонормированной системе координат главный вектор плоскости является и нормальным ее вектором.

Задача
3.3.3.

В системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ найти расстояние от точки M с

радиус-вектором $\vec{r}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix}$ до плоскости $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$.

Решение:

1°. Пусть K есть ортогональная проекция точки M на данную плоскость, тогда $\vec{MK} = \lambda \vec{n}$ и $\vec{r} = \vec{r}^* + \lambda \vec{n}$. (См. рис. 3.3.2.)

2°. Точка K принадлежит данной плоскости, поэтому имеет место соотношение $(\vec{n}, \vec{r}^* + \lambda \vec{n} - \vec{r}_0) = 0$,

и, следовательно,

$$\lambda = - \frac{(\vec{n}, \vec{r}^* - \vec{r}_0)}{|\vec{n}|^2},$$

тогда для искомого расстояния получим

$$|\vec{MK}| = |(\vec{r}^* - \vec{r}_0, \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|})|.$$

3°. Рассмотрим теперь ортонормированную систему координат. В этом случае вектор

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \text{ будет нормальным вектором плоскости}$$

$Ax + By + Cz + D = 0$.

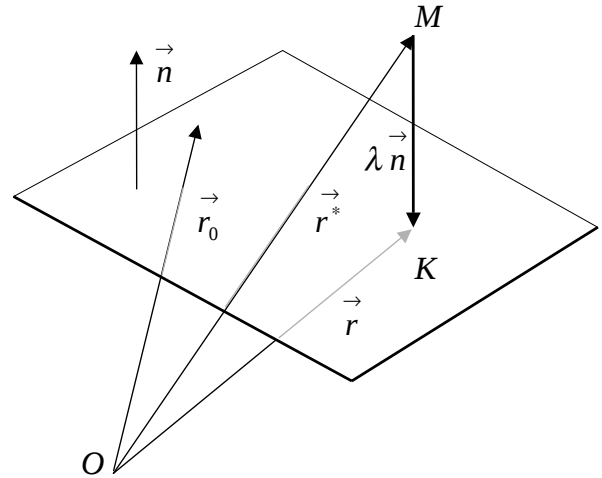


Рисунок 3.3.2.

Поэтому $|\vec{MK}| = \frac{|A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0) + C(z^* - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, но, принимая во

внимание, что точка $\vec{r}_0$ принадлежит данной плоскости, то есть $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и что $|A| + |B| + |C| > 0$, ответ задачи можно записать в виде

$$|\vec{MK}| = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Теорема
3.3.4.

Плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $|A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $|A_2| + |B_2| + |C_2| > 0$ параллельны тогда и только тогда, когда их главные векторы коллинеарны.

Доказательство:

Докажем достаточность. Если главные векторы коллинеарны, то существует такое число $\lambda \neq 0$, что $A_1 = \lambda A_2$; $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$ и система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

может быть переписана в виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + \lambda D_2 = 0 \end{cases}.$$

При $D_1 \neq \lambda D_2$ на этих плоскостях нет общих точек, а при $D_1 = \lambda D_2$ — все точки общие, что и означает параллельность плоскостей.

Докажем необходимость.

Пусть плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны. Тогда они должны пересекать одни и те же координатные плоскости по параллельным прямым.

Пусть для определенности этими координатными плоскостями являются плоскости, для которых $x=0$ и $z=0$. Линии пересечения, соответствующие первой из координатных плоскостей, будут определяться системами уравнений

$$\begin{cases} x = 0 \\ B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 0 \\ B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Параллельность этих прямых означает существование $\lambda \neq 0$ такого, что $B_1 = \lambda B_2$; $C_1 = \lambda C_2$.

Рассматривая случай $z=0$, получаем аналогичную систему соотношений

$$\begin{cases} z = 0 \\ A_1x + B_1y + D_1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} z = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases}'$$

но из условия $B_1 = \lambda B_2$ и параллельности этой пары прямых вытекает, что $A_1 = \lambda A_2$.

Теорема доказана.

Следствие
3.3.2.

Для того чтобы уравнения

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0 \quad \text{и} \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0 \end{aligned}$$

были уравнениями одной и той же плоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \neq 0$ такое, что

$$A_1 = \lambda A_2; \quad B_1 = \lambda B_2; \quad C_1 = \lambda C_2; \quad D_1 = \lambda D_2.$$

Определение 3.3.4. *Пучком плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную прямую.

Определение 3.3.5. *Уравнением пучка плоскостей*, проходящих через прямую, определяемую пересечением пары непараллельных плоскостей

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0 \quad \text{и}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0,$$

называется уравнение вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad |\alpha| + |\beta| > 0.$$

Определение 3.3.6. *Связкой плоскостей* в пространстве называется совокупность всех плоскостей, проходящих через данную точку.

Определение 3.3.7. Если точка P , принадлежащая одновременно трем плоскостям

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad |A_1| + |B_1| + |C_1| > 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad |A_2| + |B_2| + |C_2| > 0 \quad \text{и}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \quad |A_3| + |B_3| + |C_3| > 0,$$

единственная, то уравнение вида

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0, \quad |\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0.$$

называется *уравнением связки плоскостей*, проходящих через точку P .

Для пучка и связки плоскостей в пространстве справедливы теоремы, аналогичные теореме 3.2.1. для пучка прямых на плоскости.

3.4. Формы задания прямой в пространстве

Существуют различные способы задания прямой в пространстве в некоторой декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

1°. Уравнение прямой в параметрической форме

Пусть точка с радиус-вектором $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ лежит на прямой в пространстве, имеющей ненулевой направляющий вектор $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ и проходящей через точку $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, тогда из коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ следует, что уравнение прямой в пространстве должно иметь вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$.

2°. Уравнение прямой в канонической форме

Если исключить параметр τ из скалярной записи уравнения $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \\ z = z_0 + \tau a_z \end{cases},$$

то получается так называемое каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

хотя здесь правильнее говорить о системе уравнений, задающих прямую в пространстве. Случай $a_x a_y a_z = 0$ рассматривается аналогично п.3.2.(1°).

3°. Уравнение прямой, проходящей через две несовпадающие точки

Поскольку направляющий вектор данной прямой $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$, то уравнение прямой в векторной форме можно представить в виде

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \tau (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad \text{или} \quad \vec{r} = (1 - \tau) \vec{r}_1 + \tau \vec{r}_2.$$

Соответственно, в координатах после исключения параметра τ получаем соотношения:

$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

если только $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)(z_2 - z_1) \neq 0$.

4°. Уравнение
прямой в
1-й векторной
форме

Прямая в пространстве может быть задана как линия пересечения двух плоскостей

$$(\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \quad \text{и} \quad (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2,$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — неколлинеарные, нормальные векторы этих плоскостей, а d_1 и d_2 — некоторые числа.

Или же, если известна точка $\vec{r}_0$, через которую проходит данная прямая, то радиус-вектор любой точки этой прямой удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \\ (\vec{n}_2, \vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \end{cases}.$$

Или, в координатной форме,
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

5°. Уравнение
прямой во
2-й векторной
форме

Прямая в пространстве может быть задана при помощи условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$, то есть в виде уравнения

$$[\vec{a}, \vec{r} - \vec{r}_0] = 0$$

или же

$$[\vec{a}, \vec{r}] = \vec{b}, \quad \text{где} \quad \vec{b} = [\vec{a}, \vec{r}_0].$$

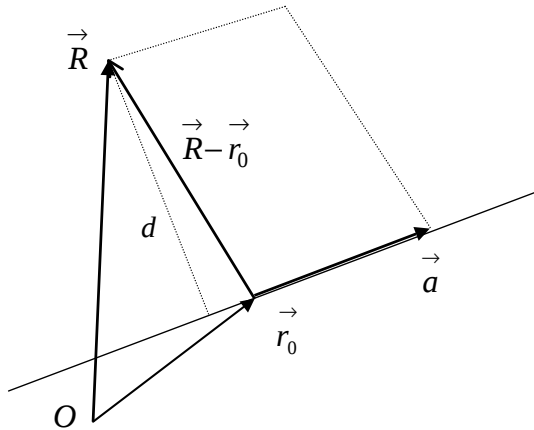
В ортонормированной системе координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ данное уравнение прямой в пространстве принимает вид:

$$\det \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_x & a_y & a_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_y z - a_z y = b_x \\ a_z x - a_x z = b_y \\ a_x y - a_y x = b_z \end{cases}.$$

Отметим, что в последней системе скалярных условий только два уравнения из трех независимы, то есть любое из уравнений является следствием двух других. Действию — тельно, умножив первое уравнение на a_x , второе на a_y и третье на a_z и сложив затем полученные равенства почленно, приходим к тождеству вида $0=0$, приняв при этом во

внимание, что числа a_x , a_y и a_z не равны нулю одновременно, и что, кроме того,

справедливы соотношения
$$\begin{cases} b_x = a_y z_0 - a_z y_0 \\ b_y = a_z x_0 - a_x z_0 \\ b_z = a_x y_0 - a_y x_0 \end{cases}.$$



Наконец, расстояние d от некоторой точки с радиус-вектором $\vec{R}$ до прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ в пространстве можно найти, воспользовавшись тем свойством, что S — площадь параллелограмма, построенного на паре векторов, равна модулю их векторного произведения. Из рисунка 3.4.1. получаем

$$d = \frac{S}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Рисунок 3.4.1.

3.5. Решение геометрических задач методами векторной алгебры

Эффективность использования методов векторной алгебры при решении геометрических задач во многом зависит от правильного выбора представления геометрических условий в векторной форме.

Например, если ввести равносильные, используемым в элементарной геометрии,

Определение 3.5.1.	Углом между плоскостями $(\vec{r} - \vec{r}_{01}, \vec{n}_1) = 0$ и $(\vec{r} - \vec{r}_{02}, \vec{n}_2) = 0$ называется угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$.
Определение 3.5.2.	Углом между плоскостью $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0$ и прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ называется угол $\frac{\pi}{2} - \alpha$, где α — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{a}$.

то вычисление углов, определяющих взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, может быть сведено к нахождению скалярных произведений соответствующих нормальных и направляющих векторов.

В таблицах 3.5.1.–3.5.3. приведены некоторые из часто употребляемых форм выражения геометрических условий при помощи векторных операций.

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ 2°. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	$(\vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$
Коллинеарность прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a} = \lambda [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$. 2°. $[\vec{a}, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] = \vec{o}$
Ортогональность прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и $\begin{cases} (\vec{n}_1, \vec{r}) = d_1 \\ (\vec{n}_2, \vec{r}) = d_2 \end{cases}$	$(\vec{a}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$
Совпадение прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	1°. Существуют $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$ такие, что $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ и $\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02} = \mu \vec{a}_1$ 2°. $[\vec{a}_1, \vec{a}_2] = \vec{o}$ и $[\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1] = \vec{o}$
Пересечение прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) = 0$
Условие скрещивания прямых $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$	$[\vec{a}_1, \vec{a}_2] \neq \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{a}_1, \vec{a}_2) \neq 0$.

Таблица 3.5.1. Относительная ориентация прямых в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1 \text{ и } \vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1, \vec{q}_1] = \lambda [\vec{p}_2, \vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) \neq 0$. 2°. $[[\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]] = \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) \neq 0$.
Совпадение плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1 \text{ и } \vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $[\vec{p}_1, \vec{q}_1] = \lambda [\vec{p}_2, \vec{q}_2]$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) = 0$. 2°. $[[\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]] = \vec{o}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}_1, \vec{q}_1) = 0$.
Ортогональность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \varphi \vec{p}_1 + \theta \vec{q}_1 \text{ и } \vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p}_2 + \theta \vec{q}_2$	$([\vec{p}_1, \vec{q}_1], [\vec{p}_2, \vec{q}_2]) = 0$
Параллельность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q} \text{ и } (n, r) = d$	$(\vec{p}, \vec{q}, n) = 0, \text{ при условии } (n, \vec{r}_0) \neq d$
Совпадение плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q} \text{ и } (n, r) = d$	$(\vec{p}, \vec{q}, n) = 0, \text{ при условии } (n, \vec{r}_0) = d$
Ортогональность плоскостей $\vec{r} = \vec{r}_0 + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q} \text{ и } (n, r) = d$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $[\vec{p}, \vec{q}] = \lambda \vec{n}$. 2°. $[[\vec{p}, \vec{q}], \vec{n}] = \vec{o}$.

Таблица 3.5.2. Относительная ориентация плоскостей в пространстве

Геометрическое условие	Возможная векторная форма представления
Параллельность прямой $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}$ и плоскости $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$	1°. Существуют $\lambda; \mu$; $ \lambda + \mu > 0$ такие, что $\vec{a} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}, \vec{q}) \neq 0$. 2°. $\begin{cases} (\vec{a}, \vec{p}, \vec{q}) = 0 \\ (\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}, \vec{q}) \neq 0 \end{cases}.$
Принадлежность прямой $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}$ плоскости $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$	1°. Существуют $\lambda; \mu$; $ \lambda + \mu > 0$ такие, что $\vec{a} = \lambda \vec{p} + \mu \vec{q}$ и $(\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}, \vec{q}) = 0$. 2°. $\begin{cases} (\vec{a}, \vec{p}, \vec{q}) = 0 \\ (\vec{r}_{01} - \vec{r}_{02}, \vec{p}, \vec{q}) = 0 \end{cases}.$
Ортогональность прямой $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}$ плоскости $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \varphi \vec{p} + \theta \vec{q}$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a} = \lambda [\vec{p}, \vec{q}]$. 2°. $[\vec{a}, [\vec{p}, \vec{q}]] = \vec{o}$.
Параллельность прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ и плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d$	$(\vec{a}, \vec{n}) = 0$, при условии $(\vec{n}, \vec{r}_0) \neq d$.
Принадлежность прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d$	$\begin{cases} (\vec{a}, \vec{n}) = 0 \\ (\vec{r}_0, \vec{n}) = d \end{cases}.$
Ортогональность прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$ плоскости $(\vec{n}, \vec{r}) = d$	1°. Существует $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{a} = \lambda \vec{n}$. 2°. $[\vec{a}, \vec{n}] = \vec{o}$.

Ортогональность	прямой	1°. Существуют $\lambda; \mu$; $ \lambda + \mu > 0$ такие, что
$\begin{cases} \vec{(n_1, r)} = d_1 \\ \vec{(n_2, r)} = d_2 \end{cases}$	плоскости	$\vec{n} = \lambda \vec{n_1} + \mu \vec{n_2} .$
$\vec{(n, r)} = d$		2°. $[\vec{n}, [\vec{n_1}, \vec{n_2}]] = \vec{o} .$

Таблица 3.5.3. Относительная ориентация прямой и плоскости в пространстве

Отметим, что в таблицах 3.5.1. – 3.5.3. сохранены введенные ранее обозначения и ограничения.

При решении геометрических задач методами векторной алгебры также важно уметь переводить эти представления из одной эквивалентной формы в другую ¹⁾.

Найдем, например, для прямой, заданной в пространстве пересечением двух непараллельных плоскостей $\begin{cases} \vec{(n_1, r)} = d_1 \\ \vec{(n_2, r)} = d_2 \end{cases}$, уравнение в параметрическом виде $\vec{r} = \vec{r_0} + \tau \vec{a} .$

Нетрудно убедиться, что в качестве направляющего вектора данной прямой можно взять $\vec{a} = [\vec{n_1}, \vec{n_2}]$, а радиус – вектор точки $\vec{r_0}$ может быть найден как некоторая линейная комбинация векторов $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$. Действительно, пусть $\vec{r_0} = \xi \vec{n_1} + \eta \vec{n_2}$, тогда из

системы линейных уравнений $\begin{cases} \vec{(n_1, r_0)} = d_1 \\ \vec{(n_2, r_0)} = d_2 \end{cases}$, находим $\xi = \frac{\Delta_\xi}{\Delta}$ и $\eta = \frac{\Delta_\eta}{\Delta}$, где

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} \vec{(n_1, n_1)} & \vec{(n_1, n_2)} \\ \vec{(n_2, n_1)} & \vec{(n_2, n_2)} \end{vmatrix}, \quad \Delta_\xi = \det \begin{vmatrix} d_1 & \vec{(n_1, n_2)} \\ d_2 & \vec{(n_2, n_2)} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_\eta = \det \begin{vmatrix} \vec{(n_1, n_1)} & d_1 \\ \vec{(n_2, n_1)} & d_2 \end{vmatrix}$$

(см. теорему 1.1.2.) Покажите самостоятельно, что из условия неколлинеарности нормальных векторов $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ следует $\Delta \neq 0$.

Аналогично может быть выполнен и обратный переход.

¹⁾ Следует иметь в виду, что использование различных векторных представлений одного и то же геометрического условия может приводить к различным, но, естественно, эквивалентным формам записи решения. (См., например, задачу 3.5.2.)

Пусть уравнение прямой в пространстве имеет вид $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, причем предположим, что $\vec{r}_0$ и $\vec{a}$ неколлинеарны. Тогда в качестве нормальных векторов плоскостей, которые пересекаются по данной прямой, можно взять $\vec{n}_1 = [\vec{a}, \vec{r}_0]$ и $\vec{n}_2 = [\vec{a}, \vec{n}_1]$. Из второго равенства, используя п.2.8., получаем

$$\vec{n}_2 = [\vec{a}, \vec{n}_1] = [\vec{a}, [\vec{a}, \vec{r}_0]] = (\vec{a}, \vec{r}_0) \vec{a} - (\vec{a}, \vec{a}) \vec{r}_0 = (\vec{a}, \vec{r}_0) \vec{a} - |\vec{a}|^2 \vec{r}_0.$$

В качестве d_1 и d_2 очевидно можно принять $d_1 = (\vec{n}_1, \vec{r}_0)$ и $d_2 = (\vec{n}_2, \vec{r}_0)$.

Случай коллинеарных векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{a}$ рассмотрите самостоятельно.

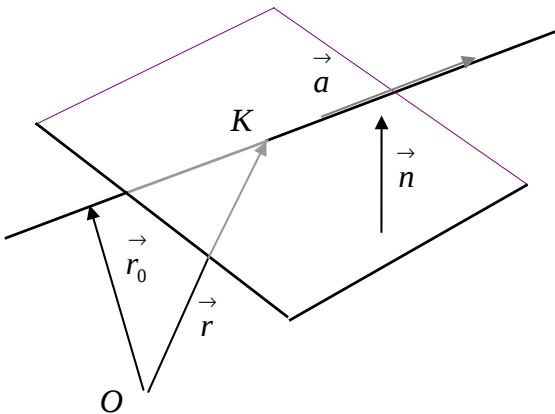
В заключение рассмотрим в качестве примеров решение некоторых стереометрических задач методами векторной алгебры.

Задача 3.5.1. Даны плоскость $(\vec{n}, \vec{r}) = d_0$ и пересекающая ее прямая $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$. Найдите радиус-вектор точки пересечения этой прямой и плоскости.

Решение:

1°. Заметим, что, если $(\vec{n}, \vec{a}) = 0$, то либо решений нет, либо вся прямая лежит на данной плоскости. Поэтому будем далее полагать, что $(\vec{n}, \vec{a}) \neq 0$.

2°. Имеем $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{n}$, где $\vec{r}$ — искомый радиус-вектор точки K , то есть точки пересечения прямой и плоскости, а λ — соответствующее этой точке значение параметра τ . (Рис. 3.5.2.)



Поскольку K принадлежит данной плоскости, то имеет место соотношение

Рисунок 3.5.2.

$$(\vec{n}, \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}) = d_0. \text{ Откуда } \lambda = \frac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})} \text{ и окончательно } \vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{d - (\vec{n}, \vec{r}_0)}{(\vec{n}, \vec{a})} \vec{a}.$$

Задача
3.5.2.

Даны точка с радиус-вектором $\vec{R}$ и прямая $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$. Найти расстояние от этой точки до данной прямой, не используя операцию векторного произведения.

Решение:

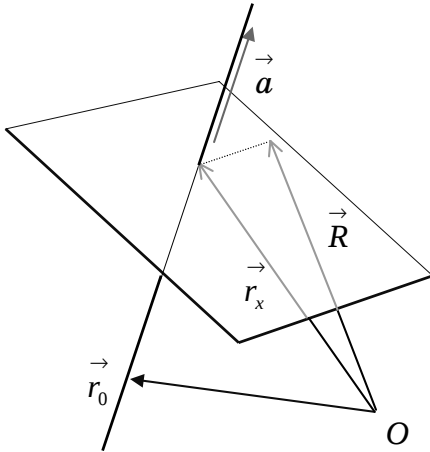


Рисунок 3.5.3.

1°. Проведем через данную точку с радиус-вектором $\vec{R}$ плоскость, перпендикулярную прямой. (Рис.

3.5.3.) Обозначим через $\vec{r}_x$ радиус-вектор точки пересечения прямой и плоскости. Тогда искомое расстояние будет равно $\rho = |\vec{R} - \vec{r}_x|$.

2°. Точка $\vec{r}_x$ будет удовлетворять одновременно соотношениям $(\vec{a}, \vec{R} - \vec{r}_x) = 0$ и $\vec{r}_x = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$, но тогда, исключая параметр λ ,

$$\text{находим, что } \vec{r}_x = \vec{r}_0 + \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

$$\text{и } \rho = \sqrt{(\vec{R} - \vec{r}_0 - \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a}, \vec{R} - \vec{r}_0 - \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})}{|\vec{a}|^2} \vec{a})} = \sqrt{|\vec{R} - \vec{r}_0|^2 - \frac{(\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a})^2}{|\vec{a}|^2}}.$$

Заметим, что в силу легко проверяемого тождества $|\vec{p}|^2 |\vec{q}|^2 = (\vec{p}, \vec{q})^2 + |[\vec{p}, \vec{q}]|^2$ дан-

ное решение совпадает с полученным в конце п.3.4. значением $\rho = \frac{|[\vec{R} - \vec{r}_0, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}$.

Задача
3.5.3.

Найти расстояние между прямыми $\vec{r} = \vec{r}_{01} + \tau \vec{a}_1$ и $\vec{r} = \vec{r}_{02} + \tau \vec{a}_2$.

Решение: 1°. Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, то решение следует из рис. 3.5.4. и

$$\text{дается формулой } \rho = \frac{S}{|\vec{a}_1|} = \frac{|[\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1]|}{|\vec{a}_1|}.$$

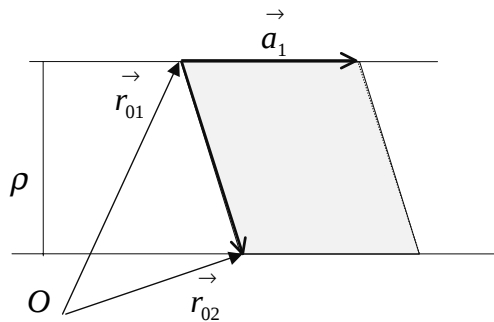


Рисунок 3.5.4.

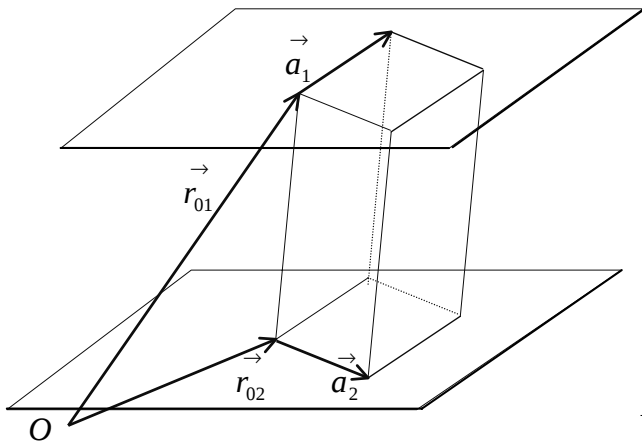


Рисунок 3.5.5.

2°. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны, тогда построим пару плоскостей, параллельных этим векторам, одна из которых содержит точку $\vec{r}_{01}$, а другая точку $\vec{r}_{02}$ (Рис. 3.5.5.)

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и $\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}$, равен произведению площади параллелограмма, находящегося в основании, на некоторую величину ρ .

Откуда находим, что

$$\rho = \frac{|(\vec{r}_{02} - \vec{r}_{01}, \vec{a}_1, \vec{a}_2)|}{|[\vec{a}_1, \vec{a}_2]|}.$$

Задача
3.5.4.

Даны плоскость $(\vec{n}, \vec{r}) = \delta$ и прямая $[\vec{p}, \vec{r}] = \vec{q}$. Найти $\vec{R}$ - радиус-вектор точки их пересечения.

Решение:

Умножив обе части уравнения прямой векторно слева на $\vec{n}$, получим $[\vec{n}, [\vec{p}, \vec{r}]] = [\vec{n}, \vec{q}]$. Подставив в это соотношение искомый вектор $\vec{R}$ и применив формулу п.2.8., приходим к равенству

$$\vec{p}(\vec{n}, \vec{R}) - \vec{R}(\vec{n}, \vec{p}) = [\vec{n}, \vec{q}].$$

Поскольку $\vec{R}$ принадлежит данной плоскости, то $(\vec{n}, \vec{R}) = \delta$, и тогда,

$$\text{при естественном ограничении } (\vec{n}, \vec{p}) \neq 0, \text{ получаем } \vec{R} = \frac{\delta \vec{p} - [\vec{n}, \vec{q}]}{(\vec{n}, \vec{p})}.$$

Раздел 4

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЪЕКТЫ
НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Линии на плоскости и в пространстве

Пусть дана система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ на плоскости и числовое множество Ω , являющееся отрезком или интервалом (возможно бесконечным или полубесконечным).

Определение
4.1.1.

Будем говорить, что линия L на плоскости задана *параметрически* вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \end{pmatrix}$, где $F_x(\tau), F_y(\tau)$ — непрерывные, скалярные функции аргумента τ , определенные для $\tau \in \Omega$), если

1°. Для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L .

2°. Для любой точки $\vec{r}_0$, лежащей на L , существует $\tau_0 \in \Omega$ такое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия на плоскости задается в виде уравнения $G(x, y) = 0$, которое получается исключением параметра τ из системы уравнений $\begin{cases} x = F_x(\tau) \\ y = F_y(\tau) \end{cases}, \tau \in \Omega$.

Пример
4.1.1.

1°. Прямая линия задается вектор-функцией $\vec{r} = \vec{r}_0 + \tau \vec{a}$, где $\vec{a}$ — направляющий вектор, а $\vec{r}_0$ — одна из точек данной прямой. Скалярная форма задания прямой в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + \tau a_x \\ y = y_0 + \tau a_y \end{cases}, \tau \in (-\infty, +\infty), \text{ то есть } \begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + \tau a_x \\ F_y(\tau) = y_0 + \tau a_y \end{cases}, \tau \in (-\infty, +\infty)$$

или $Ax + By + C = 0$, $|A| + |B| > 0$, то есть $G(x, y) = Ax + By + C$.

2°. В декартовой ортонормированной системе координат окружность радиуса R с центром в точке $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ в параметрическом виде может быть задана как:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \tau \\ y = y_0 + R \sin \tau \end{cases}, \tau \in [0, 2\pi), \text{ то есть } \begin{cases} F_x(\tau) = x_0 + R \cos \tau \\ F_y(\tau) = y_0 + R \sin \tau \end{cases}, \tau \in [0, 2\pi)$$

или же уравнением $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, где

$$G(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2.$$

Определение 4.1.2. Линия называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} = 0$, где p_k и q_k целые не отрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Определение 4.1.3. Число $N = \max_{k \in [0, m]} \{p_k + q_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, указанного в определении 4.1.2., где максимум ищется по всем k , для которых $\alpha_k \neq 0$. *Наименьший из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую линию, называется порядком алгебраической линии.*

Пример 4.1.2. (алгебраические линии)	Прямая	$x + 3y + 2 = 0$	(N=1)
	Квадратная парабола	$y - x^2 = 0$	(N=2)
	Гипербола	$xy - 1 = 0$	(N=2)
	“Декартов лист”	$x^3 + y^3 - xy = 0$	(N=3).

Теорема 4.1.1. **Порядок алгебраической линии не зависит от выбора системы координат.**

Доказательство:

Пусть линия L имеет в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ уравнение $G(x, y) = 0$ и порядок N . Перейдем к системе координат $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$. Формулы перехода, согласно соотношениям 1.8.2., имеют вид:

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1 \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2 \end{cases}$$

поэтому уравнение линии L в "новой" системе координат будет

$$G(\sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \beta_1, \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \beta_2) = 0.$$

Отсюда следует, в силу определения 4.1.2., что $N \geq N'$, то есть при переходе к "новой" системе координат порядок алгебраической кривой не может повыситься. Применяя аналогичные рассуждения для обратного перехода от $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ к $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$, получим $N \leq N'$ и, окончательно, $N = N'$.

Теорема доказана.

Замечание: фигуры на плоскости можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

Пример 4.1.4.

- 1°. В ортонормированной системе координат набор условий
- $$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$$
- задает прямоугольный равнобедренный треугольник, катеты которого лежат на осях координат и имеют длины 3.
- 2°. Неравенство вида $x^2 + y^2 - 4 \leq 0$ определяет круг радиуса 2 с центром в начале координат.

Рассмотрим теперь случай линии в пространстве. Пусть дана пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$.

Определение 4.1.4.

Будем говорить, что линия L в пространстве задана *параметрически*

вектор-функцией $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ (или в координатной форме $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(\tau) \\ F_y(\tau) \\ F_z(\tau) \end{pmatrix}$,

где $F_x(\tau), F_y(\tau), F_z(\tau)$ — непрерывные, скалярные функции от τ ,

определенные для $\tau \in \Omega$), если

1°. Для любого $\tau \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\tau)$ лежит на L .

2°. Для любой точки $\vec{r}_0$, лежащей на L , существует $\tau_0 \in \Omega$ та —
кое, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\tau_0)$.

Иногда линия в пространстве задается системой уравнений $\begin{cases} G(x, y, z) = 0 \\ H(x, y, z) = 0 \end{cases}$, ко —

торая получается исключением параметра τ из соотношений $\begin{cases} x = F_x(\tau) \\ y = F_y(\tau) \\ z = F_z(\tau) \end{cases}, \tau \in \Omega$, или же

равносильным уравнением, например, вида $G^2(x, y, z) + H^2(x, y, z) = 0$.

Пример
4.1.3.

1°. В декартовой системе координат алгебраическая линия второго порядка $x^2 + y^2 = 0, \forall z$ является прямой.

2°. В ортонормированной системе координат винтовая линия радиуса R с шагом $2\pi a$ может быть задана в следующем параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = R \cos \tau \\ y = R \sin \tau \\ z = a\tau \end{cases}, \tau \in (-\infty, +\infty), \text{ или же } \begin{cases} x = R \cos \frac{z}{a} \\ y = R \sin \frac{z}{a} \end{cases}.$$

4.2. Поверхности в пространстве

Пусть имеется пространственная система координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и Ω — множество упорядоченных пар чисел φ, θ , заданное условиями: $\alpha \leq \varphi \leq \beta, \gamma \leq \theta \leq \delta$.

Определение
4.2.1.

Будем говорить, что в пространстве поверхность S задана *параметрически* вектор — функцией $\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta)$ (или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(\varphi, \theta) \\ F_y(\varphi, \theta) \\ F_z(\varphi, \theta) \end{pmatrix}, \text{ где } F_x(\varphi, \theta), F_y(\varphi, \theta), F_z(\varphi, \theta) \text{ — непрерывные, ска —}$$

лярные функции двух аргументов φ, θ , определенные для $\varphi, \theta \in \Omega$), если:

1°. Для любой упорядоченной пары чисел $\varphi, \theta \in \Omega$ точка $\vec{r} = \vec{F}(\varphi, \theta)$ лежит на S .

2°. Для любой точки $\vec{r}_0$, лежащей на S , существует упорядоченная пара чисел $\varphi_0, \theta_0 \in \Omega$ таких, что выполнено равенство $\vec{r}_0 = \vec{F}(\varphi_0, \theta_0)$.

Иногда поверхность в пространстве задается в виде уравнения $G(x, y, z) = 0$, которое получается исключением φ и θ из системы уравнений

$$\begin{cases} x = F_x(\varphi, \theta) \\ y = F_y(\varphi, \theta) \\ z = F_z(\varphi, \theta) \end{cases}; \quad \varphi, \theta \in \Omega.$$

Пример
4.2.1.

В ортонормированной системе координат сфера радиуса R с центром в

точке $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ может быть параметрически задана в виде,

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \varphi \sin \theta \\ y = y_0 + R \sin \varphi \sin \theta \\ z = z_0 + R \cos \theta \end{cases}; \quad \begin{matrix} 0 \leq \varphi < 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{matrix}$$

а ее уравнение в координатах $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$.

Определение
4.2.2.

Поверхность называется *алгебраической*, если ее уравнение в декартовой системе координат имеет вид $\sum_{k=0}^m \alpha_k x^{p_k} y^{q_k} z^{r_k} = 0$, где p_k , q_k и r_k — целые неотрицательные числа, а числа α_k не равны нулю одновременно.

Определение
4.2.3.

Число $N = \max_{k \in [0, m]} \{p_k + q_k + r_k\}$ называется *порядком алгебраического уравнения*, (указанного в определении 4.2.2.), где максимум ищется по всем k , для которых $\alpha_k \neq 0$. Наименьший из порядков алгебраических уравнений, задающих данную алгебраическую поверхность, называется *порядком алгебраической поверхности*.

Пример 4.2.2. (алгебраические поверхности)	Плоскость	$2x + 3y + z = 0$	$(N=1)$
	Прямой круговой цилиндр	$x^2 + y^2 - 1 = 0$	$(N=2)$
	Сфера	$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$	$(N=2)$

Теорема 4.2.1. **Порядок алгебраической поверхности не зависит от выбора системы координат.**

Доказательство:

Аналогично доказательству теоремы 4.1.1.

Замечание: тела в пространстве можно задавать, используя ограничения типа неравенств.

4.3. Цилиндрические и конические поверхности

Пусть в пространстве заданы: система координат $\{\vec{O}, \vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ и некоторая линия $\vec{r} = \vec{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} F_x(\varphi) \\ F_y(\varphi) \\ F_z(\varphi) \end{pmatrix}$, $\varphi \in \Omega$, которую будем называть *направляющей*.

Определение 4.3.1. Проведем через каждую точку направляющей кривой прямую, называемую *образующей*, параллельно некоторому ненулевому вектору

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}.$$

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих данного вида, называется *цилиндрической поверхностью*.

Составим уравнение цилиндрической поверхности в общем виде. Во введенных обозначениях $\vec{r} = \vec{F}(\varphi) + \vec{NM}$ (рис. 4.3.1.), но, по определению цилиндрической поверхности, $\vec{NM} = \theta \vec{a}$ и, следовательно, уравнение цилиндрической поверхности в векторной форме имеет вид

$$\vec{r}(\varphi, \theta) = \vec{F}(\varphi) + \theta \vec{a}, \quad \varphi \in \Omega, \theta \in (-\infty, +\infty).$$

В координатной форме, после исключения θ , получаем

$$\frac{x - F_x(\varphi)}{a_x} = \frac{y - F_y(\varphi)}{a_y} = \frac{z - F_z(\varphi)}{a_z}.$$

Пример
4.3.1.

Прямая круговая цилиндрическая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

- направляющей служит окружность радиуса 3, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, с центром в начале координат,
- а образующими являются прямые, перпендикулярные этой плоскости,

задается системой условий

$$\begin{cases} x = 3 \cos \varphi \\ y = 3 \sin \varphi \\ z = \theta \end{cases}, \text{ поскольку } \vec{F}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 \cos \varphi \\ 3 \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что если из полученных соотношений также исключить и параметр φ , то получится уравнение вида $x^2 + y^2 = 9$ для любого z , откуда следует, что порядок данной алгебраической поверхности $N = 2$.

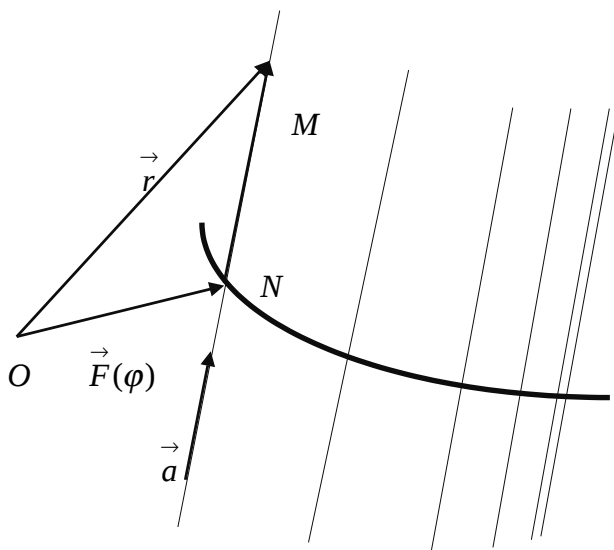


Рисунок 4.3.1.

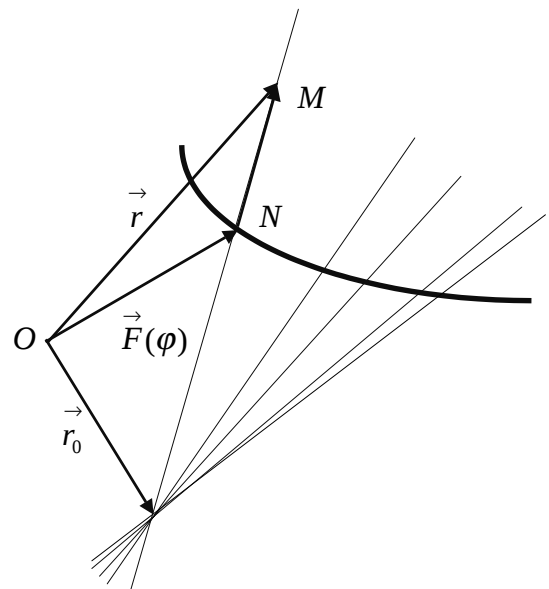


Рисунок 4.3.2.

Определение 4.3.2. Проведем через каждую точку направляющей линии прямую (называемую *образующей*), проходящую через некоторую фиксированную, не принадлежащую направляющей, точку (называемую *вершиной*)

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

Совокупность всех точек пространства, лежащих на образующих дан — ного вида, называется *конической поверхностью*.

Составим уравнение конической поверхности в общем виде.

Аналогично рассмотренному выше случаю, $\vec{r} = \vec{F}(\varphi) + NM$, но, по определению конической поверхности, из рис. 4.3.2. $NM = \theta(\vec{r}_0 - \vec{F}(\varphi))$ и, следовательно, уравнение конической поверхности в векторной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{r}(\varphi, \theta) &= (1 - \theta) \vec{F}(\varphi) + \theta \vec{r}_0, \\ \varphi &\in \Omega, \theta \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

В координатной форме, после исключения θ , получаем

$$\frac{x - F_x(\varphi)}{x_0 - F_x(\varphi)} = \frac{y - F_y(\varphi)}{y_0 - F_y(\varphi)} = \frac{z - F_z(\varphi)}{z_0 - F_z(\varphi)}.$$

Пример 4.3.2.

Прямая круговая коническая поверхность, для которой в ортонормированной системе координат

— направляющей служит окружность радиуса 3, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси аппликат, с центром в начале координат,

— и образующими, проходящими через точку $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

задается системой условий

$$\frac{x - 3\cos\varphi}{-3\cos\varphi} = \frac{y - 3\sin\varphi}{-3\sin\varphi} = \frac{z}{-1}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Заметим, что если из полученных соотношений исключить также и параметр φ , то получится уравнение вида $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - (z+1)^2 = 0$, то есть $N = 2$.

4.4. Линии второго порядка на плоскости

Пусть на плоскости дана ортонормированная система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и некоторая линия L .

Определение 4.4.1. В соответствии с определениями 4.1.2. и 4.1.3. будем говорить, что линия L является *алгебраической линией второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (4.4.1.)$$

где числа A , B и C не равны нулю одновременно ($|A| + |B| + |C| > 0$), а x и y есть координаты радиус-вектора точки, лежащей на линии L .

Поскольку коэффициенты уравнения 4.4.1. зависят от выбора системы координат, при исследовании свойств линий второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой запись уравнения линии оказывается наиболее простой.

Если ввести обозначение $\Delta = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$, то будет справедлива

Теорема 4.4.1. Для любой линии второго порядка существует ортонормированная система координат $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, в которой уравнение этой линии имеет (при $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$) один из следующих девяти (называемых каноническими) видов:

	Пустые множества	Точки	Совпадающие прямые	Несовпадающие прямые	Кривые
$\Delta > 0$	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$			Эллипс $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$
$\Delta < 0$				$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	Гипербола $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$
$\Delta = 0$	$y'^2 = -a^2$		$y'^2 = 0$	$y'^2 = a^2$	Парабола $y'^2 = 2px'$

Доказательство:

- 1°. Предварительно заметим, что, без ограничения общности, можно считать выполненными условия: $B \geq 0$ и $A \geq C$.

Действительно, если $B < 0$, то можно изменить знаки всех коэффициентов в уравнении 4.4.1. Если же $A < C$, то, перейдя к новой ортонормированной системе координат, для которой $\vec{e}'_1 = \vec{e}_2$; $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1$; $O' = O$, мы получаем желаемое соотношение, поскольку при таком переходе имеют место равенства $x = y'$; $y = x'$ в силу утверждений п.1.8. Заметим также, что

$$\det \begin{vmatrix} C & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta.$$

- 2°. Если $B = 0$, то переходим к пункту 4°. Если же $B > 0$, то перейдем к новой системе координат, получаемой из исходной поворотом вокруг точки O на угол $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ такой, что коэффициент при произведении $x'y'$ окажется равным нулю.

Выведем правило выбора этого угла. Рассмотрим поворот (см. п.1.8.)

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \cos \alpha + \vec{e}_2 \sin \alpha \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \cos \alpha \end{cases} \quad \text{с} \quad \vec{OO'} = \vec{o}$$

и, соответственно,

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}.$$

Подставляя выражения для "старых" координат через "новые", получаем уравнение 4.4.1. в виде

$$\begin{aligned} & A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + \\ & + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0 \end{aligned}$$

$$\text{или же } A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \alpha + 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \sin^2 \alpha \\ 2B' &= -2A \sin \alpha \cos \alpha + 2B \cos^2 \alpha - 2B \sin^2 \alpha + 2C \sin \alpha \cos \alpha \\ C' &= A \sin^2 \alpha - 2B \cos \alpha \sin \alpha + C \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Из условия $B' = 0$ следует, что $2B \cos 2\alpha - (A - C) \sin 2\alpha = 0$ и, окончательно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}; \quad \alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2B}{A - C}, \text{ при } A > C,$$

или же $\alpha = \frac{\pi}{4}$ при $A = C$, то есть искомый угол найден.

3°. Покажем, что при такой замене координат величина Δ не изменится. Действительно, из соотношений $1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha = 1 + \left(\frac{A - C}{2B} \right)^2 = \frac{1}{\sin^2 2\alpha}$ и неравенства

$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ получаем

$$\sin 2\alpha = \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}; \quad \cos 2\alpha = \frac{A - C}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}}.$$

Найдем теперь значения A' и C' . Из предыдущих соотношений имеем

$$\begin{aligned} A' &= A \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + B \sin 2\alpha + C \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{A + C}{2} + \frac{A - C}{2} \cos 2\alpha + B \sin 2\alpha = \\ &= \frac{A + C}{2} + \frac{A - C}{2} \frac{A - C}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} + B \frac{2B}{\sqrt{4B^2 + (A - C)^2}} = \\ &= \frac{A + C}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}. \end{aligned}$$

Аналогично получаем, что $C' = \frac{A + C}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{4B^2 + (A - C)^2}$.

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} \Delta' &= \det \begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{vmatrix} = A' C' = \left(\frac{A + C}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} (4B^2 + (A - C)^2) = \\ &= AC - B^2 = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \Delta, \end{aligned}$$

то есть величина Δ (равно как и величина $A + C$) не меняется при выполняемой замене системы координат.

4°. В дальнейших рассуждениях будем полагать, что $B=0$ и рассмотрим отдельно случаи $\Delta \neq 0$ и $\Delta = 0$ для уравнения вида $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$.

Пусть $\Delta \neq 0$. Это означает, что $A \neq 0$ и $C \neq 0$ и уравнение линии может быть переписано в виде $A\left(x + \frac{D}{A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$.

Обозначим $P = \frac{D^2}{A} + \frac{E^2}{C} - F$, тогда, перейдя к новой системе координат

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 \\ \vec{OO}' = -\frac{D}{A}\vec{e}_1 - \frac{E}{C}\vec{e}_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = x' - \frac{D}{A} \\ y = y' - \frac{E}{C} \end{cases},$$

получим $Ax'^2 + Cy'^2 = P$ и откуда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned} \pm \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{P}{A}\right|}\right)^2} \pm \frac{y'^2}{\left(\sqrt{\left|\frac{P}{C}\right|}\right)^2} &= \pm 1; \quad P \neq 0 \\ \pm \frac{x'^2}{\sqrt{|C|^2}} \pm \frac{y'^2}{\sqrt{|A|^2}} &= 0; \quad P = 0 \end{aligned}$$

и мы приходим, таким образом, к одному из шести следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} &= 0; \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1, \quad \text{где } \Delta > 0 \\ \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} &= 0; \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = -1, \quad \text{где } \Delta < 0. \end{aligned}$$

Первые пять из этих случаев содержатся в формулировке теоремы, а шестой сводится к пятому умножением обеих частей уравнения на -1 с последующим взаимным переобозначением переменных x' и y' .

5°. Пусть $\Delta = 0$. Это означает, что $AC = 0$, то есть либо $A = 0$, либо $C = 0$ (но не вместе!). Пусть $A = 0$ (если это не так, то взаимно переобозначим переменные x' и y'), тогда уравнение линии $Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ может быть записано в виде

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{E^2}{C} - F - 2Dx, \quad C \neq 0.$$

При $D = 0$ получаем

$$C\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = \frac{E^2}{C} - F,$$

то есть одно из трех уравнений $y'^2 = a^2$; $y'^2 = 0$; $y'^2 = -a^2$.

Если же $D \neq 0$, то уравнение можно привести к виду

$$\left(y + \frac{E}{C}\right)^2 = -\frac{2D}{C} \left(x - \frac{1}{2D} \left(\frac{E^2}{C} - F\right)\right)$$

и, таким образом, либо $y'^2 = 2px'$, либо $y'^2 = -2px'$, где $p > 0$. Первый из этих случаев указан в формулировке теоремы, а второй сводится к первому заменой координат:

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = -\vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 = \vec{e}_2 \\ \vec{OO}' = \vec{o} \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}.$$

Теорема доказана.

Замечания: 1°. В теореме 4.1.1. было показано, что порядок алгебраической линии, в том числе и для рассматриваемых в теореме 4.4.1. случаев, не меняется при замене системы координат.

Из доказательства теоремы также следует, что поворот и параллельный перенос ортонормированной системы координат не допускает перемещения уравнения линии второго порядка из одной строки таблицы теоремы 4.4.1. в другую.

2°. Более того, будет показано (теорема 5.4.9.), что никакой заменой системы координат нельзя переместить линию второго порядка, находящуюся в одной из клеток таблицы в условии теоремы 4.4.1., в другую.

3°. Линии второго порядка, для которых $\Delta > 0$ принято относить к эллиптическому типу, линии с $\Delta < 0$ — к гиперболическому типу, а линии с $\Delta = 0$ — к параболическому типу.

4°. Алгоритм доказательства теоремы 4.4.1. можно использовать как для нахождения канонического вида уравнения линии второго порядка, так и для построения *канонической системы координат*, то есть системы координат, в которой данная линия второго порядка имеет канонический вид.

Исследование конкретных свойств различных типов линий второго порядка приводится в Приложении 1.

4.5. Поверхности второго порядка в пространстве

Пусть дана *ортонормированная* система координат $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в пространстве.

Определение
4.5.1.

В соответствии с определениями 4.2.2. и 4.2.3. будем говорить, что поверхность S является *алгебраической поверхностью второго порядка*, если ее уравнение в данной системе координат имеет вид

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + 2A_{14}x + 2A_{24}y + 2A_{34}z + A_{44} = 0, \quad (4.5.1.)$$

где числа $A_{11}; A_{22}; A_{33}; A_{12}; A_{13}; A_{23}$ не равны нулю одновременно, а x, y и z есть координаты радиус-вектора точки, лежащей на данной поверхности S .

Как и в плоском случае, коэффициенты уравнения (4.5.1.) зависят от выбора системы координат, поэтому при исследовании свойств поверхностей второго порядка целесообразно предварительно перейти в ту систему координат, для которой запись уравнения поверхности оказывается наиболее простой.

Теорема
4.5.1.

Для каждой поверхности второго порядка существует ортонормированная система координат $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих семнадцати канонических видов:

Пустые множества	Точки, прямые и плоскости	Цилиндры и конусы
$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{b^2} = -1$ $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1; \quad \forall z'$ $x'^2 = -a^2; \quad \forall y', z'$	Изолированная точка $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 0$ Прямая $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0; \quad \forall z'$ Пара пересекающихся плоскостей $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0; \quad \forall z'$ Пара параллельных или совпадающих плоскостей $x'^2 = a^2 \quad x'^2 = 0; \quad \forall y', z'$	Эллиптический цилиндр $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad \forall z'$ Гиперболический цилиндр $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1; \quad \forall z'$ Параболический цилиндр $y'^2 = 2px'; \quad \forall z'$ Конус $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0$

Невырожденные поверхности		
Эллипсоиды	Параболоиды	Гиперболоиды
$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} = 1$	Эллиптический параболоид $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 2z'$ Гиперболический параболоид $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 2z'$	Однополостный гиперболоид $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$ Двуполостный гиперболоид $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 1$

причем $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 0$.

Доказательство:

Хотя возможно доказать существование ортонормированной системы координат с требуемыми свойствами, используя подход аналогичный использованному при доказательстве теоремы 4.4.1., представляется целесообразным рассмотреть этот вопрос в рамках теории евклидовых пространств, где утверждение теоремы 4.5.1. непосредственно вытекает из более общего случая, рассмотренного в п.12.1 и п.12.2.

Исследование свойств конкретных типов поверхностей второго порядка приводится в Приложении 2.

4.6. Альтернативные системы координат

В ряде практических приложений оказывается целесообразным использование систем координат, отличных от декартовой.

Полярная система координат

Примером альтернативной системы координат на плоскости является *полярная система координат*.

Положение точки на плоскости в этой системе координат задается при помощи пары чисел

$\{\rho, \varphi\}$, где $\rho = |\vec{OM}|$, $\varphi = \angle(\vec{OP}, \vec{OM})$, удовлетворяющие ограничениям $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Точка O называется *полюсом*, а луч OP — *полярной осью*. Угол φ отсчитывается против часовой стрелки (рис. 4.6.1.). Для полюса этот угол не определяется.

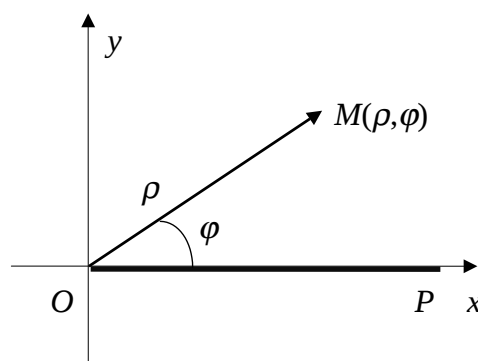


Рисунок 4.6.1.

Формулы перехода от ортонормированной декартовой системы координат к полярной и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}.$$

Использование полярной системы координат позволяет упростить описание объектов, обладающих точечной симметрией. Например, окружность единичного радиуса с центром в начале координат, имеющая в ортонормированной декартовой системе координат уравнение $x^2 + y^2 = 1$, в полярной системе координат задается условием $\rho = 1$.

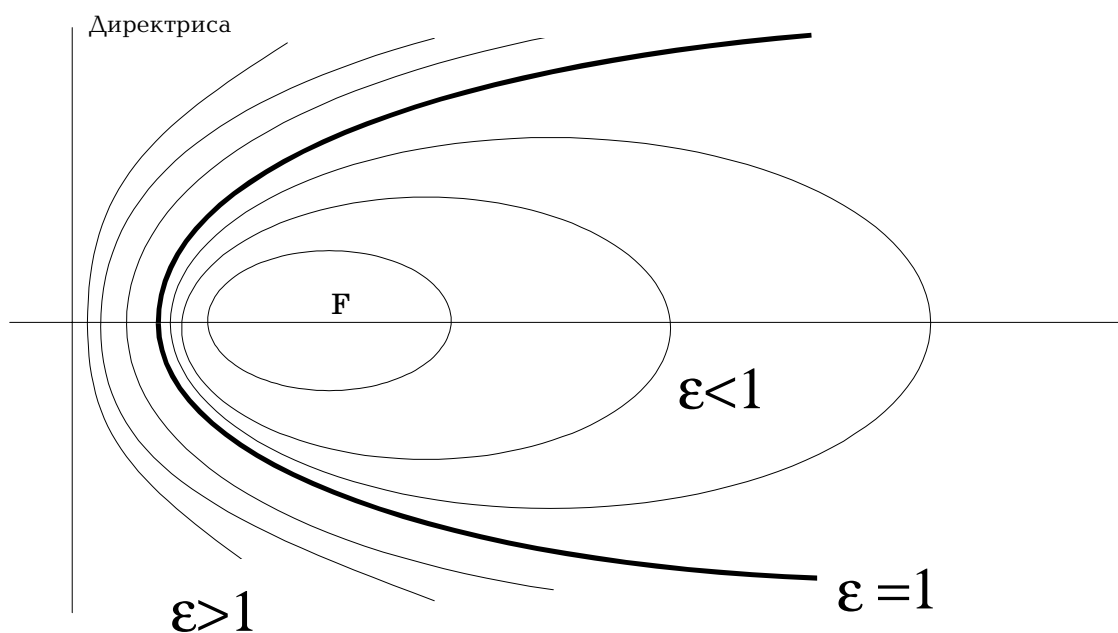


Рисунок 4.6.2. Зависимость типа конического сечения от величины эксцентриситета.

Более того, в приложении 1 показано, что в полярной системе координат эллипс, гипербола и парабола задаются уравнением вида

$$\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) - p = 0,$$

где $\varepsilon > 0$ и $p > 0$ — некоторые константы, называемые *эксцентриситетом* и *фокальным параметром* соответственно, и что для различных значений эксцентриситета при фиксированном p получаются различные типы кривых: эллипсы при $0 < \varepsilon < 1$, параболы при $\varepsilon = 1$ и гиперболы при $\varepsilon > 1$. Соответствующие случаи показаны на рисунке 4.6.2.

Если ослабить ограничения на параметры, разрешив им принимать (в смысле предельного перехода) как нулевые, так и бесконечно большие, положительные значения, то можно получить и другие виды линий второго порядка, указанные в формулировке теоремы 4.4.1. Например, при $\varepsilon = 0$ и $p \neq 0$ мы имеем окружность, при $\varepsilon = 0$ и $p = 0$ — изолированную точку, а при $p = 0$ и $\varepsilon \cos \varphi = 1$ — пару пересекающихся прямых.

Различные виды кривых второго порядка, включая и вырожденные случаи, могут быть получены сечением круговой конической поверхности плоскостью, что иллюстрирует рисунок 4.6.3.

Определение 4.6.1. Линия, уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) - p = 0$; $\forall p \geq 0$; $\forall \varepsilon \geq 0$, называется *коническим сечением*.

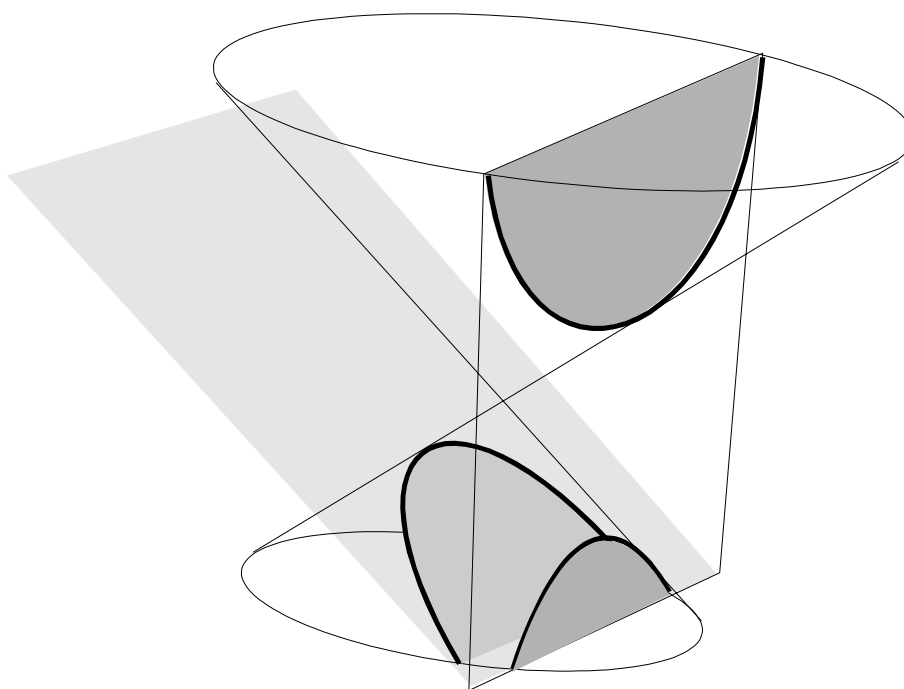


Рисунок 4.6.3. Построение конических сечений.

Сферическая система координат

В ряде практических приложений, требующих аналитического исследования пространственных объектов, используется так называемая *сферическая система координат*.

Положение точки в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи тройки чисел $\{ \rho, \varphi, \theta \}$, (рис. 4.6.4.), где

$$\rho = \left| \vec{OM} \right|, \quad \varphi = \angle (\vec{Ox}, \vec{OP}), \quad \theta = \angle (\vec{OM}, \vec{Oz}),$$

которые удовлетворяют ограничениям $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Использование сферической системы координат иногда позволяет получить более простое аналитическое описание геометрических объектов, обладающих точечной симметрией. Например, уравнение сферы единичного радиуса с центром в начале координат в сферической системе будет иметь вид $\rho = 1$.

Формулы перехода между прямоугольной декартовой системой координат и сферической имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \sin \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

и, для обратного перехода,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; & \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; & \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \\ & \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}.$$

Цилиндрическая система координат

В тех случаях, когда исследуемый пространственный объект обладает осевой симметрией, может оказаться удобным применение цилиндрической системы координат.

Положение точки в пространстве в этой системе однозначно задается при помощи тройки чисел $\{\rho, \varphi, h\}$, (рис. 4.6.5.), где $\rho = |\vec{QM}|$, $\varphi = \angle(\vec{Ox}, \vec{OP})$, удовлетворяющие ограничениям

$$\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, h \in (-\infty, +\infty).$$

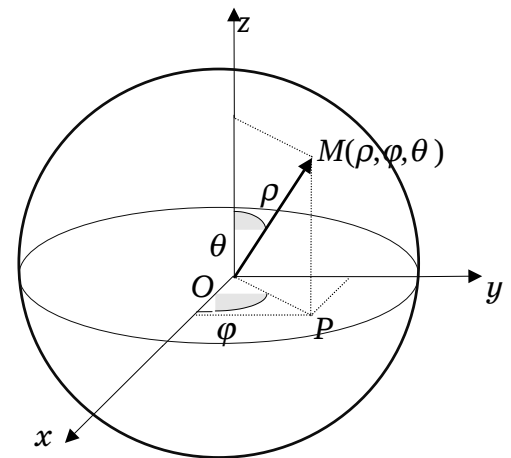


Рисунок 4.6.4.

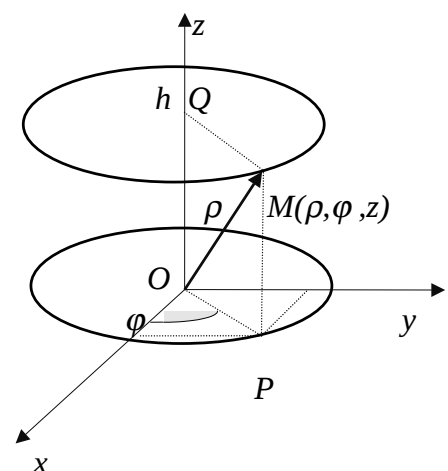


Рисунок 4.6.5.

Формулы перехода от прямоугольной декартовой системы координат к цилиндрической и обратно имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = h \end{cases} ; \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \\ h = z \end{cases} .$$

Раздел 5 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ

5.1. Умножение матриц

Определение 5.1.1. Матрица $\|C\|$ размера $m \times n$ (с элементами $\gamma_{ji}, \forall i = [1, n], \forall j = [1, m]$) называется *произведением* матрицы $\|A\|$ размера $m \times l$ (с элементами $\alpha_{jk}, \forall j = [1, m], \forall k = [1, l]$) на матрицу $\|B\|$ размера $l \times n$ (с элементами $\beta_{ki}, \forall k = [1, l], \forall i = [1, n]$), если $\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki}, \forall i = [1, n], \forall j = [1, m]$

Результат произведения матриц — матрица $\|C\|$, есть матрица размера $m \times n$ при любом l , которая обозначается как $\|C\| = \|A\| \|B\|$. Правило нахождения компонентов произведения по компонентам сомножителей матричного произведения иллюстрирует рис. 5.1.1.

Пример 5.1.1. Приведем результаты произведения матриц, имеющих не более чем пару строк или столбцов.

1°. Пусть размер $\|A\|$ есть 2×2 , а размер $\|B\|$ — 2×1 , тогда размер $\|C\|$ будет 2×1

$$\|C\| = \|A\| \|B\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} \end{vmatrix}.$$

2°. Если размер $\|A\|$ есть 2×2 , а размер $\|B\|$ — 1×2 , то размер $\|C\|$ будет 1×2

$$\begin{aligned} \|C\| = \|B\| \|A\| &= \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{21}\beta_{12} & \alpha_{12}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{12} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

3°. Наконец, пусть размер $\|A\|$ и $\|B\|$ есть 2×2 , тогда матрица $\|C\|$ будет иметь размер 2×2

$$\begin{aligned} \|C\| = \|A\| \|B\| &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1l} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{j1} & \alpha_{j2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{jl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha_{ml} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1i} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2i} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{l1} & \beta_{l2} & \dots & \beta_{li} & \dots & \beta_{ln} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1i} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2i} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{j1} & \gamma_{j2} & \dots & \gamma_{ji} & \dots & \gamma_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mi} & \dots & \gamma_{mn} \end{vmatrix}$$

$$\gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki}$$

Рисунок 5.1.1.

Замечания о произведении матриц

Из определения произведения матриц непосредственно следует, что для матриц подходящих размеров:

1°. Произведение матриц *некоммутативно*, то есть в общем случае $\|A\| \|B\| \neq \|B\| \|A\|$.

2°. Произведение матриц обладает свойством *ассоциативности*
 $\|A\|(\|B\|\|C\|) = (\|A\|\|B\|)\|C\|.$

3°. Произведение матриц обладает свойством *дистрибутивности*
 $\|A\|(\|B\| + \|C\|) = \|A\|\|B\| + \|A\|\|C\|.$

Отметим еще раз, что произведение двух матриц существует только тогда, когда число столбцов первого сомножителя равно числу строк второго.

Легко убедиться, что умножение (как справа, так и слева) любой матрицы $\|A\|$ на подходящего размера единичную матрицу $\|E\|$ (см. п.1.1.) дает в результате ту же самую матрицу $\|A\|$.

Определение 5.1.2. Матрица $\|A\|^{-1}$ называется *обратной* квадратной матрице $\|A\|$, если имеют место равенства $\|A\|^{-1}\|A\| = \|A\|\|A\|^{-1} = \|E\|$.

Обратная матрица существует не для произвольной квадратной матрицы. Для существования обратной матрицы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad ^1).$$

Определение 5.1.3. Матрица $\|A\|$, для которой $\det\|A\| = 0$, называется *вырожденной*, а матрица, для которой $\det\|A\| \neq 0$ — *невырожденной*.

Лемма 5.1.1. Если обратная матрица существует, то она единственна.

¹⁾ Правило нахождения определителя квадратной матрицы порядка n приводится в разделе 6.

Доказательство:

Предположим, что невырожденная матрица $\|A\|$ имеет две обратные: $\|A\|_1^{-1}$ и $\|A\|_2^{-1}$. Тогда из равенств $\|A\| \|A\|_1^{-1} = \|E\|$ и $\|A\| \|A\|_2^{-1} = \|E\|$ следует,

$$\|A\| \|A\|_1^{-1} - \|A\| \|A\|_2^{-1} = \|E\| - \|E\| = \|O\|.$$

Но тогда, умножая слева обе части данного равенства на $\|A\|_1^{-1}$, получаем $\|A\|_1^{-1} \|A\| (\|A\|_1^{-1} - \|A\|_2^{-1}) = \|A\|_1^{-1} \|O\| = \|O\|$ или, учитывая, что $\|A\|_1^{-1} \|A\| = \|E\|$, приходим к $\|A\|_1^{-1} - \|A\|_2^{-1} = \|O\|$.

Лемма доказана.

В частном случае, когда $\|A\| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, матрица $\|A\|^{-1}$ имеет вид

$$\|A\|^{-1} = \frac{1}{\det \|A\|} \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix}.$$

Для квадратных матриц справедливы ¹⁾ следующие равенства

$$\det(\|A\| \|B\|) = \det(\|A\|) \det(\|B\|) ;$$

$$\det(\|A\|^T) = \det \|A\| ; \quad \det(\|A\|^{-1}) = \frac{1}{\det \|A\|} .$$

Пример
5.1.2.

Используя правило действия с матрицами, систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 = \beta_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 = \beta_2 \end{cases}$$

можно записать в виде $\|A\| x = \|b\|$, где

¹⁾ Для $n=2$ эти соотношения проверяются непосредственно по определению 1.1.9., случай произвольного n рассматривается в разделе 6 .

$$\|x\| = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{vmatrix}; \quad \|b\| = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{vmatrix}; \quad \|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

а ее решение (если существует $\|A\|^{-1}$), — в виде $\|x\| = \|A\|^{-1} \|b\|$.

Пример
5.1.3.

Формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой (1.8.2.) с помощью матричных операций могут быть записаны в виде

$$\begin{vmatrix} \vec{g}_1' \\ \vec{g}_2' \\ \vec{g}_3' \end{vmatrix} = \|S\|^T \begin{vmatrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \|S\| \begin{vmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix},$$

где $\|S\|$ — матрица перехода.

Теорема
5.1.1.

Имеет место соотношение $(\|A\| \|B\|)^T = \|B\|^T \|A\|^T$.

Доказательство:

Будем предполагать, что размеры матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ таковы, что произведение матриц, указанные в формулировке теоремы, выполнимы.

Пусть числа $\alpha_{ik}, \beta_{kj}, \gamma_{ij}$ есть элементы матриц $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|C\| = \|A\| \|B\|$ соответственно. Тогда, согласно определению 5.1.1.,

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^l \alpha_{ik} \beta_{kj}.$$

Но, с другой стороны, по определению операции транспонирования 1.1.8.,

$$\gamma_{ij}^T = \gamma_{ji} = \sum_{k=1}^l \alpha_{jk} \beta_{ki} = \sum_{k=1}^l \alpha_{kj}^T \beta_{ik}^T = \sum_{k=1}^l \beta_{ik}^T \alpha_{kj}^T,$$

откуда, согласно тому же определению 5.1.1., делаем заключение о справедливости утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Заметим, что согласно правилу транспонирования произведения матриц равен –

ство $\left\| \begin{matrix} \vec{g}'_1 \\ \vec{g}'_2 \\ \vec{g}'_3 \end{matrix} \right\| = \left\| S \right\|^T \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 \\ \vec{g}_2 \\ \vec{g}_3 \end{matrix} \right\|$ может быть записано в виде $\left\| \begin{matrix} \vec{g}'_1 & \vec{g}'_2 & \vec{g}'_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \vec{g}_1 & \vec{g}_2 & \vec{g}_3 \end{matrix} \right\| \left\| S \right\|$.

Для дальнейших рассуждений нам будет полезно следующее вспомогательное утверждение.

Лемма
5.1.2.

Пусть произведение квадратной матрицы $\left\| Q \right\|$ на произвольный n – компонентный столбец $\left\| x \right\|$ есть нулевой n – компонентный столбец, тогда матрица $\left\| Q \right\|$ нулевая.

Доказательство:

Пусть $\left\| Q \right\| = \left\| \begin{matrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1n} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \dots & \omega_{nn} \end{matrix} \right\|$. Выберем в качестве $\left\| x \right\|$ столбец вида $\left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|$,

где единица стоит в строке с номером i . Тогда $\left\| Q \right\| \left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \omega_{1i} \\ \dots \\ \omega_{ii} \\ \dots \\ \omega_{ni} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{matrix} \right\|$ и, в силу

произвольности i , приходим к заключению о справедливости утверждения леммы.

Лемма доказана.

Теорема
5.1.2.

Для невырожденных, одинакового размера квадратных матриц $\left\| A \right\|$ и $\left\| B \right\|$ справедливо соотношение $(\left\| A \right\| \left\| B \right\|)^{-1} = \left\| B \right\|^{-1} \left\| A \right\|^{-1}$.

Доказательство:

1°. Пусть произведение матрицы $(\left\| A \right\| \left\| B \right\|)^{-1}$ на некоторый n – компонентный столбец $\left\| x \right\|$ есть столбец $\left\| c \right\|$. Тогда $(\left\| A \right\| \left\| B \right\|)^{-1} \left\| x \right\| = \left\| c \right\|$ или, что то же самое, $\left\| x \right\| = \left\| A \right\| \left\| B \right\| \left\| c \right\|$ (см. определения 5.1.1. и 5.1.2.)

2°. С другой стороны, из последнего равенства получаем, что $\|A\|^{-1}\|x\| = \|B\|\|c\|$ и, аналогично, $\|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|$.

3°. Вычитая почленно равенства $(\|A\|\|B\|)^{-1}\|x\| = \|c\|$ и $\|B\|^{-1}\|A\|^{-1}\|x\| = \|c\|$, приходим, в силу свойства дистрибутивности матричного произведения, к соотношению $((\|A\|\|B\|)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1})\|x\| = \|o\|$, которое, по лемме 5.1.2., в виду произвольности столбца $\|x\|$, означает, что матрица $(\|A\|\|B\|)^{-1} - \|B\|^{-1}\|A\|^{-1}$ нулевая.

Теорема доказана.

Задача
5.1.1.

Проверить тождество $(\|A\|^{-1})^T = (\|A\|^T)^{-1}$.

Определение
5.1.4.

Невырожденная квадратная матрица $\|Q\|$, для которой $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^T$, называется *ортогональной*.

Свойства ортогональных матриц, играющих важную роль во многих приложениях, можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема
5.1.3.

Для ортогональной матрицы $\|Q\|$ справедливо равенство $\det\|Q\| = \pm 1$.

Доказательство:

Умножая равенство $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^T$ последовательно справа и слева на $\|Q\|$, мы в силу определения 5.1.2. приходим к соотношению $\|Q\|^T\|Q\| = \|Q\|\|Q\|^T = \|E\|$. Откуда находим, что $\det^2\|Q\| = 1$, поскольку:

- определитель произведения квадратных матриц одинакового размера равен произведению определителей сомножителей;
- определитель матрицы не меняется при ее транспонировании;
- $\det\|E\| = 1$.

Теорема доказана.

Теорема
5.1.4.

Ортогональная матрица второго порядка $\|Q\|$, для которой $\det\|Q\|=1$ может быть представлена в виде $\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$, где φ – некоторое число, а ортогональная матрица с $\det\|Q\|=-1$ – в виде $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix}$.

Доказательство:

Пусть матрица $\|Q\| = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix}$ ортогональная, тогда должны быть справедливы равенства $\|Q\| \|Q\|^T = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{21} \\ \omega_{12} & \omega_{22} \end{vmatrix} = \|E\|$ и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} \omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 & \omega_{11}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{22} \\ \omega_{11}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{22} & \omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Последнее матричное равенство может быть записано в виде системы скалярных условий

$$\begin{cases} \omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 = 1 \\ \omega_{11}\omega_{21} + \omega_{12}\omega_{22} = 0 \\ \omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 = 1 \end{cases}$$

причем из этих равенств, как было показано при доказательстве теоремы 5.1.3., следует, что $\det\|Q\| = \pm 1$. Рассмотрим вначале случай $\det\|Q\| = 1$.

Если из суммы первого и третьего уравнений системы вычесть удвоенное равенство $\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21} = 1$, то мы получаем

$$(\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2) + (\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2) - 2(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}) = 0 \quad \text{или} \quad (\omega_{11} - \omega_{22})^2 + (\omega_{12} + \omega_{21})^2 = 0$$

откуда следует, что $\begin{cases} \omega_{11} = \omega_{22} \\ \omega_{12} = -\omega_{21} \end{cases}$.

Наконец, из условий $\omega_{11}^2 + \omega_{12}^2 = 1$; $\omega_{21}^2 + \omega_{22}^2 = 1$ имеем оценки

$$0 \leq \omega_{11}^2 \leq 1 ; 0 \leq \omega_{21}^2 \leq 1, \quad \text{которые позволяют ввести обозначения} \quad \begin{cases} \omega_{11} = \cos\varphi \\ \omega_{21} = \sin\varphi \end{cases},$$

приводящие к требуемому виду матрицы $\|Q\|$ поскольку из полученных соотношений следует, что $\omega_{11}^2 + \omega_{21}^2 = 1$.

Случай $\det\|Q\| = -1$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Следствие 5.1.1. Матрица перехода от одного ортонормированного базиса на плоскости к другому ортогональная.

Доказательство:

В 1.8. было показано, что матрица перехода $\|S\|$ от одной ортонормированной системы координат на плоскости к другой может иметь один из двух следующих видов: $\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{vmatrix}$, где φ — угол между первыми базисными векторами. Но тогда матрица перехода $\|S\|$ ортогональная в силу теоремы 5.1.4.

Следствие доказано.

5.2. Операторы и функционалы. Отображения и преобразования плоскости

Вводимое в курсе математического анализа понятие функции (как правила, устанавливающего однозначное соответствие между числом, принадлежащим области определения, и числом, принадлежащим множеству значений) может быть естественным образом обобщено на случай, когда область определения и область значений уже не являются числовыми множествами.

Определение 5.2.1. Будем говорить, что задан оператор $\hat{A}$, действующий на множестве Ω со значениями в множестве Θ , если указано правило, по которому каждому элементу множества Ω поставлен в соответствие единственный элемент из множества Θ .

Символически результат действия оператора $\hat{A}$ обозначается так: $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$; $y \in \Theta$. Элемент y в этом случае называется *образом* элемента x , элемент x — *прообразом* элемента y .

Определение 5.2.2. Если Θ — область значений некоторого оператора — является числовым множеством, то говорят, что на множестве Ω задан функционал.

Функционалы обычно обозначаются так же, как и функции: например, $y = \Phi(x)$, $x \in \Omega$.

Пример
5.2.1.

- 1°. Если каждому вектору $\vec{x}$ в пространстве поставлен в соответствие вектор $\vec{y}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{x}$ на некоторую ось l , то говорят, что в пространстве задан оператор $\vec{y} = \hat{P}_l \vec{x}$ — ортогонального проектирования векторов на ось l . В этом случае символически можно записать, что $\hat{A} = \hat{P}_l$.
- 2°. Каждой дифференцируемой на $[\alpha, \beta]$ функции $f(\tau)$ можно поставить в однозначное соответствие $f'(\tau)$ — ее производную функцию, поэтому можно говорить об операторе дифференцирования $f'(\tau) = \frac{d}{d\tau} f(\tau)$, символически обозначаемом как $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$.
- 3°. Каждому вектору $\vec{x}$ в пространстве можно поставить в однозначное соответствие число $|\vec{x}|$ — его длину. Очевидно, что данная зависимость является функционалом, заданным на множестве векторов.
- 4°. Для каждой непрерывной на $[\alpha, \beta]$ функции $f(\tau)$ существует однозначно вычисляемый определенный интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau$, который можно рассматривать как функционал $\Phi(f) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\tau) d\tau$ на множестве функций, непрерывных на $[\alpha, \beta]$.

Определение 5.2.3. Оператором $\hat{A}$, отображающим плоскость (или просто отображением плоскости) P на плоскость Q , называется правило, по которому каждой точке плоскости P поставлена в соответствие единственная точка плоскости Q .

Отображение обозначается следующим образом: $\hat{A}: P \rightarrow Q$. Если точка M плоскости P отображается в точку M' плоскости Q , то это обозначается как $M' = \hat{A}M$, при этом точка M' является образом точки M , а точка M — прообразом точки M' .

Определение 5.2.4.	Отображение $\hat{A}:P \rightarrow Q$ называется <i>взаимно однозначным</i> , если каждая точка плоскости Q имеет прообраз и притом единственный.
Определение 5.2.5.	Отображением, <i>обратным</i> взаимно — однозначному отображению $\hat{A}:P \rightarrow Q$, называется отображение $\hat{A}^{-1}:Q \rightarrow P$ такое, что для каждой точки M плоскости P имеет место $\hat{A}^{-1}(\hat{A}M)=M$.
Определение 5.2.6.	Отображение $\hat{A}$ плоскости P в саму себя называется <i>преобразованием</i> плоскости P .
Определение 5.2.7.	Последовательное выполнение преобразований $M'=\hat{A}M$, и $M''=\hat{B}M'$, называется <i>произведением</i> (или <i>композицией</i>) этих преобразований.

Произведение операторов записывается в виде $M''=\hat{B}\hat{A}M$. Заметим, что в общем случае это произведение не коммутативно, но ассоциативно.

Определение 5.2.8.	Точка плоскости P , переводимая преобразованием $\hat{A}$ сама в себя, называется <i>неподвижной точкой</i> для $\hat{A}$. Множество на P состоящее из неподвижных точек для $\hat{A}$ называется <i>неподвижным</i> для $\hat{A}$. Множество точек P переходящее при $\hat{A}$ само в себя называется <i>инвариантным множеством</i> преобразования $\hat{A}$.
--------------------	---

5.3. Линейные операторы на плоскости

Пусть на плоскости с декартовой системой координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ каждой ее точке M поставлена в однозначное соответствие точка M^* , то есть, согласно определению 5.2.6., задано преобразование этой плоскости. Пусть радиус — векторы этих точек суть $\vec{r}_M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ и $\vec{r}_{M^*} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$, тогда координаты x^* и y^* будут некоторыми функциями от x и y $\begin{cases} x^* = F_x(x, y) \\ y^* = F_y(x, y) \end{cases}$ и потому равенство $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$ можно рассматривать как описание в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ оператора, являющегося данным преобразованием плоскости.

Далее мы будем рассматривать частные, но важные для приложений виды функций $F_x(x, y)$ и $F_y(x, y)$.

Определение 5.3.1. Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным оператором*, если в каждой декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ он задается формулами

$$\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 \end{cases}.$$

В матричной форме линейный оператор может быть записан в виде $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, где матрица $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в декартовой системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$.

Определение 5.3.2. Оператор $\vec{r}_{M^*} = \hat{A}\vec{r}_M$ называется *линейным однородным оператором*, если он удовлетворяет определению 5.3.1. и, кроме того, $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Если же $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$, то такой оператор называется *неоднородным*.

Пример 5.3.1. К линейным однородным операторам относятся:

- оператор $\hat{A}$, действие которого сводится к умножению координат радиус-вектора прообраза на фиксированные действительные числа. Этот оператор называется "*оператором сжатия к осям*" или, просто, "*сжатием к осям*" и имеет матрицу $\begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}$, где числа κ_1 и κ_2 – коэффициенты сжатия;
- оператор *ортогонального проектирования* радиус-векторов точек плоскости на некоторую заданную ось, проходящую через начало координат.

Теорема 5.3.1. Для линейного однородного оператора $\hat{A}$ справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad \hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2, \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2 \\ 2^\circ. \quad \hat{A}(\lambda \vec{r}) &= \lambda \hat{A}\vec{r}, \quad \forall \vec{r}, \lambda \end{aligned}$$

Доказательство:

В справедливости утверждения теоремы убедимся непосредственной проверкой, используя правила действия с матрицами

$$\begin{aligned}\hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) &= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \left(\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \\ &= \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2.\end{aligned}$$

Аналогично $\hat{A}(\lambda \vec{r}) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \lambda \hat{A}\vec{r}.$

Теорема доказана.

Теорема
5.3.2.

Если для некоторого оператора $\hat{A}$ справедливы соотношения

$$1^\circ. \hat{A}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \hat{A}\vec{r}_1 + \hat{A}\vec{r}_2, \quad \forall \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

$$2^\circ. \hat{A}(\lambda \vec{r}) = \lambda \hat{A}\vec{r}, \quad \forall \vec{r}, \lambda,$$

то этот оператор линейный и однородный.

Доказательство:

Пусть $\vec{r} = x \vec{g}_1 + y \vec{g}_2$ и $\hat{A}\vec{r} = x^* \vec{g}_1 + y^* \vec{g}_2$, тогда

$$x^* \vec{g}_1 + y^* \vec{g}_2 = \hat{A}(x \vec{g}_1 + y \vec{g}_2) = x \hat{A}\vec{g}_1 + y \hat{A}\vec{g}_2.$$

Обозначая $\hat{A}\vec{g}_1 = \alpha_{11} \vec{g}_1 + \alpha_{21} \vec{g}_2$ и $\hat{A}\vec{g}_2 = \alpha_{12} \vec{g}_1 + \alpha_{22} \vec{g}_2$, получим

$$x^* \vec{g}_1 + y^* \vec{g}_2 = x \hat{A}\vec{g}_1 + y \hat{A}\vec{g}_2 = (\alpha_{11}x + \alpha_{12}y) \vec{g}_1 + (\alpha_{21}x + \alpha_{22}y) \vec{g}_2.$$

Окончательно получаем $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \end{cases}$, или $\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}_g \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}.$

Теорема доказана.

Из теорем 5.3.1. и 5.3.2. вытекают:

Следствие
5.3.1.

Каждому линейному однородному оператору в конкретном базисе соответствует квадратная матрица второго порядка, и каждая квадратная матрица второго порядка задает в конкретном базисе некоторый линейный однородный оператор.

Следствие 5.3.2. **Столбцами матрицы линейного однородного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ являются координаты векторов $\hat{A}\vec{g}_1$ и $\hat{A}\vec{g}_2$.**

Задача 5.3.1. *Исходя из правил действия с матрицами, показать, что для линейных однородных операторов на плоскости справедливы утверждения:*

1°. Матрица произведения линейных однородных операторов равна произведению матриц сомножителей:

$$\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g.$$

2°. Если $\hat{A}^{-1}$ есть оператор, обратный линейному однородному оператору $\hat{A}$, то $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}$.

Выясним теперь вопрос о том, как изменится матрица линейного однородного оператора при замене базиса. Имеет место

Теорема 5.3.3. **Пусть в системе координат $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ некоторый однородный линейный оператор имеет матрицу $\|\hat{A}\|_g$. Тогда в системе координат $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$ этот оператор будет иметь матрицу $\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|$, где $\|S\|$ – матрица перехода от $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ к $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$.**

Доказательство :

По условию в исходной системе координат $\left\| \begin{smallmatrix} x^* \\ y^* \end{smallmatrix} \right\| = \|\hat{A}\|_g \left\| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right\|$, а в новой системе координат – $\left\| \begin{smallmatrix} x'^* \\ y'^* \end{smallmatrix} \right\| = \|\hat{A}\|_{g'} \left\| \begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right\|$, и пусть $\|S\|$ – матрица перехода от $\{O, \vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ к $\{O, \vec{g}'_1, \vec{g}'_2\}$, тогда $\left\| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right\| = \|S\| \left\| \begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right\|$ и $\left\| \begin{smallmatrix} x^* \\ y^* \end{smallmatrix} \right\| = \|S\| \left\| \begin{smallmatrix} x'^* \\ y'^* \end{smallmatrix} \right\|$.

Подставляя два последних соотношения в первое и принимая во внимание утверждение теоремы 1.8.2. о невырожденности матрицы перехода $\|S\|$ (то есть, существование матрицы $\|S\|^{-1}$), получаем, что

$$\|S\| \left\| \begin{smallmatrix} x'^* \\ y'^* \end{smallmatrix} \right\| = \|\hat{A}\|_g \|S\| \left\| \begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right\| \quad \text{или} \quad \left\| \begin{smallmatrix} x'^* \\ y'^* \end{smallmatrix} \right\| = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\| \left\| \begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right\|.$$

Наконец, вычитая почленно из равенства $\left\| \begin{pmatrix} x'^* \\ y'^* \end{pmatrix} \right\| = \left\| \hat{A} \right\|_{g'} \left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|$ последнее и применяя лемму 5.1.2., в силу произвольности $\left\| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\|$ приходим к соотношению

$$\left\| \hat{A}' \right\|_{g'} = \left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| S \right\|.$$

Теорема доказана.

Задача
5.3.2.

В ортонормированной системе координат найти матрицу оператора, ортогонально проектирующего радиус-векторы точек координатной плоскости на прямую $x + 3y - 2 = 0$.

Решение:

Пусть точка-прообраз M имеет радиус-вектор $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, а точка M^* — образ точки M , соответственно ее радиус-вектор $\vec{r}_0^* = \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{pmatrix}$.

Из рис. 5.3.1. следует, что M^* есть точка пересечения прямой $x + 3y - 2 = 0$ и перпендикуляра к ней, проходящего через M .

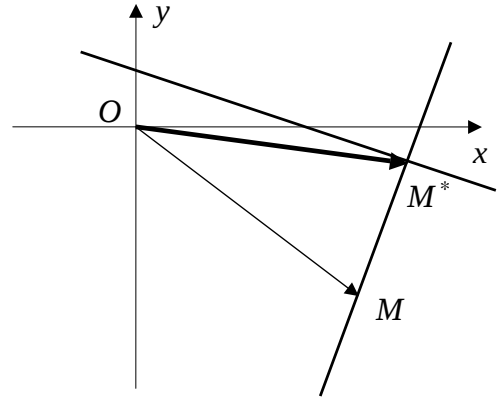


Рисунок 5.3.1.

Поскольку нормальный вектор прямой $x + 3y - 2 = 0$ является направляющим вектором этого перпендикуляра, то уравнение последнего будет иметь вид $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| + \tau \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$. Откуда следует, что координаты радиус-вектора точки M^* будут удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_0^* = x_0 + \tau \\ y_0^* = y_0 + 3\tau \\ x_0^* + 3y_0^* - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_0^* = \frac{9}{10}x_0 - \frac{3}{10}y_0 + \frac{1}{5} \\ y_0^* = -\frac{3}{10}x_0 + \frac{1}{10}y_0 + \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Используя правила операций с матрицами, получаем окончательно, что

$$\left\| \begin{pmatrix} x_0^* \\ y_0^* \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\| + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \text{то есть,} \quad \left\| \hat{A} \right\|_e = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

5.4. Аффинные преобразования и их свойства

Линейные операторы отображающие плоскость саму на себя (то есть линейные операторы вида $\hat{A}: P \rightarrow P$), для которых существует обратный, играют важную с практической точки зрения роль и потому выделяются в специальный класс.

Определение 5.4.1. Линейный оператор $\left\| \begin{smallmatrix} x^* \\ y^* \end{smallmatrix} \right\| = \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right\| + \left\| \begin{smallmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{smallmatrix} \right\|$, отображающий плоскость P саму на себя, с матрицей $\left\| \hat{A} \right\|_g = \left\| \begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{smallmatrix} \right\|$, для которой в любом базисе $\det \left\| \begin{smallmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{smallmatrix} \right\| \neq 0$, называется *аффинным преобразованием плоскости*.

Теорема 5.4.1. Если линейное преобразование имеет невырожденную матрицу в некоторой декартовой системе координат, то матрица этого преобразования будет невырожденной и в любой другой декартовой системе координат.

Доказательство:

Пусть $\det \left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0$ в некоторой системе координат, перейдем к новой системе координат, тогда, в силу теоремы 5.3.3. и невырожденности матрицы перехода $\left\| S \right\|$, имеем

$$\begin{aligned} \det \left\| \hat{A} \right\|_{g'} &= \det (\left\| S \right\|^{-1} \left\| \hat{A} \right\|_g \left\| S \right\|) = \det \left\| S \right\|^{-1} \cdot \det \left\| \hat{A} \right\|_g \cdot \det \left\| S \right\| = \\ &= \frac{1}{\det \left\| S \right\|} \cdot \det \left\| \hat{A} \right\|_g \cdot \det \left\| S \right\| = \det \left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0 . \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечания: — таким образом показано, что для аффинности линейного преобразования достаточно, чтобы $\det \left\| \hat{A} \right\|_g \neq 0$ хотя бы в одном базисе.

— рассуждая аналогично доказательству теоремы 5.4.1. можно заключить, что значение определителя матрицы любого линейного оператора, действующего на плоскости, является *инвариантом*, то есть величиной не зависящей от выбора базиса.

Теорема 5.4.2. Каждое аффинное преобразование имеет единственное обратное.

Доказательство:

Поскольку $\det \|A\| \neq 0$, то в силу теоремы 1.1.2., система линейных уравнений $\|A\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ всегда имеет единственное решение $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ для любого вектора $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$. Но это означает, что для каждого образа аффинного преобразования существует единственный прообраз, то есть существует обратное преобразование.

Теорема доказана.

Теорема
5.4.3.

При аффинном преобразовании образом прямой линии является прямая.

Доказательство:

Пусть даны прямая $\begin{cases} x = x_0 + \tau p \\ y = y_0 + \tau q \end{cases}$, где p и q — (не равные нулю одновременно) координаты направляющего вектора прямой, и аффинное преобразование $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \|A\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$. Тогда образом прямой будет множество точек плоскости с координатами

$$\begin{cases} x^* = (\alpha_{11}x_0 + \alpha_{12}y_0 + \beta_1) + (\alpha_{11}p + \alpha_{12}q)\tau \\ y^* = (\alpha_{21}x_0 + \alpha_{22}y_0 + \beta_2) + (\alpha_{21}p + \alpha_{22}q)\tau \end{cases}, \text{ так как } \begin{cases} p^* = \alpha_{11}p + \alpha_{12}q \\ q^* = \alpha_{21}p + \alpha_{22}q \end{cases}.$$

Заметим, что, если $|\alpha_{11}p + \alpha_{12}q| + |\alpha_{21}p + \alpha_{22}q| > 0$, то мы имеем прямую. Предположим противное, пусть $\begin{cases} \alpha_{11}p + \alpha_{12}q = 0 \\ \alpha_{21}p + \alpha_{22}q = 0 \end{cases}$, но в силу аффинности преобразования $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \neq 0$ и, следовательно по теореме 1.1.2., $p = q = 0$ есть единственное решение этой системы уравнений, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Теорема
5.4.4.

При аффинном преобразовании образом параллельных прямых являются параллельные прямые, точка пересечения прямых-прообразов переходит в точку пересечения их образов.

Доказательство:

Предположим, что пара параллельных прямых переведена аффинным преобразованием в пересекающиеся или совпадающие прямые.

Рассмотрим одну из точек, общих для образов прямых. Поскольку аффинное преобразование взаимно однозначно, то прообраз общей точки единственный и должен принадлежать одновременно каждой из прямых – прообразов.

Однако таких точек нет, ибо прямые – прообразы параллельны. Следовательно, образы параллельных прямых также параллельны.

Если же прямые – прообразы пересекаются, то в силу взаимной однозначности аффинного преобразования, образом их точки пересечения может быть только точка пересечения образов этих прямых.

Теорема доказана.

Теорема
5.4.5.

При аффинном преобразовании сохраняется деление отрезка в данном отношении.

Доказательство:

Пусть дано (рис. 5.4.1.), что $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \lambda$,

и $\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2} = \lambda$, где $\lambda \neq -1$, нужно показать, что

$$\frac{x_2^* - x_1^*}{x_3^* - x_2^*} = \lambda \quad \text{и} \quad \frac{y_2^* - y_1^*}{y_3^* - y_2^*} = \lambda.$$

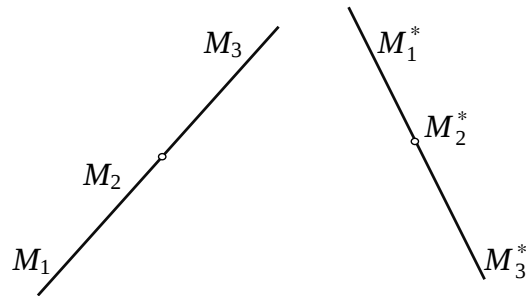


Рисунок 5.4.1.

Пусть аффинное преобразование задано в виде $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 \end{cases}$, тогда

$$\frac{x_2^* - x_1^*}{x_3^* - x_2^*} = \frac{\alpha_{11}(x_2 - x_1) + \alpha_{12}(y_2 - y_1)}{\alpha_{11}(x_3 - x_2) + \alpha_{12}(y_3 - y_2)} = \frac{\alpha_{11}\lambda(x_3 - x_2) + \alpha_{12}\lambda(y_3 - y_2)}{\alpha_{11}(x_3 - x_2) + \alpha_{12}(y_3 - y_2)} = \lambda.$$

Аналогично показывается, что $\frac{y_2^* - y_1^*}{y_3^* - y_2^*} = \lambda$.

Заметим, что из полученных соотношений следует равенство отношения длин образов и отношения длин прообразов отрезков, лежащих на одной прямой:

$$\begin{aligned} \frac{\left| \overrightarrow{M_1^* M_2^*} \right|}{\left| \overrightarrow{M_3^* M_2^*} \right|} &= \frac{\sqrt{(x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2}}{\sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}} = \frac{|\lambda| \sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}}{\sqrt{(x_3^* - x_2^*)^2 + (y_3^* - y_2^*)^2}} = |\lambda| = \\ &= \frac{|\lambda| \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} = \frac{\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right|}{\left| \overrightarrow{M_2 M_3} \right|}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Отметим также, что из теоремы 5.4.5. непосредственно вытекает, что при аффинном преобразовании отрезок прямой переходит в отрезок.

Теорема
5.4.6.

При аффинном преобразовании отношение длин образов двух отрезков, лежащих на параллельных прямых, равно отношению длин их прообразов.

Доказательство:

Пусть дано, что $\frac{\left| \overrightarrow{M_1 M_2} \right|}{\left| \overrightarrow{M_3 M_4} \right|} = \lambda$. Проведем прямую $M_3 M_3'$, параллельную $M_4 M_2$.

Поскольку при аффинном преобразовании образы параллельных прямых параллельны, то в силу теоремы 5.4.4. $M_4 M_2 M_3' M_3$ и $M_4^* M_2^* M_3'^* M_3^*$ — параллелограммы. (Рис. 5.4.2.). Следовательно, $\left| \overrightarrow{M_2^* M_4^*} \right| = \left| \overrightarrow{M_3'^* M_3^*} \right|$.

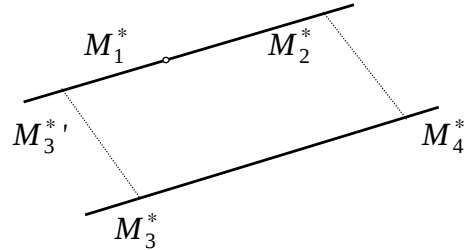
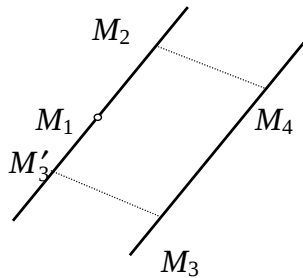


Рисунок 5.4.2.

Наконец по теореме 5.4.5., получаем

$$\frac{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1^* & \vec{M}_2^* \\ \vec{M}_3^* & \vec{M}_4^* \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1^* & \vec{M}_2^* \\ \vec{M}_3^* & \vec{M}_4^* \end{matrix} \right|} = \frac{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1^* & \vec{M}_2^* \\ \vec{M}_3^* & \vec{M}_2^* \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1^* & \vec{M}_2^* \\ \vec{M}_3^* & \vec{M}_2^* \end{matrix} \right|} = \frac{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 \\ \vec{M}_3' & \vec{M}_2 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 \\ \vec{M}_3' & \vec{M}_2 \end{matrix} \right|} = \frac{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 \\ \vec{M}_1 & \vec{M}_2 \end{matrix} \right|}{\left| \begin{matrix} \vec{M}_1 & \vec{M}_2 \\ \vec{M}_3 & \vec{M}_4 \end{matrix} \right|} = |\lambda|.$$

Теорема доказана.

Для выяснения геометрического смысла модуля и знака определителя матрицы некоторого аффинного преобразования приведем иное определение *ориентации пары неколлинеарных векторов* на плоскости (см. определение 1.8.3.), перенеся рассмотрение этой плоскости в пространство. Пусть, кроме того, $\vec{n}$ есть ее некоторый фиксированный нормальный вектор, направленный в сторону наблюдателя.

Определение 5.4.2. Пару неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ назовем *право ориентированной*, если существует $\lambda > 0$ такое, что $[\vec{a}, \vec{b}] = \lambda \vec{n}$ и, соответственно, *лево ориентированной*, если существует $\lambda < 0$ такое, что $[\vec{a}, \vec{b}] = \lambda \vec{n}$.

Теорема 5.4.7.

1°. При аффинном преобразовании отношение площади образа параллелограмма к площади самого параллелограмма равно абсолютной величине $\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$.

2°. При аффинном преобразовании ориентация образов пары векторов совпадает с ориентацией прообразов, если $\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} > 0$, и меняется на противоположную, если $\det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} < 0$.

Доказательство:

Рассмотрим некоторый базис образованный векторами $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, образы которых при аффинном преобразовании $\hat{A}$ есть соответственно $\vec{g}_1^* = \hat{A}\vec{g}_1 = \alpha_{11}\vec{g}_1 + \alpha_{21}\vec{g}_2$ и $\vec{g}_2^* = \hat{A}\vec{g}_2 = \alpha_{12}\vec{g}_1 + \alpha_{22}\vec{g}_2$ (рис. 5.4.3.). Коэффициенты

$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{21}$ и α_{22} являются согласно следствию 5.3.2. элементами матрицы линейного оператора $\hat{A}$, то есть $\|\hat{A}\|_g = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$.

По свойству векторного произведения (см. п.2.4.) площадь параллелограмма построенного на базисных векторах $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, $S = \left| [\vec{g}_1, \vec{g}_2] \right|$, а площадь параллелограмма построенного на образах базисных векторов $S^* = \left| [\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*] \right|$.

Имеем

$$\begin{aligned} [\vec{g}_1^*, \vec{g}_2^*] &= [\alpha_{11}\vec{g}_1 + \alpha_{21}\vec{g}_2, \alpha_{12}\vec{g}_1 + \alpha_{22}\vec{g}_2] = (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})[\vec{g}_1, \vec{g}_2] = \\ &= \det \|\hat{A}\|_g [\vec{g}_1, \vec{g}_2] = \pm \left| \det \|\hat{A}\|_g \right| [\vec{g}_1, \vec{g}_2], \end{aligned}$$

но тогда $S^* = \left| \det \|\hat{A}\|_g \right| S$, а ориентация пары векторов $\{\vec{g}_1, \vec{g}_2\}$ не меняется при $\det \|\hat{A}\|_g > 0$ и меняется на противоположную при $\det \|\hat{A}\|_g < 0$.

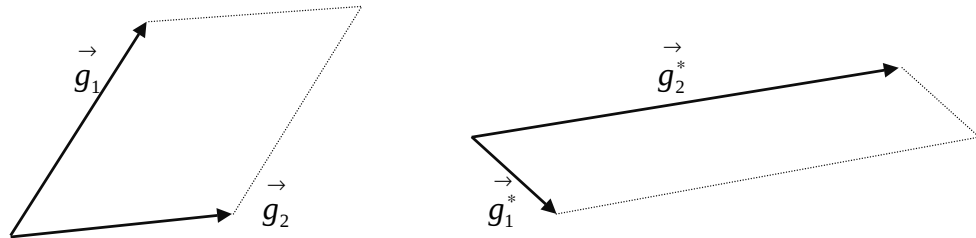


Рисунок 5.4.3.

Наконец отметим, что в силу теоремы 5.4.1., эти соотношения будут выполнены для любого базиса, а, значит, и для любого параллелограмма.

Теорема доказана.

Теорема
5.4.8.

При аффинном преобразовании всякая декартова система координат переходит в декартову систему координат, причем координаты образа каждой точки плоскости в новой системе координат будут совпадать с координатами прообраза в исходной.

Доказательство:

При аффинном преобразовании базис переходит в базис. Действительно, пусть формулы преобразования имеют вид $\begin{cases} x^* = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \beta_1 \\ y^* = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \beta_2 \end{cases}$, тогда образами

старых базисных векторов будут векторы $\begin{matrix} \vec{g}_1^* = \alpha_{11} \vec{g}_1 + \alpha_{21} \vec{g}_2 \\ \vec{g}_2^* = \alpha_{12} \vec{g}_1 + \alpha_{22} \vec{g}_2 \end{matrix}$. Поскольку

$\det \|A\|^T = \det \|A\| = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то векторы $\vec{g}_1^*$ и $\vec{g}_2^*$ линейно независимы (теорема 1.6.2.) и из них можно образовать базис.

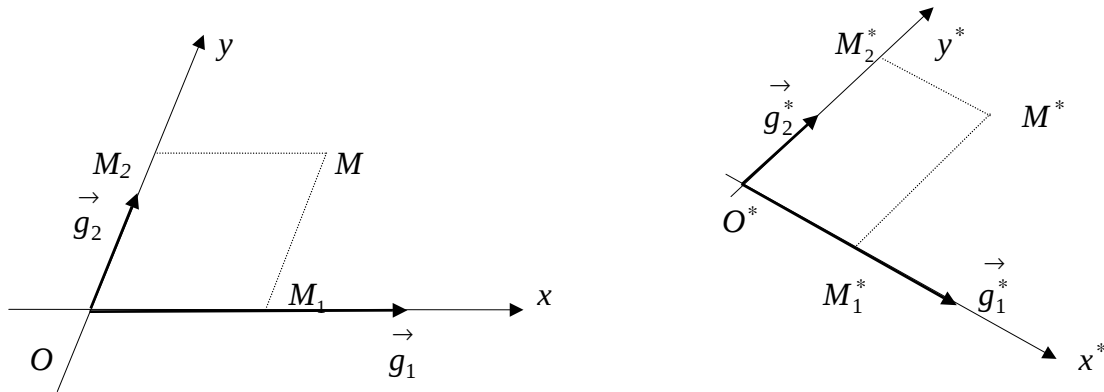


Рисунок 5.4.4.

Пусть в новой системе координаты точки M^* есть x^* и y^* (рис. 5.4.4.), тогда в силу теоремы 5.4.5. справедливы соотношения

$$|x| = \frac{|\vec{OM}_1|}{|\vec{g}_1|} = \frac{|\vec{O^*M_1^*}|}{|\vec{g_1^*}|} = |x^*| ; \quad |y| = \frac{|\vec{OM}_2|}{|\vec{g}_2|} = \frac{|\vec{O^*M_2^*}|}{|\vec{g_2^*}|} = |y^*|.$$

После естественного обобщения на случай разных знаков получаем доказываемое свойство.

Теорема доказана.

Теорема
5.4.9.

Для любой линии второго порядка, указанной в формулировке теоремы 4.4.1. и не являющейся пустым множеством:

- **при аффинном преобразовании ее тип не может измениться;**
- **найдется аффинное преобразование переводящее ее в любую другую линию второго порядка этого же типа.**

Доказательство:

Рассмотрим первое утверждение теоремы.

- 1°. В силу теорем 5.4.4. и 5.4.6. параллелограмм вместе со своей внутренней частью переходит в параллелограмм и, значит, ограниченная кривая перейдет в ограниченную. Отсюда следует, что эллипсы и точки могут переходить только в эллипсы и точки. С другой стороны, точка не может переходить в эллипс и наоборот, поскольку это противоречит свойству взаимной однозначности аффинного преобразования.
- 2°. Среди линий второго порядка только гиперболы и параллельные прямые имеют несвязанные ветви, то есть существует прямая, не пересекающая линию второго порядка такая, что ветви этой линии расположены по разные стороны от прямой. Данное свойство очевидно сохраняется при аффинном преобразовании. Параллельные же прямые не могут перейти в ветви гиперболы в силу теоремы 5.4.4.
- 3°. Среди непрямых линий второго порядка только парабола является неограниченной, связной кривой. Следовательно, при аффинном преобразовании парабола может перейти только в параболу.
- 4°. Если линия второго порядка есть точка, прямая или же пара параллельных или пересекающихся прямых, то из утверждения теорем 5.4.3. и 5.4.4. вытекает, что их тип не может измениться.

Рассмотрим второе утверждение теоремы.

Из теорем 4.4.1. и 5.4.1. следует, что для каждой линии второго порядка может быть построено аффинное преобразование, приводящее уравнение линии к одному из следующих девяти видов:

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 = \pm 1 \quad ; \quad x'^2 - y'^2 = 1 \\ x'^2 \pm y'^2 = 0 \quad ; \quad y'^2 \pm 1 = 0 \quad ; \quad y'^2 - 2x' = 0 \quad ; \quad y'^2 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.4.1.)$$

Но, поскольку уравнения любой пары линий, принадлежащих к одному и тому же типу, приводятся двумя различными аффинными преобразованиями к одному и тому же виду из списка (5.4.1.) , то в силу взаимной

ности аффинного преобразования и очевидной аффинности произведения аффинных преобразований следует справедливость второго утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Теорема
5.4.10.

Для всякого аффинного преобразования существует пара взаимно ортогональных направлений, которые переводятся данным аффинным преобразованием во взаимно ортогональные.

Доказательство:

Рассмотрим ортонормированную систему координат. Пусть пара исходных взаимно ортогональных направлений задается в ней ненулевыми векторами

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \text{ и } \vec{q} = \begin{pmatrix} \eta \\ -\xi \end{pmatrix}.$$

Потребуем, чтобы их образы

$$\vec{p}^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta \\ \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta \end{pmatrix} \quad \vec{q}^* = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ -\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\eta - \alpha_{12}\xi \\ \alpha_{21}\eta - \alpha_{22}\xi \end{pmatrix}$$

были также взаимно ортогональны. Условие ортогональности векторов $\vec{p}^*$ и $\vec{q}^*$ имеет вид

$$(\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta)(\alpha_{11}\eta - \alpha_{12}\xi) + (\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta)(\alpha_{21}\eta - \alpha_{22}\xi) = 0 \text{ или}$$

$$-(\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22})\xi^2 + (\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 + \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2)\xi\eta + (\alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22})\eta^2 = 0,$$

а после переобозначения коэффициентов,

$$-U\xi^2 + 2V\xi\eta + U\eta^2 = 0.$$

Рассмотрим следующие случаи:

- 1) $U=V=0$. В этом случае любая пара взаимно ортогональных векторов данным преобразованием переводится во взаимно ортогональную пару векторов.

$U=0$ и $V \neq 0$. Тогда $\xi\eta = 0$, то есть искомая пара векторов базисная.

- 3) Наконец, если $U \neq 0$, то отношение координат векторов $\vec{p}^*$ и $\vec{q}^*$ находится из квадратного уравнения $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^2 - \frac{2V}{U}\left(\frac{\xi}{\eta}\right) - 1 = 0$, имеющего действительные решения $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)_{1,2} = \frac{V}{U} \pm \sqrt{\frac{V^2}{U^2} + 1}$ при любом ненулевом U .

Теорема доказана.

5.5. Ортогональные преобразования плоскости

Определение 5.5.1. Ортогональным преобразованием плоскости P называется линейный оператор $\hat{Q}$ вида $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \|\hat{Q}\|_e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$, матрица которого $\|\hat{Q}\|_e = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{pmatrix}$ ортогональная в любой ортонормированной системе координат.

Напомним, что по определению 5.1.4. матрица $\|Q\|$ называется ортогональной, если $\|Q\|^{-1} = \|Q\|^T$.

Заметим, что ортогональное преобразование является частным случаем аффинного преобразования, поскольку, в силу теоремы 5.1.3., имеет место либо $\det \|\hat{Q}\|_e = 1$, либо $\det \|\hat{Q}\|_e = -1$. Помимо приведенных в п.5.4. аффинных свойств, ортогональные преобразования обладают своими специфическими особенностями. Рассмотрим основные из них.

Признак того, что некоторый линейный оператор является ортогональным, может быть сформулирован как

Теорема 5.5.1. **Линейный оператор на плоскости является ортогональным, если его матрица ортогональная хотя бы в одной ортонормированной системе координат.**

Доказательство:

Для доказательства достаточно убедиться, что ортогональность матрицы линейного оператора сохраняется при переходе от одного ортонормированного базиса на плоскости к другому.

Пусть на плоскости P имеются два ортонормированных базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ и $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ с матрицей перехода $\|S\|$. Согласно следствию 5.1.1. эта матрица также ортогональная и для нее справедливо равенство $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$, и пусть матрица линейного оператора $\hat{Q}$ ортогональна в исходном базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, то есть для нее $\|\hat{Q}\|_e^{-1} = \|\hat{Q}\|_e^T$.

Перейдем к базису $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, в котором матрица линейного оператора $\hat{Q}$ согласно теореме 5.3.3. будет иметь вид $\|\hat{Q}\|_{e'} = \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|$. Найдем в новом базисе матрицу $\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1}$. Используя теоремы 5.1.1. и 5.1.2., а также ортогональность матриц $\|S\|$ и $\|\hat{Q}\|_e$, получим

$$\begin{aligned} \|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} &= (\|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^{-1} = \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e^{-1} (\|S\|^{-1})^{-1} = \|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e^{-1} \|S\| = \|S\|^T \|\hat{Q}\|_e^T (\|S\|^T)^T = \\ &= (\|S\|^T \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^T = (\|S\|^{-1} \|\hat{Q}\|_e \|S\|)^T = \|\hat{Q}\|_{e'}^T. \end{aligned}$$

Но равенство $\|\hat{Q}\|_{e'}^{-1} = \|\hat{Q}\|_{e'}^T$ означает, что матрица линейного оператора $\hat{Q}$ ортогональная и в базисе $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$.

Теорема доказана.

Теорема
5.5.2.

Ортогональное преобразование плоскости сохраняет:

- 1°. Расстояние между любой парой точек;
- 2°. Углы между прямыми;
- 3°. Скалярное произведение векторов.

Доказательство:

1°. Пусть дано ортогональное преобразование плоскости $\hat{Q}$ вида

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \|\hat{Q}\|_e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \text{ переводящее пару точек } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \text{ в пару точек } \begin{pmatrix} x_1^* \\ y_1^* \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2^* \\ y_2^* \end{pmatrix} \text{ соответственно. Тогда будет справедливо равенство}$$

$$\begin{pmatrix} x_2^* - x_1^* \\ y_2^* - y_1^* \end{pmatrix} = \|\hat{Q}\|_e \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 5.1.4. матрица ортогонального преобразования $\hat{Q}$ в орто – нормированной системе координат имеет вид $\|\hat{Q}\|_e = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \mp \sin\varphi \\ \sin\varphi & \pm \cos\varphi \end{vmatrix}$. И потому координаты образов и прообразов рассматриваемых пар точек будут связаны соотношениями

$$\begin{cases} x_2^* - x_1^* = (x_2 - x_1)\cos\varphi \mp (y_2 - y_1)\sin\varphi \\ y_2^* - y_1^* = (x_2 - x_1)\sin\varphi \pm (y_2 - y_1)\cos\varphi \end{cases},$$

используя которые находим, что расстояния L^* – между образами, и L – между прообразами, равны. Действительно

$$\begin{aligned} (L^*)^2 &= (x_2^* - x_1^*)^2 + (y_2^* - y_1^*)^2 = \\ &= ((x_2 - x_1)\cos\varphi \mp (y_2 - y_1)\sin\varphi)^2 + ((x_2 - x_1)\sin\varphi \pm (y_2 - y_1)\cos\varphi)^2 = \\ &= (x_2 - x_1)^2 \cos^2\varphi \mp 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\varphi\sin\varphi + (y_2 - y_1)^2 \sin^2\varphi + \\ &+ (x_2 - x_1)^2 \sin^2\varphi \pm 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\sin\varphi\cos\varphi + (y_2 - y_1)^2 \cos^2\varphi = \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = L^2. \end{aligned}$$

- 2°. Из сохранения при ортогональном преобразовании расстояния между любой парой точек следует сохранение величин углов между прямыми на плоскости, поскольку в этом случае каждый треугольник будет переходить в себе равный.
- 3°. Но, если при ортогональном преобразовании сохраняются длины векторов и величины углов между ними, то будет сохраняться и скалярное произведение каждой пары векторов на плоскости.

Теорема доказана.

Используя свойства ортогональных преобразований, можно показать, что для аффинных преобразований справедлива следующая важная теорема.

Теорема
5.5.3.

Каждое аффинное преобразование может быть представлено в виде произведения ортогонального преобразования и двух сжатий по взаимно ортогональным направлениям.

Доказательство:

- 1°. По теореме 5.4.10. для любого аффинного преобразования можно выбрать ортонормированную систему координат $\{\vec{0}, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, которая преобразуется

данным аффинным преобразованием в другую ортогональную $\{\vec{0}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (в общем случае не ортонормированную).

Перейдем к системе координат $\{\vec{0}, \vec{e}_1'', \vec{e}_2''\}$, нормировав векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ по формулам $\vec{e}_1'' = \frac{\vec{e}_1}{\kappa_1}$; $\vec{e}_2'' = \frac{\vec{e}_2}{\kappa_2}$; $\kappa_1 = \left| \vec{e}_1 \right|$; $\kappa_2 = \left| \vec{e}_2 \right|$.

2°. Легко видеть, что преобразование, переводящее ортонормированную систему координат $\{\vec{0}, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ в ортонормированную систему координат $\{\vec{0}, \vec{e}_1'', \vec{e}_2''\}$, ортогональное. Поскольку для него справедливо равенство $\left\| \begin{matrix} \vec{e}_1'' \\ \vec{e}_2'' \end{matrix} \right\| = \left\| \hat{Q} \right\|^T \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \end{matrix} \right\|$, то $\left\| \hat{Q} \right\|$ — матрица этого ортогонального преобразования в ортонормированной системе координат $\{\vec{0}, \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$, является также матрицей перехода от базиса $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ к базису $\{\vec{e}_1'', \vec{e}_2''\}$.

Но $\left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1'' \\ \vec{e}_2'' \end{matrix} \right\|$, поэтому $\left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\| \hat{Q} \right\|^T \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1' \\ \vec{e}_2' \end{matrix} \right\|$. Тогда, воспользовавшись формулами (1.8.2.) и применив утверждение теоремы 5.1.1., находим

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| = \left(\left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\| \hat{Q} \right\|^T \right)^T \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \hat{Q} \right\| \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|.$$

3°. По теореме 5.4.8. в рассматриваемом случае $\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\|$,

$$\left\| \begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix} \right\| = \left\| \hat{Q} \right\| \left\| \begin{matrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, аффинное преобразование представимо в виде произведения ортогонального преобразования и пары сжатий ко взаимно ортогональным направлениям.

Теорема доказана.

5.6. Понятие группы

Определение 5.6.1. Множество G называется *группой по отношению к заданной операции*, если любым двум его элементам x и y оставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый *произведением* и обозначаемый xy , и если выполняются следующие условия:

- 1°. $x(yz) = (xy)z$;
- 2°. существует элемент e такой, что для любого $x \in G$ $xe = ex = x$;
- 3°. для каждого x существует элемент x^{-1} такой, что $x^{-1}x = e$.

Если, кроме того, $xy = yx$, $\forall x, y \in G$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Пример 5.6.1. Можно привести следующие примеры групп:

- 1) Множество вещественных чисел относительно операции сложения образует группу, где e — число 0.
- 2) Множество положительных вещественных чисел образует группу относительно операции умножения, где e — число 1.
- 3) Множество поворотов плоскости вокруг фиксированной точки образует группу относительно операции композиции.
- 4) Множество аффинных преобразований плоскости образует группу относительно операции композиции.

Раздел 6

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

6.1. Определители

Рассмотрим множество, состоящее из натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, n$. Будем обозначать *перестановки* этих чисел (то есть, последовательную запись этих чисел в некотором порядке без повторений) как $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$. Напомним, что полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 6.1.1. Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *беспорядок* (*нарушение порядка*, или *инверсию*), если при $i < j$ имеет место $k_i > k_j$.

Полное число беспорядков в перестановке $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ будем обозначать $B(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$. Например, $B(3, 1, 4, 2) = 3$.

Пусть дана квадратная матрица

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots & \alpha_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \|\alpha_{ij}\|; \quad i, j = [1, n].$$

Определение 6.1.2. *Детерминантом* (или *определителем*) квадратной матрицы $\|A\|$ размера $n \times n$ называется число $\det \|A\|$, получаемое по формуле

$$\det \|A\| = \sum_{\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}} (-1)^{B(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n},$$

где $\{k_1, k_2, k_3, \dots, k_n\}$ — всевозможные различные перестановки обозначенные из номеров столбцов матрицы $\|A\|$.

Поскольку в данном определении указано, что сумма берется по всем возможным различным перестановкам, то число слагаемых равно $n!$.

Из определения 6.1.2. также вытекает, что каждое слагаемое содержит в качестве множителя по одному элементу матрицы из каждого столбца и каждой строки.

Задача 6.1.1. Проверить совпадение определения 6.1.2. и определения детерминантов второго и третьего порядка 1.1.9. и 1.1.10.

6.2. Свойства определителей

Теорема 6.2.1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Доказательство:

Общий вид слагаемого в формуле определителя транспонированной матрицы $\|B\| = \|A\|^T$ будет $(-1)^{B(m_1, m_2, \dots, m_n)} \beta_{1m_1} \beta_{2m_2} \dots \beta_{nm_n}$, но, учитывая, что

$$\beta_{km_k} = \alpha_{m_k k} \text{ получим } \det \|A\|^T = \sum_{\{m_1, m_2, \dots, m_n\}} (-1)^{B(m_1, m_2, \dots, m_n)} \alpha_{m_1 1} \alpha_{m_2 2} \dots \alpha_{m_n n}.$$

Упорядочим множители каждого слагаемого по номерам строк, то есть приведем их к виду $(-1)^{B(m_1, m_2, \dots, m_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n}$, где $1, 2, 3, \dots, n$ — номера строк, а $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ — номера соответствующих столбцов. Отметим, что в этом случае имеет место очевидное равенство: $k_{m_i} = i; \forall i$.

При выполненном изменении порядка множителей для каждого слагаемого в формуле определителя будет иметь место равенство

$$B(m_1, m_2, \dots, m_n) = B(k_1, k_2, \dots, k_n).$$

Действительно, пусть m_i и m_j дают беспорядок, то есть $m_i > m_j$ при $i < j$, тогда дают беспорядок и числа k_{m_i} и k_{m_j} , поскольку для $\forall i: k_{m_i} = i$ и значит, будет справедливо неравенство $k_{m_i} = i < j = k_{m_j}$ при $m_i > m_j$.

$$\text{Окончательно получаем } \det \|A\|^T = \sum_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\}} (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n} = \det \|A\|.$$

Теорема доказана.

Замечание
6.2.1.

Утверждение теоремы 6.2.1. допускает следующую наглядную интерпретацию.

Выделим в матрице $\|A\|$ элементы, входящие в некоторое слагаемое определения 6.1.2., и соединим их отрезками прямых, как показано на рис. 6.2.1.

Заметим, что пара элементов α_{ik_i} и α_{jk_j} дает беспорядок, если соединяющий их отрезок имеет “положительный” наклон, то есть правый конец отрезка расположен выше левого.

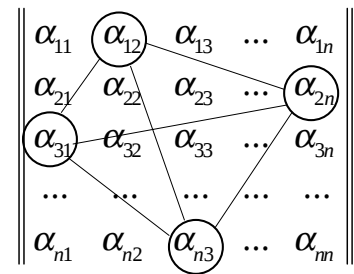


Рисунок 6.2.1.

Очевидно, что при транспонировании квадратной матрицы число отрезков с “положительным” наклоном не меняется, поэтому не меняется и знак каждого слагаемого в формуле 6.1.2., и, следовательно, значение определителя.

Следствие
6.2.1.

Всякое свойство определителя матрицы, сформулированное для ее столбцов, применимо к ее строкам, и наоборот.

Теорема
6.2.2.

При перестановке двух столбцов матрицы знак ее определителя меняется на противоположный.

Доказательство:

Рассмотрим вначале случай, когда переставляются *соседние* столбцы. Поскольку общий вид слагаемых в выражении для определителя дается формулой $(-1)^{3(k_1, k_2, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{nk_n}$, то достаточно показать, что число беспорядков изменится при перестановке соседних столбцов на единицу.

Рассмотрим перестановку чисел $\{k_1, k_2, \dots, k_i, k_{i+1}, \dots, k_n\}$. Если в ней поменять местами числа k_i и k_{i+1} , то число беспорядков, образуемых числами $\{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_{i+2}, \dots, k_n\}$, останется прежним, а за счет изменения порядка следования чисел k_i и k_{i+1} общее число беспорядков изменится на единицу.

Это означает, что знак каждого слагаемого в формуле определителя изменится на противоположный и, следовательно, изменит знак и весь определитель.

Наконец, если требуется поменять местами столбцы, между которыми находится l столбцов, то для этого потребуется $l+l+1$ перестановок соседних столбцов, но поскольку $(-1)^{2l+1} = -1$, то знак определителя изменится на противоположный.

Теорема доказана.

Следствие
6.2.2.

Определитель матрицы, содержащей два одинаковых столбца, равен нулю.

Доказательство:

При перестановке одинаковых столбцов значение определителя, с одной стороны, не меняется, но, с другой стороны, это значение должно изменить знак. Поэтому данный определитель может равняться только нулю.

Следствие доказано.

Теорема
6.2.3.

(Линейное
свойство
определителя)

Если k -ый столбец матрицы задать в виде линейной комбинации некоторых "новых" столбцов, то ее определитель представим в виде той же линейной комбинации определителей матриц, k -ми столбцами которых являются соответствующие "новые" столбцы из данной линейной комбинации.

Доказательство:

Пусть в матрице $\|A\|_\alpha$ k -й столбец состоит из элементов $\alpha_{ik} = \lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik}$, где $i=1, 2, \dots, n$.

Очевидны равенства

$$\begin{aligned} & (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \alpha_{ik} \dots \alpha_{nk_n} = \\ & = (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots (\lambda\beta_{ik} + \mu\gamma_{ik}) \dots \alpha_{nk_n} = \\ & = (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \lambda\beta_{ik} \dots \alpha_{nk_n} + (-1)^{B(k_1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{1k_1} \alpha_{2k_2} \dots \mu\gamma_{ik} \dots \alpha_{nk_n}. \end{aligned}$$

Или $\det \|A\|_{\alpha} = \lambda \det \|A\|_{\beta} + \mu \det \|A\|_{\gamma}$, где k -ые столбцы матриц $\|A\|_{\beta}$ и $\|A\|_{\gamma}$ соответственно состоят из элементов β_{ik} и γ_{ik} , $i=1,2,\dots,n$.

Теорема доказана.

Следствие
6.2.3.

При вычислении определителя из столбца матрицы можно выносить общий множитель.

Следствие
6.2.4.

Если к некоторому столбцу матрицы прибавить линейную комбинацию остальных ее столбцов, то определитель не изменится.

Доказательство:

Действительно, определитель, получившийся в результате данной операции с матрицей, можно (по теореме 6.2.3.) представить в виде линейной комбинации исходного определителя и линейной комбинации определителей матриц, имеющих одинаковые столбцы. Последние равны нулю по следствию 6.2.2.

Следствие доказано.

Теорема
6.2.4.

Определитель произведения матриц размера $n \times n$ равен произведению их определителей, то есть $\det (\|A\| \|B\|) = \det \|A\| \cdot \det \|B\|$.

Доказательство:

1°. Обозначим $\|C\| = \|A\| \|B\|$. Пусть матрицы $\|A\|$, $\|B\|$ и $\|C\|$ имеют, соответственно, элементы α_{ij} , β_{kl} и γ_{pq} . Тогда, по определению 5.1.1.,

$$\gamma_{pq} = \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} \beta_{jq} \text{ и потому}$$

$$\begin{aligned} \det \|C\| &= \\ &= \det \begin{vmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1n} + \dots + \alpha_{1n}\beta_{nn} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1n} + \dots + \alpha_{2n}\beta_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}\beta_{11} + \alpha_{n2}\beta_{21} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{n1} & \alpha_{n1}\beta_{12} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{n1}\beta_{1n} + \dots + \alpha_{nn}\beta_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

По линейному свойству определителя (теорема 6.2.3.)

$$\begin{aligned} \det \|C\| &= \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} \beta_{i_1 1} \beta_{i_2 2} \dots \beta_{i_n n} \det \begin{vmatrix} \alpha_{1i_1} & \alpha_{1i_2} & \dots & \alpha_{1i_n} \\ \alpha_{2i_1} & \alpha_{2i_2} & \dots & \alpha_{2i_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{ni_1} & \alpha_{ni_2} & \dots & \alpha_{ni_n} \end{vmatrix} = \\ &= \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} \beta_{i_1 1} \beta_{i_2 2} \dots \beta_{i_n n} \det \|A^*\|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}. \end{aligned}$$

Поскольку перестановки $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ могут содержать одинаковые числа, то общее число слагаемых в полученной сумме равно n^n , но ненулевых среди этих слагаемых в силу следствия 6.2.2. только $n!$.

2°. Заметим, что, поскольку матрицы $\|A^*\|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}$ составлены из тех же столбцов, что и $\|A\|$, но записанных в разном порядке, то их определители могут отличаться в силу теоремы 6.2.2. только знаком.

Преобразуем каждую из матриц $\|A^*\|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}$, переставив ее столбцы так, чтобы расположить каждый столбец с меньшим индексом перед столбцами с большими. В итоге этой операции столбцы будут полностью упорядочены, для чего потребуется число перестановок столбцов, равное числу беспорядков в перестановке $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, и, следовательно, для каждой матрицы $\|A^*\|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}}$ будет справедливо соотношение

$$\det \|A^*\|_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} = (-1)^{B(i_1, i_2, \dots, i_n)} \det \|A\|.$$

3°. Подставляя это соотношение в выражение для $\det \|C\|$, получаем

$$\det \|C\| = \det \|A\| \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_n\}} (-1)^{B(i_1, i_2, \dots, i_n)} \beta_{i_1 1} \beta_{i_2 2} \dots \beta_{i_n n} = \det \|A\| \cdot \det \|B\|^T,$$

что по теореме 6.2.1. и дает

$$\det (\|A\| \|B\|) = \det \|A\| \cdot \det \|B\|.$$

Теорема доказана.

6.3. Разложение определителей

Выберем в матрице $\|A\|$ строки с номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \dots, j_k$.

Определение 6.3.1. Детерминант квадратной матрицы порядка k , образованной элементами, стоящими на пересечении строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$, называется *минором k -го порядка* и обозначается $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$.

Определение 6.3.2. Детерминант квадратной матрицы порядка $n-k$, образованной элементами, остающимися после вычеркивания строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$, называется *минором, дополнительным к минору $M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$* , и обозначается $\overline{M}_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}$.

Выберем в матрице $\|A\|$ i -ю строку и j -й столбец, на пересечении которых расположен элемент α_{ij} . Удалим из $\|A\|$ выбранные строку и столбец, рассмотрим квадратную матрицу $\|A^+\|$ размера $(n-1) \times (n-1)$.

Определение 6.3.3. Детерминант матрицы $\|A^+\|$ называется *дополнительным минором $\overline{M}_i^j$ элемента α_{ij}* .

Сгруппируем в определении 6.1.2. – детерминанта матрицы $\|A\|$ все слагаемые, содержащие элемент α_{ij} , и вынесем его за скобки. Получим выражение *вид* $\det\|A\| = \alpha_{ij} D_{ij} + \dots$.

Определение 6.3.4. Число D_{ij} называется *алгебраическим дополнением элемента α_{ij}* .

Заметим, что в силу определения 6.1.2. имеют место равенства

$$\det\|A\| = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} D_{ij} ; \forall i = [1, n] \quad \text{и} \quad \det\|A\| = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} D_{kj} ; \forall j = [1, n] \quad (6.3.1.)$$

Теорема 6.3.1. **Справедливо соотношение** $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$.

Доказательство:

1°. По определению детерминанта 6.1.2.

$$\det \|A\| = \alpha_{11} \sum_{\{1, k_2, \dots, k_n\}} (-1)^{\mathfrak{B}(1, k_2, \dots, k_n)} \alpha_{2k_2} \alpha_{3k_3} \dots \alpha_{nk_n} + \dots,$$

то есть $D_{11} = \sum_{\{k_2, \dots, k_n\}} (-1)^{\mathfrak{B}(k_2, \dots, k_n)} \alpha_{2k_2} \alpha_{3k_3} \dots \alpha_{nk_n}$, поскольку очевидно, что

$\mathfrak{B}(1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \mathfrak{B}(k_2, k_3, \dots, k_n)$, но тогда выражение для D_{11} совпадает с формулой определителя матрицы, получаемой из $\|A\|$ вычеркиванием первого столбца и первой строки. Следовательно, $D_{11} = \overline{M}_1^1$.

2°. Построим новую матрицу $\|A'\|$, переместив элемент α_{ij} матрицы $\|A\|$ в ее левый верхний угол, для чего переставим i -ю строку на первое место, для чего потребуется $i-1$ перестановок, и переставим на первое место j -й столбец, что потребует $j-1$ перестановок. Тогда определитель перестроенной матрицы $\|A'\|$ равен

$$\det \|A'\| = (-1)^{i-1+j-1} \det \|A\| = (-1)^{i+j} \det \|A\|.$$

Из формулы (6.3.1.) следует, что данное соотношение будет также выполняться и для каждого из ее слагаемых, поскольку алгебраическое дополнение D_{ij} есть коэффициент при α_{ij} в формуле вычисления определителя.

Поэтому справедливо равенство $D_{ij} = (-1)^{i+j} D'_{11}$.

3°. С другой стороны, очевидно, что значение минора не зависит от положения вычеркиваемого элемента в матрице $\|A'\|$, и потому $\overline{M}_i^j = \overline{M}'_1^1$.

4°. Учитывая полученные соотношения $\overline{M}_i^j = \overline{M}'_1^1 = D'_{11} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, приходим к равенству $D_{ij} = (-1)^{i+j} \overline{M}_i^j$.

Теорема доказана.

Следствие
6.3.1.**Разложение определителя по i -у столбцу имеет вид**

$$\det \|A\| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} \alpha_{ki} \overline{M}_k^i \quad \text{или} \quad \det \|A\| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+i} M_k^i \overline{M}_k^i.$$

Теорема
6.3.2.**Имеет место равенство** $\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} D_{is} = \delta_{js} \cdot \Delta$, **где** $\Delta = \det \|A\|$ **и**

$$\delta_{js} = \begin{cases} 1, j = s \\ 0, j \neq s \end{cases}.$$

Доказательство:

По определению 6.3.4. алгебраического дополнения имеем

$$\det \|A\| = \alpha_{1j} D_{1j} + \alpha_{2j} D_{2j} + \dots + \alpha_{nj} D_{nj},$$

то есть утверждение теоремы для случая $j=s$ справедливо.

Пусть теперь $j \neq s$. Тогда выражение $\alpha_{1j} D_{1s} + \alpha_{2j} D_{2s} + \dots + \alpha_{nj} D_{ns}$ можно рассматривать как разложение по s -му столбцу определителя матрицы, у которой s -й столбец совпадает с j -м столбцом. Но такой определитель равен нулю по следствию 6.2.2.

Теорема доказана.

Следствие
6.3.2.**Если матрица $\|A\|$ невырождена, то элементами обратной матрицы**

$$\|A\|^{-1} \text{ являются числа } \beta_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \overline{M}_j^i}{\Delta}; i, j = [1, n].$$

Доказательство:

Найдем произведение матриц $\|A\|$ и $\|B\|$, где $\|B\|$ имеет элементы $\beta_{ij}; i, j = [1, n]$, а само произведение — элементы γ_{pq} . Тогда, согласно определению 5.1.1. и теореме 6.3.2.:

$$\gamma_{pq} = \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} \beta_{jq} = \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} \frac{(-1)^{j+q} \overline{M}_q^j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n \alpha_{pj} D_{qj} = \frac{1}{\Delta} \cdot \Delta \cdot \delta_{pq} = \delta_{pq}; \quad i, j = [1, n].$$

аналогичное соотношение получается и для произведения $\|A\| \|B\|$.

Таким образом, (по определению 1.1.4.) $\|A\| \|B\| = \|B\| \|A\| = \|E\|$, но тогда, согласно определению 5.1.2. и лемме 5.1.1., $\|B\| = \|A\|^{-1}$.

Следствие доказано.

Обозначим $I = i_1 + i_2 + \dots + i_k$ и $J = j_1 + j_2 + \dots + j_k$, тогда оказывается справедливым обобщающее следствие 6.3.1.

Теорема
6.3.3.
(Лапласа)

Для фиксированного набора столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$ имеет место равенство

$$\det \|A\| = \sum_{\{i_1, i_2, \dots, i_k\}} (-1)^{I+J} M_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k} \overline{M}_{i_1, i_2, \dots, i_k}^{j_1, j_2, \dots, j_k}.$$

Отметим, что суммирование выполняется по всем возможным перестановкам номеров строк $i_1, i_2, \dots, i_k$.

Задача
6.3.1.

Вычислить определитель матрицы n -го порядка

$$\Delta_n = \det \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}$$

Решение:

1°. Заметим, что сумма элементов каждого столбца матрицы одинакова и равна $x + a(n-1)$. Поэтому, прибавив к первой строке сумму остальных строк и вынося общий множитель из первой строки, мы получим матрицу с тем же определителем (см. следствия 6.2.4. и 6.2.3.)

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix}.$$

2°. Вычитая из каждой строки, начиная со второй, первую строку, умноженную на a , получим

$$\Delta_n = (x + a(n-1)) \cdot \det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a \end{vmatrix}.$$

3°. Последовательно применив $n-1$ раз следствие 6.3.1. для разложения определителя по первому столбцу, приходим к выражению

$$\Delta_n = (x + a(n-1))(x-a)^{n-1}.$$

6.4. Правило Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными

[illegible]

(6.4.1.)

Или же в матричной форме $\|A\|x = \|b\|$, где квадратная матрица $\|A\|$ имеет компоненты α_{ji} , а столбцы $\|x\|$ и $\|b\|$ — соответственно компоненты ξ_i и β_j .

Определение 6.4.1. Упорядоченный набор чисел $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ будем называть *решением системы линейных уравнений*, если при подстановке этих чисел в систему мы получаем тождество.

Имеет место

Теорема
6.4.1.
(Правило
Крамера)

Если $\Delta = \det \|A\| \neq 0$, то существует единственное решение системы линейных уравнений 6.4.1., определяемое формулами

$$\xi_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}; i=1,2,\dots,n \quad , \quad \text{где } \Delta_i = \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \beta_1 & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \beta_2 & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \beta_n & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$\uparrow$
 i -й столбец

– определитель матрицы, получаемой из матрицы системы уравнений $\|A\|$, заменой ее i -го столбца на столбец свободных членов $\|b\|$.

Доказательство:

1°. Получим вначале утверждение теоремы в предположении, что система

$$(6.4.1.) \text{ имеет решение } \|x\| = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{vmatrix}, \text{ то есть когда выполняются равенства}$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = \beta_j; j=[1,n].$$

Умножив обе части этих равенств на алгебраическое дополнение D_{jk} и просуммировав по j , получим

$$\sum_{j=1}^n D_{jk} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i \right) = \sum_{j=1}^n \beta_j D_{jk}.$$

Изменим порядок суммирования (то есть выполним перегруппировку слагаемых) в левой части этого равенства:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ji} D_{jk} \right) \xi_i = \sum_{j=1}^n \beta_j D_{jk}.$$

Но выражение в круглых скобках равно $\Delta \cdot \delta_{ik}$ (по теореме 6.3.2.), поэтому, учитывая, что $\sum_{j=1}^n \beta_j D_{jk} = \Delta_k$ и $\Delta \sum_{i=1}^n \delta_{ik} \xi_i = \xi_k \Delta$, получаем $\xi_k \Delta = \Delta_k$, $k=[1,n]$.

Или, окончательно, $\xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, $k=[1,n]$.

2°. Докажем теперь, что в условиях теоремы совокупность чисел $\xi_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}$, $k = [1, n]$ есть решение данной системы линейных уравнений. Преобразуем левые части исходной системы линейных уравнений (6.4.1.)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \frac{\Delta_i}{\Delta} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \left(\sum_{k=1}^n \beta_k D_{ki} \right) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n \beta_k \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} D_{ki} \right) = \\ &= \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n \beta_k \delta_{kj} \Delta = \beta_j, \quad j = [1, n]. \end{aligned}$$

Для получения последнего равенства мы снова изменили порядок суммирования и воспользовались теоремой 6.3.2.

Теорема доказана.

6.5. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $\|A\|$ размера $m \times n$. Пусть $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$. Выберем k фиксированных столбцов и строк, на пересечении которых стоит матрица минора порядка k .

Пусть при данном k все миноры k -го порядка равны нулю, тогда будут равны нулю и все миноры порядка выше, чем k , поскольку каждый минор $(k+1)$ -го порядка представим в виде линейной комбинации миноров порядка k . (См. следствие 6.3.1.)

Определение 6.5.1. Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы $\|A\|$, называется *рангом* матрицы и обозначается $\text{rg}\|A\|$.

Определение 6.5.2. Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором*.

Определение 6.5.3. Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются *базисными*.

Рассмотрим n m – компонентных столбцов вида:

$$\|a_1\| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \dots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}; \|a_2\| = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \dots \\ \alpha_{m2} \end{pmatrix}; \dots; \|a_n\| = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \dots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix} \text{ и столбцы } \|b\| = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}; \|o\| = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку для столбцов (как частного случая матриц) определены операции сложения и умножения на число, то можно говорить, что столбец $\|b\|$ есть *линейная комбинация* столбцов $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что $\|b\| = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|a_i\|$.

Теорема
6.5.1.
(О базисном
миноре)

Всякий столбец (строка) матрицы есть линейная комбинация базисных столбцов (строк) этой матрицы.

Доказательство:

1°. Пусть ранг матрицы равен r . Без ограничения общности можно считать, что матрица базисного минора расположена в левом верхнем углу матрицы $\|A\|$.

Окаймим матрицу базисного минора i –й строкой и j –м столбцом и рассмотрим определитель

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{rj} \\ \hline \alpha_{i1} & \dots & \alpha_{ir} & \alpha_{ij} \end{pmatrix},$$

который равен нулю.

Действительно, если $0 \leq i \leq r$ ($0 \leq j \leq r$), то имеем определитель с одинаковыми столбцами (строками). Если же $r < i \leq m$ ($r < j \leq m$), то $\Delta = 0$, в силу определения ранга матрицы, как минор порядка $r+1$.

2°. Разложим определитель Δ по последней строке, получим

$$\alpha_{i1}D_1 + \alpha_{i2}D_2 + \dots + \alpha_{ir}D_r + \alpha_{ij}M = 0,$$

где $M \neq 0$ – базисный минор, а $D_1, \dots, D_r$ – некоторые алгебраические дополнения, не зависящие от i . Следовательно, $\alpha_{ij} = \lambda_1 \alpha_{i1} + \lambda_2 \alpha_{i2} + \dots + \lambda_r \alpha_{ir}$,

где $\lambda_s = -\frac{D_s}{M}$, $\forall i$.

Теорема доказана.

Определение 6.5.4. Столбцы $\|a_1\|, \|a_2\|, \dots, \|a_n\|$ будем называть *линейно зависимыми*, если существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такие, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i \|a_i\| = \|o\|$, $(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| > 0)$.

Лемма 6.5.1. Для того чтобы столбцы (строки) матрицы были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство:

Совпадает с доказательством леммы 1.4.1.

Лемма 6.5.2. Если один из столбцов матрицы есть линейная комбинация некоторого подмножества остальных, то столбцы этой матрицы линейно зависимы.

Доказательство:

По лемме 6.5.1. можно утверждать, что среди столбцов матрицы есть подмножество линейно зависимых. Но тогда в линейной комбинации всех столбцов матрицы для столбцов, дополняющих подмножество линейно зависимых, можно положить $\lambda_i = 0$.

(См. доказательство теоремы 1.4.4.)

Лемма доказана.

Теорема 6.5.2. Для того чтобы определитель был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы его столбцы (строки) были линейно зависимыми.

Доказательство необходимости:

Пусть определитель равен нулю, тогда ранг его матрицы меньше n . По теореме о базисном миноре всякий столбец есть линейная комбинация базисных столбцов и тогда по лемме 6.5.2. столбцы матрицы линейно зависимы.

Доказательство достаточности:

Пусть столбцы матрицы линейно зависимы. По лемме 6.5.1. один из столбцов есть линейная комбинация остальных.

Пусть этот столбец последний, то есть $\|a_n\| = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \|a_i\|$. Умножим последовательно (для $i=1, 2, \dots, n-1$) i -й столбец на число λ_i и сложим все их. Вычитание этой суммы из столбца $\|a_n\|$ не изменит величины определителя, но поскольку при этом мы получим нулевой столбец, то определитель равен нулю.

Теорема доказана.

Теорема
6.5.3.
(О ранге
матрицы)

Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы равно максимальному числу линейно независимых строк матрицы и равно рангу матрицы.

Доказательство:

1°. Если ранг матрицы нулевой, то все ее элементы нулевые и среди них нет линейно независимых.

Пусть ранг матрицы равен $r > 0$. Рассмотрим матрицу, составленную из r базисных столбцов матрицы. Она имеет ненулевой минор r -го порядка и, следовательно, ее столбцы линейно независимы.

2°. Выберем $k > r$ столбцов матрицы и покажем, что эти столбцы линейно зависимы. Построим из выбранных столбцов матрицу $\|A^*\|$. Ее ранг $R \leq r$, поскольку $\|A^*\|$ является частью матрицы $\|A\|$. Следовательно, $R \leq r < k$ и в матрице $\|A^*\|$ есть, по крайней мере, один небазисный столбец, и тогда столбцы матрицы $\|A\|$ линейно зависимы по лемме 6.5.2.

Теорема доказана.

Определение 6.6.4. Система (6.6.1.) называется *однородной*, если $\beta_j = 0, \forall j = [1, m]$, в противном случае – *неоднородной* системой уравнений.

Теорема 6.6.1. (Кронекера-Капелли) **Для того чтобы система (6.6.1.) была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее основной матрицы был равен рангу расширенной.**

Доказательство необходимости:

Пусть существует решение системы (6.6.1.) $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$, тогда эту систему можно представить в виде следующего равенства

$$\xi_1 \|a_1\| + \xi_2 \|a_2\| + \dots + \xi_n \|a_n\| = \|b\|,$$

где $\|a_i\| = \|\alpha_{1i} \quad \alpha_{2i} \quad \dots \quad \alpha_{mi}\|^T, i = [1, n]$.

Поскольку в этом случае столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов, образующих основную матрицу, то число линейно независимых столбцов основной и расширенной матриц будет одинаковым.

Доказательство достаточности:

Пусть ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы и равен r . Без ограничения общности предположим, что базисный минор расположен в левом верхнем углу расширенной матрицы, но тогда по теореме 6.5.1. (о базисном миноре) имеет место равенство $\|b\| = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|a_i\|$, которое можно переписать в виде

$$\|b\| = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|a_i\| + \sum_{i=r+1}^n 0 \|a_i\|.$$

Однако последнее означает, что система (6.6.1.) имеет решение $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0\}$, то есть она совместна.

Теорема доказана.

Задача 6.6.1.

Покажите справедливость следующего утверждения.

Для того чтобы прямые $A_i x + B_i y + C_i = 0, i = [1, n]$ пересекались в одной и той же точке, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ \dots & \dots \\ A_n & B_n \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ A_n & B_n & C_n \end{pmatrix}.$$

6.7. Фундаментальная система решений

Факт несовместности системы (6.6.1.) можно установить, обнаружив несовпадение рангов основной и расширенной матриц. Рассмотрим теперь случай, когда система (6.6.1.) совместна и найдем все ее решения.

Для построения общего решения будут полезны следующие леммы:

Лемма
6.7.1.

Любая линейная комбинация частных решений однородной системы (6.6.1.) также является ее частным решением.

Доказательство:

Пусть $\|x^i\| = \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \dots \\ \xi_n^i \end{pmatrix}$, $i = [1, k]$ – частные решения однородной системы, то есть,

$\|A\| \|x^i\| = \|o\|$, $\forall i = [1, k]$. Рассмотрим столбец $\|y\| = \sum_{i=1}^k \lambda_i \|x^i\|$. По правилам действий с матрицами для него справедливы равенства

$$\|A\| \|y\| = \|A\| \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \|x^i\| \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\|A\| \|x^i\|) = \|o\|.$$

Лемма доказана.

Лемма
6.7.2.

Сумма некоторого частного решения однородной системы (6.6.1.) и некоторого частного решения неоднородной системы является частным решением неоднородной системы (6.6.1.).

Доказательство:

Пусть $\|x\|$ — частное решение однородной системы, а $\|y\|$ — некоторое частное решение неоднородной, то есть $\|A\|\|x\| = \|o\|$, $\|A\|\|y\| = \|b\|$. Тогда, по правилам действий с матрицами, справедливы равенства

$$\|A\|(\|x\| + \|y\|) = \|A\|\|x\| + \|A\|\|y\| = \|o\| + \|b\| = \|b\|.$$

Лемма доказана.

Лемма
6.7.3.

Разность двух некоторых частных решений неоднородной системы (6.6.1.) является частным решением однородной системы (6.6.1.).

Доказательство:

Пусть $\|x\|$ и $\|y\|$ — частные решения неоднородной системы, то есть, $\|A\|\|x\| = \|b\|$, $\|A\|\|y\| = \|b\|$. Тогда, по правилам действий с матрицами, справедливы равенства

$$\|A\|(\|x\| - \|y\|) = \|A\|\|x\| - \|A\|\|y\| = \|b\| - \|b\| = \|o\|.$$

Лемма доказана.

Замечания: 1°. Из утверждения леммы 6.7.3. следует, что:

общее решение неоднородной системы уравнений есть общее решение однородной плюс некоторое частное решение неоднородной,

и поэтому представляется целесообразным вначале изучить вопрос о нахождении общего решения однородной системы линейных уравнений.

- 2°. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, поскольку у нее есть, по крайней мере, одно частное, называемое *тривиальным*, решение, для которого все неизвестные имеют нулевое значение.
- 3°. Поскольку частные решения системы линейных уравнений представимы в виде столбцов, то, используя операции сравнения, сложения и умножения на число для столбцов, а также лемму 6.7.1., можно ввести понятие линейной зависимости решений аналогично определению 6.5.4.

Теорема
6.7.1.

Однородная система (6.6.1.) имеет $n - \text{rg}\|A\|$ линейно независимых частных решений.

2°. Теперь рассмотрим однородную систему. По линейному свойству определителей (теорема 6.2.3.) получаем выражения для значений неизвестных

$$\xi_j = \sum_{k=1}^{n-r} \kappa_{jk} \mu_k, \quad j=[1, r]; \quad \xi_{r+i} = \mu_i, \quad i=[1, n-r], \quad (6.7.2.)$$

где

$$\kappa_{jk} = \frac{1}{M} \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & -\alpha_{1,r+k} & \dots & \alpha_{1r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & -\alpha_{r,r+k} & \dots & \alpha_{rr} \end{vmatrix}, \quad j=[1, r], \quad k=[1, n-r].$$

↑
 j – й столбец

Наконец, в матричной форме соотношения (6.7.2.) могут быть записаны так

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{2,n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \dots & \kappa_{r,n-r} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_{n-r} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1,n-r} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \dots & \kappa_{2,n-r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_{r1} & \kappa_{r2} & \dots & \kappa_{r,n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (6.7.3.)$$

3°. Полагая $\mu_1 = 1, \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-r} = 0$, получим решение $\{\xi_1^1, \xi_2^1, \dots, \xi_r^1, 1, 0, \dots, 0\}$.

аналогично при $\mu_1 = 0, \mu_2 = 1, \mu_3 = \dots = \mu_{n-r} = 0$ найдем решение $\{\xi_1^2, \xi_2^2, \dots, \xi_r^2, 0, 1, \dots, 0\}$.

Продолжая этот процесс, получим в конце при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{n-r-1} = 0, \mu_{n-r} = 1$ решение $\{\xi_1^{n-r}, \xi_2^{n-r}, \dots, \xi_r^{n-r}, 0, 0, \dots, 1\}$.

Совокупность полученных решений будем называть *нормальной фундаментальной системой решений*.

4°. Покажем теперь, что построенные $n-r$ частных решений однородной системы уравнений (6.6.1.) являются линейно независимыми. Действительно, записав эти решения как строки, получим матрицу вида

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \dots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|.$$

Заметим, что ее ранг, с одной стороны, не меньше, чем $n-r$, поскольку содержит ненулевой минор этого порядка, но, с другой стороны, не больше, чем число строк в этой матрице, равное $n-r$, и потому ранг в точности равен $n-r$, что доказывает линейную независимость построенных частных решений.

Теорема доказана.

Определение
6.7.1.

Фундаментальной системой решений для системы линейных уравнений (6.6.1.) называется совокупность любых $n - \text{rg}\|A\|$ частных, линейно независимых решений однородной системы (6.6.1.), где n — число неизвестных в системе (6.6.1.), а $\|A\|$ — ее основная матрица.

Теорема
6.7.2.

Каждое частное решение однородной системы (6.6.1.) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений, образующих нормальную фундаментальную систему решений.

Доказательство:

Пусть дано решение $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ однородной системы (6.6.1.) Рассмотрим матрицу размера $(n-r+1) \times n$

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_r & \xi_{r+1} & \xi_{r+2} & \dots & \xi_n \\ \xi_1^1 & \xi_2^1 & \dots & \xi_r^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \dots & \xi_r^2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1^{n-r} & \xi_2^{n-r} & \dots & \xi_r^{n-r} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\|, \quad (6.7.4.)$$

ранг которой, с одной стороны, очевидно, не меньше, чем $n-r$.

С другой стороны, первые r столбцов этой матрицы являются линейными комбинациями (заданными соотношениями (6.7.3.)) последних $n-r$ столбцов. Действительно, эти соотношения, связывающие значения свободных и основных переменных, *одни и те же для всех строк* матрицы (6.7.4.), и потому в этой матрице каждый из первых r столбцов есть линейная комбинация последних $n-r$.

Отсюда заключаем, что ранг матрицы не превосходит $n-r$, и, следовательно, равен в точности $n-r$. Но тогда по теореме 6.5.1. — о базисном миноре, который располагается в последних r строках, первая строка матрицы (6.7.4.) является некоторой линейной комбинацией остальных, и, следовательно, общее решение однородной системы (6.6.1.) может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \dots \\ \xi_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} \xi_1^{n-r} \\ \xi_2^{n-r} \\ \dots \\ \xi_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

где λ_i , $\forall i = [1, n-r]$ — произвольные константы.

Теорема доказана.

Следствие
6.7.1.

Общее решение неоднородной системы (6.6.1.) может быть дано формулой

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_r \\ \xi_{r+1} \\ \xi_{r+2} \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \xi_1^1 \\ \xi_2^1 \\ \dots \\ \xi_r^1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \xi_1^2 \\ \xi_2^2 \\ \dots \\ \xi_r^2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \lambda_{n-r} \begin{pmatrix} \xi_1^{n-r} \\ \xi_2^{n-r} \\ \dots \\ \xi_r^{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_r^0 \\ \xi_{r+1}^0 \\ \xi_{r+2}^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} \xi_1^0 \\ \xi_2^0 \\ \dots \\ \xi_r^0 \\ \xi_{r+1}^0 \\ \xi_{r+2}^0 \\ \dots \\ \xi_n^0 \end{pmatrix}$$

является некоторым частным решением неоднородной системы (6.6.1.), а числа λ_i , $\forall i = [1, n-r]$ — произвольные константы.

Доказательство:

Пусть $\|x^0\|$ — некоторое (найденное, например, подбором) частное решение неоднородной системы (6.6.1.), а $\|x\|$ — ее произвольное решение. Тогда по

Из теорем 6.7.1. и 6.7.2. непосредственно вытекает

Следствие 6.7.2.

В частном случае, когда основная матрица системы (6.6.1.) квадратная, это условие равносильно равенству $\det \|A\| = 0$.

Иное, полезное для приложений, условие совместности системы линейных уравнений дает

Теорема
6.7.3.

[illegible]

(или, в матричном виде, $\|A\|^T y\| = o$) удовлетворяло условию

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \eta_i = 0 \text{ (или, в матричном виде } \|b\|^T \|y\| = 0).$$

Доказательство необходимости:

Пусть система уравнений (6.6.1.) совместна, то есть, для каждого ее решения $\|x\|$ справедливо равенство $\|b\| = \|A\| \|x\|$. Найдем произведение $\|b\|^T \|y\|$ в предположении, что $\|A\|^T \|y\| = \|o\|$. Имеем

$$\|b\|^T \|y\| = (\|A\| \|x\|)^T \|y\| = \|x\|^T \|A\|^T \|y\| = \|x\|^T \|o\| = 0.$$

Доказательство достаточности:

Пусть $\|b\|^T \|y\| = 0$ для любого решения системы линейных уравнений $\|A\|^T \|y\| = \|o\|$. Тогда общие решения систем линейных уравнений $\|A\|^T \|y\| = \|o\|$ и $\begin{cases} \|A\|^T \|y\| = \|o\| \\ \|b\|^T \|y\| = 0 \end{cases}$ совпадают, и для этих систем число линейно независимых решений одинаково. Поэтому, согласно теореме 6.7.1.

$$m - \operatorname{rg} \|A\|^T = m - \operatorname{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^T \quad \text{или} \quad \operatorname{rg} \|A\|^T = \operatorname{rg} \left\| \frac{A}{b} \right\|^T,$$

но поскольку ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, то имеет место равенство $\operatorname{rg} \|A\| \|b\| = \operatorname{rg} \|A\|$, означающее в силу теоремы 6.6.1. совместность системы линейных уравнений $\|A\| \|x\| = \|b\|$.

Теорема доказана.

Альтернативное доказательство этой теоремы приведено в разделе "Евклидово пространство" (см. теоремы 10.6.4. и 10.6.5.)

6.8. Метод Гаусса

Практическое применение теорем 6.7.3. и 6.7.4. затрудняется тем, что заранее, как правило, неизвестно, совместна ли решаемая система. Определение же рангов основной и расширенной матриц независимо от поиска решений оказывается весьма не — рациональной (с точки зрения расходования вычислительных ресурсов) процедурой.

Более эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим либо находить общее решение системы (6.6.1.), либо устанавливать факт ее несовместности, является *метод Гаусса*.

Суть этого метода заключается в приведении расширенной матрицы системы линейных уравнений к *наиболее простому виду* последовательностью так называемых *элементарных* преобразований, каждое из которых не меняет общего решения системы уравнений.

Под “наиболее простым” видом расширенной матрицы мы будем понимать *верхнюю треугольную форму* (т.е. случай, когда $\alpha_{ij} = 0$ при $i > j$), для которой возможно рекуррентное нахождение неизвестных путем лишь решения на каждом шаге процедуры линейного уравнения с одним неизвестным. Ниже приведен пример матрицы размера $m \times n$ ($n > m$), имеющей верхнюю треугольную форму.

$$\left\| \begin{array}{cccccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,m-2} & a_{1,m-1} & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,m-2} & a_{2,m-1} & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3,m-2} & a_{3,m-1} & a_{3,m} & a_{3,m+1} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{mm} & a_{m,m+1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\|.$$

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

- перестановка строк (перенумерация уравнений);
- перестановка столбцов основной матрицы (перенумерация неизвестных);
- удаление нулевой строки (исключение уравнений, тождественно удовлетворяющихся любыми значениями неизвестных);
- умножение строки на ненулевое число (нормирование уравнений);
- сложение строки с линейной комбинацией остальных строк с записью результата на место исходной строки (замена одного из уравнений системы следствием ее уравнений, получаемых при помощи линейных операций).

Решение неоднородной системы уравнений (равно как и ее ранг) не изменится также и при использовании любой комбинации элементарных операций.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что элементарные преобразования любой матрицы могут быть выполнены при помощи умножения ее на матрицы следующего специального вида:

- перестановка строк с номерами i и j матрицы $\|A\|$ размера $m \times n$ осуществляется путем ее умножения слева на матрицу $\|S\|_1$ размера $m \times m$, которая, в свою очередь, получается из единичной матрицы $\|E\|$ путем перестановки в последней i -й и j -й строк.
- умножение i -й строки матрицы $\|A\|$ на некоторое число $\lambda \neq 0$ осуществляется путем умножения $\|A\|$ слева на матрицу $\|S\|_2$, которая, получается

- из единичной, размера $m \times m$, матрицы $\|E\|$ путем замены в последней i -го диагонального элемента (равного единице) на λ .
- сложение строк с номерами i и j матрицы $\|A\|$ осуществляется путем ее умножения слева на матрицу $\|S\|_3$ размера $m \times m$, которая, получается из единичной матрицы $\|E\|$ путем замены в последней нулевого элемента, стоящего в i -й строке и j -м столбце, на единицу (при этом результат суммирования окажется на месте i -й строки исходной матрицы $\|A\|$.)

В дальнейшем (см. теорему 8.4.3.) будет показано, что если матрица $\|S\|$ квадратная и невырожденная и возможно умножение матрицы $\|S\|$ на матрицу $\|A\|$, то справедливо равенство $\text{rg}(\|S\| \|A\|) = \text{rg} \|A\|$. Поскольку $\det \|S\|_1 = -1$, $\det \|S\|_2 = \lambda \neq 0$ и $\det \|S\|_3 = 1$, то ранг $\|A\|$ при рассмотренных выше преобразованиях не меняется.

В качестве упражнения постройте матрицы элементарных преобразований, одно из которых переставляет, а второе суммирует столбцы с номерами j и k .

Последовательное применение нескольких элементарных преобразований есть новое преобразование, которое имеет матрицу, являющуюся произведением матриц данных элементарных преобразований.

Этот факт позволяет в ряде случаев упрощать и облегчать вычислительные процедуры. Пусть, например, $\|S\|^*$ есть матрица преобразования, переводящего невырожденную матрицу $\|A\|$ в единичную. Тогда преобразование с матрицей $\|S\|^*$ переводит единичную матрицу $\|E\|$ в матрицу $\|A\|^{-1}$, поскольку из $\|E\| = \|S\|^* \|A\|$ и невырожденности $\|A\|$ следует

$$\|E\| \|A\|^{-1} = \|S\|^* \|A\| \|A\|^{-1} \text{ или } \|A\|^{-1} = \|S\|^* \|E\|.$$

Из этих соотношений следует, что вычисление произведения квадратных матриц $\|A\|^{-1} \|B\|$ может быть сведено к последовательности элементарных преобразований строк матрицы $\|A\|B\|$ (то есть матрицы, образованной добавлением столбцов матрицы $\|B\|$ к матрице $\|A\|$), приводящих подматрицу $\|A\|$ к единичной. В результате такой процедуры искомое произведение оказывается на месте подматрицы $\|B\|$.

Проиллюстрируем применение метода Гаусса на примере решения следующей системы линейных уравнений.

Задача 6.8.1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 + \xi_5 = 7 \\ 3\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 + \xi_4 - 3\xi_5 = -2 \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 2\xi_4 + 6\xi_5 = 23 \\ 5\xi_1 + 4\xi_2 + 3\xi_3 + 3\xi_4 - \xi_5 = 12 \end{cases}$$

Решение:

1°. Составляем расширенную матрицу системы

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12 \end{array} \right\|.$$

2°. Приводим ее к верхнему треугольному виду. Для этого:

- а) преобразуем в нули все элементы первого столбца, кроме элемента, стоящего в первой строке. Например, для зануления элемента, стоящего во второй строке первого столбца, заменим вторую строку матрицы строкой, которая является суммой первой строки, умноженной на -3 , и второй строки. Аналогично поступаем с четвертой строкой: ее заменяем линейной комбинацией первой и четвертой строк с коэффициентами -5 и 1 соответственно. Третью, естественно, не меняем: там уже имеется необходимый для треугольного вида ноль. В итоге матрица приобретает вид

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \end{array} \right\|;$$

- б) выполняем теперь операцию зануления элементов второго столбца, стоящих в его третьей и четвертой строках. Для этого третью строку матрицы заменяем суммой второй и третьей, а четвертую — разностью второй и четвертой. Получаем

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|;$$

в) поскольку в данном конкретном случае элемент, расположенный в четвертой строке третьего столбца, оказался равным нулю, то приведение расширенной матрицы к верхнему треугольному виду завершено.

3°. Полученная матрица является расширенной матрицей системы линейных уравнений, равносильной исходной системе. Ранг этой матрицы совпадает с рангом исходной. Отсюда заключаем, что

а) система совместна, поскольку ранг основной матрицы равен рангу расширенной и равен 2 (по теореме 6.6.1., Кронекера – Капелли);

б) однородная система уравнений будет иметь по теореме 6.7.1. $n - \text{rg} \|A\| = 5 - 2 = 3$ линейно независимых решения.

4°. Поскольку общее решение неоднородной системы есть общее решение однородной плюс частное решение неоднородной, то нам достаточно найти три любых линейно независимых решения однородной системы и какое-нибудь одно решение неоднородной.

Перепишем исходную систему в преобразованном виде, приняв первое и второе неизвестные за основные, а третье, четвертое и пятое — за свободные.

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 - \xi_3 - \xi_4 - \xi_5 \\ \xi_2 = 23 - 2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases} \quad (6.8.1.)$$

Второе уравнение для удобства вычислений умножим на -1 , а третье и четвертое уравнения отбросим как удовлетворяющиеся тождественно.

Положив в системе (6.8.1.) свободные неизвестные равными нулю, находим частное

решение неоднородной системы $\begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Значения основных неизвестных опреде-

ляются из легко решаемой системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 7 \\ \xi_2 = 23 \end{cases}.$$

Для однородной системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -\xi_3 - \xi_4 - \xi_5 \\ \xi_2 = -2\xi_3 - 2\xi_4 - 6\xi_5 \end{cases}$$

строим нормальную фундаментальную систему решений по схеме, использованной

при доказательстве теоремы 6.7.1. Первое независимое решение $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ находится из системы

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = -1 \\ \xi_2 = -2 \end{cases}.$$

аналогично получают второе и третье решения: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Окончательно общее решение исходной неоднородной системы в матричном виде может быть записано как:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ 23 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание: поскольку существует свобода выбора как частного решения неоднородной системы, так и линейно независимых решений однородной, то общее решение неоднородной системы может быть записано в различных, но, естественно, равносильных формах.

Раздел 7 ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

7.1. Определение линейного пространства

Определение 7.1.1. Множество Λ состоящее из элементов $x, y, z, \dots$ называется *линейным пространством*, если

- 1°. Каждой паре элементов x, y этого множества поставлен в соответствие третий элемент этого же множества, называемый их *суммой* и обозначаемый $x + y$, таким образом, что выполнены ак –
- а) $x + y = y + x$;
 - б) $x + (y + z) = (x + y) + z$;
 - в) существует *нулевой элемент* o такой, что для любого $x \in \Lambda$ имеет место $x + o = x$;
 - г) для каждого x существует *противоположный элемент* $(-x)$ такой, что $x + (-x) = o$.
- 2°. Для любого элемента x и любого числа λ существует такой при –
надлежащий Λ элемент, обозначаемый λx и называемый *произведе –*
нием числа на элемент, что выполнены аксиомы
- а) $1x = x$;
 - б) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
- 3°. Для операций сложения элементов и умножения элемента на число
выполнены аксиомы дистрибутивности
- а) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
 - б) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $\forall x, y \in \Lambda$; и для любых чисел λ, μ .

Замечания: 1°. Под “числами” в аксиомах второй и третьей групп подразумеваются действительные или комплексные числа;

- 2°. Первая группа аксиом равносильна требованию, чтобы Λ являлось абелевой группой относительно операции сложения (см.п.5.6.)

Пример
7.1.1.

Линейным пространством является ¹⁾ :

- 1°. Множество всех векторов на плоскости;
- 2°. Множество всех векторов в пространстве;
- 3°. Множество всех n – компонентных столбцов;
- 4°. Множество всех многочленов степени не выше, чем n ;
- 5°. Множество всех матриц размера $m \times n$;
- 6°. $C[a,b]$ – множество всех функций, непрерывных на $[a,b]$;
- 7°. Множество всех решений однородной системы m линейных уравнений с n неизвестными.

Задача
7.1.1.

Показать, что в общем случае множество радиус-векторов точек, принадлежащих плоскости $\vec{(n, r)} = \delta$, не является линейным пространством. Выяснить, при каких значениях параметра δ данное множество будет линейным пространством.

Задача
7.1.2.

Показать, что множество, состоящее из одного нулевого элемента, является линейным пространством.

Задача
7.1.3.

Будет ли линейным пространством множество всех положительных чисел?

Решение:

Ответ зависит от способа введения операций сложения и умножения на число элементов рассматриваемого множества.

- 1°. Пусть операции вводятся "естественным" образом. В этом случае множество положительных чисел не образует линейного пространства, поскольку в нем отсутствует нулевой элемент.
- 2°. Если операцию "сложения" определить как обычное произведение двух чисел, а "умножение на число λ " определить как возведение положительного числа в степень λ , то множество положительных чисел будет являться линейным пространством, в котором роль нулевого элемента играет число "1".

¹⁾ Предполагается, что операции сложения и умножения на число выполняются в соответствии с ранее данными определениями.

Теорема 7.1.1. **Линейное пространство имеет единственный нулевой элемент.**

Доказательство:

Пусть существуют два различных нулевых элемента o_1 и o_2 . Тогда, согласно аксиоме п.1°(в) из определения 7.1.1. линейного пространства, будут справедливы равенства

$$o_1 + o_2 = o_1 \text{ и } o_2 + o_1 = o_2.$$

Откуда, в силу коммутативности операции сложения, получаем $o_1 = o_2$.

Теорема доказана.

Теорема 7.1.2. **Для каждого элемента x линейного пространства имеет место равенство $0x = o$.**

Доказательство:

Из аксиоматики линейного пространства имеем

$$x = 1x = (0 + 1)x = 0x + 1x = 0x + x.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства элемент y , противоположный элементу x , получаем, что $0x = o$.

Теорема доказана.

Теорема 7.1.3. **Для каждого элемента линейного пространства существует единственный противоположный элемент.**

Доказательство:

Пусть для элемента x существуют два различных противоположных элемента y_1 и y_2 . Тогда, согласно аксиоме 1°(г) линейного пространства, будут справедливы равенства

$$x + y_1 = o \text{ и } x + y_2 = o.$$

Прибавим к обоим частям первого равенства элемент y_2 , получим

$$y_2 + (x + y_1) = y_2$$

в силу ассоциативности операции сложения и второго равенства. Но, с другой стороны, $y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = o + y_1 = y_1$. То есть $y_2 = y_1$.

Теорема доказана.

Теорема 7.1.4. **Для каждого $x \in \Lambda$ противоположным элементом служит элемент $(-1)x$.**

Доказательство:

Из аксиоматики линейного пространства и теоремы 7.1.2. имеем

$$o = 0x = (1-1)x = 1x + (-1)x = x + (-1)x.$$

Это равенство и означает, что противоположный к x элемент имеет вид $(-1)x$.

Теорема доказана.

7.2. Линейная зависимость, размерность и базис в линейном пространстве

Определение 7.2.1. 1°. Выражение $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ называется *линейной комбинацией* элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейного пространства Λ .

2°. Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не равные нулю одновременно, такие, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = o$.

3°. Элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейного пространства Λ называются *линейно независимыми*, если из равенства $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = o$ следует, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Лемма 7.2.1. **Для того чтобы некоторое множество элементов линейного пространства было линейно зависимым, необходимо и достаточно, чтобы один из этих элементов являлся линейной комбинацией остальных.**

Доказательство:

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1.4.1., в котором слово "вектор" заменено словом "элемент".

Лемма 7.2.2. Если некоторое подмножество элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно зависимо, то линейно зависимы и сами элементы $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Доказательство:

Без ограничения общности можно предположить, что линейно зависимое подмножество состоит из первых $k < n$ элементов множества $x_1, x_2, \dots, x_n$. Тогда существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ такие, что $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$. Но из этого соотношения вытекает равенство $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{i=k+1}^n 0x_i = 0$, которое означает линейную зависимость элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Лемма доказана.

Определение 7.2.2. Базисом в линейном пространстве Λ называется любой упорядоченный набор его n элементов, если

- 1°. эти элементы линейно независимы;
- 2°. любое подмножество в Λ , состоящее из $n+1$ элемента и включающее эти n элементов, линейно зависимо.

Определение 7.2.3. Линейное пространство Λ называется n -мерным и обозначается Λ^n , если в нем существует базис, состоящий из n элементов. Число n называется размерностью линейного пространства Λ^n и обозначается $\dim(\Lambda^n)$.

Теорема 7.2.1. Для каждого элемента линейного пространства Λ^n существует единственное представление в виде линейной комбинации базисных элементов.

Доказательство:

Пусть в линейном пространстве Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и произвольный элемент x . Тогда, по определению базиса, система элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n, x\}$ линейно зависима и по лемме 7.2.1. элемент x является линейной комбинацией элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$. Существование разложения доказано.

Покажем единственность разложения. Допустим, что существуют две различные линейные комбинации $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ и $x = \sum_{i=1}^n \eta_i g_i$. Тогда получаем, что

$\sum_{i=1}^n (\xi_i - \eta_i) g_i = 0$, но это означает, что при данном допущении система элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$ линейно зависима. Полученное противоречие доказывает единственность.

Теорема доказана.

Линейное пространство	Размерность	Пример базиса
Множество всех радиус-векторов на плоскости	2	Пара неколлинеарных векторов на плоскости.
Множество всех векторов в пространстве	3	Тройка нормированных, попарно ортогональных векторов.
Множество всех n -компонентных столбцов	n	n столбцов вида $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}; \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$
Множество всех многочленов степени не выше, чем n	$n+1$	$n+1$ одночлен вида $P_1(\tau)=1; \quad P_2(\tau)=\tau; \quad P_3(\tau)=\tau^2; \quad P_4(\tau)=\tau^3; \\ \dots; \quad P_n(\tau)=\tau^{n-1}; \quad P_{n+1}(\tau)=\tau^n.$
Множество всех матриц размера $m \times n$	nm	nm всевозможных различных матриц размера $m \times n$, все элементы которых равны нулю, кроме одного, равного 1.
Множество всех функций, непрерывных на $[a,b]$	∞	Базис не существует ¹⁾ .
Множество решений однородной системы m уравнений с n неизвестными и рангом r .	$n-r$	Нормальная фундаментальная система решений.

Таблица 7.2.1.

В таблице 7.2.1. приведены примеры выбора базиса в линейном пространстве.

¹⁾ То есть для любого натурального n в данном линейном пространстве найдется $n+1$ линейно независимый элемент, например, система функций вида $\{1, \cos \tau, \cos 2\tau, \cos 3\tau, \dots, \cos n\tau\}$.

7.3. Операции с элементами линейного пространства в координатном представлении

Определение 7.3.1. Коэффициенты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ разложения $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ называются *координатами* (или *компонентами*) элемента x линейного пространства Λ^n в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Заметим, что в силу теоремы 7.2.1. элемент линейного пространства Λ^n в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ однозначно представляется n -компонентным столбцом $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

Пусть в конкретном базисе $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ и $y = \sum_{i=1}^n \eta_i g_i$. Тогда из определения базиса и аксиом линейного пространства следуют правила выполнения операций с его элементами в координатной форме.

1°. Сравнение: два элемента в Λ^n равны тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n \xi_i g_i = x = y = \sum_{i=1}^n \eta_i g_i, \text{ или в координатной форме } \begin{cases} \xi_1 = \eta_1 \\ \xi_2 = \eta_2 \\ \dots \\ \xi_n = \eta_n \end{cases}.$$

2°. Сложение:

$$x + y = \sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i) g_i, \text{ или в матричной форме } \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \dots \\ \xi_n + \eta_n \end{pmatrix}.$$

3°. Умножение на число:

$$\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^n \xi_i g_i = \sum_{i=1}^n (\lambda \xi_i) g_i, \text{ или в матричной форме } \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \xi_1 \\ \lambda \xi_2 \\ \dots \\ \lambda \xi_n \end{pmatrix}.$$

Заметим, что полученные правила совпадают с определением действий с матрицами (столбцами).

В Λ^n базис может быть выбран не единственным способом и потому представляет практический интерес правило изменения координат элемента линейного пространства Λ^n при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в Λ^n даны два базиса: "старый" $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и "новый" $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, с соответствующими координатными разложениями элемента x : $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ и

$x = \sum_{i=1}^n \xi'_i g'_i$. Пусть, кроме того, известны разложения элементов "нового" базиса по

элементам "старого" $g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i$; $j = [1, n]$.

Определение 7.3.2. Матрица $\|S\|$, j -й ($\forall j = [1, n]$) столбец которой состоит из коэффициентов σ_{ij} координатных разложений элементов "нового" базиса по элементам "старого", называется *матрицей перехода* от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$.

Отметим, что это определение является обобщением определения 1.8.2.

Тогда справедлива

Теорема 7.3.1. Координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_n$ связаны соотношением

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j; \quad i = [1, n], \quad \text{где коэффициенты } \sigma_{ij} - \text{элементы матрицы}$$

$$\text{перехода } \|S\|, \text{ то есть } g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i, \quad j = [1, n].$$

Доказательство:

Пусть известно разложение векторов "нового" базиса по "старому"

$$g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i. \quad \text{Тогда справедливы равенства}$$

$$\sum_{i=1}^n \xi_i g_i = x = \sum_{j=1}^n \xi'_j g'_j = \sum_{j=1}^n \xi'_j \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j \right) g_i ,$$

или $\sum_{i=1}^n (\xi_i - \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j) g_i = 0$. Но если линейная комбинация линейно независимых элементов равна нулевому элементу, то она тривиальная. Откуда получаем, что

$$\xi_i = \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \xi'_j ; \quad \forall i = [1, n].$$

Теорема доказана.

Иначе говоря, если элементы "нового" базиса выражаются через элементы "старого" при помощи транспонированной матрицы перехода $\|S\|^T$, то координатный столбец в "старом" базисе равен произведению матрицы перехода на координатный столбец в

"новом" базисе. В матричной форме: если

$$\begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \dots \\ g'_n \end{pmatrix} = \|S\|^T \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}, \text{ то } \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \|S\| \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}.$$

7.4. Подмножества линейного пространства

Подпространство

Определение 7.4.1. Непустое множество Ω , образованное из элементов линейного пространства Λ , называется *подпространством* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in \Omega$ и любого числа λ :

$$1^\circ. \quad x + y \in \Omega$$

$$2^\circ. \quad \lambda x \in \Omega.$$

Замечание: Из определения 7.4.1. следует, что множество Ω само является линейным пространством, поскольку для него очевидно выполняются все аксиомы операций в линейном пространстве.

Пример
7.4.1.

- 1°. Множество радиус–векторов всех точек, лежащих на некоторой плоскости, проходящей через начало координат, является подпространством во множестве радиус–векторов всех точек трехмерного геометрического пространства.
- 2°. Множество всех многочленов, степени не выше, чем n , есть подпространство в линейном пространстве непрерывных функций $C[\alpha, \beta]$.
- 3°. В пространстве n –мерных столбцов совокупность решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными и с основной матрицей ранга r , образует подпространство размерности $n-r$.
- 4°. Подпространством любого линейного пространства будет:
 - а) само пространство;
 - б) множество, состоящее из одного нулевого элемента.

Определение
7.4.2.

Пусть даны два подпространства Ω_1 и Ω_2 линейного пространства Λ .

- 1°. Объединением подпространств Ω_1 и Ω_2 называется множество элементов $x \in \Lambda$, что $x \in \Omega_1$ либо $x \in \Omega_2$. Объединение подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 \cup \Omega_2$.
- 2°. Пересечением подпространств Ω_1 и Ω_2 называется множество элементов $x \in \Lambda$, принадлежащих Ω_1 и Ω_2 одновременно. Пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 \cap \Omega_2$.
- 3°. Суммой подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$, при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$. Сумма подпространств Ω_1 и Ω_2 обозначается $\Omega_1 + \Omega_2$.
- 4°. Прямой суммой подпространств Ω_1 и Ω_2 называется совокупность всех элементов $x_1 + x_2 \in \Lambda$, при условии, что $x_1 \in \Omega_1$ и $x_2 \in \Omega_2$ и $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{0\}$. Прямая сумма обозначается $\Omega_1 \oplus \Omega_2$.

Докажите самостоятельно, что справедлива

Теорема
7.4.1.

Как сумма, так и пересечение подпространств Ω_1 и Ω_2 в Λ есть также подпространство в Λ .

Теорема
7.4.2.

Размерность суммы подпространств Ω_1 и Ω_2 равна

$$\dim(\Omega_1 + \Omega_2) = \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2) - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

Доказательство:

1°. Пусть подпространство $\Omega_1 \cap \Omega_2$ имеет базис $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ и, соответственно, размерность k . Дополним этот базис элементами $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_l\}$ до базиса в Ω_1 и элементами $\{g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}$ до базиса в Ω_2 . В этом случае каждый элемент $x \in \Omega_1 + \Omega_2$ может быть разложен по системе элементов

$$\{g_1, g_2, \dots, g_k, g'_1, g'_2, \dots, g'_l, g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}.$$

2°. Покажем теперь, что набор элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_k, g'_1, g'_2, \dots, g'_l, g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}$ линейно независим в Λ .

Рассмотрим некоторую, равную нулевому элементу, линейную комбинацию этих элементов

$$\sum_{i=1}^l \xi'_i g'_i + \sum_{j=1}^k \xi_j g_j + \sum_{p=1}^m \xi''_p g''_p = 0. \quad (7.4.1.)$$

Заметим, что по построению $\tilde{x} = \sum_{p=1}^m \xi''_p g''_p \in \Omega_2$, но, с другой стороны, этот же

$$\text{элемент } \tilde{x} = \sum_{p=1}^m \xi''_p g''_p = -\left(\sum_{i=1}^l \xi'_i g'_i + \sum_{j=1}^k \xi_j g_j\right) \in \Omega_1.$$

Это означает, что $\tilde{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ и, следовательно, в равенстве 7.4.1. все $\xi'_i = 0, i = [1, l]$; $\xi''_p = 0, p = [1, m]$. А поскольку $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ — базис, то и все $\xi_j = 0, j = [1, k]$ и линейная комбинация, стоящая в левой части равенства 7.4.1., тривиальная. Следовательно, $\{g_1, g_2, \dots, g_k, g'_1, g'_2, \dots, g'_l, g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}$ — линейно независимая система элементов.

3°. Из пункта 2° следует, что $\{g_1, g_2, \dots, g_k, g'_1, g'_2, \dots, g'_l, g''_1, g''_2, \dots, g''_m\}$ является базисом в $\Omega_1 + \Omega_2$. Размерность подпространства $\Omega_1 + \Omega_2$ при этом равна

$$\begin{aligned} \dim(\Omega_1 + \Omega_2) &= l + k + m = (k + l) + (k + m) - k = \\ &= \dim(\Omega_1) + \dim(\Omega_2) - \dim(\Omega_1 \cap \Omega_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Линейная оболочка системы элементов

Определение 7.4.3. Совокупность всевозможных линейных комбинаций некоторого множества элементов $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ линейного пространства Λ , называется *линейной оболочкой* этого множества и обозначается $L\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Пример 7.4.2. Множество многочленов степени не выше, чем n , является линейной оболочкой набора одночленов $\{1, \tau, \tau^2, \dots, \tau^n\}$ в линейном пространстве непрерывных функций $C[\alpha, \beta]$.

Пусть задан набор элементов $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, порождающих линейную оболочку $L\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Тогда любой элемент этой линейной оболочки имеет вид $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ и справедлива

Теорема 7.4.3. **Множество всех элементов, принадлежащих линейной оболочке $L\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, является линейным пространством, размерности m , где m — максимальное число линейно независимых элементов во множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.**

Доказательство:

- 1°. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для совокупности элементов вида $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ (в предположении, что λ_i произвольные числа) справедливы все аксиомы определения 7.1.1., то есть рассматриваемая линейная оболочка является линейным пространством.
- 2°. Пусть максимальное число линейно независимых элементов в наборе $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ равно m ($m \leq k$). Без ограничения общности можно считать, что эти элементы есть $x_1, x_2, \dots, x_m$. В этом случае $x_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ji} x_i$; $j = [m+1, k]$ и любой элемент линейной оболочки может быть представлен в виде линейной комбинации элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$.
- 3°. Покажем теперь, что любой набор из l ($l > m$) элементов данной линейной оболочки будет линейно зависимым. Для этого выберем l элементов $y_1, y_2, \dots, y_l$, принадлежащих линейной оболочке, и выразим их через эле-

менты $x_1, x_2, \dots, x_m$, получим $y_j = \sum_{i=1}^m \beta_{ji} x_i$; $j = [1, l]$. Приравняем нулевому элементу произвольную линейную комбинацию выбранного набора $y_1, y_2, \dots, y_l$:

$$\sum_{j=1}^l \mu_j y_j = \sum_{j=1}^l \mu_j \sum_{i=1}^m \beta_{ji} x_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^l \beta_{ji} \mu_j \right) x_i = 0.$$

Поскольку элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ линейно независимы, то коэффициенты μ_i должны удовлетворять следующей однородной системе линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^l \beta_{ji} \mu_j = 0, \quad i = [1, m].$$

Но эта система имеет (по теореме 6.7.1.) $l - \operatorname{rg} \|\beta_{ji}\| \geq l - m > 0$ линейно независимых, а следовательно, ненулевых, решений, поскольку $\operatorname{rg} \|\beta_{ji}\| \leq m$. Принимая во внимание, что l и m натуральные числа, получаем $l - \operatorname{rg} \|\beta_{ji}\| \geq l - m \geq 1$, то есть существует нетривиальная линейная комбинация элементов $y_1, y_2, \dots, y_l$, равная 0.

Теорема доказана.

Гиперплоскость

Определение 7.4.4. Множество Γ , образованное из элементов вида $x + x_0$, где $x_0 \in \Lambda$ есть некоторый фиксированный элемент линейного пространства Λ , а x любой элемент некоторого подпространства $\Omega \subset \Lambda$, называется *гиперплоскостью* (или *линейным многообразием*) в линейном пространстве Λ .

Замечания: 1°. В общем случае гиперплоскость не является подпространством.
2°. Если $\dim(\Omega) = k$, то говорят о k -мерной гиперплоскости.

Задача 7.4.1. Показать, что если элементы x и y принадлежат некоторой гиперплоскости Γ , то этой же гиперплоскости будет принадлежать и элемент $z = \alpha x + (1 - \alpha)y$, где α — любое число.

7.5. Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства: множество многочленов $P_2(\tau)$ степени не выше, чем 2, и множество векторов трехмерного геометрического пространства.

Операции сложения многочленов и их умножения на число выглядят следующим образом:

$$(\xi_1 + \eta_1\tau + \kappa_1\tau^2) + (\xi_2 + \eta_2\tau + \kappa_2\tau^2) = (\xi_1 + \xi_2) + (\eta_1 + \eta_2)\tau + (\kappa_1 + \kappa_2)\tau^2$$

$$\lambda(\xi + \eta\tau + \kappa\tau^2) = (\lambda\xi) + (\lambda\eta)\tau + (\lambda\kappa)\tau^2$$

Аналогичные операции с трехмерными векторами в координатной форме, в свою очередь, записываются так:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \kappa_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \kappa_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ \eta_1 + \eta_2 \\ \kappa_1 + \kappa_2 \end{pmatrix}; \quad \lambda \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\xi \\ \lambda\eta \\ \lambda\kappa \end{pmatrix}.$$

Сравнивая эти записи, можно заметить, что природа данных множеств не играет роли, когда исследуются их характеристики, связанные только с операциями сложения и умножения на число.

Отмеченное свойство линейных пространств носит название *изоморфизма*. Более точно его описывает

Определение 7.5.1.

Два линейных пространства Λ_1 и Λ_2 называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $\hat{F}: \Lambda_1 \rightarrow \Lambda_2$ такое, что для $\forall x, y \in \Lambda_1$ и $\forall \lambda$

$$1^\circ. \hat{F}(x + y) = \hat{F}x + \hat{F}y;$$

$$2^\circ. \hat{F}(\lambda x) = \lambda \hat{F}x$$

Отображение $\hat{F}$ называется *изоморфизмом* линейных пространств Λ_1 и Λ_2 .

Напомним, что отображение $\hat{F}$ является *взаимно однозначным* (*биективностью* $\hat{F}$), если:

- а) разные элементы из Λ_1 имеют в Λ_2 разные образы (*инъективность* $\hat{F}$);
- б) каждый элемент из Λ_2 является образом некоторого элемента из Λ_1 (*сюръективность* $\hat{F}$).

Теорема 7.5.1. (об изоморфизме) **Два линейных пространства Λ_1 и Λ_2 изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.**

Доказательство:

Пусть $\dim(\Lambda_1) = \dim(\Lambda_2)$. Принимая правило отображения, при котором каждому элементу $x \in \Lambda_1$ ставится в соответствие элемент из Λ_2 , имеющий те же самые координаты, а также используя правила действий с элементами в координатном представлении, приходим к изоморфизму Λ_1 и Λ_2 .

Допустим, что $n = \dim(\Lambda_1) > \dim(\Lambda_2) = m$, где Λ_1 и Λ_2 изоморфны. Тогда некоторый набор n линейно независимых элементов из Λ_1 отображается в n элементов в Λ_2 , которые обязаны быть линейно зависимыми. Поскольку при изоморфизме нулевой элемент переходит в нулевой элемент, то мы приходим к противоречию с предположением о линейной независимости выбранных n элементов из Λ_1 .

Случай $n < m$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 7.5.2. **Число линейно независимых элементов в любом конечном наборе элементов из Λ^n равно рангу матрицы, столбцы которой содержат координаты элементов данного набора в некотором базисе.**

Доказательство:

Следует из изоморфности линейного пространства Λ^n и линейного пространства всех n -компонентных столбцов, а также из теоремы 6.5.3. (о ранге матрицы).

Следствие 7.5.1. **k элементов в Λ^n линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, столбцы которой содержат координаты этих элементов в некотором базисе, меньше, чем $\min\{n, k\}$.**

Следствие 7.5.2. **Матрица перехода невырожденная, то есть $\det \|S\| \neq 0$.**

Доказательство:

Предположим противное, $\det \|S\| = 0$, тогда $\operatorname{rg} \|S\| < n$ и столбцы матрицы перехода линейно зависимы. Но тогда будут зависимыми и элементы $g'_1, g'_2, \dots, g'_n$, что противоречит условию о том, что $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ – базис.

Следствие доказано.

Следствие 7.5.3. **Существует матрица $\|T\| = \|S\|^{-1}$, обратная матрице перехода $\|S\|$, называемая обратной матрицей перехода.**

Для обратной матрицы перехода справедливы соотношения $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix} = \|T\|^T \begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \dots \\ g'_n \end{pmatrix}$ и

$\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix} = \|T\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$, следующие из равенств $\begin{pmatrix} g'_1 \\ g'_2 \\ \dots \\ g'_n \end{pmatrix} = \|S\|^T \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \|S\| \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$ и из теоремы 7.3.1.

Следствие 7.5.4. **Пусть в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, в котором координатное представление элементов имеет вид $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$. Тогда каждая однородная линейная система m линейных уравнений с n неизвестными $\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = 0, j = [1, m]$ определяет некоторое подпространство Ω в Λ^n .**

Доказательство:

Следует из того, что данное подпространство Ω в силу теоремы 6.7.2. является линейной оболочкой нормальной фундаментальной системы решений системы линейных уравнений $\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = 0, j = [1, m]$, а Λ^n изоморфно линейному про-

странству n – компонентных столбцов $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

Следствие
7.5.5.

Пусть в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, в котором координатное представление элементов имеет вид $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$. Тогда каждая совместная неоднородная линейная система m линейных уравнений с n неизвестными $\sum_{i=1}^n \alpha_{ji} \xi_i = \beta_j$, $j = [1, m]$ определяет некоторую гиперплоскость Γ в Λ^n .

Доказательство:

Аналогично рассуждениям, приведенным для следствия 7.5.4.

Задача
7.5.1.

Проверить, что элементы g_1, g_2, g_3 образуют базис в Λ^3 и найти координатное представление элемента x в этом базисе, если в некотором

исходном базисе: $\|x\| = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|g_1\| = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|g_2\| = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\|g_3\| = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

1°. Для того, чтобы из элементов g_1, g_2, g_3 можно было образовать в Λ^3 базис, необходимо и достаточно (определение 7.2.2.), чтобы эти элементы были линейно независимыми. По следствию 7.5.1. данное

условие в Λ^3 равносильно неравенству $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 3$, которое

имеет место, поскольку $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$.

2°. Обозначим искомые координаты элемента x через ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Тогда $x = \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \xi_3 g_3$, или в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3°. Используя условие равенства двух элементов в координатной форме, получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 1 \\ \xi_1 + \xi_2 = 3 \\ \xi_1 + \xi_3 = 1 \end{cases},$$

решив которую по правилу Крамера (теорема 6.4.1.) или методом Гаусса (п.6.8.), получим $\xi_1 = 2, \xi_2 = 1, \xi_3 = -1$. Откуда следует, что элемент x в базисе, образованном из элементов g_1, g_2, g_3 , имеет

координатное представление $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Задача
7.5.2.

Найти матрицу перехода от базиса в Λ^3 , образованного элементами $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$, к базису $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$, если в некотором исходном базисе:

$$\|g'_1\| = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|g'_2\| = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|g'_3\| = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|g''_1\| = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \|g''_2\| = \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{и}$$

$$\|g''_3\| = \begin{pmatrix} 22 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1°. Пусть $\|x\|$, $\|x'\|$ и $\|x''\|$ обозначают координатные столбцы элемента x в базисах исходном, $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$ и $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$ соответственно. Тогда (по определению 7.3.2. и в силу теоремы 7.3.1.) имеют место равенства

$$\|x\| = \|G\| \|x'\| \quad \text{и} \quad \|x\| = \|F\| \|x''\|,$$

где матрицы $\|G\|$ и $\|F\|$ составлены из координатных столбцов базисных элементов g'_1, g'_2, g'_3 и g''_1, g''_2, g''_3 , то есть

$$\|G\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \|F\| = \begin{vmatrix} 7 & 16 & 22 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 8 \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $\|S\|$ матрицу перехода от базиса $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$ к базису $\{g''_1, g''_2, g''_3\}$, для которой $\|x'\| = \|S\| \|x''\|$. Но из условий $\|x\| = \|G\| \|x'\|$ и $\|x\| = \|F\| \|x''\|$ следует, что $\|x'\| = \|G\|^{-1} \|F\| \|x''\|$, поскольку матрица $\|G\|$ очевидно невырожденная.

Тогда $\|S\| \|x''\| = \|G\|^{-1} \|F\| \|x''\|$ для любого элемента $\|x''\|$, а это, в силу леммы 5.1.2., означает, что искомая матрица перехода $\|S\| = \|G\|^{-1} \|F\|$.

2°. Подсчитав произведение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} 7 & 16 & 22 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

используя, например, схему описанную в п.6.8. для выражений вида $\|G\|^{-1} \|F\|$, получаем

$$\|S\| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Задача
7.5.3.

В линейном пространстве многочленов степени не выше чем 3, найти базис и размерность пересечения двух линейных оболочек элементов

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= 1 + 2\tau + \tau^2 + 3\tau^3 & y_1(\tau) &= 1 + 4\tau - \tau^2 + 5\tau^3 \\ x_2(\tau) &= -1 + 8\tau - 6\tau^2 + 5\tau^3 & \text{и} & & y_2(\tau) &= 3 - 2\tau + 6\tau^2 + 3\tau^3 \\ x_3(\tau) &= 10\tau - 5\tau^2 + 8\tau^3 & & & y_3(\tau) &= 4 + 2\tau + 5\tau^2 + 8\tau^3. \end{aligned}$$

Решение:

1°. По теореме 7.4.1. каждая из линейных оболочек является подпространством. Первое из них Π_1 образовано элементами вида $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, а второе — Π_2 , соответственно элементами $y = \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + \mu_3 y_3$. Составим однородные системы линейных уравнений, задающих эти подпространства (см. следствие 7.5.4.).

Пусть каждое из уравнений этих систем имеет вид

$$\|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда, воспользовавшись изоморфизмом между Π_1 и пространством четырехкомпонентных столбцов вида

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — произвольные числа, приходим к условию

$$\|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \|\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\| \left(\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = 0,$$

которое будет выполняться при любых $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, если числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ образуют решение следующей системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 8\alpha_2 - 6\alpha_3 + 5\alpha_4 = 0 \\ 10\alpha_2 - 5\alpha_3 + 8\alpha_4 = 0 \end{cases}.$$

Решив эту систему, например, по схеме описанной в п.6.8., получим общее решение в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \kappa_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \kappa_2 \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

откуда заключаем, что существует два независимых набора иско-
мых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и, следовательно, однородная система ли-
нейных уравнений, задающая подпространство Π_1 имеет вид

$$\begin{cases} -4\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 & = 0 \\ -7\xi_1 - 4\xi_2 & + 5\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Аналогично строим однородную систему линейных уравнений, за-
дающую Π_2 :

$$\begin{cases} -22\xi_1 + 9\xi_2 + 14\xi_3 & = 0 \\ -11\xi_1 - 6\xi_2 & + 7\xi_4 = 0. \end{cases}$$

Наконец, подпространство $\Pi_1 \cap \Pi_2$ будет задаваться системой

$$\begin{cases} -4\xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 & = 0 \\ -7\xi_1 - 4\xi_2 & + 5\xi_4 = 0 \\ -22\xi_1 + 9\xi_2 + 14\xi_3 & = 0 \\ -11\xi_1 - 6\xi_2 & + 7\xi_4 = 0, \end{cases}$$

общее решение которой есть

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \sigma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, для $\Pi_1 \cap \Pi_2$ $\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = 1$ с базисом, со-

стоящим из одного элемента $\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Раздел 8

ЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

8.1. Линейные операторы

Определение 8.1.1. Пусть каждому элементу x линейного пространства Λ поставлен в соответствие единственный элемент y линейного пространства Λ^* . Тогда говорят, что в Λ задан *оператор*, действующий в Λ и имеющий значения в Λ^* , обозначаемый $y = \hat{A}x$.

При этом элемент y называется *образом* элемента x , а элемент x — *прообразом* элемента y .

Как и в п.5.2., операторы подразделяются на *отображения*, если $\Lambda^* \not\subseteq \Lambda$, и *преобразования*, если $\Lambda^* \subseteq \Lambda$. В дальнейшем, за исключением особо оговоренных случаев, будет предполагаться, что $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, то есть, мы будем рассматривать преобразования, действующие в Λ .

Определение 8.1.2. Оператор $y = \hat{A}x$ называется *линейным*, если для любых $x, x_1, x_2 \in \Lambda$ и любого числа λ имеют место равенства:

$$1^\circ. \hat{A}(x_1 + x_2) = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 \text{ и}$$

$$2^\circ. \hat{A}(\lambda x) = \lambda \hat{A}x.$$

Пример 8.1.1. 1°. В пространстве 2-мерных векторов линейным оператором является правило

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

связывающее вектор-прообраз $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ с вектором-образом

$$y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}.$$

2°. В пространстве бесконечно дифференцируемых функций линейным оператором является операция дифференцирования, ставящая в соответствие каждому элементу этого пространства его производную функцию.

3°. В пространстве многочленов $P_n(\tau)$ линейным оператором является операция умножения многочлена на независимую переменную τ .

Задача
8.1.1.

Доказать, что операторы в примерах 1°, 2° и 3° являются линейными.

Задача
8.1.2.

Является ли линейным оператор $\hat{A}$, ставящий каждому элементу $x \in \Lambda$ в соответствие фиксированный элемент $a \in \Lambda$?

Решение:

Если $a = 0$, то $\hat{A}$ — линейный оператор, действующий в Λ .

8.2. Действия с линейными операторами

Определение
8.2.1.

Линейные операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называются *равными*, если $\forall x \in \Lambda: \hat{A}x = \hat{B}x$. Равенство операторов обозначается как $\hat{A} = \hat{B}$.

Суммой линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор $\hat{C}$, обозначаемый $\hat{A} + \hat{B}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $\hat{A}x + \hat{B}x$.

Лемма
8.2.1.

Сумма двух линейных операторов является линейным оператором.

Доказательство:

Пусть $x, y, z \in \Lambda$ и $x = \lambda y + \mu z$, а $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{C}(\lambda y + \mu z) &= \hat{A}(\lambda y + \mu z) + \hat{B}(\lambda y + \mu z) = \\ &= \lambda \hat{A}y + \mu \hat{A}z + \lambda \hat{B}y + \mu \hat{B}z = \\ &= \lambda (\hat{A}y + \hat{B}y) + \mu (\hat{A}z + \hat{B}z) = \lambda \hat{C}y + \mu \hat{C}z. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение 8.2.2. Нулевым оператором $\hat{O}$ называется оператор, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие нулевой элемент этого линейного пространства.

Определение 8.2.3. Оператором, противоположным оператору $\hat{A}$, называется оператор, обозначаемый $-\hat{A}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $(-\hat{A}x)$.

Заметим, что нулевой и противоположный операторы являются линейными.

Легко проверяются следующие равенства для линейных операторов:

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} &= \hat{B} + \hat{A}; \\ (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{C} &= \hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}); \\ \hat{A} + \hat{O} &= \hat{A}; \quad \hat{A} + (-\hat{A}) = \hat{O}.\end{aligned}$$

Определение 8.2.4. Произведением линейного оператора $\hat{A}$ на число λ называется оператор, обозначаемый $\lambda\hat{A}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $\lambda(\hat{A}x)$.

Лемма 8.2.2. Произведение линейного оператора на число является линейным оператором, для которого выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\hat{A}) &= (\alpha\beta)\hat{A}; \quad 1\hat{A} = \hat{A}; \\ (\alpha + \beta)\hat{A} &= \alpha\hat{A} + \beta\hat{A}; \\ \alpha(\hat{A} + \hat{B}) &= \alpha\hat{A} + \alpha\hat{B}.\end{aligned}$$

Доказательство:

Утверждение леммы проверяется непосредственно. Например, для третьего равенства имеем $\forall x \in \Lambda: (\alpha + \beta)\hat{A}x = \hat{A}((\alpha + \beta)x) = \hat{A}(\alpha x + \beta x) = \alpha\hat{A}x + \beta\hat{A}x$.

Теорема 8.2.1. Множество всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве Λ , является линейным пространством.

Доказательство:

Следует из определений 7.1.1., 8.2.1. – 8.2.4. и лемм 8.2.1., 8.2.2.

Определение 8.2.5. Произведением линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ называется оператор, обозначаемый $\hat{A}\hat{B}$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие элемент $\hat{A}(\hat{B}x)$.

Теорема 8.2.2. Произведение линейных операторов является линейным оператором, для которого справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\hat{A}(\hat{B}\hat{C}) &= (\hat{A}\hat{B})\hat{C} \quad ; \\ \hat{A}(\hat{B} + \hat{C}) &= \hat{A}\hat{B} + \hat{A}\hat{C} \quad ; \\ (\hat{A} + \hat{B})\hat{C} &= \hat{A}\hat{C} + \hat{B}\hat{C} \quad .\end{aligned}$$

Доказательство:

Докажем вначале линейность произведения линейных операторов. Действию —

$$\hat{A}\hat{B}(\alpha x + \beta y) = \hat{A}(\alpha \hat{B}x + \beta \hat{B}y) = \alpha \hat{A}(\hat{B}x) + \beta \hat{A}(\hat{B}y) = \alpha (\hat{A}\hat{B})x + \beta (\hat{A}\hat{B})y .$$

Проверим теперь сочетательный закон для произведения линейных операторов. Имеем

$$(\hat{A}(\hat{B}\hat{C}))x = \hat{A}(\hat{B}\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)) ,$$

но, с другой стороны,

$$((\hat{A}\hat{B})\hat{C})x = \hat{A}\hat{B}(\hat{C}x) = \hat{A}(\hat{B}(\hat{C}x)) ,$$

что и требовалось показать. Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично.

Теорема доказана.

Замечание: В общем случае произведение линейных операторов не обладает перестановочным свойством (или, иначе говоря, операторы не коммутируют), то есть, $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$.

Определение 8.2.6. Оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ называется коммутатором операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Коммутатор коммутирующих операторов есть нулевой оператор.

Задача
8.2.1.

В линейном пространстве алгебраических многочленов $P_n(\tau)$ найти коммутатор для операторов: $\hat{A}$, ставящего в соответствие многочлену его производную функцию, и $\hat{B}$ — оператора умножения многочлена на независимую переменную.

Решение:

Построим оператор $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$. Для любого $P_n(\tau)$ имеем:

$$\begin{aligned}\hat{A}P_n(\tau) &= \frac{d}{d\tau} P_n(\tau) = \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1} \\ \hat{B}P_n(\tau) &= \tau \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1}.\end{aligned}$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned}\hat{B}(\hat{A}P_n(\tau)) &= \tau \left(\sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^n k \alpha_k \tau^k = \sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^k \\ \hat{A}(\hat{B}P_n(\tau)) &= \frac{d}{d\tau} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^{k+1} \right) = \sum_{k=0}^n (k+1) \alpha_k \tau^k\end{aligned}$$

и окончательно

$$(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})P_n(\tau) = \left(\sum_{k=0}^n (k+1) \alpha_k \tau^k \right) - \left(\sum_{k=0}^n k \alpha_k \tau^k \right) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k = P_n(\tau).$$

Следовательно, данные линейные операторы не коммутируют.

В рассмотренной выше задаче 8.2.1. оказалось, что действие оператора $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ на любой элемент линейного пространства многочленов не приводит к изменению этого элемента. Введем для такого оператора специальное наименование:

Определение 8.2.7. Оператор $\hat{E}$ называется *единичным* (или *тождественным*) оператором, если каждому элементу линейного пространства $\forall x \in \Lambda$ он ставит в соответствие тот же самый элемент, то есть $\hat{E}x = x$; $\forall x \in \Lambda$.

Докажите самостоятельно справедливость соотношений: $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A} = \hat{A}$, $\forall \hat{A}$, а также линейность и единственность оператора $\hat{E}$.

Определение 8.2.8. Оператор $\hat{B}$ называется *обратным* оператору $\hat{A}$ и обозначается $\hat{A}^{-1}$, если $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} = \hat{E}$.

Пример 8.2.1.

В линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на $[\alpha, \beta]$ производную любого порядка и удовлетворяющих условиям $f^{(k)}(\alpha) = 0; k = 0, 1, 2, \dots$, оператор дифференцирования $\hat{A}f = \frac{df}{d\tau}$ и $\hat{B}f = \int_{\alpha}^{\tau} f(\sigma) d\sigma$ — оператор интегрирования с переменным верхним пределом, являются взаимно обратными.

Действительно,

$$\hat{A}\hat{B}f = \frac{d}{d\tau} \int_{\alpha}^{\tau} f(\sigma) d\sigma = f(\tau) = \hat{E}f \quad \text{и}$$

$$\hat{B}\hat{A}f = \int_{\alpha}^{\tau} \frac{df}{d\sigma} d\sigma = f(\tau) - f(\alpha) = f(\tau) = \hat{E}f.$$

Замечания:

- 1°. Не для всякого линейного оператора существует обратный оператор. Например, нулевой оператор $\hat{O}$ не имеет обратного. Действительно, пусть $\hat{O}x = 0$ при всех $\forall x \in \Lambda$, тогда для любого $\hat{B}$ имеет место $(\hat{B}\hat{O})x = \hat{B}(\hat{O}x) = 0, \forall x \in \Lambda$, и, следовательно, равенство $\hat{B}\hat{O} = \hat{E}$ не выполняется ни при каком $\hat{B}$.
- 2°. Обратный оператор, если существует, то единственен. (Покажите это самостоятельно, используя как аналог доказательство леммы 5.1.1.)
- 3°. В случае бесконечномерного линейного пространства из условия $\hat{A}\hat{B} = \hat{E}$ может не следовать выполнение условия $\hat{B}\hat{A} = \hat{E}$, что имеет, например, место в пространстве многочленов $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$ для пары операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, где $\hat{B}$ есть оператор умножения многочлена на независимую переменную, а оператор $\hat{A}$ многочлену $\sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$ ставит в соответствие многочлен $\sum_{k=1}^n \alpha_k \tau^{k-1}$.

8.3. Координатное представление линейных операторов

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и линейный оператор $\hat{A}$ с областью значений в Λ^n . Было показано, что $\forall x \in \Lambda^n$ существует единственное разложение $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$. Найдем разложение элемента $\hat{A}x$ по данному базису:

$\hat{A}x = \hat{A}(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i) = \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{A}g_i$, для чего достаточно разложить по базису элементы $\hat{A}g_i$, получив, например, $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k$, $\forall i = [1, n]$.

Определение 8.3.1. Матрица, столбцы которой образованы компонентами элементов $\hat{A}g_i$,

$$\|\hat{A}\|_g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

называется *матрицей линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in \Lambda^n$* .

Отметим, что такую матрицу можно поставить в соответствие, и притом единственным образом, каждому линейному оператору в Λ^n .

При помощи матрицы линейного оператора можно находить координаты образов элементов линейного пространства.

Пусть координатное разложение образа элемента x имеет вид: $\hat{A}x = \sum_{k=1}^n \eta_k g_k$. С другой стороны,

$$\hat{A}x = \sum_{i=1}^n \xi_i \hat{A}g_i = \sum_{i=1}^n \xi_i \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_i \alpha_{ki} g_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (\alpha_{ki} \xi_i) g_k.$$

Сравнивая оба полученных представления для $\hat{A}x$ и используя линейную независимость элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, приходим к выражению $\eta_k = \sum_{i=1}^n \alpha_{ki} \xi_i$, $\forall k = [1, n]$. В матричной форме полученные соотношения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}g_1 \\ \hat{A}g_2 \\ \dots \\ \hat{A}g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \hat{A}g_1 \\ \hat{A}g_2 \\ \dots \\ \hat{A}g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{A} \\ \dots \\ \hat{A} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{A} \\ \dots \\ \hat{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \quad (8.3.1.)$$

Полученный результат можно выразить следующим образом:

Теорема
8.3.1.

Между множеством всех линейных операторов, заданных в линейном пространстве Λ , и множеством всех матриц размера $n \times n$ имеется взаимно однозначное соответствие.

Доказательство:

Выше было показано, что каждому линейному оператору в Λ^n можно сопоставить матрицу размера $n \times n$.

С другой стороны, соотношение $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ может быть

принято за определение некоторого оператора, и для завершения доказательства достаточно заметить, что линейность этого оператора следует из правил операций с матрицами.

Теорема доказана.

Пример
8.3.1.

1°. В трехмерном векторном пространстве с ортонормированным базисом рассмотрим линейный оператор, ортогонально проектирующий радиус-векторы на плоскость Oxy . Поскольку в данном случае

$$\begin{aligned} \hat{A} \vec{g}_1 &= 1\vec{g}_1 + 0\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \\ \hat{A} \vec{g}_2 &= 0\vec{g}_1 + 1\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3, \text{ то } \|\hat{A}\|_g = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \hat{A} \vec{g}_3 &= 0\vec{g}_1 + 0\vec{g}_2 + 0\vec{g}_3 \end{aligned}$$

Действия с линейными операторами в матричной форме

Введенные в п.1.1. и п.5.1. операции для матриц позволяют описать в конкретном базисе действия с линейными операторами в следующей форме.

1°. Сложение операторов: $\|\hat{A} + \hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g + \|\hat{B}\|_g.$

Действительно, из $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k$ и $\hat{B}g_i = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} g_k$ следует, что

$$(\hat{A} + \hat{B})g_i = \hat{A}g_i + \hat{B}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k + \sum_{k=1}^n \beta_{ki} g_k = \sum_{k=1}^n (\alpha_{ki} + \beta_{ki}) g_k.$$

2°. Умножение оператора на число: $\|\lambda \hat{A}\|_g = \lambda \|\hat{A}\|_g.$

Из $\hat{A}g_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} g_k$ для любого числа λ находим, что

$$(\lambda \hat{A})g_i = \hat{A}(\lambda g_i) = \sum_{k=1}^n (\lambda \alpha_{ki}) g_k.$$

3°. Произведение операторов: $\|\hat{A}\hat{B}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{B}\|_g.$

По определению матрицы линейного оператора имеем

$$(\hat{A}\hat{B})g_i = \hat{A}(\hat{B}g_i) = \hat{A}\left(\sum_{k=1}^n \beta_{ki} g_k\right) = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \hat{A}g_k = \sum_{k=1}^n \beta_{ki} \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} g_j = \sum_{j=1}^n \kappa_{ji} g_j,$$

где $\kappa_{ji} = \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} \beta_{ki}$, что совпадает с определением произведения матриц

5.1.1.

4°. Обращение операторов: $\|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{A}\|_g^{-1}$.

Будем предполагать, что обратный оператор существует. Поскольку из определения 8.2.8. следует, что $\hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{E}$, принимая во внимание результат пункта 3°, получаем, что искомое матричное представление $\|\hat{A}^{-1}\|_g$ оператора $\hat{A}^{-1}$ должно удовлетворять соотношениям $\|\hat{A}^{-1}\|_g \|\hat{A}\|_g = \|\hat{A}\|_g \|\hat{A}^{-1}\|_g = \|\hat{E}\|_g$, то есть являться обратной матрицей к матрице $\|\hat{A}\|_g$.

Следствие 8.3.1. **Размерность линейного пространства линейных операторов, действующих в Λ^n , равна n^2 .**

Доказательство:

Из теоремы 8.3.1. и правил действий с линейными операторами в матричной форме следует изоморфизм линейного пространства линейных операторов и линейного пространства всех матриц размера $n \times n$. Но тогда, по теореме 7.5.1. (об изоморфизме), их размерности равны.

Следствие доказано.

Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Выясним, как меняется матрица линейного оператора при замене базиса. Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, связанные матрицей перехода

$\|S\| = \|\sigma_{ji}\|$, то есть $g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i$ для всех $j = [1, n]$. Тогда справедлива

Теорема 8.3.2. **Матрица линейного оператора $\|\hat{A}\|_{g'}$ в базисе $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ связана с матрицей этого же оператора $\|\hat{A}\|_g$ в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ соотношением**

$$\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|.$$

Доказательство:

По теореме 7.3.1. при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ компоненты элемента — прообраза оператора $\hat{A}$ в этих базисах связаны

ством $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \|S\| \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$, а компоненты образа — $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \|S\| \begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \dots \\ \eta'_n \end{pmatrix}$.

В рассматриваемых базисах образы и прообразы элементов связаны соотноше —

ниями $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \|\hat{A}\|_g \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \dots \\ \eta'_n \end{pmatrix} = \|\hat{A}\|_{g'} \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$, но поскольку матрица перехода

имеет обратную, то из выписанных соотношений последовательно получаем

$$\begin{pmatrix} \eta'_1 \\ \eta'_2 \\ \dots \\ \eta'_n \end{pmatrix} = \|S\|^{-1} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\| \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}.$$

Наконец, приходим к равенству $(\|\hat{A}\|_{g'} - \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|) \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$, из которого,

в силу произвольности столбца $\begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \dots \\ \xi'_n \end{pmatrix}$ и леммы 5.1.2., следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

Следствие
8.3.2.

Определитель матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Из утверждения теоремы 8.3.2. следует $\det \|\hat{A}\|_{g'} = \det (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|)$, но поскольку

$$\det (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|) = (\det \|S\|^{-1}) (\det \|\hat{A}\|_g) (\det \|S\|) \text{ и } \det \|S\|^{-1} = \frac{1}{\det \|S\|},$$

$$\text{а } \det(\|S\|^{-1}\|S\|) = \det\|S\|^{-1} \det\|S\| = \det\|E\| = 1, \text{ то окончательно получаем, что } \det\|\hat{A}\|_{g'} = \det\|\hat{A}\|_g.$$

Следствие доказано.

Отметим, наконец, что в силу теоремы 8.3.2. в любом базисе нулевой оператор будет иметь нулевую матрицу, а единичный оператор — единичную.

8.4. Область значений линейного оператора

Трактуя линейный оператор, действующий в линейном пространстве, как некое обобщение понятия функции, естественно рассмотреть вопрос об области определения и области значений линейных операторов.

Напомним, что согласно определению 5.2.1. под областью значений линейного оператора $\hat{A}$ понимается множество образов всех элементов $x \in \Lambda$, то есть элементов вида $\hat{A}x$.

Очевидно, что для любого линейного оператора его область определения совпадает с Λ . Ответ на вопрос "Что представляет собой область значений линейного оператора?" дает

Теорема
8.4.1.

Пусть $\hat{A}$ — линейный оператор, действующий в линейном пространстве Λ . Тогда

1°. Множество элементов $\hat{A}x$, $\forall x \in \Lambda$ есть подпространство в Λ .

2°. Если, кроме того, $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то размерность этого подпространства равна $\text{rg}\|\hat{A}\|_g$.

Доказательство:

Пусть Λ^* есть множество элементов вида $\hat{A}x$ и пусть $y_1, y_2 \in \Lambda^*$. Тогда существуют $x_1 \in \Lambda$ и $x_2 \in \Lambda$ такие, что $\hat{A}x_1 = y_1$ и $\hat{A}x_2 = y_2$. По свойству линейности оператора $\hat{A}$ имеем: $y_1 + y_2 = \hat{A}x_1 + \hat{A}x_2 = \hat{A}(x_1 + x_2) \in \Lambda^*$. Аналогично $\lambda y = \lambda \hat{A}x = \hat{A}(\lambda x) \in \Lambda^*$ и потому Λ^* есть подпространство Λ .

Пусть теперь $\Lambda = \Lambda^n$ с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Поскольку каждый элемент $x \in \Lambda$ есть линейная комбинация базисных элементов, то, соответственно, в силу линейности каждый элемент из области значений $\hat{A}$ есть та же линейная комби—

нация элементов $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n$, то есть Λ^* есть линейная оболочка множества $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n\}$.

Выделим из множества $\{\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n\}$ максимальное подмножество линейно независимых элементов, и пусть число их оказалось равным k . Тогда, применяя теорему 7.4.1., приходим к заключению, что размерность Λ^* есть k , а из теоремы 7.5.2. следует, что и $\operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g = k$.

Теорема доказана.

Определение 8.4.1. Рангом линейного оператора $\hat{A}$ называется размерность его области значений.

Следствие 8.4.1. Ранг линейного оператора $\hat{A}$ равен $\operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g \leq n$ и не зависит от выбора базиса.

Следствие 8.4.2. Размерность области значений линейного оператора $\hat{A}$, действующего на некотором подпространстве линейного пространства $\Lambda^* \subseteq \Lambda$, не превосходит $\dim(\Lambda^*)$.

Доказательство:

Поскольку подпространство Λ^* является линейным пространством, то к нему применима теорема 8.4.1.

Следствие доказано.

Теорема 8.4.2. Ранг произведения линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ не превосходит ранга каждого из этих операторов.

Доказательство:

Рассмотрим область значений линейного оператора $\hat{A}\hat{B}$. По следствию 8.4.2. это подпространство имеет размерность не большую, чем размерность области значений оператора $\hat{B}$.

С другой стороны, область значений оператора $\hat{A}\hat{B}$ содержится в области значений оператора $\hat{A}$ и, следовательно, размерность области значений $\hat{A}\hat{B}$ не превосходит размерности области значений $\hat{A}$.

Теорема доказана.

Теорема
8.4.3.

Если квадратная матрица $\|A\|$ невырожденная, то для любой квадратной матрицы $\|B\|$ того же размера

$$\operatorname{rg}(\|A\| \|B\|) = \operatorname{rg}(\|B\| \|A\|) = \operatorname{rg} \|B\|.$$

Доказательство:

Будем рассматривать матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ как координатные представления линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ в некотором базисе.

Если $\det \|A\| \neq 0$, то существует $\|A\|^{-1}$ и в силу теоремы 8.4.2. имеем, с одной стороны, $\operatorname{rg}(\|A\| \|B\|) \leq \operatorname{rg} \|B\|$, но с другой

$$\operatorname{rg} \|B\| = \operatorname{rg}(\|A\|^{-1} \|A\| \|B\|) \leq \operatorname{rg}(\|A\| \|B\|).$$

Теорема доказана.

Замечания:

1°. Если матрица $\|B\|$ не квадратная, но существует одно из произведений $\|A\| \|B\|$ или $\|B\| \|A\|$, то при $\det \|A\| \neq 0$ также верны равенства $\operatorname{rg}(\|A\| \|B\|) = \operatorname{rg} \|B\|$ или, соответственно, $\operatorname{rg}(\|B\| \|A\|) = \operatorname{rg} \|B\|$. В этом можно убедиться, заменив матрицу $\|B\|$ матрицей $\|B\|^*$, являющейся дополнением нулевыми столбцами или нулевыми строками $\|B\|$ до квадратной так, чтобы существовали $\|A\| \|B\|^*$ или $\|B\|^* \|A\|$, ибо очевидно, что $\operatorname{rg} \|B\|^* = \operatorname{rg} \|B\|$.

2°. Ранг произведения матриц может быть меньше рангов каждого из сомножителей. Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Другой важной характеристикой линейного оператора является совокупность элементов линейного пространства Λ , называемая *ядром* линейного оператора и обозначаемая $\ker \hat{A}$.

Определение 8.4.2. Ядро линейного оператора $\hat{A}$ состоит из элементов $x \in \Lambda$ таких, что $\hat{A}x = 0$.

Теорема 8.4.4. Если $\Lambda = \Lambda^n$ и $\operatorname{rg} \hat{A} = r$, то $\ker \hat{A}$ есть подпространство и $\dim(\ker \hat{A}) = n - r$.

Доказательство:

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для $\ker \hat{A}$ выполняются условия определения 7.4.1.

Пусть в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\|\hat{A}\|_g = \|\alpha_{ij}\|$. По следствию 8.4.1. $\operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g = r$ для любого базиса. Тогда в координатной форме

условие принадлежности некоторого элемента $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ ядру оператора $\hat{A}$ имеет

$$\text{вид } \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0; \quad i = [1, n].$$

С другой стороны, каждое решение однородной системы линейных уравнений $\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j = 0; \quad i = [1, n]$ будет являться элементом ядра оператора $\hat{A}$. Поэтому размерность ядра есть максимальное число линейно независимых решений этой системы уравнений, которое, согласно теореме 6.7.1., равно $n - \operatorname{rg} \|\hat{A}\|_g = n - r$.

Теорема доказана.

Линейные отображения

Как было отмечено в п.8.1., в тех случаях, когда область значений оператора не принадлежит области определения, следует говорить об отображении.

В п.7.5. было использовано понятие взаимно однозначного отображения, называемого иногда *биекцией*. Для отображений также выделяются специальные случаи так называемых *инъективных* и *сюръективных* отображений. Рассмотрим эти случаи подробнее.

Определение 8.4.3. Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω в множество Θ называется *инъективным* (или *инъекцией*), если из условия $\hat{A}x_1 = \hat{A}x_2$ вытекает $x_1 = x_2$, $x_1, x_2 \in \Omega$.

В случае инъекции множество всех значений оператора $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ может не совпадать с Θ .

Определение 8.4.4. Отображение $y = \hat{A}x$, $x \in \Omega$, $y \in \Theta$ множества Ω на множество Θ называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если каждый элемент из Θ имеет прообраз в Ω .

В случае сюръекции прообраз любого элемента из Θ всегда существует в Ω , но, вообще говоря, он не единственен.

В таблице 8.4.1. приведены иллюстративные примеры отображений различных типов.

Тип отображения	Инъективное	Неинъективное
Сюръективное		
Несюръективное		

Таблица 8.4.1.

Рассмотрим теперь линейный оператор $\hat{A}$, отображающий элементы Λ^n в элементы Λ^m , то есть отображение, для которого $\Omega \subseteq \Lambda^n$, а $\Theta \subseteq \Lambda^m$. Допустим, что

$\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ есть базис в Λ^n , а $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ — базис в Λ^m . Тогда можно сделать следующее обобщение определения 8.3.1.

Определение 8.4.5. Матрица $\|\hat{A}\|_{gf}$ размера $m \times n$, столбцы которой есть координатные разложения элементов $\hat{A}g_1, \hat{A}g_2, \dots, \hat{A}g_n$ по базису $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$, называется *матрицей линейного отображения $\hat{A}$ в базисах $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$* .

Отметим, что в конечномерном случае сюръективность отображения означает выполнение условия $\Theta = \Lambda^m$, а инъективность — условия $\ker \hat{A} = \{0\}$. Отсюда следует, что ранг матрицы линейного оператора, являющегося сюръективным отображением, равен числу ее строк, а ранг матрицы инъективного отображения равен числу ее столбцов. Наконец, отображение, являющееся одновременно и инъективным и сюръективным, будет взаимно однозначным — или биекцией (см. определение 5.2.4.).

Из определения 8.4.5. следует, что матрица линейного отображения зависит как от выбора базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, так и от выбора базиса $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Правило изменения этой матрицы при замене базисов дает

Теорема 8.4.5. Матрица линейного отображения $\hat{A}$ в базисах $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ и $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$ $\|\hat{A}\|_{g'f'}$ связана с матрицей этого отображения в базисах $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ $\|\hat{A}\|_{gf}$ соотношением

$$\|\hat{A}\|_{g'f'} = \|F\|^{-1} \|\hat{A}\|_{gf} \|G\|,$$

где $\|F\|$ — матрица перехода от базиса $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ к базису $\{f'_1, f'_2, \dots, f'_m\}$, а $\|G\|$ — матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$.

Доказательство: Аналогично доказательству теоремы 8.3.2.

В общем случае, исследование свойств оператора, у которого область значений не содержится в области его определения, может оказаться достаточно сложной задачей. Если же область значений имеет конечную размерность, не превышающую размерность области определения, то, пользуясь теоремой 7.5.1. (об изоморфизме), можно попытаться свести исследование отображения к исследованию преобразования, установив изоморфизм между областью значений отображения и некоторым подпространством области его определения.

Пример
8.4.1.

1°. Оператор $\overset{\Lambda}{\text{Pr}}$, ставящий в соответствие каждой точке трехмерного геометрического пространства ее ортогональную проекцию на некоторую фиксированную прямую, проходящую через начало координат, очевидно, есть отображение $\Lambda^3 \rightarrow \Lambda^1$, которое, однако, можно рассматривать и как преобразование трехмерного пространства в одномерное подпространство.

Отметим, что, хотя в данном случае и отображение и преобразование реализуют геометрически одну и ту же функцию, вид задающих их матриц может быть различным.

Например, пусть в ортонормированной системе координат $\{\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ прямая, на которую выполняется ортогональное проектирование, задана направляющим вектором $\|1 \ 1 \ 1\|^T$.

Несложно убедиться, что при этом радиус-вектор ортогональной

проекции точки $\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ будет иметь вид $\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \\ \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \\ \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$, то есть мат-

рица данного преобразования имеет вид $\|\overset{\Lambda}{\text{Pr}}\|_e = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Но, с

другой стороны, приняв $\vec{e}_1^*$ нормированный направляющий вектор данной прямой за базисный в Λ^1 , получим, согласно определению 8.4.5., матрицу отображения в виде $\|\overset{\Lambda}{\text{Pr}}\|_{ee^*} = \frac{1}{\sqrt{3}} \|1 \ 1 \ 1\|$.

2°. Пусть линейный оператор $\hat{A}$ ставит в соответствие каждой матрице второго порядка $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ двумерный столбец вида $\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} \end{vmatrix}$.

Исследование свойств данного отображения можно свести к исследованию свойств преобразования, ставящего в соответствие

квадратным матрицам $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ квадратные матрицы вида

$\begin{vmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} & 0 \end{vmatrix}$, образующие двумерное подпространство в четырехмерном пространстве квадратных матриц $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$.

Задача
8.4.1.

Линейное отображение $\hat{A}: \Lambda^3 \rightarrow \Lambda^3$ в некотором базисе задано матрицей $\|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$. Найти его ядро и множество значений. Выяснить, является ли данное отображение инъективным или сюръективным.

Решение:

1°. Пусть координатное представление прообраза преобразования $y = \hat{A}x$ есть

$$\|x\| = \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}, \text{ а координатное представление образа } - \|y\| = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix}. \text{ Тогда ядро -}$$

множество элементов x таких, что $\hat{A}x = 0$, задается в координатном представлении системой линейных уравнений $\|\hat{A}\| \|x\| = \|0\|$ или
$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \\ 2\xi_1 + 3\xi_2 + 4\xi_3 = 0 \\ 3\xi_1 + 5\xi_2 + 7\xi_3 = 0 \end{cases}, \text{ общее}$$

решение которой есть $\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$. Отсюда заключаем, что ядро линейного

отображения $\hat{A}$ есть линейная оболочка элемента $\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$, и поскольку оно не состоит только из нулевого элемента, то данное отображение неинъективное.

Заметим, что к этому же заключению можно прийти, приняв во внимание, что

$$\text{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \text{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 < 3 - \text{числа столбцов матрицы отображения.}$$

- 2°. Область значений линейного отображения $\hat{A}$ состоит из элементов $y \in \Theta$ таких, что $y = \hat{A}x$, $\forall x \in \Omega$. В координатной форме принадлежность элемента y к множеству значений означает совместность системы линейных уравнений

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix},$$

следовательно, нам необходимо выяснить, при каких значениях η_1, η_2, η_3 данная система линейных уравнений совместна. Это можно сделать, например, при помощи теоремы 6.6.1. (Кронекера – Капелли), сравнив ранги основной и расширенной матриц данной системы.

Из условия

$$\operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \eta_1 \\ 2 & 3 & 4 & \eta_2 \\ 3 & 5 & 7 & \eta_3 \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \eta_1 \\ 0 & 1 & 2 & 2\eta_1 - \eta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 \end{vmatrix} = \operatorname{rg} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 2$$

найдем, что для совместности необходимо и достаточно, чтобы $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$, что, в свою очередь, означает, что множество значений отображения $\hat{A}$ состоит из элементов вида

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \lambda_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \forall \lambda_1, \lambda_2,$$

являющихся решениями уравнения $\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 = 0$.

Заметим, наконец, что поскольку не каждый элемент $y \in \Theta = \Lambda^3$ имеет прообраз в $\Omega = \Lambda^3$, то данное отображение не является и сюръективным.

8.5. Инвариантные подпространства и собственные векторы

Определение
8.5.1.

Подпространство Λ^* линейного пространства Λ называется *инвариантным подпространством* линейного оператора $\hat{A}$, если для каждого элемента $x \in \Lambda^*$: $\hat{A}x \in \Lambda^*$.

Пример
8.5.1.

1°. Множество радиус-векторов точек некоторой прямой на плоскости Oxy , проходящей через начало координат, является инвариантным подпространством оператора поворота на угол π этих радиус-векторов вокруг оси Oz . (Рис. 8.5.1.)

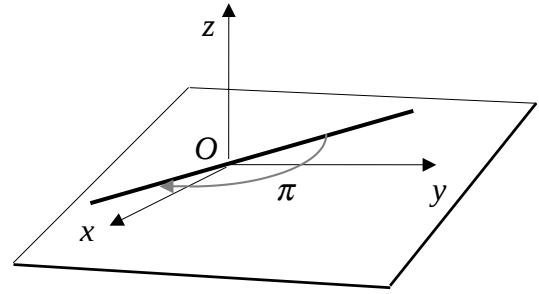


Рисунок 8.5.1.

2°. Для оператора дифференцирования в линейном пространстве функций $f(\tau)$, имеющих на (α, β) производную любого порядка, n -мерным инвариантным подпространством является линейная оболочка совокупности элементов вида $\{e^{\lambda_1 \tau}, e^{\lambda_2 \tau}, \dots, e^{\lambda_n \tau}\}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ некоторые, попарно различные константы.

Теорема
8.5.1.

Матрица линейного оператора $\hat{A}$, заданного в линейном пространстве Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, тогда и только тогда имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \dots & \alpha_{rr} & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} \\ \hline 0 & \dots & 0 & \alpha_{r+1,r+1} & \dots & \alpha_{r+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,r+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{array} \right\|,$$

когда линейная оболочка подмножества базисных элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ есть инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$.

Доказательство:

Докажем достаточность. Пусть матрица оператора $\hat{A}$ имеет указанный в формулировке теоремы вид. Тогда образ любой линейной комбинации элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$ будет принадлежать их линейной оболочке, поскольку в силу определения 8.3.1. каждый столбец матрицы линейного оператора составлен из компонентов образа соответствующего базисного элемента.

Иначе говоря, если $\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k \in \Lambda^*$, то и

$$\hat{A}\left(\sum_{k=1}^r \lambda_k g_k\right) = \sum_{k=1}^r \lambda_k (\hat{A}g_k) = \sum_{k=1}^r \lambda_k \sum_{i=1}^r \alpha_{ik} g_i = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^r \alpha_{ik} \lambda_k\right) g_i = \sum_{i=1}^r \beta_i g_i \in \Lambda^*.$$

Из теоремы 7.4.1. следует, что Λ^* — подпространство. Достаточность доказана.

Докажем необходимость. Пусть Λ^* есть инвариантное подпространство линейного оператора $\hat{A}$, являющееся линейной оболочкой подмножества базисных векторов $\{g_1, g_2, \dots, g_r\}$.

Тогда образ любого, в том числе и базисного, элемента, принадлежащего Λ^* , также будет принадлежать Λ^* . Это, в свою очередь, означает, что

$$\hat{A}g_k = \sum_{i=1}^r \alpha_{ik} g_i + \sum_{i=r+1}^n 0g_i; \quad k = [1, r]$$

и, в сочетании с определением 8.3.1. доказывает необходимость.

Теорема доказана.

Задача
8.5.1.

Показать, что всякое инвариантное подпространство невырожденного линейного оператора $\hat{A}$ является также инвариантным подпространством оператора $\hat{A}^{-1}$.

Решение:

Пусть $x \in \Lambda^*$, где Λ^* — инвариантное подпространство оператора $\hat{A}$, тогда, по условию задачи, $y = \hat{A}x \in \Lambda^*$.

Если оператор $\hat{A}$ невырожденный, то для него существует обратный $\hat{A}^{-1}$ и связь элементов $x, y \in \Lambda^*$ можно записать в виде $x = \hat{A}^{-1}y$, что и означает инвариантность подпространства Λ^* относительно оператора $\hat{A}^{-1}$.

Рассмотрим теперь условия, при которых у линейного оператора есть *одномерное* инвариантное подпространство.

Определение
8.5.2.

Ненулевой элемент $f \in \Lambda$ называется собственным вектором линейного оператора $\hat{A}$, если существует число λ такое, что $\hat{A}f = \lambda f$. Число λ называется собственным значением оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору f .

Замечание о важности собственных векторов

Допустим, что для некоторого линейного оператора $\hat{A}$, заданного в Λ^n , удалось найти n линейно независимых собственных векторов $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Это означает, что выполнены равенства $\hat{A}f_1 = \lambda_1 f_1$; $\hat{A}f_2 = \lambda_2 f_2$; ...; $\hat{A}f_n = \lambda_n f_n$.

Приняв эти элементы за базис, исходя из определения 8.3.1., можно заключить, что матрица линейного оператора $\hat{A}$ в этом базисе будет иметь диагональный вид

$$\|\hat{A}\|_f = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix},$$

для которого исследование свойств этого оператора существенно упрощается.

Задача
8.5.2.

Показать, что, если линейный оператор $\hat{A}$ имеет собственный вектор f с соответствующим ему собственным значением λ , то элемент f будет также являться собственным вектором линейного оператора $\hat{A}^2 = \hat{A}\hat{A}$ с собственным значением λ^2 .

Решение:

По условию $\hat{A}f = \lambda f$, но тогда, в силу линейности оператора $\hat{A}$
 $\hat{A}^2 f = \hat{A}(\hat{A}f) = \hat{A}(\lambda f) = \lambda^2 f$.

Вычисление собственных векторов и собственных значений линейного оператора

Выберем в Λ^n некоторый базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, в котором разложение элемента $f \in \Lambda^n$ будет $f = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$. Пусть имеется линейный оператор с матрицей $\|\hat{A}\|_g = \|\alpha_{kj}\|$ в этом базисе.

Равенство $\hat{A}f = \lambda f$ в координатной форме имеет вид $\|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda \|f\|_g$, то есть

$$\begin{cases} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = \lambda\xi_1 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = \lambda\xi_2 \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n = \lambda\xi_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\alpha_{11} - \lambda)\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \dots + \alpha_{1n}\xi_n = 0 \\ \alpha_{21}\xi_1 + (\alpha_{22} - \lambda)\xi_2 + \dots + \alpha_{2n}\xi_n = 0 \\ \dots \\ \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \dots + (\alpha_{nn} - \lambda)\xi_n = 0 \end{cases} \quad (8.5.1.)$$

Поскольку собственный вектор должен быть ненулевым по определению, то нас интересуют только *нетривиальные* решения системы (8.5.1.), необходимым условием существования которых, согласно следствию 6.7.2., является равенство нулю определителя основной матрицы системы (8.5.1.)

Таким образом, мы приходим к условию, которому должны удовлетворять собственные значения данного линейного оператора

$$\det \|\alpha_{kj} - \lambda \delta_{kj}\| = 0 \quad \text{или же} \quad \det \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad (8.5.2.)$$

Определение 8.5.3. Уравнение $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g = 0$ называется *характеристическим уравнением*, а определитель $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$ — *характеристическим многочленом* оператора $\hat{A}$, действующего в Λ^n .

Характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n -й степени относительно λ , что следует из определения детерминанта 6.1.2. и формулы (8.5.2.).

Решив характеристическое уравнение (8.5.2.), из однородной системы уравнений (8.5.1.) можно найти собственные векторы, соответствующие последовательно подставляемым в основную матрицу этой системы найденным собственным значениям. Примеры использования данного алгоритма иллюстрируют решения задач 8.6.1. и 8.6.2.

В случае линейных пространств, не имеющих базиса, задача отыскания собственных значений и построения собственных векторов может оказаться значительно сложнее. Например, в линейном пространстве функций, имеющих на некотором интервале производную любого порядка, линейный оператор дифференцирования имеет бесконечно много собственных векторов вида $f(\tau) = \alpha e^{\lambda \tau}$ (где α — произвольная ненулевая константа) и соответствующих им собственных значений λ , находимых из условия $\hat{A}f = \lambda f$, то есть из дифференциального уравнения

$$\frac{df}{d\tau} = \lambda f .$$

8.6. Свойства собственных векторов и собственных значений

Теорема 8.6.1. В комплексном линейном пространстве Λ^n всякий линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.

Доказательство:

Поскольку характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n -й степени относительно λ , то к нему применима *основная теорема высшей алгебры*¹⁾, утверждающая, что такое уравнение имеет хотя бы один комплексный корень.

Теорема доказана.

В случае вещественного линейного пространства теорема 8.6.1. неверна. Например, линейный оператор поворота плоскости Oxy вокруг начала координат на угол $\varphi \neq k\pi$ не имеет ни одного собственного вектора. Действительно, характеристическое уравнение для этого оператора имеет вид (см. п.5.5.)

$$\det \begin{vmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi + 1 = 0,$$

то есть $\lambda = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$. Отсюда следует, что при $\varphi \neq k\pi$ вещественных решений данное характеристическое уравнение не имеет.

Теорема 8.6.2. В вещественном линейном пространстве Λ^n всякий линейный оператор имеет либо хотя бы один собственный вектор, либо двумерное инвариантное подпространство.

Доказательство:

Если характеристическое уравнение имеет вещественный корень, то из системы (8.5.1.) находим собственный вектор.

Пусть характеристическое уравнение имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + \beta i$, решив систему (8.5.1.), получим соответствующий ему комплекснозначный собственный вектор $f = u + wi$, где u и w — элементы Λ^n , представляемые вещественными n -компонентными столбцами.

Покажем, что u и w линейно независимы. Допустим противное: $u = kw$. Тогда из соотношения $\hat{A}f = \lambda f$ имеем, что $\hat{A}((k+i)w) = \lambda(k+i)w$, или $\hat{A}w = \lambda w$, то есть λ — вещественное, что противоречит предположению о невещественности собственного значения.

¹⁾ Доказывается, например, в курсе ТФКП.

Подставим выражения для собственного значения и собственного вектора в их определение: $\hat{A}f = \lambda f$. Получаем $\hat{A}(u + wi) = (\alpha + \beta i)(u + wi)$ или $(\hat{A}u) + (\hat{A}w)i = (\alpha u - \beta w) + (\beta u + \alpha w)i$, и из равенства действительных и мнимых частей находим, что
$$\begin{cases} \hat{A}u = \alpha u - \beta w \\ \hat{A}w = \beta u + \alpha w \end{cases}.$$

Но это и означает, что оператор $\hat{A}$ имеет двумерное инвариантное подпространство, совпадающее с линейной оболочкой элементов u и w , поскольку

$$\begin{aligned} \hat{A}(\xi u + \eta w) &= \xi \hat{A}u + \eta \hat{A}w = \xi(\alpha u - \beta w) + \eta(\beta u + \alpha w) \\ &= (\xi\alpha + \eta\beta)u + (\eta\alpha - \xi\beta)w. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Задача
8.6.1.

Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\hat{A}$, действующего в пространстве трехмерных столбцов и заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

1°. Рассмотрим сначала случай, когда оператор $\hat{A}$ действует в комплексном линейном пространстве.

Будем искать собственные значения по формулам (8.5.1.) – (8.5.2.). Воспользовавшись правилом разложения определителя по первой строке (см. теорему 1.1.1.), получим

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -3 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} &= -(1+\lambda)(\lambda-1)^2 + 2(2\lambda-6+6) + 2(4-3-3\lambda) = \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 = -(\lambda^2 + 1)(\lambda - 1). \end{aligned}$$

Откуда получаем, что из трех собственных значений одно $\lambda_1 = 1$ – вещественное и два $\lambda_2 = i$ и $\lambda_3 = -i$ – комплексно сопряженные ¹⁾.

¹⁾ См. приложение 3.

2°. Найдем теперь собственные векторы. Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$, тогда

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразовав матрицу построенной системы линейных уравнений, получим компоненты собственных векторов ξ_1, ξ_2 и ξ_3 из условий $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, собственный вектор f_1 , отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 1$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \forall \mu \neq 0.$$

3°. Пусть теперь $\lambda = \lambda_2 = i$, тогда систему линейных уравнений (8.5.1.)

$$\begin{pmatrix} -1-i & -2 & 2 \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

можно упростить, разделив ¹⁾ обе части первого уравнения на $1+i$. Заметим, что в полученной таким образом системе

$$\begin{pmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ -2 & -1-i & 2 \\ -3 & -2 & 3-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

третье уравнение оказывается суммой первых двух и его можно отбросить, как линейно зависимое.

Заменив затем второе уравнение разностью удвоенного первого и второго, получим

$$\begin{pmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & -1+3i & 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁾ Правило деления комплексных чисел приведено в Приложении 3.

И, наконец, после умножения обеих частей второго уравнения на $(-i)$, приходим к

$$\begin{pmatrix} -1 & -1+i & 1-i \\ 0 & 3+i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая значение свободного неизвестного $\xi_3 = 3+i$, находим второй собственный

вектор $f_2 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3+i \end{pmatrix}; \quad \forall \mu \neq 0.$

4°. Проведя аналогичные вычисления, найдем, что собственный вектор, отвечающий

собственному значению $\lambda_3 = -i$, имеет вид $f_3 = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}; \quad \forall \mu \neq 0.$

(Покажите самостоятельно, что, комплексная сопряженность f_2 и f_3 не случайна, то есть: если λ_2 и λ_3 комплексно сопряжены, то будут комплексно сопряжены и собственные векторы f_2 и f_3 .)

5°. Если оператор $\hat{A}$ действует в вещественном линейном пространстве, то согласно

теореме 8.6.2. $\hat{A}$ имеет собственный вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, отвечающий собственному зна —

чению $\lambda_1 = 1$, и инвариантное подпространство, являющееся линейной оболочкой

элементов $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то есть которое будет состоять из элементов вида

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \forall \mu_1, \mu_2.$$

Теорема
8.6.3.

Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса в Λ^n .

Доказательство:

Заметим, что оператор $\hat{A} - \lambda \hat{E}$ очевидно линейный, в силу линейности операторов $\hat{A}$ и $\hat{E}$. Тогда, согласно следствию 8.3.2., его определитель не меняется при замене базиса. Поэтому при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ имеем:

$$\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_{g'} = \det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g.$$

Теорема доказана.

Теорема
8.6.4.

Совокупность собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению линейного оператора $\hat{A}$, дополненная нулевым элементом линейного пространства Λ , является инвариантным подпространством оператора $\hat{A}$.

Доказательство:

Пусть $\hat{A}f_1 = \lambda f_1$ и $\hat{A}f_2 = \lambda f_2$. Тогда для любых, не равных нулю одновременно чисел α и β

$$\hat{A}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha \hat{A}f_1 + \beta \hat{A}f_2 = \alpha \lambda f_1 + \beta \lambda f_2 = \lambda(\alpha f_1 + \beta f_2),$$

что и показывает справедливость утверждения теоремы.

Теорема доказана.

Определение
8.6.1.

Подпространство состоящее из собственных векторов, отвечающих некоторому собственному значению, дополненных нулевым элементом, называется *инвариантным собственным подпространством* линейного оператора $\hat{A}$.

Следствие
8.6.1.

Всякое инвариантное собственное подпространство линейного оператора $\hat{A}$ является также инвариантным подпространством линейного оператора $\hat{B}$, если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют.

Доказательство:

Пусть Λ^* — инвариантное собственное подпространство оператора $\hat{A}$, то есть $\hat{A}f = \lambda f$, $\forall f \in \Lambda^*$.

Но тогда справедливо равенство $\hat{B}\hat{A}f = \hat{B}(\lambda f)$, а в силу коммутативности и линейности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, будет верно и $\hat{A}(\hat{B}f) = \lambda(\hat{B}f)$ при $\forall f \in \Lambda^*$.

Последнее равенство означает, что $\hat{B}f \in \Lambda^*$ при $\forall f \in \Lambda^*$, то есть Λ^* — инвариантное подпространство оператора $\hat{B}$.

Следствие доказано.

Теорема
8.6.5.

Собственные векторы линейного оператора, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство:

Один собственный вектор линейно независим как ненулевой.

Пусть даны m линейно независимых собственных векторов $f_1, f_2, \dots, f_m$, отвечающих различным собственным значениям. Покажем, что в этом случае будут линейно независимы и $m+1$ собственных векторов $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$, если они также отвечают различным собственным значениям. Предположим противное:

$$\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1} = 0, \quad (8.6.1.)$$

причем без ограничения общности можно считать, что число $\kappa_{m+1} \neq 0$.

Подействуем на обе части равенства (8.6.1.) оператором $\hat{A}$:

$$\begin{aligned} \hat{A}(\kappa_1 f_1 + \kappa_2 f_2 + \dots + \kappa_m f_m + \kappa_{m+1} f_{m+1}) &= \\ = \kappa_1 \lambda_1 f_1 + \kappa_2 \lambda_2 f_2 + \dots + \kappa_m \lambda_m f_m + \kappa_{m+1} \lambda_{m+1} f_{m+1} &= 0. \end{aligned} \quad (8.6.2.)$$

С другой стороны, умножая обе части равенства (8.6.1.) на λ_{m+1} и вычитая по членно результат из равенства (8.6.2.), получим

$$\kappa_1 (\lambda_1 - \lambda_{m+1}) f_1 + \kappa_2 (\lambda_2 - \lambda_{m+1}) f_2 + \dots + \kappa_m (\lambda_m - \lambda_{m+1}) f_m = 0.$$

Поскольку все собственные значения разные, а векторы $f_1, f_2, \dots, f_m$ линейно независимы, то $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_m = 0$. Но тогда из (8.6.1.) следует $\kappa_{m+1} = 0$, что противоречит сделанному выше предположению, и по принципу математической индукции из линейной независимости элементов $f_1, f_2, \dots, f_m$ следует линейная независимость элементов $f_1, f_2, \dots, f_m, f_{m+1}$.

Теорема доказана.

Следствие
8.6.2.

Линейный оператор $\hat{A}$ в Λ^n может иметь (с точностью до произвольного ненулевого множителя) не более чем n собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.

Теорема
8.6.6.

Если линейный оператор $\hat{A}$, действующий в Λ^n , имеет n различных собственных значений, то существует базис, образованный собственными векторами $\hat{A}$, в котором матрица данного линейного оператора имеет диагональный вид, причем на ее диагонали расположены собственные числа оператора $\hat{A}$.

Доказательство:

Следует из теоремы 8.6.5. и замечания о важности собственных векторов п.8.5.

Теорема
8.6.7.

Пусть Λ^* — инвариантное собственное подпространство линейного оператора $\hat{A}$, отвечающее некоторому собственному значению λ_0 кратности k . Тогда имеет место соотношение $1 \leq \dim(\Lambda^*) \leq k$.

Доказательство:

Выберем в Λ^n базис $\{g_1, g_2, \dots, g_m, g_{m+1}, \dots, g_n\}$ так, чтобы его первые $m = \dim(\Lambda^*)$ элементов принадлежали Λ^* . В силу условия кратности собственного значения $\hat{A}g_i = \lambda_0 g_i$; $i = [1, m]$, поэтому матрица $\|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\|_g$ в этом базисе будет иметь вид

$$\|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\|_g = \begin{vmatrix} \lambda_0 - \lambda & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \lambda_0 - \lambda & \dots & 0 & \alpha_{2,m+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 - \lambda & \alpha_{m,m+1} & \dots & \alpha_{mn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,m+1} & \dots & \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\det \|\hat{A} - \lambda_0 \hat{E}\|_g = (\lambda_0 - \lambda)^m P_{n-m}(\lambda)$. Поскольку множители вида $(\lambda_0 - \lambda)$ могут содержаться также и в многочлене $P_{n-m}(\lambda)$, то $k \geq m$, если k — кратность корня λ_0 характеристического многочлена $\det \|\hat{A} - \lambda \hat{E}\|_g$.

Условие $1 \leq m$ очевидно, поскольку подпространство Λ^* ненулевое.

Теорема доказана.

Таким образом, размерность инвариантного собственного подпространства Λ^* , отвечающего собственному значению λ_0 кратности k , может оказаться меньше k , что иллюстрирует

Задача
8.6.2.

Найти собственные значения и собственные векторы оператора, действующего в пространстве двумерных столбцов и заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Находим собственные значения:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 = 0,$$

то есть $\lambda_{1,2}=1$ и кратность собственного значения $k=2$. Найдем теперь собственные векторы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \mu \neq 0.$$

Таким образом, получаем, что данный линейный оператор имеет одномерное инвариантное собственное подпространство ($m = \dim(\Lambda^*) = 1$), соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ кратности 2.

Теорема
8.6.8.

Линейный оператор $\hat{A}$ в Λ^n имеет нулевое собственное значение тогда и только тогда, когда оператор $\hat{A}$ не является взаимно однозначным.

Доказательство:

Линейный оператор $\hat{A}$ имеет в Λ^n собственное значение, равное нулю, тогда и только тогда, когда его матрица вырожденная, то есть, в любом базисе $\det \|\hat{A}\| = 0$.

Пусть в Λ^n координатный столбец образа связан с координатным столбцом прообраза

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 6.4.1. (Крамера) следует, что для заданного координатного столбца элемента — образа эта система линейных уравнений, у которой неизвестными являются компоненты столбца элемента — прообраза, либо будет несовместной (элемент — прообраз не существует), либо будет иметь согласно следствию 6.7.1. неединственное решение (элемент — прообраз определяется неоднозначно).

Теорема доказана.

Определение 8.6.2. Степенью квадратной матрицы $\|Q\|$ с натуральным показателем $k \geq 2$ называется произведение k сомножителей вида $\|Q\|$. Будем также считать, что $\|Q\|^1 = \|Q\|$ и $\|Q\|^0 = \|E\|$.

Теорема
8.6.9.
(Гамильтона-
Кэли)

Матрица линейного оператора $\hat{A}$ в Λ^n удовлетворяет его характеристическому уравнению.

Доказательство:

Докажем данную теорему в предположении, что собственные векторы оператора $\hat{A}$ образуют в Λ^n базис $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Пусть данный линейный оператор $\hat{A}$ в этом базисе имеет матрицу $\|\hat{A}\|_f$ и характеристическое уравнение $\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k = 0$. Тогда в силу линейности $\hat{A}$ для собственного вектора f , соответствующего собственному значению λ , имеем (см. задачу 8.5.2.)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_f^k \right) \|f\| &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|\hat{A}\|_f^k \|f\|) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|\hat{A}\|_f (\|\hat{A}\|_f \dots (\|\hat{A}\|_f \|f\|) \dots)) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\lambda^k \|f\|) = \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k \right) \|f\| = 0 \|f\| = 0. \end{aligned}$$

Но поскольку это соотношение верно для всех базисных векторов, то оно бу —

дет верно и для каждого элемента $x \in \Lambda^n$. Тогда из леммы 5.1.2. следует, что

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_f^k = \|\hat{O}\|_f.$$

Наконец, выполнив переход к произвольному базису $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_g^k &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\|)^k = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\| \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\| \dots \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f \|S\|) = \\ &= \sum_{k=0}^n \alpha_k (\|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_f^k \|S\|) = \|S\|^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k \|\hat{A}\|_f^k \right) \|S\| = \\ &= \|S\|^{-1} \|\hat{O}\|_f \|S\| = \|\hat{O}\|_g. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание: теорема Гамильтона—Кэли также верна и для линейных операторов, из собственных векторов которых базис образовать не удастся.

8.7. Линейные функционалы

Рассмотрим специальный случай линейного оператора, когда его область значений содержится в одномерном линейном пространстве, изоморфном множеству вещественных чисел. Такого рода зависимости, следуя классификации, введенной в п.5.2., следует относить к функционалам. Напомним данное ранее

Определение 8.7.1. Пусть каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ поставлено в соответствие однозначно определяемое число, обозначаемое $f(x)$. Тогда говорят, что в Λ задан функционал $f(x)$.

Пример
8.7.1.

1°. В пространстве n -компонентных столбцов можно задать функ-

ционал, поставив столбцу $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ в соответствие число $\sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i$, где

$\phi_i, i = [1, n]$ — некоторые фиксированные константы.

2°. В векторном геометрическом пространстве функционалом является длина вектора, то есть $f(x) = |\vec{x}|$.

3°. В пространстве функций $x(\tau)$, определенных на $[-1, 1]$ функционалом является $f(x) = x(0)$ — "дельта-функция", обозначаемая как $\delta(x)$, ставящая в соответствие каждой функции $x(\tau)$ ее значение в нуле.

4°. В пространстве функций $x(\tau)$, непрерывных на $[\alpha, \beta]$, функционалом является определенный интеграл, то есть $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} p(\tau)x(\tau) d\tau$, где $p(\tau)$ — некоторая заданная на $[\alpha, \beta]$ непрерывная функция.

5°. В линейном пространстве квадратных матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ функционалом является определитель

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}.$$

Определение
8.7.2.

Функционал $f(x)$ называется *линейным функционалом* (или *линейной формой*), если для любых $x, y \in \Lambda$ и любого числа λ :

$$1^\circ. f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$2^\circ. f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Задача
8.7.1.

Доказать, что функционалы в примерах 1°, 3° и 4° являются линейными, а функционалы в примерах 2° и 5° — нет.

Операции с линейными функционалами

Рассматривая линейные функционалы как частный случай линейного оператора, введем на их множестве (аналогично п.8.2.) операции сложения и умножения на число.

Определение 8.7.3. Суммой линейных функционалов $f(x)$ и $g(x)$ называется функционал $s(x)$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие число $f(x) + g(x)$.

Лемма 8.7.1. Сумма двух линейных функционалов является линейным функционалом.

Доказательство:

Пусть $x, y, z \in \Lambda$ и $x = \lambda y + \mu z$, а $s(x) = f(x) + g(x)$, тогда

$$\begin{aligned} s(\lambda y + \mu z) &= f(\lambda y + \mu z) + g(\lambda y + \mu z) = \\ &= \lambda f(y) + \mu f(z) + \lambda g(y) + \mu g(z) = \\ &= \lambda (f(y) + g(y)) + \mu (f(z) + g(z)) = \\ &= \lambda s(y) + \mu s(z) \quad . \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение 8.7.4. Нулевым функционалом называется функционал $o(x)$, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие число 0.

Определение 8.7.5. Функционалом, противоположным линейному функционалу $f(x)$, называется функционал, ставящий каждому элементу линейного пространства $x \in \Lambda$ в соответствие число $-f(x)$.

Исходя из определений 8.7.2–8.7.5. следует, что нулевой и противоположный функционалы являются линейными и что $\forall x \in \Lambda$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= g(x) + f(x) \quad ; \\ (f(x) + g(x)) + h(x) &= f(x) + (g(x) + h(x)) \quad ; \\ f(x) + o(x) &= f(x) \quad ; \quad f(x) + (-f(x)) = o(x) \quad . \end{aligned}$$

Определение 8.7.6. Произведением линейного функционала $f(x)$ на число λ называется функционал, ставящий в соответствие каждому $x \in \Lambda$ число $\lambda f(x)$.

Лемма 8.7.2. Произведение линейного функционала на число является линейным функционалом, для которого выполняются $\forall x \in \Lambda$ соотношения

$$\begin{aligned}\alpha(\beta f(x)) &= (\alpha\beta)f(x) \quad ; \quad 1f(x) = f(x) \quad ; \\ (\alpha + \beta)f(x) &= \alpha f(x) + \beta f(x) \quad ; \\ \alpha(f(x) + g(x)) &= \alpha f(x) + \alpha g(x) \quad .\end{aligned}$$

Доказательство:

Утверждение леммы проверяется непосредственно.

Теорема 8.7.1. Множество всех линейных функционалов, заданных в линейном пространстве Λ , является линейным пространством, обозначаемым Λ^+ .

Доказательство:

Следует из определений 7.1.1., 8.7.3. – 8.7.6. и лемм 8.7.1., 8.7.2.

Определение 8.7.7. Линейное пространство Λ^+ линейных функционалов, заданных в Λ , называется *двойственным* (или *сопряженным*) пространством Λ .

Представление линейного функционала в Λ^n

Пусть в Λ^n дан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и пусть координатное представление элемента линейного пространства имеет вид $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$. Тогда, в силу линейности функционала, справедливы соотношения

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i f(g_i) = \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i ,$$

где $\phi_i = f(g_i), i = [1, n]$ – числа, называемые *компонентами линейного функционала в данном базисе*.

Из последних равенств следует, непосредственно проверяемая

Теорема
8.7.2.

Каждый линейный функционал $f(x)$ в Λ^n в конкретном базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ имеет однозначно определяемую строку компонентов $\|f\|_g = \|\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n\|$, а каждая строка компонентов $\|\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n\|$ в конкретном базисе определяет в Λ^n некоторый линейный функционал $f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i$.

Запись координатного представления линейного функционала в Λ^n в виде строки (а не столбца) использована, чтобы обеспечить соответствие этого представления определению 8.4.5., поскольку линейный функционал в Λ^n можно рассматривать как линейное отображение $\Lambda^n \rightarrow \Lambda^1$.

Заметим, что в матричной форме каждый линейный функционал $f(x)$ в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ может быть записан как $f(x) = \|f\|_g \|x\|_g$.

Задача
8.7.2.

Показать, что в Λ^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ операции сложения и умножения на число для линейных функционалов $p(x)$ и $q(x)$ в координатном представлении имеют вид:

$$\begin{aligned} \|p+q\|_g &= \|\phi_1 + \psi_1 \quad \phi_2 + \psi_2 \quad \dots \quad \phi_n + \psi_n\| \quad \text{и} \\ \|\lambda p\|_g &= \|\lambda \phi_1 \quad \lambda \phi_2 \quad \dots \quad \lambda \phi_n\|, \end{aligned}$$

$$\text{где } \|p\|_g = \|\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n\| \quad \text{и} \quad \|q\|_g = \|\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n\|.$$

Задача
8.7.3.

Показать, что размерность пространства Λ^+ , двойственного Λ^n , равна n .

На основании теоремы 7.5.1. можно прийти к заключению об изоморфности линейных пространств Λ^n и Λ^{n+} . Однако между ними, естественно, имеются и суще —

ственные отличия. Чтобы убедиться в этом, найдем правило изменения компонент линейного функционала в Λ^n при переходе от одного базиса к другому.

Пусть в Λ^n даны два базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, связанные матрицей перехода

$$\|S\| = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}, \text{ то есть } g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i \text{ для } \forall j=[1, n].$$

Координатные представления некоторого элемента будут иметь в рассматриваемых базисах вид $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i = \sum_{i=1}^n \xi'_i g'_i$, а координатные представления линейного функционала $f(x)$, соответственно $f(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i \xi_i = \sum_{i=1}^n \phi'_i \xi'_i$.

Найдем выражения для величин ϕ'_i через ϕ_i . Используя введенные обозначения, получаем

$$\phi'_i = f(g'_i) = f\left(\sum_{k=1}^n \sigma_{ki} g_k\right) = \sum_{k=1}^n \sigma_{ki} f(g_k) = \sum_{k=1}^n \phi_k \sigma_{ki},$$

что доказывает следующее утверждение:

Теорема
8.7.3.

Компоненты координатного представления линейного функционала $\|\phi'_1, \phi'_2, \dots, \phi'_n\|$ и $\|\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\|$ в двух разных базисах связаны соотношением $\phi'_k = \sum_{i=1}^n \phi_i \sigma_{ik}$; $k=[1, n]$, где коэффициенты σ_{ik} — коэффициенты матрицы перехода, или, в матричной форме, $\|f\|_{g'} = \|f\|_g \|S\|$.

Отметим, что компоненты линейного функционала, записанные по столбцам, преобразуются при замене базиса так же, как преобразуются базисные элементы (см. п.7.3.).

Раздел 9

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ
В ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ****9.1. Билинейные функционалы**

Определение
9.1.1.

Пусть в линейном пространстве Λ каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие число $B(x, y)$ так, что

$$1^\circ. B(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha B(x_1, y) + \beta B(x_2, y); \quad \forall x_1, x_2, y \in \Lambda; \forall \alpha, \beta$$

$$2^\circ. B(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha B(x, y_1) + \beta B(x, y_2); \quad \forall x, y_1, y_2 \in \Lambda; \forall \alpha, \beta$$

тогда говорят, что в Λ задан *билинейный функционал* (или *билинейная форма*).

Пример
9.1.1.

1°. Произведение двух линейных функционалов $F(x)$ и $G(y)$, определенных в Λ , $B(x, y) = F(x)G(y)$ есть билинейный функционал.

2°. Двойной интеграл

$$B(x, y) = \iint_{\Omega} K(\tau, \sigma) x(\tau) y(\sigma) d\sigma d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau) \left(\int_{\alpha}^{\beta} K(\tau, \sigma) y(\sigma) d\sigma \right) d\tau,$$

где функция двух переменных $K(\tau, \sigma)$ непрерывна на множестве $\Omega: \left\{ \begin{array}{l} \alpha \leq \tau \leq \beta \\ \alpha \leq \sigma \leq \beta \end{array} \right\}$, есть билинейный функционал в линейном пространстве непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций.

3°. Билинейным функционалом является скалярное произведение векторов на плоскости или в пространстве.

Билинейные функционалы в Λ^n .

Пусть в Λ^n заданы базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и билинейный функционал $B(x, y)$. Найдем, как выражаются его значения через координаты аргументов.

Предположим, что в рассматриваемом базисе $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ и $y = \sum_{j=1}^n \eta_j g_j$, тогда, согласно определению 9.1.1., справедливы равенства

$$B(x, y) = B\left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j\right) = \sum_{i=1}^n \xi_i B(g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j B(g_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi_i \eta_j.$$

Определение 9.1.2. Числа $\beta_{ij} = B(g_i, g_j)$ называются *компонентами билинейного функционала* $B(x, y)$ в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, а матрица $\|B\|_g = \|\beta_{ij}\|$ — *матрицей билинейного функционала*.

Если в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, то билинейный функционал может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ki} \xi_k \eta_i = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \xi_{k1} \beta_{ki} \eta_{i1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \xi_{1k}^T \sum_{i=1}^n \beta_{ki} \eta_{i1} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{vmatrix} = \|x\|_g^T \|B\|_g \|y\|_g, \end{aligned}$$

где $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ — координатные столбцы элементов x и y в данном базисе.

Матрица билинейного функционала зависит от выбора базиса. Правило изменения матрицы билинейного функционала при замене базиса дает

Теорема 9.1.1. Пусть $\|S\|$ — матрица перехода от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, тогда $\|B\|_{g'} = \|S\|^T \|B\|_g \|S\|$.

Доказательство:

По определению матрицы перехода от одного базиса к другому в Λ^n (см. п.7.3.), имеют место соотношения $g'_k = \sum_{i=1}^n \sigma_{ik} g_i, k = [1, n]$, но тогда

$$\begin{aligned} \beta'_{kl} &= B(g'_k, g'_l) = B\left(\sum_{i=1}^n \sigma_{ik} g_i, \sum_{j=1}^n \sigma_{jl} g_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jl} B(g_i, g_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ik} \sigma_{jl} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ki}^T \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \sigma_{jl}, \end{aligned}$$

для всех $k, l = [1, n]$.

Теорема доказана.

Следствие
9.1.1.

$$\det \|B\|_{g'} = \det \|B\|_g (\det \|S\|)^2.$$

Доказательство:

Следует из теоремы 9.1.1., а также свойств детерминанта (теоремы 6.2.1. и 6.2.4.).

Отметим, что в силу невырожденности матрицы перехода знак определителя матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.

Следствие
9.1.2.

Ранг матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Следует из теоремы 8.4.3. и невырожденности матрицы перехода $\|S\|$.

Определение
9.1.3.

Билинейный функционал $B(x, y)$ называется *симметричным*, если для любой упорядоченной пары элементов x и y линейного пространства Λ имеет место равенство $B(x, y) = B(y, x)$.

Теорема
9.1.2.

Для симметричности билинейного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы его матрица была симметрической.

Доказательство:

Необходимость следует из соотношений

$$\beta_{ij} = B(g_i, g_j) = B(g_j, g_i) = \beta_{ji}; \quad \forall i, j = [1, n].$$

Докажем достаточность. Действительно, если $\beta_{ij} = \beta_{ji}; \quad \forall i, j = [1, n]$, то

$$B(y, x) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \eta_j \xi_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_{ji} \xi_i \eta_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{ij} \xi_i \eta_j = B(x, y).$$

Теорема доказана.

9.2. Квадратичные функционалы

Определение 9.2.1. Пусть в линейном пространстве Λ каждому элементу x поставлено в соответствие число $\Phi(x) = B(x, x)$, где $B(x, y)$ некоторый билинейный функционал в Λ , тогда говорят, что в Λ задан *квадратичный функционал* (или *квадратичная форма*).

В общем случае в вещественном линейном пространстве по заданному квадратичному функционалу нельзя восстановить порождающий его билинейный функционал, однако это можно сделать для случая *симметричного* билинейного функционала.

Действительно, пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ порожден симметричным билинейным функционалом $B(x, y)$, тогда для любых x и y имеет место равенство

$$\Phi(x + y) = B(x + y, x + y) = B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) = \Phi(x) + 2B(x, y) + \Phi(y).$$

Отсюда $B(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y)).$

Определение 9.2.2. В Λ^n симметрическая матрица билинейного функционала $\frac{1}{2}(\Phi(x + y) - \Phi(x) - \Phi(y))$ называется *матрицей квадратичного функционала* $\Phi(x)$.

Если в Λ^n задан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, тогда квадратичный функционал может быть представлен в виде

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \xi_k \xi_i = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \|x\|_g^T \Phi \|x\|_g,$$

где $\|x\|_g$ — координатный столбец элемента $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ в данном базисе. Замена базиса, естественно, приводит к изменению матрицы квадратичного функционала по формуле $\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^T \|\Phi\|_g S$, определяемой теоремой 9.1.1.

Отметим, что иногда целесообразно строить квадратичный функционал $\Phi(x)$ по порождающему билинейному функционалу, просимметрировав предварительно последний. Действительно, для любого $B(x, y)$ можно указать симметричный билинейный функционал вида $\frac{1}{2}(B(x, y) + B(y, x))$, который будет порождать тот же самый квадратичный функционал $\Phi(x)$, что и $B(x, y)$. В этом случае $\varphi_{ij} = \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2}$, $i, j = [1, n]$, где φ_{ij} $i, j = [1, n]$ — элементы матрицы квадратичного функционала $\Phi(x)$.

Пример
9.2.1.

Пусть в Λ^3 задан билинейный функционал

$$B_1(x, y) = \xi_1 \eta_1 + 3\xi_2 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 - 3\xi_1 \eta_2 + 2\xi_3 \eta_1 - \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix},$$

имеющий матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ и, в силу теоремы 9.1.2., не являющийся симметрическим. Порождаемый им в Λ^3 квадратичный функционал будет иметь вид

$$\Phi_1(x) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 4\xi_1 \xi_2 + 2\xi_1 \xi_3 - 2\xi_2 \xi_3.$$

В то же время симметричный билинейный функционал

$$B_2(x, y) = \xi_1\eta_1 + 3\xi_2\eta_2 - 2\xi_1\eta_2 - 2\xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1 - \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix},$$

имеющий матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, будет порождать в Λ^3 квадратичный функционал вида

$$\Phi_2(x) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3,$$

который совпадает с $\Phi_1(x)$ и имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

В ряде важных прикладных задач оказывается необходимым построение базисов, в которых квадратичный функционал имеет наиболее простой и удобный для исследования вид.

Определение
9.2.3.

Квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет *диагональный вид* в некотором базисе в Λ^n , если он в этом базисе представим как

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i^2, \text{ где } \lambda_i, \quad \forall i = [1, n] \text{ — некоторые числа.}$$

Если, кроме того, числа λ_i , $i = [1, n]$ принимают лишь значения 0 или ± 1 , то говорят, что квадратичный функционал в данном базисе имеет *канонический вид*.

Теорема
9.2.1.

Для каждого квадратичного функционала в Λ^n существует базис, в котором функционал имеет канонический вид.

Доказательство:

Воспользуемся методом математической индукции.

- 1°. При $n=1$ в любом базисе $\Phi(x) = \varphi_{11}\xi_1^2$. Если $\varphi_{11} = 0$, то мы уже имеем канонический вид, если же $\varphi_{11} \neq 0$, то, выполняя замену переменных $\xi_1' = \sqrt{|\varphi_{11}|}\xi_1$, приходим к каноническому виду.
- 2°. Предположим, что утверждение теоремы верно для квадратичных функционалов, зависящих от $n-1$ переменной, и рассмотрим случай n переменных.

Будем считать, что $\varphi_{11} \neq 0$. Этого можно добиться изменением нумерации переменных в случае, когда хотя бы одно из чисел φ_{ii} , $i=[2, n]$ не равно нулю. Если же все φ_{ii} , $i=[1, n]$ равны нулю одновременно, то, без ограничения общности, можно считать, что $\varphi_{12} \neq 0$. Тогда, выполняя невырожденную замену переменных $\xi_1 = \xi_1' + \xi_2'$, $\xi_2 = \xi_1' - \xi_2'$, $\xi_3 = \xi_3'$, ..., $\xi_n = \xi_n'$, получаем запись квадратичного функционала с ненулевым диагональным элементом

$$\Phi(x) = 2\varphi_{12}\xi_1'^2 - 2\varphi_{21}\xi_2'^2 + F(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots, \xi_n'),$$

где $F(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \dots, \xi_n')$ не содержит квадратов от ξ_1' и ξ_2' .

- 3°. В записи квадратичного функционала сгруппируем слагаемые, содержащие переменную ξ_1 ,

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \varphi_{ik} \xi_i \xi_k = \varphi_{11}(\xi_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_1 \xi_i) + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n \varphi_{ik} \xi_i \xi_k$$

и выделим полный квадрат, воспользовавшись соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_k \alpha_i &= \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right) \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2 = (\alpha_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k)^2 = \\ &= \alpha_1^2 + 2 \sum_{k=2}^n \alpha_1 \alpha_k + \left(\sum_{k=2}^n \alpha_k \right)^2 = \alpha_1^2 + 2 \sum_{k=2}^n \alpha_1 \alpha_k + \sum_{k=2}^n \sum_{i=2}^n \alpha_k \alpha_i. \end{aligned}$$

Получим

$$\Phi(x) = \varphi_{11}(\xi_1^2 + 2 \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_1 \xi_i + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n \frac{\varphi_{1k} \varphi_{1i}}{\varphi_{11}^2} \xi_i \xi_k) + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n (\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1k} \varphi_{1i}}{\varphi_{11}}) \xi_i \xi_k$$

и окончательно $\Phi(x) = \varphi_{11}(\xi_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_i)^2 + \sum_{i=2}^n \sum_{k=2}^n (\varphi_{ik} - \frac{\varphi_{1k} \varphi_{1i}}{\varphi_{11}}) \xi_i \xi_k$.

В последней формуле первое слагаемое есть полный квадрат, а второе — квадратичный функционал, не зависящий от ξ_1 и приводящийся, согласно предположению индукции, к каноническому виду некоторой невырожденной

ной заменой переменных

$$\xi'_k = \sum_{i=2}^n \tau_{ki} \xi_i, \quad k = [2, n].$$

4°. Выполним замену переменных квадратичного функционала $\Phi(x)$ по формулам

$$\begin{cases} \xi'_1 = \sqrt{|\varphi_{11}|} \left(\xi_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\varphi_{1i}}{\varphi_{11}} \xi_i \right) \\ \xi'_k = \sum_{i=2}^n \tau_{ki} \xi_i; \quad k = [2, n] \end{cases},$$

которая приведет к представлению его в каноническом виде. Действительно, матрица выполненной замены переменных

$$\|T\| = \begin{vmatrix} \sqrt{|\varphi_{11}|} & \sqrt{|\varphi_{11}|} \frac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}} & \dots & \sqrt{|\varphi_{11}|} \frac{\varphi_{1n}}{\varphi_{11}} \\ 0 & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{vmatrix}$$

имеет определитель не равный нулю, поскольку $\varphi_{11} \neq 0$, а замена

$\xi'_k = \sum_{i=2}^n \tau_{ki} \xi_i, \quad k = [2, n]$ — невырожденная. Но тогда матрица $\|T\|$ имеет

обратную: $\|S\| = \|T\|^{-1}$ (см. следствие 7.5.3.), которая, в свою очередь, является матрицей перехода к искомому базису.

Теорема доказана.

Замечание: базис, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, не единственный, равно как не является единственным сам канонический или диагональный вид квадратичного функционала в Λ^n .

9.3. Исследование знака квадратичного функционала

Несмотря на неединственность диагонального или канонического представления, квадратичные функционалы обладают рядом важных свойств, *инвариантных* относительно (то есть не зависящих от) выбора базиса в Λ^n . Одной из таких

носителем (то есть не зависящих от) выбора базиса в Λ^n . Одной из таких характеристик является *ранг квадратичного функционала*.

Определение 9.3.1. Число, не равных нулю коэффициентов канонического вида квадратичного функционала $\Phi(x)$, называется его *рангом* и обозначается $\text{rg } \Phi$.

Теорема 9.3.1. **Ранг квадратичного функционала в Λ^n не зависит от выбора базиса.**

Доказательство:

По следствию 9.1.2. ранг матрицы билинейного функционала не зависит от выбора базиса. Поэтому не будет зависеть от выбора базиса и ранг матрицы порожденной им квадратичного функционала.

С другой стороны, в силу теорем 8.4.3. и 9.1.1., ранг матрицы квадратичного функционала равен числу ненулевых коэффициентов в его каноническом виде.

Теорема доказана.

При исследовании знака значений квадратичного функционала оказывается полезным использование следующих его характеристик:

Определение 9.3.2.

- 1°. Число положительных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n , называется его *положительным индексом инерции*.
- 2°. Число отрицательных коэффициентов диагонального (канонического) вида квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n , называется его *отрицательным индексом инерции*.
- 3°. Разность между положительным и отрицательным индексами инерции называется *сигнатурой* квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n и обозначается $\text{sgn } \Phi$.

Теорема 9.3.2. **Значения положительного и отрицательного индексов инерции, а также сигнатуры квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n не зависят от выбора базиса, в котором этот функционал имеет диагональный (канонический) вид.**

Доказательство:

1°. Пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет в некотором базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ представление $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_{ij} \xi_i \xi_j$ и пусть существуют два различных базиса $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ и $\{g''_1, g''_2, \dots, g''_n\}$, в которых $\Phi(x)$ имеет следующий вид

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \eta_i^2; \quad m \leq n; \quad \forall \lambda_i > 0, i = [1, m]$$

и, соответственно,

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^p \mu_i \kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^q \mu_i \kappa_i^2; \quad q \leq n; \quad \forall \mu_i > 0, i = [1, q].$$

В силу сделанных предположений, должны существовать невырожденные матрицы замены переменных $\|\omega_{ij}\|$ и $\|\theta_{ij}\|$ при переходах от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базисам $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ и $\{g''_1, g''_2, \dots, g''_n\}$ такие, что

$$\eta_s = \sum_{j=1}^n \omega_{sj} \xi_j; \quad s = [1, n] \quad \text{и} \quad \kappa_s = \sum_{j=1}^n \theta_{sj} \xi_j; \quad s = [1, n]. \quad (9.3.1.)$$

2°. Приравняем значения функционала $\Phi(x)$ в базисах $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ и $\{g''_1, g''_2, \dots, g''_n\}$ для некоторого элемента $x = \sum_{k=1}^n \xi_k g_k = \sum_{i=1}^n \eta_i g'_i = \sum_{j=1}^n \kappa_j g''_j$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \eta_i^2 - \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \eta_i^2 = \sum_{i=1}^p \mu_i \kappa_i^2 - \sum_{i=p+1}^q \mu_i \kappa_i^2$$

и преобразуем полученное равенство к виду

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \eta_i^2 + \sum_{i=p+1}^q \mu_i \kappa_i^2 = \sum_{i=1}^p \mu_i \kappa_i^2 + \sum_{i=k+1}^m \lambda_i \eta_i^2 \quad (9.3.2.)$$

3°. Исследуем полученное соотношение.

Допустим, что $k < p$ и предположим, что элемент x имеет в рассматриваемых базисах компоненты $\eta_i = 0, \forall i = [1, k]; \quad \kappa_i = 0, \forall i = [p+1, n]$. Этих условий меньше, чем n , поскольку $k < p$. Если их подставить в равенства (9.3.1.), то мы получим однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$. Поскольку число таких уравнений меньше числа не-

известных, то можно утверждать, что она имеет нетривиальные решения, а следовательно, элемент x может быть ненулевым.

С другой стороны, из равенства (9.3.2.), положительности чисел $\lambda_i ; i = [1, m]$ и $\mu_i ; i = [1, q]$, а также условий $\eta_i = 0, \forall i = [1, k]; \kappa_i = 0, \forall i = [p+1, n]$ следует, что также $\kappa_i = 0; i = [1, p]$. Что, в свою очередь, означает: следующая из

(9.3.1.) однородная система $\kappa_s = \sum_{j=1}^n \theta_{sj} \xi_j ; s = [1, n]$ с невырожденной основ-

ной матрицей, может иметь только тривиальное решение, а элемент x обязан быть нулевым.

Полученное противоречие показывает ошибочность предположения о том, что $k < p$.

4°. Аналогичными рассуждениями показываем, что невозможно и соотношение $k > p$. Поэтому приходим к заключению, что $k = p$.

5°. По теореме 9.3.1. $m = q$ и потому $k - m = p - q$.

Теорема доказана.

Для исследования знака значений квадратичного функционала введем в рассмотрение понятие его знаковой определенности.

Определение 9.3.3. 1°. Квадратичный функционал $\Phi(x)$ называется *положительно определенным на подпространстве* $\Omega^+ \subset \Lambda$, если $\Phi(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in \Omega^+$.

2°. Квадратичный функционал $\Phi(x)$ называется *отрицательно определенным на подпространстве* $\Omega^- \subset \Lambda$, если $\Phi(x) < 0$ для любого ненулевого $x \in \Omega^-$.

3°. Если же Ω^+ (или Ω^-) совпадает с Λ , то говорят, что квадратичный функционал $\Phi(x)$ является *положительно (отрицательно) определенным*.

4°. Если же $\Phi(x) > 0$ ($\Phi(x) < 0$) для всех $x \in \Lambda$, то говорят, что квадратичный функционал является *положительно (отрицательно) полуопределенным*.

Теорема
9.3.3.

Максимальная размерность подпространства, на котором квадратичный функционал положительно (отрицательно) определен равняется положительному (отрицательному) индексу инерции этого функционала.

Доказательство:

Следует из теоремы 9.3.2. и очевидного равенства числа положительных (отрицательных) элементов матрицы квадратичного функционала в диагональном представлении размерности подпространства Ω^+ (Ω^-).

В таблице 9.3.1. приведены характеристики основных типов квадратичных функционалов

Тип квадратичного функционала	Ранг	Положительный индекс инерции	Отрицательный индекс инерции	Пример канонического вида
Положительно определенный	$= n$	$= n$	$= 0$	$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \xi_i^2$
Положительно полу-определенный	$< n$	$< n$	$= 0$	$\Phi(x) = \sum_{i=1}^k \xi_i^2 ; k < n$
Отрицательно определенный	$= n$	$= 0$	$= n$	$\Phi(x) = \sum_{i=1}^k (-1) \xi_i^2$
Отрицательно полу-определенный	$< n$	$= 0$	$< n$	$\Phi(x) = \sum_{i=1}^k (-1) \xi_i^2 ; k < n$
Произвольный	$\leq n$	$\leq n$	$\leq n$	$\Phi(x) = \sum_{i=1}^k \xi_i^2 + \sum_{i=k+1}^{k+p} (-1) \xi_i^2 ; k + p \leq n$

Таблица 9.3.1.

В ряде прикладных задач оказывается необходимым проведение исследования знаковой определенности квадратичного функционала без приведения его к диагональному виду. Удобное необходимое и достаточное условие положительной определенности квадратичного функционала дает

Теорема

9.3.4.

(Критерий

Сильвестра)

Для положительной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры его матрицы, имеющие вид

$$\det \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \cdots & \varphi_{kk} \end{vmatrix}; \quad k = [1, n]$$

были положительными.

Доказательство достаточности:

1°. Воспользуемся методом математической индукции.

Для $k=1$ достаточность очевидна. Допустим, что из положительности главных миноров матрицы квадратичного функционала порядка до $k=n-1$ включительно следует возможность приведения квадратичного функционала от $n-1$

переменных к виду $\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2$.

2°. Покажем, что в этом случае достаточность будет иметь место и для квадратичных функционалов, зависящих от n переменных.

В выражении для квадратичного функционала, зависящего от n переменных, выделим слагаемые, содержащие ξ_n

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \varphi_{ki} \xi_k \xi_i + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \varphi_{kn} \xi_k \xi_n + \varphi_{nn} \xi_n^2.$$

Двойная сумма в правой части этого равенства есть квадратичный функционал $\Phi^*(x)$, зависящий от $n-1$ переменных, причем его главные миноры совпадают с главными минорами $\Phi(x)$ до порядка $n-1$ включительно, которые, по предположению индукции, положительны. Отсюда следует, что квадратичный функционал $\Phi^*(x)$ положительно определенный и для него существует невырожденная замена переменных

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{n-1} \sigma_{ki} \eta_i; \quad k = [1, n-1],$$

приводящая его к каноническому виду $\Phi^*(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^2$.

Выпишем представление квадратичного функционала $\Phi(x)$ в новых переменных

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'_{in} \eta_i \xi_n + \varphi_{nn} \xi_n^2$$

и выделим в нем полные квадраты

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_i^2 + 2\varphi'_{in} \eta_i \xi_n + \varphi'^2_{in} \xi_n^2) + (\varphi_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'^2_{in}) \xi_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i^2 + \varphi''_{nn} \xi_n^2,$$

где

$$\varphi''_{nn} = \varphi_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \varphi'^2_{in}; \quad \zeta_i = \eta_i + \varphi'_{in} \xi_n; \quad i = [1, n-1].$$

В матричном виде эту замену переменных можно записать как

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \dots \\ \zeta_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \varphi'_{1,n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \varphi'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \varphi'_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_{n-1} \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

и поскольку определитель ее матрицы отличен от нуля, то эта замена невырожденная.

- 3°. Наконец, в силу следствия 9.1.1. определитель матрицы квадратичного функционала сохраняет знак при замене базиса. Знак определителя матрицы квадратичного функционала в исходном базисе положительный, поскольку этот определитель имеет вид

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

и является главным минором порядка n . Но тогда из выражения для $\Phi(x)$ в конечном базисе мы получаем, что определитель матрицы квадратичного функционала $\Phi(x)$ равен φ''_{nn} . Поэтому $\varphi''_{nn} > 0$ и можно сделать замену переменных $\zeta_n = \xi_n \sqrt{\varphi''_{nn}}$, приводящую к каноническому виду функционал

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \zeta_i^2.$$

Следовательно, квадратичный функционал $\Phi(x)$ положительно определен для числа переменных n , а, значит в силу математической индукции, для любого числа переменных.

Достаточность доказана.

Доказательство необходимости критерия Сильвестра положительной определенности квадратичного функционала приводится в разделе "Евклидово пространство", п.10.3.

Исходя из критерия Сильвестра для положительной определенности квадратичного функционала, можно получить аналогичный критерий отрицательной определенности квадратичного функционала:

Следствие
9.3.1.

Для отрицательной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы главные миноры четного порядка матрицы функционала были положительны, а нечетного порядка — отрицательны.

Доказательство:

Пусть квадратичный функционал $\Phi(x)$ отрицательно определенный, тогда функционал $-\Phi(x)$ будет, очевидно, положительно определенным. Применяя к нему критерий Сильвестра положительной определенности, получим для главного минора k -го порядка, используя линейное свойство определителя, условие

$$\det \begin{vmatrix} -\varphi_{11} & -\varphi_{12} & \dots & -\varphi_{1k} \\ -\varphi_{21} & -\varphi_{22} & \dots & -\varphi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varphi_{k1} & -\varphi_{k2} & \dots & -\varphi_{kk} \end{vmatrix} = (-1)^k \det \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \dots & \varphi_{kk} \end{vmatrix} > 0; \quad \forall k = [1, n].$$

Откуда и следует доказываемое утверждение.

Следствие доказано.

9.4. Инварианты линий второго порядка на плоскости

Независимость значений ранга и сигнатуры квадратичного функционала от выбора базиса позволяет выполнить классификацию линий второго порядка на плоскости способом, отличным от приведенного в теореме 4.4.1.

Рассмотрим линию второго порядка на плоскости Oxy в базисе $\{g_1, g_2\}$ и с началом координат в точке O . Эта линия в общем случае задается согласно определению 4.4.1. уравнением вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где числа A, B, C, D, F и E произвольны с одним лишь ограничением, что A, B и C , не равны нулю одновременно ($|A| + |B| + |C| > 0$).

Нетрудно проверить, что при замене начала координат коэффициенты A, B и C не меняются, а при смене базиса преобразуются как коэффициенты квадратичного функционала (см. теорему 9.1.1.). Поэтому можно считать, что многочлен $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ задает квадратичный функционал $\Phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ с матрицей $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ в исходном базисе $\{g_1, g_2\}$.

Используя утверждения теорем 9.2.2. и 9.3.1. $\text{rg } \Phi$ — ранг и $\text{sgn } \Phi$ — сигнатура квадратичного функционала $\Phi(x, y)$ не зависят от выбора системы координат и, следовательно, $\text{rg } \Phi$ и $|\text{sgn } \Phi|$ являются инвариантами линии второго порядка на плоскости. Использование модуля сигнатуры необходимо, поскольку одновременное изменение знаков всех коэффициентов уравнения линии второго порядка изменит, естественно, само уравнение, хотя линия при этом останется той же.

Поскольку в запись уравнения линии второго порядка на плоскости входят также и коэффициенты D, F и E , то следует выяснить, не существуют ли дополнительные инварианты, образованные из всей совокупности коэффициентов A, B, C, D, F и E .

Для этого рассмотрим вспомогательный квадратичный функционал в Λ^3 вида

$$\Psi(x, y, z) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

с матрицей $\begin{pmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{pmatrix}$ в базисе $\{g_1, g_2, g_3\}$.

Заметим, что совокупность всех точек в Λ^3 , для которых $\Psi(x, y, 1) = 0$, есть рассматриваемая нами линия второго порядка, расположенная в пространстве на плоскости $z = 1$.

Пусть в Λ^3 выполняется замена базиса, при которой плоскость $z = 1$ переходит сама в себя. Найдем для этой замены базиса правило изменения коэффициентов квадратичного функционала $\Psi(x, y, z)$.

Лемма
9.4.1.

Матрица $\|S\|$ перехода от базиса $\{g_1, g_2, g_3\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, g'_3\}$, при которой плоскость $z = 1$ переходит сама в себя имеет вид

$$\|S\| = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Доказательство:

Замена координат в плоскости Oxy выполняется по формулам

$$\begin{cases} x = \sigma_{11}x' + \sigma_{12}y' + \sigma_{13} \\ y = \sigma_{21}x' + \sigma_{22}y' + \sigma_{23} \end{cases}'$$

но поскольку при этом $z = 1$ и $z' = 1$, то
$$\begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Невырожденность матрицы $\|S\|$ следует из очевидного условия $\det \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{vmatrix} \neq 0$.

Лемма доказана.

Поскольку ранг и сигнатура квадратичного функционала не меняются при любых заменах базиса, то это будет верным и для замен, переводящих плоскость $z = 1$ саму в себя. Поэтому $\text{rg } \Psi$ и $\text{sgn } \Psi$ сохраняются при таких заменах, а числа $\text{rg } \Psi$ и $|\text{sgn } \Psi|$ являются инвариантами уравнения линии второго порядка.

Таким образом доказана

Теорема
9.4.1.

При любых заменах декартовой системы координат на плоскости Oxy числа $\text{rg } \Phi$, $\text{rg } \Psi$, $|\text{sgn } \Phi|$ и $|\text{sgn } \Psi|$ являются инвариантами линии второго порядка.

Подсчитаем значения чисел $\operatorname{rg} \Phi$, $\operatorname{rg} \Psi$, $|\operatorname{sgn} \Phi|$ и $|\operatorname{sgn} \Psi|$ для девяти видов линий второго порядка на плоскости, приведенных в формулировке теоремы 4.4.1. результаты поместим в таблицу 9.4.1.

	Вид линии	Каноническое уравнение	$\operatorname{rg} \Psi$	$ \operatorname{sgn} \Psi $	$\operatorname{rg} \Phi$	$ \operatorname{sgn} \Phi $
1	Эллипс	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$	3	1	2	2
2	Мнимый эллипс	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$	3	3	2	2
3	Точка	$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$	2	2	2	2
4	Гипербола	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$	3	1	2	0
5	Пересекающиеся прямые	$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$	2	0	2	0
6	Парабола	$y'^2 = 2px'$	3	1	1	1
7	Параллельные прямые	$y'^2 = a^2$	2	0	1	1
8	Пара мнимых прямых	$y'^2 = -a^2$	2	2	1	1
9	Совпадающие прямые	$y'^2 = 0$	1	1	1	1

Таблица 9.4.1.

Из таблицы 9.4.1. следует, что каждый вид линии второго порядка на плоскости имеет свой, уникальный набор значений инвариантов, который может быть принят за признак принадлежности некоторой линии второго порядка к конкретному виду.

В заключение отметим, что

- 1°. Подсчет значений рангов и модулей сигнатур выполняется путем приведения квадратичного функционала к диагональному виду. Однако для параболы приведение функционала $\Psi(x, y, z)$ к диагональному виду матрицей перехода,

переводящей плоскость $z=1$ саму в себя, вообще говоря, невозможно, по-

скольку его матрица имеет вид $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

В этом случае для подсчета ранга и сигнатуры можно использовать матрицу

перехода $\|S\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, которая, хотя и не обеспечивает выполнение

условия перехода плоскости $z=1$ самой в себя, но, как всякая линейная замена координат сохраняет ранг и сигнатуру. Действительно,

$$\|\Psi\|_{g'} = \|S\|^T \|\Psi\|_g \|S\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2p \end{vmatrix}.$$

2°. Для линий второго порядка на плоскости существуют и другие ортогональные инварианты, например, инвариантами являются числа $I_1 = A + C$ и

$I_2 = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Докажите справедливость этого утверждения самостоятельно.

3°. Схема классификации, аналогичная рассмотренной, может быть построена и для поверхностей второго порядка в пространстве.

9.5. Экстремальные свойства квадратичных функционалов

Из теоремы 9.2.1. следует существование в Λ^n базиса, в котором квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид. Допустим, что такой базис $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$

построен так, что $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2$ и $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$. Тогда имеет место

Теорема 9.5.1. Для квадратичного функционала $\Phi(x)$ в Λ^n справедливы соотношения $\lambda_1 = \min_{x \in \Lambda^n} \Phi(x)$ и $\lambda_n = \max_{x \in \Lambda^n} \Phi(x)$, при условии, что компоненты x

удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^n \xi_i'^2 = 1$.

Доказательство:

Если в рассматриваемом базисе $\Phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2$, то, в силу соотношений

$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$, будут иметь место неравенства $\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n \xi_i'^2$ и

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n \xi_i'^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2.$$

Но поскольку $\sum_{i=1}^n \xi_i'^2 = 1$, то будут справедливы и неравенства $\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2 \leq \lambda_n$ и

$\lambda_1 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2$. То есть при $x = \|0, 0, \dots, 1\|^T$ достигается максимум, а при

$x = \|1, 0, \dots, 0\|^T$ — минимум значений функционала.

Теорема доказана.

9.6. Полилинейные функционалы

По аналогии с билинейными функционалами, зависящими от пары элементов линейного пространства, можно определить нелинейные функционалы, обладающие аналогичными свойствами, но зависящие от большего числа аргументов.

Определение
9.6.1.

Пусть в линейном пространстве Λ каждой упорядоченной совокупности k элементов $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ поставлено в соответствие число $Q(x_1, x_2, \dots, x_k)$ так, что для любого $j = [1, k]$

$$Q(x_1, \dots, \alpha x'_j + \beta x''_j, \dots, x_k) = \alpha Q(x_1, \dots, x'_j, \dots, x_k) + \beta Q(x_1, \dots, x''_j, \dots, x_k);$$

$$\forall x', x'' \in \Lambda; \quad \forall \alpha, \beta,$$

тогда говорят, что в Λ задан *полилинейный функционал*, а именно, k — *линейный функционал*.

Пример
9.6.1.

1°. Произведение k линейных функционалов $F_1(x), F_2(x), \dots, F_k(x)$, определенных в Λ , то есть $Q(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_1(x_1)F_2(x_2)\dots F_k(x_k)$, есть k — *линейный функционал*.

- 2°. Смешанное произведение трех векторов в трехмерном геометрическом пространстве является трилинейным функционалом.
- 3°. Определитель n -го порядка есть полилинейный функционал от n элементов в Λ^n в случае, когда координатные представления этих элементов являются столбцами данного определителя.

Раздел 10**ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО****10.1. Определение и основные свойства**

В произвольном линейном пространстве отсутствуют понятия “длины”, “расстояния”, “величины угла” и других метрических характеристик. Однако их использование становится возможным, если в линейном пространстве дополнительно ввести специальную, определяемую ниже операцию.

Определение
10.1.1.

Пусть в вещественном линейном пространстве каждой упорядоченной паре элементов x и y поставлено в соответствие вещественное число (x, y) , называемое *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

- 1°. $(x, y) = (y, x)$;
- 2°. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
- 3°. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
- 4°. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

тогда говорят, что задано *евклидово пространство* E .

Замечание:

аксиомы 1°. – 4°. в совокупности означают, что скалярное произведение есть *билинейный* (что следует из 1°, 2° и 3°) и *симметричный* (следует из 1°) функционал, который, кроме того, порождает *положительно определенный* (следует из 4°) квадратичный функционал. Любой билинейный функционал, обладающий данными свойствами, может быть принят за скалярное произведение.

Пример
10.1.1.

- 1°. Трехмерное геометрическое пространство со скалярным произведением, введенным по правилам п.2.2., является евклидовым.

2°. Пространство n -мерных столбцов $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$; $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ со скалярным произведением, определяемым по формуле $(x, y) = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$, есть евклидово пространство.

3°. Евклидовым будет пространство непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций, скалярным произведением $(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau)y(\tau)d\tau$.

Задача 10.1.1. Можно ли в Λ^3 скалярное произведение определить как произведение длин векторов на куб косинуса угла между ними?

Решение: Нет, нельзя, так как не будет выполняться пункт 3° определения 10.1.1.

Определение 10.1.2. В евклидовом пространстве E назовем

1°. *Нормой* (или *длиной*) элемента x число $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

2°. *Расстоянием* между элементами x и y число $|x - y|$.

Замечание: использование для обозначения нормы элемента ограничителей вида $|\dots|$ не приводит к каким-либо конфликтам с введенными ранее обозначениями, поскольку для линейного пространства вещественных чисел норма числа очевидно совпадает с его абсолютной величиной, для комплексного числа норма совпадает с его модулем, а для линейного пространства геометрических векторов — с длиной вектора.

Теорема 10.1.1. (Неравенство Коши-Буняковского) **Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство $|(x, y)| \leq |x| |y|$.**

Доказательство:

Для $\forall x, y \in E$ и вещественного числа τ элемент $x - \tau y \in E$. Согласно п.4° из 10.1.1.

$$0 \leq (x - \tau y, x - \tau y) = (x, x) - 2(x, y)\tau + (y, y)\tau^2 = |x|^2 - 2(x, y)\tau + |y|^2 \tau^2, \quad \forall \tau.$$

Полученный квадратный трехчлен неотрицателен для любого τ тогда и только тогда, когда его дискриминант неположителен, то есть $(x, y)^2 - |x|^2 |y|^2 \leq 0$.

Теорема доказана.

Задача
10.1.2.

Показать, что неравенство Коши-Буняковского превращается в равенство тогда и только тогда, когда элементы x и y линейно зависимы.

Следствие
10.1.1.

(Неравенство
треугольника)

Для любых $x, y \in E$ имеет место неравенство $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство:

Из аксиом евклидова пространства и неравенства Коши – Буняковского имеем:

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \leq \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2, \end{aligned}$$

откуда, в силу неотрицательности чисел $|x + y|$ и $|x| + |y|$, получаем неравенство треугольника.

Следствие доказано.

Отметим, что неравенства Коши – Буняковского и треугольника для евклидова пространства из примера 10.1.1.(2°) имеют вид:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i \right| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^k \xi_j^2} \sqrt{\sum_{k=1}^k \eta_k^2} ; & \sqrt{\sum_{i=1}^n (\xi_i + \eta_i)^2} &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^k \xi_j^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^k \eta_k^2}, \\ \forall \xi_i, \eta_i ; \quad i &= [1, n] & \forall \xi_i, \eta_i ; \quad i &= [1, n] \end{aligned}$$

в то время как для евклидова пространства из примера 10.1.1.(3°), соответственно:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau)y(\tau)d\tau \right| \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau)d\tau} \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau)d\tau}; \quad \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} (x(\tau) + y(\tau))^2 d\tau} \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} x^2(\tau)d\tau} + \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} y^2(\tau)d\tau}.$$

Определение 10.1.3. В евклидовом пространстве E величиной угла между ненулевыми элементами x и y назовем число $\alpha \in [0, \pi]$, удовлетворяющее соотношению

$$\cos \alpha = \frac{(x, y)}{|x| |y|}.$$

Из неравенства Коши – Буняковского (теорема 10.1.1.) следует, что величина угла существует для любой пары ненулевых элементов в E .

Определение 10.1.4. В евклидовом пространстве E ненулевые элементы x и y называются *ортгоналичными*, если $(x, y) = 0$.

Нулевой элемент евклидова пространства считается ортгоналичным любому другому элементу.

10.2. Ортонормированный базис. Ортгонализация базиса

Определение 10.2.1. В конечномерном евклидовом пространстве E^n базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называется *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j = [1, n]$.

Теорема 10.2.1. (Грама-Шмидта) **Во всяком евклидовом пространстве E^n существует ортонормированный базис.**

Доказательство:

1°. Пусть в E^n дан некоторый, вообще говоря, неортгоналичный базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Построим вначале базис $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ из попарно ортгоналичных элементов. Последовательное построение этих элементов будем называть *процессом ортгонализации базиса*.

Возьмем $e'_1 = g_1$. Элемент e'_2 будем искать в виде $e'_2 = g_2 + \alpha e'_1$, где α – некоторая константа. Подберем α так, чтобы $(e'_1, e'_2) = 0$, для этого достаточно,

чтобы

$$(e'_1, e'_2) = (e'_1, g_2 + \alpha e'_1) = (e'_1, g_2) + \alpha (e'_1, e'_1) = 0; \quad \alpha = -\frac{(e'_1, g_2)}{(e'_1, e'_1)}.$$

Заметим, что $e'_2 \neq 0$. Действительно, из $0 = e'_2 = g_2 + \alpha e'_1 = g_2 + \alpha g_1$ следует линейная зависимость g_1 и g_2 , что противоречит условию принадлежности этих элементов базису (см. лемму 7.2.2.).

2°. Допустим теперь, что нам удалось ортогонализировать $k-1$ элемент, и примем в качестве e'_k элемент $e'_k = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j e'_j$. Потребуем, чтобы $(e'_k, e'_i) = 0$; $\forall i = [1, k-1]$:

$$(e'_i, e'_k) = (e'_i, g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j e'_j) = (e'_i, g_k) + \alpha_i (e'_i, e'_i) = 0;$$

$$\alpha_i = -\frac{(e'_i, g_k)}{(e'_i, e'_i)}; \quad i = [1, k-1].$$

Покажем теперь, что в этом случае $e'_k \neq 0$.

Допустим противное: $e'_k = g_k + \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j e'_j = 0$. Однако поскольку все элементы e'_i ; $i = [1, k-1]$ по построению есть некоторые линейные комбинации элементов g_i ; $i = [1, k-1]$, мы приходим к линейной зависимости g_i ; $i = [1, k]$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $e'_k \neq 0$.

3°. Процесс ортогонализации продолжается до исчерпания множества элементов g_i ; $i = [1, n]$, после чего достаточно пронормировать полученные элементы e'_i ; $i = [1, n]$, чтобы получить искомым ортонормированный базис

$$\left\{ \frac{e'_1}{|e'_1|}, \frac{e'_2}{|e'_2|}, \dots, \frac{e'_n}{|e'_n|} \right\}.$$

Теорема доказана.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта может быть применен к любой, в том числе и к линейно зависимой, системе элементов евклидова пространства. Если ортогонализуемая система линейно зависима, то на некотором шаге мы получим

гонализуемая система линейно зависима, то на некотором шаге мы получим нулевой элемент, после отброса которого можно продолжить процесс ортогонализации.

10.3. Координатное представление скалярного произведения

Полезным инструментом исследования свойств некоторого набора элементов $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ в евклидовом пространстве является матрица Грама.

Определение 10.3.1. В евклидовом пространстве E матрицей Грама системы элементов $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ называется матрица

$$\|G\| = \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_2, f_1) & \dots & (f_k, f_1) \\ (f_1, f_2) & (f_2, f_2) & \dots & (f_k, f_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (f_1, f_k) & (f_2, f_k) & \dots & (f_k, f_k) \end{vmatrix}.$$

Пусть в E^n дан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Скалярное произведение элементов $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ и $y = \sum_{j=1}^n \eta_j g_j$, согласно определению 10.1.1., представляется в виде

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i g_i, \sum_{j=1}^n \eta_j g_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j (g_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} \xi_i \eta_j,$$

где $\gamma_{ij} = (g_i, g_j); \forall i, j = [1, n]$ — компоненты матрицы $\|G\|_g$, называемой *базисной матрицей Грама*. Заметим, что эта матрица симметрическая и является матрицей билинейного функционала, задающего скалярное произведение. Тогда координатное представление скалярного произведения может быть записано так:

$$(x, y) = \|x\|_g^T \|G\|_g \|y\|_g = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_2, g_1) & \dots & (g_n, g_1) \\ (g_1, g_2) & (g_2, g_2) & \dots & (g_n, g_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_1, g_n) & (g_2, g_n) & \dots & (g_n, g_n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{vmatrix},$$

где $\|x\|_g$ и $\|y\|_g$ – координатные столбцы элементов x и y в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Очевидно, что эта формула согласуется с п.2.3. и п.9.2.

Заметим, наконец, что в ортонормированном базисе $\|G\|_e = \|E\|$, а формула для скалярного произведения принимает вид $(x, y) = \|x\|_g^T \|y\|_g = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i$.

Теорема 10.3.1. **Для базисной матрицы Грама $\|G\|_g$ в любом базисе $\det \|G\|_g > 0$.**

Доказательство:

Из определения 10.1.1. следует, что скалярное произведение есть билинейный, симметричный функционал, поэтому при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ (с матрицей перехода $\|S\|$) по теореме 9.1.1. для матрицы Грама имеют место равенства:

$$\|G\|_{g'} = \|S\|^T \|G\|_g \|S\| \quad ; \quad \det \|G\|_{g'} = \det \|G\|_g (\det \|S\|)^2, \text{ где } \det \|S\| \neq 0,$$

откуда следует, что значение $\operatorname{sgn}(\det \|G\|_g)$ инвариантно, то есть не изменяется при замене базиса. Наконец, приняв во внимание, что в ортонормированном базисе $\det \|G\|_e = 1$, приходим к заключению, что в любом базисе $\det \|G\|_g > 0$.

Теорема доказана.

Следствие 10.3.1. **Система элементов $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ в E^n линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы Грама этой системы положителен.**

Доказательство:

Если элементы $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ линейно зависимы, то определитель их матрицы Грама равен нулю. Действительно, пусть существуют не равные нулю одновременно числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ такие, что $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \dots + \lambda_k f_k = 0$.

Умножив это равенство скалярно слева на f_i ; $\forall i = [1, k]$, получим $\lambda_1 (f_i, f_1) + \lambda_2 (f_i, f_2) + \dots + \lambda_k (f_i, f_k) = 0$; $\forall i = [1, k]$. Тогда, согласно правилам действий с матрицами (см. п.1.1.), следует, что линейная комбинация столбцов матрицы Грама, имеющая коэффициентами числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, будет равна нулевому столбцу и, следовательно, будет равен нулю определитель матрицы Грама (см. лемму 6.5.2. и теорему 6.5.2.).

С другой стороны, если элементы $\{f_1, f_2, \dots, f_k\}$ линейно независимы, то они

образуют базис в своей линейной оболочке и к ним применим результат теоремы 10.3.1.

Следствие доказано.

Теперь можно доказать необходимость в теореме 9.3.4.

Теорема
9.3.4.
(Критерий
Сильвестра)

Для положительной определенности квадратичного функционала в Λ^n необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры его матрицы, имеющие вид

$$\det \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1k} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{k1} & \varphi_{k2} & \dots & \varphi_{kk} \end{vmatrix} ; \quad k = [1, n],$$

были положительными.

Доказательство необходимости:

1°. В п.10.1. было отмечено, что введение скалярного произведения в линейном пространстве равносильно заданию некоторого симметричного билинейного функционала, порождающего положительно определенный квадратичный функционал. Обратно, по положительно определенному квадратичному функционалу, однозначно восстанавливается породивший его симметричный билинейный функционал, который можно принять за скалярное произведение.

2°. Покажем, что у положительно определенного квадратичного функционала все главные миноры положительны. Действительно, если ввести в Λ^n скалярное произведение при помощи его порождающего билинейного функционала, то матрица этого квадратичного функционала в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ есть матрица Грама.

Рассмотрим последовательно линейные оболочки систем элементов вида $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}; k = [1, n]$. Все эти системы линейно независимы (как подмножества базиса) и по теореме 10.3.1. соответствующие им матрицы Грама имеют положительные определители, поэтому

$$\det \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1k} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \dots & \beta_{kk} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} (g_1, g_1) & (g_1, g_2) & \dots & (g_1, g_k) \\ (g_2, g_1) & (g_2, g_2) & \dots & (g_2, g_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (g_k, g_1) & (g_k, g_2) & \dots & (g_k, g_k) \end{vmatrix} > 0 ; \quad k = [1, n].$$

Теорема доказана.

Теорема
10.3.2.**Координатный столбец любого элемента x евклидова пространства E^n в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ может быть представлен в виде**

$$\|x\|_g = \| \Gamma \|_g^{-1} \|b\|_g,$$

где $\| \Gamma \|_g$ – матрица Грама, а столбец $\|b\|_g = \begin{pmatrix} (x, g_1) \\ (x, g_2) \\ \dots \\ (x, g_n) \end{pmatrix}$.

Доказательство:

Умножим обе части равенства $x = \sum_{i=1}^n \xi_i g_i$ скалярно на g_k , $k = [1, n]$. Тогда получим систему уравнений $\sum_{i=1}^n \xi_i (g_i, g_k) = (x, g_k)$, $k = [1, n]$, основная матрица которой есть матрица Грама. Поскольку, в силу теоремы 10.3.1., эта матрица невырожденная, приходим к формуле $\|x\|_g = \| \Gamma \|_g^{-1} \|b\|_g$.

Теорема доказана.

Следствие
10.3.2.**В ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ евклидова пространства E^n**

для любого элемента $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in E^n$ имеют место равенства
 $\xi_i = (x, e_i), i = [1, n]$.

Доказательство:

Для ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ матрица Грама единичная, поэтому из теоремы 10.3.2. получаем, что $\xi_i = (x, e_i), i = [1, n]$.

Следствие доказано.

10.4. Ортогональные матрицы в евклидовом пространстве

Рассмотрим два различных ортонормированных базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ в E^n с матрицей перехода $\|S\|$ от первого базиса ко второму. Поскольку в этих базисах матрица Грама единичная, то из соотношения $\|G\|_{e'} = \|S\|^T \|G\|_e \|S\|$ следует равенство $\|E\| = \|S\|^T \|E\| \|S\|$, или $\|E\| = \|S\|^T \|S\|$. Поскольку матрица перехода $\|S\|$ невырожденная, то, окончательно, имеем $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$.

В развернутой форме равенство $\|E\| = \|S\|^T \|S\|$ принимает вид $\delta_{kl} = \sum_{i=1}^n \sigma_{ki}^T \sigma_{il}$; $k, l = [1, n]$, которое для частного случая $n = 3$ было получено в п.2.9.

Напомним, что согласно определению 5.1.4. матрица $\|Q\|$, удовлетворяющая соотношению $\|Q\|^T = \|Q\|^{-1}$, называется ортогональной.

Ортогональные матрицы обладают следующими из их определения свойствами:

- 1°. $\|Q\|^T \|Q\| = \|Q\| \|Q\|^T = \|E\|$;
- 2°. $\det \|Q\| = \pm 1$;
- 3°. Ортогональные матрицы (и только они) могут служить матрицами перехода от одного ортонормированного базиса к другому;
- 4°. Собственные значения линейного оператора, имеющего ортогональную матрицу, равны по модулю единице.

Проверим справедливость последнего утверждения.

Из равенства $\|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda \|f\|_g$ следует, что $\|f\|_g^T \|\hat{A}\|_g^T = \lambda \|f\|_g^T$. Перемножив почленно эти равенства, получим соотношение $\|f\|_g^T \|\hat{A}\|_g^T \|\hat{A}\|_g \|f\|_g = \lambda^2 \|f\|_g^T \|f\|_g$. В силу ортогональности $\|\hat{A}\|_g$ имеем $\|\hat{A}\|_g^T \|\hat{A}\|_g = \|E\|$, а потому $\|f\|_g^T \|f\|_g = \lambda^2 \|f\|_g^T \|f\|_g$ и, наконец, $\lambda^2 = 1$, поскольку собственные векторы f ненулевые.

Ортогональные матрицы играют важную роль в вычислительных методах алгебры, что, например, иллюстрирует

Теорема
10.4.1.

Если матрица $\|A\|$ невырождена, то ее разложение вида $\|A\| = \|Q\| \|R\|$, где $\|Q\|$ – ортогональная матрица, а $\|R\|$ – верхняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, существует и единственно.

Доказательство:

Предположим, что имеется¹⁾ два разложения $\|A\| = \|Q_1\| \|R_1\| = \|Q_2\| \|R_2\|$. Из невырожденности $\|A\|$ следует невырожденность $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$, поскольку $\|Q_1\|$ и $\|Q_2\|$ ортогональные и очевидно невырожденные. Тогда последнее равенство можно переписать в виде $\|Q_2\|^T \|Q_1\| = \|R_2\| \|R_1\|^{-1}$, где $\|R_1\|^{-1}$ также верхняя треугольная матрица.

Заметим, что $\|R_2\| \|R_1\|^{-1}$ есть диагональная матрица. Действительно, с одной стороны, она верхняя треугольная матрица как произведение верхних треугольных. С другой стороны, $\|R_2\| \|R_1\|^{-1}$ должна быть и нижней треугольной, поскольку она ортогональная (как произведение двух ортогональных матриц $\|Q_2\|^T \|Q_1\|^{-1}$) и ее обратная матрица совпадает с транспонированной.

Очевидно, что диагональная ортогональная матрица может иметь на диагонали лишь элементы, равные по модулю единице. Но диагональные элементы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$ положительны по условию, поэтому остается возможным лишь случай $\|R_2\| \|R_1\|^{-1} = \|E\|$, откуда и следует единственность разложения.

Теорема доказана.

Отметим, что, в силу теоремы 10.4.1. решение неоднородной системы линейных уравнений $\|A\| x = \|b\|$ может быть сведено к разложению невырожденной матрицы $\|A\|$ – на произведение верхней треугольной $\|R\|$ и ортогональной $\|Q\|$, поскольку в этом случае система преобразуется к легко решаемому виду $\|R\| x = \|Q\|^T \|b\|$.

¹⁾ Обоснование существования такого разложения выходит за рамки данного курса. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь вопроса о его единственности.

10.5. Ортогональные дополнения и ортогональные проекции в евклидовом пространстве

Пусть в E задано некоторое подпространство E_1 . Рассмотрим множество $E_2 \subset E$ элементов x , ортогональных всем элементам из E_1 .

Определение 10.5.1. В евклидовом пространстве E совокупность элементов x таких, что $(x, y) = 0$ для $\forall y \in E_1 \subset E$ называется *ортогональным дополнением* множества E_1 .

Теорема 10.5.1. Ортогональное дополнение k -мерного подпространства $E_1 \subset E^n$ является подпространством размерности $n-k$.

Доказательство:

Пусть в E^n со стандартным скалярным произведением дан ортонормированный базис и пусть E_2 ортогональное дополнение к E_1 . Выберем некоторый базис в E_2 $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$. Тогда из условия ортогональности произвольного элемента $x \in E_2$ каждому элементу E_1 следует (см. теорему 7.4.1.), что $(x, g_i) = 0$; $i = [1, n]$ или же, в координатной форме,

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}\xi_1 + \varepsilon_{12}\xi_2 + \dots + \varepsilon_{1n}\xi_n = 0 \\ \varepsilon_{21}\xi_1 + \varepsilon_{22}\xi_2 + \dots + \varepsilon_{2n}\xi_n = 0 \\ \\ \varepsilon_{k1}\xi_1 + \varepsilon_{k2}\xi_2 + \dots + \varepsilon_{kn}\xi_n = 0 \end{cases}, \text{ где } g_j = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_{j1} \\ \varepsilon_{j2} \\ ... \\ \varepsilon_{jn} \end{matrix} \right\|; \quad j = [1, k] \text{ и } x = \left\| \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ ... \\ \xi_n \end{matrix} \right\|.$$

Эта однородная система линейных уравнений (неизвестные в которой есть компоненты элемента x), определяющая ортогональное дополнение E_2 , имеет ранг k в силу линейной независимости элементов $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$. Тогда, по теореме 6.7.1., у нее есть $n-k$ линейно независимых решений, образующих базис подпространства E_2 .

Теорема доказана.

Убедимся теперь в справедливости следующего утверждения.

Теорема 10.5.2. Если E_2 ортогональное дополнение подпространства $E_1 \subset E$, то E_1 является ортогональным дополнением E_2 .

Доказательство:

Для каждого элемента $x \in E_2$ по условию следствия имеет место равенство $(y, x) = 0; \forall y \in E_1$. Но это означает, что для каждого $y \in E_1$ справедливо $(x, y) = 0; \forall x \in E_2$, то есть E_1 является ортогональным дополнением к E_2 в E .

Теорема доказана.

Определение 10.5.2. В евклидовом пространстве E элемент y называется *ортогональной проекцией* элемента x на подпространство E^* , если

$$1^\circ. y \in E^*$$

$$2^\circ. (x - y, z) = 0 \quad \forall z \in E^*.$$

Рассмотрим способ построения ортогональной проекции некоторого элемента $x \in E$ на подпространство $E^* \subset E$, если E^* является k -мерным подпространством. В этом случае в E^* существует базис $\{g_1, g_2, \dots, g_k\}$ и каждый элемент $\forall z \in E^*$, в том числе и y , может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов.

Пусть $y = \sum_{i=1}^k \xi_i g_i$. Подберем числа $\xi_i, i = [1, k]$ так, чтобы $(x - y, z) = 0 \quad \forall z \in E^*$.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы элемент y был ортогонален каждому из базисных элементов подпространства E^* , то есть $(x - y, g_j) = 0, \quad \forall j = [1, k]$. Но тогда числа $\xi_i, i = [1, k]$ находятся из системы линейных уравнений

$$(x - \sum_{i=1}^k \xi_i g_i, g_j) = 0, \quad \forall j = [1, k] \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^k (g_i, g_j) \xi_i = (x, g_j), \quad \forall j = [1, k].$$

Поскольку основная матрица этой системы (как матрица Грама набора линейно независимых элементов $g_1, g_2, \dots, g_k$, см. следствие 10.3.1.) невырожденная, то по теореме 6.4.1. (Крамера) решение данной системы существует и единственно.

Отметим, что если базис $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ в подпространстве E^* ортонормирован — ный, то ортогональная проекция элемента x на E^* есть элемент вида $y = \sum_{i=1}^k (x, e_i) e_i$.

Задача
10.5.1.

В евклидовом пространстве E^4 в некотором ортонормированном базисе система линейных уравнений

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 = 0 \end{cases}$$

задает подпространство E^* . Найти в этом базисе матрицу оператора ортогонального проектирования элементов E^4 на E^* .

Решение:

1°. За базис подпространства E^* можно взять пару элементов g_1 и g_2 , координатные столбцы которых образуют фундаментальную систему решений для

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4 = 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 = 0, \end{cases}$$

например, $\|g_1\| = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\|g_2\| = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2°. Поскольку $\dim E^* = 2$, то размерность ортогонального дополнения E^* согласно теореме 10.5.1. также равна 2. За базис ортогонального дополнения E^* удобно

принять элементы g_3 и g_4 такие, что $\|g_3\| = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\|g_4\| = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, поскольку они

— линейно независимы и

— ортогональны каждому элементу из подпространства E^* , как образованные из коэффициентов, заданной в условии задачи, системы линейных уравнений.

3°. Элементы g_1, g_2, g_3 и g_4 линейно независимые по построению и образуют базис в E^4 . Иначе говоря, каждый элемент из E^4 может быть представлен, и при этом единственным образом, как линейная комбинация элементов g_1, g_2, g_3 и g_4 .

Откуда следует, что искомый оператор $\hat{A}$ — ортогонального проектирования элементов E^4 на E^* , должен удовлетворять соотношениям

$$\hat{A}g_1 = g_1; \quad \hat{A}g_2 = g_2; \quad \hat{A}g_3 = 0; \quad \hat{A}g_4 = 0.$$

В координатном представлении эти равенства можно переписать в виде

$$\left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \|\hat{A}\| \left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\|,$$

и окончательно, воспользовавшись результатами п.6.8., найдем, что

$$\|\hat{A}\| = \left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right\|^{-1} \left\| \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} -2 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \end{array} \right\|.$$

Замечание: геометрическая интерпретация ортогонального проектирования вполне очевидна, однако эта операция используется и в других приложениях.

Например, если E есть евклидово пространство непрерывных на $[\alpha, \beta]$ функций со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_{\alpha}^{\beta} x(\tau)y(\tau)d\tau,$$

а E^* — подпространство степенных многочленов $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \tau^k$ степени не

выше, чем n , то ортогональная проекция $x(\tau)$ — элемента E , на E^* может рассматриваться как наилучшее на $[\alpha, \beta]$ приближение $x(\tau)$ линейной комбинацией степенных многочленов. Подробно эта задача рассмотрена в параграфе 12.3.

10.6. Сопряженные операторы в евклидовом пространстве

Поскольку евклидово пространство является частным случаем линейного пространства, то все изложенные в разделе 8 утверждения справедливы и для линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве. Однако операция скалярного произведения позволяет выделять в евклидовых пространствах специфические классы линейных операторов, обладающих рядом полезных свойств.

Определение 10.6.1. Линейный оператор $\hat{A}^+$, заданный в евклидовом пространстве E , называется *сопряженным линейному оператору $\hat{A}$* , если для $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y)$.

Пример 10.6.1. В евклидовом пространстве, образованном бесконечно дифференцируемыми функциями, равными нулю вне некоторого конечного интервала, со скалярным произведением $(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(\tau)d\tau$, для линейного оператора $\hat{A} = \frac{d}{d\tau}$ (дифференцирования) сопряженным будет оператор $\hat{A}^+ = -\frac{d}{d\tau}$.

Действительно, согласно правилу интегрирования несобственных интегралов по частям имеют место равенства:

$$\begin{aligned} (\hat{A}x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} y(\tau) d\tau = x(\tau)y(\tau) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \frac{dy(\tau)}{d\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left(-\frac{dy(\tau)}{d\tau}\right) d\tau = (x, \hat{A}^+y). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь конечномерное евклидово пространство E^n с базисом $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ и выясним связь матриц линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^+$ в этом базисе, предположив, что сопряженный оператор существует.

Пусть матрицы операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^+$ имеют соответственно вид $\|\hat{A}\|_g$ и $\|\hat{A}^+\|_g$, а

элементы x и y представляются в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ координатными столбцами $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$

и $\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}$, тогда равенство $(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y)$ в определении 10.6.1., можно записать как

$$\left(\|\hat{A}\|_g \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \right)^T \|\Gamma\|_g \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}^T \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad (10.6.1.)$$

где $\|\Gamma\|_g$ — матрица Грама выбранного в E^n базиса.

В силу соотношения $(\|A\| \|B\|)^T = \|B\|^T \|A\|^T$ последнее равенство записывается в виде

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}^T (\|\hat{A}\|_g^T \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g) \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix} = 0,$$

а поскольку это равенство справедливо при любых x и y , то, приняв во внимание невырожденность матрицы Грама и проведя рассуждения аналогичные использованным при доказательстве леммы 5.1.2., заключаем, что матрица, стоящая в круглых скобках, — нулевая, и потому из соотношения

$$\|\hat{A}\|_g^T \|\Gamma\|_g - \|\Gamma\|_g \|\hat{A}^+\|_g = \|O\| \quad \text{следует} \quad \|\hat{A}^+\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|\hat{A}\|_g^T \|\Gamma\|_g,$$

которое, в частности, для ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ имеет вид $\|\hat{A}^+\|_e = \|\hat{A}\|_e^T$.

Лемма 10.6.1. Если $(x, \hat{A}y) = 0$; $\forall x, y \in E$, то оператор $\hat{A}$ нулевой.

Доказательство:

Пусть для $\forall x, y \in E$ справедливо равенство $(x, \hat{A}y) = 0$. Тогда оно будет верным и для $x = \hat{A}y$. Но из равенства $(\hat{A}y, \hat{A}y) = 0$ согласно определению 10.1.1. следует, что $\hat{A}y = 0$. Наконец, в силу произвольности элемента y и определения 8.2.2., приходим к заключению, что $\hat{A} = \hat{O}$.

Лемма доказана.

Теорема
10.6.1.

Каждый линейный оператор в евклидовом пространстве E^n имеет единственный сопряженный оператор.

Доказательство:

Существование в E^n оператора $\hat{A}^+$, сопряженного оператору $\hat{A}$, следует из возможности построения матрицы вида $\| \Gamma \|_g^{-1} \| \hat{A} \|_g^T \| \Gamma \|_g$ для любого линейного оператора $\hat{A}$.

Покажем теперь единственность $\hat{A}^+$. Предположим, что $\hat{A}$ имеет два сопряженных оператора $\hat{A}^+$ и $\hat{A}^\times$. Это означает, что для $\forall x, y \in E$ одновременно выполнены равенства

$$(\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+y) \quad \text{и} \quad (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^\times y).$$

Вычитая почленно, получим $(x, (\hat{A}^+ - \hat{A}^\times)y) = 0$, но тогда по лемме 10.6.1. $\hat{A}^+ - \hat{A}^\times = \hat{O}$.

Теорема доказана.

Теорема
10.6.2.

Для любых линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в E , имеет место равенство $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$.

Доказательство:

Для $\forall x, y \in E$ имеет место $((\hat{A}\hat{B})^+ x, y) = (x, \hat{A}\hat{B}y) = (\hat{A}^+ x, \hat{B}y) = (\hat{B}^+ \hat{A}^+ x, y)$. Это означает, что $((\hat{A}\hat{B})^+ - \hat{B}^+ \hat{A}^+)x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$ и, в силу леммы 10.6.1., $(\hat{A}\hat{B})^+ - \hat{B}^+ \hat{A}^+ = \hat{O}$.

Теорема доказана.

Теорема
10.6.3.

$$(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}.$$

Доказательство:

$\forall x, y \in E$ справедливы равенства $((\hat{A}^+)^+ x, y) = (x, \hat{A}^+ y) = (\hat{A}x, y)$. Отсюда следует, что $((\hat{A} - (\hat{A}^+)^+)x, y) = 0$, $\forall x, y \in E$ и, следовательно по лемме 10.6.1. $\hat{A} - (\hat{A}^+)^+ = \hat{O}$.

Теорема доказана.

Теорема
10.6.4.

Ортогональное дополнение области значений оператора $\hat{A}$ в E^n является ядром оператора $\hat{A}^+$.

Доказательство:

- 1°. Покажем вначале, что ядро оператора $\hat{A}^+$, обозначаемое через $\ker \hat{A}^+$, содержится во множестве Π — ортогональном дополнении области значений оператора $\hat{A}$.

Действительно, любой элемент $y \in \ker \hat{A}^+$, то есть такой, что $\hat{A}^+ y = 0$, будет ортогонален элементу $b = \hat{A}x$, $x \in E^n$, поскольку

$$(b, y) = (\hat{A}x, y) = (x, \hat{A}^+ y) = 0.$$

- 2°. Теперь достаточно показать, что размерности $\ker \hat{A}^+$ и Π совпадают. Действительно, с одной стороны, в силу невырожденности матрицы Грама и теоремы 8.4.3.,

$$\dim(\ker \hat{A}^+) = n - \operatorname{rg} \hat{A}^+ = n - \operatorname{rg}(\|\Gamma\|^{-1} \|\hat{A}\|^T \|\Gamma\|) = n - \operatorname{rg} \hat{A}^T = n - \operatorname{rg} \hat{A}.$$

Но, с другой стороны, по теореме 8.4.1. размерность области значений $\hat{A}$ равна $\operatorname{rg} \hat{A}$, поэтому $\dim(\Pi) = n - \operatorname{rg} \hat{A}$ по теореме 10.5.1.

Теорема доказана.

Замечание: в использованных обозначениях теорема 10.6.4. допускает:

- 1°. Формулировку совпадающую с формулировкой теоремы 6.6.2., поскольку совместность системы $\hat{A}x = b$ означает, что элемент b принадлежит области значений линейного оператора $\hat{A}$.
- 2°. В предположении, что столбцы $\|y\|$ и $\|b\|$ суть координатные представления элементов E^m в ортонормированном базисе, также и ниже — следующую формулировку:

Теорема
10.6.5.
(Теорема
Фредгольма)

Система линейных уравнений $\|A\| \|x\| = \|b\|$ совместна тогда и только тогда, когда каждое решение однородной сопряженной системы $\|A\|^T \|y\| = 0$ ортогонально столбцу свободных членов $\|b\|$.

10.7. Самосопряженные операторы

Определение 10.7.1. Линейный оператор $\hat{R}$, действующий в евклидовом пространстве E , называется **самосопряженным**, если для $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$.

Пример 10.7.1. В евклидовом пространстве операторы вида $\hat{A} + \hat{A}^+$, $\hat{A}\hat{A}^+$ и $\hat{A}^+\hat{A}$ будут самосопряженными для любого линейного оператора $\hat{A}$.

Действительно, для оператора $\hat{A}^+\hat{A}$, например, имеем, что при $\forall x, y \in E$ $(\hat{A}^+\hat{A}x, y) = (\hat{A}x, \hat{A}y) = (x, \hat{A}^+\hat{A}y)$, откуда и следует его самосопряженность.

Свойства самосопряженных операторов сформулируем в виде следующих утверждений.

Лемма 10.7.1. **Линейный оператор $\hat{R}$ в E^n является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица в каждом ортонормированном базисе симметрическая.**

Доказательство:

Из определения 10.7.1. и формулы $\|\hat{R}^+\|_g = \|\Gamma\|_g^{-1} \|\hat{R}\|_g^T \|\Gamma\|_g$ для некоторого ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ $\|\hat{R}^+\|_e = \|\hat{R}\|_e^T$ и, следовательно, $\|\hat{R}\|_e = \|\hat{R}\|_e^T$ в силу самосопряженности оператора $\hat{A}$.

Перейдем к другому ортонормированному базису $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$. Матрица перехода $\|S\|$, как было показано в п.10.4., ортогональная, то есть для нее $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\hat{R}\|_{e'}^T &= (\|S\|^{-1} \|\hat{R}\|_e \|S\|)^T = (\|S\|^T \|\hat{R}\|_e \|S\|)^T = \|S\|^T \|\hat{R}\|_e^T (\|S\|^T)^T = \\ &= \|S\|^T \|\hat{R}\|_e^T \|S\| = \|S\|^T \|\hat{R}\|_e \|S\| = \|S\|^{-1} \|\hat{R}\|_e \|S\| = \|\hat{R}\|_{e'} . \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма
10.7.2.**Все собственные значения самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n вещественные числа.**

Доказательство:

Допустим противное: пусть характеристическое уравнение самосопряженного оператора $\hat{R}$ имеет комплексный корень $\lambda = \alpha + \beta i$, где $\beta \neq 0$.

По теореме 8.6.2. оператор $\hat{R}$ в этом случае имеет двумерное инвариантное подпространство. То есть существует пара линейно независимых элементов x и y таких, что
$$\begin{cases} \hat{R}x = \alpha x - \beta y \\ \hat{R}y = \alpha y + \beta x \end{cases}$$
. Умножая эти равенства скалярно: первое — справа на y , второе — слева на x , получим

$$\begin{cases} (\hat{R}x, y) = \alpha(x, y) - \beta(y, y) \\ (x, \hat{R}y) = \alpha(x, y) + \beta(x, x) \end{cases}$$

Вычитая почленно второе равенство из первого и принимая во внимание самосопряженность $\hat{R}$, приходим к заключению, что $\beta(|x|^2 + |y|^2) = 0$. Однако это противоречит предположению о том, что $\beta \neq 0$.

Лемма доказана.

Лемма
10.7.3.**Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.**

Доказательство:

Пусть для самосопряженного оператора $\hat{R}$ имеют место равенства $\hat{R}f_1 = \lambda_1 f_1$ и $\hat{R}f_2 = \lambda_2 f_2$, где ненулевые элементы f_1 и f_2 — собственные векторы оператора $\hat{A}$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — соответствующие им собственные значения. Умножая эти равенства скалярно: первое — справа на f_2 , второе — слева на f_1 , получим

$$\begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = (\lambda_1 f_1, f_2) \\ (f_1, \hat{R}f_2) = (f_1, \lambda_2 f_2) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\hat{R}f_1, f_2) = \lambda_1(f_1, f_2) \\ (f_1, \hat{R}f_2) = \lambda_2(f_1, f_2) \end{cases}$$

Вычитая эти равенства почленно и учитывая, что $\hat{R}$ самосопряженный оператор, приходим к равенству $(\lambda_1 - \lambda_2)(f_1, f_2) = 0$, откуда $(f_1, f_2) = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 10.7.4. Пусть E' — инвариантное подпространство самосопряженного оператора $\hat{R}$, действующего в E , и пусть E'' — ортогональное дополнение к E' в E . Тогда E'' также инвариантное подпространство оператора $\hat{R}$.

Доказательство:

E' инвариантно для оператора $\hat{R}$, то есть $\forall x \in E': \hat{R}x \in E'$. Если E'' — ортогональное дополнение E' , то для любых $x' \in E'$ и $x'' \in E'': (x', x'') = 0$.

Поскольку E' инвариантное подпространство $\hat{R}$, то будет также иметь место $(\hat{R}x', x'') = 0$. Но, в силу самосопряженности $\hat{R}$ и $(x', \hat{R}x'') = 0$. Последнее равенство означает, что $\hat{R}x'' \in E''$; $\forall x'' \in E''$, то есть и подпространство E'' будет инвариантным для оператора $\hat{R}$.

Лемма доказана.

Теорема 10.7.1. Для любого самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\hat{R}$.

Доказательство:

Для самосопряженного оператора $\hat{R}$ в E^n существует по крайней мере одно собственное значение λ_1 . По лемме 10.7.2. это собственное значение вещественно. Из системы уравнений (8.5.1.) можно найти отвечающий λ_1 собственный вектор e_1 . Без ограничения общности можно считать, что $|e_1| = 1$. Если $n=1$, то доказательство завершено.

Рассмотрим E^1 — линейную оболочку элемента e_1 , являющуюся одномерным инвариантным собственным подпространством $\hat{R}$. Пусть E^{n-1} — ортогональное дополнение к E^1 . Тогда по лемме 10.7.4., E^{n-1} инвариантно относительно оператора $\hat{R}$.

Рассмотрим теперь оператор $\hat{R}$ как действующий только в E^{n-1} . Тогда очевидно, что $\hat{R}$ — самосопряженный оператор, заданный в E^{n-1} , поскольку E^{n-1} инвариантно относительно $\hat{R}$ по лемме 10.7.4. и, кроме того, для $\forall x, y \in E^n: (\hat{R}x, y) = (x, \hat{R}y)$, в том числе и для $\forall x, y \in E^{n-1}$.

Применяя изложенные выше рассуждения, найдем новое собственное значение λ_2 и соответствующий ему собственный вектор e_2 . Без ограничения общности

можно считать, что $|e_2| = 1$. При этом λ_2 может случайно совпасть с λ_1 , однако, из построения ясно, что $(e_1, e_2) = 0$. Если $n=2$, то доказательство завершено. Иначе рассмотрим E^2 — линейную оболочку $\{e_1, e_2\}$ и ее ортогональное дополнение E^{n-2} , найдем новое собственное значение λ_3 и соответствующий ему собственный вектор e_3 и т.д.

Аналогичные рассуждения проводим до исчерпания E^n .

Теорема доказана.

Следствие 10.7.1. В базисе, построенном в теореме 10.7.1., самосопряженный оператор $\hat{R}$ имеет диагональную матрицу в E^n .

Доказательство:

Вытекает из утверждения теоремы 8.5.1.

Следствие 10.7.2. Размерность собственного инвариантного подпространства, отвечающего некоторому собственному значению самосопряженного оператора, равна кратности этого собственного значения.

Доказательство:

Следует из доказательства теоремы 10.7.1.

Следствие 10.7.3. Если линейный оператор $\hat{R}$ в E^n имеет n попарно ортогональных собственных векторов, то он самосопряженный.

Доказательство:

Пронормируем собственные векторы оператора $\hat{R}$ и примем их за ортонормированный базис, в котором матрица этого линейного оператора $\|\hat{R}\|_e$ диагональная и, следовательно, симметрическая. Тогда в силу леммы 10.7.1. линейный оператор $\hat{A}$ самосопряженный.

Следствие доказано.

Следствие 10.7.4. Если $\|R\|$ симметрическая матрица, то существует ортогональная матрица $\|Q\|$ такая, что матрица $\|D\| = \|Q\|^{-1} \|R\| \|Q\| = \|Q\|^T \|R\| \|Q\|$ диагональная.

Доказательство:

В ортонормированном базисе симметрическая матрица $\|R\|$ определяет само-сопряженный оператор, поэтому в качестве искомой матрицы $\|Q\|$ можно выбрать матрицу перехода от данного ортонормированного базиса к ортонормированному базису, образованному собственными векторами этого оператора по схеме использованной в доказательстве теоремы 10.7.1.

Следствие доказано.

10.8. Ортогональные операторы

Определение 10.8.1. Линейный оператор $\hat{Q}$, действующий в евклидовом пространстве E , называется *ортогональным* (или *изометрическим*), если для $\forall x, y \in E$ имеет место равенство $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$.

Из определения 10.8.1. следует, что ортогональный оператор сохраняет нормы элементов и величины углов между ними. Действительно,

$$\begin{aligned} |\hat{Q}x| &= \sqrt{(\hat{Q}x, \hat{Q}x)} = \sqrt{(x, x)} = |x|; \\ \cos \psi &= \frac{(\hat{Q}x, \hat{Q}y)}{|\hat{Q}x| |\hat{Q}y|} = \frac{(x, y)}{|x| |y|} = \cos \varphi; \quad x, y \in E, \end{aligned}$$

где φ — величина угла между элементами x и y , а ψ — величина угла между элементами $\hat{Q}x$ и $\hat{Q}y$.

Теорема 10.8.1. Ортогональный оператор $\hat{Q}$ имеет обратный $\hat{Q}^{-1}$, причем $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^+$.

Доказательство:

Для $\forall x, y \in E$ по определению 10.8.1. $(\hat{Q}x, \hat{Q}y) = (x, y)$, отсюда следует, что $(x, \hat{Q}^+ \hat{Q}y) = (x, y)$ или $(x, (\hat{Q}^+ \hat{Q} - \hat{E})y) = 0$. Последнее равенство в силу леммы 10.6.1. означает, что $\hat{Q}^+ \hat{Q} - \hat{E} = \hat{O}$.

Из равенства $\hat{Q}^+ \hat{Q} - \hat{E} = \hat{O}$ вытекает, что $\hat{Q}^+ \hat{Q} = \hat{E}$ и тогда, убедившись при помощи аналогичных рассуждений, что будет также справедливым и равенство $\hat{Q} \hat{Q}^+ = \hat{E}$, по определению 8.2.8. получим $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^+$.

Теорема доказана.

Следствие 10.8.1. **Ортогональный оператор $\hat{Q}$ невырожденный.**

Следствие 10.8.2. **В ортонормированном базисе матрица ортогонального оператора ортогональная.**

Доказательство:

Пусть оператор $\hat{Q}$ ортогональный. Тогда из соотношения $\hat{Q}^{-1} = \hat{Q}^+$, по теореме 10.8.1. и в силу п.8.3.(4°), в ортонормированном базисе справедливы равенства

$$\|\hat{Q}\|_e^{-1} = \|\hat{Q}^{-1}\|_e = \|\hat{Q}^+\|_e = \|\hat{Q}\|_e^T.$$

Но тогда $\|\hat{Q}\|_e^{-1} = \|\hat{Q}\|_e^T$, что и означает, согласно определению 5.1.4., ортогональность матрицы $\|\hat{Q}\|_e$.

Следствие доказано.

В ряде приложений оказывается полезной

Теорема 10.8.2. (О полярном разложении) **Любой невырожденный линейный оператор $\hat{A}$ в E^n может быть единственным образом представлен в виде $\hat{A} = \hat{Q}\hat{R}$, где оператор $\hat{Q}$ ортогональный, а оператор $\hat{R}$ — самосопряженный и имеющий положительные собственные значения.**

Доказательство:

1°. Покажем вначале, что самосопряженный оператор $\hat{A}^+ \hat{A}$ (см. пример 10.7.1.) имеет только положительные собственные значения. Действительно, пусть $\hat{A}^+ \hat{A} f = \lambda f$, тогда, с одной стороны, $(\hat{A}^+ \hat{A} f, f) = (\hat{A} f, \hat{A} f) > 0$ при $f \neq 0$, а с другой, $(\hat{A}^+ \hat{A} f, f) = (\lambda f, f) = \lambda(f, f)$, то есть $(\hat{A} f, \hat{A} f) = \lambda(f, f)$. Но тогда все $\lambda > 0$ в силу невырожденности $\hat{A}$ и определения скалярного произведения.

2°. Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов $\hat{A}^+ \hat{A}$. Рассмотрим множество элементов $\hat{A} e_i$; $i = [1, n]$. Заметим, что

$(\hat{A}e_i, \hat{A}e_j) = (\hat{A}^+ \hat{A}e_i, e_j) = \lambda_i(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}; i, j = [1, n]$. Но это означает, что $\left\{ e'_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \hat{A}e_i; i = [1, n] \right\}$ — также базис и притом ортонормированный.

3°. Примем за искомый ортогональный оператор $\hat{Q}$ — оператор, переводящий ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ в ортонормированный базис $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, и убедимся, что в качестве $\hat{R}$ можно взять оператор $\hat{Q}^{-1} \hat{A}$.

Действительно, во — первых, имеет место равенство $\hat{A} = \hat{Q} \hat{R}$. Во — вторых, из соотношений $\hat{R}e_i = \hat{Q}^{-1} \hat{A}e_i = \hat{Q}^{-1} \sqrt{\lambda_i} e'_i = \sqrt{\lambda_i} e_i; i = [1, n]$ следует, что базисные элементы $e_i, i = [1, n]$ есть собственные векторы оператора $\hat{R}$, отвечающие положительным собственным значениям $\sqrt{\lambda_i}$, а значит, матрица $\|\hat{R}\|_e$ в базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ диагональная и потому симметрическая. Тогда, в силу леммы 10.7.1., оператор $\hat{R}$ самосопряженный.

4°. Покажем, наконец, единственность разложения. Во введенных обозначениях справедливо равенство $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}^2$, поскольку из $\hat{A} = \hat{Q} \hat{R}$ и $\hat{A}^+ = \hat{R}^+ \hat{Q}^+$ следует, что

$$\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}^+ \hat{Q}^+ \hat{Q} \hat{R} = \hat{R}^+ \hat{Q}^{-1} \hat{Q} \hat{R} = \hat{R}^+ \hat{R},$$

то, в силу самосопряженности $\hat{R}$, $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}^2$.

Предположим, что существуют два различных самосопряженных оператора $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ с положительными собственными значениями такие, что $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}_1^2$; $\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{R}_2^2$ и $\hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 = \hat{O}$.

Заметим, что $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ по построению (см. 2°.) имеют общую систему собственных векторов, а потому они коммутируют. Но тогда, согласно п.8.2., справедливы равенства

$$\hat{R}_1^2 - \hat{R}_2^2 = \hat{R}_1^2 - \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \hat{R}_2 \hat{R}_1 - \hat{R}_2^2 = (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \hat{O}.$$

Из невырожденности и линейности $\hat{R}_1$ и $\hat{R}_2$ в силу теоремы 8.6.8. оператор $\hat{R}_1 + \hat{R}_2$ также невырожденный и поэтому из равенства $(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)(\hat{R}_1 + \hat{R}_2) = \hat{O}$ следует $\hat{R}_1 - \hat{R}_2 = \hat{O}$. Таким образом, $\hat{R}$ — самосопряженный оператор, определяемый по $\hat{A}$ однозначно. Но $\hat{Q} = \hat{R}^{-1} \hat{A}$ и, значит, также определяется однозначно по $\hat{A}$.

Теорема доказана.

Замечания: 1°. Теорема о полярном разложении является обобщением теоремы 5.5.2. о возможности представления аффинного преобразования плоскости в виде произведения двух операторов, первый из которых ортогональный, а второй — сжатие по двум взаимно перпендикулярным направлениям, матрица которого диагональная.

2°. В случае вырожденного оператора $\hat{A}$ разложение, аналогичное указанному в теореме 10.8.2., с неотрицательными собственными значениями самосопряженного оператора $\hat{R}$ существует, но не единственно.

Задача
10.8.1.

В некотором ортонормированном базисе в E^2 линейный оператор $\hat{A}$ имеет матрицу $\|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$. Найти его полярное разложение.

Решение:

1°. Выполним искомое разложение по схеме, использованной в доказательстве теоремы 10.8.2. Матрица оператора $\hat{A}^+ \hat{A}$ в исходном ортонормированном базисе равна

$$\|\hat{A}^+ \hat{A}\| = \|\hat{A}^+\| \|\hat{A}\| = \|\hat{A}\|^T \|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 3 \end{vmatrix}.$$

Собственные значения и собственные векторы этого оператора равны соответственно

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 4; \quad \|f_1\| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{vmatrix}; \quad \|f_2\| = \begin{vmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix},$$

поэтому (сохраняя обозначения, использованные в доказательстве теоремы 10.8.2.) получим для элементов, образующих ортонормированные базисы $\{e_1, e_2\}$

$$\|e_1\| = \frac{\|f_1\|}{|f_1|} = \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{vmatrix}; \quad \|e_2\| = \frac{\|f_2\|}{|f_2|} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

и $\{e'_1, e'_2\}$

$$\|e'_1\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \hat{A} e_1 \right\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{vmatrix}; \quad \|e'_2\| = \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \hat{A} e_2 \right\| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}.$$

2°. Обозначив через $\|G\| = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix}$ и $\|F\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$ соответственно матрицы перехода от исходного базиса к базисам $\{e_1, e_2\}$ и $\{e'_1, e'_2\}$, и рассуждая так же, как при решении задачи 7.5.2., получим для матрицы ортогонального оператора $\hat{Q}$ выражение $\|\hat{Q}\| = \|G\|^{-1} \|F\|$.

Учитывая, что матрица $\|G\|$ ортогональная (как матрица перехода, связывающая два ортонормированных базиса), находим матрицу

$$\|\hat{Q}\| = \|G\|^{-1} \|F\| = \|G\|^T \|F\| = \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix},$$

которая в исходном ортонормированном базисе ортогональная.

3°. Поскольку $\hat{R} = \hat{Q}^{-1} \hat{A}$, то

$$\|\hat{R}\| = \|\hat{Q}^{-1}\| \|\hat{A}\| = \|\hat{Q}\|^{-1} \|\hat{A}\| = \|\hat{Q}\|^T \|\hat{A}\| = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix},$$

и, следовательно, искомое полярное разложение имеет вид

$$\|\hat{A}\| = \|\hat{Q}\| \|\hat{R}\| = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix}.$$

Раздел 11

УНИТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

11.1. Определение унитарного пространства

Определение
11.1.1.

Пусть в комплексном линейном пространстве U каждой упорядоченной паре элементов a и b поставлено в соответствие комплексное¹⁾ число $\langle a|b \rangle$, называемое их *скалярным произведением*, так, что выполнены аксиомы:

$$1^\circ. \quad \langle a|b \rangle = \overline{\langle b|a \rangle};$$

$$2^\circ. \quad \langle \lambda a|b \rangle = \bar{\lambda} \langle a|b \rangle;$$

$$3^\circ. \quad \langle a_1 + a_2|b \rangle = \langle a_1|b \rangle + \langle a_2|b \rangle;$$

$$4^\circ. \quad \langle a|a \rangle - \text{вещественное неотрицательное число, причем} \\ \langle a|a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = o,$$

тогда говорят, что задано *унитарное пространство*.

Для обозначения скалярного произведения в унитарном пространстве мы будем использовать не круглые скобки, принятые в евклидовом пространстве, а скобки типа "брэкет".

Замечание: вид аксиомы 1° позволяет избежать проблемы, которая возникает в случае использования евклидовского правила коммутативности скалярного произведения для комплексных линейных пространств.

Действительно, если принять, что $\langle a|b \rangle = \langle b|a \rangle$, то $\langle a|\lambda b \rangle = \bar{\lambda} \langle a|b \rangle$ и очевидно, что при некотором ненулевом a и $\lambda = i$

$$\langle ia|ia \rangle = (\bar{i})(\bar{i})\langle a|a \rangle = (-i)^2 \langle a|a \rangle = i^2 \langle a|a \rangle = -\langle a|a \rangle,$$

¹⁾ Определение и основные свойства комплексных чисел приводятся в приложении 3.

но тогда либо $\langle ia|ia \rangle$, либо $\langle a|a \rangle$ не положительно и аксиома 4° не будет справедливой.

В случае же равенства $\langle a|b \rangle = \overline{\langle b|a \rangle}$ вынос λ из-под знака второго сомножителя скалярного произведения выполняется иначе:

$$\langle a|\lambda b \rangle = \overline{\langle \lambda b|a \rangle} = \overline{\lambda \langle b|a \rangle} = \overline{\lambda} \overline{\langle b|a \rangle} = \lambda \overline{\langle b|a \rangle} = \lambda \langle a|b \rangle,$$

поскольку $\overline{\overline{\lambda}} = \lambda$, и что в рассматриваемом примере приводит к равенству

$$\langle ia|ia \rangle = \overline{i} i \langle a|a \rangle = \langle a|a \rangle,$$

которое согласуется с аксиомой 4°.

Пример
11.1.1.

1°. Пространство n -мерных столбцов $a = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}$, где

ξ_i, η_i ; $i = [1, n]$ — комплексные числа, со скалярным произведением, определяемым по формуле $\langle a|b \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\xi_i} \eta_i$, является унитарным.

2°. Унитарным будет пространство непрерывных на $[\alpha, \beta]$ комплекснозначных функций со скалярным произведением

$$\langle a|b \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{a(\tau)} b(\tau) d\tau.$$

В унитарных пространствах, как правило, имеют силу определения и теоремы, справедливые для евклидова пространства. Например, неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$$\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle \geq \langle a|b \rangle \langle b|a \rangle.$$

Действительно,

$$\langle a|a \rangle \langle b|b \rangle \geq |\langle a|b \rangle|^2 = \langle a|b \rangle \overline{\langle a|b \rangle} = \langle a|b \rangle \langle b|a \rangle \text{ для } \forall a, b \in U.$$

В конечномерном унитарном пространстве U^n базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ при необходимости может быть ортогонализирован по стандартной схеме. Выражение для скалярного произведения в координатах аналогично евклидовскому случаю и имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle a | b \rangle &= \begin{vmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 & \dots & \bar{\xi}_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1n} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \dots & \Gamma_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \bar{\xi}_1 & \bar{\xi}_2 & \dots & \bar{\xi}_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \langle g_1 | g_1 \rangle & \langle g_1 | g_2 \rangle & \dots & \langle g_1 | g_n \rangle \\ \langle g_2 | g_1 \rangle & \langle g_2 | g_2 \rangle & \dots & \langle g_2 | g_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle g_n | g_1 \rangle & \langle g_n | g_2 \rangle & \dots & \langle g_n | g_n \rangle \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где $\|\Gamma\|$ — матрица Грама в унитарном пространстве U^n . Заметим, что поскольку $\langle g_i | g_j \rangle = \overline{\langle g_j | g_i \rangle}$, то имеет место равенство $\|\Gamma\|^T = \overline{\|\Gamma\|}$.

Определение 11.1.2. Матрица $\|A\|$, удовлетворяющая соотношению $\|A\|^T = \overline{\|A\|}$, называется *эрмитовой*.
Матрица $\|A\|$, удовлетворяющая соотношениям $\|A\|^T \overline{\|A\|} = \|E\|$ и $\overline{\|A\|} \|A\|^T = \|E\|$, называется *унитарной*.

Определитель унитарной матрицы есть комплексное число, модуль которого равен единице. Действительно,

$$\det(\|A\|^T \overline{\|A\|}) = \det \|A\|^T \det \overline{\|A\|} = \det \|A\| \overline{\det \|A\|} = |\det \|A\||^2 = \det \|E\| = 1.$$

11.2. Линейные операторы в унитарном пространстве

Для унитарного пространства справедливы определения, введенные для линейных операторов в разделе 10. В данном пункте будут рассмотрены лишь специфические особенности линейных операторов, действующих в унитарном пространстве.

Определение 11.2.1. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в унитарном пространстве U , называется *унитарным* (или *изометрическим*), если $\forall a, b \in U$ имеет место равенство $\langle \hat{A}a | \hat{A}b \rangle = \langle a | b \rangle$.

Замечание: Унитарный линейный оператор, действующий в конечномерном унитарном пространстве U^n , в ортонормированном базисе имеет унитарную матрицу.

Определение 11.2.2. Линейный оператор $\hat{A}^+$, действующий в унитарном пространстве U , называется *эрмитово сопряженным* линейному оператору $\hat{A}$, если для $\forall a, b \in U$ имеет место равенство $\langle \hat{A}a | b \rangle = \langle a | \hat{A}^+b \rangle$.

Теорема 11.2.1. Для линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в унитарном пространстве U , справедливы соотношения: $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$ и $(\lambda \hat{A})^+ = \bar{\lambda} \hat{A}^+$.

Доказательство:

Докажем первое соотношение.

Имеем $\langle (\hat{A}\hat{B})a | b \rangle = \langle \hat{B}a | \hat{A}^+b \rangle = \langle a | \hat{B}^+ \hat{A}^+b \rangle$, $\forall a, b \in U$. Отсюда получаем, по определению 11.2.2., что $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$.

Аналогично $\langle (\lambda \hat{A})a | b \rangle = \bar{\lambda} \langle \hat{A}a | b \rangle = \bar{\lambda} \langle a | \hat{A}^+b \rangle = \langle a | \bar{\lambda} \hat{A}^+b \rangle$, $\forall a, b \in U$ для любого комплексного числа λ .

Теорема доказана.

Для эрмитовски сопряженных операторов, действующих в конечномерном пространстве U^n , имеет место

Теорема 11.2.2. Матрица оператора $\hat{A}^+$, эрмитово сопряженного оператору $\hat{A}$ в U^n , в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ определяется соотношением:

$$\| \hat{A}^+ \|_g = \| \Gamma \|^{-1} \| \hat{A} \|_g^T \| \Gamma \|,$$

доказательство которой аналогично выводу формулы (10.6.1.) для евклидова пространства.

11.3. Эрмитовы операторы

Определение 11.3.1. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в унитарном пространстве, называется *эрмитово самосопряженным* (или просто *эрмитовым*), если $\hat{A} = \hat{A}^+$.

Замечание: эрмитов оператор, действующий в конечномерном унитарном пространстве U^n , обладает свойствами, аналогичными свойствам самосопряженного оператора в евклидовом пространстве E^n .

В частности:

- 1°. Собственные значения эрмитова оператора вещественны.
- 2°. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям эрмитова оператора, ортогональны.
- 3°. Для каждого эрмитова оператора существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов.
- 4°. В ортонормированном базисе унитарного пространства U^n эрмитов оператор имеет эрмитову матрицу.

Определение 11.3.2. Собственное значение λ линейного оператора $\hat{A}$ называется *вырожденным*, если отвечающее ему инвариантное собственное подпространство имеет размерность, бо́льшую единицы.

Приведем формулировки и обоснование наиболее важных свойств эрмитовых операторов.

Теорема 11.3.1. Два эрмитовых оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ имеют общую систему собственных векторов тогда и только тогда, когда $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, то есть когда эти операторы коммутируют.

Доказательство:

Докажем необходимость.

Пусть $\hat{A}a = \lambda a$ и $\hat{B}a = \mu a$, тогда

$$\hat{B}\hat{A}a = \lambda\hat{B}a = \lambda\mu a$$

$$\hat{A}\hat{B}a = \mu\hat{A}a = \lambda\mu a$$

и, вычитая почленно, получим, что $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})a = 0$. Поскольку a произвольный собственный вектор, то данное соотношение верно и для всей совокупности собственных векторов, а значит, и для любого элемента унитарного пространства, так как из собственных векторов можно образовать базис. Поэтому $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{O}$.

Докажем достаточность.

Пусть эрмитовы операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ коммутируют и пусть, кроме того, $\hat{A}a = \lambda a$. Рассмотрим случай лишь невырожденных собственных значений, то есть случай, когда все собственные значения различны.

Покажем теперь, что элемент унитарного пространства $b = \hat{B}a$ является собственным вектором оператора $\hat{A}$. Действительно, в силу $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$,

$$\hat{A}b = \hat{A}\hat{B}a = \hat{B}\hat{A}a = \hat{B}\lambda a = \lambda\hat{B}a = \lambda b.$$

Поскольку все собственные значения $\hat{A}$ кратности единица, то λ есть его собственное значение, отвечающее a и b одновременно. Поэтому $b = \kappa a$ и в силу $b = \hat{B}a$ $\hat{B}a = \kappa a$. То есть a — собственный вектор оператора $\hat{B}$.

Теорема доказана.

Теорема
11.3.2.
(О вырожде-
нии)

Если эрмитов оператор $\hat{A}$ коммутирует с каждым из двух некоммутирующих между собой эрмитовых операторов $\hat{B}$ и $\hat{C}$, то все собственные значения оператора $\hat{A}$ вырожденные.

Доказательство:

Пусть Λ^* — линейная оболочка f , является одномерным инвариантным собственным подпространством оператора $\hat{A}$, отвечающее его собственному значению λ кратности единица.

Из коммутруемости операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$ (по теореме 11.3.1.) имеем, что $\hat{B}f = \mu f$, а из коммутруемости $\hat{A}$ и $\hat{C}$ следует, что $\hat{C}f = \kappa f$. Но тогда, в силу $\hat{A}f = \lambda f$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B}f = \hat{B}\hat{A}f = \lambda\mu f & \quad \hat{C}\hat{B}\hat{A}f = \lambda\mu\kappa f & \quad \hat{C}\hat{B}(\lambda f) = \mu\kappa(\lambda f) \\ \hat{A}\hat{C}f = \hat{C}\hat{A}f = \lambda\kappa f & \quad \hat{B}\hat{C}\hat{A}f = \lambda\mu\kappa f & \quad \hat{B}\hat{C}(\lambda f) = \mu\kappa(\lambda f) \end{aligned}$$

Вычитая эти равенства почленно, получаем, что $(\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B})(\lambda f) = 0$; $\forall f \in \Lambda^*$, то есть $\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B} = \hat{O}$ и операторы $\hat{B}$ и $\hat{C}$ коммутируют. Но последнее утверждение противоречит условию теоремы и, следовательно, необходимо допустить существование более чем одного линейно независимого элемента в Λ^* .

Теорема доказана.

В таблице 11.3.1. приведены некоторые понятия и свойства евклидова и унитарного пространств таким образом, чтобы облегчить их сравнительное сопоставление.

11.4. Эрмитовы функционалы. Среднее значение и дисперсия эрмитова оператора

Как и в любом линейном пространстве, в унитарном пространстве можно ввести билинейные и квадратичные функционалы. Например, в унитарном пространстве непрерывных комплекснозначных на $[\alpha, \beta]$ функций $\psi(\tau)$ билинейным по $\overline{\varphi(\tau)}$ и $\psi(\tau)$ функционалом является выражение

$$B(\overline{\varphi(\tau)}, \psi(\tau)) = \iint_{\Omega} \overline{\varphi(\sigma)} K(\sigma, \tau) \psi(\tau) d\sigma d\tau.$$

Определение
11.4.1.

Квадратичный функционал вида $\Phi(x) = \langle x | \hat{A}x \rangle$, где $x \in U$, а линейный оператор $\hat{A}$ — эрмитов, называется *эрмитовым функционалом* (или *эрмитовой формой*) в унитарном пространстве U .

Определение
11.4.2.

Число $\hat{A}_a = \langle a | \hat{A}a \rangle$ называется *средним значением эрмитова оператора $\hat{A}$ по a -нормированному элементу из унитарного пространства*.

Евклидово пространство	Унитарное пространство
Правило выноса константы из первого сомножителя в скалярном произведении: $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$	Правило выноса константы из первого сомножителя в скалярном произведении: $\langle \lambda a b \rangle = \bar{\lambda} \langle a b \rangle$
Ортогональный оператор $\hat{A}$: $(\hat{A}a, \hat{A}b) = (a, b); \quad \forall a, b \in E$	Унитарный оператор $\hat{A}$: $\langle \hat{A}a \hat{A}b \rangle = \langle a b \rangle \quad \forall a, b \in U$
Ортогональная матрица: $\ A\ ^T \ A\ = \ E\ $	Унитарная матрица: $\ A\ ^T \overline{\ A\ } = \ E\ $
В ортонормированном базисе в E^n ортогональный оператор имеет ортогональную матрицу	В ортонормированном базисе в U^n унитарный оператор имеет унитарную матрицу
Сопряженный оператор $\hat{A}^+$: $(\hat{A}a, b) = (a, \hat{A}^+b); \quad \forall a, b \in E$	Эрмитово сопряженный оператор $\hat{A}^+$: $\langle \hat{A}a b \rangle = \langle a \hat{A}^+b \rangle \quad \forall a, b \in U$
В E^n сопряженный оператор имеет матрицу $\ \hat{A}^+\ _g = \ \Gamma\ ^{-1} \ \hat{A}\ _g^T \ \Gamma\ $	В U^n эрмитово сопряженный оператор имеет матрицу $\ \hat{A}^+\ _g = \ \Gamma\ ^{-1} \overline{\ \hat{A}\ _g^T} \ \Gamma\ $
Самосопряженный оператор: $(\hat{A}a, b) = (a, \hat{A}b); \quad \forall a, b \in E$	Эрмитово самосопряженный (эрмитов) оператор: $\langle \hat{A}a b \rangle = \langle a \hat{A}b \rangle \quad \forall a, b \in U$
Симметрическая матрица: $\ A\ ^T = \ A\ $	Эрмитова матрица: $\ A\ ^T = \overline{\ A\ }$
В ортонормированном базисе в E^n самосопряженный оператор имеет симметрическую матрицу	В ортонормированном базисе в U^n эрмитов оператор имеет эрмитову матрицу
Из собственных векторов самосопряженного оператора в E^n можно образовать ортонормированный базис	Из собственных векторов эрмитова оператора в U^n можно образовать ортонормированный базис

Таблица 11.3.1.

Замечания: 1°. Если a – нормированный (то есть с $|a| = \sqrt{\langle a|a \rangle} = 1$) собственный вектор эрмитова оператора $\hat{A}$ с соответствующим собственным значением λ , то $\hat{A}_a = \lambda$, поскольку в этом случае

$$\hat{A}_a = \langle a|\hat{A}a \rangle = \langle a|\lambda a \rangle = \lambda \langle a|a \rangle = \lambda.$$

2°. Среднее значение эрмитова оператора, заданного в унитарном пространстве, вещественно.

Пусть $\hat{A}^+ = \hat{A}$, тогда $\langle \hat{A}a|a \rangle = \langle a|\hat{A}^+a \rangle = \langle a|\hat{A}a \rangle = \overline{\langle \hat{A}a|a \rangle}$, но если некоторое число равно своему комплексному сопряжению, то оно вещественно.

3°. Если принять, что оператор умножения на константу κ есть $\hat{\kappa} = \kappa \hat{E}$, где $\hat{E}$ – единичный оператор, то имеет место соотношение $\hat{A} - \hat{A}_a = 0$.

Действительно,

$$\hat{A} - \hat{A}_a = \langle a|(\hat{A} - \hat{A}_a)a \rangle = \langle a|\hat{A}a \rangle - \langle a|\hat{A}_a a \rangle = \hat{A}_a - \hat{A}_a \langle a|a \rangle = 0.$$

Определение 11.4.3. Число $\hat{A} = \frac{(\hat{A} - \hat{A}_a)^2}{=a}$ называется *дисперсией эрмитова оператора $\hat{A}$* по нормированному элементу унитарного пространства a .

Отметим следующие свойства дисперсии:

Теорема 11.4.1. **Дисперсия $\hat{A} = \frac{(\hat{A} - \hat{A}_a)^2}{=a}$ эрмитова оператора $\hat{A}$, действующего в унитарном пространстве, есть вещественное неотрицательное число, для которого справедливо равенство $\hat{A} = \frac{(\hat{A})^2}{=a} - (\hat{A}_a)^2$.**

Доказательство:

Покажем вначале, что число $\hat{A} = \frac{(\hat{A} - \hat{A}_a)^2}{=a}$ вещественное и неотрицательное.

Оператор $\hat{A} - \hat{A}_a$ очевидно эрмитов, поскольку эрмитовыми являются операторы $\hat{A}$ (по условию теоремы) и $\hat{A}_a$ (как оператор умножения на константу). Тогда

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{\underline{a}} &= \langle a | (\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})^2 a \rangle = \langle a | (\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})(\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})a \rangle = \\
&= \langle (\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})^+ a | (\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})a \rangle = \\
&= \langle (\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})a | (\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})a \rangle \geq 0 .
\end{aligned}$$

С другой стороны, исходя из определения 11.4.2., получим

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{\underline{a}} &= \frac{(\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})^2}{a} = \langle a | (\hat{A} - \hat{A}_{\underline{a}})^2 a \rangle = \\
&= \langle a | ((\hat{A})^2 - 2\hat{A}\hat{A}_{\underline{a}} + (\hat{A}_{\underline{a}})^2) a \rangle = \\
&= \langle a | (\hat{A})^2 a \rangle - 2\hat{A}_{\underline{a}} \langle a | \hat{A} a \rangle + (\hat{A}_{\underline{a}})^2 \langle a | a \rangle = \\
&= \frac{(\hat{A})^2}{a} - 2\frac{\hat{A}}{a}\hat{A}_{\underline{a}} + \frac{(\hat{A}_{\underline{a}})^2}{a} = \frac{(\hat{A})^2}{a} - \frac{(\hat{A}_{\underline{a}})^2}{a} .
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 11.4.2. Для эрмитова оператора $\hat{A}$, действующего в унитарном пространстве, дисперсия, взятая по его нормированному собственному вектору, равняется нулю.

Доказательство:

Пусть $\hat{A}a = \lambda a$, тогда

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{\underline{a}} &= \frac{(\hat{A})^2}{a} - \frac{(\hat{A}_{\underline{a}})^2}{a} = \langle a | (\hat{A})^2 a \rangle - \langle a | \hat{A} a \rangle^2 = \\
&= \langle a | \hat{A}(\hat{A}a) \rangle - \langle a | \hat{A} a \rangle^2 = \langle a | \hat{A}(\lambda a) \rangle - \langle a | \lambda a \rangle^2 = \langle a | \lambda \hat{A} a \rangle - \langle a | \lambda a \rangle^2 = \\
&= \lambda \langle a | \lambda a \rangle - \lambda^2 \langle a | a \rangle^2 = \lambda^2 \langle a | a \rangle - \lambda^2 \langle a | a \rangle^2 = \lambda^2 - \lambda^2 = 0 .
\end{aligned}$$

поскольку $\langle a | a \rangle = 1$.

Теорема доказана.

11.5. Соотношение неопределенностей

Для эрмитовых операторов, действующих в унитарном пространстве, справедливо

Теорема
11.5.1.

(Соотношение
неопределен-
ностей)

Для двух эрмитовых операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, заданных в унитарном пространстве, имеет место соотношение:

$$\hat{A} \hat{B} \underset{a=a}{=} \geq \frac{1}{4} \left| \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \right|_a^2.$$

Доказательство:

1°. Рассмотрим, вообще говоря, неэрмитов оператор $\hat{Q} = (\hat{A} - \hat{A}_a) + \tau(\hat{B} - \hat{B}_a)i$ (где τ — некоторый вещественный параметр), для которого эрмитово сопряженным будет оператор вида

$$\hat{Q}^+ = (\hat{A} - \hat{A}_a) - \tau(\hat{B} - \hat{B}_a)i,$$

ибо эрмитовыми являются следующие четыре оператора: $\hat{A}, \hat{A}_a, \hat{B}, \hat{B}_a$.

Заметим также, что оператор $\hat{Q}^+ \hat{Q}$ — эрмитов и что $\langle a | \hat{Q}^+ \hat{Q} a \rangle = \langle \hat{Q} a | \hat{Q} a \rangle \geq 0, \forall \hat{Q}$. (См. доказательство теоремы 10.8.2., п.1°.)

2°. Выразим оператор $\hat{Q}^+ \hat{Q}$ через операторы $\hat{A}, \hat{A}_a, \hat{B}, \hat{B}_a$, получим:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^+ \hat{Q} &= ((\hat{A} - \hat{A}_a) - \tau(\hat{B} - \hat{B}_a)i)((\hat{A} - \hat{A}_a) + \tau(\hat{B} - \hat{B}_a)i) = \\ &= (\hat{A} - \hat{A}_a)^2 + \tau^2(\hat{B} - \hat{B}_a)^2 + \\ &+ \tau((\hat{A} - \hat{A}_a)(\hat{B} - \hat{B}_a) - (\hat{B} - \hat{B}_a)(\hat{A} - \hat{A}_a))i = \\ &= (\hat{A} - \hat{A}_a)^2 + \tau^2(\hat{B} - \hat{B}_a)^2 + \tau(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})i. \end{aligned}$$

3°. Обозначим $\hat{C} = -(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})i$, причем отметим, что из предыдущего равенства следует эрмитовость оператора $\hat{C}$ как линейной комбинации эрмитовых операторов. Подсчитаем теперь среднее значение эрмитова оператора $\hat{Q}^+ \hat{Q}$:

$$\begin{aligned} \hat{Q}^+ \hat{Q} \underset{a}{=} &= \hat{A} \underset{a}{=} + \tau^2 \hat{B} \underset{a}{=} + \langle a | \tau(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})i a \rangle = \\ &= \tau^2 \hat{B} \underset{a}{=} - \tau \hat{C} \underset{a}{=} + \hat{A} \underset{a}{=} . \end{aligned}$$

Полученное значение $\hat{Q}^+ \hat{Q} \underset{a}{=}$ есть вещественный квадратный трехчлен от — носительно τ , который должен быть неотрицательным при любом τ . Отсюда следует, что его дискриминант неположителен, то есть

$$(\hat{C} \underset{a}{=})^2 - 4 \hat{A} \hat{B} \underset{a=a}{=} \leq 0, \text{ или окончательно } \hat{A} \hat{B} \underset{a=a}{=} \geq \frac{1}{4} \left| \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A} \right|_a^2.$$

Теорема доказана.

Раздел 12**ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**

В данном разделе рассматриваются некоторые классы задач, имеющие важное значение в прикладных разделах математики, таких как: математическая физика, теория оптимального управления, математическая экономика, вычислительная математика и т.д., причем общим для этих задач является использование в процессе их решения понятий и методов различных разделов линейной алгебры.

12.1. Приведение квадратичных функционалов к диагональному виду

Задача отыскания базиса, в котором квадратичный функционал имеет диагональный или канонический вид, достаточно часто встречается в различных приложениях механики, физики, теории управления.

Приведение к диагональному виду квадратичного функционала, заданного в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ евклидова пространства E^n задан некоторый квадратичный функционал $\Phi(x)$. Рассмотрим задачу отыскания в E^n ортонормированного базиса $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, в котором функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид.

Принципиальная разрешимость подобной задачи для неортонормированного базиса следует из теоремы 9.2.1. Очевидно, что такой базис не единственный, и потому представляется интересным исследование возможности построения в E^n ортонормированного базиса, в котором данный квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет диагональный вид.

Напомним предварительно (см. п.9.2.), что квадратичный функционал в Λ^n может быть задан формулой $\Phi(x) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \xi_k \xi_i = \|x\|_g^T \Phi \|x\|_g$, в которой симметрическая матрица $\|\Phi\|_g$ преобразуется при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ по правилу $\|\Phi\|_{g'} = \|S\|^T \|\Phi\|_g \|S\|$.

При доказательстве теоремы 9.2.1. использовалась математическая индукция в сочетании с методом *выделения полных квадратов* (называемым иногда методом *Лагранжа*), применение которого на практике малоудобно. Существенно более эффективным (с точки зрения минимизации затрат вычислительных усилий) представляется алгоритм, основой которого является

Теорема 12.1.1. **Для всякого квадратичного функционала, заданного в ортонормированном базисе, существует ортонормированный базис, в котором этот функционал имеет диагональный вид ¹⁾.**

Доказательство:

- 1°. Как было показано в п.9.2., матрица квадратичного функционала $\Phi(x)$ изменяется по правилу $\|\Phi\|_{e'} = \|S\|^T \|\Phi\|_e \|S\|$, где $\|S\| = \|\sigma_{ij}\|$ – матрица перехода от базиса $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ к базису $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$, то есть $e'_k = \sum_{s=1}^n \sigma_{sk} e_s, k = [1, n]$, а $\|\Phi\|_e$ – симметрическая матрица билинейного функционала, порождающего квадратичный функционал $\Phi(x)$.
- 2°. Поскольку матрица перехода $\|S\|$ от одного ортонормированного базиса к другому ортогональная (см. п.10.4.), то для нее справедливо равенство $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$. Откуда вытекает, что в рассматриваемом нами случае $\|\Phi\|_{e'} = \|S\|^{-1} \|\Phi\|_e \|S\|$.
- 3°. Формально симметрическая матрица $\|\Phi\|_e$ в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ определяет самосопряженный оператор (лемма 10.7.1) $\hat{\Phi}$, матрица которого в базисе $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ находится по формуле $\|\Phi\|_{e'} = \|S\|^{-1} \|\Phi\|_e \|S\|$ (теорема 8.3.2.).

¹⁾ Иногда задачу отыскания ортонормированного базиса, в котором квадратичный функционал имеет диагональный вид, называют “приведением квадратичного функционала к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода”.

4°. Совпадение формул изменения матриц квадратичного функционала и самосопряженного оператора при переходе от одного ортонормированного базиса к другому позволяет использовать в качестве базиса $\{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ — ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\hat{\Phi}$. Этот базис существует (см. теорему 10.7.1.) и в нем матрица оператора $\hat{\Phi}$ (а значит, и матрица квадратичного функционала $\Phi(x)$) имеет диагональный вид, причем на главной диагонали расположены собственные значения самосопряженного оператора $\hat{\Phi}$.

Теорема доказана.

Заметим, что утверждение теоремы 12.1.1. согласуется с утверждением следствия 10.7.4.

Используя теорему 12.1.1., можно упростить процедуру оценки экстремальных значений квадратичного функционала. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения максимума и минимума для отношения Релея.

Определение 12.1.1. Функционал $\rho(x) = \frac{(x, \hat{A}x)}{(x, x)}$, заданный в E^n для некоторого самосопряженного оператора $\hat{A}$, называется *отношением Релея*.

Следствие 12.1.1. В ортонормированном базисе максимальное (минимальное) значение отношения Релея равно максимальному (минимальному) собственному значению оператора $\hat{A}$, и это значение достигается на соответствующем собственном векторе этого оператора.

Доказательство:

Поскольку при переходе к ортонормированному базису, образованному из собственных векторов самосопряженного оператора $\hat{A}$ (в силу теоремы 12.1.1.), справедливы соотношения

$$\rho(x) = \frac{(x, \hat{A}x)}{(x, x)} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \xi_j}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i'^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i'^2},$$

то, проводя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 9.5.1., получаем, что $\lambda_{\min} \leq \rho(x) \leq \lambda_{\max}$.

Следствие доказано.

Проиллюстрируем применение теоремы 12.1.1. на примере решения следующей задачи:

Задача 12.1.1. При помощи ортогонального оператора привести к диагональному виду в E^3 квадратичный функционал $\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$.

Решение:

1°. Пусть исходный ортонормированный базис состоит из элементов $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Восстановим по квадратичному функционалу $\Phi(x) = 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2\xi_3$ порождающий его симметричный билинейный функционал $B(x, y)$, используя формулу $B(x, y) = \frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y))$ (см. определение 9.2.2.). В данном случае: $\Phi(y) = 2\eta_1\eta_2 + 2\eta_1\eta_3 - 2\eta_2\eta_3$, а $\Phi(x+y) = 2(\xi_1 + \eta_1)(\xi_2 + \eta_2) + 2(\xi_1 + \eta_1)(\xi_3 + \eta_3) - 2(\xi_2 + \eta_2)(\xi_3 + \eta_3)$, и потому

$$B(x, y) = \xi_1\eta_2 + \xi_1\eta_3 - \xi_2\eta_3 + \eta_1\xi_2 + \eta_1\xi_3 - \eta_2\xi_3, \text{ где } \|x\|_e = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ и } \|y\|_e = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица функционала $\Phi(x)$ имеет вид $\|\Phi\|_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2°. Рассмотрим построенную симметрическую матрицу как задающую самосопряженный оператор $\hat{\Phi}$ в E^3 и найдем для него собственные значения. Составляем характеристическое уравнение 8.5.2. $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$ или $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$. Оно имеет корни: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1$, которые и являются собственными значениями.

Заметим, что, если нас интересует только диагональный вид квадратичного функционала, то его можно написать, основываясь на следствии 10.7.1., как $\Phi(x) = -2\xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2$ и на этом закончить решение задачи.

3°. В случае, когда требуется найти также и матрицу $\|S\|$ — матрицу перехода от исходного ортонормированного базиса к искомому, необходимо построить собствен —

ные векторы оператора $\hat{\Phi}$. Для этого будем последовательно подставлять найденные собственные значения в систему (8.4.1.) и строить ее общие решения.

$$\text{Для } \lambda = -2 \text{ имеем: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что ранг основной матрицы этой системы равен 2, поскольку третье уравнение есть разность первых двух. Далее, действуя по схеме, описанной в п.6.8. (метод Гаусса), получаем для компонентов собственного вектора систему условий

$$\begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 = -\xi_3 \\ \xi_1 + 2\xi_2 = \xi_3 \end{cases}.$$

Принимая ξ_3 за свободное неизвестное, получим собственный вектор $f_1 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Кратность собственного значения $\lambda = 1$ равна 2, и в силу следствия 10.7.2. ему должны отвечать два линейно независимых (но не обязательно ортогональных) собственных вектора. Конкретно, компоненты собственного вектора должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix},$$

из которых независимое только одно $\xi_1 = \xi_2 + \xi_3$. Общее решение этой системы

$$\text{будет иметь вид } \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Каждый столбец такого вида ортогонален f_1 , но выбранные конкретные фундаментальные решения не ортогональны друг другу. Поэтому пару ортогональных собственных векторов, отвечающих $\lambda = 1$, сформируем из первого фундаментального решения и ортогональной ему линейной комбинации первого и

второго. Условие ортогональности столбцов $\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ и $\begin{vmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$, очевидно, есть

$$2\alpha + \beta = 0. \text{ Откуда получаем } f_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ и } f_3 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}.$$

4°. Отнормировав базис $\{f_1, f_2, f_3\}$, получим $e'_1 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix}$, $e'_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix}$ и $e'_3 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}$.

Матрица $\|S\| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}$ (перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису

$\{e'_1, e'_2, e'_3\}$), столбцами которой являются координатные разложения элементов базиса $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$, ортогональная, то есть удовлетворяет соотношению $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$, что позволяет выписать формулы, выражающие "новые" координаты через "старые".

Действительно (см. 7.3.), из соотношения $\begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix} = \|S\| \begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{vmatrix}$ следует $\begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{vmatrix} = \|S\|^{-1} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}$

или окончательно

$$\begin{vmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \xi'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{vmatrix}.$$

Приведение одним линейным оператором пары квадратичных функционалов, один из которых знакоопределенный, соответственно к каноническому и диагональному видам

Пусть в некотором базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ линейного пространства Λ^n задана пара квадратичных функционалов $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, первый из которых, например, положительно определенный. Поставим задачу отыскания базиса $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, в котором функционал $\Phi(x)$ имеет канонический, а функционал $\Psi(x)$ — диагональный вид.

Отметим, что условие положительной определенности одного из приводимых квадратичных функционалов существенно, поскольку в общем случае два различных квадратичных функционала одним линейным преобразованием к диагональному виду не приводятся ¹⁾

Например, квадратичный функционал $\Phi(x) = A\xi_1^2 + 2B\xi_1\xi_2 + C\xi_2^2$ в Λ^2 можно привести к диагональному виду при помощи линейного оператора, сводящегося к повороту плоскости радиусов-векторов на угол α . При этом необходимо (см. доказательство теоремы 4.4.1.), чтобы α удовлетворяло уравнению $(A - C)\sin 2\alpha = 2B\cos 2\alpha$. Однако для пары квадратичных функционалов $\Phi_1(x) = \xi_1^2 - \xi_2^2$ и $\Phi_2(x) = \xi_1\xi_2$ угла α , удовлетворяющего системе условий

$$\begin{cases} 2\sin 2\alpha = 0 \\ 0 = \cos 2\alpha \end{cases},$$

очевидно не существует.

Опишем теперь алгоритм приведения пары квадратичных функционалов $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, первый из которых положительно определенный, соответственно к каноническому и диагональному виду.

- 1°. Поскольку квадратичный функционал $\Phi(x)$ положительно определенный, то для него существует в Λ^n базис, в котором он имеет канонический вид, причем все его коэффициенты равны единице. Приведем этот функционал к данному виду каким-либо методом, например, выделив полные квадраты с последующей нормировкой. Одновременно тем же самым методом преобразуем также и квадратичный функционал $\Psi(x)$.
- 2°. Введем в Λ^n скалярное произведение по формуле $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$, превратив тем самым данное линейное пространство в евклидово E^n . Отметим, что в этом случае базис, в котором $\Phi(x)$ имеет канонический вид, ортонормированный.
- 3°. Построим затем третий, также ортонормированный базис, переход к которому выполняется при помощи матрицы $\|S\|$, приведя квадратичный функционал $\Psi(x)$ к диагональному виду по схеме, описанной в п.12.1.1. При этом переходе квадратичный функционал $\Phi(x)$ не потеряет канонического вида, поскольку из условия $\|\Phi\|_e = \|E\|_e$ и ортогональности $\|S\|$ следует, что

¹⁾ Как и ранее, под "приведением квадратичного функционала к диагональному виду" понимается задача отыскания базиса (или построения матрицы перехода), в котором матрица квадратичного функционала диагональная.

$$\|\Phi\|_{e'} = \|S\|^T \|\Phi\|_e S = \|S\|^T \|E\|_e S = \|S\|^T S = \|S\|^{-1} S = \|E\|_{e'}.$$

Таким образом, построен базис, в котором квадратичный функционал $\Phi(x)$ имеет канонический вид, а функционал $\Psi(x)$ — диагональный.

В заключение отметим, что матрица перехода к искомому ортонормированному базису есть произведение ортогональной матрицы $\|S\|$ и матрицы перехода, при котором положительно определенный квадратичный функционал приводится к диагональному виду.

Задача
12.1.2.

Найти замену переменных, приводящую квадратичные функционалы $\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2$ и $\Psi(x) = 4\xi_1^2 + 16\xi_1\xi_2 + 6\xi_2^2$ одновременно к диагональному виду.

Решение:

- 1°. Исследуем квадратичные функционалы $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на знаковую определенность. Из критерия Сильвестра (теорема 9.3.2.) и неравенств

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0 \quad ; \quad \det \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -40 < 0$$

закключаем, что $\Phi(x)$ — положительно определенный квадратичный функционал, в то время как функционал $\Psi(x)$ не является знакоопределенным.

- 2°. Приведем методом Лагранжа квадратичный положительно определенный функционал $\Phi(x)$ к каноническому виду. Поскольку

$$\Phi(x) = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + 3\xi_2^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 2\xi_2^2,$$

то, выполнив замену переменных $\begin{cases} \xi'_1 = \xi_1 + \xi_2 \\ \xi'_2 = \sqrt{2}\xi_2 \end{cases}$ или $\begin{cases} \xi_1 = \xi'_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\xi'_2 \\ \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\xi'_2 \end{cases}$, получим

$$\Phi(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2 \text{ и, соответственно, } \Psi(x) = 4\xi_1'^2 + 4\sqrt{2}\xi_1'\xi_2' - 3\xi_2'^2.$$

- 3°. Введение в Λ^2 скалярного произведения с единичной матрицей Грама означает, что координаты $\{\xi'_1; \xi'_2\}$ есть координаты евклидова пространства E^2 с базисом

$$\{e'_1, e'_2\}, \text{ где } \|e'_1\|_{e'} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad ; \quad \|e'_2\|_{e'} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица квадратичного функционала $\Psi(x)$ в этом базисе $\|\Psi\|_{e'} = \begin{vmatrix} 4 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & -3 \end{vmatrix}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -4$, а также ортонормированные собственные векторы $\|f_1\|_{e'} = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ и $\|f_2\|_{e'} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix}$, которые примем за новый базис $\{e_1'', e_2''\}$.

4°. Матрица перехода от ортонормированного базиса $\{e_1', e_2'\}$ к ортонормированному базису $\{e_1'', e_2''\}$, в котором $\Phi(x) = \xi_1''^2 + \xi_2''^2$ и $\Psi(x) = 5\xi_1''^2 - 4\xi_2''^2$, ортогональная и имеет вид

$$\|S\| = \begin{vmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{vmatrix}.$$

Откуда получаем, что $\begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1' + \frac{1}{3}\xi_2' \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1' + \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_2' \end{cases}$ и окончательно $\begin{cases} \xi_1'' = \frac{2\sqrt{2}}{3}\xi_1 + \sqrt{2}\xi_2 \\ \xi_2'' = -\frac{1}{3}\xi_1 + \xi_2 \end{cases}$.

Если в задаче одновременного приведения пары квадратичных функционалов, один из которых положительно определенный, соответственно к диагональному и каноническому виду требуется найти лишь этот вид (а не формулы замены переменных), то возможно использование более простой схемы расчетов.

Допустим, что положительно определенный квадратичный функционал $\Phi(x)$ приведен при помощи матрицы перехода $\|S\|$ к каноническому виду, то есть $\|S\|^T \|\Phi\| \|S\| = \|E\|$. После того же преобразования матрица квадратичного функционала $\Psi(x)$ будет иметь вид $\|\Psi^*\| = \|S\|^T \|\Psi\| \|S\|$.

Согласно теореме 12.1.1. в ортонормированном базисе для построения диагонального вида квадратичного функционала $\Psi(x)$ достаточно найти собственные числа самосопряженного оператора, матрица которого есть $\|\Psi^*\|$. Найдем выражение для этой матрицы, учитывающее связь между матрицами $\|\Phi\|$ и $\|S\|$.

Из равенства $\|S\|^T \|\Phi\| \|S\| = \|E\|$ следует, что $\|S\| = (\|S\|^T \|\Phi\|)^{-1}$. Тогда, используя правила обращения и транспонирования произведения матриц, перестановочность обращения и транспонирования, а также симметричность и невырожденность матрицы $\|\Phi\|$, имеем

$$\begin{aligned} \|\Psi^*\| &= \|S\|^T \|\Psi\| \|S\| = ((\|S\|^T \|\Phi\|)^{-1})^T \|\Psi\| \|S\| = (\|\Phi\|)^{-1} (\|S\|^T)^{-1})^T \|\Psi\| \|S\| = \\ &= \|S\|^{-1} (\|\Phi\|^T)^{-1} \|\Psi\| \|S\| = \|S\|^{-1} (\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|) \|S\|. \end{aligned}$$

Полученное равенство означает, что матрица $\|\Psi^*\|$ может рассматриваться как результат преобразования матрицы линейного оператора $\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|$ при замене базиса с матрицей перехода $\|S\|$. Поскольку собственные значения линейного оператора не зависят от выбора базиса, то решение задачи сводится к определению собственных значений оператора, имеющего матрицу $\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|$.

Собственные векторы и собственные значения этого оператора находятся согласно 8.5. из системы линейных уравнений $(\|\Phi\|^{-1} \|\Psi\|) \|f\| = \lambda \|f\|$, которое можно преобразовать к виду $(\|\Psi\| - \lambda \|\Phi\|) \|f\| = \|0\|$. Условие существования ненулевых столбцов $\|f\|$:

$$\det(\|\Psi\| - \lambda \|\Phi\|) = 0$$

есть алгебраическое уравнение относительно λ , корни которого и являются искомыми коэффициентами диагонального представления квадратичного функционала $\Psi(x)$.

Проиллюстрируем применение данного метода для нахождения диагонального вида квадратичных форм в задаче 12.1.2.

Имеем $\|\Phi\| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ и $\|\Psi\| = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}$, то есть для определения коэффициентов диагонального представления квадратичного функционала $\Psi(x)$ необходимо решить уравнение

$$\det\left(\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \det\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 8 - \lambda \\ 8 - \lambda & 3 - 3\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку данное уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -4$, то искомым диагональным видом для $\Psi(x)$ будет $\Psi(x) = 5\xi_1'^2 - 4\xi_2'^2$, в то время как очевидно, что $\Phi(x) = \xi_1'^2 + \xi_2'^2$.

12.2. Классификация поверхностей второго порядка

Пусть в евклидовом пространстве E^3 с базисом $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

дано уравнение поверхности

$$\alpha_{11}\xi_1^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + \alpha_{22}\xi_2^2 + 2\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \alpha_{33}\xi_3^2 + 2\alpha_{23}\xi_2\xi_3 + 2\alpha_{14}\xi_1 + 2\alpha_{24}\xi_2 + 2\alpha_{34}\xi_3 + \alpha_{44} = 0$$

второго порядка $(\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^k |\alpha_{ik}| > 0)$.

Квадратичную часть данного уравнения можно рассматривать как квадратичный функционал в E^3 . Приведем его к диагональному виду ортогональным оператором по схеме, изложенной в п.12.1.1. Получим уравнение

$$\lambda_1\xi_1'^2 + \lambda_2\xi_2'^2 + \lambda_3\xi_3'^2 + 2\alpha'_{14}\xi_1' + 2\alpha'_{24}\xi_2' + 2\alpha'_{34}\xi_3' + \alpha'_{44} = 0, \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| > 0,$$

для которого рассмотрим три следующих случая:

I. **Центральный случай:** $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ или, что в силу теоремы 8.6.8. то же самое,

$$\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \neq 0.$$

После переноса начала координат, устраняющего линейные слагаемые, получаем уравнение $\lambda_1\xi_1''^2 + \lambda_2\xi_2''^2 + \lambda_3\xi_3''^2 + \alpha''_{44} = 0$, для которого можно выделить следующие варианты:

если $\alpha''_{44} \neq 0$

1°. Мнимый эллипсоид при $\text{sgn}(\lambda_i) = \text{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1, 2, 3$;

2°. Эллипсоид при $\text{sgn}(\lambda_i) = -\text{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1, 2, 3$;

3°. Однополостный гиперболоид при $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\lambda_2) = -\text{sgn}(\lambda_3) = -\text{sgn}(\alpha''_{44})$;

4°. Двуполостный гиперболоид

при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3) = -\operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$;

если $\alpha''_{44} = 0$

5°. Мнимый конус

при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = \operatorname{sgn}(\lambda_3)$;

6°. Конус

при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2) = -\operatorname{sgn}(\lambda_3)$.

II. Первый нецентральный случай: $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и $\lambda_3 = 0$.

После переноса начала координат приходим к уравнению $\lambda_1 \xi_1''^2 + \lambda_2 \xi_2''^2 + 2\alpha''_{34} \xi_3'' + \alpha''_{44} = 0$, для которого выделяем варианты:

если $\alpha''_{34} \neq 0$, то уравнение приводится к $\lambda_1 \xi_1'''^2 + \lambda_2 \xi_2'''^2 + 2\alpha'''_{34} \xi_3''' = 0$, и тогда имеем:

7°. Эллиптический параболоид при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

8°. Гиперболический параболоид при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

если $\alpha''_{34} = 0$, $\alpha''_{44} \neq 0$, то имеем:

9°. Мнимый эллиптический цилиндр при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1, 2$;

10°. Эллиптический цилиндр при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\alpha''_{44})$, $i = 1, 2$;

11°. Гиперболический цилиндр при $\operatorname{sgn}(\lambda_1) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

если же $\alpha''_{34} = 0$, $\alpha''_{44} = 0$, то:

12°. Пара мнимых пересекающихся плоскостей
при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = \operatorname{sgn}(\lambda_2)$;

13°. Пара пересекающихся плоскостей
при $\operatorname{sgn}(\lambda_i) = -\operatorname{sgn}(\lambda_2)$.

III. Второй нецентральный случай: $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

После переноса начала координат приходим к уравнению

$$\lambda_1 \xi_1''^2 + 2\alpha''_{24} \xi_2'' + 2\alpha''_{34} \xi_3'' + \alpha''_{44} = 0,$$

для анализа которого целесообразно перейти к новому ортонормированному базису по формулам:

$$\xi_1''' = \xi_1'' \quad ; \quad \xi_2''' = \frac{\alpha_{24}'' \xi_2'' + \alpha_{34}'' \xi_3''}{\sqrt{\alpha_{24}''^2 + \alpha_{34}''^2}} \quad ; \quad \xi_3''' = \frac{\alpha_{34}'' \xi_2'' - \alpha_{24}'' \xi_3''}{\sqrt{\alpha_{24}''^2 + \alpha_{34}''^2}}$$

(что, очевидно, является поворотом в плоскости $O\xi_2\xi_3$). В итоге получаем уравнение

$$\lambda_1 \xi_1'''^2 + 2(\sqrt{\alpha_{24}''^2 + \alpha_{34}''^2}) \xi_2''' + \alpha_{44}'' = 0$$

и соответствующие ему варианты:

если $\alpha_{24}'' \neq 0$ или $\alpha_{34}'' \neq 0$, то после переноса начала координат имеем

14°. *Параболический цилиндр;*

если $\alpha_{24}'' = \alpha_{34}'' = 0$, то получаем

15°. *Пара мнимых параллельных плоскостей*

при $\text{sgn}(\lambda_1) = \text{sgn}(\alpha_{44}'')$;

16°. *Пара параллельных плоскостей*

при $\text{sgn}(\lambda_1) = -\text{sgn}(\alpha_{44}'')$;

если $\alpha_{24}'' = \alpha_{34}'' = \alpha_{44}'' = 0$

17°. *Пара совпадающих плоскостей.*

Замечания: 1°. Для классификации конкретной поверхности второго порядка необходимо сделать преобразование квадратной части уравнения к диагональному виду и выполнить переносы начала координат.

2°. Схема исследования кривых второго порядка на плоскости аналогична случаю, рассмотренному в E^3 .

12.3. Аппроксимация функций многочленами

Задача построения наилучшего (в некотором смысле) приближения заданной на $[a, b]$ функции $f(\tau)$ линейной комбинацией некоторых других функций $g_0(\tau), g_1(\tau), g_2(\tau), \dots, g_n(\tau), \dots$, определенных и обладающих более привлекательными (с точки зрения удобства их исследования по сравнению с $f(\tau)$) свойствами на $\tau \in [a, b]$, достаточно часто встречается в различных приложениях.

Ввиду большого разнообразия постановок задач этого класса мы ограничимся рассмотрением лишь двух из них, имея целью только проиллюстрировать на примере их решения использование методов линейной алгебры.

Рассмотрим в качестве объекта аппроксимации непрерывную на $[-1, 1]$ функцию $f(\tau)$, а в качестве аппроксимирующих функций выберем одночлены вида $\{g_k(\tau) = \tau^k, k = [0, n]\}$. Задача состоит в отыскании алгебраического многочлена, степени не выше n , $P_n(\tau) = \sum_{k=0}^n \xi_k \tau^k$, который наилучшим образом приближает функцию $f(\tau)$.

Предварительно заметим, что множество непрерывных на $[-1, 1]$ функций образует линейное пространство Λ , элементами которого являются и функции $g_k(\tau)$, причем линейная оболочка совокупности элементов $\{g_k(\tau) = \tau^k, k = [0, n]\}$ есть Λ^* — $n+1$ — мерное подпространство пространства Λ , в качестве базиса которого можно взять набор элементов $\{g_k = g_k(\tau), k = [0, n]\}$.

Для количественной оценки качества аппроксимации одной функции другой введем в Λ скалярное произведение по формуле $(x, y) = \int_{-1}^1 x(\tau) y(\tau) d\tau$, и превратим его тем самым в евклидово пространство E . Тогда мера близости элементов $x(\tau)$ и $y(\tau)$ может быть оценена величиной

$$\rho = |x - y| = \sqrt{(x - y, x - y)} = \sqrt{\int_{-1}^1 (x(\tau) - y(\tau))^2 d\tau}$$

(называемой иногда *расстоянием между $x(\tau)$ и $y(\tau)$ в E*), которая в силу свойств определенных интегралов равна нулю только в случае $x(\tau) = y(\tau)$ для $\forall \tau \in [-1, 1]$.

Далее, для краткости будем опускать аргументы элементов в E , то есть будем обозначать функцию $f(\tau)$ как $f \in E$. Квадрат расстояния между элементами f и $\sum_{k=0}^n \xi_k g_k$ в E равен $\rho^2 = (f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k, f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k)$. Подберем значения коэффициентов $\xi_k, k = [0, n]$ так, чтобы величина ρ^2 оказалась минимальной.

В силу билинейности скалярного произведения получаем

$$\rho^2 = (f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k, f - \sum_{k=0}^n \xi_k g_k) = (f, f) - 2 \sum_{k=0}^n \xi_k (f, g_k) + \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^n \xi_k \xi_i (g_k, g_i),$$

а из условий равенства нулю частных производных от ρ^2 по всем $\xi_k, k = [0, n]$, то есть из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^n \xi_i^* (g_k, g_i) = (f, g_k), \quad k = [0, n] \quad (12.3.1.)$$

находятся оптимальные значения коэффициентов $\xi_k^*, k = [0, n]$, при которых ρ^2 минимально. Заметим, что данная система уравнений имеет единственное решение, поскольку ее основная матрица невырожденная, как матрица Грама базисных векторов.

Отметим формальное совпадение полученной формулы с утверждением теоремы 10.3.2., которое позволяет заключить, что оптимальные значения коэффициентов $\xi_k^*; k = [0, n]$ суть координаты элемента f в базисе $\{g_k = g_k(\tau), k = [0, n]\}$ в том случае, когда f принадлежит линейной оболочке Λ^* .

Найдем минимальное значение ρ^2

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (f, f) - \sum_{k=0}^n \xi_k^* (f, g_k) + \sum_{k=0}^n \xi_k^* \left(-(f, g_k) + \sum_{i=0}^n \xi_i^* (g_k, g_i) \right) = \\ &= (f, f) - \sum_{k=0}^n \xi_k^* (f, g_k) = (f, f - \sum_{k=0}^n \xi_k^* g_k). \end{aligned}$$

Иначе говоря, полученное выражение равно нулю при $f = \sum_{k=0}^n \xi_k^* g_k$, а это означает, что избежать погрешности аппроксимации можно лишь в случае, когда элемент f принадлежит подпространству Λ^* .

Более содержательная оценка величины погрешности аппроксимации ρ^2 получается при подстановке в правую часть равенства $\rho^2 = (f, f - \sum_{k=0}^n \xi_k^* g_k)$ конкретных оптимальных значений ξ_k^* , $k = [0, n]$, находимых при решении системы линейных уравнений 12.3.1. Заметим, что это сделать гораздо удобнее в случае ортонормированного базиса подпространства Λ^* .

Применение к неортogonalьному базису $\{g_k = g_k(\tau) = \tau^k, k = [0, n]\}$ процедуры ортогонализации Грама — Шмидта, использованной при доказательстве теоремы 10.2.1., дает ненормированную систему ортогональных многочленов вида:

$$e'_0(\tau) = 1; \quad e'_1(\tau) = \tau; \quad e'_2(\tau) = \tau^2 - \frac{1}{3}; \quad e'_3(\tau) = \tau^3 - \frac{3}{5}\tau; \quad \dots; \quad e'_n(\tau) = \frac{d^n}{d\tau^n}(\tau^2 - 1)^n,$$

называемых *полиномами Лежандра*.

Поскольку все предыдущие вычисления делались для базиса $\{g_k = \tau^k, k = [0, n]\}$ без учета его конкретного вида, то они будут и справедливы для ортогонального (но, вообще говоря, ненормированного) базиса

$$\{e'_k(\tau) = \frac{d^k}{d\tau^k}(\tau^2 - 1)^k, k = [0, n]\}.$$

Для ортогонального базиса матрица Грама диагональная и, следовательно, система уравнений 12.3.1. $\sum_{i=0}^n \xi_i(e'_k, e'_i) = (f, e'_k), k = [0, n]$ будет иметь решения вида:

$$\xi_k^* = \frac{(f, e'_k)}{(e'_k, e'_k)}; k = [0, n], \text{ а величина } \rho^2:$$

$$\rho^2 = (f, f - \sum_{k=0}^n \xi_k^* e'_k) = (f, f) - \sum_{k=0}^n \frac{(f, e'_k)^2}{(e'_k, e'_k)}.$$

Если же, кроме того, базис $\{e_k, k = [0, n]\}$ ортонормированный, то есть $(e_k, e_i) = \delta_{ki}, k, i = [0, n]$, тогда $\xi_k^* = (f, e_k); k = [0, n]$ и $\rho^2 = |f|^2 - \sum_{k=0}^n \xi_k^{*2}$.

Отметим, что значения $\xi_k^*, k = [0, n]$ — оптимальных коэффициентов аппроксимации многочлена формально совпадают:

- 1°. С решением задачи о нахождении ортогональной проекции элемента f евклидова пространства на подпространство Λ^* ;

2°. Со значениями компонент разложения элемента, принадлежащего Λ^* , по ортонормированному базису $\{e_k, k=[0, n]\}$ (см. следствие 10.3.2.).

Таким образом, ортогональность системы элементов, используемой для аппроксимации, существенно упрощает вычисления. Вместе с тем, ортогонализация по методу Грама—Шмидта в случае бесконечномерного евклидова пространства может оказаться достаточно сложной процедурой.

Возможной альтернативой в процессе построения ортонормированной системы аппроксимирующих элементов является лемма 10.7.3., утверждающая, что собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным значениям, попарно ортогональны.

Рассмотрим линейный оператор в евклидовом пространстве бесконечно дифференцируемых на $[-1, 1]$ функций, ставящий каждой такой функции в соответствие ¹⁾ ее вторую производную, взятую с обратным знаком, и выясним, при каких условиях этот оператор будет самосопряженным. Интегрируя по частям, получим:

$$(\hat{A}x, y) = - \int_{-1}^1 \frac{d^2 x}{d\tau^2} y(\tau) d\tau = - \frac{dx}{d\tau} y(\tau) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} d\tau.$$

Но, с другой стороны,

$$(x, \hat{A}y) = - \int_{-1}^1 x(\tau) \frac{d^2 y}{d\tau^2} d\tau = - x(\tau) \frac{dy}{d\tau} \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{dx}{d\tau} \frac{dy}{d\tau} d\tau.$$

Поэтому для самосопряженности оператора $\hat{A}$ достаточно, чтобы $\frac{dx}{dt} y(t) \Big|_{-1}^1 = x(t) \frac{dy}{dt} \Big|_{-1}^1$.

Это условие выполняется, например, для функций, которые (так же как и их производные) имеют равные значения на концах отрезка $[-1, 1]$.

Найдем теперь собственные векторы линейного оператора $\hat{A}$. Условие $\hat{A}x = \lambda x$ в данном случае сводится к дифференциальному уравнению $\frac{d^2 x}{d\tau^2} = -\lambda x$, $\lambda \geq 0$, реше —

¹⁾ При доказательстве теоремы 10.8.2. было показано, что оператор вида $\hat{S}^+ \hat{S}$ есть самосопряженный и имеет неотрицательные собственные значения. Если $\hat{S} = \frac{d}{d\tau}$ и $\hat{S}^+ = -\frac{d}{d\tau}$ (при выполнении соответствующих граничных условий), то $\hat{A} = \hat{S}^+ \hat{S} = -\frac{d^2}{d\tau^2}$.

ние которого дается формулой $x(\tau) = \alpha e^{\tau\sqrt{-\lambda}} + \beta e^{-\tau\sqrt{-\lambda}}$, где α и β – произвольные константы.

Из условий $x(-1) = x(1)$ и $\left. \frac{dx}{d\tau} \right|_{-1} = \left. \frac{dx}{d\tau} \right|_1$ получаем $e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$ или, по фор-

муле Эйлера (см. приложение 3.), $\sin \sqrt{\lambda} = 0$. Откуда собственные значения будут:

$$\lambda_k = \pi^2 k^2, k = 0, 1, 2, \dots$$

и отвечающие им собственные векторы:

$$x_k(\tau) = \xi_k \cos \pi k \tau + \eta_k \sin \pi k \tau.$$

Числа ξ_k и η_k здесь произвольные (но не равные нулю одновременно для каждого k).

Таким образом, мы получили систему попарно ортогональных элементов, линейная оболочка которых является подпространством евклидова пространства непрерывных на $[-1, 1]$ функций. Эта система (так же как система полиномов Лежандра) может быть использована для построения аппроксимирующих многочленов, однако в данном случае эти многочлены будут тригонометрическими.

Замечание: полученные результаты приводят к естественному вопросу: можно ли уменьшить погрешность аппроксимации за счет увеличения n ? Или, иначе

говоря, справедливо ли равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n \xi_k^{*2} \right) = 0$?

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Рассмотрим, например, некоторое подпространство E^* евклидова пространства E , не имеющее базиса (то есть E^* бесконечномерное), и пусть существует ненулевой элемент $f \in E$, но $f \notin E^*$ такой, что $(f, g_k) = 0; \forall k$ (где все $g_k \in E^*$, а их любое конечное подмножество линейно независимо). В этом случае все аппроксимирующие коэффициенты равны нулю и данное предельное равенство, очевидно, не выполняется.

Условия возможности построения линейной комбинации из элементов множества $\{g_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$, аппроксимирующей $\forall f \in E$ с любой наперед заданной точностью, выходят за рамки предмета линейной алгебры и изучаются в курсе математического анализа.

Приложение 1

**СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
НА ПЛОСКОСТИ**

В пункте 4.4. были перечислены конкретные типы линий второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном приложении будут рассмотрены характерные свойства этих линий.

Пр.1.1. Вырожденные линии второго порядка

К вырожденным линиям второго порядка будем относить все типы, перечисленные в первых четырех столбцах таблицы теоремы 4.4.1. Кратко опишем их свойства.

1°. Тип линии “Несовпадающие прямые”

Уравнение $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 0$ определяет пару пересекающихся прямых в системе

координат $\{O', \vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$. В свою очередь, уравнение $y'^2 = a^2$ при $a \neq 0$ определяет пару параллельных прямых.

Пример
Пр.1.1.1.

Пусть на плоскости $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ задана линия второго порядка $3x^2 + 4xy + y^2 = 0$.

Преобразовав ее уравнение к виду $(2x + y)^2 - x^2 = 0$ (метод Лагранжа), получим две прямые $y = -x$ и $y = -3x$. (Рис. Пр.1.1.1.)

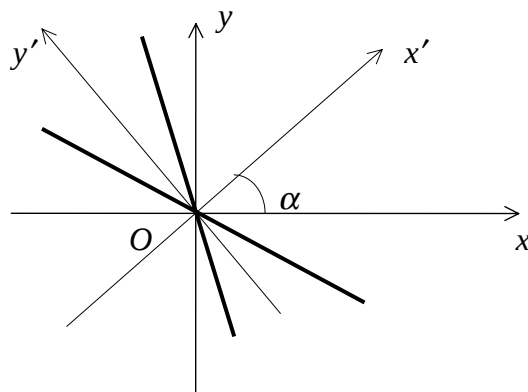


Рисунок Пр.1.1.1.

В данном случае $\Delta = -1 < 0$, а угол поворота осей системы координат $\alpha = \frac{1}{2} \arctg 2$.

2°. Тип линии “Совпадающие прямые”

Уравнение $y'^2 = 0$ определяет прямую $y' = 0$ в системе координат $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$.
Получается из типа линии 1° предельным переходом при $b \rightarrow +0$.

3°. Тип линии “Точки”

Уравнение $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 0$ определяет единственную точку — начало координат системы $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$.

4°. Тип линии “Пустые множества”

Уравнения $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$ и $y'^2 = -a^2$ не определяют на плоскости $\{O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$ никаких точек. Однако эти случаи иногда именуют “мнимыми линиями”.

Пр.1.2. Эллипс и его свойства

Определение Пр.1.2.1. Кривая, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a \geq b > 0$, называется *эллипсом*.

Определение Пр.1.2.2. Число $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* эллипса.

Точки $\left\| \begin{smallmatrix} \pm \varepsilon a \\ 0 \end{smallmatrix} \right\|$ называются *фокусами* эллипса.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса.

Число $p = \frac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* эллипса.

Свойства эллипса:

- 1°. Эллипс — ограниченная кривая: $|x| \leq a$ и $|y| \leq b$, что следует из записи канонического уравнения в форме $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$;
- 2°. Эллипс L обладает осевой симметрией относительно осей Ox и Oy , а также центральной симметрией относительно начала координат. Это вытекает из отношений

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} -x \\ y \end{matrix} \right\| \in L &\Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in L \Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L \\ &\Downarrow \\ \left\| \begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right\| &\in L, \end{aligned}$$

очевидных для канонического уравнения эллипса.

Свойства эллипса иллюстрируются рисунком Пр.1.2.1.

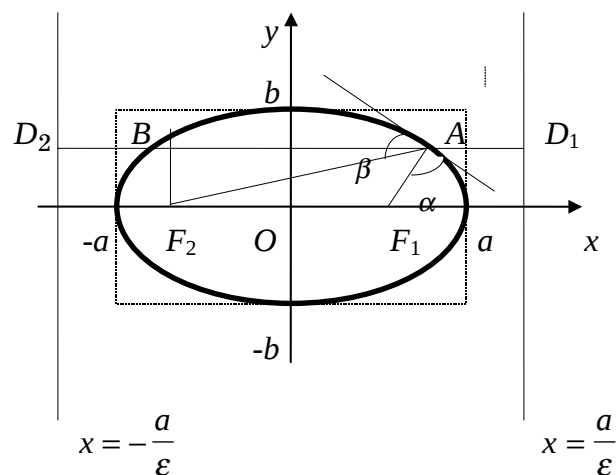


Рисунок Пр.1.2.1.

Будем обозначать через $\rho(P, Q)$ расстояние между геометрическими объектами P и Q , а через α и β обозначим углы между касательной и фокальными радиусами — отрезками F_1A и F_2A .

Теорема
Пр.1.2.1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ есть точка, принадлежащая эллипсу L , заданному каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

$$1^\circ. r_1 = |\vec{F_1A}| = a - \varepsilon x; r_2 = |\vec{F_2A}| = a + \varepsilon x;$$

$$2^\circ. |\vec{F_1A}| + |\vec{F_2A}| = 2a;$$

$$3^\circ. \frac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \frac{\rho(A, F_2)}{\rho(A, D_2)} = \varepsilon;$$

$$4^\circ. \frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, D_1)} = \varepsilon \Rightarrow \forall M, M \in L;$$

$$5^\circ. |\vec{F_2B}| = p, \text{ где } \vec{F_2B} \text{ ортогонален оси } OX; \quad 6^\circ. \angle \alpha = \angle \beta.$$

Доказательство:

1°. Имеем $r_1 = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2}$; $r_2 = \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2}$. Тогда, учитывая каноническое уравнение и определение эксцентриситета, получаем для $i=1,2$

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + y^2} = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{x^2 \pm 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + x^2\varepsilon^2} = \\ &= \sqrt{a^2 \pm 2xa\varepsilon + x^2\varepsilon^2} = |a \pm \varepsilon x|. \end{aligned}$$

Но поскольку $|x| \leq a$ и $0 \leq \varepsilon < 1$, то $a \pm \varepsilon x \geq 0$ и, следовательно,

$$r_1 = |\vec{F_1A}| = a - \varepsilon x; \quad r_2 = |\vec{F_2A}| = a + \varepsilon x.$$

2°. Утверждение 2° очевидно в силу 1°.

3°. Далее $\frac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \frac{a - x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon$; $\frac{\rho(A, F_2)}{\rho(A, D_2)} = \frac{a + x\varepsilon}{\frac{a}{\varepsilon} + x} = \varepsilon$.

4°. Справедливость 4° докажете самостоятельно.

5°. Наконец,

$$|\vec{F_2 B}| = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - a^2 \varepsilon^2} = \frac{b}{a} a \sqrt{1 - \varepsilon^2} = b \frac{b}{a} = p .$$

6°. Доказательство приводится после доказательства теоремы Пр.1.2.2.

Теорема доказана.

Проведение касательных к эллипсу

Теорема
Пр.1.2.2.

Пусть $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ есть точка, принадлежащая эллипсу, заданному каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этому эллипсу, проходящей через точку A , имеет вид:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 .$$

Доказательство:

Уравнение касательной в точке A имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

Для эллипса из канонического уравнения получаем $\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} = 0$, то есть

$y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$. Но тогда $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$, принимая во внимание, что

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 , \text{ окончательно получим } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 .$$

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точек $y_0 = 0$, где уравнения касательных имеют вид $x = \pm a$.

Теорема доказана.

Доказательство 6° теоремы Пр.1.2.1.:

Пусть касательная к эллипсу проведена через точку касания A , имеющую координаты $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Тогда расстояние d_2 от фокуса F_2 с координатами $\begin{pmatrix} -c \\ 0 \end{pmatrix}$ до касательной равно (см. задачу 3.2.1.)

$$d_2 = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{x_0(-c)}{a^2} + \frac{y_0(0)}{b^2} - 1 \right| = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{x_0 c}{a^2} + 1 \right| = \frac{1}{\Delta a} |x_0 \varepsilon + a| = \frac{r_2}{\Delta a},$$

$$\text{где } \Delta = \sqrt{\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}}.$$

Аналогично находим расстояние d_1 от фокуса F_1 с координатами $\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ до касательной

$$d_1 = \frac{1}{\Delta} \left| \frac{x_0 c}{a^2} - 1 \right| = \frac{1}{\Delta a} |x_0 \varepsilon - a| = \frac{r_1}{\Delta a}.$$

Поскольку углы α и β острые, то из равенств $\sin \alpha = \frac{d_1}{r_1} = \frac{1}{\Delta a}$ и $\sin \beta = \frac{d_2}{r_2} = \frac{1}{\Delta a}$ следует $\angle \alpha = \angle \beta$.

Свойство 6° теоремы Пр.1.2.1. доказано.

Из теорем Пр.1.2.1. и Пр.1.2.2. следует возможность альтернативных формулировок свойств эллипса.

Фокальное свойство эллипса: эллипс есть геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов, постоянна и равна $2a$.

Директориальное свойство эллипса: эллипс (исключая случай окружности) есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и меньше единицы.

Оптическое свойство эллипса: касательная в любой точке эллипса образует с фокальными радиусами точки касания равные острые углы. (Любой луч света, исходящий из одного фокуса, после отражения в эллипсе проходит через другой фокус.)

Уравнение эллипса в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса, а полярную ось направим по линии, соединяющей его фокусы. Имеем для произвольной точки A , лежащей на эллипсе (рис. Пр.1.2.1.)

$$\rho = r_2 = a + \varepsilon e = a + \varepsilon(\rho \cos \varphi - ae) = a + \varepsilon \rho \cos \varphi - a\varepsilon^2.$$

Откуда

$$\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) = a(1 - \varepsilon^2)$$

и окончательно $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$

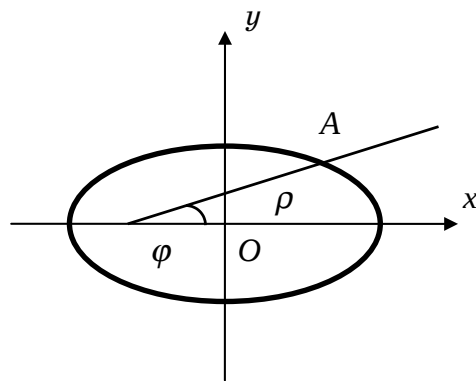


Рисунок Пр.1.2.2.

Пр.1.3. Гипербола и ее свойства

Определение Пр.1.3.1. Кривая, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a > 0$ $b > 0$, называется *гиперболой*.

Определение Пр.1.3.2.

Число $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ называется *эксцентриситетом* гиперболы.

Точки $\begin{pmatrix} \pm \varepsilon a \\ 0 \end{pmatrix}$ называются *фокусами* гиперболы.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы.

Число $p = \frac{b^2}{a}$ называется *фокальным параметром* гиперболы.

Свойства гиперболы:

1°. Гипербола — неограниченная кривая, существующая для $|x| \geq a$, что следует из записи канонического уравнения в форме $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$;

2°. Гипербола L обладает осевой симметрией относительно осей Ox и Oy , а также центральной симметрией относительно начала координат. Это вытекает из отношений

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} -x \\ y \end{matrix} \right\| \in L &\Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| \in L &\Leftrightarrow \left\| \begin{matrix} x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L \\ &\Updownarrow \\ &\left\| \begin{matrix} -x \\ -y \end{matrix} \right\| \in L, \end{aligned}$$

очевидных для канонического уравнения гиперболы.

Через α и β обозначим углы между касательной и фокальными радиусами (рис. Пр.1.3.1.)

Определение
Пр.1.3.2.

Прямая $y = ux + v$ называется *асимптотой* для линии $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если

$$u = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

и

$$v = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ux).$$

3°. Гипербола обладает асимптотами вида $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Свойства гиперболы
иллюстрируются
рис. Пр.1.3.1.

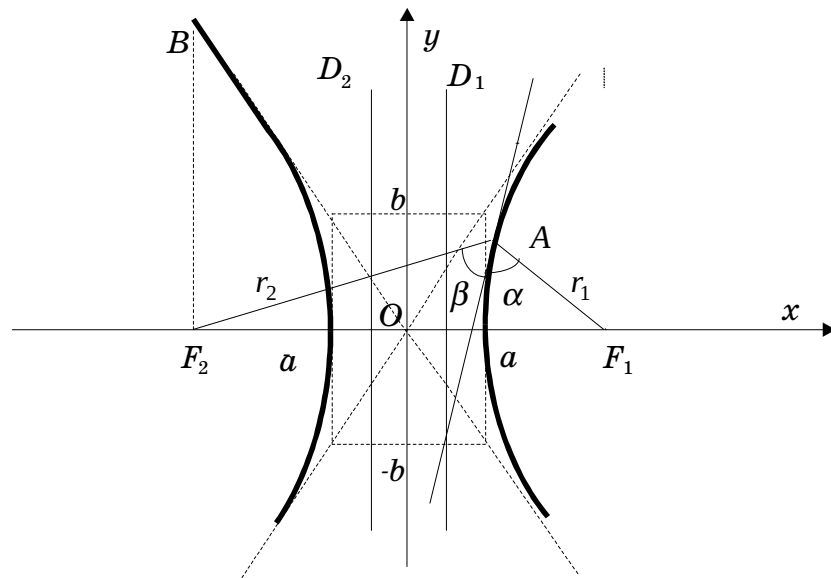


Рисунок Пр.1.3.1.

Действительно, $u = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{ax} \sqrt{x^2 - a^2} = \pm \frac{b}{a}$ и, кроме того,

$$\begin{aligned} v &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a} x \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - a^2} \mp x) = \\ &= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x^2 - a^2) - x^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} = -ab \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2} \mp x} = 0. \end{aligned}$$

Теорема
Пр.1.3.1.

Пусть $A = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ есть точка, принадлежащая гиперболе L , заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

1°. Для правой ветви

$$r_1 = |\vec{F_1 A}| = -a + \varepsilon x \quad ; \quad r_2 = |\vec{F_2 A}| = a + \varepsilon x \quad ; \quad (x > a) \quad .$$

Для левой ветви

$$r_1 = |\vec{F_1 A}| = a - \varepsilon x \quad ; \quad r_2 = |\vec{F_2 A}| = -a - \varepsilon x \quad ; \quad (x < -a) \quad ;$$

$$2^\circ. \quad |r_1 - r_2| = 2a \quad ; \quad 3^\circ. \quad \frac{\rho(A, F_1)}{\rho(A, D_1)} = \frac{\rho(A, F_2)}{\rho(A, D_2)} = \varepsilon \quad ;$$

$$4^\circ. \quad \frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, D_1)} = \varepsilon \Rightarrow \forall M, M \in L ; \quad 5^\circ. \quad |\vec{F_2 B}| = p ;$$

$$6^\circ. \quad \angle \alpha = \angle \beta .$$

Доказательство:

1°. Доказательство аналогично доказательству теоремы Пр.1.2.1., поэтому ограничимся здесь лишь нахождением величин

$$r_1 = \sqrt{(x - a\varepsilon)^2 + y^2} ; r_2 = \sqrt{(x + a\varepsilon)^2 + y^2} ,$$

используя каноническое уравнение и определение эксцентриситета.

Для $i = 1, 2$ получаем

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + y^2} = \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{(x \pm a\varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - x^2)} = \\ &= \sqrt{x^2 \pm 2xa\varepsilon + a^2\varepsilon^2 + a^2 - a^2\varepsilon^2 - x^2 + x^2\varepsilon^2} = \\ &= \sqrt{a^2 \pm 2xa\varepsilon + x^2\varepsilon^2} = |a \pm \varepsilon x|. \end{aligned}$$

Но поскольку для гиперболы $|x| \geq a$ и $\varepsilon > 1$, то для правой ветви $r_1 = |\vec{F_1 A}| = -a + \varepsilon x$; $r_2 = |\vec{F_2 A}| = a + \varepsilon x$, а для левой — соответственно $r_1 = |\vec{F_1 A}| = a - \varepsilon x$; $r_2 = |\vec{F_2 A}| = -a - \varepsilon x$. Откуда и следует 2° и 3°.

Справедливость 4° докажете самостоятельно.

$$5^\circ. \quad \text{Наконец, } |\vec{F_2 B}| = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 \varepsilon^2 - a^2} = \frac{b}{a} a \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = b \frac{b}{a} = p .$$

6°. Докажете это утверждение самостоятельно, по аналогии с доказательством свойства 6° теоремы Пр.1.2.1., используя также теорему Пр.1.3.1.

Теорема доказана.

Замечание о свойствах гиперболы:

Каноническое уравнение, изучаемой в курсе элементарной математики гиперболы

$y = \frac{a}{x}$, получается путем следующей замены координат

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} x' - \frac{1}{\sqrt{2}} y' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} x' + \frac{1}{\sqrt{2}} y' \end{cases}.$$

Из теорем Пр.1.3.1. и Пр.1.2.2. следует возможность альтернативных формулировок свойств гиперболы.

Фокальное свойство гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух фокусов, постоянна и равна $2a$.

Директориальное свойство гиперболы: гипербола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и больше единицы.

Оптическое свойство гиперболы: касательная в любой точке гиперболы образует с фокальными радиусами точки касания равные углы. (Изображение точечного источника света, расположенного в одном из фокусов, есть мнимое и находится в другом фокусе гиперболы.)

Проведение касательных к гиперболе

Теорема
Пр.1.3.2.

Пусть $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ есть точка, принадлежащая гиперболе, заданной каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этой гиперболе, проходящей через точку A , имеет вид:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Доказательство:

Уравнение касательной в точке A имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$.

Для гиперболы из канонического уравнения получаем $\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0$, то есть

$y'(x_0) = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$. Но тогда $y - y_0 = \frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$, принимая во внимание, что

$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, окончательно получим $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$.

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точек $y_0 = 0$, где уравнения касательных имеют вид $x = \pm a$.

Теорема доказана.

Уравнение гиперболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, а полярную ось направим по положительной полуоси Ox . (Рис. Пр.1.3.2.)

Имеем для произвольной точки A , лежащей на правой ветви гиперболы,

$$\begin{aligned} \rho &= r_1 = -a + \varepsilon = \\ &= -a + \varepsilon(\rho \cos \varphi + a\varepsilon) = \\ &= -a + \varepsilon\rho \cos \varphi + a\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Откуда $\rho(1 - \varepsilon \cos \varphi) = a(\varepsilon^2 - 1)$ и

окончательно $\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}$.

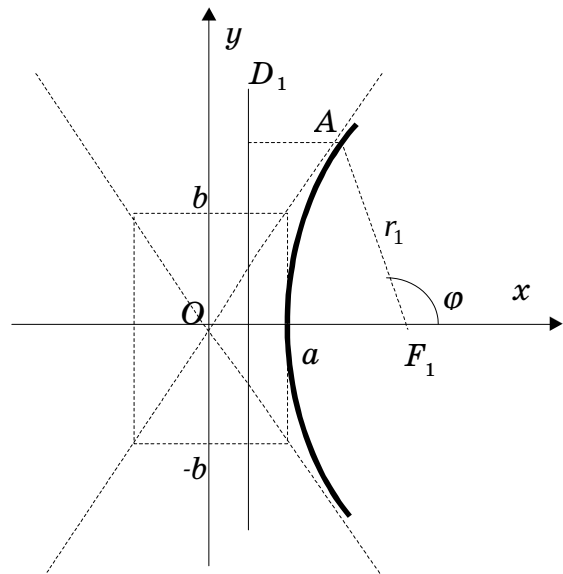


Рисунок Пр.1.3.2.

Пр.1.4. Парабола и ее свойства

Определение Пр.1.4.1. Кривая, уравнение которой в некоторой ортонормированной системе координат имеет вид $y^2 = 2px$; $p > 0$, называется *параболой*.

Определение
Пр.1.4.2.

Точка $\left\| \begin{array}{c} \frac{p}{2} \\ 0 \end{array} \right\|$ называется *фокусом* параболы.

Прямая $x = -\frac{p}{2}$ называется *директрисой* параболы.

Число p называется *фокальным параметром* параболы.

Свойства параболы иллюстрируются рис. Пр.1.4.1.

Через α обозначим угол между касательной и фокальным радиусом (рис. Пр.1.4.1.), а через β угол между касательной и положительным направлением оси абс — цисс.

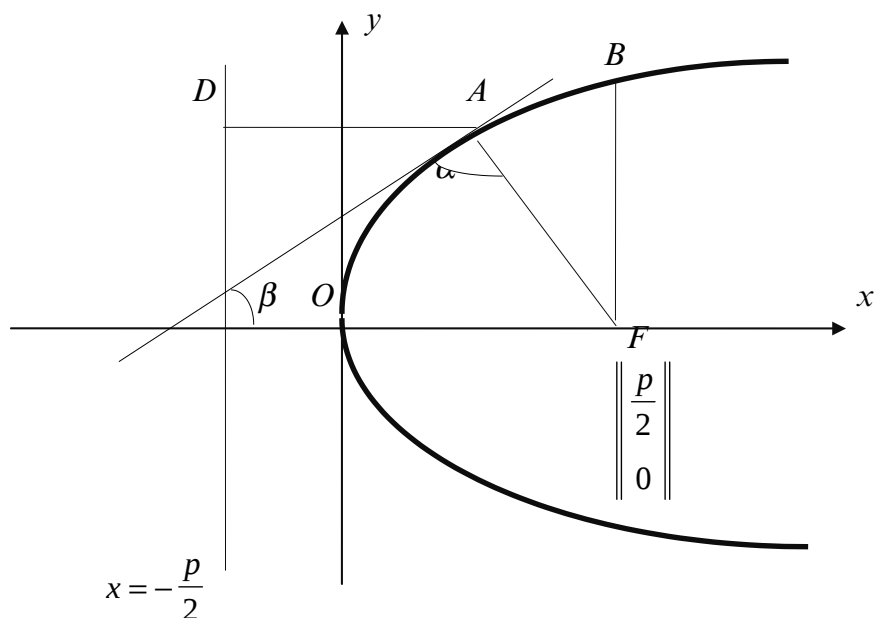


Рисунок Пр.1.4.1.

Свойства параболы:

1°. Парабола — неограниченная кривая, существующая для $\forall x \geq 0$;

2°. Парабола L обладает осевой симметрией относительно оси Ox , что вытекает из отношения

$$\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \in L \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right\| \in L ,$$

очевидного для канонического уравнения параболы.

3°. Для параболы имеет место монотонное возрастание абсолютной величины ординаты при возрастании абсциссы, причем в нуле касательная к параболе вертикальна.

Теорема
Пр.1.4.1.

Пусть $A = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ есть точка, принадлежащая параболе L , заданной каноническим уравнением, тогда имеют место следующие соотношения:

$$1^\circ. r = x + \frac{p}{2}; \quad 2^\circ. \frac{\rho(A, F)}{\rho(A, D)} = 1;$$

$$3^\circ. \frac{\rho(M, F)}{\rho(M, D)} = 1 \Rightarrow \forall M, M \in L; \quad 4^\circ. |\vec{FB}| = p;$$

$$5^\circ. \angle \alpha = \angle \beta .$$

Доказательство:

1°. Имеем $r = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$, используя каноническое уравнение, получаем

$r = \sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = |x + \frac{p}{2}|$, но поскольку $x \geq -\frac{p}{2}$, приходим сразу к справедливости утверждений 1° и 2°.

Справедливость 3° докажете самостоятельно.

$$4^\circ. \text{ Наконец, } |\vec{FB}| = \sqrt{2p \frac{p}{2}} = p .$$

5°. Доказательство приводится после доказательства теоремы Пр.1.4.2.

Теорема доказана.

Замечание о свойствах параболы

Каноническое уравнение, изучаемой в курсе элементарной математики параболы вида $y = ax^2$, получается путем взаимного переименования координатных переменных.

Из теоремы Пр.1.4.1. следует возможность альтернативных формулировок свойств параболы.

Директориальное свойство параболы: парабола есть геометрическое место точек, отношение расстояния от которых до данной точки (фокуса) к расстоянию до данной прямой (директрисы) постоянно и равно единице.

Оптическое свойство параболы: касательная в любой точке гиперболы образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и положительным направлением оси абсцисс. (Каждый луч света, выходящий из фокуса параболы, после отражения от параболы распространяется параллельно ее оси.)

Проведение касательных к параболе

Теорема
Пр.1.4.2.

Пусть $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ есть точка, принадлежащая параболе, заданной каноническим уравнением, тогда уравнение касательной к этой параболе, проходящей через точку A , имеет вид:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Доказательство:

Уравнение касательной в точке A имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Для параболы из канонического уравнения получаем $2yy' = 2p$, то есть $y'(x_0) = \frac{p}{y_0}$, $y_0 \neq 0$.

Но тогда $y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$, принимая во внимание, что $y_0^2 = 2px_0$, окончательно получим $yy_0 = p(x + x_0)$.

Наконец, непосредственно проверяем утверждение теоремы для точки $y_0 = 0$, где уравнение касательной $x = 0$.

Теорема доказана.

Доказательство свойства 5° теоремы Пр.1.4.1.:

Направляющий вектор касательной к параболе в точке A есть $\begin{pmatrix} y_0 \\ p \end{pmatrix}$, а вектор фокального радиуса — $\begin{pmatrix} x_0 - \frac{p}{2} \\ y_0 \end{pmatrix}$. Поэтому

$$\cos \alpha = \frac{y_0(x_0 - \frac{p}{2}) + py_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2} \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + y_0^2}} = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + p^2}}.$$

Но, с другой стороны, косинус угла β между векторами $\begin{pmatrix} y_0 \\ p \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ выражается той же формулой. Поскольку углы α и β острые, то они равны.

Теорема доказана.

Уравнение параболы в полярной системе координат

Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы, а полярную ось направим по линии, перпендикулярной директрисе и проходящей через ее фокус. (Рис. Пр.1.4.2.)

Для произвольной точки A , лежащей на параболе,

$$\rho = x + \frac{p}{2} = \frac{p}{2} + \rho \cos \alpha + \frac{p}{2} = p + \rho \cos \varphi.$$

Откуда $\rho(1 - \cos \varphi) = p$

и окончательно $\rho = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$

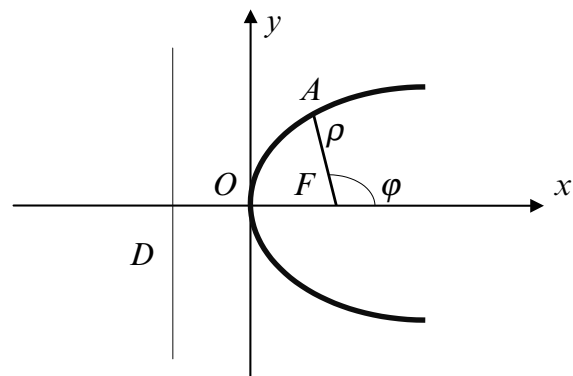


Рисунок Пр.1.4.2.

Приложение 2 **СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА**

В теореме 4.5.1. были перечислены конкретные типы поверхностей второго порядка, различие между которыми сохраняется при переходе из одной декартовой системы координат в другую. В данном параграфе будут рассмотрены основные свойства этих типов.

Пр.2.1. Вырожденные поверхности второго порядка

К вырожденным поверхностям второго порядка относятся типы, указанные в первой части таблицы формулировки теоремы 4.5.1.

В первых двух столбцах этой таблицы перечислены типы пустых множеств, а также объекты точечно – линейного типа, исследование которых полностью аналогично случаям, рассмотренным в приложении 1, в ортонормированной, канонической системе координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$.

Первые три типа поверхностей, содержащиеся в третьей колонке таблицы, являются частными случаями цилиндрической поверхности, образующая которых параллельна прямой $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, а направляющими служат плоские кривые – эллипс, гипербола и парабола, соответственно расположенные в плоскости Oxy .

Описание свойств невырожденных поверхностей второго порядка будет также выполнено в ортонормированной системе координат $\{O, e_1, e_2, e_3\}$.

В общем случае можно показать, что в сечении поверхности второго порядка плоскостью получается кривая второго порядка. Однако для описания основных свойств невырожденных поверхностей второго порядка достаточно рассмотреть сечения, параллельные координатным плоскостям.

Пр.2.2. Эллипсоид

Определение Пр.2.2.1. Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad : \quad a > 0, b > 0, c > 0, \text{ называется эллипсоидом.}$$

Свойства эллипсоида:

1°. Эллипсоид — ограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $|x| \leq a$; $|y| \leq b$; $|z| \leq c$.

2°. Эллипсоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей.

3°. В сечении эллипсоида плоскостью, ортогональной любой из осей координат, получается эллипс. Например, рассматривая секущую плоскость $z = z_0$, где $|z_0| < c$, получаем следующее уравнение линии сечения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{z_0^2}{c^2}})^2} = 1 \\ z = z_0 \end{array} \right.,$$

являющейся эллипсом. (Рис. Пр.2.2.1.)

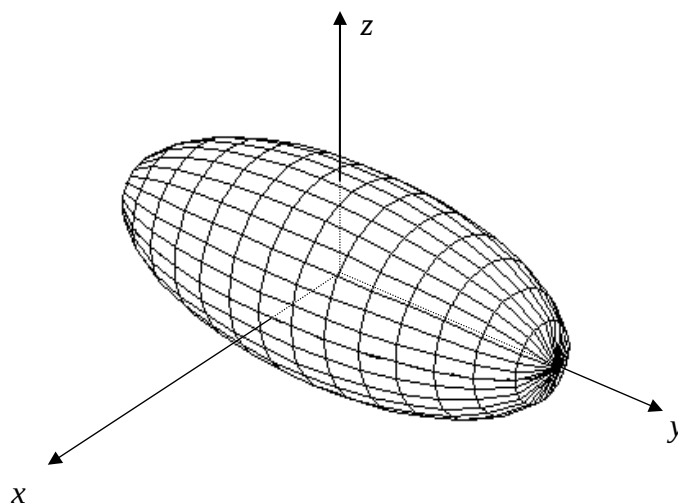


Рисунок Пр.2.2.1.

Пр.2.3. Эллиптический параболоид

Определение Пр.2.3.1. Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \quad ; \quad a > 0, b > 0, \text{ называется эллиптическим параболоидом.}$$

Свойства эллиптического параболоида:

- 1°. Эллиптический параболоид — неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $z \geq 0$ и принимает сколь угодно большие значения.
- 2°. Эллиптический параболоид обладает
 - осевой симметрией относительно оси Oz ;
 - плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz .
- 3°. В сечении эллиптического параболоида плоскостью, ортогональной оси Oz , получается *эллипс*, а плоскостями, ортогональными осям Ox или Oy — *парабола*. Например, рассматривая секущую плоскость $z = z_0 > 0$, получаем следующее уравнение плоской линии

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{2z_0})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{2z_0})^2} = 1, \\ z = z_0 \end{cases}$$

являющейся эллипсом. (Рис. Пр.2.3.1.) С другой стороны, сечение плоскостью $y = y_0$ приводит к уравнению линии

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2\left(z - \frac{y_0^2}{2b^2}\right), \\ y = y_0 \end{cases}$$

являющейся параболой. Для случая сечения плоскостью $x = x_0$ уравнение сечения имеет аналогичный вид.

$$\begin{cases} y^2 = 2b^2\left(z - \frac{x_0^2}{2a^2}\right), \\ x = x_0 \end{cases}$$

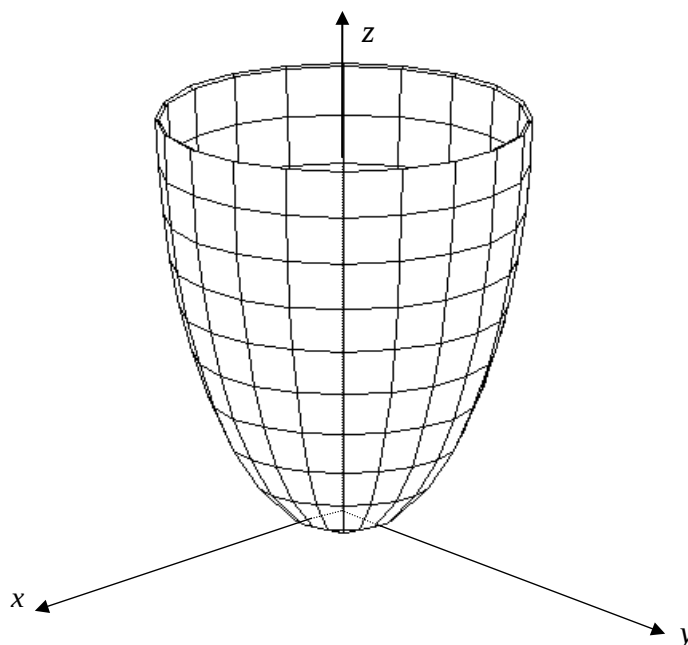


Рисунок Пр.2.3.1.

Пр.2.4. Гиперболический параболоид

Определение Пр.2.4.1. Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$; $a > 0, b > 0$, называется *гиперболическим параболоидом*.

Свойства гиперболического параболоида:

- 1°. Гиперболический параболоид — неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что z — любое.
- 2°. Гиперболический параболоид обладает
 - осевой симметрией относительно оси Oz ;
 - плоскостной симметрией относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz .
- 3°. В сечении гиперболического параболоида плоскостью, ортогональной оси координат Oz , получается гипербола, а плоскостями ортогональными осям Ox или Oy — парабола. (Рис. Пр.2.4.1.)

Например, рассматривая секущую плоскость $z=z_0>0$, получаем следующее уравнение линии сечения

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{2z_0})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{2z_0})^2} = 1, \\ z = z_0 \end{cases}$$

являющейся гиперболой. При $z_0 < 0$ уравнение гиперболы будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(a\sqrt{-2z_0})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{-2z_0})^2} = -1, \\ z = z_0 \end{cases}$$

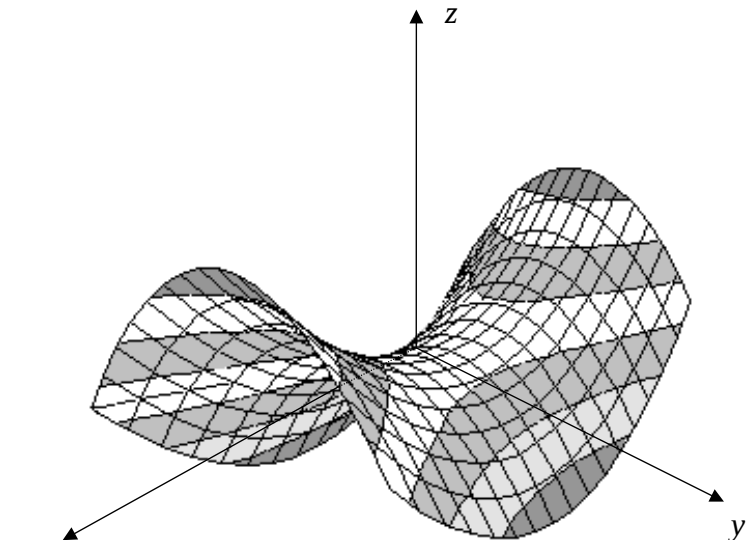


Рисунок Пр.2.4.1.

С другой стороны, при сечении гиперболического параболоида плоскостью $x=x_0$

получаем плоскую кривую $\begin{cases} y^2 = -2b^2(z - \frac{x_0^2}{2a^2}), \\ x = x_0 \end{cases}$, являющуюся параболой. Для случая

сечения плоскостью $y=y_0$ уравнение аналогично и имеет вид $\begin{cases} x^2 = 2a^2(z + \frac{y_0^2}{2b^2}), \\ y = y_0 \end{cases}$.

Из полученных уравнений следует, что гиперболический параболоид может быть получен поступательным перемещением в пространстве параболы так, что ее вер-

шина перемещается вдоль другой параболы, ось которой параллельна оси первой параболы, а ветви направлены противоположно, причем их плоскости взаимно перпендикулярны.

4°. Гиперболический параболоид имеет два семейства *прямолинейных образующих*.

Если записать уравнение данной поверхности в виде $(\frac{x}{a} + \frac{y}{b})(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = 2z$, то можно

прийти к заключению, что при любых значениях параметра α точки, лежащие на

прямых $\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\alpha \\ \alpha(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}) = z \end{cases}$ и $\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 2\alpha \\ \alpha(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}) = z \end{cases}$, также принадлежат и гиперболическому

параболоиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение гиперболического параболоида.

Заметим, что для каждой точки гиперболического параболоида, существует *пара прямых*, проходящих через эту точку и целиком лежащих на гиперболическом параболоиде. Уравнения этих прямых могут быть получены (с точностью до некоторого общего ненулевого множителя) путем подбора конкретных значений параметра α .

Пр.2.5. Однополостный гиперболоид

Определение Пр.2.5.1.	Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a > 0, b > 0, c > 0$, называется <i>однополостным гиперболоидом</i> .
--------------------------	--

Свойства однополостного гиперболоида:

1°. Однополостный гиперболоид — неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $z \in (-\infty, +\infty)$.

2°. Однополостный гиперболоид обладает

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно всех координатных осей;
- плоскостной симметрией относительно всех координатных плоскостей.

3°. В сечении однополостного гиперboloида плоскостью, ортогональной оси координат Oz , получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям Ox или Oy — гиперболоа. (Рис. Пр.2.5.1.) Вывод уравнений для линий сечения аналогичен рассмотренным ранее случаям.

4°. Однополостный гиперboloид имеет два семейства прямолинейных образующих.

Записав уравнение данной поверхности в виде $(\frac{x}{a} + \frac{z}{c})(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = 1 - \frac{y^2}{b^2}$, можно прийти

к заключению, что при любых α и β , $|\alpha| + |\beta| > 0$ точки, лежащие на прямых

$$\begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \beta(1 - \frac{y}{b}) \\ \beta(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \alpha(1 + \frac{y}{b}) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} \alpha(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}) = \beta(1 + \frac{y}{b}) \\ \beta(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}) = \alpha(1 - \frac{y}{b}) \end{cases},$$

будут принадлежать и однополостному гиперboloиду, поскольку почленное перемножение уравнений плоскостей, задающих эти прямые, дает уравнение однополостного гиперboloида.

Для каждой точки однополостного гиперboloида существует пара прямых, проходящих через эту точку и целиком лежащих на однополостном гиперboloиде. Уравнения этих прямых могут быть получены путем подбора конкретных значений α и β .

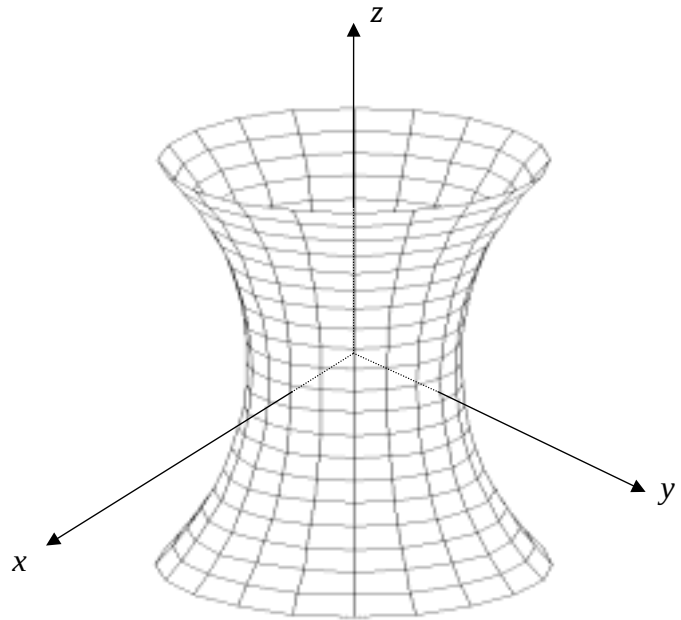


Рисунок Пр.2.5.1.

Пр.2.6. Двуполостный гиперboloид

Определение Поверхность, задаваемая в некоторой ортонормированной системе координат каноническим уравнением вида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$; $a > 0, b > 0, c > 0$, называется двуполостным гиперboloидом.

Свойства двуполостного гиперболоида:

1°. Двуполостный гиперболоид — неограниченная поверхность, поскольку из его канонического уравнения следует, что $|x| \geq a$ и не ограничен сверху.

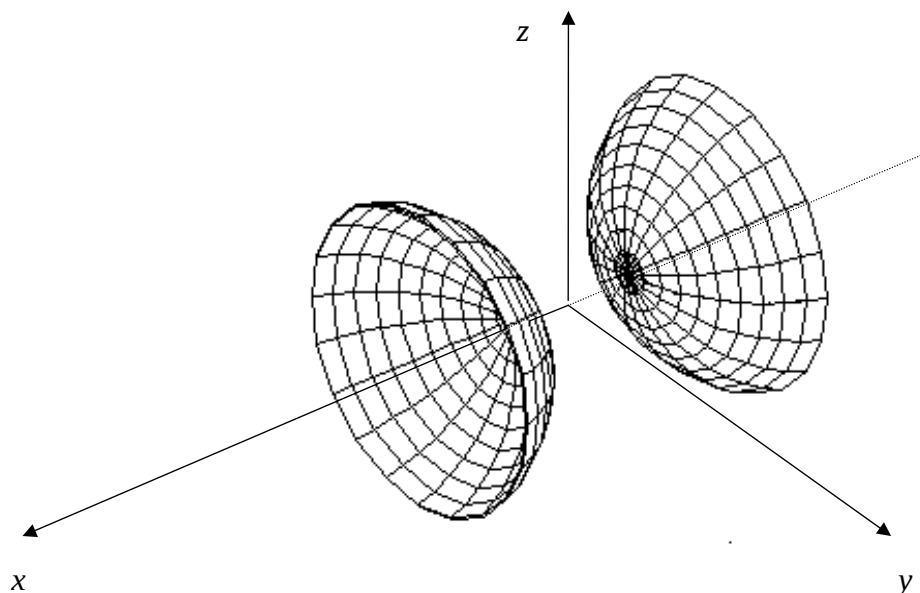


Рисунок Пр.2.6.1.

2°. Двуполостный гиперболоид обладает:

- центральной симметрией относительно начала координат;
- осевой симметрией относительно всех координатных осей;
- симметрией относительно всех координатных плоскостей.

3°. В сечении двуполостного гиперболоида плоскостью, ортогональной оси координат Ox , при $|x| > a$ получается эллипс, а плоскостями, ортогональными осям Oy или Oz — гипербола. (Рис. Пр.2.6.1.)

Пр.2.7. Поверхности вращения

Пусть некоторая кривая, расположенная в плоскости Oxz , имеет уравнение $F(x, z) = 0$. Если вращать эту кривую вокруг оси Oz , то каждая ее точка будет описывать окружность.

Определение Пр.2.7.1. Совокупность точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, называется *поверхностью вращения*.

Пример Пр.2.7.1. К поверхностям вращения, например, относятся:

1°. Эллипсоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2°. Конус вращения

$$k^2 z^2 = x^2 + y^2.$$

Замечание: поверхности вращения линии второго порядка не всегда задаются уравнениями второго порядка.

Например, если вращать квадратную параболу $z^2 = 2px$ вокруг оси Ox , получается эллиптический параболоид вращения, однако при вращении этой же кривой вокруг оси Oz получится поверхность вращения, задаваемая уравнением вида $z^2 = \pm 2p\sqrt{x^2 + y^2}$ или $z^4 = 4p^2(x^2 + y^2)$.

Задача Пр.2.7.1. Составить уравнение поверхности вращения, получаемой при вращении линии $z^2 = 2px$ вокруг оси Ox .

Решение. Зафиксируем на вращаемой линии точку с координатами $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Линия, получаемая при вращении этой точки вокруг оси Ox в плоскости $x = x_0$, есть окружность радиуса z_0 , с уравнением $y^2 + z^2 = z_0^2$.

С другой стороны, $z_0^2 = 2px_0$, поэтому $y^2 + z^2 = 2px_0$. Наконец, в силу

произвольности точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, выбранной на линии вращения, получаем,

что уравнение поверхности вращения — эллиптического параболоида есть $y^2 + z^2 = 2px$.

Приложение 3 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Рассмотрим двумерное линейное пространство Ω , изоморфное¹⁾ линейному пространству радиус – векторов на плоскости.

Каждый элемент z пространства Ω в некотором базисе однозначно задается двухкомпонентным столбцом $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Если за базисные элементы пространства Ω принять

$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, то произвольный элемент $z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ может быть представлен в виде $z = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha g_1 + \beta g_2$.

Введем операцию *умножения* элементов пространства Ω по следующему правилу:

Определение Пр.3.0.1. Результатом операции умножения элементов $z_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ и $z_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ пространства Ω является элемент также этого пространства $z_1 z_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2 \\ \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix}$.

Определение Пр.3.0.2. Двумерное линейное пространство Ω , с базисом $\{ g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, в котором введена операция умножения элементов согласно определению Пр.3.0.1., называется множеством *комплексных чисел*, а каждый элемент $z \in \Omega$ — *комплексным числом*.

¹⁾ Изоморфизм (см 7.5.) в данном случае означает, что операции сложения и умножения на вещественное число выполняются в данном множестве так же, как и для векторов на плоскости.

Замечания: 1°. Операция умножения комплексных чисел коммутативна и обладает распределительным свойством относительно операции сложения, что следует непосредственно из ее определения.

2°. Операция умножения комплексных чисел позволяет ввести операцию деления: частным от деления комплексного числа z_1 на ненулевое z_2 называется комплексное число z^* такое, что $z_1 = z_2 z^*$.

3°. Нетрудно убедиться, что подмножество комплексных чисел вида $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, где α — произвольное вещественное число, в силу определения Пр.3.0.2., обладает всеми свойствами вещественных чисел, и потому можно говорить, что вещественные числа есть подмножество комплексных чисел.

На практике более употребительна специальная, упрощенная форма записи комплексных чисел: в представлении $z = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha g_1 + \beta g_2$ символ g_1 опускается (как бы заменяется не записываемым явно множителем "единица"), а символ g_2 заменяется символом i (называемым иногда "мнимой единицей"). Тогда произвольное комплексное число z представимо как $z = \alpha + \beta i$, а записи операций с комплексными числами принимают следующий вид:

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i) + (\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i ;$$

$$\lambda z = \lambda (\alpha + \beta i) = (\lambda \alpha) + (\lambda \beta) i ;$$

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) i .$$

Данная форма записи удобна тем, что с комплексными числами можно оперировать как с обычными алгебраическими двучленами, если принимать во внимание, что $i^2 = -1$, поскольку

$$i^2 = ii = (0 + 1i)(0 + 1i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) + 0i = -1.$$

Тогда, перемножая комплексные числа как двучлены и заменяя повсюду i^2 на число (-1) , мы формально приходим к соотношению

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 + \beta_2 i) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \beta_2 i + \alpha_2 \beta_1 i + \beta_1 \beta_2 i^2 = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) i ,$$

которое согласуется с введенным выше определением Пр.3.0.1.

Аналогично достаточно просто может выполняться и операция деления:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\alpha_1 + \beta_1 i}{\alpha_2 + \beta_2 i} = \frac{(\alpha_1 + \beta_1 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)}{(\alpha_2 + \beta_2 i)(\alpha_2 - \beta_2 i)} = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) + (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) i}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \\ &= \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} i.\end{aligned}$$

Определение
Пр.3.0.3. Для комплексного числа $z = \alpha + \beta i$:

- 1°. Вещественное число α называется *вещественной частью* z и обозначается $\operatorname{Re} z$.
- 2°. Вещественное число β называется *мнимой частью* z и обозначается $\operatorname{Im} z$.
- 3°. Вещественное число $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ называется *модулем* z и обозначается $|z|$.
- 4°. Вещественное число φ такое, что $\cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ и $\sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, называется *аргументом* z и обозначается $\arg z$, при условии, что $z \neq 0$.
- 5°. Комплексное число $\alpha - \beta i$ называется *комплексно сопряженным* числу z и обозначается $\bar{z}$.

Замечания: 1°. Определения, аналогичные пунктам 1°, 2° и 5°, могут быть сделаны и для матриц, элементами которых являются комплексные числа.

2°. Поскольку существует взаимно однозначное соответствие множества радиус-векторов на плоскости и множества комплексных чисел, то комплексные числа можно изображать точками на плоскости.

Свойства комплексного сопряжения

Имеют место следующие, легко проверяемые свойства для любых $z, z_1, z_2 \in \Omega$:

- 1°. $\overline{(\bar{z})} = z$;

2°. Число z будет вещественным тогда и только тогда, когда $\bar{z} = z$;

3°. Число $z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$ всегда вещественное и неотрицательное;

4°. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$; $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

5°. Если $P_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ многочлен с вещественными коэффициентами,

имеющий корень λ , то этот многочлен также будет иметь и корень

$\bar{\lambda}$. Действительно, пусть $\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k = 0$, тогда

$$0 = \bar{0} = \overline{\sum_{k=0}^n \alpha_k \lambda^k} = \sum_{k=0}^n \alpha_k \bar{\lambda}^k.$$

Замечание: если алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами имеет комплексные корни, то они попарно сопряжены, а алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами нечетной степени имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

Задача На множестве комплексных чисел решить уравнение $z^2 + 1 = 0$.
Пр.3.0.1.

Решение. Перепишем это уравнение, приняв, что $z = \alpha + \beta i = \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$, то есть

$$\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что здесь мы воспользовались развернутыми представлениями чисел $1 = 1 + 0i = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ и $0 = 0 + 0i = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$.

Выполнив умножение и сложение в правой части уравнения, приходим к равенству $\begin{vmatrix} \alpha^2 - \beta^2 + 1 \\ 2\alpha\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$. Но поскольку два комплексных числа равны тогда и

только тогда, когда одновременно равны их вещественные и мнимые части, то мы получаем следующую систему нелинейных уравнений относительно вещественных неизвестных α и β :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 1 = 0 \\ 2\alpha\beta = 0 \end{cases},$$

которая, как легко видеть, имеет два решения $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases}$. Поэтому исходное уравнение также имеет два решения $z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 + 1i = i$ и $z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 + (-1)i = -i$.

Тригонометрическая и экспоненциальная формы записи комплексных чисел

Исходя из определения Пр.3.0.3., можно получить специальную форму записи комплексных чисел, называемую *тригонометрической*:

$$z = \alpha + \beta i = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} i \right) = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел соответствует заданию точки, изображающей комплексное число, в полярной системе координат.

Пусть

- направляющим элементом полярной оси служит элемент $g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- значение модуля комплексного числа $|z|$ равно ρ — расстоянию от начала координат до точки, изображающей данное число,
- значение аргумента $\arg z$ совпадает с величиной полярного угла φ , отсчитываемого против часовой стрелки,

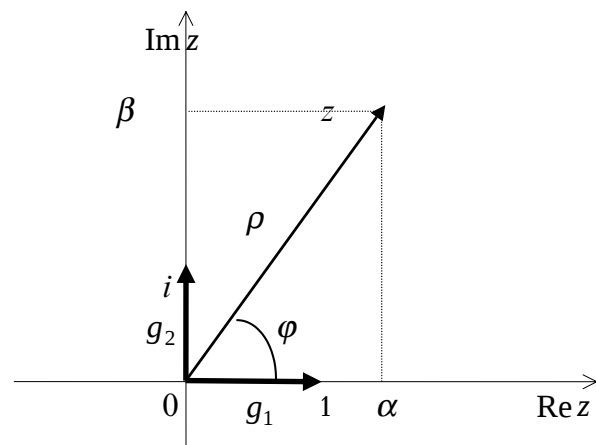


Рисунок Пр.3.0.1.

тогда, согласно определению Пр.3.0.3., комплексное число $z = \alpha + \beta i$ представимо в тригонометрической форме $z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Другой часто используемой формой представления комплексных чисел, является их *экспоненциальная* форма, которая получается преобразованием тригонометрической формы по *формуле Эйлера*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \forall z \in \Omega.$$

В этом случае из $z = \alpha + \beta i = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ следует, что $z = \rho e^{i\varphi}$.

Использование экспоненциальной формы записи комплексных чисел может упростить решение некоторых задач, поскольку при перемножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются¹⁾.

Например,

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

или

$$i^i = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} \right)^i = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad \forall k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Задача Найти какое-либо вещественное решение уравнения $\cos \sqrt{x} = 5$.
Пр.3.0.2.

Решение. Из формулы Эйлера следует, что $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\forall z \in \Omega$, поэтому данное уравнение можно записать в виде $\frac{e^{i\sqrt{x}} + e^{-i\sqrt{x}}}{2} = 5$ или $y + \frac{1}{y} - 10 = 0$, где $y = e^{i\sqrt{x}}$.

Отсюда находим, что $e^{i\sqrt{x}} = 5 \pm 2\sqrt{6}$, то есть $i\sqrt{x} = \ln(5 \pm 2\sqrt{6})$ или окончательно $x = -\ln^2(5 \pm 2\sqrt{6})$.

¹⁾ Обоснование распространения свойств экспоненциальной функции вещественного аргумента на комплексный случай приводится в курсе ТФКП.

Приложение 4 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Пр.4.1. Замечания об определении объектов в линейном пространстве

В предыдущих разделах курса линейной алгебры исследовались наиболее часто встречающиеся в приложениях виды объектов в линейном пространстве, такие как: элемент линейного пространства, линейный функционал, линейный оператор, билинейный функционал и т.д., хотя вполне очевидно, что в линейном пространстве могут быть определены и иные, быть может, более сложные объекты, представляющие практический интерес.

Определение всех рассмотренных ранее объектов давалось вне зависимости от наличия или отсутствия базиса линейного пространства, причем в случае существования базиса для каждого из объектов приводился альтернативный, покомпонентный способ его описания. И поскольку замена базиса меняет, вообще говоря, данное описание, то специально исследовался вопрос о характере этого изменения.

Однако естественно допустить, что в линейном пространстве Λ^n существуют объекты, которые можно определить, используя лишь значения их компонентов в некотором базисе. Такой подход привлекателен тем, что:

во – первых, в этом случае не требуется объяснять, что представляет собой данный объект безотносительно к базису,

и, во – вторых, определения объектов разной природы могут быть выполнены единообразно.

С другой стороны, недостатком такой схемы является очевидная зависимость описания объекта от выбора базиса, то есть необходимость указывать (в самом определении объекта!), что происходит с его компонентами при переходе от одного базиса к другому.

Для оценки целесообразности использования определения объектов в Λ^n через их компоненты приведем в таблице Пр.4.1.1. основные, рассмотренные нами ранее, типы объектов, формы их представления в базисе и правила изменения этого представления при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$.

Тип объекта в Λ^n	Координатное представление в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$	Правило изменения координатно- го представления при переходе к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$
Элемент x	Столбец $\ x\ _g = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$	$\ x\ _{g'} = \ S\ ^{-1} \ x\ _g$ или $\xi'_j = \sum_{i=1}^n \tau_{ji} \xi_i$
Линейный функционал $f(x)$	Строка $\ f\ _g = \ \phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n\ $, где $\phi_i = f(g_i)$	$\ f\ _{g'} = \ f\ _g \ S\ $ или $\phi'_j = \sum_{i=1}^n \phi_i \sigma_{ij}$
Линейный оператор $\hat{A}$	$\ \hat{A}\ _g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, где $\hat{A}g_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} g_i; \quad j = [1, n]$	$\ \hat{A}\ _{g'} = \ S\ ^{-1} \ \hat{A}\ _g \ S\ $ или $\alpha'_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \alpha_{jm}$
Билинейный функционал $B(x, y)$	$\ B\ _g = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix}$, где $\beta_{ij} = B(g_i, g_j); \quad i, j = [1, n]$	$\ B\ _{g'} = \ S\ ^T \ B\ _g \ S\ $ или $\beta'_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sigma_{jk} \sigma_{mi} \beta_{jm}$
Квадратичный функционал $\Phi(x)$	$\ \Phi\ _g = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$, где $\varphi_{ij} = \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{2}; \quad i, j = [1, n]$	$\ \Phi\ _{g'} = \ S\ ^T \ \Phi\ _g \ S\ $ или $\varphi'_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sigma_{jk} \sigma_{mi} \varphi_{jm}$

Таблица Пр.4.1.1.

Как и ранее, будем предполагать, что матрица перехода $\|S\|$ имеет компоненты σ_{ij} , где $g'_j = \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} g_i$; $j = [1, n]$, а матрица обратного перехода $\|T\| = \|S\|^{-1}$ имеет компоненты τ_{ij} , то есть $g_j = \sum_{i=1}^n \tau_{ij} g'_i$; $j = [1, n]$.

Сопоставление формул третьей колонки таблицы позволяет заметить, что для данных объектов:

1°. Значения их компонентов в базисе $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ линейны по значениям компонентов в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

2°. Коэффициентами в этих формулах служат: либо компоненты матриц $\|S\|$ или $\|S\|^{-1}$, либо и той и другой одновременно.

В курсе линейной алгебры нами были рассмотрены далеко не все виды объектов, которые обладают подобными трансформационными свойствами. Например, в Λ^n можно ввести *произведение элементов* $x \otimes y$, поставив в каждом базисе упорядоченной

паре элементов $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ и $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \dots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ в соответствие матрицу размера $n \times n$, имеющую вид:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \eta_1 & \xi_1 \eta_2 & \dots & \xi_1 \eta_n \\ \xi_2 \eta_1 & \xi_2 \eta_2 & \dots & \xi_2 \eta_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n \eta_1 & \xi_n \eta_2 & \dots & \xi_n \eta_n \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что объект $x \otimes y$ при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ меняется в соответствии с правилами 1° и 2°. Действительно, из

$\xi'_k = \sum_{i=1}^n \tau_{ki} \xi_i$ и $\eta'_j = \sum_{m=1}^n \tau_{jm} \eta_m$ следует, что $\xi'_k \eta'_j = \sum_{i=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{ki} \tau_{jm} \xi_i \eta_m$, или же, в матричном

виде, $\|x \otimes y\|_{g'} = (\|S\|^{-1})^T \|x \otimes y\|_g \|S\|^{-1}$. Последнее равенство означает, что введенное нами произведение элементов обладает свойствами 1° и 2°.

Рассмотрим другой пример, демонстрирующий существование более сложных объектов, обладающих данными свойствами. Достаточно часто в физических приложениях используется метод, в котором линейный оператор описывает зависимость одного вектора, характеризующего некоторое свойство точки пространства, от другого вектора, являющегося иной характеристикой этой же точки.

Например, закон Гука связывает вектор силы $\vec{F}$, возникающей в результате упругой деформации, с вектором деформации $\vec{\Delta r}$ соотношением:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix},$$

или же индукция электрического поля $\vec{D}$ выражается через напряженность электрического поля $\vec{E}$ формулой:

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_{xx} & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \theta_{yy} & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zy} & \theta_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

Если среда однородная, то коэффициенты матриц этих операторов константы. Однако если исследуемые свойства среды меняются от точки к точке, то соответствующие операторы уже не будут линейными, и может возникнуть вопрос о характере их зависимости от координат.

В этом случае можно ввести в рассмотрение объект, компоненты которого являются частными производными компонентов матрицы оператора по переменным x, y и z . Для рассматриваемых примеров таких частных производных будет 27 и их удобно представить в виде трехмерной таблицы (или, как иногда говорят, "куб — матрицы").

Например, для закона Гука этот объект состоит из трех матриц вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \kappa_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{zy}}{\partial x} & \frac{\partial \kappa_{zz}}{\partial x} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial y} \\ \frac{\partial \kappa_{zx}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{zy}}{\partial y} & \frac{\partial \kappa_{zz}}{\partial y} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \frac{\partial \kappa_{xx}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{xy}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \kappa_{yx}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \kappa_{zx}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial \kappa_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

В общем случае n -мерного линейного пространства можно ввести объект, называемый *производной оператора*, обозначаемый $\left\| \frac{\partial \hat{A}}{\partial \vec{r}} \right\|_g$ и задаваемый в конкретном базисе упорядоченным набором из n^n чисел.

Выясним закон преобразования компонентов этого объекта при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$.

Поскольку правило изменения компонентов матрицы оператора $\hat{A}$ в Λ^n имеет вид $\|\hat{A}\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|\hat{A}\|_g \|S\|$ (или $\alpha'_{ki} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \alpha_{jm}$), то из правила дифференцирования сложной функции следует, что

$$\frac{\partial \alpha'_{ki}}{\partial \xi'_l} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \frac{\partial \alpha_{jm}}{\partial \xi'_l} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \tau_{kj} \sigma_{mi} \sum_{p=1}^n \frac{\partial \alpha_{jm}}{\partial \xi_p} \frac{\partial \xi_p}{\partial \xi'_l} = \sum_{j=1}^n \sum_{m=1}^n \sum_{p=1}^n \tau_{kj} \sigma_{im}^T \frac{\partial \alpha_{jm}}{\partial \xi_p} \sigma_{pl}$$

или, в матричной форме, $\left\| \frac{\partial \hat{A}}{\partial r} \right\|_{g'} = \|S\|^{-1} \|S\|^T \left\| \frac{\partial \hat{A}}{\partial r} \right\|_g \|S\|$. Отсюда делаем заключение, что введенный нами новый объект также обладает свойствами 1° и 2°.

С другой стороны, отметим, что не всякий однозначно определяемый своими компонентами объект будет обладать подобными трансформационными свойствами.

Например, рассмотрим однокомпонентный объект ω , значение которого для

каждого элемента $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ пространства Λ^n есть сумма компонентов x . Для него в ба —

зисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ имеем $\omega = \sum_{i=1}^n \xi_i$ и, хотя значение ω' и определяется однозначно в базисе $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, оно не выражается линейно через ω , так как $\omega' = \sum_{i=1}^n \xi'_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tau_{ij} \xi_j$.

Таким образом, мы приходим к заключению, что в конечномерном линейном пространстве существует достаточно широкий класс объектов, задаваемых:

- совокупностью значений своих компонентов в некотором базисе и
- свойствами вида 1° и 2°, характеризующими изменения этих компонентов при переходе от одного базиса к другому.

Объекты, обладающие перечисленными свойствами, называют *тензорами*, уточняя это название, в случае присутствия матриц $\|S\|$ или $\|S\|^T$ в формулах пересчета компонентов тензора при замене базиса, определяем *ковариантный* (то есть *преобразующийся так же, как и базисные элементы*), или же, в случае присутствия матриц $\|S\|^{-1}$ или $(\|S\|^{-1})^T$, определяем *контравариантный*.

Пр.4.2. Определение и обозначение тензоров

Общее определение тензора, исходя из вышеизложенных соображений, следовало бы предложить, например, в такой форме:

Будем говорить, что в вещественном линейном пространстве Λ^n определен *тензор типа (q, p)* , q раз контравариантный и p раз ковариантный (или $p + q$ – валентный), если в Λ^n задан объект, который в каждом базисе характеризуется упорядоченным набором n^{p+q} чисел $\xi_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p}$ (где $j_m = [1, n]$; $m = [1, q]$ – контравариантные индексы и $i_k = [1, n]$; $k = [1, p]$ – ковариантные), преобразующихся при переходе от базиса $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$ по закону:

$$\xi'_{j'_1 j'_2 \dots j'_q i'_1 i'_2 \dots i'_p} = \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_p=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_q=1}^n \sigma_{i_1 i'_1} \sigma_{i_2 i'_2} \dots \sigma_{i_p i'_p} \tau_{j'_1 j_1} \tau_{j'_2 j_2} \dots \tau_{j'_q j_q} \xi_{j_1 j_2 \dots j_q i_1 i_2 \dots i_p},$$

где $i'_k = [1, n]$; $k = [1, p]$ и $j'_k = [1, p]$; $k = [1, m]$, а σ_{ij} и τ_{ij} есть соответственно компоненты матрицы перехода $\|S\|$ и ей обратной $\|T\| = \|S\|^{-1}$.

Громоздкость и неудобочитаемость стандартной схемы обозначений применительно к тензорам очевидны уже на примере этого определения. Поэтому в тензорном исчислении используется специальная, более компактная форма описания тензорных объектов и операций с ними, основу которой составляют следующие правила:

Запись тензоров

- 1°. Упорядоченный набор вещественных чисел, являющихся компонентами тензора, образует $q + p$ – мерную таблицу (называемую также $q + p$ – мерной матрицей, или $q + p$ – мерным массивом), каждый элемент которой однозначно определен набором значений контравариантных индексов $j_1, j_2, \dots, j_q$ и ковариантных индексов $i_1, i_2, \dots, i_p$.

Если какой-либо из индексов принимает значения от 1 до n , то в записи тензора *перечень значений индекса не указывается* и предполагается, что выписаны компоненты тензора для всех этих значений.

Пример запись $\xi_i = \eta_i$ означает, что $\xi_i = \eta_i$; $\forall i = [1, n]$
 Пр.4.2.1.

- 2°. *Порядок следования индексов в записи тензоров существенен.* Для того чтобы избежать возможной неоднозначности, применяется следующее правило: если необходимо выписать последовательно все компоненты тензора (например, в виде одной строки), то в первую очередь увеличиваются индексы расположенные ближе к правому концу индексного списка.

Пример тензор ξ_{ijk} в Λ^2 имеет следующий порядок компонентов:
 Пр.4.2.2. $\xi_{111}, \xi_{112}, \xi_{121}, \xi_{122}, \xi_{211}, \xi_{212}, \xi_{221}, \xi_{222}$.

- 3°. В тензорных записях для отличия контравариантных индексов от ковариантных принято первые обозначать *верхними индексами*, а вторые — *нижними*. При этом, чтобы сохранить общий порядок следования индексов в списке, в запись каждого индекса добавляется символ "точка" под каждым верхним индексом и над каждым нижним.

Пример $\xi^{.jk..}$
 Пр.4.2.3. $\xi_{i..lm}$.

- 4°. Если точки не использованы в записи тензора, то предполагается, что нижние индексы следуют в списке после верхних.

Пример линейный оператор $\hat{S}$, переводящий базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ в базис
 Пр.4.2.4. $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$, является двухвалентным тензором типа (1,1) σ_i^j (один раз контравариантным и один раз ковариантным), причем его компоненты совпадают с компонентами матрицы перехода σ_{ji} , как следствие совпадения определения 7.3.2. и определения матрицы линейного оператора 8.3.1.

Соглашение о суммировании

Пусть имеется выражение, являющееся произведением сомножителей, имеющих как верхние, так и нижние индексы, причем некоторый индекс встречается в записи выражения *дважды*: один раз как верхний, а второй раз как нижний. Тогда под таким выражением понимается *сумма членов данного вида, выписанных для всех значений повторяющегося индекса*.

В случае присутствия в выражении нескольких пар совпадающих индексов имеет место многократное суммирование.

Пример 1°. Квадратичный функционал записывается теперь в виде
 Пр.4.2.5. $\Phi(x) = \varphi_{ij} \xi^i \xi^j$.

Тип объекта в Λ^n	Тип тензора и его запись в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$	Изменение компонент тензора при переходе к базису $\{g'_1, g'_2, \dots, g'_n\}$
Элемент x	Одновалентный (один раз контравариантный) тензор типа (1,0) ξ^j	$\xi'^j = \tau_i^j \xi^i$
Линейный функционал $f(x)$	Одновалентный (один раз ковариантный) тензор типа (0,1) ϕ_j	$\phi'_j = \phi_i \sigma_j^i$
Линейный оператор $\hat{A}$	Двухвалентный (один раз контравариантный и один раз ковариантный) тензор типа (1,1) α_i^j	$\alpha_k'^m = \tau_j^m \sigma_k^i \alpha_i^j$
Билинейный функционал $B(x, y)$	Двухвалентный (дважды ковариантный) тензор типа (0,2) β_{ji}	$\beta'_{km} = \sigma_k^j \sigma_m^i \beta_{ji}$
Квадратичный функционал $\Phi(x)$	Двухвалентный (дважды ковариантный) тензор типа (0,2) φ_{ji}	$\varphi'_{km} = \sigma_k^j \sigma_m^i \varphi_{ji}$
Символ Кронекера $\delta_i^j = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$	Двухвалентный (один раз контравариантный и один раз ковариантный) тензор типа (1,1) δ_i^j	$\delta_k'^m = \tau_j^m \sigma_k^i \delta_i^j$

Таблица Пр.4.2.1.

Таблица Пр.4.2.1. содержит описание основных тензорных объектов и правил пересчета их компонент при замене базиса.

Отметим, что последний из приведенных в таблице Пр.4.2.1. тензоров — символ Кронекера — во всех базисах имеет компоненты, совпадающие с компонентами единичной матрицы, если считать, что верхний индекс этого тензора есть номер строки, а нижний — столбца. Действительно, по определению Пр.4.2.1., справедливы соотношения $\delta_k^m = \tau_j^m \sigma_k^i \delta_i^j = \tau_j^m \sigma_k^j = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$. Последнее равенство, очевидно, имеет место, поскольку выражение $\tau_j^m \sigma_k^j$ есть результат произведения двух невырожденных, взаимно обратных матриц, компоненты которых совпадают с компонентами тензоров τ_j^m и σ_k^j .

Замечания о матричной записи тензоров

В ряде случаев тензоры удобно представлять в виде *блочных матриц*, то есть матриц, элементами которых являются обычные матрицы с числовыми элементами. При этом примем следующие соглашения:

- 1°. Тензор типа (1,0) записывается матрицей — столбцом. Тензор типа (0,1) записывается матрицей — строкой.
- 2°. Элементы матриц, используемых для записи тензоров, нумеруются нижними индексами, порядок следования индексов определен выше, в правиле 2° "Запись тензоров". Обратите внимание, что при этом запись тензоров валентности большей, чем 1, не будет отражать тип тензора.
- 3°. Первый индекс определяет номер строки в числовой матрице, второй индекс — номер столбца. Третий индекс определяет номер строки в блочной матрице, состоящей из числовых матриц, четвертый индекс, соответственно, — номер столбца в блочной матрице.

Приведем для иллюстрации общий вид матричной записи тензора четвертой валентности в двумерном пространстве:

$$\left\| \begin{array}{cc|cc} \alpha_{1111} & \alpha_{1211} & \alpha_{1112} & \alpha_{1212} \\ \alpha_{2111} & \alpha_{2211} & \alpha_{2112} & \alpha_{2212} \\ \hline \alpha_{1121} & \alpha_{1221} & \alpha_{1122} & \alpha_{1222} \\ \alpha_{2121} & \alpha_{2221} & \alpha_{2122} & \alpha_{2222} \end{array} \right\|.$$

Задача
Пр.4.2.1.

Каждой паре элементов x и y линейного пространства Λ^4 сопоставляется число $f(x, y)$, определяемое через компоненты этих элементов $\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4$ и $\eta^1, \eta^2, \eta^3, \eta^4$ в стандартном базисе $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ по формуле $f(x, y) = \xi^1 \eta^3 + 3\xi^2 \eta^4$. Показать, что данное сопоставление определяет тензор, найти его тип, выписать его компоненты в данном базисе.

Решение

1°. Очевидно, что данное сопоставление линейно по каждому из аргументов.

Найдем закон изменения его компонентов при замене базиса.

Пусть $g'_i = \sum_{k=1}^4 \sigma_i^k g_k$ при переходе от базиса $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ к базису $\{g'_1, g'_2, g'_3, g'_4\}$. Тогда, в силу линейности сопоставления,

$$f(g'_i, g'_j) = f\left(\sum_{k=1}^4 \sigma_i^k g_k, \sum_{l=1}^4 \sigma_j^l g_l\right) = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sigma_i^k \sigma_j^l f(g_k, g_l).$$

Поскольку компоненты исследуемого объекта в новом базисе выражаются линейно через компоненты в старом, а коэффициентами служат попарные произведения элементов матрицы перехода $\|S\|$, то, по определению Пр.4.2.1., этот объект является тензором типа $(0,2)$.

2°. Найдем компоненты этого тензора $f(g_k, g_l)$ в исходном базисе

$$\|g_1\|_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \|g_2\|_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \|g_3\|_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \|g_4\|_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По условию задачи $f(g_1, g_3)=1$; $f(g_2, g_4)=3$ и $f(g_k, g_l)=0$ в остальных случаях. Таким образом, искомая матрица тензора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пр.4.3. Операции с тензорами

Вводимые ниже операции с тензорами во всех случаях требуют обоснования того, что результатом каждой из них является также тензор. В рамках данного курса эти утверждения предлагаются в качестве упражнений.

Сложение тензоров

Определение Пр.4.3.1. Пусть даны два тензора типа (q, p) $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ и $\beta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$. Тензор типа (q, p) $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ называется суммой тензоров $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ и $\beta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, если в каждом базисе имеет место равенство $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} + \beta_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$.

Пример 4.3.1. Сумма двух линейных операторов α_i^j и β_i^j , являющихся тензором типа $(1, 1)$, есть также линейный оператор и, следовательно, тензор типа $(1, 1)$ γ_i^j , для компонентов которого справедливы соотношения $\gamma_i^j = \alpha_i^j + \beta_i^j$.

Умножение тензоров на число

Определение Пр.4.3.2. Пусть дан тензор типа (q, p) $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ и число λ . Тензор типа (q, p) $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ называется произведением тензора $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ на λ , если в каждом базисе имеет место равенство $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \lambda \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$.

Замечание: нетрудно показать, что множество тензоров типа (q, p) с операциями сложения и умножения на число является линейным пространством размерности n^{q+p} .

Тензорное произведение

Определение Пр.4.3.3. Пусть даны два тензора типа (q, p) $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ и типа (r, s) $\beta_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$. Тензор типа $(q+r, p+s)$ $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p l_1 l_2 \dots l_s}^{j_1 j_2 \dots j_q k_1 k_2 \dots k_r}$ называется произведением тензоров $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ и $\beta_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$, если в каждом базисе имеет место равенство $\gamma_{i_1 i_2 \dots i_p l_1 l_2 \dots l_s}^{j_1 j_2 \dots j_q k_1 k_2 \dots k_r} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} \beta_{l_1 l_2 \dots l_s}^{k_1 k_2 \dots k_r}$. Иногда тензорное произведение обозначают символом $\otimes$.

Пример Пр.4.3.2. Мы видели, что элементы линейного пространства Λ^n являются одинаково контравариантными тензорами. Найдем их произведение по определению Пр.4.3.3. Получаем, что $x \otimes y = \xi^k \eta^i$ есть дважды контравариантный тензор.

Заметим, $x \otimes y \neq y \otimes x$. Дело в том, что хотя и $\xi^k \eta^i = \eta^i \xi^k$, но упорядочивание компонентов этих тензоров выполняется *по-разному*. Следовательно, тензорное произведение некоммукативно.

Задача
Пр.4.3.1.

Определить тип и матрицу тензора $c = a \otimes b$, если a — тензор типа

$$(0,3) \text{ с матрицей } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \text{ и } b \text{ — тензор типа } (0,1) \text{ с матрицей}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Решение

По определению тензорного произведения, c есть тензор типа $(0,4)$ с матрицей, составленной с учетом соглашения о порядке индексов из поэлементных произведений вида $\alpha_{ijk} \beta_l$, где α_{ijk} и β_l — компоненты тензоров a и b соответственно.

Таким образом матрица тензора c имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 9 & 2 \cdot 9 & 1 \cdot 10 & 2 \cdot 10 \\ 3 \cdot 9 & 4 \cdot 9 & 3 \cdot 10 & 4 \cdot 10 \\ 5 \cdot 9 & 6 \cdot 9 & 5 \cdot 10 & 6 \cdot 10 \\ 7 \cdot 9 & 8 \cdot 9 & 7 \cdot 10 & 8 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 10 & 20 \\ 27 & 36 & 30 & 40 \\ 45 & 54 & 50 & 60 \\ 63 & 72 & 70 & 80 \end{pmatrix}.$$

Свертывание тензоров

Определение
Пр.4.3.4.

Пусть дан тензор типа (q, p) $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, причем $q \geq 1$ и $p \geq 1$. Выберем один верхний (например, j_r) и один нижний (например, i_s) индексы и в записи тензора заменим их обозначения одним и тем же символом (например, m). Тензор типа $(q-1, p-1)$ $\beta_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q-1}}$ называется *сверткой* тензора $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ по индексам j_r и i_s , если в каждом базисе имеет место равенство $\beta_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}^{j_1 j_2 \dots j_{q-1}} = \alpha_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}}^{j_1 j_2 \dots m \dots j_q}$.

Заметим, что в последнем равенстве правая часть — это сумма p слагаемых, где m — индекс, по которому выполняется суммирование, а само данное тензорное равенство равносильно $(q-1)(p-1)$ скалярным равенствам.

Пример
Пр.4.3.3.

Свертка тензора типа $(1,1)$, являющегося линейным оператором α_i^j , есть тензор типа $(0,0)$, то есть инвариант относительно замены базиса, имеющий единственный компонент, равный $\alpha_m^m = \alpha_1^1 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^n$. Данное выражение есть сумма диагональных элементов матрицы линейного оператора, которая не меняется при замене базиса. Заметим, что данным свойством не обладает, например, матрица билинейного функционала.

Операция свертки часто комбинируется с операцией умножения тензоров. Например, результатом произведения один раз ковариантного тензора на один раз контравариантный с последующей сверткой является инвариант, представляющий значение линейного функционала в Λ^n . Действительно, $f(x) = \phi_i \xi^i$. В этом случае говорят, что тензор ϕ_i свертывается с тензором ξ^k .

Задача
Пр.4.3.2.

Даны тензоры:

$$a - \text{типа } (1,1) \text{ с элементами } \alpha_j^i \text{ и матрицей } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix};$$

$$b - \text{типа } (1,0) \text{ с элементами } \beta^j \text{ и матрицей } \begin{vmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{vmatrix};$$

$$c - \text{типа } (0,1) \text{ с элементами } \gamma_i \text{ и матрицей } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Найти свертки $\alpha_j^i \beta^j$ и $\alpha_j^i \gamma_i$.

Решение

1°. По определению операции свертывания, $\alpha_j^i \beta^j$ — тензор типа

$$(1,0) \text{ с компонентами } \delta^i = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^i \beta^j. \text{ Поэтому}$$

$$\delta^1 = \alpha_1^1 \beta^1 + \alpha_2^1 \beta^2 + \alpha_3^1 \beta^3 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = 8$$

$$\delta^2 = \alpha_1^2 \beta^1 + \alpha_2^2 \beta^2 + \alpha_3^2 \beta^3 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 6 \cdot 4 = 17$$

$$\delta^3 = \alpha_1^3 \beta^1 + \alpha_2^3 \beta^2 + \alpha_3^3 \beta^3 = 7 \cdot 2 + 8 \cdot (-3) + 9 \cdot 4 = 26.$$

2°. Аналогично $\alpha_j^i \gamma_i$ — тензор типа $(0,1)$ с компонентами

$$\varphi_j = \sum_{i=1}^3 \alpha_j^i \gamma_i. \text{ Тогда}$$

$$\varphi_1 = \alpha_1^1 \gamma_1 + \alpha_1^2 \gamma_2 + \alpha_1^3 \gamma_3 = 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 7 \cdot 4 = 18$$

$$\varphi_2 = \alpha_2^1 \gamma_1 + \alpha_2^2 \gamma_2 + \alpha_2^3 \gamma_3 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + 8 \cdot 4 = 21$$

$$\varphi_3 = \alpha_3^1 \gamma_1 + \alpha_3^2 \gamma_2 + \alpha_3^3 \gamma_3 = 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) + 9 \cdot 4 = 26.$$

Транспонирование тензоров

Как уже отмечалось ранее, перестановка местами любой пары ковариантных (или пары контравариантных) индексов у тензора, то есть транспонирования тензора, вообще говоря, приводит к его изменению, поскольку в определении тензора говорится об упорядоченной системе индексов. При этом новый тензор будет того же типа, что и исходный.

В общем случае для группы, состоящей из N верхних (или нижних) индексов, существует $N!$ различных способов перестановок. Это означает, что, переставляя данные индексы, можно построить $N!$ новых тензоров.

Задача Пр.4.3.3. Тензор α_k^{ij} задан матрицей $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$. Найти матрицу транспонированного тензора.

Решение Данный тензор можно транспонировать по паре контравариантных индексов i и j . После перестановки соответствующих элементов получаем тензор с матрицей $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

Симметрирование и альтернирование тензоров

Определение Пр.4.3.5. Тензор называется *симметричным относительно группы (верхних или нижних) индексов*, если он не меняется при перестановке любых двух индексов, принадлежащих данной группе.

Определение Пр.4.3.6. Тензор называется *антисимметричным (или кососимметричным) относительно группы индексов*, если он меняет, в смысле указанного выше определения равенства тензоров, свой знак на противоположный при перестановке любых двух индексов, принадлежащих данной группе.

Выделим у тензора группу, состоящую из N индексов (либо верхних, либо нижних), построим путем перестановок индексов данной группы $N!$ всевозможных новых тензоров и возьмем их среднее арифметическое. В результате мы получим тензор, симметричный по выбранной группе индексов.

Данная операция называется *симметрированием тензора по группе индексов*. Группа индексов, по которой выполняется симметрирование тензора, выделяется круглыми скобками.

Пример Пр.4.3.4.	$N=1$	$\xi_{(i_1)} = \xi_{i_1}$
	$N=2$	$\xi_{(i_1, i_2)} = \frac{1}{2!} \{ \xi_{i_1, i_2} + \xi_{i_2, i_1} \}$
	$N=3$	$\xi_{(i_1, i_2, i_3)} = \frac{1}{3!} \{ \xi_{i_1, i_2, i_3} + \xi_{i_3, i_1, i_2} + \xi_{i_2, i_3, i_1} + \xi_{i_2, i_1, i_3} + \xi_{i_3, i_2, i_1} + \xi_{i_1, i_3, i_2} \}$
	...	...

Операция симметрирования часто комбинируется с умножением, причем имеет место следующий порядок действий: сначала умножение, а потом симметрирование.

Пример Пр.4.3.5.	$\xi^{(i} \eta^{j)}$.
---------------------	------------------------

Выделим у тензора группу, состоящую из N индексов (либо верхних, либо нижних), построим путем перестановок индексов данной группы $N!$ всевозможных новых тензоров, приписав каждому из них знак $(-1)^B(k_1, k_2, \dots, k_N)$, где $B(k_1, k_2, \dots, k_N)$ — число беспорядков в перестановке чисел $\{1, 2, \dots, N\}$, и возьмем их среднее арифметическое. В результате мы получим тензор, антисимметричный по выбранной группе индексов.

Данная операция называется *альтернированием тензора по группе индексов*. Группа индексов, по которой выполняется альтернирование тензора, выделяется квадратными скобками.

Пример Пр.4.3.6.	$N=1$	$\xi_{[i_1]} = \xi_{i_1}$
	$N=2$	$\xi_{[i_1, i_2]} = \frac{1}{2!} \{ \xi_{i_1, i_2} - \xi_{i_2, i_1} \}$
	$N=3$	$\xi_{[i_1, i_2, i_3]} = \frac{1}{3!} \{ \xi_{i_1, i_2, i_3} + \xi_{i_3, i_1, i_2} + \xi_{i_2, i_3, i_1} - \xi_{i_2, i_1, i_3} - \xi_{i_3, i_2, i_1} - \xi_{i_1, i_3, i_2} \}$
	...	...

Операция альтернирования часто комбинируется с умножением, причем имеет место следующий порядок действий: сначала умножение, а потом альтернирование.

Пример Пр.4.3.7.	$\xi^{[i} \eta^{j]}$.
---------------------	------------------------

Заметим, что как симметрирование кососимметричного тензора, так и альтернирование симметричного дает нулевой тензор.

Задача
Пр.4.3.4.

Тензор α_{ijk} задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицы тензоров $\alpha_{(ij)k}$,

$\alpha_{i(jk)}$ и $\alpha_{i[jk]}$.

Решение

1°. Тензор $\beta_{ijk} = \alpha_{jik}$, транспонированный к данному по паре индексов i и j , имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \quad (\text{См. задачу Пр.4.3.3.})$$

Тензор $\gamma_{ijk} = \alpha_{ikj}$, транспонированный к данному по паре индексов j и k , будет иметь матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \\ 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{в которой элементы}$$

первых столбцов блочных матриц исходного тензора записаны в первой блочной строке, а элементы вторых столбцов блочных матриц исходного тензора записаны во второй блочной строке.

2°. Тогда тензор $\alpha_{(ij)k}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1+1}{2} & \frac{2+3}{2} \\ \frac{3+2}{2} & \frac{4+4}{2} \\ \frac{5+5}{2} & \frac{6+7}{2} \\ \frac{7+6}{2} & \frac{8+8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \\ 5 & \frac{13}{2} \\ \frac{13}{2} & 8 \end{pmatrix},$$

тензор $\alpha_{i(jk)}$ — матрицу

$$\begin{pmatrix} \frac{1+1}{2} & \frac{2+5}{2} \\ \frac{3+3}{2} & \frac{4+7}{2} \\ \frac{5+2}{2} & \frac{6+6}{2} \\ \frac{7+4}{2} & \frac{8+8}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{2} \\ 3 & \frac{11}{2} \\ \frac{7}{2} & 6 \\ \frac{11}{2} & 8 \end{pmatrix},$$

$$\text{а тензор } \alpha_{i[jk]} \text{ — матрицу } \left\| \begin{array}{cc} \frac{1-1}{2} & \frac{2-5}{2} \\ \frac{3-3}{2} & \frac{4-7}{2} \\ \frac{5-2}{2} & \frac{6-6}{2} \\ \frac{7-4}{2} & \frac{8-8}{2} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{array} \right\|.$$

Пр.4.4. Тензоры в евклидовом пространстве

В случае евклидова пространства тензоры обладают дополнительными специфическими свойствами, обусловленными тем фактом, что скалярное произведение есть билинейный функционал, а потому является дважды ковариантным тензором, компоненты которого в любом базисе совпадают с компонентами матрицы Грама. Этот ковариантный тензор иногда называют *фундаментальным метрическим тензором*.

Поясним эти свойства следующим примером. Пусть дан базис $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ в E^n и его некоторый элемент x , являющийся одновалентным, один раз контравариантным тензором ξ^i . Свернем фундаментальный метрический тензор $\gamma_{ij} = (g_i, g_j)$ с тензором ξ^i , получим

$$\xi_j = \gamma_{ij} \xi^i = (g_i, g_j) \xi^i = (g_i \xi^i, g_j) = (x, g_j).$$

Данное равенство означает, что элемент x однозначно характеризуется в каждом базисе E^n также и компонентами один раз ковариантного тензора ξ_j . Числа ξ_j называются ковариантными компонентами элемента x в базисе $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, и они однозначно определяются обычными контравариантными компонентами элемента x в силу невырожденности матрицы Грама из системы уравнений

$$\xi_j = \gamma_{ij} \xi^i.$$

Таким образом, в евклидовом пространстве исчезает принципиальная разница между ковариантными и контравариантными индексами тензоров. Более того, в ортонормированном базисе ковариантные и контравариантные компоненты элемента x совпадают (см. теорему 10.3.2.).

Операция опускания индекса

Определение Пусть в E^n задан тензор типа (q, p) $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, где $q \geq 1$. Тензор типа $(q-1, p+1)$ $\beta_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p}^{\bullet j_2 \dots j_q}$ называется *результатом операции опускания контравариантного индекса j_1 у тензора $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$* , если в каждом базисе имеет место равенство $\beta_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p}^{\bullet j_2 \dots j_q} = \gamma_{i_0 j_1} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$.

Заметим, что использование точек для указания порядка следования индексов в этой операции оказывается необходимым, чтобы сделать ее однозначной. Иначе непонятно, куда следует опустить индекс.

Операция поднятия индекса

Определение Дважды контравариантный тензор, компоненты которого в любом базисе евклидова пространства E^n совпадают с матрицей, обратной матрице Грама, называется *контравариантным метрическим тензором*.

Убедимся вначале, что матрица, обратная матрице Грама, задает в каждом базисе тензор типа $(2, 0)$. Имеем $\| \Gamma \|_{g'} = \| S \|^T \| \Gamma \|_g \| S \|$. Исходя из этого соотношения, получаем следующее правило преобразования обратной матрицы Грама при замене базиса:

$$\| \Gamma \|_{g'}^{-1} = (\| S \|^T \| \Gamma \|_g \| S \|)^{-1} = \| S \|^{-1} \| \Gamma \|_g (\| S \|^T)^{-1} = \| S \|^{-1} \| \Gamma \|_g (\| S \|^{-1})^T,$$

поскольку из $\| E \| = \| E \|^T = (\| S \| \| S \|^{-1})^T = (\| S \|^{-1})^T \| S \|^T$ следует, что для невырожденной матрицы $\| S \|$ справедливо равенство $(\| S \|^{-1})^T = (\| S \|^T)^{-1}$. А это и означает, что обратная матрица Грама определяет во всех базисах дважды контравариантный тензор γ^{ij} .

По аналогии с операцией опускания индекса дадим

Определение Пусть в E^n дан тензор типа (q, p) $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, где $p \geq 1$. Тензор типа $(q+1, p-1)$ $\beta_{\bullet i_2 \dots i_p}^{j_0 j_1 j_2 \dots j_q}$ называется *результатом поднятия ковариантного индекса i_1 у тензора $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$* , если в каждом базисе имеет место равенство $\beta_{\bullet i_2 \dots i_p}^{j_0 j_1 j_2 \dots j_q} = \gamma^{i_1 j_0} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$.

Задача В E^2 с фундаментальным метрическим тензором $\gamma_{ij} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ тензор $\alpha_{\bullet jk}^i$ задан матрицей $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \\ 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$. Найти матрицы тензоров α_{ijk} и $\alpha_k^{ij\bullet}$.

Решение 1°. Для опускания первого индекса воспользуемся формулой $\alpha_{ijk} = \gamma_{im} \alpha_{\bullet jk}^m$. Получаем

$$\alpha_{111} = \gamma_{11} \alpha_{11}^1 + \gamma_{12} \alpha_{11}^2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$$

$$\alpha_{112} = \gamma_{11} \alpha_{12}^1 + \gamma_{12} \alpha_{12}^2 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$$

$$\alpha_{121} = \gamma_{11} \alpha_{21}^1 + \gamma_{12} \alpha_{21}^2 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 = 29$$

$$\alpha_{122} = \gamma_{11} \alpha_{22}^1 + \gamma_{12} \alpha_{22}^2 = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$$

$$\alpha_{211} = \gamma_{21} \alpha_{11}^1 + \gamma_{22} \alpha_{11}^2 = 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 = 34$$

$$\alpha_{212} = \gamma_{21} \alpha_{12}^1 + \gamma_{22} \alpha_{12}^2 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 = 11$$

$$\alpha_{221} = \gamma_{21} \alpha_{21}^1 + \gamma_{22} \alpha_{21}^2 = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 7 = 47$$

$$\alpha_{222} = \gamma_{21} \alpha_{22}^1 + \gamma_{22} \alpha_{22}^2 = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 30 \quad .$$

Следовательно, матрица тензора α_{ijk} имеет вид $\begin{vmatrix} 21 & 29 \\ 34 & 47 \\ 7 & 19 \\ 11 & 30 \end{vmatrix}$.

2°. Для поднятия второго индекса следует применить формулу $\alpha_{\bullet\bullet k}^{ij} = \alpha_{\bullet mk}^i \gamma^{mj}$, где γ^{ij} — контравариантный метрический тензор, матрица которого обратна матрице тензора γ_{ij} и имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} . \text{ Поэтому}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{..1}^{11} &= \alpha_{.11}^1 \gamma^{11} + \alpha_{.21}^1 \gamma^{21} = 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 3 \\
 \alpha_{..1}^{12} &= \alpha_{.11}^1 \gamma^{12} + \alpha_{.21}^1 \gamma^{22} = -3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -1 \\
 \alpha_{..1}^{21} &= \alpha_{.11}^2 \gamma^{11} + \alpha_{.21}^2 \gamma^{21} = 5 \cdot 5 - 7 \cdot 3 = 4 \\
 \alpha_{..1}^{22} &= \alpha_{.11}^2 \gamma^{12} + \alpha_{.21}^2 \gamma^{22} = 5 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = -1 \\
 \alpha_{..2}^{11} &= \alpha_{.12}^1 \gamma^{11} + \alpha_{.22}^1 \gamma^{21} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 5 = -5 \\
 \alpha_{..2}^{12} &= \alpha_{.12}^1 \gamma^{12} + \alpha_{.22}^1 \gamma^{22} = 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 4 \\
 \alpha_{..2}^{21} &= \alpha_{.12}^2 \gamma^{11} + \alpha_{.22}^2 \gamma^{21} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) = -4 \\
 \alpha_{..2}^{22} &= \alpha_{.12}^2 \gamma^{12} + \alpha_{.22}^2 \gamma^{22} = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 3.
 \end{aligned}$$

Таким образом, тензор $\alpha_k^{ij\bullet}$ имеет матрицу $\left\| \begin{array}{cc} 3 & -1 \\ 4 & -1 \\ -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{array} \right\|$.

В ортонормированном базисе очевидно, что $\gamma_{ij} = \gamma^{ij} = \delta_j^i$, то есть между ковариантными и контравариантными индексами нет никакой разницы, что также следует из равенства $\|S\|^{-1} = \|S\|^T$, верного в ортонормированном базисе, и определения тензоров.

Пр.4.5. Тензоры в ортонормированном базисе

Совпадение ковариантных и контравариантных индексов в ортонормированном базисах евклидова пространства позволяет ввести в рассмотрение упрощенный класс тензоров, определенных только в таких базисах и называемых *евклидовыми тензорами*.

Два евклидовых тензора считаются одинаковыми, если один из них может быть преобразован во второй операциями опускания или поднятия индексов. Поэтому можно в дальнейшем рассматривать евклидовы тензоры, как имеющие лишь нижние индексы. При этом, правда, придется допустить суммирование по паре совпадающих ковариантных индексов.

При помощи евклидовых тензоров удобно продемонстрировать связь методов тензорного исчисления и аппарата векторной алгебры в обычном трехмерном векторном пространстве E^3 .

Введем предварительно в рассмотрение трехвалентный *дискриминантный* тензор ε_{ijk} , определяемый во всех ортонормированных базисах по правилу:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} &= (-1)^{B(i,j,k)}, & \text{если среди чисел } i, j, k \text{ нет равных,} \\ \varepsilon_{ijk} &= 0, & \text{в остальных случаях.}\end{aligned}$$

$B(l, m, n)$, как и раньше, обозначает число беспорядков в перестановке чисел $\{l, m, n\}$ (см. п.6.1.).

Всего у тензора ε_{ijk} , антисимметричного по любой паре индексов, 27 компонентов, из которых только шесть ненулевых: три равные 1 и три равные (-1) .

Убедимся вначале, что объект ε_{ijk} преобразуется при переходе от одного ортонормированного базиса в E^3 к другому как трижды ковариантный тензор. Запишем выражения для компонентов в новом базисе в явном виде

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{lmn} &= \sigma_{li} \sigma_{mj} \sigma_{nk} \varepsilon_{ijk} = \sigma_{l1} \sigma_{m2} \sigma_{n3} + \sigma_{l2} \sigma_{m3} \sigma_{n1} + \sigma_{l3} \sigma_{m1} \sigma_{n2} - \\ &\quad - \sigma_{l1} \sigma_{m3} \sigma_{n2} - \sigma_{l2} \sigma_{m1} \sigma_{n3} - \sigma_{l3} \sigma_{m2} \sigma_{n1} = \\ &= \det \begin{vmatrix} \sigma_{l1} & \sigma_{l2} & \sigma_{l3} \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \sigma_{m3} \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \sigma_{n3} \end{vmatrix},\end{aligned}$$

что, в свою очередь, по свойствам определителя, дает

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{lmn} &= (-1)^{B(l,m,n)}, & \text{если среди чисел } l, m, n \text{ нет равных,} \\ \varepsilon'_{lmn} &= 0, & \text{в остальных случаях,}\end{aligned}$$

поскольку матрица $\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix}$ ортогональная (как матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому) и ее определитель равен ± 1 .

Поскольку объект ε_{ijk} в новом произвольном ортонормированном базисе имеет (при использованных правилах преобразования) те же компоненты, что и в исходном, то мы приходим к заключению, что это трехвалентный евклидов тензор.

Тензоры и произведения векторов

Покажем теперь связь тензорного произведения элементов пространства E^3 и произведений векторов, введенных в данном пособии (см. п.2.2. и п.2.4.). Все базисы по — прежнему ортонормированные.

Рассмотрим два одновалентных ковариантных тензора ξ_i и η_k , которые в аналитической геометрии (что было показано ранее) интерпретируются как обычные геометрические векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Их тензорное произведение $\xi_i \eta_k$ есть дважды ковариантный евклидов тензор, имеющий 9 компонентов, записываемых обычно в виде матрицы следующего вида:

$$\begin{vmatrix} \xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_2 & \xi_1\eta_3 \\ \xi_2\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_3 \\ \xi_3\eta_1 & \xi_3\eta_2 & \xi_3\eta_3 \end{vmatrix}.$$

Согласно правилам сложения тензоров и умножения их на число, данный тензор можно представить как сумму симметричного и антисимметричного тензоров:

$$\xi_i\eta_k = \frac{1}{2}(\xi_i\eta_k + \xi_k\eta_i) + \frac{1}{2}(\xi_i\eta_k - \xi_k\eta_i)$$

или в матричном виде

$$\begin{vmatrix} \xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_2 & \xi_1\eta_3 \\ \xi_2\eta_1 & \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_3 \\ \xi_3\eta_1 & \xi_3\eta_2 & \xi_3\eta_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \xi_1\eta_1 + \xi_1\eta_1 & \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 & \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1 \\ \xi_2\eta_1 + \xi_1\eta_2 & \xi_2\eta_2 + \xi_2\eta_2 & \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 \\ \xi_3\eta_1 + \xi_1\eta_3 & \xi_3\eta_2 + \xi_2\eta_3 & \xi_3\eta_3 + \xi_3\eta_3 \end{vmatrix} + \\ + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 & \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1 \\ \xi_2\eta_1 - \xi_1\eta_2 & 0 & \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 & \xi_3\eta_2 - \xi_2\eta_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь каждое слагаемое по отдельности.

Во-первых, отметим, что из симметричности матричного представления для первого слагаемого следует существование ортонормированного базиса, в котором эта матрица диагональна.

Теперь покажем, что свертка этого слагаемого есть инвариант, то есть она не зависит от выбора базиса.

Действительно, учитывая, что ξ_i и η_k суть одновалентные ковариантные тензоры, и используя свойства матрицы перехода $\|S\|$, получим следующее правило преобразования их свертки:

$$\xi'_k \eta'_k = \sigma_{ki} \xi_i \sigma_{kj} \eta_j = \sigma_{ik}^T \sigma_{kj} \xi_i \eta_j = \delta_{ij} \xi_i \eta_j = \xi_i \eta_i,$$

что и означает инвариантность этой свертки относительно замены базиса.

Отсюда следует важный вывод: любой паре элементов (векторов) $\vec{a}$ и $\vec{b}$, имеющих соответственно компоненты ξ_i и η_k в E^3 , можно поставить в соответствие

не зависящее от выбора ортонормированного базиса число $\xi_i \eta_i = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3$. (См. также п.2.9.).

Выясним геометрический смысл этого инварианта, обозначаемого $(\vec{a}, \vec{b}) = \delta_{ki} \xi_i \eta_k$. Каковы бы ни были векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, всегда найдется ортонормирован-

ный базис, в котором их координатные представления соответственно имеют вид

$$\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

и $\begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, где φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда значение инварианта равно

$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \cos \varphi$ и мы приходим к формуле скалярного произведения векторов, которая обычно принимается за его определение.

Рассмотрим теперь второе слагаемое.

Как нетрудно видеть, матрица $\begin{pmatrix} 0 & \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 & \xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1 \\ \xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2 & 0 & \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 \\ \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3 & \xi_3 \eta_2 - \xi_2 \eta_3 & 0 \end{pmatrix}$ имеет

только три независимых компонента, из чего следует, что паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в E^3 может быть поставлен в соответствие третий вектор, обозначаемый как $[\vec{a}, \vec{b}]$, с ком-

понентами $\begin{pmatrix} \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2 \\ \xi_3 \eta_1 - \xi_1 \eta_3 \\ \xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 \end{pmatrix}$.

Выясним его свойства. Во-первых, заметим, что число независимых компонентов у кососимметричной части тензорного произведения элементов в случае размерности пространства n равно $\frac{(n-1)n}{2}$, поскольку это есть число компонентов, стоящих в матрице над ее главной диагональю. Отсюда следует, что только в E^3 это число совпадает с размерностью пространства и только в E^3 произведению двух элементов можно подобным образом ставить в соответствие третий элемент.

Во — вторых, убедимся, что имеют место соотношения $[\vec{a}, \vec{b}]_i = \varepsilon_{ijk} \xi_j \eta_k$. Действительно, например, для $i = 1$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1jk} \xi_j \eta_k &= \varepsilon_{111} \xi_1 \eta_1 + \varepsilon_{112} \xi_1 \eta_2 + \varepsilon_{113} \xi_1 \eta_3 + \\ &+ \varepsilon_{121} \xi_2 \eta_1 + \varepsilon_{122} \xi_2 \eta_2 + \varepsilon_{123} \xi_2 \eta_3 + \\ &+ \varepsilon_{131} \xi_3 \eta_1 + \varepsilon_{132} \xi_3 \eta_2 + \varepsilon_{133} \xi_3 \eta_3 = \\ &= \xi_2 \eta_3 - \xi_3 \eta_2. \end{aligned}$$

В — третьих, покажем инвариантность тензора $\kappa_i = \varepsilon_{ijk} \xi_j \eta_k$ при переходе от одного ортонормированного базиса к другому в E^3 . Пусть это соотношение в новом ортонормированном базисе $\kappa'_i = \varepsilon'_{ijk} \xi'_j \eta'_k$, тогда в исходном базисе будут справедливы равенства $\sigma_{is} \kappa_s = \varepsilon'_{ijk} \sigma_{jm} \sigma_{kl} \xi_m \eta_l$.

Умножив обе части последнего равенства на тензор σ_{qi} и свернув произведения по индексу i , получим $\sigma_{qi} \sigma_{is} \kappa_s = \sigma_{qi} \sigma_{jm} \sigma_{kl} \varepsilon'_{ijk} \xi_m \eta_l$, но $\sigma_{qi} \sigma_{is} \kappa_s = \delta_{qs} \kappa_s = \kappa_q$, а $\varepsilon_{qml} = \sigma_{qi} \sigma_{jm} \sigma_{kl} \varepsilon'_{ijk}$, поскольку тензор ε_{ijk} инвариантен при переходе от одного ортонормированного базиса к другому. Следовательно, $\kappa_i = \varepsilon_{iml} \xi_m \eta_l$, что и означает инвариантность этого элемента относительно замены базиса.

Выясним, наконец, геометрический смысл вектора $[\vec{a}, \vec{b}]$. Заметим, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно выбрать ортонормированный базис в E^3 , в котором их

координатные представления имеют вид соответственно $\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{a} \\ 0 \end{pmatrix}$ и

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{b} \cos \varphi \\ \vec{b} \sin \varphi \end{pmatrix}^T$, где φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Тогда значение первого компонента $[\vec{a}, \vec{b}]$ есть $\left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \sin \varphi$, в то время как остальные компоненты нулевые, и получилась формула *векторного произведения*, принимаемая обычно за его определение.

Таким образом, можно заключить, что введенные в курсе векторной алгебры операции скалярного и векторного произведений базируются не только на "их полезности для приложений", но и отражают инвариантные свойства тензорного произведения элементов евклидова пространства при переходах между ортонормированными базисами.

В заключение покажем, что тензорная символика может быть эффективно использована и для более сложных конструкций векторной алгебры. Например:

1°. Смешанное произведение трех векторов (см. п.2.6.) представимо в виде:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]) = \xi_i [\vec{b}, \vec{c}]_i = \xi_i \varepsilon_{ijk} \eta_j \kappa_k = \varepsilon_{ijk} \xi_i \eta_j \kappa_k.$$

2°. Выражение для двойного векторного произведения трех векторов (см. п.2.8.) может быть получено следующим образом:

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]_i = \varepsilon_{ijk} \xi_j [\vec{b}, \vec{c}]_k = \varepsilon_{ijk} \xi_j \varepsilon_{klm} \eta_l \kappa_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \xi_j \eta_l \kappa_m.$$

Принимая во внимание достаточно легко проверяемую формулу $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$, приходим к равенству

$$\begin{aligned} [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]_i &= \varepsilon_{ijk} \xi_j \varepsilon_{klm} \eta_l \kappa_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \xi_j \eta_l \kappa_m = \\ &= \eta_i \xi_m \kappa_m - \kappa_i \xi_j \eta_j = \eta_i (\vec{a}, \vec{c}) - \kappa_i (\vec{a}, \vec{b}) \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}).$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Б е к л е м и ш е в, Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, 6—е изд., перераб. М.: "Наука", 1988.
2. А. И. М а л ь ц е в, Основы линейной алгебры, М.: "Наука", 1976.
3. М. М. П о с т н и к о в, Лекции по геометрии, М.: "Наука", 1979.
4. Д. В. Б е к л е м и ш е в, Дополнительные главы линейной алгебры, М.: "Наука", 1983.
5. Г. Е. Ш и л о в, Введение в теорию линейных пространств, ГИЗ Тех — нико — теоретической литературы, М.: 1952.
6. Т. Ф. В о л к о в, Тензоры и векторы, Учебное пособие, Долгопрудный МО, изд. МФТИ, 1976.
7. Л. А. Б е к л е м и ш е в а, А. Ю. П е т р о в и ч, И. А. Ч у б а р о в, Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, М.: "Наука", 1987.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алгебраическая линия 4.1.
Алгебраическая поверхность 4.2.
Алгебраическое дополнение элемента матрицы 6.3.
Альтернирование тензоров Пр.4.3.
Аппроксимация функций многочленами 12.3.
Аффинное преобразование плоскости 5.4.

Б

Базис 1.5.
Базис в пространстве 1.5.
Базис линейного пространства 7.2.
Базис на прямой 1.5.
Базис на плоскости 1.5.
Базисная строка матрицы 6.5.
Базисный минор 6.5.
Базисный столбец матрицы 6.5.
Билинейная форма 9.1.
Билинейный функционал 9.1.

В

Вектор, множество векторов 1.3.
Векторное произведение векторов 2.4. . Пр.4.5.
Взаимно однозначное отображение 5.2.
Взаимно однозначное соответствие (биекция) 8.4.
Взаимный базис 2.5.
Выражение векторного произведения векторов в координатах 2.5.

Выражение векторного произведения векторов в ортонормированной системе координат 2.5.

Выражение скалярного произведения векторов в координатах 2.3.

Выражение смешанного произведения векторов в координатах 2.7.

Выражение скалярного произведения векторов в ортонормированной системе координат 2.3.

Выражение смешанного произведения векторов в ортонормированной системе координат 2.7.

Вырожденная матрица 5.1.

Вырожденные линии второго порядка Пр.1.1.

Вырожденные поверхности второго порядка Пр.2.1.

Г

Геометрический смысл модуля определителя аффинного преобразования 5.4.

Геометрический смысл знака определителя аффинного преобразования 5.4.

Гипербола 4.4.

Гиперболический параболоид 4.5.

Гиперболический цилиндр 4.5.

Гиперплоскость в линейном пространстве 7.4.

Главный вектор плоскости 3.3.

Группа 5.6.

Д

Двойное векторное произведение 2.8. , Пр.4.5.

Двойственное линейное пространство 8.7.

Двуполостный гиперboloид 4.5.

Действия с линейными операторами 8.2.

Действия с линейными операторами в матричной форме 8.3.

Детерминант матрицы 2-го и 3-го порядка 1.1.

Детерминант матрицы n -го порядка 6.1.

Диагональный вид квадратичного функционала 9.2.

Директориальное свойство гиперболы Пр.1.3.

Директориальное свойство параболы Пр.1.4.

Директориальное свойство эллипса Пр.1.2.

Дисперсия эрмитова оператора 11.4.

Дополнительный минор 6.3.

Дополнительный минор элемента матрицы 6.3.

Е

Евклидово пространство 10.1.

Единичная матрица 1.1.

Единичный оператор 8.2.

З

Запись тензоров Пр.4.2.

И

Изменение компонентов билинейного функционала при смене базиса 9.1.
Изменение компонентов квадратичного функционала при смене базиса 9.2.
Изменение компонентов линейного функционала при смене базиса 8.7.
Изменение координат точки при смене базиса 1.8.
Изменение координат элемента линейного пространства при смене базиса 7.3.
Изменение матрицы линейного оператора при смене базиса 8.3.
Изоморфизм 7.5.
Изоморфные линейные пространства 7.5.
Инвариантное подпространство линейного оператора 8.5.
Инвариантное собственное подпространство линейного оператора 8.6.
Инварианты линий второго порядка на плоскости 9.4.
Инъективное линейное отображение (инъекция) 8.4.

К

Канонические уравнения линии второго порядка на плоскости 4.4.
Канонические уравнения поверхности второго порядка 4.5.
Канонический вид квадратичного функционала 9.2.
Квадратная матрица 1.1.
Квадратичная форма 9.2.
Квадратичный функционал 9.2.
Квадратная матрица порядка n 1.1.
Классификация поверхностей второго порядка 12.2.
Коллинеарность 1.4.
Коллинеарные векторы 1.4.
Коммутатор линейных операторов 8.2.
Компланарность 1.4.
Компланарные векторы 1.4.
Комплексные числа Пр.3.0.
Компоненты вектора 1.5.
Компоненты элемента линейного пространства 7.3.
Коническая поверхность 4.3.
Коническое сечение 4.6.
Конус 4.5.
Координатное представление билинейного функционала в базисе 9.1.
Координатное представление линейного оператора в базисе 8.3.
Координатное представление линейного функционала в базисе 8.7.
Координатное представление скалярного произведения в базисе евклидова пространства 10.3.

Координаты вектора 1.5.
Координаты элемента линейного пространства 7.3.
Композиция операторов 5.2.
Компоненты вектора 1.5.
Координаты вектора 1.5.
Критерий Сильвестра 9.3. , 10.3.

Л

Линейная зависимость векторов 1.4.
Линейная зависимость элементов линейного пространства 7.2.
Линейная комбинация векторов 1.4.
Линейная комбинация элементов линейного пространства 7.2.
Линейная независимость векторов 1.4.
Линейная независимость элементов линейного пространства 7.2.
Линейная оболочка элементов линейного пространства 7.4.
Линейное неравенство 3.2.
Линейное пространство 7.1.
Линейное пространство линейных операторов 8.2.
Линейное пространство линейных функционалов 8.7.
Линейный оператор 8..1.
Линейный оператор на плоскости 5.3.
Линейная форма 8.7.
Линейный функционал 8.7.
Линия в пространстве 4.1.
Линия второго порядка на плоскости 4.4.
Линия на плоскости 4.1.

М

Матрица 1.1.
Матрица билинейного функционала 9.1.
Матрица Грама 10.3.
Матрица квадратичного функционала 9.2.
Матрица линейного оператора 8.3.
Матрица линейного отображения 8.4.
Матрица линейного оператора на плоскости 5.3.
Матрица перехода от одной системы координат к другой 1.8.
Матрица перехода от одного базиса к другому в линейном пространстве 7.3.
Матрица элементарных преобразований 6.8.
Метод Гаусса 6.8.
Минор k – го порядка 6.3.

Н

Направленный отрезок 1.2.
 Направляющие векторы плоскости 3.3.
 Направляющий вектор прямой на плоскости 3.2.
 Невырожденная матрица 7.5.
 Неоднородная система линейных уравнений 6.6.
 Неоднородный линейный оператор на плоскости 5.3.
 Неравенство Коши – Буняковского 10.1.
 Неравенство треугольника 10.1.
 Неразвернутое представление матрицы 1.1.
 Нетривиальная линейная комбинация векторов 1.4.
 Норма элемента в евклидовом пространстве 10.1.
 Нормальная прямоугольная система координат 1.7.
 Нормальное уравнение прямой на плоскости 3.2.
 Нормальный вектор прямой на плоскости 3.2.
 Нормальный вектор плоскости 3.3.
 Нулевая матрица 1.1.
 Нулевой вектор 1.3.
 Нулевой направленный отрезок 1.2.
 Нулевой оператор 8.2.
 Нулевой функционал 8.7.
 Нулевой элемент линейного пространства 7.1.

О

Область значений линейного оператора 8.4.
 Обратная матрица 5.1.
 Обратная матрица перехода 7.5.
 Обратное отображение 5.2.
 Обратный оператор 8.2.
 Обращение произведения матриц 5.1.
 Обращение линейного оператора в матричной форме 8.3.
 Общая декартова система координат 1.7.
 Общее решение системы линейных уравнений 6.6. , 6.7.
 Общее решение неоднородной системы линейных уравнений 6.7.
 Общее решение системы однородной линейных уравнений 6.7.
 Однополостный гиперboloид 4.5.
 Однородная система линейных уравнений 6.6.
 Однородный линейный оператор на плоскости 5.3.
 Оператор 5.2. , 8.1.
 Оператор сжатия к осям 5.3.
 Операции с линейными функционалами 8.7.
 Операции с тензорами Пр.4.3.
 Операции с элементами линейного пространства в координатной форме 7.3.
 Определитель матрицы 2 – го порядка 1.1.
 Определитель матрицы 3 – го порядка 1.1.
 Определитель матрицы n – го порядка 6.1.
 Определитель произведения матриц 6.2.

Опускание индекса у тензора Пр.4.4.
Оптическое свойство гиперболы Пр.1.3.
Оптическое свойство параболы Пр.1.4.
Оптическое свойство эллипса Пр.1.2.
Ортогонализация базиса 10.2.
Ортогональная матрица 5.1., 10.4.
Ортогональное проектирование 2.1., 10.5.
Ортогональная проекция вектора на ось 2.1.
Ортогональная проекция точки на ось 2.1.
Ортогональное дополнение 10.5.
Ортогональное преобразование плоскости 5.5.
Ортогональные элементы в евклидовом пространстве 10.1.
Ортогональный базис 1.5.
Ортогональный оператор 10.8.
Ортонормированная система координат 1.7.
Ортонормированный базис 1.5. , 10.2.
Основная матрица системы линейных уравнений 6.6.
Ось 2.1.
Отношение Релея 12.1.
Отображение плоскости 5.2.
Отрицательно определенный квадратичный функционал 9.3.

П

Парабола 4.4.
Параболический цилиндр 4.5.
Параметрическое представление плоскости 3.3.
Параметрическое представление прямой на плоскости 3.1.
Пересечение подпространств линейного пространства 7.4.
Переход от одной ортонормированной системы координат к другой 1.8.
Поверхности вращения Пр.2.7.
Поверхности второго порядка 4.5.
Поднятие индекса у тензора Пр.4.4.
Подпространство линейного пространства 7.4.
Полилинейный функционал 9.6.
Положительно определенный квадратичный функционал 9.3.
Полярная система координат 4.6.
Порядок алгебраической линии 4.1.
Порядок алгебраической поверхности 4.2.
Правило замыкающей 1.2.
Правило Крамера 6.4.
Правило треугольника 1.2.
Правило параллелограмма 1.2.
Преобразование плоскости 5.2.
Приведение квадратичного функционала к диагональному виду 9.2. , 12.1.
Приведение пары квадратичных функционалов к диагональному виду 9.2. , 12.1.
Приведение уравнения линии второго порядка на плоскости к каноническому виду 4.4.
Произведение матриц 5.1.
Произведение операторов 5.2.

Произведение линейных операторов 8.2.
Произведение линейных операторов в матричной форме 8.3.
Произведение числа и линейного оператора 8.2.
Произведение числа и линейного функционала 8.7.
Произведение числа и матрицы 1.1.
Произведение числа и направленного отрезка 1.2.
Противоположный оператор 8.2.
Противоположный функционал 8.7.
Противоположный элемент линейного пространства 7.1.
Прямая сумма подпространств линейного пространства 7.4.
Пучок плоскостей в пространстве 3.3.
Пучок прямых на плоскости 3.2.

Р

Равенство векторов в координатной форме 1.6.
Радиус – вектор точки 1.7.
Развернутое представление матрицы 1.1.
Разложение определителей 6.3.
Разложение определителя 3 – го порядка по столбцу или строке 1.1.
Размер матрицы 1.1.
Размерность линейного пространства 7.2.
Ранг линейного оператора 8.4.
Разность направленных отрезков 1.2.
Ранг матрицы 6.5.
Расстояние между скрещивающимися прямыми 3.4.
Расстояние между элементами в евклидовом пространстве 10.1.
Расстояние от точки до прямой на плоскости 3.2.
Расстояние от точки до прямой в пространстве 3.4.
Расстояние от точки до плоскости 3.3.
Расширенная матрица системы линейных уравнений 6.6.
Решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными 1.1.

С

Самосопряженный оператор 10.7.
Свертывание тензоров Пр.4.3.
Свойства аффинного преобразования плоскости 5.4.
Свойства векторного произведения векторов 2.4.
Свойства гиперболического параболоида Пр.2.4.
Свойства гиперболы Пр.1.3.
Свойства двуполостного гиперboloида Пр..2.6.
Свойства однополостного гиперboloида Пр.2.5.
Свойства операций сложения векторов и умножения вектора на число 1.3.
Свойства определителя матрицы n – го порядка 6.2.
Свойства параболы Пр.1.4.
Свойства собственных значений линейного оператора 8.6.

Свойства собственных векторов линейного оператора 8.6.
Свойства скалярного произведения векторов 2.2.
Свойства смешанного произведения векторов 2.6.
Свойства эллипса Пр.1.2.
Свойства эллипсоида Пр..2.2.
Свойства эллиптического параболоида Пр.2.3.
Связка плоскостей в пространстве 3.3.
Сигнатура квадратичного функционала 9.3.
Симметрирование тензоров Пр.4.3.
Симметрическая матрица 1.1.
Симметричный билинейный функционал 9.1.
Система n линейных уравнений с n неизвестными 6.4.
Система m линейных уравнений с n неизвестными 6.6.
Скалярное произведение векторов 2.2. , Пр.4.5.
Скалярное произведение элементов в евклидовом пространстве 10.1.
Сложение матриц 1.1.
Сложение векторов в координатной форме 1.6.
Сложение линейных операторов в матричной форме 8.3.
Сложение направленных отрезков 1.2.
Сложение тензоров Пр.4.3.
Смешанное произведение векторов 2.6.
Собственное значение (число) линейного оператора 8.5.
Собственный вектор линейного оператора 8.5.
Совместная система линейных уравнений 6.6.
Соглашение о суммировании 1.4.
Соотношение неопределенностей 11.5.
Сопряженное линейное пространство 8.7.
Сопряженный оператор 10.6.
Сравнение матриц 1.1.
Сравнение направленных отрезков 1.2.
Среднее значение оператора 11.4.
Столбец элементов матрицы 1.1.
Строка элементов матрицы 1.1.
Сумма линейных операторов 8.2.
Сумма линейных функционалов 8.7.
Сумма подпространств линейного пространства 7.4.
Степень квадратной матрицы с целым неотрицательным показателем 8.6.
Сферическая система координат 4.6.
Сюръективное линейное отображение (сюръекция) 8.4.

Т

Тензоры Пр.4.2.
Тензоры в евклидовом пространстве Пр.4.4.
Тензоры в ортонормированном базисе Пр.4.5.
Теорема Гамильтона – Кэли 8.6.
Теорема Грама – Шмидта
Теорема инерции квадратичных функционалов 9.3.
Теорема Кронекера – Капелли 6.6.
Теорема Лапласа 6.3.
Теорема о базисном миноре 6.5.

Теорема о полярном разложении 10.8.
Теорема о ранге матрицы 6.5.
Теорема об изоморфизме 7.5.
Теорема Фредгольма 6.7., 10.6.
Тожественный оператор 8.2.
Точка пересечения прямой и плоскости 3.4.
Транспонирование матрицы 1.1.
Транспонирование произведения матриц 5.1.
Транспонирование тензоров Пр.4.3.
Тривиальная линейная комбинация векторов 1.4.
Тригонометрическая форма записи комплексных чисел Пр.3.0.

У

Угол между элементами в евклидовом пространстве 10.1.
Умножение матрицы на число 1.1.
Умножение направленного отрезка на число 1.2.
Умножение вектора на число в координатной форме 1.6.
Умножение линейного оператора на число в матричной форме 8.3.
Умножение тензоров Пр.4.3.
Умножение тензоров на число Пр.4.3.
Унитарное пространство 11.1.
Унитарный оператор 11.2.
Уравнение плоскости в декартовой системе координат 3.3.
Уравнение прямой на плоскости в декартовой системе координат 3.1.
Уравнение пучка прямых на плоскости 3.2.
Условие коллинеарности векторов в координатной форме 1.6.
Условие компланарности векторов в координатной форме 1.6.
Условие ортогональности прямых на плоскости 3.5.
Условие ортогональности прямых в пространстве 3.5.
Условие ортогональности прямой и плоскости 3.5.
Условие параллельности прямых на плоскости 3.1.
Условие параллельности прямых в пространстве 3.1.
Условие параллельности прямой и плоскости 3.1.

Ф

Фокальное свойство гиперболы Пр.1.3.
Фокальное свойство эллипса Пр.1.2.
Формула Эйлера Пр.3.0.
Формулы перехода от одной системы координат к другой 1.8.
Формы задания плоскости в пространстве 3.3.
Формы задания прямой на плоскости 3.2.
Фундаментальная система решений системы линейных уравнений 6.7.
Функционал 5.2.

Х

Характеристический многочлен линейного оператора 8.5.
Характеристическое уравнение линейного оператора 8.5.

Ц

Цилиндрическая поверхность 4.3.
Цилиндрическая система координат 4.6.

Ч

Частное решение системы линейных уравнений 6.6.
Численное значение ортогональной проекции на ось 2.1.

Э

Экспоненциальная форма записи комплексных чисел Пр.3.0.
Экстремальные свойства квадратичных функционалов 9.5.
Элемент матрицы 1.1.
Элемент обратной матрицы 6.3.
Элементарные операции преобразования матрицы системы линейных уравнений 6.8.
Эллипс 4.4.
Эллипсоид 4.5.
Эллиптический параболоид 4.5.
Эллиптический цилиндр 4.5.
Эрмитово сопряженный оператор 11.2.
Эрмитово самосопряженный оператор 11.3.
Эрмитов оператор 11.3.
Эрмитов функционал 11.4.
Эрмитова форма 11.4.

Я

Ядро линейного оператора 8.4.

Издание подготовлено

ЗАО "Оптимизационные системы и технологии", ИНН 5008010970

РФ 141700, г. Долгопрудный Московской обл., ул Первомайская 24

Тел. (095) 285 7893 , факс (095) 234 5580