Л.С.АТАНАСЯН, В.Т.БАЗЫЛЕВ

ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ I

В 2-х ЧАСТЯХ

Допущено
Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1986

ББК 22.151
А92

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, ст. научн. сотрудник МГУ
Л. Е. Евтушик;
кафедра геометрии Вильнюсского пединститута
(зав. кафедрой проф. Близникас В. И.).

Атанасян Л. С., Базылев В. Т.

А92 Геометрия. В 2-х ч. Ч. I. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов.— М.: Просвещение, 1986.— 336 с., ил.

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса геометрии для математиче ских и физико-математических факультетов педагогических институтов и состоит из двух частей Первая часть охватывает в основном материал, читаемый на первом курсе.

Изложение теории сопровождается многочисленными примерами решения геометрически задач, в том числе задач курса геометрии средней школы.

А $\frac{4309000000-494}{103\ (03)-86}$ 33—86

ББК 22.151
513

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий курс геометрии, издаваемый в двух частях, написан в соответствии с действующей программой по геометрии для студентов математических и физико-математических факультетов педагогических институтов. Изложение курса согласовано с программами алгебры, теории чисел и математического анализа. Это пособие составляет первую часть курса и охватывает материал геометрии первого курса указанных факультетов.

Основой учебного пособия послужили лекции, которые авторы читали в последние годы студентам математического факультета МГПИ им. В. И. Ленина.

Данное пособие существенно отличается от ранее изданных издательством «Просвещение» пособий по геометрии Л. С. Атанасяна «Геометрия», ч. I, Л. С. Атанасяна и Г. Б. Гуревича «Геометрия», ч. II, В. Т. Базылева и др. «Геометрия», I, II. По сравнению с этими книгами в новом пособии более тщательно подобран материал, несколько изменен порядок изложения и, что особенно важно, оно более доступно (не в ущерб строгости). В связи с этим объем пособия оказался заметно сокращенным, а принятая в нем терминология и символика по возможности согласованы с теми, которые в настоящее время введены в среднюю школу.

Опыт работы авторов в педагогических вузах и с учителями математики средней школы привел к следующим выводам, которыми они руководствовались при создании учебного пособия.

I. Курс геометрии в пединституте следует строить так, чтобы при естественных изменениях содержания школьных учебников по геометрии будущие учителя могли ориентироваться в новой ситуации и быстро перестраиваться. Поэтому, по убеждению авторов, этот курс нельзя строить на базе какой-то одной школьной аксиоматики, особенно в разделе оснований геометрии. Здесь в основу надо положить такую аксиоматику, из которой достаточно естественно можно было бы получить любую возможную аксиоматику школьного курса геометрии. По мнению авторов, в настоящее время такой аксиоматикой является принятая в науке аксиоматика Вейля.

В предлагаемом курсе аксиоматический метод начинает применяться лишь в X главе первой части курса «n-мерные аффинные и евклидовы пространства». До этого материал излагается на базе тех геометрических представлений, которые сложились у слушателей при изучении школьного курса геометрии. Однако по ходу изложения там, где это необходимо, даются необходимые пояснения и уточнения.

Аксиоматика школьного курса геометрии и ее связи с другими аксиоматиками геометрии рассматриваются в разделе оснований геометрии во второй части курса.

II. Идейное содержание курса геометрии в педагогическом институте должно быть таким, чтобы будущий учитель математики мог взглянуть на школьный курс геометрии с более общей точки зрения. В связи с этим отметим следующее.

1. Будущий учитель математики должен быть хорошо знаком как с групповой, так и со структурной точкой зрения на геометрию. В настоящем курсе этим вопросам уделено должное внимание, особенно при изложении теории геометрических преобразований, а во второй части курса — в разделе оснований геометрии.

2. Будущему учителю математики необходимо иметь общее представление об элементах многомерной геометрии аффинного и евклидова пространств, поэтому эти

вопросы отражены в предлагаемом курсе. Это особенно важно в связи с тем, что квадратичные формы изучаются не в курсе алгебры, а в курсе геометрии, поэтому представляется весьма целесообразным связать теорию квадратичных форм с теорией квадрик в многомерном пространстве.

Имея в виду опасность перегрузки, в предлагаемом учебном пособии раздел «Аффинное и евклидово n-мерные пространства» существенно сокращен.

III. В современных учебных вузовских пособиях (как отечественных, так и зарубежных) такие важнейшие понятия, как «линия», «поверхность», «поверхность с краем», «геометрическое тело» и др., даются на топологической основе. Поэтому в настоящий курс геометрии включены элементы топологии. С изложением этих вопросов тесно связывается тема «Многогранники в евклидовом пространстве».

IV. В курсе геометрии для студентов педагогических вузов уделено большое внимание профессиональной направленности, в частности приложениям изучаемых методов к доказательству теорем и решению задач школьного курса геометрии. Будущий учитель должен убедиться в том, что изучаемый им курс геометрии в пединституте имеет непосредственное отношение к его профессиональной подготовке и может быть в дальнейшем использован в работе в школе.

В связи с этим изложение теоретического материала сопровождается многочисленными примерами. Везде, где это возможно, дано приложение изучаемых методов к доказательству теорем и решению задач школьного курса геометрии. Каждая глава пособия, за редким исключением, заканчивается параграфом, в котором даны приложения рассматриваемой в этой главе теории.

Теория преобразований плоскости и их приложения к решению задач играют существенную роль в профессиональной подготовке учителя, поэтому этот раздел здесь представлен должным образом. Отметим, что изложение этого материала существенно отличается от того, который был дан в ранее изданных пособиях авторов. Здесь изложение упрощено и по стилю приближено к школьному курсу геометрии. Кроме того, выделена специальная глава — глава VIII первой части, где излагаются элементы теории преобразований трехмерного пространства.

Методы изображений также играют весьма важную роль в профессиональной подготовке учителя математики, поэтому во второй части курса имеется специальная глава, посвященная этим вопросам. Как известно, в средней школе пользуются изображением плоских и пространственных фигур в параллельной проекции. По этой причине в предлагаемом курсе дана в основном теория изображений фигур, изучаемых в школе, в параллельной проекции.

Авторы надеются, что студенты, овладевшие этим курсом, смогут в дальнейшем, будучи учителями, грамотно преподавать геометрию в средней школе, уверенно вести факультативные занятия по геометрии (например по темам: «Векторная алгебра и ее приложения», «Метод координат», «Геометрические преобразования», «Элементы неевклидовых геометрий» и т. п.). Авторы надеются также, что предлагаемое пособие будет способствовать совершенствованию геометрической подготовки учителя математики.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность кафедре геометрии Вильнюсского пединститута (зав. кафедрой В. И. Близникас) и доктору физико-математических наук старшему научному сотруднику МГУ Л. Е. Евтушику за их весьма ценные замечания по содержанию пособия, которые во многом способствовали его улучшению. Авторы признательны также преподавателям кафедры геометрии МГПИ имени В. И. Ленина, которые взяли на себя нелегкий труд апробации ряда глав пособия в непосредственной работе со студентами математического факультета МГПИ им. В. И. Ленина.

Авторы.

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ. ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Глава I
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Параллельность прямых, лучей и плоскостей

1. В настоящем курсе геометрии продолжается начатое в средней школе изучение свойств геометрических фигур. При этом в значительной степени используются средства алгебры и математического анализа.

Напомним, что *фигурой* называется любое множество точек. Простейшими фигурами являются точки, прямые, плоскости, лучи, отрезки, полуплоскости. Точки обозначаются большими буквами латинского алфавита: A, B, C, ..., прямые — малыми первыми буквами латинского алфавита: a, b, c, ... или двумя большими буквами: AB, CD, ..., плоскости — малыми буквами греческого алфавита: σ, τ, ... или тремя большими буквами: ABC, EFG, ... Лучи будем обозначать малыми промежуточными буквами латинского алфавита: h, k, l, ... или двумя большими буквами: OA, KB, ... В этом случае на первом месте ставится буква, обозначающая начало луча, а на втором — буква, обозначающая какую-нибудь точку на луче. Отрезок с концами A и B обозначается так: AB или BA. Длина отрезка обозначается тем же символом AB.

2. Напомним, что две прямые[1] a и b называются *параллельными* (пишут: $a \parallel b$), если они лежат в одной плоскости и не имеют ни одной общей точки. Лучи AB и CD (или отрезки AB и CD) называются *параллельными*, если прямые AB и CD параллельны. Плоскость σ и прямая AB называются *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки. Луч AB (отрезок AB) и плоскость σ называются *параллельными*, если параллельны плоскость σ и прямая AB.

3. Если два луча AB и CD параллельны, то они могут быть одинаково направлены (сонаправлены) либо противоположно направлены. Параллельные лучи AB и CD называются *одинаково направленными*, если они лежат в одной полуплоскости с границей AC (рис. 1, a). Лучи, лежащие на одной прямой, называются одинаково направленными, если один из них содержит другой.

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две прямые», «три точки» и т. д., будем считать, что эти прямые, точки и т. д. попарно различны.

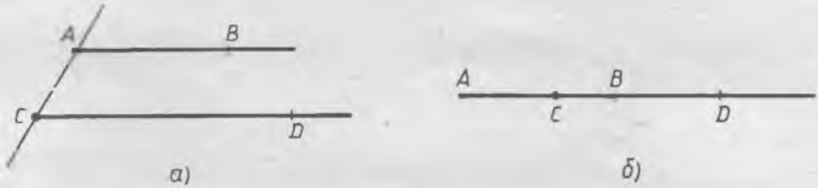


Рис. 1

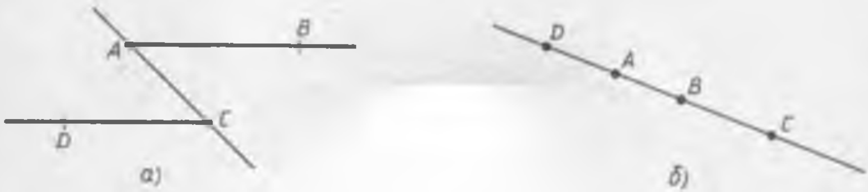


Рис. 2

На рисунке 1, *б* лучи AB и CD одинаково направлены, лучи AB и AC (AB и AC — один и тот же луч) также одинаково направлены.

Если два луча параллельны или лежат на одной прямой, но не одинаково направлены, то они называются *противоположно направленными*. На рисунке 2, *а* лучи AB и CD противоположно направлены. На рисунке 2, *б* лучи AB и CD противоположно направлены. Дополнительные лучи одной прямой (например, лучи BA и BC на рисунке 2, *б*) также противоположно направлены.

Множество всех лучей (на прямой, на плоскости или в пространстве), обладающих тем свойством, что любые два луча этого множества одинаково направлены, называется *направлением* (соответственно на прямой, на плоскости или в пространстве). На прямой существуют два направления, а на плоскости и пространстве — бесконечное множество направлений. Если на прямой одно из возможных направлений выбрано в качестве положительного, то прямая называется *направленной*.

§ 2. Направленные отрезки

1. Отрезок называется *направленным*, если принимается во внимание порядок, в котором заданы его концы. Пусть задан отрезок с концами в точках A и B. Если A — первая точка, а B — вторая, то точка A называется *началом*, а B — *концом* этого направленного отрезка; его обозначают так: $\overline{AB}$. На рисунке направленный отрезок отмечается стрелкой, обращенной к его концу. Так, на рисунке 3 изображены отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

В целях общности удобнее рассматривать каждую точку A как частный случай направленного отрезка (начало и конец которого совпадают). Его называют *нулевым направленным отрезком* и обозначают так: $\overline{AA}$.

Длиной ненулевого отрезка $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Длина направленного отрезка $\overline{AB}$ обозначается символом $|\overline{AB}|$ или просто AB. Длина нулевого направленного отрезка считается равной нулю.

Рис. 3

Пусть A и B — две точки. Если рассматриваются обычные (ненаправленные) отрезки, то AB и BA — один и тот же отрезок (одно и то же множество точек). Если же рассматриваются направленные отрезки, то $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ — разные отрезки. Каждый из отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ называется *противоположным* другому. Если $\overline{AA}$ — нулевой направленный отрезок, то противоположным считается тот же отрезок $\overline{AA}$.

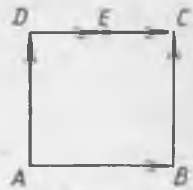


Рис. 4

Ненулевые отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *одинаково (противоположно)* направленными, если одинаково (противоположно) направлены лучи AB и CD. Нулевой направленный отрезок считается одинаково направленным с любым направленным отрезком.

Ненулевой отрезок $\overline{AB}$ определяет направление, а именно то направление, которому принадлежит луч AB. Нулевой отрезок $\overline{AA}$ не определяет никакого направления.

2. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *эквиполлентными,* если они одинаково направлены и имеют равные длины (пишут: $\overline{AB} \doteq \overline{CD}$).

На рисунке 4 изображен квадрат $ABCD$. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ эквиполлентны, так как они одинаково направлены и их длины равны. Отрезки $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ также эквиполлентны. Отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$ не эквиполлентны (их длины равны, но направления различны), точно так же не эквиполлентны отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{DE}$ (они одинаково направлены, но их длины различные). Ясно, что любые два нулевых направленных отрезка эквиполлентны.

Используя рисунок 5, *а* — *г*, самостоятельно докажите следующее утверждение, которое часто принимается за признак эквиполлентности направленных отрезков. *Направленные отрезки* $\overline{AB}$

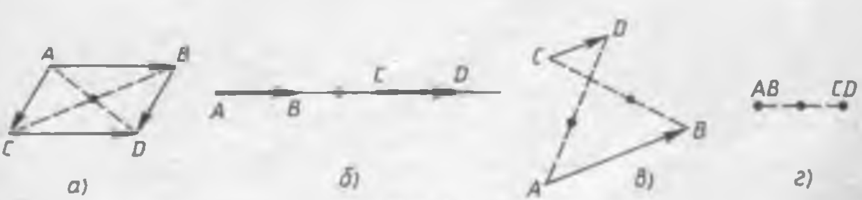


Рис. 5

и $\overline{CD}$ *эквиполлентны тогда и только тогда, когда середины отрезков*[1] AD и BC *совпадают.*

Заметим, что отношение эквиполлентности удовлетворяет трем условиям:

1. $\overline{AB} \doteq \overline{AB}$ для любого направленного отрезка $\overline{AB}$.

2. $\overline{AB} \doteq \overline{CD} \Rightarrow \overline{CD} \doteq \overline{AB}$.

3. $(\overline{AB} \doteq \overline{CD}$ и $\overline{CD} \doteq \overline{EF}) \Rightarrow \overline{AB} \doteq \overline{EF}$.

Следовательно, это отношение является *отношением эквивалентности* на множестве всех направленных отрезков пространства.

§ 3. Векторы

1. Пусть W — множество всех направленных отрезков пространства. Отношение эквиполлентности, заданное в этом множестве, является отношением эквивалентности. *Каждый класс эквивалентности этого отношения называется вектором* (или *свободным вектором*). Итак, вектор — это элемент фактор-множества $V = W/\doteq$. Векторы обозначаются одной буквой, над которой ставится стрелка: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., или одной буквой полужирного шрифта: $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ...

Таким образом, вектор — это множество всех направленных отрезков, любые два из которых эквиполлентны. Если хотя бы один из направленных отрезков этого множества нулевой, то все направленные отрезки множества нулевые. В этом случае вектор называется *нулевым* или *нуль-вектором* и обозначается через $\vec{0}$.

Пусть $\vec{a}$ — данный вектор, т. е. класс эквивалентности отношения $\doteq$. Если $\overline{AB}$ — представитель этого класса (т. е. $\overline{AB} \in \vec{a}$), то $\overline{AB}$ определяет весь класс эквивалентности, т. е. вектор $\vec{a}$. В этом случае вектор $\vec{a}$ обозначается через $\overrightarrow{AB}$ и на рисунке изображается в виде направленного отрезка $\overline{AB}$.

Заметим, что запись $\vec{a} = \vec{b}$ (читается: «вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$») означает, что множество $\vec{a}$ совпадает с множеством $\vec{b}$, т. е. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — один и тот же вектор, но по-разному обозначенный. В частности, запись $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ означает, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — один и тот же вектор (т. е. что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ эквиполлентны). Имеет место следующая лемма о равенстве векторов.

Лемма. *Если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

□ По условию леммы $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, поэтому $\overline{AB} \doteq \overline{CD}$. По признаку эквиполлентности направленных отрезков середины отрезков AD и CB совпадают (рис. 5, *а*). Рассмотрим отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$. Так как

[1] Отрезки AD и BC могут быть нулевыми. Серединой нулевого отрезка AA считается точка A.

Рис. 6

середины отрезков AD и CB совпадают, то $\overline{AC} \doteq \overline{BD}$, следовательно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. ■

2. Пусть $\bar{a}$ — произвольный вектор, а O — некоторая точка пространства. Докажем, что существует одна и только одна точка M такая, что $\overrightarrow{OM} = \bar{a}$. Действительно, допустим, что $\overline{AB} \in \bar{a}$. Рассмотрим середину C отрезка OB (этот отрезок может быть и нулевым) и возьмем точку M, симметричную точке A относительно точки C (рис. 6, *а*, *б*). По признаку эквиполлентности двух направленных отрезков $\overline{OM} \doteq \overline{AB}$, поэтому $\overrightarrow{OM} = \bar{a}$.

Докажем теперь, что M — единственная точка такая, что $\overrightarrow{OM} = \bar{a}$. Пусть $\overrightarrow{OM'} = \bar{a}$. Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'}$. По лемме о равенстве векторов получаем: $\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{MM'} \Rightarrow |\overline{OO}| = |\overline{MM'}| \Rightarrow 0 = |\overline{MM'}|$, т. е. точки M и M' совпадают. Итак, если даны произвольный вектор $\bar{a}$ и некоторая точка O, то существует одна и только одна точка M такая, что $\overrightarrow{OM} = \bar{a}$.

Построение точки M условимся называть *откладыванием вектора* $\bar{a}$ от точки O.

3. Говорят, что вектор $\bar{a}$ *параллелен прямой* l, если любой его представитель параллелен этой прямой или лежит на ней. Нулевой вектор считается параллельным любой прямой. Очевидно, если вектор $\bar{a}$ параллелен прямой l, то он параллелен любой прямой, параллельной прямой l.

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *коллинеарными*, если существует прямая, которой они параллельны. Отметим, что если из двух векторов по крайней мере один нулевой, то эти векторы коллинеарны. Запись $\bar{a} \parallel \bar{b}$ означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. На рисунке 7 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{GH}$. На этом же рисунке векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{GH}$ не коллинеарны.

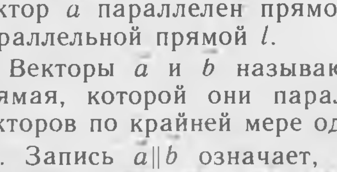


Рис. 7

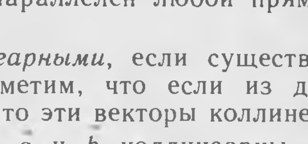


Рис. 8

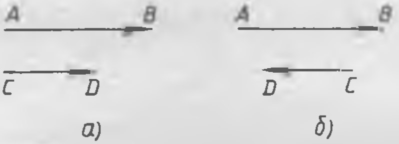


Рис. 9

Рис. 10

Замечание. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные векторы. Отложим эти векторы от произвольной точки O пространства: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рис. 8). Отрезки OA и OB имеют общее начало, и в силу коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ они лежат на одной прямой линии. Это свойство поясняет термин «коллинеарные векторы».

4. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — коллинеарные векторы, а AB и CD — какие-то представители этих векторов: $AB \in \vec{a}$, $CD \in \vec{b}$. По определению коллинеарности векторов отрезки AB и CD параллельны или лежат на одной прямой. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *одинаково направленными,* если одинаково направлены отрезки AB и CD (рис. 9, *а*), и *противоположно направленными,* если противоположно направлены эти отрезки (рис. 9, *б*). Ясно, что свойство двух векторов быть одинаково (противоположно) направленными не зависит от выбора представителей этих векторов.

Запись $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ будет означать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, а запись $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ — что эти векторы противоположно направлены. На рисунке 7 $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{GH}$. На рисунке 8 $\overrightarrow{OA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OB}$. Так как нулевой направленный отрезок одинаково направлен с любым направленным отрезком (п. 1 из § 2), то $\vec{0} \uparrow\uparrow \vec{a}$, где $\vec{a}$ — произвольный вектор.

5. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{a}$ и от какой-нибудь точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *вектором, противоположным вектору* $\vec{a}$, и обозначается через $-\vec{a}$. На рисунке 10 изображен параллелограмм $ABCD$. Вектор $\overrightarrow{CD}$ является вектором, противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$, так как $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$. Вектором, противоположным вектору $\overrightarrow{BA}$, является $\overrightarrow{AB}$, поэтому $-(-\vec{a})=\vec{a}$. Вектором, противоположным нуль-вектору, является нуль-вектор.

6. *Длиной* вектора называется длина любого представителя этого вектора. *Длина нулевого вектора равна нулю.* Длины векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}$ обозначаются так: $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице.

Замечание. В математике и ее приложениях (в механике, физике и т. д.), кроме свободных векторов, используют и так называемые скользящие и связанные (или приложенные) векторы.

Скользящий вектор — это множество одинаково направленных отрезков одной прямой, имеющих равные длины. Таким вектором можно представить силу, приложенную к абсолютно твердому телу.

Связанный вектор — это направленный отрезок. Если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ — связанные векторы, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ тогда и только тогда, когда совпадают точки A и C, а также точки B и D. Связанным вектором представляют, например, вектор скорости частиц жидкости, движущейся с завихрениями; здесь каждая частица имеет свой вектор скорости, который не является вектором скорости для соседней частицы.

В настоящем курсе геометрии применяются только свободные векторы, которые будем называть векторами, опуская для краткости слово «свободный».

§ 4. Сложение и вычитание векторов

1. Введем операцию сложения векторов, которая играет важную роль в векторной алгебре. Возьмем произвольные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. От какой-нибудь точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ называется *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается так: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 11).

Покажем, что вектор $\vec{c}$ определяется с помощью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ однозначно, независимо от выбора точки A, от которой откладывается вектор $\vec{a}$. Пусть вместо точки A взята другая точка A_1 и выполнено аналогичное построение: $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$. Докажем, что $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$. Так как $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$, то по лемме о равенстве векторов (п. 1, § 3) $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$, т. е. $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$. Отсюда по лемме о равенстве векторов $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$.

Заметим, что для нахождения суммы двух неколлинеарных векторов приходится строить треугольник ($\triangle ABC$ в принятых выше обозначениях). Поэтому указанное здесь правило сложения векторов и в общем случае называется *правилом треугольника*. Это правило можно сформулировать так: *для любых точек A, B и C справедливо равенство*

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \tag{1}$$

Применив это правило к точкам A, B, A, получим: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$.

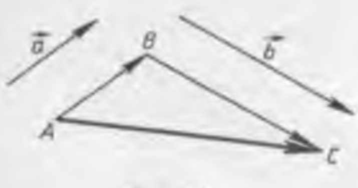


Рис. 11

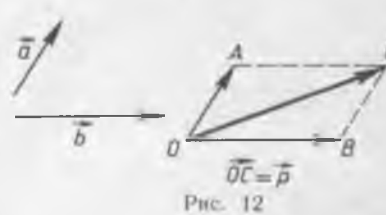


Рис. 12

Аналогично $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$. Таким образом, для любого вектора $\vec{a}$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}, \qquad (2)$$

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a} \text{ и } \vec{0}+\vec{a}=\vec{a}. \qquad (3)$$

Если слагаемые векторы не коллинеарны, то для построения их суммы можно пользоваться другим способом — *правилом параллелограмма*, которое хорошо известно из курса физики средней школы. На рисунке 12 дано построение суммы $\vec{p}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по этому правилу.

2. Докажем теорему о сложении векторов.

Теорема. *Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы следующие равенства:*

1^0. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (переместительное свойство или свойство коммутативности).

2^0. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (сочетательное свойство или свойство ассоциативности).

□ 1^0. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — произвольные векторы. От какой-нибудь точки A отложим векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, а затем от точки B отложим вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ (рис. 13). Согласно построению $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, поэтому по лемме о равенстве векторов $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, т. е. $\overrightarrow{DC}=\vec{a}$.

По правилу треугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$, следовательно, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AC}$. Отсюда следует, что $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{a}$ — один и тот же вектор.

2^0. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные векторы. Возьмем какую-нибудь точку A и отложим последовательно векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ (рис. 14). По правилу треугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}+$ $+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, поэтому $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AD}$. С другой стороны, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=$ $=\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, поэтому $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AD}$. Отсюда следует, что $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ и $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — один и тот же вектор. ■

3. Суммой векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будем считать вектор $\vec{p}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$. На основании теоремы о сложении векторов $\vec{p}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, поэтому

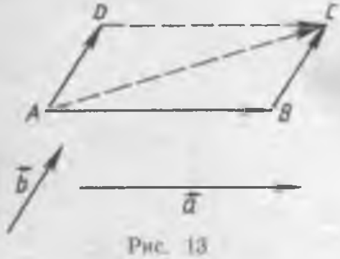


Рис. 13

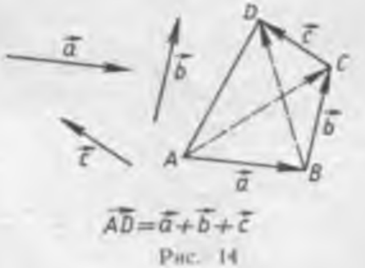


Рис. 14

при записи суммы трех векторов можно опустить скобки и записать ее в виде $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Более того, можно доказать, что *сумма трех векторов не зависит от порядка слагаемых.* В самом деле, докажем, например, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}$:

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=$$
$$=(\vec{b}+\vec{c})+\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}.$$

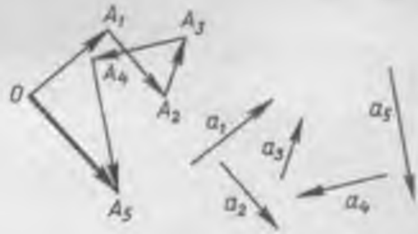


Рис. 15

Здесь применена теорема о сложении векторов.

Аналогично можно определить и сумму большего числа векторов. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — произвольные векторы ($n>3$). Их суммой называется вектор $(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_{n-1})+\vec{a}_n$ и обозначается так: $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_n$. На рисунке 15 показано построение суммы n векторов при $n=5$: $\overrightarrow{OA_5}=\vec{a}_1+\vec{a}_2+\vec{a}_3+\vec{a}_4+\vec{a}_5$.

Это правило построения суммы нескольких векторов называется *правилом многоугольника.*

По аналогии с предыдущим можно убедиться в том, что сумма n векторов не зависит от порядка слагаемых.

4. Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{x}$, что

$$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}. \qquad (4)$$

Докажем, что разность любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует и определяется однозначно.

Сначала предположим, что вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству (4), существует, и выразим его через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Прибавим к обеим частям равенства (4) вектор $-\vec{b}$: $(-\vec{b})+(\vec{b}+\vec{x})=(-\vec{b})+\vec{a}$. К левой части этого равенства применим сочетательный закон, а к правой части — переместительный закон сложения векторов: $((-\vec{b})+\vec{b})+\vec{x}=\vec{a}+(-\vec{b})$. Отсюда следует, что

$$\vec{x}=\vec{a}+(-\vec{b}). \qquad (5)$$

Итак, доказано, что если вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий равенству (4), существует, то он определяется однозначно формулой (5). Но вектор $\vec{a}+(-\vec{b})$ действительно удовлетворяет уравнению (4): $\vec{b}+(\vec{a}+(-\vec{b}))=\vec{b}+((-\vec{b})+\vec{a})=(\vec{b}+(-\vec{b}))+\vec{a}=\vec{a}$. Таким образом, формулой (5) однозначно определяется разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}-\vec{b}$. Из формулы (5) получаем:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}). \qquad (6)$$

По правилу треугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, поэтому согласно равенству (4)

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}. \qquad (7)$$

Следовательно, для любых точек A, B, C справедливо равенство (7).

Замечание. В векторной алгебре часто встречается выражение вида $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ или $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{d}$ и др. По аналогии с равенством (6) эти выражения означают:

$$\vec{a}+(-\vec{b})+\vec{c},\ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(-\vec{d}).$$

5. Иногда ошибочно считают, что при сложении векторов их длины складываются. На самом деле длина суммы двух векторов в общем случае не равна сумме длин слагаемых.

Можно доказать, что для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы следующие соотношения:

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|, \tag{8}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|. \tag{9}$$

В соотношении (8) знак равенства имеет место только в том случае, когда $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, а в соотношении (9) только в том случае, когда $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ или один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой.

Пользуясь правилом треугольника, докажите эти утверждения самостоятельно.

§ 5. Умножение вектора на число

1. *Произведением вектора* $\vec{a}$ *на действительное (вещественное) число* α называется вектор $\vec{p}$, который удовлетворяет условиям:

а) $|\vec{p}|=|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, где $|\alpha|$ — абсолютное значение числа α;

б) $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{a}$, если $\alpha\geqslant 0$ и $\vec{p}\uparrow\downarrow\vec{a}$, если $\alpha<0$.

Такой вектор $\vec{p}$ обозначают через $\alpha\vec{a}$.

Нетрудно убедиться в том, что при любых α и $\vec{a}$ вектор $\vec{p}$ определяется однозначно.

На рисунке 16 $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}=(-3)\overrightarrow{AB}$. Из условия а) следует, что $\vec{p}=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\alpha=0$ или $\vec{a}=\vec{0}$. Таким образом,

$$\alpha\vec{0}=\vec{0},\ 0\vec{a}=\vec{0}. \tag{1}$$

2. Для дальнейшего изложения понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если при гомотетии*[1] *с центром O и коэффициентом k треугольник OAB переходит в треугольник $OA'B'$, то $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$.*

□ По определению гомотетии $OA'=|k|OA$, $OB'=|k|OB$ (см. рис. 17, *а* и *б*), поэтому $\triangle OAB \sim OA'B'$. Отсюда следует, что $A'B'=|k|AB$, $A'B' \parallel AB$. Если $k>0$, то точки B и B' лежат в одной полуплоскости с границей OA (рис. 17, *а*), поэтому

[1] Напомним, что гомотетией с центром O и коэффициентом k (где $k\neq 0$) называется такое преобразование точек плоскости, при котором произвольная точка M переходит в точку M' такую, что $\overrightarrow{OM'}=k\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{A'B'} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, следовательно, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Если $k<0$, то точки B и B' лежат в разных полуплоскостях с границей OA (рис. 17, *б*), поэтому $\overrightarrow{A'B'} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, т. е. и в этом случае $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. ■

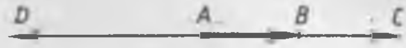


Рис. 16

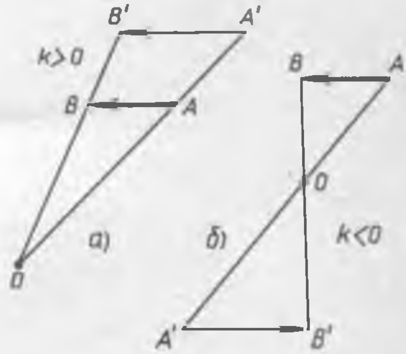


Рис. 17

Докажем теперь теорему об умножении вектора на число.

Теорема. *Для произвольных чисел α, β и векторов $\vec a$, $\vec b$ справедливы следующие равенства:*

1^0. $1\cdot\vec a=\vec a$ и $-1\cdot\vec a=-\vec a$.

2^0. $\alpha(\beta\vec a)=(\alpha\beta)\vec a$.

3^0. $\alpha(\vec a+\vec b)=\alpha\vec a+\alpha\vec b$.

4^0. $(\alpha+\beta)\vec a=\alpha\vec a+\beta\vec a$.

□ Свойство 1^0 непосредственно следует из данного выше определения произведения вектора на число. Если хотя бы одно из чисел α, β равно нулю или хотя бы один из векторов $\vec a$ и $\vec b$ нулевой, то справедливость остальных свойств очевидна. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\vec a\neq\vec 0$, $\vec b\neq\vec 0$. Ниже приведены доказательства свойств 2^0, 3^0 и 4^0.

2^0. Пусть $\vec p=\alpha(\beta\vec a)$, $\vec q=(\alpha\beta)\vec a$. По определению произведения вектора на число $|\vec p|=|\alpha||\beta\vec a|=|\alpha||\beta||\vec a|$, $|\vec q|=|\alpha\beta||\vec a|=|\alpha||\beta||\vec a|$.

Отсюда следует, что $|\vec p|=|\vec q|$. Докажем, что $\vec p\uparrow\uparrow\vec q$. Возможны два случая: $\alpha\beta>0$ и $\alpha\beta<0$. Рассмотрим первый случай. Так как $\vec p=\alpha(\beta\vec a)$, а числа α и β одного знака, то векторы $\vec p$ и $\vec a$ одинаково направлены. Но векторы $\vec q=(\alpha\beta)\cdot\vec a$ и $\vec a$ также одинаково направлены, следовательно, $\vec p\uparrow\uparrow\vec q$. Аналогично убеждаемся в том, что и в случае $\alpha\beta<0$ получим: $\vec p\uparrow\uparrow\vec q$. Учитывая равенства $|\vec p|=|\vec q|$, приходим к выводу, что $\alpha(\beta\vec a)=(\alpha\beta)\vec a$.

3^0. От какой-нибудь точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\vec a$, а затем от точки B — вектор $\overrightarrow{BC}=\vec b$. По правилу треугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, т. е. $\overrightarrow{AC}=\vec a+\vec b$.

Рассмотрим гомотетию с коэффициентом α и с центром в некоторой точке O, не лежащей на прямых AB, BC и AC. Пусть A', B' и C' — образы точек A, B и C. По предыдущей лемме $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'C'}=\alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A'C'}=\alpha\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{A'B'}=\alpha\vec a$, $\overrightarrow{B'C'}=\alpha\vec b$,

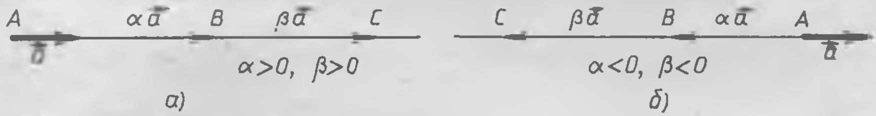


Рис. 18

$\overrightarrow{A'C'}=\alpha(\vec{a}+\vec{b})$. С другой стороны, по правилу треугольника $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}$, т. е. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

4^0. Рассмотрим два возможных случая: а) $\alpha\beta>0$ и б) $\alpha\beta<0$.

а) $\alpha\beta>0$. От некоторой точки A отложим вектор $\overrightarrow{AB}=\alpha\vec{a}$, а затем от точки B — вектор $\overrightarrow{BC}=\beta\vec{a}$ (рис. 18, *а*, *б*). Отсюда следует, что $AB=|\alpha||\vec{a}|$, $BC=|\beta||\vec{a}|$. Так как $\alpha\beta>0$, то $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, поэтому точка B лежит между точками A и C, следовательно, $AC=AB+BC$ или $AC=|\alpha||\vec{a}|+|\beta||\vec{a}|$. Но числа α и β имеют одинаковые знаки, поэтому $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$. Таким образом,

$$AC=|\alpha+\beta||\vec{a}|. \tag{2}$$

Векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены, если $\alpha>0$, $\beta>0$, т. е. если $\alpha+\beta>0$ (рис. 18, *а*), и противоположно направлены, если $\alpha<0$, $\beta<0$, т. е. $\alpha+\beta<0$ (рис. 18, *б*). Поэтому, учитывая равенство (2), получаем: $\overrightarrow{AC}=(\alpha+\beta)\vec{a}$. С другой стороны, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. Таким образом, $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

б) $\alpha\beta<0$. Если $\alpha+\beta=0$ (т. е. $\alpha=-\beta$), то левая часть равенства 4^0 есть нуль-вектор. Докажем, что в этом случае и правая часть есть нуль-вектор. В самом деле, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}=\alpha\vec{a}+(-\alpha)\vec{a}=\alpha\vec{a}-\alpha\vec{a}=\vec{0}$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha+\beta\neq0$. Так как α и β имеют разные знаки, то либо $-\alpha$, $(\alpha+\beta)$, либо $-\beta$, $(\alpha+\beta)$ имеют один и тот же знак. Пусть, например, $-\alpha$ и $\alpha+\beta$ имеют один и тот же знак. Тогда по доказанному $(-\alpha)\vec{a}+(\alpha+\beta)\vec{a}=((-\alpha)+(\alpha+\beta))\vec{a}=\beta\vec{a}$ или $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$. ■

§ 6. Линейная зависимость векторов

1. Докажем теорему о коллинеарных векторах, которая часто используется в дальнейшем изложении.

Теорема 1. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то существует единственное число α такое, что*

$$\vec{b}=\alpha\vec{a}. \tag{1}$$

□ Сначала докажем существование числа α, удовлетворяющего равенству (1). Так как $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то либо $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, либо $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. В первом случае положим $\alpha=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, а во втором случае $\alpha=-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. По определению произведения вектора на число и в первом и во втором случае получаем равенство (1).

Докажем теперь, что число α, удовлетворяющее условию (1), определяется однозначно. Предположим, что каким-то другим способом мы нашли число α_1 такое, что $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}$. Отсюда и из равенства (1) следует, что $\alpha\vec{a}=\alpha_1\vec{a}$ или $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}=\vec{0}$. Так как $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $\alpha-\alpha_1=0$, т. е. $\alpha=\alpha_1$. ■

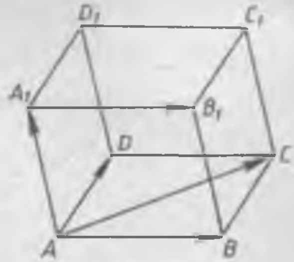


Рис. 19

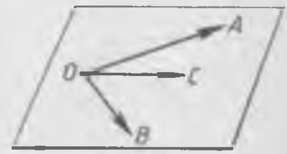


Рис. 20

2. Говорят, что вектор $\vec{a}$ *параллелен плоскости* σ, если он параллелен некоторой прямой, лежащей в этой плоскости. Очевидно, если вектор $\vec{a}$ параллелен плоскости σ, то он параллелен любой плоскости, параллельной плоскости σ.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными,* если существует плоскость, которой они параллельны. Отметим, что если по крайней мере один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ нулевой, то эти векторы компланарны. Действительно, пусть, например, $\vec{c}=\vec{0}$. От какой-нибудь точки O пространства отложим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Через точки O, A и B проходит плоскость, которой параллельны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, поэтому они компланарны.

На рисунке 19 изображен параллелепипед. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AC}$ компланарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не компланарны.

З а м е ч а н и е. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — компланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то точки O, A, B и C лежат в одной плоскости (рис. 20). Это свойство поясняет термин «компланарные векторы».

Докажем теорему о компланарных векторах.

Т е о р е м а 2. *Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ не коллинеарны, то существуют единственные числа α и β такие, что*

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}. \tag{2}$$

□ Сначала докажем существование чисел α и β, удовлетворяющих равенству (2).

Отложим от некоторой точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. Эти векторы компланарны, поэтому точки O, A, B, и C лежат в одной плоскости, причем точки O, A и B не лежат на одной прямой (векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ не коллинеарны).

Если точка C лежит на прямой OB (рис. 21, *а*), то векторы

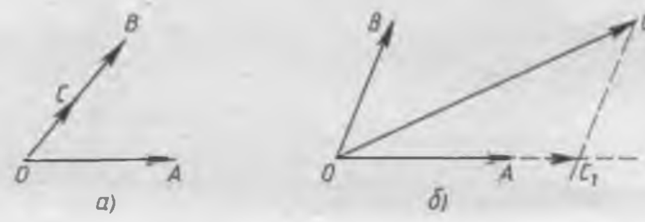


Рис. 21

$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ коллинеарны, поэтому по теореме о коллинеарных векторах существует такое число β, что $\vec{c}=\beta\vec{b}$ или $\vec{c}=0\cdot\vec{a}+\beta\vec{b}$. Таким образом, имеет место равенство (2). Рассмотрим случай, когда точка C не лежит на прямой OB (рис. 21, *б*). Проведем прямую CC_1, параллельную прямой OB, где C_1 — точка прямой OA. По правилу треугольника $\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}$. Но $\overrightarrow{OC_1}\parallel\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{C_1C}\parallel\overrightarrow{OB}$, поэтому существуют числа α и β такие, что $\overrightarrow{OC_1}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{C_1C}=\beta\vec{b}$. Следовательно, $\overrightarrow{OC}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, т. е. имеет место равенство (2).

Докажем теперь, что числа α и β, удовлетворяющие уравнению (2), определяются однозначно. Предположим, что каким-то другим способом мы нашли числа α_1 и β_1 такие, что $\vec{c}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}$. Отсюда и из равенства (2) получаем: $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}=\vec{0}$. Мы утверждаем, что $\alpha-\alpha_1=0$ и $\beta-\beta_1=0$. В самом деле, если, например, допустить, что $\alpha-\alpha_1\neq 0$, то из предыдущего векторного равенства получаем: $\vec{a}=\frac{\beta_1-\beta}{\alpha-\alpha_1}\vec{b}$, что невозможно, так как по условию теоремы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. ■

3. Рассмотрим систему векторов

$$\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_n \tag{3}$$

и зададим n действительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Вектор $\vec{b}=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n$ называется *линейной комбинацией* данных векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Говорят также, что вектор $\vec{b}$ *линейно выражается* через векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Система векторов (3) называется *линейно зависимой,* если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и такие, что

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\ldots+\alpha_n\vec{a}_n=\vec{0}. \tag{4}$$

Если же равенство (4) справедливо только при $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$, то система векторов (3) называется *линейно независимой.*

При $n=1$ имеем систему, состоящую из одного вектора. Легко видеть, что такая система будет линейно зависимой тогда и только тогда, когда вектор системы нулевой.

Рассмотрим некоторые свойства системы линейно зависимых векторов.

1^0. *При $n>1$ система векторов* (3) *линейно зависима тогда и* *только тогда, когда хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных векторов этой системы.*

□ Пусть система векторов (3) линейно зависима. Это значит, что имеет место равенство (4), где отлично от нуля по крайней мере одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Пусть $\alpha_k \neq 0$ (k — одно из чисел 1, 2, ..., n). Равенство (4) перепишем в виде $\vec{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a} - -\frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k}\vec{a}_{k+1} - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_n}\vec{a}_n$. Следовательно, вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов системы (3).

Обратно, пусть в системе (3) вектор $\vec{a}_k$ является линейной комбинацией остальных векторов:

$$\vec{a}_k = \beta_1\vec{a}_1 + \dots + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \dots + \beta_n\vec{a}_n.$$

Это равенство можно записать так:

$$\beta_1\vec{a}_1 + \dots + \beta_{k-1}\vec{a}_{k-1} + (-1)\,\vec{a}_k + \beta_{k+1}\vec{a}_{k+1} + \dots + \beta_n\vec{a}_n = \vec{0}_n,$$

и, следовательно, система векторов (3) линейно зависима (так как коэффициент при a_k отличен от нуля). ■

2^0. *Если часть данной системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

□ Пусть дана система векторов (3) и известно, что система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_e$ $(e < n)$ линейно зависима. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_e$, среди которых хотя бы одно отлично от нуля, и такие, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_e\vec{a}_e = \vec{0}$. Это равенство можно переписать так:

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_e\vec{a}_e + 0\vec{a}_{e+1} + \dots + 0\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Таким образом, система векторов (3) также линейно зависима. ■

Из предыдущего вытекает следующее утверждение (3^0).

3^0. *Система линейно независимых векторов не содержит нулевого вектора.*

4^0. *Если система векторов линейно независима, то любая ее часть также линейно независима.*

Предлагаем доказать это утверждение самостоятельно, пользуясь методом от противного.

4. Докажем далее две теоремы, которые раскрывают геометрический смысл линейной зависимости векторов.

Теорема 3. *Система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.*

□ Пусть система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ линейно зависима. По свойству 1^0 хотя бы один из векторов линейно выражается через другой. Пусть, например, $\vec{b} = \alpha\vec{a}$. Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Обратно, пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то по свойству 3^0 система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ линейно зависима. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то по теореме о коллинеарных векторах $\vec{b}=\alpha\vec{a}$. Отсюда $\alpha\vec{a}+(-1)\vec{b}=\vec{0}$, т. е. система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ линейно зависима. ■

Теорема 4. *Система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.*

□ Пусть система векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависима: $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$, причем хотя бы один из коэффициентов α, β, γ отличен от нуля. Докажем, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Если хотя бы один из коэффициентов α, β или γ равен нулю, то это утверждение очевидно. Действительно, если, например, $\gamma=0$, то $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{0}$ и по теореме 3 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Рассмотрим случай, когда $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$.

Отложим от некоторой точки O вектор $\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{a}$, затем от точки A вектор $\overrightarrow{AB}=\beta\vec{b}$. Так как $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, то $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. С другой стороны, $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=-\gamma\vec{c}$, поэтому $\overrightarrow{OB}=-\gamma\vec{c}$. Через точки O, A и B проходит плоскость σ. Так как $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$, то из равенств $\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\beta\vec{b}$ и $\overrightarrow{OB}=-\gamma\vec{c}$ следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ параллельны плоскости σ, поэтому они компланарны.

Обратно, пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Если $\vec{a}\parallel\vec{b}$, то по теореме 3 векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы и по свойству 2^0 система $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависима. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то по теореме о компланарных векторах $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. По свойству 1^0 система $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависима. ■

§ 7. Координаты вектора

1. Докажем теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема 1. *Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то для любого вектора $\vec{p}$ существуют единственные числа α, β и γ такие, что*

$$\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}. \tag{1}$$

□ Докажем сначала существование чисел α, β и γ, удовлетворяющих равенству (1). Отложим от некоторой точки O пространства векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то точки O, A, B и C не лежат в одной плоскости (рис. 22).

Если точка P лежит на прямой OC (рис. 22, *а*), то векторы $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ и $\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ коллинеарны, поэтому по теореме о коллинеарных векторах $\vec{p}=\gamma\vec{c}$ или $\vec{p}=0\vec{a}+0\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Мы видим, что имеет место равенство (1). Рассмотрим случай, когда точка P не лежит на прямой OC. Проведем через точку P прямую PP_1, параллельную прямой OC, где P_1 — точка пересечения этой прямой с плоскостью OAB (рис. 22 *б*).

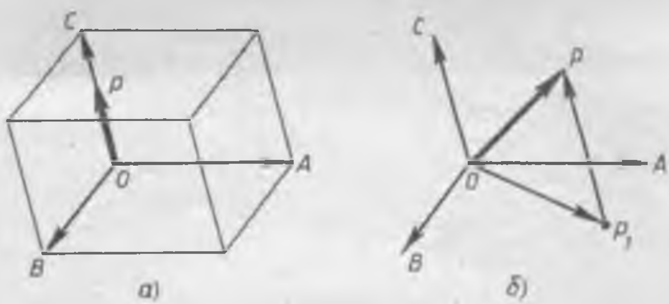


Рис. 22

Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{OP_1}$ компланарны, то по теореме о компланарных векторах существуют числа α и β такие, что $\overrightarrow{OP_1}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$. С другой стороны, векторы $\overrightarrow{P_1P}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, поэтому существует число γ такое, что $\overrightarrow{P_1P}=\gamma\vec{c}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}$, поэтому $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Докажем теперь, что числа α, β, γ, удовлетворяющие равенству (1), определяются однозначно. Предположим, что каким-то другим способом мы нашли числа α_1, β_1, γ_1 такие, что $\vec{p}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c}$. Отсюда и из равенства (1) получаем: $(\alpha-\alpha_1)\vec{a}+(\beta-\beta_1)\vec{b}+(\gamma-\gamma_1)\vec{c}=\vec{0}$. Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то по теореме 4 из § 6 они линейно независимы и потому $\alpha-\alpha_1=0$, $\beta-\beta_1=0$, $\gamma-\gamma_1=0$ или $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$, $\gamma=\gamma_1$. ■

Следствие. *Любая система, состоящая более чем из трех векторов, линейно зависима.*

□ Учитывая свойство 2^0 (§ 6), достаточно рассмотреть систему, состоящую из четырех векторов:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \text{ и } \vec{d}. \tag{2}$$

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, то по теореме 4 из § 6 они линейно зависимы, поэтому по свойству 2^0 § 6 вся система (2) линейно зависима. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не компланарны, то по доказанной теореме вектор $\vec{d}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, поэтому по свойству 1^0 § 6 система (2) линейно зависима. ■

2. Построенное множество $V=\mathbf{W}/\overset{*}{=}$ свободных векторов называется *трехмерным векторным пространством*[1].

Базисом векторного пространства называется такая система векторов, которая задана в определенном порядке и удовлетворяет условиям:

а) система линейно независима;

---

[1] Понятие векторного пространства дается в курсе алгебры. Обзор основных фактов теории векторных пространств дан ниже, в § 83.

б) любой вектор пространства является линейной комбинацией данной системы векторов.

Число векторов базиса называется *размерностью* векторного пространства.

Нетрудно доказать, что *любая система трех некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке, образует базис векторного пространства*. Действительно, пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — некомпланарные векторы. По теореме 4 из § 6 эта система линейно независима, а по теореме 1 любой вектор пространства линейно выражается через $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Ясно также, что *любой базис пространства V состоит из трех векторов*. В самом деле, по следствию из предыдущей теоремы базис пространства V не может состоять более чем из трех векторов, базис не может состоять менее чем из трех векторов, так как, если, например, предположить, что он состоит из двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а σ — плоскость, параллельная этим векторам, то для любого вектора $\vec{p}$ пространства имеем: $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, поэтому $\vec{p}$ параллелен плоскости σ, что невозможно.

Таким образом, число три является *размерностью* векторного пространства V; такое векторное пространство называется *трехмерным векторным пространством*.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — базис векторного пространства V. Сами векторы называются *базисными* векторами, причем вектор $\vec{e}_1$ называется *первым* базисным вектором, $\vec{e}_2$ — вторым, а $\vec{e}_3$ — третьим. Этот базис обозначается так: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ или $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Важно отметить, что $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ или $(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1)$ — разные базисы.

3. Введем понятие координат вектора в данном базисе. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — данный базис, а $\vec{a}$ — произвольный вектор пространства. По теореме 1 существуют единственные числа a_1, a_2, a_3, такие, что

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3. \qquad (3)$$

Если написано равенство (3), то говорят, что вектор $\vec{a}$ *разложен по векторам базиса* $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Коэффициенты a_1, a_2, a_3 в формуле (3) называются *координатами вектора* $\vec{a}$ в этом базисе. Число a_1 называется *первой координатой*, a_2 — *второй*, а a_3 — *третьей*. Если вектор $\vec{a}$ в данном базисе имеет координаты a_1, a_2, a_3, то коротко это пишут так: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$.

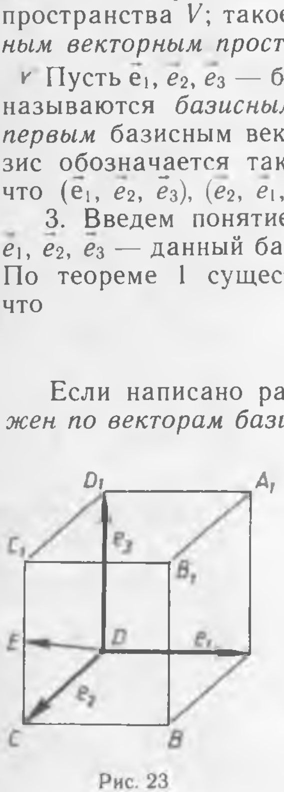


Рис. 23

На рисунке 23 изображен параллелепипед и указан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Точка E — середина ребра CC_1. Нетрудно убедиться в том, что $\overrightarrow{DB}(1, 1, 0)$, $\overrightarrow{DE}\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{A_1C_1}(-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{EA_1}\left(1, -1, \frac{1}{2}\right)$.

Действительно, найдем, например, координаты вектора $\overrightarrow{EA_1}$. По правилу многоугольника $\overrightarrow{EA_1}=\overrightarrow{EC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1A_1}=\frac{1}{2}\vec{e}_3+(-\vec{e}_2)+\vec{e}_1=$ $=1\cdot\vec{e}_1+(-1)\,\vec{e}_2+\frac{1}{2}\vec{e}_3$. Отсюда получаем координаты вектора $\overrightarrow{EA_1}$.

Отметим, что базисные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в самом базисе имеют координаты: $\vec{e}_1\,(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e}_2\,(0,\ 1,\ 0)$, $\vec{e}_3\,(0,\ 0,\ 1)$, а нуль-вектор в любом базисе имеет координаты (0, 0, 0).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. В базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ даны векторы $\vec{a}\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Найти координаты вектора $\vec{p}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, где λ и μ — данные числа.

Решение. По определению координат вектора имеем:

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3,\ \vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3,$$

поэтому $\lambda\vec{a}=\lambda a_1\vec{e}_1+\lambda a_2\vec{e}_2+\lambda a_3\vec{e}_3$, $\mu\vec{b}=\mu b_1\vec{e}_1+\mu b_2\vec{e}_2+\mu b_3\vec{e}_3$. Сложив эти равенства и воспользовавшись теоремами о сложении векторов и о произведении вектора на число, получим: $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=$ $=(\lambda a_1+\mu b_1)\,\vec{e}_1+(\lambda a_2+\mu b_2)\,\vec{e}_2+(\lambda a_3+\mu b_3)\,\vec{e}_3$. Таким образом, вектор $\vec{p}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$ имеет координаты: $\vec{p}\,(\lambda a_1+\mu b_1,\ \lambda a_2+\mu b_2,\ \lambda a_3+\mu b_3)$.

Применив рассматриваемую задачу к векторам $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ и $\lambda\vec{c}$, мы убеждаемся в справедливости следующих утверждений:

1^0. *Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов.*

2^0. *Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.*

3^0. *При умножении вектора на число каждая его координата умножается на то же число.*

Сформулируем еще одно утверждение, в котором выражен признак коллинеарности векторов, заданных координатами.

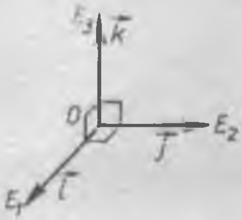
4^0. *Для того чтобы векторы $\vec{a}\,(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $\vec{b}\,(b_1,\ b_2,\ b_3)$, заданные координатами в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.*

□ Если один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то утверждение очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$.

Пусть $\vec{a}\parallel\vec{b}$. По теореме о коллинеарных векторах существует такое число λ, что $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. По свойству 3^0 $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$, $b_3=\lambda a_3$, т. е. координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны.

Обратно, пусть координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны: $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$, $b_3=\lambda a_3$. Умножив эти равенства соответственно на $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и сложив, получаем: $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, откуда следует, что $\vec{a}\parallel\vec{b}$. ■

4. При решении задач метрического характера, т. е. задач, связанных с вычислением длин отрезков (векторов) или величин углов, удобнее рассматривать так называемые ортонормированные базисы. Базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ называется *ортонормированным*, если его векторы



$|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$

$\angle E_1OE_2=\angle E_1OE_3=$
$\angle E_2OE_3=90°$

Рис. 24

удовлетворяют двум условиям: а) $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$ (т. е. $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ — единичные векторы) и б) если $\overrightarrow{OE_1}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OE_3}=\vec{k}$, то углы E_1OE_2, E_1OE_3 и E_2OE_3 прямые (рис. 24).

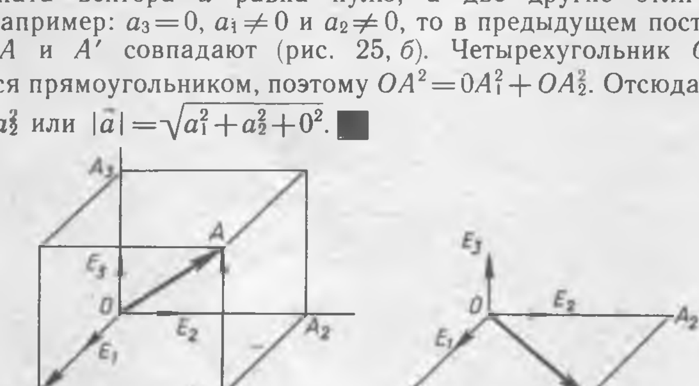
Теорема 2. *Длина вектора $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, заданного координатами в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$,* вычисляется по формуле

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \qquad (4)$$

□ Докажем сначала теорему для случая, когда $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, $a_3\neq 0$. Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ от некоторой точки O пространства: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OE_1}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OE_3}=\vec{k}$ и построим прямоугольный параллелепипед так, как показано на рисунке 25, *а*. По правилу многоугольника $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A'}+\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}$. Но $\overrightarrow{OA_1}\parallel\vec{i}$, поэтому $\overrightarrow{OA_1}=\alpha\vec{i}$. Аналогично $\overrightarrow{OA_2}=\beta\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3}=\gamma\vec{k}$ и поэтому $\overrightarrow{OA}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ или $\vec{a}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$. Мы видим, что α, β, γ — координаты вектора $\vec{a}$, т. е. $\alpha=a_1$, $\beta=a_2$, $\gamma=a_3$. Таким образом, $\overrightarrow{OA_1}=a_1\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_2}=a_2\vec{j}$, $\overrightarrow{OA_3}=a_3\vec{k}$ и поэтому $OA_1=|a_1|$, $OA_2=|a_2|$, $OA_3=|a_3|$.

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений: $OA^2=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2$. Отсюда получаем: $|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$ или формулу (4).

Формула (4) верна также и в том случае, когда некоторые координаты вектора $\vec{a}$ равны нулю. Пусть, например, $a_2=a_3=0$. Тогда $\vec{a}=a_1\vec{i}$, $|\vec{a}|=|a_1|\,|\vec{i}|=|a_1|$ или $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+0^2+0^2}$. Если одна координата вектора $\vec{a}$ равна нулю, а две другие отличны от нуля, например: $a_3=0$, $a_1\neq 0$ и $a_2\neq 0$, то в предыдущем построении точки A и A' совпадают (рис. 25, *б*). Четырехугольник OA_1AA_2 является прямоугольником, поэтому $OA^2=OA_1^2+OA_2^2$. Отсюда $|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2$ или $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+0^2}$. ■



а) Рис. 25 б)

§ 8. Скалярное произведение векторов

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы. Отложим от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и рассмотрим лучи OA и OB (рис. 26, *а*). *Углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между лучами OA и OB, т. е. угол AOB, если эти лучи не совпадают. Если лучи OA и OB совпадают, то угол между ними считается равным нулю. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Так как два угла, стороны которых сонаправлены, равны (рис. 26, *б*), то *угол между данными векторами не зависит от выбора точки* O.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *взаимно перпендикулярными,* если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\pi}{2}$ (пишут: $\vec{a}\perp\vec{b}$). Условимся считать, что если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, нуль-вектор перпендикулярен любому вектору пространства. Итак, для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем: $0\leqslant(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\leqslant\pi$.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $\vec{a}\vec{b}$. Итак, по определению

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \qquad (1)$$

Из этой формулы мы заключаем, что $\vec{a}\vec{b}=0$ *тогда и только тогда, когда* $\vec{a}\perp\vec{b}$. Это утверждение справедливо и в том случае, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — нулевой, так как нулевой вектор мы считаем перпендикулярным к любому вектору.

Из формулы (1) следует также, что $\vec{a}\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Число $\vec{a}\vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{a}^2$. Таким образом,

$$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}. \qquad (2)$$

Скалярное произведение двух векторов находит широкое применение в различных разделах физики, в частности в механике. Рассмотрим следующий пример. Пусть материальная точка M под действием силы $\vec{F}$ переместилась из точки M_1 в точку M_2 по

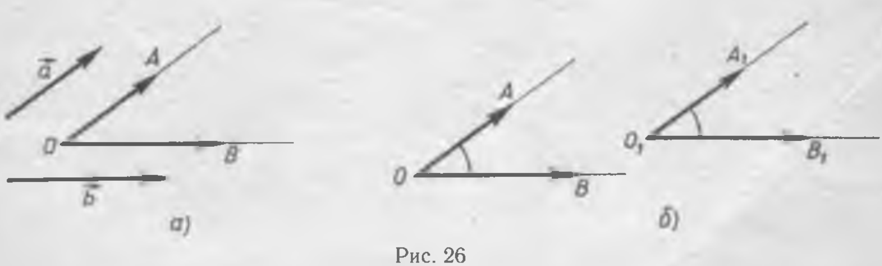


Рис. 26

прямолинейному пути. Как известно из физики, работа A силы $\vec{F}$ при таком перемещении вычисляется по формуле $A=|\vec{F}|M_1M_2\cos\varphi$, где φ — угол между векторами $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{F}$. Из этой формулы следует, что $A=\vec{F}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$. Следовательно, работа постоянной силы $\vec{F}$, действующей на материальную точку при прямолинейном перемещении $\overrightarrow{M_1M_2}$, равна скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Докажем следующую теорему, которая позволяет найти скалярное произведение двух векторов, зная их координаты.

Теорема 1. *Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданных в ортонормированном базисе, выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{3}$$

□ Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то справедливость формулы (3) очевидна, поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$. Рассмотрим два возможных случая.

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. От какой-нибудь точки O отложим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и рассмотрим треугольник OAB. По теореме косинусов $AB^2=OA^2+OB^2-2OA\,OB\cos\alpha$, где $\alpha=(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Так как $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, то предыдущее равенство можно записать так:

$$\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2). \tag{4}$$

Так как $(\vec{b}-\vec{a})(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$, то согласно теореме 2 § 7 $|\vec{b}-\vec{a}|^2=(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2$. По той же теореме

$$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,\quad |\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2. \tag{5}$$

Подставив эти значения в формулу (4), после элементарных преобразований получаем формулу (3).

2) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. По теореме о коллинеарных векторах существует такое число λ, что $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, следовательно,

$$a_1=\lambda b_1,\quad a_2=\lambda b_2,\quad a_3=\lambda b_3. \tag{6}$$

По определению скалярного произведения $\vec{a}\vec{b}=(\lambda\vec{b})\,\vec{b}=|\lambda\vec{b}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\lambda\vec{b}, \vec{b}})$. Отсюда следует, что при любом λ имеем: $\vec{a}\vec{b}=\lambda\,|\vec{b}|^2$. Но $|\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$, поэтому $\vec{a}\vec{b}=\lambda(b_1^2+b_2^2+b_3^2)=(\lambda b_1)b_1+(\lambda b_2)b_2+(\lambda b_3)\,b_3$. Используя равенства (6), получаем формулу (3). ■

Следствие 1. Векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданные в ортонормированном базисе, взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0. \tag{7}$$

С л е д с т в и е 2. Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, заданными в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \tag{8}$$

□ Действительно, по формуле (1) $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$. Подставив сюда значения $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, из формул (3) и (5) получим (8). ■

3. Основные свойства скалярного произведения векторов сформулированы в следующей теореме.

Т е о р е м а 2. *Для произвольного числа α и произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливы следующие равенства:*

1^0. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.

2^0. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$ и $\vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$.

3^0. $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

□ Выберем ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и введем в рассмотрение координаты данных векторов: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$.

Ограничимся доказательством одного из равенств, например равенства 3^0, остальные равенства доказываются аналогично. Так как $(\vec{a} + \vec{b})(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, то по формуле (3) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + (a_3 + b_3)c_3 = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) + (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$. ■

С л е д с т в и е. Для произвольных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ справедливо равенство $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{d} + \vec{b}\vec{d}$.

4. Используя скалярное произведение, выясним геометрический смысл координат вектора в ортонормированном базисе. Пусть $\vec{a}$ — ненулевой вектор, заданный в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатами: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$. Это означает, что $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. Умножив обе части этого равенства скалярно на $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ и учитывая, что $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{k} = 0$, получаем: $a_1 = \vec{a}\vec{i}$, $a_2 = \vec{a}\vec{j}$, $a_3 = \vec{a}\vec{k}$. Если ввести обозначения: $\varphi_1 = (\vec{a}, \vec{i})$, $\varphi_2 = (\vec{a}, \vec{j})$, $\varphi_3 = (\vec{a}, \vec{k})$, то предыдущие формулы принимают вид:

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi_1,\ a_2 = |\vec{a}|\cos\varphi_2,\ a_3 = |\vec{a}|\cos\varphi_3. \tag{9}$$

Числа $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$ называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Из формул (9) следует, что *каждая координата вектора равна произведению длины этого вектора на соответствующий направляющий косинус.*

Подставив значения a_1, a_2, a_3 из (9) в первую формулу (5), найдем: $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3)$. Так как $|\vec{a}| \neq 0$, то

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1. \tag{10}$$

Таким образом, *сумма квадратов направляющих косинусов любого ненулевого вектора равна единице.*

Заметим, что координаты единичного вектора в ортонормированном базисе равны направляющим косинусам этого вектора. Это утверждение прямо следует из формул (9), если учесть, что $|\vec{a}|=1$.

5. Некоторые свойства скалярного произведения векторов совпадают с соответствующими свойствами произведения чисел (например, равенства 1^0, 2^0 и 3^0 в теореме 2). Но скалярное произведение имеет и специфические свойства, которыми не обладают произведения чисел. Вот некоторые из них.

1) Скалярное произведение двух векторов есть число, т. е. объект другой природы, тогда как произведение двух чисел является числом, т. е. объектом той же природы.

2) Если $\alpha \neq 0$, то числовое уравнение $\alpha x=\beta$ имееет единственное решение $\left(x=\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Аналогичное уравнение для скалярного произведения векторов $\vec{a}\vec{x}=\vec{b}$ не имеет смысла (левая часть этого равенства — число $\vec{a}\vec{x}$, а правая — вектор $\vec{b}$). Но можно ставить вопрос о решении уравнения вида $\vec{a}\vec{x}=\alpha$, где $\vec{a}$ и $\vec{x}$ — векторы, α — число. Если $\vec{a}=\vec{0}$, $\alpha \neq 0$, то уравнение не имеет решений. Если $\vec{a}=\vec{0}$, $\alpha=0$, то решением уравнения служит любой вектор $\vec{x}$. Если же $\vec{a} \neq \vec{0}$, то уравнению $\vec{a}\vec{x}=\alpha$ удовлетворяет бесконечное множество векторов, но не любой вектор $\vec{x}$ (в этом легко убедиться, если его записать в координатах: $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=\alpha$). Таким образом, уравнение $\vec{a}\vec{x}=\alpha$ никогда не имеет единственного решения.

3) Если α и β — числа, то из равенства $\alpha\beta=0$ следует, что хотя бы одно из этих чисел равно нулю. Аналогичного свойства для векторов нет (см. п. 1).

4) Если α_1, α_2, α_3 — числа, то $(\alpha_1\alpha_2)\,\alpha_3=\alpha_1\,(\alpha_2\alpha_3)$. Поэтому левую и правую части этого равенства обозначают так: $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$. Так вводится произведение трех, четырех..., n чисел, где n — любое натуральное число.

Если $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ — произвольные векторы, то $(\vec{a}_1\vec{a}_2)\,\vec{a}_3 \neq \vec{a}_1\,(\vec{a}_2\vec{a}_3)$, так как векторы $(\vec{a}_1\vec{a}_2)\,\vec{a}_3=\vec{p}$, $\vec{a}_1\,(\vec{a}_2\vec{a}_3)=\vec{q}$ в общем случае не коллинеарны (вектор $\vec{p}$ коллинеарен вектору $\vec{a}_3$, а вектор $\vec{q}$ — вектору $\vec{a}_1$). По этой причине мы не можем скалярно перемножать три, четыре, ..., n векторов. Этим и объясняется, что понятие степени $\vec{a}^n$ при $n>2$ не вводится.

§ 9. Векторные подпространства

1. Пусть L — непустое множество векторов из векторного пространства V. Множество L называется *векторным подпространством* пространства V, если выполнены следующие два условия.

1^0. Если $\vec{a} \in L$ и $\vec{b} \in L$, то $\vec{a}+\vec{b} \in L$.

2^0. Если $\vec{a} \in L$, то $\alpha\vec{a} \in L$ для любого вещественного числа α.

По аналогии с пространством V введем понятие базиса подпространства. *Базисом векторного подпространства* L называется такая упорядоченная система линейно независимых векторов, что любой вектор подпространства L является линейной комбинацией данной системы векторов. Можно доказать, что все базисы подпространства состоят из одного и того же числа векторов. Это число называется *размерностью подпространства*. Так как $L \in V$, а в V любая система, состоящая более чем из трех векторов, линейно зависима, то размерность подпространства L не больше, чем три. Можно доказать, что если L не совпадает со всем пространством V, то его размерность меньше, чем три.

2. Рассмотрим примеры векторных подпространств.

Пример 1. Возьмем два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пространства V и рассмотрим множество всех векторов вида: $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, где α и β — произвольные вещественные числа. Это множество, как нетрудно проверить, удовлетворяет условиям 1^0 и 2^0 определения векторного подпространства, поэтому является подпространством пространства V. Оно называется *подпространством, натянутым на векторы* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и обозначается через $L(\vec{a}, \vec{b})$. Пусть σ — плоскость, которой параллельны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Докажем, что $L(\vec{a}, \vec{b})$ — множество всех тех и только тех векторов пространства V, которые параллельны плоскости σ. Действительно, при любых значениях α и β векторы $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы, поэтому они компланарны (теорема 4 из § 6), т. е. вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости σ. Обратно, любой вектор $\vec{p}$, параллельный плоскости σ, компланарен с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (теорема 2 из § 6).

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ образуют базис подпространства $L(\vec{a}. \vec{b})$. В самом деле, эти векторы линейно независимы, и любой вектор подпространства $L(\vec{a}, \vec{b})$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, *множество всех векторов, параллельных некоторой плоскости, является двумерным подпространством пространства* V.

Пример 2. Возьмем ненулевой вектор $\vec{a}$ пространства V и рассмотрим множество всех векторов вида $\alpha\vec{a}$, где α — произвольное вещественное число. Это множество является векторным подпространством пространства V. Обозначим его через $L(\vec{a})$ (подпространство, натянутое на вектор $\vec{a}$). Пусть l — прямая, которой параллелен вектор $\vec{a}$. Аналогично примеру 1 можно доказать, что $L(\vec{a})$ — множество всех тех и только тех векторов пространства V, которые параллельны прямой l.

Вектор $\vec{a}$ образует базис подпространства $L(\vec{a})$, поэтому $L(\vec{a})$ — одномерное векторное подпространство. Таким образом, *множество всех векторов, параллельных некоторой прямой, является одномерным подпространством пространства* V.

Пример 3. Рассмотрим множество, состоящее только из одного нулевого вектора. Оно удовлетворяет условиям 1^0 и 2^0 определения векторного подпространства, поэтому является подпространством пространства V. Оно называется *нулевым подпространством*. Принято считать, что размерность этого подпространства равна нулю.

3. Рассмотрим множество L всех векторов, параллельных не-

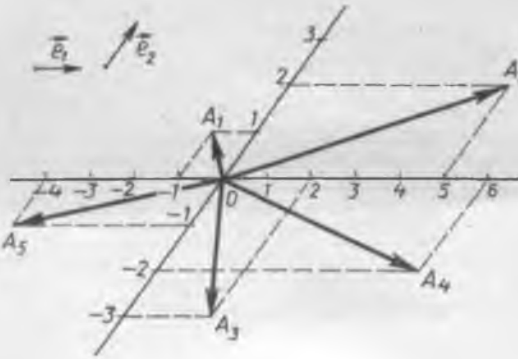


Рис. 27

которой плоскости σ. Мы доказали (пример 1), что L — двумерное векторное подпространство. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — его базис. По теореме о компланарных векторах (теорема 2 из § 6) для любого вектора $\vec{a} \in L$ существуют единственные числа a_1, a_2 такие, что $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$.

Коэффициенты a_1, a_2 в этой формуле называются *координатами* **вектора** $\vec{a}$ **в базисе** $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Число a_1 называется *первой* координатой, а число a_2 — *второй*. На рисунке 27 изображены базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и в этом базисе построены векторы $\overrightarrow{OA}_1(-1,\ 1)$, $\overrightarrow{OA}_2(5,\ 2)$, $\overrightarrow{OA}_3(2,\ -3)$, $\overrightarrow{OA}_4(6,\ -2)$, $\overrightarrow{OA}_5(-4,\ -1)$.

Для координат векторов подпространства L справедливы утверждения, аналогичные тем, которые были сформулированы в п. 3 § 7.

1^0. Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов.

2^0. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов.

3^0. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на то же число.

В следующем утверждении выражен признак коллинеарности векторов, заданных координатами.

4^0. Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их координаты были пропорциональны.

Доказательств этих утверждений мы не приводим, так как они по существу ничем не отличаются от тех, которые приведены в § 7.

Пользуясь утверждением 4^0, можно сформулировать другой признак коллинеарности двух векторов, заданных координатами. Пусть $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ и $\vec{b}(b_1,\ b_2)$ — произвольные векторы. Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется *определителем* (второго порядка), *составленным из координат векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и обозначается так: $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$.

Теорема. *Векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = 0.$

□ Пусть $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Согласно утверждению 4^0 координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны, т. е. существует такое число λ, что $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$ (или $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$). Но тогда $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 (\lambda a_2) - a_2 (\lambda a_1) = 0.$

Допустим теперь, что $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = 0$, и докажем, что $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Если $\vec{a} = \vec{0}$, то утверждение очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда $\vec{a} \neq \vec{0}$. По крайней мере, одна из координат вектора $\vec{a}$ не равна нулю. Пусть $a_1 \neq 0$. Тогда из равенства $\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0$ находим: $b_2 = \frac{b_1}{a_1} a_2$ или $b_2 = \lambda a_2$, где $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$. Таким образом, $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, т. е. координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны. Отсюда, согласно утверждению 4^0, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. ■

4. Базис $\vec{i}$, $\vec{j}$ подпространства L называется *ортонормированным*, если векторы базиса — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Рассмотрим несколько задач в ортонормированном базисе.

Задача 1. В подпространстве L даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ своими координатами (a_1, a_2), (b_1, b_2) в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$. Вычислить скалярное произведение этих векторов.

Решение. По определению координат вектора в данном базисе имеем: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$. Используя свойства скалярного произведения, находим: $\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1 b_1 \vec{i}\vec{i} + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\vec{i}\vec{j} + a_2 b_2 \vec{j}\vec{j}$. Учитывая, что базис ортонормированный, т. е. $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = 1$, $\vec{i}\vec{j} = 0$, получим формулу, аналогичную формуле (3) из § 8:

$$\vec{a}\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2. \qquad (1)$$

Итак, *скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из L, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.*

Отсюда получаем условие перпендикулярности двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из L, заданных своими координатами в ортонормированном базисе:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0. \qquad (2)$$

Если в формуле (1) положить $\vec{a} = \vec{b}$, то получим выражение скалярного квадрата через координаты в ортонормированном базисе: $\vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2$. Используя формулу (2) из § 8, приходим к формуле для вычисления длины вектора:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}. \qquad (3)$$

Задача 2. В подпространстве L в ортонормированном базисе заданы ненулевые векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$. Найти косинус угла между данными векторами.

Решение. Воспользуемся формулой (1) из § 8 для вычисления $\cos(\vec{a}, \vec{b})$. Так как $|\vec{a}| \neq 0$ и $|\vec{b}| \neq 0$, то

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}. \tag{4}$$

Пользуясь формулами (1) и (3), получаем:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \tag{5}$$

§ 10. Применение векторов к решению задач школьного курса геометрии

1. Векторную алгебру можно с успехом применять к доказательству теорем и решению задач школьного курса геометрии. Сначала рассмотрим две задачи вспомогательного характера, которые часто используются в приложениях векторной алгебры.

Задача 1. Точка M — середина отрезка AB, а O — произвольная точка пространства. Доказать, что

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}). \tag{1}$$

Решение. По правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$. Сложив эти равенства, получим: $2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$. Так как M — середина отрезка AB, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Таким образом, справедлива формула (1).

Задача 2. Точка N — центр тяжести (точка пересечения медиан) треугольника ABC, а O — произвольная точка пространства (рис. 28). Доказать, что

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \tag{2}$$

Решение. Пусть M — середина отрезка AB. По правилу треугольника $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CN}$. Но так как $\overrightarrow{CN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$, то $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OM}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$. Подставив сюда значение $\overrightarrow{OM}$ из формулы (1), получаем формулу (2).

2. Рассмотрим теперь некоторые примеры применения векторов к доказательству теорем и решению задач школьного курса геометрии. Сначала рассмотрим некоторые свойства треугольников.

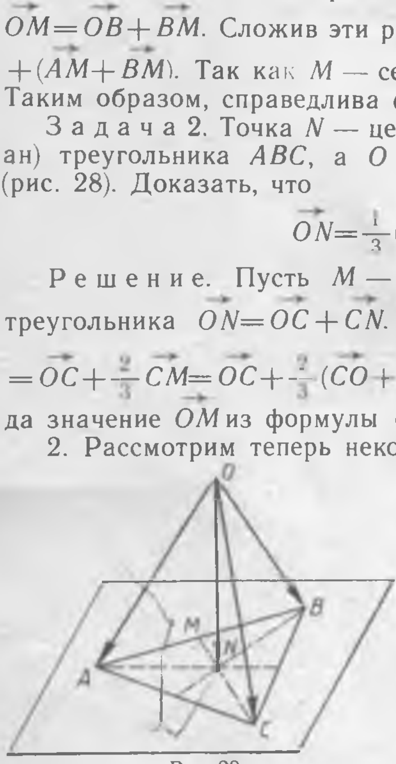


Рис. 28

Задача 3. Доказать обратную теорему Пифагора: треугольник ABC является прямоугольным с прямым углом A, если $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Решение. Как известно, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, поэтому $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} =$

$=(\vec{AC}-\vec{AB})(\vec{AC}-\vec{AB})$. Отсюда, после элементарных преобразований получаем: $2\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\vec{AB}^2+\vec{AC}^2-\vec{BC}^2$ или $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)$. Так как по условию задачи $AB^2+AC^2-BC^2=0$, то $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$, поэтому $\vec{AB}\perp\vec{AC}$, т. е. $\angle A$ прямой.

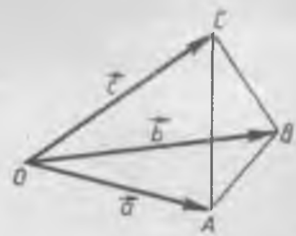


Рис. 29

Задача 4. В треугольнике ABC вычислить длину медианы m_a, зная угол A и две стороны: $AB=c$ и $AC=b$.

Решение. Пусть M — середина стороны BC. По формуле (1) $\vec{AM}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$. Возведя в квадрат это равенство, получим:

$$\vec{AM}^2=\frac{1}{4}(\vec{AB}+\vec{AC})(\vec{AB}+\vec{AC}).$$

Отсюда $m_a^2=\frac{1}{4}(b^2+c^2+2bc\cos A)$,

или $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos A}$.

Задача 5. Даны треугольник ABC и точка O пространства. Доказать, что точка O является центром тяжести треугольника ABC тогда и только тогда, когда $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$.

Решение. Пусть N — центр тяжести треугольника ABC. Если O совпадает с точкой N, то $\vec{ON}=\vec{0}$. Поэтому, пользуясь формулой (2), получаем: $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$.

Обратно, пусть $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$. Тогда по формуле (2) $\vec{ON}=\vec{0}$, т. е. точка O совпадает с центром тяжести N треугольника ABC.

3. Рассмотрим теперь примеры задач стереометрии.

Задача. 6. Доказать, что угол θ между противолежащими ребрами тетраэдра вычисляется по формуле

$$\cos\theta=\frac{c^2+c'^2-b^2-b'^2}{2aa'}, \tag{3}$$

где a, a' — длины рассматриваемых ребер, а b и b', c и c' — длины двух других пар противоположных ребер.

Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр, OA и BC — рассматриваемые ребра (рис. 29). Введем обозначения: $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$, $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, $BC=a'$, $AC=b'$, $AB=c'$.

Формулу (3) можно записать в следующем виде: $2aa'\cos\theta=$ $=c^2+c'^2-b^2-b'^2$ или $2\vec{a}\cdot\vec{BC}=\vec{c}^2-\vec{b}^2+\vec{AB}^2-\vec{AC}^2$, т. е. $2\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=$ $=\vec{c}^2-\vec{b}^2+(\vec{b}-\vec{a})^2-(\vec{c}-\vec{a})^2$.

Но это равенство является тождеством, в чем легко убедиться, если раскрыть скобки. Следовательно, справедлива и формула (3).

Задача 7. Даны три попарно перпендикулярных луча OA, OB, OC с общим началом. Найти угол между биссектрисами углов AOB и BOC.

Решение. На данных лучах OA, OB и OC возьмем соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, чтобы векторы $\overrightarrow{OA_1}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OB_1}=\vec{j}$, $\overrightarrow{OC_1}=\vec{k}$ были единичными. Направление биссектрисы угла AOB определяется вектором $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, а направление биссектрисы угла BOC — вектором $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$, причём векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют ортонормированный базис. Задача свелась к нахождению угла между векторами $\vec{a}(1, 1, 0)$ и $\vec{b}(0, 1, 1)$. По формуле (8) из § 8 находим: $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$. Следовательно, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\pi}{3}$.

Задача 8. Доказать, что если в тетраэдре две пары противолежащих ребер взаимно перпендикулярны, то и третья пара ребер взаимно перпендикулярна.

Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр, у которого $OA\perp BC$ и $OB\perp AC$ (рис. 29.). Надо доказать, что $OC\perp AB$.

Введем обозначения: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $OB=\vec{b}$, $OC=\vec{c}$. Так как $OA\perp BC$, то $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ или $\vec{a}(\vec{c}-\vec{b})=\vec{0}$. Аналогично, так как $OB\perp AC$, то $\vec{b}(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}$. Вычитая из второго равенства первое, находим: $\vec{c}(\vec{b}-\vec{a})=\vec{0}$, т. е. $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Отсюда следует, что $OC\perp AB$.

Глава II

МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

§ 11. Аффинная система координат на плоскости. Прямоугольная декартова система координат

1. В этой главе, а также в следующих двух главах мы будем изучать геометрию на плоскости и пользоваться только векторами, параллельными этой плоскости. Множество L таких векторов является двумерным векторным подпространством пространства V (см. § 9). Любые два неколлинеарных вектора из подпространства L, взятые в определенном порядке, образуют его базис. В дальнейшем векторы из L называются векторами на плоскости.

Возьмем на плоскости какую-нибудь точку O и произвольный базис $\vec{e}$, $\vec{e}_2$. Тройка, состоящая из точки O и базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, называется *аффинной системой координат* на плоскости и обозначается символом: $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ или $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ (рис. 30). Точка O называется *началом координат,* а векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ — *координатными векторами* ($\vec{e}_1$ — первый координатный вектор, $\vec{e}_2$ — второй). Направленные прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам, на которых положительные направления определяются этими векторами, называются *осями координат.* Ось координат, на которой положительное направление определяется вектором $\vec{e}_1$, называется *осью абсцисс* и обозначается через Ox, а другая ось — *осью ординат* и обозначается через Oy (рис. 30). Иногда систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ обозначают через Oxy.

2. Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ — аффинная система координат, а M — произвольная точка плоскости (рис. 31). Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M (относительно точки O). Координаты x и y вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ называются *координатами* точки M в системе

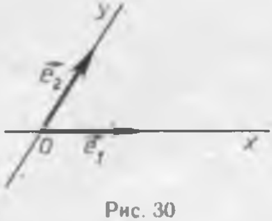


Рис. 30

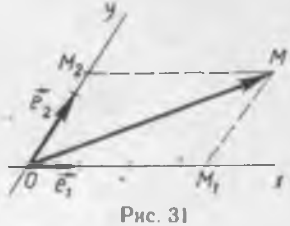


Рис. 31

координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Число x называется *абсциссой* точки M, а число y — *ординатой;* пишут $M(x, y)$. Таким образом, координатами точки M в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ называются числа x, y такие, что

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2. \tag{1}$$

При выбранной системе координат каждая точка M плоскости имеет координаты (x, y), причем если точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ различны, то пары чисел (x_1, y_1) и (x_2, y_2) не совпадают (т. е. имеет место хотя бы одно из неравенств: $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$). Обратно, для каждой упорядоченной пары чисел (x, y) можно указать точку, имеющую данные координаты. Действительно, отложим вектор $x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$ от точки O: $\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$. Точка M имеет координаты (x, y). Итак, если на плоскости задана аффинная система координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами (x, y) действительных чисел, т. е. между точками плоскости и элементами множества $\boldsymbol{R}^2$. Здесь $\boldsymbol{R}^2=R\times R$ — декартов квадрат множества действительных чисел (см. приложение, п. 1).

3. Для построения точки M по данным координатам x, y в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ воспользуемся формулой (1). Так как $x\vec{e}_1\parallel\vec{e}_1$ и $y\vec{e}_2\parallel\vec{e}_2$, то на осях координат Ox и Oy существуют соответственно точки M_1 и M_2 такие, что

$$x\vec{e}_1=\overrightarrow{OM}_1,\ y\vec{e}_2=\overrightarrow{OM}_2. \tag{2}$$

Из формулы (1) следует, что

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2. \tag{3}$$

Пользуясь равенствами (2), строим точки M_1, M_2. Проведя через эти точки прямые, параллельные координатным осям, находим их точку пересечения, которая согласно формуле (3) будет искомой точкой M (рис. 31).

Если абсцисса x точки M равна нулю: $x=0$, то из формул (2) и (3) следует, что $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}_2$, т. е. точки M и M_2 совпадают и, следовательно, точка M лежит на оси ординат. Аналогично, если ордината y точки M равна нулю: $y=0$, то точка M лежит на оси абсцисс. Заметим, что точка O имеет координаты $(0, 0)$. На рисунке 32 построено несколько точек по координатам: $O(0, 0)$, $A(2, 3)$, $B(1, -3)$, $C(-1, -2)$, $D(-2, 3)$, $E(3, 0)$.

На практике приходится рассматривать и обратную задачу: на чертеже изображена система координат и даны точки, удовлетворяющие определенным геометрическим условиям. Требуется определить координаты данных точек. Рассмотрим примеры.

Пример 1. На плоскости дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 33). Принимая точку A за начало координат и векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$ и $\overrightarrow{AF}=\vec{e}_2$ за координатные векторы, найти координаты всех вершин и центра K шестиугольника.

Решение. Так как начало координат совпадает с точкой A

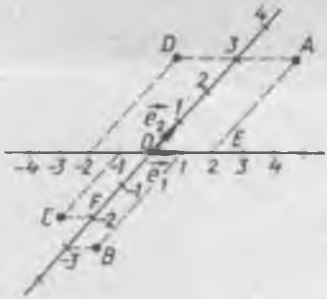


Рис. 32

Рис. 33

и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$ (радиус-векторы точек B и F относительно точки A) являются координатными векторами, то $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $F(0, 1)$. Для определения координат остальных вершин выразим их радиус-векторы через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Имеем: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\vec{e}_2+2\vec{e}_1$, так как $\overrightarrow{FK}=\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{AB}=\vec{e}_1$. Отсюда точка C имеет координаты $(2, 1)$. Аналогично находим координаты других точек.

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=(2\vec{e}_1+\vec{e}_2)+\vec{e}_2=2\vec{e}_1+2\vec{e}_2$$

и поэтому $D(2, 2)$;

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=(2\vec{e}_1+2\vec{e}_2)-\vec{e}_1=\vec{e}_1+2\vec{e}_2,$$

т. е. $E(1, 2)$;

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(2\vec{e}_1+2\vec{e}_2)=\vec{e}_1+\vec{e}_2,$$

т. е. $K(1, 1)$.

П р и м е р 2. Дан треугольник ABC с координатами своих вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ в некоторой аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Найти координаты центра тяжести этого треугольника (точки пересечения его медиан).

Р е ш е н и е. Пусть $N(x, y)$ — центр тяжести треугольника ABC. Согласно задаче 2 из § 10

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}. \qquad (4)$$

Так как $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ — радиус-векторы точек N, A, B и C, то эти векторы имеют координаты $\overrightarrow{ON}(x, y)$, $\overrightarrow{OA}(x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OB}(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{OC}(x_3, y_3)$. Используя формулу (4) и свойства координат векторов на плоскости (§ 9, п. 3), получаем:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

4. Рассмотрим следующую задачу, которая используется при дальнейшем изложении.

З а д а ч а. В аффинной системе координат даны две точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

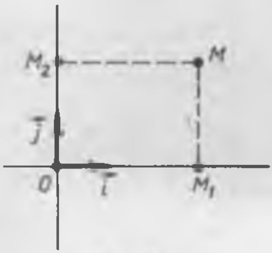


Рис. 34

Решение. По формуле (7) из § 4 имеем: $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}$. Но векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ являются радиус-векторами точек A и B, поэтому их координаты нам известны: $\vec{OA}(x_1, y_1)$ и $\vec{OB}(x_2, y_2)$. Таким образом, вектор $\vec{AB}$, как разность векторов $\vec{OB}$ и $\vec{OA}$, имеет координаты:

$$\vec{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1). \qquad (5)$$

Итак, *каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора.*

5. Система координат называется *прямсугольной декартовой* или просто *прямоугольной*, если его координатные векторы являются единичными взаимно перпендикулярными векторами. Такая система координат с началом в точке O обозначается так: $O\vec{i}\,\vec{j}$ или $(O,\ i,\ \vec{j})$, где $\vec{i}^2=\vec{j}^2=1$, $\vec{i}\,\vec{j}=0$ (рис. 34).

Координаты точки $M(x,\ y)$ в прямоугольной системе координат имеют простой геометрический смысл. По формулам (2) $x\vec{i}=\vec{OM_1}$, $y\vec{j}=\vec{OM_2}$, поэтому $OM_1=|x|$, $OM_2=|y|$. В данном случае точки M_1 и M_2 являются проекциями точки M на оси координат (рис. 34). Таким образом, $x=OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси Ox; $x=-OM$, если M_1 — точка отрицательной полуоси, и $x=0$, если точка M_1 совпадает с точкой O. Аналогичный геометрический смысл имеет ордината y точки M. Итак, понятие координат точек в прямоугольной системе координат совпадает с тем понятием, которое известно из курсов алгебры и геометрии средней школы.

Пусть в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ точки A, B имеют координаты $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$. Вычислим расстояние между этими точками, т. е. длину отрезка AB (этот отрезок может быть и нулевым). По определению длины вектора (§ 3, п. 6) $AB=|\vec{AB}|$. По формуле (5) вектор $\vec{AB}$ имеет координаты: $\vec{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, поэтому длина этого вектора вычисляется по формуле (3) из § 9:

$$\vec{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (6)$$

§ 12. Деление отрезка в данном отношении

1. Пусть M_1 и M_2 — две точки плоскости, а λ — некоторое действительное число, причем $\lambda\neq-1$. Говорят, что точка M *делит* (направленный) *отрезок* $\overline{M_1M_2}$ в данном отношении λ, если

$$\vec{M_1M}=\lambda\vec{MM_2}. \qquad (1)$$

Из равенства (1) заключаем, что векторы $\vec{M_1M}$ и $\vec{MM_2}$ коллинеарны. Следовательно, точка M лежит на прямой M_1M_2. Более того, если $\lambda > 0$, то векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ одинаково направлены и, значит, точка M лежит на отрезке M_1M_2. Если же $\lambda < 0$, то точка M лежит вне отрезка M_1M_2.

Зададим на плоскости аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и допустим, что концы отрезка $\overline{M_1M_2}$ имеют координаты: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Поставим задачу: найти координаты точки $M(x, y)$, если она делит отрезок M_1M_2 в данном отношении λ. По формуле (7) из § 4 $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM}$, поэтому равенство (1) можно записать так: $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = \lambda(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM})$. Отсюда находим: $(1+\lambda)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}$. Так как $\lambda + 1 \neq 0$, то

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda} = \frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_1} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OM_2}. \tag{2}$$

Векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ являются радиус-векторами точек M, M_1, M_2, поэтому эти векторы в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеют координаты $\overrightarrow{OM}(x, y)$, $\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1)$, $\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2)$. Применив к формуле (2) свойства 3^0 и 1^0 координат векторов (§ 9, п. 3), получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

Так выражаются координаты x, y точки M, делящей в данном отношении λ отрезок M_1M_2 через соответствующие координаты концов этого отрезка. В частности, середина отрезка M_1M_2 имеет координаты $(\lambda = 1)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Отметим, что для любого действительного числа λ, отличного от -1, на прямой M_1M_2 существует одна и только одна точка M, делящая отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ. Действительно, из равенства (1) получаем: $\overrightarrow{M_1M} + \lambda\overrightarrow{M_1M} = \lambda(\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MM_2})$, или

$$(1+\lambda)\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{M_1M_2}. \tag{4}$$

Так как $1 + \lambda \neq 0$, то отсюда получим:

$$\overrightarrow{M_1M} = \frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{M_1M_2}. \tag{5}$$

Отложив вектор $\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{M_1M}$ от точки M_1, получаем одну и только одну точку M, которая делит отрезок $\overline{M_1M}$ в отношении λ. Формулу (5) можно использовать для построения точки, делящей данный отрезок в отношении λ. На рисунке 35 построены точки P_1, P_2, P_3, которые делят отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -\frac{1}{4}$.

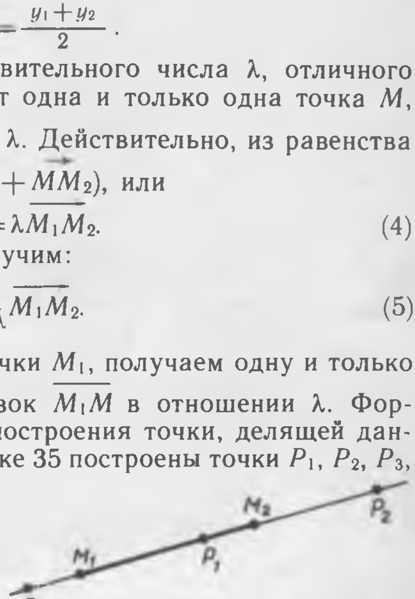


Рис. 35

Важно заметить, что на прямой M_1M_2 не существует точки, делящей отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda=-1$. В самом деле, если $\lambda=-1$, то из равенства (4) получаем: $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{0}$, т. е. $\overline{M_1M_2}$ — нулевой отрезок (точки M_1 и M_2 совпадают). Этот случай мы с самого начала исключили из рассмотрения.

2. Покажем применение формул (3) на примере решения следующей задачи.

Задача. В двух точках $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ сосредоточены массы m_1 и m_2. Найти координаты центра тяжести системы двух материальных точек A и B.

Решение. Как известно из курса физики, центр тяжести материальных точек A и B находится в точке C, делящей отрезок $\overline{AB}$ в отношении, обратно пропорциональном массам, сосредоточенным в точках A и B. Следовательно, точка C делит отрезок $\overline{AB}$ в отношении $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$. Подставив координаты точек A и B и значение λ в формулы (3), найдем координаты точки $C(x, y)$:

$$x=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}, \quad y=\frac{m_1y_1+m_2y_2}{m_1+m_2}.$$

§ 13. Ориентация плоскости

1. Пусть L — множество всех векторов, параллельных плоскости. Как известно, любые два линейно независимых вектора из L, взятые в определенном порядке, образуют базис L. Поэтому в L существует бесконечное множество базисов. Рассмотрим два из них: $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $B=(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$. Разложим векторы базиса B по векторам базиса A:

$$\vec{b}_1=c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2, \quad \vec{b}_2=c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2. \tag{1}$$

Из координат векторов $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ можно составить таблицу (матрицу второго порядка): $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$. Координаты вектора $\vec{b}_1$ образуют первый столбец этой матрицы, а координаты вектора $\vec{b}_2$ — второй столбец. Эту таблицу мы назовем *матрицей перехода* от базиса A к базису B. В соответствии с этим, определитель этой матрицы, т. е. число $c_{11}c_{22}-c_{21}c_{12}$, назовем *определителем матрицы перехода от базиса A к базису B* и обозначим так:

$$A|B=(\vec{a}_1\vec{a}_2)\,|\,(\vec{b}_1\vec{b}_2)=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Так как векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ линейно независимы, то из теоремы § 9 следует, что $A|B\neq 0$.

Рассмотрим некоторые свойства определителей матрицы перехода от одного базиса к другому.

1°. *Для любого базиса $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ имеем: $A|A=1$.*

□ В самом деле, $\vec{a}_1=1\cdot\vec{a}_1+0\cdot\vec{a}_2$, $\vec{a}_2=0\cdot\vec{a}_1+1\cdot\vec{a}_2$, поэтому $A|A=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$. ■

2^0. *Для любых трех базисов* $A=(\vec{a}_1, \vec{a})$, $B=(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ *и* $C=(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ *справедливо равенство*

$$(A|B)(B|C)=A|C. \qquad (3)$$

□ Пусть $\vec{c}_1=d_{11}\vec{b}_1+d_{21}\vec{b}_2$, $\vec{c}_2=d_{12}\vec{b}_1+d_{22}\vec{b}_2$. Подставив в правые части этих формул вместо $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ их разложения по формулам (1), будем иметь:

$$\vec{c}_1=d_{11}(c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2)+d_{21}(c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2),$$
$$\vec{c}_2=d_{12}(c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2)+d_{22}(c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2).$$

Отсюда получаем определитель матрицы перехода от базиса A к базису C:

$$A|C=\begin{vmatrix} d_{11}c_{11}+d_{21}c_{12} & d_{12}c_{11}+d_{22}c_{12} \\ d_{11}c_{21}+d_{21}c_{22} & d_{12}c_{21}+d_{22}c_{22} \end{vmatrix}.$$

Так как $B|C=\begin{vmatrix} d_{11} d_{12} \\ d_{21} d_{22} \end{vmatrix}$, то, учитывая формулу (2), непосредственным вычислением убеждаемся в справедливости равенства (3). ■

Если в равенстве (3) положить $C=A$ и воспользоваться свойством 2^0, то получим равенство 3^0.

3^0. $(A|B)(B|A)=1$.

2. Обозначим через $\boldsymbol{B}$ множество всех базисов подпространства L. Будем говорить, что базисы A, $B\in \boldsymbol{B}$ находятся в отношении $\triangle$ (одинаково ориентированы), если $A|B>0$, запишем так: $A\triangle B$. Докажем, что *отношение* $\triangle$ *является отношением эквивалентности на множестве* $\boldsymbol{B}$ *всех базисов подпространства* L.

1) Для произвольного базиса A имеем: $A\triangle A$. Это утверждение следует из свойства 1^0.

2) Если $A\triangle B$, то $B\triangle A$. Действительно, $A\triangle B\Rightarrow A|B>0$. Но из свойства 3^0 следует, что $B|A=\frac{1}{A|B}>0$ и поэтому $B\triangle A$.

3) Если $A\triangle B$ и $B\triangle C$, то $A\triangle C$. Действительно, $A\triangle B\Rightarrow A|B>0$, $B\triangle C\Rightarrow B|C>0$. По свойству 2^0 $A|C=(A|B)(B|C)>0$. Следовательно, $A\triangle C$.

Докажем, что фактор-множество $\boldsymbol{B}/\triangle$ состоит лишь из двух элементов. Для этого рассмотрим базисы $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ и $B=(\vec{a}_2, \vec{a}_1)$. Так как $A|B=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$, то классы эквивалентности K_A и K_B не совпадают. Нетрудно видеть, что любой базис $C=(\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ принадлежит либо классу K_A, либо классу K_B. В самом деле, по свойству 2^0 $A|C=(A|B)(B|C)$. Но $A|B=-1$, поэтому $A|C=-B|C$. Отсюда следует, что либо $A|C>0$, либо $B|C>0$. В первом случае $C\in K_A$, а во втором случае $C\in K_B$.

Каждый из элементов фактор-множества $\boldsymbol{B}/\triangle$ называется *ориентацией* векторного подпространства L. Выделим одну из этих ориентаций, назовем ее *положительной* (а другую — *отрицательной*). Векторное подпространство L, в котором выбрана положительная ориентация, называется *ориентированным*. Базисы положительной ориентации называются *правыми* базисами, а базисы отрицательной ориентации — *левыми*.

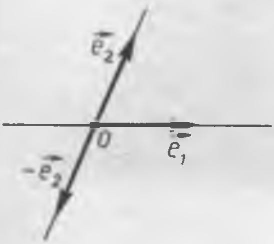


Рис. 36

Плоскость называется *ориентированной,* если ориентировано подпространство векторов этой плоскости. При этом система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ называется *правой,* если базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ правый, и *левой,* если этот базис левый.

Для того чтобы на плоскости задать ориентацию, достаточно на ней выбрать один базис и считать его правым базисом. На рисунках при изображении систем координат обычно правой называют систему, у которой оси Ox и Oy расположены как большой и указательный пальцы правой руки, если смотреть на раскрытую ладонь, а левой — ту систему, у которой оси Ox и Oy расположены как большой и указательный пальцы левой руки. На рисунке 36 базисы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_1$, $(-\vec{e}_2)$ ориентированы противоположно, так как $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2)|(\vec{e}_1,\ -\vec{e}_2)= =\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$. Система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ является правой, а система $O\vec{e}_1(-\vec{e}_2)$ — левой.

В дальнейшем изложении, где нет специальных оговорок, предполагается, что если на плоскости задана одна система координат, то она является правой. Другими словами, если на плоскости задана система координат, то плоскость считается ориентированной.

§ 14. Угол между векторами на ориентированной плоскости

1. В п. 1 § 8 введено понятие угла между векторами пространства V. Напомним его. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы. Отложив от произвольной точки O векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, получаем лучи OA и OB, угол между которыми называется углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается так: $(\vec{a},\ \vec{b})$. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеем: $0\leqslant(\vec{a},\ \vec{b})\leqslant\pi$.

Введем теперь понятие направленного угла между векторами на ориентированной плоскости. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы, заданные в определенном порядке: $\vec{a}$ — первый вектор, а $\vec{b}$ — второй. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то *направленным (ориентированным)* углом между вектором $\vec{a}$ и вектором $\vec{b}$ называется величина $(\vec{a},\ \vec{b})$, если базис $\vec{a}$, $\vec{b}$ правый, и величина $-(\vec{a},\ \vec{b})$, если базис $\vec{a}$, $\vec{b}$ левый. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, то направленный угол между ними считается равным нулю, а если противоположно направлены, то π. Направленный угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Таким образом, для любых ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $-\pi<(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\leqslant\pi$. На рисунке

37 базис $\vec{a}$, $\vec{b}$ правый, а базис $\vec{c}$, $\vec{d}$ левый, поэтому $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=30°$, $(\widehat{\vec{c}, \vec{d}})=-90°$.

Так как $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=-(\widehat{\vec{b}, \vec{a}})$ и если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то

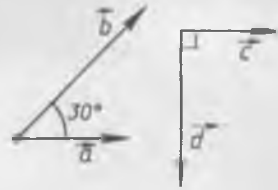


Рис. 37

$$\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=-\sin(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}),$$
$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{a}}). \qquad (1)$$

Можно доказать, что если $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — произвольные ненулевые векторы, то

$$\sin((\widehat{\vec{a}, \vec{b}})+(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}))=\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}) \text{ и}$$
$$\cos((\widehat{\vec{a}, \vec{b}})+(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}))=\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{c}}). \qquad (2)$$

2. Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а. *Координаты (a_1, a_2) произвольного ненулевого вектора $\vec{a}$ в ортонормированном правом базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ вычисляются по формулам:*

$$a_1=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}), \quad a_2=|\vec{a}|\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}). \qquad (3)$$

□ По определению координат вектора $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$. Отсюда, умножив скалярно на $\vec{i}$, получаем: $a_1=\vec{i}\vec{a}=|\vec{i}||\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$, или $\lambda a_1=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$. Умножив предыдущее равенство скалярно на $\vec{j}$, получим:

$$a_2=\vec{j}\vec{a}=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{a}}), \text{ или } a_2=|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{a}}).$$

По формуле (2) $\cos(\widehat{\vec{j}, \vec{a}})=\cos((\widehat{\vec{j}, \vec{i}})+(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}))=\cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}-\frac{\pi}{2}\right)=$ $=\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$, поэтому $a_2=|\vec{a}|\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})$. ■

С л е д с т в и е. ***Единичный вектор $\vec{a}_0$ в ортонормированном правом базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ имеет координаты*** $(\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{a}_0}), \sin(\widehat{\vec{i}, \vec{a}_0}))$.

3. З а д а ч а. В ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ даны ненулевые векторы $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$. Найти направленный угол $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Р е ш е н и е. Для решения задачи достаточно найти $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ и $\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Пусть $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\varphi$, $(\widehat{\vec{i}, \vec{a}})=\varphi_1$, $(\widehat{\vec{i}, \vec{b}})=\varphi_2$. Тогда по формулам (2)

$$\cos\varphi=\cos((\widehat{\vec{a}, \vec{i}})+(\widehat{\vec{i}, \vec{b}}))=\cos((\widehat{\vec{i}, \vec{b}})-(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}))=\cos(\varphi_2-\varphi_1);$$

$$\sin\varphi=\sin((\widehat{\vec{a}, \vec{i}})+(\widehat{\vec{i}, \vec{b}}))=\sin((\widehat{\vec{i}, \vec{b}})-(\widehat{\vec{i}, \vec{a}}))=\sin(\varphi_2-\varphi_1).$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos\varphi_2\cos\varphi_1 + \sin\varphi_2\sin\varphi_1,\\ \sin\varphi &= \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

По предыдущей теореме

$$a_1 = |\vec{a}|\cos\varphi_1,\ a_2 = |\vec{a}|\sin\varphi_1,\ b_1 = |\vec{b}|\cos\varphi_2,\ b_2 = |\vec{b}|\sin\varphi_2.$$

Подставив из этих формул в формулы (4) выражения $\cos\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\sin\varphi_1$, $\sin\varphi_2$, окончательно получим:

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|},\quad \sin\varphi = \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{|a|\ |b|}. \qquad (5)$$

§ 15. Формулы преобразования координат

1. Рассмотрим на плоскости две аффинные системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$. Первую систему назовем старой, а вторую — новой. Пусть M — произвольная точка плоскости, которая в старой системе имеет координаты x, y, а в новой системе — x', y' (рис. 38). Задача преобразования координат состоит в следующем: зная координаты нового начала координат и новых координатных векторов в старой системе:

$$\vec{e}_1'\,(c_{11},\ c_{21}),\ \vec{e}_2'\,(c_{12},\ c_{22}),\ O'\,(x_0,\ y_0) \qquad (1)$$

выразить координаты x, y точки M в старой системе через координаты x', y' той же точки в новой системе.

По определению координат векторов и точек из (1) получаем:

$$\vec{e}_1' = c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2,\ \vec{e}_2' = c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2,\ \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2. \qquad (2)$$

По правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, поэтому $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{e}_1' + y'\vec{e}_2'$, или, используя равенства (2), получим:

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + (c_{11}x' + c_{12}y')\,\vec{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')\,\vec{e}_2.$$

Отсюда, учитывая, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны, приходим к формулам:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0,\\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned} \qquad (3)$$

Так выражаются координаты x, y точки M в старой системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ через ее координаты x', y' в новой системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$. Формулы (3) называются *формулами преобразования* аффинной системы координат. Мы замечаем, что в этих формулах матрица $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при x', y', есть в точности матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, а свободными членами служат координаты x_0, y_0 нового начала O' в старой системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

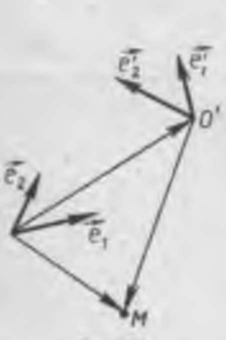


Рис. 38

Так как векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны, то $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому система (3) всегда разрешима относительно x', y'. Это позволяет выразить координаты точки M в новой системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ через координаты той же точки в старой системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

2. Рассмотрим два частных случая преобразования аффинной системы координат.

А. Перенос начала. В этом случае системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ имеют одни и те же координатные векторы и разные начала. Так как $\vec{e}_1 = \vec{e}_1'$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_2'$, то матрица перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к базису $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. формулы (3) запишутся так:

$$x = x' + x_0, \ y = y' + y_0. \tag{4}$$

Б. Замена координатных векторов. Системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ имеют общее начало и отличаются координатными векторами. В этом случае $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ (так как точки O' и O совпадают). Формулы (3) примут вид:

$$x = c_{11}x' + c_{12}y', \ y = c_{21}x' + c_{22}y'. \tag{5}$$

3. Рассмотрим теперь преобразование прямоугольных систем координат. Так как прямоугольная система координат является частным случаем аффинной, то при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой мы можем использовать те же формулы (3), но теперь на элементы c_{ij} матрицы перехода накладываются дополнительные ограничения. Предположим, что старая система $O\vec{i}\vec{j}$ имеет правую ориентацию, и рассмотрим два случая.

А. Системы координат $O\vec{i}\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ ориентированы одинаково, т. е. обе системы имеют правую ориентацию. Пусть $\alpha = (\widehat{\vec{i}, \vec{i}'})$. По следствию теоремы § 14 векторы $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ имеют координаты

$$\vec{i}' (\cos\alpha, \ \sin\alpha), \ \vec{j}' (\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}), \ \sin(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'})). \tag{6}$$

Но

$$\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}) = \cos[(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) + (\widehat{\vec{i}', \vec{j}'})] = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha;$$

$$\sin(\widehat{\vec{i}, \vec{j}'}) = \sin[(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) + (\widehat{\vec{i}', \vec{j}'})] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha.$$

Таким образом, формулы (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1.$$

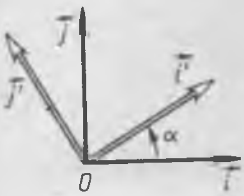


Рис. 39

Рассмотрим частный случай, когда обе системы координат имеют общее начало O. В этом случае говорят, что *система координат $O\vec{i}'\vec{j}'$ получена из системы $O\vec{i}\,\vec{j}$ поворотом вокруг точки O* на угол α (рис. 39). Так как точки O' и O совпадают, то $x_0=y_0=0$, поэтому формулы (7) принимают вид:

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=y'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned}\tag{8}$$

Б. Системы координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ ориентированы противоположно: исходная система $O\vec{i}\,\vec{j}$ правая, а новая $O'\vec{i}'\vec{j}'$ левая. И в этом случае векторы $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ имеют координаты (6), но здесь $(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'})=-\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$\cos(\widehat{\vec{i},\vec{j}'})=\cos((\widehat{\vec{i},\vec{i}'})+(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'}))=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\alpha,$$
$$\sin(\widehat{\vec{i},\vec{j}'})=\sin((\widehat{\vec{i},\vec{i}'})+(\widehat{\vec{i}',\vec{j}'}))=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\alpha.$$

Формулы (3) имеют вид:

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha+y'\sin\alpha+x_0,\\ y&=y'\sin\alpha-y'\cos\alpha+y_0. \end{aligned}\tag{9}$$

Здесь

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{vmatrix}=-1.$$

Формулы (7) и (9) можно объединить в одной записи:

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-\varepsilon y'\sin\alpha+x_0,\\ y&=x'\sin\alpha+\varepsilon y'\cos\alpha+y_0, \end{aligned}\tag{10}$$

где $\varepsilon=1$, если системы координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'$ ориентированы одинаково, и $\varepsilon=-1$, если они ориентированы противоположно.

§ 16. Полярные координаты

1. Аффинная система координат дает удобный, но не единственный способ определять положение точек плоскости при помощи чисел. Если указано правило, по которому положение точек плоскости можно определить с помощью упорядоченных пар вещественных чисел, то говорят, что на плоскости задана система координат.

Кроме аффинной системы координат (и ее частного случая — прямоугольной системы), в математике часто применяют систему полярных координат на плоскости. Зададим на *ориентированной плоскости* точку O и единичный вектор $\vec{i}$. Пара, состоящая из точки O и вектора $\vec{i}$, называется *полярной системой координат* и обозначается так: $O\vec{i}$ или $(O, \vec{i})$. Рассмотрим ось OP, прохо-

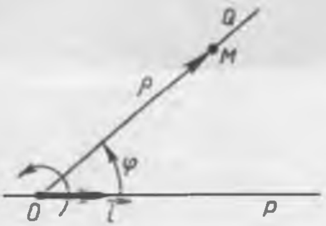


Рис. 40

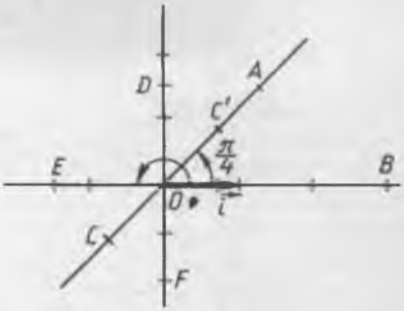


Рис. 41

дящую через точку O и параллельную вектору $\vec{i}$, на которой положительное направление определяется этим вектором. Точка O называется *полюсом*, а ось OP — *полярной осью* (рис. 40).

Пусть M — произвольная точка плоскости. Обозначим через ρ расстояние от точки O до точки M, а через φ — направленный угол $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$, т. е. $\rho = |\overrightarrow{OM}|$, $\varphi = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$. Если точка M совпадает с точкой O, то $\rho = 0$, а угол φ — неопределенный. Числа ρ и φ однозначно определяют положение точки M на плоскости. Действительно, зная φ, сначала построим луч OQ, на котором лежит точка M, а затем на этом луче от его начала отложим отрезок OM длиной ρ (рис. 40). Числа ρ и φ называются *полярными координатами* точки M в полярной системе $O\vec{i}$. Число ρ называется *полярным радиусом* или первой полярной координатой точки M, а число φ — *полярным углом* или второй полярной координатой этой точки. Если точка M имеет полярные координаты ρ, φ, то коротко пишут так: $M(\rho, \varphi)$. Например, точки A, B, C, D, E и F на рисунке 41 имеют полярные координаты: $A\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$, $B(3, 0)$, $C\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $E\left(\frac{3}{2}, \pi\right)$, $F\left(2, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Заметим, что полярный радиус ρ любой точки не отрицателен и может изменяться на полусегменте $[0, +\infty)$. Полярный угол φ точки изменяется в пределах $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

З а м е ч а н и е. Иногда бывает целесообразно считать, что полярный угол точки $M(\rho, \varphi)$ равен также $\varphi - 2\pi$, если $\varphi > 0$, и $\varphi + 2\pi$, если $\varphi < 0$. В этом случае полярный угол каждой точки, отличной от полюса, имеет два значения и изменяется в пределах от -2π до 2π.

Например, для точки A на рисунке 41 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varphi' = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4}$, а для точки F $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi' = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

2. К каждой полярной системе координат $O\vec{i}$ можно присоединить положительно ориентированную прямоугольную систему ко-

Рис 42

ординат $O\vec{i}\vec{j}$, началом которой служит полюс O, первым координатным вектором — вектор $\vec{i}$ и $(\widehat{\vec{i}\,\vec{j}})=\frac{\pi}{2}$ (рис. 42).

Пусть ρ и φ — полярные координаты точки M, отличной от точки O, а x, y — ее координаты в присоединенной прямоугольной системе. Тогда $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$ и $\varphi=(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$. По теореме из § 14

$$x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi. \tag{1}$$

Зная полярные координаты ρ и φ точки M, по формулам (1) найдем прямоугольные координаты x, y этой точки. Из формул (1) находим: $x^2+y^2=\rho^2$ и, значит,

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2} \tag{2}$$

(перед радикалом взят знак «+», так как $\rho=|\overrightarrow{OM}|$). Для точки M, отличной от полюса O, имеем $\rho\neq 0$, из формул (1), (2) находим:

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\varphi=\frac{y}{x^2+y^2}. \tag{3}$$

Зная прямоугольные координаты x, y точки M, отличной от начала координат, мы по формулам (2) и (3) найдем полярные координаты ρ и φ этой точки.

3. Из определения полярных координат следует, что не любая пара действительных чисел является полярными координатами точки (так как $\rho=|\overrightarrow{OM}|\geqslant 0$ и $-\pi<\varphi\leqslant\pi$). Например, на плоскости не существует точки с полярными координатами $\left(-3,\ \frac{\pi}{2}\right)$. Это обстоятельство приводит к определенным трудностям при решении ряда конкретных задач. Чтобы устранить такое неудобство, обобщим понятие полярных координат так, чтобы в данной полярной системе $O\vec{i}$ любая упорядоченная пара действительных чисел определяла на плоскости некоторую точку.

Пусть (ρ,φ) — произвольная пара действительных чисел, а $O\vec{i}$ — данная полярная система координат. Если $\rho\geqslant 0$ и $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, то этой парой определяется точка с полярными координатами $(\rho,\ \varphi)$, так как было указано в п. 1. Если $\rho\geqslant 0$, $\varphi>\pi$ или $\rho\geqslant 0$ и $\varphi\leqslant-\pi$, то выразим φ в виде $\varphi=\varphi_0+2\pi k$, где k — целое число такое, что $-\pi<\varphi_0\leqslant\pi$, и будем считать, что парой $(\rho,\ \varphi)$ определяется точка $M(\rho,\ \varphi_0)$. Если, наконец, $\rho<0$, то будем считать, что парой $(\rho,\ \varphi)$ определяется точка M, которая симметрична точке $M'(|\rho|,\ \varphi)$ относительно точки O. Например, пара чисел $\left(-1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ определяет точку C, симметричную точке C' имеющей полярные координаты $\left(1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 41). Такие координаты точки называются *обобщенными полярными координатами*. Каждая точка плоскости имеет бесконечное множество обобщенных полярных координат. Например, точка A на рисунке 41 имеет координаты:

$$\left(2, \frac{\pi}{4}\right), \left(2, \frac{9\pi}{4}\right), \left(-2, -\frac{3\pi}{4}\right), \left(-2, \frac{5\pi}{4}\right).$$

Но любая пара чисел, взятых в определенном порядке, определяет единственную точку с данными полярными координатами. Например, координаты $(-3, \pi)$ определяют единственную точку B, изображенную на рисунке 41. Заметим, что в обобщенной системе полярных координат две пары чисел (ρ, φ) и $(-\rho, \varphi+\pi)$ определяют одну и ту же точку плоскости.

Формулы (1), определяющие декартовы координаты точки через полярные, справедливы и в том случае, когда ρ и φ являются обобщенными полярными координатами. В самом деле, пусть (ρ^*, φ^*) — обобщенные полярные координаты точки M, а (x, y) — ее координаты в присоединенной прямоугольной системе. Докажем, что

$$x=\rho^* \cos \varphi^*, \; y=\rho^* \sin \varphi^*. \tag{4}$$

Если $\rho^*>0$, а $\varphi^*=\varphi_0+2\pi k$, где k — целое число такое, что $-\pi<\varphi_0\leqslant\pi$, то (ρ^*, φ_0) являются обычными полярными координатами точки M, поэтому выполняются равенства (1): $x=\rho^* \cos \varphi_0$, $y=\rho^* \sin \varphi_0$. Но $\cos \varphi_0=\cos(\varphi_0+2\pi k)=\cos \varphi^*$, $\sin \varphi_0=\sin(\varphi_0+2\pi k)=\sin \varphi^*$, следовательно, справедливы равенства (4).

Если $\rho^*<0$, то точка $M(\rho^*, \varphi^*)$ имеет также обобщенные полярные координаты $(-\rho^*, \varphi^*+\pi)$, поэтому, так как $-\rho^*>0$, то по доказанному $x=-\rho^* \cos(\varphi^*+\pi)$, $y=-\rho^* \sin(\varphi^*+\pi)$ или $x=\rho^* \cos \varphi^*$, $y=\rho^* \sin \varphi^*$.

Зная прямоугольные координаты x, y точки M, по формулам (2) и (3) найдем обобщенные полярные координаты ρ и φ этой точки. Но в этом случае в формулах (2) и (3) перед радикалами надо поставить знаки «$\pm$» (так как теперь ρ принимает и отрицательные значения). Знак перед радикалами в формулах (2) и (3) можно выбрать произвольно, но один и тот же.

§ 17. Метод координат на плоскости

1. В предыдущих параграфах введены координаты точек на плоскости, т. е. указан способ задания точек с помощью пары чисел. Метод координат в геометрии в том и состоит, что посредством координат точек геометрические объекты задают аналитически с помощью чисел, уравнений, неравенств или их систем и тем самым при доказательстве теорем или решении геометрических задач используют *аналитические* методы. Это существенно упрощает рассуждения и часто позволяет доказывать теоремы или решать задачи, пользуясь определенным алгоритмом (производя те или иные вычисления), в то время, как синтетический метод в геометрии в большинстве случаев требует искусственных приемов. Но для

того чтобы пользоваться методом координат, необходимо уметь с помощью чисел, уравнений, неравенств или их систем задавать геометрические фигуры.

Напомним, что *фигурой* называется любое множество точек. Рассмотрим фигуру Φ, расположенную на плоскости с заданной на ней аффинной системой координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. *Условием, определяющим фигуру Φ* в данной системе координат, называется уравнение, неравенство или их система, которым удовлетворяют координаты любой точки фигуры Φ и не удовлетворяют координаты точки, не принадлежащей фигуре Φ. Уравнение, определяющее фигуру Φ, называется *уравнением фигуры Φ* в данной системе координат.

При изучении геометрических объектов методом координат часто рассматривают две задачи: 1) по заданным геометрическим свойствам фигуры составить аналитические условия, определяющие эту фигуру; 2) по заданным аналитическим условиям, определяющим фигуру, выяснить ее геометрические свойства.

2. Рассмотрим примеры решения первой задачи.

Пример 1. В прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ дана прямая d, проходящая через точку $A(a, 0)$ и параллельная оси Oy (рис. 43). Написать уравнение прямой d.

Решение. Точка $M(x, y)$ плоскости лежит на прямой d тогда и только тогда, когда

$$x = a. \qquad (1)$$

Действительно, если точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой d, то точка A является проекцией точки M_0 на ось Ox, поэтому точки M_0 и A имеют одну и ту же абсциссу, т. е. $x_0 = a$. Мы видим, что координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению (1). Если точка $M'(x_1, y_1)$ не лежит на прямой d, то ее проекция M_1' на ось Ox не совпадает с точкой A (см. рис. 43), поэтому $x_1 \neq a$ и, значит, координаты точки M' не удовлетворяют уравнению (1). Итак, доказано, что уравнение (1) является уравнением прямой d.

Пример 2. Найти условия, определяющие каждую из заштрихованных фигур, изображенных на рисунке 44. При этом предполагается, что точки, принадлежащие контурам фигур, принадлежат самим фигурам (система координат для каждой фигуры указана на рисунке).

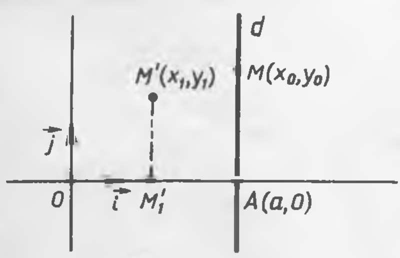


Рис. 43

Решение. На рисунке 44, a изображен прямоугольник $OABC$, который является пересечением двух полос. Обозначим эти полосы через I и II. Полоса I ограничена прямыми OC и AB. Координаты точек $M(x, y)$ этой и только точек этой полосы удовлетворяют неравенствам: $0 \leqslant x \leqslant 5$. Полоса II ограничена прямы-

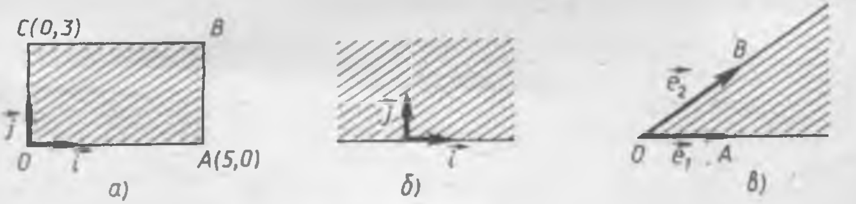


Рис. 44

ми OA и CB. Координаты точек $M(x, y)$ этой и только точек этой полосы удовлетворяют неравенствам: $0 \leqslant y \leqslant 3$.

Таким образом, условия, определяющие прямоугольник $OABC$ в указанной системе координат, свелись к системе неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 5, \\ 0 \leqslant y \leqslant 3. \end{cases}$$

На рисунке 44, *б* изображена полуплоскость (к ней причисляются и точки ее границы). Этой полуплоскости принадлежат те и только те точки плоскости, у которых ординаты неотрицательны. Значит, условие, определяющее эту полуплоскость, имеет вид: $y \geqslant 0$.

На рисунке 44, *в* изображен один из координатных углов аффинной системы координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала этой фигуре, необходимо и достаточно, чтобы каждая из ее координат была неотрицательна. Следовательно, условия, определяющие рассматриваемую фигуру, сводятся к системе неравенств:

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

3. Рассмотрим теперь примеры решения второй задачи.

Пример 3. Установить вид фигуры Φ, которая в данной прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = 4. \qquad (2)$$

Решение. Если $M(x, y)$ — произвольная точка фигуры Φ, то ее координаты удовлетворяют уравнению (2). Так как $OM^2 = x^2 + y^2$, то для точки M имеем: $OM^2 = 4$, или $OM = 2$. Таким образом, любая точка фигуры Φ удалена от начала координат на расстояние $r = 2$, т. е. лежит на окружности ω радиуса r с центром в начале координат (рис. 45). Если точка $M_1(x_1, y_1)$ не принадлежит фигуре Φ, то $x_1^2 + y_1^2 \neq 4$, т. е. $OM_1 \neq 2$. Это означает, что $M_1 \notin \omega$. Таким образом, фигура Φ, заданная уравнением (2), является окружностью ω.

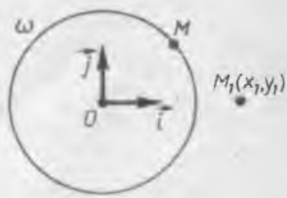


Рис. 45

Пример 4. Найти фигуру Φ, которая в данной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ имеет уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

Решение. Так как координаты любой точки $M(x, y)$ являются действительными числами, то $x^2 \geqslant 0$ и $y^2 \geqslant 0$, поэтому для любой точки $M(x, y)$ плоскости $x^2+y^2+1>0$. Следовательно, на плоскости нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют уравнению $x^2+y^2+1=0$. Это означает, что Φ — пустое множество.

§ 18. Алгебраическая линия. Окружность

1. При изучении геометрии на плоскости методом координат в качестве фигур чаще всего рассматриваются линии. Примерами линий являются прямая, окружность, парабола, синусоида и др. Строгое определение линии будет дано позже, во второй части настоящего курса геометрии. Условием, определяющим линию γ в данной системе координат на плоскости, является, как правило, уравнение, которое называется *уравнением линии* γ.

Линия на плоскости называется *алгебраической*, если в какой-либо аффинной системе координат уравнение этой линии можно представить в виде

$$F(x, y)=0, \tag{1}$$

где $F(x, y)$ — многочлен от переменных x, y, т. е. сумма членов вида ax^sy^t (a — действительное число, s, t — целые неотрицательные числа). Степенью члена ax^sy^t, где $a\neq 0$, называется число $s+t$. Степенью многочлена $F(x, y)$ называется наивысшая степень его членов. Степень многочлена $F(x, y)$ называется *порядком* линии, определяемой уравнением (1). Примером алгебраической линии первого порядка является прямая, заданная уравнением (1) в § 17, а примером линии второго порядка — окружность, заданная уравнением (2) в § 17.

Теорема. *Понятие алгебраической линии, а также порядок линии не зависят от выбора аффинной системы координат.*

□ Возьмем на плоскости аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Пусть в этой системе координат линия γ определяется уравнением (1), где $F(x, y)$ — многочлен степени n. Зададим другую аффинную систему координат $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$. Координаты x, y произвольной точки M плоскости в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ выражаются через ее координаты x', y' в системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ по известным формулам (см. § 15, формулы (3)):

$$\begin{aligned} x&=c_{11}x'+c_{12}y'+x_0,\\ y&=c_{21}x'+c_{22}y'+y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы получить уравнение линии γ в системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$, надо в уравнении (1) заменить x, y их выражениями по формулам (2). Получим уравнение

$$G(x', y')=0. \tag{3}$$

Многочлен $F(x, y)$ есть сумма членов вида ax^sy^t. После замены x, y их выражениями (2) вместо члена ax^sy^t получим выражение

$$a(c_{11}x'+c_{12}y'+x_0)^s(c_{21}x'+c_{22}y'+y_0)^t. \qquad (4)$$

Таким образом, $G(x', y')$ есть сумма выражений вида (4), и потому $G(x', y')$ — многочлен от переменных x', y'. Итак, понятие алгебраической линии не зависит от выбора аффинной системы координат.

Докажем теперь, что $G(x', y')$ — многочлен степени n. Пусть m — степень этого многочлена. Если в выражении (4) раскрыть скобки и привести подобные члены, то получим сумму членов вида $a'(x')^p(y')^q$, где в каждом таком члене $p+q\leqslant s+t$. Отсюда следует, что $m\leqslant n$. Будем теперь считать, что $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ — старая система координат, а $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ — новая. Тогда по доказанному $n\leqslant m$. Итак, $m\leqslant n$, $n\leqslant m$, этому $m=n$. ■

Замечание. Разбиение множества линий плоскости на алгебраические и неалгебраические основано на использовании аффинной системы координат. Для такого разбиения множества линий система полярных координат непригодна. Например, на рисунке 46 прямая l в полярной системе координат $O\vec{i}$ имеет уравнение $\rho\cos\varphi=a$, где $a=OA$. Это уравнение не является алгебраическим. Уравнение той же прямой l в системе $A\vec{i}$ является алгебраическим:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

2. Докажем, что *окружность является алгебраической линией второго порядка*. Для этого возьмем на плоскости прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$ и в этой системе координат составим уравнение окружности ω радиуса r с центром в точке $C(a, b)$.

Точка $M(x, y)$ плоскости принадлежит окружности ω тогда и только тогда, когда $CM=r$ или $CM^2=r^2$. Это равенство в координатах запишется так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (5)$$

Это и есть уравнение окружности ω.

Действительно, если точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на окружности, то $CM_0^2=r^2$, т. е. $(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$, поэтому координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению (5), а если точка $M_1(x_1, y_1)$ не лежит на окружности, то $CM_1^2\neq r^2$, т. е. $(x_1-a)^2+(y_1-b)^2<r^2$ и, значит, координаты точки M_1 не удовлетворяют уравнению (5). Итак, доказано, что уравнение (5) есть уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(a, b)$.

В частности, если центр окружности совпадает с началом O координат, то $a=b=0$, поэтому уравнение (5) принимает вид:

$$x^2+y^2=r^2. \qquad (6)$$

Уравнение (5) можно записать в виде

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0, \qquad (7)$$

где $A=-2a$, $B=-2b$, $C=a^2+b^2-r^2$.

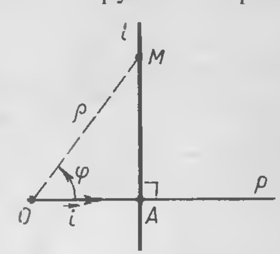


Рис. 46

Таким образом, уравнение любой окружности в прямоугольной системе координат имеет вид (7), т. е. окружность является алгебраической линией второго порядка.

Рассмотрим теперь обратную задачу, т. е. выясним, что собой представляет алгебраическая линия второго порядка, заданная уравнением (7). Перепишем это уравнение так:

$$\left(x^2+2\frac{A}{2}x+\frac{A^2}{4}\right)+\left(y^2+2\frac{B}{2}y+\frac{B^2}{4}\right)+C-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}=0,$$

или

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (5), видим, что *если* $A^2+B^2-4C>0$, *то линия, заданная уравнением* (7), *является окружностью с центром* $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2}\right)$ *и радиусом* $\frac{\sqrt{A^2+B^2-4C}}{2}$.

3. Окружность является примером алгебраической линии второго порядка. В дальнейшем покажем (гл. IV), что, кроме окружности, существуют и другие алгебраические линии второго порядка.

Отметим, что существует бесконечное множество неалгебраических линий. Так, линии, определяемые в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ уравнениями $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\lg x$, $y=a^x$ ($a=\text{const}\geqslant 0$, $a\neq 1$) и др., являются примерами неалгебраических линий. Действительно, если предположить, что какая-либо из этих линий алгебраическая, то по теореме п. 1 эта линия в любой аффинной системе координат, в том числе в системе $O\vec{i}\,\vec{j}$, определяется уравнением вида (1), где $F(x, y)$ — многочлен. Но это невозможно, так как можно доказать, что ни одна из функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\lg x$, a^x не может быть представлена в виде многочлена.

§ 19. Приложение метода координат к решению задач школьного курса геометрии

1. В этом параграфе приведем некоторые примеры приложения метода координат к доказательству теорем и решению геометрических задач. Рассмотрим сначала теорему, где используется формула расстояния между двумя точками.

Задача 1. Доказать теорему Стюарта: если дан треугольник ABC и на его основании точка D, лежащая между точками B и C, то справедливо равенство

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot DC\cdot BD. \qquad (1)$$

Решение. Прямоугольную систему координат возьмем так, как показано на рисунке 47. Введем обозначения для координат точек A, C и D: $A(\alpha,\ \beta)$, $C(\gamma,\ 0)$, $D(\delta,\ 0)$. При данном выборе системы координат $BD=\delta$, $BC=\gamma$.

Вычислим теперь все величины, которые входят в равенство (1):

$$AB^2=\alpha^2+\beta^2,\quad BC=\gamma;$$

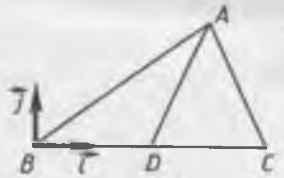


Рис. 47

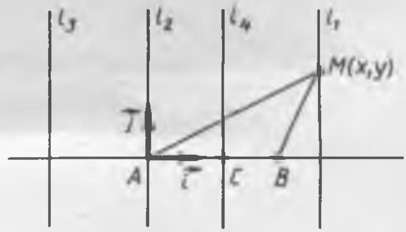


Рис. 48

$$AC^2=(\alpha-\gamma)^2+\beta^2, \quad BD=\delta;$$
$$AD^2=(\alpha-\delta)^2+\beta^2, \quad DC=\gamma-\delta.$$

Отсюда получаем: $AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = (\alpha^2+\beta^2)(\gamma-\delta)+[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]\delta-[(\alpha-\delta)^2+\beta^2]\gamma=\gamma^2\delta-\delta^2\gamma = \gamma\delta(\gamma-\delta)=BC\cdot BD\cdot DC$. ■

Заметим, что из формулы (1) нетрудно получить следующую формулу для вычисления медианы треугольника через его стороны:

$$m_a=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}. \qquad (2)$$

В самом деле, пусть AD — медиана треугольника ABC. Если положить $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $AD=m$, то $BD=DC=\frac{a}{2}$. Подставив эти значения в формулу (1), получаем равенство (2). Если пользоваться теоремой косинусов: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, то из равенства (2) получаем формулу, которая была выведена при решении задачи 4 § 10.

2. Рассмотрим другие примеры приложения метода координат к решению геометрических задач.

Задача 2. Найти множество всех точек плоскости, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B есть постоянная величина α.

Решение. Прямоугольную систему координат возьмем так, как показано на рисунке 48. Если $AB=a$, то в выбранной системе координат $A(0, 0)$ и $B(a, 0)$.

Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала искомому множеству точек, необходимо и достаточно, чтобы $AM^2-BM^2=\alpha$ или $x^2+y^2-[(x-a)^2+y^2]=\alpha$. После элементарных преобразований получаем уравнение искомого множества точек в выбранной системе координат:

$$x=\frac{\alpha+a^2}{2a}. \qquad (3)$$

Этим уравнением определяется прямая, параллельная оси Oy (т. е. перпендикулярная к прямой AB) и отстоящая от точки A на расстоянии $\frac{|\alpha+a^2|}{2a}$ (§ 17, пример 1). Эта прямая пересекает

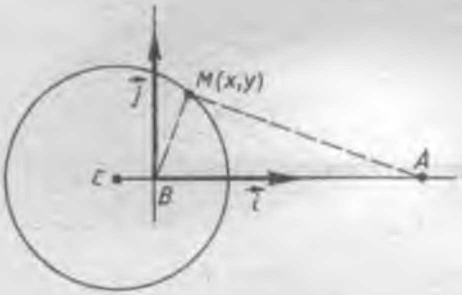


Рис. 49

Рис. 50

луч AB, если $\alpha + a^2 > 0$, проходит через точку A, если $\alpha + a^2 = 0$, и пересекает дополнительный луч, если $\alpha + a^2 < 0$ (рис. 48, прямые l_1, l_2, l_3).

Рассмотрим частный случай, когда $\alpha = 0$. В этом случае множество G состоит из тех и только из тех точек M, для которых $AM^2 - MB^2 = 0$ или $AM = MB$. Итак, получили известную из школьного курса геометрии теорему: множество точек плоскости, равноудаленных от двух точек A и B, есть прямая, проходящая через середину C отрезка AB и перпендикулярная к нему (серединный перпендикуляр отрезка AB; прямая l_4 на рисунке 48).

З а д а ч а 3. Найти множество всех точек, для каждой из которых отношение расстояний от двух данных точек A и B есть постоянная величина λ, не равная единице.

Р е ш е н и е. Прямоугольную систему координат возьмем так, как показано на рисунке 49. Если $AB = a$, то в выбранной системе координат $A(a, 0)$, $B(0, 0)$.

Для того чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала искомому множеству, необходимо и достаточно, чтобы $AM = \lambda BM$. Так как $AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$, $MB = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = \lambda\sqrt{x^2 + y^2}$. Если возвести в квадрат и привести подобные члены, то получим уравнение $x^2(1-\lambda)^2 + y^2(1-\lambda^2) - 2ax + a^2 = 0$. Так как $\lambda^2 - 1 \neq 0$, то, разделив на $1 - \lambda^2$, окончательно получим:

$$x^2 + y^2 - \frac{2ax}{1-\lambda^2} + \frac{a^2}{1-\lambda^2} = 0.$$

Этим уравнением определяется окружность радиуса $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{(1-\lambda^2)^2} - \frac{4a^2}{1-\lambda^2}} = \frac{a\lambda}{|1-\lambda^2|}$ с центром в точке $C\left(\frac{a}{1-\lambda^2}, \ 0\right)$ (см. § 18, п. 2). Точка C лежит на прямой AB (рис. 49). Эта окружность называется *окружностью Аполлония.*

З а д а ч а 4. Дана окружность радиуса r и на ней точка A. Найти множество точек Ω, делящих всевозможные хорды, проведенные через точку A, в одном и том же отношении λ, где $\lambda > 0$.

Р е ш е н и е. Возьмем прямоугольную систему координат так, чтобы центр данной окружности совпал с началом координат, а точка A имела координаты $A(-r, 0)$ (рис. 50). Пусть AB — произвольная хорда, проходящая через точку A, а M — точка множества Ω, т. е. $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}$. Обозначив координаты точек B и M соответственно через (x_1, y_1) и (x, y), будем иметь:

$$x=\frac{-r+\lambda x_1}{1+\lambda}, \quad y=\frac{\lambda y_1}{1+\lambda}. \tag{4}$$

Отсюда, учитывая, что $\lambda>0$, получаем:

$$x_1=\frac{1+\lambda}{\lambda}\left(x+\frac{r}{1+\lambda}\right), \quad y_1=\frac{1+\lambda}{\lambda}y. \tag{5}$$

Так как точка $B(x_1, y_1)$ лежит на данной окружности, то $x_1^2+y_1^2=r^2$, поэтому

$$\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2\left(x+\frac{r}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{1+\lambda}{\lambda}\right)^2 y^2=r^2, \tag{6}$$

или

$$\left(x+\frac{r}{1+\lambda}\right)^2+y^2=\frac{r^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}. \tag{7}$$

Итак, доказано, что если $M(x, y)$ — произвольная точка искомого множества Ω, то ее координаты удовлетворяют уравнению (7).

Обратно, если координаты (x, y) точки M удовлетворяют уравнению (7), то они удовлетворяют также уравнению (6). Отсюда следует, что точка $B(x_1, y_1)$, координаты которой определяются равенствами (5), лежит на данной окружности $x^2+y^2=r^2$. С другой стороны, из равенств (5) получаем равенства (4), т. е. точка M делит отрезок AB в отношении λ и, следовательно, $M\in\Omega$.

Таким образом, множество Ω определяется уравнением (7), т. е. является окружностью радиуса $\frac{r\lambda}{1+\lambda}$ (без точки A) с центром в точке $\left(-\frac{r}{1+\lambda}, 0\right)$ (§ 18, п. 2). Эта окружность при любом λ проходит через точку A. При $\lambda=1$ одним из диаметров окружности является отрезок AO.

Глава III

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 20. Уравнение прямой

1. Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ее *направляющим вектором*. Прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, однако любые два из них коллинеарны, так как они параллельны одной прямой.

Положение прямой определяется однозначно, если даны направляющий вектор прямой и некоторая ее точка или две точки прямой. Поставим задачу: зная в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ координаты направляющего вектора $\vec{a}$ и точки M_0 или двух точек M_1 и M_2 данной прямой, написать ее уравнение.

2. Уравнение прямой, заданной точкой и направляющим вектором.

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и в этой системе известны координаты некоторой точки $M_0(x_0, y_0)$ прямой d и направляющего вектора $\vec{a}(a_1, a_2)$ этой прямой (рис. 51). Напишем уравнение прямой d. Очевидно, точка $M(x, y)$ лежит на прямой d тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны. Так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x-x_0, y-y_0)$, то по теореме § 9

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 \\ y-y_0 & a_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Если точка M лежит на прямой d, то ее координаты удовлетворяют уравнению (1), а если она не лежит на прямой, то ее координаты не удовлетворяют этому уравнению, поэтому уравнение (1) является уравнением прямой d. Уравнение (1) можно также записать в виде

$$a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0. \tag{1'}$$

3. Уравнение прямой, заданной двумя точками.

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и в этой системе известны координаты двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ данной прямой d (рис. 52). Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является направляющим вектором этой прямой. Так как этот вектор

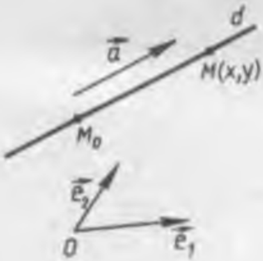


Рис. 51

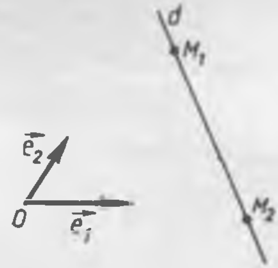


Рис. 52

имеет координаты $(x_2-x_1,\ y_2-y_1)$, то согласно формуле (1) уравнение прямой d имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Если $x_2-x_1\neq 0$ и $y_2-y_1\neq 0$, то это уравнение можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (2')$$

4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть на плоскости выбрана аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и дана прямая d, *пересекающая ось ординат*. Если $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ — направляющий вектор прямой, то $\vec{a}$ и $\vec{e}_2$ не коллинеарны, поэтому $a_1\neq 0$. Число $k=\frac{a_2}{a_1}$ называется *угловым коэффициентом прямой* d. Покажем, что угловой коэффициент прямой не зависит от выбора направляющего вектора прямой. Действительно, если $\vec{b}(b_1,\ b_2)$ — другой направляющий вектор прямой d, то $\vec{a}\parallel\vec{b}$, поэтому координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ пропорциональны (§ 9, п. 3): $a_1=\lambda b_1,\ a_2=\lambda b_2$. Отсюда, учитывая, что $a_1\neq 0,\ b_1\neq 0$, получаем $\frac{a_2}{a_1}=\frac{\lambda b_2}{\lambda b_1}=\frac{b_2}{b_1}$.

Угловой коэффициент k прямой имеет простой геометрический смысл, если прямая задана в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$. В самом деле, пусть $\vec{a}(a_1,\ a_2)$ — направляющий вектор этой прямой (рис. 53). По теореме § 14 $a_1=|\vec{a}|\cos\varphi$, $a_2=|\vec{a}|\sin\varphi$, где $\varphi=(\widehat{\vec{i},\ \vec{a}})$. Следовательно, $k=\frac{|\vec{a}|\sin\varphi}{|\vec{a}|\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi$. Таким образом, число k позволяет определить направленный угол $\varphi=(\widehat{\vec{i},\ \vec{a}})$, поэтому k называется *угловым коэффициентом прямой*.

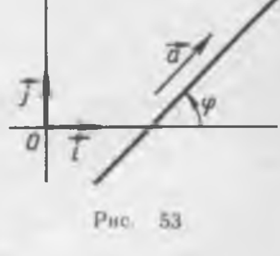


Рис. 53

Пусть k — угловой коэффициент прямой d, заданной в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Ясно, что любой ненулевой вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$, координаты которого удовлетворяют равенству $k=\frac{p_2}{p_1}$, является направляющим вектором прямой d. Поэтому, зная число k, можно определить направление прямой d, и, зная какую-нибудь точку M_0 этой прямой, можно определить ее положение.

Составим уравнение прямой, заданной в аффинной системе координат точкой $M_0(x_0, y_0)$ и угловым коэффициентом k. Пусть $\vec{a}(a_1, a_2)$ — направляющий вектор прямой. Тогда согласно формуле (1′) уравнение прямой имеет вид: $a_2(x-x_0)-a_1(y-y_0)=0$, или, разделив на a_1, получаем:

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{3}$$

Если в качестве точки $M(x_0, y_0)$ взять точку $B(0, b)$ пересечения прямой d с осью ординат, то уравнение (3) примет вид:

$$y=kx+b. \tag{4}$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Подчеркнем, что в виде (4) можно записать уравнение любой прямой, *пересекающей* ось ординат.

5. Параметрические уравнения прямой. Выберем какую-нибудь аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и зададим прямую d направляющим вектором $\vec{a}(a_1, a_2)$ и точкой $M_0(x_0, y_0)$. Точка $M(x, y)$ принадлежит прямой тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{a}$, т. е. когда существует такое число t, что $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{a}$. Это соотношение в координатах запишется так: $x-x_0=ta_1$, $y-y_0=ta_2$, или

$$\begin{aligned} x&=x_0+a_1t,\\ y&=y_0+a_2t. \end{aligned} \tag{5}$$

Эти равенства называются *параметрическими уравнениями прямой*, а t ее *параметром*. Смысл этих уравнений заключается в следующем: каково бы ни было действительное число t, точка с координатами x, y, которые удовлетворяют условиям (5), лежит на прямой d. Обратно, если (x, y) — точка прямой d, то всегда найдется такое t, что x и y выражаются через x_0, y_0, a_1, a_2 при помощи равенств (5).

§ 21. Общее уравнение прямой

1. В предыдущем параграфе было показано (см. уравнение 1′), что уравнение любой прямой в аффинной системе координат является уравнением первой степени, т. е. может быть записано в виде

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

где числа A и B одновременно не равны нулю. Таким образом, прямая является алгебраической линией первого порядка.

Докажем обратное утверждение.

Теорема 1. *Линия на плоскости, заданная в аффинной системе координат уравнением первой степени*[1]

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

есть прямая. Вектор $(-B,\ A)$ *является направляющим вектором этой прямой.*

□ Пусть γ — линия, заданная уравнением (1), а $M_0(x_0,\ y_0)$ — некоторая ее точка, т. е. точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1):

$$Ax_0+By_0+C=0. \tag{2}$$

Такая точка всегда существует, так как A и B одновременно не равны нулю. Определив из равенства (2) C и подставив в уравнение (1), получим уравнение линии γ в виде $Ax+By-Ax_0-By_0=0$, или $A(x-x_0)-(-B)(y-y_0)=0$.

Это уравнение имеет в точности вид (1′) § 20 и, следовательно, определяет прямую, проходящую через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ с направляющим вектором $\vec{a}(-B,\ A)$. ■

Таким образом, любое уравнение первой степени (1) в аффинной системе координат определяет прямую линию. Другими словами, *любая алгебраическая линия первого порядка есть прямая линия*. Уравнение (1) называется *общим уравнением прямой*, а x и y называются текущими координатами точки прямой.

2. Пусть в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ дана прямая общим уравнением (1). Выясним особенности расположения прямой относительно системы координат, если некоторые из чисел A, B и C равны нулю. (Напомним, что хотя бы одно из чисел A и B отлично от нуля.)

1) Если $C=0$, то уравнению (1) удовлетворяют координаты точки $O(0,\ 0)$ и, следовательно, прямая проходит через начало координат. Обратно, если прямая проходит через начало координат, то в этом случае $C=0$. Итак, *прямая* (1) *проходит через начало координат тогда и только тогда, когда* $C=0$. В этом случае уравнение прямой имеет вид: $Ax+By=0$.

2) Если $A=0$, то направляющий вектор прямой $\vec{a}(-B,\ 0)$ коллинеарен координатному вектору $\vec{e}_1$, т. е. вектор $\vec{e}_1$ параллелен прямой. Обратно, если $\vec{a}\parallel\vec{e}_1$, то $\begin{vmatrix} -B & A \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow A=0$. Итак, *вектор* $\vec{e}_1$ *параллелен прямой* (1) *тогда и только тогда, когда* $A=0$. В этом случае уравнение прямой имеет вид: $By+C=0$ или $y=b$, где $b=-\frac{C}{B}$.

Если $A=0$, $C\neq 0$, то прямая (1) не проходит через начало

---

[1] Следовательно, A и B одновременно не равны нулю.

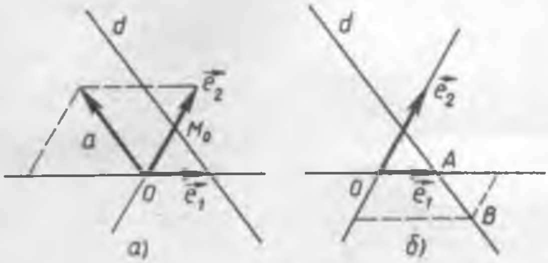


Рис. 54

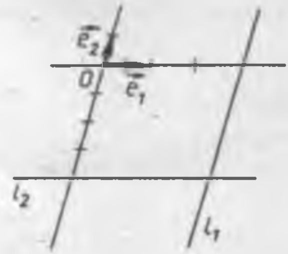


Рис. 55

координат и поэтому параллельна оси Ox; если же $A=C=0$, то прямая совпадает с осью Ox и имеет уравнение $y=0$.

3) Аналогично вектор $\vec{e}_2$ параллелен прямой (1) тогда и только тогда, когда $B=0$. В этом случае уравнение прямой можно записать в виде $x=a$. Если $B=0$, $C\neq 0$, то прямая параллельна оси OY, если же $B=C=0$, то прямая совпадает с осью Oy и имеет уравнение $x=0$.

3. Для построения прямой по ее уравнению достаточно знать два элемента, определяющие ее. Этими элементами могут быть: а) направляющий вектор и некоторая точка прямой; б) две точки, лежащие на прямой.

На рисунке 54 построена прямая d: $x+2y-1=0$. Рисунок 54, *а* соответствует случаю, когда в качестве определяющих элементов выбраны направляющий вектор $\vec{a}(-2, 1)$ и точка $M_0\left(0, \frac{1}{2}\right)$, а рисунок 54, *б* — случаю, когда определяющими элементами являются точки $A(1, 0)$ и $B\left(2, -\frac{1}{2}\right)$. На рисунке 55 построены прямая l_1, заданная уравнением $x=3$, и прямая l_2, заданная уравнением $y=-4$.

4. Зададим на плоскости аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и рассмотрим прямую d, заданную в этой системе уравнением (1). Эта прямая разделяет множество точек плоскости, не принадлежащих ей, на две полуплоскости с общей границей d. Найдем условия, определяющие эти полуплоскости.

Зафиксируем на прямой d некоторую точку $M_0(x_0, y_0)$ и рассмотрим векторы $\vec{a}(A, B)$ и $\vec{b}(-B, A)$ (рис. 56). Эти векторы образуют правый базис, так как $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}=A^2+B^2>0$. Вектор $\vec{b}$ параллелен прямой d, поэтому вектор $\vec{a}$ не параллелен этой прямой. Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от точки M_0: $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M_2}=\vec{b}$ и обозначим через λ полуплоскость с границей d, содержащую точку M_1 (рис. 56). Очевидно, точка $M(x, y)$ принадлежит полуплоскости λ тогда и только тогда, когда базисы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{b}$ имеют одну и ту же ориентацию, т. е. когда базис $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{b}$

имеет правую ориентацию. Но $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, \quad y-y_0)$, $\vec{b}(-B, \quad A)$, поэтому базис $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{b}$ имеет правую ориентацию в том и только в том случае, когда $\begin{vmatrix} x-x_0 & -B \\ y-y_0 & A \end{vmatrix} > 0$, или $Ax+By-(Ax_0+By_0)>0$. Так как $M_0 \in d$, то $Ax_0+By_0+C=0$, или $C=-(Ax_0+By_0)$. Поэтому предыдущее неравенство принимает вид:

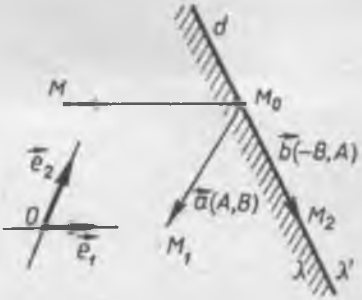


Рис. 56

$$Ax+By+C>0. \tag{3}$$

Это и есть неравенство, определяющее полуплоскость λ. Другая полуплоскость λ' с границей d определяется неравенством

$$Ax+By+C<0. \tag{4}$$

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Если в аффинной системе координат прямая d задана уравнением* (1), *то полуплоскости с границей d определяются неравенствами* (3) *и* (4).

Рассмотрим примеры применения этой теоремы.

Пример 1. Даны точки $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 2)$, $M_3(0,4)$, $M_4(5, 0)$ и прямая $x-2y+2=0$. Среди указанных точек выбрать те, которые с началом координат лежат по одну сторону от заданной прямой.

Решение. Пусть $p(x, y)=x-2y+2$. Найдем знак многочлена $p(x, y)$ в указанных точках. Имеем: $p(0, 0)=2>0$, $p(1, 2)=1-2\cdot2+2=-1<0$, $p(3, 2)=3-2\cdot2+2=1>0$, $p(0, 4)=$ $=0-2\cdot4+2=-6<0$, $p(5, 0)=5-2\cdot0+2=7>0$. Таким образом, искомыми являются точки M_2 и M_4.

Пример 2. Даны точки $M_1(-1, 1)$, $M_2(2, -3)$ и прямая $2x+3y-5=0$. Установить, пересекает ли заданная прямая отрезок M_1M_2.

Решение. Пусть $p(x, y)=2x+3y-5$. Находим: $p(-1, 1)=$ $=-2+3-5<0$, $p(2, -3)=2\cdot2-3\cdot3-5<0$. Следовательно, точки M_1, M_2 лежат по одну сторону от заданной прямой, и потому заданная прямая не пересекает отрезок M_1M_2.

§ 22. Взаимное расположение двух прямых

1. В аффинной системе координат линия, заданная уравнением первой степени, является прямой (§ 21, п. 1). Выясним, при каких условиях два уравнения

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{2}$$

определяют одну и ту же прямую. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы уравнения* (1) *и* (2) *в аффинной системе координат определяли одну и ту же прямую, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты в этих уравнениях были пропорциональны.*

□ Пусть уравнения (1) и (2) в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ определяют одну и ту же прямую d. По теореме 1 § 21 векторы $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ и $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ являются направляющими векторами этих прямых, поэтому они коллинеарны, т. е. их координаты пропорциональны: $-B_2=\lambda(-B_1)$, $A_2=\lambda A_1$, или $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$.

Пусть M_0 — точка прямой d. Тогда $A_1x_0+B_1y_0+C_1=0$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$. Отсюда, учитывая, что $A_2=\gamma A_1$, $B_2=\gamma B_1$, получаем: $C_2=\lambda(-A_1x_0-B_1y_0)=\lambda C_1$. Таким образом,

$$A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1,\ C_2=\lambda C_1. \tag{3}$$

Обратно, пусть в уравнениях (1) и (2) коэффициенты удовлетворяют равенствам (3). При этом $\lambda\neq 0$, так как A_2 и B_2 одновременно не равны нулю. Тогда уравнение (2) можно записать в виде

$$\lambda A_1x+\lambda B_1y+\lambda C_1=0. \tag{4}$$

Уравнениями (1) и (4) задается одна и та же прямая, так как если координаты (x, y) точки удовлетворяют уравнению (1), то они удовлетворяют и уравнению (4).

2. Выясним взаимное расположение двух прямых d_1 и d_2, заданных в некоторой аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1=0, \tag{5}$$

$$A_2x+B_2y+C_2=0. \tag{6}$$

По теореме 1 § 21 вектор $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$ параллелен прямой d_1, а вектор $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$ — прямой d_2. Возможны два случая.

1) Векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. В этом случае прямые d_1 и d_2 пересекаются. Обратно, если прямые d_1 и d_2 пересекаются, то векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ не коллинеарны. Условие неколлинеарности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ согласно теореме § 9 запишется так: $\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}\neq 0$, или $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0$.

Для определения координат точки пересечения этих прямых, очевидно, необходимо совместно решить систему (5) и (6).

2) Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ коллинеарны. В этом случае прямые параллельны, так как по предположению они не совпадают. Обратно, если прямые (5) и (6) параллельны, то векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Условие коллинеарности векторов $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ запишется так:

$$\begin{vmatrix} -B_1 & -B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}=0, \text{ или } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0.$$

Рис. 57

Таким образом, можно сформулировать следующий вывод о взаимном расположении прямых d_1 и d_2, заданных уравнениями (5) и (6).

1) *Прямые d_1 и d_2 пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y в уравнениях* (5) *и* (6) *не пропорциональны* (рис. 57, *а*).

2) *Прямые d_1 и d_2 совпадают тогда и только тогда, когда все коэффициенты в уравнениях* (5) *и* (6) *пропорциональны, т. е. существует такое число λ, что $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, $C_2=\lambda C_1$* (рис. 57, *б*).

3) *Прямые* (5) *и* (6) *параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при x и y пропорциональны, но свободные члены им не пропорциональны, т. е. существует такое число λ, что $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$, $C_2\neq\lambda C_1$* (рис. 57, *в*).

§ 23. Расстояние от точки до прямой

1. Ненулевой вектор $\bar{n}$ называется *перпендикулярным данной прямой*, если он перпендикулярен любому направляющему вектору прямой (рис. 58). Существует бесконечное множество векторов, перпендикулярных данной прямой. Докажем следующую лемму.

Лемма. *Если прямая d в прямоугольной системе координат задана уравнением*

$$Ax+By+C=0, \tag{1}$$

то вектор $\bar{n}(A, B)$ перпендикулярен прямой d.

□ По теореме 1 § 21 вектор $\bar{a}(-B, A)$ является направляющим вектором прямой d. Но векторы $\bar{n}$ и $\bar{a}$ взаимно пер-

Рис. 58

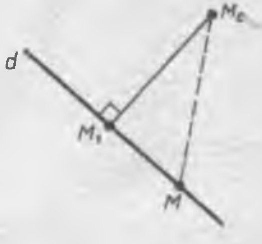


Рис. 59

пендикулярны, так как $\vec{a}\vec{n}=(-B)A+A\cdot B=0$. Отсюда и следует, что вектор $\vec{n}$ перпендикулярен прямой d. ■

2. Пусть M_0 — точка, не лежащая на прямой d. Как известно из школьного курса геометрии, длина перпендикуляра M_0M_1, проведенного из точки M_0 к прямой d, называется *расстоянием от точки M_0 до прямой d* (рис. 59). Если $M_0 \in d$, то будем считать, что расстояние от точки M_0 до прямой d равно нулю. Обозначим расстояние от произвольной точки M_0 плоскости до прямой d через $\rho(M_0, d)$. Очевидно, для произвольной точки M прямой d имеем: $\rho(M_0, d) \leqslant M_0M$ (рис. 59).

Поставим следующую задачу: в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ даны точка $M_0(x_0, y_0)$ и прямая d уравнением (1). Вычислить $\rho(M_0, d)$.

Пусть M_0M_1 — перпендикуляр, проведенный из точки M_0 к прямой d, тогда $\rho(M_0, d)=|\overrightarrow{M_1M_0}|$. По предыдущей лемме вектор $\vec{n}(A, B)$ перпендикулярен к прямой d, поэтому коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M_0}$. По определению скалярного произведения векторов имеем: $\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n} = |\overrightarrow{M_1M_0}|\,|\vec{n}|\cdot\cos(\widehat{\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n}}) = \rho(M_0, d)\,|\vec{n}|\,(\pm 1)$. Таким образом,

$$\rho(M_0, d)=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}. \tag{2}$$

Вычислим $\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}$. Пусть (x_1, y_1) — координаты точки M_1, тогда $\overrightarrow{M_1M_0}(x_0-x_1, y_0-y_1)$. Поэтому $\overrightarrow{M_1M_0}\cdot\vec{n}=(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)$. Так как $M_1 \in d$, то $Ax_1+By_1+C=0$. Таким образом, $\overrightarrow{M_1M_0}\,\vec{n}=Ax_0+By_0+C$. Учитывая, что $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$, из формулы (2) окончательно получаем:

$$\rho(M_0, d)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3}$$

П р и м е р. В прямоугольной системе координат дана прямая d уравнением $3x-4y-2=0$. Найти расстояние от начала координат до прямой d.

Р е ш е н и е. Начало координат O имеет координаты $(0, 0)$. По формуле (3) получим: $\rho(O, d)=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0-2|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|-2|}{5}=\frac{2}{5}$.

§ 24. Угол между двумя прямыми

1. Рассмотрим на плоскости две прямые d_1 и d_2, пересекающиеся в точке A. Лучи этих прямых, исходящие из точки A, образуют четыре угла: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ (рис. 60), причем $\angle 1=\angle 3$ и $\angle 2=\angle 4$, так как пары углов $\angle 1$, $\angle 3$ и $\angle 2$, $\angle 4$ вертикальные. Из школьного курса геометрии известно, что углом между

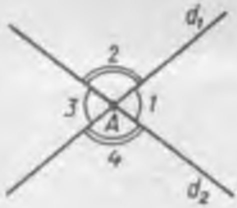


Рис. 60

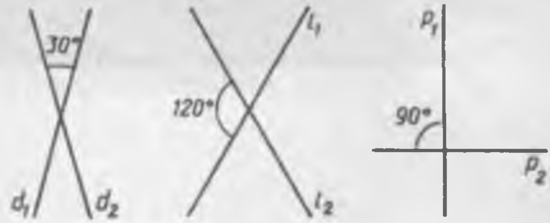


Рис. 61

прямыми d_1 и d_2 называется величина того из этих углов, который не больше других углов. Отсюда следует, что угол между пересекающимися прямыми не больше $\frac{\pi}{2}$. На рисунке 61 угол между прямыми d_1 и d_2 равен 30°, угол между прямыми l_1 и l_2 равен 60°, а между прямыми p_1 и p_2 равен 90°.

Введем теперь понятие направленного угла между пересекающимися прямыми на ориентированной плоскости. Рассмотрим пересекающиеся прямые d_1 и d_2 , заданные в определенном порядке: d_1 — первая прямая, а d_2 — вторая. Выберем направляющие векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ этих прямых так, чтобы $(\vec{a}_1, \vec{a}_2) \leqslant \frac{\pi}{2}$. *Направленным углом* между прямой d_1 и прямой d_2 называется направленный угол между векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, т. е. величина $(\widehat{\vec{a}_1, \vec{a}_2})$. Таким образом, направленный угол φ между любыми двумя пересекающимися прямыми заключен в пределах $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Заметим, что если прямые d_1 и d_2 не перпендикулярны, то $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, а если они перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ либо $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

2. Задача. Найти направленный угол φ между прямыми d_1 и d_2, если в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ даны координаты произвольных направляющих векторов $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ этих прямых.

Решение. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, т. е. $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$, то и прямые d_1 и d_2 перпендикулярны, поэтому $\varphi = \frac{\pi}{2}$ либо $\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим случай, когда прямые d_1 и d_2 не перпендикулярны, т. е. $a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$. Докажем, что в этом случае

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}). \qquad (1)$$

Действительно, если $(\vec{a}, \vec{b}) < \frac{\pi}{2}$, то по определению $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, поэтому имеет место равенство (1). Если $(\vec{a}, \vec{b}) > \frac{\pi}{2}$, то

$(\widehat{\vec{a}, (-\vec{b})}) < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\varphi = (\widehat{\vec{a}, (-\vec{b})})$. Пользуясь формулами (2) из § 14, получаем: $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} (\widehat{\vec{a}, (-\vec{b})}) = \operatorname{tg} ((\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + (\widehat{\vec{b}, (-\vec{b})})) = \operatorname{tg} ((\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + \pi) = \operatorname{tg} (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Принимая во внимание формулы (5) из § 14, из формулы (1) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}{a_1 b_1 + a_2 b_2}. \tag{2}$$

3. Применим формулу (2) для нахождения направленного угла между пересекающимися прямыми d_1 и d_2, заданными уравнениями в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$:

$$d_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$
$$d_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

По теореме 1 § 21 направляющие векторы этих прямых имеют координаты $\vec{a}_1(-B_1, A_1)$, $\vec{a}_2(-B_2, A_2)$. Возможны два случая.

1) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$. В этом случае прямые d_1 и d_2 перпендикулярны, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ либо $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. Но $\vec{a}_1 \vec{a}_2 = (-B_1)(-B_2) + A_1 A_2 = A_1 A_2 + B_1 B_2$, поэтому прямые d_1 и d_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{3}$$

2) $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 \neq 0$. Направленный угол φ между прямыми d_1 и d_2 вычисляется по формуле (2):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-B_1 A_2 + A_1 B_2}{A_1 A_2 + B_1 B_2},$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1 A_2 + B_1 B_2}. \tag{4}$$

Заметим, что столбцы определителя в числителе правой части этой формулы имеют простой геометрический смысл: первый столбец образуют координаты вектора, перпендикулярного первой прямой, а второй столбец — координаты вектора, перпендикулярного второй прямой.

Теперь рассмотрим случай, когда прямые d_1 и d_2 заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$d_1: \quad y = k_1 x + b_1,$$
$$d_2: \quad y = k_2 x + b_2.$$

Направляющие векторы этих прямых имеют координаты $\vec{a}_1(1, k_1)$ и $\vec{a}_2(1, k_2)$, поэтому условие перпендикулярности прямых запишется так:

$$k_1k_2+1=0. \tag{5}$$

Направленный угол $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ вычисляется по формуле (2):

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \tag{6}$$

Пример 1. В прямоугольной системе координат даны уравнения двух прямых: $x+2=0$, $3x-3y+5=0$. Найти направленный угол между этими прямыми.

Решение. Применим формулу (4) для нахождения угла между данными прямыми:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}}{1\cdot 3+0\cdot(-3)}=\frac{-3}{3}=-1,$$

и, следовательно, $\varphi=-\frac{\pi}{4}$.

Пример 2. В прямоугольной системе координат даны уравнения двух прямых: $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+5$, $y=\sqrt{3}x+7$. Найти направленный угол между этими прямыми.

Решение. Данные прямые имеют угловые коэффициенты $k_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $k_2=\sqrt{3}$. По формуле (6) находим: $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}}$, или $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Отсюда получаем: $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

§ 25. Основные задачи на прямую

1. Рассмотрим в общем виде несколько задач на прямую, которые часто приходится решать методом координат (система координат аффинная).

Задача 1. Написать уравнение прямой d, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и параллельной прямой, заданной уравнением $Ax+By+C=0$.

Решение. По теореме 1 § 21 вектор $\bar{a}(-B, A)$ является направляющим вектором данной прямой, поэтому он является также направляющим вектором прямой d. Таким образом, прямая d задана направляющим вектором $\bar{a}(-B, A)$ и точкой $M_0(x_0, y_0)$, следовательно, имеет уравнение $\begin{vmatrix} x-x_0 & -B \\ y-y_0 & A \end{vmatrix}=0$, или

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{1}$$

Задача 2. Найти координаты точки пересечения непараллельных прямых, заданных уравнениями:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Решение. Для нахождения координат точки пересечения данных прямых следует решить систему (2) относительно x и y. В данном случае $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, поэтому система (2) имеет единственное решение:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}. \tag{3}$$

Точка (x_0, y_0) является точкой пересечения данных прямых.

Задача 3. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и через точку пересечения двух прямых, заданных уравнениями (2).

Решение. Первый способ. По формулам (3) найдем координаты x_0, y_0 точки M_0 пересечения прямых (2), а затем запишем уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_0 (§ 20, п. 3).

Второй способ. Искомое уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых, заданных уравнениями (2), можно записать в виде

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{4}$$

где λ и μ — числовые коэффициенты, не равные одновременно нулю. Действительно, уравнением (4), по теореме 1 § 21, задается прямая (легко проверить, что коэффициенты при x и y одновременно не равны нулю), причем при произвольных значениях λ и μ, не равных одновременно нулю, эта прямая проходит через точку M_0 пересечения прямых (2).

Коэффициенты λ и μ подберем так, чтобы прямая (4) проходила через точку $M_1(x_1, y_1)$. Для этого λ и μ должны удовлетворять условию: $\lambda(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \mu(A_2x_2 + B_2y_2 + C_2) = 0$.

Пример. Написать уравнение прямой d, проходящей через точку $M_1(-2, 6)$ и через точку пересечения прямых, заданных уравнениями: $x - 3y + 1 = 0$ и $2x + 4y = 0$.

Решение. Задачу решим вторым способом. В данном случае уравнение (4) имеет вид: $\lambda(x - 3y + 1) + \mu(2x + 4y) = 0$. Прямая d проходит через точку $M_1(-2, 6)$, поэтому $\lambda(-2 - 18 + 1) + \mu(-4 + 24) = 0$, или $-19\lambda + 20\mu = 0$. Этому равенству удовлетворяют, например, числа $\lambda = 20$, $\mu = 19$. Таким образом, искомое уравнение имеет вид: $20(x - 3y + 1) + 19(2x + 4y) = 0$, или $29x + 8y + 10 = 0$.

2. Рассмотрим теперь задачи в прямоугольной системе координат.

Задача 4. Написать уравнение прямой d, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(A, B)$.

Решение. Произвольная точка $M(x, y)$ плоскости принадлежит прямой d тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Так как $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты

$(x-x_0,\ y-y_0)$, то условие перпендикулярности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ запишется так:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.$$

Это и есть уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{n}(A,\ B)$.

Задача 5. Написать уравнение прямой d, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ и перпендикулярной прямой l, заданной уравнением $Ax+By+C=0$.

Решение. Вектор $\vec{n}(A,\ B)$ перпендикулярен прямой l (§ 23, п. 1), поэтому является направляющим вектором прямой d. Таким образом, прямая d определяется точкой $M_0(x_0,\ y_0)$ и направляющим вектором $\vec{n}(A,\ B)$, т. е. имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & A \\ y-y_0 & B \end{vmatrix}, \text{ или } B(x-x_0)-A(y-y_0)=0.$$

Задача 6. На плоскости дана прямоугольная система координат Oxy. Написать уравнение прямой d, если известно, что она проходит через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ и угол между прямыми Ox и d равен φ.

Решение. Так как система координат прямоугольная, то угловой коэффициент прямой d равен $\operatorname{tg}\varphi$ (см. § 20, п. 4). Поэтому искомое уравнение прямой d имеет вид (3) § 20:

$$y-y_0=\operatorname{tg}\varphi\,(x-x_0).$$

§ 26. Приложение к решению задач школьного курса геометрии

Задача 1. Доказать, что прямая, проходящая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения прямых, содержащих боковые стороны.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция с большим основанием AD. Аффинную систему координат $A\vec{e}_1\vec{e}_2$ выберем так, как показано на рисунке 62. В этой системе координат вершины трапеции имеют координаты $A(0,\ 0)$, $B(0,\ 1)$, $C(a,\ 1)$, $D(1,\ 0)$. Так как $AD>BC$, то $0<a<1$.

Пусть M и N — середины оснований AD и BC трапеции. Эти точки имеют координаты $M\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $N\left(\frac{a}{2},\ 1\right)$.

Напишем уравнения прямых AB, CD и MN (см. § 20, п. 3):

$$(AB)\colon\ x=0;\ (CD)\colon\ x-(a-1)\,y-1=0;$$

$$(MN)\colon\ x+\frac{1-a}{2}y-\frac{1}{2}=0.$$

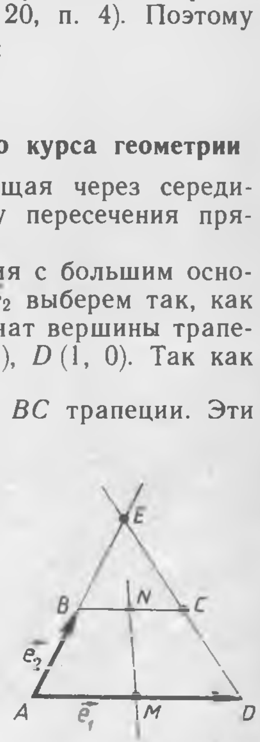


Рис. 62

Решив совместно первые два уравнения, находим координаты точки E пересечения прямых AB и CD (см. задачу 2 из § 25): $E\left(0,\ \frac{1}{1-a}\right)$. Координаты этой точки удовлетво-

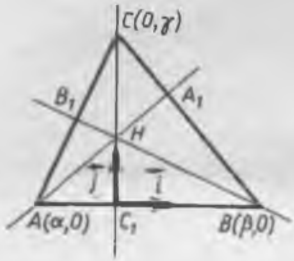


Рис. 63

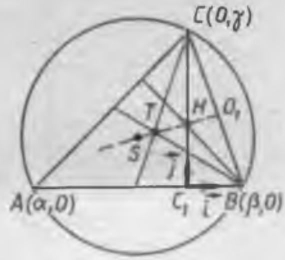


Рис. 64

ряют уравнению прямой MN, поэтому прямая MN проходит через точку пересечения прямых AB и CD.

Задача 2. Доказать, что три прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — прямые, содержащие высоты данного треугольника ABC. Прямоугольную систему координат $C_1\vec{i}\,\vec{j}$ выберем так, как показано на рисунке 63. В этой системе координат вершины треугольника имеют координаты $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $C(0, \gamma)$, где α, β и γ — некоторые числа, отличные от нуля. Запишем уравнения прямых AA_1, BB_1 и CC_1. Прямая AA_1 проходит через точку $A(\alpha, 0)$ и перпендикулярна вектору $\overrightarrow{BC}(-\beta, \gamma)$, поэтому имеет уравнение (§ 25, задача 4): $-\beta(x-\alpha)+\gamma y=0$, или $\beta x-\gamma y-\alpha\beta=0$. Аналогично запишем уравнение прямой BB_1: $\alpha x-\gamma y-\alpha\beta=0$. Прямая CC_1 является осью ординат, поэтому имеет уравнение $x=0$.

Решив совместно уравнения прямых AA_1 и CC_1, находим координаты точки H пересечения этих прямых: $H\left(0, \frac{-\alpha\beta}{\gamma}\right)$. Координаты точки H удовлетворяют уравнению прямой BB_1: $\alpha\cdot 0-\gamma\left(-\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)-\alpha\beta=0$, поэтому прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке (в точке H).

Задача 3. Доказать, что центр S описанной окружности, ортоцентр H и центр тяжести T треугольника лежат на одной прямой (прямая Эйлера).

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, S — центр описанной окружности, T — центр тяжести, H — ортоцентр треугольника. Прямоугольную систему координат выберем так же, как и в предыдущей задаче (рис. 64). В этой системе координат вершины треугольника имеют координаты $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, $C(0, \gamma)$. По задаче 2 точка H имеет координаты $H\left(0, -\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$.

Точка T является точкой пересечения медиан треугольника ABC, поэтому она имеет координаты $T\left(\frac{\alpha+\beta}{3}, \frac{\gamma}{3}\right)$ (§ 11, пример 2).

Для нахождения координат точки S заметим, что она является точкой пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника. Прямая, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная к нему, имеет уравнение $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Прямая, проходящая через середину отрезка AC и перпендикулярная к нему, имеет уравнение $\alpha\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)-\gamma\left(y-\frac{\gamma}{2}\right)=0$, или $\alpha x-\gamma y=$ $=\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\gamma^2}{2}$.

Решив совместно эти уравнения, находим координаты точки S:

$$S\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \frac{\gamma^2+\alpha\beta}{2\gamma}\right).$$

Теперь докажем, что точки H, S и T лежат на одной прямой. Для этого запишем уравнение прямой HT (см. § 20, п. 3):

$$(3\alpha\beta+\gamma^2)\,x-(\alpha+\beta)\,\gamma y-\alpha\beta\,(\alpha+\beta)=0.$$

Координаты точки S, как легко проверить, удовлетворяют этому уравнению, поэтому $S\in HG$, т. е. точки H, S и T лежат на одной прямой.

Задача 4. Вычислить расстояние между прямыми, содержащими противолежащие стороны ромба, если длины его диагоналей равны a и b.

Решение. Пусть $ABCD$ — данный ромб, а O — точка пересечения диагоналей. Примем точку O за начало прямоугольной системы координат, а оси направим вдоль диагоналей так, чтобы точки C и B лежали на положительных лучах координатных осей. В этой системе вершины ромба будут иметь координаты

$$A\left(-\frac{a}{2}, 0\right), \ B\left(0, \frac{b}{2}\right), \ C\left(\frac{a}{2}, 0\right), \ D\left(0, -\frac{b}{2}\right).$$

Задача сводится к нахождению расстояния от точки A до прямой BC. Уравнение прямой BC имеет вид: $2bx+2ay-ab=0$.

Расстояние от точки A до этой прямой равно:

$$\rho=\frac{\left|-2b\frac{a}{2}-ab\right|}{\sqrt{4b^2+4a^2}}=\frac{2ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Глава IV

ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 27. Эллипс

1. *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 равна длине данного отрезка PQ, причем $PQ > F_1F_2$.

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса, а расстояние между ними — *фокальным расстоянием.*

Если M — точка данного эллипса, то отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки M. Их длины также называются фокальными радиусами точки M. Пусть $F_1F_2 = 2c$, $PQ = 2a$. Так как $PQ > F_1F_2$, то $a > c$.

Из определения эллипса следует, что если точки F_1 и F_2 совпадают, то эллипс является окружностью радиуса a. В этом случае фокусы эллипса совпадают с центром окружности. Таким образом, *окружность есть частный случай эллипса.*

2. Найдем уравнение эллипса γ в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$, где O — середина отрезка[1] F_1F_2, а $\vec{i} \uparrow\uparrow \overrightarrow{OF_1}$ (рис. 65). В выбранной системе координат фокусы F_1 и F_2 эллипса имеют координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, поэтому фокальные радиусы произвольной точки $M(x, y)$ эллипса равны:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

По определению эллипса $F_1M + F_2M = 2a$, поэтому $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Запишем это уравнение в виде $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Возводя его в квадрат и приводя подобные члены, получим: $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$. Снова возводя в квадрат, после несложных преобразований получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2}$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{3}$$

---

[1] Если точки F_1 и F_2 совпадают, то серединой «отрезка F_1F_2» считают точку F_1.

Итак, доказано, что координаты любой точки эллипса γ удовлетворяют уравнению (2). Докажем обратное утверждение: каждая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), принадлежит эллипсу γ, т. е. $F_1M+F_2M=2a$. Подставив в формулы (1) значение y^2 из уравнения (2) и учитывая равенство (3), получим:

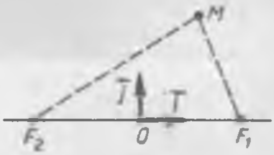


Рис. 65

$$F_1M=\sqrt{\left(a-\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a-\frac{c}{a}x\right|,\ F_2M=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}x\right)^2}=\left|a+\frac{c}{a}x\right|.$$

Из уравнения (2) следует, что $|x|\leqslant a$, и так как $0<\frac{c}{a}<1$, то $a-\frac{c}{a}x>0$, $a+\frac{c}{a}x>0$, поэтому

$$F_1M=a-\frac{c}{a}x,\ F_2M=a+\frac{c}{a}x. \tag{4}$$

Следовательно, $F_1M+F_2M=2a$, т. е. $M\in\gamma$. Итак, уравнение (2) является уравнением эллипса. Оно называется *каноническим уравнением* эллипса.

Замечание. Если фокусы F_1 и F_2 совпадают, то $c=0$, поэтому, как следует из (3), $a=b$. В этом случае уравнение (2) принимает вид: $x^2+y^2=a^2$. Этим уравнением задается окружность радиуса a с центром в начале координат. Это полностью согласуется с утверждением, что окружность есть частный случай эллипса.

3. Используем каноническое уравнение (2) для изучения геометрических свойств эллипса γ. Если $M(x, y)\in\gamma$, то x, y удовлетворяют уравнению (2), поэтому $x^2\leqslant a^2$, $y^2\leqslant b^2$, следовательно, $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$, т. е. все точки эллипса принадлежат прямоугольнику $M_1M_2M_3M_4$, изображенному на рисунке 66.

Если $M(x, y)\in\gamma$, то $M'(-x, -y)\in\gamma$, поэтому точка O является центром симметрии эллипса. Ниже будет доказано, что эллипс не имеет других центров симметрии.

Если $M(x, y)\in\gamma$, то $M'(-x, y)\in\gamma$ и $M'(x, -y)\in\gamma$. Отсюда следует, что прямые Ox и Oy являются осями симметрии эллипса.

Можно доказать, что эллипс, отличный от окружности, не имеет других осей симметрии. В этом случае прямая, проходящая через фокусы, называется *первой* или *фокальной* осью симметрии, а перпендикулярная к ней ось — *второй осью* симметрии. Каждая ось симметрии пересекается с эллипсом в двух точках: $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$, $B_1(0, b)$, $B_2(0, -b)$. Эти точки называются *вершинами* эллипса (см. рис. 66). Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 называются соответственно *большой* и *малой* осями эллипса. Центр O эллипса является общей серединой этих отрезков. Очевидно, $OA_1=OA_2=a$, $OB_1=OB_2=b$. Эти числа называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*[1].

---

[1] Заметим, что по традиции термины «ось» и «полуось» здесь употребляются не в обычном смысле слова: оси — отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а полуоси — числа a и b.

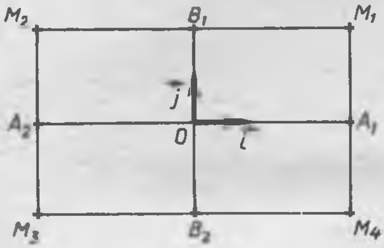


Рис. 66

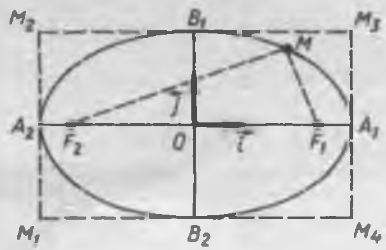


Рис. 67

Чтобы получить представление о виде эллипса, заданного уравнением (2), следует построить несколько точек эллипса. При этом достаточно рассмотреть точки, лежащие в первой четверти, так как эллипс симметричен относительно осей координат. Для точки $M(x, y)$ первой четверти ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) имеем: $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. При возрастании x от 0 до a ордината y точки M убывает от b до 0. Эллипс изображен на рисунке 67.

4. *Эксцентриситетом* эллипса называется число $\varepsilon = \frac{c}{a}$, где c — фокальное расстояние, а a — большая полуось. Отсюда следует, что $0 \leqslant r < 1$. Эксцентриситет равен нулю тогда и только тогда, когда $c = 0$, т. е. когда эллипс является окружностью.

Выясним, как зависит форма эллипса от эксцентриситета. Для этой цели выразим отношение $\frac{b}{a}$ через эксцентриситет:

$$c = \varepsilon a,\ b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - \varepsilon^2 a^2 = a^2(1 - \varepsilon^2).$$

Отсюда получаем:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}. \qquad (5)$$

Рассмотрим систему эллипсов, имеющих одну и ту же большую ось, но разные эксцентриситеты. Из соотношения (5) следует, что, чем больше ε, тем меньше b, и при ε, стремящемся к единице, число b стремится к нулю. Из этого соотношения также следует, что, чем меньше ε, тем больше b, и при ε, равном нулю, $b = a$, т. е. эллипс является окружностью. Таким образом, с увеличением эксцентриситета уменьшается «ширина» эллипса, и он делается более продолговатым. На рисунке 68 изображены эллипсы, эксцентриситеты которых удовлетворяют неравенствам:

$$0 = \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3 < \varepsilon_4 < \varepsilon_5.$$

5. Определение эллипса позволяет указать простой способ его вычерчивания. Отметим на бумаге две точки в качестве фокусов эллипса. Возьмем кусок нити длиной $2a$ и концы ее закрепим в фокусах эллипса. Если оттянуть нить кончиком карандаша,

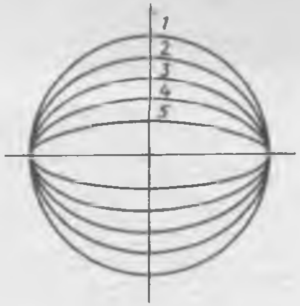


Рис. 68

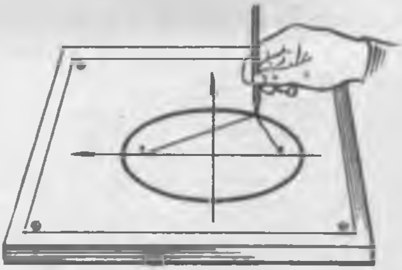


Рис. 69

как показано на рисунке 69, и передвигать карандаш, держа все время нить натянутой, то карандаш начертит эллипс с данными фокусами, длина большой оси которого равна $2a$.

Рассмотрим способ построения точек эллипса с помощью циркуля и линейки, если заданы его оси A_1A_2 и B_1B_2. На отрезках A_1A_2 и B_1B_2 как на диаметрах построим две концентрические окружности ω_1 и ω_2 (рис. 70, *а*). Проведем ряд радиусов большой окружности. Через их концы проведем прямые, параллельные малой оси, а через точки пересечения этих радиусов с меньшей окружностью — прямые, параллельные большой оси. Тогда точки пересечения прямых, соответствующих одному и тому же радиусу, будут точками эллипса с заданными осями.

Для обоснования этого способа построения выберем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке 70, *б*. Пусть h — произвольный луч с началом O, M_1 и M_2 — точки пересечения этого луча с окружностями ω_1 и ω_2, а точка $M(x, y)$ — одна из построенных точек. Обозначим через t угол между лучами OA_1 и h. Тогда точки M_1 и M_2 имеют координаты $M_1(a\cos t,\ a\sin t)$, $M_2(b\cos t,\ b\sin t)$. Так как точки M и M_1 имеют равные абсциссы, а точки M и M_2 — равные ординаты, то

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t. \qquad (6)$$

Из равенства (6) получаем: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, т. е. построенная точка M — точка эллипса γ с осями A_1A_2 и B_1B_2.

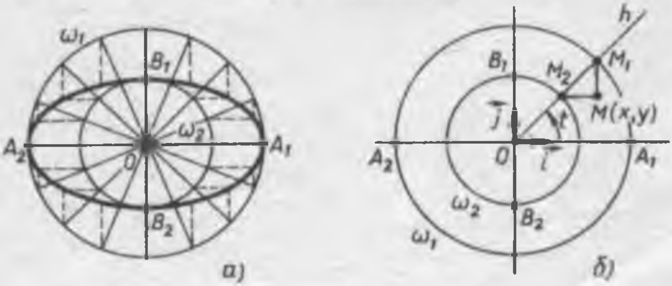


Рис. 70

6. Уравнения (6) называются *параметрическими уравнениями* эллипса γ, заданного каноническим уравнением (2). Этот термин объясняется тем, что для любого значения параметра t точка $M(x, y)$, координаты которой определяются уравнениями (6), принадлежит эллипсу γ, так как

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{a^2\cos^2 t}{a^2}+\frac{b^2\sin^2 t}{b^2}=1$$

Можно доказать обратное утверждение: если $M(x, y)\in\gamma$, то всегда найдется такой параметр t, что выполняется равенство (6).

§ 28. Гипербола

1. *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, абсолютное значение разности расстояний каждой из которых до данных точек F_1 и F_2 равно длине данного отрезка PQ, причем $PQ<F_1F_2$.

Точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы*, а расстояние между ними — *фокальным расстоянием*. Так как $F_1F_2>PQ>0$, то фокусы гиперболы — различные точки.

Если M — точка данной гиперболы, то отрезки F_1M и F_2M называются *фокальными радиусами* точки M. Их длины также называются фокальными радиусами точки M.

Пусть $F_1F_2=2c$, $PQ=2a$. Так как $PQ<F_1F_2$, то $a<c$.

2. Найдем уравнение гиперболы γ в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$, где O — середина отрезка F_1F_2, а $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF_1}$. В этой системе координат фокусы F_1 и F_2 гиперболы имеют координаты $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$, поэтому фокальные радиусы F_1M и F_2M точки M вычисляются по формулам:

$$F_1M=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\ F_2M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}. \qquad (1)$$

По определению гиперболы $|F_1M-F_2M|=2a$, поэтому

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a.$$

Запишем это уравнение в виде

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a.$$

Возводя его в квадрат и приводя подобные члены, получаем:

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-xc.$$

Снова возводя в квадрат, после преобразований получим:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

где

$$b^2=c^2-a^2. \qquad (3)$$

Итак, доказано, что координаты любой точки гиперболы γ удовлетворяют уравнению (2). Докажем обратное утверждение: каждая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), принадлежит гиперболе γ, т. е. $|F_1M - F_2M| = 2a$. Подставив в формулы (1) значение y^2 из уравнения (2) и учитывая равенство (3), получим:

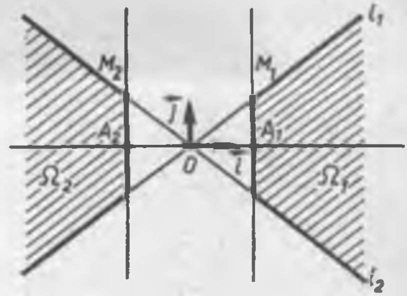


Рис. 71

$$F_1M = \left| \frac{c}{a} x - a \right|, \quad F_2M = \left| \frac{c}{a} x + a \right|.$$

Из уравнения (2) следует, что $|x| \geqslant a$, и, так как $\frac{c}{a} > 1$, то

$$\left. \begin{aligned} F_1M &= \frac{c}{a} x - a, \quad F_2M = \frac{c}{a} x + a, \text{ при } x > 0, \\ F_1M &= -\frac{c}{a} x + a, \quad F_2M = -\frac{c}{a} x - a, \text{ при } x < 0. \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

Следовательно, $|F_1M - F_2M| = 2a$, т. е. $M \in \gamma$. Итак, уравнение (2) является уравнением гиперболы γ. Оно называется *каноническим уравнением* гиперболы.

3. Используем каноническое уравнение (2) гиперболы γ для изучения ее геометрических свойств. Если $M(x, y) \in \gamma$, то (x, y) удовлетворяют уравнению (2), поэтому $x^2 \geqslant a^2$. Следовательно, либо $x \geqslant a$, либо $x \leqslant -a$. Значит, внутри полосы, образуемой прямыми A_1M_1 и A_2M_2, изображенными на рисунке 71, нет точек гиперболы ($OA_1 = OA_2 = a$).

Так же как и в случае эллипса, можно доказать, что точка O является центром симметрии гиперболы, а прямые Ox и Oy — осями симметрии. Центр симметрии называется *центром* гиперболы, ось симметрии, проходящая через фокусы,— *первой* или *фокальной осью* симметрии, а перпендикулярная к ней ось, проходящая через центр, — *второй* или *мнимой осью* симметрии. Фокальная ось симметрии пересекает гиперболу в двух точках $A_1(a, 0)$, $A_2(-a, 0)$. Вторая ось симметрии не пересекает гиперболу. Точки A_1 и A_2 называются *вершинами* гиперболы, а отрезок A_1A_2 — действительной осью. Числа a и b называются соответственно *действительной и мнимой полуосями* гиперболы.

4. Рассмотрим взаимное расположение прямой l, проходящей через центр O гиперболы γ, заданной уравнением (2). Зададим прямую l в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ уравнением с угловым коэффициентом: $y = kx$. Подставив значение y в уравнение (2), после элементарных преобразований получим:

$$x^2 (b^2 - k^2a^2) = a^2b^2. \tag{5}$$

Корни этого уравнения являются абсциссами точек пересечения прямой l с гиперболой γ.

а) Если $b^2-k^2a^2>0$, то прямая l имеет две общие точки с гиперболой:

$$M_1\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}},\ \frac{kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right),\ M_2\left(\frac{-ab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}},\ \frac{-kab}{\sqrt{b^2-k^2a^2}}\right).$$

б) Если $b^2-k^2a^2<0$, то уравнение (5) имеет мнимые решения, поэтому прямая l не пересекает гиперболу.

в) Если $b^2-k^2a^2=0$, то уравнение (5) не имеет решений, т. е. прямая l также не имеет общих точек с гиперболой.

Итак, пришли к выводу, что прямая $y=kx$ пересекает гиперболу (2) в том и только в том случае, когда $b^2-k^2a^2>0$, т. е. когда $-\frac{b}{a}<k<\frac{b}{a}$. Так как $k=\operatorname{tg}\alpha$, а α — угол, образованный прямой l с осью Ox, то $-\frac{b}{a}<\operatorname{tg}\alpha<\frac{b}{a}$. Следовательно, все точки гиперболы лежат во внутренних областях тех вертикальных углов, которые на рисунке 71 заштрихованы. Таким образом, гипербола имеет две ветви, одна из которых расположена в области Ω_1 (правая ветвь), а другая — в области Ω_2 (левая ветвь). Ясно, что эти ветви симметричны относительно центра симметрии и осей симметрии гиперболы.

5. Рассмотрим тот случай взаимного расположения прямой l, проходящей через центр O, и гиперболы γ, когда в уравнении (5) $b^2-k^2a^2=0$. Здесь уравнение (5) не имеет решений. Этому случаю соответствуют две прямые l_1 и l_2 с угловыми коэффициентами: $k_1=\frac{b}{a}$, $k_2=-\frac{b}{a}$. Эти прямые называются *асимптотами гиперболы* (см. рис. 71).

Выясним, как расположены ветви гиперболы относительно ее асимптот. Пусть $M(x, y_1)$ — произвольная точка гиперболы, лежащая в первой четверти ($x>0$, $y_1\geqslant 0$), а $N(x, y_2)$ — точка асимптоты l_1, заданной уравнением $y=\frac{b}{a}x$ (рис. 72). Найдем длину отрезка MN: $MN=|y_2-y_1|=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})$.

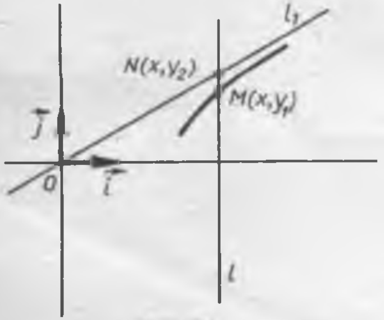


Рис. 72

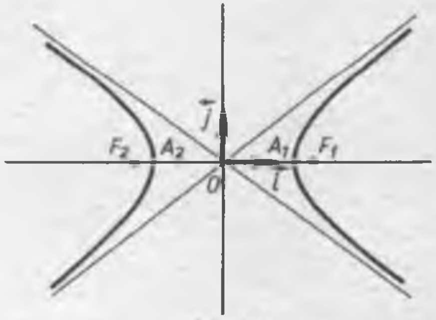


Рис. 73

Отсюда, умножив числитель и знаменатель на $x+\sqrt{x^2+a^2}$, получаем:

$$MN=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

При неограниченном возрастании абсциссы x точки M гиперболы длина отрезка MN, монотонно убывая, стремится к нулю, т. е. точка M неограниченно приближается к асимптоте. Это свойство дает наглядное представление о расположении гиперболы относительно асимптоты. На рисунке 73 изображена гипербола с асимптотами.

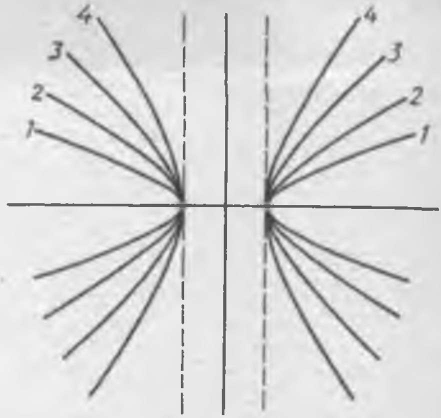


Рис. 74

6. *Эксцентриситетом* гиперболы называется число $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Так как $c>a$, то эксцентриситет гиперболы больше единицы.

Выясним, как зависит форма гиперболы от ее эксцентриситета. Из формулы (3) получаем: $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$ или $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{\varepsilon^2-1}$, где α — угол между осью абсцисс и асимптотой. Отсюда следует, что, чем больше эксцентриситет, тем больше α, т. е. тем больше гипербола «вытянута» вдоль своей мнимой оси. На рисунке 74 изображены гиперболы, эксцентриситеты которых удовлетворяют неравенствам: $\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_3<\varepsilon_4$.

7. Гипербола, полуоси которой равны $(a=b)$, называется *равносторонней*. Ее каноническое уравнение имеет вид: $x^2-y^2=a^2$ (рис. 75). Так как $b=a$, то $\varepsilon^2=2$, поэтому эксцентриситет любой равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$. В этом случае асимптоты гиперболы имеют уравнения: $y=x$, $y=-x$. Они содержат биссектрисы координатных углов и поэтому взаимно перпендикулярны (рис. 75). Если их принять за оси прямоугольной системы координат, то в этой системе равносторонняя гипербола имеет уравнение $xy=m$ или $y=\frac{m}{x}$, где $m=\frac{a^2}{2}$. Таким образом, *равносторонняя гипербола является графиком функции обратной пропорциональности.*

8. Рассмотрим способ построения точек гиперболы, если она задана фокусами F_1 и F_2 и действительной осью A_1A_2 (рис. 76). Начертим окружность произвольного радиуса с центром F_1, а затем радиусом, большим на A_1A_2; начертим другую окружность с центром в точке F_2. Точки пересечения этих окружностей, очевидно, лежат на гиперболе. Выполнив аналогичное построение несколь-

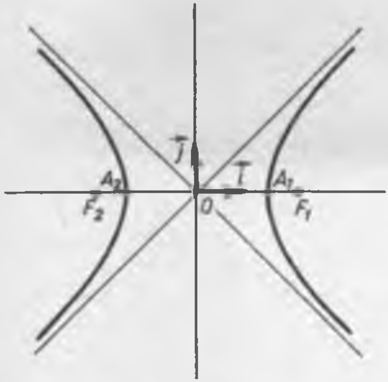


Рис. 75

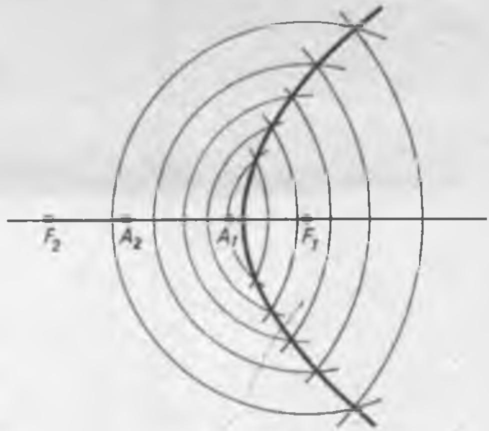


Рис. 76

ко раз (беря разные радиусы), получим ряд точек, принадлежащих гиперболе.

§ 29. Парабола

1. *Параболой* называется множество всех точек плоскости, расстояние каждой из которых до данной точки F равно расстоянию до данной прямой d, не проходящей через точку F.

Точка F называется *фокусом* параболы, а прямая d — *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через p. Очевидно, $p = FD$, где D — проекция точки F на прямую d (рис. 77).

Найдем уравнение параболы γ в прямоугольной системе координат $O_{\vec{i}\,\vec{j}}$, где O — середина отрезка DF, а $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OF}$. В этой системе координат фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$, а директриса d — уравнение $x + \frac{p}{2} = 0$. Пусть $M(x,\ y)$ — произвольная точка плоскости. Вычислим MF и $\rho(M,\ d)$:

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},\ \rho(M,\ d) = \left|\ x + \frac{p}{2}\right|. \qquad (1)$$

Если $M \in \gamma$, то $MF = \rho(M,\ d)$, поэтому $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|\ x + \frac{p}{2}\right|$. Возведя обе части в квадрат, получаем:

$$y^2 = 2px. \qquad (2)$$

Итак, доказано, что координаты любой точки параболы γ удовлетворяют уравнению (2). Докажем обратное утверждение: каждая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (2), принадлежит параболе γ, т. е. $FM = \rho(M,\ d)$.

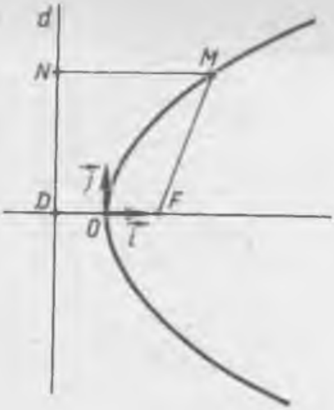


Рис. 77

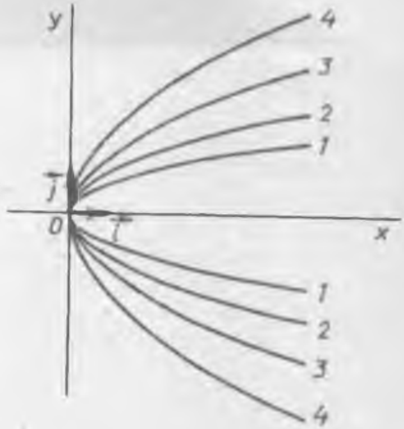


Рис. 78

Подставив в первую из формул (1) значение y^2 из (2), получим: $MF=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$. Следовательно, $FM=\rho(M, d)$, т. е. $M\in\gamma$.

Уравнение (2) называется *каноническим уравнением* параболы.

2. Используем каноническое уравнение (2) параболы γ для изучения ее геометрических свойств. Из уравнения (2) следует, что все точки параболы γ принадлежат полуплоскости $x\geqslant 0$. Если $M(x, y)\in\gamma$, то $M'(x, -y)\in\gamma$, т. е. прямая OF является осью симметрии параболы. Точка O пересечения этой оси с параболой называется *вершиной* параболы.

Оси выбранной системы координат имеют только одну общую точку с параболой — ее вершину. Докажем, что любая другая прямая l, проходящая через точку O, пересекает параболу в двух точках. Действительно, зададим прямую l уравнением с угловым коэффициентом $y=kx$. Подставив значение y в уравнение (2), получаем: $k^2x^2=2px$, или $(k^2x-2p)x=0$. При $k\neq 0$ прямая l имеет две общие точки с параболой: $O(0, 0)$ и $M\left(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k}\right)$.

Если точка $M(x, y)$ перемещается на параболе так, что абсцисса x неограниченно возрастает, то и $|y|$ неограниченно возрастает. Парабола изображена на рисунке 77. Нетрудно доказать, что, чем больше фокальный параметр параболы, тем больше парабола «вытянута» вдоль оси Oy. На рисунке 78 изображены параболы, фокальные параметры которых удовлетворяют неравенствам: $p_1<p_2<p_3<p_4$.

3. Определение параболы позволяет указать следующий способ вычерчивания ее части с помощью линейки, угольника и нити. Пусть F — фокус, а d — директриса параболы (рис. 79). Возьмем угольник и нить, длина которой равна большому катету угольника. Один конец нити закрепим в фокусе, а другой конец — в

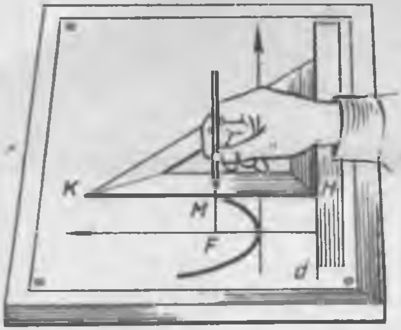


Рис. 79

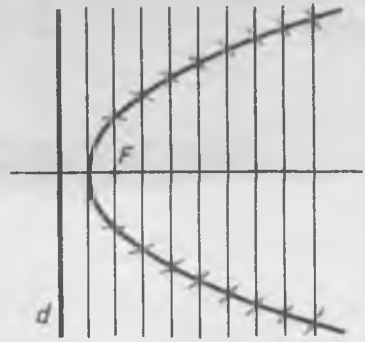


Рис. 80

вершине острого угла K, противолежащего меньшему катету. Закрепим вдоль директрисы линейку и к ней приставим меньшим катетом угольник. Если перемещать угольник вдоль линейки, удерживая нить натянутой карандашом, как указано на рисунке 79, то острие карандаша будет описывать часть параболы. В самом деле, $KH = KM + MH$ и $KH = KM + MF$, поэтому $MH = MF$ (см. рис. 79).

Рассмотрим теперь способ построения точек параболы с помощью циркуля и линейки. Пусть F — фокус, а d — директриса параболы. Проведем через точку F прямую, перпендикулярную директрисе. Построим ряд прямых, параллельных директрисе. Найдем две точки пересечения каждой из прямых с окружностью, центр которой находится в фокусе параболы, а радиус равен расстоянию от директрисы до соответствующей прямой (рис. 80). Полученные точки, очевидно, будут принадлежать параболе.

§ 30. Уравнения эллипса, гиперболы и параболы в полярных координатах

1. *Директрисами* эллипса (гиперболы) называются две прямые, параллельные второй оси и отстоящие от нее на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$, где a — большая (действительная) полуось, а ε — эксцентриситет. Окружность не имеет директрис, так как для нее $\varepsilon = 0$.

Директрисы эллипса (гиперболы) будем обозначать через d_1 и d_2, причем индексы всегда выбираются так, чтобы первый фокус $F_1(c, 0)$ и соответствующая ему первая директриса d_1 лежали по одну сторону от второй оси координат, а второй фокус $F_2(-c, 0)$ и соответствующая ему вторая директриса d_2 — по другую сторону (рис. 81).

Докажем, что директрисы эллипса не имеют общих точек с большой осью A_1A_2 эллипса, поэтому они не пересекают эллипс (рис. 81, *а*). Действительно, пусть D_1 и D_2 — точки пересечения директрис d_1 и d_2 с фокальной осью эллипса. Тогда $OA_1 = OA_2 = a$,

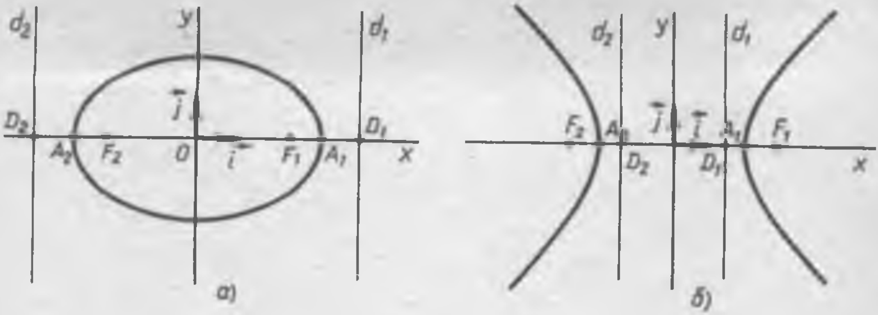


Рис. 81

$OD_1 = OD_2 = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$. Так как $c < a$, то $OA_1 < OD_1$ и $OA_2 < OD_2$. Отсюда следует, что точки A_1 и A_2 принадлежат отрезку D_1D_2, поэтому директрисы d_1 и d_2 не имеют общих точек с отрезком A_1A_2.

Аналогично можно доказать, что директрисы гиперболы пересекают вещественную ось гиперболы, поэтому они расположены между двумя ветвями гиперболы и не пересекают эти ветви (рис. 81, *б*).

2. Теорема. *Эллипс (гипербола) есть множество γ' всех точек плоскости, таких, что отношение расстояния от каждой точки до фокуса к расстоянию от нее до соответствующей директрисы равно эксцентриситету.*

Замечание. Здесь сформулированы две теоремы: одна — для эллипса, а другая — для гиперболы. Теорема для гиперболы доказывается точно так же, как и для эллипса, поэтому докажем здесь только теорему для эллипса. Вторую теорему предоставляем читателю доказать самостоятельно.

□ Пусть γ — данный эллипс, F_1 — первый фокус, а d_1 — первая директриса. В канонической системе координат точка F_1 имеет координаты $(c, 0)$, прямая d_1 имеет уравнение $x - \frac{a}{\varepsilon} = 0$, поэтому если $M(x, y)$ — точка плоскости, то $\rho(M, d_1) = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|$, $MF_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Если $M \in \gamma'$, то $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right|$. Возводя это уравнение в квадрат, получим: $(x-c)^2 + y^2 = (\varepsilon x - a)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Отсюда следует, что $M \in \gamma$.

Обратно, пусть $M(x, y) \in \gamma$. По формуле (4) из § 27 $MF_1 = a - \varepsilon x$. С другой стороны, $\rho(M, d_1) = \left| x - \frac{a}{\varepsilon} \right| = \frac{a - \varepsilon x}{\varepsilon}$, поэтому $MF_1 = \varepsilon \rho(M, d_1)$, т. е. $M \in \gamma'$. Итак, множество γ' совпадает с эллипсом γ. ■

Эта теорема выясняет геометрический смысл эксцентриситета эллипса или гиперболы: эксцентриситет эллипса или гиперболы

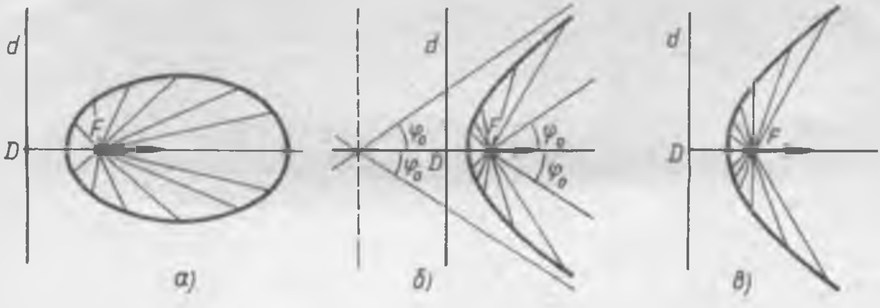


Рис. 82

есть то постоянное число, которому равно отношение расстояний от каждой точки линии до фокуса к расстоянию от нее до соответствующей директрисы. Из определения параболы видно, что ее точки обладают аналогичным свойством, т. е. отношение расстояний от каждой точки параболы до фокуса к расстоянию от нее до директрисы постоянно и равно единице. Поэтому *число «единица» называется эксцентриситетом любой параболы.*

3. Обозначим через γ линию, которая является либо эллипсом, отличным от окружности, либо одной ветвью гиперболы, либо параболой. Пусть F и d — фокус и директриса этой линии, причем, если γ — эллипс, то F — один из его фокусов, а d — соответствующая директриса (рис. 82, *а*), а если γ — одна ветвь гиперболы, то F и d — фокус и директриса, которые расположены по ту же сторону от второй оси симметрии гиперболы, что и ветвь γ (рис. 82, *б*). Очевидно, линия γ всеми своими точками принадлежит полуплоскости λ с границей d, которой принадлежит точка F. Учитывая предыдущую теорему и определение параболы, приходим к выводу: ***линия γ есть множество всех точек M полуплоскости λ, таких, что** $FM=\varepsilon\rho(M, d)$, где ε — эксцентриситет линии γ.*

Выведем уравнение линии γ в полярной системе координат $F\vec{i}$, полюсом которой является фокус F и $\vec{i}=\frac{\overrightarrow{DF}}{DF}$, где D — проекция точки F на прямую d (рис. 83). Сначала вычислим $\rho(M, d)$, где $M(r, \varphi)$ — произвольная точка плоскости. Если M_1 — проекция точки M на прямую FD, то $\rho(M, d)=DM_1=DM\cdot\cos\widehat{MDF}=\overrightarrow{DM}\cdot\vec{i}$ (см. рис. 83). Но $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FM}$, поэтому $\rho(M, d)=$ $=(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FM})\,\vec{i}=\overrightarrow{DF}\vec{i}+\overrightarrow{FM}\vec{i}=DF+r\cos\varphi$.

Точка $M(r, \varphi)$ принадлежит линии γ тогда и только тогда, когда $FM=\varepsilon\rho(M, d)$ или $r=\varepsilon(DF+r\cos\varphi)$. Если положить $p=\varepsilon DF$, то отсюда получаем:

$$r(1-\varepsilon\cos\varphi)=p. \qquad (1)$$

Это и есть уравнение линии γ (т. е. эллипса, одной ветви гиперболы или параболы) в полярных координатах. Из уравнения

(1) при $\varphi=90°$ или $\varphi=-90°$ получаем: $r=p$. Таким образом, p — полярный радиус точек N_1 и N_2, в которых пересекается линия γ с прямой l, проходящей через F и параллельной директрисе d (см. рис. 83). Число p называется *фокальным параметром*[1].

Выясним, при каких значениях φ уравнение (1) определяет все точки линии γ. При $\varepsilon<1$ линия γ представляет собой эллипс. В этом случае при любом φ имеем: $1-\varepsilon\cos\varphi\neq 0$, поэтому уравнение (1) можно записать в виде

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}. \qquad (2)$$

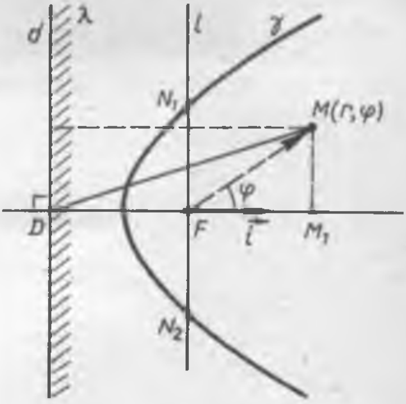


Рис. 83

Если φ пробегает значения $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, то уравнение (2) определяет все точки эллипса (рис. 82, *а*).

При $\varepsilon>1$ линия γ — одна ветвь гиперболы. Уравнение (1) имеет смысл только для точек, полярные углы которых удовлетворяют неравенству $1-\varepsilon\cos\varphi>0$ или $\cos\varphi<\frac{1}{\varepsilon}$.

Пусть φ_0 — угол, для которого $\cos\varphi_0=\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда предыдущее неравенство запишется в виде $\cos\varphi_0>\cos\varphi$. Если φ пробегает значения $\varphi_0<\varphi<2\pi-\varphi_0$, то уравнение (2) определяет все точки линии γ, т. е. одной ветви гиперболы. Из равенства $\cos\varphi_0=\frac{1}{\varepsilon}$ следует, что $\operatorname{tg}\varphi_0=\sqrt{\varepsilon^2-1}=\frac{b}{a}$. Поэтому φ_0 — угол, который образует асимптота $y=\frac{b}{a}x$ гиперболы с действительной осью (рис. 82, *б*).

Отметим, что если под φ_0 и r понимать обобщенные координаты точки, то при $-\varphi_0<\varphi<\varphi_0$ уравнение (2) определяет другую ветвь гиперболы. Доказательство этого утверждения мы опускаем.

При $\varepsilon=1$ линия γ представляет собой параболу и $1-\varepsilon\cos\varphi\neq 0$, если $\varphi\neq 0$. Но, как известно, на параболе нет точки, для которой $\varphi=0$.

Таким образом, если φ пробегает значения $-\pi<\varphi\leqslant\pi$, то уравнение (1) можно записать в виде $r=\frac{p}{1-\cos\varphi}$. Оно определяет все точки параболы (рис. 82, *в*).

[1] Этот термин полностью согласуется с понятием фокального параметра параболы (§ 29, п. 1), так как если γ — парабола, то $\varepsilon=1$, поэтому $p=DF$.

§ 31. Мнимые точки плоскости. Общее уравнение линии второго порядка

1. Если на плоскости задана аффинная система координат, то любая точка M плоскости имеет координаты (x, y), которые являются действительными числами. Обратно, любые два действительных числа, взятые в определенном порядке, являются координатами некоторой точки плоскости. Таким образом, при заданной системе координат устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и элементами из множества R^2.

Для общности дальнейших рассуждений расширим понятие точки, т. е. дополним плоскость так называемыми мнимыми точками. Введем следующее соглашение: при выбранной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ точкой назовем любую пару чисел (x, y), взятых в определенном порядке, где $(x, y) \in C^2$, C — множество всех комплексных чисел. Точка называется *действительной* (вещественной), если x и y —действительные числа, и *мнимой*, если хотя бы одно из них не является действительным числом. Например, среди точек $A\ (2,\ -5)$, $B\ (\sqrt{2}.\ i)$, $C\ (0{,}3+\sqrt{2}i)$, $D\ (-\sqrt{5},\ 4)$ мнимыми являются точки B и C.

Если точка M в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ имеет координаты (x, y), то будем считать, что та же точка в системе $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ имеет координаты (x', y'), где x', y' определяются из формул (3) § 15. Так как в этих формулах c_{11}, c_{12}, x_0, c_{21}, c_{22}, y_0 — действительные числа, то *понятие мнимой точки не зависит от выбора системы координат*. Отметим, что действительным точкам соответствуют обычные точки плоскости, поэтому их называют просто точками. Множество всех действительных и мнимых точек называется *комплексной плоскостью.*

Две точки $M_1\,(x_1,\ y_1)$ и $M_2\,(x_2,\ y_2)$ называются *комплексно-сопряженными,* если их соответствующие координаты являются комплексно-сопряженными числами. Например, $A_1\,(2+i,\ 3-2i)$ и $A_2\,(2-i,\ 3+2i)$ или $B_1\,(0,\ i)$ и $B_2\,(0,\ -i)$ — пары комплексно-сопряженных точек. Можно доказать, что понятие комплексно-сопряженности точек не зависит от выбора системы координат.

Пару точек A и B на комплексной плоскости называют *отрезком* с концами A и B. Серединой отрезка с концами $M_1\,(x_1,\ y_1)$ и $M_2\,(x_2,\ y_2)$ называется точка $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Это понятие также не зависит от выбора системы координат. Интересно отметить, что *середина отрезка с концами в комплексно-сопряженных точках есть действительная точка.* Действительно, пусть $M_1\,(a+bi,\ c+di)$ и $M_2\,(a-bi,\ c-di)$ — комплексно-сопряженные точки. Тогда середина отрезка M_1M_2 есть точка $M\,(a,\ c)$, которая является действительной, так как a и c — действительные числа.

2. Из определения алгебраической линии и теоремы § 18 следует, что в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ общее уравнение линии второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \qquad (1)$$

Коэффициенты этого уравнения — любые действительные числа, причем a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны одновременно нулю.

Коэффициенты a_{12}, a_{10} и a_{20} иногда будем обозначать соответственно через a_{21}, a_{01}, a_{02}.

Два уравнения вида (1) в одной и той же системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ определяют одну и ту же линию тогда и только тогда, когда одно из них получается из другого умножением на действительное число, не равное нулю. Следовательно, линия второго порядка вполне определяется, если задать аффинную систему координат и коэффициенты уравнения (1) с точностью до числового множителя.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующие сокращенные обозначения:

$$F(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00},$$
$$F_1(x, y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{10},$$
$$F_2(x, y)=a_{21}x+a_{22}y+a_{20},$$
$$F_0(x, y)=a_{01}x+a_{02}y+a_{00}.$$

Применяя эти обозначения, уравнение (1) сокращенно можно записать так: $F(x, y)=0$, или

$$F_1(x, y)\,x+F_2(x, y)\,y+F_0(x, y)=0. \qquad (2)$$

Мы уже встречались с примерами линий второго порядка: эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, гипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, парабола $y^2=2px$. Рассмотрим другие примеры линий второго порядка. Линия γ, заданная уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, является линией второго порядка. Это уравнение можно записать в виде $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$. В этом случае говорят, что линия γ распадается на пару пересекающихся прямых: $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. Она изображена на рисунке 84. Аналогично линия $x^2-a^2=0$, где $a\neq 0$, распадается на пару параллельных прямых: $x-a=0$ и $x+a=0$ (рис. 85).

Рассмотренные примеры являются примерами линий второго порядка, которые имеют бесконечное множество действительных и мнимых точек. Однако существуют линии второго порядка, которые не обладают этим свойством. Например, линия, заданная

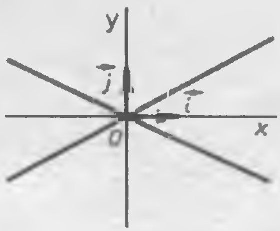


Рис. 84

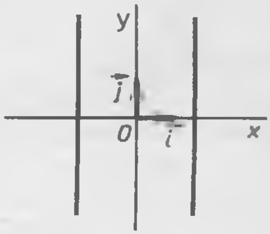


Рис. 85

уравнением $x^2+y^2=0$, имеет только одну действительную точку (0, 0) и бесконечное множество мнимых точек, а линия $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ не имеет ни одной действительной точки, т. е. все ее точки мнимые.

§ 32. Пересечение линии второго порядка с прямой. Асимптотические направления

1. Пусть линия второго порядка γ в аффинной системе координат задана общим уравнением

$$F(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0 \tag{1}$$

и прямая l параметрическими уравнениями:

$$x=x_0+p_1t,\ y=y_0+p_2t. \tag{2}$$

Найдем точки пересечения прямой l с линией γ. Подставив значения x и y из уравнений (2) в уравнение (1), после преобразований получим:

$$Pt^2+2Qt+R=0, \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} P=a_{11}p_1^2+2a_{12}p_1p_2+a_{22}p_2^2, \\ Q=F_1(x_0,\ y_0)\,p_1+F_2(x_0,\ y_0)\,p_2, \\ R=F(x_0,\ y_0). \end{gathered} \tag{4}$$

Найдя из уравнения (3) параметры t_1, t_2 точек пересечений и подставив их в уравнения (2), получаем координаты точек пересечений. Отметим, что каждому корню уравнения (3) соответствует точка пересечения, причем различным корням соответствуют различные точки: вещественным корням — действительные точки, а мнимым корням — мнимые точки.

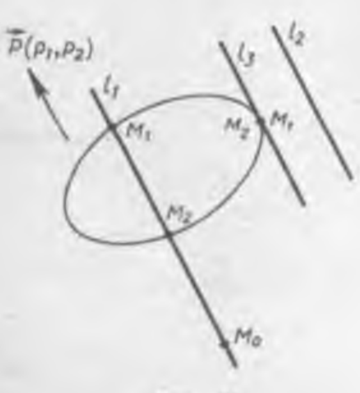


Рис. 86

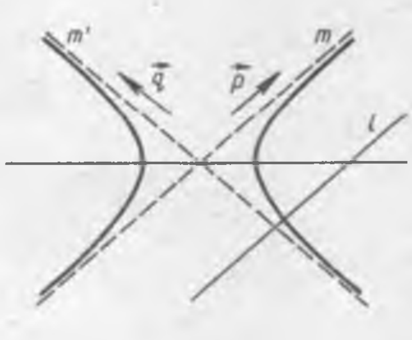


Рис. 87

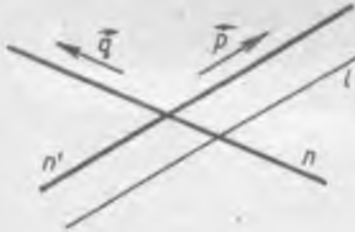


Рис. 88

Рис. 89

Исследуем уравнение (3). Возможны два случая.

1) $P \neq 0$. Уравнение (3) имеет два корня: $t_1 = \frac{-Q+\sqrt{\delta}}{P}$, $t_2 = \frac{-Q-\sqrt{\delta}}{P}$, где $\delta = Q^2 - PR$ — дискриминант уравнения (3). Прямая l_1 пересекает линию γ в точках M_1 и M_2 — действительных различных, если $\delta > 0$, комплексно-сопряженных, если $\delta < 0$, и совпадающих, если $\delta = 0$. На рисунке 86 прямая l_1 соответствует случаю $\delta > 0$, прямая l_2 — случаю $\delta < 0$, а прямая l_3 — случаю $\delta = 0$.

2) $P = 0$. Уравнение (3) принимает вид: $Qt + R = 0$. Если $Q \neq 0$, то прямая l пересекает линию γ в одной точке (прямая l на рисунке 87 или на рисунке 88). Если $Q = 0$, $R \neq 0$, то прямая l не имеет с линией γ ни одной общей точки — ни вещественной, ни мнимой (прямые m и m' на рисунке 87 или прямые m_1, m_2, m_3, ... на рисунке 89). Если, наконец, $Q = R = 0$, то любое t является решением уравнения (3), поэтому $l \subset \gamma$ (прямые n и n' на рисунках 88 и 89).

Таким образом, возможны *шесть случаев взаимного расположения прямой l и линии второго порядка γ:*

	$\delta > 0$ — две действительные точки пересечения,
$P \neq 0$,	$\delta < 0$ — мнимые комплексно-сопряженные точки пересечения,
	$\delta = 0$ — совпадающие точки пересечения.
	$Q \neq 0$ — одна точка пересечения,
$P = 0$	$Q = 0$, $R \neq 0$ — нет точек пересечения,
	$Q = 0$, $R = 0$ — прямая содержится в линии.

2. Коэффициент P в уравнении (3) зависит только от направления[1] прямой l с направляющим вектором $\vec{p}$ и не зависит от координат (x_0, y_0) точки M_0. Следовательно, если $P \neq 0$, то все прямые, имеющие направление вектора $\vec{p}\,(p_1, p_2)$, пересекают линию γ в двух точках (вещественных различных, совпадающих или мнимых комплексно-сопряженных). Если $P = 0$, то либо $l \subset \gamma$, либо прямая l пересекает линию γ не более чем в одной точке.

[1] Множество всех прямых, из которых любые две параллельны, называется *направлением* (в широком смысле слова). Это направление можно определить любым направляющим вектором каждой из этих прямых.

Направление, определяемое ненулевым вектором $\vec{p}$, называется *асимптотическим* направлением относительно линии γ, если прямая, параллельная вектору $\vec{p}$, либо имеет с линией не более одной общей точки, либо содержится в линии γ. Из предыдущего следует: ***направление, определяемое ненулевым вектором $\vec{p}(p_1, p_2)$, является асимптотическим направлением относительно линии γ, заданной уравнением** (1), **тогда и только тогда, когда***

$$a_{11}p_1^2+2a_{12}p_1p_2+a_{22}p_2^2=0. \tag{5}$$

Пользуясь этой формулой, легко найти асимптотические направления относительно линии второго порядка.

Если $a_{22}\neq 0$, то из (5) следует, что $p_1\neq 0$ (так как $\vec{p}$ — ненулевой вектор), поэтому из равенства (5) получаем: $a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0$, где $k=\frac{p_2}{p_1}$. Отсюда

$$k=\frac{-a_{12}\pm\sqrt{-\Delta}}{a_{22}}, \text{ где } \Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2. \tag{6}$$

Если $a_{22}=0$, то уравнение (5) имеет вид: $a_{11}p_1^2+2a_{12}p_1p_2=0$. Этому уравнению удовлетворяют координаты векторов

$$\vec{e}_2(0,\ 1) \text{ и } \vec{p}(-2a_{12},\ a_{11}). \tag{7}$$

Выясним, сколько существует асимптотических направлений относительно линии второго порядка γ. Рассмотрим три случая.

1) $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$ и, значит, $a_{22}\neq 0$. Из формулы (6) мы заключаем, что относительно линии γ не существует асимптотических направлений.

2) $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$. В этом случае относительно линии γ существует два асимптотических направления. В самом деле, если $a_{22}\neq 0$, то этот вывод следует из формулы (6), а если $a_{22}=0$, то из (7). В последнем случае $a_{12}\neq 0$, поэтому векторы $\vec{e}_2(0, 1)$ и $\vec{p}(-2a_{12},\ a_{11})$ не коллинеарны.

3) $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$. В этом случае относительно линии γ существует только одно асимптотическое направление. В самом деле, если $a_{22}\neq 0$, то этот вывод следует из формулы (6), а если $a_{22}=0$, то из (7). В последнем случае $a_{12}=0$, поэтому векторы $\vec{e}_2(0,\ 1)$ и $\vec{p}(0,\ a_{11})$ коллинеарны и определяют одно и то же асимптотическое направление.

Полученный вывод сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема. *Пусть линия второго порядка задана уравнением* (1) и $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. *Если $\Delta>0$, то относительно такой линии не существует асимптотических направлений, если $\Delta<0$, то существует два асимптотических направления, а если $\Delta=0$ — одно асимптотическое направление.*

Замечание. Понятие асимптотического направления является геометрическим (т. е. определено через взаимное расположение геометрических фигур) и поэтому не зависит от выбора системы координат. Таким образом, из доказанной теоремы следует, что *условия* $\Delta>0$, $\Delta<0$ *или* $\Delta=0$ *не зависят от выбора системы координат.*

Выясним, сколько асимптотических направлений имеется относительно эллипса, гиперболы и параболы. Пусть эллипс задан каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Тогда $\Delta=\frac{1}{a^2b^2}>0$, поэтому *относительно эллипса не имеется асимптотических направлений.* Аналогично для гиперболы, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $\Delta=-\frac{1}{a^2b^2}$, и уравнение (5) принимает вид: $\frac{p_1^2}{a^2}-\frac{p_2^2}{b^2}=0$. Отсюда следует, что *относительно гиперболы имеется два асимптотических направления,* которые совпадают с направлениями ее асимптот. Точно так же можно доказать, что для параболы $\Delta=0$, поэтому *относительно параболы имеется только одно асимптотическое направление.* В соответствии с этим выводом линия второго порядка называется линией *эллиптического типа*, если $\Delta>0$, *гиперболического типа,* если $\Delta<0$, и *параболического типа,* если $\Delta=0$.

В заключение докажем следующую лемму.

Лемма. *Направление ненулевого вектора $\vec{q}\,(q_1,\ q_2)$ является асимптотическим направлением относительно линии γ параболического типа, заданной уравнением* (1), *тогда и только тогда, когда*

$$a_{11}q_1+a_{12}q_2=0,\ a_{21}q_1+a_{22}q_2=0. \tag{8}$$

□ Покажем сначала, что координаты вектора асимптотического направления относительно линии γ параболического типа удовлетворяют системе (8). В п. 2 мы выяснили, что относительно линии γ имеется только одно асимптотическое направление, которое определяется вектором $\vec{q}\,(a_{22},\ -a_{12})$, если $a_{22}\neq 0$, и вектором $\vec{e}_1\,(0,\ 1)$, если $a_{22}=0$. Координаты вектора $\vec{q}$ удовлетворяют уравнению (8). Во втором случае из равенств $a_{22}=0$, $\Delta=0$ следует, что $a_{12}=0$, поэтому координаты вектора $\vec{e}_1$ удовлетворяют системе (8).

Обратно, пусть координаты некоторого ненулевого вектора $\vec{q}\,(q_1,\ q_2)$ удовлетворяют системе (8). Умножив первое уравнение на q_1, а второе — на q_2 и сложив, получаем: $(a_{11}q_1+a_{12}q_2)\,q_1+(a_{21}q_1+$ $+a_{22}q_2)\,q_2=0$. Итак, доказано, что вектор $\vec{q}$ имеет асимптотическое направление (см. формулу (5)).

§ 33. Центр линии второго порядка

1. Докажем сначала лемму о координатах середины хорды.

Лемма. *Дан вектор $\vec{p}\,(p_1,\ p_2)$ неасимптотического направления линии второго порядка, заданной уравнением*

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \tag{1}$$

Для того чтобы точка $M\,(x_0,\ y_0)$ была серединой какой-нибудь хорды[1]*, параллельной вектору $\vec{p}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$F_1\,(x_0,\ y_0)\,p_1+F_2\,(x_0,\ y_0)\,p_2=0. \tag{2}$$

---

[1] Хордой линии называется отрезок, концы которого принадлежат этой линии.

Запишем параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$ и параллельной вектору $\bar{p}(p_1, p_2)$: $x = p_1 t + x_0$, $y = p_2 t + y_0$. Пусть M_1 и M_2 — точки пересечения прямой l с данной линией, а t_1 и t_2 — параметры этих точек. Тогда

$$M_1(p_1 t_1 + x_0,\ p_2 t_1 + y_0),\ M_2(p_1 t_2 + x_0,\ p_2 t_2 + y_0).$$

Очевидно, точка $M_0(x_0, y_0)$ является серединой отрезка M_1M_2 тогда и только тогда, когда $t_1 + t_2 = 0$. С другой стороны, t_1 и t_2 являются корнями квадратного уравнения (3) § 32. По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна нулю тогда и только тогда, когда $Q = 0$, т. е. выполняется равенство (2). ■

2. Точка C называется *центром* линии второго порядка, если она является центром симметрии этой линии.

Т е о р е м а. *Для того чтобы точка $C(x_0, y_0)$ была центром линии второго порядка, заданной уравнением* (1), *необходимо и достаточно, чтобы пара чисел x_0, y_0 была решением системы:*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

□ Пусть $C(x_0, y_0)$ — центр линии второго порядка γ. Докажем, что x_0, y_0 удовлетворяют системе (3).

Проведем через точку C две хорды неасимптотического направления, параллельные соответственно векторам $\bar{p}(p_1, p_2)$ и $\bar{q}(q_1, q_2)$. Так как C — центр линии γ, то эта точка является серединой каждой из проведенных хорд. По лемме о координатах середины хорды

$$F_1(x_0, y_0)\,p_1 + F_2(x_0, y_0)\,p_2 = 0,$$
$$F_1(x_0, y_0)\,q_1 + F_2(x_0, y_0)\,q_2 = 0.$$

Векторы $\bar{p}$ и $\bar{q}$ не коллинеарны, поэтому $\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Следовательно, $F_1(x_0, y_0) = 0$, $F_2(x_0, y_0) = 0$, т. е. координаты точки C удовлетворяют системе уравнений (3).

Обратно, пусть координаты точки $C(x_0, y_0)$ удовлетворяют системе (3); докажем, что C — центр линии γ. Рассмотрим перенос начала координат в точку $C(x_0, y_0)$ и запишем уравнение линии в новой системе координат.

В данном случае формулы преобразований координат имеют вид: $x = X + x_0$, $y = Y + y_0$, поэтому, подставив значения x и y в уравнение (1), получаем уравнение линии γ в новой системе координат:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2a'_{10}X + 2a'_{20}Y + a'_{00} = 0, \tag{4}$$

где

$$a'_{10} = F_1(x_0, y_0),\ a'_{20} = F_2(x_0, y_0),\ a'_{00} = F(x_0, y_0).$$

Так как координаты точки $C(x_0, y_0)$ удовлетворяют системе (3), то $a'_{10} = 0$, $a'_{20} = 0$; поэтому уравнение (4) принимает вид:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + a'_{00} = 0.$$

Из этого уравнения видно, что C — центр симметрии линии γ. Действительно, если $M(x, y) \in \gamma$, то $M'(-x, -y) \in \gamma$, где M' — точка, симметричная точке M относительно C. Итак, C — центр линии γ. ■

Следствие. *Для того чтобы начало координат было центром линии, заданной уравнением* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* $a_{10} = a_{20} = 0$.

□ Действительно, числа (0, 0) удовлетворяют системе (3) тогда и только тогда, когда $a_{10} = a_{20} = 0$. ■

3. Доказанная теорема позволяет исследовать вопрос о существовании центров данной линии. Задача сводится к исследованию системы уравнений (3). Рассмотрим матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

и обозначим соответственно через r и R ранги этих матриц. Очевидно, $r \leqslant R$. Возможны следующие случаи.

1) $r = R = 2$. В этом случае система (3) имеет единственное решение и поэтому линия γ имеет один и только один центр. Линии, обладающие этим свойством, называются *центральными*.

2) $r = R = 1$. В этом случае система (3) имеет бесконечное множество решений: одно из уравнений системы (3) является следствием другого. Линия имеет прямую центров. Эта прямая задается одним из уравнений системы (3).

3) $r = 1$, $R = 2$. Система (3) не имеет ни одного решения, и в соответствии с этим линия не имеет ни одного центра.

Линии, не имеющие центров или имеющие больше одного центра, называются *нецентральными*. Из предыдущих рассуждений следует, что линия является центральной тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$. Таким образом, *линии эллиптического и гиперболического типа являются центральными, а линии параболического типа — нецентральными.*

Эллипс и гипербола являются центральными линиями ($\Delta \neq 0$), поэтому они имеют один и только один центр — начало системы координат, в которой эти линии имеют канонические уравнения. Для параболы, заданной каноническим уравнением $y^2 = 2px$, матрицы (5) имеют ранги $r = 1$, $R = 2$, поэтому *парабола не имеет ни одного центра.*

Замечание. Как следует из предыдущего, ранги r и R матриц (5) имеют геометрический смысл, поэтому они не зависят от выбора системы координат.

§ 34. Касательная к линии второго порядка

1. Если точка M_0, принадлежащая линии второго порядка γ, является центром этой линии, то она называется *особой* точкой линии, в противном случае точка M_0 называется *обыкновенной* точкой.

Прямая, проходящая через обыкновенную точку M_0 линии второго порядка, называется *касательной* к этой линии в точке M_0, если она пересекает линию в двух совпавших точках или целиком содержится в этой линии. Докажем теорему о касательной.

Теорема. *В каждой обыкновенной точке линии второго порядка существует одна и только одна касательная. Если линия задана общим уравнением* (1) § 33, *то касательная в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *этой линии имеет уравнение*

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{10})\,x+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{20})\,y+ \\ +(a_{01}x_0+a_{02}y_0+a_{00})=0, \tag{1}$$

или

$$F_1(x_0, y_0)\,x+F_2(x_0, y_0)\,y+F_0(x_0, y_0)=0.$$

□ Пусть прямая l, проходящая через точку M_0, задана параметрическими уравнениями (2) § 32. Параметры точек пересечения прямой l с данной линией γ определяются из уравнения (3) § 32, которое в данном случае имеет вид:

$$Pt^2+2Qt=0, \tag{2}$$

так как, $M\in\gamma$, и поэтому $R=F(x_0, y_0)=0$.

Докажем, что прямая l является касательной тогда и только тогда, когда $Q=0$. Действительно, если l — касательная, то уравнение (2) имеет либо два совпавших корня, либо бесконечное множество решений. И в том и в другом случае $Q=0$. Обратно, если $Q=0$, то уравнение (2) имеет либо два совпавших корня (когда $P\neq 0$), либо бесконечное множество решений (когда $P=0$).

Согласно формулам (4) § 32 условие $Q=0$ означает, что

$$F_1(x_0, y_0)\,p_1+F_2(x_0, y_0)\,p_2=0. \tag{3}$$

Так как $M_0(x_0, y_0)$ — обыкновенная точка, то $F_1(x_0, y_0)$, $F_2(x_0, y_0)$ одновременно не равны нулю. Поэтому равенство (3) определяет единственное направление вектора $\vec{p}(p_1, p_2)$. В качестве такого вектора можно взять, например, вектор $\vec{t}(F_2(x_0, y_0), -F_1(x_0, y_0))$. Через точку M_0 проходит единственная прямая этого направления, поэтому в точке M_0 существует единственная касательная.

Касательная определяется точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{t}$, поэтому имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & F_2(x_0, y_0) \\ y-y_0 & -F_1(x_0, y_0) \end{vmatrix}=0. \tag{4}$$

Так как $M_0\in\gamma$, то по формуле (2) § 31

$$F_1(x_0, y_0)\,x_0+F_2(x_0, y_0)\,y_0+F_0(x_0, y_0)=0.$$

Учитывая это равенство, уравнение (4) можно записать так:

$$F_1(x_0, y_0)\,x+F_2(x_0, y_0)\,y+F_0(x_0, y_0)=0.$$

Это и есть уравнение (1). ■

2. Все точки эллипса, гиперболы и параболы являются обыкновенными, поэтому в каждой точке этих линий существует одна и только одна касательная. Запишем уравнения касательных, если линии заданы каноническими уравнениями.

1) Касательная к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_0, y_0).

В данном случае $a_{11}=\frac{1}{a^2}$, $a_{22}=\frac{1}{b^2}$, $a_{00}=-1$, $a_{12}=a_{10}=a_{20}=0$, поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{5}$$

2) Касательная к гиперболе $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ в точке (x_0, y_0). По аналогии с предыдущим получаем:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{6}$$

3) Касательная к параболе $y^2-2px=0$ в точке (x_0, y_0). В данном случае $a_{22}=1$, $a_{10}=-p$, $a_{11}=a_{12}=a_{20}=a_{00}=0$, поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$yy_0=p(x+x_0). \tag{7}$$

Пользуясь формулами (5)—(7), можно рассмотреть ряд интересных геометрических свойств касательных к эллипсу, гиперболе и параболе. Сформулируем без доказательства три утверждения.

1^0. Касательная к эллипсу или гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами точки касания.

2^0. Отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между асимптотами, делится в точке касания пополам.

Эти свойства могут быть использованы для построения с помощью циркуля и линейки касательной в данной точке эллипса или гиперболы.

3^0. Касательная к параболе образует равные углы с фокальным радиусом точки касания и с лучом, исходящим из точки касания, параллельно оси параболы.

На этом свойстве касательной параболы основано важное свойство вогнутых параболических зеркал — прожекторов, применяемых в технике. Поверхность параболического зеркала образована вращением дуги параболы вокруг оси. Если источник света поместить в фокусе поверхности, т. е. в общем фокусе всех образующих парабол, то лучи, отражаясь от внутренней зеркальной поверхности, пойдут параллельно оси.

Это свойство может быть также применено для построения циркулем и линейкой касательной к параболе в данной точке M_0, если известна ось d параболы и фокус F (рис. 90).

§ 35. Диаметры линии второго порядка. Сопряженные направления

1. Пусть в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ дана линия γ уравнением

$$F(x, y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \tag{1}$$

Возьмем какой-нибудь вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ неасимптотического направления относительно этой линии и рассмотрим множество d

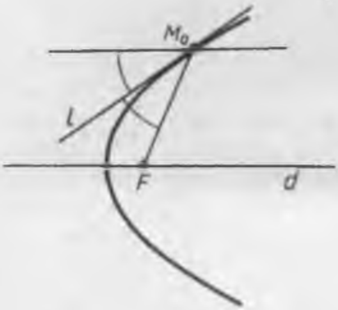


Рис. 90

Рис. 91

всех точек плоскости, которые являются серединами хорд направления $\vec{p}$ (рис. 91). По лемме о координатах середины хорды точка $M(x, y)$ принадлежит этому множеству тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$(a_{11}x+a_{12}y+a_{10})\,p_1+(a_{21}x+a_{22}y+a_{20})\,p_2=0. \qquad (2)$$

Это и есть уравнение множества d. Его можно записать так:

$$(a_{11}p_1+a_{12}p_2)\,x+(a_{21}p_1+a_{22}p_2)\,y+a_{10}p_1+a_{20}p_2=0. \qquad (3)$$

Вектор $\vec{p}$ не является вектором асимптотического направления, поэтому $(a_{11}p_1+a_{12}p_2)\,p_1+(a_{21}p_1+a_{22}p_2)\,p_2\neq 0$ (см. формулу (5) § 32). Отсюда заключаем, что коэффициенты при x и y в уравнении (3) не равны нулю одновременно, следовательно, d есть прямая линия. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Множество середин всех хорд линии* (1), *параллельных вектору* $\vec{p}(p_1, p_2)$ *неасимптотического направления, есть прямая, заданная уравнением* (3).

Прямая d называется *диаметром,* сопряженным хордам, направление которых определяется вектором $\vec{p}$. Будем также говорить, что диаметр сопряжен вектору $\vec{p}$.

2. Рассмотрим некоторые свойства диаметров линии второго порядка.

1^0. *Если линия второго порядка имеет центры, то каждый центр принадлежит любому диаметру линии.*

□ Пусть $C(x_0, y_0)$ — центр линии второго порядка, а d — произвольный диаметр, заданный уравнением (2). По теореме § 33 координаты точки C удовлетворяют равенствам (3) § 33, поэтому координаты точки C удовлетворяют уравнению (2). Это означает, что $C\in d$. ■

Отсюда следует интересный вывод: если линия второго порядка имеет более чем один центр, то она имеет один и только один диаметр. В общем случае линия второго порядка может иметь бесконечное множество диаметров. Имеет место, например, следующее утверждение, доказательство которого мы опускаем.

2^0. *Если дана центральная линия второго порядка, то любая* *прямая неасимптотического направления, проходящая через ее центр, является диаметром этой линии.*

В частности, любая прямая, проходящая через центр эллипса (или окружности), является его диаметром.

3^0. *Любой диаметр нецентральной линии второго порядка имеет асимптотическое направление.*

□ Пусть d — произвольный диаметр нецентральной линии второго порядка γ, а (3) — уравнение этого диаметра. По теореме 1 § 21 вектор $\vec{q}\,(-a_{21}p_1-a_{22}p_2,\ a_{11}p_1+a_{12}p_2)$ является направляющим вектором прямой d. По лемме § 32 вектор $\vec{q}$ является вектором асимптотического направления линии γ. В самом деле, координаты вектора $\vec{q}$ при любых значениях p_1 и p_2, как легко проверить, удовлетворяют системе (8) § 32. ■

Так как нецентральная линия γ имеет только одно асимптотическое направление, то из свойства 3^0 следует, что направление ее диаметра не зависит от направления тех хорд, которые он делит пополам, т. е. любые два диаметра нецентральной линии параллельны.

Применим это свойство к параболе, которая является нецентральной линией. Все диаметры параболы имеют асимптотическое направление. Если парабола задана каноническим уравнением $y^2=2px$, то уравнение диаметра, сопряженного вектору $\vec{q}\,(q_1,\ q_2)$, имеет вид (3): $q_2y-pq_1=0$ или, так как $q_2\neq 0$, $y-p\dfrac{q_1}{q_2}=0$. Для любого вектора $\vec{q}$ эта прямая имеет направление оси Ox. Обратно, любая прямая $y-A=0$, имеющая направление оси Ox, является диаметром параболы. Действительно, диаметр, сопряженный вектору $\vec{q}\,(A,\ p)$, совпадает с прямой $y-A=0$.

3. Т е о р е м а 2. *Если диаметр d_1 центральной линии второго порядка является множеством середин хорд, параллельных диаметру d_2, то диаметр d_2 является множеством середин хорд, параллельных диаметру d_1.*

□ Пусть диаметр d_1 сопряжен вектору $\vec{p}$, а диаметр d_2 — вектору $\vec{q}$ (рис. 92, *а*). По условию теоремы $\vec{p}\parallel d_2$. Докажем, что $\vec{q}\parallel d_1$. Диаметр d_2 имеет уравнение $q_1(a_{11}x+a_{12}y+a_{10})+q_2(a_{21}x+a_{22}y+$ $+a_{20})=0$ (см. формулу (2)). Вектор $\vec{p}$ — направляющий вектор этой прямой, поэтому

$$q_1(a_{11}p_1+a_{12}p_2)+q_2(a_{21}p_1+a_{22}p_2)=0, \tag{4}$$

или

$$p_1(a_{11}q_1+a_{12}q_2)+p_2(a_{21}q_1+a_{22}q_2)=0.$$

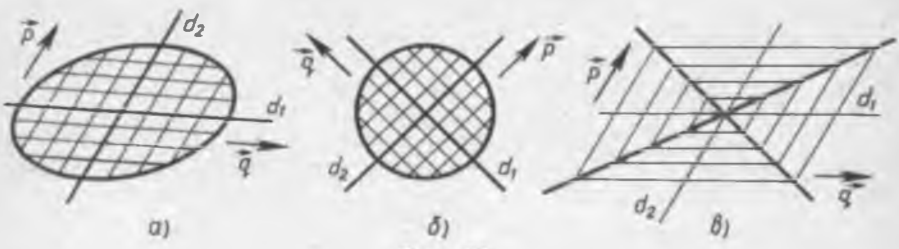


Рис. 92

Так как диаметр d_1 имеет уравнение (2), то это равенство означает, что $\vec{q} \parallel d_1$. $\blacksquare$

Два диаметра центральной линии второго порядка называются *сопряженными,* если каждый из них делит пополам хорды, параллельные другому диаметру. На рисунке 92, *а, б* и *в* изображены сопряженные диаметры d_1 и d_2 эллипса, окружности и пары пересекающихся прямых.

4. Направление ненулевого вектора $\vec{p}\,(p_1,\ p_2)$ называется *сопряженным* с направлением ненулевого вектора $\vec{q}\,(q_1,\ q_2)$ относительно линии, заданной уравнением (1), если выполняется равенство

$$a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2 = 0. \tag{5}$$

Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то понятие сопряженности направлений является взаимным, поэтому говорят, что направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно линии (1). (Иногда говорят более кратко: векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены относительно линии (1).)

Сравнивая равенство (5) с равенством (5) § 32, замечаем, что асимптотическое направление является самосопряженным направлением. Отметим далее, что сопряженные диаметры центральной линии второго порядка (см. формулу (4)) имеют сопряженные направления.

Докажем, что ***понятие сопряженности относительно линии второго порядка имеет геометрический смысл, поэтому не зависит от выбора системы координат.*** Для доказательства возьмем произвольный ненулевой вектор $\vec{p}\,(p_1,\ p_2)$ и рассмотрим два случая.

1) Вектор $\vec{p}$ является вектором неасимптотического направления. Запишем равенство (5) в виде

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2)\, q_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2)\, q_2 = 0. \tag{6}$$

Направление любого ненулевого вектора $\vec{q}$, удовлетворяющее этому равенству, как следует из формулы (4), совпадает с направлением диаметра, который делит хорды, параллельные вектору $\vec{p}$, пополам. Таким образом, существует одно и только одно направление, сопряженное с направлением вектора $\vec{p}$, и это направление имеет простой геометрический смысл.

2) Вектор $\vec{p}\,(p_1,\ p_2)$ является вектором асимптотического направления. Если $\Delta \neq 0$, то из числа $a_{11}p_1 + a_{12}p_2$ и $a_{21}p_1 + a_{22}p_2$ не равны нулю одновременно, так как $\vec{p} \neq \vec{0}$. Поэтому *все векторы* $\vec{q}\,(q_1,\ q_2)$, координаты которых удовлетворяют равенству (6), попарно коллинеарны и образуют одномерное векторное подпространство L. Оно является подпространством, натянутым на вектор $\vec{p}$, так как $\vec{p} \in L$ (см. (5) § 32). Таким образом, кроме направления вектора $\vec{p}$, нет других направлений, сопряженных с $\vec{p}$.

Если $\Delta = 0$, то по лемме § 32 $a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = 0$ и $a_{21}p_1 + a_{22}p_2 = 0$, поэтому соотношение (6) удовлетворяется для любого вектора $\vec{q}$. В этом случае любое направление плоскости сопряжено с направлением вектора $\vec{p}$.

§ 36. Главные направления. Главные диаметры

1. Направление называется *главным* относительно данной линии второго порядка, если оно сопряжено с перпендикулярным направлением. Так как понятие сопряженности является взаимным, то если данное направление является главным, то и перпендикулярное к нему направление является главным.

Пусть в *прямоугольной* системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ линия задана общим уравнением (1) § 35. По определению ненулевой вектор $\vec{p}(p_1, p_2)$ является вектором главного направления относительно этой линии тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}(p_1, p_2)$ и $\vec{q}(-p_2, p_1)$ сопряжены. Подставив координаты этих векторов в уравнение (5) § 35, получаем:

$$(a_{22}-a_{11})\,p_1p_2+a_{12}\,(p_1^2-p_2^2)=0. \tag{1}$$

Эта формула позволяет найти главные направления относительно линии второго порядка и выяснить, сколько главных направлений имеется относительно той или иной линии. Рассмотрим следующие случаи.

1) $a_{12}\neq 0$. В этом случае $p_1\neq 0$ (так как $\vec{p}\neq\vec{0}$). Поэтому если положить $k=\frac{p_2}{p_1}$, то уравнение (1) запишется так:

$$k^2a_{12}+(a_{11}-a_{22})\,k-a_{12}=0. \tag{2}$$

Это квадратное уравнение имеет два различных действительных корня:

$$k_{1,2}=\frac{a_{22}-a_{11}\pm\sqrt{(a_{22}-a_{11})^2+4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

причем $k_1k_2=-1$.

Отсюда следует, что относительно данной линии имеются два и только два главных направления.

2) $a_{12}=0$, $a_{22}-a_{11}\neq 0$. Уравнение (1) принимает вид $(a_{22}-a_{11})\,p_1p_2=0$ или $p_1p_2=0$. И в этом случае относительно данной линии имеются два и только два главных направления — направления координатных осей.

3) $a_{12}=0$, $a_{22}-a_{11}=0$. Ясно, что координаты любого вектора $\vec{p}(p_1, p_2)$ удовлетворяют равенству (1), поэтому любое направление является главным. В этом случае данная линия является окружностью (вещественного, мнимого или нулевого радиуса). Итак, доказана следующая важная теорема.

Т е о р е м а 1. *Относительно любой линии второго порядка, отличной от окружности, существуют два и только два главных направления. Относительно окружности любое направление плоскости является главным.*

2. Диаметр линии второго порядка называется *главным*, если он перпендикулярен сопряженным хордам. Отсюда следует, что главный диаметр является осью симметрии линии второго порядка.

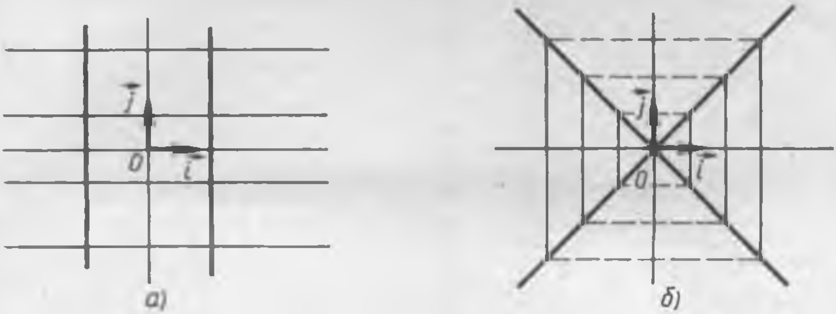


Рис. 93

Пусть d — главный диаметр, а $\vec{p}\,(p_1,\ p_2)$ — вектор, параллельный сопряженным хордам. Направление вектора $\vec{p}$ сопряжено с направлением диаметра d, поэтому $\vec{p}$ имеет главное направление, а, следовательно, и диаметр d имеет главное направление. Обратно, если $\vec{p}$ — вектор главного, но неасимптотического направления, то сопряженный ему диаметр перпендикулярен к нему, поэтому является главным диаметром. Итак, для нахождения главных диаметров следует найти все главные, но не асимптотические направления данной линии. Диаметры, сопряженные этим направлениям, являются главными.

Теорема 2. *Центральная линия второго порядка, отличная от окружности, имеет два и только два главных диаметра; для окружности любой диаметр является главным. Нецентральная линия второго порядка имеет только один главный диаметр.*

□ а) Пусть γ — центральная линия второго порядка, отличная от окружности. По теореме 1 она имеет два и только два главных направления. Эти направления не являются асимптотическими (§ 35, п. 4). Поэтому диаметры, сопряженные хордам этих направлений, являются главными диаметрами.

б) Окружность является линией эллиптического типа, поэтому не имеет асимптотических направлений. Так как любое направление для окружности является главным, то любой диаметр окружности является главным диаметром.

в) Пусть $\vec{p}$ — вектор асимптотического направления нецентральной линии второго порядка γ, а $\vec{q}$ — перпендикулярный к нему ненулевой вектор. Направления векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ сопряжены (§ 35, п. 4), поэтому каждое из этих направлений является главным. По теореме 1 других главных направлений линия γ не имеет. Диаметр, сопряженный вектору $\vec{q}$, является единственным главным диаметром линии γ. ■

3. Как известно, осью симметрии фигуры называется прямая, относительно которой фигура симметрична. Мы уже отмечали, что любой главный диаметр линии второго порядка является ее осью симметрии. Из теоремы 2 следует, что *любая линия второго порядка имеет хотя бы одну ось симметрии.* Эллипс с неравными полуосями и гипербола имеют две оси симметрии, окружность — бесконечное множество осей симметрии. Парабола имеет только одну ось симметрии.

Существуют ли линии второго порядка, которые имеют оси симметрии, отличные от главных диаметров? Можно показать, что такие линии существуют. Например, для пары параллельных прямых $x^2-a^2=0$ любая прямая, перпендикулярная этим прямым, является осью симметрии (рис. 93, *а*). Эти прямые не являются главными диаметрами. Для линии $x^2-y^2=0$, которая распадается на пару взаимно перпендикулярных прямых, сами прямые являются осями симметрии. Эта линия изображена на рисунке 93, *б*. Она имеет четыре оси симметрии — оси координат Ox и Oy, которые являются главными диаметрами, и прямые l_1 и l_2, на которые распадается линия. Можно доказать, что в остальных случаях оси симметрии линии второго порядка, имеющей бесконечное множество действительных точек, совпадают с ее главными диаметрами.

§ 37. Классификация линий второго порядка

1. Идея классификации линий второго порядка заключается в том, чтобы путем надлежащего выбора новой прямоугольной системы координат упростить уравнение линии, а затем по этому уравнению установить, к какому классу принадлежит линия.

Пусть линия второго порядка γ в *прямоугольной* системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ задана уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0. \tag{1}$$

Рассмотрим поворот системы координат вокруг точки O так, чтобы вектор $\vec{j}'$ новой системы координат $O\vec{i}'\vec{j}'$ имел главное, но не асимптотическое направление. Тогда вектор $\vec{i}'$ также будет иметь главное направление. Запишем уравнение линии γ в новой системе координат:

$$a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0.$$

Так как вектор $\vec{j}'\ (0,\ 1)$ имеет главное направление, то его координаты удовлетворяют уравнению (1) § 36, поэтому $a'_{12}=0$. Вектор $\vec{j}'$ не имеет асимптотического направления, поэтому $a'_{22}\neq 0$. Таким образом, предыдущее уравнение имеет вид:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0. \tag{2}$$

Дальнейшее упрощение этого уравнения достигается путем надлежащего выбора точки O' и переноса начала координат в эту точку. Рассмотрим различные случаи в зависимости от наличия центров линии γ.

2. Классификация центральных линий второго порядка. Рассмотрим перенос начала координат в центр O' линии γ. В силу следствия теоремы § 33 в новой системе координат коэффициенты при x' и y' в уравнении линии γ равны нулю, поэтому оно имеет вид:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+a'_{00}=0, \text{ где } a'_{11}a'_{22}\neq 0. \tag{3}$$

Возможны два случая.

1) $a'_{00}\neq 0$. Уравнение (3) можно записать так:

$$\frac{x'^2}{A}+\frac{y'^2}{B}=1, \tag{4}$$

где $A=-\frac{a'_{00}}{a'_{11}}$, $B=-\frac{a'_{00}}{a'_{22}}$. Не нарушая общности, можно предположить, что $A \geqslant B$ (в случае $A<B$ выполним преобразование координат, поменяв местами координатные оси).

а) Если $A>0$, $B>0$, то линия (4) есть эллипс с полуосями $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$.

б) Если $A>0$, $B<0$, то линия (4) есть гипербола с полуосями $\sqrt{A}$, $\sqrt{-B}$.

в) Если $A<0$, $B<0$, то, обозначив $A=-a^2$, $B=-b^2$, где $a>0$, $b>0$, запишем уравнение (4) в виде $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$. Линия не имеет ни одной вещественной точки и называется *мнимым эллипсом.*

2) $a'_{00}=0$. Уравнение (3) можно записать в виде $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}=0$, где $A>0$.

а) Если $B<0$, то, обозначив $A=a^2$, $B=-b^2$, получаем: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$, или $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$.

Линия распадается *на пару пересекающихся прямых:*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \text{ и } \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0.$$

б) Если $B>0$, то аналогично предыдущему получаем: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Линия имеет только одну вещественную точку — начало координат. Говорят, что линия распадается *на пару мнимых пересекающихся прямых:* $\frac{x}{a}+i\frac{y}{b}=0$ и $\frac{x}{a}-i\frac{y}{b}=0$.

3. Классификация нецентральных линий второго порядка, имеющих центры. Рассмотрим перенос начала координат в один из центров O' линии γ. Так как в данном случае вектор $\bar{i}'$ имеет асимптотическое направление, то уравнение (3) можно записать так:

$$y^2+C=0, \text{ где } C=\frac{a'_{00}}{a'_{22}}. \tag{5}$$

а) Если $C<0$, то, обозначив $C=-a^2$, запишем уравнение (5) в виде $y^2-a^2=0$, или $(y-a)(y+a)=0$. Линия распадается на *пару параллельных прямых* ($y-a=0$ и $y+a=0$).

б) Если $C>0$, то аналогично предыдущему получаем $y^2+a^2=0$ или $(y-ia)(y+ia)=0$. Линия не имеет ни одной вещественной точки. Говорят, что она распадается на *пару мнимых параллельных прямых:* $y-ia=0$ и $y+ia=0$.

в) Если $C=0$, то уравнение (5) имеет вид: $y^2=0$ или $yy=0$. Говорят, что линия распадается на *пару совпавших прямых* ($y=0$, $y=0$).

4. Классификация нецентральных линий второго порядка, не имеющих центров. Рассмотрим

перенос начала координат в точку O', лежащую на главном диаметре линии γ. По теореме 2 § 36 в данном случае линия имеет только один главный диаметр, который совпадает с осью $O'\vec{i}'$ и сопряжен с хордами, параллельными вектору $\vec{j}'$. Пусть уравнение линии γ в системе $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеет вид (2). Тогда $a'_{11}=0$, так как вектор $\vec{i}'$ имеет асимптотическое направление; $a'_{22}\neq 0$ и $a'_{20}=0$, так как ось абсцисс — главный диаметр. Таким образом, уравнение (2) имеет вид: $a'_{22}y'^2+2a'_{10}x'+a'_{00}=0$. Здесь $a'_{10}\neq 0$, так как точка O' не является центром линии γ (линия γ не имеет центров). Из уравнения видно, что ось абсцисс пересекает линию в точке $\left(-\frac{a'_{00}}{2a'_{10}},\ 0\right)$. Если перенести начало координат в эту точку, то уравнение линии принимает вид: $a'_{22}y^2+2a'_{10}x=0$ или $y^2=2px$, где $p=\frac{-a'_{10}}{a'_{22}}$. Это уравнение параболы.

5. Итак, существуют девять типов линий второго порядка, представленных в следующей таблице.

Название линии	Каноническое уравнение	Δ	R	Действительные точки	Центры
1. Эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	>0	2	∞	Один центр, не принадлежаший линии
2. Гипербола	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	<0	2	∞	—»—
3. Парабола	$y^2=2px$	$=0$	2	∞	Нет центров
4. Мнимый эллипс	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	>0	2	0	Один центр, не принадлежащий линии
5. Пара пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	<0	2	∞	Один центр, принадлежащий линии
6. Пара мнимых пересекающихся прямых	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	>0	2	1	Один центр, принадлежаший линии

Название линии	Каноническое уравнение	Δ	R	Действительные точки	Центры
7. Пара параллельных прямых	$y^2-a^2=0$	0	1	∞	Прямая центров, не принадлежащих линии
8. Пара мнимых параллельных прямых	$y^2+a^2=0$	0	1	0	Прямая центров, не принадлежащих линии
9. Пара совпавших прямых	$y^2=0$	0	1	∞	Прямая центров, принадлежащих линии

§ 38. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду и построение ее точек

1. В этом параграфе рассмотрим примеры приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Сначала рассмотрим общую схему, а затем перейдем к примерам. Пусть линия второго порядка γ в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ задана общим уравнением

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{10}x+2a_{20}y+a_{00}=0, \tag{1}$$

где $a_{12}\neq 0$. Найдем главные направления линии γ и примем их за направления новых координатных осей.

Координаты единичного вектора $\vec{p}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ главного направления (где $\alpha=\widehat{\vec{i},\ \vec{p}}$) удовлетворяют уравнению (1) из § 36. Это уравнение можно записать так:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha & a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}=0.$$

Для каждого вектора $\vec{p}$ главного направления существует такое λ, что

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha=\lambda\cos\alpha,\\ a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha=\lambda\sin\alpha;\end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned}(a_{11}-\lambda)\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha=0,\\ a_{21}\cos\alpha+(a_{22}-\lambda)\sin\alpha=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Эта система совместна тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)=0. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется *характеристическим уравнением* линии второго порядка γ. Корни этого уравнения находятся по формуле

$$\lambda=\frac{(a_{11}+a_{22})\pm\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}.$$

Так как $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\geqslant 0$, то *корни* λ_1 *и* λ_2 *характеристического уравнения* (3) — *действительные числа*, причем если γ не является окружностью (т. е. если $(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2\neq 0$, то $\lambda_1\neq\lambda_2$). Пусть для определенности $\lambda_2\neq 0$. Подставив каждый из этих корней в уравнения (2), получаем соотношение, из которого находим координаты единичного вектора главного направления. Таким образом, каждому корню характеристического уравнения соответствует главное направление.

Пусть $\vec{i}'(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ — единичный вектор главного направления, который соответствует корню λ_1. Из формул (2) находим: $(a_{11}-\lambda_1)\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha=0$, отсюда $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\lambda_1-a_{11}}{a_{12}}$.

Найдем $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$:

$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \quad (4)$$

Формулы преобразования координат имеют вид (см. формулы (8) из § 15):

$$\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставив отсюда значения x и y в уравнение (1), получаем уравнение линии γ в системе $O\vec{i}'\vec{j}'$:

$$a'_{11}x'^2+a'_{22}y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a'_{00}=0, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a'_{11}&=a_{11}\cos^2\alpha+2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha+a_{22}\sin^2\alpha,\\ a'_{22}&=a_{11}\sin^2\alpha-2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha+a_{22}\cos^2\alpha,\\ a'_{10}&=a_{10}\cos\alpha+a_{20}\sin\alpha,\\ a'_{20}&=-a_{10}\sin\alpha+a_{20}\cos\alpha,\\ a'_{00}&=a_{00}. \end{aligned} \quad (7)$$

Из первой формулы, учитывая равенства (2), получаем:

$$a'_{11}=(a_{11}\cos\alpha+a_{12}\sin\alpha)\cos\alpha+(a_{21}\cos\alpha+a_{22}\sin\alpha)\sin\alpha=$$
$$=\lambda_1\cos^2\alpha+\lambda_1\sin^2\alpha=\lambda_1.$$

Из формул (7) получаем: $a'_{11}+a'_{22}=a_{11}+a_{22}$ или $\lambda_1+a'_{22}=$

$=a_{11}+a_{22}$. Но по формуле Виета $a_{11}+a_{22}=\lambda_1+\lambda_2$, поэтому $a'_{22}=\lambda_2$. Следовательно, уравнение (6) линии γ имеет вид:

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+2a'_{10}x'+2a'_{20}y'+a_{00}=0. \qquad (8)$$

Коэффициенты a'_{10} и a'_{20} непосредственно находятся по формулам (7).

Из уравнения (8), как показано в § 37, путем переноса начала координат в некоторую точку O' получаем каноническое уравнение линии γ. Если γ не является параболой, то O' — центр (или один из центров) линии γ; если же γ — парабола, то O' — ее вершина.

2. Таким образом, для того чтобы привести уравнение (1) линии γ второго порядка к каноническому виду и построить точки этой линии, необходимо выполнить следующее.

1) Найти корни характеристического уравнения (3).

2) Найти координаты векторов $\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и $\vec{j}'(-\sin\alpha, \cos\alpha)$ по формулам (4).

3) Вычислить коэффициенты a'_{10}, a'_{20} по формулам (7) и записать уравнение линии γ в виде (8).

4) Переносом начала координат получить каноническое уравнение линии γ.

5) Построить систему координат $O'\vec{i}'\vec{j}'$ по координатам точки O' и векторов $\vec{i}'$ и $\vec{j}'$ и затем построить точки линии γ в системе $O'\vec{i}'\vec{j}'$ по каноническому уравнению.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий эту схему.

Пример 1. $5x^2+5y^2+8xy-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y-8=0$.

1) Запишем характеристическое уравнение (3) для данной линии и найдем его корни $\lambda^2-10\lambda+9=0$, $\lambda_1=1$, $\lambda_2=9$.

2) По формулам (4) найдем координаты векторов $\vec{i}'(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\vec{j}'(-\sin\alpha, \cos\alpha)$.

$$\operatorname{tg}\alpha=-1,\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha=45^\circ,$$

$$\vec{i}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right),\ \vec{j}'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) По формулам (7) вычислим коэффициенты a'_{10}, a'_{20}; $a'_{10}=-1$, $a'_{20}=0$. Уравнение (8) в данном случае имеет вид: $x'^2+9y'^2-2x'-8=0$.

4) Так как $\Delta'=1\cdot 9\neq 0$, то линия центральная. По формулам (3) из § 33 находим координаты центра O' в системе $O\vec{i}'\vec{j}'$: $O'(1, 0)$. Формулы переноса системы координат в точку O' имеют вид: $x'=X+1$, $y'=Y$, поэтому линия в системе $O'\vec{i}'\vec{j}'$ имеет уравнение

$$X^2+9Y^2-9=0,\ \text{или}\ \frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{1}=1. \qquad (9)$$

Это каноническое уравнение эллипса с полуосями $a=3$, $b=1$.

5) На рисунке 94 выполнено построение эллипса (9). Сначала строим систему $O\vec{i}'\vec{j}'$, в этой системе точку O' и через эту точку

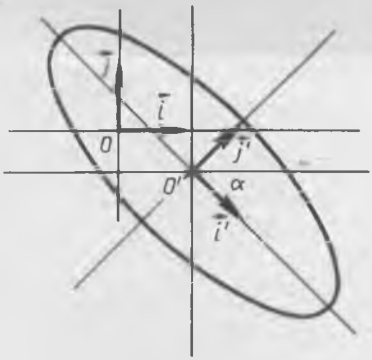


Рис. 94

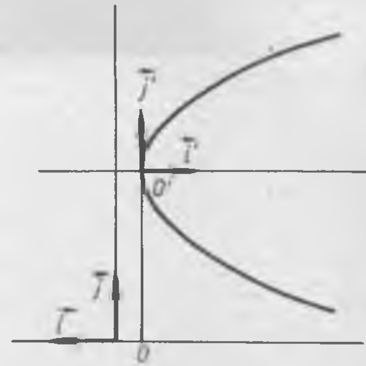


Рис. 95

проводим оси координат системы $O'\bar{i}'\bar{j}'$. Затем на этих осях координат отмечаем вершины эллипса по заданным полуосям и вычерчиваем эллипс.

3. В ряде случаев, когда в исходном уравнении (1) отдельные коэффициенты равны нулю, рассмотренная выше схема упрощается. Например, если $a_{12}=0$, то нет необходимости в нахождении главных направлений линии, поэтому достаточно ограничиться пунктами 4 и 5 схемы. В случае, если $a_{10}=a_{20}=0$, то следует выполнить только пункты 1, 2, 3 и 5. Рассмотрим примеры.

Пример 2. $2y^2+4x-8y+9=0$.

Так как $a_{12}=0$, то координатные векторы $\bar{i}$ и $\bar{j}$ имеют главные направления.

Данная линия γ не имеет центров, так как система (3) § 33 несовместна: $0\cdot x+0\cdot y+2=0$, $0\cdot x+2y-4=0$. Следовательно, линия γ — парабола. Главный диаметр сопряжен вектору $\bar{j}$, поэтому имеет уравнение $2y-4=0$, или $y=2$. Эта прямая пересекает параболу γ в точке $O'\left(-\frac{1}{4},\ 2\right)$, которая является вершиной параболы. Формулы переноса системы координат в точку O' имеют вид: $x=X-\frac{1}{4}$, $y=Y+2$, поэтому линия γ в системе $O'\bar{i}\bar{j}$ имеет уравнение $Y^2+2X=0$. Если изменить направление оси абсцисс, т. е. ввести новую систему координат $O'\bar{i}'\bar{j}'$, где $\bar{i}'=-\bar{i}$, $\bar{j}'=\bar{j}$, то формулы преобразования имеют вид: $X=-X'$, $Y=Y'$, поэтому линия γ в новой системе координат имеет каноническое уравнение $Y'^2=2X'$. На рисунке 95 выполнено построение этой параболы.

Пример 3. $4x^2-4xy+y^2-15=0$.

1) $\lambda^2-5\lambda=0$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=5$;

2) $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\bar{i}'\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, $\bar{j}'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

3) $a'_{10}=0$, $a'_{20}=0$. Уравнение данной линии в системе $O'\bar{i}'\bar{j}'$ имеет вид: $5y'^2-15=0$, или $y'^2-3=0$. В этом случае нет необходи-

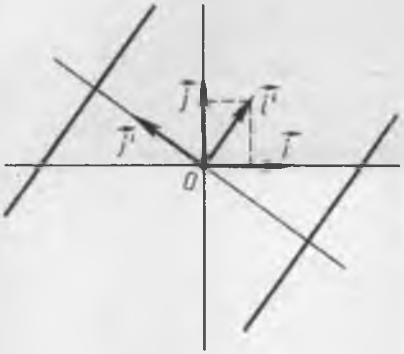


Рис. 96

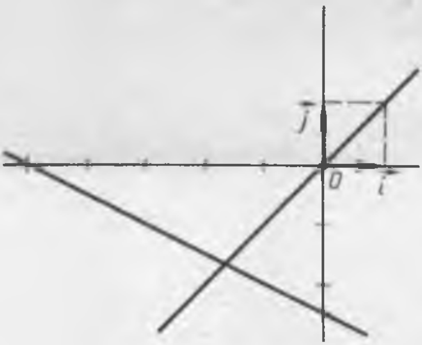


Рис. 97

мости в переносе начала координат, так как мы уже получили каноническое уравнение пары параллельных прямых: $y-\sqrt{3}=0$, $y+\sqrt{3}=0$. На рисунке 96 изображена эта линия.

4. Если данная линия распадается на пару прямых, то иногда удается без приведения уравнения линии к каноническому виду разложить левую часть уравнения на множители и найти уравнения тех прямых, которые составляют линию.

Пример 4. $x^2+xy-2y^2+5x-5y=0$. Запишем это уравнение так:

$$(x^2+2xy+5x)-(xy+2y^2+5y)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x+2y+5)-y(x+2y+5)=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-y)(x+2y+5)=0.$$

Данная линия распадается на пару пересекающихся прямых: $x-y=0$, $x+2y+5=0$ (рис. 97).

Глава V

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

§ 39. Отображение и преобразование множеств

1. Пусть X и Y — непустые множества. Допустим, что каждому элементу x множества X поставлен в соответствие определенный элемент y множества Y. Тогда говорят, что дано *отображение множества X в множество Y* или дана функция. Эту функцию обозначают одной буквой, например буквой f, и пишут так: $f: X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Элемент $y \in Y$ называют *значением* функции f для элемента $x \in X$ и обозначают через $f(x)$. Множество X называется *областью определения* функции f, а множество всех значений — *областью значений* функции. Область значений функции $f: X \to Y$ обозначается через $f(X)$. Ясно, что $f(X) \subset Y$.

В геометрии, где приходится рассматривать множества X и Y самой различной природы, не обязательно числовые, чаще всего применяется термин «отображение», а не «функция».

Пусть дано некоторое отображение $f: X \to Y$. Элемент $y = f(x)$ называется *образом* элемента $x \in X$, а x — *прообразом* элемента $y \in Y$. Говорят также, что элемент x *переходит* в элемент y в отображении f, и пишут: $f: x \mapsto y$ или $x \overset{f}{\mapsto} y$ (следует учесть, что мы различаем стрелки $\to$ и $\mapsto$).

В этой главе рассматриваются только такие отображения, в которых области определений и значений являются множествами точек плоскости. Рассмотрим примеры таких отображений.

Пример 1. Пусть ω — окружность, а AB — ее диаметр (рис. 98). Каждой точке M окружности поставим в соответствие (ортогональную) проекцию M_1 на прямую AB. Получим отображение окружности ω в прямую AB: $f_1: \omega \to AB$.

Рис. 98

Пример 2. Пусть ABC — треугольник, X — объединение отрезков AB и BC, а Y — множество всех точек прямой AC (рис. 99). Каждой точке M множества X поставим в соответствие ее проекцию M_1 на прямую AC. Получим отображение $f_2: X \to Y$.

Пример 3. Рассмотрим прямую a в плоскости σ. Каждой точке M плоскости σ поставим в соответствие ее проекцию M_1 на прямую a. Получим отображение $f_3 : \sigma \to a$.

Пример 4. Рассмотрим эллипс γ с центром O и окружность ω, которая имеет общие касательные с эллипсом в концах его малой оси (рис. 100). Каждой точке M окружности ω поставим в соответствие точку M_1 пересечения луча OM с эллипсом γ. Получим отображение $f_4 : \omega \to \gamma$.

2. Пусть $f : X \to Y$ — данное отображение.

1) Если для любых двух различных элементов $x_1, x_2 \in X$ имеем: $f(x_1) \neq f(x_2)$, то отображение f называется *инъективным отображением* или коротко *инъекцией*.

2) Если $f(X) = Y$, т. е. каждая точка множества Y является образом по крайней мере одной точки множества X, то f называется отображением множества X *на* множество Y или *сюръективным отображением (сюръекцией)*.

3) Если отображение $f(X) \to Y$ одновременно является инъективным и сюръективным, то оно называется *взаимно однозначным отображением множества X на множество Y* или *биективным отображением* множества X на множество Y (коротко *биекцией*).

В приведенных в предыдущем пункте примерах отображение f_1 (пример 1) не является ни инъективным ($f(M) = f(N)$ при $M \neq N$, рис. 98), ни сюръективным (например, точка P прямой AB не имеет прообраза). Отображение f_2 (пример 2) является инъекцией (если $M \neq N$, то $f(M) \neq f(N)$, рис. 99), но не сюръекцией (точка P не имеет прообраза). Отображение f_3 (пример 3) является сюръекцией (каждая точка прямой a имеет прообраз), но не инъекцией. Отображение f_4 (пример 4) является взаимно однозначным отображением окружности ω на эллипс γ (биекция).

Замечание. Из приведенных выше определений следует, что если $f : X \to Y$ — произвольное отображение, то отображение $f_1 : X \to f(X)$ по закону $f_1(x) = f(x)$ является сюръекцией. Точно так же, если $f : X \to Y$ является инъекцией, то отображение $f_1 : X \to f(X)$ такое, что $f_1(x) = f(x)$ является биекцией.

3. Пусть $f : X \to Y$ — биективное отображение. Тогда можно построить другое отображение $f' : Y \to X$ по закону $f'(y) = x$, если $y = f(x)$. Другими словами, в отображении f' произвольный элемент y множества Y переходит в прообраз x этого элемента в отображении f. Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в том, что f' — взаимно однозначное отображение множества Y на множество X. Это отображение обычно обозначают через f^{-1} и называют *отобра-*

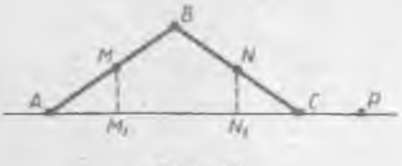


Рис. 99

Рис. 100

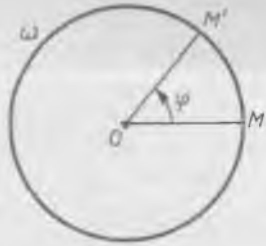


Рис. 101

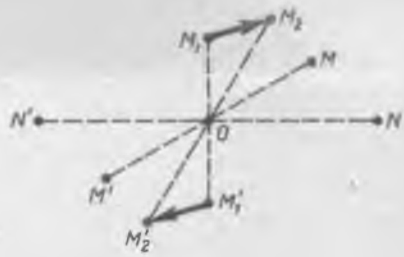


Рис. 102

жением, обратным к f. Таким образом, для любого биективного отображения $f: X \to Y$ можно построить обратное биективное отображение $f^{-1}: Y \to X$, причем если $y = f(x)$, то $x = f^{-1}(y)$.

Отображение $f_1: \omega \to \gamma$, рассмотренное в примере 4, является биективным, поэтому можно построить обратное отображение $f_4^{-1}: \gamma \to \omega$. При этом отображении каждой точке N_1 эллипса γ ставится в соответствие точка N пересечения луча ON_1 с окружностью ω (рис. 100).

4. Если в отображении $f: X \to Y$ множество $Y = f(X) = X$, то говорят, что дано *отображение множества X на себя. Преобразованием* (непустого) *множества X* называется любое биективное отображение множества X на себя. Рассмотрим примеры.

Пример 5. Пусть ω — окружность, заданная на ориентированной плоскости, а φ — ориентированный угол, причем $-\pi < \varphi \leqslant \pi$. Рассмотрим отображение $f: \omega \to \omega$, при котором каждой точке M окружности ω ставится в соответствие точка M' той же окружности так, что $\angle MOM' = \varphi$ (рис. 101). Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что $f: \omega \to \omega$ является преобразованием окружности ω.

Пример 6. Зададим на плоскости σ точку O и рассмотрим отображение $f: \sigma \to \sigma$, в котором каждая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно точки O (рис. 102). Если M и N — различные точки, то их образы $f(M)$ и $f(N)$ различны, поэтому f — инъективное отображение. Мы замечаем, что любая точка M' плоскости служит образом некоторой точки M плоскости, т. е. отображение f сюръективно. Итак, f является преобразованием плоскости. Оно называется *симметрией плоскости относительно точки O* (центральной симметрией или отражением от точки O). Точка O называется *центром симметрии*.

§ 40. Группа преобразований множества. Подгруппа группы преобразований

1. Для дальнейшего изложения напомним понятие группы, известное читателю из курса алгебры. *Группой* называется пара $(G, \circ)$, где G — непустое множество, на котором задана бинарная операция $\circ$ (закон композиции) и выполнены следующие три условия (аксиомы):

1) Бинарная операция $\circ$ ассоциативна, т. е. для любых элементов $a, b, c \in G$ имеем: $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

2) В множестве G имеется такой элемент e (нейтральный элемент), что $a \circ e = a$ для любого элемента a из G.

3)Для любого элемента a из G существует такой элемент a' (симметричный элемент), что $a \circ a' = e$.

В курсе алгебры доказывают, что нейтральный элемент единственный, причем $a \circ e = e \circ a$ и что для любого элемента a симметричный элемент a' единственный и $a \circ a' = a' \circ a$.

Как известно, при изучении групп используется мультипликативная или аддитивная форма записи бинарной операции. В геометрии обычно используется мультипликативная запись. При этом бинарную операцию называют умножением и вместо $a \circ b$ пишут: $a \cdot b$ (или ab). Элемент $a \cdot b$ называется *произведением* элементов a и b. Нейтральный элемент относительно умножения обозначают через e и называют *единичным* элементом или *единицей группы,* а элемент, симметричный a, называют *обратным* к элементу a и обозначают через a^{-1}.

2. Пусть $(G, \circ)$ — группа и $H \subset G$, $H \neq \varnothing$. Если $(H, \circ)$ — группа, то она называется *подгруппой* группы $(G, \circ)$. Говорят короче: H — подгруппа группы G (операция $\circ$ подразумевается).

Теорема 1. *Непустое множество H группы G является подгруппой этой группы, если выполнены следующие два условия:*

1) Если $a \in H$ и $b \in H$, то $a \circ b \in H$.

2) Если $a \in H$, то $a^{-1} \in H$.

□ Из условия 1) следует, что на множестве H определена бинарная операция $\circ$. Эта операция на множестве H ассоциативна, так как она ассоциативна на всем множестве G.

Докажем, что единица e группы G принадлежит множеству H. Действительно, пусть $a \in H$. По условию 2) $a^{-1} \in H$, поэтому по условию 1) $a \circ a^{-1} \in H$ или $e \in H$.

Наконец, из условия 2) следует, что для любого элемента a существует такой элемент $a^{-1} \in H$, что $a \circ a^{-1} = e$. Таким образом, выполнены все три условия, указанные в определении группы (п. 1), поэтому $(H, \circ)$ — группа, т. е. H — подгруппа группы G. ■

3. Рассмотрим какое-нибудь непустое множество E и обозначим через G_E множество всех преобразований множества E. Введем в множестве G_E закон композиции $\circ$ следующим образом. Пусть $f, g \in G_E$. Каждому элементу x множества E поставим в соответствие элемент z по следующему закону: $y = f(x)$, $z = g(y)$, тогда $z = g(f(x))$. Этим определено новое преобразование множества E, переводящее элемент x в элемент z (результат последовательного применения сначала преобразования f, а затем преобразования g). Оно обозначается через $g \circ f$ (или просто gf) и называется *композицией преобразований f и g (или произведением этих преобразований)*. Итак, по определению $(gf)(x) = g(f(x))$. Таким образом, на множестве G_E определена бинарная операция $\circ$ — умножение преобразований.

Т е о р е м а 2. *Пара* $(G_E, \circ)$, где $\circ$ — *композиция преобразований, является группой.*

□ Докажем, что для пары $(G_E, \circ)$ выполнены все три условия, указанные в определении группы.

1) Пусть $f, g, h \in G_E$, $h \circ (g \circ f) = m$, $(h \circ g) \circ f = n$. Докажем, что преобразования m и n совпадают. Для любого элемента x множества E по определению произведения имеем: $m(x) = h((gf)(x)) = h(g(f(x)))$, $n(x) = (hg)(f(x)) = h(g(f(x)))$. Таким образом, для любого элемента x множества E имеем: $m(x) = n(x)$. Это значит, что преобразования m и n совпадают: $m = n$, т. е. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2) Обозначим через e тождественное преобразование, т. е. преобразование, при котором каждому элементу множества E ставится в соответствие тот же элемент. Ясно, что для любого преобразования $f \in G_E$ имеем: $f \circ e = f$. Значит, e — нейтральный элемент относительно композиции преобразований.

3) Любое преобразование $f \in G_E$ является биективным отображением множества E на себя, поэтому существует обратное отображение $f^{-1}: E \to E$, которое является преобразованием множества E, поэтому $f^{-1} \in G_E$. Ясно, что $f \circ f^{-1} = e$. Действительно, пусть y — любой элемент из E. Если $f^{-1}(y) = x$, то $f(x) = y$, поэтому $(ff^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$, т. е. преобразование ff^{-1} совпадает с тождественным преобразованием e. ■

С л е д с т в и е. В группе G_E всех преобразований множества E тождественное преобразование является единицей группы, а преобразование f^{-1} — симметричным элементом преобразования f.

Любая подгруппа группы G_E называется просто *группой преобразований множества E*. Чтобы убедиться в том, что некоторое непустое множество H преобразований множества E является группой преобразований этого множества, надо применить теорему 1, т. е. проверить выполнимость двух условий:

1) Если $f \in H$, $g \in H$, то $gf \in H$.

2) Если $f \in H$, то $f^{-1} \in H$.

4. Пусть E — непустое множество, а G — некоторая группа преобразований этого множества. Непустое множество $F \subset E$ называется *эквивалентным* множеству F' относительно группы G, если в группе G существует такое преобразование, которое множество F переводит в множество F'. Если множество F эквивалентно множеству F', то пишут: $F \overset{G}{\sim} F'$. Рассмотрим свойства этого понятия.

1) *Для любой фигуры F имеем:* $F \overset{G}{\sim} F$. Действительно, тождественное преобразование e множества E является единицей группы G, т. е. $e \in G$. Но $e(F) = F$ и, значит, $F \overset{G}{\sim} F$.

2) *Если* $F \overset{G}{\sim} F'$, то $F' \overset{G}{\sim} F$.

Так как $F \overset{G}{\sim} F'$, то существует преобразование $f \in G$ такое, что $F' = f(F)$. Но тогда $f^{-1}(F') = F$, причем $f^{-1} \in G$. Таким образом, $F' \overset{G}{\sim} F$.

Аналогично можно доказать следующее свойство.

3) Если $F \overset{G}{\sim} F$, $F' \overset{G}{\sim} F''$, то $F \overset{G}{\sim} F''$.

Таким образом, *эквивалентность фигур является отношением эквивалентности* на множестве всех подмножеств множества E. Если фигуры F и F' эквивалентны относительно группы G, то коротко говорят, что они *G-эквивалентны.*

§ 41. Движения плоскости

1. Говорят, что преобразование плоскости *сохраняет расстояния,* если расстояние между любыми двумя точками A и B плоскости равно расстоянию между их образами A' и B', т. е. $AB = A'B'$.

Преобразование плоскости, сохраняющее расстояния, называется движением (или *перемещением*).

Наиболее простым примером движения является *тождественное преобразование* плоскости, т. е. преобразование, при котором каждая точка плоскости переходит в себя. Рассмотрим другие примеры движений.

Пример 1. Возьмем вектор $\vec{p}$, параллельный плоскости σ. Каждой точке $M \in \sigma$ поставим в соответствие точку M' так, чтобы $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Мы получаем некоторое отображение $f: \sigma \to \sigma$, которое, очевидно, является преобразованием плоскости σ. Оно называется *параллельным переносом* на вектор $\vec{p}$. Вектор $\vec{p}$ называется вектором переноса (рис. 103). Нетрудно заметить, что если $\vec{p} = \vec{0}$, то параллельный перенос — тождественное преобразование.

Докажем, что *параллельный перенос является движением.* Пусть M_1 и M_2 — две точки плоскости, а M_1' и M_2' — их образы. Тогда $\overrightarrow{M_1M_1'} = \vec{p}$, $\overrightarrow{M_2M_2'} = \vec{p}$, поэтому $\overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'}$. По лемме о равенстве векторов (§ 3, п. 1) $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1'M_2'}$, следовательно, $M_1M_2 = M_1'M_2'$ (см. рис. 103). Таким образом, при параллельном переносе сохраняются расстояния, т. е. параллельный перенос — движение.

Пример 2. Рассмотрим симметрию f плоскости относительно некоторой точки O (см. пример 6 из § 39). Она, очевидно, является преобразованием и сохраняет расстояния, так как если M_1 и M_2 — две точки, а M_1' и M_2' — их образы, то $\overrightarrow{OM_1'} = -\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2'} = -\overrightarrow{OM_2}$, поэтому $\overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{M_2M_1}$ (рис. 102). Отсюда следует, что $M_1M_2 = M_1'M_2'$, т. е. f — движение.

2. Упорядоченную тройку точек A, B, C плоскости, не лежащих на одной прямой, называют *репером* и обозначают так: $R = (A, B, C)$. Точки A, B и C называются *вершинами* репера, причем точка A называется его *началом.* Репер называется *аффинным,* если треугольник ABC произвольный, и *ортонормированным,* если угол A прямой, а $AB = AC = 1$.

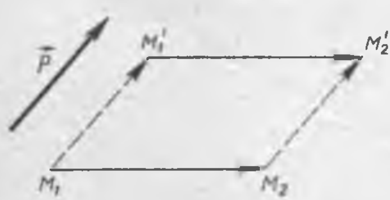


Рис. 103

Пусть на плоскости дана система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Отложив от точки O векторы $\overrightarrow{OE}_1=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE}_2=\vec{e}_2$, получим репер $R=(O, E_1, E_2)$, о котором мы скажем, что он соответствует системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Если данная система координат аффинная, то R — аффинный репер, а если система координат прямоугольная, то репер R ортонормированный. Обратно, если дан репер $R=(O, E_1, E_2)$, то можно построить систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, где $\vec{e}_1=\overrightarrow{OE}_1$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{OE}_2$, которой соответствует репер R. В дальнейшем будем говорить, что точка M в репере R имеет координаты (x, y), если (x, y) — координаты точки M в соответствующей системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Вообще в геометрии не делают различия между репером и системой координат.

Докажем, что *в любом движении репер переходит в репер, в частности ортонормированный репер — в ортонормированный репер.* В самом деле, пусть (A, B, C) — данный репер, а A', B', C' — образы соответственно точек A, B и C. Так как точки A, B и C не лежат на одной прямой, то $AB<AC+CB$, $BC<BA+AC$, $CA<CB+BA$. Движение сохраняет расстояния, поэтому $A'B'<A'C'+C'B'$, $B'C'<B'A'+A'C'$, $C'A'<C'B'+B'A'$. Отсюда следует, что точки A', B', C' не лежат на одной прямой, т. е. (A', B', C') — репер. Если (A, B, C) — ортонормированный репер, то по теореме Пифагора $AB^2+AC^2=BC^2$, поэтому $A'B'^2+A'C'^2=B'C'^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, $\triangle A'B'C'$ прямоугольный. Далее, $A'B'=AB=1$, $A'C'=AC=1$. Таким образом, (A', B', C') — ортонормированный репер.

3. Докажем следующую основную теорему.

Теорема 1. *Пусть $R=(A, B, C)$ и $R'=(A', B', C')$ — произвольные ортонормированные реперы плоскости σ. Тогда существует одно и только одно движение, которое репер R переводит в репер R'. При этом движении любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'.*

□ 1) Докажем сначала, что существует движение, которое репер R переводит в репер R'. Построим отображение $g:\sigma\to\sigma$ следующим образом. Произвольной точке M с координатами x, y в репере R поставим в соответствие точку M' с *теми же координатами* в репере R'. Ясно, что $A(0,\ 0)_R\overset{g}{\mapsto}A'(0,\ 0)_{R'}$, $B(1,\ 0)_R\overset{g}{\mapsto}B'(1,\ 0)_{R'}$ и $C(0,\ 1)_R\overset{g}{\mapsto}C'(0,\ 1)_{R'}$.

Отображение $g:\sigma\to\sigma$ является взаимно однозначным отображением плоскости на себя, т. е. является преобразованием плоскости σ. Докажем, что g сохраняет расстояния. В самом деле, пусть M_1 и M_2 — произвольные точки плоскости, которые в репере R имеют координаты $M_1(x_1, y_1)_R$ и $M_2(x_2, y_2)_R$. Тогда $M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$. Образы M_1' и M_2' точек M_1 и M_2 в репере R' имеют те же координаты: $M_1'(x_1, y_1)_{R'}$, $M_2'(x_2, y_2)_{R'}$, поэтому $M_1'M_2'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ и, следовательно, $M_1M_2=M_1'M_2'$. Таким образом, g — движение, которое переводит репер R в репер R'.

2) Докажем теперь, что g — единственное движение, которое

переводит репер R в репер R'. Допустим, что это не так, т. е. существует другое движение f, такое, что $R'=f(R)$. Тогда на плоскости существует такая точка M, что образ M_1 этой точки в движении g не совпадает с образом M_2 той же точки в движении f. Так как $A \overset{g}{\mapsto} A'$ и $A \overset{f}{\mapsto} A'$, то $AM=A'M_1$, $AM=A'M_2$, поэтому $A'M_1=A'M_2$, т. е. точка A' равноудалена от концов отрезка M_1M_2. Точно так же можно доказать, что точки B' и C' равноудалены от концов отрезка M_1M_2. Таким образом, точки A', B' и C' лежат на серединном перпендикуляре отрезка M_1M_2, т. е. на одной прямой, что противоречит определению репера.

Итак, g — единственное движение, которое репер R переводит в репер R'. При этом движении точка $M(x, y)_R$ переходит в точку $M'(x, y)_{R'}$. ■

4. Пользуясь этой теоремой, выясним, в какие фигуры переходят в движении прямая, полуплоскость, отрезок, луч и угол.

1^0. *Движение переводит прямую в прямую, а параллельные прямые — в параллельные прямые.*

□ Выберем ортонормированный репер R и рассмотрим его образ R' в данном движении. Тогда R' также ортонормированный репер (п. 2). Пусть прямая d в репере R определяется уравнением $Ax+By+C=0$. Образ d' этой прямой (т. е. множество образов всех точек прямой d) в репере R' определяется тем же уравнением, поэтому является прямой (теорема 1 § 21).

Рассмотрим теперь параллельные прямые d_1 и d_2 и их образы d_1' и d_2'. Если предположить, что прямые d_1' и d_2' имеют хотя бы одну общую точку M', то прообраз M этой точки лежит как на прямой d_1, так и на прямой d_2. Таким образом, прямые d_1 и d_2 имеют общую точку M; это противоречит условию. ■

2^0. *Движение переводит полуплоскость с границей a в полуплоскость с границей a', где a' — образ прямой a.*

□ Пусть α — данная полуплоскость с границей a, а α' — образ полуплоскости α в движении g. Если прямая a в репере R имеет уравнение $Ax+By+C=0$, то по теореме 2 § 21 полуплоскость α определяется неравенством

$$Ax+By+C>0 \text{ (или } Ax+By+C<0). \tag{1}$$

Множество α' в репере R', где $R'=g(R)$, определяется тем же неравенством (1). Отсюда следует, что α' — полуплоскость с границей a', где $a'=g(a)$. ■

Отношение λ, в котором точка C делит отрезок $\overline{AB}$ (см. § 12), называется *простым отношением трех точек* A, B, и C и обозначается так: $\lambda=(AB, C)$.

Докажем следующее важное свойство.

3^0. *Движение сохраняет простое отношение трех точек прямой.*

□ Пусть в репере R три произвольные точки одной прямой имеют координаты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x, y)$.

Если $\lambda=(AB, C)$, то по формулам (3) из § 12

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{2}$$

Если R' — образ репера R, то образы A', B', C' точек A, B, C в репере R' имеют координаты $A'(x_1, y_1)$, $B'(x_2, y_2)$, $C'(x, y)$. Равенства (2) показывают, что точка C' делит отрезок $A'B'$ в отношении λ, т. е. $(A'B', C')=\lambda$. Таким образом, $(AB, C)=(A'B', C')$. ■

Точка C лежит между точками A и B тогда и только тогда, когда $(AB, C)>0$, поэтому из свойства 3^0 следует утверждение.

4^0. *Движение сохраняет отношение «лежать между».*

Если $(AB, C)>0$, то точка C лежит на отрезке AB, а если $(AB, C)<0$, то точка C лежит на прямой AB, но вне отрезка AB. Отсюда и из свойства 3^0 следует утверждение.

5^0. *Движение переводит отрезок AB в отрезок $A'B'$, где A' и B' — образы точек A и B. При этом середина отрезка AB переходит в середину отрезка $A'B'$.*

Используя предыдущие свойства, предлагаем читателю самостоятельно доказать следующее утверждение.

6^0. *Движение переводит луч в луч, а угол — в угол.*

В заключение рассмотрим следующее важное свойство движений.

7^0. *Движение переводит угол в равный ему угол.*

□ Пусть $\angle AOB$ — данный угол, а $\angle A'O'B'$ — его образ, причем O', A' и B' — образы точек O, A и B. Если $\angle AOB$ развернутый, то утверждение теоремы очевидно, поэтому рассмотрим случай, когда этот угол неразвернутый, т. е. (O, A, B) — репер. Тогда (O', A', B') также репер. Треугольники OAB и $O'A'B'$ равны по третьему признаку равенства треугольников ($OA=O'A'$, $OB=O'B'$, $AB=A'B'$), поэтому $\angle AOB=\angle A'O'B'$. ■

Отсюда и из свойства 1^0 как следствие получаем утверждение.

8^0. *Движение переводит взаимно перпендикулярные прямые во взаимно перпендикулярные прямые.*

5. Пусть O — некоторая точка плоскости, h — луч, исходящий из этой точки, а α — полуплоскость, границе которой принадлежит луч h. Тройка O, h, α называется *флагом* и обозначается так: (O, h, α) (рис. 104). Очевидно, при движении флаг переходит в флаг.

Теорема 2. *Пусть (O, h, α) и (O', h', α') — произвольные флаги. Тогда существует одно и только одно движение, которое флаг (O, h, α) переводит в флаг (O', h', α').*

□ Введем в рассмотрение ортонормированные реперы (O, E_1, E_2) и (O', E_1', E_2') такие, что $E_1 \in h$, $E_2 \in \alpha$, $E_1' \in h'$, $E_2' \in \alpha'$ (рис. 105). Рассмотрим движение g, которое репер (O, E_1, E_2) переводит в репер (O', E_1', E_2'). Так как $O'=g(O)$, $E_1'=g(E_1)$, то $h'=g(h)$. Но $E_2'=g(E_2)$,

Рис. 104

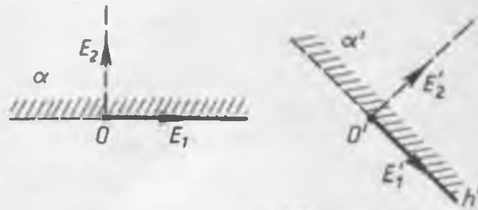


Рис. 105

поэтому $\alpha' = g(\alpha)$. Таким образом, движение g переводит флаг (O, h, α) в флаг (O', h', α').

Пусть f — произвольное движение, которое переводит флаг $(0, h, \alpha)$ в флаг (O', h', α'). Так как $h' = f(h)$, то $E_1 = f(E_1)$. Далее, углы E_1OE_2 и $E_1'O'E_2'$ прямые, поэтому движение f луч OE_2 переводит в луч $O'E_2'$, а следовательно, $E_2' = f(E_2)$. Таким образом, движение f переводит репер (O, E_1, E_2) в репер (O', E_1', E_2'), поэтому f совпадает с g. ■

§ 42. Два вида движений. Аналитическое выражение движения

1. Будем говорить, что реперы $R = (O, A, B)$ и $R' = (O', A', B')$ *одинаково ориентированы* (*противоположно ориентированы*), если базисы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}$ одинаково ориентированы (противоположно ориентированы) (см. § 13). Таким образом, реперы R и R' одинаково ориентированы, если $R|R' > 0$, и противоположно ориентированы, если $R|R' < 0$. Здесь $R|R' = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})|(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'})$.

Говорят, что преобразование точек плоскости *сохраняет ориентацию плоскости* (*меняет ориентацию плоскости*), если любой репер и его образ одинаково ориентированы (противоположно ориентированы).

Теорема 1. *Любое движение либо сохраняет, либо меняет ориентацию плоскости.*

□ Пусть g — произвольное движение, R_0 — некоторый ортонормированный репер, а R_0' — его образ, который также является ортонормированным репером (§ 41, п. 2). Возьмем произвольный репер $R = (O, A, B)$ и рассмотрим его образ $R' = (O', A', B')$. По основной теореме точки O, A, B в репере R_0 имеют те же координаты, что и соответствующие точки O', A', B' в репере R_0'. Отсюда следует, что векторы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ в репере R_0 имеют те же координаты, что и соответственно векторы $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}$ в репере R_0', поэтому $R_0|R = R_0'|R'$ или $R|R_0 = R'|R_0'$ Используя это равенство и свойство 2^0 (п. 1, § 13), получаем: $R|R' = (R|R_0)(R_0|R') = (R'|R_0')(R_0|R') = (R_0|R')(R'|R_0') = R_0|R_0'$.

Отсюда следует утверждение теоремы. Действительно, если $R_0|R_0' > 0$, то $R|R' > 0$, т. е. произвольный репер R и его образ R' ориентированы одинаково, а если $R_0|R_0' < 0$, то $R|R' < 0$, т. е. R и R' ориентированы противоположно. ■

Итак, доказано, что возможны два вида движений: движения, не меняющие ориентацию плоскости, и движения, меняющие ориентацию плоскости. В первом случае движение называется *движением первого рода*, а во втором случае — *движением второго рода*.

2. Пусть g — данное движение. Возьмем на плоскости ортонормированный репер $R = (O, E_1, E_2)$, обозначим через (x, y) координаты произвольной точки M плоскости, а через (x', y') — координаты ее образа M' в этом репере. Выразим x', y' через x, y, т. е. найдем аналитическое выражение движения g в репере R.

Для решения этой задачи рассмотрим образ $R'=(O',\ E_1',\ E_2')$ репера R в движении g. Так как движение g дано, то мы предполагаем, что репер R' задан, т. е. даны координаты точки O' $(x_0,\ y_0)$ в репере R и известен направленный угол $\alpha=(\widehat{\overrightarrow{OE_1},\ \overrightarrow{O'E_1'}})$.

По основной теореме точка M' в репере R' имеет координаты $(x,\ y)$. Следовательно, наша задача сводится к обычной задаче преобразования прямоугольной системы координат: точка M' в старом репере R имеет координаты $(x',\ y')$, а в новом репере R'— координаты $(x,\ y)$. Выразить x', y' через x и y.

Рассмотрим два случая.

А. Движение g является движением первого рода. Тогда реперы R и R' ориентированы одинаково, поэтому искомые формулы имеют вид (7) § 15:

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha-y\sin\alpha+x_0,\\ y'&=x\sin\alpha+y\cos\alpha+y_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Б. Движение g является движением второго рода. Тогда реперы R и R' ориентированы противоположно, поэтому искомые формулы имеют вид (9) § 15:

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha+y\sin\alpha+x_0,\\ y'&=x\sin\alpha-y\cos\alpha+y_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одной записи:

$$\begin{aligned} x'&=x\cos\alpha-\varepsilon y\sin\alpha+x_0,\\ y'&=x\sin\alpha+\varepsilon y\cos\alpha+y_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varepsilon=1$, если g — движение первого рода, и $\varepsilon=-1$, если g — движение второго рода.

3. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$ называется *ортогональной,* если ее элементы удовлетворяют условиям:

$$a_1^2+a_2^2=1,\ b_1^2+b_2^2=1,\ a_1b_1+a_2b_2=0. \tag{4}$$

Докажем, что *определитель ортогональной матрицы равен* ±1. Для этого введем ортонормированный базис $\vec{i},\ \vec{j}$ и в этом базисе рассмотрим векторы $\vec{a}\,(a_1,\ a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1,\ b_2)$. Условия (4) показывают, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют ортонормированный базис, поэтому по формуле (5) § 14 получаем: $\sin(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\delta$, где $\delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$. Если базис $\vec{a}$, $\vec{b}$ правый, то $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=\frac{\pi}{2}$, поэтому $\delta=1$, а если этот базис левый, то $(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=-\frac{\pi}{2}$, поэтому $\delta=-1$.

Заметим, что в формулах (1) и (2) коэффициенты при x и y образуют ортогональные матрицы:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}. \tag{5}$$

В п. 2 было доказано, что аналитическое выражение любого движения плоскости имеет вид (3), где матрица, образованная из коэффициентов при x и y, является ортогональной. Докажем обратное утверждение.

Теорема 2. *Если аналитическое выражение отображения f в ортонормированном репере $R=(O, E, E_2)$ имеет вид:*

$$x'=a_1x+b_1y+x_0, \quad y'=a_2x+b_2y+y_0, \tag{6}$$

где $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *— ортогональная матрица, то f — движение.*

При этом, если $\delta=1$, *то f — движение первого рода, а если $\delta=-1$, то f — движение второго рода. Здесь* $\delta=\begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}$.

□ Так как $\delta\neq 0$, то отображение f является преобразованием (читателю рекомендуется самостоятельно обосновать это утверждение). Докажем, что f — движение. Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ — две произвольные точки, а $M_1'(x_1', y_1')$ и $M_2'(x_2', y_2')$ — их образы. Используя формулы (6) и равенства (4), найдем: $(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$, или $M_1'M_2'^2=M_1M_2^2$. Таким образом, f сохраняет расстояния, поэтому является движением.

При движении f репер $R=(O, E_1, E_2)$ переходит в репер $R'=(O', E_1', E_2')$, где $O'(x_0, y_0)$, $E_1'(a_1+x_0, a_2+y_0)$, $E_2'(b_1+x_0, b_2+y_0)$, поэтому векторы $\overrightarrow{O'E_1'}$ и $\overrightarrow{O'E_2'}$ имеют координаты $\overrightarrow{O'E_1'}(a_1, a_2)$, $\overrightarrow{O'E_2'}(b_1, b_2)$. Отсюда следует, что $R|R'=\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}=\delta$. Если $\delta=1$, то реперы R и R' ориентированы одинаково, поэтому f — движение первого рода, а если $\delta=-1$, то реперы R и R' имеют противоположные ориентации, поэтому f — движение второго рода. ■

Эта теорема часто используется для доказательства того, что то или иное отображение является движением. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть на ориентированной плоскости σ дана точка O и направленный угол α. Определим отображение g: $\sigma\to\sigma$ следующим образом: точке M, отличной от точки O, поставим в соответствие точку M' так, чтобы $OM=OM'$ и $\angle MOM'=\alpha$, а точке O поставим в соответствие эту же точку O. Это отображение называется *поворотом* (или *вращением*) *плоскости вокруг точки O на угол α*. Точка O называется *центром поворота,* а величина α — *углом поворота.* Легко заметить, что поворот на угол π либо $-\pi$ является центральной симметрией.

Пользуясь предыдущей теоремой, докажем, что поворот является движением первого рода. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$, приняв за начало координат центр O поворота, и установим связь между координатами произвольной точки $M(x, y)$, отличной от точки O и ее образа $M'(x', y')$. По определению поворота $\angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})=\alpha$, $OM=OM'$. По формулам (5) из § 14 имеем:

$$\cos\alpha=\frac{xx'+yy'}{\rho^2}, \quad \sin\alpha=\frac{\begin{vmatrix} x\, x' \\ y\, y' \end{vmatrix}}{\rho^2},$$

где

$$\rho^2 = OM^2 = OM'^2 = \\ = x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

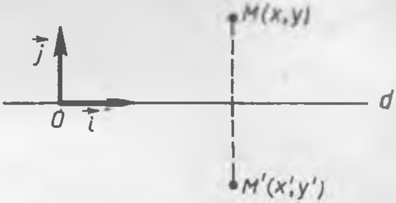


Рис. 106

Отсюда получаем:

$$xx' + yy' = \rho^2 \cos\alpha, \\ -yx' + xy' = \rho^2 \sin\alpha.$$

Эту систему можно рассматривать как систему двух уравнений с двумя неизвестными x', y'. Решая ее, находим:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{7}$$

Заметим, что эти формулы пригодны и в том случае, когда точка M совпадает с точкой O.

Мы получили аналитическое выражение поворота вокруг начала координат. Так как матрица, образованная из коэффициентов при x и y, ортогональная (см. (5), левая матрица) и определитель этой матрицы равен $+1$, то g — движение первого рода. При $\alpha = \pi$ или $\alpha = -\pi$ формулы (7) принимают вид:

$$x' = -x, \ y' = -y. \tag{8}$$

Эти формулы представляют собой аналитическое выражение центральной симметрии с центром в начале координат.

Пример 2. На плоскости σ возьмем прямую d и каждой точке $M \in \sigma$ поставим в соответствие точку M', симметричную точке M относительно прямой d (рис. 106). Напомним, что каждая точка прямой d симметрична самой себе относительно этой прямой. Мы получаем преобразование плоскости σ, которое называется *осевой симметрией* или *отражением от прямой* d. Прямая d называется *осью симметрии*.

Докажем, что осевая симметрия является движением. Для этого выберем на плоскости прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$ так, как показано на рисунке 106, и запишем аналитическое выражение осевой симметрии. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — ее образ. Так как точки M и M' симметричны относительно оси абсцисс, то

$$x' = x, \ y' = -y. \tag{9}$$

По теореме 2 *осевая симметрия является движением второго рода.*

§ 43. Классификация движений плоскости

1. Точку плоскости назовем *инвариантной (неподвижной) точкой* преобразования, если она переходит в себя в этом преобразовании. Прямую назовем *инвариантной (неподвижной) прямой* преобразования, если любая ее точка переходит в точку этой же прямой.

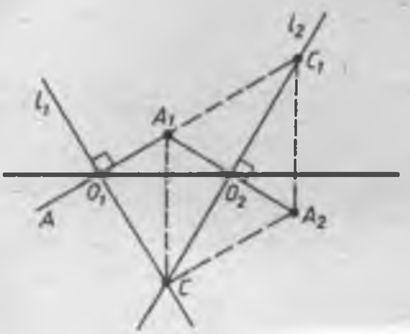


Рис. 107

В частности, прямая является инвариантной, если каждая ее точка инвариантна в данном преобразовании (такую прямую будем называть *прямой инвариантных точек*). Если, например, g — осевая симметрия, то ось этого преобразования и любая прямая, перпендикулярная к ней, являются инвариантными прямыми, причем ось симметрии — прямая инвариантных точек.

Лемма 1. *Если движение g не имеет ни одной инвариантной точки, то оно имеет хотя бы одну инвариантную прямую.*

□ Пусть A — произвольная точка плоскости, $A_1=g(A)$, $A_2=g(A_1)$. По условию леммы точка A не совпадает с точкой A_1, а точка A_1 — с точкой A_2. Если точки A, A_1 и A_2 лежат на одной прямой, то эта прямая является инвариантной, поэтому рассмотрим случай, когда эти точки не лежат на одной прямой (рис. 107).

Рассмотрим середины O_1 и O_2 отрезков AA_1 и A_1A_2 и докажем, что O_1O_2 — инвариантная прямая (рис. 107). Для этого проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 отрезков AA_1 и A_1A_2 и обозначим через C их точку пересечения. Очевидно, $O_2=g(O_1)$, поэтому $l_2=g(l_1)$ (свойство 8^0 из § 41). Так как $O_1C=O_2C$, то точка C прямой l_1 переходит либо в ту же точку C прямой l_2, либо в точку C_1, симметричную точке C относительно точки O_2 (см. рис. 107). Первый случай не может иметь места, так как g не имеет неподвижных точек, поэтому $C_1=g(C)$. Таким образом, прямая A_1C переходит в параллельную ей прямую A_2C_1 (четырехугольник $A_1CA_2C_1$ — параллелограмм).

Пусть m' — образ прямой O_1O_2. Так как $O_1O_2 \perp A_1C$, то $m' \perp A_2C_1$ или $m' \perp A_1C$. Мы видим, что прямая m' проходит через точку O_2 и перпендикулярна прямой A_1C, поэтому m' совпадает с прямой O_1O_2. ■

Лемма 2. *Если движение g луч h переводит в себя, то g либо тождественное преобразование, либо отражение от прямой p, содержащей луч h.*

□ Обозначим через O начало луча h, а через λ и λ' — две полуплоскости с общей границей, содержащей луч h. Возможны только два случая.

1) Движение g переводит флаг (O, h, λ) в флаг (O, h, λ). По теореме п. 2 § 41 g — тождественное преобразование.

2) Движение g переводит флаг (O, h, λ) в флаг (O, h, λ'). По теореме 2 § 41 движение g совпадает с осевой симметрией относительно прямой p. ■

2. Проведем классификацию движений в зависимости от наличия неподвижных точек и инвариантных прямых.

А. Классификация движений первого рода.

1) Движение имеет более чем одну неподвижную точку. Пусть A и B — две неподвижные точки движения g. Тогда луч AB переходит в себя, поэтому по лемме 2 g либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия. Но осевая симметрия является движением второго рода, поэтому g — *тождественное преобразование*.

2) Движение g имеет только одну неподвижную точку. Выберем ортонормированный репер (O, E_1, E_2) так, чтобы точка O была неподвижной точкой, и запишем аналитическое выражение этого движения. В данном случае формулы (1) из § 42 имеют вид:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha,\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{1}$$

Так как g не является тождественным преобразованием, то $\alpha \neq 0$. Формулы (1) в точности совпадают с формулами (7) § 42, поэтому g — вращение вокруг точки O на угол α (§ 42, п. 3). При $\alpha = \pi$ либо $\alpha = -\pi$ преобразование g — центральная симметрия с центром O. Заметим, что если $-\pi < \alpha < \pi$, то g не имеет инвариантных прямых, а в случае $\alpha = \pi$ либо $\alpha = -\pi$ — бесконечное множество инвариантных прямых; инвариантными будут те и только те прямые, которые проходят через точку O.

3) Движение g не имеет неподвижных точек. Согласно лемме 1, существует хотя бы одна инвариантная прямая l.

Пусть O — некоторая точка этой прямой, $O_1 = g(O)$, $O_2 = g(O_1)$. Точки O, O_1 и O_2 лежат на прямой l и попарно различны, так как g не имеет неподвижных точек (если предположить, что точки O и O_2 совпадают, тогда середина отрезка OO_1 была бы неподвижной точкой, что невозможно).

Выберем ортонормированный репер (O, E_1, E_2) так, чтобы $E_1 \in l$. Пусть в этом репере точка O_1 имеет координаты $O_1(a, 0)$. Так как $OO_1 = O_1O_2$, то O_2 имеет координаты $(2a, 0)$.

Допустим, что аналитическое выражение движения g в репере (O, E_1, E_2) имеет вид (1) § 42. Так как $O = g(O_1)$, $O_2 = g(O_1)$, то $x_0 = a$, $y_0 = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$, поэтому формулы (1) § 42 принимают вид:

$$x' = x + a,\ y' = y. \tag{2}$$

Отсюда следует, что g — параллельный перенос на ненулевой вектор $\bar{p}(a, 0)$ (см. § 41, пример 1). Действительно, если $M(x, y)$ — произвольная точка, а $M'(x', y')$ — ее образ, то из формул (2) получаем: $\overline{MM'} = \bar{p}$. Любая прямая, параллельная вектору $\bar{p}$, является инвариантной прямой параллельного переноса. Других инвариантных прямых нет.

Б. Классификация движений второго рода. Из формул (2) § 42 получаем следующие уравнения для нахождения координат неподвижных точек движения второго рода:

$$(\cos\alpha - 1)x + \sin\alpha y + x_0 = 0,$$
$$\sin\alpha x - (\cos\alpha + 1)y + y_0 = 0.$$

Определитель этой системы при любом α равен нулю, и не все коэффициенты при x и y равны нулю, поэтому любое движение второго рода *либо имеет прямую инвариантных точек, либо не имеет ни одной инвариантной точки*. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) Движение g имеет прямую инвариантных точек. Пусть h — какой-нибудь луч этой прямой. Так как $h=g(h)$, то по лемме 2 g — либо тождественное преобразование, либо осевая симметрия. Но тождественное преобразование является движением первого рода, поэтому g — осевая симметрия.

2) Движение g не имеет инвариантных точек. Этот случай аналогичен случаю параллельного переноса (см. п. А, случай 3). Выберем ортонормированный репер (O, E_1, E_2) так, чтобы точки O и E_1 лежали на инвариантной прямой l. Пусть $O_1=g(O)$, $O_2=g(O_1)$. Если точка O_1 имеет координаты $(a, 0)$, то точка O_2 имеет координаты $(2a, 0)$. Предположим, что аналитическое выражение движения g в репере (O, E_1, E_2) имеет вид (2) § 42. Из условий $O \mapsto O_1$, $O_1 \mapsto O_2$ получаем: $x_0=a$, $y_0=0$, $\cos\alpha=1$, $\sin\alpha=0$, поэтому формулы (2) из § 42 принимают вид:

$$x'=x+a,\ y'=-y. \tag{3}$$

Докажем, что $g=s\cdot f$, где f — параллельный перенос на ненулевой вектор $\vec{p}(a, 0)$, а s — отражение от прямой l. В самом деле, преобразования s и f в репере (O, E_1, E_2) определяются формулами:

$$s:\ \begin{matrix} x'=\tilde{x}, \\ y'=-\tilde{y}; \end{matrix} \qquad f:\ \begin{matrix} \tilde{x}=x+a, \\ \tilde{y}=y, \end{matrix}$$

поэтому отображение $s\cdot f$ определяется формулами (3), т. е. совпадает с g. В этом случае движение g называется *скользящей симметрией*. Ясно, что скользящая симметрия не имеет инвариантных точек и имеет только одну инвариантную прямую.

Итак, существуют четыре типа движений, которые приведены в следующей таблице.

Название движения	Инвариантные точки	Инвариантные прямые
I. Движения первого рода		
1. Поворот на угол α а) Поворот на угол $\alpha\neq0$ и $\alpha\neq\pm\pi$	Центр поворота	Нет
б) Тождественное преобразование ($\alpha=0$)	Любая точка плоскости	Любая прямая плоскости

Название движения	Инвариантные точки	Инвариантные прямые
в) Центральная симметрия ($\alpha = \pm\pi$)	Центр симметрии	Любая прямая, проходящая через центр симметрии
2. Параллельный перенос на вектор $\bar{p}$ а) Параллельный перенос на вектор $\bar{p} \neq \bar{0}$	Нет	Любая прямая, параллельная вектору $\bar{p}$
б) Тождественное преобразование ($\bar{p} = \bar{0}$)	Любая точка плоскости	Любая прямая плоскости
II. Движения второго рода		
3. Осевая симметрия	Все точки оси	Ось симметрии и любая прямая, перпендикулярная к ней
4. Скользящая симметрия	Нет	Одна прямая

§ 44. Группа движений плоскости и ее подгруппы

1. Можно доказать, что произведение двух движений есть движение. Действительно, пусть g и f — движения. Так как они являются преобразованиями плоскости, то fg также преобразование плоскости (§ 40, п. 3). Но каждое из движений g и f сохраняет расстояния, поэтому и fg сохраняет расстояния, так как при последовательном выполнении двух движений расстояния сохраняются. Таким образом, fg — движение.

Любое движение первого рода сохраняет ориентацию плоскости. Отсюда заключаем, что если g и f — движения первого рода, то и fg — движение первого рода. С другой стороны, если g и f — движения второго рода, то каждое из них меняет ориентацию плоскости, поэтому fg — движение *первого рода*. Отметим, наконец, что если f — движение первого рода, а g — движение второго рода,

Рис. 108

то gf — движение *второго рода*. Эти утверждения дают возможность, используя таблицу предыдущего параграфа, в ряде случаев легко определить, к какому типу относится произведение двух данных движений. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Доказать, что произведение двух центральных симметрий есть параллельный перенос.

Решение. Пусть g_1 — отражение от точки O_1 и g_2 — отражение от точки O_2. Так как g_1 и g_2 — движения первого рода, то g_2g_1 — движение первого рода. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точки O_1 и O_2 совпадают. В этом случае, очевидно, g_2g_1 — тождественное преобразование, т. е. параллельный перенос на вектор $\vec{p}=\vec{0}$.

2) Точки O_1 и O_2 не совпадают. При движении g_2g_1 образы O_1' и O_2' точек O_1 и O_2 лежат на прямой O_1O_2 и, кроме того, точка O_2 является серединой отрезка O_1O_1' (рис. 108). Поэтому прямая O_1O_2 является инвариантной прямой преобразования g_2g_1. На этой прямой нет ни одной неподвижной точки. В самом деле, если, например, A — неподвижная точка, то $O_1A=O_1'A$, т. е. A совпадает с точкой O_2, что невозможно, так как O_2 не является неподвижной точкой (см. рис. 108.) Итак, g_2g_1 — движение первого рода, которое имеет инвариантную прямую, на которой нет неподвижных точек. Отсюда следует, что g_2g_1 — параллельный перенос на ненулевой вектор (см. таблицу в § 43).

Пример 2. Выяснить тип преобразования, которое является произведением отражений f_1 и f_2 от двух прямых p и l соответственно.

Решение. Так как f_1 и f_2 — движения второго рода, то $f=f_2f_1$ — движение первого рода. Рассмотрим два возможных случая.

1) Прямые p и l параллельны. Очевидно, любая прямая, перпендикулярная прямым p и l, является инвариантной прямой преобразования f. Таким образом, f — параллельный перенос на вектор $\vec{p}$, так как только параллельный перенос имеет параллельные инвариантные прямые (см. таблицу на с. 127). Так как f не является тождественным преобразованием, то $\vec{p}\neq\vec{0}$.

2) Прямые p и l пересекаются в точке O. Точка O является неподвижной точкой движения f, поэтому f — поворот вокруг точки O на угол α. Так как f не является тождественным преобразованием, то $\alpha\neq 0$. Если $p\perp l$, то p и l — инвариантные прямые, поэтому f — центральная симметрия, а если p не перпендикулярны к l, то f — поворот на угол α, где $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq\pm\pi$.

Пример 3. Выяснить тип преобразования, которое является произведением отражения g от точки O и отражения f от прямой p.

Решение. Так как g — движение первого рода, а f — движение второго рода, то fg — движение второго рода, т. е. либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия. Предлагаем читателю по аналогии с предыдущим самостоятельно доказать, что если $O \in p$, то fg — осевая симметрия, а если $O \notin p$, то fg — скользящая симметрия.

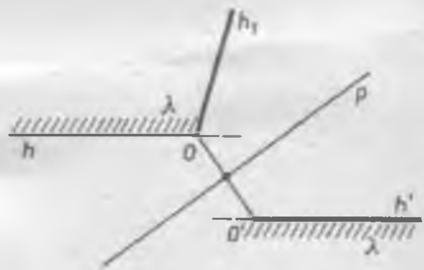


Рис. 109

2. Из четырех типов движений осевая симметрия играет особую роль, о чем свидетельствует следующая теорема.

Теорема 1. *Любое движение g плоскости является либо осевой симметрией, либо представляет произведение не более трех осевых симметрий.*

□ Возьмем некоторый флаг (O, h, λ) и рассмотрим его образ (O', h', λ'). Возможны два случая.

1) Точки O и O' совпадают, т. е. лучи h и h' имеют общее начало. В этом случае существует прямая p, относительно которой лучи h и h' симметричны (если лучи h и h' совпадают, то p — прямая, содержащая луч h). Рассмотрим движение f, определяемое формулой

$$f = f_1 g, \tag{1}$$

где f_1 — отражение от прямой p.

Так как $f(h) = h$, то по лемме 1 (§ 43) движение f является либо тождественным преобразованием e, либо осевой симметрией. Из равенства (1) получаем: $f_1 f = f_1(f_1 g) = (f_1 f_1) g = g$. Итак,

$$g = f_1 f. \tag{2}$$

Итак, движение g — либо осевая симметрия (если $f = e$), либо произведение двух осевых симметрий.

2) Точки O и O' не совпадают. Пусть p — серединный перпендикуляр отрезка OO'. Рассмотрим движение f, заданное формулой (1). Движение f переводит h в некоторый луч h_1, причем h и h_1 имеют общее начало O (рис. 109). По доказанному (см. случай 1) движение f — либо осевая симметрия, либо произведение двух осевых симметрий. Поэтому из равенства (2) следует утверждение теоремы. ■

3. Обозначим через D множество всех движений плоскости. Из основной теоремы (теорема 1 § 41) следует, что D — бесконечное множество. В п. 1 показано, что если $g \in D$, $f \in D$, то $fg \in D$. Далее, если $g \in D$, то $g^{-1} \in D$. Таким образом (см. § 40, п. 3), множество D является группой преобразований. Эта группа называется *группой движений плоскости.*

Пусть F — некоторая фигура. Те свойства фигуры F, которые сохраняются при всех движениях, называются *инвариантными свойствами* этой фигуры относительно группы D или, короче, *инвариантами* группы D. Так, расстояние между двумя точками A и B — инвариантное свойство фигуры $\{A, B\}$ относительно груп-

5 Заказ 119

пы D. Это основной инвариант группы движений. Свойства фигуры быть отрезком, лучом, прямой являются примерами инвариантных свойств фигур относительно группы D. Далее, простое отношение трех точек прямой, мера угла, площадь фигуры также являются инвариантами группы D.

Рассмотрим важнейшие подгруппы группы D и укажем некоторые инварианты этих подгрупп, которые не являются инвариантами группы D.

1) Обозначим через D_1 множество всех движений первого рода. Любое движение первого рода сохраняет ориентацию плоскости. Отсюда заключаем, что если g, $f \in D_1$, то $fg \in D_1$ и $g^{-1} \in D_1$. Значит, D_1 — подгруппа группы D. Она называется *группой движений первого рода*. Любое движение первого рода сохраняет ориентацию плоскости, т. е. переводит любой репер в репер той же ориентации. Поэтому ориентация репера — инвариант группы D.

Замечание. Отметим, что множество D_2 движений второго рода не является группой. В самом деле, если g_1 и g_2 — движения второго рода, то g_2g_1 — движение первого рода (п. 1), поэтому $g_2g_1 \notin D_2$.

2) Пусть $D_1(M_0)$ — множество всех движений первого рода, для которых M_0 — неподвижная точка. Очевидно, $D_1(M_0) \subset D_1$. Если f, $g \in D_1(M_0)$, то ясно, что $gf \in D_1(M_0)$ и $g^{-1} \in D_1(M_0)$. Значит, $D_1(M_0)$ — подгруппа группы D_1. Эта группа состоит из всех вращений вокруг точки M_0. Она называется *группой вращений плоскости вокруг точки* M_0. Расстояние от произвольной точки M до центра M_0 вращения является инвариантом группы $D_1(M_0)$.

3) Рассмотрим множество T, состоящее из всех параллельных переносов. Очевидно, $T \subset D_1$. Пусть f и g — параллельные переносы с векторами переносов $\vec{p}$ и $\vec{g}$. Нетрудно видеть, что если $M' = (gf)(M)$, то $\overrightarrow{MM'} = \vec{p} + \vec{q}$. Таким образом, gf — параллельный перенос на вектор $\vec{p} + \vec{q}$. Далее, так как преобразование $M' = f(M)$ — параллельный перенос, то $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Но тогда $\overrightarrow{M'M} = -\vec{p}$, т. е. f^{-1} — параллельный перенос на вектор $-\vec{p}$. Таким образом, если f, $g \in T$, то $gf \in T$ и $f^{-1} \in T$. Этим доказано, что T — подгруппа группы D_1; она называется *группой переносов плоскости*. Инвариантом этой группы является, например, направление (см. § 1, п. 3).

Примеры, рассмотренные выше, являются бесконечными подгруппами группы D. В следующем параграфе покажем, что существуют и конечные подгруппы группы D, т. е. подгруппы, которые являются конечными множествами.

4. Две фигуры F и F' называются *равными* (или *конгруэнтными*), если они D-эквивалентны (§ 40, п. 4), т. е. если существует такое движение g, что $F' = g(F)$; пишут: $F = F'$ (или $F \cong F'$). Так как D-эквивалентность фигур является отношением эквивалентности на множестве всех фигур плоскости, то справедливы утверждения:

1) $F = F$ для любой фигуры F.

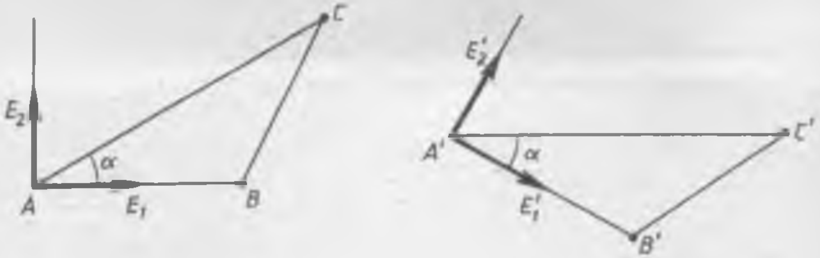


Рис. 110

2) $F_1 = F_2 \Rightarrow F_2 = F_1$.

3) $(F_1 = F_2,\ F_2 = F_3) \Rightarrow F_1 = F_3$.

Для того чтобы установить равенство двух фигур, не обязательно доказывать существование движения, которое одну фигуру переводит в другую. В ряде случаев удается установить равенство фигур, сравнивая только некоторые их элементы. Например, пользуясь основной теоремой, нетрудно доказать, что два эллипса равны тогда и только тогда, когда их полуоси равны. В частности, две окружности равны тогда и только тогда, когда их радиусы равны.

Рассмотрим равенство треугольников.

Теорема 2. *Для того чтобы $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства*[1]:

$$\angle A = \angle A',\ \angle B = \angle B',\ \angle C = \angle C',\ AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C'. \tag{3}$$

□ Необходимость очевидна, поэтому докажем только достаточность условия. Пусть выполняются равенства (3), докажем, что $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Рассмотрим два ортонормированных репера $(A,\ E_1,\ E_2)$ и $(A',\ E_1',\ E_2')$, расположенные так, как показано на рисунке 110. Если $AB = c$, $AC = b$, $\widehat{BAC} = \alpha$, то вершины треугольника ABC в репере $(A,\ E_1,\ E_2)$ имеют координаты $A(0,\ 0)$, $B(c,\ 0)$, $C(b\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$. Из равенств (3) заключаем, что вершины треугольника $A'B'C'$ в репере $(A',\ E_1',\ E_2')$ имеют координаты $A'(0,\ 0)$, $B'(c,\ 0)$, $c(b\cos\alpha,\ b\sin\alpha)$. По основной теореме существует движение g, которое переводит репер $(A,\ E_1,\ E_2)$ в репер $(A',\ E_1',\ E_2')$. Очевидно, точки A, B, C переходят соответственно в точки A', B', C', поэтому $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$. ■

В школьных курсах геометрии этот признак нередко принимается за определение равенства треугольников[2]. Читателю известно, что в курсе геометрии доказываются три признака, которые позволяют установить равенство треугольников ABC и $A'B'C'$ по некоторым из равенств (3).

---

[1] Запись $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ означает, что существует движение, при котором $A \to A'$, $B \to B'$ и $C \to C'$.

[2] См., например: Погорелов А. В. Геометрия. Учебное пособия для 6—10 классов средней школы. 3-е изд., § 1. М., Просвещение, 1983.

Имеет место аналогичная теорема для равенства выпуклых многоугольников: два одноименных выпуклых многоугольника равны тогда и только тогда, когда между их вершинами можно установить такое соответствие, что соответствующие углы равны и соответствующие стороны равны.

§ 45. Группа симметрий геометрической фигуры

1. Пусть D_F — множество всех движений плоскости, переводящих фигуру F в себя. Очевидно, если $f \in D_F$, $g \in D_F$, то $gf \in D_F$ и $g^{-1} \in D_F$. Следовательно, D_F — группа, которая является подгруппой группы D движений плоскости.

Если группа D_F содержит элементы, отличные от единицы группы (тождественного преобразования), то она называется *группой симметрий фигуры* F, а ее элементы — *симметриями этой фигуры*. Если D_F состоит из одного тождественного преобразования, то говорят, что фигура F не имеет симметрий.

Группа D_F может иметь бесконечное множество элементов и может содержать конечное число элементов. Если, например, F — окружность с центром O, то группа D_F является бесконечным множеством: оно содержит любое вращение с центром O и любое отражение от прямой, проходящей через точку O. Но если F — равнобедренный, но не равносторонний треугольник ($\triangle ABC$ на рисунке 111, $AB = AC \neq BC$), то группа D_F состоит только из двух элементов — тождественного преобразования и отражения от прямой, содержащей высоту треугольника, проведенную к основанию (прямая AH на рисунке 111). Отметим, кстати, что разносторонний треугольник не имеет симметрий ($\triangle A_1B_1C_1$ на рисунке 111).

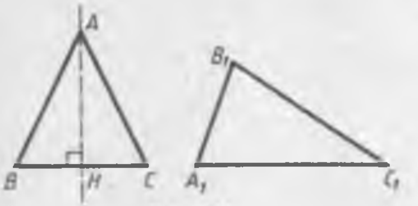


Рис. 111

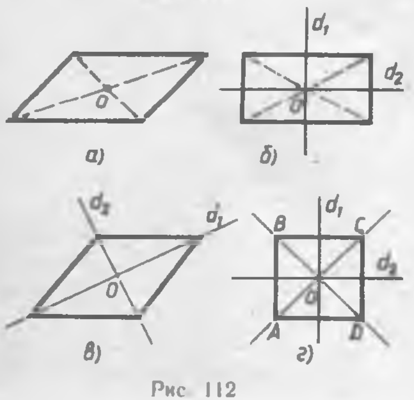


Рис 112

Прямая d называется *осью симметрии фигуры* F, если $f \in D_F$, где f — отражение от прямой d; точка M_0 называется *центром симметрии фигуры*, если отражение от точки M_0 принадлежит группе D_F. Параллелограмм, отличный от прямоугольника или ромба, имеет один центр симметрии — центр параллелограмма и не имеет осей симметрии (рис. 112, *а*). Прямоугольник (или ромб), отличный от квадрата, имеет один центр и две оси симметрии (прямые d_1 и d_2 на рисунках 112, *б* и *в*), но квадрат имеет четыре оси симметрии (прямые d_1, d_2, AC, BD на рисунке 112, *г*).

Существуют фигуры, которые имеют бесконечное множество центров и осей симметрии. Пусть, например, F — полоса между параллельными прямыми d_1 и d_2 (рис. 113), а d_0 — прямая, параллельная d_1 и d_2 и отстоящая от них на равном расстоянии. Тогда любая точка прямой d_0 является центром симметрии фигуры F, а любая прямая, перпендикулярная d_0, а также прямая d_0 — осью симметрии этой фигуры.

Рис. 113

2. Фигура называется *ограниченной,* если существует такое число m, что расстояние между любыми двумя точками фигуры меньше m. Если F — ограниченная фигура, то всегда найдется такой круг, что все точки фигуры F принадлежат этому кругу. Примерами ограниченных фигур являются многоугольник, окружность, эллипс. Такие фигуры, как прямая, гипербола, парабола, являются примерами неограниченных фигур.

Рассмотрим некоторые свойства группы D_F, если F — ограниченная фигура.

1^0. *Группа D_F ограниченной фигуры не содержит параллельных переносов на ненулевые векторы и скользящих симметрий.*

□ Пусть, напротив, $g \in D_F$, где g — параллельный перенос на вектор $\bar{p} \neq \bar{0}$. Тогда, если $M_0 \in F$, то $M_1 \in F$, где $\overrightarrow{M_0M_1} = \bar{p}$. Аналогично можно доказать, что точки M_2, M_3, ..., M_k, определяемые равенствами $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \bar{p}$, принадлежат фигуре F. Итак, для любого k точки M_0 и M_k принадлежат фигуре. Но $\overrightarrow{M_0M_k} = k\bar{p}$, что невозможно, так как F — ограниченная фигура.

Теперь докажем, что D_F не содержит скользящих симметрий. Пусть, например, $f \in D_F$, где f — скользящая симметрия. Тогда $ff \in D_F$, что невозможно, так как ff — параллельный перенос на ненулевой вектор. ■

2^0. *Ограниченная фигура имеет не более чем один центр симметрии.*

Предположим противное, т. е. что ограниченная фигура D имеет более чем один центр симметрии. Рассмотрим отражения f_1 и f_2 от двух из этих центров. Так как f_1, $f_2 \in D_F$, то $f_2f_1 \in D_F$. Но это противоречит свойству 1^0, так как f_2f_1 — параллельный перенос на ненулевой вектор (пример 1 из § 44). ■

3^0. *Если ограниченная фигура имеет центр симметрии M_0, то все оси симметрии фигуры, если они существуют, проходят через точку M_0.*

□ Предположим противное, т. е. что какая-то ось симметрии d фигуры F не проходит через точку M_0. Рассмотрим отражение g от точки M_0 и отражение f от прямой d. Так как $g \in D_F$, $f \in D_F$, то $fg \in D_F$. Но это невозможно, так как fg — скользящая симметрия (пример 3 из § 44). ■

Предлагаем читателю, пользуясь примером 2 § 44, по аналогии с предыдущим самостоятельно доказать следующее утверждение.

4^0. *Если ограниченная фигура имеет более чем одну ось симметрии, то все эти оси пересекаются в одной точке.*

3. Точка M_0 называется *центром вращения порядка* n (n — натуральное число, $n>1$) фигуры F, если поворот плоскости вокруг точки M_0 на угол $\alpha_0=\frac{2\pi}{n}$ принадлежит группе D_F. Если фигура имеет центр симметрии M_0, то говорят также, что M_0 — центр вращения второго порядка фигуры F.

Пусть F — правильный n-угольник, M_0 — его центр, а v_0 — поворот плоскости вокруг точки M_0 на угол $\alpha_0=\frac{2\pi}{n}$. Рассмотрим множество $W_n=\{v, v^2, \ldots, v^{n-1}, v^n=e\}$, где $v^2=vv$, $v^3=vvv$ и т. д. Это множество состоит из вращений $v, v^2, \ldots, v^{n-1}$. Нетрудно видеть, что произведение любых двух движений из этого множества есть движение из этого же множества. Далее, так как $v^k\cdot v^{n-k}=e$, то из $g\in W_n$ следует: $g^{-1}\in W_n$.

Таким образом, W_n — группа (подгруппа группы D_F). Она называется *группой вращений правильного n-угольника.* Эта группа состоит из степеней одного из своих элементов (элемента v). В алгебре такие группы называются *циклическими,* а элемент v — *образующим элементом.* Итак, с каждым правильным n-угольником связана циклическая группа W_n, образующим элементом которой служит поворот вокруг центра M_0 этого n-угольника на угол $\frac{2\pi}{n}$. Например, циклическая группа $W_3=\{v, v^2, v^3=e\}$ правильного треугольника состоит из трех элементов. Здесь v — поворот вокруг центра M_0 треугольника на угол 120°. Циклическая группа $W_4=\{v, v^2, v^3, v^4=e\}$ квадрата состоит из четырех элементов; здесь v — поворот вокруг центра квадрата на угол 90°.

4. Центр симметрии, ось симметрии, центр вращения порядка n фигуры F называются *элементами симметрии* этой фигуры. Рассмотрим элементы симметрии некоторых фигур.

1) Правильный треугольник ABC с центром O (рис. 114). Фигура имеет три оси симметрии OA, OB и OC и центр вращения O третьего порядка.

2) Квадрат $ABCD$ с центром O (рис. 112, *г*). Фигура

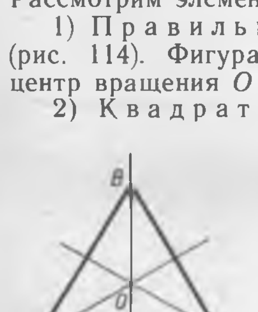


Рис. 114

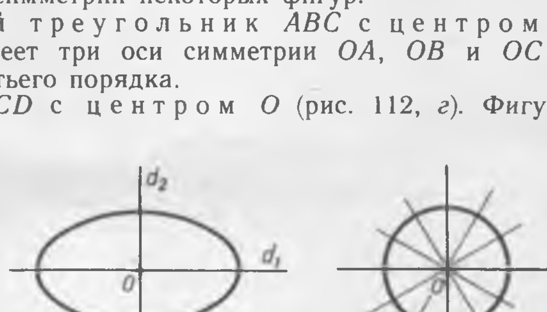


Рис. 115

имеет центр симметрии O, который является также центром вращения четвертого порядка, и четыре оси симметрии: d_1, d_2, AC и BD.

3) Эллипс с центром O и полуосями a и b. Если $a>b$, то эллипс имеет один центр симметрии O и две оси симметрии d_1 и d_2, содержащие полуоси эллипса (рис. 115, *а*). Если $a=b$, т. е. эллипс является окружностью, то фигура имеет центр симметрии O и бесконечное множество осей симметрии любая прямая, проходящая через точку O, является осью симметрии (рис. 115, *б*). Точка O является также центром вращения n-го порядка, где n — любое натуральное число, большее единицы.

Элементы симметрии фигуры часто используются при решении различных задач, связанных с фигурой,— задач на построение, вычисление или доказательство.

§ 46. Преобразование подобия

1. Преобразование плоскости называется *преобразованием подобия* или просто *подобием,* если существует такое число $k>0$, что для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B'=kAB$. Число k называется *коэффициентом подобия.*

При $k=1$ преобразование подобия сохраняет расстояния, т. е. является движением. Следовательно, *движение — частный случай преобразования подобия.* Рассмотрим пример преобразования подобия, отличного от движения.

Зададим точку M_0 и вещественное число $m \neq 0$. Каждой точке M плоскости поставим в соответствие точку M' так, чтобы

$$\overrightarrow{M_0M'}=m\overrightarrow{M_0M}. \qquad (1)$$

Такое отображение является преобразованием плоскости и называется *гомотетией.* Точка M_0 называется *центром гомотетии,* а число m — *коэффициентом гомотетии.* Докажем, что гомотетия — преобразование подобия. Действительно, пусть M_1, M_2 — произвольные точки плоскости, а M_1' и M_2' — их образы. Из равенства (1) получаем: $\overrightarrow{M_0M_1'}=m\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2'}=m\overrightarrow{M_0M_2}$, поэтому

$$\overrightarrow{M_1'M_2'}=m\overrightarrow{M_1M_2}. \qquad (2)$$

Отсюда получаем: $|\overrightarrow{M_1'M_2'}|=|m|\cdot|\overrightarrow{M_1M_2}|$ или $M_1'M_2'=|m|M_1M_2$. Таким образом, гомотетия с коэффициентом m является преобразованием подобия с коэффициентом подобия $k=|m|$.

При $m=1$ из равенства (1) получаем: $\overrightarrow{M_0M'}=\overrightarrow{M_0M}$. Отсюда следует, что любая точка M плоскости совпадает с ее образом, т. е. гомотетия с коэффициентом $m=1$ является тождественным преобразованием. При $m=-1$ из равенства (1) получаем, что гомотетия — центральная симметрия. В остальных случаях (т. е. когда $|m|\neq 1$) гомотетия — преобразование подобия, отличное от движения, т. е. преобразование плоскости, не сохраняющее расстояния между точками.

Выберем ортонормированный репер (O, E_1, E_2) так, чтобы точка O совпала с центром гомотетии. Если $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а точка $M'(x', y')$ — ее образ, то из формулы (1) получаем аналитическое выражение гомотетии:

$$x' = mx, \; y' = my. \tag{3}$$

2. Рассмотрим простейшие свойства гомотетии.

1^0. *Гомотетия с коэффициентом $m \neq 1$ переводит прямую, не проходящую через центр гомотетии, в параллельную ей прямую, а прямую, проходящую через центр гомотетии, — в себя.*

□ Пусть $Ax + By + C = 0$ — уравнение данной прямой l. Подставив сюда значения x, y из (3), получаем уравнение образа l' этой прямой: $Ax' + By' + Cm = 0$. Этим уравнением определяется прямая. Если $C \neq 0$, то $l' \parallel l$, а если $C = 0$, то l' и l совпадают. ■

2^0. *Гомотетия сохраняет простое отношение трех точек.*

□ Пусть A, B и C — три точки прямой, а A', B' и C' — их образы, $\mu = (AB, C)$ и $\mu' = (A'B', C')$. По определению простого отношения трех точек имеем: $\overrightarrow{AC} = \mu\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{A'C'} = \mu'\overrightarrow{C'B'}$. По формуле (2) получаем: $\overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{C'B'} = m\overrightarrow{CB}$, где m — коэффициент гомотетии. Следовательно, $m\overrightarrow{AC} = \mu'(m\overrightarrow{CB})$ или $\overrightarrow{AC} = \mu'\overrightarrow{CB}$. Таким образом, $\mu' = \mu$, т. е. $(AB, C) = (A'B', C')$. ■

Из этих свойств следует, что гомотетия переводит отрезок в отрезок, луч в луч и полуплоскость в полуплоскость.

3^0. *Гомотетия переводит угол в равный ему угол.*

□ Пусть BAC — данный угол, а B', A', C' — образы точек B, A и C. По формуле (2) получаем:

$$\overrightarrow{A'B'} = m\overrightarrow{AB}, \; \overrightarrow{A'C'} = m\overrightarrow{AC}. \tag{4}$$

Отсюда следует, что $\angle B'A'C' = \angle BAC$. ■

4^0. *Гомотетия сохраняет ориентацию плоскости.*

□ Пусть (A, B, C) — произвольный репер, а (A', B', C') — его образ. Используя формулы (4), получаем: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \mid (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = m^2 > 0$. Итак, в гомотетии любой репер и его образ ориентированы одинаково, т. е. гомотетия сохраняет ориентацию плоскости. ■

3. Нетрудно доказать, что если f_1 и f_2 — преобразования подобия с коэффициентами k_1 и k_2, то f_2f_1 — преобразование подобия с коэффициентом k_2k_1. Действительно, f_2f_1 является преобразованием плоскости (см. § 40, п. 3). Докажем, что для любых двух точек A и B и их образов $A' = (f_2f_1)(A)$, $B' = (f_2f_1)(B)$ выполняется равенство $A'B' = k_2k_1AB$. Если $A_1 = f_1(A)$, $B_1 = f_1(B)$, то $A' = f_2(A_1)$, $B' = f_2(B_1)$. По определению подобия $A_1B_1 = k_1AB$, $A'B' = k_2A_1B_1$, поэтому $A'B' = k_2k_1AB$.

Теорема 1. *Пусть f — преобразование подобия с коэффициентом k, а h — гомотетия с тем же коэффициентом k и с центром в произвольной точке M_0 Тогда существует одно и только одно движение g такое, что*

$$f = gh. \tag{5}$$

□ Рассмотрим преобразование

$$g = fh^{-1}. \tag{6}$$

Оно является преобразованием подобия с коэффициентом $k\left(\frac{1}{k}\right) = 1$, т. е. движением. Из равенства (6) получаем: $gh = (fh^{-1})h$, или $gh = f(h^{-1}h) = f$. Таким образом, существует движение g, удовлетворяющее условию (5).

Пусть теперь g_1 — произвольное движение, удовлетворяющее равенству $f = g_1 h$. Отсюда получаем: $fh^{-1} = g_1$. Учитывая равенство (6), мы приходим к выводу, что $g_1 = g$. ■

4. Гомотетия обладает всеми свойствами $1^0 - 8^0$ движений, сформулированными в § 41 (см. п. 2). Доказанная теорема позволяет заключить, что и преобразование подобия обладает теми же свойствами. Следовательно, имеет место утверждение: *преобразование подобия прямую переводит в прямую, параллельные прямые — в параллельные прямые, сохраняет простое отношение трех точек, полуплоскость переводит в полуплоскость, отрезок — в отрезок, луч — в луч. Преобразование подобия угол переводит в равный ему угол, а перпендикулярные прямые — в перпендикулярные прямые.*

Итак, доказано, что любое преобразование подобия f можно представить в виде (5): $f = gh$, где g — движение, а h — гомотетия. Так как h сохраняет ориентацию плоскости, т. е. любой репер переводит в репер той же ориентации, то если g сохраняет ориентацию плоскости, то, очевидно, и f сохраняет ориентацию плоскости, а если g меняет ориентацию плоскости, то и f меняет ориентацию плоскости. Таким образом, любое преобразование подобия либо сохраняет ориентацию плоскости, либо меняет ее ориентацию. В первом случае оно называется *преобразованием подобия первого рода,* а во втором случае — *преобразованием подобия второго рода.*

5. Пусть f — преобразование подобия с коэффициентом k. Выберем прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$ и найдем аналитическое выражение преобразования f в системе $O\vec{i}\vec{j}$. Для этого рассмотрим гомотетию h с центром O и коэффициентом k и воспользуемся теоремой 1. Пусть g — движение, удовлетворяющее равенству (5). Запишем в системе $O\vec{i}\vec{j}$ аналитические выражения преобразований h и g (см. формулы (3) § 46 и формулы (3) § 42):

$$h: \begin{array}{l} x = kx, \\ y = ky; \end{array} \qquad g: \begin{array}{l} x' = x \cos\alpha + \varepsilon y \cos\alpha + x_0, \\ y' = x \sin\alpha + \varepsilon y \cos\alpha + y_0. \end{array}$$

Таким образом, если $M(x, y)$ — произвольная точка плоскости, а $M'(x', y')$ — ее образ в преобразовании $f = gh$, то

$$\begin{array}{l} x' = kx\cos\alpha - \varepsilon\, ky\sin\alpha + x_0, \\ y' = kx\sin\alpha + \varepsilon\, ky\cos\alpha + y_0, \end{array} \tag{7}$$

где $\varepsilon = 1$, если f — преобразование подобия первого рода, и $\varepsilon = -1$, если f — преобразование подобия второго рода. Используя формулы (7), докажем теорему.

Теорема 2. *Любое преобразование подобия, отличное от движения, имеет одну и только одну неподвижную точку.*

□ Пусть равенства (7) — аналитическое выражение данного преобразования подобия. Точка $M(x, y)$ является неподвижной точкой этого преобразования тогда и только тогда, когда

$$(k \cos \alpha - 1)x - \varepsilon k \sin \alpha y + x_0 = 0,$$

$$k \sin \alpha x + (\varepsilon k \cos \alpha - 1)y + y_0 = 0.$$

Рассмотрим определитель δ этой системы. Если $\varepsilon = 1$, то $\delta = (k - \cos \alpha)^2 + 1 - \cos^2 \alpha$, а если $\varepsilon = -1$, то $\delta = 1 - k^2$. Таким образом, при $k \neq 1$ для любого α имеем: $\delta \neq 0$. Отсюда следует утверждение теоремы. ■

Следствие. *Любое преобразование подобия, имеющее более чем одну неподвижную точку или не имеющее неподвижных точек, является движением.*

6. Используя доказанную теорему и ее следствие, можно провести классификацию преобразований подобия в зависимости от наличия неподвижных точек и инвариантных прямых.

А. Классификация преобразований подобия первого рода. Пусть f — преобразование подобия первого рода. Если f имеет более чем одну неподвижную точку или не имеет неподвижных точек, то по следствию предыдущей теоремы оно является движением, поэтому f — параллельный перенос (см. таблицу из § 43).

Остается рассмотреть случай, когда преобразование f с коэффициентом k имеет только одну неподвижную точку, которую обозначим через O. Пусть h — гомотетия с коэффициентом k и центром O. По теореме 1 существует такое движение g, что $f = gh$. Так как f и h — подобия первого рода, то g — движение первого рода, причем $O = g(O)$. Таким образом, g — поворот вокруг точки O. Возможны три случая (см. таблицу из § 43).

1) g — тождественное преобразование. В этом случае $f = h$, т. е. f — гомотетия с положительным коэффициентом k, $k \neq 1$.

2) g — центральная симметрия. Ясно, что в этом случае $f = gh$ — гомотетия с отрицательным коэффициентом $m = -k$.

3) g — вращение на угол α; $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq \pm\pi$. В этом случае f является произведением гомотетии h на вращение g. Оно называется *центрально-подобным вращением* (рис. 116).

Таким образом, преобразование подобия, имеющее только одну неподвижную точку, является либо гомотетией с коэффициентом $m \neq 1$, либо центрально-подобным вращением.

В. Классификация преобразований подобия второго рода. Пусть f — преобразование подобия второго рода. Если f имеет более чем одну неподвижную точку или не имеет неподвижных точек, то по аналогии со случаем А мы приходим к выводу, что преобразование f является либо осевой симметрией, либо скользящей симметрией.

Рассмотрим случай, когда преобразование подобия f с коэффициентом k имеет только одну неподвижную точку O. Ясно, что $k \neq 1$, так как в противном случае f — движение второго рода, но оно не может иметь только одну неподвижную точку. Пусть h — гомотетия с коэффициентом k и центром O. По теореме 1 $f = gh$, где g — движение второго рода. Точка O — неподвижная точка движения g, поэтому g — осевая симметрия (см. таблицу на с. 127). В этом случае f называется *центрально-подобной симметрией* (рис. 117).

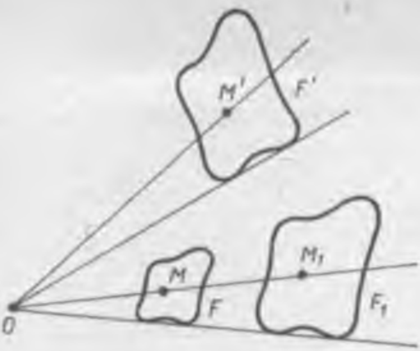


Рис. 116

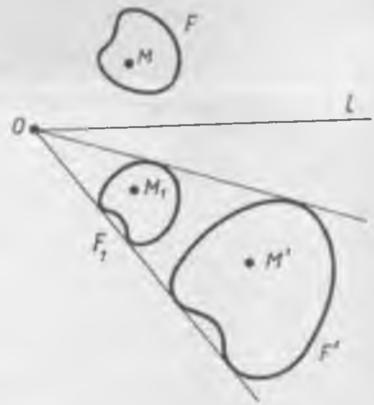


Рис. 117

Итак, существует шесть типов преобразования подобия, которые приведены в следующей таблице:

Преобразования подобия первого рода	Преобразования подобия второго рода
1. Гомотетия 2. Центрально-подобное вращение 3. Параллельный перенос	4. Осевая симметрия 5. Центрально-подобная симметрия 6. Скользящая симметрия

§ 47. Группа подобия и ее подгруппы. Подобие фигур

1. Обозначим через P множество всех преобразований подобия. В п. 3 § 46 доказано, что если $g \in P$ и $f \in P$, то $fg \in P$. Далее, если $g \in P$, то $g^{-1} \in P$. Таким образом (см. § 40, п. 3), множество P является группой преобразований. Она называется *группой преобразований подобия плоскости* или, короче, *группой подобий*. Любое преобразование подобия переводит угол в равный ему угол и, следовательно, сохраняет меру угла. Мера угла — основной инвариант группы преобразований подобия.

Так как любое движение является преобразованием подобия, то группа движений является подгруппой группы подобия. Рассмотрим примеры других подгрупп. Можно заметить, что множество P_1 всех подобий первого рода плоскости является группой, поэтому P_1 — подгруппа группы P. Мера направленного угла — инвариант этой группы.

Обозначим через $P(M_0)$ множество всех гомотетий с центром в точке M_0. Если точку M_0 принять за начало прямоугольной системы координат, то аналитическое выражение любой гомотетии $h \in P(M_0)$ имеет вид (3) § 46. Пользуясь этими формулами, предлагаем читателю самостоятельно доказать, что если

h_1, $h_2 \in P(M_0)$, то $h_2 h_1 \in P(M_0)$, и если $h \in P(M_0)$, то $h^{-1} \in P(M_0)$. Таким образом, $P(M_0)$ является подгруппой группы P.

2. Рассмотрим еще один пример подгруппы группы P. Пусть H — множество всех параллельных переносов и гомотетий. Нетрудно доказать, что это множество образует группу. В самом деле, если $f_1 \in H$ и $f_2 \in H$, то f_1 и f_2 являются преобразованиями подобия первого рода (см. таблицу на с. 139), поэтому $f_2 f_1$ — преобразование подобия первого рода. Отметим, что $f_2 f_1$ не является центрально-подобным вращением. Действительно, при центрально-подобном вращении любая прямая a переходит в прямую a', пересекающую прямую a, в то время как преобразование $f_2 f_1$ любую прямую a переводит в прямую a', параллельную прямой a или совпадающую с ней. Отсюда и заключаем, что $f_2 f_1$ является либо гомотетией, либо параллельным переносом, т. е. $f_2 f_1 \in H$. Далее очевидно, что если $f \in H$, то $f^{-1} \in H$. Этим доказано, что множество H является группой. Ее элементы называются *дилатациями*. Инвариантом этой группы является направление (в широком смысле слова) прямой на плоскости.

3. Фигуры F и F' называются *подобными*, если они P-эквивалентны, т. е. если существует такое подобие, которое фигуру F переводит в фигуру F', пишут: $F \sim F'$. Таким образом, отношение подобия $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве всех фигур плоскости. Если две фигуры подобны, то говорят, что эти фигуры имеют одну и ту же форму. Примером подобных фигур являются любые два отрезка или любые две окружности.

Из определения подобия следует, что два многоугольника F и F' подобны, если существует такое преобразование подобия f, что $F' = f(F)$. Рассмотрим более подробно вопрос о подобии треугольников. Для того чтобы установить подобие двух треугольников, не обязательно доказывать существование преобразования подобия, которое один треугольник переводит во второй. Докажем теорему.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства:*

$$\angle A = \angle A', \ \angle B = \angle B', \ \angle C = \angle C', \ \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}. \quad (1)$$

□ Необходимость очевидна, поэтому докажем только достаточность условия. Пусть выполняются равенства (1), докажем, что $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. Рассмотрим гомотетию h с центром в некоторой точке O и с коэффициентом $k = \frac{A'B'}{AB}$. Пусть $\triangle A_1B_1C_1 = h(\triangle ABC)$. Так как $A_1B_1 = kAB$, то $A'B' = A_1B_1$. Используя равенства (1), аналогично получаем: $B'C' = B_1C_1$ и $C'A' = C_1A_1$. Далее, $\angle A_1 = h(\angle A)$, поэтому $\angle A_1 = \angle A$. Но $\angle A' = \angle A$, поэтому $\angle A' = \angle A_1$. Аналогично $\angle B' = \angle B_1$ и $\angle C' = \angle C_1$.

По теореме 2 § 44 $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A'B'C'$ или $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$. Итак, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A'B'C'$, поэтому $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$. ■

В школьных курсах геометрии этот признак нередко принимается за определение подобия треугольников. Там доказываются три признака подобия, которые позволяют установить подобие треугольников ABC и $A'B'C'$ по некоторым из равенств (1).

Имеет место аналогичный признак подобия выпуклых многоугольников: два одноименных выпуклых многоугольника F и F' подобны тогда и только тогда, когда между их вершинами можно установить такое соответствие, что соответственные углы многоугольников равны и их соответственные стороны пропорциональны.

3. Рассмотрим подобие линий второго порядка. Пользуясь определением эллипса, гиперболы и параболы, можно доказать, что в преобразовании подобия эллипс переходит в эллипс, гипербола — в гиперболу, а парабола — в параболу. Предлагаем читателю самостоятельно доказать эти утверждения. При этом читатель обнаружит, что если γ — эллипс (гипербола), а γ' — его образ, то γ и γ' имеют равные эксцентриситеты. Докажем обратные утверждения.

Теорема 2. *Два эллипса, эксцентриситеты которых равны, подобны.*

□ Пусть в ортонормированных реперах (O, E_1, E_2) и (O', E_1', E_2') данные эллипсы γ и γ', эксцентриситеты которых равны, имеют соответственно канонические уравнения: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1$. Докажем, что $\gamma\sim\gamma'$.

Рассмотрим движение f_1, которое репер (O, E_1, E_2) переводит в репер (O', E_1', E_2'). При этом движении эллипс γ переходит в некоторый эллипс γ_1, который в репере (O', E_1', E_2') имеет уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (см. § 41, теорема 1).

Эллипсы γ и γ' имеют равные эксцентриситеты ε. По формуле (5) из § 27 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$, $\frac{b'}{a'}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$, поэтому $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$.

Гомотетия f_2 с центром O' и коэффициентом $\frac{a'}{a}$ в репере (O', E_1', E_2') задается формулами: $x'=\frac{a'}{a}x$, $y'=\frac{a'}{a}y$ или $x=\frac{a}{a'}x'$, $y=\frac{b}{b'}y'$. Образом эллипса γ_1 при этой гомотетии является линия $\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1$, т. е. эллипс γ'. Так как f_1 и f_2 являются преобразованиями подобия, то f_2f_1 — подобие. Итак, подобие f_2f_1 переводит эллипс γ в эллипс γ', поэтому $\gamma\sim\gamma'$. ■

Применяя аналогичные предыдущим рассуждения, можно убедиться в справедливости следующей теоремы.

Теорема 3. *Две гиперболы, эксцентриситеты которых равны, подобны.*

Так как эксцентриситет любой равносторонней гиперболы равен $\sqrt{2}$ (§ 28, п. 7), *то любые две равносторонние гиперболы подобны.*

Теорема 4. *Любые две параболы подобны.*

☐ Пусть в ортонормированных реперах (O, E_1, E_2) и (O', E_1', E_2') данные параболы γ и γ' имеют соответственно уравнения: $y^2=2px$ и $y'^2=2p'x'$. Докажем, что $\gamma\sim\gamma'$.

Рассмотрим движение f_1, которое репер (O, E_1, E_2) переводит в репер (O', E_1', E_2'). При этом движении парабола γ переходит в некоторую параболу γ_1, которая в репере (O', E_1', E_2') имеет уравнение $y^2=2px$.

Гомотетия f_2 с центром O' и коэффициентом $\frac{p'}{p}$ в репере (O', E_1', E_2') задается формулами $x'=\frac{p'}{p}x$, $y'=\frac{p'}{p}y$. Образом параболы γ_1 в этой гомотетии является линия $y'^2=2p'x'$, т. е. парабола γ'. Итак, подобие f_2f_1 переводит параболу γ в параболу γ', поэтому $\gamma\sim\gamma'$. ■

§ 48. Аффинные преобразования

1. Преобразование плоскости называется *аффинным*, если оно любые три точки M_1, M_2 и M_3, лежащие на одной прямой, переводит в три точки M_1', M_2' и M_3', лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение, т. е. $(M_1M_2,M_3)=(M_1'M_2',M_3')$*. Так как преобразование подобия прямую переводит в прямую и сохраняет простое отношение трех точек (§ 46, п. 4), то *любое преобразование подобия является аффинным преобразованием.* Поэтому любое движение, в частности тождественное преобразование, является аффинным преобразованием. Ниже мы увидим, что существуют аффинные преобразования, отличные от преобразований подобия.

2. Для дальнейшего изложения необходимо доказать следующую лемму.

Лемма. *Если аффинные преобразования f_1 и f_2 переводят две точки A и B соответственно в точки A' и B', то $f_1(M)=f_2(M)$, где M — любая точка прямой AB.*

☐ Пусть M — произвольная точка прямой AB, отличная от точек A и B, а $M'=f_1(M)$, $M''=f_2(M)$. Докажем, что точки M' и M'' совпадают.

Так как f_1 и f_2 — аффинные преобразования, то $(AB, M)=(A'B', M')$ и $(AB, M)=(A'B', M'')$, поэтому $(A'B', M')=(A'B', M'')$. Отсюда следует, что точки M' и M'' совпадают, т. е. $f_1(M)=f_2(M)$. ■

Теорема 1. *Пусть $R=(A, B, C)$ и $R'=(A', B', C')$ — произволь-*

---

* В этом определении равенство $(M_1M_2, M_3)=(M_1'M_2', M_3')$ является избыточным. При изучении аффинных преобразований можно исходить из следующего определения: *преобразование плоскости называется аффинным, если оно любые три точки M_1, M_2, M_3, лежащие на одной прямой, переводит в три точки M_1', M_2', M_3', лежащие на одной прямой*, и доказать, что $(M_1M_2, M_3)=(M_1'M_2', M_3')$. Однако доказательство этого равенства сложное и выходит за рамки настоящего курса (см., например: Делоне Б. Н. и Райков Д. А. Аналитическая геометрия. М.—Л., Гостехиздат, 1948, т. I, § 28).

ные реперы плоскости. Тогда существует одно и только одно аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R'. При этом любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'.

□ 1) Докажем сначала, что существует аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R'. Построим преобразование f плоскости следующим образом. Произвольной точке M с координатами (x, y) в репере R поставим в соответствие точку M' *с теми же координатами* в репере R'. Ясно, что отображение f является взаимно однозначным отображением плоскости на себя, т. е. преобразованием, которое репер R переводит в репер R' (см. доказательство теоремы 1 § 41).

Докажем, что f — аффинное преобразование. Пусть M_1, M_2 и M — три произвольные точки одной прямой, которые в репере R имеют координаты $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M(x, y)$. Их образы в репере R' имеют те же координаты $M_1'(x_1, y_1)$, $M_2'(x_2, y_2)$, $M'(x, y)$. Если $\lambda=(M_1M_2, M)$, то по формулам (3) § 12 находим:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Эти равенства показывают, что точка M' делит отрезок $M_1'M_2'$ в отношении λ, т. е. $(M_1'M_2', M')=\lambda$. Таким образом, точки M_1', M_2' и M' лежат на одной прямой и $(M_1M_2, M)=(M_1', M_2', M')$.

2) Докажем теперь, что если f_1 — какое-то аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R', то f_1 совпадает с f.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Через эту точку проведем прямую так, чтобы она пересекала какие-нибудь две из прямых AB, BC и AC в различных точках N и P (рис. 118). По предыдущей лемме $f(N)=f_1(N)$, $f(P)=f_1(P)$. Отсюда, используя ту же лемму, получаем: $f(M)=f_1(M)$. Таким образом, отображения f и f_1 совпадают, т. е. f — единственное аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R'. При этом аффинном преобразовании точка $M(x, y)_R$ переходит в точку $M'(x, y)_{R'}$. ■

Следствие. *Если три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, являются неподвижными точками аффинного преобразования f, то f — тождественное преобразование.*

□ Пусть e — тождественное преобразование, которое, очевидно, является аффинным преобразованием. Преобразования f и e

Рис. 118

переводят точки A, B и C соответственно в те же точки, поэтому по доказанной теореме f и e совпадают. ■

3. Докажем, что *любое аффинное преобразование f репер переводит в репер*. Пусть $R=(A, B, C)$ — произвольный репер, а $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$. Возьмем точку M, не лежащую на прямой AB, так, чтобы точка $M'=f(M)$ не лежала на прямой $A'B'$. Так как f — преобразование, то такая точка всегда существует. Пусть точка C в репере (A, B, M) имеет координаты (x_0, y_0). По теореме 1 точка C' в репере (A', B', M') имеет те же координаты (x_0, y_0). Но $y_0 \neq 0$ (точка C не лежит на прямой AB), поэтому C' не лежит на прямой $A'B'$, т. е. (A', B', C') — репер.

Пользуясь теоремой 1 и доказанным свойством точно так же, как и в случае движения (см. § 41, п. 4, свойства 1^0, 2^0, 4^0, 5^0), можно доказать, что *аффинное преобразование прямую переводит в прямую, параллельные прямые — в параллельные прямые, полуплоскость переводит в полуплоскость, луч — в луч, отрезок — в отрезок, угол — в угол.*

Предлагаем самостоятельно по аналогии с доказательством теоремы 1 § 42 доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Любое аффинное преобразование либо сохраняет, либо меняет ориентацию плоскости.*

Аффинное преобразование называется *преобразованием первого рода*, если оно не меняет ориентацию плоскости, и *преобразованием второго рода*, если оно меняет ориентацию плоскости.

4. Возьмем на плоскости аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ и найдем аналитическое выражение данного аффинного преобразования f, т. е. выразим координаты точки $M'(x', y')$ через координаты ее прообраза $M(x, y)$. Для решения задачи рассмотрим аффинный репер $R=(O, E_1, E_2)$, где $\overrightarrow{OE_1}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e}_2$, и его образ $R'=(O', E_1', E_2')$. Так как f — данное аффинное преобразование, то предполагаем, что репер R' задан, т. е. даны координаты точки $O'(x_0, y_0)$ и координаты векторов $\overrightarrow{O'E_1'}(c_{11}, c_{21})$ и $\overrightarrow{O'E_2'}(c_{12}, c_{22})$ в репере R.

Точка M' в репере R имеет координаты (x', y'), а по теореме 1 та же точка в репере R' имеет координаты (x, y). Таким образом, наша задача сводится к обычной задаче преобразования аффинной системы координат: точка M' в старом репере имеет координаты (x', y'), а в новом репере R' — координаты (x, y). Выразить x', y' через x, y. По формулам (3) § 15 получаем:

$$x'=c_{11}x+c_{12}y+x_0, \quad y'=c_{21}x+c_{22}y+y_0. \tag{1}$$

Если f — аффинное преобразование первого рода, то реперы R и R' имеют одну и ту же ориентацию, поэтому $\delta=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}>0$, а если f — аффинное преобразование второго рода, то $\delta<0$. Таким образом, аналитическое выражение любого аффинного преобразования имеет вид (1). Имеет место обратная теорема.

Теорема 3. *Если отображение f в аффинном репере $R = (O, E_1, E_2)$ задано аналитически формулами* (1), *где* $\delta \neq 0$, *то f — аффинное преобразование. При этом, если* $\delta > 0$ ($\delta < 0$), *то f — аффинное преобразование первого (второго) рода.*

□ Найдем образы точек O, E_1, E_2 в преобразовании f: $O'(x_0, y_0)$, $E_1'(c_{11}+x_0, c_{21}+y_0)$, $E_2'(c_{12}+x_0, c_{22}+y_0)$. Эти точки образуют репер $R' = (O', E_1', E_2')$, так как векторы $\overrightarrow{O'E_1'}$ и $\overrightarrow{O'E_2'}$ не коллинеарны ($\delta \neq 0$). По теореме 1 существует аффинное преобразование f_1, которое репер R переводит в репер R'. Если запишем аналитическое выражение этого аффинного преобразования, то, учитывая, что $O'(x_0, y_0)$, $\overrightarrow{O'E_1'}(c_{11}, c_{21})$, $\overrightarrow{O'E_2'}(c_{12}, c_{22})$, получим формулы (1), поэтому f_1 и f совпадают, т. е. f — аффинное преобразование.

Если $\delta > 0$ ($\delta < 0$), то реперы R и R' имеют одну и ту же ориентацию (противоположные ориентации), поэтому f — аффинное преобразование первого рода (второго рода). ■

§ 49. Перспективно-аффинное преобразование

1. Нетождественное аффинное преобразование называется *перспективно-аффинным* или родственным преобразованием *(родством)*, если оно имеет по крайней мере две неподвижные точки.

Найдем аналитическое выражение перспективно-аффинного преобразования. Репер (O, E_1, E_2) выберем так, чтобы точки O и E_1 были неподвижными точками данного перспективно-аффинного преобразования f. Пусть образ E_2' точки E_2 в репере (O, E_1, E_2) имеет координаты (k_1, k). Так как $O(0, 0) \overset{f}{\mapsto} O(0, 0)$, $E_1(1, 0) \overset{f}{\mapsto} E_1(1, 0)$, $E_2(0, 1) \overset{f}{\mapsto} E_2'(k_1, k)$, то формулы (1) § 48 принимают вид:

$$x' = x + k_1 y, \quad y' = ky. \tag{1}$$

Пользуясь этими формулами, рассмотрим свойства перспективно-аффинного преобразования.

1^0. *Любая точка прямой, проходящей через две неподвижные точки перспективно-аффинного преобразования, является неподвижной точкой.*

□ Действительно, из формул (1) следует, что любая точка $M(x, 0)$ прямой OE_1 переходит в точку $M'(x, 0)$, т. е. является неподвижной точкой. ■

Прямая неподвижных точек называется *осью перспективно-аффинного преобразования* (осью родства). Из следствия теоремы 1 § 48 следует, что все неподвижные точки перспективно-аффинного преобразования лежат на его оси.

2^0. *Прямые, соединяющие соответственные точки перспективно-аффинного преобразования, не лежащие на его оси, параллельны или совпадают* (рис. 119).

□ Пусть точка $M(x, y)$, не лежащая на оси перспективно-аффинного преобразования, переходит в точку $M'(x', y')$. Из формул (1) следует, что вектор $\overrightarrow{MM'}$ имеет координаты $(k_1 y, (k-1) y)$.

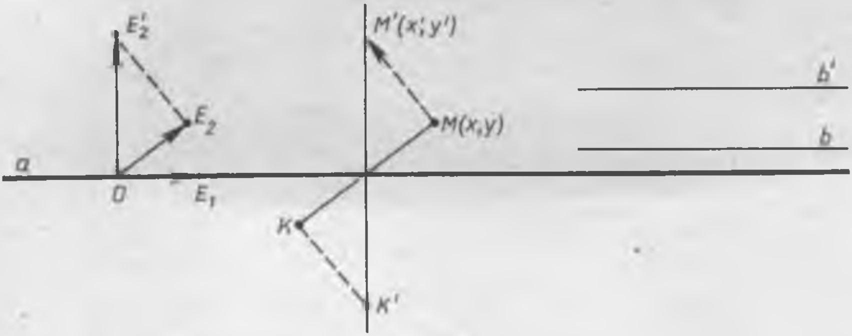


Рис. 119

С другой стороны, вектор $\overrightarrow{E_2E_2'}$ имеет координаты $(k_1, k-1)$. Таким образом, векторы $\overrightarrow{MM'}$ и $\overrightarrow{E_2E_2'}$ коллинеарны. Отсюда и следует свойство 2^0. ■

3^0. *Если прямая пересекает ось перспективно-аффинного преобразования в некоторой точке, то ее образ проходит через эту точку; если же прямая параллельна его оси, то ее образ также параллелен его оси.*

Первое утверждение очевидно (см. рис. 119, прямые MK и $M'K'$), а второе утверждение следует из того обстоятельства, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные прямые (на рис. 119 прямые a, b и a, b'). ■

Из теоремы 1 § 48 следует, что перспективно-аффинное преобразование может быть задано его осью и парой соответственных точек, не лежащих на его оси. При этом свойства 2^0 и 3^0 могут быть использованы для построения образов точек в этом преобразовании.

З а д а ч а. Перспективно-аффинное преобразование задано осью a и парой соответственных точек M_0 и M_0', не лежащих на оси a. Построить образ произвольной точки M.

Р е ш е н и е. Проведем через точку M прямую m, параллельную прямой M_0M_0' (рис. 120, a). Образ M' точки M согласно свойству 2^0 лежит на этой прямой.

Пусть точка N — точка пересечения прямой MM_0 с прямой a. Так как точка N — неподвижная точка, то прямая M_0N переходит

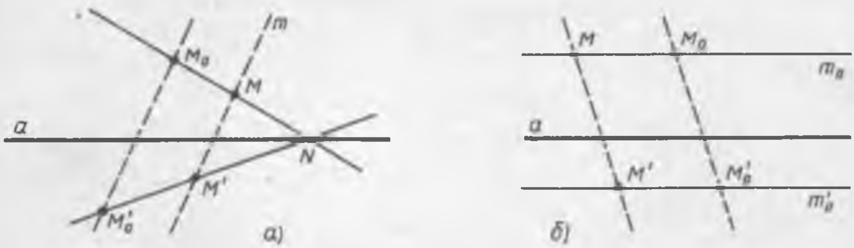


Рис. 120

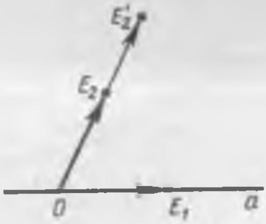


Рис. 121

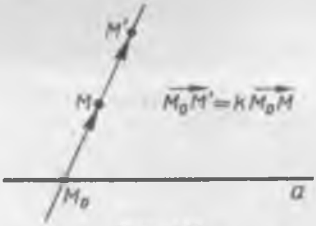


Рис. 122

в NM_0', поэтому M' есть точка пересечения прямых NM_0' и m. Построение по существу не изменится, если прямые M_0M и a параллельны (рис. 120, *б*). В этом случае прямая $M_0'M'$ параллельна прямой a (свойство 3^0), поэтому точка M' лежит на прямой, проведенной через точку M_0' параллельно прямой a.

Если точка M лежит на прямой M_0M_0', то наше построение неприменимо. В этом случае следует взять вспомогательную точку P, не лежащую на этой прямой, построить ее образ P', а потом, пользуясь точками P и P', вышеуказанным способом построить образ точки M.

2. Если прямые, соединяющие соответственные точки перспективно-аффинного преобразования, не параллельны оси, то преобразование называется *косым сжатием плоскости*, а направление прямых, соединяющих соответственные точки,— *направлением* сжатия.

В случае косого сжатия координатный репер (O, E_1, E_2) можно выбрать так, чтобы точки O и E_1 принадлежали оси a и $E_2' \in OE_2$ (рис. 121). Тогда точка E_2' имеет координаты $(0, k)$, поэтому формулы (1) принимают вид:

$$x' = x, \; y' = ky, \tag{2}$$

где $k \neq 1$. Коэффициент k называется *коэффициентом сжатия* и имеет простой геометрический смысл: если M — произвольная точка плоскости, M' — ее образ, а M_0 — точка пересечения прямой MM' с осью, то $\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M}$ (рис. 122). Действительно, пусть $M(x, y)$, тогда $M'(x, ky)$ и $M_0(x, 0)$, поэтому $\overrightarrow{M_0M'}(0, ky)$ и $\overrightarrow{M_0M}(0, y)$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M}$.

3. Если прямые, соединяющие соответственные точки перспективно-аффинного преобразования, параллельны оси, то преобразование называется *сдвигом плоскости*. В случае сдвига координатный репер (O, E_1, E_2') можно выбрать так, чтобы точки O и E_1 принадлежали оси a, а точка E_2 имела координаты (1; 1) (рис. 123, *а*). В этом случае формулы (1) принимают вид:

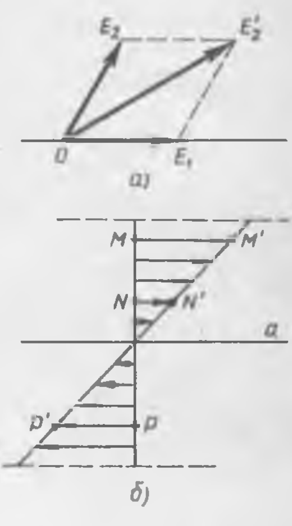


Рис. 123

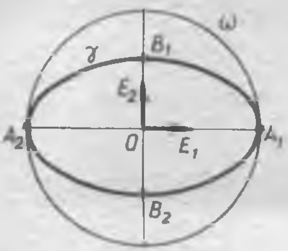


Рис. 124

$$x' = x + y,\ y' = y. \tag{3}$$

Предлагаем читателю, пользуясь формулами (3), самостоятельно доказать, что если при сдвиге $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $P' = f(P)$, то векторы $\overrightarrow{MM'}$ и $\overrightarrow{NN'}$ одинаково направлены, если точки M и N лежат по одну сторону от оси a, и векторы $\overrightarrow{MM'}$ и $\overrightarrow{PP'}$ противоположно направлены, если M и P лежат по разные стороны от прямой a (рис. 123, *б*).

4. Косое сжатие с осью a называется *сжатием к прямой* a, если направление сжатия перпендикулярно оси сжатия и коэффициент сжатия k положителен. При сжатии к прямой a все точки этой прямой остаются неподвижными, а всякая другая точка M переходит в точку M', расположенную на одном с ней перпендикуляре к оси a сжатия по ту же сторону от нее, причем $M_0M' = kM_0M$, где M_0 — точка пересечения прямых MM' и a. Если $k < 1$, то все точки плоскости приближаются к оси сжатия, а если $k > 1$, то все точки плоскости удаляются от оси сжатия (т. е. фактически имеет место растяжение).

Формулы (2) можно рассматривать как аналитическое выражение сжатия к прямой OE_1, если предположить, что (O, E_1, E_2) — ортонормированный репер. Пользуясь этими формулами, докажем теорему, которая наглядно иллюстрирует геометрическую картину преобразования точек при сжатии к прямой.

Теорема 1. *Эллипс γ с неравными полуосями a и b является образом окружности ω, построенной на большой полуоси A_1A_2 эллипса как на диаметре, при сжатии плоскости к прямой A_1A_2 с коэффициентом сжатия $\frac{b}{a}$.*

□ Пусть эллипс γ с полуосями A_1A_2 и B_1B_2 в ортонормированном репере (O, E_1, E_2) задан каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Тогда окружность ω в этом же репере имеет уравнение $x^2 + y^2 = a^2$ (рис. 124). Сжатие к прямой A_1A_2 с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$ задается формулами (2): $x' = x$, $y' = \frac{b}{a}y$, поэтому образом окружности ω является линия $x'^2 + \left(\frac{a}{b}y'\right)^2 = a^2$ или $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$, т. е. эллипс γ. ■

Используя аналогичные рассуждения применительно к равносторонней гиперболе ω и произвольной гиперболе γ, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Гипербола с полуосями a и b является образом равносторонней гиперболы, имеющей ту же действительную ось*

A_1A_2, что и данная гипербола, при сжатии плоскости к прямой A_1A_2 с коэффициентом $\frac{b}{a}$.

§ 50. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы. Аффинная эквивалентность фигур

1. Обозначим через $\boldsymbol{A}$ множество всех аффинных преобразований плоскости. Докажем, что если $f_1 \in \boldsymbol{A}$, $f_2 \in \boldsymbol{A}$, то $f_2 f_1 \in \boldsymbol{A}$. Действительно, так как f_1 и f_2 — преобразования, то $f_2 f_1$ — преобразование. Но каждое из преобразований f_1 и f_2 переводит три точки, лежащие на одной прямой, в три точки, лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение, поэтому преобразование $f_2 f_1$ обладает теми же свойствами, т. е. является аффинным преобразованием. Таким образом, $f_2 f_1 \in \boldsymbol{A}$.

Далее, если $f \in \boldsymbol{A}$, то $f^{-1} \in \boldsymbol{A}$. Действительно, если точки A, B и C лежат на одной прямой, то их образы $A' = f^{-1}(A)$, $B' = f^{-1}(B)$, $C' = f^{-1}(C)$ также лежат на одной прямой, ибо если предположить обратное, то найдется такой репер (A', B', C'), который в преобразовании f переходит в три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, что невозможно (см. § 48, п. 3). При этом, очевидно, преобразование f^{-1} сохраняет простое отношение трех точек.

Таким образом, множество $\boldsymbol{A}$ всех аффинных преобразований образует группу (см. § 40, п. 3). Она называется *группой аффинных преобразований плоскости*. Основным инвариантом этой группы является простое отношение трех точек.

Группа P подобий плоскости является подгруппой группы $\boldsymbol{A}$; группа D всех движений также является подгруппой группы $\boldsymbol{A}$.

Другими примерами подгрупп являются: а) множество $\boldsymbol{A}_1$ всех аффинных преобразований первого рода; б) множество $\boldsymbol{A}(M_0)$ всех аффинных преобразований, для которых M_0 — неподвижная точка (группа центро-аффинных преобразований); в) множество $\boldsymbol{A}(a)$ всех аффинных преобразований, для которых прямая a состоит из неподвижных точек.

Предлагаем самостоятельно доказать эти утверждения.

2. Фигуры F и F' называются *аффинно-эквивалентными,* если они $\boldsymbol{A}$-эквивалентны, т. е. если существует такое аффинное преобразование, которое фигуру F переводит в фигуру F'. Согласно теореме 1 § 48 *любые два треугольника аффинно-эквивалентны.* Однако аналогичное утверждение для четырехугольников не имеет места. Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Два четырехугольника аффинно-эквивалентны тогда и только тогда, когда их можно обозначить через $ABCD$ и $A'B'C'D'$, так чтобы*

$$(AC, E) = (A'C', E'), \ (BD, E) = (B'D', E'), \qquad (1)$$

где E и E' — точки пересечения прямых AC, BD и $A'C'$, $B'D'$ (рис. 125).

□ Пусть четырехугольники F и F' аффинно-эквивалентны, т. е. существует такое аффинное преобразование f, что $F' = f(F)$. Обозначим эти четырехугольники буквами $ABCD$ и $A'B'C'D'$ так,

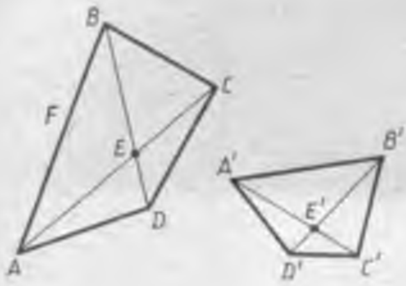


Рис. 125

чтобы $A'=f(A)$, $B'=f(B)$, $C'=f(C)$ и $D'=f(D)$. Очевидно, прямая AC переходит в прямую $A'C'$, а BD — в $B'D'$, поэтому $E'=f(E)$. При аффинном преобразовании сохраняется простое отношение трех точек, поэтому имеют место равенства (1).

Обратно, пусть для четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ выполнены равенства (1). Докажем, что они аффинно-эквивалентны. Рассмотрим аффинное преобразование f, которое репер (A, B, C) переводит в репер (A', B', C'). В силу равенства $(AC, E)=(A'C', E')$ точка E переходит в точку E', поэтому прямая BE переходит в прямую $B'E'$. Но так как $(BD, E)=(B'D', E')$, то точка D переходит в точку D'. Таким образом, четырехугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ аффинно-эквивалентны. ■

3. Рассмотрим вопрос об аффинной эквивалентности линий второго порядка.

Т е о р е м а 2. *Любые два эллипса аффинно-эквивалентны.*

□ Пусть γ и γ' — два произвольных эллипса с полуосями A_1A_2 и $A_1'A_2'$ (рис. 126). Рассмотрим окружности ω и ω', построенные на отрезках A_1A_2 и $A_1'A_2'$ как на диаметрах. По теореме 1 из § 49 существуют аффинные преобразования f_1 и f_2, которые окружности ω и ω' переводят соответственно в эллипсы γ и γ'. Рассмотрим преобразование подобия f_3, которое окружность ω переводит в окружность ω': $f_3(\omega)=\omega'$.

Преобразование $f=f_2f_3f_1^{-1}$ является аффинным преобразованием, которое переводит эллипс γ в эллипс γ'. Поэтому эллипсы γ и γ' аффинно-эквивалентны. ■

Точно так же, пользуясь теоремой 2 § 49, можно доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 3. *Любые две гиперболы аффинно-эквивалентны.*

Так как любые две параболы подобны (§ 47, теорема 4), то *любые две параболы аффинно-эквивалентны.*

В главе IV доказано, что каждая линия второго порядка

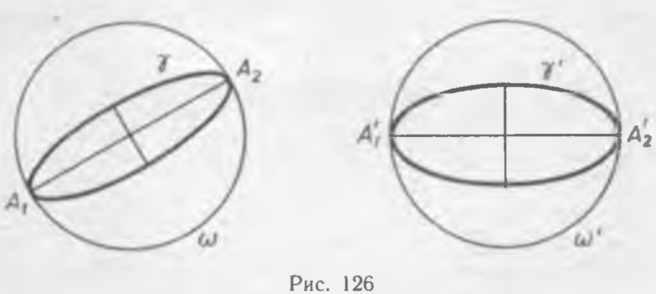


Рис. 126

принадлежит одному из девяти классов, перечисленных в таблице п. 5 § 37. Данная в § 37 классификация линий второго порядка называется *аффинной*. Следующая теорема поясняет этот термин.

Теорема 4. *При любом аффинном преобразовании линия второго порядка переходит в линию второго порядка. Любые две линии, принадлежащие одному из девяти классов* (§ 37, п. 5), *аффинно-эквивалентны, а две линии, принадлежащие различным классам, аффинно-неэквивалентны.*

□ Первая часть теоремы непосредственно следует из теоремы 1 § 48. Докажем, что любые две линии, принадлежащие одному классу, аффинно-эквивалентны. Рассмотрим только те классы, которые содержат бесконечное множество действительных точек, т. е. классы 1, 2, 3, 5, 7 и 9. Это утверждение только что доказано для классов 1, 2 и 3 (эллипсов, гипербол и парабол). Докажем это утверждение для линий, принадлежащих классу 5.

Пусть AB, AC и $A'B'$, $A'C'$ — две пары пересекающихся прямых. Рассмотрим аффинное преобразование, которое репер (A, B, C) переводит в репер (A', B', C'). Ясно, что при этом прямая AB переходит в прямую $A'B'$, а прямая AC — в прямую $A'C'$. Аналогично доказывается, что любые две линии, принадлежащие классу 7 или классу 9, аффинно-эквивалентны.

Остается доказать, что любые две линии, принадлежащие разным классам, аффинно-неэквивалентны. Это непосредственно следует из данных, приведенных в таблице п. 5 § 37. В самом деле, при любом аффинном преобразовании действительные точки переходят в действительные, а мнимые — в мнимые, центр линии переходит в центр линии, и, кроме того, при надлежащем выборе системы координат линия, заданная данным уравнением, переходит в линию, заданную тем же уравнением. Таким образом, характеристики, указанные в последних четырех столбцах таблицы, являются инвариантами аффинных преобразований. Из таблицы видно, что любые две линии, принадлежащие разным классам, имеют разные характеристики, поэтому они аффинно-неэквивалентны. ■

§ 51. Приложение преобразований плоскости к решению задач

1. В этом параграфе рассмотрим приложение преобразований плоскости к решению задач на доказательство и вычисление. В главе XII, посвященной геометрическим построениям на плоскости, будет рассмотрено применение этих преобразований в задачах на построение.

Рассмотрим две задачи на применение движений.

Задача 1. Даны прямая a и две точки A и B, лежащие по одну сторону от этой прямой. Доказать, что на прямой существует единственная точка M_0 такая, что для любой другой точки M этой прямой выполняется неравенство

$$AM_0+BM_0<AM+BM. \tag{1}$$

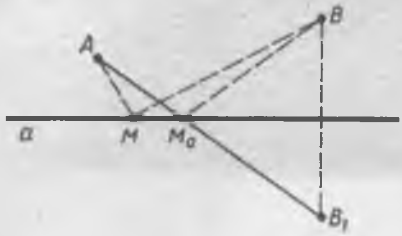


Рис. 127

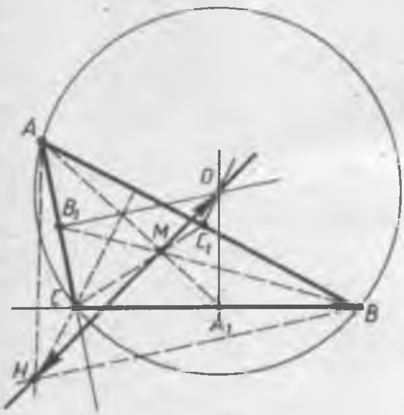


Рис. 128

Решение. Рассмотрим симметрию s относительно прямой a. Пусть $B_1 = s(B)$. Для произвольной точки M прямой a выполняется равенство $BM = B_1M$, поэтому $AM + BM = AM + B_1M$. Пусть M_0 — точка пересечения отрезка AB_1 с прямой a, а M — произвольная точка прямой a, отличная от точки M_0 (рис. 127). Так как точка M_0 лежит между точками A и B_1, то $AM_0 + M_0B_1 = AB_1$. С другой стороны, точки A, B_1 и M не лежат на одной прямой, поэтому $AB_1 < AM + MB_1$. Таким образом, $AM_0 + M_0B_1 < AM + MB_1$ или $AM_0 + BM_0 < AM + BM$.

Итак, на прямой a существует единственная точка M_0 такая, что для любой другой точки M этой прямой выполняется неравенство (1).

Задача 2. В плоскости треугольника дана произвольная точка M, которая отражается относительно всех вершин треугольника один раз, а затем второй раз. Доказать, что полученная при этом точка M' совпадает с точкой M.

Решение. Рассмотрим центральные симметрии g_1, g_2, g_3 с центрами соответственно в вершинах A_1, A_2 и A_3 данного треугольника $A_1A_2A_3$. Пусть $M_1 = g_1(M)$, $M_2 = g_2(M_1)$, $M_3 = g_3(M_2)$. Тогда $M_3 = g(M)$, $M' = g(M_3)$, где $g = g_3g_2g_1$ — некоторое движение. Таким образом, $M' = gg(M)$. Движение g_2g_1 является параллельным переносом (§ 44, пример 1), поэтому $g = g_3(g_2g_1)$ — центральная симметрия (предлагаем читателю, пользуясь таблицей из § 43, доказать это утверждение самостоятельно). Отсюда следует, что gg — тождественное преобразование и поэтому точки M и M' совпадают.

2. Гомотетия часто применяется при решении задач на доказательство и вычисление. Рассмотрим примеры.

Задача 3. Доказать, что точка M пересечения медиан неравностороннего треугольника ABC делит отрезок OH в отношении $\frac{1}{2}$, где O — центр описанной окружности, H — ортоцентр треугольника ABC (рис. 128).

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — медианы треугольника ABC. Рассмотрим гомотетию h_0 с центром в точке M и с коэффициентом $m = -\frac{1}{2}$. Очевидно, $A_1 = h_0(A)$, $B_1 = h_0(B)$, $C_1 = h_0(C)$, поэтому прямые, содержащие высоты треугольника ABC, переходят в серединные перпендикуляры этого треугольника. Следовательно, $O=h_0(H)$, т. е.

$$\overrightarrow{MO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}$, т. е. $(OH, M)=\frac{1}{2}$.

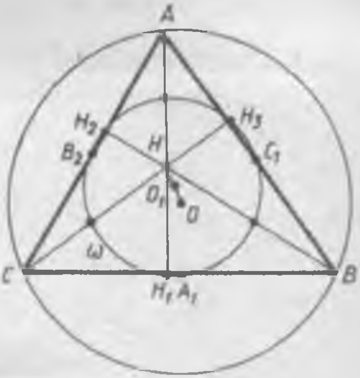


Рис. 129

З а м е ч а н и е. Эта задача в частности включает утверждение задачи 3 § 26, т. е. что точки O, M и H лежат на одной прямой (прямой Эйлера).

З а д а ч а 4. Пусть AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы треугольника ABC, O — центр описанной окружности, R — радиус этой окружности, а H — ортоцентр этого треугольника. Доказать, что центр O_1 описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с серединой отрезка OH, а ее радиус r равен $\frac{1}{2}R$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим гомотетию h_0 с центром в точке M пересечения медиан треугольника ABC и с коэффициентом $m=-\frac{1}{2}$. Так как окружность, описанная около треугольника ABC, переходит в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$, то $r=\frac{1}{2}R$ и $O_1=h_0(O)$. Следовательно,

$$\overrightarrow{MO_1}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}. \qquad (3)$$

Но $\overrightarrow{OO_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MO_1}$. поэтому, используя равенства (2) и (3), получим: $\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$. Отсюда и следует, что O_1 — середина отрезка OH.

Если треугольник ABC равносторонний, то точки O и H совпадают, поэтому середина отрезка OH совпадает с этими точками.

З а д а ч а 5. Доказать, что для произвольного треугольника ABC середины A_1, B_1 и C_1 сторон BC, CA и AB основания H_1, H_2 и H_3 высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр H с вершинами, лежат на одной окружности (*окружность девяти точек,* или *окружность Эйлера,* см. рис. 129). Центром этой окружности является точка O_1 — середина отрезка HO, где H — ортоцентр, а точка O — центр описанной окружности треугольника ABC.

Р е ш е н и е. Рассмотрим окружность ω, проходящую через точки A_1, B_1 и C_1 (рис. 129). Мы уже доказали, что центром O_1 этой окружности является середина отрезка OH (задача 4). Так как

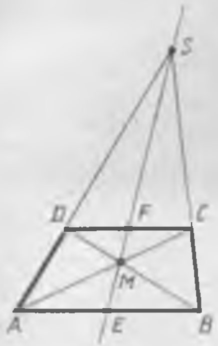


Рис. 130

точка O_1 — середина отрезка OH, то она равноудалена от проекций A_1 и H_1 точек O и H на прямую BC и, значит, $H_1 \in \omega$. Аналогично заключаем, что $H_2 \in \omega$ и $H_3 \in \omega$.

Рассмотрим гомотетию h_1 с центром H и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Так как $O_1 = h_1(O)$, то описанная окружность треугольника ABC с центром O и радиусом R переходит в окружность с центром O_1 и радиусом $\frac{1}{2}R$, т. е. в окружность ω (задача 4). Точки A, B, C переходят в точки $h_1(A)$, $h_1(B)$, $h_1(C)$, являющиеся серединами отрезков HA, HB, HC соответственно.

3. В заключение рассмотрим пример применения аффинных преобразований к решению задач.

Задача 6[1]. Доказать, что для произвольной трапеции $ABCD$ точка S пересечения прямых, содержащих боковые стороны, середины E и F оснований AB и CD, и точка M пересечения диагоналей лежат на одной прямой (рис. 130).

Решение. Рассмотрим косое сжатие f с осью ES, при котором точка A переходит в точку B. Так как точка E — середина отрезка AB, то f — косая симметрия с осью ES (т. е. коэффициент k сжатия равен -1). Очевидно, прямая AS переходит в прямую BS, поэтому $C = f(D)$. Но f — косая симметрия, поэтому середина F отрезка DC лежит на оси ES.

Так как $C = f(D)$, то $D = f(C)$, поэтому прямая AC переходит в прямую BD и, следовательно, точка M пересечения прямых AC и BD лежит на оси ES косой симметрии.

Итак, четыре точки E, S, F и M лежат на одной прямой.

---

[1] Эта задача включает в себя задачу 1 из § 26, которая была решена методом координат.

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ, ПЛОСКОСТИ И КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВОМ И АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Глава VI

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ. СМЕШАННОЕ И ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§ 52. Координаты точек в пространстве. Решение простейших задач в координатах

1. В этой главе, а также в следующих трех главах будет рассматриваться геометрия пространства, а поэтому будут использоваться векторы трехмерного векторного пространства (см. § 7, п. 2). Напомним, что любая система трех некомпланарных векторов, взятых в определенном порядке, образует базис этого пространства.

Координатная система в пространстве вводится по аналогии с системой координат на плоскости (см. § 11). Возьмем какую-нибудь точку O и произвольный базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ пространства. Четверка, состоящая из точки O и базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, называется *аффинной системой координат* в пространстве и обозначается символом $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ или $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (рис. 131). Точка O называется *началом координат,* а векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ — *координатными векторами* ($\vec{e}_1$ — первый координатный вектор, $\vec{e}_2$ — второй, а $\vec{e}_3$ — третий). Направленные прямые, проходящие через начало координат и параллельные координатным векторам, на которых положительные направления определяются этими векторами, называются *координатными осями.* Оси, параллельные векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, назы-

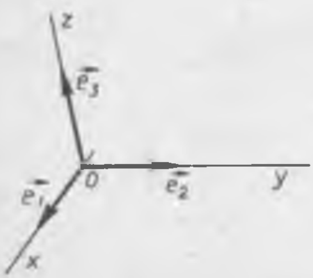


Рис. 131

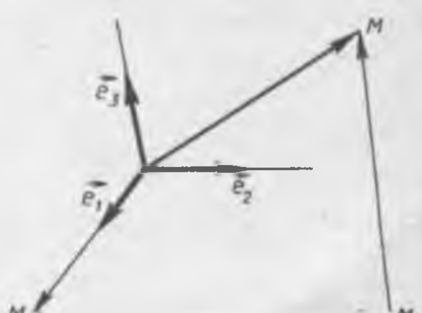


Рис. 132

ваются соответственно осями *абсцисс, ординат* и *аппликат* и обозначаются так: Ox, Oy, Oz (рис. 131). Плоскости, определяемые осями Ox и Oy, Ox и Oz, Oy и Oz, называются *координатными плоскостями* и обозначаются соответственно через Oxy, Oxz и Oyz. Иногда систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ обозначают через $Oxyz$.

2. Пусть $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ — аффинная система координат, а M — произвольная точка пространства (рис. 132). Вектор $\overrightarrow{OM}$ называется *радиус-вектором* точки M (относительно точки O). Координаты x, y, z вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ называются *координатами точки* M в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Число x называется *абсциссой,* число y — *ординатой,* а число z — *аппликатой* (или первая, вторая, третья координаты) точки M; пишут: $M(x, y, z)$. Таким образом, координатами точки M в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ называются числа x, y, z такие, что

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3. \tag{1}$$

По аналогии с понятием координат точек на плоскости (§ 11, п. 2) справедливо утверждение: если в пространстве задана аффинная система координат, то устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками (x, y, z) действительных чисел, т. е. между точками пространства и элементами множества $\boldsymbol{R}^3$. Здесь $\boldsymbol{R}^3=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ — декартов куб множества действительных чисел.

Если аппликата z точки M равна нулю, то из равенства (1) получаем:

$$\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2.$$

Векторы $\overrightarrow{OM}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ линейно зависимы, поэтому они компланарны (§ 6, теорема 4). Это означает, что точка M лежит в плоскости Oxy. Из предыдущего равенства следует, что в плоскости Oxy точка M в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ имеет координаты (x, y). Аналогично приходим к выводу, что если $y=0$, то точка M лежит в плоскости Oxz, а если $x=0$, то в плоскости Oyz. Отсюда следует, что для любой точки оси абсцисс $y=z=0$, для любой точки оси ординат $x=z=0$, а для любой оси аппликат $x=y=0$. Начало координат имеет координаты $(0, 0, 0)$.

Для построения точки $M(x, y, z)$ по ее координатам в системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ воспользуемся формулой (1). От начала координат O отложим вектор $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{e}_1$, затем от точки M_1 отложим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=y\vec{e}_2$ и, наконец, от точки M_2 отложим вектор $\overrightarrow{M_2M}=z\vec{e}_3$ (рис. 132). По правилу многоугольника $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_2M}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+$ $+z\vec{e}_3$. Таким образом, M — искомая точка. Ломаную $OM_1M_2M_3$ называют *координатной ломаной* точки M. Итак, для построения точки M достаточно построить ее координатную ломаную. На рисунке 133 изображена аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и в ней построены точки $A(2, 5, 4)$, $B(4, -2, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E\left(3{,}2, -\frac{1}{2}\right)$.

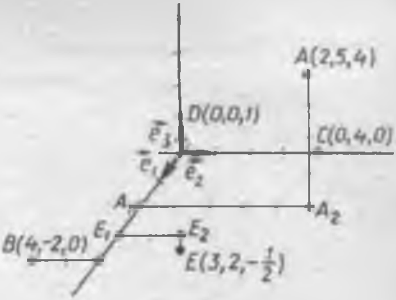


Рис. 133

3. Рассмотрим две задачи, которые часто используются в дальнейшем изложении.

Задача 1. В аффинной системе координат даны точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Решение. По формуле (7) § 4 имеем: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$. Но векторы $\overrightarrow{OM_2}$ и $\overrightarrow{OM_1}$ являются радиус-векторами точек M_1 и M_2, поэтому их координаты нам известны: $\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2, z_2)$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1). \tag{2}$$

Итак, *каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора.*

Задача 2. В аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ даны две точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Найти координаты точки M, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, где $\lambda \neq -1$ (рис. 134).

Решение. По формуле (2) § 12

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \lambda\overrightarrow{OM_2}}{1+\lambda} \tag{3}$$

Векторы $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ являются радиус-векторами точек M, M_1 и M_2, поэтому эти векторы в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеют координаты $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$, $\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1, z_1)$ и $\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2, z_2)$, где (x, y, z) —

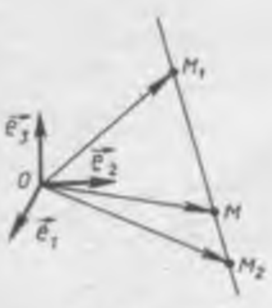


Рис. 134

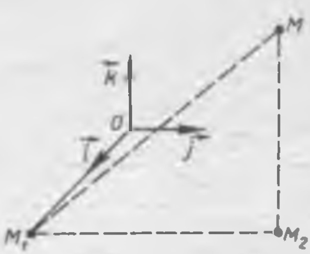


Рис. 135

искомые координаты точки M. Пользуясь формулой (3), получаем

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda};\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \quad (4)$$

В частности, середина отрезка M_1M_2 имеет координаты ($\lambda=1$):

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

4. Система координат называется *прямоугольной декартовой* или просто *прямоугольной,* если базис этой системы является ортонормированным (§ 7, п. 4). Такая система координат с началом в точке O обозначается так: $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ или $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, где $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$, $\vec{i}\vec{j}=\vec{i}\vec{k}=\vec{j}\vec{k}=0$ (рис. 135).

Координаты точки $M(x, y, z)$ в прямоугольной системе координат имеют простой геометрический смысл. Пусть OM_1M_2M — координатная ломаная этой точки. В данном случае точка M_1 является проекцией точки M на ось абсцисс (рис. 135). Так как $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{i}$, то $OM_1=|x|$. Таким образом, $x=OM_1$, если M_1 — точка положительной полуоси Ox; $x=-OM_1$, если M_1 — точка отрицательной полуоси, и $x=0$, если M_1 совпадает с точкой O. Аналогичный геометрический смысл имеют ордината y и аппликата z точки M.

Пусть в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ точки M_1 и M_2 имеют координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Вычислим расстояние между этими точками. Так как по формуле (2) $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, то, учитывая, что $M_1M_2=|\overrightarrow{M_1M_2}|$, по теореме 2 из § 7 получаем:

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \quad (5)$$

§ 53. Ориентация пространства

1. Докажем теорему, которая выражает признак компланарности трех векторов, заданных своими координатами.

Теорема. *Для того чтобы векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ и $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, заданные координатами в произвольном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство:*

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}=0. \quad (1)$$

□ Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Тогда они линейно зависимы (теорема 4 из § 6), т. е. существуют числа α, β и γ, не равные одновременно нулю и такие, что

$$\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0. \quad (2)$$

Запишем эти равенства в координатах:

$$\begin{aligned} \alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1&=0,\\ \alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2&=0,\\ \alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3&=0. \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, столбцы определителя $\triangle$ в левой части равенства (1) линейно зависимы. Из курса алгебры известно, что в этом случае $\triangle=0$, т. е. выполняется равенство (1).

Обратно, пусть выполняется равенство (1). Тогда столбцы определителя $\triangle$ линейно зависимы, т. е. система (3) однородных линейных уравнений относительно α, β и γ имеет ненулевые решения. Умножив равенства (3) соответственно на $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ и сложив, получим равенство (2). Следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы, поэтому они компланарны. ■

2. Понятие ориентации пространства вводится по аналогии с ориентацией плоскости (см. § 13). Так как любые три некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке, образуют базис трехмерного векторного пространства V, то в пространстве V существует бесконечное множество базисов. Рассмотрим два из них: $A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ и $B=(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$. Разложим векторы базиса B по векторам базиса A:

$$\begin{aligned} \vec{b}_1&=c_{11}\vec{a}_1+c_{21}\vec{a}_2+c_{31}\vec{a}_3,\\ \vec{b}_2&=c_{12}\vec{a}_1+c_{22}\vec{a}_2+c_{32}\vec{a}_3,\\ \vec{b}_3&=c_{13}\vec{a}_1+c_{23}\vec{a}_2+c_{33}\vec{a}_3. \end{aligned}$$

Из координат векторов $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ и $\vec{b}_3$ можно составить матрицу третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Координаты вектора $\vec{b}_1$ образуют первый столбец этой матрицы, координаты вектора $\vec{b}_2$ — второй столбец, а координаты вектора $\vec{b}_3$ — третий столбец. Она называется *матрицей перехода от базиса A к базису B*. Определитель матрицы перехода от базиса A к базису B обозначим так: $A|B$. Таким образом,

$$A|B=(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)\mid(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Так как векторы $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$ линейно независимы, то по теореме предыдущего пункта $A|B\neq 0$.

Предлагаем читателю по аналогии с п. 1 § 13 самостоятельно убедиться в том, что имеет место следующее утверждение.

Для любых базисов A, B и C пространства выполняются равенства:

1^0. $A|A=1$.

Рис. 136

2^0. $(A|B)\cdot(B|C)=A|C$.

3^0. $(A|B)\cdot(B|A)=1$.

3. Обозначим через $\boldsymbol{B}$ множество всех базисов пространства. Будем говорить, что базисы $A, B \in \boldsymbol{B}$ находятся в отношении Δ (одинаково ориентированы), если $A|B>0$, и запишем так: $A\Delta B$. Используя свойства 1^0-3^0 пункта 2 точно так же, как в п. 2 § 13, мы убеждаемся в том, что отношение Δ является отношением эквивалентности на множестве $\boldsymbol{B}$ всех базисов пространства.

Докажем, что фактор-множество $\boldsymbol{B}/\Delta$ состоит лишь из двух элементов. Для этого рассмотрим базисы $A=(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ и $B=(\bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{a}_3)$. Так как $A|B=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$, то классы эквивалентности K_A и K_B не совпадают. С другой стороны, любой базис $C=(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3)$ принадлежит либо классу K_A, либо классу K_B. В самом деле, по свойству 2^0 $A|C=(A|B)(B|C)=-B|C$. Отсюда следует, что либо $A|C>0$, либо $B|C>0$. В первом случае $C\in K_A$, а во втором случае $C\in K_B$.

Каждый из элементов фактор-множества $\boldsymbol{B}/\Delta$ назовем *ориентацией векторного пространства* V. Выделим одну из этих ориентаций, назовем ее *положительной* (а другую — *отрицательной*). Векторное пространство V, в котором выбрана положительная ориентация, называется *ориентированным*. Базисы положительной ориентации называются *правыми базисами*, а базисы отрицательной ориентации — *левыми*.

Пространство называется *ориентированным*, если ориентировано векторное пространство V. При этом система координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ называется *правой (левой)*, если базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ — правый (левый). Обычно ориентацию пространства выбирают так, чтобы оси Ox, Oy, Oz правой системы координат $Oxyz$ были направлены вдоль большого, указательного и среднего пальцев правой руки (рис. 136, *а*). При таком выборе ориентации оси левой системы координат будут направлены вдоль соответствующих пальцев левой руки (рис. 136, *б*).

В дальнейшем изложении всюду, где нет специальных оговорок, предполагается, что если в пространстве выбрана одна система координат, то она является правой. Таким образом, *если в пространстве задана система координат, то пространство считается ориентированным.*

§ 54. Формулы преобразования координат в пространстве

1. Рассмотрим в пространстве две аффинные системы координат $O\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$ и $O'\bar{e}_1'\bar{e}_2'\bar{e}_3'$. Первую систему назовем старой, а вторую — новой. Пусть M — произвольная точка пространства, которая в старой системе координат имеет координаты x, y, z, а в новой системе x', y', z'

(рис. 137). Задача преобразования координат состоит в следующем: зная координаты нового начала координат и новых координатных векторов в старой системе:

$$O'(x_0,\ y_0,\ z_0),\ \vec{e}_1{}'(c_{11},\ c_{21},\ c_{31}),$$
$$\vec{e}_2{}'(c_{12},\ c_{22},\ c_{32}),\ \vec{e}_3{}'(c_{13},\ c_{23},\ c_{33}) \quad (1)$$

выразить координаты x, y, z точки M в старой системе через координаты x', y', z' той же точки в новой системе.

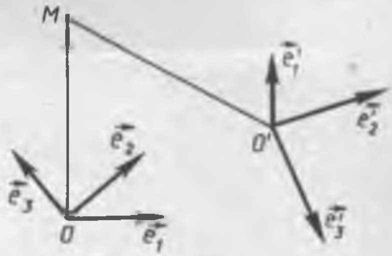


Рис. 137

По определению координат векторов и точек из (1) получаем:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OO'} &= x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3, \\ \vec{e}_1{}' &= c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 + c_{31}\vec{e}_3, \\ \vec{e}_2{}' &= c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 + c_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}_3{}' &= c_{13}\vec{e}_1 + c_{23}\vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3. \end{aligned} \qquad (2)$$

По правилу треугольника $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$, поэтому $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = \overrightarrow{OO'} + x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}'$. Подставив в правую часть этого равенства выражения векторов $\overrightarrow{OO'}$, $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ из равенств (2) и сравнив соответствующие коэффициенты в левой и правой частях полученного равенства, будем иметь:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Так выражаются координаты x, y, z точки M в старой системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ через ее координаты x', y', z' в новой системе $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$. Формулы (3) называются *формулами преобразования аффинной системы координат* в пространстве. Заметим, что в этих формулах матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

составленная из коэффициентов при x', y', z', есть в точности матрица (4) § 53 перехода от базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ к базису $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$, а свободными членами служат координаты x_0, y_0, z_0 нового начала O' в старой системе $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Так как векторы $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ не компланарны, то определитель Δ матрицы (4) не равен нулю. Поэтому система (3) разрешима относительно x', y', z'. Это позволяет выразить координаты точки M в новой системе через координаты той же точки в старой системе.

2. По аналогии с п. 2 § 15 из формул (3) получаем формулы

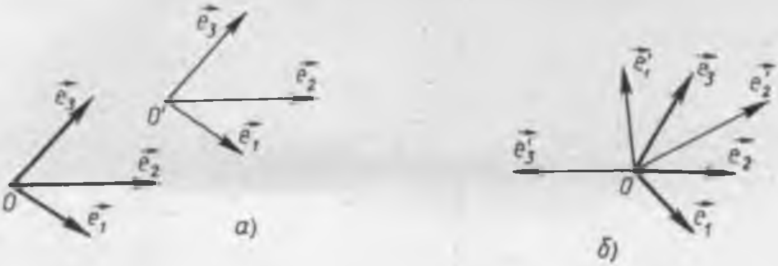


Рис. 138

переноса начала координат, т. е. формулы преобразования координат при переходе от системы $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ к системе $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ (рис. 138, *а*):

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0, \quad z = z' + z_0. \tag{5}$$

Если новая система координат $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ отличается от старой $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ лишь координатными векторами (замена координатных векторов) (рис. 138, *б*), то формулы (3) принимают вид:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{aligned} \tag{6}$$

3. Рассмотрим теперь преобразование прямоугольных систем координат. При переходе от одной прямоугольной системы координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ к другой $O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ можем использовать те же формулы (3). Матрица перехода от базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ к базису $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ имеет вид (4). В данном случае на элементы этой матрицы накладываются дополнительные ограничения. Действительно, элементы столбцов матрицы C являются соответственно координатами единичных и взаимно ортогональных векторов $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ в ортонормированном базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, поэтому сумма квадратов элементов каждого столбца матрицы C равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов любых двух ее различных столбцов равна нулю. По формулам (9) § 8 получаем:

$$\begin{aligned} &c_{11} = \cos(\widehat{\vec{i}', \vec{i}}), \quad c_{12} = \cos(\widehat{\vec{j}', \vec{i}}), \quad c_{13} = \cos(\widehat{\vec{k}', \vec{i}}), \\ &c_{21} = \cos(\widehat{\vec{i}', \vec{j}}), \quad c_{22} = \cos(\widehat{\vec{j}', \vec{j}}), \quad c_{23} = \cos(\widehat{\vec{k}', \vec{j}}), \\ &c_{31} = \cos(\widehat{\vec{i}', \vec{k}}), \quad c_{32} = \cos(\widehat{\vec{j}', \vec{k}}), \quad c_{33} = \cos(\widehat{\vec{k}', \vec{k}}). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая те же формулы (9) § 8, замечаем, что векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ в базисе $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$ имеют координаты

$$\vec{i}\,(c_{11},\ c_{12},\ c_{13}), \quad \vec{j}\,(c_{21},\ c_{22},\ c_{23}), \quad \vec{k}\,(c_{31},\ c_{32},\ c_{33}).$$

Таким образом, *сумма квадратов каждой строки матрицы C равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов любых двух ее различных строк равна нулю.*

Квадратная матрица C, обладающая такими свойствами, называется *ортогональной*. Примерами *ортогональных* матриц являются следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, доказано, что матрица перехода от одного ортонормированного базиса $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ к другому $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ является ортогональной матрицей. Пусть Δ — определитель этой матрицы. Докажем, что $\Delta = +1$, если базисы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ориентированы одинаково, и $\Delta = -1$, если они ориентированы противоположно. Действительно, так как матрица (4) ортогональная, то по правилу умножения матриц, используя определение ортогональных матриц, получаем:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя к этому равенству теорему об определителе произведения матриц, будем иметь: $\Delta^2 = 1$, т. е. $\Delta = \pm 1$. Если базисы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ориентированы одинаково, то $\Delta > 0$, поэтому $\Delta = +1$, если же они ориентированы противоположно, то $\Delta < 0$, поэтому $\Delta = -1$.

Итак, формулы преобразования прямоугольных систем координат имеют вид (3), где матрица (4) является ортогональной. При этом, если системы $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ и $O'\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ ориентированы одинаково, определитель Δ матрицы (4) равен $+1$, а если они ориентированы противоположно, то $\Delta = -1$.

§ 55. Смешанное произведение векторов. Объем тетраэдра

1. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные векторы. От некоторой точки M пространства отложим векторы $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$ и построим параллелепипед $MADBCA_1D_1B_1$ так, чтобы отрезки MA, MB и MC были ребрами этого параллелепипеда (рис. 139). Его назовем *параллелепипедом, построенным на векторах* $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Заметим, что в зависимости от выбора точки M на данных векторах можно построить бесконечное множество параллелепипедов, но все они равны друг другу, поэтому имеют один и тот же объем.

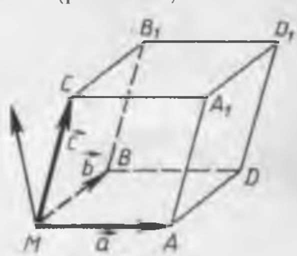


Рис. 139

Рассмотрим ориентированное пространство. *Смешанным (тройным)* произведением некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,

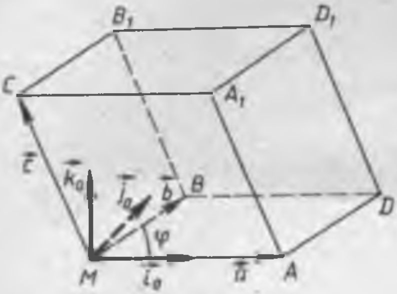


Рис. 140

взятых в данном порядке, называется объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, снабженный знаком «+», если базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правый, и знаком «—», если этот базис левый. Смешанное произведение компланарных векторов считается равным нулю.

Смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ обозначается так: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ или $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

2. Выведем формулу для вычисления смешанного произведения по координатам векторов. Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а. *Каковы бы ни были произвольный базис* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *и ортонормированный правый базис* $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, *имеет место равенство*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}).$$

□ Рассмотрим параллелепипед $MADBCA_1D_1B_1$, построенный на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, и построим вспомогательную прямоугольную систему координат $M\vec{i}_0\vec{j}_0\vec{k}_0$. Координатные векторы этой системы выбраны следующим образом: $\vec{i}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, вектор $\vec{j}_0$ параллелен плоскости MAB и направлен так, что $\vec{j}_0 \perp \vec{i}_0$ и базисы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$ этой плоскости ориентированы одинаково. Вектор $\vec{k}_0$ направлен так, что векторы $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$ образуют правый ортонормированный базис (рис. 140). Докажем, что

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}). \qquad (1)$$

Пусть φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, тогда по теореме § 14 $\vec{b}=|\vec{b}| \cos\varphi \vec{i}_0+|\vec{b}| \sin\varphi \vec{j}_0$, поэтому векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в базисе $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$ имеют координаты $\vec{a}\,(|\vec{a}|,\ 0,\ 0)$, $\vec{b}\,(|\vec{b}|\cos\varphi,\ |\vec{b}|\sin\varphi,\ 0)$. Обозначим координаты вектора $\vec{c}$ через $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$. Тогда

$$(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})=\begin{vmatrix} |\vec{a}| & |\vec{b}|\cos\varphi & \alpha \\ 0 & |\vec{b}|\sin\varphi & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi\cdot\gamma.$$

Выражение $|\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\varphi$ — площадь параллелограмма $MADB$, а $|\gamma|$ — высота параллелепипеда $MADBCA_1D_1B_1$. При этом, если базисы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{i}_0$, $\vec{j}_0$, $\vec{k}_0$ ориентированы одинаково (т. е. если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — правый базис), то $\gamma>0$, если же эти базисы имеют противоположные ориентации, то $\gamma<0$. Таким образом, $|\vec{a}|\ |\vec{b}| \sin\varphi\cdot\gamma= =\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, поэтому выполняется равенство (1).

По свойству 2^0 § 53:

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \mid (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)] \cdot [(\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})].$$

Но $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \mid (\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0) = 1$, так как $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и $\vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0$ — ортонормированные правые базисы. Поэтому, учитывая формулу (1), получаем искомый результат. ■

Теорема 1. *Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в произвольном базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ имеют координаты $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3. \qquad (2)$$

□ Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны, то равенство (2) очевидно (см. теорему § 53), поэтому рассмотрим случай, когда они не компланарны. Пусть $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — какой-нибудь ортонормированный правый базис, а Δ — определитель, который записан в правой части равенства (2). По свойству 2^0 § 53

$$\Delta = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = [(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \mid (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})] \cdot [(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})].$$

Таким образом, учитывая свойство 3^0 п. 2, § 53, получаем:

$$\Delta = \frac{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \mid (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \mid (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} \qquad (3)$$

По предыдущей лемме числитель правой части равенства (3) равен $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, а знаменатель равен $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, поэтому из равенства (3) следует равенство (2). ■ Если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ортонормированный, то $\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = \pm 1$, поэтому справедливо утверждение.

Следствие. *Если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеют координаты $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, то*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \varepsilon \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (4)$$

где $\varepsilon = 1$, если базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ правый, и $\varepsilon = -1$, если этот базис левый.

3. Основные свойства смешанного произведения сформулированы в следующей теореме.

Теорема 2. *Для произвольных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{d}$ и произвольного числа α имеют место следующие равенства:*

1^0. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$.

2^0. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$.

3^0. $(\alpha\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c} = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$, $\vec{a}\vec{b}(\alpha\vec{c}) = \alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

4^0. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}\vec{d} = \vec{a}\vec{c}\vec{d} + \vec{b}\vec{c}\vec{d}$, $\quad \vec{a}(\vec{b}+\vec{c})\vec{d} = \vec{a}\vec{b}\vec{d} + \vec{a}\vec{c}\vec{d}$, $\quad \vec{a}\vec{b}(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} + \vec{a}\vec{b}\vec{d}$.

□ Выберем ортонормированный правый базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и зададим данные векторы в координатах $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$, $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$.

Воспользовавшись формулой (4) и соответствующими свойствами определителей третьего порядка, убеждаемся в справедливости всех равенств 1^0-4^0. В качестве примера докажем, что $\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c}=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. По формуле (4) имеем:

$$\vec{a}(\alpha\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & \alpha b_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha b_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\alpha(\vec{a}\vec{b}\vec{c}). \blacksquare$$

4. Используем смешанное произведение векторов для решения следующей задачи.

Задача. Найти объем тетраэдра $ABCD$, если в некоторой прямоугольной системе координат даны координаты его вершин:

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\ B(x_2,\ y_2,\ z_2),\ C(x_3,\ y_3,\ z_3),\ D(x_4,\ y_4,\ z_4).$$

Решение. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, равен $|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|$. Отсюда следует, что объем V тетраэдра $ABCD$ вычисляется по формуле $V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AD}|$. Векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ имеют координаты $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$, $\overrightarrow{AD}(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1)$, поэтому по формуле (4) получаем:

$$V=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_4-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}\right|$$

§ 56. Векторное произведение векторов. Площадь треугольника

1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. От некоторой точки M пространства отложим векторы $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$ и построим параллелограмм $MACB$ так, чтобы отрезки MA и MB были смежными сторонами этого параллелограмма (рис. 141). Его назовем *параллелограммом, построенным на векторах* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$. В зависимости от выбора точки M на данных векторах можно построить бесконечное множество параллелограммов, но все они равны друг другу, поэтому имеют одну и ту же площадь.

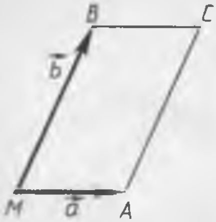


Рис. 141

Рассмотрим ориентированное пространство. *Векторным произведением* неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взятых в данном порядке, называется вектор $\vec{p}$, длина которого численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах; этот вектор перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ имеет правую ориентацию. Векторное произведение коллинеарных векторов считается равным нуль-вектору.

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $[\vec{a}\vec{b}]$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

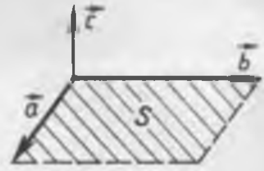


Рис. 142

Докажем теорему, в которой устанавливается связь между смешанным, векторным и скалярным произведениями векторов.

Теорема 1. *Каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$,*

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}. \qquad (1)$$

□ Рассмотрим сначала случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, поэтому левая часть равенства (1) обращается в нуль. Но правая часть этого равенства также обращается в нуль, так как $[\vec{a}\vec{b}]=\vec{0}$ и поэтому $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}=0$. Таким образом, в этом случае равенство (1) верно.

Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а $\vec{c}$ — единичный вектор, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правый (рис. 142). Тогда, очевидно, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. С другой стороны, векторы $[\vec{a}\vec{b}]$ и $\vec{c}$ сонаправлены, поэтому $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}=|[\vec{a}\vec{b}]|\,|\vec{c}|=S$. Итак, в этом случае равенство (1) также верно.

Рассмотрим, наконец, случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, а $\vec{c}$ — произвольный вектор. Пусть $\vec{k}$ — единичный вектор, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, что базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{k}$ правый. Разложим вектор $\vec{c}$ по этому базису: $\vec{c}=c_1\vec{a}+c_2\vec{b}+c_3\vec{k}$. Тогда по теореме 2 § 55 $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\vec{b}(c_1\vec{a}+c_2\vec{b}+c_3\vec{k})=c_3(\vec{a}\vec{b}\vec{k})$. С другой стороны, по аналогичному свойству скалярного произведения векторов $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}](c_1\vec{a}+c_2\vec{b}+c_3\vec{k})=c_1([\vec{a}\vec{b}]\,\vec{a})+c_2([\vec{a}\vec{b}]\,\vec{b})+c_3([\vec{a}\vec{b}]\,\vec{k})=c_3([\vec{a}\vec{b}]\,\vec{k})=c_3(\vec{a}\vec{b}\vec{k})$. Таким образом, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}$. ■

Следствие. Каковы бы ни были векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$,

$$[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}=\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]. \qquad (2)$$

□ Действительно, $[\vec{a}\vec{b}]\,\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\,[\vec{b}\vec{c}]=[\vec{b}\vec{c}]\,\vec{a}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}$. Но по теореме 2 § 56 $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}$, поэтому равенство (2) верно. ■

2. Найдем координаты вектора $[\vec{a}\vec{b}]$ по координатам векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Теорема 2. *Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ортонормированном правом базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ имеют координаты $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, то вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ имеет координаты:*

$$[\vec{a}\vec{b}] \quad \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right). \qquad (3)$$

□ Пусть x, y, z — координаты вектора $[\vec{a}\vec{b}]$. Тогда $[\vec{a}\vec{b}]=x\vec{i}+$

$+y\vec{j}+z\vec{k}$, поэтому $[\vec{a}\vec{b}]\vec{i}=x\vec{i}\cdot\vec{i}=x$. По предыдущей теореме $[\vec{a}\vec{b}]\vec{i}=\vec{a}\vec{b}\vec{i}$, следовательно, $x=\vec{a}\vec{b}\vec{i}$. Аналогично получаем: $y=\vec{a}\vec{b}\vec{j}$ и $z=\vec{a}\vec{b}\vec{k}$. По формуле (4) § 55 найдем x, y и z:

$$x=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\quad y=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix},\quad z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \blacksquare$$

Формула (3) означает, что

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}. \tag{3'}$$

Это равенство условно можно записать в следующем, удобном для запоминания виде:

$$[\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vec{i} \\ a_2 & b_2 & \vec{j} \\ a_3 & b_3 & \vec{k} \end{vmatrix}$$

В правой части этого равенства записан «определитель», который, конечно, не является определителем в обычном смысле слова. Но если его разложить по элементам (векторным!) третьего столбца, то, пользуясь обычными правилами разложения определителя третьего порядка, получим формулу (3').

Замечание. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами в ортонормированном левом базисе, то

$$[\vec{a}\vec{b}]\left(-\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) \tag{4}$$

Предлагаем читателю самостоятельно обосновать это утверждение.

3. Основные свойства векторного произведения векторов сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3. *Для произвольных векторов* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ и произвольного числа α *имеют место следующие равенства:*

1^0. $[\vec{a}\vec{b}]=-[\vec{b}\vec{a}]$.

2^0. $[\alpha\vec{a}, \vec{b}]=\alpha[\vec{a}\vec{b}]$, $[\vec{a}, (\alpha\vec{b})]=\alpha[\vec{a}\vec{b}]$.

3^0. $[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}]=[\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}]$, $[\vec{a}, \vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a}\vec{b}]+[\vec{a}\vec{c}]$.

□ Выберем ортонормированный правый базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и зададим данные векторы в координатах:

$$\vec{a}(a_1, a_2, a_3),\ \vec{b}(b_1, b_2, b_3),\ \vec{c}(c_1, c_2, c_3).$$

Воспользовавшись формулой (3) и соответствующими свойствами определителей второго порядка, убеждаемся в справедливости всех равенств 1^0—3^0. В качестве примера докажем, что

$$[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}]=[\vec{a}\vec{c}]+[\vec{b}\vec{c}]. \tag{5}$$

Зададим данные векторы в координатах:

$$[\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}]\,(x, y, z),\ [\vec{a}\vec{c}]\,(x_1, y_1, z_1),\ [\vec{b}\vec{c}]\,(x_2, y_2, z_2).$$

По формуле (3) имеем:

$$x=\begin{vmatrix} a_2+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=x_1+x_2.$$

Аналогично получаем: $y=y_1+y_2$, $z=z_1+z_2$, поэтому имеет место равенство (5).

Замечание. Важно подчеркнуть, что векторное произведение двух векторов, в отличие от скалярного произведения, есть вектор (отсюда и термин: «векторное» произведение). Кроме того, векторное произведение, как видно из доказанной теоремы, зависит от порядка сомножителей, т. е., вообще говоря, $[\vec{a}\,\vec{b}]\neq[\vec{b}\,\vec{a}]$.

4. Используя векторное произведение, выведем две формулы для вычисления площади треугольника. Эти формулы часто используются при решении геометрических задач. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма. *Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство*

$$[\vec{a}\vec{b}][\vec{a}\vec{b}]=(\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b})-(\vec{a}\vec{b})^2. \tag{6}$$

□ Выберем ортонормированный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ так, чтобы $\vec{a}\perp\vec{k}$ и $\vec{b}\perp\vec{k}$, и рассмотрим координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в этом базисе: $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ 0)$, $\vec{b}(b_1,\ b_2,\ 0)$.

Выразим левую часть равенства (6) через координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По формуле (4) вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ имеет координаты: $[\vec{a}\,\vec{b}]\left(0, 0, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$, поэтому

$$[\vec{a}\vec{b}][\vec{a}\vec{b}]=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$$

С другой стороны, $(\vec{a}\vec{a})(\vec{b}\vec{b})-(\vec{a}\vec{b})^2=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-$ $-(a_1b_1+a_2b_2)^2=a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2$

Таким образом, имеет место равенство (6).

Задача 1. Доказать, что площадь треугольника ABC вычисляется по формуле

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a}\vec{a} & \vec{a}\vec{b} \\ \vec{b}\vec{a} & \vec{b}\vec{b} \end{vmatrix}}, \tag{7}$$

где $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$.

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, численно равна $|[\vec{a}\vec{b}]|$, поэтому $S_{ABC}=\frac{1}{2}|[\vec{a}\vec{b}]|=$ $=\frac{1}{2}\sqrt{[\vec{a}\vec{b}][\vec{a}\vec{b}]}$. Отсюда, учитывая предыдущую лемму, получаем искомую формулу (7).

Задача 2. Найти площадь треугольника ABC, если в некоторой прямоугольной системе координат даны координаты его вершин:

$$A(x_1,\ y_1,\ z_1),\ B(x_2,\ y_2,\ z_2),\ C(x_3,\ y_3,\ z_3).$$

Решение. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, численно равна $|[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}]|$. Отсюда следует, что

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB}],\ \overrightarrow{AC}]|\ .$$

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ имеют координаты $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $\overrightarrow{AC}(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$, поэтому, используя формулу (3) (или формулу (4), если данная система левая), получаем:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ x_2+x_1 & x_3-x_1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}^2}.$$

В частности, если вершины треугольника лежат в плоскости Oxy, то $z_1=z_2=z_3=0$, поэтому

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y_2-y_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

§ 57. Метод координат в пространстве. Уравнение поверхности

1. В § 17 мы уже ознакомились с методом координат в геометрии. Для того чтобы пользоваться этим методом в пространстве, необходимо уметь с помощью чисел, уравнений, неравенств или их систем задавать геометрические фигуры в пространстве.

Рассмотрим фигуру Φ и введем в пространстве аффинную систему координат $Oe_1e_2e_3$. *Условием, определяющим фигуру* Φ в данной системе координат, называется уравнение или неравенство (или их система), которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры Φ и не удовлетворяют координаты точки, не принадлежащей фигуре Φ. Уравнение, определяющее фигуру Φ, называется *уравнением фигуры* Φ в данной системе координат. Например, уравнение $z=0$ *есть уравнение* плоскости Oxy в заданной системе координат $Oxyz$, а неравенство $z>0$ определяет полупространство с границей Oxy, которому принадлежит точка $(0,\ 0,\ 1)$.

2. При изучении геометрии в пространстве методом координат в качестве фигур чаще всего рассматривают поверхности. Примерами поверхностей являются плоскость, сфера, цилиндрические и конические поверхности и др. Строгое определение поверхности будет дано позже, во второй части настоящего курса. Условием, определяющим поверхность Φ в данной системе координат, является, как правило, уравнение, которое называется *уравнением поверхности* Φ.

В качестве примера найдем уравнение сферы радиуса r с центром $C(a,\ b,\ c)$ в прямоугольной системе координат. Точка M пространства принадлежит этой сфере тогда и только тогда, когда $CM=r$ или $CM^2=r^2$. Это равенство в координатах запишется так:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (1)$$

Это и есть уравнение сферы радиуса r с центром в точке $C(a, b, c)$. В частности, если центр сферы совпадает с началом координат, то $a=b=c=0$, поэтому уравнение (1) принимает вид:

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \qquad (2)$$

Уравнение (1) можно записать в виде

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3)$$

где

$$A=-2a,\ B=-2b,\ C=-2c,\ D=a^2+b^2+c^2-r^2.$$

Таким образом, уравнение любой сферы в прямоугольной системе координат имеет вид (3). По аналогии с окружностью (см. § 18, п. 2) можно доказать, что если коэффициенты уравнения (3) удовлетворяют неравенству $A^2+B^2+C^2-4D>0$, то поверхность, заданная этим уравнением, есть сфера с центром $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ и радиусом $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$. Предлагаем читателю самостоятельно обосновать это утверждение. Оно часто используется при изучении множеств точек пространства. Рассмотрим пример.

Пример. Найти множество всех точек пространства, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек A и B есть постоянная величина c^2.

Решение. Прямоугольную систему координат $Oxyz$ возьмем так, чтобы начало координат совпало с серединой отрезка AB и точка A лежала на положительном луче оси Ox. Если $AB=2a$, то в выбранной системе координат $A(a, 0, 0)$, $B(-a, 0, 0)$.

Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ принадлежала искомому множеству точек, необходимо и достаточно, чтобы $AM^2+BM^2=c^2$, или в координатах: $(x-a)^2+y^2+z^2+(x+a)^2+y^2+z^2=c^2$ или

$$x^2+y^2+z^2=\frac{c^2}{2}-a^2. \qquad (4)$$

Возможны три случая.

1) $\frac{c^2}{2}-a^2>0$, т. е. $c>\sqrt{2}a$. В этом случае уравнением (4), как было показано выше, определяется сфера с центром в начале координат и с радиусом $r=\frac{\sqrt{2c^2-4a^2}}{2}$. В частности, когда $c=2a$, то $r=a$, т. е. в этом случае отрезок AB является диаметром сферы.

2) $\frac{c^2}{2}-a^2=0$, т. е. $c=\sqrt{2}a$. Уравнение (4) принимает вид: x^2+ $+y^2+z^2=0$. Этому уравнению удовлетворяют координаты только одной точки — начала координат. В этом случае искомое множество состоит из одной-единственной точки — середины отрезка AB.

3) $\frac{c^2}{2}-a^2<0$, т. е. $c<\sqrt{2}a$. Искомое множество является пустым.

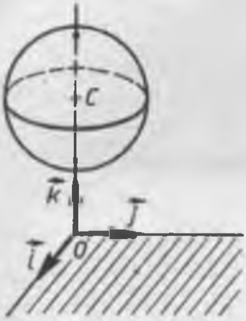


Рис. 143

3. Пусть $F_1(x, y, z)=0$ — уравнение фигуры Φ_1, а $F_2(x, y, z)=0$ —уравнение фигуры Φ_2 в одной и той же системе координат. Система уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z)=0, \\ F_2(x, y, z)=0 \end{cases} \tag{5}$$

определяет в той же системе координат фигуру $\Phi=\Phi_1\cap\Phi_2$, т. е. пересечение фигур Φ_1 и Φ_2. Если Φ_1 и Φ_2 — две поверхности, то фигура Φ является, вообще говоря, линией. Таким образом, в пространстве линия может быть определена системой (5) двух уравнений. Например, система уравнений

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2+z^2=r^2 \end{cases} \tag{6}$$

определяет в прямоугольной системе координат множество Φ общих точек плоскости Oxy и сферы радиуса r с центром в начале координат. Ясно, что множество Φ — окружность плоскости Oxy радиуса r с центром в начале координат. Поэтому уравнения (6) являются уравнениями окружности в пространстве.

В заключение отметим, что не любая система двух уравнений определяет в пространстве линию в обычном смысле слова. Например, в пространстве нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют системе уравнений: $z=0$, $x^2+y^2+(z-2)^2=1$. Действительно, сфера, заданная вторым уравнением, имеет центр $C(0, 0, 2)$ и радиус $r=1$. Она не имеет общих точек с плоскостью $z=0$ (рис. 143).

§ 58. Приложение метода координат и векторной алгебры к решению задач стереометрии

1. В этом параграфе рассматриваются некоторые примеры применения метода координат, а также смешанного и векторного произведений векторов к решению задач стереометрии. Рассмотрим сначала задачи, в которых применяется метод координат в пространстве. Начнем с задачи вспомогательного характера, которая часто используется при решении других задач.

Задача 1. Найти координаты центра тяжести (точки пересечения медиан) треугольника ABC, если в некоторой аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ даны координаты его вершин:

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3).$$

Решение. Пусть N — центр тяжести треугольника ABC, а (x, y, z) — координаты этой точки. По формуле (2) из § 10 имеем:

$$\vec{ON}=\frac{1}{3}(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}). \tag{1}$$

Но векторы $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ являются радиус-векторами точек N, A, B и C, поэтому эти векторы в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ имеют координаты $\overrightarrow{ON}(x, y, z)$, $\overrightarrow{OA}(x_1, y_1, z_1)$, $\overrightarrow{OB}(x_2, y_2, z_2)$, $\overrightarrow{OC}(x_3, y_3, z_3)$. Пользуясь формулой (1), получим:

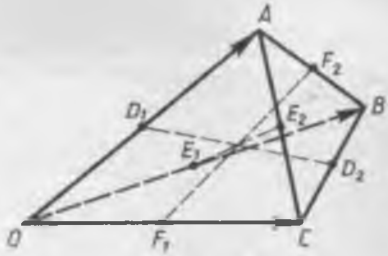


Рис. 144

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ z=\frac{z_1+z_2+z_3}{3}. \qquad (2)$$

Задача 2. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противолежащих ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Решение. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр, а D_1, D_2; E_1, E_2, F_1, F_2— соответственно середины ребер OA и BC, OB и AC, OC и AB (рис. 144). Аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ выберем так, чтобы $\vec{e}_1=\overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3=\overrightarrow{OC}$. В этой системе координат вершины тетраэдра имеют координаты $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

Найдем координаты середины M отрезка D_1D_2. Точки D_1 и D_2— середины отрезков OA и BC, поэтому они имеют координаты $D_1(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $D_2(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Следовательно, точка M имеет координаты $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Точно так же находим координаты середин отрезков E_1E_2 и F_1F_2 и убеждаемся в том, что эти точки имеют те же координаты: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, поэтому они совпадают с точкой M.

Задача 3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точки M и N — центры тяжести треугольников A_1BD и B_1D_1C (рис. 145). Доказать, что точки M и N лежат на диагонали AC_1 параллелепипеда и делят эту диагональ на три равные части.

Решение. Задача будет решена, если докажем, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NC_1}$ (см. рис. 145). Аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ выберем так, чтобы $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AD}$, $\vec{e}_3=\overrightarrow{AA_1}$. В этой системе координат вершины параллелепипеда имеют координаты $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $A_1(0, 0, 1)$, $B_1(1, 0, 1)$, $C_1(1, 1, 1)$, $D_1(0, 1, 1)$. По формулам (2) находим координаты точек M и N: $M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $N\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{NC_1}$ имеют координаты $\overrightarrow{AM}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{MN}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{NC_1}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. От-

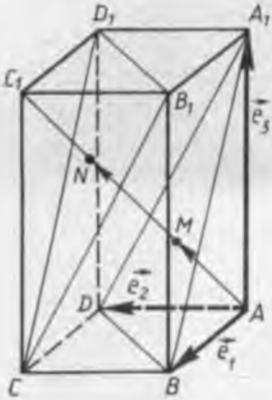


Рис. 145

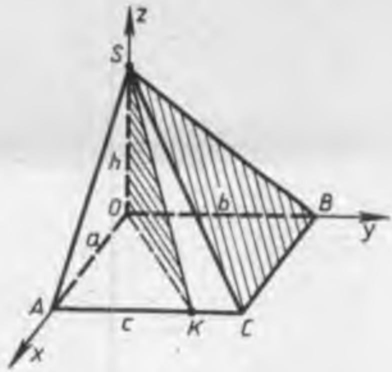


Рис. 146

сюда следует, что $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{NC_1}$, поэтому точки M и N лежат на диагонали AC_1 и делят ее на три равные части.

2. Рассмотрим теперь примеры решения задач, в которых используются смешанное и векторное произведения векторов.

Задача 4. В данном параллелепипеде $OADBCA_1D_1B_1$ точки P, Q и R являются центрами граней, не содержащих точку O. Найти отношение объема V пирамиды $OPQR$ к объему V_0 данного параллелепипеда.

Решение. Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. Используя задачу из § 55, имеем:

$$V_0=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|,\ V=\frac{1}{6}|\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{OQ}\,\overrightarrow{OR}|. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в том, что векторы $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$ и $\overrightarrow{OR}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеют координаты $\overrightarrow{OP}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OQ}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{OR}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. По формуле (2) из § 55 имеем:

$$\overrightarrow{OP}\,\overrightarrow{OQ}\,\overrightarrow{OR}=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}).$$

Учитывая равенство (3), отсюда получаем: $6V=\frac{1}{2}V_0$. Таким образом, $\frac{V}{V_0}=\frac{1}{12}$.

Задача 5. Дана четырехугольная пирамида $SOACB$, ребра OA, OB и OS которой взаимно перпендикулярны и имеют длины:

$OA = a$, $OB = b$, $OS = h$. Основанием пирамиды служит прямоугольник $OACB$, на стороне AC которого взята точка K так, что $AK = c$. Найти угол φ между плоскостями SBC и SOK (рис. 146).

Решение. Прямоугольную правую систему координат $Oxyz$ выберем так, как показано на рисунке 146. В этой системе координат вершины пирамиды и точка K имеют координаты $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(a, b, 0)$, $S(0, 0, h)$, $K(a, c, 0)$.

Угол φ между плоскостями SBC и SOK равен углу между двумя векторами, перпендикулярными соответственно к этим плоскостям. В качестве таких векторов могут быть выбраны векторы $\vec{p} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{SB}]$ и $\vec{q} = [\overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OK}]$, поэтому $\varphi = (\widehat{\vec{p}, \vec{q}})$. Найдем координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и по этим координатам вычислим $\cos\varphi$.

Векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{OS}$ и $\overrightarrow{OK}$ имеют координаты $\overrightarrow{BC}(a, 0, 0)$, $\overrightarrow{SB}(0, b, -h)$, $\overrightarrow{OS}(0, 0, h)$, $\overrightarrow{OK}(a, c, 0)$. По формуле (3) из § 56 находим координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$: $\vec{p}(0, ah, ab)$; $\vec{q}(-hc, ah, 0)$. По формуле (8) из § 8 получаем:

$$\cos\varphi = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + c^2}\,\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

Глава VII

ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 59. Уравнение плоскости

1. Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость σ. Множество L всех векторов, параллельных плоскости σ, является двумерным векторным подпространством трехмерного векторного пространства V. Подпространство L назовем *направляющим подпространством* плоскости σ. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — какая-либо пара линейно независимых векторов из L. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис подпространства L, т. е. L является подпространством, натянутым на векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $L=L(\vec{a}, \vec{b})$ (см. § 9). Таким образом, направляющее продпространство $L=L(\vec{a}, \vec{b})$ плоскости σ можно считать известным, если даны какие-либо два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, параллельные этой плоскости.

На плоскости σ с направляющим подпространством $L(\vec{a}, \vec{b})$ возьмем некоторую точку M_0. Точка M лежит на плоскости σ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны и, следовательно, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$\overrightarrow{M_0M}\,\vec{a}\,\vec{b}=0. \qquad (1)$$

Используя это равенство, запишем уравнение плоскости σ, заданной различными способами.

2. Уравнение плоскости, заданной точкой и направляющим подпространством.

Задача 1. В аффинной системе координат заданы своими координатами точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколлинеарных вектора: $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Написать уравнение плоскости σ, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее подпространство $L(\vec{a}, \vec{b})$.

Решение. Как отмечено выше, произвольная точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда выполнено условие (1) и, следовательно, когда выполнено равенство

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & a_1 & b_1 \\ y-y_0 & a_2 & b_2 \\ z-z_0 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Если точка M принадлежит плоскости σ, то имеет место равенство (1) и, значит, координаты x, y, z точки M удовлетворяют уравнению (2). Если же точка M не лежит в плоскости σ, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не компланарны, поэтому не выполняется равенство (1) и, следовательно, координаты x, y, z точки M не удовлетворяют уравнению (2).

Таким образом, уравнение (2) есть уравнение плоскости σ.

3. Уравнение плоскости, заданной тремя точками.

Задача 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через три не лежащие на одной прямой точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, заданные своими координатами в некоторой аффинной системе координат.

Решение. Так как данные точки не лежат на одной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ не коллинеарны и образуют базис направляющего подпространства рассматриваемой плоскости. Эту плоскость можно определить как плоскость, проходящую через данную точку M_1 и имеющую данное направляющее подпространство $L(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3})$. Следовательно, ее уравнение можно написать по образцу уравнения (2) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

4. Уравнение плоскости, заданной точкой и перпендикулярным вектором. Говорят, что вектор $\vec{n}$ *перпендикулярен* плоскости σ, если вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любому вектору из направляющего подпространства плоскости σ.

Задача 3. В прямоугольной системе координат заданы своими координатами точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулевой вектор $\vec{n}(A, B, C)$. Написать уравнение плоскости σ, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

Решение. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ ортогональны и, значит, когда их скалярное произведение равно нулю: $\overrightarrow{M_0M}\,\vec{n}=0$.

Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{n}$ имеют координаты: $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\vec{n}(A, B, C)$, поэтому предыдущее равенство принимает вид:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (4)$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(A, B, C)$.

5. Параметрические уравнения плоскости. Зададим в пространстве аффинную систему координат. Пусть плоскость σ проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющее подпространство $L(\vec{a}, \vec{b})$ с базисом $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда

имеет место равенство (1) (векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны), т. е. когда найдутся такие числа u, v, что

$$\overrightarrow{MM_0}=u\vec{a}+v\vec{b}. \qquad (5)$$

Следовательно, точка M принадлежит плоскости σ тогда и только тогда, когда выполняется равенство (5).

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $\overrightarrow{M_0M}\,(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$, поэтому условие (5) запишется в виде системы равенств:

$$\begin{aligned} x-x_0&=ua_1+vb_1,\\ y-y_0&=ua_2+vb_2,\\ z-z_0&=ua_3+vb_3. \end{aligned} \qquad (6)$$

Эти равенства называются *параметрическими уравнениями* плоскости σ, а u и v — *параметрами*.

§ 60. Общее уравнение плоскости

1. Любую плоскость в пространстве можно задать принадлежащей ей точкой и направляющим подпространством. Тогда в заданной аффинной системе координат получим уравнение этой плоскости в виде уравнения (2) предыдущего параграфа. Раскрывая по элементам первого столбца определитель, находящийся в левой части этого уравнения, получим уравнение плоскости в виде

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (1)$$

где

$$A=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\quad B=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},\quad C=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$
$$D=-(Ax_0+By_0+Cz_0).$$

Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то в уравнении (1) коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно (см. 4^0 п. 3, § 7) и, значит, уравнение (2) — уравнение первой степени. Это утверждение можно выразить словами: *любая плоскость есть поверхность первого порядка.*

Докажем обратное утверждение.

Теорема. *Поверхность в пространстве, заданная в аффинной системе координат уравнением первой степени*[1] (1), *есть плоскость. При этом векторы* $\vec{a}\,(0,\ -C,\ B)$, $\vec{b}\,(-O,\ 0,\ A)$, $\vec{c}\,(-B,\ A,\ 0)$ *принадлежат направляющему подпространству этой плоскости и какие-либо два из них образуют базис этого подпространства.*

□ По условию теоремы коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю. Пусть для определенности $A\neq 0$. Тогда уравнение (1) равносильно уравнению

[1] Следовательно, A, B и C одновременно не равны нулю.

$$\begin{vmatrix} x+\frac{D}{A} & -B & -C \\ y & A & 0 \\ z & 0 & A \end{vmatrix}=0. \qquad (2)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (2) предыдущего параграфа и учитывая, что при $A\neq 0$ векторы $\vec{b}\,(-C,\ 0,\ A)$ и $\vec{c}\,(-B,\ A,\ 0)$ не коллинеарны, приходим к выводу, что уравнение (2) (а значит, и равносильное ему уравнение (1)) определяет плоскость с направляющим подпространством $L(\vec{c},\ \vec{b})$. Вектор $\vec{a}\,(0,\ -C,\ B)$ принадлежит этому подпространству, так как $\vec{a}=-\frac{C}{A}\vec{c}+\frac{B}{A}\vec{b}$.

Если в уравнении (1) $A=0$, то $B\neq 0$ или $C\neq 0$. В каждом из этих случаев аналогичными рассуждениями убеждаемся в том, что уравнение (1) определяет плоскость и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ принадлежат направляющему подпространству этой плоскости.

Уравнение (1) называется *общим уравнением плоскости.*

Замечание. Если система координат прямоугольная, то уравнением (1) также определяется плоскость (так как прямоугольная система координат — частный случай аффинной). Но в этом случае вектор $\vec{n}\,(A,\ B,\ C)$ перпендикулярен этой плоскости. В самом деле, легко видеть, что $\vec{n}\vec{a}=\vec{n}\vec{b}=\vec{n}\vec{c}=0$, т. е. вектор $\vec{n}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, два из которых образуют базис направляющего подпространства плоскости.

2. Докажем лемму о параллельности вектора и плоскости.

Лемма. *Пусть в аффинной системе координат задана плоскость σ уравнением* (1) *и вектор $\vec{p}\,(p_1,\ p_2,\ p_3)$. Для того чтобы вектор $\vec{p}$ был параллелен плоскости σ, необходимо и достаточно, чтобы*

$$Ap_1+Bp_2+Cp_3=0. \qquad (3)$$

□ От некоторой точки $M_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1)$ плоскости σ отложим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{p}$ и обозначим через $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ координаты точки M_2. Тогда

$$p_1=x_2-x_1,\ p_2=y_2-y_1,\ p_3=z_2-z_1. \qquad (4)$$

Так как $M_1\in\sigma$, то

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0. \qquad (5)$$

Пусть вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости σ. Тогда точка M_2 лежит в этой плоскости, поэтому

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0. \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) следует, что

$$A\,(x_2-x_1)+B\,(y_2-y_1)+C\,(z_2-z_1)=0, \qquad (7)$$

или, учитывая равенства (4), получим равенство (3).

Обратно, пусть выполняется равенство (3). Подставив сюда значения p_1, p_2, p_3 из равенства (4), получаем равенство (7). Сложив равенства (5) и (7), приходим к равенству (6). Таким образом, $M_2 \in \sigma$, т. е. вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости σ. $\blacksquare$

3. Выясним, какие имеются особенности в расположении плоскости σ относительно системы координат, если равны нулю некоторые из чисел A, B, C, D в общем уравнении (1) этой плоскости. Возможны следующие случаи.

1) $D=0$. В этом случае плоскость σ проходит через начало координат, так как координаты точки $O(0, 0, 0)$ удовлетворяют уравнению (1). Обратно, если начало координат принадлежит плоскости σ, то $D=0$.

2) $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$. По лемме о параллельности вектора и плоскости вектор $\vec{e}_1$ параллелен плоскости σ, поэтому плоскость параллельна оси Ox, если $D\neq 0$, и проходит через эту ось, если $D=0$.

3) $A\neq 0$, $B=0$, $C\neq 0$. В этом случае вектор $\vec{e}_2$ параллелен плоскости σ, поэтому плоскость параллельна оси Oy, если $D\neq 0$, и проходит через эту ось, если $D=0$.

4) $A\neq 0$, $B\neq O$, $C=0$. Этот случай аналогичен случаям 2) и 3): плоскость σ параллельна оси Oz, если $D\neq 0$, и проходит через эту ось, если $D=0$.

5) $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$. По лемме о параллельности вектора и плоскости векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ параллельны плоскости σ, поэтому плоскость параллельна координатной плоскости Oxy, если $D\neq 0$, и совпадает с этой плоскостью, если $D=0$. Если $D\neq 0$, то уравнение (1) можно привести к виду: $z=c$, где $c\neq 0$. Уравнение самой плоскости Oxy запишется так: $z=0$.

6) $A=0$, $B\neq 0$, $C=0$. Аналогично предыдущему плоскость σ параллельна координатной плоскости Oxz, если $D\neq 0$, и совпадает с этой плоскостью, если $D=0$. Если $D\neq 0$, то уравнение (1) можно привести к виду: $y=b$, где $b\neq 0$. Уравнение плоскости Oxz запишется так: $y=0$.

7) $A\neq 0$, $B=0$, $C=0$. Аналогично предыдущим двум случаям плоскость σ параллельна координатной плоскости Oyz, если $D\neq 0$, и совпадает с этой плоскостью, если $D=0$. Если $D\neq 0$, то уравнение (1) можно привести к виду: $x=a$, где $a\neq 0$. Уравнение плоскости Oyz имеет вид: $x=0$.

4. Зададим в пространстве аффинную систему координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ и рассмотрим плоскость σ, заданную в этой системе координат уравнением (1). Эта плоскость разделяет множество точек пространства, не принадлежащих ей, на два полупространства с общей границей σ. Найдем условия, определяющие эти полупространства.

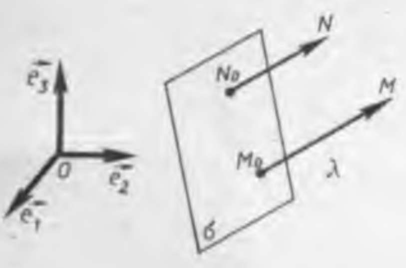


Рис. 147

Зафиксируем на плоскости σ некоторую точку N_0 и отложим вектор $\vec{n}(A, B, C)$ от этой точки: $\overrightarrow{N_0N}=\vec{n}$, т. к. $A\cdot A+B\cdot B+C\cdot C\neq$ $\neq 0$, то вектор $\vec{n}$ не параллелен плоскости σ, поэтому $N\notin\sigma$ (рис. 147).

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, не лежащая в плоскости σ. Проведем через точку M прямую, параллельную вектору $\vec{n}$, и обозначим через $M_0(x_0, y_0, z_0)$ точку пересечения этой прямой с плоскостью σ (см. рис. 147). Так как векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны, то по лемме о коллинеарных векторах существует такое число α, что $\overrightarrow{M_0M}=\alpha\vec{n}$, или в координатах:

$$x-x_0=\alpha A,\ y-y_0=\alpha B,\ z-z_0=\alpha C. \qquad (8)$$

Рассмотрим многочлен $Ax+By+Cz+D$ и подставим вместо x, y, z их значения из равенств (8):

$$Ax+By+Cz+D=A(x_0+\alpha A)+B(y_0+\alpha B)+C(z_0+\alpha C)+D= \\ =\alpha(A^2+B^2+C^2). \qquad (9)$$

Пусть λ — полупространство с границей σ, содержащее точку N (см. рис. 147). Из равенства $\overrightarrow{M_0M}=\alpha\overrightarrow{N_0N}$ следует, что точка M принадлежит полупространству λ тогда и только тогда, когда $\alpha>0$. Из равенства (9), учитывая, что $A^2+B^2+C^2>0$, приходим к выводу, что точка M принадлежит полупространству λ тогда и только тогда, когда

$$Ax+By+Cz+D>0. \qquad (10)$$

Это и есть неравенство, определяющее полупространство λ. Другое полупространство λ' с границей σ определяется неравенством

$$Ax+By+Cz+D<0. \qquad (11)$$

Пример. Даны точки $M_1(5, 0, 0)$, $M_2(-1, 2, -3)$, $M_3(2, 1, 1)$ и плоскость $x-2y+4z-1=0$. Среди указанных точек выбрать те, каждая из которых с началом координат $O(0, 0, 0)$ лежит по разные стороны от данной плоскости.

Решение. Полупространство, которому принадлежит начало координат, определяется неравенством $x-2y+4z-1<0$, так как координаты точки $O(0, 0, 0)$ удовлетворяют этому неравенству. Координаты точки M_2 удовлетворяют этому же неравенству, а координаты точек M_1 и M_3 — неравенству $x-2y+4z-1>0$ $(5-2\cdot0+4\cdot0-1>0$ и $2-2\cdot1+4\cdot1-1>0)$. Таким образом, точки O и M_1, а также O и M_3 лежат по разные стороны от данной плоскости. Следовательно, искомыми точками являются M_1 и M_3.

§ 61. Взаимное расположение двух и трех плоскостей

1. Пусть в некоторой аффинной системе координат даны плоскости σ_1 и σ_2 своими уравнениями:

$$\sigma_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad (1)$$

$$\sigma_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \qquad (2)$$

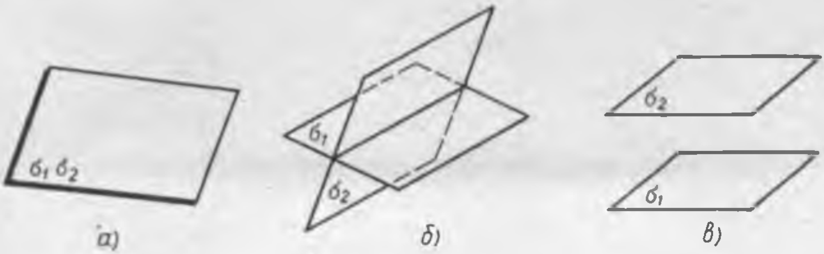


Рис. 148

Выясним взаимное расположение этих плоскостей.

Так как координаты каждой общей точки плоскостей σ_1 и σ_2 являются решением системы уравнений (1), (2) и обратно (т. е. каждое решение системы уравнений (1) и (2) является координатами общей точки плоскостей σ_1 и σ_2), то вопрос о взаимном расположении двух плоскостей σ_1, σ_2 сводится к исследованию системы линейных уравнений (1) и (2).

Обозначим через r и r' соответственно ранги матриц:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

Ясно, что $r \leqslant r'$, причем по теореме Кронекера — Капелли система уравнений (1) и (2) совместна тогда и только тогда, когда $r = r'$. Таким образом, плоскости σ_1 и σ_2 имеют хотя бы одну общую точку тогда и только тогда, когда $r = r'$.

Возможны следующие случаи.

1) $r' = 1$. Это означает, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 и D_1 уравнения (1) пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 и D_2 уравнения (2) (поэтому $r = 1$) и уравнения (1) и (2) равносильны. Отсюда заключаем, что каждая точка одной из плоскостей σ_1 и σ_2 принадлежит другой плоскости, и поэтому плоскости σ_1 и σ_2 совпадают (рис. 148, *а*). Это надо понимать так: два уравнения (1) и (2) определяют одну и ту же плоскость.

Обратно, если плоскости σ_1 и σ_2 совпадают, то они имеют одно и то же направляющее подпространство, поэтому по теореме § 60 векторы $\vec{a}(0,\ -C_1,\ B_1)$, $\vec{b}(-C_1,\ 0,\ A_1)$, $\vec{c}(-B_1,\ A_1,\ 0)$ параллельны плоскости σ_2, т. е. $B_2(-C_1)+C_2B_1=0$, $A_2(-C_1)+$ $+C_2A_1=0$, $A_2(-B_1)+B_2A_1=0$ (лемма о параллельности вектора и плоскости). Таким образом, $r=1$, а так как система уравнений (1) и (2) совместна, то и $r'=1$. Итак, плоскости σ_1 и σ_2 совпадают тогда и только тогда, когда $r'=1$.

2) $r'=2$, $r=2$. Тогда плоскости σ_1 и σ_2 различны (они не могут совпасть, так как $r'>1$) и имеют хотя бы одну общую точку, поэтому они пересекаются по прямой (рис. 148, *б*).

3) $r'=2$, $r=1$. Система уравнений (1) и (2) несовместна, поэтому плоскости σ_1 и σ_2 не имеют общих точек, т. е. параллельны (рис. 148, *в*).

2. Пусть в некоторой аффинной системе координат даны плоскости σ_1, σ_2, σ_3 своими уравнениями:

$$\sigma_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{3}$$

$$\sigma_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \tag{4}$$

$$\sigma_3:\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \tag{5}$$

Обозначим через R и R' соответственно ранги матриц:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Вопрос о взаимном расположении плоскостей σ_1, σ_2 и σ_3 полностью сводится к исследованию системы линейных уравнений (3), (4) и (5).

Возможны восемь следующих случаев взаимного расположения этих плоскостей, которые проиллюстрированы на рисунке 149, *а—з*:

а) плоскости имеют единственную общую точку;

б) плоскости попарно пересекаются, но не имеют общей точки;

в) плоскости попарно различны, но проходят через одну прямую;

г) две из плоскостей параллельны, а третья их пересекает;

д) три плоскости попарно параллельны;

е) две плоскости совпадают, а третья их пересекает;

ж) две плоскости совпадают, а третья им параллельна;

з) все три плоскости совпадают.

Очевидно, случай а) есть тот случай, когда система уравнений (3), (4) и (5) является системой Крамера, т. е. плоскости σ_1, σ_2 и σ_3 имеют единственную общую точку тогда и только тогда,

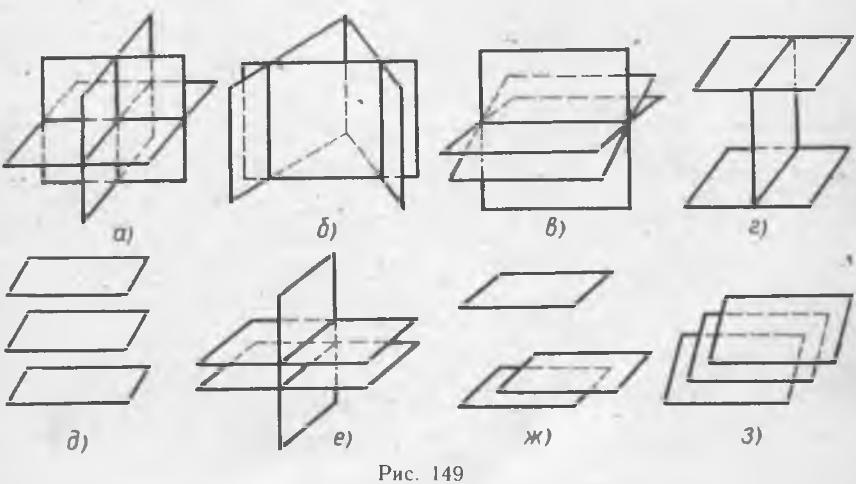


Рис. 149

когда $R=R'=3$. В остальных случаях исследование взаимного расположения плоскостей σ_1, σ_2 и σ_3 сводится к исследованию взаимного расположения каждой из пар плоскостей $\{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\{\sigma_1, \sigma_3\}$, $\{\sigma_2, \sigma_3\}$ с применением результатов п. 1. Здесь мы не будем проводить это исследование в общем виде, так как оно не имеет большого практического значения. Но сам метод исследования можно в общих чертах проследить на решении следующего примера

Пример. Выяснить взаимное расположение плоскостей σ_1, σ_2, σ_3, заданных следующими уравнениями в аффинной системе координат:

$$\sigma_1:\ x+y-z-1=0,\quad \sigma_2:\ x+4y-5=0,\quad \sigma_3:\ 2x+2y-2z+3=0.$$

Решение. Вычислением находим, что в данном случае $R=2$, $R'=3$, поэтому нельзя сказать, что плоскости имеют единственную общую точку. Для того чтобы выяснить, какой из случаев б) — з) имеет место, исследуем сначала взаимное расположение плоскостей σ_1 и σ_2. Для этих плоскостей $r=r'=2$, поэтому σ_1 и σ_2 пересекаются по прямой (случай б), п. 1). Далее, выясним взаимное расположение плоскостей σ_1 и σ_3. Для этих плоскостей $r=1$, $r'=2$, поэтому $\sigma_1 \| \sigma_3$ (случай в), п. 1). Отсюда следует, что плоскость σ_2, пересекая плоскость σ_1, пересекает также и параллельную ей плоскость σ_3. Итак, плоскости σ_1 и σ_3 параллельны, а плоскость σ_2 их пересекает.

§ 62. Расстояние от точки до плоскости. Угол между двумя плоскостями

1. Изучение вопросов, указанных в названии этого параграфа, удобно проводить в прямоугольной системе координат.

Задача 1. В прямоугольной системе координат дана плоскость σ уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая в этой плоскости. Вычислить расстояние $\rho(M_0, \sigma)$ от точки M_0 до плоскости σ.

Решение. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — основание перпендикуляра, проведенного из точки M_0 к плоскости σ (рис. 150). Как известно, вектор $\vec{n}(A, B, C)$ перпендикулярен плоскости σ и, следовательно, коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M_0}$.

По определению скалярного произведения

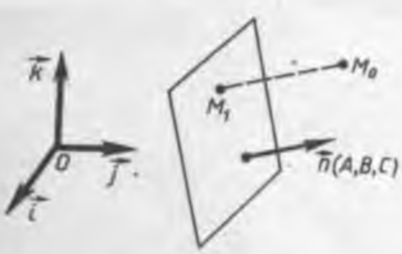


Рис. 150

$\overrightarrow{M_1M_0}\vec{n}=|\overrightarrow{M_1M_0}|\,|\vec{n}|\cos(\overrightarrow{M_1M_0}, \vec{n})=$ $=|\overrightarrow{M_1M_0}|\,|\vec{n}|\,(\pm 1)$. Учитывая, что $\overrightarrow{M_1M_0}(x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1)$, $\vec{n}(A, B, C)$, $|\overrightarrow{M_1M_0}|=\rho(M_0, \sigma)$, получаем:

$$(x_0-x_1)A+(y_0-y_1)B+(z_0-z_1)C=$$
$$=\rho(M_0, \sigma)\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot(\pm 1). \quad (1)$$

Так как $M_1 \in \sigma$, то Ax_1+By_1+ $+Cz_1+D=0$ и левая часть равенства (1) имеет вид: $Ax_0+By_0+Cz_0+D$. Таким образом, из равенства (1) получаем:

$$\rho(M_0, \sigma)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C_2}}. \tag{2}$$

П р и м е р. В прямоугольной системе координат дана плоскость σ уравнением $3x-4y+\sqrt{11}z-5=0$. Найти расстояние от начала координат до плоскости σ.

Р е ш е н и е. Начало координат O имеет координаты (0, 0, 0). По формуле (2) получим:

$$\rho(O, \rho)=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 0+\sqrt{11}\cdot 0-5|}{\sqrt{9+16+11}}=\frac{|-5|}{6}=\frac{5}{6}.$$

2. Используя формулу (2), вычислим расстояние $\rho(\sigma_1, \sigma_2)$ между параллельными плоскостями σ_1, σ_2, заданными в прямоугольной системе координат уравнениями:

$$\sigma_1\colon Ax+By+Cz+D_1=0,$$
$$\sigma_2\colon Ax+By+Cz+D_2=0,$$

где $D_1\neq D_2$.

Отметим, что плоскости σ_1 и σ_2 действительно параллельны, так как они перпендикулярны одному и тому же вектору $\vec{n}(A, B, C)$, но не совпадают ($D_2\neq D_1$).

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка плоскости σ_1. Тогда, очевидно, $\rho(\sigma_1, \sigma_2)=\rho(M_0, \sigma_2)$, поэтому, пользуясь формулой (2), находим: $\rho(\sigma_1, \sigma_2)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Так как $M_0\in\sigma_1$, то $Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$. Таким образом, предыдущая формула принимает вид:

$$\rho(\sigma_1, \sigma_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

3. З а д а ч а 2. В прямоугольной системе координат даны две пересекающиеся плоскости своими уравнениями:

$$\sigma_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\sigma_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Вычислить угол между ними.

Р е ш е н и е. Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла, и любой из этих углов называется *углом между данными плоскостями.*

Так как векторы $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ перпендикулярны соответственно данным плоскостям, то угол $\varphi=(\widehat{\vec{n}_1, \vec{n}_2})$ равен линейному углу одного из двугранных углов, образованных плоскостями σ_1 и σ_2 (рис. 151), поэтому для решения задачи достаточно

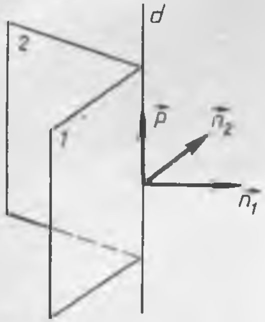


Рис. 151

найти угол φ. По формуле (8) из § 8 имеем:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (3)$$

Плоскости σ_1, σ_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{n}_1\vec{n}_2 = 0$, т. е. когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

§ 63. Уравнения прямой в пространстве

1. Пусть d — прямая в пространстве. Любой ненулевой вектор, параллельный этой прямой, называется ее *направляющим вектором*. Ясно, что прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, любые два из которых коллинеарны. Все эти векторы, вместе с нулевым вектором, образуют одномерное векторное подпространство, которое называется *направляющим подпространством* прямой d.

Положение прямой d в пространстве определяется полностью, если даны: а) направляющий вектор прямой d и некоторая ее точка (рис. 152, *а*); б) две точки прямой (рис. 152, *б*); в) две плоскости, пересекающиеся по прямой d (рис. 152, *в*). Поставим задачу: для каждого из этих способов задания прямой написать ее уравнения.

2. Канонические уравнения прямой. Пусть в пространстве выбрана аффинная система координат и в этой системе известны координаты некоторой точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и координаты направляющего вектора $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ прямой d. Напишем уравнения этой прямой. Сначала рассмотрим тот случай, когда ни одна из координат вектора $\vec{p}$ не равна нулю.

Очевидно, точка $M(x, y, z)$ лежит на прямой d тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$, поэтому по свойству 4^0.

Рис. 152

§ 7 условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\bar{p}$ запишется так:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2}=\frac{z-z_0}{p_3}. \tag{1}$$

Эти равенства являются уравнениями прямой d.

Если одна из координат вектора $\bar{p}$ равна нулю, например: $p_3=0$, $p_1\neq 0$, $p_2\neq 0$, то условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\bar{p}$ запишется так:

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{p_2},\ z-z_0=0. \tag{2}$$

Аналогично, если равны нулю две координаты вектора $\bar{p}$, например: $p_2=p_3=0$, $p_1\neq 0$, то получаем:

$$y-y_0=0,\ z-z_0=0. \tag{3}$$

В этом случае прямая d параллельна оси Ox (если хоть одно из чисел y_0, z_0 отлично от нуля) или совпадает с осью Ox (если $y_0=z_0=0$).

Уравнения (1), (2) и (3) называются *каноническими уравнениями прямой.*

3. Уравнения прямой, заданной двумя точками. Пусть в пространстве выбрана аффинная система координат и в этой системе известны координаты двух точек $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ прямой d. Тогда вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ является направляющим вектором этой прямой. Так как вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты $(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, то канонические уравнения прямой d при $x_2-x_1\neq 0$, $y_2-y_1\neq 0$, $z_2-z_1\neq 0$ согласно формуле (1) имеют вид:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{4}$$

Если одна из координат вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ или две его координаты равны нулю, то для получения канонических уравнений прямой следует воспользоваться формулами (2) и (3).

4. Уравнения прямой, заданной двумя плоскостями. Пусть прямая d является линией пересечения плоскостей σ_1 и σ_2, которые в аффинной системе координат заданы уравнениями:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{5}$$

Точка $M(x,\ y,\ z)$ лежит на прямой d тогда и только тогда, когда ее координаты являются решением системы уравнений (5), поэтому эта система и является уравнениями прямой d. Обратно, *любая система уравнений (5) представляет собой уравнения некоторой прямой пространства, если ранг матрицы* $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ *равен двум*. Предлагаем читателю самостоятельно обосновать это утверждение.

Для того чтобы найти канонические уравнения прямой, заданной уравнениями (5), надо знать координаты какой-нибудь точки M_0 этой прямой и некоторого направляющего вектора $\vec{p}$. Точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ следует выбрать так, чтобы ее координаты удовлетворяли системе линейных уравнений (5). Для нахождения координат направляющего вектора воспользуемся леммой.

Лемма. *Если в аффинной системе координат прямая задана уравнениями* (5), *то вектор* $\vec{p}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$ *является направляющим вектором этой прямой.*

□ Пусть σ_1 и σ_2 — плоскости, заданные уравнениями (5), а d — заданная прямая. По лемме о параллельности вектора и плоскости (§ 60) вектор $\vec{p}$ параллелен как плоскости σ_1, так и плоскости σ_2, поэтому $\vec{p}$ параллелен прямой d. Вектор $\vec{p}$ ненулевой, так как в системе уравнений (5) коэффициенты при x, y и z не пропорциональны. Таким образом, p — направляющий вектор прямой d. ■

Пример. Написать канонические уравнения прямой, которая в аффинной системе координат задана системой уравнений:

$$\begin{cases} x-y+2z-3=0, \\ 2x+y-z+6=0. \end{cases} \tag{6}$$

Решение. Сначала выберем какую-нибудь точку на данной прямой. В данном случае коэффициенты при x и y не пропорциональны, поэтому придадим z произвольное значение, например $z_0=0$, и найдем из системы (6): $x_0=-1$, $y_0=-4$. Мы нашли точку $M_0(-1, -4, 0)$, лежащую на данной прямой.

Координаты направляющего вектора $\vec{p}$ прямой найдем, используя предыдущую лемму: $\vec{p}\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$ или $\vec{p}(-1, 5, 3)$.

Итак, канонические уравнения прямой, заданной системой уравнений (6), имеют вид:

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y+4}{5}=\frac{z}{3}.$$

5. Параметрические уравнения прямой. Выберем какую-нибудь аффинную систему координат и зададим прямую d направляющим вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Точка $M(x, y, z)$ пространства лежит на прямой d тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$ коллинеарны, т. е. когда существует такое число t, что $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{p}$. Это соотношение в координатах запишется так:

$$x-x_0=tp_1, \; y-y_0=tp_2, \; z-z_0=tp_3,$$

или

$$\begin{aligned} x&=x_0+p_1t, \\ y&=y_0+p_2t, \\ z&=z_0+p_3t. \end{aligned} \tag{7}$$

Эти равенства называются *параметрическими уравнениями прямой*, а t — *параметром*. Их смысл заключается в следующем: для любого действительного числа t точка с координатами (x, y, z), удовлетворяющая условиям (7), лежит на прямой d. Обратно, если (x, y, z) — точка прямой d, то всегда найдется такое t, что x, y и z выражаются через x_0, y_0, z_0, p_1, p_2 и p_3 при помощи равенств (7).

§ 64. Взаимное расположение прямых. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Рассмотрим сначала взаимное расположение двух прямых. Пусть в пространстве даны: прямая d_1 — точкой M_1 и направляющим вектором $\vec{p}_1$ и прямая d_2 — точкой M_2 и направляющим вектором $\vec{p}_2$ (рис. 153). Оказывается, что по векторам $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ можно определить взаимное расположение данных прямых. Возможны четыре случая: 1) прямые скрещиваются; 2) прямые пересекаются; 3) прямые параллельны; 4) прямые совпадают. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности. Заметим, что прямые d_1, d_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ компланарны и, значит, имеет место равенство

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2=0. \qquad (1)$$

1) Как известно, две прямые называются *скрещивающимися*, если они не лежат в одной плоскости (т. е. не существует плоскости, содержащей каждую из этих прямых). Следовательно, *для того чтобы данные прямые d_1 и d_2 были скрещивающимися, необходимо и достаточно, чтобы для них имело место неравенство*

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2\neq 0. \qquad (2)$$

2) Пусть прямые d_1, d_2 лежат в одной плоскости, и, следовательно, для них выполняется условие (1). Эти прямые пересекаются тогда и только тогда, когда их направляющие векторы не коллинеарны.

Итак, *прямые d_1 и d_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2=0$ и векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ не коллинеарны.*

3) Прямые d_1, d_2, лежащие в одной плоскости, параллельны, если они не имеют общих точек. Это будет только в том случае, когда векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ коллинеарны, а векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{p}_1$ не коллинеарны. Итак, *прямые d_1 и d_2 параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ коллинеарны, но векторы $\vec{p}_1$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ не коллинеарны.*

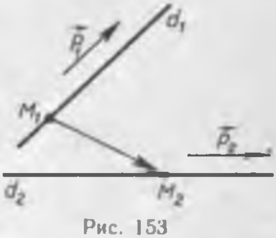


Рис. 153

4) Ясно, что прямые d_1 и d_2 совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ попарно коллинеарны.

Пример. Выяснить взаимное расположение двух прямых, заданных в аффинной системе координат каноническими уравнениями:

$$d_1:\ \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{3},\quad d_2:\ \frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-8}{4}.$$

Решение. По этим уравнениям находим точки и направляющие векторы данных прямых:

$$d_1:\ M_1(2,\ -1,\ 1),\ \vec{p}_1(1,\ 2,\ 3);\ d_2:\ M_2(5,\ 2,\ 8),\ \vec{p}_2(2,\ 1,\ 4).$$

Далее, учитывая, что $\overrightarrow{M_1M_2}(3,\ 3,\ 7)$, приходим к равенству (1): $\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2=0$. Значит, данные прямые лежат в одной плоскости. При этом координаты векторов $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ не пропорциональны, поэтому эти векторы не коллинеарны. Отсюда вывод: прямые d_1, d_2 пересекаются.

2. Рассмотрим взаимное расположение прямой и плоскости. Пусть в пространстве дана прямая d точкой $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и направляющим вектором $\vec{p}(\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3)$, а плоскость σ — общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ в аффинной системе координат.

Возможны следующие случаи их взаимного расположения: 1) прямая и плоскость пересекаются, т. е. имеют одну общую точку (рис. 154, *а*); 2) прямая параллельна плоскости (рис. 154, *б*); 3) прямая лежит в плоскости (рис. 154, *в*). Рассмотрим каждый случай в отдельности.

1) Прямая d пересекает плоскость σ тогда и только тогда, когда направляющий вектор $\vec{p}$ прямой d не параллелен плоскости σ, т. е. когда

$$Ap_1+Bp_2+Cp_3\neq 0. \qquad (3)$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости, надо решить систему, состоящую из уравнений прямой и уравнения плоскости.

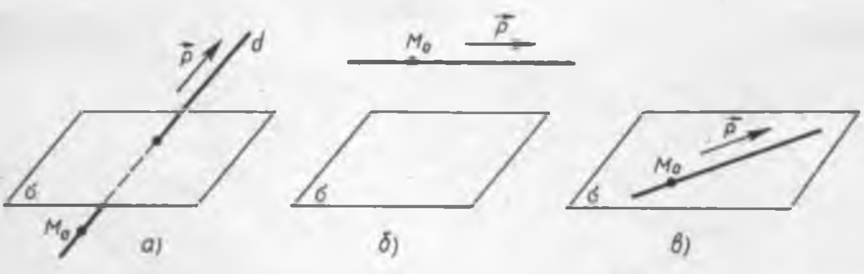


Рис. 154

2) Прямая d параллельна плоскости σ тогда и только тогда, когда вектор $\vec{p}$ параллелен плоскости σ и точка M_0 не лежит в этой плоскости (рис. 153, *б*). Итак, соотношения

$$\begin{cases} Ap_1+Bp_2+Cp_3=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

выражают необходимое и достаточное условие того, что прямая d параллельна плоскости σ.

3) Аналогично, прямая d лежит в плоскости σ тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\begin{cases} Ap_1+Bp_2+Cp_3=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases} \tag{5}$$

Пример. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, заданных в аффинной системе координат уравнениями:

$$\frac{x}{10}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-6}; \quad 3x+6y+z-8=0.$$

Решение. По каноническим уравнениям прямой находим точку $M_0(0, -1, 3)$ на данной прямой и направляющий вектор $\vec{p}(10, -4, -6)$ этой прямой. Имеем:

$$Ap_1+Bp_2+Cp_3=3\cdot 10+6(-4)+1\cdot(-6)=0,$$
$$Ax_0+By_0+Cz_0+D=3\cdot 0+6(-1)+1\cdot 3-8\neq 0.$$

Следовательно, выполнены соотношения (4), т. е. прямая и плоскость параллельны.

§ 65. Углы между двумя прямыми, между прямой и плоскостью

Вычисление углов, указанных в названии этого параграфа, носит метрический (измерительный) характер, поэтому эти задачи удобно решать в прямоугольной системе координат.

1. Пусть в пространстве даны две непараллельные прямые d_1 и d_2. Возьмем произвольную точку A пространства и проведем через нее прямые d_1' и d_2', соответственно параллельные прямым d_1 и d_2 (рис. 155). Прямые d_1' и d_2' образуют четыре угла с вершиной A. Каждый из этих углов называется *углом между прямы-*

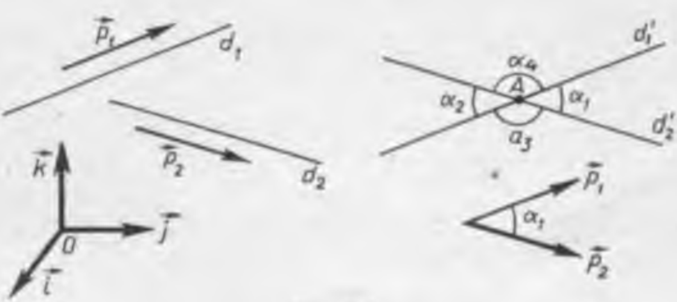


Рис. 155

ми d_1 и d_2. Если известен один из четырех указанных углов, то мы легко найдем остальные три угла. Но один из этих четырех углов есть в точности угол между направляющими векторами этих прямых. Если $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ — направляющие векторы данных прямых d_1, d_2, то угол α между этими прямыми вычисляют по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{|\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2|}.$$

Отсюда получаем условие перпендикулярности двух прямых ($\alpha=90°$): $\vec{p}_1\vec{p}_2=0$. Напомним, что две взаимно перпендикулярные прямые в пространстве могут быть как скрещивающимися, так и пересекающимися.

Пример. Вычислить угол между прямыми, заданными в прямоугольной системе координат своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{-1};\quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{5}.$$

Решение. По каноническим уравнениям данных прямых находим координаты их направляющих векторов: $\vec{p}_1(4,\ 3,\ -1)$ и $\vec{p}_2(-1,\ 3,\ 5)$. Скалярное произведение этих векторов равно нулю: $\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2=4\cdot(-1)+3\cdot3+(-1)\cdot5=0$, следовательно, данные прямые взаимно перпендикулярны.

Выясним, пересекаются ли данные прямые или скрещиваются. Имеем на первой прямой точку $M_1(2,\ -1,\ 0)$ и на второй прямой точку $M_2(1,\ 0,\ 1)$. Эти точки определяют вектор $\overrightarrow{M_1M_2}(-1,\ 1,\ 1)$. Находим:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2=\begin{vmatrix}-1 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & -1 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 4 & -1\\ 0 & 7 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=-22\neq0.$$

Следовательно, данные прямые скрещиваются (см. п. 1 из § 64).

2. Если прямая d не перпендикулярна к плоскости σ, то *углом между прямой d и плоскостью* σ называется острый *угол между прямой d и ее проекцией на плоскость* σ. Если же прямая перпендикулярна к плоскости, то угол между прямой и плоскостью считается равным 90°.

Предположим, что прямая d пересекает плоскость σ и не перпендикулярна к ней. Пусть в прямоугольной системе координат прямая d имеет направляющий вектор $\vec{p}(p_1,\ p_2,\ p_3)$, а плоскость σ — уравнение $Ax+By+Cz+D=0$. Найдем угол φ между прямой d и плоскостью σ. Вектор $\vec{n}(A,\ B,\ C)$ перпендикулярен плоскости σ, поэтому нетрудно выразить угол φ через угол $\theta=(\widehat{\vec{n},\ \vec{p}})$. Действительно, так как φ — острый угол между прямой d и ее проекцией d' на плоскость σ, то $\varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$, если угол θ острый (рис. 156, *а*), и $\varphi=\theta-\frac{\pi}{2}$, если угол θ тупой

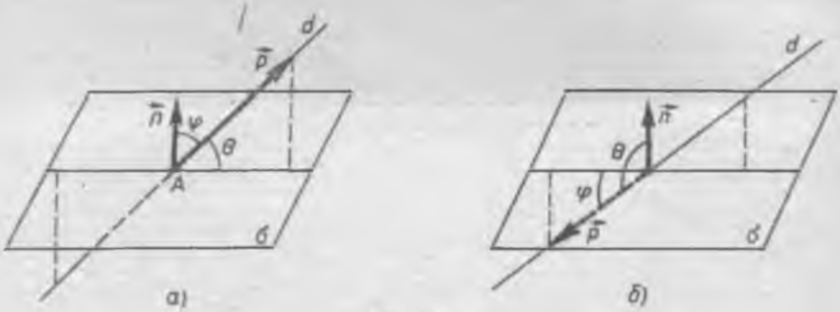


Рис. 156

(рис. 156, *б*). Таким образом, $\sin\varphi=\cos\theta$, если $\cos\theta>0$, и $\sin\varphi=-\cos\theta$, если $\cos\theta<0$. Отсюда следует, что $\sin\varphi=|\cos\theta|$. Поэтому $\sin\varphi=\frac{|\vec{n}\vec{p}|}{|\vec{n}|\,|\vec{p}|}$ или

$$\sin\varphi=\frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эта формула остается верной и в случае перпендикулярности прямой и плоскости (когда $\varphi=\frac{\pi}{2}$, а векторы $\vec{p}$ и $\vec{n}$ коллинеарны).

§ 66. Основные задачи на прямую и плоскость

1. Решим в общем виде несколько типичных задач на прямую и плоскость. Рассмотрим сначала задачи на плоскость.

Задача 1. В аффинной системе координат даны плоскость уравнением $Ax+By+Cz+D=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая в данной плоскости. Написать уравнение плоскости σ, проходящей через точку M_0 и параллельной данной плоскости.

Решение. Уравнение плоскости σ можно записать в виде

$$Ax+By+Cz+D_0=0, \tag{1}$$

где D_0 — некоторое число, отличное от D. Действительно, при любом D_0 уравнением (1) задается плоскость (теорема, § 60), и если $D_0\neq D$, то эта плоскость параллельна данной плоскости (§ 61, п. 1). Выберем число D_0 так, чтобы $M_0\in\sigma$: $Ax_0+By_0+Cz_0+D_0=0$. Выразив отсюда значение D_0, подставим его в уравнение (1) и получим уравнение плоскости σ:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Задача 2. Написать уравнение плоскости σ, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и через прямую, заданную уравнениями:

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0. \end{aligned} \tag{2}$$

Система координат аффинная.

Решение. *Первый способ.* По уравнениям (2) сначала найдем координаты каких-нибудь двух точек M_1 и M_2 данной прямой, а затем напишем уравнение плоскости, проходящей через три точки M_0, M_1 и M_2.

Второй способ. Искомое уравнение плоскости σ можно записать в виде

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \qquad (3)$$

где α и β — коэффициенты, не равные одновременно нулю. Действительно, уравнением (3) по теореме § 60 задается плоскость, причем при произвольных значениях α и β, не равных одновременно нулю, любая точка прямой, заданной уравнениями (2), лежит на этой плоскости.

Коэффициенты α и β подберем так, чтобы плоскость (3) проходила через точку M_0. Для этого α и β должны удовлетворять условию:

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0.$$

Задача 3. В аффинной системе координат даны две скрещивающиеся прямые d_0 и d_1 каноническими уравнениями:

$$d_0\colon\ \frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3};\ \ d_1\colon\ \frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}. \qquad (4)$$

Написать уравнение плоскости σ, проходящей через прямую d_0 параллельно прямой d_1.

Решение. Прямая d_0 проходит через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и параллельна вектору $\vec{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$, а прямая d_1 параллельна вектору $\vec{b}(b_1,\ b_2,\ b_3)$. Поэтому плоскость σ проходит через точку M_0 и параллельна векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Ее уравнение имеет вид (2) из § 59.

2. Рассмотрим теперь задачи на прямую.

Задача 4. Написать канонические уравнения прямой d, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и параллельной прямой, заданной уравнениями (2).

Решение. По лемме § 63 прямая, заданная уравнениями (2), параллельна вектору $\vec{p}(p_1,\ p_2,\ p_3)$, где $p_1=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $p_2=\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}$, $p_3=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$. Поэтому $\vec{p}$ — направляющий вектор прямой d. Таким образом, задача сводится к написанию уравнений прямой, заданной точкой M_0 и вектором $\vec{p}$. Ее канонические уравнения имеют вид (1), (2) или (3) § 63.

Задача 5. В прямоугольной системе координат даны точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и две скрещивающиеся прямые каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3} \ \text{ и } \ \frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$$

Написать уравнения прямой d, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной к данным прямым.

Решение. Векторы $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ являются направляющими векторами данных прямых, поэтому вектор $\vec{p}=[\vec{a}\vec{b}]$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, является направляющим вектором прямой d. Таким образом, канонические уравнения прямой d имеют вид (1) § 63, где p_1, p_2 и p_3 находятся по теореме 2 из § 56:

$$p_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad p_2=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \quad p_3=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Задача 6. Доказать, что расстояние от точки M до прямой d, заданной точкой M_0 и направляющим вектором $\vec{p}$, может быть найдено по формуле

$$\rho(M, d)=\frac{|[\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}]|}{|\vec{p}|}. \tag{5}$$

Решение. Если точка M не лежит на прямой d, то $|[\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}]|=S$, где S — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{p}$. С другой стороны, $S=M_0N_0\cdot MH=$ $=|\vec{p}|\,\rho(M_0, d)$ (относительно обозначений см. рис. 157). Таким образом, $|\vec{p}|\cdot\rho(M, d)=|[\overrightarrow{M_0M}, \vec{p}]|$. Отсюда получаем формулу (5).

Задача 7. Доказать, что расстояние между двумя скрещивающимися прямыми d_1 и d_2 может быть найдено по формуле

$$\rho(d_1, d_2)=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2|}{|[\vec{p}_1\vec{p}_2]|}. \tag{6}$$

Здесь M_1 и $\vec{p}_1$ — точка и направляющий вектор прямой d_1, а M_2 и $\vec{p}_2$ — точка и направляющий вектор прямой d_2.

Решение. Рассмотрим плоскость σ_1, проходящую через прямую d_1 параллельно прямой d_2, и плоскость σ_2, проходящую через прямую d_2 параллельно прямой d_1. Известно, что такие плоско-

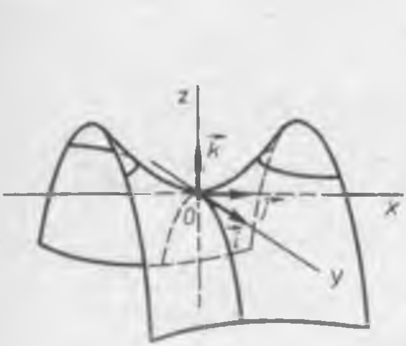


Рис. 157

Рис. 158

сти существуют и определяются однозначно (см. задачу 3). Ясно, что $\rho(d_1, d_2)$ равно расстоянию между параллельными плоскостями σ_1 и σ_2. Для нахождения этого расстояния построим параллелепипед $M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2$ так, как показано на рисунке 158, и обозначим через V объем этого параллелепипеда. Известно, что $V=|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2|$. С другой стороны, $V=\rho(d_1, d_2)\cdot S_{M_1Q_1P_1N_1}=$ $=\rho(d_1, d_2)\,|[\vec{p}_1, \vec{p}_2]|$. Таким образом, $|\overrightarrow{M_1M_2}\,\vec{p}_1\vec{p}_2|=\rho(d_1, d_2)|[\vec{p}_1, \vec{p}_2]|$. Отсюда и получаем формулу (6).

§ 67. Приложение к решению задач школьного курса геометрии

1. Изложенные в этой главе результаты о плоскостях и прямых в пространстве находят многочисленные применения при решении задач школьного курса геометрии. Рассмотрим несколько примеров таких задач.

Задача 1. Доказать, что в любом тетраэдре шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро и середину не пересекающегося с ним ребра, пересекаются в одной точке.

Решение. Возьмем какой-нибудь тетраэдр $OABC$. Примем точку O за начало координат, а векторы $\vec{e}_1=\overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3=\overrightarrow{OC}$ за координатные векторы. Обозначим середины ребер OA, OB, OC, AB, BC, CA соответственно через M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6. Находим координаты этих точек:

$$M_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right),\ M_2\left(0, \frac{1}{2}, 0\right),\ M_3\left(0, 0, \frac{1}{2}\right),\ M_4\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),$$

$$M_5\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ M_6\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Далее напишем уравнения плоскостей:

$$\begin{aligned} &(OAM_5)\colon\ y-z=0, &&(ABM_3)\colon\ x+y+2z-1=0;\\ &(OBM_6)\colon\ x-z=0, &&(BCM_1)\colon\ 2x+y+z-1=0;\\ &(OCM_4)\colon\ x-y=0, &&(CAM_2)\colon\ x+2y+z-1=0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что плоскости (OAM_4), (OBM_5) и (ABM_3) имеют только одну общую точку $T\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ и эта точка принадлежит каждой из остальных трех плоскостей.

Задача 2. Доказать, что если в тетраэдре $OABC$ ребра OA, OB, OC взаимно перпендикулярны и имеют длину $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, а высота OH имеет длину h, то справедлива формула

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}. \tag{1}$$

Решение. Примем точку O за начало, направленные прямые OA, OB, OC — за оси прямоугольной системы координат. Вершины тетраэдра имеют координаты: $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$,

$B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$. Находим уравнение плоскости (ABC): $bcx + acy + abz - abc = 0$.

Вычислим расстояние h от начала координат до этой плоскости (см. § 62, формула (2)):

$$h = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}$$

Отсюда после элементарных преобразований получаем формулу (1).

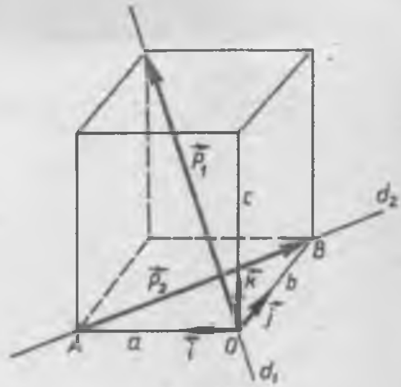


Рис. 159

З а д а ч а 3. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c; ребро длиной c является его высотой. Найти: а) расстояние между двумя прямыми, одна из которых содержит диагональ параллелепипеда, а другая содержит диагональ основания и скрещивается с первой прямой; б) угол между этими прямыми.

Р е ш е н и е. Обозначим через OA, OB, OC ребра параллелепипеда, выходящие из одной вершины, так, что $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Точку O примем за начало прямоугольной системы координат, а направленные прямые OA, OB, OC — за оси координат (рис. 159). Обозначим через d_1 прямую, содержащую диагональ параллелепипеда и проходящую через точку O, а через d_2 — прямую AB (см. рис. 159).

Прямую d_1 можно задать точкой O и направляющим вектором $\vec{p}_1(a, b, c)$, а прямую d_2 — точкой A и направляющим вектором $\overrightarrow{AB} = \vec{p}_2(-a, b, 0)$ (см. рис. 159).

а) Расстояние между данными скрещивающимися прямыми найдем по формуле (6) из § 66, которая в данном случае принимает вид:

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{OA}\, \vec{p}_1 \vec{p}_2|}{|[\vec{p}_1 \vec{p}_2]|}. \tag{2}$$

Находим:

$$\overrightarrow{OA}\, \vec{p}_1 \vec{p}_2 = \begin{vmatrix} a & a & -a \\ 0 & b & b \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix} = -abc,$$

$$[\vec{p}_1 \vec{p}_2] = \begin{vmatrix} a & -a & \vec{i} \\ b & b & \vec{j} \\ c & 0 & \vec{k} \end{vmatrix} = -bc\vec{i} - ac\vec{j} + 2ab\vec{k}$$

и по формуле (2) имеем:

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{abc}{\sqrt{c^2(a^2 + b^2) + 4a^2b^2}}.$$

б) Угол α между прямыми d_1, d_2 вычислим как угол между их направляющими векторами:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p}_1\vec{p}_2}{|\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2|} = \frac{-a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Заметим, что прямые d_1 и d_2 взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a=b$, т. е. когда в основании параллелепипеда лежит квадрат.

2. Рассмотрим теперь примеры задач на отыскание множеств точек в пространстве.

Задача 4. Найти множество G всех точек пространства, каждая из которых равноудалена от двух данных точек A и B.

Решение. Прямоугольную систему координат выберем так, чтобы положительная полуось оси абсцисс совпала с лучом AB. В этой системе координат точки A и B имеют координаты $A(0, 0, 0)$, $B(a, 0, 0)$, где $a>0$. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит множеству G тогда и только тогда, когда $AM=BM$ или $AM^2=BM^2$. Записав это равенство в координатах, получаем уравнение множества G: $x^2+y^2+z^2=(x-a)^2+y^2+z^2$ или $x=\frac{a}{2}$. Этим уравнением определяется плоскость, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину.

Задача 5. Найти множество G всех точек пространства, разность квадратов расстояний от каждой из которых до двух данных точек A и B равна данному числу c.

Решение. Прямоугольную систему координат выберем так, как в предыдущей задаче. В этой системе координат данные точки имеют координаты $A(0, 0, 0)$ и $B(a, 0, 0)$, где $a>0$. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит множеству G тогда и только тогда, когда $AM^2-BM^2=c$. Записав это равенство в координатах, получаем уравнение множества G: $x^2+y^2+z^2-(x-a)^2-y^2-z^2=c$, или $2ax-a^2-c=0$. Этим уравнением задается плоскость, перпендикулярная прямой AB.

Глава VIII

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

§ 68. Движения пространства

1. Настоящая глава посвящена изучению простейших преобразований пространства. Многие определения и теоремы, приведенные в этой главе, аналогичны тем, которые рассматривались в главе V при изучении преобразований плоскости. Здесь мы будем пользоваться терминологией, а также понятиями, которые были введены в § 39 и 40. В частности, важным является понятие *преобразования* пространства, т. е. биективного отображения множества всех точек пространства на себя.

Говорят, что преобразование пространства *сохраняет расстояния*, если расстояние между любыми точками A и B пространства равно расстоянию между их образами A' и B', т. е. $AB = A'B'$. *Преобразование пространства, сохраняющее расстояния, называется движением* (или *перемещением*).

Наиболее простым примером движения является *тождественное преобразование* пространства, т. е. преобразование, при котором каждая точка пространства переходит в себя. Рассмотрим другие примеры движений.

Пример 1. Пусть $\vec{p}$ — произвольный вектор пространства. Каждой точке M поставим в соответствие точку M' так, чтобы $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Получаем преобразование пространства, которое называется *параллельным переносом* на вектор $\vec{p}$.

Докажем, что *параллельный перенос является движением*. Пусть M_1 и M_2 — произвольные точки, а M_1' и M_2' — их образы. Тогда $\overrightarrow{M_1M_1'} = \vec{p}$ и $\overrightarrow{M_2M_2'} = \vec{p}$, поэтому $\overrightarrow{M_1M_1'} = \overrightarrow{M_2M_2'}$. По лемме о равенстве векторов (§ 3, п. 1) $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1'M_2'}$, поэтому $M_1M_2 = M_1'M_2'$.

Пример 2. Зададим в пространстве точку O и рассмотрим отображение пространства, в котором каждая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно точки O.

Это отображение является преобразованием и называется *симметрией относительно точки O* (*центральной симметрией* или *отражением от точки O*). Нетрудно доказать, что *симметрия относительно точки является движением* (см. § 41, п. 1).

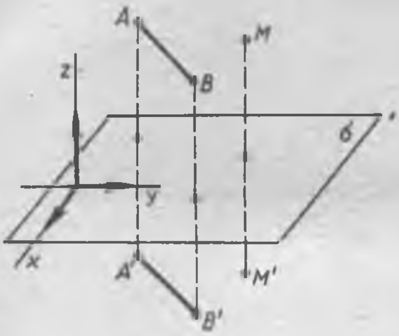


Рис. 160

Пример 3. Зададим в пространстве плоскость σ и рассмотрим отображение пространства, в котором каждая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно плоскости σ (рис. 160). Это отображение является преобразованием и называется *симметрией относительно плоскости* σ.

Докажем, что *симметрия относительно плоскости* σ *является движением.* Для этого выберем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы координатная плоскость Oxy совпала с плоскостью σ (см. рис. 160.) Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — произвольные точки пространства, а A' и B'— их образы. Ясно, что точки A' и B' имеют координаты $A'(x_1, y_1, -z_1)$, $B'(x_2, y_2, -z_2)$. По формуле (5) из § 52 находим:

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$
$$A'B'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

следовательно, $AB=A'B'$ и поэтому симметрия относительно плоскости является движением.

2. Упорядоченная четверка точек A, B, C, D пространства, не лежащих в одной плоскости, называется *репером* и обозначается так: $R=(A, B, C, D)$. Точки A, B, C и D называются *вершинами* репера, причем точка A называется его *началом.* Репер называется *аффинным,* если тетраэдр $ABCD$ произвольный, и *ортонормированным,* если ребра AB, AC, AD этого тетраэдра взаимно перпендикулярны и $AB=AC=AD=1$.

Так же как и на плоскости (см. § 41, п. 2) каждой системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ соответствует репер $R=(O, E_1, E_2, E_3)$, где $\overrightarrow{OE_1}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3}=\vec{e}_3$. Будем говорить, что точка M в репере R имеет координаты (x, y, z), если (x, y, z) — координаты точки M в соответствующей системе координат.

Докажем следующую лемму.

Лемма. *Если $R=(A, B, C, D)$ и $R'=(A', B', C', D')$ — произвольные аффинные реперы, то существует не более чем одно движение, которое репер R переводит в репер R'.*

□ Доказательство леммы проведем методом от противного, т. е. допустим, что существуют по крайней мере два движения g_1 и g_2, которые репер R переводят в репер R'. Тогда существует такая точка M, что образ M_1 этой точки в движении g_1 не совпадает с образом M_2 той же точки в движении g_2. Так как $A \overset{g_1}{\mapsto} A'$ и $A \overset{g_2}{\mapsto} A'$, то $AM=A'M_1$, $AM=A'M_2$, поэтому $A'M_1=A'M_2$, т. е. точка A' равноудалена от концов отрезка M_1M_2. Точно так же можно доказать, что точки B', C' и D' равноудалены от концов отрезка M_1M_2. Таким образом, точки A', B', C' и D' лежат в одной плоскости (см. задачу 4 из § 67), что противоречит определению репера.

Итак, допущение неверно, поэтому существует не более чем одно движение, которое репер R переводит в репер R'. ■

3. Имеет место следующая основная теорема.

Теорема. *Пусть $R=(A, B, C, D)$ и $R'=(A', B', C', D')$ — произвольные ортонормированные реперы. Тогда существует одно и только одно движение, которое репер R переводит в репер R'. При этом движении любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'.*

□ Докажем сначала, что существует движение, которое репер R переводит в репер R'. Построим отображение g следующим образом. Произвольной точке M с координатами (x, y, z) в репере R поставим в соответствие точку M' с *теми же координатами* в репере R'.

Очевидно, отображение g является преобразованием, которое репер R переводит в репер R'. Докажем, что g — движение. Пусть M_1 и M_2 — произвольные точки пространства, которые в репере R имеют координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)_R$, $M_2(x_2, y_2, z_2)_R$. Тогда $M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$. Образы M_1' и M_2' этих точек в репере R' имеют те же координаты $M_1'(x_1, y_1, z_1)_{R'}$, $M_2'(x_2, y_2, z_2)_{R'}$, поэтому $M_1'M_2'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ и, следовательно, $M_1'M_2'=M_1M_2$. Таким образом, g — движение, которое репер R переводит в репер R'.

Из леммы п. 2 следует, что g — единственное движение, которое переводит репер R в репер R'. При этом движении точка $M(x, y, z)_R$ переходит в точку $M'(x, y, z)_{R'}$. ■

4. Пользуясь этой теоремой точно так же, как в случае движения на плоскости (см § 41, п. 4), можно доказать, что движение пространства переводит плоскость в плоскость, параллельные плоскости — в параллельные плоскости, прямую — в прямую, параллельные прямые — в параллельные прямые, полуплоскость — в полуплоскость, двугранный угол — в равный ему двугранный угол, а полупространство — в полупространство. Нетрудно также доказать, что движение сохраняет простое отношение трех точек, поэтому оно сохраняет отношение «лежать между». Отсюда следует, что движение переводит отрезок — в равный ему отрезок, угол — в равный ему угол. Таким образом, при движении взаимно перпендикулярные прямые переходят во взаимно перпендикулярные прямые.

При любом движении пространства репер переходит в репер, в частности ортонормированный репер — в ортонормированный репер.

Приводим эти утверждения без доказательства. Предлагаем читателю по аналогии с п. 4 из § 41 доказать их самостоятельно.

§ 69. Два вида движений. Инвариантные точки, прямые и плоскости

1. Говорят, что реперы $R=(O, A, B, C)$ и $R'=(O', A', B', C')$ *одинаково ориентированы (противоположно ориентированы),* если базисы $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}$ одинаково ориентированы (противоположно ориентированы) (см. § 53). Таким образом, реперы R и R' одинаково ориентированы, если $R \mid R'>0$, и противоположно ориентированы, если $R \mid R'<0$. Здесь

$$R \mid R'=(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \mid (\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}).$$

Можно доказать, что любое движение пространства либо сохраняет ориентацию пространства (т. е. любой репер и его образ ориентированы одинаково), либо меняет ориентацию (т. е. любой репер и его образ ориентированы противоположно). Доказательство этого утверждения мы опускаем, так как оно по существу ничем не отличается от доказательства аналогичной теоремы для движений на плоскости (§ 42, теорема 1).

Таким образом, в пространстве (так же как и на плоскости) существуют два вида движений: движения, не меняющие ориентацию пространства, и движения, меняющие ориентацию пространства. В первом случае движение называется *движением первого рода,* а во втором случае — *движением второго рода.*

2. По аналогии с преобразованиями плоскости точку пространства назовем *инвариантной* (неподвижной) точкой преобразования, если она переходит в себя. Аналогично прямую (плоскость) назовем *инвариантной,* если ее образ совпадает с ней. Частным случаем инвариантной прямой (плоскости) является *прямая (плоскость) инвариантных точек,* все точки которой являются инвариантными. Если, например, g — симметрия относительно плоскости σ (§ 68, пример 3), то плоскость σ, а также любая плоскость, ей перпендикулярная, является инвариантной плоскостью, причем сама плоскость σ является плоскостью инвариантных точек. Далее, любая прямая плоскости σ, а также любая прямая, перпендикулярная плоскости σ, является инвариантной прямой, причем прямые плоскости σ — прямые инвариантных точек.

Пусть g — данное движение пространства, а σ — инвариантная плоскость. Это означает, что любая точка плоскости σ переходит в точку той же плоскости, т. е. на плоскости σ устанавливается некоторое отображение g', которое, очевидно, является преобразованием. Так как g сохраняет расстояния, то и g' на плоскости σ сохраняет расстояния, т. е. g' — движение плоскости σ. Будем говорить, что оно *индуцировано* преобразованием g на плоскость σ. Например, если g — параллельный перенос на вектор $\vec{p}$, то любая плоскость, параллельная вектору $\vec{p}$, является инвариантной, причем на каждой из этих плоскостей индуцируется параллельный перенос на вектор $\vec{p}$.

3. Рассмотрим три леммы об инвариантных точках и прямых, которыми будем пользоваться в следующем параграфе при классификации движений пространства.

Л е м м а 1. *Если движение не имеет инвариантных точек, то любые две его инвариантные прямые параллельны.*

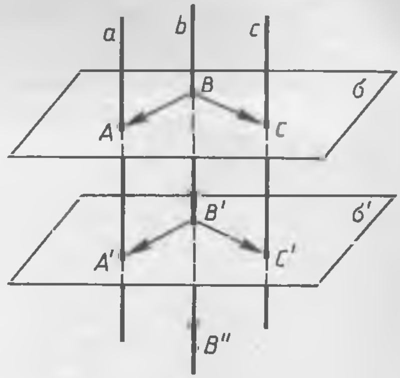


Рис. 161

□ Доказательство проведем методом от противного. Пусть существуют какие-то две непараллельные инвариантные прямые p и q данного движения g. Тогда прямые p и q либо пересекаются, либо являются скрещивающимися прямыми. В первом случае точка M пересечения прямых p и q переходит в точку M', которая лежит как на прямой p, так и на прямой q, т. е. совпадает с точкой M. Но это противоречит условию леммы. Во втором случае прямые p и q имеют общий перпендикуляр AB, $A \in p$, $B \in q$. Так как AB — кратчайшее расстояние между точками прямых p и q, то в движении g точки A и B являются неподвижными точками, что также противоречит условию леммы. ■

Л е м м а 2. *Если движение g не имеет инвариантных точек, но имеет по крайней мере три попарно параллельные инвариантные прямые, не лежащие в одной плоскости, то g — параллельный перенос на ненулевой вектор, параллельный этим прямым.*

□ Пусть a, b и c — попарно параллельные инвариантные прямые движения g, не лежащие в одной плоскости. Рассмотрим какую-нибудь плоскость σ, перпендикулярную прямым a, b и c, и ее образ σ' (рис. 161). Так как $a \perp \sigma$ и в движении g прямая a переходит в себя, то $a \perp \sigma'$, поэтому σ и σ' — параллельные плоскости.

Обозначим через A, B, C и A', B', C' точки пересечения прямых a, b и c соответственно с плоскостями σ и σ' (см. рис. 161). Так как $\sigma \overset{g}{\mapsto} \sigma'$ и a, b и c — инвариантные прямые, то $A \overset{g}{\mapsto} A'$, $B \overset{q}{\mapsto} B'$, $C \overset{g}{\mapsto} C'$. Обозначим через B'' образ точки B' в преобразовании g. Отрезки BB' и $B'B''$ равны, поэтому B' — середина отрезка BB'' (точка B'' не совпадает с точкой B, так как в этом случае середина отрезка BB' — инвариантная точка, что противоречит условию леммы).

В движении g репер (B, A, C, B') переходит в репер (B', A', C', B''). Но при параллельном переносе на вектор $\vec{p} = \overrightarrow{AA'}$ репер (B, A, C, B') также переходит в репер (B', A', C', B''), так как $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{B'B''} = \vec{p}$. Поэтому по лемме § 68 движение g — параллельный перенос на вектор $\vec{p}$. ■

Л е м м а 3. *Любое движение пространства имеет по крайней мере одну инвариантную прямую.*

Эту лемму приводим без доказательства.

§ 70. Классификация движений пространства

По аналогии с классификацией движений плоскости приведем классификацию движений пространства в зависимости от наличия инвариантных точек.

1. Движение имеет по крайней мере три инвариантные точки, не лежащие на одной прямой. Пусть A, B и C — инвариантные точки движения g, не лежащие на одной прямой, а AD — прямая, перпендикулярная плоскости ABC (рис. 162). Очевидно, в движении g плоскость ABC переходит в себя, т. е. является инвариантной плоскостью, поэтому AD — инвариантная прямая. Таким образом, образ D' точки D лежит на прямой AD. Так как $AD = AD'$, то возможны два случая.

1) Точка D' совпадает с точкой D. В этом случае в преобразовании g вершины репера (A, B, C, D) переходят в себя. В тождественном преобразовании вершины этого репера также переходят сами в себя, поэтому по лемме § 68 g — тождественное преобразование. Ясно, что *тождественное преобразование — движение первого рода.*

2) Точки D и D' симметричны относительно точки A (см. рис. 162). В преобразовании g репер $R = (A, B, C, D)$ переходит в репер $R' = (A, B, C, D')$. Но в симметрии относительно плоскости ABC репер R также переходит в репер R', поэтому по лемме § 68 g — *симметрия относительно плоскости.* Так как $R \mid R' < 0$, то *симметрия относительно плоскости — движение второго рода.*

2. Движение имеет по крайней мере две инвариантные точки A и B, но не имеет инвариантных точек, не лежащих на прямой AB. В этом случае любая точка прямой AB является инвариантной. В самом деле, пусть M — произвольная точка прямой AB, а M' — образ этой точки. Так как при движении сохраняется простое отношение трех точек $(AB, M) = (AB, M')$. Отсюда следует, что точки M и M' совпадают (§ 12, п. 1), т. е. M — инвариантная точка данного движения. Таким образом, AB является прямой инвариантных точек.

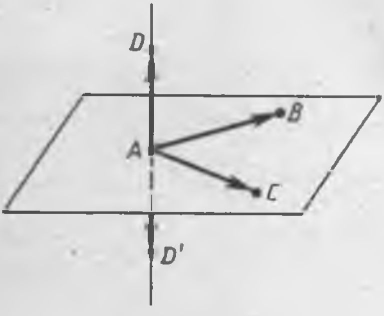


Рис. 162

Пусть σ — произвольная плоскость, перпендикулярная прямой AB и пересекающая ее в некоторой точке P. Плоскость σ — инвариантная плоскость данного движения, поэтому на ней индуцируется некоторое движение g'. Точка P является единственной инвариантной точкой этого движения, следовательно, g' — поворот вокруг точки P на некоторый угол φ, $\varphi \neq 0$. Так как любая плоскость, проходящая через прямую AB, переходит в плоскость, проходящую

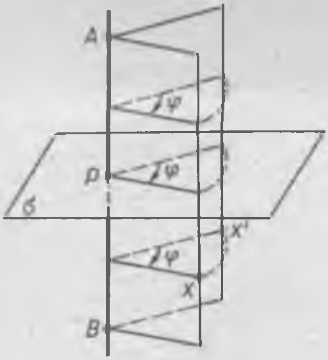


Рис. 163

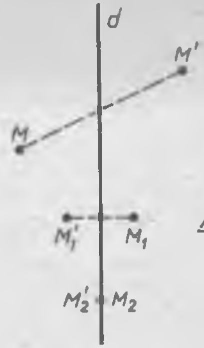


Рис. 164

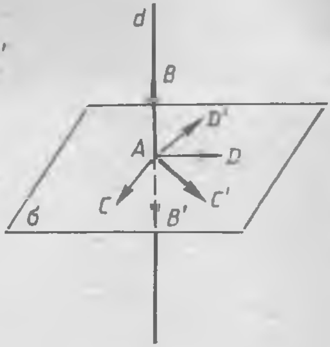


Рис. 165

через эту же прямую, то во всех плоскостях, перпендикулярных к прямой AB, индуцируется поворот с одним и тем же углом поворота φ (рис. 163).

Рассмотренное нами движение называется *поворотом пространства вокруг прямой AB на угол φ*. Прямая AB называется *осью поворота*, а угол φ — *углом поворота*. Из предыдущего изложения ясно, что в этом движении образ X' произвольной точки X, не лежащей на оси, получается вращением точки X вокруг оси поворота на угол φ в одном и том же направлении (см. рис. 163). Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что *поворот вокруг прямой — движение первого рода.*

Поворот пространства вокруг прямой d на угол π называется *симметрией относительно прямой d*. В этом случае каждая точка M пространства переходит в точку M', симметричную точке M относительно прямой d (рис. 164). Отметим, что тождественное преобразование также считается поворотом вокруг любой прямой на угол $\varphi=0$.

3. Движение имеет только одну неподвижную точку A. По лемме 3 § 69 существует по крайней мере одна инвариантная прямая d. Ясно, что точка A лежит на прямой d, так как в противном случае основание перпендикуляра, проведенного из точки A к прямой d, также является инвариантной точкой. Но это невозможно, ибо данное движение g имеет только одну инвариантную точку.

Обозначим через σ плоскость, проходящую через точку A и перпендикулярную к прямой d. Плоскость σ — инвариантная плоскость, поэтому движение g индуцирует на плоскости σ некоторое движение g'. Движение g' имеет только одну неподвижную точку A, поэтому является поворотом вокруг точки A на некоторый угол φ, $\varphi\neq 0$.

Ортонормированный репер $R=(A, B, C, D)$ выберем так, чтобы точка B лежала на прямой d, а точки C и D на плоскости σ (рис. 165). Так как B не является неподвижной точкой, то $B'=g(B)$

симметрична точке B относительно точки A. В движении g репер $R=(A, B, C, D)$ переходит в репер $R'=(A, B', C', D')$, причем на плоскости σ реперы (A,C,D) и (A, C', D') ориентированы одинаково, поэтому реперы R и R' ориентированы противоположно. Отсюда следует, что g — движение второго рода. Движение g называется *поворотным отражением.* Прямая d, угол φ, плоскость σ и точка A называются соответственно *осью, углом, плоскостью* и *центром поворотного отражения.* Геометрически поворотное отражение является произведением поворота g_1 вокруг прямой d на угол φ на симметрию g_2 относительно плоскости σ. Действительно, в движении g_1 репер R переходит в репер (A, B, C', D'), а в движении g_2 репер (A, B, C', D') — в репер R', поэтому движение g_2g_1 совпадает с движением g (см. лемму из § 68).

Если $\varphi=\pi$, то поворотное отражение является симметрией относительно неподвижной точки.

4. Движение не имеет ни одной неподвижной точки. Пусть g — данное движение, а d — его инвариантная прямая (лемма 3 из § 69). По лемме 1 из § 69 любая другая инвариантная прямая, если таковая существует, параллельна прямой d. Возможны три случая.

1) Существуют по крайней мере три попарно параллельные инвариантные прямые, не лежащие в одной плоскости. В этом случае g является параллельным переносом на некоторый ненулевой вектор $\vec{p}$ (лемма 2 из § 69). Инвариантными прямыми являются те и только те прямые пространства, которые параллельны вектору $\vec{p}$. Ясно, что *параллельный перенос — движение первого рода.*

2) Существуют по крайней мере две параллельные инвариантные прямые, и все другие инвариантные прямые, если таковые существуют, лежат в плоскости σ, проходящей через эти прямые. В этом случае движение g называется *скользящим отражением.* Нетрудно доказать, что g является произведением отражения от плоскости σ на параллельный перенос на ненулевой вектор $\vec{p}$, параллельный плоскости σ. Инвариантными являются те и только те прямые, которые лежат в плоскости σ и параллельны вектору $\vec{p}$. Так как отражение от плоскости — движение второго рода, а параллельный перенос — движение первого рода, то *скользящее отражение — движение второго рода.*

3) Движение g имеет только одну инвариантную прямую d. В этом случае оно называется *винтовым движением.* Можно доказать, что g является произведением поворота вокруг прямой d с углом поворота $\varphi\neq0$ на параллельный перенос на ненулевой вектор, параллельный прямой d. Так как поворот вокруг прямой и параллельный перенос являются движениями первого рода, то *винтовое движение является движением первого рода.*

5. Итак, существуют шесть типов движений пространства, которые приведены в следующей таблице:

Движения первого рода. 1) Параллельный перенос на вектор $\vec{p}$. а) Параллельный перенос на вектор $\vec{p} \neq \vec{0}$. б) Тождественное преобразование ($\vec{p} = \vec{0}$).
2) Поворот вокруг прямой на угол φ. а) Поворот на угол φ, где $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$. б) Тождественное преобразование ($\varphi = 0$). в) Симметрия относительно прямой ($\varphi = \pi$).
3) Винтовое движение.
Движения второго рода. 4) Симметрия относительно плоскости.
5) Поворотное отражение с углом поворота $\varphi \neq 0$. а) Поворотное отражение с углом поворота φ, где $\varphi \neq 0$ и $\varphi \neq \pi$. б) Симметрия относительно точки ($\varphi = \pi$).
6) Скользящее отражение.

§ 71. Преобразование подобия пространства

1. Преобразование пространства называется *преобразованием подобия* или просто *подобием,* если существует такое число $k > 0$, что для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B' = kAB$. Число k называется *коэффициентом подобия.*

При $k = 1$ преобразование подобия сохраняет расстояния, т. е. является движением. Следовательно, *движение — частный случай подобия.* Примером преобразования подобия, отличного от движения, является гомотетия, которая в пространстве вводится точно так же, как и в плоскости (см. § 46). Зададим точку M_0 и вещественное число $m \neq 0$. Каждой точке M поставим в соответствие точку M' так, чтобы

$$\overline{M_0M'} = m\,\overline{M_0M}. \qquad (1)$$

Это отображение называается *гомотетией* с центром M_0 и коэффициентом m. Для двух точек M_1 и M_2 и их образов M_1' и M_2' из формулы (1) получаем (см. § 46, п. 1):

$$\overline{M_1'M_2'} = m\,\overline{M_1M_2}. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что $M_1'M_2' = |m|\,M_1M_2$. Таким образом, *гомотетия с коэффициентом m является преобразованием подобия с коэффициентом $k = |m|$.*

Выберем ортонормированный репер (O, E_1, E_2, E_3) так, чтобы точка O совпала с центром гомотетии. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, а точка $M'(x', y', z')$ — ее образ, то из формулы (1) получаем аналитическое выражение гомотетии в пространстве:

$$x' = mx,\ y' = my,\ z' = mz. \tag{3}$$

Пользуясь формулами (3) точно так же, как и в п. 2 § 46, можно доказать, что гомотетия переводит плоскость (прямую), не проходящую через центр гомотетии, в параллельную плоскость (прямую), а плоскость (прямую), проходящую через центр гомотетии,— в себя. Аналогично, пользуясь формулой (2), убеждаемся в том, что гомотетия сохраняет простое отношение трех точек (см. доказательство свойства 2^0 п. 2, § 46). Отсюда следует, что гомотетия переводит отрезок в отрезок, луч — в луч, полуплоскость — в полуплоскость и полупространство — в полупространство. Из формулы (2) следует также, что гомотетия переводит угол в равный ему угол (см. доказательство свойства 3^0, § 46).

Докажем, что *гомотетия с коэффициентом m сохраняет ориентацию пространства, если $m>0$, и меняет его ориентацию, если $m<0$.* Действительно, пусть (A, B, C, D) — произвольный репер, а (A', B', C', D') — его образ. По формуле (2) получаем: $\overrightarrow{A'B'} = m\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'C'} = m\,\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'D'} = m\,\overrightarrow{AD}$, поэтому

$$(AB,\ AC,\ AD) \mid (A'B',\ A'C',\ A'D') = m^3.$$

Отсюда и следует сформулированное выше утверждение.

2. Теорема 1, сформулированная и доказанная в § 46, полностью переносится на пространство, т. е. *любое преобразование подобия пространства с коэффициентом k является произведением гомотетии с тем же коэффициентом k и произвольным центром на некоторое движение.* Отсюда следует, что подобие пространства переводит плоскость (прямую) в плоскость (прямую), параллельные плоскости (прямые) — в параллельные плоскости (прямые). Подобие сохраняет простое отношение трех точек, поэтому оно переводит отрезок в отрезок, луч — в луч, полуплоскость — в полуплоскость, полупространство — в полупространство. Подобие переводит угол в равный ему угол, взаимно перпендикулярные прямые (плоскости) — во взаимно перпендикулярные прямые (плоскости).

Точно так же, как и на плоскости (см. § 46, п. 4), можно доказать, что любое преобразование подобия либо сохраняет ориентацию пространства, либо меняет ее. В первом случае оно называется *преобразованием подобия первого рода,* а во втором случае — *преобразованием подобия второго рода.* Таким образом, гомотетия с положительным коэффициентом является преобразованием подобия первого рода, а гомотетия с отрицательным коэффициентом (в частности, центральная симметрия, $m = -1$) — преобразованием подобия второго рода.

§ 72. Аффинные преобразования пространства

1. Преобразование пространства называется *аффинным,* если оно любые три точки M_1, M_2, M_3, лежащие на одной прямой, переводит в три точки M_1', M_2', M_3', лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение, т. е. $(M_1M_2, M_3)=(M_1'M_2', M_3')$. Ясно, что *любое преобразование подобия, в частности любое движение, является аффинным преобразованием.*

Покажем, что существуют аффинные преобразования, отличные от подобий. Рассмотрим следующий пример. Зададим плоскость σ и положительное число k. Каждой точке M пространства поставим в соответствие точку M' так, чтобы

$$\overrightarrow{M_0M'}=k\,\overrightarrow{M_0M}, \tag{1}$$

где M_0 — проекция точки M на плоскость σ (рис. 166). Из равенства (1) следует, что $\overrightarrow{M_0M}=\frac{1}{k}\overrightarrow{M_0M'}$, поэтому каждая точка M' пространства имеет один и только один прообраз.

Таким образом, построенное отображение является преобразованием пространства; оно называется *сжатием пространства к плоскости* σ. Плоскость σ называется *плоскостью сжатия,* а число k — *коэффициентом сжатия.* Очевидно, все точки плоскости σ остаются неподвижными. Если $k<1$, то все точки пространства, не лежащие на плоскости σ, приближаются к плоскости сжатия (рис. 166, *а*), а если $k>1$, то все точки пространства удаляются от плоскости сжатия (рис. 166, *б*), т. е. фактически имеет место растяжение.

Докажем, что *сжатие к плоскости является аффинным преобразованием.* Для этого возьмем прямоугольную систему координат $Oxyz$ так, чтобы координатная плоскость Oxy совпадала с плоскостью σ, и найдем аналитическое выражение сжатия с коэффициентом k к плоскости Oxy. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, а $M'(x', y', z')$ — ее образ (рис. 166, *а*), то из определения сжатия (см. формулу (1)) следует, что

$$x'=x,\ y'=y,\ z'=kz. \tag{2}$$

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три точки,

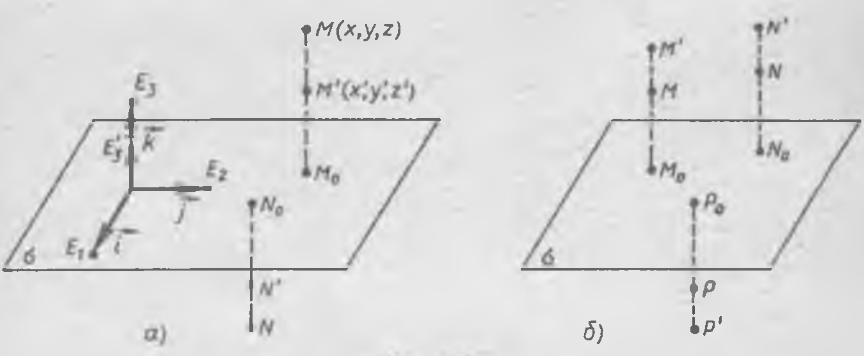


Рис. 166

лежащие на одной прямой, а $M_1'(x_1', y_1', z_1')$, $M_2'(x_2', y_2', z_2')$, $M_3'(x_3', y_3', z_3')$ — их образы. Если $\lambda=(M_1M_2, M_3)$, то по формулам (4) из § 52 имеем:

$$x_3=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y_3=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z_3=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Умножив третье равенство на k и учитывая формулы (2), получаем:

$$x_3'=\frac{x_1'+\lambda x_2'}{1+\lambda},\ y_3'=\frac{y_1'+\lambda y_2'}{1+\lambda},\quad z_3'=\frac{z_1'+\lambda z_2'}{1+\lambda}.$$

Отсюда следует, что точки M_1', M_2', M_3' лежат на одной прямой и $(M_1'M_2', M_3')=\lambda$. Таким образом, сжатие к плоскости является аффинным преобразованием.

Нетрудно убедиться в том, что если $k\neq 1$, то сжатие к плоскости *не является подобием*. В самом деле, рассмотрим, например, три точки O $(0,0,0)$, $E_1(1,0,0)$ и $E_3(0,0,1)$ и их образы $O'(0,0,0)$, $E_1'(1,0,0)$ и $E_3'(0,0,k)$. Ясно, что $OE_1=O'E_1'=OE_3=1$, $O'E_3'=k$, поэтому $O'E_1'=1\cdot OE_1$, а $O'E_3'=kOE_3$.

Замечание. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат. Мы показали, что аналитическое выражение сжатия с коэффициентом k к плоскости Oxy имеет вид (2). Аналогично можно получить аналитические выражения сжатия с коэффициентом k к координатным плоскостям Oxz и Oyz:

$$x'=x,\ y'=ky,\ z'=z, \tag{3}$$

$$x'=kx,\ y'=y,\ z'=z. \tag{4}$$

2. Для аффинных преобразований пространства имеет место основная теорема, аналогичная теореме 1 из § 48. Для ее доказательства воспользуемся двумя леммами.

Лемма 1. *Если аффинные преобразования f_1 и f_2 две точки A и B переводят соответственно в точки A' и B', то $f_1(M)=f_2(M)$, где M — любая точка прямой AB.*

Доказательство этой леммы мы опускаем, так как оно в точности совпадает с доказательством соответствующей леммы § 48.

Лемма 2. *Если аффинные преобразования f_1 и f_2 три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, переводят соответственно в точки A', B' и C',* то *$f_1(M)=f_2(M)$, где M — любая точка плоскости ABC.*

□ Пусть точка M — произвольная точка плоскости ABC, отличная от точек A, B и C. Докажем, что $f_1(M)=f_2(M)$. Проведем через точку M прямую так, чтобы она пересекала какие-нибудь две из прямых AB, BC и CA в различных точках P и Q. По лемме 1 имеем: $f_1(P)=f_2(P)$, $f_1(Q)=f_2(Q)$. По той же лемме $f_1(M)=f_2(M)$. ■

Теорема 1. *Пусть $R=(A, B, C, D)$ и $R'=(A', B', C', D')$ — произвольные реперы. Тогда существует одно и только одно аффин-*

ное преобразование, которое переводит репер R в репер R'. При этом любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'.

□ 1) Рассмотрим отображение f, которое произвольную точку $M(x, y, z)$ в репере R переводит в точку $M'(x, y, z)$ в репере R'. Предлагаем читателю по аналогии с доказательством теоремы 1 из § 48 доказать, что f — искомое аффинное преобразование.

2) Докажем, что если f_1 — какое-нибудь аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R', то f_1 совпадает с f.

Пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через точку M прямую так, чтобы она пересекала какие-нибудь две из плоскостей, содержащих грани тетраэдра $ABCD$, в различных точках P и Q. По лемме 2 $f(P)=f_1(P)$, $f(Q)=f_1(Q)$. Отсюда, используя лемму 1, получаем: $f(M)=f_1(M)$. Таким образом, отображения f и f_1 совпадают, т. е. f — единственное аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R'. При этом аффинном преобразовании точка $M(x, y, z)_R$ переходит в точку $M'(x, y, z)_{R'}$. ■

3. Пользуясь этой теоремой, можно доказать, что аффинное преобразование пространства переводит плоскость (прямую) в плоскость (прямую), причем параллельные плоскости (прямые) — в параллельные плоскости (прямые). Так как аффинное преобразование сохраняет простое отношение трех точек, то оно переводит отрезок в отрезок, луч — в луч, полуплоскость — в полуплоскость, полупространство — в полупространство. Далее, любое аффинное преобразование либо сохраняет ориентацию пространства, либо меняет его ориентацию. В первом случае оно называется *аффинным преобразованием первого рода,* а во втором случае — *аффинным преобразованием второго рода.*

Заметим, что основные свойства аффинных преобразований совпадают со свойствами подобия. Существенное отличие аффинных преобразований от преобразований подобия заключается в том, что при аффинном преобразовании, вообще говоря, величина угла не сохраняется. Действительно, пусть $R=(O, A, B, C)$ и $R'=(O', A', B', C')$ — два репера таких, что $\angle AOB \neq \angle A'O'B'$. По основной теореме существует аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R'. При этом, очевидно, угол AOB переходит в угол $A'O'B'$, причем $\angle AOB \neq \angle A'O'B'$.

4. Найдем аналитическое выражение аффинного преобразования в произвольной аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Задача решается точно так же, как и аналогичная задача на плоскости (§ 48, п. 4).

Данное аффинное преобразование f зададим репером $R=(O, E_1, E_2, E_3)$, где $\overrightarrow{OE_1}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2}=\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OE_3}=\vec{e}_3$, и его образом $R'=(O', E_1', E_2', E_3')$. Мы предполагаем, что даны координаты точки $O'(x_0, y_0, z_0)$ и координаты векторов $\overrightarrow{O'E_1'}(c_{11}, c_{21}, c_{31})$, $\overrightarrow{O'E_2'}(c_{12}, c_{22}, c_{32})$, $\overrightarrow{O'E_3'}(c_{13}, c_{23}, c_{33})$.

Пусть произвольная точка M пространства в репере R имеет координаты (x, y, z), а ее образ M' — координаты (x', y', z'). По теореме 1 точка M' в репере R' имеет координаты (x, y, z), поэтому, используя формулы (3) из § 54, получаем:

$$\begin{aligned} x' &= c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z + x_0, \\ y' &= c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z + y_0, \\ z' &= c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z + z_0. \end{aligned} \tag{5}$$

Итак, получено аналитическое выражение аффинного преобразования f. Матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

составленная из коэффициентов при x, y и z, является матрицей перехода от репера R к реперу R', поэтому определитель δ этой матрицы отличен от нуля. Так как $\delta = R|R'$, то если f — аффинное преобразование первого рода (второго рода), то $\delta > 0$ ($\delta < 0$).

Имеет место следующая теорема, доказательство которой мы опускаем, так как оно по существу ничем не отличается от доказательства теоремы 3 из § 48.

Теорема 2. *Если отображение f пространства в аффинном репере задано аналитически формулами* (5), *где определитель δ матрицы* (6) *отличен от нуля, то* f — аффинное преобразование. При этом, если $\delta > 0$ ($\delta < 0$), *то* f — аффинное преобразование первого (второго) рода.

5. Так как движение — частный случай аффинных преобразований, то для того чтобы получить аналитическое выражение движений пространства, можно использовать те же формулы (5). Но в этом случае на элементы матрицы (6) накладываются дополнительные ограничения. Предположим, что исходная система координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ прямоугольная. Тогда соответствующий репер R и его образ R' — ортонормированные реперы. Поэтому матрица (6) является ортогональной матрицей. Таким образом, *аналитическое выражение движения в прямоугольной системе координат имеет вид* (5), *где матрица* (6) *ортогональная.*

Пусть f — преобразование подобия с коэффициентом k, а $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ — какая-нибудь прямоугольная система координат. Для того чтобы найти аналитическое выражение подобия f в этой системе, представим f в виде $f = gh$, где h — гомотетия с коэффициентом k и центром O, а g — некоторое движение (см. § 71, п. 2). Гомотетия h в системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ задается формулами (3) из § 71: $x' = kx$, $y' = ky$, $z' = kz$, а движение g — формулами (5), где (6) — ортогональная матрица. Таким образом, аналитическое выражение подобия f имеет вид:

$$\begin{aligned} x' &= k(c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z) + x_0, \\ y' &= k(c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z) + y_0, \\ z' &= k(c_{31}x + c_{32}y + c_{33}z) + z_0, \end{aligned}$$

где матрица (6) составленная из c_{ij}, ортогональная.

§ 73. Группа аффинных преобразований и ее подгруппы. Групповой подход к геометрии

1. Обозначим через $\boldsymbol{A}_3$ множество всех аффинных преобразований пространства. Если $f_1 \in \boldsymbol{A}_3$ и $f_2 \in \boldsymbol{A}_3$, то, очевидно, и $f_2 f_1 \in \boldsymbol{A}_3$ (см. § 50, п. 1). Докажем, что если $f \in \boldsymbol{A}_3$, то $f^{-1} \in \boldsymbol{A}_3$. Действительно, пусть A, B и C — три точки, лежащие на одной прямой, и $(AB, C) = \lambda$. Рассмотрим образы точек A и B: $A' = f^{-1}(A)$, $B' = f^{-1}(B)$. На прямой $A'B'$ возьмем точку C' так, чтобы $(A'B', C') = \lambda$, и докажем, что $C' = f^{-1}(C)$. Так как f — аффинное преобразование, то $(f(A')f(B'), f(C')) = \lambda$ или $(AB, f(C')) = \lambda$. Таким образом, $(AB, C) = (AB, f(C'))$, т. е. $C = f(C')$ или $C' = f^{-1}(C)$.

Итак, множество A_3 всех аффинных преобразований пространства образует группу (см. § 40, п. 3). Она называется *группой аффинных преобразований пространства.*

Рассмотрим важнейшие подгруппы этой группы.

а) Пусть P_3 — множество всех подобий пространства. Если $g \in P_3$ и $f \in P_3$, то, очевидно, $fg \in P_3$. Далее, если $g \in P_3$, то и $g^{-1} \in P_3$. Таким образом, множество P_3 является группой преобразований. Она называется *группой преобразований подобия пространства* (или, короче, *группой подобий*). Ясно, что группа подобий является подгруппой группы аффинных преобразований.

б) Пусть D_3 — множество всех движений пространства. Если $g \in D_3$ и $f \in D_3$, то, очевидно, $fg \in D_3$. Далее, если $g \in D_3$, то $g^{-1} \in D_3$. Таким образом, множество D_3 является группой. Она называется *группой движений пространства.* Эта группа является подгруппой группы подобий, а также подгруппой группы аффинных преобразований.

Другими примерами подгрупп аффинных преобразований являются: в) множество всех аффинных преобразований первого рода; г) множество всех аффинных преобразований пространства, каждое из которых оставляет фиксированную точку O неподвижной (группа центро-аффинных преобразований); д) множество всех аффинных преобразований пространств, для каждого из которых определитель δ матрицы (6) (§ 72) равен единице (группа эквиаффинных преобразований пространства); е) множество всех параллельных переносов (группа переносов пространства). Читатель, пользуясь признаком подгруппы (см. § 40, п. 3), может самостоятельно доказать, что каждое из указанных выше множеств является подгруппой группы аффинных преобразований.

2. Теория геометрических преобразований сыграла важную роль в формировании взглядов на геометрию. Если проанализировать основные определения, теоремы и другие утверждения, известные нам из курса геометрии, то можно прийти к выводу, что по существу в геометрии изучаются те свойства геометрических фигур, которые остаются неизменными при определенной группе геометрических преобразований. В большинстве случаев такой группой является группа подобий или группа движений.

Эти наблюдения не случайны. Теория геометрических преобразований лежит в основе общего определения геометрии, позволяющего разобраться в сходствах и различиях между разными ветвями этой математической дисциплины.

Так чем же занимается геометрия? Рассмотрим общую схему, лежащую в основе определения геометрии.

Пусть дана группа преобразований G некоторого непустого множества E. Любое подмножество множества E мы называем *фигурой.* Напомним, что две фигуры F и F' называются *G-эквивалентными,* если в группе G существует такое преобразование f, что $F' = f(F)$. Понятие G-эквивалентности является отношением эквивалентности на множестве всех подмножеств множества E. Для конкретных групп преобразований термин «G-эквивалентность» заменяется другим термином. Например, если E — обозначение точечного пространства, а G — группа движений, то «G-эквивалентность» заменяется термином «равенство» или «конгруэнтность». Если G — подобие, то «G-эквивалентность» заменяется термином «подобие», а если G — группа аффинных преобразований, то термином «аффинная эквивалентность».

Пусть F — данная фигура. Те свойства этой фигуры, которые сохраняются при любых преобразованиях из G (т. е. свойства, общие для F и любой другой фигуры F', которая G-эквивалентна F), называются *инвариантными свойствами* (инвариантами) фигуры F относительно группы G. Так, свойство фигуры в пространстве быть плоскостью (или прямой) является ее инвариантным свойством относительно группы $\boldsymbol{A}_3$. Свойство фигуры лежать в плоскости также является инвариантным свойством. Простое отношение трех точек прямой является инвариантом группы $\boldsymbol{A}_3$ — основной инвариант этой группы. Мера угла — основной инвариант группы подобий, а длина отрезка — основной инвариант группы движений. Свойство четырехугольника быть параллелограммом является инвариантным свойством относительно группы $\boldsymbol{A}_3$, а свойство четырехугольника быть прямоугольником — инвариантным свойством относительно группы P_3.

3. Теперь можно дать общее определение геометрии. *Геометрия — это наука, изучающая такие свойства фигур, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях некоторой группы G.* Из этого определения следует, что если две фигуры G-эквивалентны, то они обладают одними и теми же свойствами, которые называются геометрическими. Отсюда вытекает также, что в принципе можно построить много различных геометрий, так как имеется много различных групп преобразований.

Такой взгляд на геометрию (или, как говорят, групповой подход к геометрии) был впервые сформулирован известным немецким математиком Феликсом Клейном в его работе «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований» («Эрлангенская программа»), изданной в 1872 г. при вступлении ее автора преподавателем Эрлангенского университета.

Среди различных геометрий наиболее распространенными являются аффинная геометрия, где в качестве группы G принимается группа аффинных преобразований, евклидова геометрия, где в качестве группы преобразований принимается группа преобразований подобия (*главная группа*). Иногда евклидову геометрию понимают как геометрию, где G — группа движений. Каждая из этих геометрий является вполне содержательной самостоятельной наукой. В аффинной геометрии можно говорить о точках, прямых и плоскостях, так как при любых аффинных преобразованиях точка переходит в точку, прямая — в прямую, а плоскость — в плоскость. Понятия равнобедренного треугольника, прямоугольника, прямоугольного параллелепипеда, окружности, сферы отсутствуют в этой геометрии. Они относятся к геометрии, где G — группа подобий. С другой стороны, аффинными являются понятия многоугольника, параллелограмма, параллелепипеда, трапеции. Аффинными являются также понятия эллипса, гиперболы, параболы.

В качестве типичной для аффинной геометрии теоремы отметим теорему о том, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:1. Другой пример: средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине. В то же время хорошо известная из курса средней школы теорема Пифагора не является теоремой аффинной геометрии. Эта теорема относится к евклидовой геометрии.

В обычном школьном курсе в основном изучают евклидову геометрию, хотя некоторые вопросы, рассматриваемые в школе, относятся к аффинной геометрии.

З а м е ч а н и е. Сформулированный выше групповой подход к геометрии позволил выработать на эту дисциплину весьма общую точку зрения. Конец XIX в. и первая половина XX в. были богаты первоклассными геометрическими исследованиями. При этом в качестве основной (или, как говорят, фундаментальной) группы G брали группу движений, группу подобий, либо аффинную группу и ее обобщения.

Но практические приложения геометрии привели к тому, что к настоящему времени разработаны многие геометрические теории, которые не укладываются в схему Эрлангенской программа Ф. Клейна. О них пойдет речь во второй части нашего курса.

Глава IX

ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

§ 74. Поверхности второго порядка. Метод сечений

1. Напомним, что *уравнением поверхности* в некоторой системе координат в пространстве называется уравнение

$$F(x,\ y,\ z)=0, \tag{1}$$

которому удовлетворяют координаты любой точки поверхности и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей этой поверхности (см. § 57). Так, в аффинной системе координат уравнение первой степени $Ax+By+Cz+D=0$ есть уравнение плоскости (теорема из § 60). В прямоугольной системе координат уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ есть уравнение сферы с центром $C(a,\ b,\ c)$ радиуса r (§ 57, п. 2).

Все поверхности подразделяются на два больших класса: алгебраические и неалгебраические (или трансцендентные). Поверхность S называется *алгебраической,* если в какой-нибудь аффинной системе координат ее уравнение можно записать в виде (1), в котором $F(x,\ y,\ z)$ — многочлен относительно x, y, z, т. е. алгебраическая сумма конечного множества членов вида $ax^py^qz^r$, где коэффициент a — действительное число, отличное от нуля, а p, q и r — неотрицательные целые числа. Число $p+q+r$ называется *степенью члена* $ax^py^qz^r$, где $a\neq 0$. *Степенью многочлена* называется наивысшая из степеней его членов.

Порядком алгебраической поверхности называют степень ее уравнения в какой-либо аффинной системе координат (т. е. степень многочлена $F(x,\ y,\ z)$ в уравнении (1) этой поверхности). Можно доказать, что свойство поверхности быть алгебраической, а также порядок не зависят от выбора аффинной системы координат. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующей теоремы для алгебраических линий (§ 18), поэтому мы его опускаем. Все поверхности первого порядка являются плоскостями. Сфера является примером поверхности второго порядка.

В этой главе будут изучены поверхности второго порядка. *Поверхностью второго порядка называется множество всех точек пространства, координаты которых в какой-либо аффинной системе координат удовлетворяют уравнению второй степени:*

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{10}x+2a_{20}y+ \\ +2a_{30}z+a_{00}=0, \tag{2}$$

где a_{11}, a_{22}, ..., a_{00} — *действительные числа, причем не все коэффициенты при членах второй степени равны нулю.*

Мы не будем исследовать общее уравнение (2) поверхности второго порядка, а рассмотрим лишь основные типы таких поверхностей, используя их простейшие (так называемые канонические) уравнения. При этом для изучения формы поверхности часто будем прибегать к методу сечений, который описан в следующем пункте.

2. *Метод сечений* применим к любой поверхности, а не только к поверхности второго порядка. При этом оказывается удобно пользоваться прямоугольной системой координат. Сущность метода сечений состоит в следующем.

Пусть поверхность S задана в прямоугольной системе координат уравнением (1). Поверхность S пересекаем плоскостями, параллельными координатным плоскостям (или самими координатными плоскостями), и находим линии пересечения поверхности с этими плоскостями. По виду этих линий и выносится суждение о форме поверхности S. Применение метода сечений основано на следующей теореме.

Теорема. *Пусть в прямоугольной системе координат* $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ *заданы поверхность S уравнением* (1) *и плоскость σ, параллельная плоскости Oxy или совпадающая с ней, уравнением $z=h$. Если поверхность S пересекается с плоскостью σ по линии γ, то проекция линии γ на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение*

$$F(x,\ y,\ h)=0. \tag{3}$$

□ Пусть γ' — проекция линии γ на плоскость Oxy (рис. 167). Докажем, что на плоскости Oxy координаты любой точки линии γ' удовлетворяют уравнению (3), а координаты точки плоскости Oxy, не лежащей на линии γ', не удовлетворяют этому уравнению.

Возьмем произвольную точку M' линии γ', которая в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ на плоскости Oxy имеет координаты x', y'. Эта же точка в системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ в пространстве имеет координаты $(x', y', 0)$. Так как точка M' лежит на кривой γ', то она является проекцией некоторой точки M кривой γ. Ясно, что точка M в пространстве имеет координаты $M(x', y', h)$ (см. рис. 167). Но точка M лежит и на поверхности S, поэтому координаты точки M удовлетворяют уравнению (1): $F(x', y', h)=0$. Мы получили, что координаты произвольной точки M', лежащей на линии γ', удовлетворяют уравнению (3).

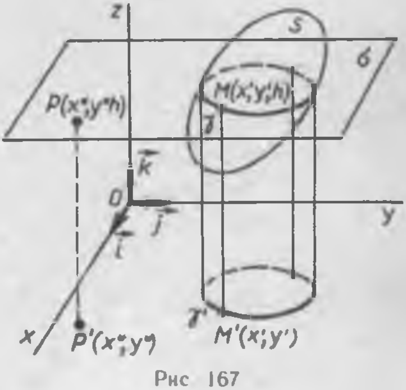


Рис 167

Возьмем теперь на плоскости Oxy произвольную точку $P'(x^*, y^*)$, не лежащую на линии γ'. Проведем через точку P' прямую с направляющим вектором $\vec{k}$ и обозначим через P точку пересечения этой прямой с плоскостью σ. Так как точка P' имеет в пространстве координаты $(x^*, y^*, 0)$, то точка P имеет координаты (x^*, y^*, h). Но точка P' не лежит на кривой γ', поэтому точка P не может лежать на кривой γ. Следовательно, координаты точки P не удовлетворяют уравнению (3) поверхности S: $F(x^*, y^*, h) \neq 0$. Значит, если точка плоскости Oxy не лежит на линии γ', то ее координаты не удовлетворяют уравнению (3). ■

Следствие. *Линия γ пересечения поверхности S с плоскостью σ, параллельной плоскости Oxy, равна проекции γ' этой линии на плоскость Oxy.*

□ В самом деле, параллельный перенос на вектор $\vec{p} = -h\vec{k}$ переводит каждую точку $M \in \gamma$ в соответствующую точку $M' \in \gamma'$. Следовательно, существует движение, которое совмещает линию γ с линией γ', а это значит, что эти линии равны. ■

§ 75. Поверхности вращения

1. *Поверхность, которая вместе с каждой своей точкой содержит всю окружность, полученную вращением этой точки вокруг некоторой фиксированной прямой d, называется поверхностью вращения*[1] (рис. 168). Прямая d, вокруг которой производится вращение, называется *осью вращения*. Вращение точки вокруг оси происходит в плоскости, перпендикулярной оси. В сечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными оси вращения, получаются окружности, которые называются *параллелями*. Плоскости, проходящие через ось вращения, пересекают поверхность вращения по линиям, называемым *меридианами*.

2. Поверхность вращения может быть образована следующим образом. Пусть в плоскости σ даны прямая d и линия γ (рис. 169). Поверхность, образованная вращением линии γ вокруг прямой d, есть поверхность вращения с осью вращения d. Каждая точка линии γ, вращаясь вокруг прямой d, образует параллель этой поверхности.

Докажем теорему, которая позволяет найти уравнение поверхности вращения по уравнению линии γ на плоскости σ.

Теорема. *В прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ уравнение*

$$x^2 + y^2 = f^2(z) \qquad (1)$$

есть *уравнение поверхности вращения, образованной вращением вокруг оси Oz линии, заданной уравнениями:*

$$x = f(z), \ y = 0. \qquad (2)$$

□ Пусть S — поверхность вращения, образованная вращением

---

1 Если точка M лежит на прямой d, то «окружность», полученная вращением точки M вокруг прямой d, имеет нулевой радиус и состоит из самой точки M.

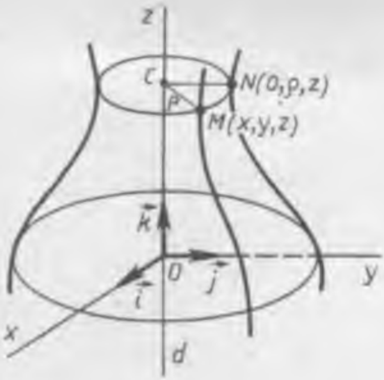


Рис. 168

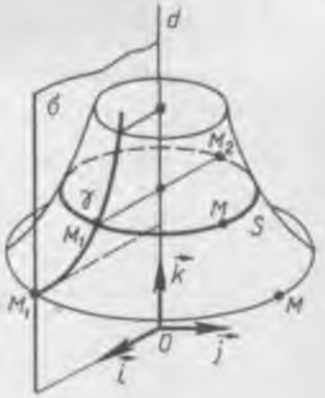


Рис. 169

вокруг оси Oz линии γ, заданной уравнениями (2) (рис. 169). Докажем, что уравнение (1) является уравнением поверхности S.

Возьмем произвольную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ пространства и проведем через нее плоскость, перпендикулярную оси Oz. Обозначим через M_0 точку пересечения этой плоскости с осью Oz. Окружность ω этой плоскости с центром M_0 и радиусом M_0M пересекает плоскость Oxz в двух точках, которые обозначим через M_1 и M_2 (рис. 170). Отрезки M_0M_1, M_0M_2 и M_0M — радиусы окружности ω, поэтому они равны друг другу. Так как $M_0M=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$, то точки M_1 и M_2 имеют координаты

$$M_1(\sqrt{x_1^2+y_1^2},\ 0,\ z_1),\ M_2(-\sqrt{x_1^2+y_1^2},\ 0,\ z_1).$$

Если точка M принадлежит поверхности S, то ω — параллель поверхности, поэтому одна из точек M_1 или M_2 принадлежит линии γ (см. рис. 169), следовательно, $\sqrt{x_1^2+y_1^2}=f(z_1)$ или $-\sqrt{x_1^2+y_1^2}=$ $=f(z_1)$. Возведя соответствующее уравнение в квадрат, получаем: $x_1^2+y_1^2=f^2(z_1)$.

Пришли к выводу, что если $M\in S$, то координаты точки M удовлетворяют уравнению (1).

Если точка M не принадлежит поверхности S, то ни одна из точек M_1 и M_2 не принадлежит линии γ, т. е. $\sqrt{x_1^2+y_1^2}\neq f(z_1)$ и $-\sqrt{x_1^2+y_1^2}\neq f(z_1)$. Отсюда следует, что $x_1^2+y_1^2\neq f^2(z_1)$, т. е. координаты точки M не удовлетворяют уравнению (1).

Итак, доказано, что уравнение (1) определяет поверхность S. ■

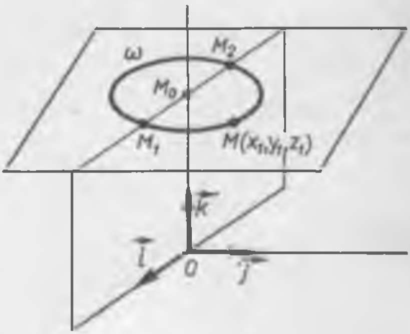


Рис. 170

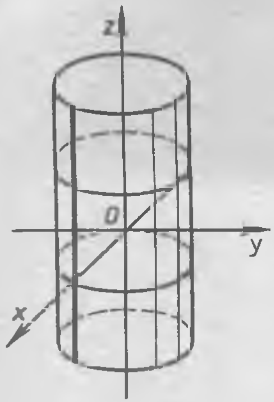


Рис. 171

З а м е ч а н и е. Аналогично можно убедиться в том, что в прямоугольной системе координат уравнение $z^2+y^2=g^2(x)$ определяет поверхность вращения, образованную вращением вокруг оси Ox линии, заданной уравнениями $y=g(x)$, $z=0$, а уравнение $x^2+z^2=h^2(y)$ определяет поверхность, образованную вращением вокруг оси Oy линии, заданной уравнениями: $x=h(y)$, $z=0$.

П р и м е р 1. В плоскости Oxz прямоугольной системы координат $Oxyz$ дана окружность $x^2+z^2=r^2$ с центром в начале координат радиуса r. Написать уравнение поверхности S, образованной вращением этой окружности вокруг оси Oz.

Р е ш е н и е. Сначала получим уравнения вида (2) линии γ, от вращения которой вокруг оси Oz образуется поверхность. Из уравнения данной окружности находим: $x=\pm\sqrt{r^2-z^2}$.

Здесь знаку «+» соответствует одна полуокружность, а знаку «—» — другая полуокружность данной окружности. Ясно, что при вращении вокруг оси Oz каждой из этих полуокружностей получается та же поверхность, что и при вращении всей окружности.

Поэтому в качестве линии γ можно взять одну из указанных полуокружностей, например полуокружность, заданную уравнениями:

$$x=\sqrt{r^2-z^2},\ y=0.$$

По доказанной теореме уравнение поверхности S имеет вид (1):

$$x^2+y^2=(\sqrt{r^2-z^2})^2, \text{ или } x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Таким образом, поверхностью S является сфера радиуса r с центром в начале координат.

Заметим, что доказанная теорема верна и в том случае, когда в уравнениях (2) функция $f(z)$ является постоянной. Рассмотрим пример.

П р и м е р 2. В плоскости Oxz прямоугольной системы координат Oxz дана прямая $x=a$, параллельная оси Oz. Написать уравнение поверхности, образованной вращением этой прямой вокруг оси Oz.

Р е ш е н и е. В данном случае уравнения (2) имеют вид: $x=a$, $y=0$. По доказанной теореме поверхность вращения определяется уравнением $x^2+y^2=a^2$. Эта поверхность, как известно из школьного курса геометрии, называется *цилиндром вращения* (или *прямым круговым цилиндром*). Она изображена на рисунке 171.

§ 76. Цилиндрические поверхности

1. *Поверхность, обладающая тем свойством, что вместе с каждой точкой M она содержит всю прямую, проходящую через M, параллельную данному ненулевому вектору $\bar{p}$, называется цилиндрической поверхностью или цилиндром.* Прямые, параллельные вектору $\bar{p}$ и принадлежащие цилиндрической поверхности, называются *образующими* этой поверхности.

Цилиндрическая поверхность может быть образована следующим образом. Пусть γ — некоторая линия, а $\bar{p}$ — ненулевой вектор. Поверхность, образованная всеми прямыми, каждая из которых проходит через некоторую точку линии γ параллельно вектору $\bar{p}$, будет цилиндрической. В этом случае линия γ называется *направляющей* этой поверхности (рис. 172).

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть в пространстве дана прямоугольная система координат $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ и в плоскости Oxy в системе координат $O\bar{i}\bar{j}$ задана линия γ своим уравнением*

$$F(x, y)=0. \tag{1}$$

Тогда уравнение (1) *определяет в пространстве цилиндрическую поверхность S с направляющей линией γ и образующими, параллельными вектору $\bar{k}$.*

□ Возьмем произвольную точку $M(x_1, y_1, z_1)$ пространства и рассмотрим прямую с направляющим вектором $\bar{k}$, проходящую через эту точку. Эта прямая пересекает плоскость Oxy в некоторой точке M_1, которая в системе $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ имеет координаты $(x_1, y_1, 0)$. Эта же точка M_1 на плоскости Oxy в системе $O\bar{i}\bar{j}$ имеет координаты (x_1, y_1).

Если M — точка поверхности S, то прямая MM_1 является образующей поверхности S, поэтому точка M_1 лежит на кривой γ. Отсюда следует, что координаты (x_1, y_1) точки M_1 удовлетворяют уравнению (1) линии γ: $F(x_1, y_1)=0$. Полученное равенство означает, что координаты точки $M(x_1, y_1, z_1)$ удовлетворяют уравнению (1).

Если точка M не принадлежит поверхности S, то точка M_1 не лежит на кривой γ, поэтому ее координаты (x_1, y_1) не удовлетворяют уравнению линии γ: $F(x_1, y_1)\neq 0$. Полученное неравенство означает, что координаты точки $M(x_1, y_1, z_1)$ не удовлетворяют уравнению (1).

Итак, доказано, что уравнение (1) есть уравнение цилиндрической поверхности с направляющей линией γ и образующими, параллельными оси Oz (одной из образующих будет служить сама ось Oz, если $O\in\gamma$). ■

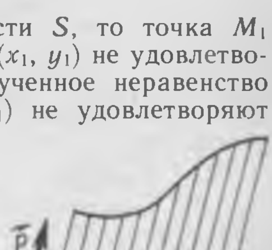


Рис. 172

Замечание. Аналогично можно убедиться в том, что если уравнение $G(x, z)=0$ в плоскости Oxz в системе $O\bar{i}\bar{k}$

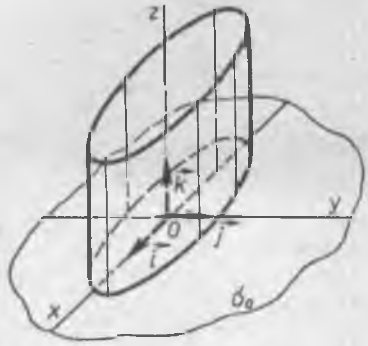


Рис. 173

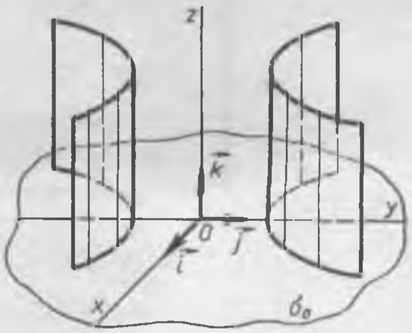


Рис. 174

определяет линию γ', то это же уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, для которой линия γ' служит направляющей, а образующие параллельны оси Oy.

Точно так же, если уравнение $H(y, z)=0$ в плоскости Oyz в системе $O\vec{j}\vec{k}$ определяет линию γ'', то это же уравнение в пространстве определяет цилиндрическую поверхность с направляющей γ'' и образующими, параллельными оси Ox.

2. Если уравнение (1) является уравнением второй степени относительно x и y (т. е. если γ — линия второго порядка), то цилиндрическая поверхность с направляющей γ и образующими, параллельными вектору $\vec{k}$, является цилиндрической поверхностью второго порядка (короче, цилиндром второго порядка). Этот цилиндр называется *эллиптическим, гиперболическим, параболическим* в зависимости от того, является ли его направляющая (1) эллипсом, гиперболой или параболой.

Возможен также случай, когда направляющая γ цилиндрической поверхности распадается на прямые d_1 и d_2 (пересекающиеся, параллельные или слившиеся). Проведя через каждую точку линии γ прямую, параллельную вектору $\vec{k}$, мы получим плоскости σ_1 и σ_2, проходящие через прямые d_1 и d_2 и параллельные вектору $\vec{k}$. В этом

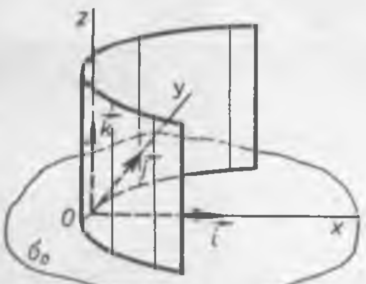


Рис. 175

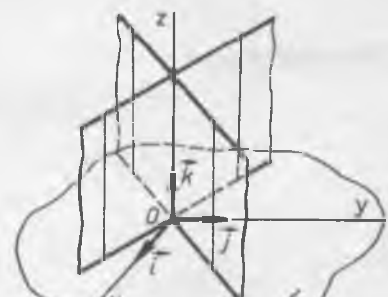


Рис. 176

случае мы скажем, что цилиндр второго порядка распадается на пару плоскостей σ_1 и σ_2.

Если прямоугольную систему координат $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ выбрать так, чтобы образующие цилиндрической поверхности второго порядка были параллельны вектору $\bar{k}$, а направляющая γ в системе $O\bar{i}\bar{j}$ имела каноническое уравнение, то указанные выше цилиндрические поверхности определяются следующими уравнениями:

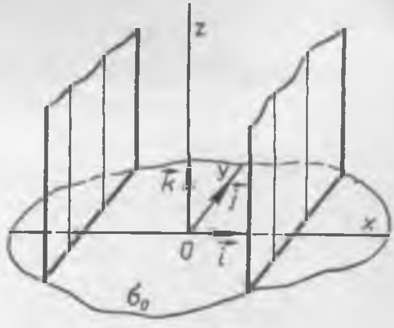


Рис. 177

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ — эллиптический цилиндр (рис. 173);

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ — гиперболический цилиндр (рис. 174);

$y^2=2px$ — параболический цилиндр (рис. 175);

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ — цилиндр, распавшийся на пару пересекающихся по оси Oz плоскостей (рис. 176);

$x^2-a^2=0,$ $a\neq 0$ — цилиндр, распавшийся на пару параллельных плоскостей (рис. 177);

$x^2=0$ — цилиндр, представляющий собой пару слившихся плоскостей.

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями* соответствующих цилиндрических поверхностей второго порядка.

З а м е ч а н и е. Если в каноническом уравнении эллиптического цилиндра $a=b$, то направляющей цилиндра служит окружность $x^2+y^2=a^2$, лежащая в плоскости Oxy. В этом случае поверхность является цилиндром вращения (см. § 75, пример 2).

§ 77. Конические поверхности второго порядка. Конические сечения

1. *Конической поверхностью или конусом с вершиной в точке M_0 называется поверхность, которая обладает тем свойством, что вместе с каждой своей точкой M, отличной от точки M_0, эта поверхность содержит прямую M_0M.*

Прямые, проходящие через вершину конуса и лежащие на нем, называются *образующими* этого конуса. Отметим, что из определения конуса вовсе не следует, что он имеет единственную вершину. Например, плоскость является конической поверхностью, каждая точка которой может быть принята в качестве вершины.

Коническую поверхность можно получить следующим образом. Рассмотрим в пространстве линию γ и точку M_0, не лежащую на линии γ. Поверхность, образованная всеми прямыми, каждая из

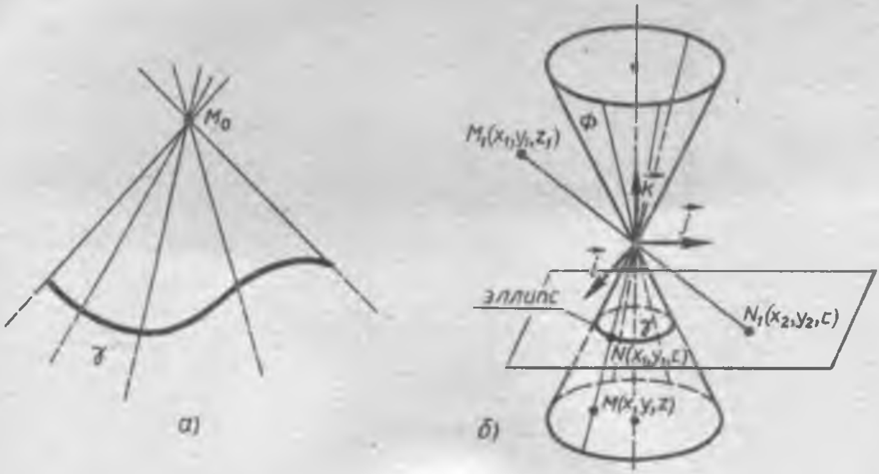


Рис. 178

которых проходит через точку M_0 и через некоторую точку линии γ, является конической поверхностью с вершиной M_0 (рис. 178, *а*). В этом случае линия γ называется *направляющей*. На рисунке 178, *б* изображена коническая поверхность Ф с вершиной в начале прямоугольной системы координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, направляющей которой служит эллипс γ:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=c,\ (c\neq 0). \tag{1}$$

Найдем уравнение этой конической поверхности. Пусть точка $M(x, y, z)$, отличная от точки O, принадлежит конусу Ф. Тогда прямая OM пересечет направляющую γ в некоторой точке $N(x_1, y_1, c)$. Так как $\overrightarrow{OM}\neq\vec{0}$ и векторы $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OM}$ коллинеарны, то найдется такое вещественное число t, что $\overrightarrow{ON}=t\overrightarrow{OM}$, или в координатах:

$$x_1=tx,\ y_1=ty,\ c=tz.$$

Отсюда, учитывая, что $z\neq 0$ (так как $c\neq 0$), находим: $x_1=\frac{cx}{z}$, $y_1=\frac{cy}{z}$. Подставив полученные выражения x_1, y_1 в первое из равенств (1), после очевидных преобразований найдем:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{2}$$

Заметим, что этому уравнению удовлетворяют и координаты точки O (0, 0, 0) — вершины конуса. Таким образом, координаты любой точки конуса Ф удовлетворяют уравнению (2).

Возьмем теперь какую-нибудь точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, не принадлежащую конусу Ф (см. рис. 178, *б*). Точка M_1 не совпадает с точкой O, поэтому если $z_1=0$, то $x_1\neq 0$ или $y_1\neq 0$. Отсюда следует, что координаты точки M_1 не удовлетворяют уравнению (2). Рассмотрим случай, когда $z_1 \neq 0$. Прямая OM_1 пересечет плоскость $z=c$ в некоторой точке $N_1(x_2, y_2, c)$. Как и выше, мы находим:

$$x_2 = \frac{cx_1}{z_1}, \; y_2 = \frac{cy_1}{z_1}. \qquad (3)$$

По условию $M_1 \notin \Phi$, и поэтому точка N_1 не лежит на эллипсе γ. Отсюда следует, что числа x_2, y_2, c не удовлетворяют системе (1), т. е. $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} \neq 1$. Подставляя сюда вместо x_2, y_2 их выражения по формулам (3), получим:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} \neq 0.$$

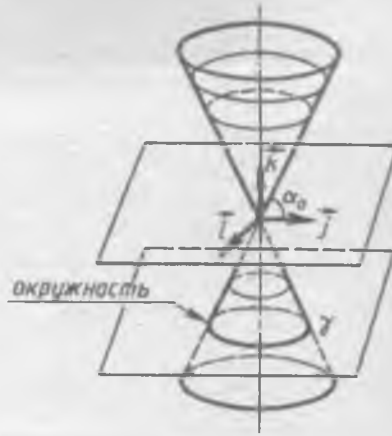


Рис. 179

Итак, если точка M_1 не принадлежит конусу Φ, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (2).

Мы доказали, что уравнение (2) и есть уравнение конуса Φ. Это уравнение есть уравнение второй степени, поэтому конус Φ называется *конусом второго порядка.* Уравнение (2) называется *каноническим уравнением конической поверхности второго порядка.*

2. В случае, когда направляющая (1) конической поверхности второго порядка является окружностью, т. е. когда $a=b$, уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \qquad (4)$$

Поверхность, определяемая этим уравнением в прямоугольной системе координат, называется *круговой конической поверхностью* или *круговым конусом* (рис. 179). Как легко заметить, эта поверхность образована при вращении вокруг оси Oz прямой, лежащей в плоскости Oxz и заданной в системе координат $O\vec{i}\vec{k}$ уравнением $x = \frac{a}{c} z$. Все образующие круговой конической поверхности составляют один и тот же угол α_0 с плоскостью Oxy, где $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{c}{a}$ (рис. 179).

3. Рассмотрим сечения круговой конической поверхности (4) различными плоскостями. Возможны три случая.

1) Плоскость сечения параллельна координатной плоскости Oxy или совпадает с ней. В этом случае она имеет уравнение $z=h$, поэтому по теореме о сечениях проекция сечения на плоскость Oxy определяется уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \frac{h^2}{c^2}$ или $x^2 + y^2 = r^2$, где $r = \frac{a|h|}{c}$. Если $h \neq 0$, то этим уравнением определяется окружность

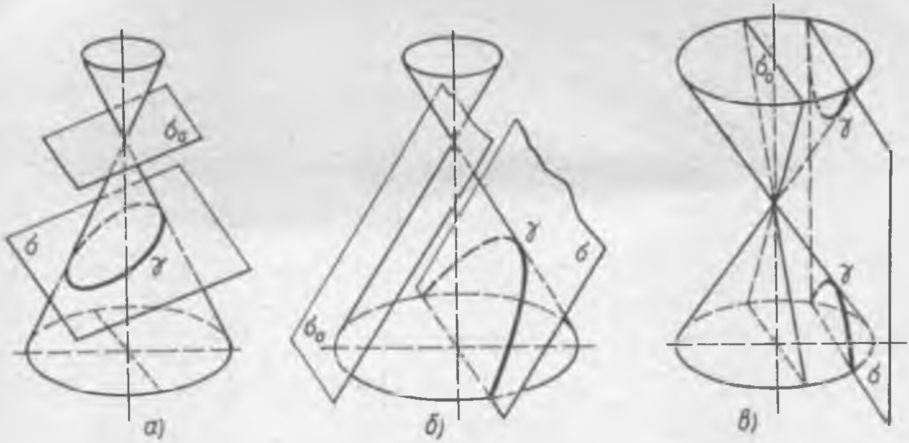


Рис. 180

радиуса r с центром в начале координат, а если $h=0$ — начало координат (рис. 179). Таким образом, любая плоскость, параллельная плоскости Oxy, пересекает круговой конус (4) по окружности.

2) Плоскость сечения σ_0 проходит через вершину конуса и образует с плоскостью Oxy угол α, где $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Из наглядно геометрических соображений ясно, что возможны три случая: а) если $\alpha<\alpha_0$, то плоскость σ_0, кроме вершины, не имеет других общих точек с круговым конусом (плоскость σ_0 на рис. 180, *а*); б) если $\alpha=\alpha_0$, то плоскость σ_0 и круговой конус имеют одну и только одну общую образующую. В этом случае говорят, что плоскость σ_0 касается конуса по образующей (плоскость σ_0 на рис. 180, *б*); если $\alpha>\alpha_0$, то плоскость σ_0 и круговой конус имеют две общие образующие (плоскость σ_0 на рис. 180, *в*).

Итак, плоскость σ_0, проходящая через вершину конуса, либо не имеет ни одной общей точки с круговым конусом, кроме вершины, либо касается конуса, либо пересекает конус по двум образующим.

3) Плоскость сечения σ не проходит через вершину конуса и образует с плоскостью Oxy угол α, где $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Можно доказать, что в этом случае кривая γ пересечения плоскости σ с круговым конусом есть эллипс, парабола или гипербола (рис. 180, *а, б* и *в*).

Для доказательства этого утверждения впишем в конус сферу так, чтобы она касалась плоскости σ. Пусть F — точка касания сферы с плоскостью σ, σ' — плоскость, в которой лежит окружность касания сферы с конусом (рис. 181, *а*), а d — прямая, по которой пересекаются плоскости σ и σ'. Так как плоскости σ' и Oxy параллельны, то угол между плоскостями σ и σ' равен α.

Возьмем на кривой γ произвольную точку M и обозначим через M' точку пересечения образующей OM с плоскостью σ'. Пусть N — основание перпендикуляра, проведенного из точки M к прямой d, а H — основание перпендикуляра, проведенного из точки M к плоскости σ' (см. рис. 181, *б*). Очевидно, $\angle MNH=\alpha$, $\angle MM'H=$

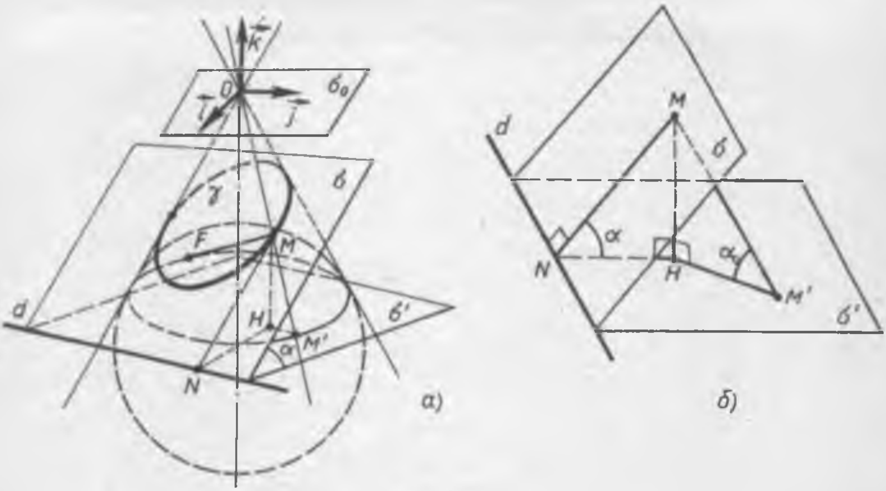


Рис. 181

$=\alpha_0$, поэтому $\frac{MH}{MM'}=\sin\alpha_0$, $\frac{MH}{MN}=\sin\alpha$. Отсюда получаем: $\frac{MM'}{MN}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$. Но отрезки MF и MM' равны (см. рис. 181, *а*) как отрезки касательных к одной сфере из точки M. Таким образом, $\frac{MF}{MN}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$.

Итак, доказано, что отношение расстояния от каждой точки M кривой γ до точки F к расстоянию от нее до прямой d равно $\varepsilon=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0}$, т. е. постоянно и не зависит от выбора точки M на кривой γ. Можно доказать и обратное утверждение: каждая точка плоскости σ, обладающая этим свойством, лежит на кривой γ. Предлагаем читателю доказать это утверждение самостоятельно.

Из теоремы § 30 и определения параболы заключаем, что если $\varepsilon<1$, то γ — эллипс, если $\varepsilon=1$ — парабола, а если $\varepsilon>1$ — гипербола. При этом точка F и прямая d — соответствующие фокус и директриса кривой, а ε — эксцентриситет.

Выясним геометрический смысл каждого из этих случаев в зависимости от взаимного расположения плоскости σ и кругового конуса. Для этого приведем плоскость σ_0, проходящую через вершину O конуса и параллельную плоскости σ. В соответствии с вышеизложенным (см. случай 2) возможны три случая.

а) Плоскость σ_0, кроме вершины, не имеет общих точек с круговым конусом. В этом случае $\alpha<\alpha_0$, поэтому $\sin\alpha<\sin\alpha_0$, т. е. $\varepsilon<1$, и, следовательно, γ — эллипс (рис. 180, *а*).

б) Плоскость σ_0 касается кругового конуса по образующей. В этом случае $\alpha=\alpha_0$, поэтому $\sin\alpha=\sin\alpha_0$, $\varepsilon=1$, и, следовательно, линия γ — парабола (рис. 180, *б*).

в) Плоскость σ_0 пересекается с круговым конусом по двум образующим. В этом случае $\sin\alpha>\sin\alpha_0$, $\varepsilon>1$, и, следовательно, γ — гипербола (рис. 180, *в*).

Коническим сечением называется линия, по которой пересекается круговой конус с произвольной плоскостью, не проходящей через его вершину. Таким образом, коническими сечениями являются эллипс, гипербола и парабола.

§ 78. Эллипсоид

1. *Эллипсоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллипсоида. Положительные числа a, b, c называются *полуосями эллипсоида.*

Если $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, то эллипсоид называется *трехосным*. Так как в уравнении (1) x, y, z входят только в четных степенях, то эллипсоид, заданный уравнением (1), симметричен относительно координатных плоскостей, начала координат и осей координат. Центр симметрии эллипсоида называется его *центром*, а оси симметрии — его *осями*. Каждая из осей пересекает эллипсоид в двух точках, которые называются его *вершинами*. У трехосного эллипсоида шесть вершин: $A_1(a,\ 0,\ 0)$, $A_2(-a,\ 0,\ 0)$, $B_1(0,\ b,\ 0)$, $B_2(0,\ -b,\ 0)$, $C_1(0,\ 0,\ c)$, $C_2(0,\ 0,\ -c)$.

Найдем промежутки изменения координат точек эллипсоида. Из уравнения (1) следует, что $\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1$, $\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1$ и $\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. Поэтому $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$, $-c\leqslant z\leqslant c$.

Отсюда следует, что все точки эллипсоида (за исключением его вершин) лежат внутри прямоугольного параллелепипеда с измерениями $2a$, $2b$, $2c$, грани которого параллельны координатным плоскостям и вершины эллипсоида служат центрами симметрии этих граней (рис. 182).

2. Изучим форму эллипсоида методом сечений (теорема из § 74). Если эллипсоид, заданный уравнением (1) в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, пересечь плоскостью $z=h$, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}. \qquad (2)$$

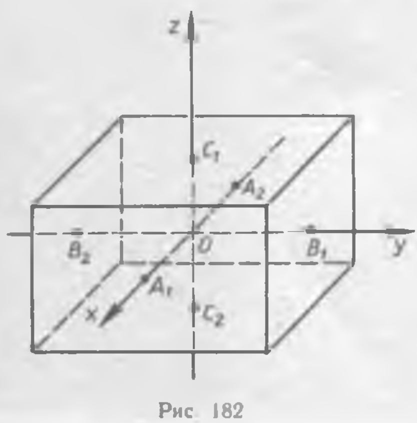


Рис. 182

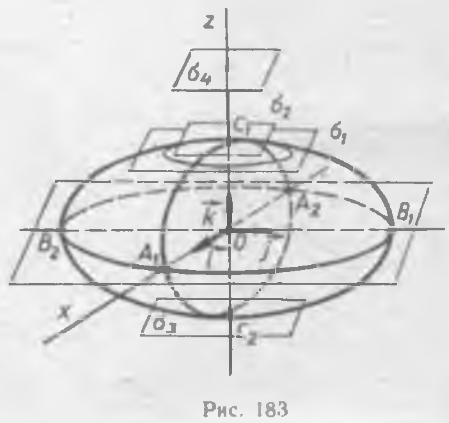


Рис. 183

Возможны следующие три случая.

1) $|h|<c$. В этом случае в сечении мы получим эллипс, центр которого лежит на оси Oz (плоскость σ_1 на рис. 183). В самом деле, проекция сечения на плоскость Oxy имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1.$$

Это уравнение определяет эллипс с полуосями $a^*=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b^*=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. При уменьшении $|h|$ полуоси a^*, b^* возрастают, и при $|h|=0$ имеем: $a^*=a$, $b^*=b$. Следовательно, плоскость Oxy пересекает эллипсоид (1) по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2) $|h|=c$. Уравнение (2) принимает вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Кривая на плоскости Oxy представляет собой две мнимые прямые, пересекающиеся в вещественной точке (0, 0). Плоскость $z=h$ имеет с эллипсоидом лишь одну общую точку — вершину эллипсоида (плоскости σ_2 и σ_3 на рис. 183).

3) $|h|>c$. Уравнение (2) есть уравнение мнимого эллипса. Плоскость $z=h$ не имеет с эллипсоидом общих точек (плоскость σ_4 на рис. 183).

Аналогично можно показать, что сечение эллипсоида (1) плоскостью $x=h$ или $y=h$ является эллипсом, вершиной эллипсоида или пустым множеством.

Мы получили достаточно полное представление о форме эллипсоида. Поверхность изображена на рисунке 183.

3. Если две полуоси эллипсоида равны, например $a=b$, то он называется *эллипсоидом вращения* и имеет каноническое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3}$$

Пользуясь результатами § 75, заключаем, что поверхность, определяемая уравнением (3), действительно образована вращением эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

лежащего в плоскости Oxz (или вращением одной из его половин, симметричных относительно Oz) вокруг оси Oz.

Если все три оси эллипсоида равны: $a=b=c$, то он представляет собой сферу: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Следовательно, сфера есть частный случай эллипсоида.

Докажем, что *любой трехосный эллипсоид можно получить из некоторого эллипсоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения* (§ 72, п. 1). В самом деле, пусть данный трехосный эллипсоид F в прямоугольной системе координат

$Oijk$ имеет уравнение (1). Рассмотрим эллипсоид вращения G, который в этой же системе координат задан уравнением (3), и применим к поверхности G сжатие пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$. Аналитическое выражение этого сжатия запишется так (см. формулы (3) из § 72):

$$x'=x,\ y'=\frac{b}{a}y,\ z'=z. \qquad (4)$$

При этом сжатии эллипсоид вращения G, заданный уравнением (3), перейдет в новую поверхность G', которая в системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ определяется уравнением

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1. \qquad (5)$$

Это уравнение получается из уравнения (3), если в нем заменить x, y, z их выражениями по формулам (4). Сравнивая уравнения (5) и (1), мы заключаем, что G' совпадает с эллипсоидом F.

Теперь докажем, что любой эллипсоид вращения в свою очередь получается из некоторой сферы с помощью сжатия к плоскости, проходящей через центр сферы. В самом деле, пусть данный эллипсоид вращения G в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ имеет уравнение (3). Рассмотрим сферу S, которая в той же системе координат задана уравнением $x^2+y^2+z^2=a^2$. Применим к этой сфере сжатие пространства к плоскости Oxy с коэффициентом $k=\frac{c}{a}$: $x'=x$, $y'=y$, $z'=\frac{c}{a}z$ (см. формулы (2) из § 72). Проведя рассуждения, аналогичные проделанным выше, получим, что сфера S переходит в поверхность S', которая в системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ определяется уравнением (3). Таким образом, поверхность S' совпадает с эллипсоидом вращения G.

Учитывая вышесказанное, мы приходим к выводу, что любой трехосный эллипсоид (1) можно получить из некоторой сферы с помощью последовательного сжатия к двум взаимно перпендикулярным плоскостям симметрии этой сферы.

§ 79. Гиперболоиды

Различают однополостные и двуполостные гиперболоиды.

1. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* однополостного гиперболоида.

Так как в уравнении (1) x, y и z входят в четных степенях, то поверхность симметрична относительно плоскостей координат, осей координат (оси поверхности) и начала координат (центр поверхности). Две оси Ox и Oy пересекают поверхность в точках $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$ и $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$. Эти оси называются *действительными осями* однополостного гиперболоида, а указанные точки — его вершинами. Третья ось симметрии (ось Oz) не имеет общих точек с однополостным гиперболоидом и называется его *мнимой осью*. Положительные числа a, b, c называются *полуосями однополостного гиперболоида*.

2. Исследуем вопрос о пересечении однополостного гиперболоида с прямыми, проходящими через его центр. Всякая такая прямая может быть определена точкой $O(0, 0, 0)$ и некоторым направляющим вектором $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и, значит, имеет параметрические уравнения:

$$x=p_1t,\ y=p_2t,\ z=p_3t. \tag{2}$$

Найдем значения параметра t для точек пересечения этой прямой с однополостным гиперболоидом (1). Для этого надо выражения для x, y, z по формулам (2) подставить в уравнение (1). Получим уравнение

$$Pt^2-1=0, \tag{3}$$

где

$$P=\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}-\frac{p_3^2}{c^2}.$$

Возможны три случая.

1) $P>0$. В этом случае уравнение (3) имеет два действительных корня: $t_1=\frac{1}{\sqrt{P}}$, $t_2=-\frac{1}{\sqrt{P}}$, и, значит, прямая пересекает однополостный гиперболоид в двух точках, которые симметричны относительно центра поверхности.

2) $P=0$. Уравнение (3) не имеет решений, поэтому прямая (2) не пересекает поверхности. Такая прямая называется *асимптотой* поверхности (1) (она проходит через центр поверхности и не имеет с ней общих точек).

3) $P<0$. Уравнение (3) имеет мнимые комплексно-сопряженные корни, поэтому прямая (2) не пересекает поверхность (1) (говорят, что прямая (2) пересекает поверхность (1) в комплексно-сопряженных точках).

Возникает вопрос: как расположены все асимптоты поверхности (1)? Каждая асимптота проходит через центр поверхности, а ее направляющий вектор $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ удовлетворяет условию:

$$\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}-\frac{p_3^2}{c^2}=0.$$

Точка $M(x, y, z)$ принадлежит асимптоте тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{OM}(x, y, z)$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ асимптоты, т. е. когда существует такое t, что $x=tp_1$, $y=tp_2$, $z=tp_3$. Найдем отсюда значения p_1, p_2, p_3 и подставим в предыдущее равенство:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (4)$$

Как известно (см. § 77), это уравнение определяет коническую поверхность, которая называется *асимптотическим конусом однополостного гиперболоида* (1). Вершиной этого конуса служит центр поверхности (1).

Можно доказать, что если прямая OM, где O — вершина асимптотического конуса, проходит внутри этого конуса, то для этой прямой $P<0$, поэтому согласно предыдущему выводу она не имеет с поверхностью (1) общих точек. Если же прямая ON проходит вне конуса, то $P>0$, поэтому она пересекает поверхность (1) в двух и только в двух точках, симметричных относительно точки O.

3. Пусть однополостный гиперболоид в прямоугольной системе координат $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ определяется уравнением (1). Изучим форму поверхности методом сечений. Если поверхность пересечь плоскостью $z=h$, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\bar{i}\bar{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}. \qquad (5)$$

Это уравнение определяет эллипс с полуосями $a^*=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$, $b^*=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$. При $h=0$ получим эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (сечение поверхности (1) плоскостью Oxy), который называется *горловым* эллипсом однополостного гиперболоида.

При неограниченном возрастании $|h|$ полуоси a^*, b^* эллипса (5) неограниченно возрастают, а следовательно, неограниченно возрастают и полуоси эллипса, полученного в сечении поверхности (1) плоскостью $z=h$. Уравнения этого эллипса (равного эллипсу (5)), имеют вид:

$$\frac{x^2}{(a^*)^2}+\frac{y^2}{(b^*)^2}=1,\ z=h.$$

Если поверхность (1) пересечь плоскостью $x=h$, то проекция этого сечения на плоскость Oyz в системе координат $O\bar{j}\bar{k}$ имеет уравнение

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}. \qquad (6)$$

Здесь рассмотрим три случая.

1) $|h|<a$. В этом случае $1-\frac{h^2}{a^2}>0$, уравнение (6) определяет гиперболу с мнимой осью Oz. В сечении получим равную ей гиперболу с мнимой осью, параллельной оси Oz.

2) $|h|=a$. Уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Это уравнение определяет пару прямых, пересекающихся в начале координат. Поэтому каждая из плоскостей $x=a$, $x=-a$ пересекает поверхность (1) по паре прямых, пересекающихся на оси Ox.

3) $|h|>a$. В этом случае $1-\frac{h^2}{a^2}<0$, уравнение (6) определяет гиперболу с мнимой осью Oy. В сечении имеем равную ей гиперболу с мнимой осью, параллельной оси Oy.

Аналогичный результат мы получим и при пересечении поверхности (1) плоскостью $y=h$.

Однополостный гиперболоид изображен на рисунке 184.

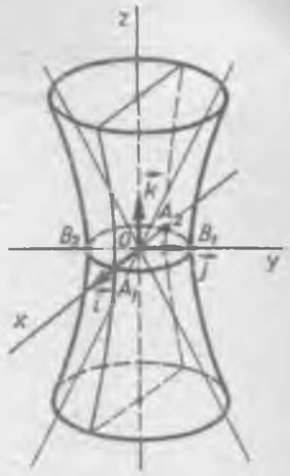


Рис. 184

4. Если в уравнении (1) $a=b$, то получим уравнение поверхности в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (7)$$

которая называется *однополостным гиперболоидом вращения.* Как легко видеть, эта поверхность образована вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8)$$

вокруг оси Oz (вокруг мнимой оси гиперболы). Асимптотический конус поверхности (7) определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Это есть конус вращения, образованный вращением асимптот гиперболы (8) (т. е. прямой $x=\frac{a}{c}z$ или прямой $x=-\frac{a}{c}z$) вокруг оси Oz.

Докажем, что *любой однополостный гиперболоид можно получить из некоторого однополостного гиперболоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения.*

В самом деле, пусть данный однополостный гиперболоид F в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ имеет уравнение (1). Рассмотрим однополостный гиперболоид вращения G, который в той же системе координат задан уравнением (7), и применим к поверхности G сжатие пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$: $x'=x$, $y'=\frac{b}{a}y$, $z'=z$ (см. формулу (3) из § 72).

При этом сжатии, как нетрудно убедиться, поверхность G переходит в поверхность G', которая в системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ определяется уравнением (1). Таким образом, поверхность G' совпадает с данным однополостным гиперболоидом F.

5. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{9}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением двуполостного гиперболоида.*

Из уравнения (9) следует, что поверхность симметрична относительно плоскостей координат, осей координат (оси поверхности) и начала координат (центр поверхности). Ось Oz пересекает поверхность в двух точках $C_1(0,\ 0,\ c)$ и $C_2\ (0,\ 0,\ -c)$, называемых *вершинами двуполостного гиперболоида;* сама эта прямая называется *вещественной осью.* Оси симметрии Ox и Oy не имеют с поверхностью (9) общих точек и называются *мнимыми осями* этой поверхности. Положительные числа a, b, c называются *полуосями* двуполостного гиперболоида.

Исследование вопроса о пересечении поверхности (9) с прямыми, проходящими через ее центр, в точности совпадает с исследованием этого вопроса, проведенным выше для однополостного гиперболоида. Здесь получим, что множество асимптот поверхности (9) образует конус (4) с вершиной в центре поверхности — *асимптотический конус* этой поверхности.

Если поверхность, заданную в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ уравнением (9), пересечь плоскостью $z=h$, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1. \tag{10}$$

При $|h|>c$ это уравнение определяет эллипс, поэтому сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $z=h$, где $|h|>c$, представляют собой эллипсы. При $h=c$ или $h=-c$ уравнение (10) определяет пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке, поэтому каждая из плоскостей: $z=c$ и $z=-c$ имеет только одну общую точку с поверхностью — вершину поверхности. При $|h|<c$ уравнение (10) определяет мнимый эллипс, поэтому плоскости $z=h$, где $|h|<c$, не имеют общих точек с двуполостным гиперболоидом.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что сечения поверхности (9) плоскостями $x=h$ или $y=h$ — гиперболы.

Двуполостный гиперболоид изображен на рисунке 185.

6. Если в уравнении (9) $a=b$, то получим уравнение поверхности:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, \tag{11}$$

которая называется *двуполостным гиперболоидом вращения.* Заметим, что эта поверхность образована вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ вокруг оси Oz (вокруг действительной оси этой гиперболы).

Аналогично предыдущему (см. п. 4) можно убедиться в том, что при сжатии пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$ поверхность (11) переходит в поверхность (9).

Следовательно, ***любой двуполостный гиперболоид можно получить из некоторого двуполостного гиперболоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения.***

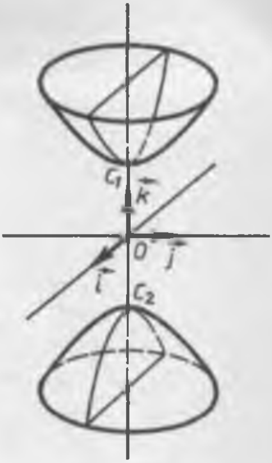


Рис. 185

§ 80. Параболоиды

Различают эллиптические и гиперболические параболоиды.

1. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{1}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* эллиптического параболоида.

Так как x и y входят в уравнение (1) в четных степенях, то эллиптический параболоид симметричен относительно плоскостей Oxz, Oyz и относительно оси Oz *(ось поверхности)*. Эта поверхность не симметрична относительно плоскости Oxy, относительно осей Ox, Oy и начала координат.

Точка пересечения эллиптического параболоида с его осью называется *вершиной.* Если поверхность задана каноническим уравнением (1), то начало координат выбрано в вершине поверхности.

Из уравнения (1) заключаем, что для всех точек эллиптического параболоида выполняется соотношение $z\geqslant 0$, причем $z=0$ выполняется только для вершины. Следовательно, все точки эллиптического параболоида (1), кроме его вершины, расположены по одну сторону от плоскости Oxy.

2. Изучим форму эллиптического параболоида методом сечений. Если поверхность, заданную в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}\vec{k}$ уравнением (1), пересечь плоскостью $z=h$, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\,\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h. \tag{2}$$

Здесь возможны три случая.

1) $h>0$. Линия (2) (а значит, и равная ей линия, полученная в сечении) является эллипсом с полуосями $a^*=a\sqrt{2h}$, $b^*=b\sqrt{2h}$. Эти полуоси неограниченно возрастают при неограниченном возрастании h.

2) $h=0$. Линия (2) — пара мнимых прямых, пересекающихся в начале координат. Значит, плоскость $z=0$ имеет с поверхностью лишь одну общую действительную точку.

3) $h<0$. Уравнение (2) определяет мнимый эллипс. Значит, плоскость $z=h<0$ не пересекает поверхность.

Если данную поверхность пересечь плоскостью $y=h$, то в сечении получим параболу, проекция которой на плоскость Oxz имеет уравнение $x^2=2a^2z-\frac{a^2}{b^2}h^2$. Следовательно, все эти параболы при изменении h равны между собой и равны параболе $x^2=2a^2z$, полученной в сечении поверхности (1) координатной плоскостью Oxz.

Аналогично убеждаемся, что в сечении поверхности (1) плоскостью $x=h$ получим параболу. Все такие параболы равны параболе $y^2=2b^2z$, которая получается в сечении поверхности плоскостью Oyz.

3. Если в уравнении (1) $a=b$, то получим уравнение поверхности в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z, \tag{3}$$

которая называется *параболоидом вращения*. Нетрудно заметить, что эта поверхность получена вращением параболы $x^2=2a^2z$ вокруг ее оси (оси Oz).

Пусть дан параболоид вращения своим каноническим уравнением (3). При сжатии пространства к плоскости Oxz с коэффициентом сжатия $k=\frac{b}{a}$ поверхность (3) переходит в поверхность (1). Следовательно, *любой эллиптический параболоид можно получить из параболоида вращения с помощью сжатия к плоскости, проходящей через ось вращения.*

Эллиптический параболоид изображен на рисунке 186.

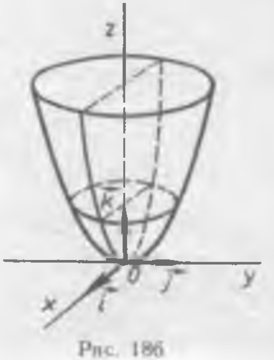


Рис. 186

4. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{4}$$

Это уравнение называется *каноническим уравнением* гиперболического параболоида.

Как и в случае эллиптического параболоида, гиперболический параболоид (4) симметричен относительно плоскостей Oxz, Oyz и относительно оси Oz *(ось поверхности)*. Эта поверхность не симметрична относительно плоскости Oxy, осей Ox, Oy и начала координат.

Точка пересечения гиперболического параболоида с его осью называется *вершиной*. Если поверхность задана каноническим уравнением (4), то начало координат выбрано в вершине этой поверхности.

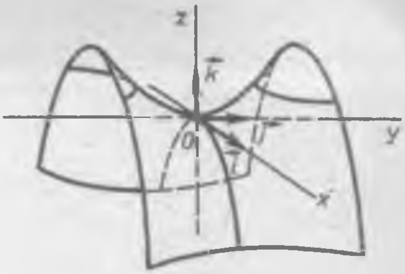


Рис. 187

5. Изучим форму гиперболического параболоида методом сечений. Если поверхность, заданную в прямоугольной системе координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ уравнением (4), пересечь плоскостью $z=h$, то проекция сечения на плоскость Oxy в системе координат $O\vec{i}\vec{j}$ имеет уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2h. \tag{5}$$

Возможны три случая.

1) $h>0$. Линия (5) является гиперболой с вещественной осью Ox. Следовательно, и равная ей линия пересечения поверхности (4) с плоскостью $z=h$, $h>0$, является гиперболой, вещественная ось которой параллельна оси Ox.

2) $h=0$. Плоскость $z=0$ (плоскость Oxy) пересекает поверхность (4) по паре прямых:

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,$$

пересекающихся в вершине поверхности.

3) $h<0$. Как и в случае 1), находим, что сечением поверхности (4) плоскостью $z=h$ является гипербола, но здесь действительная ось гиперболы параллельна оси Oy.

Если поверхность (4) пересечь плоскостью $y=h$, то в сечении получим параболу $x^2=2a^2z+\frac{a^2}{b^2}h^2$. Следовательно, все эти параболы при изменении h равны между собой и равны параболе $x^2=2a^2z$, полученной в сечении поверхности (4) координатной плоскостью Oxz. Оси этих парабол имеют положительное направление, определяемое вектором $\vec{k}$.

Аналогично убеждаемся, что в сечении поверхности (4) плоскостью $x=h$ получаем параболу. Все такие параболы при изменении h равны параболе $y^2=-2b^2z$, которая получается в сечении поверхности плоскостью Oyz. Оси этих парабол имеют положительное направление, определяемое вектором $-\vec{k}$.

Гиперболический параболоид изображен на рисунке 187.

§ 81. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка

1. Прямая, лежащая на поверхности, называется *прямолинейной образующей* этой поверхности. Следовательно, образующие цилиндрической и конической поверхностей являются их прямолинейными образующими.

Рассмотрим вопрос о прямолинейных образующих поверхностей, изученных в § 78—80.

Так как все точки эллипсоида не выходят за границы некоторого параллелепипеда, а на каждой прямой есть точки, не принадлежащие этому параллелепипеду, то *эллипсоид не имеет прямолинейных образующих.*

Рассмотрим теперь двуполостный гиперболоид, заданный уравнением (9) из § 79. В п. 5 § 79 мы выяснили, что сечение поверхности плоскостью $z=h$ при любом h не содержит прямых линий. Поэтому гиперболический параболоид не имеет прямолинейных образующих, параллельных плоскости Oxy или лежащих в этой плоскости. Если прямая не параллельна плоскости Oxy и не лежит в ней, то такая прямая пересекает эту плоскость в некоторой точке, которая не лежит на поверхности, так как плоскость Oxy не имеет общих точек с поверхностью. Следовательно, на нашей прямой есть точки, не принадлежащие поверхности, и поэтому такая прямая не может быть прямолинейной образующей двуполостного гиперболоида. Итак, *двуполостный гиперболоид не имеет прямолинейных образующих.* Аналогично можно убедиться в том, что *эллиптический параболоид также не имеет прямолинейных образующих.*

Остается рассмотреть вопрос о прямолинейных образующих однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.

2. Уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

представим в виде

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \tag{2}$$

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\begin{cases} k_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=l_1\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ l_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=k_1\left(1-\frac{y}{b}\right); \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} k_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=l_2\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ l_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=k_2\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{4}$$

где k_1, l_1 — какие-либо действительные числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля; этому же условию удовлетворяют и числа k_2, l_2.

Нетрудно подсчитать, что в каждой из систем уравнений (3), (4) ранг матрицы, составленной из коэффициентов при x, y, z, равен двум. Значит, каждая из этих систем определяет прямую линию.

Если обе части каждого из уравнений системы (3) умножить на какое-либо число, отличное от нуля, то мы получим новую систему, которая, очевидно определяет ту же прямую. Значит, чтобы написать уравнение прямой, определяемой системой (3), надо знать лишь отношение $k_1:l_1$. Это можно сказать и о прямой (4), которая определяется отношением $k_2:l_2$.

Если координаты точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ удовлетворяют системе уравнений (3) или (4), то они удовлетворяют и уравнению (2). Отсюда следует, что каждая прямая, определяемая системой уравнений (3), как и каждая прямая, определяемая системой уравнений (4), лежит на данной поверхности (1), т. е. является ее прямолинейной образующей.

Прямые, определяемые системой (3) при всевозможных значениях k_1, l_1, не равных нулю одновременно, образуют *одно семейство прямолинейных образующих* однополостного гиперболоида (1), а прямые, определяемые системой (4), при аналогичном условии для k_2, l_2 образуют *другое семейство прямолинейных образующих* этой поверхности.

Отметим основные свойства прямолинейных образующих однополостного гиперболоида (без доказательства).

1) Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две и только две прямолинейные образующие. Одна из них принадлежит семейству (3), а другая — семейству (4).

2) Любые две прямолинейные образующие одного семейства скрещиваются.

3) Любые две прямолинейные образующие из разных семейств лежат в одной плоскости.

Однополостный гиперболоид с двумя семействами прямолинейных образующих изображен на рисунке 188.

Пример. Найти прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1, \qquad (5)$$

проходящие через его точку M_0 (6; 2; 8).

Рис. 188

Решение. Запишем уравнения (3) для однополостного гиперболоида, заданного уравнением (5):

$$k_1\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{4}\right)=l_1\left(1+\frac{y}{2}\right),$$

$$l_1\left(\frac{x}{3}-\frac{z}{4}\right)=k_1\left(1-\frac{y}{2}\right). \qquad (6)$$

Подставив сюда значения $x=6$, $y=2$, $z=8$, получим: $2k_1=l_1$. Этому равенству удовлетворяют, например, числа $k_1=1$, $l_1=2$. Подставив эти значения в систему (6), приведем эту систему к виду:

$$\begin{cases} 4x-12y+3z-24=0, \\ 4x+3y-3z-6=0. \end{cases}$$

Эти уравнения определяют прямолинейную образующую одного семейства, проходящую через данную точку M_0 поверхности (5).

Проделав то же самое с системой уравнений (4), найдем уравнения

$$\begin{cases} 4x-3z=0, \\ y-2=0 \end{cases}$$

прямолинейной образующей другого семейства, проходящей через точку M_0 поверхности (5).

3. Известный инженер Владимир Григорьевич Шухов (1853—1939) предложил устройство башен, мачт и опор, составленных из балок, расположенных по прямолинейным образующим однополостного гиперболоида вращения. Эти конструкции В. Г. Шухова оказались очень прочными и легкими. Они часто используются при строительстве водонапорных башен, высотных радиомачт, телевизионных мачт и т. д.

4. Уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \tag{7}$$

представим в виде $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z$.

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\begin{cases} k_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=l_1z, \\ l_1\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2k_1; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} k_2\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=l_2z, \\ l_2\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2k_2, \end{cases} \tag{9}$$

где k_1, l_1— действительные числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля; этому же условию удовлетворяют и числа k_2, l_2.

Точно так же, как и в п. 2, можно показать, что при всевозможных значениях параметров k_1, l_1, не равных нулю одновременно, и параметров k_2, l_2, также не равных нулю одновременно, уравнения (8) определяют одно семейство прямолинейных образующих поверхности (7), а уравнения (9) — другое семейство.

Прямолинейные образующие гиперболического параболоида обладают теми же свойствами 1), 2), 3), что и образующие однополостного гиперболоида (см. п. 2), и еще одним свойством: все прямолинейные образующие семейства (8) параллельны плоскости $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, а все прямолинейные образующие семейства (9) параллельны плоскости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. Это свойство предоставляем доказать читателю самостоятельно.

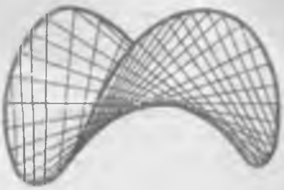


Рис. 189

Гиперболический параболоид с двумя семействами прямолинейных образующих изображен на рисунке 189.

§ 82. Приложение к решению задач школьного курса геометрии

В школьном курсе геометрии из поверхностей второго порядка изучаются сфера, прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус. Рассмотрим примеры задач, в которых встречаются эти поверхности.

1. Рассмотрим сначала примеры задач, в которых встречается сфера.

Задача 1. Даны сфера с центром в точке O и радиусом r и точка A. Через точку A проведена прямая d, которая пересекает данную сферу в точках M_1 и M_2. Доказать, что скалярное произведение $\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AM_2}$ не зависит от выбора секущей d.

Решение. Выберем прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ так, чтобы начало координат совпало с центром данной сферы, а векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{i}$ были сонаправлены. В этой системе координат данная сфера имеет уравнение $x^2+y^2+z^2=r^2$, а точка A — координаты $(a, 0, 0)$, где $a=OA$.

Зададим прямую d единичным направляющим вектором $\vec{p}\,(p_1, p_2, p_3)$ и точкой $A\,(a, 0, 0)$ и запишем ее параметрические уравнения:

$$x=a+p_1t,\ y=p_2t,\ z=p_3t. \tag{1}$$

Чтобы найти параметры t_1 и t_2 точек M_1 и M_2, надо подставить в уравнение сферы выражения x, y, z по формулам (1) и решить полученное уравнение относительно t: $(a+p_1t)^2+(p_2t)^2+(p_3t)^2=r^2$. Учитывая, что $\vec{p}$ — единичный вектор, т. е. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=1$, находим:

$$t^2+2ap_1t+(a^2-r^2)=0. \tag{2}$$

Таким образом, точки M_1 и M_2 имеют координаты;

$$M_1\,(a+p_1t_1,\ p_2t_1,\ p_3t_1),\ M_2\,(a+p_1t_2,\ p_2t_2,\ p_3t_2),$$

где t_1 и t_2 — корни уравнения (2).

Так как $\overrightarrow{AM_1}\,(p_1t_1, p_2t_1, p_3t_1)$, $\overrightarrow{AM_2}\,(p_1t_2, p_2t_2, p_3t_2)$, то $\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AM_2}=(p_1^2+p_2^2+p_3^2)\,t_1\cdot t_2=t_1t_2$. Из уравнения (2) по теореме Виета находим: $t_1t_2=a^2-r^2$. Но $a=OA$, поэтому

$$\overrightarrow{AM_1}\cdot\overrightarrow{AM_2}=OA^2-r^2. \tag{3}$$

Мы доказали, что скалярное произведение $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ действительно не зависит от выбора секущей d. Заметим, что формула (3) остается верной и тогда, когда точка A совпадает с точкой O (и значит, $OA=0$), а также когда она совпадает с одной из точек M_1 или M_2 (и значит, $OA=r$).

Скалярное произведение $\overrightarrow{AM_1} \cdot \overrightarrow{AM_2}$ называется *степенью точки A относительно данной сферы*. Из формулы (3) следует, что степень точки A является положительной или отрицательной в зависимости от того, лежит ли точка A вне или внутри сферы; степень точки, лежащей на сфере, равна нулю.

Задача 2. Доказать, что множество F всех точек пространства, каждая из которых имеет равные степени относительно двух данных неконцентрических сфер, есть плоскость, перпендикулярная линии центров этих сфер.

Решение. Пусть O_1, r_1 и O_2, r_2 — соответственно центры и радиусы данных сфер. По формуле (3) точка M принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда $O_1M^2-r_1^2=O_2M^2-r_2^2$, т. е.

$$O_1M^2-O_2M^2=r_1^2-r_2^2. \tag{4}$$

Таким образом, F есть множество всех точек пространства, разность квадратов расстояний от каждой из которых до точек O_1 и O_2 равна $r_1^2-r_2^2$. Это множество является плоскостью, перпендикулярной прямой O_1O_2 (см. § 67, задача 5).

2. Плоскость F, о которой идет речь в задаче 2, называется *радикальной плоскостью* данных сфер. Для построения радикальной плоскости достаточно построить одну из ее точек M_0 и через нее провести плоскость, перпендикулярную линии центров данных сфер. Если сферы имеют общие точки, то в качестве точки M_0 можно взять любую из этих точек. Действительно, если M_0 — общая точка двух сфер, то степень ее относительно каждой из этих сфер равна нулю, поэтому M_0 — точка радикальной плоскости этих сфер. Если данные сферы не имеют общих точек, то ясно, что их радикальная плоскость не имеет общих точек ни с одной из этих сфер.

Иногда удобно рассматривать точку как сферу нулевого радиуса. Степенью точки A относительно такой сферы с центром в точке M в соответствии с формулой (3) считается число AM^2 (так как $r=0$). Утверждение, сформулированное в задаче 2, верно и в том случае, когда одна из данных сфер или даже обе сферы имеют нулевые радиусы.

Замечание. Две концентрические сферы не имеют радикальной плоскости, так как равенство (4) невозможно, если точки O_1 и O_2 совпадают, и $r_1 \neq r_2$.

3. Рассмотрим задачи, в которых встречаются другие поверхности второго порядка.

Задача 3. Доказать, что прямая, имеющая с прямым круговым цилиндром более двух общих точек, является прямолинейной образующей этого цилиндра.

Р е ш е н и е. Рассмотрим каноническое уравнение данного цилиндра:

$$x^2+y^2=a^2. \tag{5}$$

Пусть прямая d, заданная параметрическими уравнениями

$$x=x_0+p_1t,\ y=y_0+p_2t,\ z=z_0+p_3t, \tag{6}$$

имеет с данным цилиндром более чем две общие точки. Докажем, что d — прямолинейная образующая этого цилиндра.

Чтобы получить те значения t, для которых точка M прямой d лежит и на данном цилиндре, надо выражения x, y, z по формулам (6) подставить в уравнение (5):

$$(p_1^2+p_2^2)\,t^2+2\,(x_0p_1+y_0p_2)\,t+(x_0^2+y_0^2-a^2)=0.$$

Это квадратное уравнение должно иметь более двух корней (так как прямая d пересекает цилиндр (5) более чем в двух точках). Следовательно, его коэффициенты и свободный член равны нулю. Из $p_1^2+p_2^2=0$ заключаем, что $p_1=p_2=0$ и потому прямая d параллельна оси Oz или совпадает с ней. Из равенства $x_0^2+y_0^2-a^2=0$ следует, что точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ прямой d лежит на поверхности (5). Но прямая, проходящая через точку циллиндрической поверхности параллельно ее оси, и есть прямолинейная образующая этой поверхности.

З а д а ч а 4. Найти фигуру F, образованную всеми точками, отношение расстояний каждой из которых от данной точки O и от данной плоскости σ, проходящей через эту точку, постоянно и равно данному положительному числу a.

Р е ш е н и е. Выберем систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ так, чтобы данная плоскость σ совпала с координатной плоскостью $O\vec{i}\vec{j}$. Если $M(x,\ y,\ z)\in F$, то x, y, z удовлетворяют условию:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{|z|}=a. \tag{7}$$

Отсюда

$$x^2+y^2-(a^2-1)\,z^2=0. \tag{8}$$

Обратно, если координаты точки $M(x,\ y,\ z)$ удовлетворяют уравнению (8) и $z\neq 0$, то ее координаты удовлетворяют уравнению (7). Таким образом, искомая фигура определяется уравнением (8), причем $z\neq 0$. Если $a>0$, то F — круговой конус без вершины; при $a=1$ фигура F — ось Oz без точки O; если же $a<1$, то F — пустое множество.

4. Поверхности, изученные в этой главе, часто встречаются при отыскании множества точек в пространстве. Рассмотрим пример.

З а д а ч а 5. Найти множество S всех точек пространства, расстояние каждой из которых до данной точки A равно расстоянию до данной плоскости σ, не проходящей через точку A.

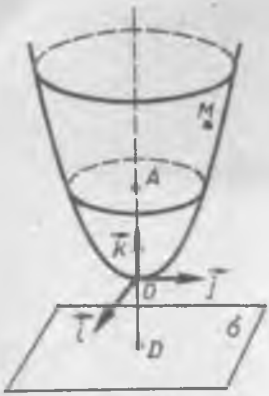


Рис. 190

Решение. Пусть AD — перпендикуляр, проведенный из точки A к плоскости σ. Выберем прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$ так, чтобы точка O была серединой отрезка AD и $\overrightarrow{OA}\uparrow\uparrow\vec{k}$ (рис. 190). В этой системе координат точка A имеет координаты $\left(0, 0, \frac{p}{2}\right)$, где $p=AD$, а плоскость σ — уравнение $z+\frac{p}{2}=0$. Если точка $M(x, y, z)$ принадлежит множеству S, то $MA=\rho(M, \sigma)$. Но

$$MA=\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2},$$

$$\rho(M, \sigma)=\left|z+\frac{p}{2}\right|, \tag{9}$$

поэтому $\sqrt{x^2+y^2+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2}=\left|z+\frac{p}{2}\right|$. Отсюда следует, что

$$x^2+y^2=2pz. \tag{10}$$

Итак, доказано, что координаты любой точки множества S удовлетворяют уравнению (10). Докажем обратное утверждение: каждая точка M, координаты которой удовлетворяют уравнению (10), принадлежит множеству S. Подставив в первую из формул (9) значение x^2+y^2 из (10), получим: $MA=\sqrt{2pz+\left(z-\frac{p}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(z+\frac{p}{2}\right)^2}=\left|z+\frac{p}{2}\right|$. Следовательно, $MA=\rho(M, \sigma)$, т. е. $M\in S$.

Уравнение (10), которое можно записать так: $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{p}=2z$, определяет параболоид вращения. Таким образом, S — параболоид вращения, осью вращения которого является прямая AD (рис. 190).

Глава X

АФФИННОЕ И ЕВКЛИДОВО n-МЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 83. Векторное n-мерное пространство

1. Для дальнейшего изложения нам потребуется знание теории векторных пространств, известной из курса алгебры. Для полноты изложения мы приводим обзор основных факторов этой теории, необходимых для построения основ многомерной геометрии.

Как известно из курса алгебры, *векторное пространство* над полем действительных чисел (или просто векторное пространство) есть непустое множество V элементов, называемых *векторами* ($\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$), на котором определены операции сложения векторов и умножения векторов на действительные числа так, что выполнены следующие условия:

I_1. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

I_2. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

I_3. Существует вектор $\vec{0}$ (нуль-вектор) такой, что для любого вектора $\vec{a}$

$$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

I_4. Для каждого вектора $\vec{a}$ существует вектор $(-\vec{a})$ такой, что

$$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}.$$

I_5. Для любого вектора $\vec{a}$ $\quad 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

I_6. Для любых действительных чисел α, β и любого вектора $\vec{a}$

$$\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}.$$

I_7. Для любых действительных чисел α, β и любого вектора $\vec{a}$

$$(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}.$$

I_8. Для любого числа α и любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}.$$

Условия I_1—I_8 называются *аксиомами* векторного пространства.

Из сформулированных аксиом вытекает ряд следствий. Отметим основные из них.

1^0. Вектор $\vec{0}$ и вектор $(-\vec{a})$, о которых говорится в аксиомах I_3 и I_4, единственные.

2^0. Для любого вектора $\vec{a}$ и любого числа λ имеют место соотношения:

а) $-(-\vec{a})=\vec{a}$;

б) $0\vec{a}=\vec{0}$;

в) $-\vec{a}=(-1)\vec{a}$;

г) $\lambda\vec{0}=\vec{0}$;

д) если $\lambda\vec{a}=\vec{0}$, то или $\lambda=0$, или $\vec{a}=\vec{0}$.

3^0. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует единственный вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$.

Вектор $\vec{x}$, определяемый этим условием, называется *разностью* векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$ и обозначается через $\vec{b}-\vec{a}$. Можно доказать, что $\vec{b}-\vec{a}=\vec{b}+(-\vec{a})$.

2. В векторном пространстве V понятия линейной зависимости, линейной независимости и линейной комбинации вводятся точно так же, как и в векторном пространстве $W/\underline{\underline{\omega}}$ (см. § 6, п. 3). В частности, свойства 1^0—4^0, сформулированные в пункте 3 (§ 6), имеют место для векторов пространства V.

Пространство V называется *n-мерным векторным пространством,* если выполнены следующие две аксиомы.

II_1. В пространстве V существует система n линейно независимых векторов.

II_2. Любая система $n+1$ векторов линейно зависима.

Число n называется *размерностью* пространства V. Из теоремы 4 (§ 6) и следствия теоремы 1 (§ 7) следует, что $W/\underline{\underline{\omega}}$ является трехмерным векторным пространством.

Базисом векторного пространства V называется такая система векторов, которая задана в определенном порядке и удовлетворяет двум условиям:

а) система линейно независима;

б) любой вектор пространства является линейной комбинацией векторов данной системы.

Из аксиом II_1 и II_2 следует, что в n-мерном векторном пространстве существует хотя бы один базис, состоящий из n векторов. Из алгебры известно, что любой базис n-мерного пространства состоит из n векторов.

В курсе алгебры доказывают ряд теорем, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем изложении. Эти теоремы мы приводим без доказательства.

Теорема 1. *Если $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — базис пространства V, то для любого вектора $\vec{p}$ существуют единственные числа $p^1, p^2, \ldots, p^n$* такие, что

$$\vec{p}=p^1\vec{e}_1+p^2\vec{e}_2+\ldots+p^n\vec{e}_n. \quad (1)$$

Коэффициенты $p^1, p^2, \ldots, p^n$ называются *координатами вектора* $\vec{p}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Если вектор $\vec{p}$ в данном базисе имеет координаты $p^1, p^2, \ldots, p^n$, то пишут так: $\vec{p}(p^1, p^2, \ldots, p^n)$. Свойства 1^0-3^0 координат суммы, разности векторов и умножения вектора на число, сформулированные в пункте 3 § 7, имеют место и для векторов n-мерного векторного пространства V.

Теорема 2. *Если дана система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, которые в данном базисе имеют координаты*

$$\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n),\ \vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n),\ \ldots,\ \vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n),$$

то ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 a_2^1 \ldots a_k^1 \\ a_1^2 a_2^2 \ldots a_k^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_1^n a_2^n \ldots a_k^n \end{pmatrix} \tag{2}$$

равен максимальному числу линейно независимых векторов системы.

Из этой теоремы, в частности, получаем следствие.

Следствие. Для того чтобы система n векторов в n-мерном пространстве V была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов, в любом базисе был отличен от нуля.

3. Пусть L — непустое множество векторов из V. Множество L называется *векторным подпространством* пространства V, если выполнены следующие два условия:

1^0. Если $\vec{a} \in L$, $\vec{b} \in L$, то $\vec{a}+\vec{b} \in L$.

2^0. Если $\vec{a} \in L$, то $\alpha\vec{a} \in L$ для любого вещественного числа α.

Из курса алгебры известно, что если для множества L выполняются условия 1^0, 2^0, то оно является векторным пространством относительно операций сложения векторов и умножения векторов на числа, которые введены в V. При этом, если V является n-мерным векторным пространством, то множество L—k-мерное векторное пространство, где $k \leqslant n$. Число k называется *размерностью подпространства* L. Подпространство размерности k будем обозначать через L_k.

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ — линейно независимые векторы пространства V. Рассмотрим множество всех векторов вида: $t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + \ldots + t_k\vec{a}_k$, где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — произвольные вещественные числа. Это множество, как нетрудно проверить, удовлетворяет условиям 1^0 и 2^0 определения векторного подпространства, поэтому является подпространством пространства V. Оно называется *подпространством, натянутым на векторы* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, и обозначается так: $L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k)$.

В алгебре доказывают теорему, которая позволяет задавать подпространства с помощью системы линейных однородных уравнений.

Теорема 3. *Пусть дана система линейных уравнений:*

$$\begin{aligned} a_{11}p^1 + a_{12}p^2 + \ldots + a_{1n}p^n &= 0, \\ a_{21}p^1 + a_{22}p^2 + \ldots + a_{2n}p^n &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}p^1 + a_{k2}p^2 + \ldots + a_{kn}p^n &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

ранг которой равен r. Тогда множество L всех векторов $\vec{p}(p^1, p^2, \ldots, p^n)$ n-мерного пространства V, координаты которых удовлетворяют системе (3), *есть* $(n-r)$*-мерное подпространство пространства V.*

4. Формулу (1) можно записать так: $\vec{p}=\sum_{i=1}^{n} p^i\vec{e}_i$ или еще короче: $\vec{p}=p^i\vec{e}_i$. **Условимся в следующем: если нам дано выражение, записанное в виде одночлена, в котором некоторый индекс встречается дважды: один раз — вверху и один раз — внизу, то по этому индексу подразумевается суммирование.** Например, выражение a^ib_i, где i принимает значения 1, 2, 3, является сокращенной записью суммы: $a^1b_1+a^2b_2+a^3b_3$. Если индекс α принимает те же значения 1, 2, 3, то $a^\alpha b_\alpha=a^ib_i$, т. е. индекс суммирования можно обозначить любой буквой. В главах X и XI, если нет специальных оговорок, предполагается, что индексы суммирования i, j, k и l принимают значения 1, 2, 3, ..., n.

§ 84. Евклидово векторное n-мерное пространство

1. Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. *Билинейной формой,* определенной на векторном пространстве V, называется отображение g: $V x V \to \boldsymbol{R}$, линейное по каждому аргументу. Это значит, что каждой упорядоченной паре векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ ставится в соответствие действительное число $g(\vec{x}, \vec{y})$ такое, что выполняются равенства:

$$\begin{aligned} g(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2, \vec{y})&=\alpha g(\vec{x}_1, \vec{y})+\beta g(\vec{x}_2, \vec{y}), \\ g(\vec{x}, \alpha\vec{y}_1+\beta\vec{y}_2)&=\alpha g(\vec{x}, \vec{y}_1)+\beta g(\vec{x}, \vec{y}_2). \end{aligned} \qquad (1)$$

Здесь α, β — любые действительные числа, а $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}$, $\vec{y}_1$, $\vec{y}_2$, $\vec{y}$ — произвольные векторы пространства V.

Возьмем какой-нибудь базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, ..., $\vec{e}_n$ пространства V. Этот базис сокращенно будем обозначать так: $(\vec{e}_i)$. Для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ имеем: $\vec{x}=x^i\vec{e}_i$, $\vec{y}=y^j\vec{e}_j$, поэтому $g(\vec{x}, \vec{y})=g(x^i\vec{e}_i, y^j\vec{e}_j)$. Используя равенства (1), находим: $g(\vec{x}, \vec{y})=x^iy^jg(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, или

$$g(\vec{x}, \vec{y})=g_{ij}x^iy^j, \qquad (2)$$

где

$$g_{ij}=g(\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

В правой части равенства (2) записано суммирование по индексам i, j, которые независимо один от другого пробегают все значения от 1 до n. Квадратная матрица $G=\|g_{ij}\|$ порядка n (первый индекс — номер строки, а второй индекс — номер столбца) называется *матрицей билинейной формы* g в базисе $(\vec{e}_i)$. Таким образом, если в векторном пространстве V размерности n выбран базис $(\vec{e}_i)$, то каждая билинейная форма g на этом пространстве определяет матрицу G порядка n с элементами $g_{ij}\in\boldsymbol{R}$, где

$$g_{ij}=g(\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

Обратно, если в векторном пространстве V размерности n выбран базис $(\vec{e}_i)$, то любая квадратная матрица G на этом пространстве задает некоторую билинейную форму $g(\vec{x}, \vec{y})$, значение которой для векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ вычисляется по формуле (2).

Случай, когда матрица G нулевая, интереса не представляет, и мы исключим его из рассмотрения.

2. Билинейная форма g называется *симметрической*, если для любых векторов $\vec{x}, \vec{y} \in V$ выполняется равенство $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$. В частности, для векторов базиса $(\vec{e}_i)$ получим: $g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = g(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$, т. е. $g_{ij} = g_{ji}$, поэтому матрица G симметрическая.

Обратно, если взять симметрическую матрицу G порядка n и с помощью ее определить в заданном базисе $(\vec{e}_i)$ билинейную форму g формулой (2), то, как это следует из формулы (2), $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$. Следовательно, g — симметрическая форма.

Симметрическая билинейная форма g называется *положительно определенной*, если $g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$ для любого ненулевого вектора $\vec{x}$. Примером положительно-определенной билинейной формы служит, например, форма, которая в базисе $(\vec{e}_i)$ задана формулой

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n.$$

В самом деле, эта формула имеет вид (2), поэтому $g(\vec{x}, \vec{y})$ — билинейная форма. Ясно, что $g(\vec{x}, \vec{y}) = g(\vec{y}, \vec{x})$ и, кроме того, для любого $\vec{x} \neq \vec{0}$ имеем: $g(\vec{x}, \vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2 > 0$.

3. Будем говорить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ *сопряжены* относительно симметрической билинейной формы g, если они ненулевые и удовлетворяют условию: $g(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Докажем следующую важную теорему.

Теорема 1. *В любом подпространстве L_k векторного пространства V размерности n, где $1 < k \leqslant n$, существует хотя бы один базис, любые два вектора которого сопряжены относительно данной симметрической билинейной формы $g(\vec{x}, \vec{y})$.*

□ Рассмотрим два возможных случая.

1) Для любого вектора $\vec{x} \in L_k$ имеем: $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Докажем, что в этом случае любой базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ подпространства L_k является искомым. В самом деле, пусть $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_\beta$ — два произвольных вектора этого базиса. Так как $\vec{e}_\alpha + \vec{e}_\beta \in L_k$, то $g(\vec{e}_\alpha + \vec{e}_\beta, \vec{e}_\alpha + \vec{e}_\beta) = 0$, или $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\alpha) + 2g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) + g(\vec{e}_\beta, \vec{e}_\beta) = 0$. Учитывая, что $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\alpha) = g(\vec{e}_\beta, \vec{e}_\beta) = 0$, из предыдущего равенства получаем: $g(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = 0$. Таким образом, векторы $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_\beta$ сопряжены относительно данной формы $g(\vec{x}, \vec{y})$.

2) Существует хотя бы один вектор $\vec{e}_1 \in L_k$ такой, что $g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0$. Докажем теорему по индукции относительно размерности подпространства L_k. Убедимся сначала в справедливости теоремы для случая, когда $k = 2$. Выберем базис $(\vec{a}, \vec{b})$ подпространства L_2 так, чтобы $g(\vec{a}, \vec{a}) \neq 0$. Тогда векторы $\vec{e}_1 = \vec{a}$, $\vec{e}_2 = \vec{b} - \lambda\vec{a}$, где $\lambda = \frac{g(\vec{a}, \vec{b})}{g(\vec{a}, \vec{a})}$,

образуют искомый базис, так как они линейно независимы и $g(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = g(\vec{a}, \vec{b}) - \lambda g(\vec{a}, \vec{a}) = 0$.

Предположим теперь, что утверждение теоремы верно для всех подпространств L_m, где $m \leqslant k-1$, и докажем, что оно верно и для L_k. Выберем базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ подпространства L_k так, чтобы $g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0$. Рассмотрим множество L' векторов $\vec{x}$ подпространства L_k, удовлетворяющих равенству

$$g(\vec{e}_1, \vec{x}) = 0. \qquad (3)$$

Разложим вектор $\vec{x}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$: $\vec{x} = x^\alpha \vec{e}_\alpha$, где $\alpha = 1, \ldots, k$, и запишем равенство (3) в координатах: $g_{1\alpha} x^\alpha = 0$. Так как $g_{11} \neq 0$, то по теореме 3 из § 83 множество L' есть подпространство размерности $k-1$ пространства L_k. По предположению индукции в подпространстве L' существует базис $\vec{e}'_2, \vec{e}'_3, \ldots, \vec{e}'_k$, любые два вектора которого сопряжены относительно билинейной формы $g(\vec{x}, \vec{y})$. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_k$ линейно независима, так как в противном случае $\vec{e}_1 \in L'$, что противоречит условию: $g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) \neq 0$. Учитывая равенство (3), приходим к выводу, что базис $\vec{e}_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_k$ искомый. ■

Доказанная теорема верна также и в том случае, когда $k = n$, т. е. когда L_k совпадает с векторным пространством V. Поэтому справедливо утверждение.

Следствие. *В векторном пространстве V размерности n существует хотя бы один базис, любые два вектора которого сопряжены относительно данной симметрической билинейной формы $g(\vec{x}, \vec{y})$.*

4. Векторное пространство V называется *евклидовым векторным пространством,* если на нем задана положительно-определенная билинейная форма g. Для произвольных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ число $g(\vec{a}, \vec{b})$ называется *скалярным произведением векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается так: $\vec{a}\vec{b}$. Форма g является симметрической билинейной формой, поэтому для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа α имеют место следующие свойства скалярного умножения. Иногда эти свойства принимают в качестве аксиом при аксиоматическом определении скалярного произведения.

1. $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.
2. $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.
3. $(\alpha\vec{a})\vec{b} = \alpha(\vec{a}\vec{b})$, $\vec{a}(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\vec{b})$.
4. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}\vec{a} > 0$.

Число $\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$. Из свойства 4 следует, что для любого вектора $\vec{a}$ имеем: $\vec{a}\vec{a} \geqslant 0$. Отсюда следует, что $\sqrt{\vec{a}^2}$ — действительное число. Оно называется *длиной* или *нормой* вектора $\vec{a}$ и обозначается так: $|\vec{a}|$. Вектор называется *единичным,* если $|\vec{a}| = 1$.

Из свойств 1—4 скалярного произведения следуют утверждения.

1^0. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$

$$\vec{a}(\vec{b}_1+\vec{b}_2+\ldots+\vec{b}_k)=\vec{a}\vec{b}_1+\vec{a}\vec{b}_2+\ldots+\vec{a}\vec{b}_k.$$

2^0. $\vec{0}\cdot\vec{a}=0$, где $\vec{a}$ — произвольный вектор.

3^0. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $|\vec{a}|\neq 0$, а если $\vec{a}=0$, то $|\vec{a}|=0$.

4^0. Если $\vec{b}=\alpha\vec{a}$, то $|\vec{b}|=|\alpha||\vec{a}|$.

Доказательства этих свойств предоставляем читателю.

Если $\vec{a}\neq\vec{0}$, то вектор $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ является единичным и называется *ортом вектора* $\vec{a}$.

Докажем, что для любых ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливы неравенства:

$$-1\leqslant\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\leqslant 1. \qquad (4)$$

Действительно, $\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\pm\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)^2\geqslant 0$, поэтому $\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)^2\pm 2\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}+$ $+\left(\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)^2\geqslant 0$, или $1\pm\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\geqslant 0$. Отсюда и следуют неравенства (4).

Неравенства (4) показывают, что для любых ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ существует в числовом промежутке $[0, \pi]$ число α такое, что

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \qquad (5)$$

Это число называется *углом между векторами* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается так: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *перпендикулярными* (или *ортогональными*), если $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})=\frac{\pi}{2}$. Условимся считать, что нулевой вектор перпендикулярен любому вектору. Отсюда и из равенства (5) следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}=0$, т. е. когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сопряжены относительно данной билинейной формы $g(\vec{x}, \vec{y})$. Доказанная в п. 3 теорема 1 позволяет сформулировать следующее утверждение: *в любом векторном подпространстве евклидова векторного пространства V существует хотя бы один ортогональный базис* (т. е. базис, любые два вектора которого взаимно перпендикулярны).

Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется *ортонормированным*, если все его векторы единичные и попарно ортогональные, т. е. если $|\vec{e}_i|=$ $=1$, $\vec{e}_i\vec{e}_j=0$, $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \ldots, n)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *В евклидовом векторном n-мерном пространстве существуют ортонормированные базисы.*

□ Из следствия теоремы 1 заключаем, что в евклидовом векторном n-мерном пространстве существует базис $(\vec{a}_i)$, любые два вектора которого взаимно перпендикулярны, т. е. $\vec{a}_i\vec{a}_j=0$, если $i\neq j$. Рассмотрим новый базис

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|},\ \vec{e}_2=\frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|},\ \ldots,\ \vec{e}_n=\frac{\vec{a}_n}{|\vec{a}_n|}.$$

Ясно, что базис $\vec{e}_i$ ортонормированный, так как векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. ■

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в ортонормированном базисе $(\vec{e}_i)$ заданы координатами $\vec{a}(a^1, a^2, \ldots, a^n)$, $\vec{b}(b^1, b^2, \ldots, b^n)$, то имеют место формулы:

$$\vec{a}\vec{b}=a^1b^1+a^2b^2+\ldots+a^nb^n, \tag{6}$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+\ldots+(a^n)^2}, \tag{7}$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b})=\frac{a^1b^1+a^2b^2+\ldots+a^nb^n}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+\ldots+(a^n)^2}\ \sqrt{(b^1)^2+(b^2)^2+\ldots+(b^n)^2}}. \tag{8}$$

§ 85. Аффинное n-мерное пространство

1. Пусть V — векторное пространство n-измерений над полем действительных чисел, а E — непустое множество, элементы которого назовем *точками*. Векторы, как и прежде, будем обозначать малыми буквами латинского алфавита со стрелкой наверху: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{x}$, $\vec{y}$, а точки — большими буквами латинского алфавита A, B, ..., X, Y. Мы предполагаем, что задано отображение $\sigma: E\times E\to V$, т. е. каждой упорядоченной паре точек A, B из E поставлен в соответствие определенный вектор из V, который обозначим через $\overrightarrow{AB}$. Множество E называется *аффинным n-мерным пространством* над векторным пространством V n-измерений, если выполнены следующие аксиомы[1].

1. Для каждой точки A из E и произвольного вектора $\vec{p}$ из V существует одна и только одна точка X такая, что $\overrightarrow{AX}=\vec{p}$.

2. Для любых точек A, B и C выполняется равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (аксиома треугольника).

Аффинное n-мерное пространство обозначим через A_n. Отметим некоторые следствия из сформулированных выше аксиом.

1^0. *При любом выборе точки A вектор $\overrightarrow{AA}$ нулевой.*

□ В самом деле, пусть $\vec{b}$ — произвольный вектор из V. По аксиоме 1 существует точка B такая, что $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. По аксиоме тре-

[1] Эти аксиомы называются *аксиомами Вейля*, по имени известного математика Германа Вейля (1888—1958), который впервые их сформулировал.

угольника для точек A, A, B имеем: $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$, или $\overrightarrow{AA}+\bar{b}=\bar{b}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{AA}=\bar{0}$. ■

2^0 *Если $\overrightarrow{AB}=\bar{0}$, то точки A и B совпадают.*

□ По свойству 1^0 $\overrightarrow{AA}=\bar{0}$, а по условию $\overrightarrow{AB}=\bar{0}$, следовательно, по аксиоме 1 точки A и B совпадают. ■

3^0 При любом выборе точек A и B $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

□ По аксиоме треугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}$. Отсюда, учитывая свойство 1^0, получаем: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\bar{0}$. Таким образом, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$. ■

4^0. *Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.*

□ По аксиоме треугольника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Отсюда, учитывая данное равенство, получаем: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$, или $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$. По аксиоме треугольника $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. ■

Предлагаем читателю, применив метод математической индукции и используя аксиому треугольника, самостоятельно доказать следующее утверждение.

5^0. *Для произвольных точек A_1, A_2, ..., A_n выполняется равенство $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.*

Зафиксируем в пространстве A_n произвольную точку O. Тогда для каждой точки M пространства определен вектор $\overrightarrow{OM}$, который называется *радиус-вектором* точки M (относительно точки O). Из аксиомы 1 следует, что отображение, в котором каждой точке ставится в соответствие ее радиус-вектор, является биекцией. Отсюда, учитывая, что V — бесконечное множество, приходим к выводу, что *пространство A_n содержит бесконечное множество точек.*

Отметим, что каждый вектор $\bar{p}$ из V порождает вполне определенное преобразование точек пространства A_n. Действительно, произвольной точке $M\in A_n$ поставим в соответствие точку M' так, чтобы $\overrightarrow{MM'}=\bar{p}$. Мы получаем отображение: $f: A_n \to A_n$. Докажем, что f — *преобразование множества A_n.*

Если M' — произвольная точка пространства A_n, то по аксиоме 1 существует одна и только одна точка M такая, что $\overrightarrow{M'M}=-\bar{p}$ или по свойству 3^0 $\overrightarrow{MM'}=\bar{p}$. Таким образом, каждая точка имеет один и только один прообраз, т. е. f-преобразование.

Преобразование f называется *параллельным переносом* пространства A_n на вектор $\bar{p}$. Если $\bar{p}=\bar{0}$, то f — тождественное преобразование.

Мы видим, что существует взаимно однозначное соответствие между параллельными переносами пространства A_n и векторами из V. Поэтому векторы из V иногда называются *переносами* (свободными векторами) пространства A_n, а векторное пространство V — *пространством переносов* пространства A_n.

2. Возьмем какую-нибудь точку O пространства A_n и произвольный базис $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$ пространства V. Множество, состоящее из точки O и базиса $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, ..., $\bar{e}_n$, называется *аффинной системой координат* (или *аффинным репером*) пространства A_n и обозначает-

ся символом $O\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n$, или короче $O\vec{e}_i$. Точку O называют *началом координат*, а векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ — *координатными векторами*.

Пусть M — произвольная точка пространства A_n, в котором задана аффинная система координат $O\vec{e}_1\ldots\vec{e}_n$. Разложим радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ точки M по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\overrightarrow{OM}=x^1\vec{e}_1+x^2\vec{e}_2+\ldots+x^n\vec{e}_n. \qquad (1)$$

Числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ называются *координатами точки* M в системе координат $O\vec{e}_i$; пишут $M(x^1, \ldots, x^n)$, или короче: $M(x^i)$. Таким образом, *координатами точки M в системе координат $O\vec{e}_i$ называются координаты радиус-вектора этой точки в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.* Рассмотрим следующую задачу, которая часто используется при решении задач.

Задача. В системе координат $O\vec{e}_i$ даны две точки $M(x^i)$ и $N(y^i)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{MN}$.

Решение. По аксиоме треугольника $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}$. Отсюда получаем: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$. Векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{ON}$ являются радиус-векторами точек M и N, поэтому их координаты нам известны: $\overrightarrow{ON}(y^i)$, $\overrightarrow{OM}(x^i)$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{MN}$ имеет координаты:

$$\overrightarrow{MN}(y^1-x^1,\ y^2-x^2,\ \ldots,\ y^n-x^n).$$

3. Рассмотрим в пространстве A_n две системы координат: $O\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n$ и $O'\vec{e}\,'_1\vec{e}\,'_2\ldots\vec{e}\,'_n$. Первую систему назовем старой, а вторую — новой. Пусть M — произвольная точка пространства, которая в старой системе имеет координаты x^i, а в новой системе — координаты y^i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$. Поставим задачу: зная координаты нового начала координат и новых координатных векторов в старой системе:

$$O'(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n),\ \vec{e}\,'_i(c_i^1, c_i^2, \ldots, c_i^n), \text{ где } i=1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

выразить $x^1, x^2, \ldots, x^n$ через $y^1, y^2, \ldots, y^n$.

По определению координат векторов и точек из (2) имеем:

$$\vec{e}\,'_j=c_j^i\vec{e}_i,\ \overrightarrow{OO'}=x_0^i\vec{e}_i. \qquad (3)$$

Определитель матрицы $C=\|c_j^i\|$ отличен от нуля, так как векторы $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ линейно независимы (§ 83, следствие теоремы 2). Матрица C называется *матрицей перехода от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ к базису $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$.*

По аксиоме треугольника $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$, поэтому, учитывая формулы (1) и (3), получаем:

$$x^i\vec{e}_i=x_0^i\vec{e}_i+y^j\vec{e}\,'_j, \text{ или } x^i\vec{e}_i=x_0^i\vec{e}_i+y^jc_j^i\vec{e}_i.$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ будем иметь:

$$x^i=c_j^iy^j+x_0^i, \text{ где } i=1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Формулы (4) называются *формулами преобразования* аффинной системы координат пространства A_n. В этих формулах определитель матрицы C отличен от нуля.

4. Для дальнейшего изложения по аналогии со случаем кривых второго порядка (см. § 31) введем в пространстве A_n мнимые точки. При выбранной системе координат $O\vec{e}_i$ назовем точкой любое упорядоченное множество n комплексных чисел z^1, z^2, ..., z^n ($z^k = x^k + iy^k$, $i^2 = -1$, x^k, $y^k \in \mathbf{R}$). Точка называется *действительной,* если все числа z^1, ..., z^n действительные, и *мнимой,* если хотя бы одно из этих чисел не является действительным.

Если точка M в системе $O\vec{e}_i$ имеет координаты z^k, то будем считать, что та же точка в системе $O'\vec{e}'_i$ имеет координаты z'^k, которые определяют из формул (4): $z^k = c_l^k \cdot z'^l + x_0^k$.

Так как здесь числа c_l^k, x_0^k действительные, то понятие мнимой точки не зависит от выбора системы координат.

Множество всех действительных и мнимых точек называется *n-мерным комплексным пространством.*

§ 86. *k*-мерные плоскости

1. Пусть L_k — k-мерное подпространство n-мерного векторного пространства V, где $1 \leqslant k < n$. С помощью L_k введем бинарное отношение Δ на множестве всех точек пространства A_n. Точки A и B находятся в отношении Δ (и пишут $A \Delta B$), если $\overrightarrow{AB} \in L_k$. Докажем, что отношение Δ является отношением эквивалентности.

1) Для произвольной точки A имеем: $\overrightarrow{AA} = \vec{0} \in L_k$, поэтому $A \ \Delta \ A$.

2) Если $A \ \Delta \ B$, то $\overrightarrow{AB} \in L_k$, поэтому $\overrightarrow{BA} \in L_k$, т. е. $B \ \Delta \ A$.

3) Если $A \Delta B$ и $B \Delta C$, то $\overrightarrow{AB} \in L_k$, $\overrightarrow{BC} \in L_k$, поэтому $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \in L_k$, т. е. $A \ \Delta \ C$.

Каждый из элементов фактор-пространства A_n/Δ называется *k-мерной плоскостью* или просто *k-плоскостью* и обозначается так: Π_k. Одномерная плоскость называется *прямой,* а $(n-1)$-мерная плоскость — *гиперплоскостью.*

При заданном подпространстве L_k существует бесконечное множество классов эквивалентности (т. е. элементов фактор-пространства A_n/Δ), и каждый из этих классов определяется однозначно, *если задана точка, принадлежащая этому классу.* Таким образом, k-плоскость Π_k является заданной, если даны подпространство L_k и некоторая точка k-плоскости. Подпространство L_k называется *направляющим подпространством* плоскости Π_k, а векторы этого подпространства — *векторами, параллельными плоскости* Π_k. Если плоскости Π_k и Π'_k имеют одно и то же направляющее подпространство, то они либо совпадают, либо не имеют ни одной общей точки. В последнем случае они называются *параллельными.*

2. Пусть k-плоскость Π_k задана точкой M_0 и направляющим подпространством L_k. Тогда, очевидно, Π_k есть множество тех и только тех точек M пространства, каждая из которых удовлетворяет условию: $\overrightarrow{M_0M} \in L_k$. Воспользуемся этим утверждением и теоремой 3 из § 83 для написания уравнений k-плоскости Π_k.

Задача 1. В аффинной системе координат $O\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ даны точка $M_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ и подпространство L_k системой независимых однородных уравнений:

$$\begin{aligned} &a_{1i}p^i = 0, \\ &a_{2i}p^i = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &a_{n-ki}p^i = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Написать уравнение k-плоскости Π_k, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее подпространство L_k.

Решение. Произвольная точка $M(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ пространства A_n принадлежит плоскости Π_k тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \in L_k$. Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты $x^1 - x_0^1$, $x^2 - x_0^2$, ..., $x^n - x_0^n$, поэтому точка M принадлежит плоскости Π_k тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} &a_{1i}(x^i - x_0^i) = 0, \\ &a_{2i}(x^i - x_0^i) = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &a_{n-ki}(x^i - x_0^i) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Мы получили уравнения плоскости Π_k.

Пример. Написать уравнения 2 — плоскости Π_2 пространства A_4, проходящей через точку $M_0(0, 1, -2, 5)$ и имеющей направляющее подпространство L_2, заданное системой уравнений:

$$\begin{cases} p^1 - p^2 + p^2 + 3p^4 = 0, \\ 5p^2 + p^3 - p^4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Уравнения (2) в данном случае принимают вид:

$$\begin{cases} (x^1 - x_0^1) - (x^2 - x_0^2) + (x^3 - x_0^3) + 3(x^4 - x_0^4) = 0, \\ \qquad 5(x^2 - x_0^2) + (x^3 - x_0^3) - (x^4 - x_0^4) = 0. \end{cases}$$

Подставив сюда значения координат точки M_0, после элементарных преобразований получаем:

$$\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 + 3x^4 - 12 = 0, \\ \qquad 5x^2 + x^3 - x^4 + 2 = 0. \end{cases}$$

Задача 2. В аффинной системе координат $O\vec{e}_1 \ldots \vec{e}_n$ даны своими координатами точка $M_0(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ и базисные векторы подпространства L_k.

$$\vec{a}_1(a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^n),\ \vec{a}_2(a_2^1, a_2^2, \ldots, a_2^n),\ \ldots,\ \vec{a}_k(a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n).$$

Написать уравнения k-плоскости Π_k, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее подпространство L_k.

Решение. Точка $M(x^1, x^2, ..., x^n)$ принадлежит k-плоскости Π_k тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_0M} \in L_k$, т. е. когда найдутся такие числа $t^1, t^2, ..., t^k$, что

$$\overrightarrow{M_0M} = t^1\bar{a}_1 + t^2\bar{a}_2 + ... + t^k\bar{a}_k.$$

Это равенство в координатах запишется так:

$$x^i - x_0^i = t^1a_1^i + t^2a_2^i + ... + t^ka_k^i,$$

или

$$x^i = x_0^i + t^1a_1^i + t^2a_2^i + ... + t^ka_k^i, \text{ где } = 1, 2, ..., n. \tag{3}$$

Уравнения (3) называются *параметрическими уравнениями* плоскости Π_k. Они содержат k параметров $t^1, t^2, ..., t^k$.

Пример. Написать параметрические уравнения прямой d, проходящей через точку $M_0\left(1, 3, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$ и параллельной вектору $\bar{p}(-2, 0, 4, -1, 12)$ в пространстве A_5.

Решение. Вектор $\bar{p}$ является базисом направляющего подпространства прямой d, поэтому уравнения (3) в данном случае имеют вид:

$$x^1 = 1 - 2t,\ x^2 = 3,\ x^3 = 4t,\ x^4 = -t,\ x^5 = -\frac{1}{2} + 12t.$$

3. Любая k-плоскость в пространстве A_n задается совместной системой $(n-k)$ независимых линейных уравнений (2). Эту систему можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_{1i}x^i + b_1 &= 0, \\ a_{2i}x_i + b_2 &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ a_{n-ki}x^i + b_{n-k} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где $b_\alpha = -a_{\alpha i}x_0^i$, $\alpha = 1, 2, ..., n-k$.

Докажем, что имеет место обратное утверждение.

Теорема 1. *Множество G точек пространства A_n, координаты которых в данной аффинной системе координат удовлетворяют совместной системе $(n-k)$ независимых линейных уравнений* (4), *есть k-плоскость, направляющее подпространство которой задается системой уравнений* (1).

□ Так как система (4) совместна, то она имеет хотя бы одно решение $(x_0^1, x_0^2, ..., x_0^n)$:

$$\begin{aligned} a_{1i}x_0^i + b_1 &= 0, \\ a_{2i}x_0^i + b_2 &= 0, \\ \cdots\cdots & \\ a_{n-ki}x_0^i + b_{n-k} &= 0. \end{aligned}$$

Подставив отсюда значения $b_1, b_2, ..., b_{n-k}$ в уравнения (4), получаем равносильную систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
a_{1i}(x^i - x_0^i) &= 0,\\
a_{2i}(x^i - x_0^i) &= 0,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
a_{n-ki}(x^i - x_0^i) &= 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Рассмотрим точку M_0 с координатами $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$ и подпространство L_k, заданное системой (1). Сравнивая систему (4) с системой (2), мы приходим к выводу, что система (5) (а значит, и равносильная ей система (4)) определяет k-плоскость, которая проходит через точку M_0 и имеет направляющее подпространство L_k. ■

4. Будем говорить, что точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ аффинного пространства A_n *линейно независимы,* если система векторов

$$\overrightarrow{M_1M_2},\ \overrightarrow{M_1M_3},\ \ldots,\ \overrightarrow{M_1M_k} \tag{6}$$

линейно независима. Нетрудно показать, что в этом определении выбор точки M_1 не играет существенной роли, т. е. если система (6) линейно независима, то каждая из систем $\overrightarrow{M_iM_1}$, $\overrightarrow{M_iM_2}$, ..., $\overrightarrow{M_iM_{i-1}}$, $\overrightarrow{M_iM_{i+1}}$, ..., $\overrightarrow{M_iM_k}$ при $i=2, \ldots, k-1$; $\overrightarrow{M_kM_1}$, $\overrightarrow{M_kM_2}$, ..., $\overrightarrow{M_kM_{k-1}}$ линейно независима.

Из аксиом II_1 и II_2 (см. п. 2 из § 83) можно прийти к выводу, что в пространстве A_n существует $n+1$ линейно независимых точек и что любая система m точек, где $m > n+1$, линейно зависима.

Докажем теорему, которая является обобщением известных аксиом школьной геометрии о прямой и плоскости.

Т е о р е м а 2. *Каковы бы ни были линейно независимые точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$ пространства A_n, где $k \leqslant n$, существует одна и только одна $(k-1)$-мерная плоскость, проходящая через эти точки.*

□ Пусть L_{k-1} — подпространство, натянутое на векторы (6). Тогда, очевидно, $(k-1)$-мерная плоскость Π_{k-1}, проходящая через точку M_1 и имеющая направляющее подпространство L_{k-1}, является искомой.

Докажем теперь, что Π_{k-1} — единственная $(k-1)$-мерная плоскость, проходящая через точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Действительно, пусть Π'_{k-1} — какая-нибудь $(k-1)$-плоскость, проходящая через точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Тогда векторы (6) параллельны плоскости Π'_{k-1}, т. е. принадлежат подпространству L'_{k-1} этой плоскости. Так как система (6) линейно независима, то она является базисом подпространства L'_{k-1}. Отсюда следует, что подпространства L_{k-1} и L'_{k-1} совпадают, т. е. L_{k-1} — направляющее подпространство плоскости Π'_{k-1}.

Плоскости Π_{k-1} и Π'_{k-1} проходят через одну и ту же точку M_1 и имеют общее направляющее подпространство L_{k-1}, поэтому они совпадают. ■

С л е д с т в и е. Через любые две точки проходит одна и только одна прямая.

Прямая, проходящая через две точки A и B, обозначается через AB или BA.

§ 87. Гиперплоскости пространства A_n

1. Напомним, что гиперплоскостью называется $(n-1)$-мерная плоскость пространства A_n. Согласно задаче 1 из § 86 в данной системе координат гиперплоскость, проходящая через точку $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ и имеющая подпространство L_{n-1}, заданное уравнением $a_i p^i = 0$, определяется одним линейным уравнением

$$a_1(x^1 - x_0^1) + a_2(x^2 - x_0^2) + \ldots + a_n(x^n - x_0^n) = 0. \qquad (1)$$

Из теоремы 1 (§ 86) следует обратное утверждение: *множество точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + a_0 = 0, \qquad (2)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ одновременно не равны нулю, есть гиперплоскость пространства A_n.

Пусть $O\vec{e}_i$ — некоторая система координат пространства A_n. Гиперплоскости, определяемые точкой O и $n-1$-мерными подпространствами, натянутыми соответственно на векторы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-1})$, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n-2}, \vec{e}_n)$, $\ldots$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots, \vec{e}_n)$, называются *координатными гиперплоскостями.* Так как их $(n-1)$-мерные подпространства задаются соответственно уравнениями $p^n = 0$, $p^{n-1} = 0$, $\ldots$, $p^1 = 0$, то, пользуясь уравнением (1), получаем уравнения всех n координатных гиперплоскостей:

$$x^n = 0, \ x^{n-1} = 0, \ \ldots, \ x^2 = 0, \ x^1 = 0.$$

Геометрически гиперплоскость определяется n линейно независимыми точками. В самом деле, из теоремы 2 (§ 86) следует, что *через любые n линейно независимые точки пространства A_n проходит одна и только одна гиперплоскость.* Это утверждение является обобщением известной аксиомы школьной геометрии: через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.

2. Выясним взаимное расположение гиперплоскостей Π_{n-1} и Π'_{n-1}, заданных уравнениями:

$$(\Pi_{n-1}) \ a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + a_0 = 0, \qquad (3)$$

$$(\Pi'_{n-1}) \ b_1x^1 + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + b_0 = 0. \qquad (4)$$

Этот вопрос сводится к исследованию систем линейных уравнений (3) и (4). Обозначим через r и r' соответственно ранги матриц:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n & a_0 \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n & b_0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $1 \leqslant r \leqslant r' \leqslant 2$, причем система (3) и (4) совместна тогда и только тогда, когда $r = r'$. Таким образом, гиперплоскости Π_{n-1} и Π'_{n-1} имеют хотя бы одну общую точку тогда и только тогда, когда $r = r'$. Возможны следующие случаи.

1) $r' = 1$. В этом случае $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0$ в уравнении (3) пропорциональны коэффициентам $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_0$ в уравнении (4),

поэтому $r=1$ и уравнения (3) и (4) равносильны. Отсюда следует, что гиперплоскости Π_{n-1} и Π'_{n-1} совпадают, т. е. уравнения (3) и (4) определяют одну и ту же гиперплоскость.

2) $r'=2$, $r=2$. В этом случае (3) и (4) являются совместной системой двух независимых линейных уравнений. По теореме 1 из § 86 множество общих точек гиперплоскостей Π_{n-1}, Π'_{n-1} является $(n-2)$-мерной плоскостью Π_{n-2}, заданной уравнениями (3) и (4). Таким образом, гиперплоскости Π_{n-1}, Π'_{n-1} пересекаются по $(n-2)$-плоскости Π_{n-2}.

3) $r'=2$, $r=1$. Система уравнений (3), (4) несовместна, поэтому гиперплоскости Π_{n-1} и Π'_{n-1} не имеют общих точек. Докажем, что они параллельны.

По теореме 1 из § 86 направляющие подпространства гиперплоскостей Π_{n-1}, Π'_{n-1} задаются уравнениями:

$$a_1p^1+a_2p^2+\dots+a_np^n=0,$$
$$b_1p^1+b_2p^2+\dots+b_np^n=0.$$

Так как $r=1$, то в этих уравнениях коэффициенты при p^1, p^2, ..., p^n пропорциональны, поэтому гиперплоскости Π_{n-1} и Π'_{n-1} имеют одно и то же направляющее подпространство: это и означает, что Π_{n-1} и Π'_{n-1} параллельны.

Итак, возможны три случая взаимного расположения гиперплоскостей в A_n. 1) гиперплоскости совпадают ($r'=r=1$); 2) гиперплоскости пересекаются по $(n-2)$-плоскости ($r'=r=2$); 3) гиперплоскости параллельны ($r'=2$, $r=1$).

Пример. В каждом из следующих случаев выяснить взаимное расположение двух гиперплоскостей, заданных в A_4 уравнениями:

а) $x^1+2x^2+x^3-3=0,\quad x^2+x^3=0;$

б) $x^1+\frac{1}{2}x^2+3x^3-\frac{3}{4}x^4-1=0,\quad 2x^1+x^2+6x^3-\frac{3}{2}x^4-5=0.$

Решение. а) В данном случае $r=2$ и $r'=2$, поэтому гиперплоскости пересекаются по двумерной плоскости, которая задается уравнениями:

$$\begin{cases} x^1+2x^2+x^3-3=0, \\ x^2+x^3=0. \end{cases}$$

б) Вычислением находим, что $r=1$, $r'=2$, поэтому гиперплоскости параллельны.

§ 88. Аффинные преобразования пространства A_n

1. Пусть A и B — две точки пространства A_n, а M — произвольная точка прямой AB, отличная от точки B. Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$ параллельны прямой AB, то они линейно зависимы, причем $\overrightarrow{MB}\neq\vec{0}$. Следовательно, существует число λ такое, что

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}. \tag{1}$$

Число λ называется *простым отношением* точек A, B и M и обозначается так: (AB, M). Мы замечаем, что простое отношение трех точек прямой пространства A_n по существу определяется так же, как и в трехмерном пространстве (§ 12, п. 1). Поэтому известные нам свойства простого отношения трех точек прямой имеют место и в пространстве A_n. В частности, для любого действительного числа λ, отличного от -1, на прямой AB существует одна и только одна точка M такая, что $(AB, M)=\lambda$. Предлагаем читателю самостоятельно доказать это утверждение (см. § 12, п. 1).

2. Пусть A и B — две точки пространства A_n. Будем говорить, что *точка M лежит между точкой A и точкой B*, если $\lambda=(AB, M)>0$. Из равенства (1) следует, что $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{MA}$, т. е. $(BA, M)=\frac{1}{\lambda}$. Таким образом, если точка M лежит между точкой A и точкой B, то M лежит также между точкой B и точкой A. Поэтому говорят, что точка M лежит между точками A и B (или B и A). Ясно, что любая точка, лежащая между точками A и B, лежит на прямой AB.

Так как для любого положительного числа λ на прямой AB существует одна и только одна точка M такая, что $(AB, M)=\lambda$, то существует бесконечное множество точек, лежащих между точками A и B.

Пользуясь понятием «лежать между», можно обычным путем определить понятия отрезка, луча, угла, k-полуплоскости. Например, отрезком с концами A и B называется фигура, состоящая из точек A и B и всех точек, лежащих между ними.

3. Преобразование пространства A_n называется *аффинным*, если оно любые три точки M_1, M_2, M_3, лежащие на одной прямой, переводит в три точки M_1', M_2', M_3', лежащие на одной прямой, и сохраняет их простое отношение, т. е. $(M_1M_2, M_3)=(M_1'M_2', M_3')$ (см. § 48). Если в пространстве A_n задана аффинная система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n$, то, отложив от точки O векторы $\overrightarrow{OE_i}=\vec{e}_i$ ($i=1, 2, ..., n$), мы получим упорядоченную систему $n+1$ точек O, E_1, ..., E_n, не лежащих на одной гиперплоскости. Такую систему точек называют *аффинным репером*. Пишут: $R=(O, E_1, E_2, ..., E_n)$. Точки O, E_1, ... E_n называют *вершинами* репера R, а точку O — его *началом*. Обратно, всякий аффинный репер $R=(O, E_1, ..., E_n)$ определяет аффинную систему координат $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$, где $\vec{e}_i=\overrightarrow{OE_i}$. Поэтому часто не делают различия между понятиями аффинной системы координат и аффинного репера.

Справедливо следующее обобщение теоремы 1 из § 48.

Теорема. *Пусть $R=(O, E_1, ..., E_n)$ и $R'=(O', E_1', ..., E_n')$ — произвольные реперы пространства A_n. Тогда существует единственное аффинное преобразование, которое переводит репер R в репер R'. При этом любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, как и доказательство теоремы 1 из § 48, и мы его опускаем.

Из определения аффинного преобразования пространства A_n следует, что оно переводит отрезок в отрезок, луч — в луч. Из сформулированной теоремы вытекает, что аффинное преобразование переводит любую k-плоскость в некоторую k-плоскость, а параллельные k-плоскости — в параллельные k-плоскости (см. аналогичные утверждения в п. 3 из § 48 для аффинных преобразований плоскости).

Задача нахождения аналитического выражения аффинного преобразования пространства A_n решается точно так же, как и аналогичная задача в двумерном или в трехмерном пространстве. Пусть в аффинной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n$ произвольная точка M пространства A_n имеет координаты $(x^1, x^2, ..., x^n)$, а ее образ

M' — в данном аффинном преобразовании f — координаты $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. По аналогии с п. 4 из § 72, пользуясь предыдущей теоремой и формулами (4) из § 85, находим:

$$y^i = c^i_j x^j + c^i \ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где определитель матрицы $C = \| c^i_j \|$ (верхний индекс — номер строки, а нижний индекс — номер столбца) отличен от нуля.

Условимся координаты точки записывать в виде одностолбцовой матрицы:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x, \quad \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = y, \quad \begin{pmatrix} c^1 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix} = c.$$

Тогда систему n равенств (2) можно записать в виде одного матричного равенства[1]:

$$y = Cx + c. \tag{3}$$

Можно доказать следующее обобщение теоремы 2 из § 72.

Теорема. *Если отображение f: $A_n \to A_n$ в аффинном репере $R = (O, E_1, \ldots, E_n)$ задано формулами* (3), где $\det C \neq 0$, *то f — аффинное преобразование.*

4. Обозначим через $\boldsymbol{A}_n$ множество всех аффинных преобразований пространства A_n. Точно так же, как и в трехмерном пространстве (§ 73, п. 1), можно доказать, что $\boldsymbol{A}_n$ — группа. Она называется *группой аффинных преобразований пространства A_n.*

Простое отношение трех точек — инвариант группы аффинных преобразований пространства A_n. Свойство фигуры быть отрезком, лучом или k-плоскостью является инвариантным свойством этой фигуры относительно преобразований группы $\boldsymbol{A}_n$.

Что такое аффинная геометрия? Так называется раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур аффинного пространства A_n, инвариантные относительно группы $\boldsymbol{A}_n$ аффинных преобразований. С некоторыми из таких свойств мы ознакомились в этом параграфе.

§ 89. Евклидово n-мерное пространство

1. Аффинное пространство A_n над векторным пространством V называется *евклидовым n-мерным пространством,* если V — евклидово векторное пространство n-измерений. Евклидово n-мерное пространство обозначается через E_n.

Пространство E_n обладает всеми свойствами пространства A_n, поэтому изложенная выше теория полностью относится и к пространству E_n. Однако E_n обладает рядом так называемых метрических свойств, которые следуют из аксиом скалярного умножения векторов. Для изучения этих свойств чаще всего пользуются прямоугольной системой координат. Система координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\ldots\vec{e}_n$ в E_n называется *прямоугольной декартовой* (или просто прямоугольной), если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ортонормированный.

Расстоянием $\rho(A, B)$ *между точками* A и B называется длина вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}|. \tag{1}$$

Выведем формулу для нахождения расстояния между точками, заданными своими координатами.

---

[1] Напомним, что матрицы перемножаются по правилу «строка на столбец».

Задача. В прямоугольной системе координат даны точки A и B своими координатами $A(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, $B(y^1, y^2, \ldots, y^n)$. Найти расстояние между этими точками.

Решение. Вектор $\vec{AB}$ имеет координаты $\vec{AB}(y^1 - x^1, \ldots, y^n - x^n)$ (см. задачу § 85). По формуле (1), учитывая (7) из § 84, получаем:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + \ldots + (y^n - x^n)^2}.$$

Докажем, что основные свойства расстояний, которые имеют место в обычном трехмерном пространстве, справедливы также в E_n для любого n.

Теорема 1. *Для любых точек A, B и C пространства E_n*

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C). \tag{2}$$

□ По аксиоме треугольника $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$, поэтому $\vec{AC}^2 = \vec{AB}^2 + 2\,\vec{AB}\cdot\vec{BC} + \vec{BC}^2$. Отсюда получаем:

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2\,\vec{AB}\cdot\vec{BC} + |\vec{BC}|^2. \tag{3}$$

Из неравенства (4) § 84 следует, что $\vec{AB}\cdot\vec{BC} \leqslant |\vec{AB}|\,|\vec{BC}|$. Таким образом, $|\vec{AC}|^2 \leqslant |\vec{AB}|^2 + 2\,|\vec{AB}|\,|\vec{BC}| + |\vec{BC}|^2$, или $|\vec{AC}|^2 \leqslant (|\vec{AB}| + |\vec{BC}|)^2$. Отсюда, учитывая равенство (1), получаем (2). ■

2. *Длиной отрезка* называется расстояние между его концами. Так как длина любого ненулевого вектора больше нуля, то из формулы (1) следует, что длина любого отрезка выражается положительным числом. Два отрезка называются *равными*, если их длины равны.

Для дальнейшего изложения необходимо доказать следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы. Равенство*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \tag{4}$$

имеет место тогда и только тогда, когда существует положительное число t такое, что $\vec{a} = t\vec{b}$.

□ Выберем ортонормированный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ так, чтобы $\vec{e}_1 = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$. В этом базисе вектор $\vec{b}$ имеет координаты $\vec{b}(|\vec{b}|, 0, \ldots, 0)$, поэтому равенство (4) в координатах запишется так:

$$a_1\,|\vec{b}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}\;|\vec{b}|, \tag{5}$$

где $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — координаты вектора $\vec{a}$. Из равенства (5) следует, что $a_1 > 0$, а $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$. Таким образом, $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 = \frac{a_1}{|\vec{b}|}\vec{b} = t\vec{b}$, где $t = \frac{a_1}{|\vec{b}|} > 0$.

Обратно, пусть существует число $t > 0$ такое, что $\vec{a} = t\vec{b}$. Тогда $\vec{a}\vec{b} = (t\vec{b})\,\vec{b} = t\,|\vec{b}|^2$. Из равенства $\vec{a} = t\vec{b}$ следует, что $|\vec{a}| = t\,|\vec{b}|$, поэтому $\vec{a}\vec{b} = t\,|\vec{b}|^2 = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$. ■

Теорема 2. *Если A, B и C — три точки пространства E_n, то равенство $AB+BC=AC$ имеет место тогда и только тогда, когда точка B лежит между точками A и C.*

□ Пусть точка B лежит между точками A и C, т. е. $\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{BC}$, где $t>0$ (§ 88, п. 2). По предыдущей лемме $\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|$, поэтому из равенства (3) получаем:

$$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\,|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|^2, \text{ или } |\overrightarrow{AC}|^2=(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|)^2,$$

$$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|, \text{ т. е. } AC=AB+BC.$$

Обратно, пусть $AB+BC=AC$. Тогда $AC^2=AB^2+2AB\cdot BC+BC^2$, или $|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+2\,|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|+|\overrightarrow{BC}|^2$. Сравнивая это равенство с равенством (3), мы приходим к выводу, что $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|$. По доказанной лемме существует $t>0$ такое, что $\overrightarrow{AB}=t\,\overrightarrow{BC}$, т. е. точка B лежит между точками A и C. ■

Следствие. *Если точки A, B и C не лежат на одной прямой, то $AB+BC>AC$.*

3. Фигура, состоящая из точки O и двух лучей OA и OB, исходящих из этой точки, называется углом и обозначается так: $\angle AOB$ или $\angle O$. Пусть $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ — орты векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, т. е. $\vec{a}_0=\frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$, $\vec{b}_0=\frac{\overrightarrow{OB}}{OB}$. Угол φ между векторами $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$ называется *мерой угла AOB*.

Применяя формулу (5) из § 84 к векторам $\vec{a}_0$ и $\vec{b}_0$, приходим к выводу, что мера φ угла AOB вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{OA\cdot OB}. \qquad (6)$$

Угол AOB называется *прямым*, если его мера равна $\frac{\pi}{2}$. Из формулы (6) следует, что $\angle AOB$ прямой тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

В заключение докажем, что теорема косинусов для треугольников школьного курса геометрии справедлива и в пространстве E_n. Пусть ABC — произвольный треугольник. По формуле (6) $\cos B=$ $=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{BA\cdot BC}$, отсюда $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-AB\cdot BC\cos B$.

Из равенства (3), учитывая это равенство, получаем теорему косинусов:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\,AB\cdot BC\cos B.$$

Заметим, что отсюда непосредственно следуют прямая и обратная теоремы Пифагора: *треугольник ABC является прямоугольным треугольником с прямым углом B тогда и только тогда, когда $AC^2=AB^2+BC^2$.*

§ 90. Движения и подобия пространства E_n

1. Преобразование g евклидова пространства E_n называется *движением* этого пространства, если оно сохраняет расстояния. Это значит, что для любых точек M и N пространства E_n и их образов M' и N' выполняется равенство: $M'N'=MN$.

Репер $(O, E_1, ..., E_n)$ пространства E_n назовем *ортонормированным,* если ортонормированным является базис из векторов $\vec{e}_i=\overrightarrow{OE_i}$ $(i=1, 2, ..., n)$. Из определения движения можно заключить, что любое движение переводит ортонормированный репер в ортонормированный репер.

Справедливо следующее обобщение теоремы § 68.

Теорема 1. *Пусть $R=(O, E_1, ..., E_n)$ и $R'=(O', E'_1, ..., E'_n)$ — произвольные ортонормированные реперы евклидова пространства E_n. Тогда существует одно и только одно движение, которое репер R переводит в репер R'. В этом движении любая точка M с данными координатами в репере R переходит в точку M' с теми же координатами в репере R'.*

Отсюда следует, что *в любом движении k-плоскость переходит в k-плоскость.* Тем же способом, как и в случае движений плоскости (см. § 41, п. 4), можно доказать, что *любое движение пространства E_n сохраняет простое отношение трех точек прямой.* Отсюда следует, что движение переводит отрезок в отрезок, а луч — в луч.

Из теоремы 2 § 89 следует, что в любом движении три точки, лежащие на одной прямой, переходят в три точки, лежащие на одной прямой. При этом простое отношение трех точек сохраняется. Следовательно, движения являются частным случаем аффинных преобразований того аффинного пространства A_n, из которого получено евклидово пространство E_n.

Для того чтобы получить аналитическое выражение движений пространства E_n, можно использовать формулы (2) из § 88 аффинных преобразований. Но в этом случае на элементы матрицы $C=\|c^i_j\|$ накладываются дополнительные ограничения. По аналогии с движениями трехмерного пространства (§ 72, п. 5) можно убедиться в том, что аналитическое выражение движения пространства E_n в прямоугольной системе координат $O\vec{e}_1...\vec{e}_n$ имеет вид:

$$y^i=c^i_j x^j+c^i, \tag{1}$$

или в матричной записи:

$$y=Cx+C, \tag{2}$$

где $C=\|c^i_j\|$ — *ортогональная матрица.* Напомним, что матрица называется ортогональной, если сумма квадратов элементов каждого столбца равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных столбцов равна нулю. Определитель ортогональной матрицы равен 1 или -1.

Справедливо следующее обобщение теоремы 2 из § 42.

Теорема 2. *Если отображение $f: E_n \to E_n$ в ортонормированном репере задано формулами* (1), *где матрица $\|c^i_j\|$ ортогональная, то f — движение.*

Таким образом, если в пространстве E_n задан ортонормированный репер, то формулы (1) определяют движение этого пространства тогда и только тогда, когда матрица $\|c^i_j\|$ ортогональная.

2. Обозначим через D_n множество всех движений евклидова пространства E_n. Любое движение пространства E_n является таким преобразованием этого пространства, которое сохраняет расстояния между любыми двумя точками. Следовательно, композиция gf двух движений f и g, а также преобразование f^{-1}, обратное движению, являются преобразованиями пространства E_n, сохраняющими расстояния между любыми двумя точками, т. е. являются движениями.

Мы замечаем, что: а) если $f, g \in D_n$, то $gf \in D_n$; б) если $f \in D_n$, то $f^{-1} \in D_n$. Следовательно, множество D_n является группой (относительно умножения); она называется *группой движений* пространства E_n.

Две фигуры F и F' пространства E_n называются *равными* (или *конгруэнтными*), если они D_n-эквивалентны, т. е. существует движение, которое переводит одну из этих фигур в другую. Относительно группы D_n любая пара точек A, B имеет инвариант — расстояние $\rho(A, B)$ (оно не меняется при любом движении), любой угол имеет инвариант — величину этого угла. Об этих инвариантах не приходится говорить в случае группы A_n, так как в аффинном (но не евклидовом) пространстве A_n нет таких понятий, как «расстояние» и «величина угла».

3. *Подобием* пространства E_n называется преобразование этого пространства, которое обладает следующим свойством: существует число $k>0$ *(коэффициент подобия)* такое, что для любых точек A, B и их образов A' и B' выполняется равенство $A'B'=k\cdot AB$.

Мы видим, что движение является частным случаем подобия (когда $k=1$). Другим частным случаем подобия является *гомотетия*, которая в пространстве E_n определяется точно так же, как и гомотетия трехмерного пространства (§ 71, п. 1). Теорема 1 из § 46 полностью применима к любому преобразованию подобия пространства E_n.

По аналогии с подобиями трехмерного пространства (§ 72, п. 5) мы убеждаемся в том, что аналитическое выражение подобия с коэффициентом k пространства E_n в прямоугольной системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2...\vec{e}_n$ имеет вид:

$$y^i=kc^i_j\,x^j+c^i, \tag{3}$$

или в матричной записи:

$$y=kCx+c,$$

где $C=\|c^i_j\|$ — ортогональная матрица.

Обозначим через P_n множество всех преобразований подобия пространства E_n. Если f и g — подобия с коэффициентами k и l, то gf — подобие с коэффициентами lk, а f^{-1} — подобие с коэффициентом $\frac{1}{k}$. Следовательно, имеем: а) если $f, g\in P_n$, то $gf\in P_n$; б) если $f\in P_n$, то $f^{-1}\in P_n$. Отсюда заключаем, что P_n — группа (группа подобий пространства E_n).

Две фигуры F и F' называются *подобными*, если они P_n-эквиваленты, т. е. если существует преобразование подобия f такое, что $f(F)=F'$.

Из формул (3) следует, что P_n — подгруппа аффинной группы A_n. Поэтому свойства фигуры, инвариантные относительно группы A_n, будут инвариантны и относительно группы P_n. Кроме этих инвариантов, группа P_n имеет и другие инварианты, например величина угла.

4. Евклидова геометрия изучает те свойства фигур пространства E_n, которые остаются инвариантными при всех преобразованиях группы P_n. Иногда евклидову геометрию понимают как раздел геометрии, в котором изучают свойства фигур, инвариантные при всех движениях (т. е. в качестве основной, или, как говорят, фундаментальной, группы евклидовой геометрии берут группу D_n движений пространства E_n). Учитывая сказанное в § 88, п. 4, заключаем, что на аффинное пространство A_n и евклидово пространство E_n полностью распространяется «Эрлангенская программа» Ф. Клейна (см. § 73, п. 3).

Глава XI
КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И КВАДРИКИ

§ 91. Квадратичные формы

1. Пусть $g(\vec{x}, \vec{y})$ — симметрическая билинейная форма на векторном пространстве V размерности n. Отображение $q: V \to \boldsymbol{R}$ по закону: для любого вектора $\vec{x} \in V$

$$q(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x}) \tag{1}$$

называется *квадратичной формой,* определенной на векторном пространстве V. Будем говорить, что *квадратичная форма* (1) *соответствует симметрической билинейной форме* $g(\vec{x}, \vec{y})$.

Если в пространстве V выбран базис $(\vec{e}_i)$, то, используя формулу (2) из § 84, получаем[1]:

$$q(\vec{x}) = g_{ij}x^i x^j, \tag{2}$$

где $G = \|g_{ij}\|$ — матрица билинейной формы, которой соответствует квадратичная форма q. Ясно, что G — симметрическая матрица.

Нетрудно доказать, что, зная квадратичную форму q, можно восстановить билинейную форму, которой она соответствует. В самом деле, $q(\vec{x}+\vec{y}) = g(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = g(\vec{x}, \vec{x}) + 2g(\vec{x}, \vec{y}) + g(\vec{y}, \vec{y}) = q(\vec{x}) + 2g(\vec{x}, \vec{y}) + q(\vec{y})$.

Таким образом, $g(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2}(q(\vec{x}+\vec{y}) - q(\vec{x}) - q(\vec{y}))$.

Отсюда следует, что задание квадратичной формы эквивалентно заданию симметрической билинейной формы.

2. *Матрицей квадратичной формы* (2) в данном базисе $(\vec{e}_i)$ будем называть симметрическую матрицу $G = \|g_{ij}\|$. Для того чтобы на векторном пространстве V задать квадратичную форму, достаточно выбрать какой-либо базис $(\vec{e}_i)$, затем задать симметрическую матрицу $G = \|g_{ij}\|$. Тогда отображение $q: V \to \boldsymbol{R}$ по закону (2) как раз и будет квадратичной формой на векторном пространстве V.

Выясним, как меняется матрица квадратичной формы при переходе от одного базиса к другому. Пусть $G = \|g_{ij}\|$ — матрица квадра-

---

[1] В этой главе индексы i, j, k принимают значения 1, 2, ..., n. Напомним, что выражение $x^i\vec{e}_i$ является сокращенной записью суммы $x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n$ (см. § 83, п. 4).

тичной формы (1) в базисе $(\vec{e}_i)$, а $\bar{G}=\|\bar{g}_{ij}\|$ — матрица той же формы в другом базисе $(\vec{e}_i')$, причем

$$\vec{e}_i'=c^{\gamma}{}_i\vec{e}_j. \tag{3}$$

Используя эти равенства, получаем: $\bar{g}_{ij}=g\,(c_i^k\vec{e}_k,\ c_j^l\vec{e}_l)$, или

$$\bar{g}_{ij}=c_i^k g_{kl} c_j^l. \tag{4}$$

Эти равенства в матричной форме запишутся так:

$$\bar{G}={}^tCGC, \tag{4'}$$

где

$$C=\begin{Vmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{Vmatrix},\quad {}^tC=\begin{Vmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^n \\ c_2^1 & c_2^2 & \dots & c_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_n^1 & c_n^2 & \dots & c_n^n \end{Vmatrix}.$$

Здесь C — матрица перехода от базиса $(\vec{e}_i)$ к базису $(\vec{e}_i')$, а ${}^tC$ — транспонированная матрица. Так как C — невырожденная матрица, то из формулы (4′) следует важный вывод: ранги матриц G и $\bar{G}$ равны. Значит, *ранг матрицы квадратичной формы не меняется при замене базиса.* Ранг матрицы квадратичной формы называется *рангом квадратичной формы.* Квадратичная форма называется *вырожденной,* если ее ранг r меньше n, и *невырожденной*, если $r=n$.

3. Мы установили, что при замене базиса векторного пространства матрица G квадратичной формы (1) заменяется матрицей $\bar{G}$ по формуле (4′), поэтому меняются и коэффициенты g_{ij} этой формы. Естественно возникает вопрос: можно ли найти такой новый базис $(\vec{e}_i')$, в котором матрица $\bar{G}$ квадратичной формы имеет диагональный вид и, следовательно, сама квадратичная форма имеет вид:

$$q\,(\vec{x})=a_{11}\,(y^1)^2+a_{22}\,(y^2)^2+\dots+a_{nn}\,(y^n)^2?$$

Такой вид квадратичной формы называется *каноническим.* Ответом на поставленный вопрос служит следующая теорема.

Теорема 1. *В векторном пространстве V всегда существует такой базис, в котором квадратичная форма* (1) *имеет канонический вид:*

$$q\,(\vec{x})=g_{11}\,(x^1)^2+g_{22}\,(x^2)^2+\dots+g_{rr}\,(x^r)^2, \tag{5}$$

где r — ранг данной квадратичной формы.

□ По следствию теоремы 1 из § 84 в пространстве V существует базис $(\vec{e}_i)$, любые два вектора которого сопряжены относительно симметрической билинейной формы $g\,(\vec{x},\ \vec{y})$, которой соответствует данная квадратичная форма (1). Пусть в этом базисе квадратичная форма имеет вид (2). Так как $g_{ij}=g\,(\vec{e}_i,\ \vec{e}_j)=0$, если $i\neq j$, то формула (2) принимает вид:

$$q\,(\vec{x})=g_{11}\,(x^1)^2+g_{22}\,(x^2)^2+\dots+g_{nn}\,(x^n)^2. \tag{5'}$$

Матрица этой квадратичной формы имеет вид:

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & & 0 \\ & g_{22} & \\ 0 & & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как квадратичная форма g имеет ранг r, то точно r из коэффициентов g_{11}, g_{22}, ..., g_{nn} отличны от нуля, а остальные равны нулю. Меняя, если надо, нумерацию векторов базиса, в котором квадратичная форма q имеет вид (5′), мы всегда можем добиться того, чтобы отличными от нуля были первые r коэффициентов g_{11}, g_{22}, ..., g_{rr}, и, следовательно, в этом базисе квадратичная форма q будет иметь вид (5). ■

4. Рассмотрим два базиса $(\bar{e}_i)$ и $(\bar{e}_i')$ векторного пространства V и обозначим через $\|c_i^j\|$ матрицу перехода от базиса $(\bar{e}_i)$ к базису $(\bar{e}_i')$: $\bar{e}_i'=c_i^j\bar{e}_j$.

Если вектор $\bar{x}$ в базисе $(\bar{e}_i)$ имеет координаты x^i, а в базисе $(\bar{e}_i')$ — координаты y^i, то $\bar{x}=x^j\bar{e}_j$, $\bar{x}=y^i\bar{e}_i'=y^ic_i^j\bar{e}_j$. Отсюда следует, что

$$x^j=c_i^jy^i. \tag{6}$$

Мы получили *формулы преобразования* координат векторов при переходе от базиса $(\bar{e}_i)$ к базису $(\bar{e}_i')$.

Пусть квадратичная форма q в базисе $(\bar{e}_i)$ имеет канонический вид (5). Здесь некоторые из коэффициентов g_{11}, g_{22}, ..., g_{rr} могут оказаться положительными, а другие — отрицательными. Если число положительных коэффициентов равно k, где $0\leqslant k\leqslant r$, то, меняя при надобности нумерацию первых r векторов базиса, можно добиться того, чтобы положительными были первые k коэффициентов:

$$q(\bar{x})=b_1(x^1)^2+b_2(x^2)^2+\ldots+b_k(x^k)^2-b_{k+1}(x^{k+1})^2-\ldots-b_r(x^r)^2, \tag{7}$$

где b_1, b_2, ..., b_r — положительные числа. Перейдем к новому базису $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_n$ по формулам:

$$\bar{a}_\alpha=\frac{1}{\sqrt{b_\alpha}}\bar{e}_\alpha,\ \bar{a}_s=\bar{e}_s,\ \text{где } \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ r,\ s=r+1,\ \ldots,\ n.$$

Тогда формула (6) имеет вид: $x^\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{b_\alpha}}y^\alpha$, $x^s=y^s$, поэтому в новом базисе $(\bar{a}_i)$ форма q имеет вид:

$$q(\bar{x})=(y^1)^2+(y^2)^2+\ldots+(y^k)^2-(y^{k+1})^2-\ldots-(y^r)^2. \tag{8}$$

Здесь квадратичная форма представляется в виде суммы квадратов с коэффициентами $+1$ или -1. В этом случае говорят, что квадратичная форма имеет *нормальный вид*. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *В векторном пространстве V всегда существует такой базис, в котором данная квадратичная форма* (1) *имеет нормальный вид* (8), *где r — ранг квадратичной формы.*

5. Для того чтобы привести квадратичную форму к нормальному виду, можно пользоваться различными методами. Наиболее распространенным из них является метод Лагранжа, который заключается в том, что, выполняя алгебраические преобразования, квадратичную форму (2) приводят к виду:

$$q(\bar{x}) = g'_{11}(x^1 + a_{21}x^2 + a_{31}x^3 + \dots + a_{n1}x^n)^2 + g'_{22}(x^2 + a_{32}x^3 + \dots + a_{n2}x^n)^2 + \dots + g'_{rr}(x^r + a_{r+1\,r}x^{r+1} + \dots + a_{nr}x^n)^2.$$

Для этого сначала группируют все члены квадратичной формы (2), содержащие x^1, и дополняют до полного квадрата, а затем группируют все члены этой формы, содержащие x^2, и дополняют до полного квадрата и т. д.

Далее, вводя новые переменные $y^1, \dots, y^n$, форму записывают так:

$$q(\bar{x}) = \varepsilon_1 (y^1)^2 + \varepsilon_2 (y^2)^2 + \dots + \varepsilon_r (y^r)^2.$$

Здесь r — ранг квадратичной формы, а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ равны $+1$ или -1.

Следующий пример поясняет эту идею.

Пример. Привести к нормальному виду и найти соответствующий базис квадратичной формы $q(\bar{x}) = (x^1)^2 - (x^2)^2 - 6{,}5(x^3)^2 - 2x^1x^2 + 2x^1x^3 + 6x^2x^3$, заданной в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ трехмерного векторного пространства V.

Решение. Сгруппируем все члены, содержащие x^1, и дополним их до полного квадрата:

$$q(\bar{x}) = [(x^1)^2 - 2(x^2 - x^3)x^1 + (x^2 - x^3)^2] - (x^2 - x^3)^2 - (x^2)^2 - 6{,}5x^3 \cdot x^3 + 6x^2 \cdot x^3 = (x^1 - x^2 + x^3)^2 - 2(x^2)^2 - 7{,}5(x^3)^2 + 8x^2x^3.$$

Аналогично поступаем с членами, содержащими x^2. В результате получим:

$$q(\bar{x}) = (x^1 - x^2 + x^3)^2 - 2(x^2x^2 - 4x^2x^3 + 4x^3x^3) + \frac{1}{2}x^3x^3 =$$

$$= (x^1 - x^2 + x^3)^2 - 2(x^2 - 2x^3)^2 + \frac{1}{2}x^3x^3 =$$

$$= (x^1 - x^2 + x^3)^2 - (\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}\,x^3)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^3\right)^2.$$

Перейдем теперь к новому базису $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ так, чтобы формулы преобразования координат векторов имели вид:

$$y^1 = x^1 - x^2 + x^3,\quad y^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}x^3,\quad y^3 = \sqrt{2}\,x^2 - 2\sqrt{2}\,x^3.$$

Выразив x через y, получаем формулы преобразования координат векторов в виде (6):

$$x^1 = y^1 + \frac{2}{\sqrt{2}}y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y^3,$$

$$x^2 = \frac{4}{\sqrt{2}}y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y^3, \qquad x^3 = \sqrt{2}\,y^2.$$

Отсюда следует, что новые базисные векторы имеют координаты: $\vec{e}'_1\,(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{e}'_2\left(\frac{2}{\sqrt{2}},\ \frac{4}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\right)$, $\vec{e}'_3\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$.

В новом базисе $(\vec{e}'_i)$ форма q имеет нормальный вид:

$$q=(y^1)^2+(y^2)^2-(y^3)^2.$$

§ 92. Положительно-определенные квадратичные формы

1. В векторном пространстве V существует много базисов, в которых квадратичная форма имеет нормальный вид. Пусть, например, в базисах $(\vec{a}_i)$ и $(\vec{b}_i)$ квадратичная форма имеет соответственно нормальный вид:

$$q\,(\vec{x})=(y^1)^2+(y^2)^2+\ldots+(y^k)^2-(y^{k+1})^2-\ldots-(y^r)^2, \tag{1}$$

$$q\,(\vec{x})=(z^1)^2+z^2)^2+\ldots+(z^h)^2-(z^{h+1})^2-\ldots-(z^r)^2. \tag{2}$$

Возникает вопрос: не может ли случиться так, что два нормальных вида (1) и (2) одной и той же квадратичной формы содержат разное число положительных квадратов (т. е. $k\neq h$). Следующая теорема показывает, что на самом деле такого случая быть не может. Для придания этой теореме традиционной формулировки будем называть квадратичную форму q, определенную на векторном пространстве V над полем R действительных чисел, *вещественной квадратичной формой*, а число отрицательных квадратов в нормальном виде формы q — *индексом этой формы.*

Теорема 1 (закон инерции вещественных квадратичных форм). *Индекс вещественной квадратичной формы не зависит от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид.*

□ Пусть квадратичная форма q в исходном базисе $(\vec{e}_i)$ имеет вид (2) (§ 91), в базисе $A=(\vec{a}_i)$ — нормальный вид (1), а в базисе $B=(\vec{b}_i)$ — нормальный вид (2). Надо доказать, что $r-k=r-h$, т. е. $k=h$.

Используя формулы (6) из § 91 преобразования координат векторов, получаем:

$$y^i=p^i_jx^j,\ z^i=q^i_jx^j, \tag{3}$$

где матрицы $\|p^i_j\|$ и $\|q^i_j\|$ невырожденные. Из равенств (1) и (2) находим:

$$(y^1)^2+\ldots+(y^k)^2-(y^{k+1})^2-\ldots-(y^r)^2=(z^1)^2+\ldots+(z^h)^2-\\-(z^{h+1})^2-\ldots-(z^r)^2. \tag{4}$$

Предположим, что $k<h$, и рассмотрим систему уравнений: $y'=0,\ \ldots,\ y^k=0,\ z^{h+1}=0,\ \ldots,\ z^n=0$.

Заменяя в этой системе левые части их выражениями (3), получим систему $k+n-h<n$ линейных однородных уравнений с n неизвестными x^i. Как известно из алгебры, такая система имеет

ненулевые решения. Возьмем одно из таких решений: $x^i = x_0^i$. Для таких значений равенство (4) примет вид:

$$-(y^{k+1})^2 - \ldots - (y^r)^2 = (z^1)^2 + \ldots + (z^h)^2. \tag{5}$$

Так как y^i и z^i принимают только действительные значения, то из равенства (5) следует, что $y^{k+1} = \ldots = y^r = z^1 = \ldots = z^h = 0$.

Таким образом, все z^i равны нулю при $x^i = x_0^i$, и, значит, система n линейных однородных уравнений $q_j^i x^j = 0$ имеет ненулевое решение $x^j = x_0^j$. Следовательно, $\det\|q_j^i\| = 0$, что невозможно, так как матрица $\|q_j^i\|$ невырожденная.

Предполагая $k > h$, придем к такому же противоречию. Значит, $k = h$. ■

Следствие 1. *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в каноническом виде* (5) (§ 91) *квадратичной формы не зависит от выбора базиса, в котором эта форма имеет канонический вид.*

Разность $k - l = s$ между числом положительных и числом отрицательных коэффициентов в нормальном (или в каноническом) виде квадратичной формы называется *сигнатурой* этой формы.

Следствие 2. *Сигнатура квадратичной формы не зависит от выбора базиса, в котором квадратичная форма имеет нормальный вид.*

Заметим, что так как $k - l = s$, $k + l = r$, то $k = \frac{1}{2}(r + s)$, $l = \frac{1}{2}(r - s)$. Значит, зная ранг и сигнатуру квадратичной формы, легко найти числа k и l.

2. Квадратичная форма

$$q(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x}) \tag{6}$$

называется *положительно-определенной,* если симметрическая билинейная форма $q(\vec{x}, \vec{y})$ является положительно-определенной, т. е. если для любого ненулевого вектора $\vec{x}$ имеем: $q(\vec{x}) = g(\vec{x}, \vec{x}) > 0$.

Следующая теорема выражает признак положительной определенности квадратичной формы.

Теорема 2. *Вещественная квадратичная форма q является положительно-определенной тогда и только тогда, когда ее ранг максимален, т. е. $r = n$* и индекс равен нулю.

□ Выберем в пространстве V базис $(\vec{e}_i)$ так, чтобы данная квадратичная форма q имела нормальный вид (см. теорему 2 из § 91):

$$q(\vec{x}) = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^r)^2. \tag{7}$$

Так как q — положительно-определенная форма, то для любого вектора $\vec{x} \neq 0$, $q(\vec{x}) > 0$. Это возможно только в том случае, когда в формуле (7) $r = n$ и $k = n$. Действительно, если предположить, что $r < n$, то $q(\vec{e}_n) = 0$, что невозможно, так как q — положительно-определенная форма. Аналогично, если предположить, что $k < n$, то легко видеть, что $q(\vec{e}_1 + \vec{e}_n) = 0$.

Обратно, если для квадратичной формы (7) $r = n$ и индекс равен нулю, т. е. $k=n$, то формула (7) принимает вид: $q(\bar{x})=(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^n)^2$. Отсюда следует, что при $\bar{x}\neq\bar{0}$ $q(\bar{x})>0$ и, значит, форма q — положительно определенная. ■

Следствие. *Вещественная квадратичная форма q является положительно-определенной тогда и только тогда, когда ее сигнатура равна n.*

□ Действительно, мы знаем, что $s=r-2l$. Поэтому если $r=n$ и $l=0$, то, учитывая доказанную теорему, приходим к искомому выводу. ■

3. Пусть на n-мерном векторном пространстве V над полем $\boldsymbol{R}$ задана симметричная билинейная форма $l(\bar{x}, \bar{y})$ такая, что соответствующая ей квадратичная форма $q(\bar{x})=q(\bar{x}, \bar{x})$ имеет ранг $r=n$ и индекс $l\neq 0$ $(0<l<n)$. Тогда пространство V называется *псевдоевклидовым векторным пространством индекса l.*

Аффинное пространство A_n над векторным пространством V называется *псевдоевклидовым n-мерным пространством ${}^lE_n$ индекса l*, если V является псевдоевклидовым векторным пространством индекса l. Геометрия пространства ${}^lE_n$ применяется в специальной теории относительности.

§ 93. Квадрики в аффинном пространстве A_n

1. Рассмотрим аффинное пространство A_n над векторным пространством V размерности n (§ 85, п. 1). *Квадрикой* или *гиперповерхностью второго порядка* в пространстве A_n называется фигура, образованная всеми теми точками пространства A_n, координаты которых в какой-либо аффинной системе координат $O\bar{e}_i$ удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени:

$$a_{ij}x^i x^j+2a_{i0}x^i+a_{00}=0, \tag{1}$$

где $a_{ij}=a_{ji}$ (коэффициенты a_{ij} симметричны по своим индексам)[1].

Из этого определения следует, что при $n=2$ квадрика есть линия второго порядка на плоскости, а при $n=3$ — поверхность второго порядка в трехмерном пространстве.

Нетрудно доказать, что понятие квадрики не зависит от выбора системы координат. В самом деле, пусть фигура Q в системе координат $O\bar{e}_i$ имеет уравнение (1). Если $O'\bar{e}'_i$ — новая система координат, то формулы преобразования координат точек при переходе от системы $O\bar{e}_i$ к системе $O'\bar{e}'_i$ имеют вид (см. формулы (4) из § 85):

$$x^i=c^i_j y^j+x^i_0,\ i=1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Подставив эти выражения в уравнение (1) и приводя подобные члены, получим уравнение фигуры Q в новой системе координат $O'\bar{e}'_i$:

$$a'_{ij}y^i y^j+2a'_{i0}y^i+a'_{00}=0, \tag{3}$$

где

$$a'_{ij}=a_{kl}c^k_i c^l_j, \tag{4}$$

а a'_{i0}, a'_{00} — некоторые действительные числа.

[1] Так как уравнение (1) — алгебраическое уравнение второй степени, то хотя бы один из коэффициентов a_{ij} отличен от нуля.

Мы пришли к выводу, что в новой системе координат фигура Q задается алгебраическим уравнением (3), степень которого не выше чем два. Если предположить, что степень уравнения (3) меньше двух, то при обратном переходе от системы $O'\vec{e}'_i$ к системе $O\vec{e}_i$ степень уравнения фигуры Q должна повыситься, что противоречит предыдущему выводу. Таким образом, в системе $O'\vec{e}'_i$ фигура Q определяется уравнением второй степени (3). Тем самым доказано, что понятие квадрики не зависит от выбора системы координат.

2. Формулы (4) в точности совпадают с формулами (4) из § 91, по которым меняются коэффициенты квадратичной формы в векторном пространстве V размерности n при переходе от базиса $(\vec{e}_i)$ к базису $(\vec{e}'_i)$. Поэтому в левой части уравнения (1) сумма членов второй степени $a_{ij}x^ix^j$ (где по условию матрица $A=\|a^i_j\|$ ненулевая) определяет на пространстве V некоторую квадратичную форму. Ранг этой квадратичной формы называется *рангом квадрики*. Квадрика называется *невырожденной*, если ее ранг равен n.

3. Если при центральной симметрии относительно точки C, фигура F пространства A_n переходит в себя, то говорят, что эта фигура симметрична относительно точки C, а точку C называют *центром симметрии* этой фигуры. Центр симметрии квадрики Q называется *центром квадрики*. Имеет место теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема 1. *Точка M_0 является центром квадрики* (1) *тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют системе уравнений:*

$$a_{ij}x^j+a_{i0}=0,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{5}$$

При решении системы (5) встречаются три случая в зависимости от рангов матриц $A=\|a^i_j\|$ и $B=\|a_{ij},\ a_{i0}\|$.

1) $r(A)=n$ (т. е. квадрика невырожденная). Система (5) имеет единственное решение, поэтому квадрика имеет единственный центр.

2) $r(A)=r(B)=r<n$. Система (5) совместна, и в ней можно оставить лишь $r<n$ линейно независимых уравнений, которые определяют $(n-r)$-мерную плоскость *(плоскость центров)*. Каждая точка этой плоскости служит центром квадрики.

3) $r(A)\neq r(B)$. Система (5) несовместна, поэтому квадрика Q не имеет центров.

В случае 1) квадрика называется *центральной*, а в двух других случаях — *нецентральной*.

4. Введем в рассмотрение два специальных класса квадрик, которые являются обобщениями цилиндрических и конических поверхностей трехмерного пространства (см. § 76 и 77).

Квадрика называется *цилиндрической*, если существует такое векторное подпространство L_k, где $1\leqslant k<n$, что квадрика вместе с каждой своей точкой содержит всю k-плоскость, проходящую через эту точку и имеющую направляющее подпространство L_k. Из этого определения следует, что цилиндрическая квадрика состоит

из k-плоскостей, которые, очевидно, параллельны друг другу. Эти k-плоскости называются *образующими* цилиндрической квадрики.

Докажем теорему, в которой выражен критерий цилиндрической квадрики.

Теорема 2. *Если квадрика Q пространства A_n задана в аффинной системе координат $O\vec{e}_i$ уравнением*

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2a_{\alpha 0}x^\alpha + a_{00} = 0, \tag{6}$$

где α, $\beta = 1, 2, \ldots, l$, а $1 \leqslant l < n$, *то Q является цилиндрической квадрикой, образующие которой имеют направляющее подпространство $L(\vec{e}_{l+1}, \vec{e}_{l+2}, \ldots, \vec{e}_n)$.*

□ Для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что $(n-l)$-плоскость Π_{n-l}, проходящая через произвольную точку $M_0(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ квадрики (6) и имеющая направляющее подпространство $L(\vec{e}_{l+1}, \vec{e}_{l+2}, \ldots, \vec{e}_n)$, целиком принадлежит квадрике Q.

Плоскость Π_{n-l} имеет параметрические уравнения

$$x^1 = x_0^1, \ \ldots, \ x^l = x_0^l, \ x^{l+1} = x_0^{l+1} + t^{l+1}, \ \ldots, \ x^n = x_0^n + t^n.$$

Так как M_0 — точка квадрики Q, то $a_{\alpha\beta}x_0^\alpha x_0^\beta + 2a_{\alpha 0}x_0^\alpha + a_{00} = 0$. Из этого равенства следует, что любая точка плоскости Π_{n-l} принадлежит квадрике Q, т. е. Π_{n-l} целиком принадлежит квадрике Q. ■

Пример 1. Квадрика, заданная в пространстве A_4 уравнением $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 1$, является цилиндрической квадрикой с прямолинейными образующими, параллельными вектору $\vec{e}_4$. Квадрика, заданная этим же уравнением в пространстве A_5, является цилиндрической квадрикой, образующими которой являются двумерные плоскости с направляющим подпространством $L(\vec{e}_4, \vec{e}_5)$.

Для удобства дальнейшего изложения условимся точку называть k-плоскостью при $k = 0$.

Квадрика называется *конической*, если существует k-плоскость Π_k, где $0 \leqslant k < n$, такая, что квадрика вместе с каждой своей точкой M, не принадлежащей Π_k, содержит всю $(k+1)$-плоскость, проходящую через точку M и содержащую Π_k. Плоскость Π_k называется *вершиной* конической квадрики.

Из определения конической квадрики непосредственно следует, что любая точка ее вершины является центром этой квадрики. Имеет место следующая теорема, в которой выражен критерий конической квадрики. Эту теорему мы приводим без доказательства.

Теорема 3. *Если квадрика пространства A_n имеет хотя бы один центр, принадлежащий самой квадрике, то она является конической. При этом множество центров этой квадрики является ее вершиной.*

Пример 2. Квадрика, заданная в пространстве A_n уравнением $(x^1)^2 + \ldots + (x^k)^2 - (x^{k+1})^2 - \ldots - (x^n)^2 = 0$, при любом $1 \leqslant k \leqslant n$ является конической. В самом деле, ранг этой квадрики равен n, поэтому квадрика является центральной, и по теореме 1 центр квадрики совпадает с началом координат. Начало координат, очевидно, принадлежит самой квадрике.

З а м е ч а н и е. Квадрика может быть одновременно и цилиндрической, и конической. Рассмотрим, например, квадрику в A_3, заданную в системе координат $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ уравнением $(x^1)^2-(x^2)^2=0$. Она представляет собой пару плоскостей, пересекающихся по оси Ox^3, поэтому является цилиндрической квадрикой с прямолинейными образующими, параллельными вектору $\vec{e}_3$, и в то же время конической квадрикой, вершиной которой является ось Ox^3.

§ 94. Приведение уравнения квадрики к нормальному виду. Понятие о классификации квадрик

1. Докажем теорему, с помощью которой можно дать аффинную классификацию квадрик пространства A_n.

Т е о р е м а 1. *Подходящим выбором аффинной системы координат в пространстве A_n уравнение квадрики, имеющей хотя бы один центр, можно привести к виду:*

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^k)^2-(x^{k+1})^2-\ldots-(x^r)^2=\varepsilon_0, \tag{1}$$

а уравнение квадрики, не имеющей ни одного центра, к виду:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^k)^2-(x^{k+1})^2-\ldots-(x^r)^2=2x^{r+1}. \tag{2}$$

Здесь r — ранг квадрики, $\varepsilon_0=0$ или $\varepsilon_0=1$, а k может принимать значения от 0 до r.

□ Пусть в системе координат $O\vec{e}_i$ данная квадрика Q имеет уравнение

$$a_{ij}x^ix^j+2a_{i0}x^i+a_{00}=0.$$

Рассмотрим квадратичную форму $q(\vec{x})=a_{ij}x^iy^j$ и возьмем базис $(\vec{e}_i')$ так, чтобы квадратичная форма q в этом базисе имела нормальный вид (см. теорему 2 из § 91):

$$q(\vec{x})=(y^1)^2+(y^2)^2+\ldots+(y^k)^2-(y^{k+1})^2-\ldots-(y^r)^2.$$

Тогда в системе координат $O\vec{e}_i'$ квадрика Q имеет уравнение

$$(y^1)^2+(y^2)^2+\ldots+(y^k)^2-(y^{k+1})^2-\ldots-(y^r)^2+2b_{i0}y^i+a_{00}=0. \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что это уравнение можно записать так:

$$(y^1+b_{10})^2+\ldots+(y^k+b_{k0})^2-(y^{k+1}-b_{k+10})^2-\ldots-(y^r-b_{r0})^2= \\ =-2(b_{r+10}y^{r+1}+b_{r+20}y^{r+2}+\ldots+b_{n0}y^n)+a'_{00}. \tag{3$'$}$$

Пользуясь теоремой 1 из § 93, напишем систему уравнений для нахождения центров квадрики (3) (см. систему (5) из § 93):

$$y^1+b_{10}=0,\ y^2+b_{20}=0,\ \ldots,\ y^k+b_{k0}=0,$$

$$y^{k+1}-b_{k+10}=0,\ \ldots,\ y^r-b_{r0}=0,\ b_{r+10}=0,\ b_{r+20}=0,\ \ldots,\ b_{n0}=0. \tag{3$''$}$$

Рассмотрим два возможных случая.

1) Квадрика Q имеет хотя бы один центр. Тогда система (3″) совместна, поэтому $b_{r+10}=b_{r+20}=\ldots=b_{n0}=0$. Рассмотрим новую систему координат $O'\vec{e}_i'$ так, чтобы формулы преобразования имели вид:

$$z^1=y^1+b_{10},\ \dots,\ z^k=y^k+b_{k0},\ z^{k+1}=y^{k+1}-b_{k+10},\ \dots,$$
$$z^r=y^r-b_{r0},\ z^{r+1}=y^{r+1},\ \dots,\ z^n=y^n.$$

Подставив эти значения в уравнение (3′), получаем уравнение квадрики Q в новой системе координат:

$$(z^1)^2+(z^2)^2+\dots+(z^k)^2-(z^{k+1})^2-\dots-(z^r)^2=a'_{00}.$$

Если $a'_{00}=0$, то это уравнение имеет вид (1). Если $a'_{00}\neq 0$, то, применив формулы преобразования: $z^1=\sqrt{|a'_{00}|}\,t^1,\ \dots,\ z^r=\sqrt{|a'_{00}|}\,t^r$, $z^{r+1}=t^{r+1},\ \dots,\ z^n=t^n$, и, если необходимо (при $a'_{00}<0$), изменив нумерацию первых r координатных векторов, получаем уравнение вида (1).

2) Квадрика Q не имеет центров. Тогда система (3″) несовместна, поэтому хотя бы один из коэффициентов $b_{r+10},\ b_{r+20},\ \dots,\ b_{n0}$ отличен от нуля. Пусть, например, $b_{r+10}\neq 0$. Рассмотрим новую систему координат $O'\vec{e}_i$ так, чтобы формулы преобразования имели вид:

$$z^1=y^1+b_{10},\ \dots,\ z^k=y^k+b_{k0},\ z^{k+1}=y^{k+1}-b_{k+10},\ \dots,$$
$$z^r=y^r-b_{r0},\ z^{r+1}=-b_{r+10}y^{r+1}-b_{r+20}y^{r+2}-\dots-b_{n0}y^n+\frac{a'_{00}}{2},$$
$$z^{r+2}=y^{r+2},\ \dots,\ z^n=y^n.$$

Заметим, что такая система координат существует, так как матрица коэффициентов этих соотношений имеет ранг n. Подставив эти значения в уравнение (3′), мы приходим к выводу, что уравнение квадрики в новой системе координат имеет вид (2). ■

Уравнения (1) и (2) называются *нормальными уравнениями квадрик в аффинном пространстве* A_n.

2. По теореме 1 уравнение любой квадрики, имеющей центры, можно привести к виду (1). Поэтому если ранг такой квадрики меньше n, то по теореме 2 из § 93 квадрика является цилиндрической. Аналогично, используя уравнение (2), приходим к выводу, что если квадрика не имеет ни одного центра и ее ранг меньше $n-1$, то она является цилиндрической.

Ниже дана классификация нецилиндрических квадрик пространства A_n. Эта классификация основана на следующей теореме, которую приводим без доказательства.

Теорема 2. *Две квадрики Q_1, Q_2 в пространстве A_n аффинно-эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют аффинные системы координат, в которых данные квадрики имеют одно и то же нормальное уравнение.*

3. Классификация нецилиндрических квадрик, имеющих центры. Так как квадрика нецилиндрическая, то $r=n$. Поэтому квадрика является центральной, и уравнение (1) имеет вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\dots+(x^k)^2-(x^{k+1})^2-\dots-(x^n)^2=\varepsilon_0. \qquad (4)$$

Для всех возможных значений k получаем следующие $(n+1)$ уравнения:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n-1})^2+(x^n)^2=\varepsilon_0, \qquad (4_1)$$
$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n-1})^2-(x^n)^2=\varepsilon_0, \qquad (4_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x^1)^2-(x^2)^2-\ldots-(x^{n-1})^2-(x^n)^2=\varepsilon_0, \qquad (4_n)$$
$$-(x^1)^2-(x^2)^2-\ldots-(x^{n-1})^2-(x^n)^2=\varepsilon_0. \qquad (4_{n+1})$$

При $\varepsilon_0=1$ различные уравнения определяют аффинно-неэквивалентные квадрики, поэтому получаем $n+1$ видов квадрик. Квадрика, заданная уравнением (4_1), называется *эллипсоидом*, уравнением (4_{n+1}) — *мнимым эллипсоидом* (эта квадрика не имеет ни одной вещественной точки). Квадрики, заданные уравнениями (4_2)—(4_n), называются *гиперболоидами индекса* l, где l — число отрицательных коэффициентов в нормальном уравнении квадрики.

При $\varepsilon_0=0$ квадрики, заданные уравнениями (4_1)—(4_{n+1}), являются коническими (см. пример 2 из § 93). В этом случае, умножив последние[1] $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ уравнений на -1, мы приводим их к первым $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ уравнениям, поэтому при n четном получаем $\frac{n}{2}+1$, при n нечетном $\frac{n+1}{2}$ различных типов конических квадрик. Коническая квадрика, заданная уравнением (4_1) (или уравнением (4_{n+1})) называется мнимой, так как на ней имеется только одна вещественная точка — начало координат.

4. Классификация нецилиндрических квадрик, не имеющих центров. Так как квадрика, заданная уравнением (2), не является цилиндрической, то $r=n-1$, поэтому уравнение (2) имеет вид:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^k)^2-(x^{k+1})^2-\ldots-(x^{n-1})^2=2x^n. \qquad (5)$$

Для всех возможных значений k получаем n уравнений:

$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots+(x^{n-1})^2=2x^n, \qquad (5_1)$$
$$(x^1)^2+(x^2)^2+\ldots-(x^{n-1})^2=2x^n, \qquad (5_2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-(x^1)^2-(x^2)^2-\ldots-(x^{n-1})^2=2x^n. \qquad (5_n)$$

Уравнения (5_1) и (5_n) определяют одну и ту же квадрику, так как, выполнив преобразование координат по формулам: $x^1=y^1, \ldots, x^{n-1}=y^{n-1}$, $x^n=-y^n$, уравнение (5_n) приводится к виду (5_1). Таким образом, по аналогии со случаем конических квадрик, умножив соответствующие уравнения на -1, получаем при n четном $\frac{n}{2}$ и при n нечетном $\frac{n+1}{2}$ различных типов квадрик. Эти квадрики называются *параболоидами*.

---

[1] Здесь $[\alpha]$ — целая часть числа α.

Из приведенного выше исследования мы заключаем, что в трехмерном пространстве существуют всего 8 видов квадрик, которые не являются цилиндрическими: эллипсоид, мнимый эллипсоид, два гиперболоида, конус, мнимый конус и два параболоида.

§ 95. Квадрики в евклидовом пространстве

1. Пусть V — евклидово n-мерное векторное пространство над полем R. Напомним, что *линейным оператором* φ, определенным на пространстве V, называется линейное отображение $\varphi: V \to V$. Это значит, что каждому вектору $\vec{x} \in V$ ставится в соответствие вектор $\varphi(\vec{x})$ так, что для любых вещественных чисел α, β и любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$ выполняется равенство

$$\varphi(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})=\alpha\varphi(\vec{x})+\beta\varphi(\vec{y}). \tag{1}$$

Пусть $(\vec{e}_i)$ — базис пространства V. Используя равенство (1), получаем: $\varphi(\vec{x})=\varphi(x^i\vec{e}_i)=x^i\varphi(\vec{e}_i)$.
Таким образом,

$$\varphi(\vec{x})=x^i a_i^j\vec{e}_j, \tag{2}$$

где a_i^j — координаты векторов $\varphi(\vec{e}_i)$ в базисе $\vec{e}_i$, т. е.

$$\varphi(\vec{e}_i)=a_i^j\vec{e}_j. \tag{3}$$

Матрица $\|a_i^j\|$ называется *матрицей оператора* φ в базисе $(\vec{e}_i)$.

Оператор φ евклидова пространства V называется *симметрическим,* если для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{y} \in V$ выполняется равенство

$$\varphi(\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\varphi(\vec{y}). \tag{4}$$

Записав равенство (4) для векторов базиса $\vec{e}_i$ и используя равенства (3), получаем:

$$\varphi(\vec{e}_i)\,\vec{e}_j=\vec{e}_i\,\varphi(\vec{e}_j),\ a_i^k\vec{e}_k\vec{e}_j=\vec{e}_i a_j^k\vec{e}_k.$$

Если базис $(\vec{e}_i)$ ортонормированный, то отсюда следует, что $a_i^j=a_j^i$. Таким образом, *матрица симметрического оператора в ортонормированном базисе является симметрической матрицей.*

Используя равенство (2), легко доказать утверждение: *если заданы ортонормированный базис $(\vec{e}_i)$ и произвольная симметрическая матрица $\|a_i^j\|$, то отображение $\varphi: V \to V$, определяемое формулой (2), является симметрическим оператором.*

Напомним, что ненулевой вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* оператора φ, если $\varphi(\vec{x})=\lambda\vec{x}$. При этом число λ называется *собственным значением* оператора φ, соответствующим вектору $\vec{x}$. Можно доказать, что в евклидовом n-мерном векторном пространстве V существует ортонормированный базис, все векторы которого являются собственными векторами данного симметрического оператора. Пользуясь этим утверждением, докажем следующую теорему.

Теорема 1. *В евклидовом векторном пространстве V существует хотя бы один ортонормированный базис $(\vec{e}_i)$, любые два вектора которого сопряжены относительно данной симметрической билинейной формы $a(\vec{x}, \vec{y})$.*

□ Пусть в ортонормированном базисе $\vec{e}_i$ симметрическая форма a имеет вид (см. (2) из § 84):

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = a_{ij}x^i y^j. \tag{5}$$

Рассмотрим оператор φ, заданный формулой $\varphi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} x^i a_{ij}\vec{e}_j$. Так как $\|a_{ij}\|$ — симметрическая матрица, то этот оператор является симметрическим. Теперь формулу (5) можно записать так:

$$a(\vec{x}, \vec{y}) = a_{i1}x^i y^1 + a_{i2}x^i y^2 + \ldots + a_{in}x^i y^n = \varphi(\vec{x})\cdot\vec{y}. \tag{6}$$

Рассмотрим ортонормированный базис $(\vec{e}'_i)$, все векторы которого являются собственными векторами оператора $\varphi(\vec{x})$. Нетрудно убедиться в том, что этот базис искомый.

В самом деле, $a(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = \varphi(\vec{e}'_i)\,\vec{e}'_j = \lambda_i\vec{e}'_i\vec{e}'_j$. Если $i \neq j$, то $\vec{e}'_i\cdot\vec{e}'_j = 0$, поэтому $a(\vec{e}'_i, \vec{e}'_j) = 0$. ■

2. Пусть в евклидовом пространстве E_n дана квадрика Q, которая в прямоугольной системе координат определяется уравнением

$$a_{ij}x^i x^j + 2a_{i0}x^i + a_{00} = 0.$$

Мы уже отмечали (см. § 93, п. 2), что сумма $a_{ij}x^i x^j$ на векторном пространстве V евклидова пространства E_n определяет квадратичную форму $q(\vec{x}) = a_{ij}x^i x^j$. Возьмем новую прямоугольную систему координат $O\vec{e}'_i$ так, чтобы любые два вектора базиса $(\vec{e}'_i)$ были сопряжены относительно билинейной формы $a(\vec{x}, \vec{y})$, которой соответствует квадратичная форма q. По предыдущей теореме такой базис существует. В этом базисе квадратичная форма q имеет канонический вид (5) (§ 91), поэтому в системе координат $O\vec{e}'_i$ квадрика Q имеет уравнение

$$a'_{11}(y^1)^2 + \ldots + a'_{rr}(y^r)^2 + 2a'_{i0}y^i + a_{00} = 0,$$

где r — ранг квадрики.

Для дальнейшего упрощения этого уравнения мы поступаем также, как и при доказательстве теоремы 1 из § 94, т. е. путем надлежащего выбора нового начала координат добиваемся того, чтобы либо все коэффициенты a'_{i0} были равны нулю (если квадрика имеет хотя бы один центр), либо все коэффициенты a'_{i0}, кроме одного, были равны нулю (если квадрика не имеет центров). Таким образом, всегда можно выбрать такую прямоугольную систему координат, в которой квадрика Q, имеющая хотя бы один центр, определяется уравнением вида:

$$a_1(x^1)^2 + \ldots + a_r(x^r)^2 = \varepsilon_0, \tag{7}$$

а квадрика, не имеющая центра, определяется уравнением вида:

$$a_1 (x^1)^2 + \ldots + a_r (x^r)^2 = 2x^{r+1}. \tag{8}$$

Здесь r — ранг квадрики, a_1, a_2, ..., a_r — ненулевые коэффициенты, а $\varepsilon_0 = 1$ или $\varepsilon_0 = 0$.

Уравнения (7) и (8) называются *каноническими уравнениями квадрик в пространстве E_n*.

Замечание. В евклидовом пространстве E_n, вообще говоря, невозможно получить нормальные уравнения квадрик, т. е. уравнения вида (1) и (2) из § 94, так как это потребовало бы изменения длин координатных векторов (см. теорему 2 из § 91), что невозможно, ибо здесь координатные векторы должны быть единичными. Поэтому в теории квадрик в евклидовом пространстве E_n основную роль играют канонические уравнения квадрик.

3. Рассмотрим более подробно классификацию квадрик в евклидовом пространстве E_3. Используя уравнения (7) и (8), положив в них $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $a_1 = \pm\frac{1}{a^2}$, $a_2 = \pm\frac{1}{b^2}$, $a_3 = \pm\frac{1}{c^2}$, получим следующие 17 канонических уравнений квадрик в евклидовом трехмерном пространстве.

I. Квадрики ранга три:

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид;

2) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — мнимый эллипсоид;

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид;

4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — двухполостный гиперболоид;

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ — конус;

6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ — мнимый конус;

II. Квадрики ранга два:

7) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр;

8) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — мнимый цилиндр;

9) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр;

10) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой;

11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей;

12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ — эллиптический параболоид;

13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ — гиперболический параболоид;

III. Квадрики ранга один:

14) $y^2 = 2px$ — параболический цилиндр;
15) $x^2 - a^2 = 0$ — пара параллельных плоскостей;
16) $x^2 + a^2 = 0$ — пара мнимых параллельных плоскостей;
17) $x^2 = 0$ — пара совпавших плоскостей.

Квадрики 1, 3—5, 7—9, 12—14 были изучены в главе IX. Теперь мы имеем полный перечень всех аффинно-различных классов квадрик трехмерного евклидова пространства. В самом деле, имеет место следующая теорема, которую мы приводим без доказательства, так как ее доказательство по существу ничем не отличается от доказательства теоремы 4 § 50.

Теорема 2. *При любом аффинном преобразовании пространства квадрика переходит в квадрику. Любые две квадрики, принадлежащие одному из семнадцати классов, аффинно-эквивалентны, а две квадрики, принадлежащие разным классам, аффинно неэквивалентны.*

Глава XII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 96. Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Настоящая глава посвящена задачам на построение фигур и различным методам решения таких задач. Эти задачи составляют важную часть школьного курса геометрии.

1. Во всякой задаче на построение требуется по каким-либо данным фигурам построить искомую фигуру, удовлетворяющую тем или иным условиям. При этом указывается (т. е. формулируется явно или подразумевается), с помощью каких чертежных инструментов следует выполнить построение искомой фигуры. Здесь могут представиться различные комбинации из следующих инструментов: линейка, угольник, транспортир, циркуль с данным раствором, линейка с параллельными краями и др. В школьном курсе геометрии обычно рассматриваются задачи на построение с помощью циркуля и линейки, поэтому в дальнейшем всюду, где не оговорено противное, *предполагается, что все построения должны быть выполнены с помощью этих инструментов*.

Предполагается, что линейка как инструмент геометрических построений не имеет масштабных делений и с ее помощью можно провести прямую, проходящую через две данные или построенные точки. Никаких других операций выполнить линейкой нельзя. С помощью циркуля как инструмента геометрических построений можно описать окружность с центром в данной или построенной точке и радиусом, равным данному или построенному отрезку.

2. Выберем в пространстве некоторую плоскость и назовем ее *основной плоскостью*. Будем предполагать, что все рассматриваемые геометрические фигуры лежат в этой плоскости. Точки, прямые и окружности основной плоскости играют особую роль в задачах на построение с помощью циркуля и линейки, поэтому их мы называем *основными фигурами*. Кроме основных фигур, нас будут интересовать также другие простейшие фигуры: отрезки, лучи, углы, полуплоскости, многоугольники и дуги окружностей. Заметим, однако, что каждая из этих фигур определяется заданием точек, прямых или окружностей. Например, отрезок AB определяется точками A и B и прямой AB. Луч определяется началом луча (т. е. точкой), прямой, которой он принадлежит, и некоторой его

точкой. Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что во всякой геометрической задаче на построение требуется по каким-то данным основным фигурам построить другие основные фигуры (точки, прямые или окружности).

Точки и прямые, как обычно, будем обозначать соответственно прописными и строчными буквами латинского алфавита (A, B, C, . . , a, b, p, l). В дополнение к обычным обозначениям для отрезков и углов (AB, CD, $\angle BOA$, $\angle A_1$ ...) будем применять также следующие обозначения: отрезки — $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, ..., их длины соответственно a, b, c, ...; углы $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$, их градусные меры соответственно φ, ψ. Отметим, наконец, что окружности обозначаем, как обычно, через (O, r), (M, AB) или в отдельных случаях буквами γ и ω.

Для того чтобы в общем виде сформулировать постановку задачи на построение, введем следующие соглашения. Будем считать, что при формулировке и решении каждой конкретной задачи на построение по определенному правилу выделяется некоторое множество Ω основных фигур (т. е. точек, прямых и окружностей), каждый элемент которого называется *построенной фигурой*. Каждая прямая или окружность можества Ω рассматривается как единый объект — элемент множества. Например, если γ — построенная окружность, то отсюда не вытекает, что все точки окружности построены, более того, мы не предполагаем даже, что центр окружности γ является построенной точкой. Конечно, отдельные точки этой окружности как самостоятельные фигуры могут быть построенными, но это должно быть оговорено условиями задачи или получено процессом построения.

Мы предполагаем, что введенное неопределяемое понятие построенной основной фигуры удовлетворяет следующим двум требованиям.

а) Точки, прямые и окружности, заданные условиями задачи на построение, принадлежат множеству Ω, т. е. считаются построенными фигурами. Множество Ω заданных основных фигур конечно.

б) Существует хотя бы одна построенная прямая. На любой построенной прямой или окружности существуют по крайней мере две построенные точки.

Будем считать далее, что имеются некоторые операции, которые позволяют присоединять к множеству Ω новые точки, прямые и окружности. Каждую такую операцию будем называть *шагом построения*. Сформулируем постулаты построений, т. е. утверждения, в которых указано, какие шаги построения мы считаем выполнимыми.

П1. *Построение прямой, проходящей через две построенные точки.*

П2. *Построение окружности с центром в построенной точке и с радиусом, равным отрезку с концами в построенных точках.*

П3. *Построение точки пересечения двух непараллельных построенных прямых.*

П4. *Построение точек пересечения построенной окружности и построенной прямой, если они пересекаются.*

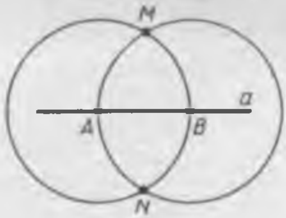


Рис. 191

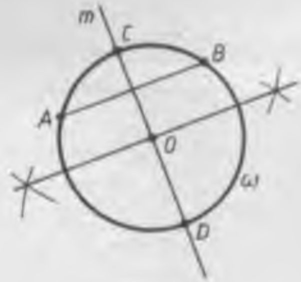


Рис. 192

П5. *Построение точек пересечения двух построенных окружностей, если они пересекаются.*

Теперь сформулируем в общем виде постановку задачи на построение циркулем и линейкой. Дано конечное множество основных построенных фигур F_1, F_2, ..., F_k и описано свойство, характеризующее искомую непостроенную основную фигуру Φ. Требуется, используя постулаты П1 — П5, получить *конечное* множество основных построенных фигур, содержащее фигуру Φ.

Отметим, что в этом определении существенно предполагается, что число выполняемых шагов построения конечно.

3. При решении задач на построение часто приходится «произвольно выбирать» промежуточные точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие построенным прямым, окружностям, а также отрезкам и лучам. Возможность выбора промежуточных построенных точек, принадлежащих построенным прямым или окружностям, обеспечено требованием б). Покажем, что возможность выбора точек, не принадлежащих построенным прямым и окружностям, можно обосновать с помощью постулатов П1 — П5 построений.

Задача 1. Построить какую-нибудь точку, не лежащую на данной прямой.

Решение. Возьмем на данной прямой две построенные точки A и B и построим две окружности (A, AB) и (B, BA). Эти окружности пересекаются в двух точках M и N (рис. 191). По постулату П5 эти точки являются построенными. Ясно, что эти точки не лежат на прямои a.

Задача 2. Построить центр данной окружности.

Решение. Пусть ω — данная окружность. Возьмем на ней две построенные точки A и B и построим серединный перпендикуляр m отрезка AB (рис. 192). Построение прямой m известно из школьного курса геометрии. Пусть C и D — точки пересечения прямой m с окружностью ω. Эти точки являются построенными точками (П4). Середина O отрезка CD является, очевидно, центром окружности w. Построение точки O выполнено на рисунке 192.

В дальнейшем изложении, где нет специальных оговорок, *предполагается, что центр данной окружности является построенной точкой.*

§ 97. Взаимное расположение двух окружностей. Построение треугольника по трем сторонам

1. При решении задач на построение часто приходится исследовать взаимное расположение прямых и окружностей. Напомним теорему о взаимном расположении прямой и окружности, известную из курса средней школы.

Теорема 1. *Пусть d — расстояние от центра O окружности радиуса r до данной прямой. Тогда, если $d<r$, то окружность и прямая имеют две общие точки, если $d=r$ — одну общую точку, а если $d>r$ — ни одной общей точки.*

Прямая, имеющая с окружностью только одну точку, называется *касательной* к окружности. Напомним, что прямая является касательной к окружности тогда и только тогда, когда она проходит через точку окружности и перпендикулярна радиусу, соединяющему эту точку с центром окружности.

2. Докажем теперь теорему о взаимном расположении двух окружностей. Если две окружности имеют две и только две общие точки, то говорят, что они *пересекаются,* а если они имеют только одну общую точку, то говорят, что они *касаются друг друга* в точке M. Точка M называется *точкой касания.* Эта точка лежит на линии центров окружностей, и в ней окружности имеют общую касательную (рис. 193, *а* — внешнее касание, 193, *б* — внутреннее касание).

Теорема 2. *Пусть (O_1, r_1) и (O_2, r_2) — две окружности, центры которых не совпадают, $d=O_1O_2$ и $r_1 \geqslant r_2$. Тогда, если $d<r_1+r_2$ и $d>r_1-r_2$, то окружности пересекаются, если $d=r_1+r_2$ или $d=r_1-r_2$, то они касаются друг друга, а если $d>r_1+r_2$ или $d<r_1-r_2$, то они не имеют общих точек.*

□ Прямоугольную систему координат $O_1\vec{i}\,\vec{j}$ выберем так, чтобы начало координат совпало с точкой O_1, а вектор $\vec{i}$ был сонаправлен с вектором $\overrightarrow{O_1O_2}$ (рис. 194). В этой системе координат точка O_2 имеет координаты (d, O), поэтому данные окружности имеют уравнения:

$$\begin{gathered} x^2+y^2=r_1^2, \\ (x-d)^2+y^2=r_2^2. \end{gathered} \qquad (1)$$

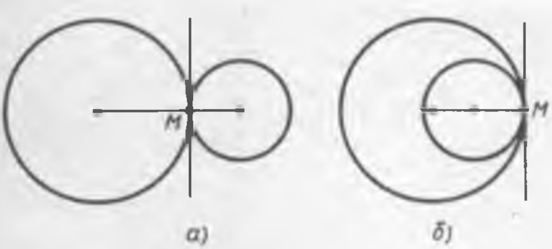


Рис. 193

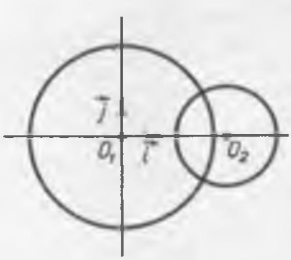


Рис. 194

Окружности (O_1, r_1) и (O_2, r_2) имеют общую точку тогда и только тогда, когда система (1) имеет действительное решение. При этом число общих точек пересечения (если такие точки имеются) равно числу действительных решений системы (1). Вычитая из первого уравнения второе, получаем систему, равносильную системе (1):

$$\begin{gathered} x^2+y^2=r_1^2, \\ 2xd-d^2=r_1^2-r_2^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Отсюда получаем:

$$x=\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}, \quad y^2=r_1^2-\left(\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}\right)^2.$$

Второе уравнение можно записать так: $y^2=\left(r_1+\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}\right)\times$ $\times\left(r_1-\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}\right)$, откуда после элементарных преобразований получаем:

$$y=\pm\frac{1}{2d}\sqrt{(r_1+r_2+d)(r_1+r_2-d)(r_1-r_2+d)(r_2-r_1+d)}. \tag{3}$$

Заметим, что $r_1+r_2+d>0$ и $r_1-r_2+d>0$ (так как по условию $r_1 \geqslant r_2$). Поэтому возможны следующие три случая.

1) $r_1+r_2-d>0$ и $r_2-r_1+d>0$. В уравнении (3) подкоренное выражение положительно, поэтому система (2) имеет два решения (одно отвечает знаку «$+$» перед корнем, а второе — знаку «$-$»). В этом случае данные окружности имеют две и только две общие точки, т. е. пересекаются (см. рис. 194).

2) $r_1+r_2-d=0$ или $r_2-r_1+d=0$. В этом случае уравнение (3) принимает вид: $y=0$, поэтому система (2) имеет одно решение: $\left(\frac{r_1^2-r_2^2+d^2}{2d}, 0\right)$. Окружности касаются друг друга, причем при $r_1+r_2-d=0$ касание внешнее (рис. 193, *а*), при $r_2-r_1+d=0$ касание внутреннее (рис. 193, *б*).

3) Один из сомножителей r_1+r_2-d и r_2-r_1+d отрицателен, а другой положителен. В этом случае подкоренное выражение в уравнении (3) отрицательно, поэтому система (2) не имеет действительных решений. В этом случае данные окружности не имеют общих точек.

Заметим, что случай, когда $r_1+r_2-d<0$ и $r_2-r_1+d<0$, не может иметь места, так как тогда $(r_1+r_2-d)+(r_2-r_1+d)<0$, что невозможно. ■

Следствие. *Пусть (O_1, r_1) и (O_2, r_2) — две окружности, причем $O_1 \in (O_2, r_2)$. Тогда, если $2r_2>r_1$, то окружности пересекаются, если $2r_2=r_1$, то они касаются друг друга, а если $2r_2<r_1$, то они не имеют общих точек.*

□ В данном случае $d=r_2$. Поэтому если $r_1 \geqslant r_2$, то нетрудно убедиться в том, что утверждение следствия непосредственно следует из теоремы 2.

Рассмотрим случай, когда $r_2 > r_1$. Тогда $2r_2 > r_1$. Так как $d = r_2$, то $d > r_2 - r_1$ и $d < r_2 + r_1$. Таким образом, по теореме 2 данные окружности пересекаются. ■

3. Теорема 2 может быть использована для доказательства *существования треугольника с данными сторонами*. Рассмотрим задачу, известную из школьного курса геометрии.

З а д а ч а. Построить треугольник, стороны которого соответственно равны данным отрезкам a, b и c.

Р е ш е н и е. Приведем решение задачи, известное из школьного курса геометрии.

Проведем какую-нибудь прямую и отложим отрезок AB, равный отрезку c. Далее построим две окружности (A, b) и (B, a). Пусть C — одна из точек пересечения этих окружностей. Соединив точки A, C и B, C отрезками, получим искомый треугольник ABC.

Возникает вопрос: при любых ли заданных отрезках a, b и c задача имеет решение? Докажем, что если $c \geqslant a$ и $c \geqslant b$, то треугольник ABC, удовлетворяющий условиям: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, можно построить тогда и только тогда, когда

$$c < a + b. \tag{4}$$

В самом деле, если треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи, построен, то по неравенству треугольника $AB < AC + BC$. Отсюда следует, что выполняется равенство (4).

Обратно, пусть для отрезков a, b и c выполняются неравенства:

$$c \geqslant a, \ c \geqslant b \text{ и } c < a + b. \tag{5}$$

Докажем, что треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи, можно построить. По построению $AB = c$, поэтому $AB < a + b$. Но, с другой стороны, если, например, $a \geqslant b$, то из неравенств $c \geqslant a$, $c \geqslant b$ следует, что $c > a - b$ или $AB > a - b$. Таким образом, по теореме 2 окружности (A, b) и (B, a) пересекаются в двух точках C и C'. Легко видеть, что точки A, B и C не лежат на одной прямой. Таким образом, отрезки AB и BC и CA образуют треугольник.

Из решения этой задачи следует важный вывод: *если длины трех отрезков a, b и c удовлетворяют неравенствам* (5), *то существует треугольник, стороны которого соответственно равны данным отрезкам. Отсюда, в частности, следует, что существует равносторонний треугольник, сторона которого равна данному отрезку.*

§ 98. Основные построения. Схема решения задач на построение

1. Решить задачу на построение — это значит свести ее к последовательному выполнению множества простейших построений П1—П5 (см. § 96). Однако на практике расчленение каждой задачи на простейшие построения нецелесообразно. Обычно сводят построение искомой фигуры не к самим простейшим построениям П1— П5, а к некоторым типичным, часто встречающимся комбинациям простейших построений, которые называются *основными построе-*

ниями; способы решения таких задач приводятся в школьных учебниках геометрии.

Мы предполагаем, что читатель умеет выполнять с помощью циркуля и линейки следующие основные построения (построения 1—13).

Построение 1. Отложить на данном луче от его начала отрезок, равный данному отрезку.

Построение 2. Отложить от данного луча в данную полуплоскость угол, равный данному углу.

Построение 3. Построить треугольник по трем сторонам (см. § 97, п. 3).

Построение 4. Построить треугольник по двум стронам и углу между ними.

Построение 5. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим углам.

Построение 6. Построить биссектрису данного неразвернутого угла.

Построение 7. Построить серединный перпендикуляр данного отрезка.

Построение 8. Построить середину данного отрезка.

Построение 9. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой. (При этом данная точка может лежать на данной прямой, может и не лежать на ней.)

Построение 10. Построить прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой.

Построение 11. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

Построение 12. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Построение 13. Построить касательную к окружности, проходящую через данную на ней точку.

2. Обычно при решении задач на построение пользуются схемой, которая состоит в следующем. Решение задачи расчленяют на четыре части: анализ, построение, доказательство и исследование. Ниже дано краткое описание каждой из этих частей.

Анализ или поиск решения задачи состоит в установлении зависимостей между данными фигурами и искомой фигурой с целью нахождения способа решения задачи.

Для проведения анализа задачу предполагают решенной и выполняют «от руки» чертеж, изображающий искомую и данные фигуры. Затем изучают искомую фигуру и ее связи с данными задачи, пока не станет ясна последовательность построений, ведущая к решению. В ряде случаев целесообразно выделить точку, прямую или отрезок (так называемый *основной элемент построения*), построение которого приводит к построению искомой фигуры.

Построение состоит в последовательном перечислении тех построений (простейших и основных), которые надо выполнить для решения задачи. При этом выполняется чертеж, т. е. фактически осуществляется шаг за шагом построение искомой фигуры с помощью циркуля и линейки.

Доказательство состоит в том, чтобы установить, что построенная фигура действительно удовлетворяет всем условиям, поставленным в задаче. В ряде случаев доказательство непосредственно усматривается из хода построения.

Исследование состоит в том, чтобы ответить на вопросы:

1) При всяком ли выборе данных задача имеет решение, т. е. искомую фигуру можно построить циркулем и линейкой?

2) Сколько различных решений имеет задача при каждом возможном выборе данных?

Для определения числа решений различают два типа задач на построение. Первый тип составляют задачи, в которых требуется определить положение искомой фигуры относительно некоторых из данных фигур. В этом случае две фигуры, удовлетворяющие условиям задачи и отличающиеся своим положением относительно данных фигур, считаются различными, если даже они равны друг другу (см. ниже, построение 14).

Второй тип составляют задачи, в которых положение искомой фигуры по отношению к данным не играет роли. Другими словами, если F_1, F_2, ..., F_k — данные фигуры, а Φ — искомая фигура, то при любом движении основной плоскости образ Φ' фигуры Φ также будет решением задачи по отношению к *данным фигурам* F_1, F_2, ..., F_k. В этом случае все равные друг другу фигуры, каждая из которых удовлетворяет условиям задачи, считаются как одно решение. Примером этого типа задач является задача построения треугольника по трем сторонам (§ 97, п. 3). Ясно, что можно построить бесконечное множество треугольников, стороны которых соответственно равны данным отрезкам. Но любые два из них равны по трем сторонам, поэтому мы считаем, что если данная задача на построение имеет решение, то она имеет только одно решение.

3. Проиллюстрируем эту схему примером.

Построение 14. Даны окружность (O, r) и точка A, не лежащая на ней. Построить касательную к окружности, проходящую через точку A.

Решение 1. Проведем анализ задачи. Пусть задача решена, и a — искомая прямая, которая касается окружности (O, r) в точке P (рис. 195, *а*). Так как $\angle OPA$ прямой, то задача по существу сводится к построению точки P на окружности (O, r), из которой отрезок OA виден под прямым углом. Эта точка является основным элементом построения. Мы знаем, что точка P лежит на окружности, построенной на отрезке OA как на диаметре.

2. Построение (рис. 195, *б*).

1) Проводим прямую AO (постулат П1).

2) Строим середину M отрезка OA (построение 8).

3) Строим окружность (M, MA) (постулат П2).

4) Находим точки пересечения P и Q окружностей (O, r) и (M, MA) (постулат П5).

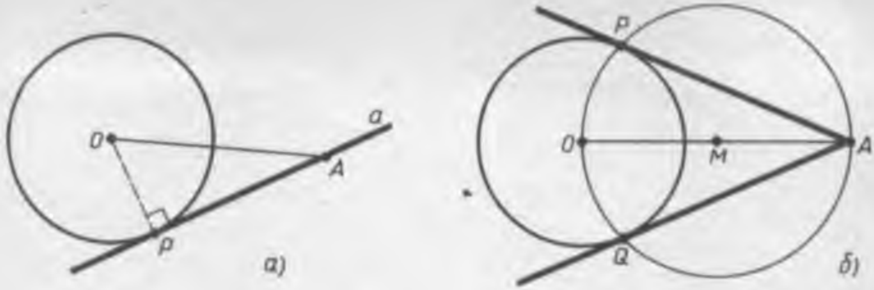


Рис. 195

5) Проведем прямые AP и AQ (постулат П1).

3. Доказательство того, что прямые AP и AQ — искомые, непосредственно следует из построения. В самом деле, $\angle OPA = \angle OQA = 90°$, поэтому $AP \perp OP$ и $AQ \perp OQ$. Отсюда следует, что прямые AP и AQ — касательные к окружности (O, r).

4. Исследование. Задача имеет решения тогда и только тогда, когда на данной окружности существует точка, из которой отрезок OA виден под прямым углом (рис. 195, *а*), т. е. когда окружности (M, MA) и (O, r) имеют общие точки. При этом число решений равно числу общих точек этих окружностей.

Возможны два случая.

1) Точка A является внутренней точкой окружности (O, r). Тогда $OA < r$ или $2OM < r$. По следствию теоремы 2 из § 97 окружности (M, MA) и (O, r) не пересекаются, поэтому задача не имеет решений[1].

2) Точка A является внешней точкой окружности. Тогда $OA > r$ или $2OM > r$. По следствию теоремы 2 из § 97 окружности (M, MA) и (O, r) пересекаются, поэтому задача имеет два решения.

§ 99. Решение задач на построение методом пересечений

Многие задачи на построение удобно решать, применяя следующие методы: *метод пересечений* (этот метод иногда называют методом геометрических мест), *метод преобразований и алгебраический метод*. Настоящий параграф посвящен методу пересечений. В последующих параграфах рассмотрены два других метода.

1. Сущность метода пересечений состоит в следующем. Задачу сводят к построению одной точки X (основного элемента построения), которая удовлетворяет каким-то двум условиям α_1 и α_2, вытекающим из постановки задачи. Пусть F_1 — множество точек, удовлетворяющих условию α_1, а F_2 — множество точек, удовлетворяющих условию α_2. Тогда, очевидно, искомой точкой X будет любая точка множества $F_1 \cap F_2$.

---

[1] По существу здесь строго обоснован наглядно очевидный факт: через внутреннюю точку окружности нельзя провести к ней касательную.

Для того чтобы точка X была построена, необходимо, чтобы фигуры F_1 и F_2 допускали построение с помощью циркуля и линейки, т. е. чтобы они были прямыми или окружностями или состояли из этих фигур или их частей. Поэтому при решении задач на построение особый интерес представляют множества точек, являющиеся прямыми или окружностями. Некоторые из множеств, которые перечислены ниже, чаще всего применяются при решении задач на построение.

1^0. Множество точек плоскости, каждая из которых равноудалена от двух данных точек A и B, есть серединный перпендикуляр отрезка AB.

2^0. Множество точек, находящихся на данном расстоянии от данной прямой, есть две прямые, параллельные данной и отстоящие от нее на данном расстоянии.

3^0. Множество точек, каждая из которых равноудалена от двух данных параллельных прямых, есть прямая, являющаяся их осью симметрии.

4^0. Множество точек, каждая из которых равноудалена от двух пересекающихся прямых, есть две взаимно перпендикулярные прямые, содержащие биссектрисы углов, образованных данными прямыми.

5^0. Множество точек плоскости, из которых отрезок AB виден под прямым углом, есть окружность (без точек A и B), построенная на отрезке AB как на диаметре.

6^0. Множество точек плоскости, из которых отрезок AB виден под углом φ, где $\varphi \neq 90°$, $\varphi \neq 180°$, есть две дуги с общими концами A и B (без точек A и B), симметричные относительно прямой AB.

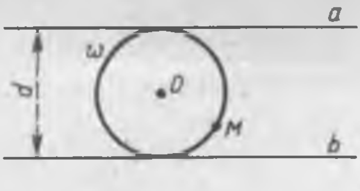
7^0. Множество точек плоскости, из которых данная окружность видна под углом φ, где $\varphi \neq 180°$, есть окружность, концентрическая с данной, радиус которой больше радиуса данной окружности.

8^0. Множество точек, делящих всевозможные хорды окружности (O, OA), проведенные через точку A окружности, в одном и том же отношении λ, где $\lambda > 0$, есть окружность (без точки A) с центром на прямой OA, проходящая через точку A. Если $\lambda = 1$, то эта окружность построена на отрезке OA как на диаметре (§ 19, задача 4).

9^0. Множество точек плоскости, для каждой из которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B постоянна, есть прямая, перпендикулярная прямой AB (§ 19, задача 2).

10^0. Множество точек плоскости, для каждой из которых сумма квадратов расстояний до двух данных точек A и B равна a^2, есть окружность с центром в середине отрезка AB, если $2a^2 > AB^2$, середина отрезка AB, если $2a^2 = AB^2$, и пустое множество, если $2a^2 < AB^2$.

11^0. Множество точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояний до двух данных точек A и B постоянно и отлично от единицы, есть окружность с центром на прямой AB (окружность Аполлония, § 19, задача 3).



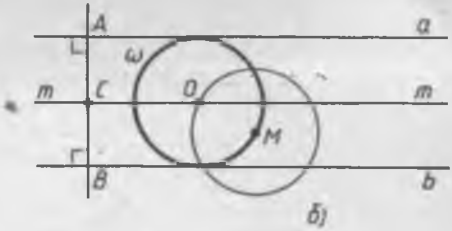


Рис. 196

2. Рассмотрим примеры задач на построение, решаемых методом пересечений.

Построение 15. Построить окружность, касательную к двум данным параллельным прямым a и b и проходящую через данную точку M.

Решение. Анализ. Предположим, что задача решена и ω — искомая окружность с центром O (рис. 196, *а*). Если мы построим точку O, то окружность (O, OM) будет искомой. Таким образом, задача сводится к построению точки O (основной элемент построения). Точка O удовлетворяет следующим двум условиям: (α_1) — эта точка равноудалена от параллельных прямых a и b; (α_2) — отстоит от точки M на расстоянии $\frac{d}{2}$, где d — расстояние между параллельными прямыми a и b (см. рис. 196, *а*). Множество точек F_1, равноудаленных от прямых a и b, есть прямая (множество 3^0), а множество точек F_2, отстоящих от точки M на расстоянии $\frac{d}{2}$, есть окружность $\left(M, \frac{d}{2}\right)$. Отсюда вытекает построение.

Построение (рис. 196, *б*).

1) Строим какой-нибудь общий перпендикуляр AB данных параллельных прямых a и b (построение 9).

2) Строим серединный перпендикуляр m отрезка AB (построение 7).

Пусть C — точка пересечения прямых AB и m.

3) Строим окружность (M, AC). Обозначим через O точку пересечения прямой m и окружности (M, AC) (см. рис. 196, *б*).

4) Строим искомую окружность (O, OM).

Доказательство. Окружность (O, OM) по построению проходит через точку M. Она касается прямых a и b, так как $OM=AC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}d$.

Исследование. Ясно, что задача имеет решение тогда и только тогда, когда прямая m и окружность (M, AC) имеют общие точки, причем число решений равно числу общих точек прямой m и окружности (M, AC). Возможны три случая.

1) Точка M лежит между параллельными прямыми a и b. В

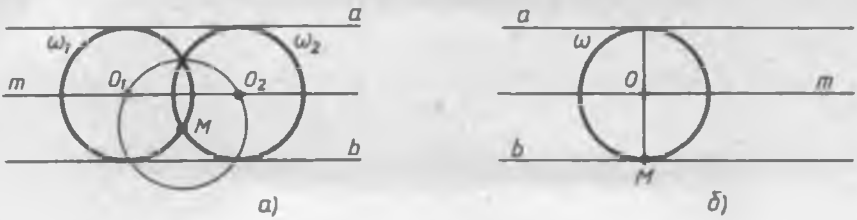


Рис 197

этом случае $\rho(m, M) < AC$, поэтому окружность (M, AC) и прямая m имеют две общие точки (теорема 1 из § 97). В этом случае задача имеет два решения (на рисунке 197, *а*) — окружности с центрами в точках O_1 и O_2).

2) Точка M лежит на одной из прямых a или b. В этом случае $\rho(m, M) = AC$, поэтому окружность (M, AC) касается прямой m, т. е. задача имеет только одно решение (рис. 197, *б*).

3) Точка M лежит вне полосы, ограниченной прямыми a и b. В этом случае $\rho(m, M) > AC$, поэтому окружность (M, AC) и прямая m не имеют общих точек. Задача не имеет решений.

Построение 16. Построить треугольник по основанию, углу при вершине и радиусу вписанной окружности.

Решение. Сформулируем задачу более точно.

Даны отрезки $\bar{a}$, $\bar{b}$ и угол[1] $\bar{\varphi}$. Построить треугольник ABC так, чтобы $BC = a$, $\angle A = \varphi$, $r = b$, где r — радиус вписанной окружности.

Решение. Анализ. Допустим, что задача решена, т. е. треугольник ABC построен. Пусть O — центр вписанной окружности (рис. 198, *а*). Очевидно, прямую BC можно выбрать произвольно, на ней легко отложить отрезок BC, равный данному отрезку $\bar{a}$. Если затем построить точку O, то легко построить третью вершину A тре-

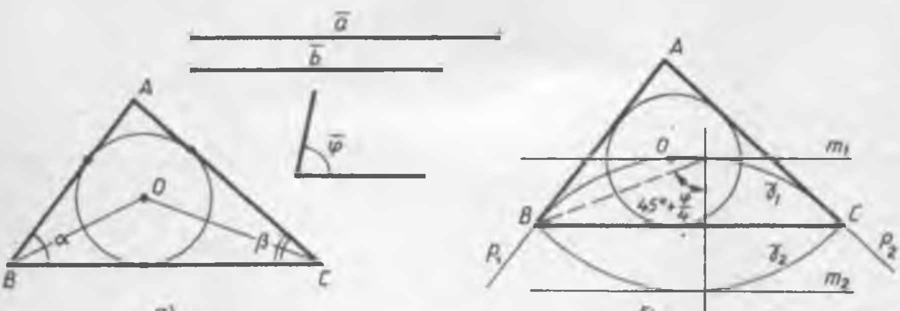


Рис. 198

[1] При решении задач на построение предполагается, что данные углы являются неразвернутыми.

угольника. Таким образом, задача сводится к построению точки O (основной элемент построения).

Из треугольника BOC имеем: $\angle BOC+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=$ $=180^\circ$, поэтому $\angle BOC=180^\circ-\frac{1}{2}(180^\circ-\angle A)=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$. Таким образом, точка O удовлетворяет двум условиям: (α_1) — она удалена от прямой BC на данное расстояние b; (α_2) — отрезок BC виден из точки O под углом $90^\circ+\frac{1}{2}\varphi$. Множество точек F_1, отстоящих от прямой BC на расстоянии b, образует две прямые, параллельные прямой BC (множество 2^0); множество точек F_2, из которых отрезок BC виден под углом $90^\circ+\frac{1}{2}\varphi$, состоит из двух дуг с общими концами A и B (множество 6^0). Отсюда вытекает построение.

Построение (рис. 198, *б*).

1) Проводим произвольную прямую и на ней откладываем отрезок BC, равный данному отрезку $\bar{a}$.

2) Строим пару прямых m_1 и m_2, параллельных BC и отстоящих от нее на расстоянии b (множество F_1).

3) Строим две дуги γ_1 и γ_2, вмещающие угол $90^\circ+\frac{1}{2}\varphi$ (множество F_2).

4) Строим точку O, которая принадлежит множеству $F_1\cap F_2$.

5) Строим окружность $(O, \bar{b})$.

6) Из точек B и C проводим касательные p_1 и p_2 к окружности $(O, \bar{b})$ (построение 14).

7) Пусть A — точка пересечения этих касательных. Треугольник ABC искомый.

Доказательство. По построению $BC=a$ и окружность $(O, \bar{b})$ вписана в треугольник ABC. Остается доказать, что $A=\varphi$. По построению $\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\varphi$, поэтому из треугольника BOC имеем: $\angle BOC+\frac{\angle B+\angle C}{2}=180^\circ$, или $90^\circ+\frac{1}{2}\varphi+\frac{\angle B+\angle C}{2}=180^\circ$, $\varphi+\angle B+\angle C=180^\circ$. Отсюда и следует, что $\angle A=\varphi$.

Исследование. 1) Выясним сначала, при каком выборе данных задача имеет решение. Множества F_1 и F_2 имеют точки пересечения тогда и только тогда, когда стрелка дуги γ_1 (или γ_2) не меньше b, т. е. когда выполнено соотношение (см. рис. 198, *б*):

$$\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ+\frac{1}{4}\varphi\right)\geqslant b. \qquad (1)$$

Мы доказали, что выполнение соотношения (1) необходимо для того, чтобы существовал треугольник ABC, удовлетворяющий условиям задачи. Докажем, что оно является также достаточным условием существования этого треугольника. В самом деле, при выполнении соотношения (1) шаги 1)—6) построения всегда выполнимы. Покажем, что касательные p_1 и p_2 к окружности (O, b) в точках B и C пересекаются. Для этого заметим, что по построению $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\varphi$, поэтому $\angle\alpha + \angle\beta = 2(\angle OBC + \angle OCB) = 2(180° - \angle BOC) = 180° - \varphi$ (см. рис. 198, *а*). Отсюда и следует, что прямые p_1 и p_2 пересекаются.

2) Нетрудно доказать, что если задача имеет решение, то она имеет единственное решение. Действительно, пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника, удовлетворяющие условиям задачи, а O и O_1 — центры окружностей, вписанных в эти треугольники. Треугольники OBC и $O_1B_1C_1$ равны, так как $BC = B_1C_1$, $\angle O = \angle O_1$, $BH = B_1H_1$, где BH и B_1H_1 — высоты этих треугольников. Отсюда следует, что $\angle OBC = \angle O_1B_1C_1$, поэтому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Аналогично $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим углам. Так как данная задача является задачей второго типа (см. § 98, п. 2), то она имеет единственное решение.

§ 100. Применение движений к решению задач на построение

1. При решении многих задач на построение с успехом применяются геометрические преобразования плоскости. При этом наиболее часто употребляются преобразования подобия, особенно гомотетия, различные виды движений, а также инверсия (см. ниже, § 102). Обычно принято говорить о различных «методах» решения задач на построение в зависимости от преобразования, применяемого при построении. В этом смысле говорят о методе подобия, методе симметрии, методе параллельного переноса, методе вращения и т. д. В этом параграфе рассмотрим примеры задач, решаемых с помощью движений, а в двух последующих параграфах рассмотрим методы подобия и инверсии.

Применение движений к решению задач на построение заключается в том, что при анализе задачи, кроме данных фигур и искомой фигуры, рассматривают вспомогательную фигуру, которая получается из этих фигур или из их частей при помощи подходящего движения и которую легко построить по данным задачи.

2. Рассмотрим пример задачи на построение, решаемой методом симметрии.

Построение 17. Даны две окружности ω_1 и ω_2 и прямая a. Построить квадрат так, чтобы две противолежащие вершины лежали на прямой a, а две другие вершины — соответственно на окружностях ω_1 и ω_2.

Решение. Анализ. Допустим, что задача решена, т. е. искомый квадрат $ABCD$ построен так, что $B \in a$, $D \in a$, $A \in \omega_2$, $C \in \omega_1$ (рис. 199). Рассмотрим вспомогательную фигуру — окружность ω_1', которая является образом окружности ω_1 при осевой симметрии с осью a (рис. 199). Так как диагонали квадрата взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам, то при этой симметрии точка C переходит в точку A. Таким образом, A есть точка пересечения окружностей ω_2 и ω_1'. Построив вершину A, легко построить остальные вершины искомого квадрата.

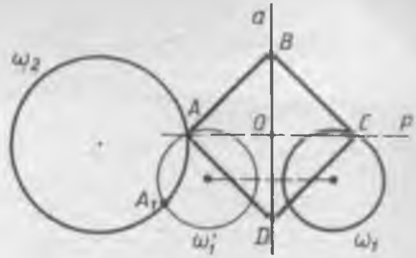


Рис. 199

П о с т р о е н и е. 1) Строим образ ω_1' окружности ω_1 при осевой симметрии с осью a. Для этого воспользуемся тем, что радиусы окружностей ω_1 и ω_1' равны, а их центры симметричны относительно прямой a. Обозначим через A одну из точек пересечения окружностей ω_1' и ω_2.

2) Построим точку C, симметричную точке A относительно прямой a. Для этого через точку A проводим прямую p, перпендикулярную прямой a. Одна из точек пересечений этой прямой с окружностью ω_1 и есть точка C.

3) Из точки O пересечения прямых p и a на прямой a откладываем отрезки OB и OD, равные отрезку AO.

4) Проводим отрезки AB, BC, CD и DA. Четырехугольник $ABCD$ искомый.

Доказательство предоставляем провести читателю самостоятельно.

И с с л е д о в а н и е. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда окружности ω_1' и ω_2 имеют общие точки.

Для определения числа решений заметим, что эта задача относится к первому типу задач (§ 98, п. 2), поэтому возможны следующие случаи.

1) Окружности ω_1' и ω_2 не имеют общих точек. Задача не имеет решений.

2) Окружности ω_1' и ω_2 касаются друг друга. В этом случае задача имеет только одно решение.

3) Окружности ω_1' и ω_2 имеют две общие точки. Задача имеет два решения.

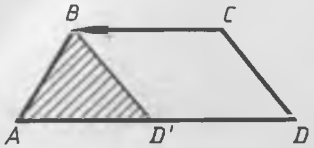
На рисунке 199 окружности ω_2 и ω_1' пересекаются в двух точках A и A_1. На этом рисунке построен только один квадрат (квадрат $ABCD$). Для построения второго квадрата следует повторить пункты 2)—4) построения, исходя из точки A_1.

4) Окружности ω_1' и ω_2 совпадают, задача имеет бесконечное множество решений: любую точку окружности ω_2 можно принять за точку A. Этот случай возможен тогда и только тогда, когда окружности ω_1 и ω_2 симметричны относительно прямой a.

3. Рассмотрим теперь пример задачи, решаемой методом параллельного переноса.

П о с т р о е н и е 18. Построить трапецию по заданным ее сторонам.

Р е ш е н и е. Уточним постановку задачи. Даны четыре отрезка



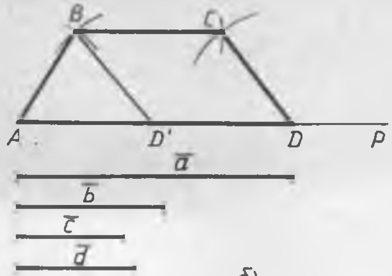


Рис. 200

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$. Построить трапецию $ABCD$, где AD — большее основание, так, чтобы $AD=\bar{a}$, $BC=\bar{b}$, $AB=\bar{c}$, $CD=\bar{d}$.

Анализ. Допустим, что задача решена и $ABCD$ — искомая трапеция. Рассмотрим вспомогательную фигуру — треугольник ABD', сторона BD' которого является образом отрезка CD при параллельном переносе на вектор $\overrightarrow{CB}$ (рис. 200, *a*). Треугольник ABD' легко построить по трем сторонам: $AB=c$, $BD'=CD=d$, $AD'=AD-BC=a-b$. Построив треугольник ABD', легко построить искомую трапецию $ABCD$.

Построение (рис. 200, *б*).

1) Проведем произвольную прямую p и от некоторой точки D этой прямой на одном из лучей отложим отрезки $DA=a$, $DD'=b$.

2) Строим треугольник ABD' так, чтобы $AB=c$, $BD=d$ (построение 3 § 98).

3) Строим параллелограмм $DD'BC$ по трем вершинам D, D' и B. Вершина C является точкой пересечения окружностей $(B, \bar{b})$ и $(D, \bar{d})$. $ABCD$ — искомая трапеция.

Доказательство предоставляем провести читателю самостоятельно.

Исследование. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда существует треугольник ABD', стороны которого соответственно равны отрезкам $\bar{a}'$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$, где $a'=a-b$. Таким образом, задача имеет решение тогда и только тогда, когда $a>b$ и наибольшее из чисел a', c и d меньше суммы двух других.

Для определения числа решений заметим, что задача относится ко второму типу задач (§ 98, п. 2). Можно утверждать, что если задача имеет решение, то она имеет только одно решение. Действительно, нетрудно доказать, что если построены две трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, стороны которых соответственно равны, то эти трапеции равны.

4. При решении задач на построение методом вращения необходимо уметь строить образы точек и прямых при данном вращении. Рассмотрим сначала эту вспомогательную задачу.

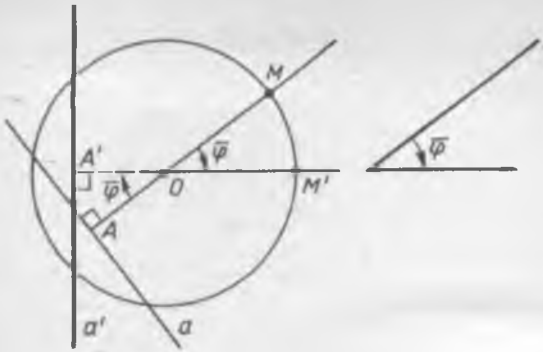


Рис. 201

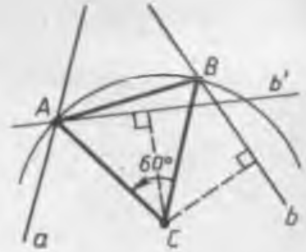


Рис. 202

З а д а ч а. Дано вращение вокруг точки O на направленный угол $\overline{\varphi}$. Построить образ данной точки M и данной прямой a при этом вращении.

Р е ш е н и е. Представляет интерес только тот случай, когда точка M не совпадает с точкой O, а прямая a не проходит через точку O.

Для построения образа M' точки M построим сначала окружность $(O,\ OM)$, а затем направленный угол $\overline{MOM_1}$, равный данному направленному углу $\overline{\varphi}$. Точка пересечения луча OM_1 с окружностью $(O,\ OM)$ и есть искомая точка M' (рис. 201).

Для построения образа a' прямой a построим сначала основание A перпендикуляра, проведенного из точки O к прямой a (рис. 201) (построение 9 § 98). Построим затем образ A' точки A в данном вращении и проведем через точку A' прямую a', перпендикулярную прямой OA'. Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что a' — искомая прямая.

Рассмотрим теперь пример задачи, которая решается методом вращения.

П о с т р о е н и е 19. Даны две прямые a и b и точка C, не лежащая на них. Построить равносторонний треугольник ABC так, чтобы вершина A лежала на прямой a, а вершина B — на прямой b.

Р е ш е н и е. А н а л и з. Допустим, что задача решена, т. е. искомый равносторонний треугольник ABC построен (рис. 202). Рассмотрим вспомогательную фигуру — прямую b', которая является образом прямой b при вращении g вокруг точки C на направленный угол $\overline{BCA}$, равный 60°. Так как $A = g(B)$, то $A \in b'$. Таким образом, точка A — точка пересечения прямых b' и a. Построив точку A, легко построить точку B.

П о с т р о е н и е. 1) Строим прямую $b' = g(b)$ (см. предыдущую задачу) и обозначим через A точку пересечения прямых a и b'.

2) Строим прообраз B точки A при вращении g^{-1}. Для этого

Рис. 203

проводим окружность (C, CA). Точка B — одна из точек пересечения этой окружности с прямой b.

3) Построив отрезки AB, BC и CA, получаем искомый треугольник.

Д о к а з а т е л ь с т в о непосредственно следует из построения.

И с с л е д о в а н и е. Обозначим через b' и b'' образы прямой b при вращениях вокруг точки C на угол 60° в положительном и отрицательном направлениях. Задача имеет решение в том и только в том случае, когда прямые b' и b'' имеют общие точки с прямой a. При этом число решений равно числу точек пересечения прямых b' и b'' с прямой a. Возможны следующие случаи.

1) $\angle(a, b) \neq 60°$. В этом случае прямые b' и b'' пересекают прямую a в различных точках, поэтому задача имеет два решения (рис. 203, треугольники ABC и A_1B_1C).

2) $\angle(a, b) = 60°$. В этом случае одна из прямых b' или b'' пересекает прямую a, а другая совпадает с ней или параллельна ей. В первом случае задача имеет бесконечное множество решений, а во втором случае — одно решение. Первый случай возможен тогда и только тогда, когда точка C лежит на прямой, содержащей биссектрисы тех вертикальных углов, образованных прямыми a и b, которые равны 120°.

§ 101. Метод подобия

1. Метод подобия состоит в следующем. Сначала строят какую-нибудь вспомогательную фигуру, подобную искомой фигуре, так, чтобы она удовлетворяла всем условиям задачи, кроме одного. Затем строят искомую фигуру как фигуру, подобную построенной и удовлетворяющую опущенному условию.

Обычно целесообразно вспомогательную фигуру строить так, чтобы она была не только подобна, но и гомотетична искомой. Поэтому при решении задач на построение методом подобия необходимо уметь строить образы данных точек при гомотетии. Рассмотрим сначала эту вспомогательную задачу.

З а д а ч а. Дана гомотетия с центром в точке O и парой соответственных точек A и A'. Построить образ M' данной точки M.

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала тот случай, когда точка M не лежит на прямой OA. Прямая AM при данной гомотетии переходит в прямую m', параллельную прямой AM и проходящую через точку A' (§ 46, свойство 1^0), поэтому прямую m' легко построить

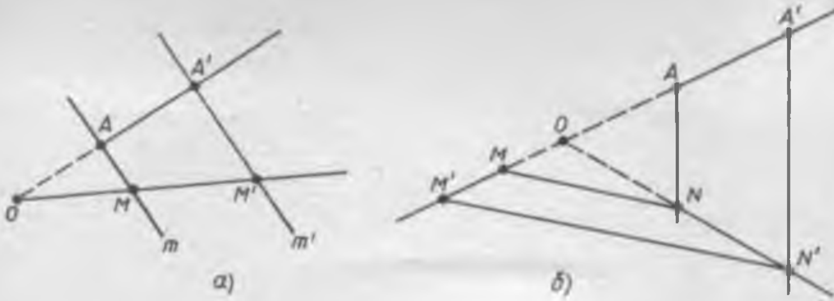


Рис. 204

(построение 10 § 98). Точка M' есть точка пересечения прямых OM и m' (рис. 204, a).

Если данная точка M лежит на прямой OA, то сначала строим образ N' какой-нибудь точки N, не лежащей на прямой OA, а затем, пользуясь точками N и N', строим образ точки M. На рисунке 204, *б* выполнено это построение.

Пользуясь этой задачей, легко построить образ данной прямой и данной окружности при гомотетии h, заданной центром O и парой соответственных точек A и A'. На рисунке 205, *а* выполнено построение образа a' прямой a, а на рисунке 205, *б* образа ω' окружности ω. На этих рисунках $M'=h(M)$, $C'=h(C)$.

2. Рассмотрим примеры задач на построение, решаемых методом подобия.

Построение 20. Построить треугольник по двум углам и периметру.

Решение. Уточним постановку задачи: даны два угла $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$ и отрезок $\bar{p}$. Построить треугольник ABC так, чтобы $\angle A=\bar{\varphi}$, $\angle B=\bar{\psi}$, $AB+BC+CA=\bar{p}$.

Анализ. Допустим, что задача решена и треугольник ABC построен (рис. 206, *а*). Этот треугольник удовлетворяет двум условиям: (α_1) $\angle A=\bar{\varphi}$; $\angle B=\bar{\psi}$; (α_2) $AB+BC+CA=\bar{p}$.

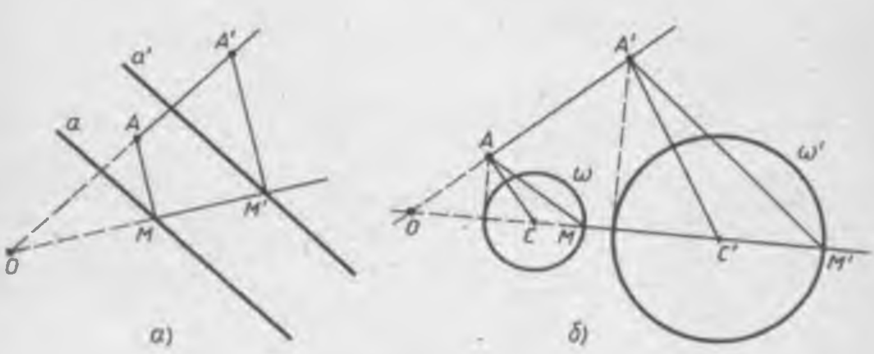


Рис. 205

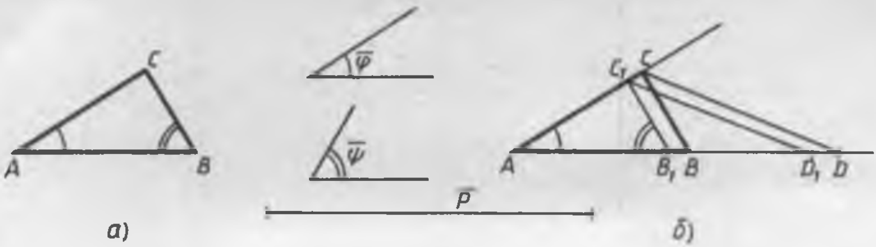


Рис. 206

Треугольник, удовлетворяющий условию (α_1), легко построить. Заметим, что существует бесконечное множество треугольников, удовлетворяющих этому условию. Пусть AB_1C_1 — один из этих треугольников. Пользуясь теперь гомотетией, легко построить искомый треугольник ABC, подобный треугольнику AB_1C_1 и удовлетворяющий условию (α_2).

Построение (рис. 206, *б*).

1) Построим треугольник AB_1C_1 так, чтобы $\angle A=\bar{\varphi}$, $\angle B_1=\bar{\psi}$ (построение 5 § 98).

2) На луче AB_1 отложим отрезки AD_1 и AD, равные соответственно отрезкам $\bar{p}_1$ и $\bar{p}$, где p_1 — периметр треугольника AB_1C_1.

3) Строим образы C и B точек C_1 и B_1 при гомотетии h, заданной центром A и парой точек DD_1. Треугольник ABC искомый.

Доказательство. Треугольники AB_1C_1 и ABC гомотетичны. Поэтому $\angle A=\varphi$, $\angle B=\psi$. Так как $D=h(D_1)$, то $AD=m\cdot AD_1$, где m — коэффициент гомотетии h. Таким образом, $AB=m\cdot AB_1$, $BC=m\cdot B_1C_1$, $CA=m\cdot C_1A$, поэтому $AB+BC+CA=m(AB_1+B_1C_1+C_1A)=mp_1$. Итак, $AB+BC+CA=AD=p$.

Исследование. Ясно, что задача имеет решение только в том случае, когда $\varphi+\psi<180°$. При выполнении этого неравенства задача имеет только одно решение. Действительно, пусть построены два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, удовлетворяющие условиям задачи. Тогда

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1; \tag{1}$$

$$AB+BC+CA=A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1. \tag{2}$$

Из равенств (1) следует, что $\triangle ABC\sim\triangle A_1B_1C_1$. Поэтому $AB=kA_1B_1$, $BC=kB_1C_1$, $CA=kC_1A_1$, где k — коэффициент подобия. Отсюда получаем: $AB+BC+CA=k(A_1B_1+B_1C_1+C_1A_1)$. Сравнивая это равенство с равенством (2), приходим к выводу, что $k=1$, т. е. $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

Построение 21. Даны угол AOB и точка M внутренней области этого угла. Построить окружность, проходящую через точку M и касающуюся сторон данного угла.

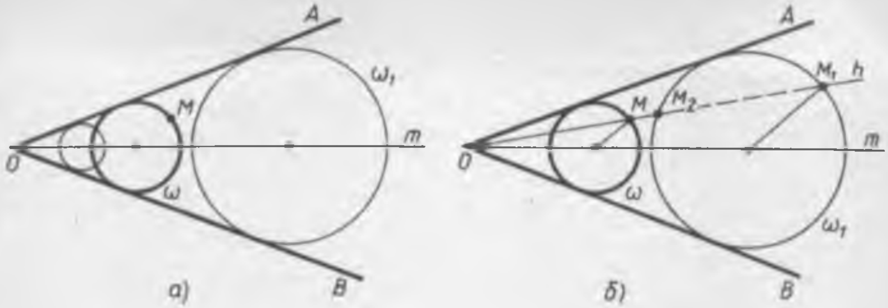


Рис. 207

Допустим, что искомая окружность ω построена (рис. 207, *а*). Эта окружность удовлетворяет двум условиям: (α_1) окружность ω касается сторон угла AOB; (α_2) $M \in \omega$. Заметим, что легко построить какую-нибудь окружность, удовлетворяющую условию (α_1). Таких окружностей существует бесконечное множество (рис. 207, *а*), причем их центры лежат на биссектрисе угла AOB. Пусть ω_1 — одна из этих окружностей. Пользуясь теперь гомотетией, легко построить искомую окружность ω.

Отсюда вытекает следующий способ решения задачи. Используя биссектриссу m угла AOB, строим какую-нибудь окружность ω_1, касающуюся сторон этого угла (рис. 207, *б*). Пусть точка M_1 — одна из точек пересечения луча OM с окружностью ω_1. Построим образ ω окружности ω_1 при гомотетии с центром O, которая точку M_1 переводит в точку M.

Задача имеет два и только два решения. На рисунке 207, *б* выполнено построение только одной окружности (окружности ω), удовлетворяющей условиям задачи. Для построения второй окружности следует построить образ окружности ω_1 при гомотетии с центром O, которая точку M_2 переводит в точку M.

§ 102. Инверсия. Метод инверсии

1. Зададим на плоскости окружность (O, r) и обозначим через E_0 множество всех точек плоскости без точки O. Каждой точке M множества E_0 поставим в соответствие точку M' так, чтобы она лежала на луче OM и $OM \cdot OM' = r^2$ (рис. 208). Получаем преобразование множества E_0, которое называется *инверсией относительно окружности* (O, r) *или просто инверсией*. Окружность (O, r) называется *окружностью инверсии*, точка O — *центром инверсии*, а r^2 — *степенью инверсии*.

Из определения инверсии следует, что в инверсии соответствие между точками множества E_0 взаимно: если точка M' соответствует точке M, то точка M соответствует M'. Каждая точка окружности инверсии является инвариантной точкой. Рассмотрим задачу построения образа точки в данной инверсии.

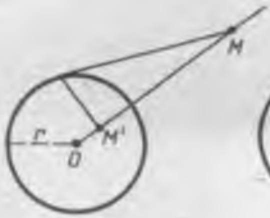


Рис. 208

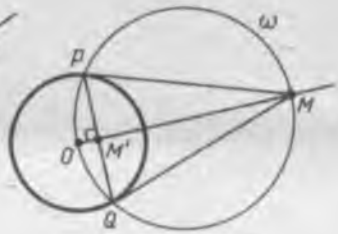


Рис. 209

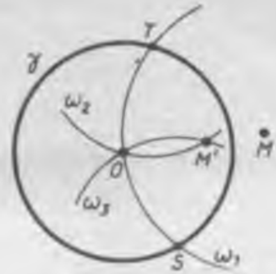


Рис. 210

З а д а ч а. Инверсия задана окружностью инверсии $(O,\ r)$. Построить образ M' точки M, не лежащей на этой окружности.

Р е ш е н и е. Рассмотрим сначала случай, когда M — внешняя относительно окружности инверсии точка. Проведем прямую OM и построим окружность ω на отрезке OM как на диаметре (рис. 209). Пусть P и Q — точки пересечения окружностей $(O,\ r)$ и ω. Тогда M' — точка пересечения прямых OM и PQ. Действительно, прямые MP и MQ — касательные к окружности $(O,\ r)$ (построение 14 § 98), поэтому углы OPM и $PM'M$ прямые. Отсюда следует, что $\triangle OPM' \sim \triangle OMP$. Следовательно, $\frac{OM'}{OP} = \frac{OP}{OM}$, или $OM' \cdot OM = OP^2 = r^2$.

Если M — внутренняя относительно окружности инверсии точка, то, пользуясь свойством взаимности, построение образа точки M выполняем в обратном порядке.

З а м е ч а н и е. На рисунке 210 указан другой способ построения образа точки при инверсии, если точка M является внешней относительно окружности инверсии. Этот способ замечателен тем, что выполняется с помощью одного циркуля. На этом рисунке выполнено построение образа M' данной точки M при инверсии, заданной окружностью γ с центром O. Строим последовательно окружности $\omega_1 = (M,\ MO)$, $\omega_2 = (T,\ TO)$ и $\omega_3 = (S,\ SO)$. Точка пересечения окружностей ω_2 и ω_3 и есть точка M'.

2. Для изучения свойств инверсии найдем ее аналитическое выражение. Прямоугольную систему координат $O\vec{i}\vec{j}$ выберем так, чтобы начало координат O совпало с центром инверсии, заданной окружностью $(O,\ r)$.

Пусть $M(x,\ y)$ — произвольная точка множества E_0, а точка $M'(x',\ y')$ — ее образ. Из определения инверсии следует, что $\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM}$, где $\lambda > 0$, и $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = r^2$.

Эти равенства в координатах запишутся так:

$$x' = \lambda x,\ y' = \lambda y, \text{ где } \lambda > 0; \tag{1}$$

$$xx' + yy' = r^2. \tag{2}$$

Подставив значения x' и y' из равенств (1) в равенство (2), получаем: $\lambda(x^2 + y^2) = r^2$. Так как точка M не совпадает с с точкой O, то $x^2+y^2\neq 0$, поэтому $\lambda=\frac{r^2}{x^2+y^2}$. Подставив значение λ в равенство (1), окончательно получаем аналитическое выражение инверсии:

$$x'=\frac{r^2x}{x^2+y^2},\quad y'=\frac{r^2y}{x^2+y^2}. \tag{3}$$

Пользуясь свойством взаимности, получаем выражения координат точки $M(x, y)$ через координаты ее образа $M'(x', y')$:

$$x=\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2},\quad y=\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}. \tag{4}$$

3. Формулы (3) и (4) дают возможность найти образы прямых и окружностей при инверсии.

Теорема 1. *Прямая, проходящая через центр O инверсии* (без точки O), *переходит в себя, а прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.*

□ Первая часть теоремы непосредственно следует из определения инверсии, поэтому докажем только вторую часть теоремы.

Пусть $Ax+By+1=0$ — уравнение произвольной прямой, не проходящей через центр инверсии. Если в этом уравнении x и y заменить выражениями (4), то получим уравнение образа этой прямой:

$$x'^2+y'^2+Ar^2x'+Br^2y'=0. \tag{5}$$

Этим уравнением задается окружность, проходящая через точку O (см. § 18, п. 2). ■

Следствие. Если прямая d, не проходящая через центр O инверсии, переходит в окружность (C, r), то прямые OC и d перпендикулярны.

□ Из уравнения (5) находим координаты центра C окружности (C, r): $C\left(-\frac{Ar^2}{2}, -\frac{Br^2}{2}\right)$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{OC}\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ перпендикулярен прямой d, заданной уравнением $Ax+By+1=0$. ■

Пользуясь этим следствием, легко указать способ построения образа w прямой d, не проходящей через центр O инверсии. Пусть H — основание перпендикуляра, проведенного из центра O окружности инверсии γ к прямой d, а H' — образ этой точки (рис. 211, *а*). Тогда w — есть окружность, построенная на отрезке OH' как на диаметре. Если прямая d пересекает окружность инверсии γ в двух точках (на рис. 211, *б* точки A и B), то окружность w проходит через точки A, B и O.

Теорема 2. *Окружность, проходящая через центр O инверсии* (без точки O), *переходит в прямую, не проходящую через точку O. Окружность, не проходящая через точку O, переходит в окружность, также не проходящую через точку O, причем точка O лежит на линии центров этих окружностей.*

Рис. 211

□ Пусть

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0 \tag{6}$$

— уравнение произвольной окружности ω. Если в этом уравнении x и y заменить их выражениями (4), то получим уравнение образа ω^1 окружности ω:

$$\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\frac{Ar^2x'}{x'^2+y'^2}+\frac{Br^2y'}{x'^2+y'^2}+C=0.$$

После элементарных преобразований это уравнение приводится к виду:

$$C\,(x'^2+y'^2)+Ar^2x'+Br^2y'+r^4=0. \tag{7}$$

Если окружность ω проходит через центр инверсии, то $C=0$, поэтому уравнением (7) определяется прямая ω', не проходящая через точку O (так как $r^4\neq 0$). Если окружность ω не проходит через точку O, то $C\neq 0$, поэтому уравнением (7) определяется окружность ω', не проходящая через центр инверсии. Из уравнений (6) и (7) находим центры окружностей: $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ и $\left(\frac{Ar^2}{2C}, -\frac{Br^2}{2C}\right)$. Эти точки и точка $O(0, 0)$ лежат на прямой, заданной уравнением $Bx-Ay=0$. ■

Теорема 3. *Если линии ω_1 и ω_2, где ω_1 — окружность или прямая, а ω_2 — окружность, касаются друг друга в точке M, отличной от центра инверсии f, то их образы ω_1' и ω_2' также касаются друг друга в точке $M'=f(M)$.*

□ Так как ω_1 и ω_2 касаются друг друга в точке M, то M' — единственная общая точка линий ω_1' и ω_2' Но каждая из этих линий является прямой или окружностью, поэтому они касаются друг друга. ■

Углом между двумя линиями γ_1 и γ_2, проходящими через данную точку M, называется угол между касательными к этим линиям в точке M. Если линии γ_1 и γ_2 касаются друг друга в точке M, то говорят, что угол между линиями γ_1 и γ_2 в точке M равен нулю. Имеет место теорема, частным случаем которой является теорема 3: *при инверсии f угол между данными линиями* γ_1 и

γ_2 *в точке* M *равен углу между их образами* γ_1' и γ_2' *в точке* $M' = f(M)$. Доказательство этой теоремы мы опускаем.

4. Метод инверсии при решении задач на построение заключается в следующем. Предположим, что задача решена и F — множество данных и искомых основных фигур. Подвергнем фигуру F или ее часть преобразованию инверсии с тем расчетом, чтобы исходную задачу свести к более простой задаче. Рассмотрим пример.

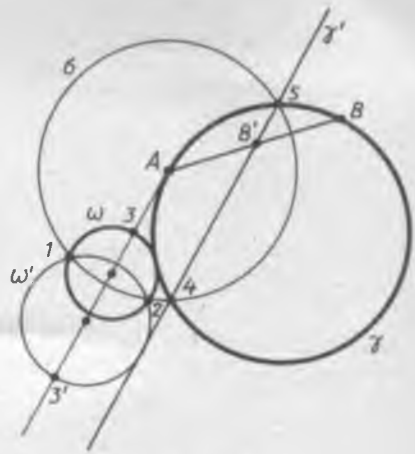


Рис. 212

П о с т р о е н и е 21. Даны окружность ω и две точки A и B, не лежащие на ней. Построить окружность, проходящую через точки A и B и касающиеся окружности ω.

Р е ш е н и е. А н а л и з. Допустим, что задача решена и γ — искомая окружность. Обозначим через F фигуру, состоящую из точек A, B и окружностей ω и γ. Проведем окружность σ с центром в точке A и рассмотрим инверсию f, для которой σ — окружность инверсии (рис. 212). Образом фигуры F при этой инверсии будет некоторая фигура F', состоящая из точки $B' = f(B)$, окружности $\omega' = f(\omega)$ и прямой $\gamma' = f(\gamma)$. (Точка A как центр инверсии не имеет образа.) Согласно теореме 3 прямая γ' касается окружности ω'. Фигуру F' легко построить, так как B' и ω' являются образами данных фигур, а γ' есть прямая, проходящая через точку B' и касательная к окружности ω'. Используя ту же инверсию, легко построить окружность γ, как образа прямой γ'.

П о с т р о е н и е. Окружность σ инверсии f выбираем так, чтобы она пересекала окружность ω в двух точках (рис. 212, на этом рисунке окружности σ и ω пересекаются в точках *1* и *2*). Тогда легко построить образ окружности ω.

1) Строим точку $B' = f(B)$.

2) Строим окружность $\omega' = f(\omega)$. Для этого достаточно построить образ *3'* точки *3* и провести окружность ω' через точки *1*, *2* и *3'* (см. рис. 212).

3) Через точку B' проводим касательную γ' к окружности ω' (построение 14). Если эта касательная проходит через точку A, то берем другую касательную.

4) Строим образ γ прямой γ' в инверсии f. На рисунке 212 окружность γ проходит через точки A, *4* и *5*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как прямая γ' не проходит через точку A, то ее образ есть окружность, проходящая через точку A (теорема 2). Прямая γ' проходит через точку B' и касается окружности ω', поэтому $B \in \gamma$, и γ и ω касаются друг друга.

Исследование. Задача может не иметь решений (если, например, одна из точек A, B является внутренней точкой относительно окружности ω, а другая — внешней), может иметь только одно решение (если, например, точки A и B лежат на касательной к окружности ω) и два решения. На рисунке 212 задача имеет два решения. Для построения второго решения, которое не изображено на этом рисунке, следует через точку B' провести вторую касательную γ'' к окружности ω' и построить ее образ.

Замечание. Сформулируем следующую общую задачу: даны три основные фигуры (точка, прямая или окружность). Построить окружность, касающуюся этих фигур[1]. В зависимости от того, являются ли данные основные фигуры точками, прямыми или окружностями, сформулированная задача содержит 10 конкретных задач, одной из которых является построение 22. Отметим, что построение окружности, проходящей через три точки, также является одной из этих задач.

В случае, когда все три данные фигуры являются окружностями, задача называется *задачей Аполлония:* построить окружность, которая касается трех данных окружностей. Остальные случаи называются предельными случаями задачи Аполлония. Пользуясь методом инверсии, по аналогии с задачей 21 легко решаются те из указанных задач, в которых по крайней мере одна из данных фигур является точкой.

§ 103. Алгебраический метод

1. Из курса средней школы известно, что если выбран некоторый отрезок e в качестве единицы измерения, то длина каждого отрезка выражается положительным числом. Обратно, при выбранной единице измерения для любого положительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом. Далее, что при переходе от одной единицы измерения к другой числа, выражающие длины отрезков, умножаются на одно и то же число.

При решении задач на построение алгебраическим методом приходится решать следующую задачу. Даны отрезки a, b, ..., l, a, b, ..., l — их длины в выбранной единице измерения. Требуется построить отрезок x, длина x которого при той же единице измерения выражается через a, b, ..., l заданной формулой:

$$x=f(a,\ b,\ \dots,\ l). \tag{1}$$

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что выражение $f(a, b, \dots, l)$, задающее длину данного отрезка через длины данных отрезков, принимает положительные значения, когда a, b, ..., l принимают положительные значения из некоторого промежутка, определенного для каждой из этих букв. Возникает вопрос: в каком случае x, определяемое формулой (1), выражает длину одного и того же

---

[1] Будем говорить, что «окружность w касается точки A», если $A \in w$.

отрезка независимо от выбора единичного отрезка? Докажем теорему, которая дает ответ на этот вопрос. Но для того чтобы ее сформулировать, введем следующее определение.

Выражение $f(a, b, \ldots, l)$ называется *однородным выражением первой степени,* если оно удовлетворяет условию:

$$f(ta, tb, \ldots, tl) = tf(a, b, \ldots, l) \tag{2}$$

для любого положительного t и всех положительных значений $a, b, \ldots, l$, при которых обе части равенства (2) имеют смысл.

Теорема. *Для того чтобы x в формуле* (1), *где $a, b, \ldots, l$ — длины данных отрезков $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{l}$, выражало длину одного и того же отрезка при любом выборе единичного отрезка, необходимо и достаточно, чтобы выражение $f(a, b, \ldots, l)$ было однородным выражением первой степени.*

□ Докажем сначала необходимость условия. Пусть при выборе единичного отрезка $\bar{e}$ длины отрезков $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{e}$ выражаются числами $a, b, \ldots, l$, а при выборе другого отрезка $\bar{e}'$ длины тех же отрезков выражаются числами $a', b', \ldots, l'$. Тогда

$$a' = ta,\ b' = tb,\ \ldots,\ l' = tl, \tag{3}$$

поэтому $x' = f(a', b', \ldots, l') = f(ta, tb, \ldots, tl)$. По условию числа x' и x выражают длину одного и того же отрезка $\bar{x}$, поэтому $x' = tx$, т. е. $f(ta, tb, \ldots, tl) = tf(a, b, \ldots, l)$. Таким образом, выражение $f(a, b, \ldots, l)$ является однородным первой степени.

Обратно, пусть для выражения $f(a, b, \ldots, l)$ выполняется равенство (2). Числа, выражающие длины отрезков $\bar{a}, \bar{b}, \ldots, \bar{l}$ в единицах $\bar{e}$ и $\bar{e}'$, связаны равенствами (3), поэтому

$$x' = f(a', b', \ldots, l') = f(ta, tb, \ldots, tl) = tf(a, b, \ldots, l) = tx.$$

Отсюда следует, что числа x' и x выражают длину одного и того же отрезка. ■

2. В средней школе рассматривают построение отрезков, заданных следующими простейшими формулами:

1) $x = a + b$;
2) $x = a - b$, где $a > b$;
3) $x = \frac{p}{q}a$, где p и q — натуральные числа;
4) $x = \frac{ab}{c}$ (построение отрезка, четвертого пропорционального к трем данным);
5) $x = \sqrt{ab}$;
6) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$;
7) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$, где $a > b$.

Здесь a, b, c — числа, выражающие длины данных отрезков $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ в выбранной единице измерения. Правая часть каждой из формул 1—7 является однородным выражением первой степени и

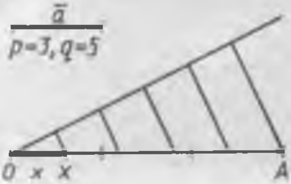


Рис. 213

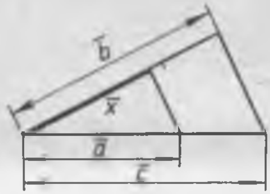


Рис. 214

Рис. 215

по доказанной теореме определяет отрезок x с точностью до равенства независимо от выбора единицы измерения.

Построение отрезков, заданных формулами 1, 2, 6 и 7, очевидно. Для построения отрезка, заданного формулой 3, представим эту формулу в виде $x=\frac{pa}{q}$. Строим сначала отрезок $\overline{m}$, где $m=pa$, а затем делим его на q равных частей. На рисунке 213 выполнено построение для случая, когда $p=3$, $q=5$ $\left(OA=3a,\ OX=\frac{3a}{5}\right)$. Построение отрезков, заданных формулами 4 и 5, выполнено соответственно на рисунках 214 и 215.

С помощью построений 1—7 можно строить отрезки, заданные более сложными формулами. При этом важно, чтобы длина искомого отрезка выражалась через длины данных отрезков и с помощью однородного выражения первой степени, содержащего конечное число операций, встречающихся в формулах 1—7, т. е. сложения, вычитания, умножения на рациональное число, деления и извлечения квадратных корней. Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и $\overline{d}$ — данные отрезки. Построить отрезок $\overline{x}$, заданный формулой

$$x=\frac{a^3+b^3}{c^2+\sqrt{cd^3}}$$

Решение. Построение отрезка x выполняем в следующей последовательности.

1. Строим отрезок $\overline{y}$, заданный формулой $y=\sqrt{\sqrt{cd}\,d}$ (для этого дважды выполняем построение отрезка, заданного формулой 5).

2. Строим отрезок $\overline{z}$, заданный формулой $z=\sqrt{c^2+\sqrt{cd^3}}=\sqrt{c^2+y^2}$ (построение отрезка, заданного формулой 6).

3. Строим отрезки $\overline{u}$ и $\overline{v}$ по формулам: $u=\frac{a\cdot a}{z}$ и $v=\frac{b\cdot b}{z}$ (построение отрезка, заданного формулой 4).

4. Строим отрезок x по формуле

$$x=\frac{a^3+b^3}{z^2}=\frac{a^3}{z^2}+\frac{b^3}{z^2}=\frac{ua}{z}+\frac{vb}{z}$$

(построение отрезков, заданных формулой 4).

3. В ряде случаев приходится строить отрезок, заданный формулой (1), где $f(a, b, ..., l)$ не является однородным выражением первой степени. В этом случае в зависимости от выбора единичного отрезка формулой (1) определяются разные отрезки при одном и том же выборе отрезков $\bar{a}, \bar{b}, ..., \bar{l}$. Поэтому для построения отрезка $\bar{x}$, *кроме отрезков* $\bar{a}, \bar{b}, ..., \bar{l}$, *следует задать также единичный отрезок* $\bar{e}$.

Нетрудно видеть, что в этом случае построение отрезка $\bar{x}$, заданного формулой (1), сводится к построению отрезка, заданного формулой

$$x = ef\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}, ..., \frac{l}{e}\right), \tag{4}$$

где $a, b, ..., l$ — длины данных отрезков $\bar{a}, \bar{b}, ..., \bar{l}$, а e — длина отрезка $\bar{e}$ *при произвольном выборе единицы измерения*. Теперь правая часть формулы (4) — однородное выражение первой степени от $a, b, ..., l, e$.

Рассмотрим два примера.

Пример 2. Даны отрезки $\bar{a}, \bar{b}$ и единичный отрезок $\bar{e}$. Построить отрезки, заданные формулами:

$$\text{а) } x = ab; \quad \text{б) } y = \sqrt{a}.$$

Решение. Искомые отрезки строим, используя формулу (4).

$$\text{а) } x = ab; \quad x = e\left(\frac{a}{e}\frac{b}{e}\right) = \frac{ab}{e}$$

(построение отрезка, заданного формулой 4, п. 2);

$$\text{б) } y = \sqrt{a}; \quad y = e\sqrt{\frac{a}{e}} = \sqrt{ae}$$

(построение отрезка, заданного формулой 5, п. 2).

Пример 3. Построить отрезок, длина которого в выбранной единице измерения $\bar{e}$ равна $\sqrt{3+\sqrt{5}}$.

Решение. Требуется построить отрезок $\bar{x}$, длина x которого выражается формулой $x = e\sqrt{3+\sqrt{5}}$ или $x = \sqrt{3e^2 + e\sqrt{5e^2}}$.

Пользуясь построениями отрезков, заданных формулами 1—7 п. 2, строим последовательно отрезки $\bar{y}$, $\bar{z}$ и $\bar{u}$: $y = \sqrt{(3e)e}$, $z = \sqrt{(5e)e}$, $u = \sqrt{ez}$, а затем строим искомый отрезок $\bar{x}$ по формуле $x = \sqrt{y^2 + u^2}$.

4. Алгебраический метод решения задач на построение состоит в следующем. Задачу формулируют так, чтобы в качестве данных фигур и искомой фигуры были отрезки. Используя подходящие теоремы, выражают длину искомого отрезка через длины данных отрезков и по найденной формуле строят искомый отрезок. Рассмотрим два примера.

Построение 22. Дан треугольник ABC. Построить три

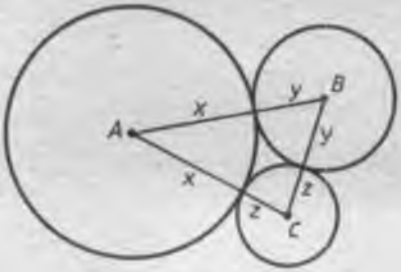


Рис. 216

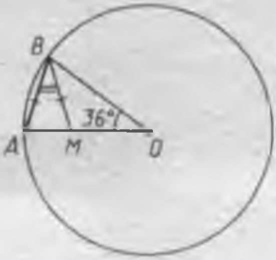


Рис. 217

окружности с центрами соответственно в точках A, B и C так, чтобы они попарно касались друг друга внешним образом.

Решение. Анализ. Пусть ABC — данный треугольник, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ — его стороны ($AB=c$, $BC=a$, $CA=b$), а $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ — радиусы искомых окружностей (рис. 216). Задача будет решена, если мы сможем построить отрезок x по известным отрезкам $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$. По теореме 2 из § 97 имеем:

$$x+y=c,\ x+z=b,\ y+z=a. \tag{5}$$

Отсюда получаем: $x=\frac{c+b-a}{2}$. Построив отрезок $\bar{x}$ по этой формуле, проводим окружность (A, x), а затем две другие окружности: $(B, c-x)$ и $(C, b-x)$.

Построение и доказательство предлагаем читателю провести самостоятельно.

Исследование. Из формул (5) находим:

$$x=\frac{c+b-a}{2},\ y=\frac{a+c-b}{2},\ z=\frac{a+b-c}{2}. \tag{6}$$

Из этих формул видно, что задача всегда разрешима, так как в треугольнике ABC $c+b-a>0$, $a+c-b>0$ и $a+b-c>0$ и отрезки x, y и z могут быть построены по формулам (6).

Формулы (6) дают единственные значения радиусов искомых окружностей, поэтому задача имеет единственное решение.

Построение 23. Вписать в данную окружность (O, r) правильный десятиугольник.

Решение. Пусть AB — сторона правильного десятиугольника, вписанного в окружность (O, r), а x — длина отрезка AB (рис. 217).

Проведем биссектрису BM угла B треугольника OAB. Так как треугольник AOB равнобедренный и $\angle O=36°$, то $\angle B=72°$, $\angle A=72°$, поэтому $\angle ABM=36°$. Таким образом, $\triangle ABM\sim\triangle AOB$, поэтому $\frac{AB}{AM}=\frac{AO}{AB}$, откуда $\frac{x}{r-x}=\frac{r}{x}$, или $x^2+xr-r^2=0$.

Это уравнение имеет следующие корни:

$$x_1 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}, \quad x_2 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + r^2}. \qquad (7)$$

Ясно, что $x_1 > 0$, а $x_2 < 0$, поэтому только первому корню соответствует отрезок x, который и является стороной правильного десятиугольника, вписанного в окружность (O, r).

По данному отрезку r строим отрезок x, длина x которого определяется первой из формул (7), а затем строим правильный десятиугольник, вписанный в окружность (O, r).

§ 104. Признак разрешимости задач на построение циркулем и линейкой

1. Одной из важнейших проблем в теории геометрических построений является установление критерия, позволяющего ответить на вопрос: можно ли циркулем и линейкой по данным фигурам построить ту или иную геометрическую фигуру? При этом существенно отметить, что *задача о разрешимости ставится только в том случае, когда искомая фигура, которую следует построить, существует*. Рассмотрим, например, такую задачу. На прямой даны три точки M, N и P. Построить треугольник так, чтобы его стороны были равны соответственно отрезкам MN, NP и MP. Эта задача вообще неразрешима, так как такого треугольника не существует. Рассмотрим другой пример. Даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не лежащая на этих прямых. Построить прямую, проходящую через точку A так, чтобы прямые a и b отсекали на ней отрезок, равный данному отрезку p. Можно показать, что при некотором ограничении, накладываемом на отрезок p, прямая, удовлетворяющая условиям задачи, существует. Однако, несмотря на кажущуюся простоту, эта задача неразрешима циркулем и линейкой.

2. Пусть в некоторой единице измерения длина отрезка x выражается через длины отрезков a, b, ..., l формулой

$$x = f(a, b, \ldots, l). \qquad (1)$$

Возникает вопрос: всегда ли отрезок x можно построить линейкой и циркулем? Ответ на этот вопрос дают следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если длина отрезка x выражается через длины данных отрезков при помощи конечного множества арифметических операций (т. е. сложения, вычитания, умножения и деления) и извлечения квадратных корней, то отрезок x можно построить циркулем и линейкой.*

□ Утверждение теоремы очевидно, так как, используя прием, который был применен при решении примера 1 из § 103, построение отрезка x всегда можно свести к построению конечного множества вспомогательных отрезков $\bar{y}$, $\bar{z}$, ..., заданных формулами вида 1—7 (п. 2, § 103).

Теорема 2. *Если отрезок $\bar{x}$ можно построить по данным отрезкам циркулем и линейкой, то длина x этого отрезка выражается через длины данных отрезков при помощи конечного множества арифметических операций и извлечения квадратных корней.*

□ Пусть $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ — данные отрезки, а $\bar{x}$ — искомый отрезок, концы которого обозначим через X и Y. Возможность построения отрезка $\bar{x}$ надо понимать как существование цепочки, состоящей из конечного множества построений П1 — П5 (§ 96), которая при любом расположении данных отрезков приводит к построению искомого отрезка $\bar{x}$, т. е. точек X и Y. Обозначим концы одного из данных отрезков через O и E_1 и построим ортонормированный репер (O, E_1, E_2). На луче OE_1 от его начала отложим отрезки $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ и их концы обозначим через A_1, A_2, ..., A_k. Очевидно, эти точки имеют координаты $A_1(a_1;\ 0)$, $A_2(a_2,\ 0)$, ..., $A_k(a_k,\ 0)$, где a_1, a_2, ..., a_k — длины данных отрезков, причем одно из этих чисел равно 1.

После построения отрезка $\bar{x}$ на основной плоскости будем иметь конечное множество промежуточных точек, прямых и окружностей. Но любую построенную прямую можно задать двумя построенными точками, а любую окружность — ее построенной точкой и центром. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что после построения отрезка $\bar{x}$ на основной плоскости, кроме данных точек O, A_1, ..., A_k, будем иметь конечное множество построенных точек M, N, ..., P и две искомые точки X, Y. Пусть эти точки в ортонормированном репере (O, E_1, E_2) имеют координаты

$$M(m_1,\ m_2),\ N(n_1,\ n_2),\ ...,\ P(p_1,\ p_2),\ X(x_1,\ x_2),\ Y(y_1,\ y_2). \tag{2}$$

Обозначим через L множество, состоящее из чисел 0, a_1, ..., a_k и всех тех чисел, которые выражаются через них при помощи конечного множества рациональных операций и извлечении квадратных корней. Докажем, что координаты всех точек (2) принадлежат множеству L.

Для этого заметим, что если координаты каких-то двух точек $S(s_1,\ s_2)$ и $T(t_1,\ t_2)$ принадлежат множеству L, то коэффициенты уравнения прямой ST или уравнения окружности (S, ST) также принадлежат множеству L. В самом деле, прямая ST и окружность (S, ST) имеют соответственно уравнения:

$$(t_2-s_2)x-(t_1-s_1)y-(s_1t_2-s_2t_1)=0, \tag{3}$$

$$(x-s_1)^2+(y-s_2)^2=(t_1-s_1)^2+(t_2-s_2)^2. \tag{4}$$

Каждая из точек (2) получается либо в результате конечного множества построений П3—П5, либо выбором на построенной прямой или окружности построенной точки (§ 96, п. 2). В первом случае ее координаты получаются решением системы двух уравнений, каждое из которых имеет вид (3) или (4), где $S(s_1;\ s_2)$ и $T(t_1;\ t_2)$ — ранее построенные или данные точки. Ясно, что числа, являющиеся решением этой системы, принадлежат множеству L. Во втором случае, т. е. при выборе произвольно построенной точки на построенной прямой или окружности, условимся эту точку выбрать так, чтобы ее координаты принадлежали множеству L. Это всегда можно сделать, так как на прямой (3) и на окружности (4) такие точки существуют.

Таким образом, числа x_1, x_2, y_1, y_2 принадлежат множеству L, поэтому число $x=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ принадлежит множеству L. Другими словами, число x выражается через a_1, a_2, ..., a_k при помощи конечного множества арифметических операций и извлечения квадратных корней. ■

§ 105. Примеры задач на построение, неразрешимых циркулем и линейкой

В этом параграфе, используя теорему 2 предыдущего параграфа, рассмотрим примеры доказательства неразрешимости задач на построение циркулем и линейкой. Примеры, избранные нами, принадлежат к числу классических задач, которые тысячелетиями привлекали к себе внимание математиков.

1. Задача о трисекции угла.

Дан угол α. Линейкой и циркулем построить угол φ так, чтобы $\varphi=\frac{1}{3}\alpha$.

Существует бесконечное множество углов, для которых эта задача разрешима. Например, если $\alpha=90°$, то $\varphi=30°$, и мы знаем, что такой угол легко строится циркулем и линейкой, используя прямоугольный треугольник. Аналогично, если $\alpha=\frac{\pi}{2^n}$, где $n=2, 3, \ldots$, то угол φ можно построить.

Докажем, что *существует бесконечное множество углов, для которых поставленная задача неразрешима с помощью циркуля и линейки.*

Пусть $\angle O$ — данный угол, $\angle O_1$ — искомый угол, а $\bar{e}$ — единичный отрезок (рис. 218). Построим прямоугольные треугольники OAB и $O_1A_1B_1$ с гипотенузами $OA=O_1A_1=2$ так, как показано на рисунке 218. Пусть a и x — соответственно отрезки OB и O_1B_1. Выясним, можно ли по данным сторонам прямоугольного треугольника OAB построить отрезок x. Ясно, что если эта задача разрешима с помощью циркуля и линейки, то разрешима и задача о трисекции угла α, и наоборот.

Из тригонометрии известно, что $\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$. Так как $\cos\alpha=\frac{OB}{OA}$, $\cos\varphi=\frac{O_1B_1}{O_1A_1}$ или $\cos\alpha=\frac{a}{2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{2}$, то подставив эти значения в предыдущее равенство, получаем:

$$x^3-3x-a=0. \qquad (1)$$

Пусть, например, $\alpha=60°$, тогда $a=1$ и многочлен в правой части уравнения (1) имеет вид: x^3-3x-1.

В алгебре доказывается следующее утверждение: если многочлен третьей степени над полем рациональных чисел неприводим над этим полем, то ни один из его корней нельзя получить из уравнения (1) с помощью конечного множества арифметических операций и извлечения квадратных корней.

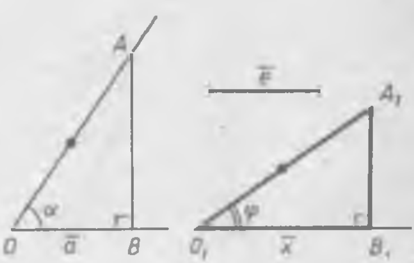


Рис. 218

Таким образом, при $\alpha=60°$ по теореме 2 из § 104 задача о трисекции угла неразрешима линейкой и циркулем. Можно доказать, что при $a=\frac{1}{2p}$, где p — простое число, задача о трисекции соответствующего угла $\left(\alpha=\arccos\frac{1}{2p}\right)$ неразрешима линейкой и циркулем.

2. Задача об удвоении куба.

Построить ребро куба, объем которого вдвое больше объема данного куба.

Пусть $\bar{a}$ — ребро данного куба, $\bar{x}$ — ребро искомого куба, а a и x — их длины. Тогда по условию задачи $x^3=2a^3$. Если ребро данного куба принять за единицу измерения, то $a=1$, поэтому это уравнение принимает вид: $x^3-2=0$.

По аналогии с уравнением (1) ни один из корней многочлена x^3-2 нельзя получить из (1) с помощью конечного множества арифметических операций и извлечения квадратных корней. Поэтому по теореме 2 из § 104 *задача об удвоении куба неразрешима линейкой и циркулем.*

3. Задача о спрямлении окружности.

Построить отрезок, длина которого равна длине данной окружности.

Если радиус окружности принять за единицу измерения, то задача сводится к построению отрезка $\bar{x}$, длина x которого равна 2π или π, если задан единичный отрезок $\bar{e}$.

Из алгебры известно, что множество $\boldsymbol{R}$ действительных чисел разбивается на два подмножества: числа алгебраические и числа трансцендентные. Число называется *алгебраическим*, если оно служит корнем некоторого многочлена над полем $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел; в противном случае оно называется *трансцендентным*. В частности, любое рациональное число $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа, является алгебраическим, так как оно является корнем многочлена $nx-m$. Согласно теореме 2 из § 104, зная единичный отрезок, можно линейкой и циркулем построить только такой отрезок, длину x которого можно получить из (1) с помощью конечного множества арифметических операций и извлечения квадратных корней. Следовательно, x является числом алгебраическим. При этом далеко не любой отрезок, длина которого является алгебраическим числом, можно построить (например, нельзя построить отрезки длиной $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[7]{5}$ и др.). В 1882 г. Линдеманн доказал, что π — число трансцендентное. Отсюда следует, что линейкой и циркулем нельзя построить отрезок, длина которого равна π, и, следовательно, этими средствами *задача о спрямлении окружности неразрешима.*

4. Задача о квадратуре круга.

Построить квадрат, площадь которого равна площади данного круга.

Пусть r — радиус данного круга, а x — сторона искомого квадрата. Тогда $x^2 = \pi r^2$, или $x^2 = yr$, где $y = \pi r$.

Следовательно, задача о квадратуре круга сводится к построению отрезка длиной π по единичному отрезку r. Мы уже знаем, что эта задача неразрешима циркулем и линейкой, поэтому *задача о квадратуре круга неразрешима этими средствами.*

Эта задача рассматривалась еще в «Папирусе Ринга» около 2000 лет до н. э. Там было дано правило приближенного ее решения: $x = \frac{16}{9} r$ (это соответствует тому, что $\pi = 3{,}16$). Многие математики и в древности, и в более позднее время безуспешно пытались решить задачу о квадратуре круга линейкой и циркулем. Как мы отметили выше, только в конце XIX в. было доказано, что эта задача неразрешима циркулем и линейкой.

5. Построение правильных многоугольников.

Из школьного курса геометрии известно построение правильного треугольника и квадрата. Известно, как построить правильный $2n$-угольник, зная построение правильного n-угольника.

Возникает вопрос: при любом ли натуральном $n > 2$ можно линейкой и циркулем построить правильный n-угольник (или, что по существу то же самое, разделить окружность на n равных частей)? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема Гаусса, которую приводим без доказательства.

Теорема. *Построение правильного n-угольника линейкой и циркулем возможно тогда и только тогда, когда n имеет следующее разложение на множители:*

$$n = 2^m p_1 p_2 \dots p_s,$$

где m — целое неотрицательное число, а $p_1, p_2, \dots, p_s$ — различные между собой простые числа Ферма (т. е. простые числа вида $2^{2^k} + 1$).

Рассмотрим примеры применения этой теоремы.

1. При $m = 0$, $s = 1$ число n имеет вид: $n = p_1$, где p_1 — простое число Ферма. При $k = 0, 1, 2, 4$ получим: $n = 3$, $n = 5$, $n = 17$, $n = 257$, $n = 65\,537$. Эти n-угольники можно построить линейкой и циркулем. Число 7 простое, но оно не является простым числом Ферма, поэтому *линейкой и циркулем нельзя построить правильный 7-угольник.*

2. При $m = 0$, $s = 2$ число n имеет вид: $n = p_1 \cdot p_2$, где p_1 и p_2 — простые числа Ферма. Если, например, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, то $n = 15$. Значит, *циркулем и линейкой можно построить правильный 15-угольник.*

3. Число $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ не удовлетворяет теореме Гаусса, так как в разложении этого числа простой множитель Ферма 3 входит дважды. Следовательно, циркулем и линейкой нельзя разделить окружность на 360 равных частей и поэтому *нельзя построить циркулем и линейкой угол в 1°.*

§ 106. О решении задач на построение различными средствами

1. В предыдущих параграфах этой главы мы изложили теорию геометрических построений, выполняемых циркулем и линейкой. В этом заключительном параграфе рассмотрим задачи на построение, выполняемые иным набором инструментов. Наиболее распространенными являются построения, выполняемые:

— одной линейкой,

— линейкой, в предположении, что на плоскости дана какая-нибудь геометрическая фигура, например, окружность с центром, параллельные прямые и т. д.,

— одним циркулем,

— линейкой с параллельными краями,

— линейкой и угольником.

Иногда рассматриваются также задачи на построение, решаемые циркулем и линейкой на ограниченной части плоскости (построения с так называемыми недоступными точками). Этот случай особенно часто встречается в чертежной практике, так как чертеж выполняется на листе бумаги, который ограничен размерами.

Основные принципы обоснования теории геометрических построений, изложенные в § 96, сохраняются при каждом из отмеченных выше случаев. Различие заключается в определении основных фигур построения и в перечне предложений, принятых за постулаты. Мы не имеем возможности рассмотреть все случаи, перечисленные выше, поэтому ограничимся кратким обзором теории.

2. Рассмотрим сначала задачи на построение, выполняемые одной линейкой. Отметим, что круг этих задач на евклидовой плоскости весьма ограничен. Легко показать, что далеко не каждая задача, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой. Поэтому обычно при решении задач на построение одной линейкой в число данных фигур включают какие-то вспомогательные фигуры, например, параллельные прямые, перпендикулярные прямые, окружность, квадрат и др., которые используются при построении. Тем самым множество задач на построение, разрешимых одной линейкой, значительно расширяется. Ниже будет доказано, например, что любая задача, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена одной линейкой, если на плоскости дана построенная окружность с построенным центром.

Уточним постановку задачи на построение одной линейкой, т. е. определим основные фигуры и сформулируем основные требования и постулаты (см. § 96, п. 2).

На основной плоскости основными фигурами считаются точки и прямые. Будем считать, что при формулировке и решении каждой конкретной задачи на построение с помощью линейки по определенному правилу выделяется некоторое множество основных фигур (т. е. точек и прямых), каждый элемент которого называется построенной фигурой. При этом предполагается, что выполняются следующие требования.

а) Точки и прямые, заданные условиями задачи на построение, считаются построенными фигурами. Множество заданных точек и прямых конечно.

б) Существуют хотя бы две построенные пересекающиеся прямые, на каждой из которых имеются по крайней мере две построенные точки, отличные от точки пересечения прямых.

Постулатами построения считаются только предложения П1 и П3, сформулированные в п. 2, § 96.

Таким образом, окружность исключается из числа основных фигур. Несмотря на это, она может быть задана условием задачи как вспомогательная фигура (окружность задается с помощью центра и одной точки; эти точки считаются построенными). В этом случае список постулатов следует дополнить постулатом П4. Но в силу отсутствия постулата П2 этот постулат может быть применен только к данной в условиях задачи вспомогательной окружности.

В общем виде постановку задачи на построение одной линейкой формулируют так: дано конечное множество построенных точек и прямых F_1, F_2, ..., F_k и описано свойство, характеризующее непостроенную точку или прямую Ф. Требуется, используя постулаты П1 и П3, получить *конечное* множество построенных точек и прямых, содержащих Ф.

З а м е ч а н и е. При решении задач на построение часто приходится «произвольно выбирать» промежуточные точки, лежащие на построенных прямых или не лежащие на них. Возможность выбора таких точек обеспечена требованием б) и постулатами П1 и П3. В самом деле, нетрудно доказать, что, пользуясь этими предложениями, с помощью одной линейки можно построить конечное множество точек, лежащих на данной прямой или не лежащих на ней, а также конечное множество точек любого данного отрезка и точек, не принадлежащих данному отрезку, но лежащих на прямой, содержащей этот отрезок.

3. Рассмотрим примеры решения задач на построение одной линейкой. Для этого воспользуемся следующим утверждением, которое доказано нами в главе V (см. задачу 6, § 51).

Л е м м а о т р а п е ц и и. *В произвольной трапеции точка пересечения прямых, содержащих боковые стороны, середины оснований и точка пересечения диагоналей лежат на одной прямой* (см. рис. 130, с. 154).

З а д а ч а 1. Даны отрезок AB, его середина E и точка D, не лежащая на прямой AB. Построить прямую, проходящую через точку D и параллельную прямой AB.

Р е ш е н и е. А н а л и з. Допустим, что задача решена и искомая прямая построена. Возьмем на прямой AD точку S так, чтобы точка D лежала между точками A и S и построим трапецию $ABCD$, как показано на рисунке 130, с. 154. По лемме о трапеции точка M пересечения диагоналей AC и BD трапеции $ABCD$ лежит на прямой SE, поэтому по точкам A, B, D и S можно построить точку M, а затем и точку C.

П о с т р о е н и е 1. Проведем прямую AD и на ней возьмем точку S так, чтобы точка D лежала между точками A и S.

2. Проведем прямые BD и SE и обозначим через M точку их пересечения.

3. Проведем прямые BS и AM и точку их пересечения обозначим через C. Затем проведем прямую DC, которая и является искомой прямой.

Доказательство. Проведем через точку D прямую, параллельную прямой AB, и обозначим через C' точку пересечения этой прямой с прямой SB. Так как $ABC'D$ — трапеция, то по лемме о трапеции точка пересечения диагоналей BD и AC' лежит на прямой ES, поэтому она совпадает с точкой M. Отсюда следует, что и точки C и C' совпадают, т. е. $AB \parallel DC$.

Исследование. Построение, описанное выше, всегда выполнимо, поэтому задача имеет решение. По аксиоме параллельности задача имеет единственное решение.

Задача 2. Даны отрезок AB и прямая a, параллельная прямой AB. Построить середину отрезка AB.

Решение. Задача решается аналогично предыдущей. Возьмем на прямой a произвольную точку D и отметим точку S так, чтобы точка D лежала между точками A и S (см. рис. 130, с. 154). Затем проведем прямую BS и обозначим через S точку пересечения прямых a и BS. Проведем, наконец, прямые AC и BD и обозначим через M точку пересечения этих прямых. Прямая SM пересекает прямую AB в искомой точке E. Предлагаем читателю самостоятельно провести доказательство, используя лемму о трапеции.

Задачи 1 и 2 часто используются при решении других задач на построение одной линейкой. Рассмотрим примеры.

Задача 3. Даны две параллельные прямые a и b и точка M, не лежащая на этих прямых. Построить прямую, проходящую через точку M и параллельную прямым a и b.

Решение. Возьмем на прямой a две точки A и B и, пользуясь задачей 2, построим середину E отрезка AB. Затем, пользуясь задачей 1, построим прямую, проходящую через точку M и параллельную прямой a.

Задача 4. Даны параллелограмм $ABCD$, прямая a и точка M, не лежащая на этой прямой. Построить прямую x, проходящую через точку M и параллельную прямой a.

Решение. Очевидно, по крайней мере одна пара параллельных сторон данного параллелограмма, например, стороны AB и CD, не параллельны прямой a. Обозначим через P и Q точки пересечения прямых AB и CD с прямой a. Построим прямую, проходящую через точку O пересечения диагоналей параллелограмма и параллельную прямым AB и CD (задача 3), и обозначим через R точку пересечения этой прямой с прямой a. Нетрудно видеть, что точка R — середина отрезка PQ. Затем, пользуясь задачей 1, построим искомую прямую x: $M \in x$, $x \parallel a$.

3. Рассмотрим теперь примеры решения задач на построение с помощью линейки, если на плоскости задана вспомогательная окружность с центром.

Задача 5. Дана окружность ω с центром O, прямая a и точка M, не лежащая на этой прямой. Построить прямую x, проходящую через точку M и параллельную прямой a.

Решение. Возьмем на окружности ω две точки A и B и проведем прямые OA и OB. Обозначим через C и D точки пересечения этих прямых с данной окружностью, отличные от точек A и B. Четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником, так как его диагонали AC и BD равны и в точке O пересечения делятся пополам. Пользуясь теперь задачей 4, построим искомую прямую x: $M \in x$, $x \| a$.

Задача 6. Даны окружность ω с центром O, прямая a и точка M. Построить прямую x, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a.

Решение. Построим прямую b, проходящую через некоторую точку A данной окружности и параллельную прямой a (задача 5), и обозначим через B вторую точку пересечения прямой b с данной окружностью. Проведем прямые OA и OB и обозначим через C и D точки пересечения этих прямых с данной окружностью, отличные от точек A и B. Четырехугольник $ABCD$ является прямоугольником (см. решение задачи 5), поэтому, построив прямую, проходящую через точку M и параллельную прямым BC и AD (задача 3), получим искомую прямую x.

Задача 7. Даны окружность ω с центром O и отрезок AB. Построить середину этого отрезка.

Решение. Построим произвольную прямую, параллельную прямой AB (задача 5), и, пользуясь задачей 2, строим середину отрезка AB.

Задача 8. Даны окружность ω с центром O, луч AM и отрезок PQ. Отложить на луче AM отрезок AB, равный отрезку PQ.

Решение. Возможны три случая, каждый из которых рассмотрим в отдельности.

а) Отрезок PQ параллелен прямой AM. Не нарушая общности, можно допустить, что лучи AM и PQ сонаправлены. Проведем прямую AP, построим прямую, проходящую через точку Q и параллельную прямой AP (задача 5), и обозначим через B точку пересечения этой прямой с лучом AM. Тогда AB — искомый отрезок, так как $APQB$ — параллелограмм.

б) Отрезок PQ лежит на прямой AM. Построим вспомогательную прямую b, параллельную прямой AM (задача 5), и на этой прямой отложим отрезок $P'Q'$, равный отрезку PQ. Затем на луче AM отложим отрезок AB, равный отрезку $P'Q'$ (см. случай а).

в) Отрезок PQ не параллелен прямой AM. Построим прямую AN, параллельную прямой PQ, и на луче AN отложим отрезок AC, равный отрезку PQ (случай а). Через точку O проведем прямые, параллельные прямым AM и AN, и обозначим точки пересечения этих прямых с окружностью ω через B' и C' (важно заметить, что эти точки можно построить, так как по условию задачи окружность ω считается построенной). Не нарушая общности, можно считать, что лучи AM и AN одинаково направлены соответственно лучам OB' и OC'. Проведем теперь прямую $B'C'$ и через точку C проведем прямую, параллельную прямой $B'C'$. Эта прямая пересекает луч AM в искомой точке B. В самом деле, $\triangle OB'C' \backsim \triangle ABC$, поэтому $AB=AC=PQ$.

Задача 9. Даны окружность ω с центром O, отрезок AB и прямая a, причем $\rho(A, a) < AB$. Построить точки пересечения прямой a с окружностью[1] (A, AB).

Решение. Если прямая a проходит через точку A, то задача сводится к задаче 8, поэтому рассмотрим только тот случай, когда прямая a не проходит через точку A.

Построим перпендикуляр AH, проведенный из точки A к прямой a (задача 6), и отрезок AC, параллельный прямой a и равный отрезку AB (задачи 5 и 8). Получим прямоугольный треугольник AHC. (Предлагаем читателю приведенные здесь рассуждения иллюстрировать рисунком, выполненным самостоятельно.)

Используя затем задачу 5, строим треугольник $OH'C'$, стороны которого соответственно параллельны сторонам треугольника AHC и $C' \in \omega$. Проведем через точку H' прямую a', перпендикулярную к прямой OH', и обозначим через X' и Y' точки пересечения этой прямой с окружностью ω. Построим, наконец, две прямые, проходящие через точку A и параллельные соответственно прямым OX' и OY'. Эти прямые пересекают прямую a в искомых точках X и Y. Доказательство этого утверждения непосредственно следует из соотношений: $\triangle OC'H' \backsim \triangle ACH$, $\triangle OH'X' \backsim \triangle AHX$ и $\triangle OH'Y' \backsim \triangle AHY$.

Так как по условию задачи $\rho(A, a) < AB$, то задача всегда разрешима и имеет два решения.

4. Пользуясь предыдущими построениями, докажем теорему Штейнера[2].

Теорема. *Любая задача на построение, выполнимая циркулем и линейкой, может быть выполнена одной линейкой, если на плоскости дана окружность с ее центром.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что построения П1 — П5, § 96 могут быть выполнены одной линейкой, если на плоскости дана окружность ω с построенным центром O. Постулаты П1 и П3 включены в число постулатов построений, выполняемых одной линейкой, а постулат П2 теряет смысл, так как окружность не является основным объектом построения[3]. Поэтому достаточно показать, что если на плоскости дана построенная окружность ω центром O, то с помощью одной линейки могут быть решены следующие две задачи.

α) Даны отрезок AB и прямая a. Построить точки пересечения окружности (A, AB) с данной прямой, если они пересекаются.

β) Даны два отрезка AA_1 и BB_1. Построить точки пересечения окружностей (A, AA_1) и (B, BB_1), если они пересекаются.

---

[1] Отметим, что окружность (A, AB) не считается построенной, построенными являются только ее центр A и точка B.

[2] Штейнер Я. (1796—1863) — немецкий математик, известен работами по проективной геометрии.

[3] Практически это построение заменяется построением одной линейкой конечного числа точек, принадлежащих окружности, заданной центром и точкой. Последнее может быть выполнено при помощи задачи 8.

Первая из этих задач нами уже решена (см. задачу 9), поэтому рассмотрим только вторую задачу.

Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей (A, AA_1) и (B, BB_1), а M и N — точки, в которых они пересекаются (см. рис. 191, с. 285). Так как $AM = AN = r_1$, $BM = BN = r_2$, то $AM^2 - BM^2 = r_1^2 - r_2^2$, $AN^2 - BN^2 = r_1^2 - r_2^2$. Мы замечаем, что точки M и N принадлежат множеству всех точек, для каждой из которых разность квадратов расстояний до двух точек A и B есть постоянная величина $r_1^2 - r_2^2$. Нам известно, что это множество точек является прямой, перпендикулярной к прямой AB (см. задачу 2 § 19). Эта прямая называется ***радикальной осью окружностей*** (A, AA_1) и (B, BB_1). Итак, искомые точки M и N являются точками пересечения окружностей (A, AA_1) и (B, BB_1) с их радикальной осью, поэтому если мы сможем построить радикальную ось этих окружностей, то построение β) сведется к задаче 9.

Для построения радикальной оси окружностей (A, r_1) и (B, r_2) в одной из полуплоскостей с границей AB построим отрезки AA' и BB', перпендикулярные к прямой AB, так, чтобы $AA' = r_2$, $BB' = r_1$ (задачи 6 и 8). Построим затем серединный перпендикуляр отрезка (задачи 7 и 6) и обозначим через C точку пересечения этой прямой с прямой AB. Покажем, что C — точка радикальной оси окружностей (A, r_1) и (B, r_2). В самом деле, так как $CA' = CB'$, то по теореме Пифагора для треугольников $AA'C$ и $BB'C$ имеем: $AC^2 + r_2^2 = BC^2 + r_1^2$ или $AC^2 - BC^2 = r_1^2 - r_2^2$.

Искомой радикальной осью является прямая, проходящая через точку C и перпендикулярная к прямой AB. ■

5. Известно, что многие задачи на построение выполняются при помощи одного циркуля, без линейки. Например, для решения задачи «Построить точку, симметричную точке X относительно данной прямой a» линейка, по существу, не требуется. Можно указать целый ряд других задач, где построения при помощи одного циркуля выполняются также просто, а иногда даже проще, чем циркулем и линейкой. Укажем, например, построение образов точек при центральной симметрии, построение вершин правильных треугольников и шестиугольников, вписанных в окружность, построение образа точки при инверсии (§ 102, п. 1, замечание).

При некотором уточнении постановки вопроса мы приходим к результату, который на первый взгляд является неожиданным: любая задача на построение, выполнимая циркулем и линейкой, может быть выполнена одним циркулем (теорема Мора — Маскерони[1]). Таким образом, с теоретической точки зрения линейка является «лишним» инструментом построения. Однако практически наличие линейки в большинстве случаев значительно облегчает решение задачи, так как сокращает число шагов построения. Доказательство сформулированного выше предложения читатель может найти в учеб-

---

[1] Мор Г. (1640—1697) — датский математик, дал систематическое изложение построений с помощью одного циркуля. Позже тот же результат вновь получил итальянский математик Л. Маскерони (1750—1800).

ной литературе по геометрическим построениям на плоскости (см., например, В. И. Аргунов и М. Б. Балк, «Геометрические построения на плоскости», Учпедгиз, 1957 г.).

Чтобы читатель мог составить себе некоторое представление о построениях Мора — Маскерони, мы рассмотрим решение нескольких задач.

З а д а ч а 10. Даны две точки A и B. Построить еще одну точку, лежащую на прямой AB.

Р е ш е н и е. Строим окружности (A, AB) и (B, BA). Пусть C и D — точки пересечения этих окружностей. Построим окружности (C, PQ) и (D, PQ), где $PQ > \frac{1}{2} CD$, и обозначим через M одну из точек их пересечения. Точка M лежит на прямой AB.

В самом деле, как известно, концы C и D общей хорды окружностей (A, AB) и (B, BA) симметричны относительно линии центров AB. Следовательно, AB — серединный перпендикуляр отрезка CD. Так как $CM = DM$ по построению, то точка M лежит на прямой AB.

З а д а ч а 11. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Через точку C провести прямую, параллельную прямой AB.

Р е ш е н и е. Понимать эту задачу надо так: требуется построить точку D так, чтобы прямые AB и CD были параллельны.

Построим окружности (B, AC) и (C, AB). Эти окружности пересекутся в двух точках, симметричных относительно линии центров BC. Обозначим через D ту из этих двух точек, которая лежит по другую сторону от прямой BC, нежели точка A. Тогда $CD \parallel AB$.

Действительно, $\triangle ABC = \triangle DCB$ (по трем сторонам) и потому $\angle ABC = \angle BCD$. По признаку параллельности прямых имеем $CD \parallel AB$.

З а д а ч а 12. Даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Через точку C провести прямую, перпендикулярную к прямой AB.

Р е ш е н и е. Искомая прямая определяется точкой C и еще некоторой точкой, которую надо построить.

Строим окружности (A, AC) и (B, BC). Эти окружности пересекаются в точке C и в некоторой другой точке, которую мы обозначим через D. Тогда $CD \perp AB$ (общая хорда двух окружностей перпендикулярна к их линии центров).

З а д а ч а 13. Даны две точки A и B. Через точку A провести прямую, перпендикулярную к прямой AB.

Р е ш е н и е. Искомая прямая определяется точкой A и еще одной точкой, которую надо построить.

Построим окружности (A, AB), (B, BA) и пусть O — одна из точек их пересечения. Строим окружность (O, OA). На этой окружности в направлении от B и A строим точки E и F такие, что $AB = AE = EF$ $(= OA)$. Тогда прямая AF — искомая.

В самом деле, из построения следует, что BF — диаметр окружности $(O, 0A)$ и, следовательно, $AF \perp AB$.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

1. В математике и ее приложениях имеют дело с различными множествами. Так, можно говорить о множестве отрезков на плоскости, о множестве натуральных чисел, о множестве действительных чисел и т. д.

Множество (или *класс, семейство*) есть некоторая совокупность объектов, называемых его *элементами*. Мы не будем анализировать понятие множества (этим, в частности, занимаются в математической логике). В начальных разделах геометрии вполне достаточно под множеством понимать все то, что можно поставить во взаимно однозначное соответствие с некоторой частью числового пространства $\boldsymbol{R}^n$ (при соответствующем значении натурального числа n), где $\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел. Например, отрезки, являющиеся сторонами данного треугольника, образуют множество: их можно перенумеровать числами 1, 2, 3 и, значит, поставить во взаимно однозначное соответствие с той частью действительного числового пространства, которая состоит из чисел 1, 2, 3. Все точки данной плоскости образуют множество: на этой плоскости можно ввести прямоугольную систему координат и каждой точке плоскости поставить в соответствие пару чисел x, y — координат этой точки.

2. Приведем список некоторых обозначений, которые применяются в настоящем курсе.

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X ($\in$ — знак принадлежности). Например, $A \in a$ — точка A *принадлежит* (или *лежит на*) прямой a или прямая a *проходит через* точку A.

$X \subset Y$ — множество X есть часть (подмножество) множества Y или множество X содержится в Y, а Y содержит X ($\subset$ — знак включения). Это значит, что если $x \in X$, то $x \in Y$. Например, $a \subset \sigma$ — прямая a *лежит в* (или *на*) плоскости σ, плоскость σ *проходит* через прямую a.

$X = Y$ — множества X и Y равны; это значит, что $X \subset Y$ и $Y \subset X$, т. е. X и Y — это одно и то же множество. Например, $a = b$ — прямые a и b *совпадают* (это одна и та же прямая, но по-разному обозначенная).

$\neq$, $\notin$, $\not\subset$ — знаки, обозначающие отрицание указанных выше отношений. Так $A \notin a$ — точка A не лежит на прямой a или прямая a не проходит через точку A.

$\{x, y, ..., v\}$ — конечное множество из элементов $x, y, ..., v$, в котором порядок элементов, вообще говоря, не принимают во внимание, так что $\{x, y, ..., v\} = \{y, x, ..., v\} = ... = \{v, y, ... x\}$. В случае точек пишут: $A = B$ вместо $\{A\} = \{B\}$ — точки A и B совпадают (это одна точка, но по-разному обозначенная); $A \neq B$ — точки A и B различны.

$(x, y, ..., v)$ — конечное упорядоченное множество из элементов $x, y, ..., v$. Здесь принимают во внимание тот порядок, в котором указаны элементы: на первом месте стоит именно элемент x, на втором — y и т. д. Поэтому $(x, y, ..., v) \neq (y, x, ..., v)$, если $x \neq y$.

$\{x | ...\}$ — множество элементов x таких, что ... (после знака $|$ указывают свойство, которым обладают элементы этого множества).

$X \cap Y = \{x | x \in X$ и $x \in Y\}$ — пересечение множеств X и Y. Например, $a \cap b = \{A\}$ или $a \cap b = A$ — прямые a и b пересекаются в точке A.

$X \cup Y = \{x | x \in X$ или $x \in Y\}$ — объединение (сумма) множеств X и Y.

$Y \setminus X = \{x | x \in Y$ и $x \notin X\}$ — разность множеств Y и X. Если $X \subset Y$, то вместо $Y \setminus X$ пишут $C_y X$ или короче CX (Y подразумевается) и называют это множество *дополнением множества* X до множества Y. Например, если точка A лежит на прямой a, то $a \setminus \{A\} = C_a \{A\}$ — прямая a без точки A или прямая a, *проколотая в точке* A.

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ — из Γ следует Δ или Γ влечет Δ ($\Rightarrow$ — знак логического следствия); говорят также, что Δ — необходимое условие существования Γ, а Γ — достаточное условие существования Δ.

$\Gamma \Leftrightarrow \Delta$. Эту запись можно прочесть любым из следующих способов: Γ необходимо и достаточно для Δ; Γ тогда и только тогда, когда Δ; Γ равносильно Δ ($\Leftrightarrow$ — знак логической эквивалентности; справедливо как утверждение $\Gamma \Rightarrow \Delta$, так и ему обратное $\Delta \Rightarrow \Gamma$).

$\varnothing$ — пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента). Например, $a \cap b = \varnothing$ — прямые a и b не имеют общих точек. Вообще, если $X \cap Y = \varnothing$, то говорят, что множества X и Y не пересекаются.

$\exists\ x \in X$, ... — существует по крайней мере один элемент x множества X такой, что ... (знак $\exists$ — квантор существования).

$\forall\ x \in X$ — для всех элементов x множества X (знак $\forall$ — квантор общности).

$\square$ — знак, который ставится в начале доказательства какого-либо предложения.

$\blacksquare$ — знак, который ставится в конце доказательства предложения.

3. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ — непустые множества. Построим новое множество $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ (*прямое* или *декартово произведение данных множеств*) каждый элемент $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ которого

является упорядоченным множеством n элементов $x_i \in X_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

Всякое непустое множество $G \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ называется *n-арным отношением*. Говорят, что элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($x_i \in X_i$) находятся в отношении G, если $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G$.

Если $X_1 = X_2 = \ldots = X_n$, то прямое произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ обозначается через X_n(n-я *декартова степень множества* X) и говорят, что n-арное отношение $G \subset X^n$ определено в множестве X.

Например, в множестве $\boldsymbol{R}^3 = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R}$ рассмотрим подмножество $G = \{(x, y, z) | x + y = z\}$. Это есть тернарное отношение ($n=3$) в множестве $\boldsymbol{R}$ действительных чисел. Числа 2, 3, 5 находятся в отношении G, так как $(2, 3, 5) \in G$ $(2+3=5)$.

Важен случай *бинарного отношения* ($n=2$): $\Delta \subset X \times Y$. Если $(x, y) \in \Delta$ (x и y находятся в отношении Δ), то говорят, что элементу $x \in X$ *соответствует* элемент $y \in Y$ относительно Δ. В случае бинарного отношения $\Delta \subset X^2$ (когда $X = Y$) вместо $(x, y) \in \Delta$ пишут $x \Delta y$.

Бинарное отношение Δ, заданное в множестве X, называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно ($\forall\, x \in X$, $x \Delta x$), симметрично ($x_1 \Delta x_2 \Rightarrow x_2 \Delta x_1$) и транзитивно (($x_1 \Delta x_2$ и $x_2 \Delta x_3$)$\Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 \Delta x_3$).

Например, равенство (конгруэнтность) треугольников есть отношение эквивалентности в множестве всех треугольников. Подобие треугольников — другое отношение эквивалентности в том же множестве.

Если на множестве X задано отношение эквивалентности Δ, то, как известно из алгебры, можно разбить множество X на непересекающиеся классы: $X = K_a \cup K_b \cup \ldots$, объединяя в один класс все эквивалентные между собой элементы (так, K_a — класс (множество) всех элементов из X, эквивалентных элементу a). Множество X/Δ всех этих классов называется *фактор-множеством* множества X по отношению эквивалентности Δ. Это понятие играет важную роль в геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Атанасян Л. С. Геометрия, ч. I. М., Просвещение, 1973.
2. Атанасян Л. С., Атанасян В. А. Сборник задач по геометрии, ч. I. М., Просвещение, 1973.
3. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия, ч. I. М., Просвещение, 1974.
4. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М., Наука, 1970.
5. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. М., Наука, 1970.
6. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1968.
7. Постников М. М. Аналитическая геометрия. М., Наука, 1973.
8. Розенфельд Б. А. Многомерные пространства. М., Наука, 1966.
9. Сборник задач по геометрии под редакцией Базылева В. Т. М., Просвещение, 1980.
10. Энциклопедия элементарной математики, кн. IV. М., Физматгиз, 1963.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

О Г Л А В Л Е Н И Е

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ

ПРЯМЫЕ ЛИНИИ, ПЛОСКОСТИ И КВАДРИКИ В ЕВКЛИДОВОМ И АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВАХ

Атшур

Атанасян Левон Сергеевич
Базылев Вячеслав Тимофеевич

ГЕОМЕТРИЯ

В 2 частях

Часть I

Зав. редакции *Р. А. Хабиб*
Редакторы *В. И. Ефимов, Т. В. Автономова*
Мл. редактор *Л. И. Заседателева*
Художник *Б. Л. Николаев*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технические редакторы *В. В. Новоселова, С. С. Якушкина*
Корректоры *Л. А. Ежова, Н. В. Красильникова*

ИБ № 9370

Сдано в набор 20.04.85. Подписано к печати 08.04.86. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Гарнит. литературная. Усл. п. л. 21,0. Усл. кр.-отт. 21,0. Уч.-изд. л. 21,36. Тираж 40 000 экз. Заказ 119. Цена 1 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного Комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.