етиши организмда
салан, юрак
ларни

ЎЗБЕКИСТОН ССР ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИ

Т. Н. ҚОРИ-НИЁЗИЙ

БИРИНЧИ ТОМ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ АСОСИЙ КУРСИ

ТОШКЕНТ · 1967

517.3
Қ59

Ушбу «Аналитик геометрия асосий курси» турли вақтларда Тошкент шаҳридаги бир неча олий ўқув юртларида (жумладан, университет ва педагогика институти физика-математика факультетларида) автор томонидан ўқилган лекциялар натижасида вужудга келган.

Курс шундай мулоҳаза билан тузилганки, аудиторияни назарда тутиб уни турли вариантда ҳар қандай олий мактаб программасига татбиқ қилиш мумкин (бунинг учун жойига қараб, мутлақо зарарсиз баъзи темаларни қолдириб кетса бўлади).

Автор ўзининг кўп йиллик тажрибасига суяниб, курсни мумкин қадар содда ва равшан қилиб тузишга интилган. Шунинг учун ундан мустақил (айниқса сиртқи) ўқишда фойдаланса ҳам бўлади.

МАСЪУЛ МУҲАРРИР
ЎзССР Фанлар академиясининг академиги
С. Ҳ. СИРОЖИДДИНОВ

КИТОБНИНГ УЧИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

Қулингиздаги „Аналитик геометрия“нинг иккинчи нашри 1941 йилда босилиб чиққан эди. Узбекистон олий мактабларида маҳаллий халқлардан булган студентларнинг, айниқса ўзбек студентларининг сони йилдан-йилга ўсиб бориши натижасида бу китобга эҳтиёж ҳам ошди.

Ўзбекистон пединститутлари математика кафедралари ўқитувчиларининг 1954 йил февраль ойида Фарғона шаҳарида булиб ўтган Республика кенгаши авторнинг „Аналитик геометрия асосий курси“ ва „Асосий математик анализ курси“ асарларини мумкин қадар тезлик билан қайтадан нашр этиш масаласини жиддий қўйди ва Ўзбекистон Фанлар академиясининг Физика-математика бўлими қарор чиқариб, автордан ушбу китобларни қайта нашр этишни сўради.

„Аналитик геометрия асосий курси“нинг бу учинчи нашрини босмага тайёрлашда китобга бирмунча ўзгаришлар киритилди (бир неча параграфлари қисқартирилди, бир неча янги параграфлар, янги боблар, янги мисоллар, масалалар киритилди).

Изоҳ тариқасида қуйидагиларни айтиб ўтишни лозим топаман: кейинги йилларда олий мактабларнинг дарсликлари тўғрисида турли фикрлар баён қилинди, „кўп темалилик“ка урин бермай, дарсликни мумкин қадар ихчамлаштириш зарурлиги таъкидланди.

Шунинг учун баъзи бир, иккинчи даражали темалар китобга киритилмади. Уларнинг ҳисобига эса бирмунча муҳим ва асосий темалар устида тўлароқ тўхталди.

Ҳақиқатан ҳам, ҳар бир фанни ўтишдан асосий мақсад: шу фаннинг методи ва асосий тушунчаларини эгаллашдир. Бунинг натижасида махсус илмий аппарат вужудга келади ва бу аппарат ёрдами билан тегишли масалалар, янги-янги темалар ишланади.

Гарчи бу китоб, асосан, педагогика институтлари учун ёзилган бўлса-да, лекин, шубҳасиз, ундан маълум даражада бошқа олий мактаблар (айниқса сиртқи олий мактаблар) ҳам фойдаланади. Китобнинг тузилишидаги баъзи бир специфик моментларнинг сабаби ҳам шунда. Масалан, баъзи бир асосий тушунчалар етарли даражада соддалаштириб берилди; 2-ва 3-тартибли детерминантлар туғрисида аналитик геометрияни ўтишда зарур бўлган тушунча берилган (бу тушунчанинг назарияси одатда олий алгебра дарсликларида кенгроқ берилади); иккинчи тартибли сиртлар назарияси энг аввал уларнинг каноник тенгламаларига ва сўнгра умумий тенгламаларига асосланиб берилди (албатта, исталган ҳолда, ўрнига қараб, аксинча ўтиш ҳам мумкин); пединститут студентлари учун синтетик геометриянинг келгусида муҳим роли борлигини эътиборга олиб, бу геометрияга доир баъзи бир муҳим теоремаларнинг аналитик исботлари берилди (буларни машқ тариқасида ўтиш тавсия қилинади; бу каби машқлар аналитик методнинг муҳим ролини кўрсатиб беради); олий мактабларда, умуман, аналитик геометрия билан математик анализ параллель ўтилади; шуни эътиборга олиб, функциялар туғрисида муфассал тушунча бериш лозим топилмади.

Китобнинг иккичи қисмида, умуман, ҳар бир тема икки вариантда ишланди. Аввал векторлар қўлланмасдан, сўнгра векторлар ёрдами билан баён қилинди (1-ва 2-пунктлар). Шунинг учун, шароитга қараб, китобнинг бу қисмини ёзилган тартибда, яъни иккала пунктни ишлаш йўли билан, ё фақат 1-пунктларни ишлаш йўли билан, ёки фақат 2-пунктларни ишлаш йўли билан ўтиш мумкин.

Т. Н. Қори-Ниёзий

Тошкент, 1955 йил, июнь.

КИТОБНИНГ ТЎРТИНЧИ НАШРИГА СЎЗ БОШИ

„Аналитик геометрия асосий курси“нинг бу тўртинчи нашрини босмага тайёрлашда катта ўзгариш бўлгани йўқ.

Содир бўлган баъзи бир ўзгаришлар эса фақат шулардан иборат: қийшиқбурчакли координаталардан тушунчагина қолдириб, бунга оид бўлган бошқа масалалар қисқартирилди; аналитик геометриянинг астрономияга (Кеплер қонунлари) ва баллистикага татбиқи ва сиртларнинг синфларга бўлиниши тўғрисида тушунча берилди; ниҳоят принципиал характерда бўлмаган баъзи ислоҳлар содир бўлдики, улар устида тўхташга зарурият йўқ деб ўйлайман.

Т. Н. Қори-Ниёзий

Тошкент, 1966 йил, ноябрь.

БИРИНЧИ БЎЛИМ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ТЕКИСЛИКДА

Биринчи боб

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

§ 1. АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ

Умуман, математик масалаларни ечишда қўлланадиган методлар, асосан, икки турли бўлиб, улардан бири **геометрик** ва иккинчиси ҳисоблаш ёки **аналитик** метод саналади. Геометрик (ёки ясаш) методида масала, умуман, шаклга асосланган бўлади. Ҳисоблаш методида эса масала сонлар устида тегишли амалларни бажариш билан ёки, бошқача қилиб айтганда, алгебра ёрдами билан текширилади.

Ҳисоблаш методининг умумийлиги ва геометрик методнинг очиқ-ойдинлиги математикада катта аҳамиятга эгадир. Бу икки методнинг „координаталар методи“ деб аталган янги метод асосида ўзаро боғланишидан аналитик геометрия вужудга келган. Бу геометриянинг асосий машғулоти: турли геометрик ўринларни[1] тенгламалар билан ифода қилишдан ва бундай тенгламаларни алгебра ёрдами билан текшириб, уларнинг геометрик хоссаларини аниқлашдан иборатдир. Аналитик геометриянинг бу асосий идеяси устида биз кейинча яна муфассалроқ тухтаб, уни етарли мисоллар билан тасвир қиламиз.

Аналитик геометриянинг асосий идеяси билан боғланган методнинг баъзи элементлари ғоят қадим замонлардан маъ-

[1] Геометрик ўрин тушунчаси ўқувчига ўрта мактабдан маълум деб фараз қилинади (3-бобга қаралсин).

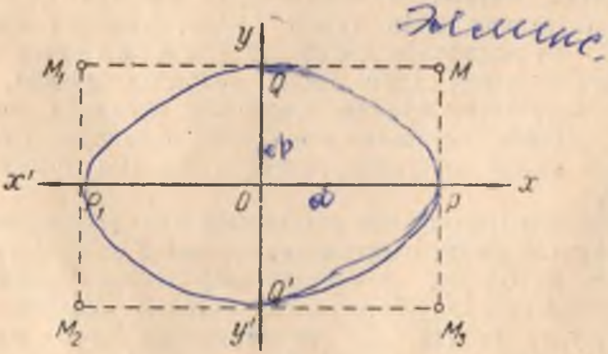
лум булса-да, лекин унинг умумий метод сифатида ишла-
тилиши француз философи ва математиги Декартнинг 163
йилда босилиб чиққан „Геометрия“ асаридан бошлани
шундан буён такомиллашиб келмоқда.

Аналитик геометрия математиканинг муҳим булимлари-
дан бири булиб, фаннинг турли тармоқларида, хусусан
механика, геодезия, астрономия каби булимларида катт
аҳамиятга эгадир.

§ 2. ТЎҒРИБУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Геометриянинг энг оддий тушунчаси нуқтадан иборат
Аналитик геометрияда эса нуқтанинг ўрнини аниқлаш маса-
ласи асосий роль уйнайди.

Нуқтанинг ўрнини аниқлаш усули координаталар методи
дейилади. Бу методни ишлатиш учун турли координата сис-
темалари мавжуд булиб, улардан бири (энг куп қулланади-
гани) туғрибурчакли координаталар системасидан иборатдир.
Текисликдаги нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун узаро пер-



Шакл 1.

пендикуляр булган $x'x$ ва $y'y$ туғри чизиқлар утказилади
(шакл 1). Буларнинг бир-бири билан кесишган O нуқтасига
нисбатан ҳар бирида икки қарама-қарши йуналиш қабул
қилинади. Одатда O нуқтадан ўнг томонга қараб кетган Ox
йуналиши мусбат ва бунга тескари булган Ox' йуналиши
манфий қабул қилинади. Шунга ухшаш O нуқтадан юқори-
га қараб кетган Oy йуналиши мусбат ва бунга тескари бул-
ган Oy' йуналиши манфий саналади.

Энди $x'x$ ва $y'y$ текислигидаги бирор M нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун M дан $x'x$ ва $y'y$ га параллель қилиб, чизиқ ўтказамиз. Булар $x'x$ дан OP ва $y'y$ дан OQ кесмаларни кесиб кетади. Ана шу OP ва OQ йўналтирилган кесмалар ёки бошқача қилиб айтганда: ҳалиги кесмаларнинг йўналиши ва O нуқтадан бошлаб бирор масштабда ўлчанган узунлиги M нуқтанинг ўрнини аниқлаб беради.

OP йўналтирилган кесма M нуқтанинг абсциссаси дейилади ва одатда x ҳарфи билан ифода қилинади; OQ йўналтирилган кесма M нуқтанинг ординатаси дейилади ва y ҳарфи билан ифода қилинади. M нуқтанинг ўрнини аниқловчи абсцисса билан ордината иккаласи M нуқтанинг координаталари дейилади; $x'x$ абсцисса ўқи, $y'y$ ордината ўқи ва бу ўқларнинг ўзаро кесишган O нуқтаси координаталар боши дейилади.

Фараз қилайлик M нуқтанинг координаталари

$$x = OP = a > 0, \quad y = OQ = b > 0$$

бўлсин. Бу ҳолда 1-шаклдаги:
M_1 нуқтанинг координаталари $x = OP_1 = -a$, $y = OQ = b$,
M_2 нуқтанинг координаталари $x = OP_1 = -a$, $y = OQ_1 = -b$,
M_3 нуқтанинг координаталари $x = OP = a$, $y = OQ_1 = -b$.

Одатда нуқтанинг координаталари қавс ичида ёзилади: биринчи ўринда нуқтанинг абсциссаси, сўнгра вергул қўйиб, иккинчи ўринда (ўнг томонда) унинг ординатаси ёзилади. Шунинг билан 1-шаклдаги ҳалиги нуқталарнинг одатдаги усулда ёзилиши қуйидагича бўлади:

$$M(a, b), \; M_1(-a, b), \; M_2(-a, -b), \; M_3(a, -b).$$

Абсцисса ўқидаги ҳар қандай нуқтанинг ординатаси нолга тенг. Шунинг учун 1-шаклдаги P ва P_1 нуқталарнинг координаталари бундай ёзилади:

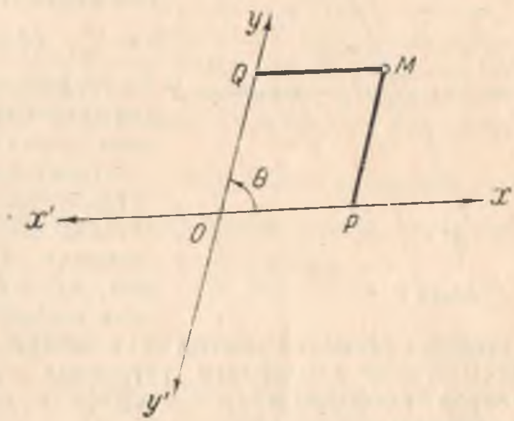
$$P(a, 0); \; P_1(-a, 0).$$

Шунга ўхшаш ордината ўқидаги ҳар қандай нуқтанинг абсциссаси нолга тенг. Шунинг учун шаклдаги Q ва Q_1 нуқталарнинг координаталари бундай ёзилади:

$$Q(0, b); \; Q_1(0, -b).$$

Координаталар бошининг координаталари $x = 0$ ва $y = 0$ бўлгани учун, $O(0, 0)$ кўринишда ёзилади. Шунинг билан „абсциссаси 5, ординатаси 3 бўлган A нуқта“ дейиш ўрнига, қисқача $A(5, 3)$ ёзилади. Нуқтанинг координаталари ўнли каср билан берилган ҳолда, англашилмовчилик бўлмабилан O нуқтада кесишиб, бирор θ бурчак ҳосил қилган $x'x$ ва $y'y$ ўқлари ҳам координаталар системасини ташкил қилади ва бундай система қийшиқбурчакли дейилади (шакл 3).

Координата ўқларининг йўналишлари ва уларнинг отлари юқорида таъриф қилингандек эскичадир. Координата ўқларининг мусбат йўналишлари орасидаги $\angle xOy = \theta$ бурчак — координат бурчаги дейилади.



Шакл 3.

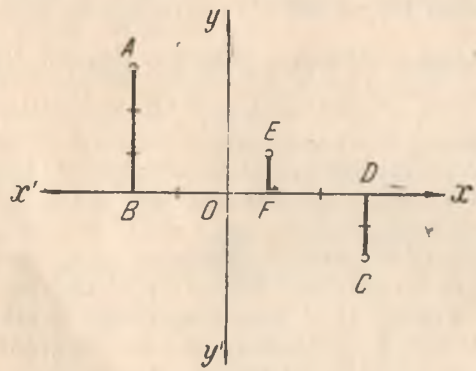
Бундай системада текисликдаги бирор M нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун ҳамон у нуқтадан координата ўқларига параллель қилиб чизиқ ўтказамиз; буларнинг ўқлар билан учрашган нуқталари P ва Q бўлсин. Натижада OP ва OQ йўналтирилган кесмалар M нуқтанинг қийшиқбурчакли координаталари бўлади:

$$x = OP, \ y = OQ.$$

Аксинча, нуқтанинг координаталари ва координат бурчаги берилганда, унинг координаталар текислигидаги ўрнини аниқлаш мумкин. Масалан, координат бурчаги $\theta = \frac{\pi}{3}$ бўлган қийшиқбурчакли системада (—4, —3) нуқтани топамиз. Бунинг учун энг аввал ўзаро 60° бурчак ташкил этувчи xx' ва yy' ўқларни ўтказамиз (шакл 4). Сўнгра координаталар бошидан чапда Ox' ўқ бўйича (бирор масштабда) 4 бирликни ўлчаб, абсцисса ўқида P нуқтани аниқлаймиз; энди бу нуқсин учун, одатда абсциссасини ординатасидан нуқтали вергул билан ажратилади. Масалан, координаталари $x = 2{,}5$ ва $y = 4{,}7$ булган нуқта (2,5; 4,7) куринишда ёзилади.

Шунинг билан қабул қилинган шартларга асосан: *текисликдаги нуқтанинг ўрни координата ўқларига нисбатан икки координата ёки бир жуфт ҳақиқий сон ёрдами билан аниқланади.* Аксинча, ҳар бир жуфт ҳақиқий сонга, агарда у сонлардан биринчиси нуқтанинг абсциссаси ва иккинчиси ординатаси фараз қилинса, координаталар текислигида биргина нуқта мос келади. Масалан, $(-2, 3)$ нуқтанинг ўрнини аниқлаш талаб қилинган булсин. Бу мисолда

$$x = -2, \ y = 3.$$



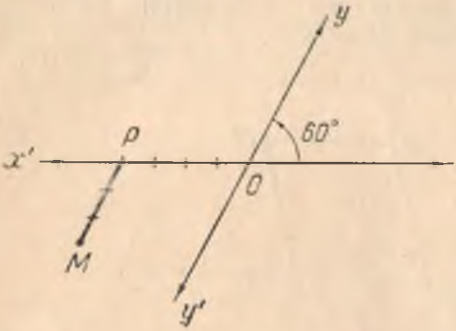
Шакл 2.

Шунинг учун абсцисса ўқида координаталар бошидан чап томонга қараб (бирор аниқ масштабда) 2 бирликни улчаб, B нуқтани аниқлаб оламиз (шакл 2). Сунгра бу нуқтадан (юқорига қаратиб) абсцисса ўқига перпендикуляр утказамиз; бунда 3 бирлик улчаб олинса, изланган $A(-2, 3)$ нуқта аниқланади. Шунга ўхшаш, $(3, -2)$ нуқтанинг урни C, (1,1) нуқтанинг урни E булади (шакл 2).

Қийшиқбурчакли координаталар системаси

Текисликдаги нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун, юқорида курсатилгани каби, координата ўқларининг ўзаро перпендикуляр булиши шарт эмас: улар орасидаги бурчак (нолдан бошқа) ҳар қандай булиши мумкин. Шунинг учун бир-бири тадан ордината ўқининг манфий йўналишига параллель чизиқ ўтказиб, бунда P дан бошлаб (ҳалиги масштабда) 3 бирлик ўлчанса, биз излаган (M) нуқта аниқланади.

Тўғрибурчакли ва қийшиқбурчакли координата системаларидан ҳар бири тўғри чизиқли (Декарт системаси) бўлиб, улардан биринчиси иккинчисининг хусусий ҳолидан иборатдир, чунки $\theta = \frac{\pi}{2}$ бўлганда қийшиқбурчакли системадан тўғрибурчакли система ҳосил бўлади.



Шакл 4.

Практикада кўпроқ тўғрибурчакли координаталар системаси ишлатилади. Бу китобда ҳам, асосан, шу система ишлатилади. Шунинг учун, агарда берилган мисол ёки масалада координаталар системасининг қандайлиги тўғрисида сўз бўлмаса, бундай ҳолларда координаталар системаси тўғрибурчакли деб фараз қилинади.

Саволлар ва масалалар

1. Декарт координаталар системасида текисликдаги нуқтанинг ўрни қандай аниқланади?

2. Абсцисса ўқидаги нуқталарнинг координаталари қандай хусусиятга эга?

3. Ордината ўқидаги нуқталарнинг координаталари қандай хусусиятга эга?

4. Абсцисса ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқталарнинг координаталари орасида қандай айирма бор?

5. Ордината ўқига нисбатан симметрик бўлган нуқталарнинг координаталари орасида қандай айирма бор?

6. Текисликдаги ушбу нуқталарнинг ўринлари аниқлансин:

$$A\,(3,\,2),\ B\,(-3,\,5),\ C\,(2,\,-1),\ D\,(-2,\,-3);$$
$$A_1\,(-3,\,2),\ B_1\,(3,\,5),\ C_1\,(-2,\,1),\ E\,(3,\,0).$$

7. Бурчаклари учларининг координаталари $A\,(1,\,3)$, $B\,(-3,\,-2)$ ва $C\,(4,\,-2)$ бўлган учбурчак чизилсин.

8. $M(-3, 5)$ нуқта берилган. Координата ўқларига нисбатан M га симметрик бўлган нуқталар аниқлансин.

9. Квадратнинг томони a бирликка тенг. Координаталар боши квадратнинг марказида ва ўқлари униng томонларига параллель. Бу квадрат бурчаклари учларининг координаталари топилсин.

10. $M(3, 5)$ ва $N(5, 3)$ нуқталар координат бурчагининг биссектрисасига нисбатан симметрик. Бу исбот қилинсин.

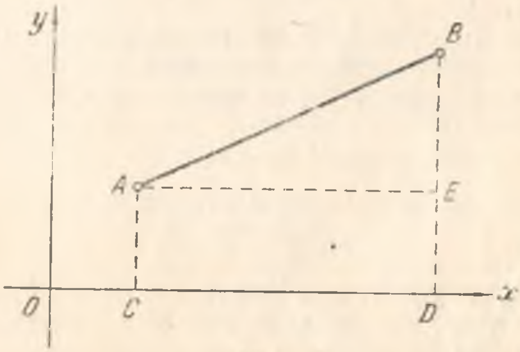
11. ABC — тенг томонли учбурчак. Бунинг AC томони абсцисса ўқи ва A бурчагининг учи тўғрибурчакли координаталар системасининг боши фараз қилинади. Агарда берилган учбурчакнинг ҳар бир томони a бирликка тенг бўлса, учбурчакнинг бурчаклари учларининг координаталари қандай бўлади?

12. Координаталар системасини қийшиқбурчакли ва координат бурчагини $\theta = \frac{\pi}{4}$ фараз қилиб, ушбу нуқталарнинг текисликдаги ўринлари кўрсатилсин:

$$A(1, 3);\ B(0, -2);\ C(-4, 5);\ D(-1, -3).$$

§ 3. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

1. Фараз қилайлик, берилган нуқталардан бири $A(x_1, y_1)$ ва иккинчиси $B(x_2, y_2)$ бўлсин. Иккала нуқтанинг координаталари ёрдами билан улар орасидаги AB масофани аниқлаш талаб қилинади.



Шакл 5.

Бунинг учун тўғрибурчакли координаталар системасини чизиб, сўнгра берилган нуқталарнинг координаталарини ясаймиз (шакл 5). Фараз қилайлик:

...ти қиймати эътиборга олиниб, AB кесманинг йўналиши ...сининг талабига кирмайди.

Мисол 1. $A(1, 3)$ ва $B(-2, 7)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.

Берилган мисолда:

A нуқтанинг координаталари $x_1 = 1$, $y_1 = 3$;

B „ „ $x_2 = -2$, $y_2 = 7$;

...лар (2) формулага қўйилса A ва B нуқталар орасидаги d масофа қуйидагича бўлади:

$$d = \sqrt{(-2-1)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5.$$

Мисол 2. Бурчаклари учларининг координаталари $A(-1, 1)$, $B(11, -6)$ ва $C(3, 2)$ бўлган учбурчак томонларининг узунликлари топилсин.

Берилган масала (2) формула ёрдами билан ечилади, чунки ABC учбурчакда ҳар бир томонининг узунлиги икки нуқта орасидаги масофадан иборат. Шунинг учун:

$$AB = \sqrt{(11+1)^2 + (-6+1)^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$BC = \sqrt{(3-11)^2 + (2+6)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2};$$

$$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Саволлар ва масалалар

13. Икки нуқта орасидаги масофа қандай топилади?

14. $A(x_1, y_1)$ нуқтани биринчи координат бурчагида ва (x_2, y_2) нуқтани иккинчи координат бурчагида фараз қилиб, (2) формула чиқарилсин.

15. Қуйидаги A ва B нуқталар орасидаги масофа аниқлансин:

1) $A(5, -3)$ ва $B(-3, 1)$;
2) $A(4, 2)$ ва $B(7, -2)$;
3) $A(0, 3)$ ва $B(-2, 3)$;
4) $A(a, 0)$ ва $B(0, b)$;
5) $A(k, l)$ ва $B(k+q, 0)$.

16. Қуйидаги нуқталарнинг ҳар бири билан координата бошии орасидаги масофа аниқлансин:

1) $A(3, 4)$; 2) $B(5, -12)$; 3) $C(0, 8)$; 4) $D(a, b)$.

17. Бурчаклари учларининг координаталари: $A(0, 0)$, $B(..., 14)$ ва $C(-12, 5)$ бўлган учбурчак томонларининг узунликлари топилсин.

A нинг координаталари $x_1 = OC$, $y_1 = CA$,
B нинг координаталари $x_2 = OD$, $y_2 = DB$
булсин. A ва B нуқталарини ўзаро тўғри чизиқ билан туташтириб, сунгра A дан абсцисса ўқнга параллель чизиқ ўтказилса, ABE тўғрибурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Биз излаган масофа ана шу тўғрибурчакли учбурчакнинг AB гипотенузасидан иборат. Пифагор теоремасига асосан:

$$AB^2 = AE^2 + BE^2. \tag{1}$$

Бу тенгликдаги AE ва BE нинг қийматлари A ва B нуқталарининг координаталари ёрдами билан аниқланади. Ҳақиқатда, шаклга диққат қилинса:

$$AE = CD = OD - OC = x_2 - x_1;$$

$$BE = DB - ED = BD - AC = y_2 - y_1;$$

AE ва BE учун аниқланган бу қийматлар (1) тенгликка қуйилса, унинг кўриниши бундай бўлади:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

AB нинг узунлигини бирор масштаб бирлигида d ҳарфи билан ифода қилиб, бу тенгликнинг иккала томонидан квадрат илдиз олинса, ушбу формула келиб чиқади:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{2}$$

Бу формула: берилган икки нуқта орасидаги масофани уларнинг координаталари ёрдами билан топишга имкон беради. Агар нуқталардан бири, масалан, B нуқта, координаталар бошида бўлса, бу ҳолда:

$$x_2 = 0, \; y_2 = 0$$

булгани учун, (2) формуланинг кўриниши

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \tag{3}$$

бўлади. Бу формула ёрдами билан: берилган $A(x_1, y_1)$ нуқтанинг координаталар бошидан масофаси аниқланади.

(2) формулани чиқаришда A ва B нуқталар биринчи координат бурчагида фараз қилинган эди. Ҳолбуки, у нуқталар, координата ўқларига нисбатан қаерда булмасин, чиқарилган формула уз кучини сақлайди. Буни синаб кўриш машқ тариқасида ўқувчига тавсия қилинади.

Чиқарилган (2) формуладаги радикал олдида ёлғиз плюс олинади, чунки A ва B нуқталар орасидаги масофанинг фаб

18. Бурчаклари учларининг координаталари: $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ ва $C(0,3)$ булган учбурчакнинг периметри аниқлансин.

19. Бурчаклари учларининг координаталари $A(1, 5)$, $B(2, 2)$, $C(-3, -10)$ ва $D(-4,5; 6)$ бўлган тўртбурчак томонларининг узунликлари аниқлансин.

20. Ординатаси 2 бўлган нуқта (10, 3) ва (8, 10) нуқталардан тенг узоқликда туради. Бу нуқтанинг абсциссаси топилсин.

21. Бурчаклари учларининг координаталари: (23, 31), (63, 31) ва (23, 40) бўлган учбурчакнинг тўғрибурчакли учбурчак эканлиги исбот қилинсин.

22. Абсцисса ўқида шундай нуқта топилсинки, ундан (5, 12) нуқтагача бўлган масофа 13 га тенг бўлсин.

23. Абсцисса ўқидан ва (—3, 2) нуқтадан масофаси 5 га тенг бўлган нуқтанинг координаталари топилсин.

24. $A(4, 5)$, $B(6,1)$ ва $C(2, 3)$ нуқталардан тенг узоқликда бўлган нуқта топилсин.

§ 4. КЕСМАНИ БЕРИЛГАН НИСБАТДА БЎЛИШ

1. Фараз қилайлик, $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар билан берилган AB кесмани шундай икки қисмга бўлиш лозим бўлсинки, улардан бирининг иккинчисига нисбати $m:n$ га тенг бўлсин. Бошқача айтганда, AB кесмада шундай бир C нуқтани аниқлаш керакки,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$$

ёки қисқача $\frac{m}{n} = \lambda$ фараз қилинса, $\frac{AC}{CB} = \lambda$ бўлсин. Масалани ечиш учун исталганча тўғричизиқли координаталар системасини оламиз (шакл 6). Агарда номаълум C нуқтанинг координаталари x ва y фараз қилинса, шаклга мувофиқ:

$$x = OC_1, \ y = CC_1;$$

$$x_1 = OA_1, \ y_1 = AA_1;$$

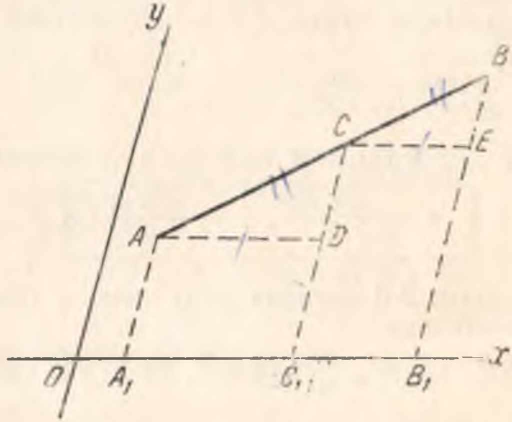
$$x_2 = OB_1, \ y_2 = BB_1.$$

Энди A ва C нуқталардан абсцисса ўқига параллель қилиб AD ва CE кесмаларни ўтказамиз. Бунинг натижасида ўзаро ўхшаш ACD ва CBE учбурчаклар ҳосил бўлади. Шунинг учун буларнинг мос томонлари пропорционал, масалан:

$$\frac{AD}{CE}=\frac{AC}{CB}=\lambda; \qquad (1)$$

шаклга мувофиқ:

$$AD=A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1;$$
$$CE=C_1B_1=OB_1-OC_1=x_2-x;$$



Шакл 6.

буларни (1) га қўйилса, x га нисбатан ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$$

ёки

$$x-x_1=\lambda x_2-\lambda x$$

ёки

$$x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2,$$

бундан

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}.$$

Шунга ўхшаш, ҳалиги учбурчаклардан:

$$\frac{CD}{BE}=\frac{AC}{CB}=\lambda$$

пропорцияни тузиб, шу йўл билан давом этилса,

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Шунинг учун $AC:CB=\lambda$ манфий булган ҳолда AC ва CB нинг йуналишлари турлича бўлиб, C нуқта A ва B нинг орасида булмай, ундан ташқарида, AB нинг давомида булади.

Агар $\lambda=-1$ бўлса, (2) формулалар ўз маъносини йуқотади. Лекин λ ни -1 га чексиз яқинлаштириб келинса, бу ҳолда (2) формулаларга мувофиқ C нуқта чексиз узоқлашиб кетади. Шу билан бирга, агар λ нинг алгебраик қиймати ҳамавақт -1 дан кичик бўлиб, -1 га яқинлашиб борса, C нуқта AB нинг мусбат йуналишида ва агарда -1 дан катта булиб, -1 га яқинлашиб келса, унга тескари йуналишда булади.

Мисол 1. $A(1, 2)$ ва $B(4, 5)$ нуқталар орасидаги AB кесма $2:3$ нисбатда иккига бўлинсин.

Берилган мисолда

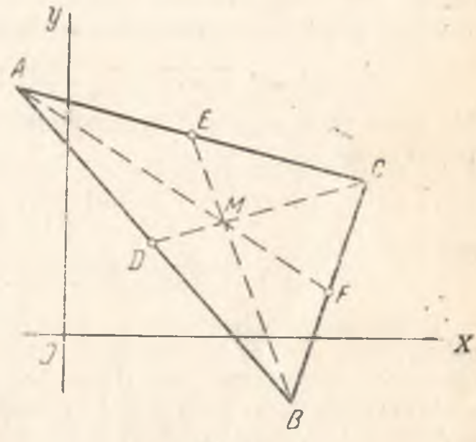
$$x_1=1,\ y_1=2;\ x_2=4,\ y_2=5;$$
$$\lambda=m:n=2:3$$

Булар (4) формулага қўйилса:

$$x=\frac{3\cdot1+2\cdot4}{3+2}=\frac{11}{5},$$

$$y=\frac{3\cdot2+2\cdot5}{3+2}=\frac{16}{5}.$$

Демак, AB ни $2:3$ нисбатда иккига буладиган нуқта $\left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}\right)$ булади.



Шакл 7.

Мисол 2. Бурчаклари учларининг координаталари $A(-1, 5)$, $B(3, -1)$ ва $C(4, 3)$ бўлган учбурчак медианаларининг узунликлари ва уларнинг кесишган нуқтаси топилсин.

Учбурчакнинг ҳар бир медианаси икки нуқта орасидаги масофадан иборат. Бу нуқталардан бири учбурчак бурчагининг учи ва иккинчиси унинг қаршисидаги томоннинг ўртасидаги нуқта булади. Масалан (шакл 7), CD медианасини олганда, у C ва D нуқталар орасидаги масофадан иборат. C нуқтаси бизга берилган, яъни унинг координаталари бизга булади. Шунинг билан, берилган масалани ечиш натижасида ушбу формулалар ҳосил бўлади:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}} \qquad (2)$$

Хусусий ҳолда, C нуқта AB кесманинг тенг ўртасида бўлса,

$$\frac{AC}{CB} = \lambda = 1$$

булади ва бу ҳолда (2) нинг кўриниши қуйидагича булади

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \; y = \frac{y_1 + y_2}{2}} \qquad (3)$$

ва бу формулалар AB кесмани тенг иккига бўлиш керак бўлганда ишлатилади.

Агар λ нинг ўрнига $\frac{m}{n}$ қуйилса, бу ҳолда (2) нинг формаси

$$x = \frac{x_1 + \frac{m}{n} x_2}{1 + \frac{m}{n}} = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}$$

ва шунга ўхшаш

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}$$

бўлиб, (2) формулаларнинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \; y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}} \qquad (4)$$

λ бутун бўлган ҳолда (2) формулаларнн ва каср бўлганда (4) формулаларни ишлатиш қулайдир.

Агар AB кесманинг ва ўзаро λ нисбатда бўлган кесмаларнинг узунликларидан бошқа, уларнинг йўналишлари ҳам эътиборга олинса, у ҳолда λ манфий бўлиши ҳам мумкин. Фараз қилайлик, AB даги A дан B га қаратилган йўналиш мусбат бўлсин. Бу ҳолда бунга тескари (B дан A га) қаратилган йўналиш манфий булади.

маълум. Демак, CD нинг узунлигини топиш учун энг аввал D нуқтанинг координаталарини излашга тўғри келади. D нуқта AB нинг ўртасида бўлгани учун унинг координаталари (3) формулалар билан аниқланади, яъни

$$x = \frac{-1+3}{2} = 1, \quad y = \frac{5-1}{2} = 2.$$

CD медиананинг узунлиги $C(4, 3)$ ва $D(1, 2)$ нуқталар орасидаги масофа бўлгани учун у 3-параграфда чиқарилган (2) формула ёрдами билан топилади, яъни

$$CD = \sqrt{(4-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{10}.$$

Шунга ўхшаш, AC нинг ўртасидаги E нуқтанинг координаталари x_1 ва y_1 фараз қилинса:

$$x_1 = \frac{-1+4}{2} = 1{,}5; \quad y_1 = \frac{5+3}{2} = 4;$$

демак, BE медиананинг узунлиги $B(3, -1)$ ва $E(1{,}5;\ 4)$ нуқталар орасидаги масофадан иборат:

$$BE = \sqrt{(3-1{,}5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{27{,}25}.$$

BC нинг ўртасидаги F нуқтанинг координаталари x_2 ва y_2 фараз қилинса,

$$x_2 = \frac{3+4}{2} = 3{,}5; \quad y_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$$

ва

$$AF = \sqrt{(-1-3{,}5)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{36{,}25}.$$

Геометриядан маълумки, ҳар бир учбурчакда учала медиана бир нуқтада кесишади (биз бу теоремани кейинча аналитик геометрия воситаси билан ҳам исбот қиламиз); кесишган нуқтада ҳар қайси медианага тегишли томондан бошлаб $1:2$ нисбатда иккига бўлинади, масалан:

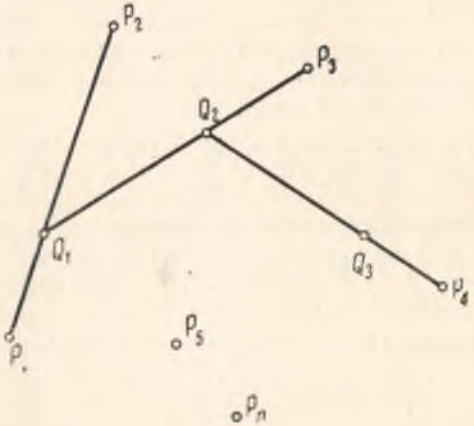
$$DM : MC = 1 : 2.$$

Демак, M нуқта DC ни шу нисбатда иккига бўлади ($m : n = \lambda = 1 : 2$). Агар M нуқтанинг координаталари x_0 ва y_0 фараз қилинса, (4) формулага асосан:

$$x_0 = \frac{2\cdot 1 + 1\cdot 4}{2+1} = 2, \quad y_0 = \frac{2\cdot 2 + 1\cdot 3}{2+1} = \frac{7}{3}.$$

Шунинг билан, берилган ABC учбурчакда медианалар $M\left(2, \frac{7}{3}\right)$ нуқтада кесишади.

2. Механикада, юқорида чиқарилган (4) формулаларнинг ёрдами билан n материал нуқталар системасининг оғирлик



Шакл 8.

маркази топилади. Фараз қилайлик, ушбу n материал нуқталар

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),$$

$$P_3(x_3, y_3), \ldots P_n(x_n, y_n)$$

системаси ва уларнинг $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ массалари берилган бўлсин (шакл 8).

Бир неча материал нуқталардан иборат бўлган системанинг оғирлик маркази деб, у нуқталарга қўйилган кучлар тенг таъсир этувчисининг қўйилган нуқтасига айтилади.

Механикадан маълумки, иккита материал нуқтанинг оғирлик маркази, у нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқда бўлиб, унинг ҳар бир нуқтадан масофаси у нуқталарнинг массаларига тескари пропорционалдир.

Буни назарда тутиб, энг аввал, P_1 ва P_2 нуқталарнинг оғирлик марказини топамиз. Агар бу нуқталарнинг оғирлик маркази уларни туташтирувчи чизиқдаги $Q_1(x', y')$ нуқта деб фараз қилинса, у ҳолда:

28. $(-3, 4)$ ва $(2, 2)$ нуқталарининг тенг ўртаси билан $(-1, 3)$ нуқта орасидаги масофа аниқлансин.

29. Бурчаклари учларининг координаталари: $(4, 5)$, $(-2, 3)$ ва $(1, 1)$ бўлган учбурчакнинг ҳар бир томони ўртасидаги нуқтанинг координаталари топилсин.

30. $A(x, 4)$ ва $B(-6, y)$ нуқталар орасидаги AB масофа $M(-1, 1)$ нуқтада тенг иккига бўлинган. A ва B нуқталар аниқлансин.

31. $(-1, 6)$ ва $(3, -2)$ нуқталар орасидаги кесма тўртта тенг бўлакка бўлинган. Бўлиниш нуқталарининг координаталари топилсин.

32. Параллелограм бурчакларидан учтасининг учлари: $(4, -3)$, $(6, 4)$ ва $(-5, -2)$ нуқталарда. Бунинг тўртинчи бурчаги учининг координаталари топилсин.

33. Бурчакларининг учлари $A(0, 0)$, $B(2, -4)$ ва $C(4, 2)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг медианалари топилсин.

34. Учбурчакнинг ҳар бир томони ўртасидаги нуқтанинг координаталари: $(2, 0)$, $(3, -1)$ ва $(1, 2)$ бўлса, бу учбурчак бурчаклари учларининг координаталари қандай бўлади?

35. Бурчакларининг учлари: $(2, 3)$, $(4, -5)$ ва $(-3, -6)$ нуқталарда бўлган учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси топилсин.

36. Параллелограмнинг икки қўшни бурчакларининг учлари $A(2, 1)$ ва $B(-3, 4)$ нуқталарда; параллелограм диагоналларининг ўзаро кесишган нуқтаси $C(-1, 0)$. Қолган икки бурчаги учларининг координаталари аниқлансин.

§ 5. УЧБУРЧАКНИНГ ВА КЎПБУРЧАКНИНГ ЮЗИ

Учбурчакнинг юзини ҳисоблаш учун элементар геометрияда ва тригонометрияда бирмунча формулалар бор. У формулаларда учбурчакнинг бир томони ва унга мос баландлиги ёки учала томони ёки икки томони ва улар орасидаги бурчаги каби элементлар қатнашади. Биз бу ерда учбурчакнинг юзини унинг бурчаклари учларининг координаталари ёрдами билан ҳисоблашни кўрсатамиз.

Фараз қилайлик, ABC учбурчак бурчакларининг учлари $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $C(x_3, y_3)$ нуқталарда бўлсин (шакл 9).

Агар тўғрибурчакли координаталар системасини олиб, бу нуқталарнинг координаталари ясалса, шаклга мувофиқ улар қуйидагича бўлади:

$$\frac{P_1Q_1}{Q_1P_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Шунинг учун (4) формулаларга мувофиқ

$$x' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}, \quad y' = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}. \tag{5}$$

Энди Q_1 билан P_3 нинг оғирлик марказини топамиз. Агар уни: Q_1 ва P_3 ни туташтирувчи тўғри чизиқдаги $Q_2(x'', y'')$ нуқта деб фараз қилсак, бу ҳолда Q_1 нинг массаси $m_1 + m_2$ ва P_3 нинг массаси m_3 бўлгани учун:

$$x'' = \frac{(m_1 + m_2)\,x' + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y'' = \frac{(m_1 + m_2)\,y' + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{6}$$

ёки (5) формулани махраждан қутқазсак:

$$(m_1 + m_2)\,x' = m_1x_1 + m_2x_2;$$

$$(m_1 + m_2)\,y' = m_1y_1 + m_2y_2;$$

булар (6) ға қўйилса:

$$x'' = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$y'' = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Кетма-кет шу йўл билан давом этганда, берилган n та материал нуқталарнинг оғирлик марказини топиш учун ушбу формула келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} \\ y &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Саволлар ва масалалар

25. Кесманинг ўртасидаги нуқтанинг координаталари қандай топилади?

26. Агар (2) формулаларда λ ни -1 га чексиз яқинлаштирилса у нимани билдиради?

27. $A(1, -3)$ ва $B(2, -2)$ нуқталар орасидаги масофа $2:3$ нисбатда иккига бўлинсин.

Бу тенгликдаги кесмаларнинг узунликлари ABC учбурчакнинг бурчаклари учларининг координаталари ёрдами билан топилади. Шаклга мувофиқ:

$$AD = y_1;\ CE = y_3;\ BF = y_2;$$
$$DE = OE - OD = x_3 - x_1;$$
$$EF = OF - OE = x_2 - x_3;$$
$$DF = OF - OD = x_2 - x_1;$$

ёки булар (3) га қўйилса:

$$ABC \text{ юзи } = \frac{1}{2}\{(y_1+y_3)(x_3-x_1)+(y_3+y_2)(x_2-x_3)-$$
$$-(y_1+y_2)(x_2-x_1)\},$$

ёки кейинги қавслар ичидаги x_2 билан x_1 нинг ўринлари алмаштирилса:

$$ABC \text{ юзи } = \frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+$$
$$+(y_3+y_1)(x_3-x_1)\}.$$

Агарда диққат қилинган бўлса ABC учбурчак юзини ҳисоблашда унинг бурчак учлари тартибини соат стрелкаси ҳаракатига тескари қилиб олинган эди: A, B, C. Аксинча, агарда улар тартибини соат стрелкаси ҳаракати бўйича олинса, яъни A, C, B тартибида бўлса, ҳамон шу формуланинг ўзи келиб чиқади, лекин унинг олдида минус пайдо бўлади, яъни натижа манфий чиқади. Лекин учбурчакнинг юзини ҳисоблашда натижанинг абсолют қиймати эътиборга олинади. Шундай қилиб, ABC учбурчакнинг юзини S ҳарфи билан белгилаб, кейинги натижани бундай формула шаклида ёзиш мумкин:

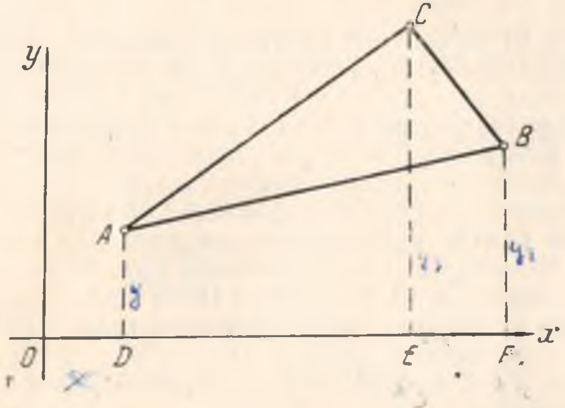
$$S = \frac{1}{2}\{(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)+$$
$$+(y_3+y_1)(x_3-x_1)\}. \qquad (4)$$

(4) формуланинг ўнг томонидаги кичик қавсларни очиб, соддалаштиргандан сўнг, уни яна бу шаклда ёзиш мумкин:

$$S = \frac{1}{2}\{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\}. \qquad (5)$$

A нинг координаталари $OD = x_1$, $AD = y_1$;
B „ „ $OF = x_2$, $BF = y_2$;
C „ „ $OE = x_3$, $CE = y_3$;

AD, CE ва BF кесмалар ўзаро параллель бўлгани учун: $ADCE$, $CEFB$ ва $ADFB$ туртбурчакларнинг ҳар бири трапеция бўлади.



Шакл 2.

Агар аввалги икки трапециянинг юзларини қўшиб, чиққан йиғиндидан учинчи трапециянинг юзи айириб олинса, ABC учбурчакнинг юзи чиқади, яъни:

$$ABC \text{ юзи} = ADCE \text{ юзи} + CEFB \text{ юзи} - ADFB \text{ юзи}. \quad (1)$$

Демак, ABC учбурчакнинг юзини топиш учун ана шу трапецияларининг юзларини топишга тўғри келади. Шаклга мувофиқ:

$$\left.\begin{aligned} ADCE \text{ нинг юзи} &= \frac{1}{2}(AD + CE)\,DE; \\ CEFB \quad „ \quad „ &= \frac{1}{2}(CE + BF)\,EF; \\ ADFB \quad „ \quad „ &= \frac{1}{2}(AD + BF)\,DF; \end{aligned}\right| \quad (2)$$

ёки булар (1) га қўйилса:

$$ABC \text{ юзи} = \frac{1}{2}\{(AD+CE)DE + (CE+BF)EF - (AD+BF)DF\}. \quad (3)$$

$$S = \pm \frac{1}{2} \{(-1+3)(-3-2)+(3+5)(2+1)+$$
$$+(5-1)(-1+3)\} = 11 \text{ кв бирлик.}$$

Масалалар

37. Бурчакларининг учлари $A(1, -3)$, $B(0, 2)$ ва $C(-6, 0)$ нуқталарда булган учбурчакнинг юзи топилсин.

38. Бурчаклари учларидан иккитасининг координаталари $(-2, 2)$ ва $(4, 5)$ булиб, учинчиси координаталар бошида булган учбурчакнинг юзи топилсин.

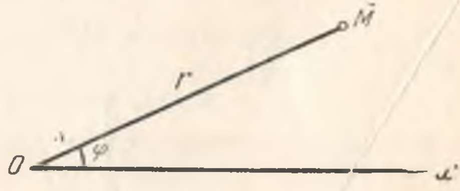
39. Учбурчак бурчакларииинг учларидаи бири $(-3, 12)$ нуқтада, иккинчиси координаталар бошида ва учинчиси абсцисса ўқининг мусбат томонида. Агар учбурчакнинг юзи 90 *кв* бирлик булса, унинг абсцисса ўқидаги бурчаги учиниг координаталари қандай булади?

40. Бурчаклари учларинииг координаталари: $A(5, 6)$, $B(5, -6)$, $C(-2, 1)$ ва $D(-2, -1)$ булган туртбурчакнинг юзи топилсин.

41. Бурчакларинииг учлари: $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(2, 5)$, $D(-2, 1)$ ва $E(-1, -2)$ иуқталарда булган бешбурчакнинг юзи топилсин.

§ 6. ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

Нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун биз ҳозиргача Декарт координаталаридан фойдаланиб келдик. Умуман, ўнғайлик ва соддалик томонидан Декарт системасидан кейин иккинчи ўринни *қутб координаталар системаси* олади.



Шакл 11.

Бу система ёрдами билан текисликдаги нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун бир ўзгармас нуқта ва у нуқтадан ўтган қўзғалмас тўғри чизиқ бўлса кифоя. Масалан, ўзгармас нуқта O ва бу нуқтадан ўтган қўзғалмас тўғри чизиқ Ox булсин (шакл 11). O нуқта **қутб** ва Ox чизиқ **қутб ўқи** дейилади.

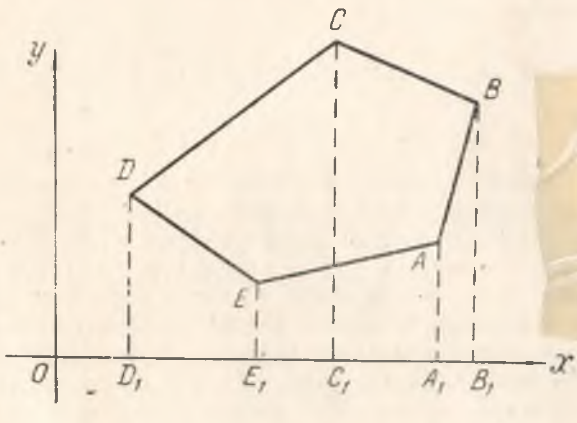
Қутб координаталар системасида текисликдаги ҳар бир нуқтанинг ўрни шу нуқта билан O нуқта орасидаги $MO = r$

Энди фараз қилайлик, бизга бирор ($ABCDE$) кўпбурчак берилган бўлсин (шакл 10). Юқоридаги каби муҳокама қилиб, кўпбурчакнинг бир бурчаги учидан унинг контури бўйича бир йўналишда борилса, у ҳолда трапецияларнинг юзлари $\frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})(x_i - x_{i+1})$ равишда ифода қилиниб, n-бурчак юзининг формуласи қуйидагича бўлади:

$$S = \frac{1}{2}\{(y_1 + y_2)(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)(x_2 - x_3) + \cdots +$$

$$+ (y_n + y_1)(x_n - x_1)\}. \qquad (6)$$

Кўпбурчакнинг юзини ҳисоблаган чоқда, ҳамон S нинг абсолют қиймати эътиборга олинади.



Шакл 10.

Мисол. Бурчакларининг учлари $A(-3, -1)$, $B(2, 3)$ ва $C(-1, 5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг юзи топилсин.

Берилган мисолда:

$$x_1 = -3,\ y_1 = -1;$$
$$x_2 = 2,\quad y_2 = 3;$$
$$x_3 = -1,\ y_3 = 5.$$

Булар бевосита (4) формулага қўйилса:

масофаси ва бу масофа билан Ox ўқи орасидаги $MOx = \varphi$ бурчаги билан аниқланади. Текисликдаги M нуқтанинг ўрнинн аниқлаб берувчи r ва φ миқдорлар у нуқтанинг қутб координаталари дейилади. Булардан биринчиси (r) — радиус-вектор ва иккинчиси (φ) — қутб бурчаги ёки амплитуда дейилади.

Қутб координаталари r ва φ бўлган бирор M нуқта одатда $M(r, \varphi)$ равишда ёзилади. Шунинг учун қавслар ичидаги чапдан биринчи ўринда турган миқдор ҳамавақт нуқтанинг радиус-вектори ва вергулдан кейин иккинчи ўринда турган миқдор қутб бурчаги бўлади.

Нуқтанинг радиус-векторини мусбат қабул қилиш мумкин, чунки унинг йўналиши қутб бурчаги билан аниқланади; қутб бурчаги φ бўлса, қутб ўқидан соат стрелкаси ҳаракатининг йўналишига қарши йўналишда ҳисоб қилинади ва бу ҳолда мусбат ва тескарича бўлганда — манфий саналади. Шунинг учун φ бу ҳолда ҳар қандай ҳақиқий қийматга эга бўла олади.

Радиус-векторнинг ҳар бир тўла айланишида M нуқтанинг ўрни ўзгармайди. Шунинг учун текисликдаги ҳар бир нуқтанинг чексиз кўп координаталари бўлади. Дарҳақиқат бирор M нуқтанинг қутб координаталари

$$r = r' \text{ ва } \varphi = \varphi'$$

бўлсин. Агар радиус-вектор мусбат йўналишда 2π яъни $360°$ га айлантирилса, у яна аввалги ўрнига келиб, бу ҳолда нуқтанинг координаталари

$$r = r' \text{ ва } \varphi = \varphi' + 2\pi$$

бўлади. Шунга ўхшаш 2π га манфий йўналишда айлантирилса

$$r = r' \text{ ва } \varphi = \varphi' - 2\pi$$

бўлади. Умуман текисликдаги бирор нуқтанинг координаталари r' ва φ' бўлганда

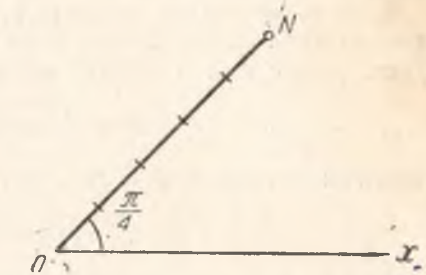
$$r = r' \text{ ва } \varphi = \varphi' + 2k\pi$$

бўлади, бунда $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, натижада нуқта яна аввалги ўрнида бўлади.

Мисол. Қутб координаталари $r = 5$ ва $\varphi = \frac{\pi}{4}$ бўлган нуқтанинг ўрни топилсин.

Бунинг учун бирор тўғри чизиқни, масалан, Ox ни қутб ўқи ва унинг бирор O нуқтасини қутб фараз қиламиз (шакл 12). Сўнгра O нуқтадан Ox нинг мусбат томони билан $\frac{\pi}{4}$ га тенг бурчак ҳосил қиладиган тўғри чизиқ ўтказамиз.

Агар бу тўғри чизиқда O нуқтадан бошлаб (бирор аниқ масштабда) $ON = 5$ бирлик ўлчанса, изланган N нуқта топилади.

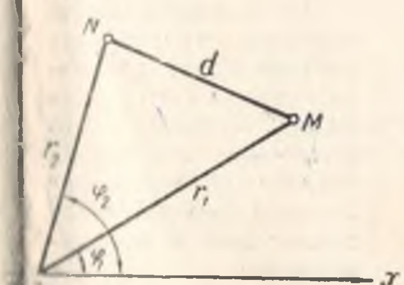


Шакл 12.

Энди, мисол ўрнида, қуйидаги масалаларни қутб системасида ечиб кўрсатамиз.

Масала 1. *Қутб координаталари $M(r_1, \varphi_1)$ ва $N(r_2, \varphi_2)$ бўлган нуқталар орасидаги масофа аниқлансин.*

Берилган масалани ечиш учун текисликда бирор тўғри чизиқ ўтказиб, унинг O нуқтасини қутб ва ўзини (Ox ни) қутб ўқи фараз қиламиз (шакл 13), M ва N нуқталарнинг қутб координаталарини ясаш натижасида OMN учбурчак ҳосил бўлади. Биз излаган MN масофа шу учбурчакдан топилади. Тригонометрия формуласига асосан ҳалиги OMN учбурчакда:



Шакл 13.

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos MON. \quad (1)$$

Шаклга мувофиқ:

$$OM = r_1;\ ON = r_2;$$
$$\angle MON = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Буларни юқоридаги (1) тенгликка қўйиб, MN ни d билан ифода қилганда, ушбу формула келиб чиқади:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

ёки

$$\boxed{d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \quad (2)$$

$$OP = OM\cos\varphi,\ MP = OM\sin\varphi$$

ёки

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{1}$$

Иккинчи томондан

$$OM = \sqrt{OP^2+MP^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{MP}{OP},$$

ёки

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

ёки

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{y}{x}\right), \tag{2}$$

бунда φ нинг қайси координат бурчагидалиги $\operatorname{tg}\varphi$ нинг ишораси билан аниқланади.

(2) формулаларининг ёрдами билан тўғрибурчакли декарт системасидан қутб системасига ўтилади ва, аксинча, (1) формулаларнинг ёрдами билан қутб системасидан декарт системасига ўтилади.

Мисол 1. Нуқтанинг қутб координаталари $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$. Бунинг тўғрибурчакли декарт координаталари топилсин.

Берилган мисолда $r = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Буларни (1) формулаларга қўйилса:

$$x = 4\cdot\cos\frac{\pi}{3} = 2,\ y = 4\cdot\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}.$$

Мисол 2. Нуқтанинг тўғрибурчакли декарт координаталари $(-2, 2)$. Бунинг қутб координаталарн топилсин.

Берилган мисолда: $x = -2$, $y = 2$. Булар (2) формулаларга қўйилса:

$$r = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

Саволлар ва масалалар

42. Текисликдаги нуқтанинг ўрни қутб координаталар системасида қандай аниқланади?

43. Текисликдаги нуқталарнинг қутб координаталари берилган:

Икки нуқта орасидаги масофанинг абсолют қиймати эътиборга олингани учун радикал олдида ёлғиз плюс олинади.

Масала 2. Учбурчак бурчакларининг учларидан бири қутбда ва қолганлари $M(r_1, \varphi_1)$ ва $N(r_2, \varphi_2)$ нуқталарда (шакл 14). Бунинг юзи топилсин.

Тригонометриядан маълумки, агар учбурчакнинг томонларидан бири a, иккинчиси b ва булар орасидаги бурчак C бўлса, унинг юзи S бундай ифода қилинади:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

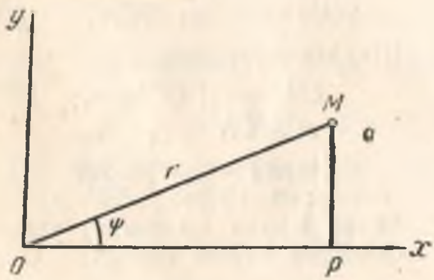
Берилган масалада: $a = r_1$, $b = r_2$, $C = \varphi_2 - \varphi_1$, демак:

$$S = \frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (3)$$

Бу формула билан учбурчакнинг юзини ҳисоблашда S нинг абсолют қиймати эътиборга олинади.

§ 7. НУҚТАНИНГ ДЕКАРТ ВА ҚУТВ КООРДИНАТАЛАРИ ОРАСИДАГИ АСОСИЙ МУНОСАБАТЛАР

Баъзи вақт декарт системасидан қутб системасига ёки аксинча қутб системасидан декарт системасига ўтиш тўғри келади. Бу масала нуқтанинг иккала системага нисбатан координаталари орасида мавжуд бўлган муносабатлар ёрдами билан ечилади.



Шакл 14.

Бу муносабатларни чиқариш учун: декарт системасииинг абсцисса ўқини — қутб ўқи ва унинг бошини — қутб фараз қиламиз (шакл 14). Бу ҳолда текисликдаги бирор M нуқтанинг декарт координаталари

$$x = OP,\ y = MP$$

бўлади ва қутб координаталари

$$r = OM,\ \angle MOP = \varphi$$

бўлади. MOP тўғрибурчакли учбурчакда:

$$A\left(2,\ \frac{\pi}{3}\right),\ B\left(5,\ \frac{\pi}{5}\right),\ C(3{,}5;\ \pi),\ D\left(4,\ -\frac{\pi}{4}\right).$$

Бу нуқталарнинг ўринлари топилсин.

44. Қутб координаталари (3, 50°) ва (6, 110°) бўлган нуқталар орасидаги масофа аниқлансин.

45. Қутб координаталари A (4, 15°) ва B (3, 75°) бўлган нуқталарнинг ўринлари топилсин.

46. Учбурчак бурчакларининг учларидан бирн қутб нуқтасида ва қолганлари (4, 70°) ва (5, 40°) нуқталарда бўлса, унинг юзи қанча булади?

47. Текисликдаги нуқтанинг декарт ва қутб координаталари орасида қандай боғланиш бор?

Иккинчи боб

ДЕТЕРМИНАНТ НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСЛАРИ

Аналитик геометриянинг кўпгина масалаларини ечишда биринчи даражали кўп номаълумли тенгламалар системаси билан иш кўришга тўғри келади.

Бундай системаларни ечиш ва умуман уларни текшириш элементар алгебранинг одатдаги йўллари билан, мумкин бўлсада, лекин у йўллар ғоят даражада узун бўлиб ўнғайсиздир. Бундай масалаларни текшириш учун энг қулайи детерминант методи саналади. Бу метод ишни енгил ва йўлни қисқа қилади. Китобнинг бу бобидан мақсад детерминант назариясининг асослари билан таништиришдан иборатдир.

§ 8. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТ

Элементар алгебрадан маълумки, биринчи даражали икки номаълумли икки тенглама системасининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Бу тенгламалардаги a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 коэффициентлар — берилган аниқ ва ўзгармас сонлардан иборатдир.

Бу системани ечиш учун: биринчи тенгламанинг иккала томонини b_2 га ва иккинчисининг иккала томонини b_1 га

...нгра биринчи натижадан иккинчисини айириб

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_2c_1 - b_1c_2. \qquad (2)$$

...ниш: биринчи тенгламаниниг иккала томонини a_2 га ... иккинчисининг иккала томоинни a_1 га кўпайтириб, сўнгра иккинчисидан айириб оламиз:

$$y(a_1b_2 - a_2b_1) = a_1c_2 - a_2c_1. \qquad (3)$$

$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ фараз қилиб, (2) ни x га ва (3) ни y га нисбатан ечганда натижа қуйидагича бўлади:

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}; \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (4)$$

x ва y ни ифода қилган касрларнинг махражларига диққат қилганда, уларининг ўзаро тенглигини ва номаълум x ва y нинг коэффициентларидан тузилганлигини кўрамиз. Бу эса у махражни мустақил равишда тузиш учун имкон беради.

Ҳақиқатда, x ва y нинг: a_1, b_1, a_2, b_2 коэффициентларини тенгламада берилган тартиби билан бу ерда кўрсатилганча ёзиб, сўнгра улар диагоналлар бўйича кўпайтирилса, бирининг кўпайтмаси a_1b_2 ва иккинчисииинг кўпайтмаси a_2b_1 булади. Агарда буларнинг биринчисидан иккинчиси айириб олинса, натижа

Шакл 15.

$$a_1b_2 - a_2b_1 \qquad (5)$$

бўлади. Бу эса (4) формулаларнинг ўнг томонидаги касрларнинг умумий махражидан иборатдир. Бу махраж, яъни (5) ифода (1) системанинг **детерминанти** дейилади ва у одатда икки параллель чизиқ орасида

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

равишда ифода қилинади, яъни

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \qquad (6)$$

Бу детерминант 2- **тартибли детерминант** дейилади. Детерминантни ташкил қилувчи a_1, b_1, a_2, b_2 сонлар детерминантнинг **элементлари** дейилади; a_1 ва b_1, a_2 ва b_2 элементлар детерминантнинг **йўлларини**, a_1 ва a_2, b_1 ва b_2 элементлар унинг **устунларини** ташкил қилади;

детерминантиинг a_1 ва b_2 элементлари униинг бош диагоналини ташкил қилади.

Мисол учун бир неча иккинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаб курсатамиз:

1) $\begin{vmatrix} 2, & 3 \\ 4, & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot7 - 3\cdot4 = 2;$ 3) $\begin{vmatrix} 5, & -3 \\ 2, & 6 \end{vmatrix} = 30 + 6 = 36;$

2) $\begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 3 \end{vmatrix} = 0\cdot3 - 1\cdot2 = -2;$ 4) $\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ -2, & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot0 + 6 = 6.$

Энди (4) формулаларнинг ўнг томонидаги касрларнинг суратларига диққат қиламиз. Буларнинг ҳам ҳар бирини иккинчи тартибли детерминант шаклида ёзиш мумкин. Ҳақиқатда, x ни ифода қилган касрнинг сурати

$$b_2c_1 - b_1c_2$$

эди. Иккинчи томондан ушбу

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

детерминантнинг қиймати ҳам (юқорида курсатилган қойда бўйича) $c_1b_2 - b_1c_2$ бўлади. Шунга ўхшаш y ни ифода қилган касрнинг сурати ҳам ушбу

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \tag{8}$$

детерминаитдан иборат.

Бу детерминантларнинг ҳар бири (1) системаиинг детерминанти бўлган (6) детерминантдан чиқади. Ҳақиқатда, (7) ни (6) билан солиштириб қараганда курамизки, (6) детерминантиинг биринчи устун элементлари (a_1 ва a_2) c_1 ва c_2 билан алмаштирилган. Шунга ухшаш (6) детерминантнинг биринчи устуи элементлариии ўз ҳолича қолдириб, иккинчи устун элементлари, яъни b_1 ва b_2 тартиб билан c_1 ва c_2 га алмаштирилса, (8) детерминант ҳосил бўлади.

Демак, *номаълум x ва y ни ифода қилувчи ҳар бир каср суратининг детерминантини тузиш учун, махраж детерминантидаги аниқланмоқчи бўлган номаълумнинг коэффициентлари ўрнига тегишли тенгламаларнинг озод ҳадларини қўйиш кифоя.*

Натижада (4) формулаларни детермннант шаклида ёзганда, уларнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad (9)$$

Мисол. Ушбу система берилган бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} 3x+7y&=27, \\ 5x+4y&=22. \end{aligned}\right\}$$

Бу система детерминант ёрдами билан қуйидагича ечилади:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 27 & 7 \\ 22 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{27\cdot4-7\cdot22}{3\cdot4-7\cdot5}=\frac{108-154}{12-35}=\frac{-46}{-23}=2;$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 27 \\ 5 & 22 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}=\frac{3\cdot22-27\cdot5}{3\cdot4-7\cdot5}=\frac{66-135}{12-35}=\frac{-69}{-23}=3.$$

Бу ерда шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, берилган системанинг илдизларга эга бўлиши унинг детерминанти нолга тенг бўлмаган ҳолдагинадир. Системанинг детерминанти нолга тенг бўлган ҳолда, яъни

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (10)$$

бўлган ҳолда (2) ва (3) га асосан, системанинг илдизлари бўлмайди. Агар бунинг устига (9) ниг суратлари ҳам нолга тенг, яъни

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (11)$$

бўлса, бу ҳолда (10) ва (11) дан:

$$\begin{aligned} a_1b_2-a_2b_1&=0, \\ b_2c_1-b_1c_2&=0, \\ a_1c_2-a_2c_1&=0, \end{aligned}$$

ёки

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2};\ \frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2};\ \frac{a_1}{a_2}=\frac{c_1}{c_2},$$

ёки

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}, \tag{12}$$

бу эса берилган (1) системанинг тенгламаларидан бири иккинчисининг натижаси эканлигини кўрсатади.

§ 9. УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ДЕТЕРМИНАНТ

1. Маълумки, биринчи даражали уч номаълумли уч тенглама системасининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=d_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=d_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=d_3,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Бу системани элементар алгебранинг одатдаги йўли билан ечганда x, y ва z нинг қийматлари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{d_1b_2c_3-d_1b_3c_2+d_2b_3c_1-d_2b_1c_3+d_3b_1c_2-d_3b_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1},\\ y&=\frac{a_1d_2c_3-a_1d_3c_2+a_2d_3c_1-a_2d_1c_3+a_3d_1c_2-a_3d_2c_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1},\\ z&=\frac{a_1b_2d_3-a_1b_3d_2+a_2b_3d_1-a_2b_1d_3+a_3b_1d_2-a_3b_2d_1}{a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1}.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Бундаги касрларнинг махражларини солиштириб қараганда, уларнинг ўзаро тенглигини кўрамиз. Бу умумий махраж (1) системанинг детерминанти дейилади ва у

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} \tag{3}$$

равишда ифода қилинади, яъни

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1 \tag{4}$$

Бу детерминант **учинчи тартибли детерминант** дейилади Иккинчи тартибли детерминантни таъриф қилиш-да айтилган: элемент, йул, устун терминлари бу ерда ҳам уз кучини сақлайди; $a_1b_2c_3$ — детерминантнинг б о ш д и а г о н а л и дейилади.

Номаълумларни ифода қилган ҳар бир касрнинг суратини уз махражи билан солиштириб қараганда утган параграфда чиқарилган қоида бу ерда ҳам уз кучини сақлаганлигини курамиз. Демак, x, y, z ни ифода қилган ҳар бир каср суратининг детерминантини тузиш учун: махраж детерминантидаги аниқланмоқчи булган номаълумларнинг коэффициентларини тегишли тенгламаларининг озод ҳадлари билан алмаштирилса кифоя. Шунинг билан, (2) формулаларни детерминант шаклида ёзганда уларнинг куриниши қуйидагича булади:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}};\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}};\quad z=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Шунинг билан (1) системанинг детерминанти (3) нолга тенг булмаган ҳолда, у системанинг аниқ илдизлари булади.

2. Учинчи тартибли детерминантни ҳисоблаш учун бир неча усул мавжуд булиб, улардан бири С а р р у с қ о и д а с и д и р.

Учинчи тартибли детерминантни бу қоида буйича ҳисоблаш учун энг аввал унинг биринчи ва иккинчи йуллари детерминант остига ёзилади (шакл 16); сунгра детерминантнинг бош диагоналини ташкил қилган a_1, b_2, c_3 элементлари ва бу диагоналга параллель булган диагоналларнинг ҳар биридаги элементлар узаро купайтирилади. Бунинг натижасида:

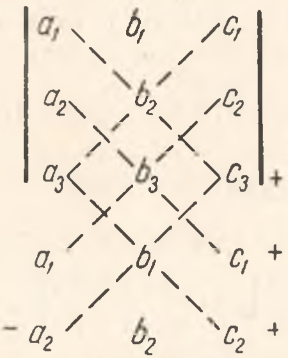
$$a_1b_2c_3,\quad a_2b_3c_1,\quad a_3b_1c_2$$

купайтмалар ҳосил булади. Шунга ухшаш унгдан чапга қараб кетган учта параллель диагоналлардаги элементлар купайтирилса, уларнинг купайтмалари:

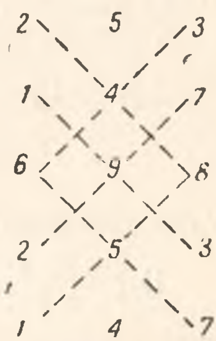
$$a_3b_2c_1,\quad a_1b_3c_2,\quad a_2b_1c_3$$

булади. Чиққан купайтмалардан аввалги учтаси (+) ишора билан, кейинги учтасини (—) ишора билан олганда, уларнинг алгебраик йиғиндиси (3) да ёйиб кўрсатилган детерминантнинг қиймати бўлади. Натижада:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - \\ & - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3. \end{aligned}$$



Шакл 16.



Шакл 16а.

Мисол учун қуйидаги детерминантни Саррус қоидаси билан ҳисоблаб кўрсатамиз:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

Қоида бўйича детерминантнинг биринчи ва иккинчи йўлларини учинчи йўлининг остига кўчириб (шакл 16а), сўнгра ҳисоблаймиз:

$$D = 2\cdot4\cdot8 + 1\cdot9\cdot3 + 6\cdot5\cdot7 - 6\cdot4\cdot3 - 2\cdot9\cdot7 - 1\cdot5\cdot8 = 63.$$

Иккинчи мисол учун ушбу системани оламиз:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 2y - 5z = 3, \\ 2x - y - 3z = 7. \end{cases}$$

Бу система детерминант ёрдами билан қуйидагича ечилади

$$x=\frac{\begin{vmatrix}9 & -3 & 2\\ 3 & 2 & -5\\ 7 & -1 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -5\\ 3 & -1 & -3\end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}5 & 9 & 2\\ 2 & 3 & -5\\ 2 & 7 & -3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -5\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}},\quad z=\frac{\begin{vmatrix}5 & -3 & 9\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3 & 2\\ 2 & 2 & -5\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}}.$$

Бундаги детерминаитларни ҳисоблаш ўқувчига тавсия қилинади. Ҳисоблаш натижаси қуйидагича бўлади:

$$x=\frac{-55}{-55}=1;\ y=\frac{110}{-55}=-2;\ z=\frac{55}{-55}=-1.$$

Масалалар

48. Ушбу детерминантларнинг қийматлари топилсин:

$$1)\ \begin{vmatrix}-2 & 4\\ -5 & 10\end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}$$

49. Ушбу детерминантлар Саррус қоидаси билан ҳисоблансин:

$$1)\ \begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 4 & -1 & 6\end{vmatrix};\quad 2)\ \begin{vmatrix}0 & 1 & -3\\ -4 & 1 & 5\\ 6 & 0 & 8\end{vmatrix};\quad 3)\ \begin{vmatrix}0 & 0 & 5\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix}.$$

50. Қуйидаги системалар детерминант ёрдами билан ечилсин:

$$1)\ \begin{cases}5x+7y=26,\\ 9x-2y=3.\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}3x+5y=-9,\\ 7x-2y=20.\end{cases}\quad 3)\ \begin{cases}2x-y=5,\\ 3x+2y=25.\end{cases}$$

51. Қуйидаги системалар детерминант ёрдами билан ечилсин:

$$1)\ \begin{cases}x+2y+z=8,\\ 3x-y+2z=7,\\ 5x+2y-4z=-3.\end{cases}\quad 2)\ \begin{cases}5x-y+3z=9,\\ 3x+6y-2z=10,\\ 4x-3y+7z=19.\end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases}5x+3y-z=8,\\ 3x-2y+4z=24,\\ x+y+5z=23.\end{cases}\quad 4)\ \begin{cases}3x-2y+10z=37,\\ 6x+7y-8z=34,\\ 2x-5y+7z=11.\end{cases}$$

§ 10. ДЕТЕРМИНАНТНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Детерминант бирмунча муҳим хоссаларга эгадир. Биз бу ерда фақат 2- ва 3- тартибли детерминантлар билан чегараланамиз. Лекин 2- ва 3- тартибли детерминантлар учун исбот қилинган қуйидаги хоссаларни ҳар қандай тартибли детерминант учун ҳам исбот қилиш мумкин.

1. *Агар детерминантнинг устунларини йўллари билан ёки йўлларини устунлари билан алмаштирилса, детерминант ўзгармайди.*

Энг аввал иккинчи тартибли ушбу

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ ва } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

детерминантларни оламиз. Биринчи детерминантнинг устунлари унинг йўллари билан алмаштирилса, иккинчи детерминант ҳосил бўлади. Иккинчи томондан:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

демак

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Энди 3- тартибли ушбу

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ ва } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

детерминантларни оламиз. Буларда биринчи детерминантнинг йўллари иккинчисида устун бўлган. Бу детерминантларнинг ҳар бирини очганда қуйидагича бўлади:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Бу тенгликларнинг ўнг томонлари ўзаро тенг бўлгани учун:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. *Агар детерминантнинг икки йўли (ёки икки устуни) ўзаро алмаштирилса, детерминантнинг ишораси тескари бўлади.*

Энг аввал иккинчи тартибли ушбу

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

детерминантларни оламиз. Агар биринчи детерминантнинг йўллари ўзаро алмаштирилса, иккиичи детерминант ҳосил бўлади. Иккинчи томондан:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1),$$

демак

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}.$$

Шунга ўхшаш:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3,$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -(a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3),$$

демак

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Биринчи хоссага мувофиқ детерминантнинг устуни билан йўлининг роли бир бўлгани учун детерминантнинг икки устунидан бирининг ўрнига иккинчиси қўйилса, детерминантнинг ишораси тескари бўлади.

шунга ухшаш

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + a_2k, & b + b_2k, & c + c_2k \\ a_1\ , & b_1\ , & c_1 \\ a_2\ , & b_2\ , & c_2 \end{vmatrix}.$$

Бу тенгликнинг туғрилигини синаш учун унинг иккала томонидаги детерминантларни очиб, чиққан натижаларни солиштириб куриш кифоя.

§ 11. ДЕТЕРМИНАНТНИНГ МИНОРЛАРИ

Ўтган параграфлардан бизга маълумки

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3. \quad (1)$$

Бу тенгликнинг чап томонини қисқача D ҳарфи билан ифода қилиб, унг томонини қуйида курсатилган тартибда ёзамиз:

$$D = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

ёки

$$D = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix},$$

демак

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Бу тенгликнинг унг томонидаги иккинчи тартибли детерминантлар унинг чап томонидаги детерминантнинт **м и н о р л а р и** дейилади. Чапдан бошлаб буларнинг биринчиси тенгликнинг чап томонидаги учинчи тартибли детерминантнинг a_1 элементига нисбатан минори, иккинчиси b_1 элементига нисбатан минори ва учинчиси c_1 элементига нисбатан минори саналади.

Детерминантнинг минорларини тузиш учун жуда содда қоида бор. Масалан, (2) тенгликнинг чап томонидаги детерминантнинг a_1 элементида учрашган устуни ва йули чизиб ташланса,

$$\begin{vmatrix} a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \\ \vdots \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ \vdots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix}$$

қолган элементларидан унинг ўнг томонидаги биринчи минор ҳосил бўлади. Шунга ухшаш b_1 элементида учрашган устун ва йўл чизиб ташланса, иккинчи минор ҳосил бўлади ва c_1 элементида учрашган устун ва йўл чизиб ташланса, учинчи минор ҳосил бўлади:

$$\begin{vmatrix} a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \\ \vdots \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ \vdots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \\ \vdots \\ a_2 \quad b_2 \quad c_2 \\ \vdots \\ a_3 \quad b_3 \quad c_3 \end{vmatrix}.$$

Минорнинг ишораси $+$ ёки $-$ бўлиши мумкин. Бунинг учун элемент ўрининг жуфт ёки тоқ эканлигини билиш керак булади.

Бирор элементнинг ўрни жуфт ёки тоқлигини аниқлаш учун энг аввал у элементга қарашли устунларнинг ва йўлларнинг номерини билиш лозим. Одатда детерминантнинг йўл номери юқоридан қуйига қараб (1-, 2-, 3- йўл) ҳисобланади. Шунга ухшаш устун номери чапдан унгга қараб (1-, 2-, 3- устун) ҳисобланади.

Агар бирор элементга қарашли устун ва йулнинг номерлари йиғиндиси жуфт бўлса, у элементнинг ўрни ҳам жуфт саналади, агар тоқ бўлса — тоқ саналади. Масалан, b_2 нинг ўрни жуфт булади, чунки b_2 турган устуннинг номери 2 ва йулининг номери ҳам 2 бўлгани учун, номерларнинг йиғиндиси $2+2=4$ — жуфт бўлади. Шунга ухшаш b_1 нинг ўрни тоқ, a_2 нинг ўрни тоқ, c_3 нинг ўрни жуфт,... бўлади.

Ўрни тоқ булган элементга қарашли минорнинг олдидаги ишораси ($-$) ва ўрни жуфт бўлган элементга қарашли минорнинг олдидаги ишораси ($+$) бўлади. Бу қоиданинг тўғрилиги (2) тенгликдан кўриңмоқда. Ҳақиқатан, a_1 ва c_1 элементларнинг ўринлари жуфт бўлгани учун, уларга қарашли минорларнинг олдидаги ишоралари ($+$) ва b_1 нинг ўрни тоқ бўлгани учун унга қарашли минорнинг олдидаги ишораси ($-$) бўлган.

Юқоридаги (2) тенглик: детерминантнинг биринчи йўли элементларига нисбатан минорларга ажратилганлигини кўрсатади. Лекин у детерминантни ҳар қандай йўл ёки ҳар қандай устун элементларига нисбатан минорларга ажратиш мумкин. Масалан, уни иккинчи устун элементларига нисбатан минорларга ажратилгаида қуйидагича бўлади:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Натижа. Бирор устуни ёки бирор йўлининг ҳамма элементлари нолга тенг бўлган детерминантнинг қиймати нолга тенг бўлади.

Масалаи, ҳалиги детерминантниг иккинчи устун элементлари нолга тенг бўлганда, яъни $b_1=b_2=b_3=0$ бўлганда $D=0$ бўлади. Шунинг учун детерминантни минорларга ажратиш ёрдами билан ҳисоблашда уни шундай йўл ёки устун элементларига нисбатан ажратиш керакки, у йўлда ёки у устунда нолга тенг бўлган элементлари мумкин қадар кўп бўлсин. Масалан, ушбу

$$D=\begin{vmatrix} 5, & 7, & 4 \\ 3, & 6, & 0 \\ 8, & 1, & 0 \end{vmatrix}$$

детерминантни учинчи устун элементларига нисбатан минорларга ажратганда, унинг қиймати

$$D=4\begin{vmatrix} 3, & 6 \\ 8, & 1 \end{vmatrix}=4(3\cdot1-6\cdot8)=-180$$

бўлади.

Детерминантнинг 5- хоссасига асосланиб, ҳамавақт унинг бир устунининг ёки бир йўлининг элементларидаи бирини қолдириб, қолганларини нолга айлантириш мумкин. Бу эса детерминантни ҳисоблаш учун катта енгиллик келтиради. Мисол учуи ушбу детерминантни оламиз:

$$D=\begin{vmatrix} 15, & 9, & 2 \\ 15, & 5, & 7 \\ 15, & 1, & 6 \end{vmatrix}.$$

Бу детерминантнинг биринчи устунида 15 умумий бўлгани учун энг аввал уни детермиинант белгисидан ташқарига чиқарамиз:

$$D = 15 \begin{vmatrix} 1, & 9, & 2 \\ 1, & 5, & 7 \\ 1, & 1, & 6 \end{vmatrix}.$$

Биринчи йўл элементларидан, иккинчи ва учинчи йўл элементларини кетма-кет айириб оламиз:

$$D = 15 \begin{vmatrix} 1, & 9, & 2 \\ 0, & 4, & -5 \\ 0, & 8, & -4 \end{vmatrix},$$

Энди бу детерминантни биринчи устун элементларига нисбатан минорларга ажратамиз:

$$D = 15 \begin{vmatrix} 4, & -5 \\ 8, & -4 \end{vmatrix} = 15 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1, & -5 \\ 2, & -4 \end{vmatrix} = 360.$$

Иккинчи мисол учун ушбу детерминантни оламиз:

$$D' = \begin{vmatrix} 1, & 3, & 5 \\ 4, & -1, & 2 \\ 3, & 8, & -7 \end{vmatrix}.$$

Бунинг учинчи устун элементларини -2 га кўпайтириб, сўнгра чиққан кўпайтмаларни биринчи устуннинг мос элементларига қўшамиз:

$$D' = \begin{vmatrix} -9, & 3, & 5 \\ 0, & -1, & 2 \\ 17, & 8, & -7 \end{vmatrix}.$$

Шунга ўхшаш, бу детерминантнинг иккинчи устун элементларини 2 га кўпайтириб, сўнгра чиққан кўпайтмаларни учинчи устуннинг мос элементларига қўшамиз:

$$D' = \begin{vmatrix} -9, & 3, & 11 \\ 0, & -1, & 0 \\ 15, & 8, & 9 \end{vmatrix},$$

буни (2-йўл элементларига нисбатан) минорларга ажратсак:

$$D' = -\begin{vmatrix} -9, & 11 \\ 17, & 9 \end{vmatrix} = 81 + 187 = 268.$$

§ 12. БИРИНЧИ ДАРАЖАЛИ БИРЖИИСЛИ ТЕИГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

11-параграфдаги теигламалар системасининг озод ҳадлари нолга тенг фараз қилинса, яъни

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

булса, у системанинг куриниши қуйидагича булади:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Бундай система биржинсли система дейилади. Агар бу системаниг детерминанти D фараз қилинса, яъни

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

булса, бу ҳолда x, y, z нинг қийматлари қуйидагича булади:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{D}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{vmatrix}}{D}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix}}{D} \qquad (3)$$

ёки

$$x = \frac{0}{D}, \quad y = \frac{0}{D}, \quad z = \frac{0}{D},$$

$$Dx = 0, \quad Dy = 0, \quad Dz = 0. \qquad (4)$$

Агар $D \neq 0$ булса, бу ҳолда системанинг очиқдан-очиқ куриниб турган $x = y = z = 0$ илдизларидан бошқа илдизлари булмайди. Лекин $D = 0$ булса, бу ҳолда системаниг нолга тенг булган илдизларидан бошқа, айни замоида, нолга тенг булмаган илдизлари ҳам булади.

Агар (1) системада детерминанти (2) нинг a_1 элементига нисбатан минорини (тегншли ишораси билан) A_1, шунга ўхшаш b_1 элементига нисбатан минорини B_1 ва c_1 элементига нисбатан минорини C_1 фараз қилсак,

$$D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 \qquad (5)$$

булади. Энди бу тенгликдаги a_1, b_1, c_1 купайтувчиларни a_2, b_2, c_2 билан алмаштирамиз; бу ҳолда (5) йиғинди нолга айланади, чунки ҳалиги алмаштириш натижасида (2) детерминантнинг биринчи йўл элементлари иккинчи йўл элементларига тенг бўлади; демак:

$$a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0, \tag{6}$$

шунга ўхшаш

$$a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0. \tag{7}$$

Натижада кўрамизки, (1) системадаги биринчи тенгламанинг коэффициентларига ҳеч боғлиқ бўлмаган A_1, B_1, C_1 сонлар— системанинг қолган икки тенгламасини қаноатлантирмоқда, яъни уларнинг илдизлари бўлмоқда. Шунинг учун буларга пропорционал бўлган kA_1, kB_1, kC_1 сонлар ҳам (k — исталган ўзгармас сон) уларни қаноатлантиради, яъни

$$x = kA_1,\ y = kB_1,\ z = kC_1. \tag{8}$$

Берилган системанинг минорларидан ҳеч бўлмаса биттаси нолга тенг бўлмаганда, системанинг „ноль" илдизларидан бошқа, унинг нолга тенг бўлмаган илдизлари ҳам бўлади. Ҳатто системанинг ҳамма минорлари нолга тенг бўлганда ҳам бу ҳол ўз кучини сақлайди, яъни $D = 0$ шарти — зарур ва кифоя қиларлик шартдир. Бироқ бу ерда биз буларнинг исботи устида тўхтамаймиз.

Шунинг билан, *биринчи даражали биржинсли тенгламалар системасининг нолга тенг бўлмаган илдизларга эга бўлиши учун, берилган системанинг детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва кифоядир.*

Юқоридаги (8) тенгликларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{x}{A_1} = \frac{y}{B_1} = \frac{z}{C_1} = k, \tag{9}$$

яъни номаълумлар система детерминантининг биринчи йўл элементларига нисбатан тузилган тегишли минорларга пропорционалдир. Табиий, (9) каби нисбатларни детерминантнинг бошқа йўл элементларига нисбатан ҳам тузиш мумкин.

Шунинг учун текширилган ҳолда (1) системанинг илдизлари, система детерминантининг бирор йўл элементларига нисбатан тузилган тегишли элементнинг минорларига пропорционалдир (албатта, минорлар, тегишли ишоралари билан олинади).

М и с о л 1. Ушбу биржинсли тенгламалар системаси ечилсин:

$$\left.\begin{aligned} x + 5y - 10z &= 0,\\ 2x - 3y + \ \ 6z &= 0,\\ 3x + 2y - \ \ 4z &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Берилган системанинг детерминанти

$$D=\begin{vmatrix}1, & 5, & -10\\ 2, & -3, & 6,\\ 3, & 2, & -4,\end{vmatrix}=0,$$

буни синаб кўришни ўқувчига тавсия қиламиз. Демак, берилган системанииг очиқдан-очиқ кўриниб турган $x=y=$ $=z=0$ илдизларидан бошқа, яна нолга тенг бўлмаган илдизлари бор. Уларни топиш учун юқорида кўрсатилган йўл билан давом этиб, қуйидаги нисбатларни тузамиз:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}-3, & 6\\ 2, & -4\end{vmatrix}}=\frac{y}{-\begin{vmatrix}2, & 6\\ 3, & -4\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}2, & -3\\ 3, & 2\end{vmatrix}},$$

ёки

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{26}=\frac{z}{13},$$

ёки

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}=k$$

фараз қилинса, бундан

$$x=0;\ y=2k;\ z=k.$$

Мисол 2. Ушбу биржинсли тенгламалар системаси ечилсин:

$$\left.\begin{aligned}x+2y-3z&=0,\\ 3x-\ y+\ z&=0.\end{aligned}\right\}$$

Берилган мисолда тенгламаларнинг сони ундаги номаълумларнинг сонидан битта кам. Лекин буни аввалги ҳолга келтириш мумкин. Бунинг учун берилган системани бундай ёзамиз:

$$\left.\begin{aligned}x+2y-3z&=0,\\ 3x-\ y+\ z&=0,\\ 0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z&=0.\end{aligned}\right\}$$

Очиқдан-очиқ кўринмоқдаки,

$$D=\begin{vmatrix}1, & 2, & -3\\ 3, & -1, & 1\\ 0, & 0, & 0\end{vmatrix}=0.$$

демак, (13) тенглик мавжуд бўлган чоқдагина (10) система бирлашган бўлади.

§ 13. ДЕТЕРМИНАНТЛАРНИ ЎЗАРО КЎПАЙТИРИШ

Иккита бир тартибли детерминантни ўзаро кўпайтириш натижасида ҳамон шу тартибли детерминант ҳосил бўлади. Масалан иккита иккинчи тартибли детерминантни ўзаро кўпайтириш қуйидаги формула билан бажарилади:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

Бу формуланинг тўғрилигини исбот қилиш учун унинг ўнг томонидаги детерминантни оламиз:

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix} = (a_1\alpha_1 + b_1\beta_1)(a_2\alpha_2 + b_2\beta_2) - (a_2\alpha_1 + b_2\beta_1)(a_1\alpha_2 + b_1\beta_2) =$$

$$= a_1a_2\alpha_1\alpha_2 + a_1b_2\alpha_1\beta_2 + a_2b_1\alpha_2\beta_1 + b_1b_2\beta_1\beta_2 -$$

$$- a_1a_2\alpha_1\alpha_2 - a_2b_1\alpha_1\beta_2 - a_1b_2\alpha_2\beta_1 - b_1b_2\beta_1\beta_2) =$$

$$= \alpha_1\beta_2(a_1b_2 - a_2b_1) - \alpha_2\beta_1(a_1b_2 - a_2b_1 =$$

$$= (a_1b_2 - a_2b_1)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Чиқарилган натижа юқоридаги формуланинг тўғрилигини исбот қилади. Шунга ўхшаш иккита учинчи тартибли детерминант қуйидаги формула билан кўпайтирилади:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + c_1\gamma_1, & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 + c_1\gamma_2, & a_1\alpha_3 + b_1\beta_3 + c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 + c_2\gamma_1, & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 + c_2\gamma_2, & a_2\alpha_3 + b_2\beta_3 + c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 + b_3\beta_1 + c_3\gamma_1, & a_3\alpha_2 + b_3\beta_2 + c_3\gamma_2, & a_3\alpha_3 + b_3\beta_3 + c_3\gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Бу формуланинг тўғрилигини айнан юқорида кўрсатилган йўл билан исбот қилиш мумкин. Буни ўқувчига тавсия қиламиз.

Шунинг учун:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 2, & -3 \\ -1, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{y}{-\begin{vmatrix} 1, & -3 \\ 3, & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 3, & 1 \end{vmatrix}} = k,$$

ёки

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-10} = \frac{z}{-7} = k,$$

бундан:

$$x = k;\ y = 10k;\ z = 7k.$$

Энди фараз қилайлик, система ташкил этган биринчи даражали тенгламаларнинг сони номаълумларнинг сонидан битта ортиқ бўлсин.

Масалан, номаълумларнинг сони иккита (x, y) ва система ташкил қилинган тенгламаларнинг сони учта бўлсин:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1 &= 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 &= 0, \\ a_3x + b_3y + c_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Бу системани юқорида текширилган биржинсли система ҳолига келтириш мумкин. Бунинг учун:

$$x = \frac{u}{t},\ y = \frac{v}{t} \qquad (11)$$

фараз қиламиз. Бунда u ва v вақтинча киритилган номаълумлардан иборат; t бўлса нолга тенг бўлмаган ихтиёрий сон; x ва y ниинг ифодаларини (11) дан (10) га қўйилса, ушбу биржинсли тенгламалар системаси ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} a_1u + b_1v + c_1t &= 0, \\ a_2u + b_2v + c_2t &= 0, \\ a_3u + b_3v + c_3t &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Бу системада номаълумлар (u, v, t) сони тенгламаларнинг сонига тенг. Юқорида чиқарилган натижага асосан бундай биржинсли системанинг бирлашган бўлиши учун унинг коэффициентларидан тузилган детерминант нолга тенг бўлиши шарт. Демак, бу ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \qquad (13)$$

Китобнинг бу бобида ёлғиз 2- ва 3- тартибли детерминаитлар билан, уларнинг асосий хоссалари билан ва бу детерминантларни қисман биринчи даражали тенгламалар системасига татбиқ этиш билан чегаралаидик. Ҳолбуки, детерминант 4-, 5-, 6- ва умуман n-тартиблилари бўлиши мумкин. Одатда уларнинг умумий назарияси махсус детерминант курсларнда бўлади.

Лекин, юқорида айтилганча, 2- ва 3- тартибли детерминантлар учун исбот қилинган хоссалар ҳамма детерминантлар учун умумий бўлиб, детерминантнинг тартиби ҳар қандай бўлганда ҳам уларнинг ҳар бири ўз кучини сақлайди. Мисол учун ушбу 4- тартибли детерминантни оламиз:

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}.$$

Агар бу детерминантни биринчи устун элементларига нисбатан минорларга ажратсак, қуйидагича бўлади:

$$D=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-a_4\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Бу тенгликнинг ўнг томонидаги детерминантларнинг ҳар бири бизга маълум бўлган учинчи тартибли детерминантлардан иборат. Шунга ўхшаш 5- тартибли детерминантларни 4- тартибли детерминантларга ажратиш мумкин. Шу йўл билан давом этганда ҳар қандай тартибли детерминантнинг тартибини кетма-кет пасайтириб, иккинчи тартибли детерминантга олиб келиш мумкин.

Саволлар ва масалалар

52. Детерминаит элементларининг ўринлари қай вақтда тоқ ва қай вақтда жуфт саналади?

53. Детерминантнинг минорлари қандай тузилади?

54. Биринчи даражали бир жинсли тенгламалар системасининг илдизлари тўғрисида нималарни биласиз?

55. Қуйидаги детерминантнинг бириичи йўл элементларидан иккитаси нолга айлантирилсин:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

56. Ушбу биржинсли тенгламалар системаси ечилсин:

$$\left.\begin{aligned} 4x+5y+6z&=0, \\ 8x+7y+6z&=0, \\ 7x+5y+3z&=0. \end{aligned}\right|$$

57. Ушбу детерминантнинг қиймати топилсин:

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

58. Ушбу тенгламадан x топилсин:

$$\begin{vmatrix} x, & -1, & 3 \\ -4, & x, & 5 \\ 6, & -3, & 7 \end{vmatrix}=0.$$

59. Ушбу кўпайтманинг қиймати топилсин:

$$\begin{vmatrix} 3, & 4, & 2 \\ 2, & 5, & 4 \\ -1, & 6, & 1 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1, & 4 & -3 \\ -2, & -2, & 1 \\ 1, & 3, & 5 \end{vmatrix}.$$

60. Ушбу детерминантлар ўзаро кўпайтирилсин:

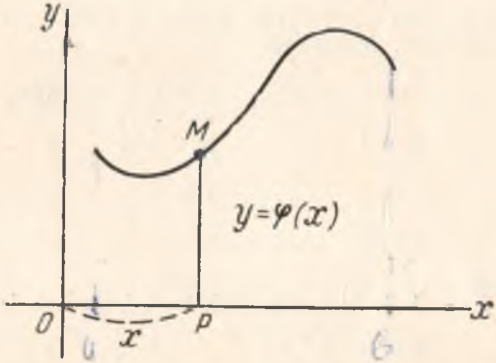
$$\begin{vmatrix} a, & b, & c \\ 0, & a, & b \\ 0, & 0, & a \end{vmatrix} \text{ ва } \begin{vmatrix} -a, & a, & a \\ a, & -a, & a \\ a, & a, & -a \end{vmatrix}.$$

61. Ушбу тенгликинг тўғрилиги исбот қилинсин:

$$\begin{vmatrix} 1, & 2, & -1, & 0, & 3 \\ -4, & 3, & 1, & -1, & 2 \\ 0, & 0, & 4, & 0, & 0 \\ 2, & 0, & -5, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & -5, & 4 \end{vmatrix}=-240.$$

фараз қиламиз, яъни x нинг ҳар бир қийматига y нинг бирғина қиймати тўғри келсин. Биз келгусида (1) тенглама устида айрим сўз бўлмаган ҳолда, уни қўйилган шартларга бўйсунади деб фараз қиламиз.

Энди бирор тўғричизиқли xOy координаталар системасида тенгламадаги x ва y ни xOy текислигидаги бирор нуқтанинг координаталари деб фараз қиламиз. (2) га асосан x нинг ҳар бир қийматига y нинг битта аниқ қиймати тўғри келади. Бошқача қилиб айтганда, x нинг ҳар бир қийматига xOy текислигида координаталари x ва $y = \varphi(x)$ бўлган битта M



Шакл 17.

нуқта аниқланади. Масалан, $x = OP$ бўлганда $y = \varphi(x) = PM$ бўлсин (шакл 17). Агар x нинг қиймати узлуксиз равишда ўзгартиб борилса, у ҳолда y ҳам узлуксиз равишда ўзгариб, натижада ҳалиги M нуқта xOy текисликда бирор геометрик ўрни чизади.

Биз (2) функцияни бир қийматли фараз қилган эдик. Лекин у кўп қийматли бўлган ҳолда ҳам қилинган муҳокама ўз кучини сақлайди, яъни бу ҳолда ҳам (1) тенгликнинг геометрик тасвири текисликдаги бирор чизиқ бўлади.

Шунинг билан, $f(x, y) = 0$ тенгламадаги x ва y ўзгарувчилар текисликдаги нуқтанинг координаталари фараз қилинса, бу тенглама, умуман, текисликда бирор чизиқни ифода қилади; бу чизиқнинг формаси ҳалиги $f(x, y) = 0$ тенгламанинг тузилишига боғлиқдир.

Юқорида чизиқ тўғрисида берилган тушунча геометрияда ғоят катта аҳамиятга эгадир. Қилинган муҳокама ва чиқарилган натижага асосланиб, уни бундай таъриф қилиш мум-

Учинчи боб

ЧИЗИҚ ВА ТЕНГЛАМА

Китобнинг бу бобида текисликдагн аналитик геометриянинг иккита асосий ва марказий масаласи тўғрисида сўз боради: 1) x ва y ўзгарувчиларга нисбатан $f(x, y) = 0$ тенгламанинг геометрик маъносини аниқлаш ва 2) текисликдаги чизиқнинг геометрнк хоссасига ва нуқталарнинг координаталарига асосан, унинг тенгламасини тузиш.

§ 14. ТЕНГЛАМАНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Фараз қилайлик, x ва y ўзгарувчиларига нисбатан бирор

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

тенглама берилган бўлсин. Умуман айтганда, бу тенглама x ва y дан бирини, масалан, y ни x нинг функциясида аниқлайди. Фараз қилайлик, тенгламани y га нисбатан ечганда бирор

$$y = \varphi(x) \qquad (2)$$

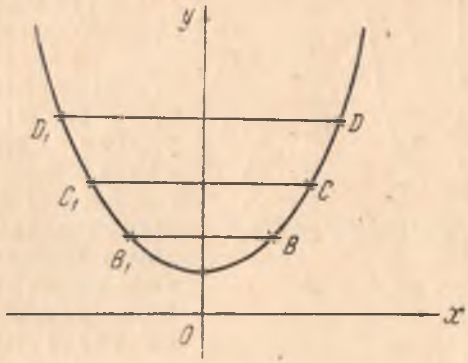
функция ҳосил бўлсин[1] ва x бирор (a, b) ораликда узлуксиз ўзгарганда y ҳам узлуксиз ўзгарсин. Соддалик нуқтаи назаридан (2) функцияни ҳалиги ораликда бир қийматли деб фа-

[1] Лекин (1) тенгламанинг y га нисбатан ечилиши шарт эмас (ҳатто уни y ёки x га нисбатан ечиб бўлмаслиги мумкин).

Берилган мисолда $f(x, y) = y - x^3$, бундан

$$y = x^3.$$

Юқорида курсатилган йул билан давом этамиз. Шундай



Шакл 18

қилиб, x га берилган қийматлар ва y нинг буларга тегишли қийматлари ушбу жадвалда берилган:

x	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	$\pm 1\frac{1}{2}$	± 2	...
y	0	$\pm\frac{1}{8}$	± 1	$\pm 3\frac{3}{8}$	± 8	...

Натижада, x ва y учун белгиланган қийматлардан $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$, $B(1, 1), \ldots E\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$, $F(-1, -1)$ нуқталар аниқланади. Булар ўзаро туташтирилса, берилган $y = x^3$ тенгламанинг (тақрибий) геометрик тасвиридан иборат бўлган эгри чизиқ ҳосил бўлади (шакл. 19).

Келтирилган иккала мисолда ҳам, берилган тенгламанинг геометрик тасвири чизиқдан иборат бўлди. Лекин, айрим ҳолларда тенглама ҳеч қандай чизиқ ифода қилмаслиги мумкин. Масалан,

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 0$$

тенгламани олганда, у текисликда ёлғиз $(2, -3)$ нуқтани ифода қилади, чунки бу тенгламанинг $x = 2$ ва $y = -3$ дан бошқа ҳақиқий илдизлари йўқдир. Шунга ўхшаш:

кин: *чизиқ деб, координаталари* (1) *тенгламани қаноатлантирадиган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.*

Мисол 1. $x^2 - 4y + 4 = 0$ тенглама берилган. Бу қандай чизиқни ифода қилиши аниқлансин (бошқача қилиб айтганда, унинг геометрик тасвири топилсин).

Берилган мисолда $f(x, y) = x^2 - 4y + 4$. Тенгламани y га нисбатан ечганда

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1.$$

Бунда y, x нинг функциясидан иборат. Шунинг учун x га берилган ҳар бир қийматга қараб, y нинг тегишли қийматлари аниқланади. Масалан:

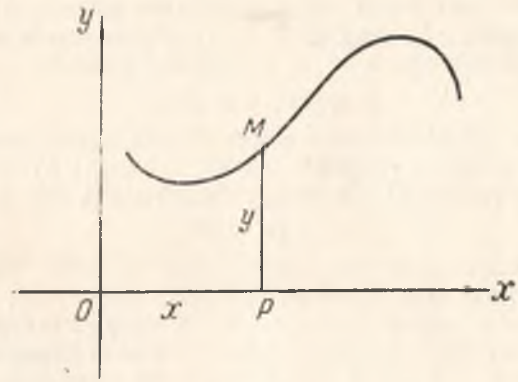
$x = 0$ бўлса, $y = 1$ бўлади,
$x = 1$ „ $y = 1\frac{1}{4}$ „
$x = 2$ „ $y = 2$ „
$x = 3$ „ $y = 3\frac{1}{4}$ „
. . . .
$x = -1$ „ $x = 1\frac{1}{4}$ „
$x = -2$ „ $y = 2$ „
$x = -3$ „ $y = 3\frac{1}{4}$ „
. . . .

x ва y нинг юқоридаги қийматларидан $A\,(0, 1)$, $B\left(1, 1\frac{1}{4}\right)$, $C\,(2, 2)$, $D\left(3, 3\frac{1}{4}\right)$,..., $B'\left(-1, 1\frac{1}{4}\right)$, $C'(-2, 2)$, $D'\left(-3, 3\frac{1}{4}\right)$,... нуқталар аниқланади (шакл 18). Бу нуқталар кетма-кет ўзаро туташтирилса, шаклдаги эгри чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқ берилган тенгламанинг (тақрибий) геометрик тасвиридан иборатдир. Табиий, x га берилган қийматларнинг бир-биридан айирмаси мумкин қадар кичик бўлган ҳолдагина ҳалиги нуқталар бир-бирига етарли даражада яқин бўлади.

Мисол 2. $y = x^3$ тенглама берилган. Бунинг геометрик тасвири топилсин.

тузишда, берилган геометрик ўринни тасвирлаган шартларга асосланиб иш кўришга тўғри келади; марказий масала: бу шарт-

Ю. Г. Н. Н. Н. Л.

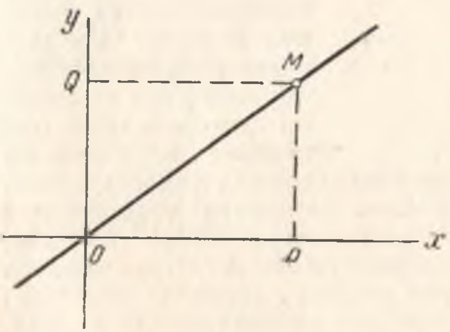


Шакл 20.

ларни чизиқдаги ихтиёрий нуқтанинг x ва y координаталари билан боғлашдан иборатдир.

Мисол 1. Биринчи (учинчи) координат бурчаги биссектрисасининг тенгламаси тузилсин.

Тенгламаси тузиш талаб қилинган чизиқ координата ўқларидан тенг узоқликда бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборат (шакл 21).



Шакл 21.

Шунинг учун бу чизиқдаги бирор M нуқтанинг x ва y координаталари ўзаро тенг бўлади, яъни

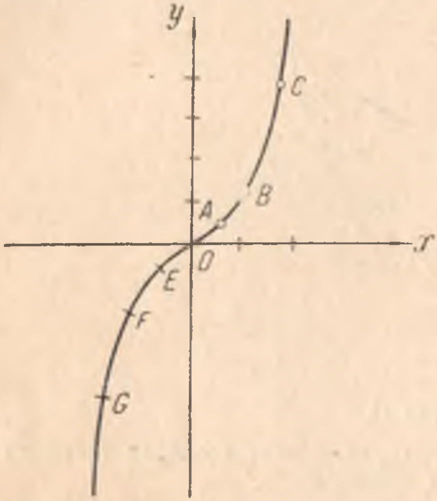
$$y = x \text{ ёки } y - x = 0, \quad (2)$$

чунки $PM = QM$. M биссектрисадаги ихтиёрий нуқта бўлгани учун, унинг x ва y координаталарини ўзаро боғлаган (2) тенглама—талаб қилинган тенгламанинг ўзи бўлади.

Мисол 2. Маркази координаталар бошида ва радиуси R га тенг бўлган айлананинг тенгламаси тузилсин.

$$5x^2 + y^2 + 7 = 0$$

тенглама ҳам ҳеч қандай чизиқни ифода қилмайди, чунки унинг ҳақиқий илдизлари йўқ.



Шакл 19.

§ 15. ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАСИНИ ТУЗИШ

Биз юқорида $f(x, y) = 0$ тенгламанинг текисликда, умуман, бирор чизиқни ифода қилишини кўрсатган эдик. Энди аксинча, xOy координаталар текислигида берилган чизиқни координата ўқларига нисбатан $f(x, y) = 0$ тенглама билан ифода қилиш масаласини кўрамиз.

Энг аввал бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш керакки, бундаги чизиқ тушунчаси, юқорида таъриф қилинган маънода бўлиб, у нуқталарнинг геометрик ўрни фараз қилинади. Шунинг учун „чизиқ берилди" деганда, геометрик ўринни ташкил этган нуқталар координаталарини қаноатлантирадиган тенглама берилган деб фараз қилинади.

Энди фараз қилайлик, xOy текисликда ҳалиги маънода бирор чизиқ, яъни геометрик ўрин берилган бўлсин. Агар $x = OP$, $y = PM$ бундаги бирор M нуқтанинг координаталари фараз қилинса, бу ҳолда M нуқтанинг ўрни, берилган геометрик ўринни тасвир қилган шартлар билан боғланган бўлади (шакл 20). Иккинчи томондан ҳалиги M нуқтанинг ўрни, унинг x ва y координаталари билан аниқланади. Шунинг учун, агар x ва y берилган шартларга асосланиб ўзаро боғланса, бундан ҳосил бўлган

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

боғланиш — берилган геометрик ўриннинг тенгламаси дейилади; тенгламадаги x ва y — ўзгарувчи координаталар дейилади.

Табиий, берилган чизиқнинг тенгламасини тузиш учун умумий қоида бериб бўлмайди. Ҳар вақт, бундай тенгламаларни

$$3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 + 18 = 0,$$

демак, нуқта чизиқда экан.

Мисол 4. $(3, -1)$ нуқта $5x^2 + 9y^2 - 45 = 0$ тенглама билан ифода қилинган чизиқда бўла оладими?

Берилган нуқтанинг координаталарини тенгламадаги x ва y нинг ўрнига қўйиб кўрамиз:

$$5 \cdot 9 + 9 - 45 \neq 0,$$

демак, нуқта чизиқда эмас экан.

§ 16. ЧИЗИҚНИНГ ПАРАМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАРИ

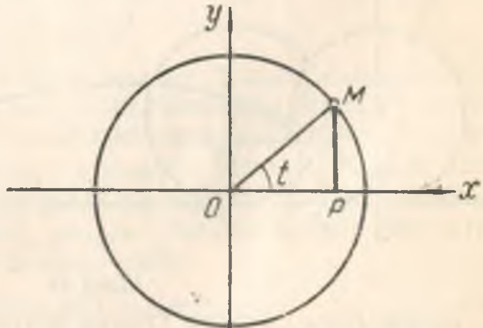
Текисликдаги чизиқни битта

$$f(x, y) = 0 \qquad (1)$$

тенглама билан ифода қилиш ўрнига, баъзи вақт уни икки тенглама ёрдами билан ифода қиладилар. Бунинг учун x ва y ўзгарувчиларининг ҳар бири бирор учинчи t ўзгарувчининг ёрдами билан ифода қилинади. Бу учинчи ўзгарувчи t ёрдамчи бўлиб, у параметр дейилади. Бу ҳолда текисликдаги чизиқнинг аналитик ифодаси:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (2)$$

кўринишда бўлиб, булар чизиқнинг параметрик тенгламалари дейилади (одатда φ ва ψ, t-нинг узлуксиз функциялари фараз қилинади). Агар (2) тенгламалардан параметр t чиқарилса, натижада ҳамон (1) тенглама келиб чиқади.



Шакл 23.

Мисол 1. Мисол учун маркази координаталар бошида ва радиуси R бўлган айлананинг параметрик тенгламаларини тузамиз. $M(x, y)$ — айланадаги бирор нуқта бўлсин (шакл 23). Бу нуқтада радиус ўтказиб, унинг абсцисса ўқининг мусбат томони билан ташкил этган t бурчакни параметр қабул қиламиз. Ҳосил бўлган тўғри бурчакли OPM учбурчакда

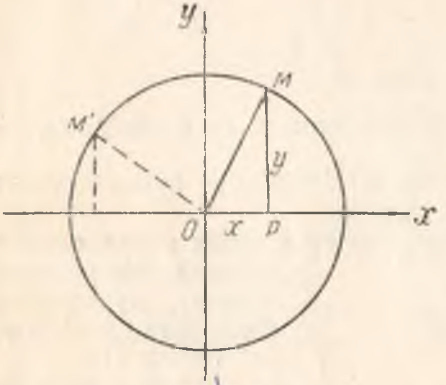
Айлана деб, ҳамма нуқталари бир нуқтадан тенг узоқликда булган геометрик ўринга айтилади. Бу таърифга асосланиб, айлананинг тенгламасини тузиш мумкин. Бунинг учун маркази координаталар бошида булган айлана чизиб, унда бирор M нуқта оламиз (шакл 22). Фараз қилайлик, бу нуқтанинг координаталари x ва y булсин, яъни

$$x = OP,\ y = MP.$$

M нуқта координаталар боши билан туташтирилса, тўғрибурчакли OPM учбурчак ҳосил бўлади; бунда $OM = R$ (айлананинг радиуси); ҳалиги учбурчакдан:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{3}$$

Берилган айлананинг тенгламаси ана шунинг ўзи булади, чунки M — айланада олинган ихтиёрий нуқта эди. Ҳақиқатда, агар айланада исталганча бирор бошқа нуқта олиб, масалан, M' нуқтани олиб, ҳалиги йул билан муҳокама қилинса, ҳамон (3) тенглама келиб чиқади.



Шакл 22.

Чизиқ ифода қилган бирор $f(x, y) = 0$ тенгламадаги x, y ўзгарувчи координаталар: y чизиқни ташкил этган нуқталарнинг координаталаридан иборатдир. Шунинг учун *чизиқдаги ҳар қандай M нуқтанинг координаталари, у чизиқни ифода қилган тенгламани қаноатлантиради, яъни уларни тенгламадаги ўзгарувчи координаталарнинг ўрнига қўйилса, айният ҳосил бўлади.* Аксинча, *агар бирор нуқтанинг координаталарини тенгламадаги ўзгарувчи координаталарнинг ўрнига қўйганда тенглама айниятга айланса, у ҳолда берилган нуқта чизиқда булади.*

Мисол 3. $3x^2 - 5xy + 18 = 0$ тенглама ва $(2, 3)$ нуқта берилган. Бу нуқта, берилган тенглама билан ифода қилинган чизиқда бўла оладими?

Қўйилган саволга жавоб бериш учун берилган нуқтанинг координаталарини тенгламадаги x ва y нинг ўрнига қўйиб кўрамиз:

$$\left.\begin{aligned} x &= OP = OB - MQ = at - MQ, \\ y &= PM = BC - QC = a - QC, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тўғрибурчакли MCQ учбурчакда

$$MQ = a \sin t, \ QC = a \cos t, \tag{6}$$

(5) га асосан (6) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= a (t - \sin t), \\ y &= a (1 - \cos t). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Циклоиданинг параметрик тенгламалари шулардан иборат.

§ 17. АЛГЕБРАИК ВА ТРАНСЦЕНДЕНТ ЧИЗИҚЛАР

Чизиқлар, уларни (декарт координаталарига нисбатан) ифода қилган тенгламаларига қараб умуман икки синфга бўлинади:

1) алгебраик чизиқлар ва 2) трансцендент чизиқлар.

Декарт координаталарига нисбатан алгебраик тенглама билан ифода қилинган чизиқ алгебраик чизиқ дейилади.

Алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши

$$f(x, y) = 0$$

бўлиб, $f(x, y)$ бунда x ва y ўзгарувчиларга нисбатан

$$Ax^m y^n$$

кўринишдаги бир неча бирҳадларнинг (чекли) йиғиндисидан (полиномдан) иборат; m ва n кўрсаткичлар манфий бўлмаган бутун сонлардан ва A коэффициентлар ўзгармас сондан иборат. $Ax^m y^n$ бирҳаднинг даражаси деб $m + n$ йиғиндига айтилади; $Ax^m y^n$ бирҳадларнинг йиғиндисидан ҳосил бўлган кўпҳаднинг даражаси деб, ундаги бирҳадларнинг энг катта даражасига айтилади. Масалан, ушбу:

$$3x^2 + 5y^2 - 8 = 0, \tag{1}$$

$$x^3 + y^3 - axy = 0, \tag{2}$$

$$xy^2 + 5y - x^3 + 1 = 0, \tag{3}$$

тенгламалардан биринчиси — иккинчи даражали, иккинчи ва учинчиси — учинчи даражали алгебраик тенгламалардан иборат.

$$x = R\cos t, \quad y = R\sin t. \qquad (3)$$

Берилган айлананинг параметрик тенгламалари шундан иборат. t параметр 0 дан 2π гача ўзгарганда нуқта бутун айлана чизади.

Агар (3) тенгламалардан параметр t ни чиқарсак, ҳамон айлананинг одатдаги тенгламаси келиб чиқади. Бунинг учун (3) тенгламаларнинг ҳар бирини квадратга кўтариб, сўнгра уларни ҳадлаб қўшиш кифоя; бу ҳолда:

$$x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

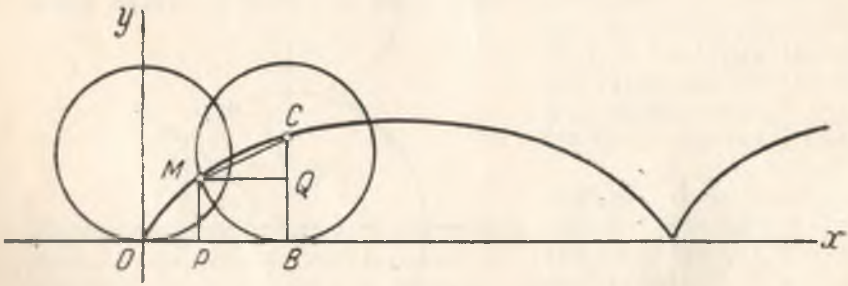
ёки

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

бу эса юқорида чиқарилган: маркази координаталар бошида ва радиуси R бўлган айлананинг тенгламасидан иборат.

Мисол 2. Иккинчи мисол учун циклоида дейилган чизиқнинг тенгламасини тузамиз. Циклоида деб, қўзғалмас Ox тўғри чизиқ бўйича (сирпанмай) ғилдираб кетган доира айланасидаги бирор M нуқтанинг чизган чизиғига айтилади.

Бунинг тенгламасини тузиш учун Ox ни абсцисса ўқи ва бунга перпендикуляр бўлган Oy ни ордината ўқи қабул қиламиз. Доиранинг радиуси a бўлсин ва унинг айланасидаги бирор M нуқтанинг бошланғич ўрни координаталар бошида бўлсин (шакл 24).



Шакл 24.

Доира бирор бошқа ўринни олганда у Ox нинг бирор B нуқтасига уринма бўлади. Шунинг учун: $\smile BM = OB$. Агар CM ва CB орасидаги ўзгарувчи бурчакни t фараз қилсак, бу ҳолда:

$$OB = \smile MB = at. \qquad (4)$$

Доира айланасидаги M нуқтанинг ўзгарувчи координаталари x ва y бўлсин. Шаклга ва (4) га мувофиқ,

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 - 2x + 2y = 0$$

тенгламани

$$(x - y)(x^2 - y^2 - 2) = 0$$

куринишда ёзиш мумкин, демак,

$$x - y = 0 \text{ ва } x^2 - y^2 - 2 = 0,$$

яъни берилган тенглама иккита чизиқни ифода қилади (ажраладиган чизиқ).

Эслатма. Чизиқ тенгламасининг куриниши тўғричизиқли координаталар системасининг танланишига қараб, турлича булиши мумкин. Масалан, айлананинг маркази координаталар бошида бўлганда, унинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{8}$$

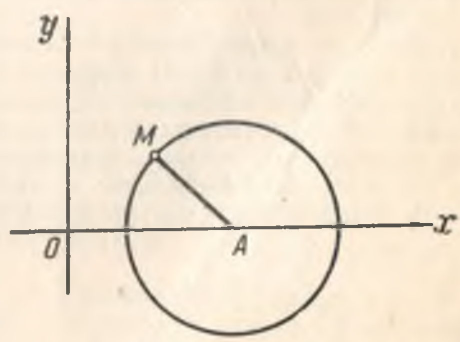
булган эди. Ҳолбуки, айлананинг маркази координаталар бошида булмаган чоқда тенгламаннинг куриниши бошқача булади. Масалан, айлананинг маркази $A(a, 0)$ нуқтада булсин (шакл 25). Бу ҳолда айланадаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқта билан $A(a, 0)$ нуқта орасидаги масофа (MA) айлананинг (R) радиусига тенг булгани учун:

$$\sqrt{(x - a)^2 + y^2} = R.$$

ёки

$$x^2 - 2ax + y^2 + a^2 - R^2 = 0, \tag{9}$$

яъни айлана тенгламасининг куриниши бутунлай бошқача булди. Лекин тенгламанинг даражаси ўзгаргани йуқ: (8) ва (9) тенгламалардан ҳар бири 2-даражали. Бу тасодифий эмас. Умуман, алгебраик тенгламанинг даражаси, демак, унинг тартиби ҳам, туғри чизиқли (декарт) системанинг биридан иккинчисига ўтганда узгармайди. Биз буни 6-бобда исбот қиламиз.



Шакл 25.

Шунинг билан баравар, бу ерда шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, чизиқларнинг синфларга булиниши тўғричизиқли координаталар системасига асосланган булиб, у қутб системасида уз кучини йўқотади.

Алгебраик чизиқ учун берилган таърифни қаноатлантирмаган чизиқни, яъни алгебраик бўлмаган ҳар қандай чизиқни трансцендент чизиқ дейилади. Масалан, ушбу:

$$y = \sin x, \ y = \operatorname{tg} x, \ y = a^x$$

тенгламаларнинг ҳар бири трансцендент чизиқни ифода қилади.

Алгебраик чизиқлар, уларни ифода қилган тенгламаларнинг даражасига қараб тартибларга бўлинади: n-даражали алгебраик тенглама билан ифода қилинган чизиқ n-тартибли дейилади. Масалан, юқоридаги тенгламалардан биринчиси иккинчи тартибли, иккинчи ва учинчиси учинчи тартибли чизиқни ифода қилади.

Агарда $f(x, y) = 0$ алгебраик тенгламанинг чап қисми x ва y га нисбатан бутун ва рационал бўлган иккита $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ кўпайтувчиларга ажралса, яъни айнан

$$f(x, y) = \varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) \tag{5}$$

бўлса, бу ҳолда

$$\varphi(x, y) \cdot \psi(x, y) = 0 \tag{6}$$

бўлиб, бу тенгламани қаноатлантирадиган x ва y нинг қийматлари, албатта

$$\varphi(x, y) = 0 \text{ ёки } \psi(x, y) = 0 \tag{7}$$

тенгламалардан бирини қаноатлантириши лозим (ва аксинча — бу тенгламалардан бирини қаноатлантирадиган x ва y нинг қийматлари 6-тенгламани ҳам қаноатлантиради). Шунинг билан (6) тенглама иккита алгебраик чизиқни ифода қилади. Бундай ҳолларда $f(x, y) = 0$ эгри чизиқ ажраладиган дейилади: битта $f(x, y) = 0$ алгебраик тенглама билан ифода қилинган чизиқ иккига ажралди (шунга ўхшаш, бир неча чизиқларга ажралиши ҳам мумкин). Акс ҳолда чизиқ — ажралмайдиган чизиқ дейилади. Масалан,

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0$$

тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$(x - y)(x + y + 2) = 0,$$

бундан

$$x - y = 0 \text{ ва } x + y + 2 = 0,$$

яъни берилган тенглама иккита чизиқни ифода қилади ёки ажраладиган эгри чизиқдан иборат.

Шунга ўхшаш

Саволлар ва масалалар

61a $f(x, y) = 0$ тенгламадаги x ва y ни текисликдаги декарт координаталари фараз қилганда, бу тенглама нимани ифода қилади?

62. Ушбу тенгламаларнинг геометрик тасвири топилсин: 1) $3x - 5y + 10 = 0$, 2) $y = x^2$, 3) $y = -\frac{1}{6}x^3$, 4) $x^2 +$

$$+ y^2 - 9 = 0,$$

$$5)\ xy = 1,\ 6)\ x^2 + (y-1)^2 = 0.$$

63. Нуқталарнинг геометрик ўрни деб нимага айтилади?

64. Чизиқ берилди деганда қандай маъно англашилади?

65. Текисликдаги чизиқнинг тенгламасини тузиш нимага асосланади?

66. Текисликдаги чизиқнинг декарт координаталарига нисбатан тенгламасининг умумий кўриниши қандай бўлади?

67. Иккинчи координат бурчагининг биссектрисаси қандай тенглама билан ифода қилинади?

68. Айлананинг маркази (0,5) нуқтада ва радиуси 3 бўлса, унинг тенгламаси қандай бўлади?

69. Ўзгарувчи координаталар деб нимага айтилади?

70. $y = ax^2 + bx + c$ тенглама билан ифода қилинган чизиқни (m, n) нуқта қаноатлантиради. Бунинг маъноси нима? Жавоби математик усулда ёзиб кўрсатилсин.

71. $(1, -1)$ нуқтанинг $2y - x + 3 = 0$ чизиқда эканлиги текширилсин.

72. $(5, 4)$ нуқта $7x - 2y - 27 = 0$ чизиқда бўладими?

73. $(-2, 3)$ ва $(1, 4)$ нуқталардан қайси бири $2y^2 - 3xy - 36 = 0$ чизиқда бўлади?

74. Қандай чизиқ алгебраик чизиқ дейилади? Қандай чизиқ трансцендент чизиқ дейилади?

75. Алгебраик чизиқнинг тартиби нима?

76. Қандай чизиқ ажраладиган чизиқ деб айтилади?

Туртинчи боб

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

Китобнинг бу боби тўғри чизиққа бағишланади. Текисликдаги тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан ўрни турлича бўлиши мумкин. Лекин тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан ўрни қандай бўлмасин уни ҳамавақт икки ўзгармас миқдор (умуман икки шарт) ёрдами билан аниқлаш мумкин. Бундай ўзгармас миқдорларнинг жинсига қараб тўғри чизиқ ўрнини аниқловчи тенгламаларнинг кўриниши ҳам турлича бўлади.

Тўғри чизиқ тенгламасини тузиш — унинг координата ўқларига нисбатан ўрнини аниқлаб турган ўзгармас сонлар ёрдами билан тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасига қарашли ўзгарувчи координаталар орасидаги муносабатни тенглик билан ифода қилишдан иборатдир.

нос р 49

§ 18. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ БУРЧАК КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАСИ

1. Ўтган бобда $f(x, y) = 0$ тенгламанинг декарт координаталарига нисбатан, умуман, бирор чизиқ ифода қилишини кўрсатган эдик. Энди фараз қилайлик,

$$f(x, y) = Ax + By + C,$$

яъни биринчи даражали тенглама бўлсин (бунда A, B, C коэффициентлари ўзгармас, аниқ сонлардан иборат).

R нуқтадан абсцисса ўқига параллель қилиб чизиқ ўтказилса, бунинг натижасида MRS тўғрибурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Бунда

$$SM = RS \operatorname{tg} \alpha, \tag{1}$$

шаклга мувофиқ

$$SM = PM - PS = PM - OR = y - l;$$
$$RS = OP = x.$$

Булар (1) тенгликка қўйилса,

$$y - l = x \operatorname{tg} \alpha,$$

ёки

$$y = x \operatorname{tg} \alpha + l.$$

α бурчаги бизга берилган эди. Шунинг учун $\operatorname{tg} \alpha$ ҳам маълум; агар

$$\operatorname{tg} \alpha = k \tag{2}$$

фараз қилинса, тенгламанинг одатдаги кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{y = kx + l} \tag{3}$$

AB тўғри чизиқдаги M нуқта унинг қаерида бўлса-да, бу тенглама ўз кучини сақлайди, чунки у нуқта AB да ихтиёрий эди. Шунинг учун (3) тенглама AB тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади.

(3) тенгламада 4 миқдор қатнашади: x, y, k ва l. Булардан аввалги иккитаси ўзгарувчи ва кейинги иккитаси ўзгармас. Тўғри чизиқнинг ўрнини аниқловчи k ва l миқдорлар **параметр** дейилади. Булардан биринчиси (k) — тўғри чизиқнинг **бурчак коэффициенти** дейилади; унинг геометрик маъноси юқорида айтилган: у тўғри чизиқнинг абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган α бурчакнинг тангенсидан иборат эди. Параметрлардан иккинчиси бўлган l — тўғри чизиқнинг бошланғич ординатаси дейилади ва у тўғри чизиқнинг ордината ўқидан кесган парчасини ифода қилади.

Хусусий ҳолда, яъни AB тўғри чизиқ x ўқига параллель бўлганда $k = 0$ ва аксинча $k = 0$ бўлганда тўғри чизиқ x ўқига параллель бўлади ва бу ҳолда (3) га асосан тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y = l \tag{4}$$

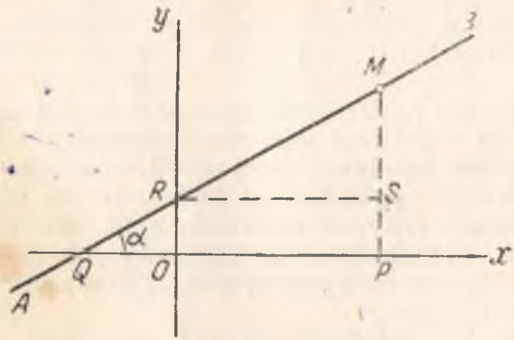
бўлади. Энди фараз қилайлик, тўғри чизиқ y ўқига параллель бўлсин ва унинг x ўқи билан кесишган A нуқтасининг

Бунинг декарт системасида тўғри чизиқ ифода қилишини ва аксинча тўғри чизиқни декарт координаталарига нисбатан шунинг каби биринчи даражали тенглама билан ифода қилинишини кўрсатамиз.

Бунинг учун, энг аввал, қўйилган масаланинг иккинчи қисми бўлган ушбу теоремани исбот қиламиз.

Теорема. *Текисликдаги тўғри чизиқ декарт координаталарига нисбатан биринчи даражали тенглама билан ифода қилинади, яъни тўғри чизиқ — биринчи тартибли чизиқдан иборат.*

Тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан ўрни турлича бўлиб, хусусий ҳолларда y координата ўқларига параллель бўлиши мумкин. Энг аввал фараз қилайлик, xOy тўғрибурчакли системада y ўқига параллель бўлмаган бирор AB тўғри чизиқ берилган бўлсин (шакл 26).



Шакл 26.

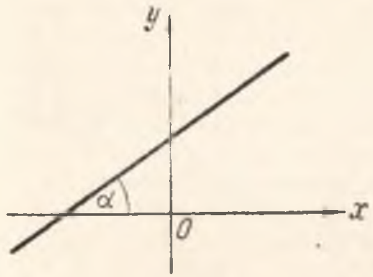
Агар AB тўғри чизиқнинг абсцисса ўқи билан ташкил этган бурчакларидан бири ва унинг ордината ўқидан кесган OR парчаси маълум бўлса, бу ҳолда AB тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан ўрни аниқ бўлади. Одатда ҳалиги бурчаклардан AB ни абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган α бурчаги қабул қилинади. Фараз қилайлик, шу миқдорлар бизга берилган ва

$$OR = l, \quad \angle xQB = \alpha$$

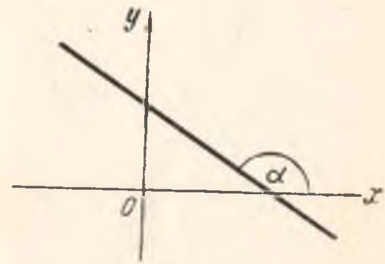
бўлсин. Тўғри чизиқда исталганча бирор M нуқтани олиб, унинг ўзгарувчи координаталарини x ва y фараз қиламиз, яъни:

$$x = OP, \quad y = PM.$$

3) Агар k нинг қийматини ўзгартмай, (3) тенгламадаги l нинг қиймати ўзгартириб турилса, у ҳолда тўғри чизиқ ўз-ўзига параллель бўлиб ўрнини ўзгартади (31 ва 32-шакллар).

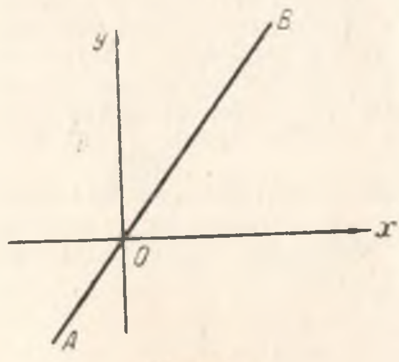


Шакл 28.

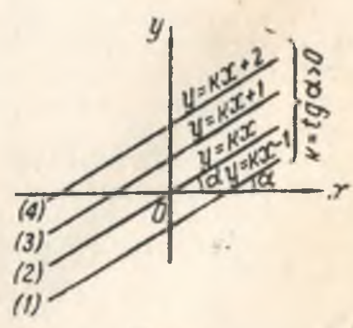


Шакл 29.

4) Агар l нинг қийматини ўзгартмай (2) тенгламадаги k нинг қиймати ўзгартириб турилса, у ҳолда тўғри чизиқ R нуқтанинг атрофида айлана бошлайди (шакл 33). Масалан, $k = 1$ бўлганда $y = x + l$ тенглама шаклдаги 1-чизиқни



Шакл 30.

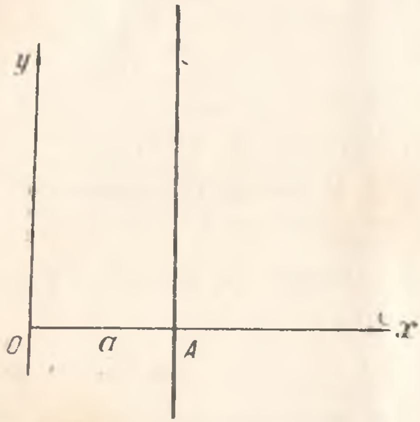


Шакл 31.

ифода қилади; $k = \frac{1}{2}$ бўлганда $y = \frac{1}{2}x + l$ тенглама шаклдаги 2- чизиқни ифода қилади; $k = \frac{1}{3}$ бўлганда $y = \frac{1}{3}x + l$ тенглама шаклдаги 3-чизиқни ифода қилади ва шунга ўхшаш; k нинг қиймати камайиб борган сари, тўғри чизиқ-абсциссаси a булсин (шакл 27). Бу ҳолда чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг абсциссаси a булади (ва аксинча), яъни бу ҳолда туғри чизиқнинг тенгламаси

$$x = a \tag{4'}$$

булади. Шунинг билан, декарт координаталарига нисбатан (3), (4) ва (4') нинг ҳар бири биринчи даражали тенгламалардан иборат бўлди. Бу эса теореманинг тўғрилигини, яъни текисликдаги туғри чизиқнинг биринчи тартибли эканлигини кўрсатади.



Шакл 27.

2. Бу ерда шуни таъкидлаб ўтиш керакки, тўғри чизиқнинг

$$y = kx + l \tag{5}$$

тенгламасидаги k ва l параметрлар алгебраик миқдорлардан иборат бўлиб, тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан ўрнига қараб, уларнинг иккаласи мусбат ёки иккаласи манфий булиши, ёки бири мусбат ва бири манфий булиши, бири ёки иккаласи нолга айланиши мумкин. Лекин қандай булмасин, k ва l нинг ҳар бир ҳақиқий қийматига текисликда бир чизиқ туғри келади. Масалан:

1) Агар k мусбат сон бўлса, бу ҳолда $\alpha < 90°$ бўлади, чунки $k = \operatorname{tg} \alpha$ эди. Демак, бу ҳолда тўғри чизиқ абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ўткир бурчак ташкил қилади (шакл 28).

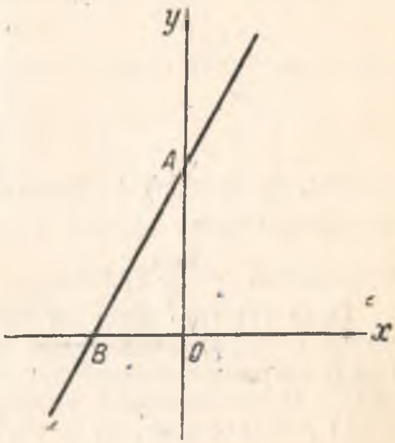
Агар k манфий сон булса, у ҳолда $\alpha > 90°$. Демак, бу ҳолда тўғри чизиқ абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ўтмас бурчак ташкил қилади (шакл 29).

2) l мусбат булса, туғри чизиқ ордината ўқининг мусбат томонини кесган бўлади, манфий булса — манфий томонини кесган булади ва агар $l = 0$ булса, туғри чизиқ координаталар бошидан ўтади (масалан, шакл 30 даги каби). Бу ҳолда, яъни тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтганда тенгламанинг кўриниши

$$y = kx \tag{6}$$

булади.

бўлган масофада кесиб кетади. Шунинг учун ордината ўқида 3 бирлик ўлчаб олинса, унда A нуқта аниқланади. Бизнинг масалада k нинг қиймати мусбат сон. Демак, биз излаган тўғри чизиқ A нуқтадан ўтиб, абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан шундай ўткир бурчак ташкил қиладики, унинг тангенси 2 бирликка тенг бўлади; бунга қараганда биз излаган чизиқ абсцисса ўқининг манфий йўналишини кесиб ўтади. Шунинг учун OA ни тенг иккига бўлиб, OA нинг ярмини абсцисса ўқининг манфий йўналишида ўлчаб олинса, унда шундай B нуқта аниқланадики,



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{BO} = 2$$

Шакл 34.

бўлади. Натижада A ва B нуқталардан ўтган тўғри чизиқ биз излаган чизиқ бўлади (шакл 34).

Биз бу ерда шу мисол билан чекланамиз. Келаси параграфда тенглама бўйича тўғри чизиқни чизиш учун бундан кўра содда усул берилади.

§ 19. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Ўтган параграфда текисликдаги ҳар бир тўғри чизиқнинг декарт координаталарига нисбатан биринчи даражали тенглама билан ифода қилиниши исбот қилинган эди. Энди бунинг тескариси бўлган ушбу теоремани исбот қиламиз:

Теорема. *Ўзгарувчи x ва y га нисбатан биринчи даражали ҳар бир $Ax + By + C = 0$ тенглама декарт координаталарида тўғри чизиқ ифода қилади.*

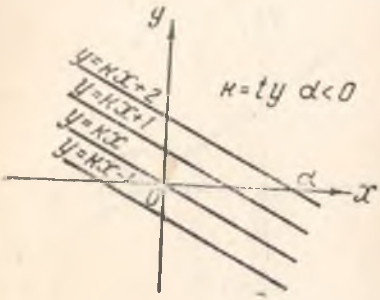
Шунинг билан, фараз қилайлик, биринчи даражали бирор

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

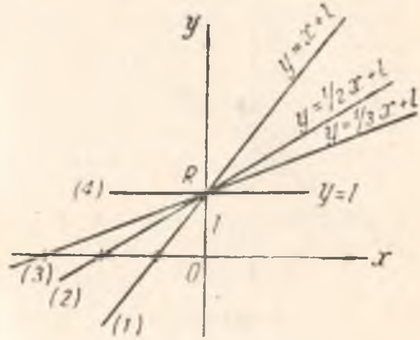
тенглама берилган бўлсин.

Фараз қилайлик, $B \neq 0$ бўлсин. Берилган тенгламани y га нисбатан ечсак, нинг абсцисса ўқи билан кесишган нуқтаси узоқлашиб боради ва $k = 0$ бўлганда чизиқ абсцисса ўқига параллель бўлиб, тенгламанинг кўриниши

$$y = l \qquad (7)$$



Шакл 32.



Шакл 33.

бўлади, бу эса x ўқига параллель бўлган ва ундан масофаси l га тенг бўлган тўғри чизиқдан иборат; $l = 0$ бўлганда бу чизиқ x ўқи билан бирлашиб кетади, ёки бошқача қилиб айтганда $y = 0$ тенглама абсцисса ўқининг тенгламаси бўлади.

5) $x = a$ тенглама ордината ўқига параллель бўлган ва ундан масофаси a га тенг бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси эди. Шунинг учун $a = 0$ бўлганда бу чизиқ ордината ўқи билан бирлашиб кетади, яъни $x = 0$ — ордината ўқининг тенгламаси бўлади.

$y = kx + l$ тенгламанинг параметрлари бўлган k ва l нинг қийматлари белгили бўлган ҳолда, у тенглама ифода қилган тўғри чизиқни чизиш мумкин. Масалан, фараз қилайлик, бизга ушбу тенглама берилган бўлсин:

$$y = 2x + 3.$$

Бу тенгламани (3) тенглама билан солиштириб қараганда, кўрамизки

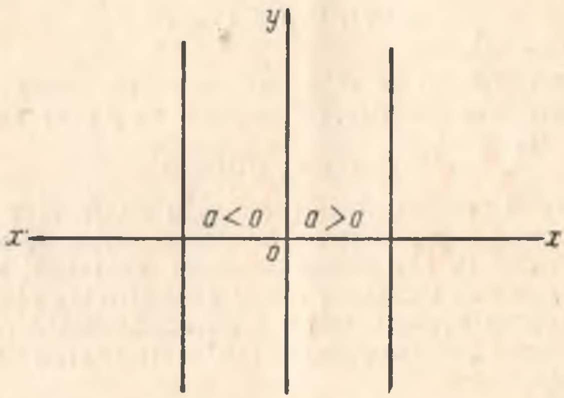
$$k = \operatorname{tg} \alpha = 2, \quad l = 3.$$

Демак, биз излаган тўғри чизиқ ордината ўқининг мусбат йўналишини координаталар бошидан 3 бирликка тенг

$$By + C = 0 \text{ ёки } y = -\frac{C}{B}$$

бўлади, ёки $-\frac{C}{B} = l$ фараз қилинса:

$$y = l$$



Шакл 35.

бўлади. Бу эса абсцисса ўқига параллель бўлган тўғри чизиқни ифода қилади.

4) $A = 0$ ва $C = 0$ бўлсин; бу ҳолда умумий тенгламанинг кўриниши

$$By = 0 \text{ ёки } y = 0$$

бўлади. Бу эса абсцисса ўқини ифода қилади.

5) $B = 0$ ва $C = 0$ бўлсин; бу ҳолда умумий тенгламанинг кўриниши

$$Ax = 0 \text{ ёки } x = 0$$

бўлади. Бу эса ордината ўқини ифода қилади.

Шундай қилиб, (1) тенгламадаги ўзгарувчи x ва y олдидаги A ва B коэффициентлардан ҳеч бўлмаганда бири нолга тенг бўлмаганда, бу тенглама ҳамма вақт тўғри чизиқ ифода қилади.

6*. Энди яна бир, махсус ҳолни текшириб кўрамиз. Фараз қилайлик (1) тенгламада $A = 0$ ва $B = 0$ бўлсин; бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (2)$$

бўлади. Бу тенгламани ўтган параграфда чиқарилган

$$y = kx + l$$

тенглама билан солиштириб қараганда, кўрамизки,

$$k = -\frac{A}{B}, \quad l = -\frac{C}{B}. \qquad (3)$$

Демак, бу ҳолда (1) тенглама шундай тўғри чизиқни ифода қиладики, унинг бурчак коэффициенти $-\frac{A}{B}$ ва бошланғич ординатаси $-\frac{C}{B}$ бўлади.

Энди (1) тенгламанинг баъзи хусусий ҳолларини, яъни унинг коэффициентларидан баъзиларининг нолга тенг бўлган ҳолларини текшириб кўрамиз. Фараз қилайлик, $Ax + By + C = 0$ тенгламанинг коэффицентларидан:

1) $B = 0$ бўлсин; бу ҳолда умумий тенгламанинг кўриниши

$$Ax + C = 0 \text{ ёки } x = -\frac{C}{A}$$

бўлади, ёки: $-\frac{C}{A} = a$ фараз қилинса:

$$x = a$$

бўлади. Бу эса ордината ўқига параллель бўлган тўғри чизиқни ифода қилади.

2) $C = 0$ бўлсин; бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$Ax + By = 0$$

бўлади, ёки бу тенглама y га нисбатан ечилса:

$$y = -\frac{A}{B}x,$$

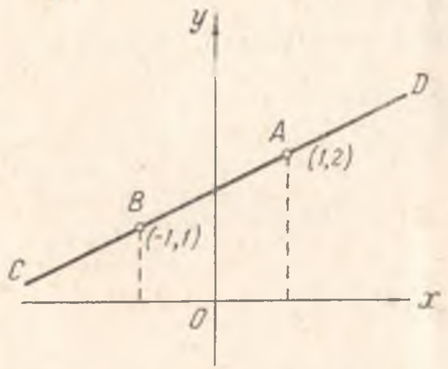
ёки $-\frac{A}{B} = k$ фараз қилинса:

$$y = kx$$

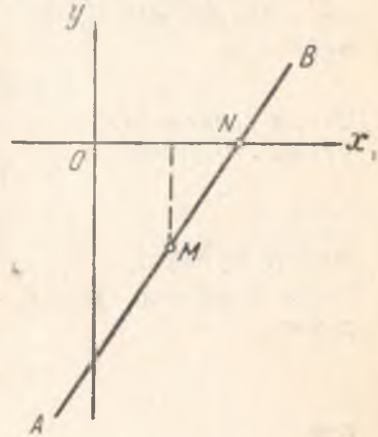
бўлади. Бу эса координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқни ифода қилади (§ 18).

3) $A = 0$ бўлсин; бу ҳолда умумий тенгламанинг кўриниши

Координаталар текислигида A ва B нуқталарнинг ўринларини топиб, сўнгра уларни тўғри чизиқ билан туташтирсак, биз излаган тўғри чизиқ ҳосил бўлади (шакл 36).



Шакл 36.



Шакл 37.

Мисол 2. Тенгламаси $y = \frac{3}{2}x - 3$ бўлган тўғри чизиқ чизилсин.

Биринчи мисолда кўрсатилган йўл билан давом этиб, тўғри чизиққа қарашли иккита нуқтани топамиз: $x = 1$ бўлса, $y = -1{,}5$ бўлади, яъни $M(1, -1{,}5)$ нуқта аниқланади, $x = 2$ бўлса, $y = 0$, яъни $N(2, 0)$ нуқта аниқланади.

Координаталар текислигида аниқланган M ва N нуқталарнинг ўринларини топиб, сўнгра уларни тўғри чизиқ билан туташтирсак, изланган AB тўғри чизиқ ҳосил бўлади (шакл 37).

§ 20. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ КЕСМАЛАР БЎЙИЧА ТЕНГЛАМАСИ

1. Агар тўғри чизиқнинг координата ўқларидан кесган кесмалари аниқ бўлса, у ҳолда бундай чизиқнинг координата ўқларига нисбатан ўрни ҳам аниқ бўлади. Фараз қилайлик, бирор AB тўғри чизиқнинг абсцисса ўқидан кесган кесмаси a ва ордината ўқидан кесган кесмаси b бўлсин (шакл 38), яъни

$$C = 0,$$

ёки C га қисқартганда

$$1 = 0$$

булади. Энг аввал бундай тенглик мумкин эмас. Бунинг сабаби тенгламанинг аввалги икки ҳадини ташлашдан келиб чиқади. Ҳақиқатда, қуйилган шарт бўйича тенгламани

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 = 0$$

шаклда ёзиш мумкин.

Агар бу ҳолни, A ва B қийматларининг нолга интилган лимит ҳоли фараз қилинса, бу чоқда x ва y нинг қийматлари чекли булгандагина

$$0 \cdot x = 0 \text{ ва } 0 \cdot y = 0$$

булади. Лекин тенгламанинг озод ҳади нолга тенг бўлмагани учун $0 \cdot x$ ва $0 \cdot y$ дан ҳеч булмаганда бирининг нолга тенг бўлмаслиги лозим, ёки бошқача қилиб айтганда, координаталардан бири ёки иккаласи чекли қийматга эга була олмайди, яъни чексиз булади. Биз § 4 да координаталари чексиз булган нуқтани „чексиз узоқлашган" нуқта деган эдик. Бунга қараганда

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 1 = 0$$

тенгламани фақат чексиз узоқлашган нуқтанинг координаталари қаноатлантира олади. Шунинг учун бу тенглама чексиз узоқлашган тўғри чизиқни ифода қилади, деб айтиш мумкин.

Бу натижага яна бошқача мулоҳаза билан келиш мумкин. Бу туғрида сўз келгуси 20-§да булади.

Текисликда тўғри чизиқнинг ўрни икки нуқта билан тўла аниқланади. Буни эътиборга олганда: берилган тенглама бўйича туғри чизиқ чизиш учун, у чизиққа қарашли икки нуқтанинг координаталарини аниқлаш кифоя қилади. Аниқланган иккала нуқтадан ўтган тўғри чизиқ — изланган чизиқ булади.

Мисол 1. Тенгламаси $x - 2y + 3 = 0$ булган тўғри чизиқ чизилсин.

Изланмоқда булган тўғри чизиққа қарашли нуқтанинг координаталарини аниқлаш учун тенгламадаги x га бирор ихтиёрий қиймат бериб, сўнгра y нинг қийматини топамиз. Масалан:

$x = 1$ булса, $y = 2$ булади, яъни $A(1, 2)$ нуқта аниқланади
$x = -1$ „ $y = 1$ „ „ $B(-1, 1)$ „ „

Мисол 1. Абсцисса ўқидан кесган кесмаси — 3 ва ордината ўқидан кесган кесмаси 5 бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Бу мисолда: $a = -3$, $b = 5$. Шунинг учун изланган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1,$$

ёки

$$5x - 3y + 15 = 0.$$

Мисол 2. Абсцисса ўқидан кесган кесмаси 5 ва ордината ўқидан кесган кесмаси — 1,5 бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Бу мисолда $a = 5$, $b = -1{,}5$. Шунинг учун тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-1{,}5} = 1,$$

ёки

$$-1{,}5x + 5y + 7{,}5 = 0,$$

ёки

$$3x - 10y - 15 = 0.$$

2. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси бўлган

$$Ax + By + C = 0$$

тенгламанинг коэффициентларидан ҳеч қайси бири нолга тенг бўлмаган ҳолда, у тенгламани ҳамавақт

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

шаклга келтириш мумкин. Бунинг учун энг аввал умумий тенгламанинг C ҳадини ўнг томонга ўтказамиз:

$$Ax + By = -C,$$

сўнгра иккала томонини $-C$ га бўламиз:

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1,$$

ёки

$$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1. \qquad (2)$$

демак

$$OS = a, \quad OR = b.$$

Бу кесмалар ёрдами билан AB нинг тенгламасини тузиш мумкин. Бунинг учун унинг бирор M нуқтасининг ўзгарувчи координаталарини x ва y фараз қиламиз, яъни шакл бўйича

$$x = OP, \; y = MP.$$

Тўғрибурчакли ORS ва PMS учбурчаклар ўзаро ўхшаш бўлади. Шунинг учун:

$$\frac{OR}{PM} = \frac{OS}{PS};$$

шаклга мувофиқ:

$$OR = b, OS = a, \quad PS = OS - OP = a - x,$$

демак,

$$\frac{b}{y} = \frac{a}{a-x},$$

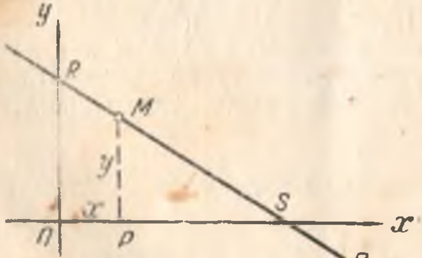
ёки

$$ab - bx = ay, \text{ ёки } bx + ay = ab,$$

ёки кейинги тенгламанинг иккала томони ab га бўлинса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (1)$$

Бу тенглама тўғри чизиқ тенгламасининг учинчи кўриниши. Тенгламадаги a ва b миқдорлар алгебраик миқдорлардан иборат. Шунинг учун a ва b нинг иккаласи мусбат бўлса, тўғри чизиқ координата ўқларининг мусбат йўналишида учрайди, агар a манфий ва b мусбат бўлса, у ҳолда абсцисса ўқининг манфий йўналишида ва ордината ўқининг мусбат йўналишида учрайди ва шунга ўхшаш. Ҳар ҳолда тўғри чизиқнинг ўрни a ва b нинг алгебраик қийматлари билан аниқланади.



Шакл 38.

$$a = -\frac{C}{A},\ b = -\frac{C}{B}. \qquad (3)$$

3. Тўғри чизиқнинг координата ўқларидан кесган кесмаларини яна бошқа йўл билан аниқлаш мумкин. Фараз қилайлик, тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$Ax + By + C = 0$$

бўлсин. Бунинг абсцисса ўқи билан учрашганидан ҳосил бўлган кесмани топиш учун $y = 0$ фараз қиламиз, чунки абсцисса ўқидаги ҳар бир нуқтанинг ординатаси ноль бўлади. Шунинг учун бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$Ax + C = 0$$

бўлиб, бундан

$$x = -\frac{C}{A} = a$$

бўлади. Шунга ўхшаш $x = 0$ фараз қилиб, ҳосил бўлган $By + C = 0$ тенгламани y га нисбатан ечганда, тўғри чизиқнинг ордината ўқидан кесган b кесма аниқланади, яъни

$$y = -\frac{C}{B} = b.$$

Мисол 3. Тенгламаси $2x + 5y - 15 = 0$ бўлган тўғри чизиқнинг координата ўқларидан кесган кесмалари аниқлансин.

Тўғри чизиқнинг абсцисса ўқидан кесган кесмасини аниқлаш учун $y = 0$ фараз қиламиз. Бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$2x - 15 = 0$$

бўлиб, бундан

$$x = a = +\frac{15}{2} = +7{,}5$$

булади. Шунга ўхшаш, ордината ўқидан кесган кесмасини аниқлаш учун $x = 0$ фараз қилинса

$$y = b = +\frac{15}{5} = +3$$

бўлади.

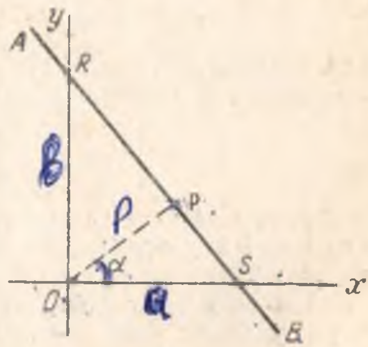
4*. Энди $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқнинг координата ўқларидан кесган a ва b кесмаларини ифода қилган (3) касрларга мурожаат қилайлик. Агарда бу касрларнинг махражлари, яъни A ва B нинг абсолют қийматлари чексиз камайиб борса, бу ҳолда a ва b кесмалари чексиз катта бўлиб боради ва тўғри чизиқ координата ўқларини чексизликда кесади, яъни ҳамон чексиз узоқлашган тўғри чизиқ тушунчасига олиб келади (утган § 19 га қаралсин).

§ 21. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ НОРМАЛЬ ТЕНГЛАМАСИ

1. Агар тўғри чизиққа координата бошндан туширилган перпендикулярнинг узунлиги ва унинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги аниқ бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг ўрни ҳам аниқ бўлади.

Фараз қилайлик, бирор AB тўғри чизиққа координаталар бошидан туширилган OP перпендикулярнинг узуилиги p ва унинг абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган POS бурчаги α бўлсин (шакл 39), яъни

$$OP = p, \quad POS = \alpha.$$



Шакл 39.

Тўғри чизиқнинг координата ўқларидан кесган кесмалари a ва b бўлсин, яъни:

$$OS = a, \quad OR = b.$$

SOP тўғрибурчакли учбурчакда

$$OP = OS \cos \alpha,$$

ёки

$$p = a \cos \alpha. \tag{1}$$

Шунга ўхшаш OPR тўғрибурчакли учбурчакда

$$OP = OR \cos (90^\circ - \alpha),$$

ёки

$$p = b \sin \alpha, \quad (2$$

(1) ва (2) тенгликлардан a ва b ни аниқласак:

$$a = \frac{p}{\cos \alpha}$$

§ 22. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИНИ НОРМАЛЬ ҲОЛГА КЕЛТИРИШ

Аналитик геометриянинг кўпгина масалаларини ечишда тўғри чизиқ тенгламасини нормаль ҳолга келтириш керак бўлади, яъни

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

тенгламани

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \tag{2}$$

шаклда ёзишга тўғри келади.

Бунинг учун шундай сон топиш керакки, у сонга (1) тенгламанинг иккала томонини кўпайтирганда, чиққан янги тенгламанинг коэффициентлари (2) тенгламанинг коэффициентлари бўлсин. Бундай сонни M фараз қилиб, (1) тенгламанинг иккала томонини унга кўпайтирамиз:

$$AMx + BMy + CM = 0. \tag{3}$$

Бу тенгламанинг нормаль бўлиши учун x нинг коэффициенти бўлган AM бирор α бурчакнинг косинуси, y нинг BM коэффициенти α нинг синуси ва CM координаталар бошидан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги бўлиши керак, яъни:

$$AM = \cos\alpha, \quad BM = \sin\alpha, \quad CM = -p. \tag{4}$$

Бу тенгликлардан аввалги иккитаси квадратга кўтарилса,

$$A^2M^2 = \cos^2\alpha, \quad B^2M^2 = \sin^2\alpha;$$

буларни ҳадлаб қўшганда

$$M^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

бундан

$$M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{5}$$

Демак, M сони шундай қийматга эга бўлган ҳолдагина (3) тенглама нормаль ҳолга келади. Бу хусусиятга эга бўлган M сони **нормаль кўпайтувчи** дейилади.

M нинг ифодаси (5) дан (4) га қўйилса, α ва p параметрлар аниқланади:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \tag{6}$$

ва

$$b = \frac{p}{\sin \alpha} \qquad (3)$$

бўлади. a ва b нинг ифодаларини ўтган параграфда чиқарилган ушбу

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

тенгламадаги a ва b нинг ўрнига қўямиз:

$$\frac{x \cos \alpha}{p} + \frac{y \sin \alpha}{p} = 1,$$

ёки касрдан қутқазиб, сўнгра озод ҳадни чапга ўтказсак, тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0} \qquad (4)$$

Тўғри чизиқнинг бу кўринишдаги тенгламаси **нормаль тенглама** дейилади. Бу тенглама қуйидаги хусусиятларга эгадир:

1) x ва y нинг коэффициентлари $\cos\alpha$ ва $\sin \alpha$ бўлгани учун улардан ҳар бирининг қиймати бирдан катта бўла олмайди;

2) коэффициентларнинг квадратлари йиғиндиси бирга тенг ($\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$) ва

3) тенгламанинг озод ҳади p ҳамавақт мусбат саналади.

Масалан,

$$\frac{3}{5} x + \frac{4}{5} y - 3 = 0$$

тўғри чизиқнинг нормаль тенгламаси бўла олади, чунки

$$\frac{3}{5} < 1; \ \frac{4}{5} < 1;$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$$

Мисол учун олинган тенгламани (4) билан солиштириб қараганда, кўрамизки:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}, \ \sin \alpha = \frac{4}{5}, \ p = 3.$$

$$\sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}; \tag{7}$$

$$p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{8}$$

M нинг ифодаси (3) га қўйилса, $Ax+By+C=0$ тенгламанинг нормаль кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0,$$

ёки

$$\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0. \tag{9}$$

Радикалнинг олдидаги $\pm$ дан қайси вақтда $+$ ва қайси вақтда $-$ олишни аниқлаш учун (8) тенгликка диққат қиламиз. Қўйилган шарт бўйича бу тенгликнинг чап томонидаги p мусбат сон эди. Шунинг учун (8) тенгликнинг ўнг томони ҳам мусбат бўлиши лозим. Бу эса C нинг ишораси билан радикалнинг ишораси ўзаро тескари бўлган ҳолдагина бўлади.

Шунинг билан, натижада ушбу қоида келиб чиқади:

$Ax+By+C=0$ тенгламани нормаль ҳолга келтириш учун унинг иккала томонини нормаль кўпайтувчига, яъни

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

га кўпайтириш керак; шу билан баравар M нинг ишораси тенгламанинг озод ҳади бўлган C нинг ишорасига тескари бўлиши керак.

Мисол. $6x+8y-7=0$ тенглама нормаль ҳолга келтирилсин.

Бунинг учун энг аввал нормаль кўпайтувчини топамиз:

$$M=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{6^2+8^2}}=\pm\frac{1}{\sqrt{100}}=\pm\frac{1}{10};$$

берилган тенгламанинг озод ҳади -7 бўлгани учун M мусбат бўлади. Шунинг учун:

$$M=\frac{1}{10}.$$

Бу сонга берилган тенгламанинг иккала томонини кўпайтирамиз:

$$\frac{6}{10}x+\frac{8}{10}y-\frac{7}{10}=0,$$

ёки

$$0{,}6x+0{,}8y-0{,}7=0,$$

демак

$$\cos\alpha=0{,}6;\quad \sin\alpha=0{,}8;\quad p=0{,}7.$$

Саволлар ва масалалар

77. Тўғри чизиқнинг $y=kx+l$ тенгламасидаги k ва l нинг қандай геометрик маънолари бор?

78. Тўғри чизиқ қандай тартибли чизиқ?

79. k мусбат бўлганда тенглама нимани кўрсатади? k манфий бўлганда-чи?

80. l мусбат бўлганда тенглама нимани кўрсатади? l манфий бўлганда-чи?

81. $y=5$ тенглама нимани кўрсатади? x ўқига //

82. $x=-3$ тенглама нимани кўрсатади? y ўқига //

83. $x=0$ тенглама нимани кўрсатади? $y=0$ тенглама нимани кўрсатади?

84. Қуйидаги тенгламалар билан ифодаланган тўғри чизиқлардан қайсилари абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ўткир бурчак ва қайсилари ўтмас бурчак ташкил қилади?

ўтмас ўткир

1) $y=-x+5$; 2) $y=\frac{4}{5}x-1$; 3) $y=x$; 4) $3x-5x+1=0$;

5) $y=-x$; 6) $3x=4y$; 7) $x+2y-4=0$; 8) $2x-3y=0$.

85. Қуйидаги тўғри чизиқлардан қайсилари координаталар бошидан ўтади? Иккала координата ўқини кесади? Абсцисса ўқига параллель? Ордината ўқига параллель?

1) $y+3=0$; 2) $x+2y=0$; 3) $2x-5=0$; 4) $x+y=2$;

5) $3y+x=0$; 6) $6y+7=0$; 7) $2x-y-1=0$; 8) $x=y$.

86. Ушбу тўғри чизиқлардан қайси бири (2, 3) нуқтадан ўтади?

1) $3x-5y-15=0$; 2) $4x-7y+11=0$; 3) $5x-6y+8=0$.

87. Ушбу тўғри чизиқлардан ҳар бири абсцисса ўқи билан неча градусли бурчак ташкил қилади?

18 савол

§ 23. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ЎТГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Ҳозиргача биз тўғри чизиқнинг турли тенгламалари билангина иш кўриб келдик. Энди тўғри чизиққа тегишли бўлган асосий масалаларга ўтамиз. Бундай асосий масалалардан бири ва энг муҳими берилган нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузишдан иборатдир.

Фараз қилайлик, берилган нуқта $M(x_1, y_1)$ бўлсин. Бизга шундай тенглама тузиш кераки, уни ифода қилган тўғри чизиқ шу $M(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтсин. Бунинг учун изланган тўғри чизиқнинг тенгламасини

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

фараз қиламиз.

Масаланинг талаби бўйича изланган тўғри чизиқ $M(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтиши керак. Шунинг учун $M(x_1, y_1)$ нуқтанинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$Ax_1 + By_1 + C = 0; \tag{2}$$

(1) дан (2) айириб олинса,

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0, \tag{3}$$

ёки

$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$$

ёки

$$-\frac{A}{B} = k \text{ фараз қилинса,}$$

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)} \tag{4}$$

(3) ёки (4) тенглама қўйилган масаланинг жавоби бўлади, чунки булардан ҳар бири $M(x_1, y_1)$ нуқтанинг координаталарини қаноатлантиради.

(4) тенгламада k нинг қиймати ихтиёрий. Бу эса берилган нуқтадан ўтган тўғри чизиқ ўрнининг аниқмаслигини кўрсатади. Албатта шундай натижани кутиш ҳам керак эди: бир нуқта текисликдаги чизиқнинг ўрнини аниқлаб бера олмайди; бир нуқтадан чексиз кўп тўғри чизиқлар ўтказиш мумкин. (4) ёки (3) тенгламамиз шу ҳақиқатни ифода қилади.

45

1) $y = x + 3$; $y = -x + 7$.

88. Координаталар бошидан утиб, абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан 60° ли бурчак ташкил қилган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин. $y = 2x$

89. Абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан 135° ли бурчак ташкил қилиб, ордината ўқининг мусбат йўналишидан кесган кесмаси 5 бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин. $y = -x + 5$

90. Абсцисса ўқи билан 30° ли бурчак ташкил қилиб, координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин. $y = \frac{x}{2}$

91. Абсцисса ўқидан кесган кесмаси -7 га ва ордината ўқидан кесган кесмаси 5 га тенг бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин. $5x - 7y + 35 = 0$

92. Координата ўқларининг мусбат йўналишларидан кесган кесмаларининг ҳар бири 2 га тенг бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин. $y = -x + 2$.

93. Қуйидаги тўғри чизиқлар чизилсин:

1) $y = x - 3$; 2) $y = 2x$; 3) $4x + 3y + 9 = 0$; 4) $3y = 4x + 1$;

5) $2x - 3y + 4 = 0$; 6) $2x + 5y = 0$; 7) $x - 3y + 1 = 0$.

94. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг координата ўқларидан кесган кесмалари аниқлансин:

1) $4x - 5y - 15 = 0$; 2) $3x + 4y + 8 = 0$;

3) $5x - 7y - 10 = 0$

95. Қуйидаги тенгламалар $y = kx + l$ шаклга келтирилсин:

1) $5x + 8y + 10 = 0$; 2) $x + 3y = 0$; 3) $x - 5y - 1 = 0$.

96. Ушбу тенгламалар нормаль ҳолга келтирилсин:

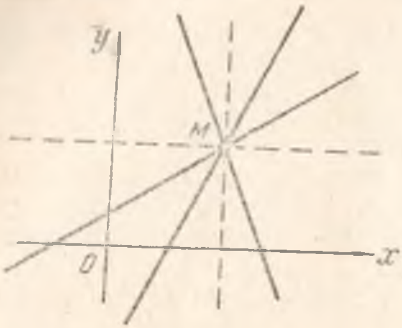
1) $x - y - 1 = 0$; 2) $3x - 4y + 20 = 0$; 3) $4x - 2y - 5 = 0$.

97. $4x + 3y - 12 = 0$ тўғри чизиқ билан ва координата ўқлари билан чегараланган учбурчакнинг юзи топилсин.

98. Координаталар боши билан ушбу $6x + 8y - 15 = 0$ тўғри чизиқнинг орасидаги масофа аниқлансин. 3/2

99. $5x + Ay - 15 = 0$ тенгламадаги A коэффициент қандай бўлганда у тўғри чизиқнинг ордината ўқидан кесган кесмаси 2 га тенг бўлади?

...нинг учун (4) ёки (3) тенглама бир эмас, балки бе... $M(x_1, y_1)$ нуқтадан утувчи чексиз кўп тўғри чизиқ... ифода қилади (шакл 40). Шу сабабдан (4) ёки (3) тенглама тўғри чизиқлар боғламининг тенгламаси дейилади.



Шакл 40.

Мисол. $A(2, 3)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиқиинг (ёки тўғриси тўғри чизиқларнинг) тенгламаси тузилсин.

(4) даги x_1 ва y_1 ўрнига берилган нуқтанинг координаталарини қўямиз:

$$y-3=k(x-2).$$

Масаланинг жавоби шундан иборат. Бу тенглама (2, 3) нуқтадан утувчи ҳамма тўғри чизиқларни ифода қилади. Фараз қилайлик, шу чизиқлардан абсцисса ўқига параллель бўлган чизиқни аниқлаш лозим бўлсин. Бунинг учун $k=0$ фараз қилинса кифоя; демак, бу ҳолда чизиқнинг тенгламаси

$$y-3=0.$$

15 саҳ.

§ 24. БЕРИЛГАН ИККИ НУҚТАДАН ЎТГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

1. Фараз қилайлик, текисликда икки нуқта берилган бўлиб, улардан бири $A(x_1, y_1)$ ва иккиичиси $B(x_2, y_2)$ бўлсин. Ўтган параграфдан маълумки, биринчи нуқтадан, яъни $A(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y-y_1=k(x-x_1) \tag{1}$$

бўлади. Изланган чизиқ иккинчи нуқтадан ҳам ўтиши керак, шунинг учун иккинчи $B(x_2, y_2)$ нуқтанинг координаталарини тенглама қаноатлантириши лозим, яъни

$$y_2-y_1=k(x_2-x_1). \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгламаларнинг биридан k ни аниқлаб, қолган иккинчи тенгламага қўйиш мумкин ёки қисқаси тенгламалардан бирини, масалан, (1) ни (2) га бўлиш билан k ни йўқотиш мумкин. Кейинги ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}} \tag{3}$$

бўлади. Берилган $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси шу (3) тенгламанинг ўзи бўлади, чунки у иккала нуқтанинг координаталарини қаноатлантиради.

(3) тенгламани детерминант шаклида ёзиш мумкин, ёки икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламасини бевосита детерминант шаклида чиқариш мумкин. Ҳақиқатда, фараз қилайлик, изланган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$Ax + By + C = 0 \tag{4}$$

бўлсин. Бу чизиқ $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтганда бу нуқталарнинг координаталари (4) тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$Ax_1 + By_1 + C = 0, \tag{5}$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0; \tag{6}$$

(4), (5) ва (6) биржинсли тенгламалар системасидан A, B, C номаълум коэффициентлар чиқарилса

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

бўлади. Берилган $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади, чунки у иккала нуқтанинг координаталарини қаноатлантиради.

Мисол. (2,5) ва (—3, 1) нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Бунинг учун берилган нуқталарнинг координаталарини (3) тенгламага қўямиз:

$$\frac{y-5}{1-5}=\frac{x-2}{-3-2},$$

ёки

$$\frac{y-5}{-4}=\frac{x-2}{-5},$$

ёки

$$5(y-5)=4(x-2),$$

ёки

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

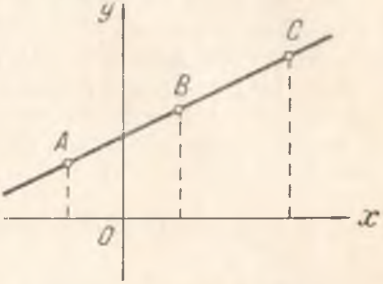
Қуйилган масаланинг детерминант шаклидаги жавоби шундан иборат.

Мисол. $A(-1, 1)$, $B(1, 2)$ ва C (3, 3) нуқталар бир туғри чизиқда бўла оладими?

Қуйилган саволга жавоб бериш учун берилган нуқталарнинг координаталарини (9) ёки (10) формулага қўйиб курамиз. Масалан (9) га қуйилса

$$-1\cdot(2-3)+1\cdot(3-1)+ \\ +3\cdot(1-2)=0,$$

демак, учала нуқта бир туғри чизиқда экан. Дарҳақиқат, берилган нуқталарнинг уринларини аниқлаб, уларнинг бир тўғри чизиқда эканлигини кўрамиз (шакл 41).



Шакл 41.

Масалалар

100. Берилган нуқтадан утган туғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин:

1) $(-3, 0)$; 2) $(0, 5)$; 3) $(-2, 3)$.

101. Берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин:

1) $(-1, 4)$ ва $(-3, -2)$; 2) $(0, 6)$ ва $(3, 6)$;

3) $(0, 0)$ ва $(2, 3)$; 4) $(-1, 1)$ ва $(0,1)$.

102. Учбурчак бурчакларининг учлари: $A(1, 1)$, $B(3, 0)$ ва C (3, 4) нуқталарда. Ҳар бир томонининг теигламаси тузилсин.

103. Учбурчак бурчакларининг учлари: $A(0, 0)$, $B(2, 3)$ ва C (4,0) нуқталарда. Медианаларининг тенгламалари тузилсин.

104. Туғри чизиқ (3, 2) нуқтадан ўтиб, координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан шундай тўғрибурчакли учбурчак ташкил қилганки, унинг юзи 12,5 *кв* бирликка тенг. Шу тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

$$4x - 5y + 17 = 0.$$

Масаланинг туғри ечилганлигини синаб куриш учун, берилган нуқталарининг координаталарини чиқарилган тенгламага қуямиз:

$$4 \cdot 2 - 5 \cdot 5 + 17 = 0,$$

$$4 \cdot (-3) - 5 \cdot 1 + 17 = 0,$$

демак, масала туғри ечилган.

2. Фараз қилайлик, уч нуқта берилган булсин ва уларниг координаталари (x_1, y_1), (x_2, y_2) ва (x_3, y_2) булсин. Учала нуқтанинг қандай шарт билан бир туғри чизиқда булишини топамиз. (3) тенгламага асосан (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) нуқталардан утган туғри чизиқнинг тенгламаси

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{8}$$

булади. Бу чизиқ учинчи (x_3, y_3) нуқтадан ўтганда у нуқтанинг координаталари бу тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1},$$

ёки

$$(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) = 0,$$

ёки

$$\boxed{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0} \tag{9}$$

Демак, учала нуқтанинг координаталари орасида шуидай муносабат булгандагина улар бир туғри чизиқда булади.

Қуйилган масаланинг жавобини детерминант шаклида ёзиш мумкин. Бунииг учун туғридан-туғри (7) дан фойдаланамиз. Ҳақиқатда (7) тенглама (x_1, y_1) ва (x_2, y_2) нуқталардан утган туғри чизиқни ифода қилади. Агар бу чизиқ учинчи (x_3, y_3) нуқтадан ҳам утса, у ҳолда бу нуқтанинг координаталари у тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

105. Тўғри чизиқ (2, 5) нуқтадан ўтиб, координата ўқларининг мусбат йўналишларида ўзаро тенг кесмалар ҳосил қилган. Бу кесмалар аниқлансин.

106. Тўғри чизиқ (—1, 1) нуқтадан ўтиб, ордината ўқининг мусбат йўналишида 3 бирликка тенг кесма ҳосил қилган. Бу чизиқнинг абсцисса ўқидан кесган кесмаси аниқлансин.

107. (1, 5) нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, унинг ордината ўқидан кесган кесмаси 3 бирликка тенг бўлсин.

108. (2, 3), (—4, —27) ва (7, 28) нуқталар бир тўғри чизиқда бўла оладими? Агар бўла олса, улардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

109. Икки нуқта берилган: (1, 2) ва (3, 4). Абсциссаси 7 га тенг бўлган 3-нуқтанинг аввалги икки нуқтани туташтирувчи тўғри чизиқ давомида бўлиши учун, унинг ординатаси қанча бўлиши керак?

§ 25. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ БУРЧАК

1. Фараз қилайлик, икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни аниқлаш лозим бўлсин ва берилган тўғри чизиқларнинг тенгламалари

$$y = kx + l, \quad y = k_1x + l_1 \tag{1}$$

бўлсин. Агар бу чизиқларнинг абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаклари α ва β фараз қилинса, булардан қайси бирининг иккинчисидан катталигига қараб, берилган тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчак

$$\varphi = \pm(\alpha - \beta) \tag{2}$$

бўлади (шакл 42). Бундан

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}. \tag{3}$$

(1) тенгламалардан:

$$\operatorname{tg}\alpha = k, \qquad \operatorname{tg}\beta = k_1, \tag{4}$$

демак,

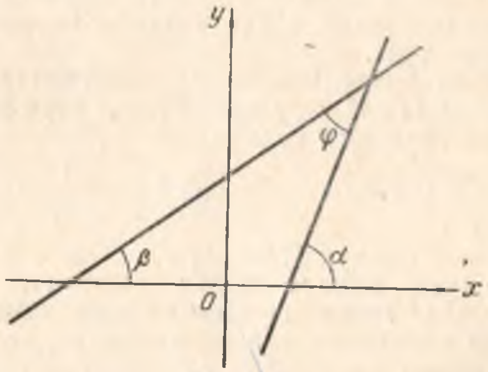
$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{k - k_1}{1 + kk_1} \tag{5}$$

$\operatorname{tg}\varphi$ қийматининг қайси вақтда мусбат ёки манфий чиқиши k нинг k_1 дан катта ёки кичиклигига боғлиқ бўлиб, биринчи ҳолда тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчакни, иккинчи ҳолда унга қўшни бўлган ўтмас бурчакни аниқлайди. Берилган тўғри чизиқлар орасидаги ўткир бурчак

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k - k_1}{1 + kk_1}\right|} \tag{6}$$

формуладан аниқланади.

Мисол. Мисол учун $y = 5x - 15$ ва $y = 3x - 4$ тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни аниқлаймиз.



Шакл 42.

Берилган тенгламаларда $k = 5$, $k_1 = 3$. Буларни (5) га қўйсак,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{5-3}{1-5\cdot 3} = -\frac{1}{7}$$

φ ни $180°$ га тўлдирувчи бурчакнинг тангенси $-\frac{1}{7}$ бўлади.

2. Иккала чизиқ ўзаро параллель бўлган ҳолда $\varphi = 0$ (ёки π) ва $\operatorname{tg}\varphi = 0$ бўлади. Иккинчи томондан

$$\frac{k - k_1}{1 + k\cdot k_1} = 0$$

бўлиши учун касрнинг махражи чексизликка айланиши ёки сурати нолга айланиши керак. k ва k_1 чекли бўлгани учун биринчи фараз тўғри келмайди, демак,

$$k - k_1 = 0 \qquad \text{ёки } k = k_1 \tag{6}$$

булади. Аксинча, агарда $k = k_1$ бўлса, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, яъни $\varphi = 0$ (ёки π). Демак, агарда иккала тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентлари бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда иккала тўғри чизиқ ўзаро параллель булади.

Шундай қилиб, икки тўғри чизиқнинг ўзаро параллеллик шарти шундан иборат: *икки тўғри чизиқнинг ўзаро параллель бўлиши учун, уларнинг бурчак коэффициентлари бир-бирига тенг бўлиши керак ва, аксинча, агарда иккала тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг бўлса, иккала тўғри чизиқ бир-бирига параллель бўлади.*

Масалан, $y = 5x - 7$ ва $y = 5x + 11$ тўғри чизиқлар бир-бирига параллель булади, чунки уларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг.

Иккала тўғри чизиқ бир-бирига перпендикуляр булган ҳолда $\varphi = 90°$ ва $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ бўлади. Бунинг учун формуланинг махражи нолга айланиши керак, яъни

$$1 + k \cdot k_1 = 0 \qquad \text{ёки } k = -\frac{1}{k_1} \tag{7}$$

Аксинча, бу шарт мавжуд бўлса, $\operatorname{tg}\varphi = \infty$ ва $\varphi = 90°$ бўлади.

Шундай қилиб, *иккала тўғри чизиқнинг бир-бирига перпендикулярлик шарти шундан иборат: икки тўғри чизиқнинг ўзаро перпендикуляр бўлиши учун, уларнинг бурчак коэффициентлари миқдор ва ишора жиҳатдан бир-бирига тескари бўлиши лозим ва кифоя қилади.*

Масалан, $y = 3x + 5$ билан $y = -\frac{1}{3}x - 2$; $y = \frac{2}{3}x + 1$ билан $y = -\frac{3}{2}x + 7$ тўғри чизиқлар бир-бирига перпендикуляр булади.

3. Энди фараз қилайлик, тўғри чизиқларнинг тенгламалари

$$Ax + By + C = 0,$$

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

шаклда берилган булсин. $B \neq 0$, $B_1 \neq 0$ фараз қилиб, бу тенгламалар y га нисбатан ечилса:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

$$y = -\frac{A_1}{B_1}x - \frac{C_1}{B_1},$$

булардан:

$$k = -\frac{A}{B}, \quad k_1 = -\frac{A_1}{B_1}. \tag{8}$$

ёки (6) га мувофиқ

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A_1}{B_1},$$

ёки

$$\boxed{\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1}} \tag{9}$$

Аксинча, бу шарт таъмин этилса, $k = k_1$ бўлади. Шундай қилиб, тенгламалари умумий бўлган тўғри чизиқларнинг бир-бирига параллель бўлиши учун, ўзгарувчи x ва y координаталарнинг мос коэффициентлари ўзаро пропорционал бўлиши лозим ва кифоядир.

Масалан, $4x + 6y - 7 = 0$ ва $2x + 3y + 9 = 0$ тўғри чизиқлар ўзаро параллель, чунки

$$4:2 = 6:3.$$

Агар (8) дан k ва k_1 нинг ифодалари (7) га қўйилса, перпендикулярлик учун бундай шарт келиб чиқади:

$$1 + \frac{AA_1}{BB_1} = 0$$

ёки

$$\boxed{AA_1 + BB_1 = 0} \tag{10}$$

ва аксинча бундан (7) келиб чиқади.

Демак: *тенгламалари умумий бўлган икки тўғри чизиқнинг ўзаро перпендикуляр бўлиши учун х ва у ўзгарувчи координаталарининг мос коэффициентлари кўпайтмаларининг алгебраик йиғиндиси нолга тенг бўлиши лозим ва кифоядир.*

Масалан, $3x - 4y - 7 = 0$ ва $4x + 3y + 1 = 0$ тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки

$$AA_1 + BB_1 = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$$

$\boxed{k_1 \cdot k_2 = -1}$

$$k = -\frac{1}{k_1}$$

булиши лозим. Шунинг учун бу ҳолда изланган туғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = -\frac{1}{k_1}(x - x_1)$$

ёки

$$(x - x_1) + k_1(y - y_1) = 0$$

бўлади.

Ағарда берилган чизиқнинг тенгламаси

$$Ax + By + C = 0$$

бўлса, бу ҳолда

$$k = -\frac{A}{B}$$

ва перпендикулярлик шарти буйича

$$k_1 = -\frac{1}{k} = \frac{B}{A}$$

бўлгани учун, изланган туғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1)$$

ёки

$$A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0$$

⊥ шарти

бўлади.

Мисол 1. (2, 1) нуқтадан ўтиб, $y = 5x - 3$ туғри чизиққа параллель бўлган туғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Изланган туғри чизиқ (2, 1) нуқтадан ўтгани учун, унинг тенгламаси

$$y - 1 = k(x - 2).$$

Бунинг $y = 5x - 3$ чизиққа параллель булиши учун $k = 5$ булиши лозим. Демак,

$$y - 1 = 5(x - 2).$$
$$y - 1 = 5x - 10,$$
$$5x - y - 9 = 0.$$

Изланган туғри чизиқнинг тенгламаси шунинг узи булади, чунки у (2, 1) нуқтадан ўтади ва $y = 5x - 3$ чизиққа параллель булади.

18

17

§ 26. БЕРИЛГАИ НУҚТАДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ПАРАЛЛЕЛЬ ЁКИ ПЕРПЕНДИКУЛЯР БЎЛГАИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚИИНГ ТЕНГЛАМАСИ

1. Берилган нуқта (x_1, y_1) ва берилган тўғри чизиқ

$$y = k_1 x + l \tag{1}$$

бўлсин. Фараз қилайлик, берилгаи нуқтадан ўтиб, берилган тўғрн чизиққа параллель бўлган тўғри чизиқни топиш талаб қилиниган бўлсин. Бунинг учун бундай муҳокама қиламиз:

Изланган тўғри чизиқ (x_1, y_1) нуқтадан ўтади. Шуииинг учун унинг тенгламаси

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{2}$$

бўлади. Изланган чизиқ (1) га параллель бўлиши керак. Бунинг учун

$$k = k_1$$

бўлиши лозим. Демак,

$$y - y_1 = k_1 (x - x_1)$$

изланган тўғри чизиқнинг тенгламаси бўлади, чунки бу тенглама масалада қўйилган иккала шартни қаноатлантиради.

Агарда берилган чизиқнинг тенгламаси

$$Ax + By + C = 0$$

бўлса, бу ҳолда

$$k = -\frac{A}{B}$$

ва изланган чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$$

ёки

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$$ // шарти.

бўлади.

Энди (x_1, y_1) нуқтадан ўтиб, (1) тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламасини тузиш керак бўлсин. Бунинг учун юқоридаги тартибда муҳокама қиламиз. Изланган тўғри чизиқ (x_1, y_1) нуқтадан ўтиши керак. Шунинг учун унинг тенгламаси (2) бўлади. Бунинг (1) га перпендикуляр бўлиши учун

Мисол 2. $(-3, 2)$ нуқтадан ўтиб, $5x-4y+1=0$ тўғри чизиққа параллель бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Изланган тўғри чизиқ $(-3, 2)$ нуқтадан ўтгани учун, унинг тенгламаси

$$y-2=k(x+3).$$

k ниг қийматини аниқлаш учун берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}.$$

Изланган тўғри чизиқнинг берилган чизиққа параллель бўлиши учун $k=\frac{5}{4}$ бўлиши лозим. Демак,

$$y-2=\frac{5}{4}(x+3),$$

ёки

$$4y-8=5x+15,$$

ёки

$$5x-4y+23=0.$$

Изланган тўғри чизиқнинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади, чунки у қўйилган иккала шартни таъмин қилади.

Мисол 3. $(1, -2)$ нуқтадан ўтиб, $y=\frac{2}{3}x-5$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

Изланган тўғри чизиқ $(1, -2)$ нуқтадан ўтгани учун унинг тенгламаси

$$y+2=k(x-1)$$

бўлади. Берилган тенгламада $k_1=\frac{2}{3}$. Перпендикулярлик шарти бўйича, изланган чизиқнинг берилган чизиққа перпендикуляр бўлиши учун

$$k=-\frac{1}{k_1}=-\frac{3}{2}$$

бўлиши лозим. Демак,

$$y+2=-\frac{3}{2}(x-1),$$

ёки

$$2y+4=-3x+3,$$

ёки

$$3x + 2y + 1 = 0.$$

Мисол 4. Бурчаклари учларининг координаталари A (2, 3), B (— 5, — 3) ва C (4, — 2) бўлган учбурчакнинг A бурчаги учидан BC томонига туширилган баландлигининг тенгламаси тузилсин.

A (2, 3) нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - 3 = k(x - 2) \qquad (A)$$

бўлади. Изланган чизиқ учбурчакнинг AC томонига перпендикуляр бўлиши керак. Шунинг учун BC нинг тенгламасини тузишга тўғри келади. B (— 5, — 3) ва C (4, — 2) нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{y+3}{-2+3} = \frac{x+5}{4+5},$$

ёки

$$\frac{y+3}{1} = \frac{x+5}{9},$$

ёки

$$x - 9y - 22 = 0, \qquad (B)$$

бундан

$$k_1 = \frac{1}{9}.$$

(A) ва (B) нинг ўзаро перпендикуляр бўлиши учун $k = -\frac{1}{k_1} = -9$ бўлиши лозим. Шунинг учун изланган баландликнинг тенгламаси

$$y - 3 = -9(x - 2),$$

ёки

$$9x + y - 21 = 0.$$

Бу чизиқ икки шартни таъмин этади: у A (2, 3) нуқтадан ўтади, чунки

$$9 \cdot 2 + 3 - 21 = 0$$

ва BC га перпендикуляр $\left(k = \frac{1}{9},\ k_1 = -9\right)$.

Масалалар

110. Тенгламалари $x + y + 4 = 0$ ва $x - y + 3 = 0$ бўлган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак аниқлансин.

111. Тенгламалари $2x - y = 0$ ва $3x + y - 1 = 0$ бўлган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак аниқлансин.

112. Бурчаклари учларининг координаталари: A (0, 0), B (3, 5) ва C (7, 0) бўлган учбурчакнинг бурчаклари аниқлансин.

113. Бурчаклари учларининг координаталари A (1, 3), B (5, —3) ва C (— 4, 2) бўлган учбурчакнинг бурчаклари аниқлансин (градуслар билан).

114. (5, — 2) нуқтадан ўтиб, $y = \frac{1}{2}x + 3$ тўғри чизиққа параллель бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

115. (2, 1) нуқтадан ўтиб, $y = \frac{3}{4}x - 1$ тўғри чизиқ билан 45° бурчак ташкил қилган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

116. Координаталар бошидан ўтиб, $6x + 2y - 1 = 0$ тўғри чизиққа параллель бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

117. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг ўзаро параллеллик шарти топилсин:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ ва } \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1.$$

118. Учбурчак бурчакларининг учлари: A (0, 0), B (1, 2) ва C (—2, 3) нуқталарда. Бунинг исталган икки томонининг ўртасидан ўтган тўғри чизиқ қолган учинчи томонига параллеллиги исбот қилинсин.

119. (0, — 2) нуқтадан ўтиб, $y - x - 5 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

120. (5, — 3) нуқтадан ўтиб, $4x + 3y - 15 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

121. Учбурчак бурчакларининг учлари: A (2, 5), B (2, —3) ва C (4, — 1) нуқталарда. Бу учбурчак баландликларининг тенгламалари тузилсин.

122. Учбурчак бурчакларининг учлари: A (—2, 3), B (0, 0) ва C (3, 5) нуқталарда. Бунинг ҳар бир томонининг ўртасига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқларнинг тенгламалари тузилсин.

123. A нинг қиймати қандай бўлганда $2x + 3y - 5 = 0$ ва $5x + Ay + 1 = 0$ тўғри чизиқлар ўзаро параллель бўлади? Ўзаро перпендикуляр бўлади?

§ 27. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ БИР-БИРИ БИЛАН КЕСИШГАН НУҚТАСИ

Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқларнинг теиглама-лари

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + C = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

бўлсин. Иккала чизиқ бир-бири билан кесишганда — кесишган нуқтасининг x, y координаталари иккала чизиқ учун умумий бўлади, яъни (1) нинг илдизлари бўлади. Демак, иккала чизиқнинг бир-бири билан кесишган нуқтасини аниқлаш уларни ифода қилган тенгламаларни бирлаштириб ечиш билан бўлади. Шунинг учун (1) ни x ва y га иисбатан ечамиз:

$$\left.\begin{aligned} x = \frac{\begin{vmatrix} -C & B \\ -C_1 & B_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}} = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}, \\ y = \frac{\begin{vmatrix} A & -C \\ A_1 & -C_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B_1 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}} = \frac{A_1C - AC_1}{AB_1 - A_1B} \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

Энди x ва y ни ифода қилган бу касрларни текшириб кўрамиз. Агар:

1) касрларнинг умумий махражи $AB_1 - A_1B$ нолга тенг бўлмаса, x ва y аниқ илдизларга эга бўлади ва улар иккала чизиқнинг бир-бири билан кесишган нуқтасининг координаталари бўлади;

2) касрлариинг суратларидан ҳеч қайси бири нолга тенг бўлмаган ҳолда махражи нолга айланса, у ҳолда

$$x = \infty, \; y = \infty$$

бўлади. Бу эса иккала чизиқнинг кесишган нуқтаси чексиз узоқдалигини ёки бошқача қилиб айтганда, уларнинг ўзаро параллеллигини кўрсатади. Ҳақиқатда,

$$AB_1 - A_1B = 0$$

бўлганда, бундан

$$\frac{A}{A^1} = \frac{B}{B_1}$$

бўлиб, параллеллик шарти келиб чиқади ва

3) касрларнинг умумий махражи $AB_1 - A_1B$ ва суратларидан бири, масалан, $BC_1 - B_1C$ нолга айланса у ҳолда умуман иккинчи сурати ҳам нолга айланади. Ҳақиқатда, биринчи тенгликни C га ва иккинчисини A га кўпайтирсак:

$$AB_1C - A_1BC = 0,$$

$$ABC_1 - AD_1C = 0,$$

буларни ҳадлаб қўшганда

$$ABC_1 - A_1BC = 0,$$

ёки

$$B(AC_1 - A_1C) = 0,$$

ёки

$$AC_1 - A_1C = 0, \quad (B \neq 0)$$

ёки

$$A_1C - AC_1 = 0$$

бўлади. Бу эса иккинчи касрнинг суратидан иборат. Шунинг билан бу ҳолда

$$x = \frac{0}{0},\ y = \frac{0}{0}.$$

Демак, бу ҳолда икки чизиқнинг кесишган нуқтаси аниқ эмас: x ва y нинг қийматлари чексиз кўп ёки иккала чизиқнинг умумий нуқталари чексиз кўп. Бу эса иккала чизиқнинг бирлашиб кетганлигини кўрсатади. Шунинг билан баравар:

$$AB_1 - A_1B = 0 \text{ ва } B_1C = 0$$

бўлган ҳолда, булардан

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} \text{ ва } \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

ёки

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1}$$

бўлади. Агарда бу нисбатларнинг умумий қиймати m фараз қилинса, у ҳолда:

$$A = mA_1,\ B = mB_1,\ C = mC_1$$

бўлади. Бу тенгликлардан биринчисини x га ва иккинчисини y га кўпайтириб, сўнгра уларни ҳадлаб қўшсак:

$$Ax + By + C = m\ (A_1x + B_1y + C_1).$$

Бу натижа яна юқоридаги фикрни исбот қилади. Демак: *тенгламалари умумий бўлган икки тўғри чизиқнинг бир-бири билан бирлашиб кетиши учун уларнинг ҳамма мос коэффициентлари ўзаро пропорционал бўлиши шарт.*

Масалан, $5x - 6y + 8 = 0$ ва $20x - 24y + 32 = 0$ бир тўғри чизиқни ифода қилади, чунки $5:20 = 6:24 = 8:32$. Ҳақиқатда, иккинчи тенгламанинг иккала томони 4 га бўлинса, биринчи тенглама ҳосил бўлади.

§ 28. УЧ ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ БИР НУҚТАДАН ЎТИШ ШАРТИ

Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқларнинг тенгламалари

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A_1x + B_1y + C_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \end{aligned}$$

бўлсин. Учала чизиқ бир нуқтада учрашганда у нуқтанинг координаталари учала тенгламани қаноатлантириши лозим. Икки номаълумли уч тенгламани қаноатлантириш учун у тенгламаларнинг коэффициентларидан тузилган детерминант нолга айланиши лозим. Шунинг учун уч тўғри чизиқнинг бир нуқтадан ўтиш шарти

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

бўлади. Агар чизиқлар бир нуқтада учрашганда у нуқтани аниқлаш лозим бўлса, у ҳолда берилган тенгламалардан иккитасини бирлаштириб ечиш керак бўлади.

Мисол. Тенгламалари

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 13 &= 0, \\ 3x - 2y &= 0, \\ x + 2y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

бўлган тўғри чизиқларнинг бир нуқтадан ўтиши синаб кўрилсин; бир нуқтадан ўтган ҳолда у нуқтанинг координаталари аниқлансин.

(1) тенгламадаги p — координаталар бошидан AB га туширилган перпендикулярнинг, яъни OR нинг узунлиги эди. Шунинг учун:

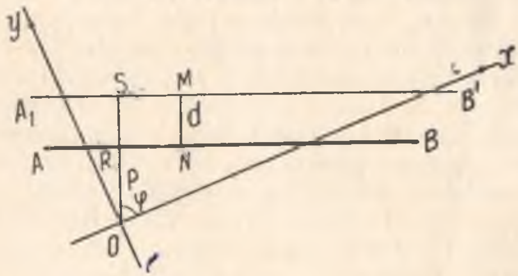
ёки

$$OS = OR + RS = OR + NM,$$

$$OS = p + d. \qquad (2)$$

Иккинчи томондан OS нинг Ox билан ташкил қилган бурчаги φ бўлгани учун A_1B_1 нинг тенгламаси

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p + d) = 0 \qquad (3)$$



Шакл 43.

бўлади. $M(x_1, y_1)$ нуқта A_1B_1 да бўлгани учун у нуқтанинг координаталари (3) тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - (p + d) = 0,$$

бундан d учун қуйидаги формула келиб чиқади:

$$d = x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p. \qquad (4)$$

M нуқта AB нинг иккинчи томонида бўлган ҳолда $(p + d)$ ни $(p - d)$ га алмаштиришга тўғри келар эди ва бу ҳолда

$$d = -(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p). \qquad (5)$$

d берилган нуқта билан берилган тўғри чизиқ орасидаги масофа бўлгани учун унинг фақат абсолют қиймати ҳисобга олинади. Шунинг учун формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$d = |x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi - p|. \qquad (6)$$

2. Бу формулани чиқаришда биз AB нинг тенгламасини нормаль шаклда фараз қилган эдик. Шунинг учун унинг тенгламаси

$$Ax + By + C = 0,$$

ечиш учун берилган тенгламаларнинг коэффи- ... детерминант тузиб, уни ҳисоблаб кўрамиз:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -13 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -8 \end{vmatrix} =$$

$$= -13\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -104 + 104 = 0,$$

демак, учала чизиқ бир нуқтадан ўтади. У нуқтанинг координаталарини аниқлаш учун берилган тенгламалардан иккитасини, масалан, иккинчи ва учинчисини олиб, уларни ечамиз:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{16}{8} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{24}{8} = 3.$$

Демак, учала тўғри чизиқнинг ўзаро кесишган нуқтаси (2, 3) бўлади. Ҳақиқатда, топилган нуқтанинг координаталари берилган тенгламаларга қўйилса,

$$2\cdot 2 + 3\cdot 3 - 13 = 0,$$
$$3\cdot 2 - 2\cdot 3 = 0,$$
$$2 + 2\cdot 3 - 8 = 0,$$

уларнинг ҳар бири қаноатланади.

сатрими.

§ 29. НУҚТА БИЛАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ МАСОФА 15 сатр

1. Берилган AB тўғри чизиқнинг тенгламасини

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0 \qquad (1)$$

ва берилган нуқтани $M(x_1, y_1)$ фараз қиламиз (шакл 43).

M нуқта билан AB тўғри чизиқ орасидаги масофа у нуқтадан AB га туширилган перпендикулярнинг узунлиги билан ўлчанади. Бу масофа d бўлсин, яъни

$$MN = d.$$

Бу масофани аниқлаш учун M нуқтадан AB га параллель қилиб A_1B_1 ни ўтказамиз ва координаталар бошидан иккала чизиққа перпендикуляр қилиб OS ни туширамиз. Маълумки,

Масалалар

124. Учбурчак томонларининг тенгламалари: $x + 2y - 3 = 0$, $x - 3 = 0$ ва $3x - 2y - 1 = 0$. Бунинг бурчаклари учларининг координаталари аниқлансин.

125. Тенгламалари $x + y - 5 = 0$ ва $3x + y - 9 = 0$ бўлган тўғри чизиқлар кесишган нуқтадан ва координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

126. Тенгламалари $4x + 3y - 5 = 0$ ва $8x - 5y + 23 = 0$ бўлган тўғри чизиқлар кесишган нуқтадан ўтиб, уларнинг биринчисига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

127. Тенгламалари $8x + 7y + 6 = 0$, $7x + 5y + 3 = 0$ ва $4x + 5y + 6 = 0$ бўлган тўғри чизиқларнинг учаласи бир нуқтадан ўтадими?

128. C нинг қиймати қандай бўлганда: $3x + 5y - 7 = 0$, $4x + 3y + C = 0$ ва $2x - y + 4 = 0$ тўғри чизиқлар бир нуқтадан ўтади?

129. $(1, -2)$ нуқта билан $2x - y - 5 = 0$ тўғри чизиқнинг орасидаги масофа топилсин.

130. $(4, -2)$ нуқта билан $x - 7 = 0$ тўғри чизиқнинг орасидаги масофа топилсин.

131. Учбурчак бурчакларининг учлари $(0, 0)$, $(-1, 3)$ ва $(2, 2)$ нуқталарда. Бу учбурчак баландликларининг узунликлари топилсин.

132. Тенгламалари $x - 3y + 16 = 0$ ва $3x - y = 0$ бўлган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак биссектрисасининг тенгламаси тузилсин.

133. Учбурчак бурчакларининг учлари: $A(0, 0)$, $B(10, 0)$ ва $C(6, 8)$ нуқталарда. Бу учбурчакнинг ички бурчаклари биссектрисаларининг тенгламалари тузилсин.

134. $(2, -3)$ нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, унинг билан $(5, 2)$ нуқта орасидаги масофа 3 бирликка тенг бўлсин.

135. $4x + 6y - 11 = 0$ ва $2x + 3y - 7 = 0$ тўғри чизиқлар орасидаги масофа топилсин.

Аралаш масалалар

136. $(-1, 2)$ нуқтадан ўтиб, абсцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчагининг синуси 0,8 га тенг бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

шаклда бўлган ҳолда энг аввал уни нормаль шаклга келтирамиз. Бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

бўлади. Энди x, y нинг ўрнига берилган (x_1, y_1) нуқтанинг координаталари қўйилса, натижа изланган d масофа бўлади. Демак, юқорида қилинган муҳокамага асосан:

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \tag{7}$$

Шунинг билан, нуқтанинг тўғри чизиққача масофасини аниқлаш учун бундай қоида келиб чиқади:

нуқтанинг тўғри чизиққача масофасини аниқлаш учун у чизиқнинг тенгламасини нормаль ҳолга келтириб, ўзгарувчи координаталарининг ўрнига берилган нуқтанинг координаталарини қўйиш керак. Чиққан натижанинг абсолют қиймати изланган масофа бўлади.

Мисол 1. (3, 4) нуқта билан $5x + 12y - 11 = 0$ тўғри чизиқ орасидаги масофа аниқлансин.

(7) формула бўйича:

$$d = \left|\frac{5\cdot3 + 12\cdot4 - 11}{\sqrt{5^2 + 12^2}}\right| = \frac{52}{13} = 4.$$

Мисол 2. Учбурчак бурчакларининг учлари $A(-3, 1)$, $B(0, 0)$ ва $C(2, 3)$ нуқталарда. Бунинг C бурчаги учидан AB томонига туширилган баландлигининг узунлиги топилсин.

Бунинг учун энг аввал учбурчак AB томонининг тенгламасини тузамиз:

$$\frac{y-1}{0-1} = \frac{x+3}{0+3},$$

ёки

$$x + 3y = 0.$$

Бу чизиққа $C(2, 3)$ нуқтадан туширилган перпендикулярнин узунлиги (7) формула бўйича

$$\left|\frac{2 + 3\cdot3}{\sqrt{1+9}}\right| = \frac{11\sqrt{10}}{10} \text{ бўлади.}$$

137. Тенгламаси $4x + 3y + 1 = 0$ бўлган тўғри чизиқ берилган. Бу чизиққа параллель бўлган шундай тўғри чизиқ топилсинки, у билан берилган чизиқ орасидаги масофа 3 бирликка тенг бўлсин.

138. (2, 7) нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказилганки, у координата ўқлари билан юзи 64 *кв.* бирликка тенг бўлган учбурчак ташкил қилсин. Бу чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

139. Тенгламалари $3x - 4y + 6 = 0$, $x - 2 = 0$ ва $y = 2x - 1$ бўлган тўғри чизиқларнинг бир нуқтадан ўтиши исбот қилинсин.

140. Учбурчак томонларининг тенгламалари берилган: $y = x$, $y = -x$, $y = 2x - 2$. Бунга ички чизилган доиранинг юзи топилсин.

141. $2x + 5y + 8 = 0$ ва $3x - 4y - 7 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, унинг билан $y = 4x + 3$ тўғри чизиқнинг орасидаги бурчак 45° бўлсин.

142. (4, 4) нуқтадан ўтиб, $2x - y = 0$ тўғри чизиқ билан 45° бурчак ташкил қилган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

143. (—2, 5) нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказилсинки, у (3, —7) ва (—4, 1) нуқталардан тенг узоқликда бўлсин.

144. Тенгёнли учбурчакда ён томонларининг тенгламалари $3x - y + 6 = 0$ ва $x + 3y - 2 = 0$. Учбурчакнинг асоси (1, —2) нуқтадан ўтади. Асосининг тенгламаси тузилсин.

145. Учбурчакнинг томонларидан иккитасининг тенгламалари $y + 1 = 0$, $x + y = 1$ ва медианалари кесишган нуқта (— 1, 0) берилган. Учинчи томонининг тенгламаси тузилсин.

146. Учбурчакнинг томонларидан иккитасининг тенгламалари $3x + 2y + 6 = 0$, $x + y - 3 = 0$ ва баландликларининг кесишган нуқтаси (0, 0) берилган. Учинчи томонининг тенгламаси тузилсин.

147. Тўртбурчак қарама-қарши томонларининг ўрта нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқлар ўзаро шундай нуқтада кесишадики, у нуқта тўртбурчак диагоналларининг ўрта нуқталарини туташтирувчи кесманинг ўртасида бўлади. Бу исбот қилинсин.

148. Тенгёнли учбурчакнинг асосидаги бирор нуқтадан унинг ён томонларига туширилган перпендикулярлар йиғиндиси ўзгармас сондан иборат. Бу исбот қилинсин.

149. Тенгтомонли учбурчакнинг бирор ички нуқтасидан унинг учала томонига туширилган перпендикулярлар йиғиндиси ўзгармас сондан иборат. Бу исбот қилинсин.

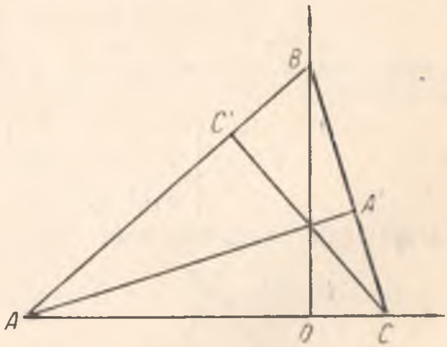
150. Учбурчак бурчакларининг учлари: $A(-3, 5)$, $B(4, 10)$ ва $C(0, 0)$ нуқталарда. Бу учбурчак медианаларининг кесишган нуқтаси, баландликларининг кесишган нуқтаси ва ташқи доиранинг маркази бир тўғри чизиқда эканлиги исбот қилинсин.

151. Учбурчакнинг бурчаклари: $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ ва $C(4, 1)$ нуқталарда. Бунга чизилган ташқи доиранинг радиуси топилсин.

§ 30* БАЪЗИ ТЕОРЕМАЛАР ВА УЛАРИИНГ ИСБОТЛАРИ

Ўтган материалларга асосланиб, аналитик геометрия методининг куч ва моҳиятини тасвир қилиш мақсадида элементар геометриядан маълум бир неча теоремани аналитик равишда исбот қилиб кўрсатамиз.

Теорема. *Ҳар бир учбурчакда унинг баландликлари бир нуқтада кесишади.*



Шакл 44.

Фараз қилайлик, ABC учбурчакнинг баландликлари AA', CC', BO бўлсин (шакл 44). Теореманинг исботи бирмунча қулай бўлсин учун ABC учбурчакнинг AC томонини абсцисса ўқи ва унинг OB баландлигини ордината ўқи деб қабул қиламиз. Учбурчакнинг баландлиги $OB = h$ бўлсин, демак, $B(0, h)$; A ва C нинг координаталарини $A(-a, 0)$ ва $C(c, 0)$ фараз қиламиз $(a > 0,\ c > 0)$. Бу ҳолда BC нинг тенгламаси

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{h} = 1,$$

бундан $k = -\frac{h}{c}$. Шунинг учун A дан ўтиб, BC га перпендикуляр бўлган AA' нинг тенгламаси

$$y = \frac{c}{h}(x + a),$$

ёки

$$cx - hy + ac = 0$$

бўлади. Шунга ўхшаш $AO = -a$, $OB = h$ бўлгани учун AB нинг тенгламаси

$$-\frac{x}{a} + \frac{y}{h} = 1$$

бўлади; бу тенгламада $k = \frac{h}{a}$, демак, AB га перпендикуляр бўлган CC' нинг тенгламаси

$$y = -\frac{a}{h}(x - c),$$

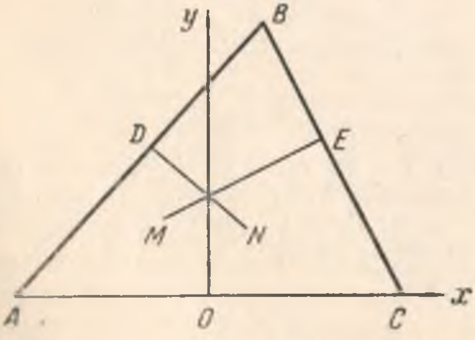
ёки

$$ax + hy - ac = 0; \qquad (2)$$

OB нинг тенгламаси эса: $x = 0$. § 28 да чиқарилган формулага мувофиқ:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 0 \\ c, & -h, & ac \\ a, & +h, & -ac \end{vmatrix} = 0,$$

бу эса учала баландликнинг бир нуқтада кесишганлигини кўрсатади. (Буни синаб кўрилсин).



Шакл 45.

Теорема. *Ҳар бир учбурчакда томонларининг ўртасидан ўтказилган перпендикулярлар бир нуқтада кесишади.*

Бирор ABC учбурчакнинг AC томонини абсцисса ўқи ва унинг ўртасидан ўтиб, унга перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни ордината ўқи фараз қиламиз (шакл 45). Учбурчак бурчакларининг координаталари: $A(-a, 0)$, $C(a, 0)$, $B(b, c)$ бўлсин демак:

$$E\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right), \; D\left(\frac{b-a}{2}, \frac{c}{2}\right).$$

Бу ҳолда BC нинг тенгламаси

$$y = \frac{c}{b-a}x, \qquad \left(k = \frac{c}{b-a}\right)$$

Шунинг учун E нуқтадан ўтиб, BC га перпендикуляр бўлган EM нинг тенгламаси:

$$y - \frac{c}{2} = \frac{a-b}{c}\left(x - \frac{a+b}{2}\right),$$

ёки

$$2(a-b)x - 2cy - a^2 + b^2 + c^2 = 0. \qquad (1)$$

Шунга ўхшаш AB нинг тенгламаси:

$$y = \frac{c}{a+b}x \qquad \left(k = \frac{c}{a+b}\right)$$

бўлгани учун D нуқтадан ўтиб, AB га перпендикуляр бўлган DN нинг тенгламаси:

$$y - \frac{c}{2} = -\frac{a+b}{c}\left(x - \frac{b-a}{2}\right)$$

ёки

$$2(a+b)x + 2cy + a^2 - b^2 - c^2 = 0; \qquad (2)$$

Oy нинг тенгламаси эса: $x = 0$. § 28 даги формулага мувофиқ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(a-b), & -2c, & -a^2 + b^2 + c^2 \\ 2(a+b), & +2c, & +a^2 - b^2 - c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

бу эса теоремада айтилган учала перпендикулярнинг бир нуқтада кесишганлигини кўрсатади. (Синаб кўрилсин.)

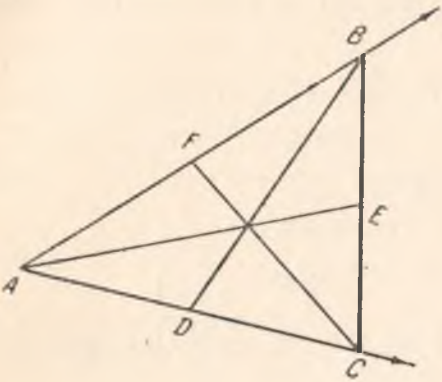
Теорема. *Ҳар бир учбурчакда унинг медианалари бир нуқтада кесишади.*

Кесмани берилган нисбатда бўлишдан ҳосил бўлган формулаларнинг координаталар системасига боғлиқ эмаслигини ўз вақтида кўрган эдик. Буни назарда тутиб, ABC учбурчакнинг AC томонини абсцисса ўқи ва AB томонини ордината ўқи фараз қиламиз (шакл 46). Агар $C(a, 0)$ ва $B(0, b)$ фараз қилинса:

$$D\left(\frac{a}{2}, 0\right), \; E\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right), \; F\left(0, \frac{b}{2}\right)$$

бўлади. Шунинг учун AE нинг тенгламаси

$$y = \frac{b}{a}x, \text{ ёки } bx - ay = 0. \qquad (1)$$



Шакл 46.

Шунга ўхшаш BD нинг тенгламаси

$$y - b = -\frac{2b}{a}x,$$

ёки

$$2bx + ay - ab = 0. \quad (2)$$

Худди шунинг каби CF нинг тенгламасини тузамиз:

$$y = -\frac{b}{2a}(x - a),$$

ёки

$$bx + 2ay - ab = 0 \; (3)$$

§ 28 да чиқарилган формулага мувофиқ;

$$\begin{vmatrix} b, - & a, & 0 \\ 2b, + & a, & -ab \\ b, + & 2a, & -ab \end{vmatrix} = 0,$$

бу эса учала медиананинг бир нуқтада кесишганлигини кўрсатади. (Синаб кўрилсин.)

***Теорема**. Ҳар бир учбурчакда: баландликларининг учрашган нуқтаси, медианаларининг кесишган нуқтаси ва ташқи айлананинг маркази бир тўғри чизиқда ётади.*

Бу теоремани исбот қнлиш учун ABC учбурчакнинг AC томонини абсцисса ўқи ва B дан AC га туширилган перпендикулярни ордината ўқи фараз қиламиз (шакл 47).

ABC учбурчакнинг бурчаклари учларининг координаталарини:

$$A(-a, 0), \; B(0, h), \; C(b, 0)$$

фараз қиламиз. Бу ҳолда $OC = b$, $OB = h$ бўлгани учун, BC нинг тенгламаси

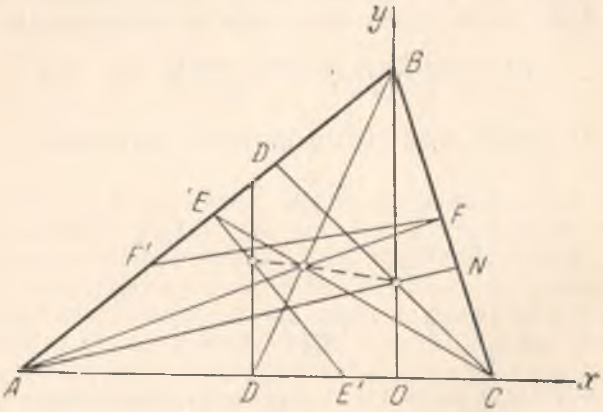
$$\frac{x}{b} + \frac{y}{h} = 1, \qquad \left(k = -\frac{h}{b}\right)$$

бўлади. AN баландлик A дан ўтиб BC га перпендикуляр бўлгани учун, унинг тенгламаси

$$y = \frac{b}{h}(x + a) \tag{1}$$

бўлади; OB баландликнинг тенгламаси: $x = 0$ бўлади, демак, AN ва OB баландликларнинг кесишган нуқтаси $\left(0, \frac{ab}{h}\right)$; BD медиананинг тенгламаси:

$$y = \frac{2h}{a - b}x + h;$$



Шакл 47.

AF медиананинг тенгламаси

$$y = \frac{h}{2a + b}(x + a);$$

буларнинг учрашган нуқтаси $\left(\frac{b - a}{3}, \frac{h}{3}\right)$. BC нинг тенгламаси

$$y - h = -\frac{h}{b}x \qquad \left(k = -\frac{h}{b}\right)$$

бўлгани учун, унинг ўртасига перпендикуляр бўлган FF' нинг тенгламаси

Бешинчи боб

ҚИСҚАРТМА БЕЛГИЛАШ МЕТОДИ. БИРЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАР

§ 31. ҚИСҚАРТМА БЕЛГИЛАШ МЕТОДИ

Кун вақт бир неча чизиқ бирликда текширилган ҳолларда, у чизиқларни ифода қилган тенгламаларнинг хусусий хоссаларини эътиборга олмай, улар тўғрисида баъзи умумий хулосалар чиқариш мумкин бўлади. Бундай ҳолларда энг аввал чизиқнинг тенгламасини қисқача бирор $\varphi = 0$ тариқада белгилайдилар ва сўнгра буни ифода қилган чизиқнинг умумий хоссасинигина назарда тутиб, унинг устида лозим бўлган муҳокамани юритадилар.

Қисқартма белгилаш методи деб аталган бу метод бирмунча математик амалларни бажаришдан қутқазади ва мақсадга тез ва қисқа йўл билан олиб келади.

1. Фараз қилайлик, тўғрибурчакли координаталар системасига нисбатан берилган ва AB ва $A'B'$ тўғри чизиқларнинг нормаль ҳолдаги қисқартма тенгламалари

$$\varphi_1 = 0 \text{ ва } \varphi_2 = 0 \qquad (1)$$

бўлсин, яъни (шакл 48):

$$\varphi_1 = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1,$$

$$\varphi_2 = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2.$$

Бу ҳолда

$$\varphi_1 - k\varphi_2 = 0 \qquad (2)$$

тенглама биринчи даражали бўлиб, φ_1 ва φ_2 ни нолга айлантирадиган x ва y нинг ҳамма қийматлари (2) ни ҳам қа-

$$y-\frac{h}{2}=\frac{b}{2}\left(x-\frac{b}{2}\right) \tag{2}$$

бўлади. Шунга ўхшаш AB нинг тенгламаси

$$y=\frac{h}{a}(x+a), \qquad \left(k=\frac{h}{a}\right)$$

бўлгани учун, унинг ўртасига перпендикуляр бўлган EE' нинг тенгламаси

$$y-\frac{h}{2}=-\frac{a}{h}\left(x+\frac{a}{2}\right) \tag{3}$$

бўлади. (2) ва (3) дан ҳалиги перпендикулярнинг кесишган нуқтаси ёки ташқи айлананинг маркази аниқланади:

$$\left(\frac{b-a}{2}, \quad \frac{h^2-ab}{2h}\right).$$

§ 24 да чиқарилган (10) формулага мувофиқ:

$$\begin{vmatrix} 0, & \frac{ab}{h}, & 1 \\ \frac{b-a}{3}, & \frac{h}{3}, & 1 \\ \frac{b-a}{2}, & \frac{h^2-ab}{2h}, & 1 \end{vmatrix} {}^{*} = 0,$$

бу эса теоремада айтилган учала нуқтанинг бир тўғри чизиқда ётганлигини кўрсатади. (Синаб кўрилсин.)

---

* Машқ тариқасида бу детерминантни ҳисоблаб чиқиш ўқувчига топширилади.

Шунинг билан $\varphi_1 - k\varphi_2 = 0$ тенгламада k параметри: k га берилган қийматга тегишли тўғри чизиқнинг (1) тўғри чизиқлар билан ташкил этган бурчаклари синусларининг нисбатини ифода қилади.

Параметр k мусбат ёки манфий бўлиши мумкин. Бу эса (3) га мувофиқ MN ва MN' нинг ишораларига боғлиқ бўлиб, MN ва MN' нинг ишоралари бир хил бўлганда мусбат ва ҳар хил бўлганда манфий бўлади. Иккинчи томондан, маълумки, нуқта билан координаталар боши тўғри чизиқнинг бир томонида бўлганда у нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа манфий ва акси ҳолда, яъни нуқта тўғри чизиқнинг бир томонида ва координаталар боши унинг иккинчи томонида бўлганида мусбат бўлади. Буларга қараб масалани аниқлаш мумкин.

Агар $k = \pm 1$ бўлса, $\sin\beta_1 = \pm \sin\beta_2$, демак, $k = +1$ бўлганда $\beta_1 = \beta_2$ ва $k = -1$ бўлганда $\beta_1 = \pi - \beta_2$ бўлади. Бунга қараганда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0 \text{ ва } \varphi_1 + \varphi_2 = 0$$

тўғри чизиқлар

$$\varphi_1 = 0 \text{ ва } \varphi_2 = 0$$

тўғри чизиқлардан ҳосил бўлган иккита бурчакнинг биссектрисаларини ифода қилади.

2. Энди фараз қилайлик,

$$U_1 = 0 \text{ ва } U_2 = 0 \tag{4}$$

берилган тўғри чизиқларнинг умумий кўринишдаги тенгламалари бўлсин, яъни:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= A_1x + B_1y + C_1, \\ U_2 &= A_2x + B_2y + C_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Бу ҳолда

$$U_1 - kU_2 = 0 \tag{6}$$

тенгламадаги k параметрнинг маъноси бошқача бўлади. Буни аниқлаш учун берилган тенгламаларни нормаль ҳолга келтирамиз:

$$\frac{U_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1,$$

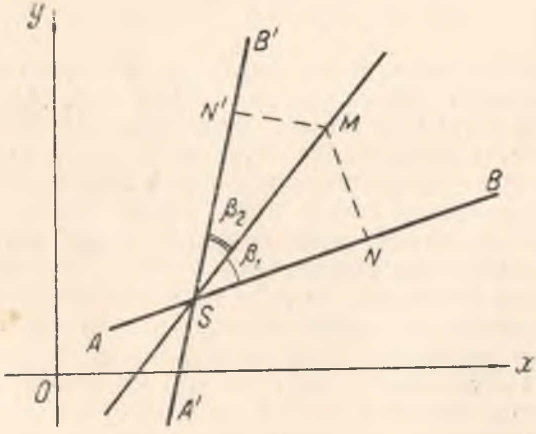
$$\frac{U_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2,$$

буларда p_1 ва p_2 координаталар бошидан (4) тўғри чизиқларга туширилган перпендикулярлар α_1 ва α_2 шу перпендиноатлантиради. Демак (2) тенглама: $\varphi_1=0$ ва $\varphi_2=0$ тўғри чизиқларнинг ўзаро кесишган нуқтасидан ўтган тўғри чизиқлар боғламини ифода қилади. (2) тенгламадаги k параметр эса оддий геометрик маънога эгадир. Буни аниқлаш учун фараз қилайлик, CC' (2) дастага қарашли бирор тўғри чизиқ бўлсин. Агарда бу тўғри чизиқда бирор M $(x_1\ y_1)$ нуқта олинса, у ҳолда униг координаталари (2) ни қаноатлантириши керак, шунинг учун (2) дан:

$$k=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{x_1\cos\alpha_1+y_1\sin\alpha_1-p_1}{x_1\cos\alpha_2+y_1\sin\alpha_2-p_2}.$$

Иккинчи томондаги бу касрнинг сурат ва махражи M (x_1, y_1) нуқтадан (1) тўғри чизиқларгача масофалардан иборат (§ 29), яъни

$$k=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{MN}{MN^1}.$$



Шакл 48.

Агар CC' тўғри чизиқнинг AB ва $A'B'$ тўғри чизиқлар билан ташкил қилган бурчаклари тартиб билан β_1, β_2 фараз қилинса, бу ҳолда MNS ва $MN'S$ тўғрибурчакли учбурчакларда:

$$MN=SM\sin\beta_1,\ MN'=SM\sin\beta_2,$$

демак,

$$k=\frac{MN}{MN'}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}. \tag{3}$$

кулярларнинг абсцисса ўқи билан ташкил этган бурчаклари. Кейинги тенгламалардан биринчисини иккинчисига бўлсак:

$$\frac{U_1\sqrt{A_2^2+B_2^2}}{U_2\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1-p_1}{x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2-p_2},$$

ёки

$$\frac{U_1\sqrt{A_2^2+B_2^2}}{U_2\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2},$$

ёки

$$\frac{U_1}{U_2}=\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2},$$

ёки

$$\frac{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}=\lambda$$

фараз қилинса,

$$k-\frac{U_1}{U_2}=\lambda\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}. \qquad (7)$$

Шунинг билан бу ҳолда параметр k: ҳамон синусларнинг нисбатини λ коэффициент билан кўпайтмасига тенгдир.

3. Фараз қилайлик,

$$U_1=0,\ U_2=0,\ U_3=0 \qquad (8)$$

учта тўғри чизиқнинг қисқартма тенгламалари бўлсин.

Бу тўғри чизиқлардан аввалги иккитасининг ўзаро кесишган нуқтасидан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламасини

$$k_1U_1+k_2U_2=0 \qquad (9)$$

тариқада ёзиш мумкин. Хусусий ҳолда, агарда берилган учала тўғри чизиқлардан учинчиси аввалги иккитасининг кесишган нуқтасидан ўтса, бу ҳолда (9) тенгламадаги k_1 ва k_2 ўзгармас сонларни шундай қилиб танлаб олиш мумкинки, натижада учинчи тўғри чизиқ ҳосил бўлсин. Бу эса (9) тенгламанинг чап томони $U_3=0$ тенгламанинг чап томонидан фарқи ўзгармас кўпайтувчи бўлишини ёки l ни нолга тенг бўлмаган ўзгармас фараз қилинса

$$k_1U_1+k_2U_2=lU_3$$

айният мавжудлигини кўрсатади; (l) ни k_3 билан белгилаб, кейинги айниятни

$$k_1U_1+k_2U_2+k_3U_3=0 \qquad (10)$$

ёзиш мумкин. Равшанки, аксинча, агарда k_1, k_2, k_3 ўзгармас сонларни шундай танлаб олиш мумкин бўлса, натижада (10) айният ҳосил бўлса, берилган учала тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади.

Бу натижага асосланиб, геометриядан маълум бўлган бир неча теореманн қисқартма метод ёрдами билан ғоят даражада енгил ва қулай исбот қилиш мумкин.

Фараз қилайлик,

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ \varphi_3=0$$

учбурчак томонларининг нормаль тенгламалари бўлсин. Бу ҳолда юқорида кўрсатилган текширишга мувофиқ учбурчакнинг ички бурчаклари биссектрисаларининг тенгламалари:

$$\varphi_1-\varphi_2=0,$$
$$\varphi_2-\varphi_3=0,$$
$$\varphi_3-\varphi_1=0$$

бўлади. Бу тенгламалар чап томонларининг йиғиндиси айнан нолга тенг, яъни бу ҳолда, юқорида қилинган муҳокамага мувофиқ

$$k_1=k_2=k_3=1$$

фараз қилиш мумкин; бу эса *ҳар бир учбурчакда ички бурчаклар биссектрисаларининг бир нуқтада кесишганлигини кўрсатади.*

Энди, учбурчакнинг бирор ички бурчаги биссектрисасининг ва бу бурчакка қўшни бўлмаган иккита ташқи бурчакларининг тенгламаларинн тузамиз, масалан:

$$\varphi_1-\varphi_2=0,$$
$$\varphi_2+\varphi_3=0,$$
$$\varphi_1+\varphi_3=0.$$

Кейинги тенгламанинг иккала томонини -1 га кўпайтириб, сўнгра унинг чап томони аввалги икки тенгламанинг чап томонлари билан қўшилса, йиғинди айнан нолга айланади, яъни бу ҳолда

$$k_1=k_2=+1,\ k_3=-1.$$

Шунинг билан *ҳар бир учбурчакда бирор ички бурчагининг биссектрисаси билан у бурчакка қўшни бўлмаган икки ташқи бурчакнинг биссектрисалари ўзаро бир нуқтада учрашади* (шакл 49).

$$\varphi_1 - \frac{\cos A_2}{\cos A_1}\varphi_2 = 0 \qquad (3)$$

(1), (2) ва (3) тенгламаларни тартиб билан

$$k_1 = \cos A_2,\ k_2 = \cos A_3,\ k_3 = \cos A_1$$

га кўпайтириб, сўнгра қўшилса, натижа айнан нолга айланади ва шунинг билан теорема исбот бўлади.

§ 32. БИРЖИНСЛИ КООРДИНАТАЛАР

Баъзи вақтларда текисликдаги нуқтанинг x, y координаталаридан ҳар бирини бирор учинчи ўзгарувчига нисбатан ифода қилиш бирмунча қулайлик келтиради. Фараз қилайлик, x', y', t' шундай сонлар бўлсинки, улардан биринчи иккитасининг учинчисига нисбати нуқтанинг x, y декарт координаталарига тенг бўлсин, яъни

$$x = \frac{x'}{t'}, \quad y = \frac{y'}{t'}. \qquad (1)$$

Бундай x', y', t' сонлар нуқтанинг биржинсли координаталари дейилади, чунки чизиқнинг тенгламаси бу координаталар ёрдами билан биржинсли формага келади. (1) га қарагаида учала x', y', t' сондан бирига ихтиёрий қиймат бериш мумкин. Масалан, нуқтанинг декарт координаталари

$$x = 5,\ y = 2$$

бўлган ҳолда, $t' = 3$, $x' = 15$, $y' = 6$ фараз қилинса,

$$\frac{x'}{t'} = 5, \quad \frac{y'}{t'} = 2$$

бўлади.

Биржинсли координаталардан ҳамавақт декарт координаталарига ўтиш мумкин. Ҳақиқатда, агар (1) да $t' = 1$ фараз қилинса, $x' = x$, $y' = y$ бўлади.

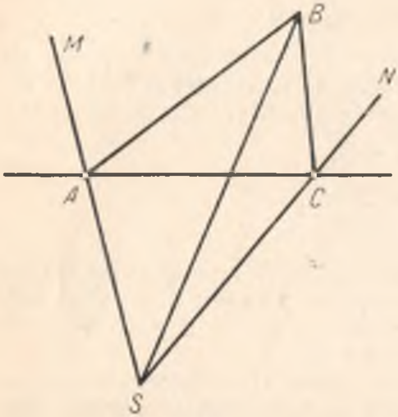
Энди нуқтанинг биржинсли координаталарини бевосита x, y, t тариқасида белгилаймиз. Бу ҳолда, декарт координаталарида берилган тенгламани биржинсли қилиш учун, тенгламадаги x, y ни $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$ нисбатлар билан алмаштирилса кифоя қилади. Аксинча, биржинсли координаталардан декарт координаталарига ўтиш учун $t = 1$ фараз қилинса кифоя қилади. Масалан, декарт координаталарида тўғри чизиқнинг тенгламаси

Иккинчи мисол ўрнида ҳар бир учбурчак баландликларининг бир нуқтада кесишганлигини исбот қиламиз.

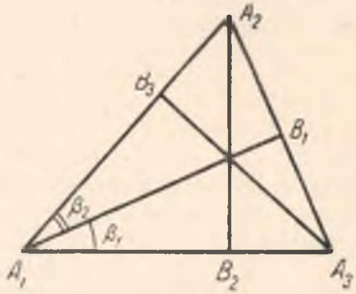
Фараз қилайлик, $A_1A_2A_3$ учбурчакда A_1A_2, A_2A_3, A_1A_3 томонларнинг нормаль тенгламалари

$$\varphi_1=0,\ \varphi_2=0,\ \varphi_3=0$$

бўлсин (шакл 50). Агар A_1B_1 баландликнинг A_1A_3 ва A_1A_2



Шакл 49.



Шакл 50.

томонлар билан ташкил этган бурчаклари β_1 ва β_2 фараз қилинса, A_1B_1 баландликнинг тенгламаси

$$\varphi_2-k\varphi_3=0$$

бўлади, бунда

$$k=\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}.$$

Шаклга мувофиқ, $A_1B_1A_3$ ва $A_1A_2B_1$ учбурчакларда:

$$\sin\beta_1=\cos A_3,$$

$$\sin\beta_2=\cos A_2,$$

шунинг учун A_1B_1 баландликнинг тенгламаси

$$\varphi_2-\frac{\cos A_3}{\cos A_2}\varphi_3=0 \qquad (1)$$

бўлади. Шунга ўхшаш A_2B_2 ва A_3B_3 баландликларнинг тенгламалари

$$\varphi_3-\frac{\cos A_1}{\cos A_3}\varphi_1=0, \qquad (2)$$

$$Ax + By + C = 0$$

булади. Биржинсли координаталарга ўтиш учун x ва y ни $\frac{x}{t}$ ва $\frac{y}{t}$ нисбатлар билан алмаштирамиз:

$$A\frac{x}{t} + B\frac{y}{t} + C = 0,$$

ёки

$$Ax + By + Ct = 0$$

тўғри чизиқнинг биржинсли координаталардаги тенгламаси булади. Тенгламанинг ўзи булса x, y, t га нисбатан биржинсли.

Энди биржинсли координаталардан ҳар бирини айрим ҳолда нолга тенглаб, ундан ҳосил булган тенгламаларнинг геометрик маъноларини текшириб кўрамиз. Маълумки $x = 0$ тенглама y ўқини ва $y = 0$ тенглама x ўқини ифода қилади. Декарт координаталарига ўтишда $t = 1$ булиши керак эди. Шунинг учун $t = 0$ тенглама декарт координаталарида $1 = 0$ га айланади. Бу эса чексиз узоқлашган тўғри чизиқнинг тенгламаси эди (§ 19). Демак, биржинсли координата ўқларидан иккитаси аввалги x ва y ўқлари булса, учинчиси чексиз узоқлашган тўғри чизиқдан иборат.

Олтинчи боб

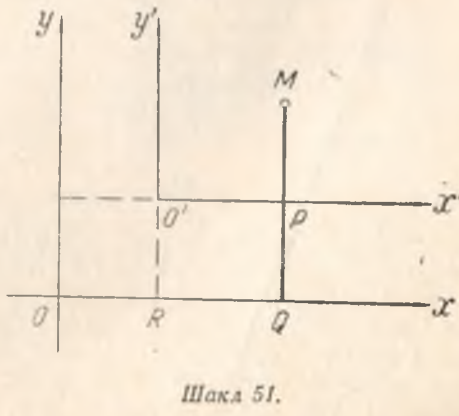
БАЪЗИ АЛМАШТИРИШЛАР

корхзимик

§ 33. ТЎҒРИБУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

Баъзи геометрик масалаларни текширишда бир-бирига нисбатан маълум муносабатда булган бир координаталар системасидан бошқа системага ўтишга тўғри келади. Чизиқ тенгламасининг кўриниши умуман у чизиқнинг координаталар системасига нисбатан ўрнига боғлиқдир. Шунинг учун бир координаталар системасида тузилган чизиқ тенгламасининг кўриниши иккинчи координаталар системасида умуман бошқача бўлади.

Координаталар алмаштириш натижасида берилган тенгламанинг кўриниши қандай ўзгаришини билиш учун нуқтанинг янги ва эски системаларга нисбатан координаталари орасидаги муносабатларни билишга тўғри келади. Бундай муносабатлар **координаталар алмаштириш формулалари** дейилади.



Шакл 51.

Тўғрибурчакли координаталарни алмаштиришда асосан уч ҳол булиб, улар қуйидагилардан иборатдир:

Фараз қилайлик, M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталар (x, y) ва янги системага нисбатан координаталари (x', y') бўлсин, яъни

$$OP = x,\ MP = y;\ ON = x',\ MN = y'. \tag{4}$$

N нуқтадан координата ўқларига параллель қилиб, NR ва NQ чизиқларни ўтказамиз. Шаклга мувофиқ:

$$\left.\begin{aligned} x &= OP = OQ - PQ = OQ - RN, \\ y &= MP = RP + RM = NQ + RM. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Тўғрибурчакли OQN учбурчакда:

$$\left.\begin{aligned} OQ &= ON\cos\alpha = x'\cos\alpha, \\ NQ &= ON\sin\alpha = x'\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Тўғрибурчакли MRN учбурчакнинг RMN бурчаги $NOQ = \alpha$ бурчакка тенг бўлади, чунки уларнинг томонлари бир-бирига перпендикуляр. Шунинг учун MRN учбурчакда:

$$\left.\begin{aligned} MR &= MN\cos\alpha = y'\cos\alpha, \\ RN &= MN\sin\alpha = y'\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(6) ва (7) ни (5) га қўйсак, қуйидаги формулалар келиб чиқади:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned}} \tag{8}$$

Иккинчи ҳол формулалари шулардан иборат.

Эслатма. Қурилган иккинчи ҳолда: янги $x'Oy'$ система — эски xOy системани (ёки Ox ўқини) координаталар бошида мусбат йўналишда α бурчакка айлантиришдан ҳосил бўлади. Бу ҳолда Ox' ўқи қайтиб аввалги ўрнини олганда, яъни Ox билан бирлашганда, Oy' ўқи Oy ўқи билан бирлашади.

Агар янги $x'Oy'$ системанинг xOy системага нисбатан ўрни шундай бўлсаки, Ox ва Ox' ўқлар бирлашганда Oy ва Oy' ўқларнинг йўналишлари қарама-қарши бўлиб қолса, бу ҳолда (8) формулаларда y' ни $(-y')$ билан алмаштириб, уларнинг ўрнига

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha - y'\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

формулаларни олишга тўғри келади. Бироқ координаталар алмаштириш билан боғланган масалаларни текшириш содда

1- *ҳол.* Иккала системанинг бошлари турлича ва ўқларининг йўналишлари бир хил.

Эски система xOy ва янги система $x'O'y'$ бўлсин (шакл 51). Янги системанинг эски системага нисбатан ўрни аниқ бўлиши учун, янги система бошининг эски системага нисбатан координаталари маълум бўлса кифоя. Фараз қилайлик, янги системанинг боши эски системага нисбатан (a, b) нуқтада бўлсин, яъни

$$OR = a, \; RO' = b. \qquad (1)$$

Фараз қилайлик, текисликда бирор M нуқта берилган бўлиб, унинг координаталари эски системага нисбатан (x, y) ва янги системага нисбатан (x', y') бўлсин, яъни

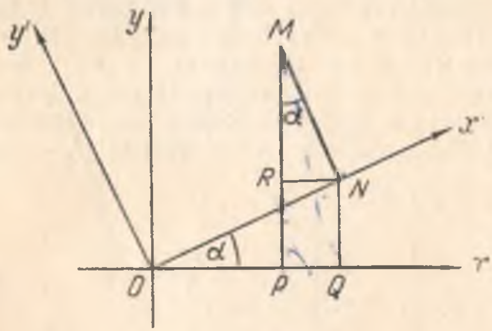
$$OQ = x, \; MQ = y; \; O'P = x', \; MP = y'. \qquad (2)$$

Шаклга мувофиқ

$$OQ = OR + RQ = OR + O'P,$$
$$MQ = MP + PQ = MP + O'R,$$

ёки (1) ва (2) га асосан бундай формула келиб чиқади:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' + a \\ y &= y' + b \end{aligned}} \qquad (3)$$



Шакл 52.

Биринчи ҳол формулалари шулардан иборат. Бу формулаларнинг чиқарилишига ва 51-шаклга қараганда, координаталар системалари қийшиқбурчакли бўлган ҳолда ҳам улар ўз кучини сақлайди.

2- *ҳол.* Иккала системанинг бошлари умумий ва ўқларининг йўналишлари турлича.

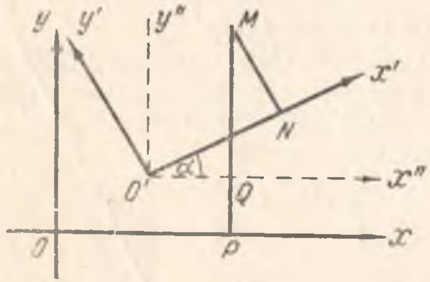
Эски координаталар системаси xOy ва янгиси $x'Oy'$ бўлсин (шакл 52). Иккала абсцисса ўқлари орасидаги $x'Ox$ бурчак α бўлсин. Янги системанинг эски системага нисбатан ўрни аниқ бўлиши учун ҳалиги α бурчак маълум бўлса кифоя. Бу бурчакни берилган фараз қилиб, текисликдаги бирор M нуқтанинг иккала системага нисбатан координаталари орасидаги муносабатларни топамиз.

булиши учун, биз келгусида (8) формулаларни асос қилиб оламиз.

3- *ҳол*. Иккала системанинг бошлари ва ўқларининг йуналишлари турлича.

Фараз қилайлик, xOy эски система ва $x'O'y'$ янги система булсин. Янги системанинг бошидан эски системанинг уқларига параллель қилиб $O'x''$ ва $O'\ y''$ чизиқларни утказамиз (шакл 53). Бунинг натижасида учинчи (ёрдамчи) $x''O'y''$ система ҳосил булади.

Текисликдаги бирор M нуқтанинг эски xOy системага нисбатан координаталарини (x, y), янги $x'O'y'$ системага нисбатан координаталарини (x', y') ва ёрдамчи $x''O'y''$ системага нисбатан координаталарини (x'', y'') фараз қиламиз. Янги система бошининг эски системага нисбатан координаталари (a, b) булсин. Бу ҳолда (3) формулаларга мувофиқ



Шакл 53.

$$\left.\begin{aligned} x &= x'' + a, \\ y &= y'' + b \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Шунинг билан биз эски xOy системадан ёрдамчи $x''O'y''$ системага ўтдик. Энди ёрдамчи системадан янги $x'O'y'$ системага ўтамиз, (8) формулага мувофиқ:

$$x'' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y'' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

ёки булар (9) га қуйилса, биз излаган формулалар келиб чиқади:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b \end{aligned}} \qquad (10)$$

Юқорида чиқарилган (3) ва (8) формулалар (10) нинг хусусий ҳолларидан иборат. Ҳақиқатда $\alpha = 0$ булганда янги система ўқларининг йуналишлари эски системанинг ўқларига параллель бўлади ва бу ҳолда $\cos\alpha = 1$ ва $\sin\alpha = 0$. Шунинг учун бу ҳолда (10) формулаларнинг куриниши

$$x = x' + a,$$
$$y = y' + b,$$

яъни (3) формулалар ҳосил булади. Агар янги системанинг боши эски системанинг бошида бўлса, $a = b = 0$ бўлади ва (10) дан (8) формулалар ҳосил булади.

Мисол. Чизиқнинг ушбу тенгламаси берилган:

$$x^2 - y^2 = 2a(x - y + a).$$

$M(a, a)$ нуқтани янги системанинг боши фараз қилиб, янги ўқлар учун координат бурчакларининг биссектрисаларига параллель бўлган чизиқларни қабул қилсак, тенгламанинг кўриниши қандай бўлади?

Бу мисолда: янги система бошининг эски системага нисбатан координаталари (a, a) ва иккала системанинг абсцисса ўқлари орасидаги бурчак $\alpha = 45°$ бўлади (3- ҳол). Шунинг учун (10) формула бўйича:

$$x = x_1 \cos 45° - y_1 \sin 45° + a = \frac{1}{2} x_1 \sqrt{2} - \frac{1}{2} y_1 \sqrt{2} + a,$$

$$y = x_1 \sin 45° + y_1 \cos 45° + a = \frac{1}{2} x_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} y_1 \sqrt{2} + a,$$

ёки булар берилган тенгламага қўйилса:

$$\left(\frac{1}{2} x_1 \sqrt{2} - \frac{1}{2} y_1 \sqrt{2} + a\right)^2 - \left(\frac{1}{2} x_1 \sqrt{2} + \frac{1}{2} y_1 \sqrt{2} + a\right)^2 =$$
$$= 2a(-y_1 \sqrt{2} + a),$$

ёки

$$(x_1 \sqrt{2} a)(-y_1 \sqrt{2}) = 2a(-y_1 \sqrt{2} + a)$$

ёки

$$x_1 y_1 = -a^2.$$

§ 34*. ҚИЙШИҚБУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

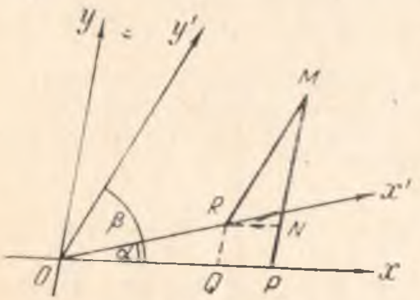
Координаталар системаларининг бошлари турлича ва ўқларининг йўналишлари бир хил бўлган ҳолда алмаштириш формулаларининг тўғрибурчакли ва қийшиқбурчакли системаларда бир хил бўлиши тўғрисида юқорида сўз бўлган эди ва бу ҳолда формулаларнинг кўриниши

$$x = x' + a, \quad y = y' + b$$

булган эди. Бу формулаларда (x, y) нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари, (x', y') — янги системага нисбатан координаталари ва (a, b) — янги координаталар бошининг эски системага нисбатан координаталари. Шунинг учун бу ерда қуйидаги икки ҳол устида тўхташга тўғри келади:

2- *хол*. Иккала системанинг бошлари умумий ва ўқларининг йўналишлари турлича.

1. Фараз қилайлик, xOy қийшиқбурчакли эски система, $x'Oy'$ қийшиқбурчакли янги система бўлсин; эски системанинг координат бурчаги θ, иккала абсцисса ўқлари орасидаги бурчак α ва эски системанинг абсцисса ўқи билан янги системанинг ордината ўқи орасидаги бурчак β бўлсин, яъни



Шакл 54.

$$\angle xOy = \theta, \ \angle x'Ox = \alpha, \ \angle y'Ox = \beta;$$

булар берилган ҳолда иккала системанинг бир-бирига нисбатан урни аниқ бўлади (шакл 54). Шаклга мувофиқ:

$$\angle yOx' = \theta - \alpha,$$
$$\angle yOy' = \theta - \beta.$$

Текисликда бирор M нуқтани олиб, у нуқтадан Oy ва Oy' ўқларига параллель чизиқлар ўтказамиз. Бу ҳолда:

$$OP = x, \ MP = y, \ OR = x', \ MR = y'. \quad (1)$$

R нуқтадан Ox ва Oy ўқларига параллель қилиб RN ва RQ чизиқларни ўтказамиз. Шаклга мувофиқ:

$$\left.\begin{aligned} x &= OP = OQ + RN, \\ y &= MP = RQ + MN. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Шаклдаги ROQ учбурчакда:

$$\angle ROQ = \alpha, \ \angle OQR = \pi - \theta, \ \angle ORQ = \theta - \alpha;$$

MRN учбурчакда:

$$\angle MRN = \beta, \ \angle RNM = \pi - \theta, \ \angle RMN = \theta - \beta.$$

Шунинг учун ROQ учбурчакда:

$$\frac{RQ}{OR} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\pi - \theta)} \text{ ва } \frac{OQ}{OR} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin(\pi - \theta)},$$

булардан:

$$RQ = OR\frac{\sin\alpha}{\sin(\pi-\theta)},\ OQ = OR\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\pi-\theta)}. \quad (3)$$

Шунга ўхшаш, MRN учбурчакда:

$$\frac{MN}{MR} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\theta)} \text{ ва } \frac{RN}{MR} = \frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\pi-\theta)}, \quad (4)$$

булардан:

$$MN = MR\frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\theta)},\quad RN = MR\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin(\pi-\theta)}. \quad (5)$$

Буларни (2) га қўйиб, (1) эътиборга олинса, биз излаган ушбу формулалар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta},\\ y &= \frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

2. Координаталар системаларидан бири ёки иккаласи тўғрибурчакли бўлганда (6) формулалар бирмунча соддалашади. Масалан, эски система тўғрибурчакли бўлса, бу ҳолда: $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\sin\theta = 1$, $\sin(\theta-\alpha) = \cos\alpha$ ва $\sin(\theta-\beta) = \cos\beta$ бўлгани учун (6) формулаларниит кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\beta,\\ y &= x'\sin\alpha + y'\sin\beta, \end{aligned} \quad (7)$$

Агар янги система тўғрибурчакли бўлса, бу ҳолда $\beta = \frac{\pi}{2}+\alpha$, $\sin\beta = \cos\alpha$ ва $\sin(\theta-\beta) = -\cos(\theta-\alpha)$ бўлгани учун (6) формулаларнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x'\sin(\theta-\alpha)-y'\cos(\theta-\alpha)}{\sin\theta},\\ y &= \frac{x'\sin\alpha+y'\cos\alpha}{\sin\theta}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

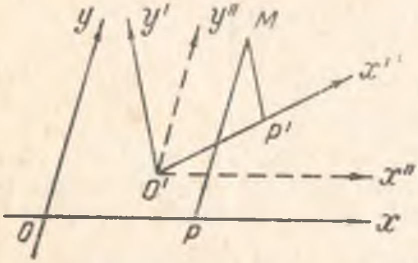
Агар бунинг устига эски система ҳам тўғрибурчакли бўлса (демак, иккала система ҳам тўғрибурчакли бўлса), бу ҳолда $\theta = \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун (8) нинг кўриниши қуйидагича булади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

3- *ҳол.* Иккала системанинг бошлари ва ўқларининг йўналишлари турлича.

1. Фараз қилайлик, xOy эски система в $x'O'y'$ янги система бўлсин. Янги системанинг бошидан эски системанинг ўқларига параллель қилиб $O'x''$ ва $O'y''$ чизиқларни ўтказамиз (шакл 55). Бунинг натижасида ёрдамчи $x''O'y''$ система ҳосил булади.

Текисликдаги бирор M нуқтанинг эски xOy системага нисбатан координаталарини (x, y), янги $x'O'y'$ системага нисбатан координаталарини (x', y') ва ёрдамчи $x''O'y''$ системага нисбатан координаталарини (x'', y'') фараз қиламиз. Янги система бошининг эски системага нисбатан координаталари (a, b) бўлсин. Бу ҳолда (3) формулага мувофиқ:



Шакл 55.

$$x = x'' + a,$$
$$y = y'' + b.$$

Шунинг билан биз эски xOy системадан ёрдамчи $x''O'y''$ системага ўтдик. Энди ёрдамчи системадан янги $x'O'y'$ системага ўтамиз. (6) формулаларга мувофиқ:

$$x'' = \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta},$$

$$y'' = \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}.$$

Натижада x'' ва y'' нинг ифодаларини аввалги (1- ҳол) формулаларга қўйсак, ушбу умумий формулалар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta} + a, \\ y &= \frac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta} + b. \end{aligned}\right| \tag{10}$$

Бу формулалар энг умумий булиб, юқорида чиқарилган ҳамма алмаштириш формулалари буларнинг хусусий ҳоли бўлади.

2. (10) формуладаги x' ва y' нинг коэффициентлари аниқ ўзгармас миқдордан иборат; уларни k_1, l_1, k_2, l_2 фараз қилиб, у формулаларни умуман

$$\left.\begin{aligned} x &= k_1x' + l_1y' + a, \\ y &= k_2x' + l_2y' + b \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

шаклда ёзиш мумкин. Бу — ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали ифодалардан иборат. Шунинг учун туғричизиқли координаталарни алмаштиришда нуқтанинг бир системага нисбатан координаталари иккинчи системага нисбатан координаталари орқали бириичи даражали купҳад билан ифода қилинади.

Энди фараз қилайлик, бирор тўғричизиқли координаталар системасига нисбатан бирор алгебраик чизиқнинг тенгламаси $f(x, y) = 0$ бўлсин. Координаталар системасини алмаштирганда бу тенгламанинг шакли ўзгарса-да, лекин унинг даражаси ўзгармайди, чунки бундаги x ва y нинг ўрнига x' ва y' га нисбатан биринчи даражали ифодаларни қуйишга туғри келади ва шунинг учун ҳосил булган янги $\varphi(x', y') = 0$ тенгламанинг даражаси $f(x, y) = 0$ тенгламанинг даражаси каби булади. Шунинг билан бир туғричизиқли координаталар системасидан иккинчи туғричизиқли координаталар системасига утганда алгебраик тенгламанинг даражаси ўзгармайди.

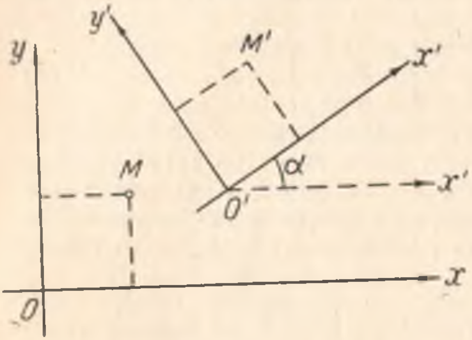
§ 35. КОНГРУЭНТ ВА АФФИН АЛМАШТИРИШЛАР ТЎҒРИСИДА ТУШУНЧА

1. Ўтган параграфда чиқарилган координаталар алмаштириш формулаларига яна бошқача геометрик маъно бериш мумкин. Кўриладиган масалани текшириш содда булиши учун, координаталар системаларини тўғрибурчакли деб фараз қиламиз.

Фараз қилайлик, Π ва Π' — устма-уст қўйилган иккита текисликдан биринчиси қузғалмас ва иккинчиси қўзғала оладиган булсин (шакл 56). xOy ва $x'Oy'$ координаталар системалари Π ва Π' текисликларда булиб, улар (текислик қўзғалгунча) устма-уст қуйилган деб фараз қилинади.

$M(x, y)$ — иккинчи Π' текислик қузғалгунча бирор нуқта булсин. Энди, агар Π' текислик аввалги Π текислик буйича силжитилса, $x'O'y'$ системанинг ўрни янги бўлади; $M(x, y)$ нуқтанинг янги ўрни M' бўлсин.

M' нуқтанинг xOy системага нисбатан координаталарини x', y' фараз қилиб, булар билан аввалги x, y координаталар орасидаги муносабатни топамиз. Ўтган 32- параграфда чиқарилган (10) формулаларга мувофиқ



Шакл 56.

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a, \\ y' &= y\sin\alpha + y\cos\alpha + b; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

чунки бу ерда x', y' — „эски" ва x, y — „янги" координаталар ролини ўйнайди.

Бу формулалар, ўтган 32-параграфда чиқарилган (10) формулаларга ўхшаса-да, бироқ бошқа маънога эгадир, чунки: (10) формулаларда ёлғиз бир нуқтанинг икки системага нисбатан координаталари ифода қилингани ҳолда, (1) формулаларда икки: M ва M' нуқталарнинг ёлғиз бир системага нисбатан координаталари ифода қилинган.

Шунинг билан: Π текисликдаги ҳар бир M нуқтага Π' текисликда аниқ M' нуқта мос келади ва аксинча Π текисликдаги ҳар бир M' нуқтага Π текисликда аниқ M нуқта мос келади. Шунга ўхшаш, тасвир қилинган ҳаракат натижасида Π текисликдаги ҳар бир S шаклга Π' текисликда S' шакл мос келади ва уларни устма-уст қўйганда, ҳамма мос нуқталари билан бир-бирини қоплайди. Бундай шакллар **к о н г р у э н т** дейилади ва шунинг учун тасвир қилинган алмаштириш **к о н г р у э н т а л м а ш т и р и ш** дейилади.

2. Юқорида кўрсатилган конгруэнт алмаштиришни яна бирмунча умумлаштириш мумкин. Фараз қилайлик, xOy ва $x'O'y'$ ихтиёрий декарт системалари Π ва Π' текисликларда бўлсин. Агар Π текисликдаги ҳар бир M нуқтага Π' текисликда шундай M' нуқта мос келсаки, бу нуқталарнинг декарт координаталари ўзаро ушбу

$$\left.\begin{aligned} x' &= k_1x + l_1y + a, \\ y' &= k_2x + l_2y + b \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

чизиқли муносабатлар билан богланган бўлса, бундай алмаштириш **аффин** алмаштириш дейилади; бу ерда x, y ва x', y': Π ва Π' текисликлардаги M ва M' нуқталарнинг бирор декарт системаларига нисбатан координаталари; k_1, l_1, k_2, l_2 a, b коэффициентларни исталганча танлаб олиш мумкин.

Аксинча, Π' текисликдаги ҳар бир M' (x', y') нуқтага Π текисликда M (x, y) нуқта мос келиши учун

$$\begin{vmatrix} k_1, & l_1 \\ k_2, & l_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3}$$

бўлиши шарт. Ҳақиқатда, бу ҳолда, яъни (3) шарт таъмин этилганда (2) формулалардан x, y ни x', y' воситаси билан аниқлаш мумкин. Ечиш натижаси ҳамон (2) кўринишда бўлади, чунки x, y ва x', y' координаталар ўзаро чизиқли ифодалар билан боғланган:

$$\left.\begin{aligned} x &= k_1'x' + l_1'y + a', \\ y &= k_2'x' + l_2'y + b'. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Шунинг билан (3) шарт таъмин этилганда Π ва Π' текисликлар орасида ўзаро (биридан иккинчисига ўтиладиган) бир қийматли мослик ҳосил бўлади.

(2) ва (4) алмаштириш формулаларининг геометрик маъносини аниқлаш мақсади билан (2) да $x' = y' = 0$ фараз қиламиз. Бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} k_1x + l_1y + a &= 0, \\ k_2x + l_2y + b &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Демак, Π' текисликдаги $x' = 0$ ва $y' = 0$ координата ўқла рига Π текисликда (5) тўғри чизиқлар мос келади. Шунга ўхшаш агар (4) формулаларда $x = y = 0$ фараз қилинса

$$\begin{aligned} k_1'x' + l_1'y' + a' &= 0, \\ k_2x' + l_2'y' + b' &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

бўлади ва бу ҳолда Π текисликдаги $x = 0$ ва $y = 0$ координата ўқларига Π' текисликда (6) тўгри чизиқлар мос келади.

Энди аффин координаталарининг геометрик моҳияти тўғрисида тушунча бериб ўтамиз. Бунинг учун бирор xOy координаталар системасида координаталари ўзаро тенг бўлган бирор E (1, 1) нуқта олиб, бу нуқтанинг координаталарида OE_1EE_2 ромб ясаймиз (шакл 57).

Агар янги $x'O'y'$ координаталар системасида $O'E_1'$ ва $O'E_2'$ кесмаларни масштаб бирлиги қабул қилинса, M' нуқтанинг x' ва y' координаталари:

$$x' = \frac{O'M_1'}{O'E_1'}, \quad y' = \frac{O'M_2'}{O'E_2'}$$

бўлади. Аффин алмаштиришда эски ва янги координаталарни ифода қилган кесмаларнинг нисбатлари тенг, яъни $x' = x$, $y' = y$.

Шунинг билан аффин алмаштиришда xOy системадаги ҳар бир M нуқтанинг координаталарида ясалган OM_1MM_2 параллелограм — томонлари ва Ox, Oy орасидаги координат бурчаги тегишли равишда ўзгариб, $O'x'y'$ системада ўзига мос $O'M_1'M'M_2'$ параллелограмга айланади. Умуман айтганда, янги $x'O'y'$ системада ўқлардаги $O'E_1'$ ва $O'E_2'$ масштаблар турлича. Бундай координаталар системаси аффин система дейилади. Янги, аффин система умумлашган бўлиб, одатдаги декарт системаси эса, ўқлардаги масштаблари ўзаро тенг бўлган аффин системанинг хусусий ҳолидан иборатдир.

Энди аффин алмаштиришнинг баъзи муҳим хоссалари тўғрисида тушунча бериб ўтамиз. Фараз қилайлик,

$$mx + ny + p = 0 \tag{8}$$

Π' текисликдаги бирор тўғри чизиқ бўлсин. Бу тўғри чизиққа Π текисликда яна тўғри чизиқ мос келади. Ҳақиқатда, (2) га асосан

$$m\,(k_1x + l_1y + a) + n\,(k_2x + l_2y + b) + p = 0,$$

ёки

$$(mk_1 + nk_2)\,x + (ml_1 + nl_2)\,y + (am + bn + p) = 0, \tag{9}$$

яъни тўғри чизиқ.

Бунга қараганда Π ва Π' текисликларда параллель тўғри чизиқларга — параллель тўғри чизиқлар мос келади (буни айнан ҳалиги йўл билан кўрсатиш мумкин).

Энди фараз қилайлик, учта

$$M_1\,(x_1,\ y_1),\ M_2\,(x_2,\ y_2),\ M_3\,(x_3,\ y_3)$$

нуқталар Π текисликда бир тўғри чизиқда бўлсин ва бу нуқталарга Π' текисликда

$$M_1'\,(x_1',\ y_1'),\ M_2'\,(x_2',\ y_2'),\ M_3'\,(x_3',\ y_3')$$

нуқталар мос келсин. Аффин алмаштиришнинг хоссаларидан бири шундаки,

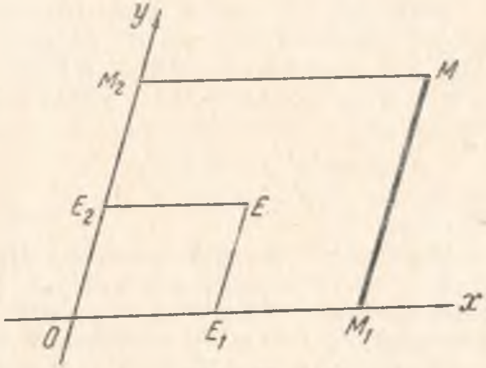
139

...лиқ, M исталганча бирор нуқта бўлсин. Бу ...дината ўқларига параллель қилиб MM_1 ва ... OM_1MM_2 параллелограм ҳосил бўлади. Бу ...нинг x ва y коордннаталарини

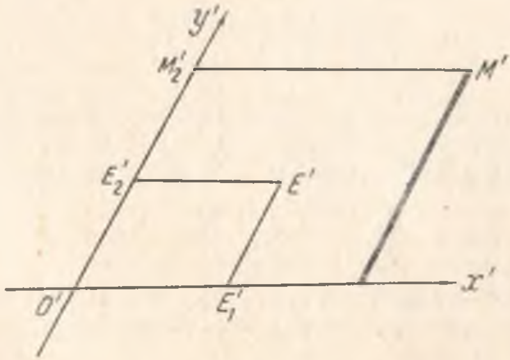
$$x = \frac{OM_1}{OE_1}, \; y = \frac{OM_2}{OE_2} \tag{7}$$

тарзида ифода қилиш мумкин.

Энди фараз қилайлик, аффин алмаштиришда: Ox ва Oy координата ўқларига $O'x'$ ва $O'y'$ ўқлар, E ва M нуқталар-



Шакл 57.



Шакл 57а.

га E' ва M' нуқталар мос келсин. Бу ҳолда OE_1EE_2 ва OM_1MM_2 параллелограмларга $O'E_1'E'E_2'$ ва $O'M_1'M'M_2'$ параллелограмлар мос келади.

153. Координаталар алмаштиришнинг биринчи ҳолида иккала системанинг бир-бирига нисбатан ўринлари аниқ бўлиши учун нималар берилиши керак? Иккинчи ҳолида-чи? Учинчи ҳолида-чи? (Иккала система тўғрибурчакли.)

154. Тўғрибурчакли координаталар системаларининг биридан иккинчисига ўтганда тўғри чизиқнинг тартиби ўзгарадими?

155. Координата ўқларининг йўналишларини сақлаб координаталар боши $(-3, 2)$ нуқтага келтирилса, $2x - y + 1 = 0$ тенгламанинг кўриниши қандай ўзгаради?

156. Нуқтанинг координаталари $(-3, 5)$. Агар координата ўқларининг йўналишларини сақлаб, координаталар бошини: 1) $(2, 3)$, 2) $(0, 4)$ ва 3) $(-1, -3)$ нуқтага келтирилса, у нуқтанинг координаталари қандай бўлади?

157. Тўғри чизиқнинг тенгламаси берилган: $2x + 3y - 5 = 0$. Агар координаталар боши $(2, 1)$ нуқтага келтирилса (ўқларнинг йўналишларини сақлаб) тенгламанинг кўриниши қандай бўлади?

158. Чизиқнинг тенгламаси берилган: $x^2 + 2x - y + 3 = 0$. Агар ўқларнинг йўналишларини сақлаб, координаталар боши $(-1, 2)$ нуқтага келтирилса, тенгламанинг кўриниши қандай бўлади?

159. Чизиқнинг тенгламаси берилган: $x^2 + y^2 + 14x - 10y + 49 = 0$. Агар ўқларнинг йўналишларини сақлаб, координаталар боши $(-7, 5)$ нуқтага келтирилса, тенгламанинг кўриниши қандай бўлади?

160. Тўғрибурчакли координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси берилган: $x^2 - y^2 = 4$. Система координаталар бошида шундай айлантирилганки, ҳосил бўлган янги системанинг абсцисса ўқи эски системанинг абсцисса ўқи билан $45°$ бурчак ташкил қилади. Берилган тенгламанинг кўриниши қандай ўзгарди?

161. Тўғрибурчакли координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси берилган: $x^2 + 2xy + y^2 + 1 = 0$. Координата ўқларини қандай бурчакка айлантирилса, тенгламада x ва y кўпайтмаси бўлган ҳади йўқ бўлади?

162. Тўғрибурчакли координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси берилган: $x^4 + y^2 = a^2$. Агар абсцисса ўқи ордината ўқига ва ордината ўқи абсцисса ўқига алмаштирилса, тенгламанинг кўриниши қандай бўлади?

163. Тўғрибурчакли координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси берилган: $y^2 = 4x$. Тўғрибурчакли янги система бошининг аввалги (эски) системага нисбатан координаталари

$$\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{M'_1M'_3}{M'_2M'_3}. \tag{10}$$

Бу каби нисбатлар „уч нуқтанинг оддий нисбати“ дейилади. Бунинг билан биз 4- параграфда учрашган эдик. Демак, алмаштириш натижасида учта нуқтанинг оддий нисбати ўзгармайди.

Буни исбот қилиш учун (10) нисбатлардан биринчисини олиб, уни берилган нуқталарнинг координаталари ёрдами билан ифода қиламиз:

$$\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \lambda \tag{11}$$

ёки, агар иккинчи нисбатнинг сурат ва махражини k_1 га ва учинчи нисбатнинг сурат ва махражини l_1 га кўпайтириб, сўнгра улардан янги пропорция ҳосил қилинса:

$$\frac{M_1M_2}{M_2M_3} = \frac{k_1(x_3 - x_1) + l_1(y_3 - y_1)}{k_1(x_3 - x_2) + l_1(y_3 - y_2)} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \lambda. \tag{12}$$

Энди (10) даги иккинчи нисбат Π' текисликдаги нуқталарнинг ёрдами билан ифода қилинса

$$\frac{M'_1M'_3}{M'_2M'_3} = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2},$$

ёки (2) га асосан

$$\frac{M'_1M'_3}{M'_2M'_3} = \frac{k_1x_3 + l_1y_3 + a - (k_1x_1 + l_1y_1 + a)}{k_1x_3 + l_1y_3 + a - (k_1x_2 + l_1y_2 + a)},$$

ёки

$$\frac{M'_1M'_3}{M'_2M'_3} = \frac{k_1(x_3 - x_1) + l_1(y_3 - y_1)}{k_1(x_3 - x_2) + l_1(y_3 - y_2)} = \lambda. \tag{13}$$

(12) билан (13) ни ўзаро солиштириб қараганда (10) пропорциянинг тўғрилиги исбот бўлади.

Аффин алмаштириш (2) формулаларида олтита: k_1, k_2, l_1, l_2, a, b параметрлари бўлиб, улар уч жуфт мос нуқталар билан аниқланиши мумкин; берилган нуқталарнинг координаталари (2) формулаларга қўйилса, ҳалиги параметрларни аниқлаш учун олтита тенглама ҳосил бўлади.

Саволлар ва масалалар

152. Декарт координаталарини алмаштиришда қандай асосий ҳоллар бор?

… а ўқи эски система-
… к ташкил қилса, чизиқ
Бу каби … и қандай бўлади?
лади. Бу … рдинаталар бошида 45° ай-
мак… … ишн қандай бўлади?
… динаталар системасида чизиқ-
… $y^2 - 3x^2 + 3 = 0$. Бу чизиқнинг
… истемага нисбатан тенгламаси ту-
… са ўқи эски системанинг абсцисса
… системанинг) ордината ўқи эски сис-
… билан 120° бурчак ташкил қилган
б…

… акли координаталар системасида чизиқ-
нинг т… берилган: $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 1 = 0$. Бу чизиқнинг н… системага нисбатан тенгламаси тузилсинки, у системани… абсцисса ўқи ва ордината ўқи эски система координат бурчагининг биссектрисаси бўлсин.

167. Конгруэнт алмаштириш деб нимага айтилади? Конгруэнт шакллар деб қандай шаклларга айтилади?

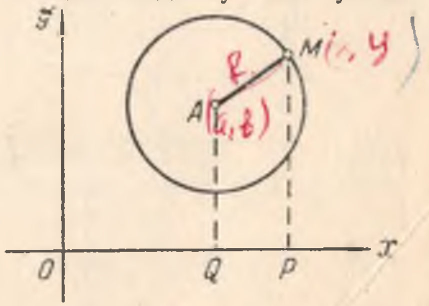
168. Текисликдаги аффин алмаштиришни тасвир қилинг. Бундай алмаштиришнинг асосий хоссаларини айтиб беринг.

Еттинчи боб

АЙЛАНА

§ 36. АЙЛАНАНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

1. Китобнинг учинчи бобида доира айланасининг ёки қисқача қилиб айтганда, *айлананинг* баъзи бир энг оддий тенгламалари билан иш кўрган эдик. Энди бу тема устида махсус тўхташни лозим топамиз.



Шакл 58.

Доира айланаси ёки *айлана* деб, ҳамма нуқталари бир нуқтадан тенг узоқликда бўлган геометрик ўрнига айтилади. Бу таърифга асосланиб айлананинг тенгламасини тузиш мумкин. Фараз қилайлик, координаталар системаси тўғрибурчакли бўлсин; айлананинг радиуси R ва маркази $A(a, b)$ нуқтада бўлсин (шакл 58). Айланадаги исталган M нуқтанинг координаталари x ва y бўлсин. Айлананинг асосий хоссасига мувофиқ:

$$AM = R$$

$A(a, b)$ ва $M(x, y)$ нуқталар орасидаги масофа

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

бўлгани учун

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5)$$

булади (шаклдаги 6-айлана).

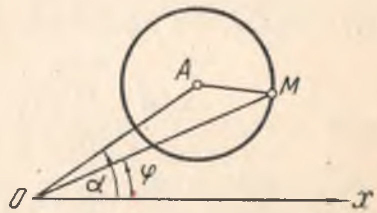
Қавсларни очганда (1) тенгламанинг кўриниши қуйидагича булади:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \qquad (6)$$

Бу тенгламада учта параметр бор: a, b ва R. Бу эса айлананинг аниқланиши учун умуман уч шарт кераклигини курсатади. Тенгламанинг ўзи x ва y га нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенгламадан иборат. Демак, айлана иккинчи тартибли чизиқ булади.

2. Энди айлананинг тенгламасини қутб системасида чиқарамиз. Фараз қилайлик, айлананинг радиуси R ва маркази $A(a, \alpha)$ нуқтада булсин. Айланада исталганча $M(r, \varphi)$ нуқта оламиз (шакл 60). Бу ҳолда айлананинг таърифига мувофиқ M қаерда булса-да $AM = R$ бўлгани учун, 9-параграфда чиқарилган (2) формулага асосан:

$$r^2 + a^2 - 2ar\cos(\alpha - \varphi) = R^2. \qquad (7)$$



Шакл 60.

Айланадаги исталган нуқтанинг координаталари орасидаги муносабат шундан иборат. Шунинг учун (7) айлананинг қутб тенгламаси бўлади.

Агар айлананинг маркази қутб ўқида булса, бу ҳолда $\alpha = 0$ бўлгани учун (7) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi = R^2 \qquad (8)$$

Агар бунинг устига айлана қутбдан ўтса, бу ҳолда $R = a$ бўлгани учун, унинг тенгламаси

$$r = 2R\cos\varphi \qquad (9)$$

бўлади.

Агар айлананинг маркази қутбда булса, бу ҳолда унинг тенгламаси $r = R$ булади.

§ 37. АЙЛАНАНИНГ МАРКАЗИНИ ВА РАДИУСИНИ АНИҚЛАШ

1. Юқорида чиқарилган натижага мувофиқ, айлананинг тнегламаси икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик

$$)^2 + (y - b)^2 = R$$

$$(y - b)^2 - R^2 = 0 \qquad (1)$$

)иёрий нуқтаси эди. Шунинг учун
/тенгламаси булади.
ата ўқларига нисбатан урнига қараб,
(1) тенгламанинг куриниши бир-
ан:
маркази абсцисса ўқида булса, у чоқ-
да $b = 0$ у ҳолда (1) тенгламанинг куриниши

$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0 \qquad (2)$$

булади (шакл 59 да 2- айлана);

b) агар айлананинг маркази ордината ўқида булса, у чоқда $a = 0$ булади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг куриниши

$$x^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0 \qquad (3)$$

булади (шаклдаги 3- айлана);

c) агар айлананинг маркази абсцисса ўқида булиб, ўзи ордината ўқига уринма булса, у чоқда $b = 0, a = R$ булади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг куриниши

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0 \qquad (4)$$

булади (шаклдаги 4- айлана);

Шакл 59.

d) агар айлананинг маркази ордината ўқида булиб, ўзи абсцисса ўқига уринма булса, у чоқда $a = 0, \quad b = R$ булади ва бу ҳолда тенгламанинг куриниши

$$x^2 + y^2 - 2by = 0$$

булади (шаклдаги 5- айлана);

e) агар айлананинг маркази координаталар бошида булса, у чоқда: $a = 0$, $b = 0$ булади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг куриниши

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

ёки

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (1)$$

$M(x, y)$ айлананинг ихтиерий нуқтаси эди. Шуниг учун (1) тенглама айлананинг тенгламаси бўлади.

Айлананинг координата ўқларига нисбатан ўрнига қараб, баъзи хусусий ҳолларда (1) тенгламанинг кўриниши бирмунча ўзгаради, масалан:

a) агар айлананинг маркази абсцисса ўқида бўлса, у чоқда $b=0$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

$$(x-a)^2+y^2-R^2=0 \qquad (2)$$

бўлади (шакл 59 да 2- айлана);

b) агар айлананинг маркази ордината ўқида бўлса, у чоқда $a=0$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

$$x^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (3)$$

бўлади (шаклдаги 3- айлана);

c) агар айлананинг маркази абсцисса ўқида бўлиб, ўзи ордината ўқига уринма бўлса, у чоқда $b=0, a=R$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

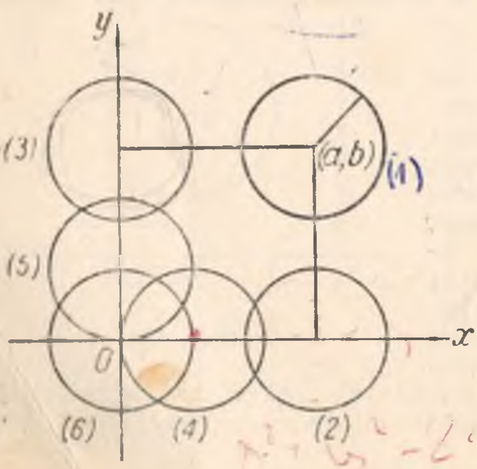
$$x^2+y^2-2ax=0 \qquad (4)$$

бўлади (шаклдаги 4- айлана);

d) агар айлананинг маркази ордината ўқида бўлиб, ўзи абсцисса ўқига уринма бўлса, у чоқда $a=0, \quad b=R$ бўлади ва бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$x^2+y^2-2by=0$$

бўлади (шаклдаги 5- айлана);



Шакл 59.

e) агар айлананинг маркази координаталар бошида бўлса, у чоқда: $a=0$, $b=0$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5)$$

булади (шаклдаги 6-айлана).

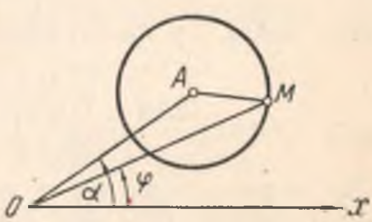
Қавсларни очганда (1) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \qquad (6)$$

Бу тенгламада учта параметр бор: a, b ва R. Бу эса айлананинг аниқланиши учун умуман уч шарт кераклигини кўрсатади. Тенгламанинг ўзи x ва y га нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенгламадан иборат. Демак, айлана иккинчи тартибли чизиқ бўлади.

2. Энди айлананинг тенгламасини қутб системасида чиқарамиз. Фараз қилайлик, айлананинг радиуси R ва маркази $A(a, \alpha)$ нуқтада бўлсин. Айланада исталганча $M(r, \varphi)$ нуқта оламиз (шакл 60). Бу ҳолда айлананинг таърифига мувофиқ M қаерда бўлса-да $AM = R$ бўлгани учун, 9-параграфда чиқарилган (2) формулага асосан:

$$r^2 + a^2 - 2ar\cos(\alpha - \varphi) = R^2. \qquad (7)$$



Шакл 60.

Айланадаги исталган нуқтанинг координаталари орасидаги муносабат шундан иборат. Шунинг учун (7) айлананинг қутб тенгламаси бўлади.

Агар айлананинг маркази қутб ўқида бўлса, бу ҳолда $\alpha = 0$ бўлгани учун (7) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi = R^2 \qquad (8)$$

Агар бунинг устига айлана қутбдан ўтса, бу ҳолда $R = a$ бўлгани учун, унинг тенгламаси

$$r = 2R\cos\varphi \qquad (9)$$

булади.

Агар айлананинг маркази қутбда бўлса, бу ҳолда унинг тенгламаси $r = R$ бўлади.

§ 37. АЙЛАНАНИНГ МАРКАЗИИИ ВА РАДИУСИНИ АНИҚЛАШ

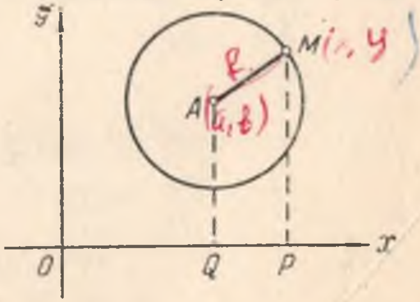
1. Юқорида чиқарилган натижага мувофиқ, айлананинг тнегламаси икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик

Еттинчи боб

АЙЛАНА

§ 36. АЙЛАНАНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

1. Китобнинг учинчи бобида доира айланасининг ёки қисқача қилиб айтганда, айлананинг баъзи бир энг оддий тенгламалари билан иш кўрган эдик. Энди бу тема устида махсус тўхташни лозим топамиз.



Шакл 58.

Доира айланаси ёки **айлана** деб, ҳамма нуқталари бир нуқтадан тенг узоқликда бўлган геометрик ўринга айтилади. Бу таърифга асосланиб айлананинг тенгламасини тузиш мумкин. Фараз қилайлик, координаталар системаси тўғри-бурчакли бўлсин; айлананинг радиуси R ва маркази $A(a, b)$ нуқтада бўлсин (шакл 58). Айланадаги исталган M нуқтанинг координаталари x ва y бўлсин. Айлананинг асосий хоссасига мувофиқ:

$$AM = R$$

$A(a, b)$ ва $M(x, y)$ нуқталар орасидаги масофа

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

бўлгани учун

(1, 0) бўлиб, янги системанинг абсцисса ўқи эски системанинг абсцисса ўқи билан 315° бурчак ташкил қилса, чизиқ тенгламаси янги системага нисбатан қандай бўлади?

164. Координата ўқларини координаталар бошида 45° айлантирганда $x^2 - y^2$ нинг кўриниши қандай бўлади?

165. Тўғрибурчакли координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси берилган: $y^2 - 3x^2 + 3 = 0$. Бу чизиқнинг шундай қийшиқбурчакли системага нисбатан тенгламаси тузилсинки, унинг абсцисса ўқи эски системанинг абсцисса ўқи билан 60° ва (янги системанинг) ордината ўқи эски системанинг абсцисса ўқи билан 120° бурчак ташкил қилган бўлсин.

166. Тўғрибурчакли координаталар системасида чизиқнинг тенгламаси берилган: $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 1 = 0$. Бу чизиқнинг шундай системага нисбатан тенгламаси тузилсинки, у системанинг абсцисса ўқи ва ордината ўқи эски система координат бурчагининг биссектрисаси бўлсин.

167. Конгруэнт алмаштириш деб нимага айтилади? Конгруэнт шакллар деб қандай шаклларга айтилади?

168. Текисликдаги аффин алмаштиришни тасвир қилинг. Бундай алмаштиришнинг асосий хоссаларини айтиб беринг.

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (5)$$

бўлади (шаклдаги 6-айлана).

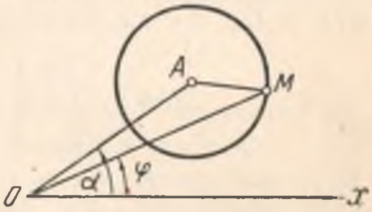
Қавсларнн очганда (1) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \qquad (6)$$

Бу тенгламада учта параметр бор: a, b ва R. Бу эса айлананинг аниқланиши учун умуман уч шарт кераклигини кўрсатади. Тенгламанинг ўзи x ва y га нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенгламадан иборат. Демак, айлаиа иккинчи тартибли чизиқ бўлади.

2. Энди айлананинг тенгламасини қутб системасида чиқарамиз. Фараз қилайлик, айлананинг радиуси R ва маркази $A(a, \alpha)$ нуқтада бўлсин. Айланада исталганча $M(r, \varphi)$ нуқта оламиз (шакл 60). Бу ҳолда айлананинг таърифига мувофиқ M қаерда бўлса-да $AM = R$ бўлгани учун, 9-параграфда чиқарилган (2) формулага асосан:

$$r^2 + a^2 - 2ar\cos(\alpha - \varphi) = R^2. \qquad (7)$$



Шакл 60.

Айланадаги исталган нуқтанинг координаталари орасидаги муносабат шундан иборат. Шунинг учун (7) айлананинг қутб тенгламаси бўлади.

Агар айлананинг маркази қутб ўқида булса, бу ҳолда $\alpha = 0$ бўлгани учун (7) нинг кўриниши қуйидагича булади:

$$r^2 + a^2 - 2ar\cos\varphi = R^2 \qquad (8)$$

Агар бунинг устига айлана қутбдан ўтса, бу ҳолда $R = a$ бўлгаии учун, унинг тенгламаси

$$r = 2R\cos\varphi \qquad (9)$$

бўладн.

Агар айлананинг маркази қутбда бўлса, бу ҳолда унинг тенгламаси $r = R$ бўлади.

§ 37. АЙЛАНАНИНГ МАРКАЗИИИ ВА РАДИУСИНИ АНИҚЛАШ

1. Юқорида чиқарилган натижага мувофиқ, айлананинг тнегламаси икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

ёки

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (1)$$

$M(x, y)$ айлананинг ихтиёрий нуқтаси эди. Шунинг учун (1) тенглама айлананинг тенгламаси бўлади.

Айлананинг координата ўқларига нисбатан ўрнига қараб, баъзи хусусий ҳолларда (1) тенгламанинг кўриниши бирмунча ўзгаради, масалан:

a) агар айлананинг маркази абсцисса ўқида бўлса, у чоқда $b=0$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

$$(x-a)^2+y^2-R^2=0 \qquad (2)$$

бўлади (шакл 59 да 2- айлана);

b) агар айлананинг маркази ордината ўқида бўлса, у чоқда $a=0$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

$$x^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (3)$$

бўлади (шаклдаги 3- айлана);

c) агар айлананинг маркази абсцисса ўқида бўлиб, ўзи ордината ўқига уринма бўлса, у чоқда $b=0, a=R$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

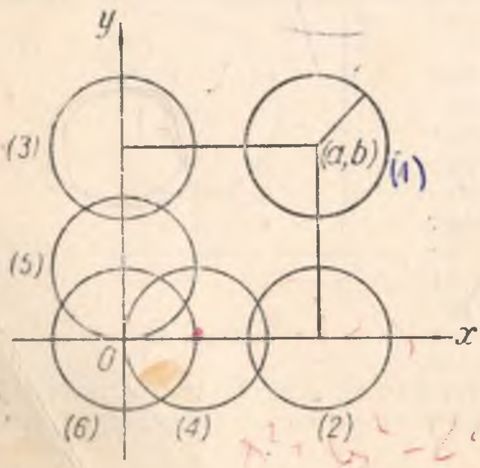
$$x^2+y^2-2ax=0 \qquad (4)$$

бўлади (шаклдаги 4- айлана);

d) агар айлананинг маркази ордината ўқида бўлиб, ўзи абсцисса ўқига уринма бўлса, у чоқда $a=0, \quad b=R$ бўлади ва бу ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$x^2+y^2-2by=0$$

бўлади (шаклдаги 5- айлана);



Шакл 59.

e) агар айлананинг маркази координаталар бошида бўлса, у чоқда: $a=0$, $b=0$ бўлади ва бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши

a ва b учун аниқланган қийматларни (5) га қўйиб, ундан R ни топамиз:

$$\frac{D^2}{4A}+\frac{E^2}{4A}-AR^2=F,$$

ёки

$$D^2+E^2-4A^2R^2-4AF=0,$$
$$4A^2R^2=D^2+E^2-4AF,$$

бундан

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A} \tag{9}$$

R нинг қиймати ҳақиқий бўлмоғи учун

$$D^2+E^2-4AF>0,$$

ёки

$$D^2+E^2>4AF \tag{10}$$

булиши керак. Шу ҳолдагина (6) тенглама ҳақиқий айлананн ифода қилади.

Агарда

$$D^2+E^2=4AF \tag{11}$$

бўлса, $R=0$ булади. Бу ҳолда айлана нуқтадан иборат бўлиб, одатда чексиз кичик айлана дейилади.

Агар

$$D^2+E^2<4AF$$

бўлса, R мавҳум бўлади. Бу ҳолда ҳақиқатда айлана мавжуд бўлмаса-да, лекин умумият нуқтаи назаридан мавҳум айлана дейилади.

Мисол. Айлана ушбу тенглама билан берилган:

$$x^2+y^2-10x+8y+5=0.$$

Айлананинг маркази ва радиуси аниқлансин.

Берилган тенгламани айлананинг умумий тенгламаси билан солиштириб қараганда:

$$A=1,\quad D=-10,\quad E=8,\quad F=5$$

Буларни (8) ва (9) формулаларга қўйсак, изланган сонлар келиб чиқади:

$$a=-\frac{D}{2A}=-\left(-\frac{10}{2\cdot 1}\right)=5,$$

$$b=-\frac{E}{2A}=-\frac{8}{2\cdot 1}=-4,$$

$$R=\frac{\sqrt{D^2+E^2-4AF}}{2A}=\frac{\sqrt{10^2+8^2-4\cdot 5}}{2\cdot 1}=\frac{\sqrt{144}}{2}=6.$$

тенгламадан иборат бўлди. Аксинча, ҳар бир икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик тенглама ўз навбатида бирон айланани ифода қила оладими? Бу саволга жавоб бериш учун икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик тенгламани олиб, уни шу томондан текшириб кўрамиз. Бундай тенгламанинг умумий кўриниши

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

бўлади. Ўтган параграфда чиқарилган айлана тенгламаси

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0 \tag{2}$$

эди. (1) ва (2) тенгламаларнинг мос коэффициентлари ўзаро пропорционал бўлгандагина уларнинг иккаласи бир айланани ифода қилади, яъни

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{0} = \frac{C}{1} = \frac{D}{-2a} = \frac{E}{-2b} = \frac{F}{a^2 + b^2 - R^2}$$

бўлган ҳолда. Бу нисбатлардан:

$$A = C, \quad B = 0, \tag{3}$$

$$2Aa + D = 0, \quad 2Ab + E = 0, \tag{4}$$

$$A\,(a^2 + b^2 - R^2) = F. \tag{5}$$

Бу тенгликлардан (3) га қараганда: 1) $A = C$, яъни x^2 ва y^2 нинг коэффициентлари ўзаро тенг бўлса ва 2) $B = 0$, яъни xy кўпайтманинг коэффициенти нолга тенг бўлса, шу ҳолдагина (1) тенглама айлана ифода қилади, яъни икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик тенгламанинг кўриниши

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{6}$$

бўлган ҳолда, у айлана ифода қилади. Бу тенгламанинг иккала томонини A га бўлиб (чунки $A \neq 0$) ҳамавақт x^2 ва y^2 нинг олдидаги коэффициентларни 1 га айлантириш мумкин. Шунинг учун бундан буён биз айлана тенгламасини

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{7}$$

кўринишда ёзамиз.

Юқорида чиқарилган натижага асосланиб, берилган тенгламанинг коэффициентлари ёрдами билан айлананинг радиусини ва марказининг координаталарини аниқлаш мумкин. Ҳақиқатда (4) дан:

$$a = -\frac{D}{2A}, \quad b = -\frac{E}{2A}. \tag{8}$$

Саволлар ва масалалар

169. Айлана қандай тартибли чизиқ?

170. Айлана тенгламасида нечта параметр бор?

171. Иккинчи даражали ҳар қандай тенглама айлана ифода қила оладими? Акси ҳолда: қандай шарт билан иккинчи даражали тенглама айлана ифода қила олади?

172. Айлананинг тенгламаси ҳақиқий айлана ифода қилиши учун, унинг коэффициентлари орасида қандай муносабат бўлиши керак?

173. Тўрт нуқтадан айлана ўтиши учун нуқталарнинг координаталари орасида қандай муносабат бўлиши керак?

174. Маркази (1, 2) нуқтада ва радиуси 3 бирликка тенг бўлган айлананинг тенгламаси тузилсин.

175. Маркази (0, —3) нуқтада ва радиуси 5 бирликка тенг бўлган айлананинг тенгламаси тузилсин.

176. Маркази координаталар бошида ва радиуси 1 га тенг бўлган айлананинг тенгламаси қандай бўлади?

177. Қуйидаги айланаларнинг радиуслари ва марказларининг координаталари аниқлансин:

a) $x^2+y^2+2x-6y+5=0$, b) $x^2+y^2+4x-5=0$,

c) $x^2-5+4y+y^2=0$, d) $4x^2-5x+4y^2-8=0$,

178. $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ айлананинг координаталар ўқлари билан кесишган нуқталари аниқлансин.

§ 38. УЧ НУҚТАДАН ЎТГАН АЙЛАНА

1. Фараз қилайлик (бир тўғри чизиқда бўлмаган) уч нуқта берилган булсин: (x_1, y_1), (x_2, y_2) ва (x_3, y_3). Бу нуқталардан утган айлананинг тенгламасини топамиз.

Фараз қилайлик, изланган айлананинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (1)$$

булсин. Бу айлана берилган учала нуқтадан утгани учун у нуқталарнинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0, \\ x_2^2 + y_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0, \\ x_3^2 + y_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Тўртта (1) ва (2) тенгламалардан учта D, E ва F коэффициентларни чиқариш натижасида изланган тенглама келиб чиқади, яъни

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, & x, & y, & 1 \\ x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

учала нуқтадан утган айлананинг тенгламаси булади. Ҳақиқатда, берилган нуқталардан ҳар бирининг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради.

2. Энди тўрт нуқтанинг бир айланада булиш шартини топамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқталар (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ва (x_4, y_4) булсин. Аввалги уч нуқтадан ўтган айлананинг тенгламаси (3) булади. Бу айлана тўртинчи (x_4, y_4) нуқтадан ўтганда у нуқтанинг координаталари (3) тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2, & x_1, & y_1, & 1 \\ x_2^2 + y_2^2, & x_2, & y_2, & 1 \\ x_3^2 + y_3^2, & x_3, & y_3, & 1 \\ x_4^2 + y_4^2, & x_4, & y_4, & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

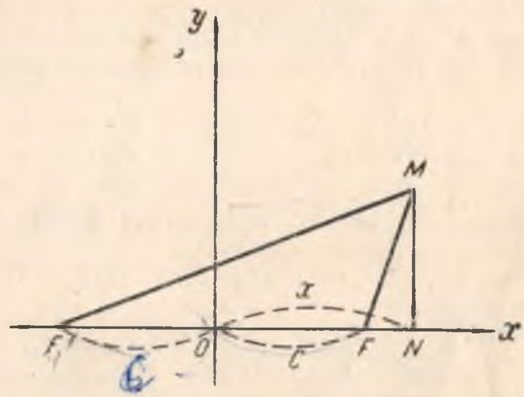
Тўрт нуқтанинг бир айланада булиш шарти шундан иборат.

Эллипсга қарашли нуқталардан бири M ва унинг узгарувчи координаталари x ва y булсин. Қилинган шарт буйича $FF' = 2c$ булиб, ордината уқи FF' нинг уртасидан утгани учун, у нуқталарнинг координаталари $F(c,0)$ ва $F'(-c,0)$ булади. Эллипснинг таърифига мувофиқ

$$MF + MF' = 2a. \qquad (1)$$

$M(x,y)$ ва $F(c,0)$, $M(x,y)$ ва $F'(-c,0)$ нуқталар орасидаги масофалар (икки нуқта орасидаги масофанинг формуласи буйича) қуйидагича булади:

$$\left.\begin{aligned} MF &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \\ MF' &= \sqrt{(x+c)^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$



Шакл 61.

MF ва MF' нинг ифодалари (1) га қуйилса:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

ёки

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

булади. Кейинги тенгликнинг иккала томони квадратга кутарилса:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Бундаги ухшаш ҳадлар ихчамланса:

Саккизинчи боб

ЭЛЛИПС

Чизиқлардан биз ҳозиргача тўғри чизиқ билан, сунгра айлана билан шуғулланиб келдик. Туғри чизиқнинг биринчи тартибли ва айлананинг иккинчи тартибли чизиқ эканлиги ўз ўрнида исбот қилинган эди.

Айланадан бошқа яна учта иккинчи тартибли эгри чизиқлар мавжуд булиб, айлананинг ўзи эса улардан бирининг хусусий ҳолидан иборатдир. Бу чизиқлар: эллипс, гипербола ва парабола исмлари билан машҳур бўлиб, фанда катта аҳамиятга эгадир. Китобнинг бу боби шу чизиқлардан эллипсга бағишланади.

§ 39. ЭЛЛИПСНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

1. 26

Эллипснинг таърифи. Ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача масофаларининг йиғиндиси ўзгармас миқдор бўлган геометрик ўрин эллипс дейилади.

Бу таърифга асосланиб, эллипснинг тенгламасини тузиш мумкин. Бунинг учун берилган нуқталарни F ва F', уларнинг орасидаги масофани $2c$ ва ўзгармас миқдорни $2a$ фараз қиламиз. F ва F' нуқталардан ўтган туғри чизиқни абсцисса ўқи ва унга перпендикуляр булиб, FF' нинг ўртасидан ўтган тўғри чизиқни ордината ўқи фараз қиламиз (шакл 61).

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$$

булади. Энди бу тенгликни яна бир мартаба квадратга кўтарамиз:

$$a^2[(x-c)^2+y^2]=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

ёки

$$a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$$

ёки

$$a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2=a^4+c^2x^2,$$

ёки

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2,$$

ёки

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2). \qquad (3)$$

Шаклдаги MFF' учбурчакда:

$$MF+MF'>FF',$$

ёки $MF+MF'=2a$ ва $FF'=2c$ бўлгани учун $2a>2c$ ёки $a>c$ ёки

$$a^2>c^2,$$

ёки

$$a^2-c^2>0;$$

шунинг учун a^2-c^2 ни бирор b^2 билан ифода қилиш мумкин:

$$a^2-c^2=b^2. \qquad (4)$$

Буни (3) га қўйсак:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2, \qquad (5)$$

ёки бунинг иккала томони a^2b^2 га булинса, эллипс учун бундай тенглама келиб чиқади

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (6)$$

Бу тенгламани ёки (5) ни эллипснинг **энг содда** тенгламаси ёки **каноник** тенгламаси дейилади.

§ 40. ЭЛЛИПСНИНГ ШАКЛИНИ УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ БЎЙИЧА ТЕКШИРИШ

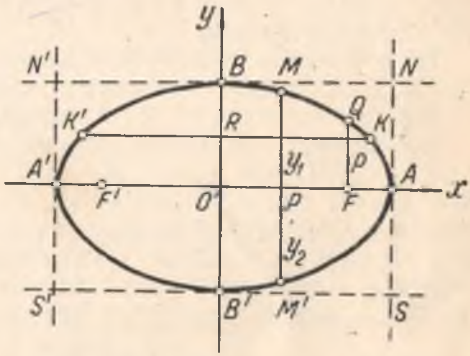
Эллипснинг тенгламасини чиқаришда биз унинг шаклини кўрмай, фақат берилган таърифга асосланган эдик. Энди эллипснинг шаклини ва унинг баъзи бир хусусиятларини унинг тенгламаси ёрдами билан текширамиз. Бунинг учун эллипснинг

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламасини y га нисбатан ечамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (1)$$

Тенгламани текшириш олдида ундаги x ва y нинг эллипсдаги ихтиёрий нуқтанинг ўзгарувчи координаталари эканлигини яна бир мартаба таъкидлаб ўтамиз. (1) тенгликка қараганда y x нинг функцияси бўлади. Шунинг учун y нинг қийматлари x га берилган қийматларга қараб аниқланади. Масалан, абсолют қиймати a дан кичик бўлган ҳар бир $x = OP$ га y учун икки қиймат тўғри келади: $y_1 = PM$ ва $y_2 = PM'$. Буларнинг абсолют қийматлари ўзаро тенг ва ишоратлари бир-бирига тескари (шакл 62). Бошқача қилиб айтганда абсцисса ўқидаги P нуқтага иккита симметрик M ва M' нуқталар тўғри келади. Бу натижа умуман эллипснинг абсцисса ўқига нисбатан симметрик эканлигини кўрсатади.



Шакл 62.

$x = \pm a$ бўлса, $y = 0$ бўлиб, у эллипснинг энг кичик ординатаси бўлади; шу билан бирга эллипснинг A $(a, 0)$ ва A' $(-a, 0)$ нуқталари аниқланади (шакл 62).

$x = 0$ бўлса, $y = \pm b$ бўлади ва $|y| = b$ эллипснинг энг катта ординатаси бўлади. Шу билан бирга эллипснинг яна

$$B\ (0,\ b) \text{ ва } B'\ (0, -b)$$

нуқталари аниқланади.

Лекин x нинг абсолют қиймати a дан катта бўлмаслиги шарт, чунки $|x| > a$ бўлган чоқда y мавҳум булади. Демак, абсциссасининг абсолют қиймати a дан катта бўлган ҳеч бир нуқта бизнинг эллипсга қарашли бўла олмайди. Шуниг билан эллипс ордината ўқига параллель бўлган $x = +a$ ва $x = -a$ (NS ва $N'S'$) тўғри чизиқлар орасида бўлади.

Энди эллипснинг тенгламасини x га нисбатан ечамиз. Бу ҳолда:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}. \qquad (2)$$

Бу тенглик устида ҳам (1) тенглик устида қилинган муҳокамаларни қилиш мумкин. Ҳақиқатда абсолют қиймати b дан кичик булган ҳар бир $y = OR$ га x учун икки қиймат туғри келади: $x_1 = RK$ ва $x_2 = RK'$. Буларнинг абсолют қийматлари узаро тенг ва ишоралари бир-бирига тескари. Бошқача қилиб айтганда, ордината уқидаги R нуқтага иккита симметрик K ва K' нуқталар туғри келади. Бу натижа умуман эллипснинг ордината уқига нисбатан симметрик эканлигини курсатади. Лекин ҳамавақт $|y| \leqslant b$ булиши шарт, чунки акси ҳолда x мавҳум булади. Демак, ординатасининг абсолют қиймати b дан катта булган ҳеч бир нуқта эллипсда булмайди. Шунинг билан эллипс: абсцисса уқига параллель булган $y = +b$ ва $y = -b$ туғри чизиқлар (SS' ва NN') орасида булади.

Текширишдан чиққан натижаларга қараганда эллипснинг чексиз узоқлашган нуқталари булмай, балки у $NN'SS'$ туғри туртбурчак ичидаги ёпиқ шаклдан иборат.

Эллипснинг симметрия уқлари: $AA' = 2a$ унинг катта уқи ва $BB' = 2b$ унинг кичик уқи дейилади; уқларнинг эллипс билан учрашган A, A', B ва B' нуқталари эллипснинг бошлари дейилади. F ва F' нуқталар эллипснинг фокуслари дейилади. Эллипснинг фокусидан ўтган ординатаси эллипснинг параметри дейилади ва у, одатда p билан белгиланади. Фокуснинг абсциссаси c булгани учун:

$$p = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{b^2}{a}.$$

Эллипсдаги ҳар бир M_1 (x_1, y_1) нуқтага координаталар бошига нисбатан симметрик булган M_2 $(-x_1, -y_1)$ нуқта мос келади, чунки бу нуқта ҳам эллипснинг тенгламасини қаноатлантиради (шакл 63):

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} + \frac{(-y_1)^2}{b^2} = 1.$$

Бунга қараганда эллипснинг координаталар бошидан ўтган ҳар бир M_1M_2 ватари шу нуқтада тенг иккига булинади, чунки

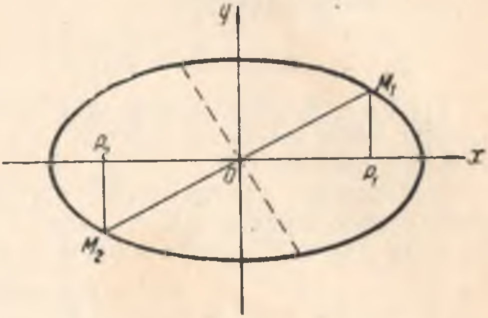
$$\frac{x_1 + (-x_1)}{2} = 0, \quad \frac{y_1 + (-y_1)}{2} = 0.$$

Шунинг учун координаталар боши эллипснинг симметрия маркази ёки қисқача унинг **маркази** дейилади.

Мисол 1. Катта ўқи 6 ва кичик ўқи 4 бўлган эллипснинг тенгламаси тузилсин.

Берилган мисолда: $2a = 6$ ва $2b = 4$, демак: $a = 3$ ва $b = 2$. Булар эллипснинг умумий тенгламасига қўйилса, изланган тенглама келиб чиқади:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



Шакл 63.

Мисол 2. Фокуслари орасидаги масофа 6 га ва кичик ўқи 8 га тенг бўлган эллипснинг тенгламаси тузилсин.

Бу мисолда $2c = 6$, демак, $c = 3$; $2b = 8$, демак, $b = 4$. Буларнинг ёрдами билан a ни топиш мумкин. Ҳақиқатда,

$$a^2 - c^2 = b^2$$

бўлгани учун, бундан:

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ ёки } a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

бўлади. Шунинг учун:

$$a = \sqrt{16 + 9} = 5.$$

a ва b нинг қийматлари эллипснинг умумий тенгламасига қўйилса, изланган тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Мисол 3. Эллипснинг тенгламаси берилган:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Бунинг катта ва кичик ўқлари, фокусларининг координаталари ва параметри топилсин.

Берилган тенгламани эллипснинг умумий тенгламаси билан солиштириб қараганда:

$36 - c^2 = 9$

$$a^2 = 36,\ b^2 = 9,\ \text{демак},\ a = 6,\ b = 3.$$

... учун эллипснинг ўқлари $2a = 12$ ва $2b = 6$ бўлади; ...нинг ёрдами билан фокуслар орасидаги c масофани ...миз:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3} \text{ ва } 2c = 6\sqrt{3}.$$

Эллипснинг параметри:

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{9}{6} = 1{,}5.$$

Мисол 4. Эллипснинг тенгламаси $3x^2 + 5y^2 - 16 = 0$. Бунинг катта ва кичик ўқлари ва фокусларининг координаталари топилсин.

Эллипснинг тенгламасини энг аввал одатдаги шаклга келтирамиз. Бунинг учун унинг маълум ҳади 16 ни ўнг томонга ўтказиб, сўнгра иккала томонини 16 га бўламиз:

$$3x^2 + 5y^2 = 16,$$

ёки

$$\frac{3x^2}{16} + \frac{5y^2}{16} = 1,$$

$$\frac{x^2}{\frac{16}{3}} + \frac{y^2}{\frac{16}{5}} = 1.$$

Бу тенгламани эллипснинг тенгламаси билан солиштириб қараганда:

$$a^2 = \frac{16}{3},\ \text{бундан}\ a = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$b^2 = \frac{16}{5},\ \text{бундан}\ b = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{5}\sqrt{5},$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{16}{3} - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{32}{15}},$$

$$F\left(\sqrt{\frac{32}{15}},\ 0\right) \text{ ва } F'\left(-\sqrt{\frac{32}{15}},\ 0\right).$$

§ 41. ЭЛЛИПСНИ ЧИЗИШ

1. Нуқталар ёрдами билан чизиш

Эллипснинг асосий таърифига суяниб, уни нуқталар ёрдами билан чизиш мумкин. Фараз қилайлик, берилган ўзгармас миқдорлар, яъни эллипснинг катта ўқи $2a = MN$ ва фокуслар орасидаги масофа $2c = FF'$ бўлсин. Буларнинг ёрдами билан эллипс чизиш учун энг аввал FF' нинг ўртаси бўлган O нуқтани аниқлаб оламиз (шакл 64). Сўнгра FF' ни иккала томонга давом эттириб, $OA = OA' = a$ ни ўлчаб оламиз. Шаклга мувофиқ

$$AF = A'F' = a - c.$$

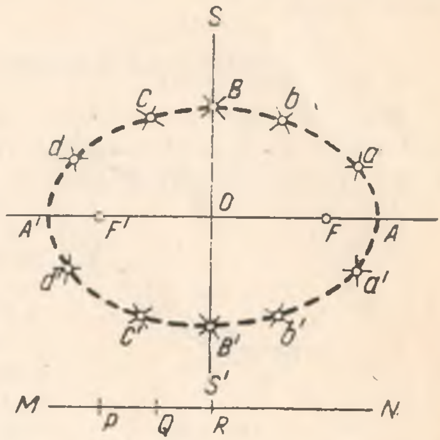
Шунинг учун:

$$AF + AF' = (a - c) + (a + c) = 2a,$$

$$A'F' + A'F = (a - c) + (a + c) = 2a.$$

Демак, A ва A' нуқталар эллипсга қарашли нуқталардан иборатдир.

Энди O нуқтадан AA' га перпендикуляр қилиб SS' ни ўтказамиз. Агар F ёки F' дан a га тенг радиус билан ёй чизилса, у ёй ҳалиги SS' ни B ва B' нуқталарда учратади. Иккинчи томондан



Шакл 64.

$$BF + BF' = a + a = 2a,$$

$$B'F + B'F' = a + a = 2a$$

бўлгани учун B ва B' нуқталар ҳам эллипсга қарашли бўлади.

Агар MN дан истаганча бирор P нуқтани олиб, эллипснинг F фокусидан $r = MP$ ва F' дан $r' = NP$ га тенг радиуслар билан ёй чизилса, уларнинг бир-бири билан кесишганидан a ва a' нуқталари аниқланади (учбурчак томонларининг хоссасига мувофиқ $r' - r < FF'$ бўлиши шарт). Агар F дан NP ва F' дан MP радиуслар билан ёйлар чизилса, уларнинг бир-бири билан кесишганидан яна d ва d' нуқталар аниқланади. a, a', d ва d' нуқталар бизнинг эллипсга қарашли нуқталардан иборат, чунки:

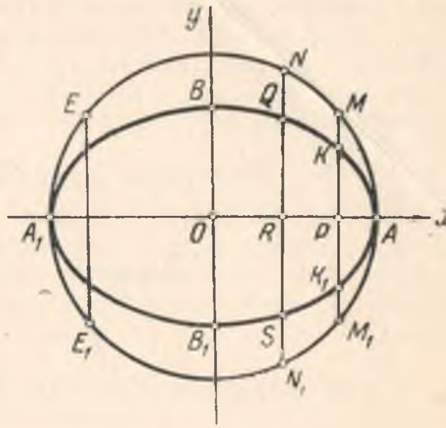
$$aF + aF' = MP + NP = MN = 2a,$$

$$a'F + a'F' = MP + NP = MN = 2a,$$

$$dF + dF' = NP + MP = MN = 2a,$$

$$d'F + d'F' = NP + MP = MN = 2a.$$

Энди $2a > 2b$ фараз қилиб, (1) тенглама билан ифода қилинган эллипсинг ўқлари кесишган нуқтадан a га тенг бўлган радиус билан айлана чизамиз (шакл 66).



Шакл 66.

Бу айлананинг тенгламаси юқоридаги (2) тенгламанинг ўзи бўлади. Бирор умумий абсциссага қарашли эллипснинг ординатаси $y_э$ билан ва айлананинг ординатаси y_a билан ифода қилинса, у ҳолда:

$$y_э = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{(1-тенгламадан).}$$

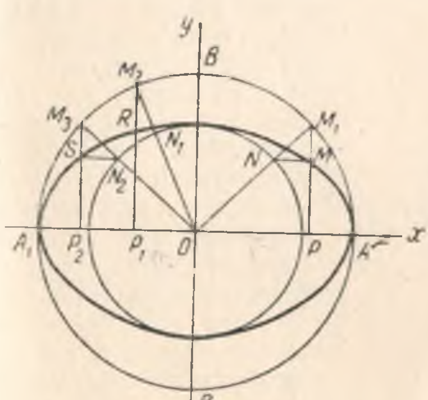
$$y_a = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{(2-тенгламадан).}$$

Бу тенгликлардан биринчиси иккинчисига бўлинса:

$$y_э : y_a = b : a, \tag{3}$$

яъни: *абсциссаси умумий бўлган эллипс ва айлана ординаталарининг бир-бирига нисбати эллипс кичик ўқининг катта ўқига нисбати каби бўлади.* Масалан (шакл 66):

$$\frac{KP}{MP} = \frac{QR}{NR} = \frac{b}{a}.$$



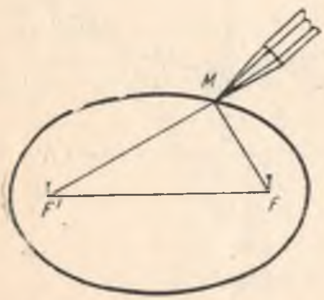
Шакл 67.

2. Чиқарилган натижага суяниб ғоят даражада енгиллик билан эллипс чизиш мумкин. Масалан, ўқлари $2a$ ва $2b$ $(2a > 2b)$ бўлган эллипсни чизиш учун бирор O нуқтадан радиуслари a ва b га тенг бўлган икки айлана чизамиз (шакл 67). Сўнгра истаганча бир неча: OM_1, OM_2, OM_3,..., радиусларни ўтказамиз. Бу радиусларнинг катта айлана билан кесишган

Шунга ўхшаш, MN тўғри чизиқда яна Q, R,... нуқталарни олиб, ҳалиги йўл билан давом этганда: b, b', c, c',... нуқталари аниқланади. Аниқланган нуқталарни бир-бири билан туташтириш натижасида эллипснинг тақрибий шакли ҳосил бўлади.

2. Узлуксиз ҳаракат билан чизиш

Эллипсни узлуксиз ҳаракат билан чизиш учун энг аввал берилган F ва F' нуқталарнинг ҳар бирига кнопка ёки михча ўрнагилади. Сўнгра узунлиги эллипснинг катта ўқидан $2c = FF'$ миқдорича узун бўлган ипнинг учларини бир-бирига боғлаб, уни иккала михчадан ўтказилади ($MF + FF' + F'M = 2a + 2c$).



Шакл 65

Энди қаламнинг учи билан ипни тортиб турган ҳолда, қаламни бир томонга қаратиб тортиб борилса, қаламнинг учи эллипс чизиб боради, чунки чизилган эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан F ва F' нуқталаргача масофаларнинг йиғиндиси $2a$ га, яъни эллипснинг катта ўқига тенг (шакл 65).

§ 42. ЭЛЛИПС ВА АЙЛАНА

1. Эллипснинг энг содда тенгламасини олайлик:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Агар бунда $b = a$ фараз қилинса, у ҳолда:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ёки

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{2}$$

Бу эса маркази координаталар бошида бўлиб, радиуси a га тенг бўлган айланани ифода қилади. Демак, айлана эллипснинг хусусий ҳолидир.

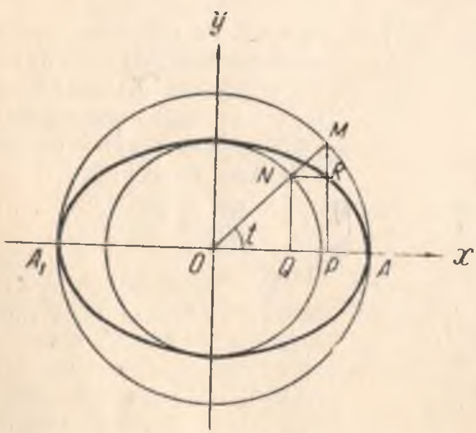
M_1, M_2, M_3,..., нуқталаридан унинг бирор AA_1 диаметрига M_1P, M_2P_1, M_3P_2,..., перпендикуляр чизиқларни туширамиз. Агар радиусларнинг кичик айлана билан кесишган: N, N_1, N_2,..., нуқталаридан AA_1 диаметрга параллель чизиқлар ўтказилса, уларнинг ҳалиги перпендикуляр чизиқлар билан кесишган: M, R, S,..., нуқталари изланган эллипсга тегишли нуқталар бўлади. Масалан, NM ва OP ўзаро параллель бўлгани учун:

$$PM : PM_1 = ON : OM_1 = b : a.$$

Демак, PM — эллипсга қарашли (M) нуқтанинг ординатаси бўлади. Қолган R, S,..., нуқталарининг эллипсга қарашли эканлиги шу йўл билан исбот қилинади. Аниқланган нуқталарини бир-бири билан туташтириш натижасида эллипснинг тақрибий шакли ҳосил бўлади.

§ 43. ЭЛЛИПСНИНГ ПАРАМЕТРИК ТЕНГЛАМАЛАРИ. ЭЛЛИПСОГРАФ

1. Эллипснинг ўқларини $2a$ ва $2b$ ($2a > 2b$) фараз қилиб, унинг ўқлари кесишган O нуқтадан радиуслари a ва b бўлган иккита ёрдамчи айлана чизамиз. Бирор радиус ўтказиб, унинг кичик ва катта айланалар билан кесишган N ва M нуқталаридан AA_1 га перпендикуляр туширамиз. Ўтган параграфдан маълумки, N нуқтадан AA_1 га параллель қилиб ўтказилган чизиқ MP ни эллипсдаги R нуқтада учратади (шакл 68).



Шакл 68.

Агар AOM бурчакни t ва эллипсдаги R нуқтанинг координаталарини x ва y фараз қилинса, бу ҳолда OMP тўғрибурчакли учбурчакда:

$$x = OP = OM\cos t = a\cos t$$

ва ONQ тўғрибурчакли учбурчакда

$$y = RP = NQ = ON \sin t = b \sin t.$$

Эллипсдаги нуқтанинг x ва y координаталарини параметр t функциясида ифода қилган ушбу

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

тенгламалар **эллипснинг параметрик тенгламалари** дейилади.

Бу тенгламалардан параметр t ни чиқариб, ҳамавақт эллипснинг одатдаги тенгламасига ўтиш мумкин. Ҳақиқатда (1) дан.

$$\frac{x}{a} = \cos t, \quad \frac{y}{b} = \sin t,$$

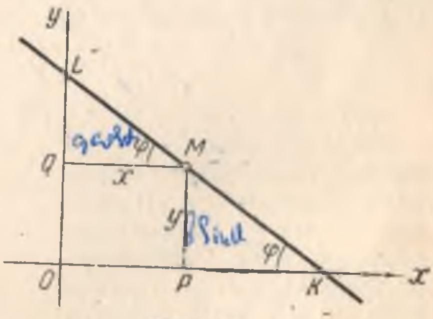
ёки

$$\frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t, \quad \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t,$$

бундан

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

2. Фараз қилайлик, узунлиги ўзгармас (l) бўлган (KL) кесманинг K учи Ox ўқида ва L учи Oy ўқида бўлсин (шакл 69). M нуқта KL да бўлиб, ҳамавақт $LM = a$ ва $MK = b$ фараз қиламиз, яъни $a + b = l$. Агар KL шундай ҳаракатга келсаки, K нуқта Ox ўқида силжитиб борилса, у ҳолда M нуқта эллипс чизади.



Шакл 69.

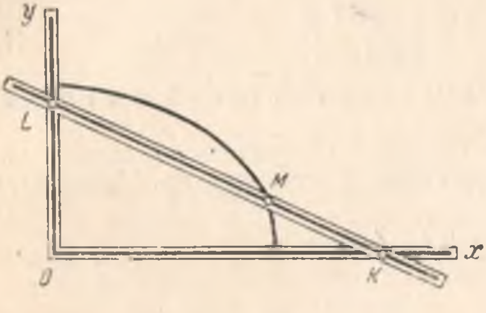
Ҳақиқатда KL даги M нуқтанинг координаталари (x, y) ва LMQ бурчаги φ бўлсин. Шаклга мувофиқ тўғрибурчакли LMQ ва MPK учбурчакларда:

$$x = QM = a \cos \varphi,$$
$$y = MP = b \sin \varphi,$$

булар эллипснинг параметрик тенгламаларидан иборатдир.

Қилинган муҳокамага асосланган эллипсни чизиш учун эллипсограф деган махсус асбоб бор. Унинг тузилиши қуйидагича.

Ўзаро тўғри бурчак ташкил қилган Ox ва Oy чизғичлар устида учинчи LK чизғич бор; учала чизғичнинг бутун бўйича бўш оралиги бўлиб, учинчи чизғични L ва K нуқталарида Oy ва Ox бўйича силжитиш мумкин. M нуқтага қалам учи ўрнатилган ва $ML = a$, $MK = b$. Бу ҳолда L ни Oy бўйича ва K ни Ox бўйича силжитиб борганда, M нуқтадаги қаламнинг учи эллипс ёйини чизиб боради (шакл 70).



Шакл 70.

§ 44. ЭЛЛИПСНИНГ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТИ

Эллипс фокуслари орасидаги масофанинг эллипснинг катта ўқига нисбати унинг эксцентриситети дейилади ва у одатда e ҳарфи билан белгиланади, яъни

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \qquad (1)$$

$c < a$ бўлгани учун ҳамавақт $e < 1$ бўлади.

Эксцентриситетнинг геометрик маъносини текширамиз. Бунинг учун (1) ифодадаги a ни ўз ҳолича қолдириб, b нинг қийматини орттириб борамиз. Бунинг натижасида e нинг қиймати камайиб боради. Иккинчи томондан $b = OB_1$, OB_2, OB_3,... бўлиб, ўсиб борганда эллипс айланага яқинлашиб боради ва $b = a$ бўлганда $e = 0$ бўлиб, у айлананинг ўзи бўлади (шакл 71).

Шакл 71.

Аксинча (1) ифодадаги a ни ўз ҳолича қолдириб, b

нинг қиймати камайтириб борилса, бундан e нинг қиймати усиб боради. Иккинчи томондан b нинг қийматлари..., OB_3, $OB_2, OB_1, \ldots$, бўлиб камайиб борганда, эллипс айланадан узоқлашиб, ўткирлашиб боради ва b нинг лимити 0 бўлганда $e = 1$ бўлиб, эллипс AA_1 орасидаги иккиланган кесмага айланади. Шунинг билан e нинг қиймати эллипснинг шаклини ифода қилади.

Эллипснинг ўқларини унинг эксцентриситети e ва параметри p ёрдами билан ифода қилиш мумкин. Ҳақиқатан

$$p = \frac{b^2}{a} \text{ ва } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

бўлгани учун, бундан

$$b^2 = ap, \quad a^2e^2 = a^2 - ap,$$

$ue^2 = a - p,$

демак:

$ae^2 - a = -p,$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}. \qquad (2)$$

$a(e^2 - 1)$

39,

§ 45. ЭЛЛИПСНИНГ РАДИУС-ВЕКТОРЛАРИ

$P =$

Эллипсдаги бирор нуқта билан унинг бирор фокусигача масофаси у нуқтанинг радиус-вектори дейилади.

Фараз қилайлик, эллипсдаги бирор $M(x, y)$ нуқтанинг радиус-векторлари $MF = r$ ва $MF' = r_1$ бўлсин (шакл 72).

$M(x, y)$ ва $F(c, 0)$, $M(x, y)$ ва $F'(-c, 0)$ нуқталар орасидаги масофалар қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} r &= MF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ r_1 &= MF' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

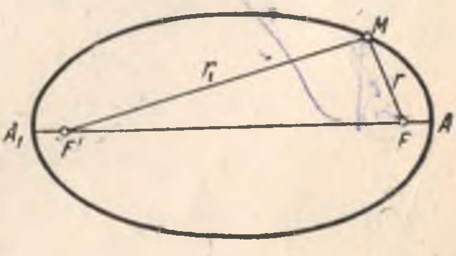
Буларнинг ҳар бири квадратга кўтарилса

$$r^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$r_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Кейинги тенгламадан аввалгиси айириб олинса

$$r_1^2 - r^2 = 4cx,$$



Шакл 72.

ёки

$$(r_1 + r)(r_1 - r) = 4cx. \qquad (2)$$

Эллипснинг асосий хоссасига мувофиқ:

$$r_1 + r = 2a. \tag{3}$$

Бу (2) га қўйилса

$$2a\,(r_1 - r) = 4cx$$

ёки

$$r_1 - r = 2\frac{c}{a}\,x. \tag{4}$$

(3) дан (4) ни айириб олсак

$$2r = 2a - 2\frac{c}{a}\,x \text{ ёки } r = a - \frac{c}{a}\,x. \tag{5}$$

(3) билан (4) ни қўшсак

$$2r_1 = 2a + 2\frac{c}{a}\,x \text{ ёки } r_1 = a + \frac{c}{a}\,x. \tag{6}$$

Бизда $\frac{c}{a} = e$ эди. Шунинг учун (5) ва (6) тенгликларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= a - ex \\ r_1 &= a + ex \end{aligned}} \tag{7}$$

Бу формулаларнинг ёрдами билан эллипсдаги ихтиёрий $M\,(x,\ y)$ нуқтанинг радиус-векторлари a ва e орқали аниқланади.

Мисол. Эллипснинг тенгламаси $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. Бунинг абсциссаси 4 бирликка тенг бўлган нуқтасининг радиус-векторлари топилсин.

Берилган тенглама бўйича:

$$a^2 = 64,\ b^2 = 36,$$

бундан

$$a = 8,\ b = 6;$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{4}\sqrt{7} \text{ ва } x = 4.$$

Булар (7) га қўйилса:

$$r = 8 - \sqrt{7},\ r_1 = 8 + \sqrt{7}.$$

Эллипс техникада ва фанда, айниқса, астрономияда жуда муҳим роль ўйнайди. Мисол учун машҳур немис астрономи Кеплер томонидан XVII асрнинг бошида кашф этилган ва планеталар ҳаракатига оид бўлган ушбу учта қонунларидан тушунча бериб ўтамиз:

1. Ҳар бир планетанинг орбитаси эллипсдан иборат бўлиб, унинг фокусларидан бирида Қуёш туради.

2. Ҳар бир планета Қуёш марказидан ўтган текислик бўйича ҳаракат қилади ва унинг (яъни планетанинг) радиус вектори чизган секторининг юзи, бунинг учун керак бўлган вақтга пропорционал ўзгаради.

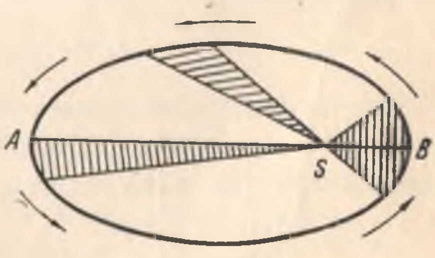
3. Планеталарнинг Қуёш атрофида айланишига керак бўлган вақтларнинг квадратлари, уларнинг Қуёшгача бўлган ўрта масофаларининг кубларига пропорционалдир.

Аввало, планета деб формаси шарга яқин бўлиб, Қуёш атрофида айланиб юрган йирик самовий жисмга айтилади (булар қуёшдан акс эттирилган нурлар ҳисобига ёруғланади). XVIII асрнинг охиригача маълум бўлган планеталар: Меркурий, Венера, Ер, Марс, Юпитер ва Сатурн саналарди. Кейинча яна учта: Уран, Нептун ва Плутон маълум бўлди. Бу 9 та катта планеталардан бошқа яна кўп майда планеталар (ёки бошқача айтганда, астероидлар ёки планетоидлар) мавжуддир.

Хуллас, Кеплернинг биринчи қонунига мувофиқ ҳар бир планетанинг орбитаси, яъни унинг Қуёш атрофида айланиш йўли эллипсдан иборат (шакл 72 *а*).

Ер орбитасининг эксцентриситети жуда кичик, у 0,01677 га тенг, яъни айланага яқин.

Кеплернинг иккинчи қонунига мувофиқ, агарда шаклда штрихланган секторларнинг юзлари ўзаро тенг бўлса, у ҳолда Ернинг орбитаси бўйича тегишли ёйларнинг ўтиши учун керак бўлган вақтлар ҳам ўзаро тенг бўлади. Бунга қараганда Ер B нуқтада бўлганда, яъни S Қуёшга энг яқин бўлганда, тезроқ ва A да, яъни Қуёшдан энг узоқда булганда, сустроқ ҳаракатда булади. Биринчи нуқтани перигелий ва иккинчисини афелий дейилади. Кеплернинг учинчи қонунида „ўрта масофа“ устида сўз боради.



Шакл 72а.

Бу масофа:

$$\frac{1}{2}(SB+SA)=a$$

булади. Шунинг учун агарда бирор планетанинг Қуёш атрофида айланиши учун керак бўлган вақтни t_1 ва ўрта масофасини a_1, иккинчи планета учун t_2 ва a_2 фараз қилииса, бу ҳолда Кеплернинг учинчи қонунини ушбу математик формада ифода қилиш мумкин:

$$\frac{t_1^2}{t_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Биз бу ерда Кеплер қонунларидан тушунчагина бериб ўтдик, ҳолбуки, уларни янада умумийлаштириш мумкин эди (11-боб, § 78 га қаралсин).

§ 46. ЭЛЛИПСНИНГ ДИРЕКТРИСАЛАРИ

Ўтган параграфда эллипснинг радиус-векторлари учун ушбу формулаларни чиқарган эдик:

$$r=a-ex,$$

$$r_1=a+ex.$$

Буларни

$$r=e\left(\frac{a}{e}-x\right)$$

$$r_1=e\left(\frac{a}{e}+x\right)$$

кўринишда ёзиб, қавс ичидаги ифодаларга диққат қилайлик. Биринчи қавсда $\frac{a}{e}$ ва иккинчисида $-\frac{a}{e}$, ордината ўқига параллель бўлган тўғри чизиқларгача масофани кўрсатади ёки $e=\frac{c}{a}$ бўлгани учун:

$$x=+\frac{a^2}{c} \text{ ва } x=-\frac{a^2}{c}. \qquad (1)$$

Бу тенгламалар ифода қилган параллель тўгри чизиқлардан бири координаталар бошидан ўнг томонда ва иккинчиси чап томонда бўлади (шакл 73).

(1) тенгламалар билан ифода қилинган тўғри чизиқлар эллипснинг директрисалари дейилади. $a>c$ бўлгани учун $\frac{a^2}{c}>a$ бўлади.

Бу эса иккала директрисанинг эллипсдан ташқарида эканини кўрсатади (DE ва $D'E'$ тўғри чизиқлар).

Энди эллипсдаги бирор M (x, y) нуқтада абсцисса ўқига параллель қилиб MK тўғри чизиқни ўтказамиз. Сўнгра M нуқта билан F ва F' фокусларни ўзаро туташтирамиз. M (x, y) нуқта эллипсда бўлгани учун радиус-вектор формуласи бўйича:

$$MF = a - ex = a - \frac{c}{a}x = \frac{a^2 - cx}{a};$$

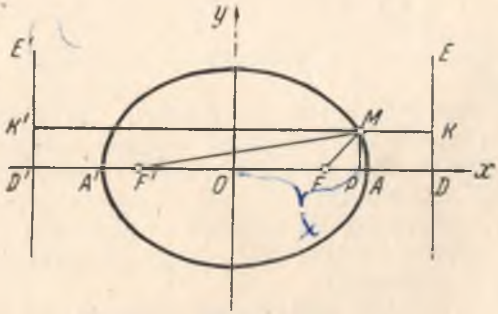
шаклга мувофиқ:

$$MK = OD - OP = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2 - cx}{c},$$

$$MF : MK = \frac{a^2 - cx}{a} : \frac{a^2 - cx}{c},$$

ёки

$$MF : MK = c : a = e.$$



Шакл 73.

Шу йўл билан давом этганда иккинчи директриса учун ҳам худди шу натижанинг ўзи келиб чиқади, яъни

$$MF' : MK' = c : a = e.$$

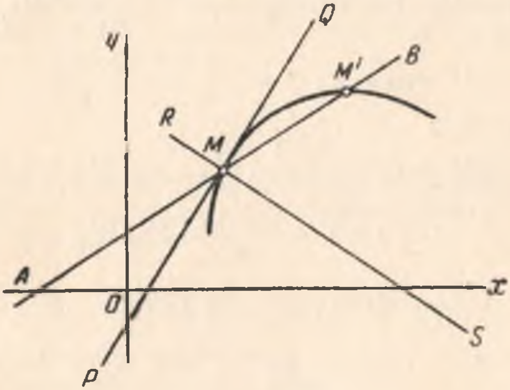
Демак, *эллипсдаги бирор нуқтадан унинг бирор фокусигача масофасининг у нуқта билан у фокусга қарашли директрисаси орасидаги масофага нисбати ўзгармас миқдорга (e га) тенгдир.*

§ 47. ЭЛЛИПСГА УРИНМА ВА НОРМАЛЬ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1. Умуман эгри чизиқлар назариясида уринма тушунчаси катта роль ўйнайди. Одатда элементар геометрияда уринма фақат айланага нисбатан қаралади ва унда бериладиган таъ-

рифни эгри чизиқларга татбиқ қилиб бўлмайди. Ҳолбуки, масалани умумийлаштириб, ҳар қандай эгри чизиқ учун уринмага умумий таъриф бериш мумкин.

Фараз қилайлик, бирор эгри чизиқ ва унда иккита M ва M' нуқталар берилган бўлсин (шакл 74) Иккала нуқтадан



Шакл 74.

AB тўғри чизиқ (кесувчи)ни ўтказамиз. Энди фараз қилайлик, M нуқта қўзғалмай турган ҳолда иккинчи M' нуқта эгри чизиқ бўйича M нуқтага интилиб келсин. Бу ҳолда AB кесувчи турли вазиятларда бўлиб, M нуқта атрофида айлана бошлайди. M' нуқта M нуқтага интилганда AB кесувчи вазиятининг лимити бўлган PQ — эгри чизиқнинг M нуқтасида у р и н м а дейилади.

Бироқ, M' нуқта M нуқтага интилганда AB кесувчининг вазияти аниқ лимитга интилмаслиги мумкин. Бу ҳолда M нуқтада уринма йўқ дейилади.

Уринманинг M уриниш нуқтасидан ўтиб, уринмага перпендикуляр бўлган RS тўғри чизиқ — эгри чизиқнинг M нуқтасида н о р м а л ь дейилади.

2. Энди бу таърифларга суяниб, эллипсда берилган нуқтада эллипсга уринма ва нормаль тенгламаларини тузамиз.

Фараз қилайлик, эллипснинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

бўлсин. Бунинг бирор $M_1(x_1, y_1)$ нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламасини тузиш учун, уринма тўғрисида қилинган умумий мулоҳазага мувофиқ, эллипсда яна бирор

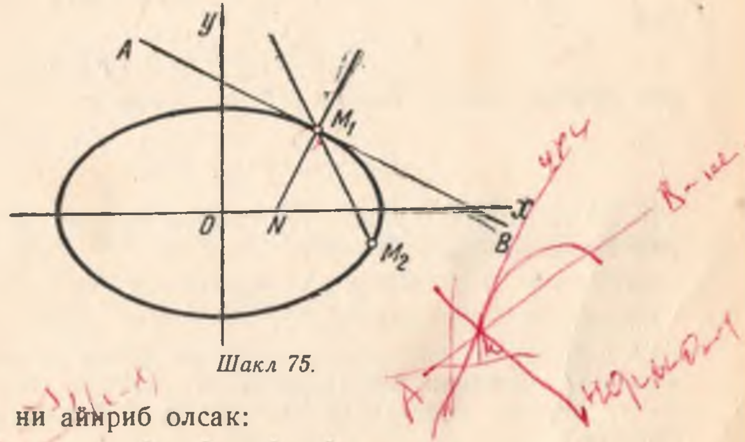
$M_2(x_2, y_2)$ нуқта олиб, иккала нуқтадан кесувчи тўғри чизиқ ўтказамиз (шакл 75). Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1). \tag{2}$$

$M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар эллипсда бўлгани учун

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$



Шакл 75.

(4) дан (3) ни айириб олсак:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0,$$

ёки

$$\frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{a^2} + \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{b^2} = 0,$$

ёки

$$b^2(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) = -a^2(y_2 + y_1)(y_2 - y_1),$$

бундан

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}.$$

Буни (2) га қўйсак, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1). \tag{5}$$

Энди M_1M_2 кесувчидан уринма ҳосил қилиш учун M_2 нуқтани M_1 нуқтага чексиз яқинлаштириб келамиз. Бу ҳолда

$$\lim x_2 = x_1 \text{ ва } \lim y_2 = y_1$$

бўлгани учун (5) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = -\frac{2b^2 x_1}{2a^2 y_1}(x - x_1),$$

ёки

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1),$$

ёки

$$a^2 yy_1 - a^2 y_1^2 = -b^2 xx_1 + b^2 x_1^2,$$

ёки

$$b^2 xx_1 + a^2 yy_1 = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2,$$

ёки бунинг иккала томони a^2b^2 га бўлинса:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2},$$

ёки (3) га асосан: уринма тенгламасининг энг кейинги кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \tag{6}$$

Бунга қараганда эллипсдаги нуқтадан ўтган уринма тенгламасининг кўриниши ҳам худди эллипс тенгламасига ўхшайди, фақат эллипс тенгламасидаги x^2 ва y^2 ўрнига xx_1 ва yy_1 ёзилади.

Энди нормаль тенгламасини тузамиз. Нормаль $M_1(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтади. Бу нуқтадан ўтган ҳар бир тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{7}$$

бўлади. Бундаги k нинг қийматини топиш учун уринманинг бурчак коэффициентини топишга тўғри келади. Бунинг учун уринма тенгламасини y га нисбатан ечамиз:

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1},$$

демак, уринманинг бурчак коэффициенти

$$k_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Нормаль $M_1(x_1, y_1)$ нуқтада уринмага перпендикуляр бўлгани учун:

$$k = -\frac{1}{k_1} = +\frac{a^2y_1}{b^2x_1}.$$

Буни (7) га қўйсак, нормаль учун қуйидаги тенглама келиб чиқади:

$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1). \tag{8}$$

Мисол. Эллипснинг тенгламаси $5x^2 + 8y^2 = 92$. Бунинг (2, 3) нуқтасидан ўтган уринма ва нормалнинг тенгламаси тузилсин.

Уринма тенгламасинииг кўриниши

$$5xx_1 + 8yy_1 = 92.$$

Берилган мисолда $x_1 = 2$, $y_1 = 3$. Шунинг учун:

$$10x + 24y = 92,$$

ёки

$$5x + 12y = 46.$$

Энди нормалнинг тенгламасини топамиз. Бунинг учун бевосита (8) дан фойдаланиш мумкин. Берилган тенгламада $a^2 = \frac{92}{5}$, $b^2 = \frac{23}{2}$. Буларни ва берилган нуқтанинг координаталарини (8) га қўйсак, нормаль учун буидай тенглама чиқади:

$$y - 3 = \frac{\frac{92}{5}\cdot 3}{\frac{23}{2}\cdot 2}(x - 2),$$

ёки

$$23y - 69 = \frac{276}{5}(x - 2),$$

ёки

$$115y - 345 = 276x - 552,$$

$$276x - 115y - 207 = 0.$$

§ 48. ЭЛЛИПСГА ЎТКАЗИЛГАН УРИИМАНИНГ ХОССАСИ

Фараз қилайлик, эллипсдаги бирор $M(x_1, y_1)$ нуқтадан уринма ва нормаль ўтказилган бўлсин (шакл 76). Бу уринманинг ва нормалнинг MF ва MF_1 радиус-векторлар билан ўзаро тенг бурчаклар ташкил қилгаилигини исбот қиламиз.

$$F_1N = er_1 \text{ ва } FN = er,$$

бундан

$$\frac{F_1N}{NF} = \frac{r_1}{r} \text{ ёки } \frac{F_1N}{NF} = \frac{MF_1}{MF}.$$

Бу пропорцияга қараганда MN (нормаль) F_1MF бурчакнинг биссектрисаси бўлади. Демак,

$$\angle F_1MN = \angle FMN,$$

яъни *эллипснинг бирор нуқтасидан ўтган нормаль у нуқтанинг радиус-векторларидан ҳосил бўлган бурчакни тенг иккига бўлади.*

Иккинчи томондан, нормаль уринмага перпендикуляр бўлгани учун, нормалнинг исбот қилинган хоссасини эътиборга олганда:

$$\angle PMF_1 = \angle QMF,$$

яъни *эллипснинг бирор нуқтасидан ўтган уринма у нуқтанинг радиус-векторлари билан ўзаро тенг бурчаклар ҳосил қилади.*

Уринма билан нормалнинг бу хоссалари уларни ясаш учун жуда оддий йўл очиб беради. Масалан, эллипсдаги бирор M нуқтадан нормаль ўтказиш учун у нуқтани эллипснинг F ва F_1 фокуслари билан туташтириб, ҳосил бўлган бурчак тенг иккига бўлинса, бу биссектриса нормаль бўлади ва нормалга M нуқтада перпендикуляр қилиб тўғри чизиқ ўтказилса, у уринма бўлади.

§ 49. ЭЛЛИПСНИНГ ДИАМЕТРЛАРИ

Берилган йўналишга параллель бўлган ватарларнинг ўрта нуқталаридан иборат бўлган геометрик ўрин эгри чизиқнинг диаметри дейилади*.

Эллипснинг диаметрини аниқлаш мақсадида бир неча AB, CD, $C'D'$, $C''D''$ параллель ватарларни ўтказамиз. Бу ватарлар ўзаро параллель бўлгани учун уларнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаклари ўзаро тенг бўлиб, фақат уларнинг ордината ўқидан кесган бошланғич ординаталари бир-бирига тенг бўлмайди. Шунинг учун k ни ўзгармас ва l ни ўзгарувчи параметр фараз қилганда у ватарларнинг ҳаммасини

$$y = kx + l$$

тенглама билан ифода қилиш мумкин.

* Табиий, сўз фақат иккинчи тартибли эгри чизиқлар усти да боради

M (x_1, y_1) нуқтадан ўтган нормалнинг тенгламаси

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

бўлади. Бунинг ёрдами билан ON ни топамиз. Бунинг учун $y = 0$ фараз қилинса, $x = ON$ бўлади. Демак,

$$-y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1),$$

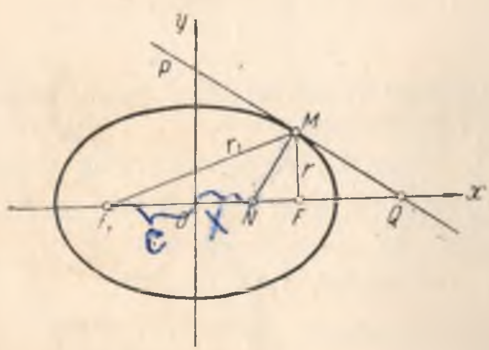
ёки

$$-b^2 x_1 = a^2 x - a^2 x_1,$$

бундан

$$x = ON = \frac{(a^2 - b^2)x_1}{a^2}; \; a^2 - b^2 = c^2 \quad \text{бўлгани учун:}$$

$$ON = \frac{c^2}{a^2} x_1.$$



Шакл 76.

Шаклга мувофиқ:

$$F_1 N = c + ON = c + \frac{c^2}{a^2} x_1 = \frac{c}{a}\left(a + \frac{c}{a} x_1\right) = e(a + e x_1),$$

$$FN = c - ON = c - \frac{c^2}{a^2} x_1 = \frac{c}{a}\left(a - \frac{c}{a} x_1\right) = e(a - e x_1).$$

§ 45 да чиқарилган формулаларга мувофиқ:

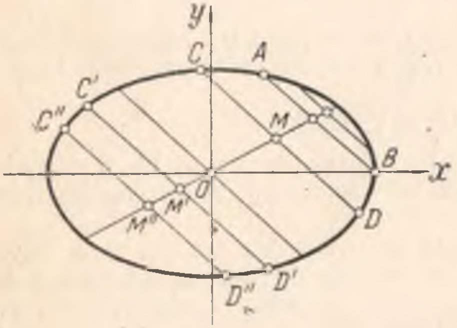
$$a + e x_1 = r_1 = F_1 M,$$
$$a - e x_1 = r = FM$$

бўлгани учун

Ватарлардан бирининг, масалан, CD нниг, эллипс билан кесишган нуқталарининг координаталарини C (x_1, y_1) ва D (x_2, y_2) фараз қиламиз (шакл 77). Буларни аниқлаш учун эллипснинг тенгламаси билан юқоридаги тенгламани бирлаштириб ечишга, яънн ушбу

$$\left.\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2, \\ y &= kx + l \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

системани ечишга тўғри келади.



Шакл 77.

Бу системани ечиш учун иккинчи тенгламадан y иинг ифодасини биринчига қўямиз:

$$b^2x^2+a^2(kx+l)^2=a^2b^2.$$

ёки

$$b^2x^2 + a^2k^2x^2 + \\ + 2a^2klx + a^2l^2 - \\ - a^2b^2 = 0,$$

ёкн

$$(b^2 + a^2k^2)x^2+2a^2klx+ \\ + a^2(l^2 - b^2) = 0,$$

ёки

$$x^2 + \frac{2a^2kl}{b^2+a^2k^2}x + \frac{a^2(l^2-b^2)}{b^2+a^2k^2} = 0.$$

Бу тенглама иккинчн даражали бўлгани учун, унинг умуман икки нлднзи бўлади. Улардан бири x_1 ва иккинчиси x_2 фараз қилинса, квадрат тенгламанинг асосий хоссасига мувофиқ

$$x_1 + x_2 = -\frac{2a^2kl}{b^2+a^2k^2},$$

ёки

$$\frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2}. \qquad (2)$$

Иккинчи томондан CD ватарнинг ўртасини M (x, y) фараз қилсак,

$$x = \frac{x_1+x_2}{2}, \qquad (3)$$

демак, (2) га асосан;

$$x = -\frac{a^2kl}{b^2 + a^2k^2}. \tag{4}$$

$M(x, y)$ нуқта CD да бўлгани учун унинг абсциссасини $y = kx + l$ тенгламага қўйиш мумкин. Бу ҳолда:

$$y = -\frac{a^2k^2l}{b^2 + a^2k^2} + l,$$

ёки

$$y = \frac{b^2l}{b^2 + a^2k^2}. \tag{5}$$

(5) ни (4) га ҳадлаб бўлсак,

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2k},$$

ёки

$$y = -\frac{b^2}{a^2k}x. \tag{6}$$

Изланган диаметрнинг тенгламаси шундан иборат, чунки у $M(x, y)$ нуқтанинг координаталари орасидаги муносабатни ифода қилади. Бу тенглама биринчи даражали бўлгани учун тўғри чизиқни ифода қилади. Иккинчи томондан унинг бошланғич ординатаси нолга тенг. Шунинг учун бу тенглама координаталар бошидан, яъни эллипснинг марказидан ўтган тўғри чизиқни ифода қилади.

$y = kx + l$ тўғри чизиқнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги α фараз қилинса,

$$\operatorname{tg}\alpha = k \tag{7}$$

бўлади. Бу йўналишга тегишли CD диаметрнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги α' фараз қилинса, (6) бўйича

$$\operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2k}, \tag{8}$$

(7) билан (8) ҳадлаб кўпайтирилса,

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{9}$$

Эллипснинг CD диаметрига параллель бўлган ватарларининг ҳам абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги α' бўлади (шакл 78). Агар бу ватарларга тегишли $C'D'$ диаметрнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги β фараз қилинса, (9) га асосан

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{10}$$

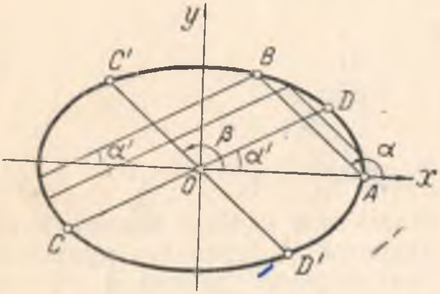
(9) ва (10) тенгликларни ўзаро солиштириб қараганда

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\alpha',$$

ёки

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,$$

бу эса биринчи ватарлар системаси иккинчи диаметрга параллель эканлигини кўрсатади ($AB \parallel D'C'$). Демак, *биринчи CD диаметр билан тенг иккига бўлинган ватарлар иккинчи $C'D'$ диаметрга параллелдир.*



Шакл 78.

Бу хусусиятга эга бўлган диаметрлар қ ў ш м а д и а м е т р л а р дейилади. Эллипснинг ўқлари ҳам бу хоссага эга бўлгани учун улар эллипснинг б о ш д и а м е т р л а р и дейилади.

М и с о л. Эллипснинг тенгламаси $8x^2 + 12y^2 - 15 = 0$. (1, 2) нуқтадан ўтган диаметр билан унга қўшма бўлган диаметрнинг тенгламалари тузилсин.

Эллипснинг диаметри унинг марказидан, демак, (0, 0) нуқтадан ўтади. Масаланинг шартига қараганда у (1, 2) нуқтадан ҳам ўтиши керак. Шунинг учун бу диаметрнинг тенгламаси

$$y = 2x, \; k = 2. \tag{11}$$

Бу диаметрга қўшма бўлган диамертнинг бурчак коэффициенти k_1 фараз қилинса,

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2},$$

бундан

$$k_1 = -\frac{b^2}{a^2 k},$$

ёки бизда $k = 2$ бўлгани учун

$$k_1 = -\frac{b^2}{2a^2}.$$

Берилган тенгламага асосан:

$$a^2 = \frac{15}{8}, \quad b^2 = \frac{5}{4},$$

демак:

$$k_1 = -\frac{1}{3}.$$

Шунинг учун қўшма диаметрнинг тенгламаси

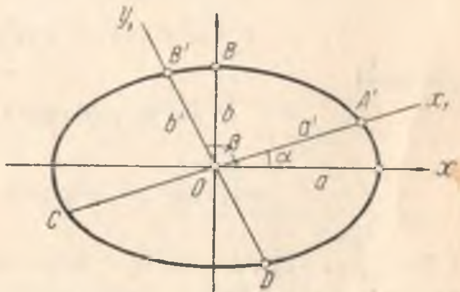
$$y = -\frac{1}{3}x$$

бўлади.

§ 50*. ЭЛЛИПСИИНГ ҚЎШМА ДИАМЕТРЛАРИГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Фараз қилайлик, $A'C$ ва $B'D$ эллипснинг қўшма диаметрлари бўлсин. Буларни янги x_1Oy_1 координаталар системасининг ўқлари фараз қилиб, эллипснинг шу ўқларга нисбатан тенгламасини тузамиз.

Фараз қилайлик, Ox билан Ox_1 орасидаги бурчак α ва Ox билан Oy_1 орасидаги бурчак β бўлсин. Бу ҳолда координаталар алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади (шакл 79):



Шакл 79.

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\beta.$$

Буларни эллипснинг ушбу

$$b^2x^2 + a^3y^2 = a^2b^2$$

тенгламасига қўямиз:

$$b^2(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta)^2 + a^2(x_1\sin\alpha + y_1\sin\beta)^2 = a^2b^2,$$

ёки

$$x_1^2(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha) +$$
$$+ 2x_1y_1(a^2\sin\alpha\sin\beta + b^2\cos\alpha\cos\beta) +$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_1}{x_1}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{y_2}{x_2}. \qquad (1)$$

Қушма диаметрларнинг хоссасига мувофиқ:

$$\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -\frac{b^2}{a^2},$$

бундан

$$\frac{y_1 y_2}{b^2} = -\frac{x_1 x_2}{a^2}.$$

Бу тенгликни бундай пропорция шаклида ёзиш мумкин;

$$\frac{\frac{x_1}{a}}{\frac{y_2}{b}} = \frac{\frac{y_1}{b}}{-\frac{x_2}{a}} = \pm \frac{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{y_2}{b}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2}}. \qquad (2)$$

$M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар эллипсда булгани учун:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \text{ ва } \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1,$$

шунинг учун (2) нинг куриниши қуйидагича булади:

$$\frac{\frac{x_1}{a}}{\frac{y_2}{b}} = \frac{\frac{y_1}{b}}{-\frac{x_2}{a}} = \pm 1,$$

бу эса қуйидагича икки тенгликка булинади:

$$\frac{x_1}{a} = \pm \frac{y_2}{b} \text{ ва } \frac{y_1}{b} = \pm \frac{x_2}{a}. \quad (3)$$

Шакл 80.

Агар $OM_1 = a_1$ ва $OM_2 = b_1$ фараз қилинса, OM_1P_1 ва OM_2P_2 туғрибурчакли учбурчакларда:

$$a_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad b_1^2 = x_2^2 + y_2^2,$$

ёки буларни ҳадлаб қушиб, сунгра (3) ни эътиборга олсак,

$$a_1^2 + b_1^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) =$$

$$+y_1^2(a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta)=a^2b^2. \quad (1)$$

Ўтган параграфда чиқарилган (9) формулага мувофиқ:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=-\frac{b^2}{a^2},$$

ёки

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{b^2}{a^2}=0,$$

ёки

$$a^2\sin\alpha\sin\beta+b^2\cos\alpha\cos\beta=0;$$

шунинг учун (1) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$x_1^2(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)+y_1^2(a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta)=a^2b^2. \quad (2)$$

Фараз қилайлик, $OA'=a_1, OB'=b_1$ бўлсин. A' $(a_1, 0)$ ва B' $(0, b_1)$ нуқталар эллипсда бўлгани учун, буларнинг координаталари (2) ни қаноатлантириши лозим. Демак,

$$a_1^2(a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha)=a^2b^2,$$
$$b_1^2(a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta)=a^2b^2.$$

булардан

$$a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha=\frac{a^2b^2}{a_1^2},$$

$$a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta=\frac{a^2b^2}{b_1^2}.$$

Буларни (2) га қўйиб, сўнгра a^2b^2 га қисқартирилса, эллипснинг икки қўшма диаметрларига нисбатан ушбу тенглама чиқади:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{y_1^2}{b_1^2}=1. \quad (3)$$

Шунинг билан эллипснинг тенгламаси бу ҳолда ҳам ўз шаклини сақлайди.

§ 51. АПОЛЛОНИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

1. Фараз қилайлик, M_1 (x_1, y_1) ва M_2 (x_2, y_2) икки қўшма диаметрнинг учлари, α ва β уларнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаклари бўлсин (шакл 80). Бу ҳолда:

Бу тенгликнинг чап томони OM_1NM_2 параллелограмнинг юзини ва ўнг томони эллипснинг ярим ўқларида ясалган тўғри тўртбурчакнинг юзини ифода қилади.

OM_1NM_2 параллелограмнинг M_1N ва M_2N томонлари эллипснинг M_1 ва M_2 нуқталарида уринма бўлади. Буни исбот қилиш учун M_1 дан ўтган уринманинг M_2N_2 диаметрга ва M_2 дан ўтган уринманинг M_1N_1 диаметрга параллеллигини исбот қиламиз. Ҳақиқатда, M_1 (x_1, y_1) нуқтадан ўтган уринманинг тенгламаси

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$$

ва унинг бурчак коэффициенти

$$k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

бўлади. M_2N_2 қўшма диаметрнинг тенгламаси

$$y = \frac{y_2}{x_2}x$$

ва унинг бурчак коэффициенти (3) га мувофиқ

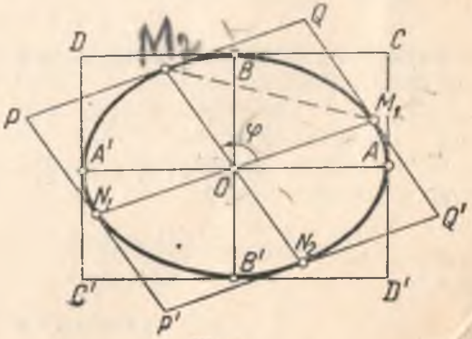
$$k_1 = \frac{y_2}{x_2} = \pm\frac{bx_1}{a}\cdot\pm\frac{b}{ay_1} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

демак,

$$k = k_1,$$

яъни M_1N_1 нинг N_2M_2 га параллеллиги исбот бўлди. Буни эътиборга олиб, (6) нинг иккала томонини 4 га кўпайтирамиз:

$$4a_1b_1\sin\varphi = 4ab. \quad (7)$$



Шакл 81.

Бу тенгликнинг чап томони эллипснинг қўшма диаметрларида ясалган $PQP'Q'$ ташқи параллелограмнинг юзини ва ўнг томони унинг ўқларида ясалган $DCD'C'$ тўғри тўртбурчакнинг юзини ифода қилади (шакл 81). Бу натижа Аполлонийнинг иккинчи теоремасидан иборат: *эллипснинг қўшма диаметрларида ясалган параллелограмнинг юзи унинг ўқларида ясалган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг.*

$$= x_1^2 + y_1^2 + \frac{a^2}{b^2} y_1^2 + \frac{b^2}{a^2} x_1^2 =$$

$$= (a^2 + b^2)\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right),$$

ёки $M_1\,(x_1,\ y_1)$ нуқта эллипсда бўлгани учун:

$$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2,$$

ёки

$$4a_1^2 + 4b_1^2 = 4a^2 + 4b^2,$$

ёки

$$(2a_1)^2 + (2b_1)^2 = (2a)^2 + (2b)^2. \tag{4}$$

Бу тенглик *Аполлонийнинг* 1-теоремасини ифода қилади. Бунга қараганда: *эллипснинг қўшма диаметрларининг квадратлари йиғиндиси унинг ўқлари квадратларининг йиғиндисига тенг.*

2. Энди қўшма ярим диаметрларда ясалган OM_1M_2 учбурчакнинг юзини топамиз. Уни S фараз қилсак:

$$S = \pm\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1),$$

чунки учбурчакнинг учлари $O\,(0,\ 0)$,
$M_1\,(x_1,\ y_1)$ ва $M_2\,(x_2,\ y_2)$ нуқталарда; (3) га асосан:

$$S = \pm\frac{1}{2}\left(x_1\cdot\frac{b}{a}x_1 + y_1\cdot\frac{a}{b}y_1\right) = \pm\frac{ab}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right),$$

ёки $M_1\,(x_1,\ y_1)$ нуқта эллипсда бўлгани учун:

$$S = \frac{1}{2}ab. \tag{5}$$

Иккинчи томондан OM_1 ва OM_2 орасидаги бурчак φ фараз қилинса, M_1OM_2 учбурчакнинг юзи

$$S = \frac{1}{2}a_1b_1\sin\varphi$$

булади. Демак,

$$\frac{1}{2}a_1b_1\sin\varphi = \frac{1}{2}ab$$

ёки

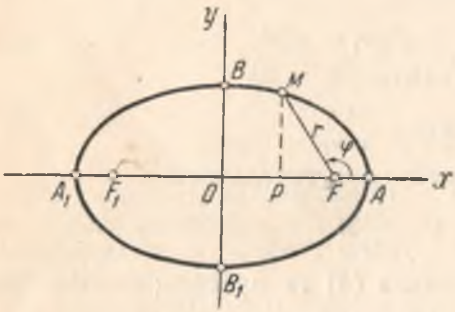
$$a_1b_1\sin\varphi = ab. \tag{6}$$

§ 52. ЭЛЛИПСНИНГ ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ТЕНГЛАМАСИ

Энди эллипснинг тенгламасини қутб координаталар системасида чиқарамиз. Бунинг учун эллипснинг AA_1 ўқини қутб ўқи ва F фокусини унинг қутби фараз қиламиз (шакл 82).

Эллипсдаги бирор M нуқтанинг ўзгарувчи қутб координаталари r ва φ бўлсин, яъни

$$MF = r \text{ ва } \angle MFx = \varphi.$$



Шакл 82.

45-параграфда чиқарилган (7) формула бўйича

$$r = a - ex \qquad (1)$$

Иккинчи томондан

$$x = OP = OF - FP = c - FP. \qquad (2)$$

Бу тенгликдаги FP ни тўғрибурчакли MFP учбурчакдан аниқлаш мумкин. Бу учбурчакда

$$PF = r\cos(180^\circ - \varphi) = -r\cos\varphi,$$

ёки буни (2) га қўйсак,

$$x = c + r\cos\varphi. \qquad (3)$$

x учун r ва φ орқали аниқланган бу ифодани (1) га қўямиз:

$$r = a - ec - er\cos\varphi,$$

ёки

$$r(1 + e\cos\varphi) = a - ec,$$

ёки

$$r(1 + e\cos\varphi) = a - \frac{c^2}{a},$$

ёки

$$r(1 + e\cos\varphi) = \frac{a^2 - c^2}{a},$$

ёки

$$r(1 + e\cos\varphi) = \frac{b^2}{a}.$$

Агар эллипснинг параметри бўлган $\frac{b^2}{a}$ ни p фараз қилиб, сўнгра тенгламани r га нисбатан ечсак, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}\ ;\ (e < 1)} \tag{4}$$

φ нинг қиймати 0 дан 2π гача ўзгариши натижасида M нуқта эллипснинг усти билан ABA_1B_1A йўналишда ҳаракатда бўлади, яъни эллипс чизиб боради.

Саволлар ва масалалар

179. Эллипс деб нимага айтилади?

180. Эллипснинг каноник тенгламасини тузишда координата ўқлари қандай ўтказилади?

181. Эллипснинг параметри деб нимага айтилади?

182. Эллипснинг таърифига асосланиб, уни қандай чизиш мумкин?

183. Эллипснинг эксцентриситети нима ва у қандай геометрик маънога эга?

184. Катта ўқи 3 ва кичик ўқи 2 бўлган эллипснинг тенгламаси тузилсин.

185. Кичик ўқи 10 ва фокуслари орасидаги масофаси 12 бўлган эллипснинг тенгламаси тузилсин.

186. Эллипс катта ўқининг йўналишини ордината ўқи ва кичик ўқининг йўналишини абсцисса ўқи қабул қилинса, унинг тенгламаси қандай бўлади?

187. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофа 2 ва ундаги истаган нуқтадан фокусларгача бўлган масофаларнинг йиғиндиси 4 бўлса, эллипснинг тенгламаси қандай бўлади?

188. Тенгламаси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ бўлган эллипснинг кичик ўқлари учларини унинг фокуслари билан туташтириб, ҳосил бўлган шаклнинг ромблиги ва унинг томони a га тенглиги исбот қилинсин.

189. Қуйидаги эллипсларнинг ўқлари, фокуслари орасидаги масофалари ва эксцентриситетлари топилсин:

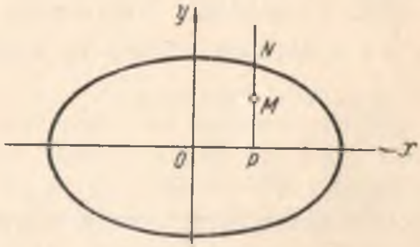
a) $4x^2 + 9y^2 = 36$;
b) $3x^2 + 5y^2 = 15$;
c) $3x^2 + 5y^2 = 6$.

190. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофа 12; кичик ўқи 16. Катта ўқи топилсин.

√ **203.** Эллипснинг тенгламаси $4x^2+7y^2=56$. Бунинг шундай нуқтасидан урнима ўтказилсинки, у, $x-2y-5=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлсин.

204. Эллипснинг тенгламаси $4x^2+9y^2=32$. Бунинг шундай нуқтасидан уринма ўтказилсинки, у, $3x+2y-7=0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлсин.

205. Эллипснинг тенгламаси $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Агар бирор $M(x_1, y_1)$ нуқта эллипснинг ичида бўлса, у ҳолда: $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<1$ ва агар у нуқта эллипсдан ташқарида бўлса, $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}>1$ бўлади. Бу исбот қилинсин.



Шакл 83.

Исбот. Фараз қилайлик, $M(x_1, y_1)$ нуқта эллипснинг ичида бўлсин. Бу нуқтадан эллипснинг катта ўқига перпендикуляр туширамиз. Бунинг абсцисса ўқи билан учрашган нуқтаси P ва эллипс билан учрашган нуқтаси N бўлсин (шакл 83). Агар N нуқтанинг координаталари (x_2, y_2) фараз қилинса, бу ҳолда:

$$MP<NP, \text{ ёки } y_1<y_2,$$

ёки

$$y_1^2<y_2^2, \text{ ёки } a^2y_1^2<a^2y_2^2.$$

M ва N нуқталарининг абсциссалари умумий бўлгани учун:

$$x_1=x_2 \text{ ёки } x_1^2=x_2^2 \text{ ёки } b^2x_1^2=b^2x_2^2.$$

Бу тенгликни юқоридаги тенгсизлик билан ҳадлаб қўшганда:

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2<b^2x_2^2+a^2y_2^2,$$

ёки бунинг иккала томони a^2b^2 га бўлинса:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}<\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}$$

191. Эллипсдаги икки нуқтанинг координаталари (1, 4) ва (—6, 1). Бу эллипснинг тенгламаси тузилсин[1].

192. Катта ўқи кичик ўқидан уч марта катта бўлган эллипснинг эксцентриситети топилсин.

193. Эллипснинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Бу эллипснинг координат бурчакларининг биссектрисалари билан учрашган нуқталари топилсин.

194. Эллипснинг тенгламаси берилган: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Координата ўқларининг йўналишларини сақлаб, координаталар бошини эллипсдаги (h, k) нуқтага келтирилган. Эллипснинг янги тенгламаси топилсин.

195. Эллипснинг тенгламаси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Қандай шарт билан ушбу

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

тўғри чизиқ эллипсга уринма бўлади?

196. Эллипснинг тенгламаси $9x^2 + 25y^2 = 225$. Бунинг абсциссаси 3 бўлган нуқтасининг радиус-векторлари аниқлансин.

197. Эллипснинг тенгламаси $7x^2 + 18y^2 = 126$. Бунинг абсциссаси 3 ва ординатаси мусбат бўлган нуқтасининг радиус-векторлари орасидаги бурчаги топилсин.

198. Эллипснинг тенгламаси $9x^2 + 25y^2 = 225$. Бунинг директрисаларининг тенгламалари топилсин.

199. Эллипснинг тенгламаси $4x^2+9y^2=32$. Бунинг $\left(2, -\frac{4}{3}\right)$ нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламаси тузилсин.

200. Эллипснинг тенгламаси $5x^2 + 9y^2 = 45$. Бунинг абсциссаси 2 ва ординатаси мусбат бўлган нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламаси тузилсин.

201. Эллипснинг тенгламаси $3x^2 + 4y^2 = 13$. Бунинг шундай нуқтасидан уринма ўтказилсинки, у уринма $y = 3x + 4$ тўғри чизиққа параллель бўлсин.

202. Эллипснинг тенгламаси $2x^2 + 9y^2 = 8$. Бунинг шундай нуқтасидан уринма ўтказилсинки, у уринма $y = 4$ тўғри чизиққа параллель бўлсин.

---

[1] Эллипснинг ўқлари координата ўқлари билан бирлашган ва маркази координаталар бошида фараз қилинади.

Тўққизинчи боб

ГИПЕРБОЛА

Китобнинг бу боби иккинчи тартибли эгри чизиқлардан гиперболага бағишланади; эллипсни ўрганишда асос қилиб олинган йўл билан гиперболанинг каноник тенгламаси чиқарилиб, унинг асосий хоссалари текширилади.

§ 53. ГИПЕРБОЛАНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Гиперболанинг таърифи. *Ҳар бир нуқтасидан берилган икки нуқтагача масофаларининг айирмаси ўзгармас миқдор бўлган геометрик ўрин гипербола* дейилади.

Берилган нуқталарни F ва F', уларнинг орасидаги масофани $2c$ ва ўзгармас миқдорни $2a$ фараз қиламиз. F ва F' нуқталардан ўтган тўғри чизиқни абсцисса ўқи ва унга перпендикуляр бўлиб, FF' нинг ўртасидан ўтган тўғри чизиқни ордината ўқи фараз қиламиз (шакл 84).

Гиперболага қарашли нуқталардан бири M ва унинг ўзгарувчи координаталари x ва y бўлсин. $FF' = 2c$ бўлиб, ордината ўқи FF' нинг ўртасидан ўтгани учун, у нуқталарнинг координаталари $F(c, 0)$ ва $F'(-c, 0)$ бўлади.

Гиперболанинг асосий таърифига мувофиқ:

$$MF' - MF = 2a. \tag{1}$$

$M(x, y)$ ва $F(c, 0)$, $M(x, y)$ ва $F'(-c, 0)$ нуқталарорасиёки (x_2, y_2) нуқта эллипсда бўлгани учун:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1.$$

Масаланинг иккинчи қисми ҳам шу йўл билан исбот қилинади.

206. Эллипснинг тенгламаси $x^2 + 5y^2 = 9$. Қуйидаги нуқталарнинг эллипсга нисбатан ўрни аниқлансин:

1) $(2, -1)$, 2) $(0, 3)$, 3) $(3, 0)$; 4) $(1, 1)$.

207. Эллипснинг тенгламаси $x^2 + 3y^2 = 4$. Бунга $(5, 3)$ нуқтадан ўтказилган уринманинг тенгламаси тузилсин.

208. Эллипснинг тенгламаси $4x^2 + 25y^2 = 100$. Бунинг $\left(4, \frac{6}{5}\right)$ нуқтасида уринма ва нормаль ўтказилган. Буларнинг тенгламалари тузилсин.

209. Эллипснинг тенгламаси $3x^2 + 4y^2 = 12$. $(-2, 2)$ нуқтадан ўтиб, шу нуқтада тенг иккига бўлинган ватарнинг тенгламаси тузилсин.

210. Эллипснинг тенгламаси $4x^2 + 25y^2 = 100$. $\left(4, \frac{6}{5}\right)$ нуқтадан ўтган диаметр билан бу диаметрга қўшма диаметр орасидаги бурчак аниқлансин.

211. Эллипснинг тенгламаси $7x^2 + 16y^2 = 112$. Бунинг шундай нуқтаси топилсинки, у нуқтанинг радиус-векторларидан бири иккинчисидан уч мартаба катта бўлсин.

212. Эллипс $\left(\sqrt{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$ нуқтадан ўтиб, $x + 2y + 3 = 0$ тўғри чизиққа уриниб ўтган. Эллипснинг тенгламаси тузилсин.

213. Эллипс ўқларининг бир-бирига нисбати $13:5$ каби бўлса, унинг эксцентриситети қанча бўлади?

214. Эллипснинг тенгламаси $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ бўлган ҳолда қандай шарт билан $y = kx + l$ тўғри чизиқ унга уринма бўлади?

215. Эллипснинг тенгламаси $5x^2 + 8y^2 - 40 = 0$. Бунинг бир-бирига қўшма бўлган икки диаметридан бири $(2, 3)$ нуқтадан ўтади. Иккала диаметрнинг тенгламалари ва уларнинг узунликлари аниқлансин.

216. Эллипснинг фокусларидан уринмага туширилган перпендикулярларнинг кўпайтмаси эллипснинг кичик ўқи ярмининг квадратига тенг. Бу исбот қилинсин.

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2,$$

ёки

$$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2,$$

ёки

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \qquad (3)$$

Шаклдаги MFF' учбурчакда

$$MF' - MF < F'F_1$$

ёки

$$2a < 2c, \text{ ёки } a < c,$$

ёки

$$a^2 < c^2 \text{ ёки } a^2 - c^2 < 0;$$

шунинг учун $a^2 - c^2$ ни $(-b^2)$ фараз қиламиз:

$$a^2 - c^2 = -b^2. \qquad (4)$$

Бу ҳолда (3) тенгламанинг кўриниши қуйидагича булади:

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2,$$

ёки

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (5)$$

Бу тенглама гиперболанинг энг содда ёки каноник тенгламаси дейиладн. Агар буиинг иккала томони a^2b^2 га бўлиниса, тенгламаниг курининши қуйидагича булади:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad (6)$$

§ 54. ГИПЕРБОЛАИИИГ ШАКЛИИИ УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ БУЙИЧА ТЕКШИРИШ

Ўтган параграфда чиқарилган гиперболанинг тенгламаси ёрдами билан унинг шаклнии аниқлаймиз. Бунинг учун гиперболанииг

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

теиглaмасини олиб, уни y га нисбатан ечамиз:

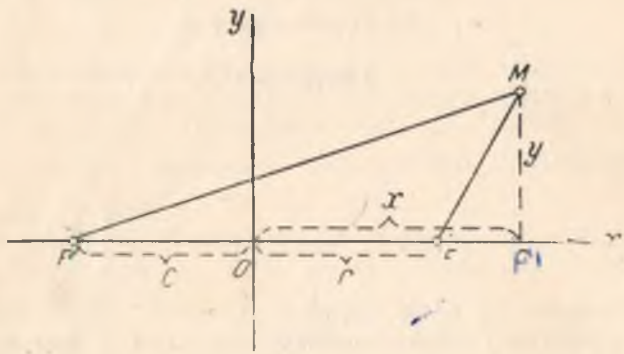
$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \qquad (1)$$

Бунга қараганда y нинг қийматлари x га берилган қийматларга қараб аниқланади. Масалан, абсолют қиймати a

даги масофалар (икки нуқта орасидаги масофанинг формуласи бўйича) қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} MF &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \\ MF' &= \sqrt{(x+c)^2+y^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

MF ва MF' нинг ифодалари (1) га қўйилса:



Шакл 84.

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$$

ёки

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-2a.$$

Кейинги тенгламанинг иккала томони квадратга кўтарилса:

$$(x-c)^2+y^2=(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2.$$

ёки

$$x^2-2cx+c^2+y^2=x^2+2cx+c^2+y^2-$$
$$-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2.$$

Ўхшаш ҳадлари ихчамланса,

$$-cx=a^2-a\sqrt{(x+c)^2+y^2},$$

ёки

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx.$$

Бу тенгламанинг иккала томонини яна бир марта квадратга кўтарамиз:

$$a^2\left[(x+c)^2+y^2\right]=a^4+2a^2cx+c^2x^2,$$

ёки

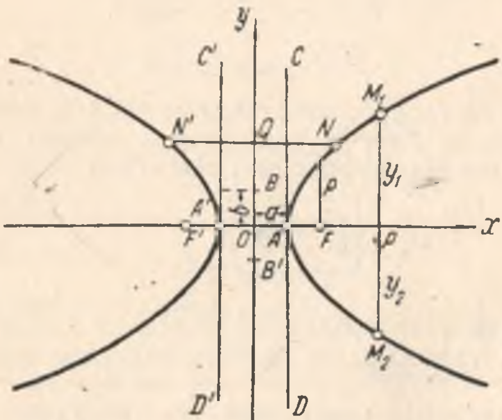
дан катта бўлган ҳар бир $x = OP$ га y учун икки қиймат тўғри келади: $y_1 = PM_1$ ва $y_2 = M_2P$. Буларнинг абсолют қийматлари ўзаро тенг ва ишоралари бир-бирига тескари. Бошқача қилиб айтганда абсцисса ўқидаги P нуқтага иккита симметрик M_1 ва M_2 нуқталар тўғри келади. Бу натижа умуман гиперболанинг абсцисса ўқига нисбатан симметрик эканлигини кўрсатади.

$x = \pm a$ бўлса, $y = 0$ бўлиб, y гиперболанинг энг кичик ординатаси булади; шунинг билан гиперболанинг

$$A\,(a, 0) \text{ ва } A'\,(-a, 0)$$

нуқталари аниқланади (шакл 85).

Лекин x нинг абсолют қиймати a дан кичик бўлмаслиги керак, чунки $|x| < a$ булганда $x^2 - a^2 < 0$ бўлгани учун бу ҳолда y мавҳум бўлади. Шунинг билан $x = +a$ ва $x = -a$, яъни A ва A' нуқталардан ўтиб, ордината ўқига параллель



Шакл 85.

булган CD ва $C'D'$ тўғри чизиқлар орасида гиперболага қарашли ҳеч қандай нуқта бўлмайди.

x нинг қиймати $+a$ дан $+\infty$ гача ва $-a$ дан $-\infty$ гача ўзгарганда y нинг абсолют қиймати 0 дан ∞ гача ўзгаради. Бу эса гиперболанинг икки томонга қараб чексиз даражада кенгайиб кетган икки жуфт мунтазам тармоқлардан иборат эканлигини кўрсатади.

Энди гиперболанинг тенгламасини x га нисбатан ечамиз. Бу ҳолда:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}. \qquad (2)$$

Бунга қараганда y га ҳар қанча қиймат бериш мумкин, y га берилган ҳар бир қийматга қараб x учун ҳамавақт иккита ҳақиқий сон тўғри келади. Уларнинг абсолют қийматлари ўзаро тенг бўлиб, ишоралари тескаридир. Масалан, $y = OQ$ бўлганда $x_1 = QN$, $x_2 = QN'$ ва $|x_1| = |x_2|$ бўлади. Бу эса гиперболанинг ордината ўқига нисбатан симметрик эканлигини кўрсатади.

$x = 0$ бўлган чоқда

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{-a^2} = \pm b\sqrt{-1}$$

бўлади. Агар координаталар бошидан ордината ўқида юқорига ва қуйига қараб b ни ўлчасак, унда B ва B' нуқталари аниқланади. Бу нуқталар гиперболанинг ўзида бўлмагани учун $BB' = 2b$ гиперболанинг мавҳум ўқи дейилади.

A ва A' нуқталар гиперболаниг бошлари дейилади ва $AA' = 2a$ унинг ҳақиқий ўқи дейилади. Берилган F ва F' нуқталар гиперболанинг фокуслари дейилади.

Гиперболанинг фокусига қарашли ординатаси унинг параметри дейилади ва у одатда p ҳарфи билан белгиланади. Фокуснинг абсциссаси c бўлгани учун

$$p = \frac{b}{a} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a}, \qquad (3)$$

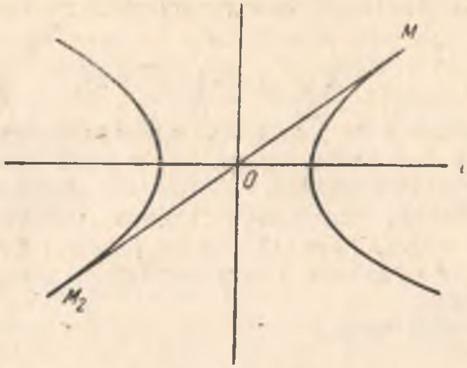
чунки $c^2 - a^2 = b^2$ эди.

Эллипсдаги каби, гиперболадаги ҳар бир $M_1(x_1, y_1)$ нуқтага координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган $M_2(-x_1, -y_1)$ нуқта мос келади, чунки бу нуқта ҳам гиперболанинг тенгламасини қаноатлантиради:

$$\frac{(-x_1)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1.$$

Демак, гиперболанинг координаталар бошидан ўтган ҳар бир ватари шу нуқтада тенг иккига бўлинади, яъни координаталар боши гиперболанинг симметрия маркази ёки қисқача маркази бўлади (шакл 86).

Мисол. Ҳақиқий ўқи 10 ва фокуслари орасидаги масофа 14 бўлган гиперболанинг тенгламаси тузилсин.



Шакл 86.

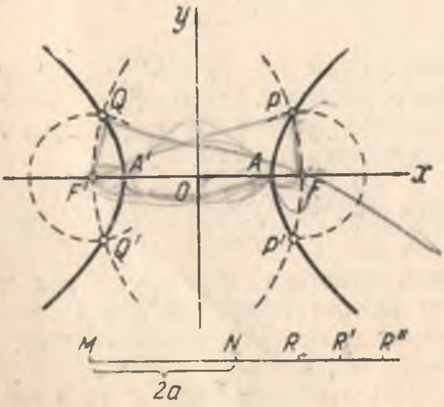
Берилган мисолда: $2a = 10$, демак, $a = 5$ ва $a^2 = 25$; $2c = 14$, демак, $c = 7$ ва $b^2 = c^2 - a^2 = 49 - 25 = 24$. Булар гиперболанинг умумий тенгламасига қўйилса, изланган тенглама

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1 \text{ бўлади.}$$

§ 55. ГИПЕРБОЛАНИ ЧИЗИШ

1. Нуқталар ёрдами билан чизиш

Гиперболанинг асосий таърифига суяниб, уни нуқталар ёрдамн билан чизиш мумкин. Фараз қилайлик, берилган ўзгармас миқдор $2a = MN$ ва фокуслари орасидаги масофа $2c = FF'$ бўлсин ($2c > 2a$).



Шакл 87.

Бунинг учун энг аввал FF' нинг тенг ўртаси нуқтани топамиз (шакл 87). Сўнгра FF' ни иккала томонга давом эттириб

$$OA = OA' = a$$

ни ўлчаб оламиз. Бу ҳолда A ва A' нуқталар гиперболага қарашли бўлади, чунки

$$AF' - AF = AF' - A'F' = 2a.$$

$$A'F - A'F' = A'F - AF = 2a.$$

Энди MN нинг давомида бирор R нуқтани олиб, гиперболанинг F фокусидан NR га ва F' фокусидан MR га тенг радиуслар билан ёй чизилса, уларнинг ўзаро кесишган P нуқтаси гиперболага қарашли булади, чунки

$$F'P - PF = MR - NR = 2a.$$

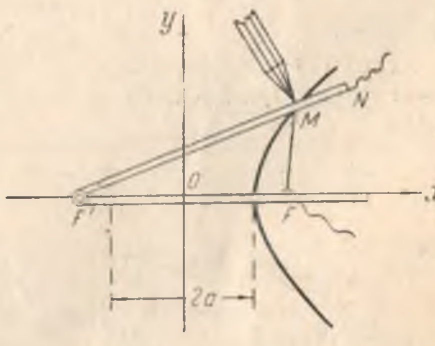
Шунга ўхшаш F дан MR билан ва F' дан NR билан ёй чизилса, уларнинг ўзаро кесишган Q нуқтаси гиперболага қарашли бўлади, чунки

$$FQ - QF' = MR - NR = 2a^*.$$

MN нинг давомида яна R', R'',... нуқталарни олиб, шу йўл билан давом этганда гиперболага қарашли ҳар қанча нуқталарни аниқлаш мумкин. Аниқланган нуқталар туташтирилса, гиперболанинг тақрибий шакли ҳосил бўлади.

2. Узлуксиз ҳаракат билан чизиш

Гиперболанинг фокуслари F ва F' ва ҳақиқий ўқининг узунлиги $2a$ бўлсин. Буларнинг ёрдами билан гипербола чизиш учун $2a$ дан кўра узунроқ бўлган бирорта чизғичнинг бир учини F' нуқтага шундай қилиб ўрнатамизки, уни шу нуқта атрофида айлантириш мумкин бўлсин (шакл 88).



Шакл 88.

Сўнгра чизғичнинг узунлигидан $2a$ миқдорича қисқароқ бўлган ипнинг бир учини чизғичнинг N учига ва иккинчи учини F нуқтага ўрнатамиз. Энди, қаламнинг учи билан ипни бирор M нуқтада чизғичга тегизиб туриб, уни қалам билан бир томонга тортиб борсак, бунинг натижасида гиперболанинг ёйи ҳосил бўлади, чунки

* Учбурчакнинг хоссасига мувофиқ ёй чизилган радиусларнинг айирмаси $< FF'$ ва йиғиндиси $> FF'$ бўлиши лозим.

асимптота деб аталган тўғри чизиқларга чексиз яқинлашиб боради.

Бу масалани аниқлаш учун ушбу

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

гиперболани координаталар бошидан ўтган бирор

$$y = kx \tag{2}$$

тўғри чизиқ билан кесиб кўрамиз. Бунинг учун (1) ва (2) тенгламаларини бирлаштириб ечишга тўғри келади, чунки чизиқларнинг ўзаро кесишган нуқталарининг координаталари ҳар иккаласи учун умумий булади. (2) ни (1) га қуйсак:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2x^2}{b^2} = 1$$

ёки

$$b^2x^2 - a^2k^2x^2 = a^2b^2,$$

ёки

$$x^2(b^2 - a^2k^2) = a^2b^2,$$

бундан:

$$x = \frac{ab}{\pm\sqrt{b^4 - a^2k^2}}; \tag{3}$$

буни (2) га қуйсак:

$$y = \frac{ab}{\pm\sqrt{b^2 - a^2k^2}}. \tag{4}$$

$b^2 - a^2k^2 > 0$ ёки $k^2 < \frac{b^2}{a^2}$ ёки $|k| < \frac{b}{a}$ булган ҳолда (3) ва (4) касрларнинг махражларидаги радикалнинг қиймати ҳақиқий булади; бу ҳолда x ва y нинг қийматлари ҳам ҳақиқий булиб, (2) тўғри чизиқ (1) гиперболани икки нуқтада кесади.

$b^2 - a^2k^2 < 0$ ёки $k^2 > \frac{b^2}{a^2}$ ёки $|k| > \frac{b}{a}$ бўлган ҳолда ҳалиги радикалнинг қиймати мавҳум булади ва бу ҳолда (2) тўғри чизиқнинг (1) гипербола билан кесишган нуқталари булмайди.

Энди фараз қилайлик, $b^2 - a^2k^2 = 0$ бўлсин, яъни $k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ёки бундан:

$$k_1 = \frac{b}{a}, \quad k_2 = -\frac{b}{a}. \tag{5}$$

$$F'M - FM = F'N - (FM + MN) = 2a.$$

§ 56. ТЕНГ ТОМОНЛИ ВА ҚЎШМА ГИПЕРБОЛА

Гиперболанинг каноник тенгламасини оламиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Агар бу тенгламанинг бирор томонининг ишораси тескари қилинса,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ ёки } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (2)$$

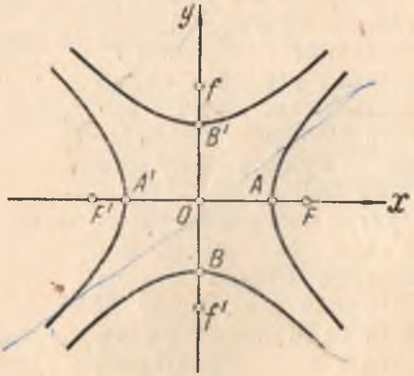
тенгламалар ҳосил бўлади. Бу тенгламаларни аввалги тенглама билан солиштириб қараганда x ва y нинг роллари алмашганлигини кўрамиз. Шунинг учун кейинги ҳар бир тенглама ҳам гиперболани ифода қилади, фақат:

1) унинг ҳақиқий уқи $BB' = 2b$ ва мавҳум уқи $AA' = 2a$ бўлади (демак, у абсцисса уқини кесмайди, шакл 89);

2) f ва f' фокуслари ордината уқида ва уларнинг ҳар бири координаталар бошидан $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ масофада туради;

3) унинг ҳар бир нуқтасидан фокусларгача масофаларнинг айирмаси $2b$ га тенг ва

4) унинг параметри $\frac{a^2}{b}$ бўлади.



Шакл 89.

Агар (1) тенгламада $b = a$ фараз қилинса, бу ҳолда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ёки

$$x^2 - y^2 = a^2$$

бўлади. Бундай гипербола тенгтомонли гипербола дейилади.

§ 57. ГИПЕРБОЛАНИНГ АСИМПТОТАЛАРИ

Гиперболанинг муҳим хусусиятларидан бири шундаки, унинг нуқталари бошларидан узоқлашиб борган сари

Бу ифоданинг ўнг томонини $\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$ га кўпайтирамиз ҳам бўламиз. Бу чоқда:

$$QM = \frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \tag{10}$$

Бу ифода QM нинг қиймати x га боғлиқ эканлигини кўрсатади. Унинг ўнг томонидаги касрнинг сурати ўзгармас миқдор бўлгани учун унинг махражидаги x нинг қиймати ўсиб борганда, касрнинг ўзи (демак QM) камайиб боради. Бунга қараганда гиперболадаги M нуқтанинг абсциссаси ўнг томонга қараб узоқлашган сари M нуқтанинг ўзи ҳалиги RS тўғри чизиққа яқинлашиб боради ва x чексиз катта бўлганда QM нолга айланади:

$$\lim (QM) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right) = 0. \tag{11}$$

Иккинчи R_1S_1 тўғрисида ҳам шу йўл билан фикр юритганда ҳамон шу натижанинг ўзи келиб чиқади.

Шунинг билан, (6) тенгламалар билан ифодаланган гиперболанинг асимптоталари шундай хусусиятга эгаки, гиперболанинг нуқталари, унинг бошидан чексиз узоқлашиб борган сари, унинг тармоқлари чексиз равишда асимптоталарга яқинлашиб боради.

§ 58. ГИПЕРБОЛАНИНГ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТИ

Гиперболанинг фокуслари орасидаги масофанинг ҳақиқий ўқига нисбати унинг эксцентриситети дейилади ва у одатда e ҳарфи билан белгиланади, яъни

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}, \tag{1}$$

$c > a$ бўлгани учун гиперболада ҳамавақт $e > 1$.

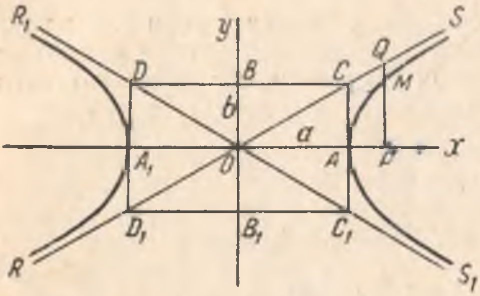
Эксцентриситетнинг геометрик маъносини текширамиз. Бунинг учун энг аввал (1) ифодадаги a ни ўз ҳолича қолдириб, b нинг қийматини орттириб борамиз. Бунинг натижасида e нинг қиймати ортиб боради. Иккинчи томондан $a = OA$ бўлиб, $b = OB$, OB_1, $OB_2, \ldots$ бўлган ҳолда, уларнинг асимптоталари: OC, OD, $OE, \ldots$ бўлади ва буларга қарашли гиперболалар 91-шаклдаги I, II, III,... бўлади.

$c = \sqrt{a^2+b^2}$ бўлгани учун гиперболанинг мавҳум ўқи ўсган сари унинг фокуси марказдан узоқлашиб боради ва

k нинг бу қийматларида (3) ва (4) да x ва y чексизликка айланади ва бу ҳолда (2) нинг кўриниши

$$y = +\frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x \tag{6}$$

бўлади, яъни координаталар бошидан ўтган иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Бу чизиқлар гиперболанинг асимптоталари дейилади.



Шакл 90.

(6) нинг тузилишига қараганда, бу чизиқларни, уларнинг бурчак коэффициентлари ёрдами билан ясаш қулайдир. Масалан, биринчи тўғри чизиқни ясаш учун, координаталар бошидан абсцисса ўқининг мусбат йўналишида $OA = a$ ни ва A нуқтада абсцисса ўқига перпендикуляр бўлган чизиқда $AC = b$ ни ўлчаб олиб, O ва C нуқталардан RS тўғри чизиқ ўтказилса кифоя қилади (шакл 90). Шу усул билан иккинчи чизиқни ҳам ясаш мумкин (R_1S_1).

Гипербола асимптоталарининг хоссаларини ойдинлаштириш мақсади билан RS нинг бирор Q нуқтасидан абсцисса ўқига перпендикуляр туширамиз. Бунинг гипербола билан учрашган нуқтаси $M(x, y)$ ва абсцисса ўқи билан учрашган нуқтаси $P(x, 0)$ бўлсин.

QP ва MP ординаталар орасидаги QM айирмани текширамиз. $M(x, y)$ нуқта гиперболада бўлгани учун

$$MP = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{7}$$

ва Q нуқта RS да бўлгани учун

$$QP = \frac{b}{a}x, \tag{8}$$

демак, изланган айирма қуйидагича бўлади:

$$QM = QP - MP = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right). \tag{9}$$

шакли ўткирлашиб боради ва y ўсган сари гиперболанинг шакли кенгайиб боради.

Мисол. Тенгламаси $5x^2 - 9y^2 - 45 = 0$ бўлган гиперболанинг эксцентриситети ва асимптоталари топилсин.

$$5x^2 - 9y^2 = 45,$$

ёки

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1,$$

бундан

$$a^2 = 9,\ b^2 = 5,\ a = 3,\ b = \sqrt{5}.$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Асимптоталарининг тенгламалари

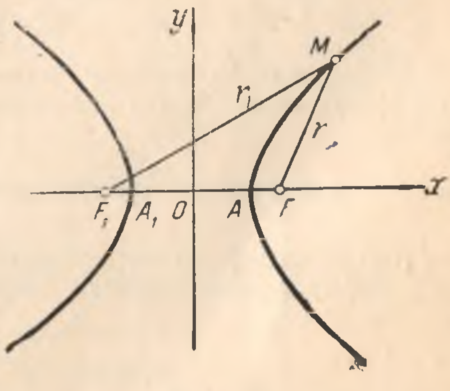
$$y = \frac{\sqrt{5}}{3} x \text{ ва } y = -\frac{\sqrt{5}}{3} x.$$

§ 59. ГИПЕРБОЛАНИНГ РАДИУС-ВЕКТОРЛАРИ

Гиперболадаги бирор нуқта билан унинг бирор фокусигача бўлган масофа у нуқтанинг радиус-вектори дейилади.

Фараз қилайлик, гиперболадаги бирор $M(x, y)$. нуқтанинг радиус-векторлари $MF = r$ ва $MF_1 = r_1$ бўлсин (шакл 92). $M(x, y)$ ва $F(c, 0)$, $M(x, y)$ ва $F_1(-c, 0)$ нуқталар орасидаги масофалар қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} r = MF &= \\ = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}&, \\ r_1 = MF_1 &= \\ = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}&. \end{aligned}\right| \quad (1)$$



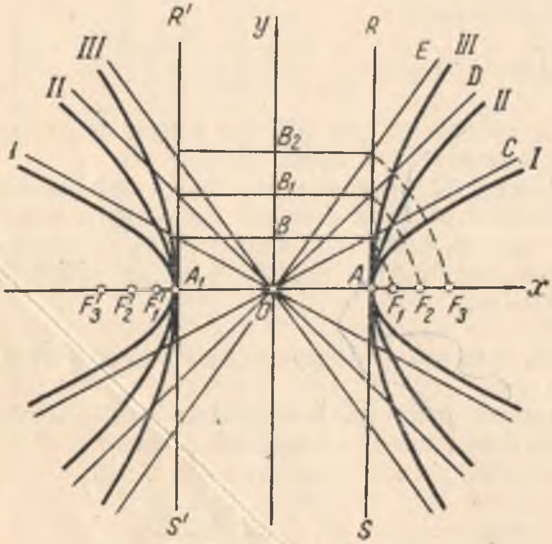
Шакл 92.

Буларнинг ҳар бирини квадратга кўтарсак:

$$r^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$
$$r_1^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

гиперболанинг ўзи кенгайиб RS ва $R'S'$ тўғри чизиқларга яқинлашиб келади; мавҳум ўқи чексиз катта бўлганда гиперболанинг асимптоталари ордината ўқи билан ва ўзи RS ва $R'S'$ тўғри чизиқлар билан бирлашиб кетади. Бу ҳолда гиперболанинг фокуси марказдан чексиз узоқда бўлади.

Аксинча гиперболанинг мавҳум ўқи кичиклашиб борган сари унинг фокуси A нуқтага яқинлашиб келади (чунки $c = \sqrt{a^2+b^2}$) ва $e = \frac{c}{a}$ камаяди. Бу ҳолда гиперболанинг шакли ўткирлашиб, SR ва $S'R'$ тўғри чизиқлардан узоқлашиб боради. Гиперболанинг мавҳум ўқи чексиз камайиб ли-



Шакл 91.

мити 0 бўлган ҳолда унинг иккала асимптоталари абсцисса ўқи билан ва гиперболанинг ўзи унинг Ox ва $O'x'$ томонлари билан бирлашиб кетади. Бу ҳолда

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a \text{ ва } e = \frac{a}{a} = 1.$$

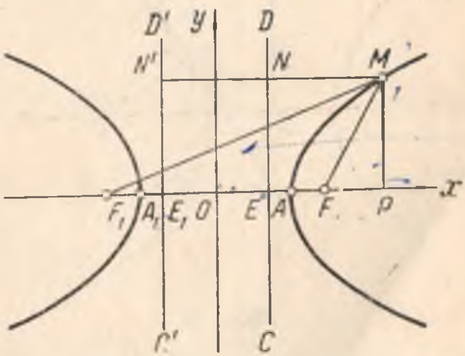
Шуннинг билан, натижада: *e гиперболанинг шаклини тасвир қилади; e нинг қиймати 1 дан ∞ гача ўзгаради; e нинг қиймати 1 га яқинлашган сари гиперболанинг*

Бу тенгламалардан ҳар бири ордината ўқига параллель бўлган тўғри чизиқни ифода қилади. $e=\frac{c}{a}$ бўлгани учун кейинги тенгламалардан:

$$x=+\frac{a^2}{c} \text{ ва } x=-\frac{a^2}{c}. \tag{2}$$

(1) ёки (2) тенгламалар билан ифода қилинган тўғри чизиқлар гиперболанинг **директрисалари** дейилади. $a<c$ бўлгани учун $\frac{a^2}{c}<a$ бўлади. Демак, гиперболанинг директрисалари уни кесмайди (шакл 93. CD ва $C'D'$ тўғри чизиқлар).

Энди гиперболадаги бирор $M(x, y)$ нуқтадан абсцисса ўқига параллель чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқнинг директрисалар билан учрашган нуқталари N ва N' бўлсин; M нуқта билан F ва F_1 фокусларни ўзаро туташтирамиз. $M(x, y)$ нуқта гиперболада бўлгани учун радиус-вектор формуласи бўйича:



Шакл 93.

$$MF=r=ex-a=$$

$$=\frac{c}{a}x-a=\frac{cx-a^2}{a};$$

шаклга мувофиқ

$$NM=EP=OP-OE=x-\frac{a^2}{c}=\frac{cx-a^2}{c},$$

шунинг учун:

$$MF:NM=\frac{cx-a^2}{a}:\frac{cx-a^2}{c}=\frac{c}{a}=e.$$

Шунга ўхшаш

$$MF':MN'=e.$$

Демак, *гиперболадаги бирор нуқтадан унинг бирор фокусигача масофасининг у нуқта билан шу фокусга*

Кейинги тенгламадан аввалгиси айириб олинса,

$$r_1^2 - r^2 = 4cx,$$

ёки

$$(r_1 + r)(r_1 - r) = 4cx. \quad (2)$$

Гиперболанинг таърифи бўйича

$$r_1 - r = 2a. \quad (3)$$

Бу (2) га қўйилса:

$$2a(r_1 + r) = 4cx \text{ ёки } r_1 + r = 2\frac{c}{a}x. \quad (4)$$

(4) дан (3) айириб олинса:

$$2r = 2\frac{c}{a}x - 2a \quad \text{ёки} \quad r = \frac{c}{a}x - a \quad (5)$$

(3) билан (4) ни қўшганда

$$2r_1 = 2\frac{c}{a}x + 2a \text{ ёки } r_1 = \frac{c}{a}x + a \quad (6)$$

$\frac{c}{a} = e$ бўлгани учун (5) ва (6) ифодаларнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} r &= ex - a, \\ r_1 &= ex + a. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Бу формулалар ёрдами билан гиперболада берилган $M(x, y)$ нуқтанинг радиус-векторлари a ва e орқали аниқланади.

§ 60. ГИПЕРБОЛАНИНГ ДИРЕКТРИСАЛАРИ

Утган параграфда гиперболанинг радиус-векторлари учун ушбу формулаларни чиқарган эдик:

$$\left.\begin{aligned} r &= ex - a, \\ r_1 &= ex + a. \end{aligned}\right\}$$

Бу формулаларнинг ўнг томонларини нолга тенглаб, сўнгра уларнинг геометрик маъноларини текширамиз:

$$\left.\begin{aligned} a - ex &= 0, \\ a + ex &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

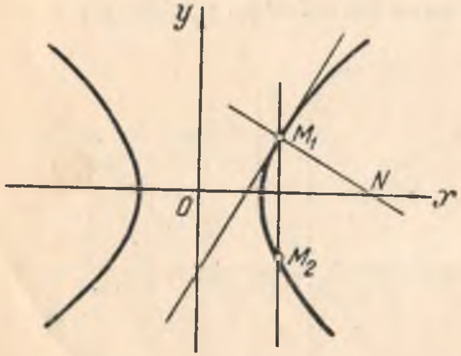
қарашли директрисаси орасидаги масофага нисбати ўзгармас миқдорга (е га) тенгдир.

§ 61. ГИПЕРБОЛАГА УРИНМА ВА НОРМАЛЬ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Фараз қилайлик, гиперболанинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

бўлсин. Бунинг бирор $M_1(x_1, y_1)$ нуқтасидан ўтган уринманинг тенгламасини тузиш учун, гиперболада яна бирор $M_2(x_2, y_2)$ нуқта олиб, иккала нуқтадан кесувчи тўғри чизиқ ўтказамиз (шакл 94).



Шакл 94.

Бу тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{2}$$

бўлади. $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар гиперболада бўлгани учун:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

(4) дан (3) ни айириб олсак:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{a_2} - \frac{y_2^2 - y_1^2}{b^2} = 0,$$

ёки

$$\frac{(x_2 + x_1)(x_2 - x_1)}{a^2} - \frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{b^2} = 0,$$

бундан

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)},$$

ёки буни (2) га қўйсак

$$y - y_1 = \frac{b^2(x_2 + x_1)}{a^2(y_2 + y_1)}(x - x_1). \quad (5)$$

M_2 нуқта M_1 нуқтага интилиб, M_1M_2 кесувчи уринма ҳолига келганда $x_2 = x_1$ ва $y_2 = y_1$ бўлади. Шунинг учун (5) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = \frac{b^2 \cdot 2x_1}{a^2 \cdot 2y_1}(x - x_1),$$

ёки

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1),$$

ёки

$$a^2 y y_1 - a^2 y_1^2 = b^2 x x_1 - b^2 x_1^2,$$

ёки

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2,$$

ёки

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2},$$

ёки (3) га асосан:

$$\frac{x x_1}{a^2} - \frac{y y_1}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Изланган уринманинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади. Ҳақиқатда у гиперболанинг $M_1(x, y_1)$ нуқтасидан ўтган тўғри чизиқни ифода қилади.

Энди нормаль тенгламасини тузамиз. Нормаль $M_1(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтгани учун умуман унинг тенгламаси

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

бўлади. Бундаги k нинг қийматини аниқлаш учун уринманинг бурчак коэффициентини топишга тўғри келади. Уринманинг бурчак коэффициенти k фараз қилинса, (6) дан

$$k_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Нормаль $M_1(x_1, y_1)$ нуқтада уринмага перпендикуляр бўлгани учун

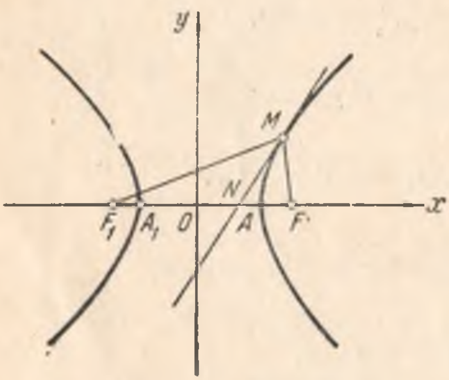
$$k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}. \qquad (8)$$

Буни (7) га қўйсак, нормаль учун бундай тенглама келиб чиқади:

$$y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1). \qquad (9)$$

§ 62. ГИПЕРБОЛАГА ЎТКАЗИЛГАН УРИНМАНИНГ ХОССАСИ

Фараз қилайлик, гиперболадаги бирор $M(x_1, y_1)$ нуқтадан уринма ўтказилган бўлсин (шакл 95). Агар гиперболанинг тенгламаси $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ фараз қилинса, у ҳолда $M(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтган уринманинг тенгламаси



Шакл 95.

$$b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2 \quad (1)$$

бўлади. Бу уринманинг MF ва MF_1 радиус-векторлар билан ташкил қилган бурчакларининг ўзаро тенглигини исбот қиламиз. Агар (1) тенгламада $y = 0$ фараз қилинса, $x = ON$ бўлади, яъни

$$b^2xx_1 = a^2b^2$$

ва

$$x = \frac{a^2}{x_1} = ON. \qquad (2)$$

Шаклга мувофиқ:

$$NF = OF - ON = c - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}\left(\frac{cx_1}{a} - a\right) = \frac{a}{x_1}(ex_1 - a),$$

$$NF_1 = OF_1 + ON = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}\left(\frac{cx_1}{a} + a\right) = \frac{a}{x_1}(ex_1 + a),$$

ёки булардан биринчиси иккинчисига ҳадлаб бўлинса:

$$\frac{NF}{NF_1} = \frac{ex_1 - a}{ex_1 + a}.$$

Гиперболанинг радиус-вектори учун чиқарилган формулалар бўйича:

$$ex_1 - a = MF, \quad ex_1 + a = MF_1,$$

демак,

$$\frac{NF}{NF_1} = \frac{MF}{MF_1}. \qquad (3)$$

Бу натижага қараганда гиперболанинг M нуқтасидан ўтган MN уринма F_1MF бурчакнинг биссектрисаси бўлади. Шу нинг билан: *гиперболанинг бирор нуқтасидан ўтган уринма у нуқтанинг радиус-вектори билан ўзаро тенг бурчаклар ҳосил қилади.*

Уринманинг бу хоссаси уни ясаш учун жуда кулай йўл очиб беради. Масалан, гиперболанинг бирор M нуқтасидан уринма ўтказиш учун у нуқтани гиперболанинг F ва F_1 фокуслари билан туташтириб, ҳосил бўлган F_1MF бурчак тенг иккига бўлинса, MN биссектриса изланган уринманинг ўзи бўлади.

§ 63. ГИПЕРБОЛАНИНГ ДИАМЕТРЛАРИ

Умуман диаметрнинг таърифи юқорида берилган бўлса-да, биз бу ерда яна бир мартаба эслатиб ўтамиз. *Эгри чизиқнинг диаметри деб, берилган йўналишга параллель бўлган ватарларнинг ўрта нуқталаридан иборат бўлган геометрик ўринга айтилади.*

Шакл 96.

Гиперболанинг бир-бирига параллель бўлган AB, A_1B_1, A_2B_2,... ватарларидан бирортасининг, масалан, AB нинг ўртасидаги M нуқтанинг координаталарини x ва y фараз қилиб, уларнинг орасидаги муносабатни топамиз. k ни ўзгармас ва l ни ўзгарувчи параметр фараз қилиб, параллель ватарларнинг ҳаммасини

$$y = kx + l \tag{1}$$

тенглама билан ифода қилиш мумкин (шакл 96).

Ватарлардан бирортасининг, масалан, AB ниıг гиперболa билан кесишган нуқталарини $A(x_1, y_1)$ ва $A(x_2, y_2)$ фараз қиламиз. Буларни аниқлаш учун гиперболанинг тенгламаси билан (1) тенгламани бирлашган ҳолда ечишга тўғри келади. Шунинг учун гиперболанинг тенгламасини

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \tag{2}$$

фараз қилиб, (1) дан y нинг ифодасини (2) га қўямиз:

$$b^2x^2 - a^2(kx + l)^2 = a^2b^2,$$

ёки

$$b^2x^2 - a^2k^2x^2 - 2a^2kxl - a^2l^2 = a^2b^2,$$

ёки

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2klx - a^2(l^2 + b^2) = 0,$$

ёки

$$x^2 - \frac{2a^2kl}{b^2 - a^2k^2}x - \frac{a^2(l^2 + b^2)}{b^2 - a^2k^2} = 0.$$

Бу квадрат тенгламанинг илдизлари x_1 ва x_2 фараз қилинса, бу ҳолда (квадрат тенглама илдизларининг хоссасига мувофиқ):

$$x_1 + x_2 = \frac{2a^2kl}{b^2 - a^2k^2},$$

бундан

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}. \tag{3}$$

Қилинган фараз бўйича $M(x, y)$ нуқта AB ватарнинг ўртасида бўлгани учун

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

ёки (3) га асосан

$$x = \frac{a^2kl}{b^2 - a^2k^2}. \tag{4}$$

x учун аниқланган бу ифода (1) га қўйилса:

$$y = \frac{a^2k^2l}{b^2 - a^2k^2} + l,$$

ёки

$$y = \frac{b^2l}{b^2 - a^2k^2}$$

бўлади; x ва y ни ўзаро боғлаш мақсадида бу тенгламани (4) га ҳадлаб бўламиз:

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2}{a^2k},$$

бундан

$$\boxed{y = \frac{b^2}{a^2k}\,x.} \tag{5}$$

Изланган диаметрнинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади, чунки у параллель ватарларнинг ўртасидаги M нуқтанинг координаталари орасидаги муносабатни ифода қилади. (5) тенглама координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқдан иборат. Демак, эллипснинг диаметри каби, гиперболанинг диаметри ҳам унинг марказидан ўтади (DE).

Ватарларнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги α ва буларга қарашли DE диаметрнинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги β фараз қилниса:

$$\operatorname{tg}\alpha = k, \ \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2k},$$

бундан

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}. \tag{6}$$

DE диаметрга параллель бўлган ватарларнинг ҳам абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги β бўлади. Агарда бу ватарларга қарашли диаметр $D'E'$ ва унинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги β' фараз қилинса, (6) га асосан:

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\beta' = \frac{b^2}{a^2}, \tag{7}$$

демак

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}\beta',$$

ёки

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta'. \tag{8}$$

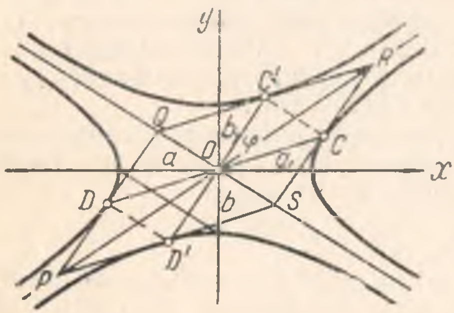
Бу эса AB ватарнинг $D'E'$ диаметрга параллель эканлигини кўрсатади. Натижада: *DE диаметр билан тенг иккига бўлинган ватарлар иккинчи $D'E'$ диаметрга параллель бўлади*, *яъни DE* ва $D'E'$ диаметрлар бир-бирига *қўшма* бўлади. Гиперболанинг ўқлари ҳам бу хусусиятга эга. Шунинг учун уларни (ўқларни) бошқа диаметрлардан ажратиш учун б о ш д и а м е т р л а р дейилади.

§ 64. АПОЛЛОНИЙ ТЕОРЕМАЛАРИ

1. Фараз қилайлик, $C(x_1, y_1)$ ва $C'(x_2, y_2)$ нуқталар ушбу

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ва } \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \qquad (1)$$

қўшма гиперболаларда бўлсин (шакл 97). Бу ҳолда DC ва $D'C'$ диаметрларнинг тенгламалари қуйидагича бўлади:



Шакл 97.

$$y=\frac{y_1}{x_1}x \text{ ва } y=\frac{y_2}{x_2}x.$$

Қўшма диаметрларнинг шарти бўйича

$$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{b^2}{a^2},$$

буидан

$$\frac{x_1}{a}\cdot\frac{x_2}{a}=\frac{y_1}{b}\cdot\frac{y_2}{b}.$$

Бу тенгликни бундай пропорция шаклида ёзиш мумкин:

$$\frac{\frac{y_2}{b}}{\frac{x_1}{a}}=\frac{\frac{x_2}{a}}{\frac{y_1}{b}}=\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{y_2}{b}\right)^2-\left(\frac{x_2}{a}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a}\right)-\left(\frac{y_1}{b}\right)^2}}. \qquad (2)$$

$C(x_1, y_1)$ ва $C'(x_2, y_2)$ нуқталардан биринчиси биринчи гиперболада, иккинчиси иккинчи гиперболада бўлгани учун:

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1 \text{ ва}$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=-1, \qquad (3)$$

шунинг учун (2) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{\frac{y_2}{b}}{\frac{x_1}{a}}=\frac{\frac{x_2}{a}}{\frac{y_1}{b}}=\pm 1,$$

бу эса ўз навбатида ушбу икки тенгликка бўлинади:

$$\frac{x_2}{a} = \pm \frac{y_1}{b}, \quad \frac{y_2}{b} = \pm \frac{x_1}{a}. \tag{4}$$

Агар $DC = 2a_1$, $D'C' = 2b_1$, ёки $OC = a_1$ ва $OC' = b_1$ фараз қилинса:

$$a_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad b_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

ёки (4) га асосан:

$$a_1^2 = x_1^2 + \frac{b^2 x_2^2}{a^2} = \frac{a^2 x_1^2 + b^2 x_2^2}{a^2},$$

$$b_1^2 = \frac{a^2 y_1^2}{b^2} + y_2^2 = \frac{a^2 y_1^2 + b^2 y_2^2}{b^2};$$

буларнинг биринчисидан иккинчиси ҳадлаб айириб олинса

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) + b^2\left(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2}\right),$$

ёки (3) га асосан:

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2,$$

ёки

$$4a_1^2 - 4b_1^2 = 4a^2 - 4b^2.$$

ёки

$$(2a_1)^2 - (2b_1)^2 = (2a)^2 - (2b)^2. \tag{5}$$

Бу тенглик Аполлонийнинг 1-теоремасини ифода қилади. Бунга қараганда: *қўшма диаметрларнинг квадратлари айирмаси гипербола ўқлари квадратларининг айирмасига тенг.*

2. Энди қўшма ярим диаметрларда ясалган COC' учбурчакнинг юзини топамиз. Уни S фараз қилсак (шакл 97):

$$S = \pm \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

бўлади, чунки учбурчакнинг учлари $O(0, 0)$, $C(x_1, y_1)$ ва $C'(x_2, y_2)$ нуқталардан ўтади; (4) га асосан S нинг ифодасини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$S = \pm \frac{1}{2}\left(x_1 \cdot \frac{bx_1}{a} - y_1 \cdot \frac{ay_1}{b}\right) = \pm \frac{ab}{2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right),$$

ёки $C(x_1, y_1)$ нуқта гиперболада бўлгани учун

$$S = \frac{1}{2} ab. \qquad (6)$$

Иккинчи томондан агар қўшма диаметрлар орасидаги COC' бурчак φ фараз қилинса, COC' учбурчакнинг юзи

$$S = \frac{1}{2} a_1 b_1 \sin \varphi$$

бўлади. Демак,

$$\frac{1}{2} a_1 b_1 \sin \varphi = \frac{1}{2} ab,$$

ёки

$$a_1 b_1 \sin \varphi = ab. \qquad (7)$$

Бу тенгликнинг чап томони $COC'R$ параллелограмнинг юзини ва ўнг томони гиперболанинг ярим ўқларида ясалган тўғри тўртбурчакнинг юзини ифода қилади.

Эллипсда исбот қилинганидек, бу ерда ҳам C нуқтадан ўтган уринманинг $D'C'$ диаметрга ва C' нуқтадан ўтган уринманинг DC диаметрга параллеллигини исбот қилиш мумкин. Шунинг учун $PQRS$ — параллелограм бўлади ва $COC'R$ параллелограмнинг юзи $PQRS$ параллелограм юзининг тўртдан бирига тенг бўлади. Буни эътиборга олиб, (7) нинг иккала томонини 4 га кўпайтирамиз:

$$4a_1 b_1 \sin \varphi = 4ab. \qquad (8)$$

Бу тенглик Аполлонийнинг 2-теоремасини ифода қилади. Бунга қараганда: *гиперболанинг қўшма диаметрларида ясалган параллелограмнинг юзи унинг ўқларида ясалган тўғри тўртбурчакнинг юзига тенг.*

§ 65*. ГИПЕРБОЛАНИНГ ҚЎШМА ДИАМЕТРЛАРИГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Фараз қилайлик, DC ва D_1C_1 гиперболанинг қўшма диаметрлари бўлсин. Буларни янги x_1O_1 координаталар системасининг ўқлари фараз қилиб, гиперболанинг шу ўқларга нисбатан тенгламасини тузамиз.

Фараз қилайлик, Ox билан Ox_1 орасидаги бурчак α ва Ox билан Oy_1 орасидаги бурчак β бўлсин (шакл 98), Бу ҳолда координаталар алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади:

$$x = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta,$$
$$y = x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\beta.$$

Буларни қўшма гиперболанинг ушбу

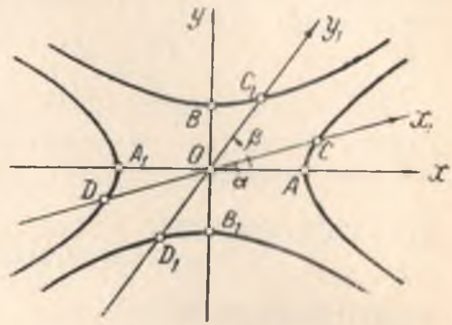
$$b^2x^2 - a^2y^2 = \pm a^2b^2$$

тенгламаларига қўямиз:

$$b^2(x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta)^2 - a^2(x_1\sin\alpha + y_1\sin\beta)^2 = \pm a^2b^2.$$

ёки

$$x_1^2\left(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha\right) + 2x_1y_1(b^2\cos\alpha\cos\beta - a^2\sin\alpha\sin\beta) + y_1^2\left(b^2\cos^2\beta - a^2\sin^2\beta\right) = \pm a^2b^2. \quad (1)$$



Шакл 98.

Қўшма диаметрнинг шарти бўйича

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2},$$

ёки

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b^2}{a^2},$$

ёки

$$a^2\sin\alpha\sin\beta - b^2\cos\alpha\cos\beta = 0;$$

шунинг учун (1) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$x_1^2\left(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha\right) + y_1^2\left(b^2\cos^2\beta - a^2\sin^2\beta\right) = \pm a^2b^2. \quad (2)$$

Фараз қилайлик, $OC = a_1$, $OC_1 = b_1$ бўлсин. $C(a_1, 0)$ ва $C_1(0, b_1)$ нуқталар гиперболаларда бўлгани учун уларнинг координаталари кейинги тенгламани қаноатлантириши лозим. Демак:

$$a_1^2\left(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha\right) = a^2b^2,$$

$$b_1^2\left(b^2\cos^2\beta - a^2\sin^2\beta\right) = -a^2b^2,$$

булардан

$$b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha = \frac{a^2b^2}{a_1^2},$$

$$b^2\cos^2\beta - a^2\sin^2\beta = -\frac{a^2b^2}{b_1^2}.$$

Буларни (2) га қўйиб, сўнгра a^2b^2 га қисқартирилса, гиперболанинг икки қўшма диаметрларига нисбатан ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{y_1^2}{b_1^2} = \pm 1.$$

Шунинг билан гиперболанинг тенгламаси бу ҳолда ҳам ўз шаклини сақлайди.

§ 66*. ГИПЕРБОЛАНИНГ АСИМПТОТАЛАРИГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Фараз қилайлик, гиперболанинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

бўлсин: Ox' ва Oy' унинг асимптоталари бўлсин.

$\angle xOy' = \beta$ ва $\angle xOx' = 360° - \beta = \alpha$ фараз қилиб, (1) гиперболанинг асимптоталарига нисбатан тенгламасини тузамиз (шакл 99).

Координаталар алмаштириш формулалари бу ҳолга татбиқ қилинса:

$$x = x_1\cos(360° - \beta) + y_1\cos\beta = + x_1\cos\beta + y_1\cos\beta,$$
$$y = x_1\sin(360° - \beta) + y_1\sin\beta = - x_1\sin\beta + y_1\sin\beta,$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} x &= (x_1 + y_1)\cos\beta, \\ y &= (y_1 - x_1)\sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Иккинчи томондан

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a} \text{ ёки } \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{b}{a}$$

бўлгани учун, бундан:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\cos\beta}{a} = \frac{\sqrt{\sin^2\beta + \cos^2\beta}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

демак,

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}\right| \qquad (3)$$

Булар (2) га қўйилса:

$$x = \frac{(x_1+y_1)\,a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{(y_1-x_1)b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (4)$$

x ва y учун аниқланган бу ифодаларни (1) тенгламага қўямиз:

$$\frac{(x_1+y_1)^2\,a^2}{a^2\,(a^2+b^2)} - \frac{(y_1-x_1)^2\,b^2}{b^2\,(a^2+b^2)} = 1,$$

ёки

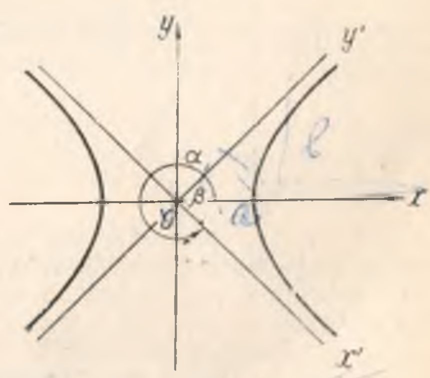
$$(x_1+y_1)^2 - (y_1-x_1)^2 = a^2+b^2,$$

ёки

$$4x_1y_1 = a^2+b^2,$$

ёки

$$x_1y_1 = \frac{a^2+b^2}{4},$$



Шакл 99.

ёки $a^2+b^2=c^2$ бўлгани учун $\frac{c^2}{4}=k^2$ фараз қилинса, гиперболанинг асимптоталарига нисбатан тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$x_1y_1 = k^2. \qquad (5)$$

§ 67. ГИПЕРБОЛАНИНГ ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ТЕНГЛАМАСИ

Гиперболанинг тенгламасини қутб координаталар системасида тузиш учун унинг F фокусини системаниг қутби ва ҳақиқий ўқининг F фокусидан A бошига қараб кетган йўналишни қутб ўқи фараз қиламиз (шакл 100).

Гиперболанинг бирор M нуқтасининг ўзгарувчи қутб координаталари r ва φ бўлсин, яъни

$$MF = r \text{ ва } \angle MFA = \varphi.$$

Декарт системасида $M(x, y)$ нуқтанинг радиус-вектори

$$r = ex - a \quad (1)$$

бўлади. Шаклга мувофиқ:

$$x = OP = OF + FP = c + FP.$$

MFP тўғрибурчакли учбурчакда

$$FP = MF \cos MFP = r \cos(180^\circ - \varphi) = -r \cos \varphi,$$

демак,

$$x = c - r \cos \varphi,$$

ёки буни (1) га қўйсак,

$$r = ec - er \cos \varphi - a,$$

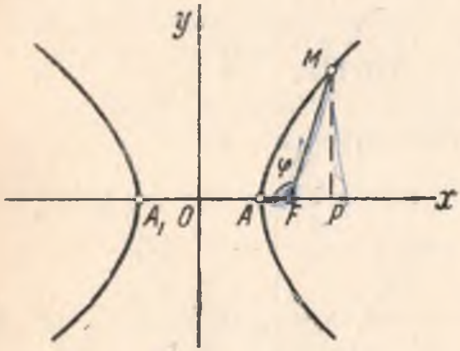
ёки

$$r(1 + e \cos \varphi) = ec - a,$$

ёки

$$r(1 + e \cos \varphi) = \frac{c^2 - a^2}{a},$$

$$r(1 + e \cos \varphi) = \frac{b^2}{a},$$



Шакл 100.

$\frac{b^2}{a} = p$ эди (гиперболанинг параметри). Буни кейинги тенгликка қўйиб, сўнгра уни r га нисбатан ечсак, гиперболанинг қутб тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \quad (e > 1)} \quad (2)$$

Саволлар ва масалалар

217. Гипербола деб нимага айтилади?

218. Гиперболанинг каноник тенгламасини тузишда координата ўқлари қандай ўтказилади?

219. Гиперболанинг параметри деб нимага айтилади?

220. Гиперболанинг таърифига асосланиб, уни қандай чизиш мумкин?

221. Гиперболанинг асимптоталари деб қандай чизиқларга айтилади?

222. Гиперболанинг эксцентриситети нима ва у қандай геометрик маънога эга?

223. Фокуслари орасидаги масофа $2\sqrt{11}$ бўлиб, ўзи (9, —4) нуқтадан ўтган гиперболанинг тенгламаси тузилсин.

224. Ҳақиқий ўқи 8 бўлиб, ўзи (10, 25) нуқтадан ўтган гиперболанинг тенгламаси тузилсин.

225. Гиперболанинг ўқлари координата ўқлари билан бирлашган ва маркази координаталар бошида. Бу гипербола (5, 3) ва (8, —10) нуқталардан ўтади. Унинг тенгламаси тузилсин.

226. Гиперболанинг тенгламаси $16x^2 - 25y^2 = 400$. Бунинг ўқлари, фокуслари ва эксцентриситети топилсин.

227. Тенгтомонли гиперболанинг ва унга қўшма бўлган гиперболанинг эксцентриситети аниқлансин.

228. Эксцентриситети $2\frac{1}{8}$ ва мавҳум ўқи 30 бўлган гиперболанинг тенгламаси тузилсин.

229. Гиперболанинг тенгламаси $x^2 - 4y^2 = 1$. Бунга қўшма бўлган гиперболанинг тенгламаси тузилсин ва унинг эксцентриситети топилсин.

230. Гиперболанинг тенгламаси $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Координат ўқларининг йўналишларини сақлаб, координаталар боши гиперболадаги (h, k) нуқтага келтирилса, тенгламанинг кўриниши қандай бўлади?

231. Гиперболанинг тенгламаси $9x^2 - 16y^2 = 144$. Бунинг абсциссаси $= 8$ бўлган нуқтасининг радиус-векторлари аниқлансин.

232. Гиперболанинг тенгламаси $16x^2 - 9y^2 = 144$. Бунинг ўнг тармоғида шундай нуқта топилсинки, бу нуқтанинг радиус-векторларидан бири иккинчисидан икки мартаба узун бўлсин.

233. Гиперболанинг тенгламаси $9x^2 - 16y^2 = 144$. Бунинг директрисаларининг тенгламалари топилсин.

234. Гиперболанинг тенгламаси $16x^2 - 25y^2 = 400$. Бунинг асимптоталари ва директрисаларининг тенгламалари тузилсин.

235. Тенгламаси $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ бўлган гиперболанинг асимптоталари орасидаги бурчаги аниқлансин;

236. Гиперболанинг эксцентриситети 2; бунинг асимптоталари орасидаги бурчаги аниқлансин.

237. Гиперболанинг асимптотаси билан директрисасининг кесишган нуқтасидан унинг марказигача масофаси гипербола ҳақиқий ўқининг ярмига тенг. Бу исбот қилинсин.

Эслатма. Бир-бири билан кесишган икки эгри чизиқ орасидаги бурчак деб, у нуқтадан ўтган уринмалар орасидаги бурчакни айтилади.

252. Тенгламаси $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ бўлган гиперболанинг шундай нуқтаси топилсинки, у нуқтадан ўтган нормаль абсцисса ўқи билан 135° бурчак ташкил қилсин.

253. Гиперболанинг иккала тармоқларининг исталган нуқталарига ўтказилган уринмалар билан асимптоталар иккита тенг учбурчак ташкил қилади. Бу исбот қилинсин.

254. Тенгламаси $x^2 - 4y^2 = 5$ бўлган гиперболанинг бирор нуқтасидан унинг асимптоталаригача бўлган масофаларининг кўпайтмаси аниқлансин.

255. Мавҳум ўқи $2\sqrt{3}$ бўлган гиперболада директрисаларининг тенгламалари $x \pm 2 = 0$. Гиперболанинг тенгламаси тузилсин.

256. Тенгтомонли гиперболада қўшма диаметрларнинг узунликлари ўзаро тенг. Бу исбот қилинсин.

257. CD ва $C'D'$ гиперболанинг қўшма диаметрлари; C нуқтадан иккинчи диаметрга CP перпендикуляр туширилган; бу перпендикуляр гиперболанинг ҳақиқий ўқини Q нуқтада кесади. Бу ҳолда:

$$CP \cdot CQ = b^2$$

бўлади. Бу исбот қилинсин.

238. Гиперболанинг фокусларидан уринмага туширилган перпендикуляр кесмаларнинг ўзаро кўпайтмаси гиперболанинг мавҳум ярим ўқининг квадратига тенг. Бу исбот қилинсин.

239. Тенгтомонли гиперболанинг асимптоталари ўзаро перпендикуляр. Бу исбот қилинсин.

240. Гиперболада $2c = 3a$. Бунинг асимптоталари орасидаги бурчаги ва эксцентриситети аниқлансин.

241. Гиперболанинг тенгламаси $4x^2 - y^2 = 15$. Бунинг шундай нуқтасидан уринма ўтказилсинки, у $8x - y - 3 = 0$ тўғри чизиққа параллель бўлсин.

242. Гиперболанинг тенгламаси $2x^2 - 3y^2 = 5$. Бунга $(1, 3)$ нуқтадан ўтказилган уринманинг тенгламаси тузилсин.

243. Гиперболанинг тенгламаси $x^2 - y^2 = 4$. Бунинг шундай нуқтасидан уринма ўтказилсинки, у $2x + 5y + 1 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлсин.

244. Гиперболанинг асимптоталари $y = \pm \frac{2}{3} x$. Тенгламаси $x - 4 = 0$ бўлган чизиқ бунга уринма бўлмоқда. Гиперболанинг тенгламаси тузилсин.

245. $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ гиперболанинг фокуси билан асимптотаси орасидаги масофа аниқлансин.

246. Гиперболанинг тенгламаси $8x^2 - 5y^2 - 40 = 0$ ва унинг диаметрларидан бирининг тенгламаси $y = 2x$. Бунга қўшма бўлган диаметрнинг тенгламаси тузилсин.

247. Гиперболанинг тенгламаси $4x^2 - 6y^2 - 24$. Бунинг икки қўшма диаметрлари орасидаги бурчак $45°$. Иккала диаметрнинг тенгламалари тузилсин.

248. Гиперболанинг тенгламаси $25x^2 - 16y^2 = 400$. Унинг $(5, 3)$ нуқтасидан шундай ватар ўтказилсинки, у ватар шу нуқтада тенг иккига бўлинсин.

249. Гиперболанинг тенгламаси $4x^2 - 6y^2 = 3$. Бунинг шундай диаметри топилсинки, унинг узунлиги 2 бўлсин.

250. Иккита қўшма гиперболанинг эксцентриситетлари e ва e_1 фарз қилинса, уларнинг орасида:.

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e_1^2} = 1$$

муносабат бўлади. Бунинг тўғрилиги исбот қилинсин,

251. Фокуслари умумий бўлган гипербола билан эллипснинг кесишган нуқталаридан тўғри бурчак ҳосил бўлади. Бу исбот қилинсин.

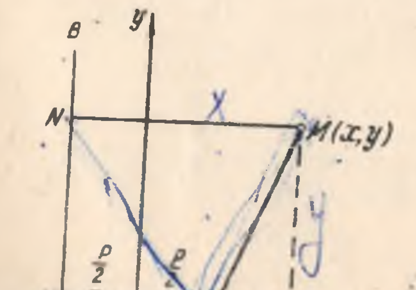
Ўнинчи боб

ПАРАБОЛА

Китобнинг бу боби иккинчи тартибли эгри чизиқлардан параболага бағишланади. Бу бобда параболанинг каноник тенгламаси чиқарилиб, унинг асосий хоссалари текширилади.

§ 68. ПАРАБОЛАНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

Параболанинг таърифи. *Ҳар бир нуқтасидан — берилган нуқтагача ва берилган тўғри чизиққача масофалари ўзаро тенг бўлган геометрик ўрин парабола дейилади.*



Шакл 101.

Бу таърифга асосланиб, параболанинг тенгламасини тузиш мумкин. Берилган нуқта F ва берилган тўғри чизиқ AB бўлсин (шакл 101). F нуқтадан ўтиб, AB га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни абсцисса ўқи қабул қиламиз. AB нинг абсцисса ўқи билан учрашган нуқтаси C бўлсин; ордината ўқини абсцисса уқига перпендикуляр қилиб CF ниг уртаси O нуқтадан утказамиз. $M(x,\ y)$ параболанинг бирор нуқтаси булсин:

$$x = OP, \quad y = MP.$$

Берилган нуқта билан берилган чизиқнинг орасидаги масофани p фараз қиламиз, яъни $CF = p$, бу ҳолда

$$CO = OF = \frac{p}{2}.$$

Параболанинг таърифи буйича

$$MN = MF.$$

Шаклга асосан:

$$MN = PC = PO + OC = x + \frac{p}{2};$$

$$MF = \sqrt{MP^2 + PF^2} = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2},$$

демак,

$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Бу тенгламани соддалаштириш мақсади билан унинг иккала томонини квадратга кутарамиз:

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

ёки

$$y^2 + x^2 - px + \frac{p^2}{4} = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

ёки

$$y^2 - px = px$$

ёки

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

x ва y параболанинг ихтиёрий нуқтасининг координаталари булгани учун, бу тенглама биз излаган тенгламанинг ўзи, яъни параболанинг каноник тенгламаси булади.

Берилган F нуқта параболанинг фокуси; берилган AB тўғри чизиқ параболанинг директрисаси ва p эса параболанинг параметри дейилади.

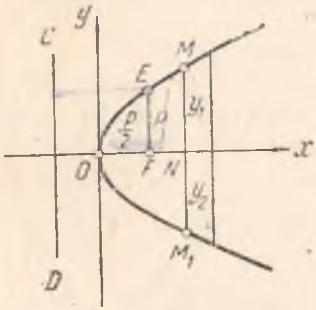
§ 69. ПАРАБОЛАНИНГ ШАКЛИНИ УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ БЎЙИЧА ТЕКШИРИШ

1. Параболанинг тенгламаси y га нисбатан ечилса,

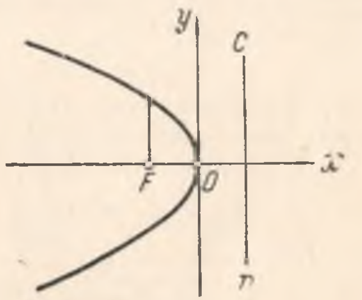
$$y = \pm \sqrt{2px} \qquad (1)$$

бўлади. Бунга қараганда y нинг қиймати ҳақиқий бўлиши учун x га фақат мусбат қиймат беришга тўғри келади ($p > 0$). Агарда $x = 0$ бўлса, $y = 0$ бўлади. Демак, парабола координаталар бошидан ўтади ва x га берилган ҳар бир мусбат қийматга қараб y учун ҳамавақт икки ҳақиқий қиймат тўғри келади. Буларнинг абсолют қийматлари тенг бўлиб, фақат ишоралари тескаридир. Масалан, $x = ON$ бўлганда $y_1 = NM$, $y_2 = NM_1$ ва $|y_1| = |y_2|$ бўлади. Бу эса параболанинг абсцисса ўқига нисбатан симметрик эканлигини кўрсатади.

x нинг қиймати 0 дан ∞ гача ўсганда y нинг абсолют қиймати $\pm\infty$ гача ўзгаради. Бу эса параболанинг чексиз ва очиқ эгри чизиқдан иборат эканини кўрсатади. Парабола-



Шакл 102.



Шакл 103.

нинг симметрия ўқи (Ox) унинг ўқи дейилади ва у ўқнинг парабола билан учрашган O нуқтаси параболанинг боши дейилади (шакл. 102.)

Параболанинг тенгламасини тузишда биз унинг фокусини директрисасининг ўнг томонида фараз қилган эдик; шунинг учун $p > 0$ эди. Аксинча унинг фокусини директрисасидан чапда фараз қилганда параболанинг тенгламаси

$$y^2 = -2px$$

бўлади ва бундан

$$y = \pm\sqrt{-2px}. \qquad (2)$$

Бу ҳолда парабола ордината ўқидан чапда бўлади, чунки x га фақат манфий қиймат берган чоқдагина y ҳақиқий бўлади. Бу абсцисса ўқининг манфий бўлаги унинг симметрия ўқи бўлади (шакл 103).

Агар парабола тенгламасидаги ўзгарувчи координаталарнинг роллари алмаштирилса, тенгламанинг кўриниши

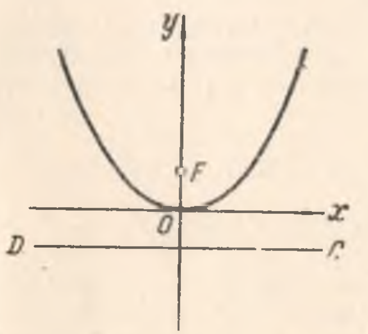
$$x^2 = 2py \quad (p > 0) \tag{3}$$

бўлади. Бу ҳолда параболанинг фокуси ордината ўқининг мусбат томонида, директрисаси бўлса абсцисса ўқига параллель ва унинг остида бўлади. Шунинг билан, бу ҳолда параболанинг ўзи абсцисса ўқидан юқорида бўлиб, ордината ўқи эса параболанинг ўқи бўлади (шакл 104).

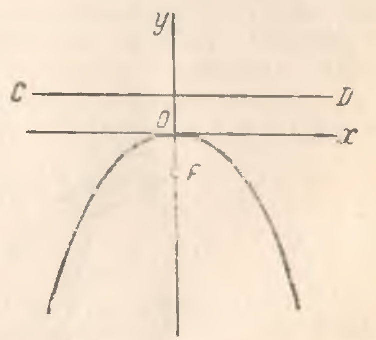
Аксинча, параболанинг фокуси ордината ўқининг манфий томонида бўлса, кейинги тенгламанинг кўриниши

$$x^2 = -2py \quad (p > 0) \tag{4}$$

бўлади. Бу ҳолда парабола абсцисса ўқидан пастда бўлади, чунки y га манфий қиймат берган чоқдагина x нинг қиймати ҳақиқий бўлади (шакл 105).



Шакл 104.



Шакл 105.

2. Агар $x = \frac{p}{2} = OF$ фараз қилинса, (1) дан $y = \pm p$ бўлади. Демак, параболанинг фокусига тегишли ординатаси унинг параметри p га тенг (шакл 102). Параболанинг бирор нуқтаси билан унинг фокуси орасидаги масофанинг у нуқта билан директрисаси орасидаги масофасига нисбати параболанинг эксцентриситети дейилади ва у одатда e билан белгиланади. Параболанинг таърифига мувофиқ бу нисбат 1 га тенг: $e = 1$. $y^2 = 2px$ параболанинг директрисаси ордината ўқига параллель бўлиб, ундан масофаси $-\frac{p}{2}$ бўлгани учун, унинг тенгламаси

$$x + \frac{p}{2} = 0$$

$r = x + \frac{p}{2}$
$x + \frac{p}{2} = 0$

бўлади. Параболанинг бирор $M(x, y)$ нуқтаси билан фокус орасидаги масофаси (шакл 101)

$p = 10$.

$$MF = MN = PC = x + \frac{p}{2}$$

бўлади. Шунинг билан параболанинг бирор $M(x, y)$ нуқтасининг радиус-вектори (r) қуйидагича ифода қилинади:

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{5}$$

Мисол. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 20x$. Бунинг параметри, директрисаси ва абсциссаси $= 7$ бўлган нуқтасининг радиус-вектори аниқлансин.

Берилган тенгламани параболанинг умумий тенгламаси билан солиштириб қараганда $2p = 20$, демак, $p = 10$. Шунинг учун директрисасининг тенгламаси $x + 5 = 0$ ва радиус-вектори $r = 7 + 5 = 12$ бўлади.

§ 70. ПАРАБОЛАНИ ЧИЗИШ

1. Нуқталар ёрдами билан чизиш

а) Параболани нуқталар ёрдами билан чизиш учун тўғридан-тўғри унинг таърифидан фойдаланиш мумкин. Фараз қилайлик, параболанинг фокуси F ва директрисаси CD бўлсин (шакл 106). F дан CD га перпендикуляр тушириб, уни иккала томонга давом эттирамиз. Бу чизиқнинг CD билан учрашган нуқтаси E бўлсин. Бу ҳолда EF нинг ўртаси бўлган O нуқта параболанинг боши бўлади, чунки $EO = OF$.

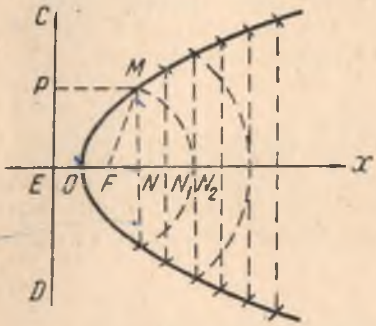
Сўнгра OF нинг давомида бир неча ихтиёрий N, N_1, N_2, ... нуқталарни белгилаб, улардан ордината ўқига параллель чизиқлар ўтказамиз. Энди F нуқтадан: EN, EN_1, EN_2,... радиуслар билан ёй чизилса, уларнинг ҳалиги параллель чизиқлар билан кесишган нуқталари параболага қарашли бўлади. Масалан:

$$EN = FM \quad \text{ва} \quad EN = PM$$

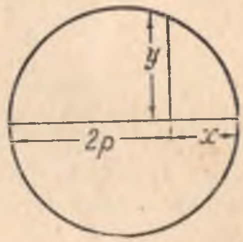
демак,

$$FM = PM.$$

Бу эса M нуқтанинг параболага қарашли нуқта эканини кўрсатади, чунки у нуқта F дан ва CD дан тенг масофада



Шакл 106.



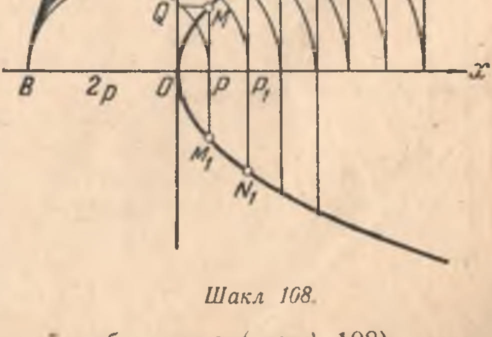
Шакл 107.

туради. Шу йўл билан параболага қарашли ҳар қанча нуқталарни аниқлаш мумкин. Уларни бир-бири билан туташтириш натижасида изланган парабола ҳосил бўлади.

b) Параболанинг $y^2 = 2px$ тенгламасини ушбу

$$2p : y = y : x$$

пропорция шаклида ёзиш мумкин. Бу эса парабола ординатасининг x ва $2p$ орасида ўрта пропорционал эканини кўрсатади (шакл 107). Бу пропорция параболани чизиш учун имконият беради. Бунинг учун энг аввал абсцисса ўқининг манфий қисмида $OB = 2p$ ни ўлчаб оламиз (шакл 108).



Шакл 108.

да кўрсатилган каби чизғич и ва гўниянинг DE катетини AB га тегизиб турган ҳолда, ипни бирор M нуқтасидан қалам билан CD га босиб туриб, гўнияни силжитиб борамиз. Қаламнинг учи, яъни M нуқта ҳамавақт F дан ва AB дан тенг масофада бўлгани учун, натижада параболанинг ёйи ҳосил бўлади.

§ 71. ПАРАБОЛАГА УРИНМА ВА НОРМАЛЬ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

бўлсин. Бунинг бирор $M(x_1, y_1)$ нуқтасига уринма ўтказиш учун, параболада яна бирор $M'(x_2, y_2)$ нуқтани олиб, иккала нуқтадан тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \tag{2}$$

бўлади (шакл 110). $M(x_1, y_1)$ ва $M'(x_2, y_2)$ нуқталар параболада бўлгани учун

$$y_1^2 = 2px_1, \tag{3}$$

$$y_2^2 = 2px_2. \tag{4}$$

(4) дан (3) ни айириб олсак,

$$y_2^2 - y_1^2 = 2p(x_2 - x_1)$$

ёки

$$(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) = 2p(x_2 - x_1),$$

бундан

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2p}{y_2 + y_1}.$$

Буни (2) га қўйсак:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_2 + y_1}(x - x_1). \tag{5}$$

M' нуқта M нуқтага чексиз яқинлашиб, бирлашган чоқда $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ бўлади ва бу ҳолда MM' кесувчи параболанинг M нуқтасида уринмага айланади. Бу ҳолда (5) нинг кўриниши

$$y - y_1 = \frac{2p}{2y_1}(x - x_1),$$

Сўнгра истаганча бир неча айланани шундай қилиб чизамизки, уларнинг марказлари абсцисса ўқида ва радиуслари BO нинг ярмидан катта бўлиб, ҳар бири B нуқтадан ўтсин. Бу ҳолда ҳалиги айланалар абсцисса ўқини p, p_1,... нуқталарда ва ордината ўқини Q, Q_1,... нуқталарда кесиб ўтади. Бу нуқталарнинг ҳар бири изланган параболага қарашли бўлади. Бу нуқталардан бирортасини, масалан, M ни олиб, унинг параболага қарашли нуқта эканини исбот қиламиз. BQP ярим айланада

$$OQ^2 = BO \cdot OP,$$

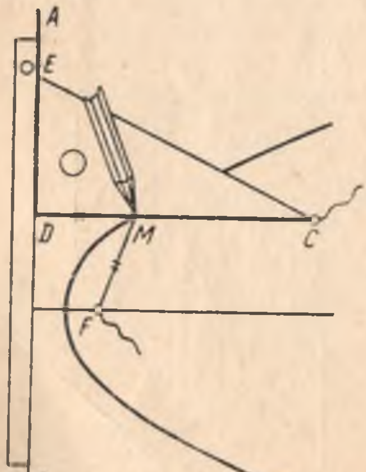
ёки

$$MP^2 = 2px,$$

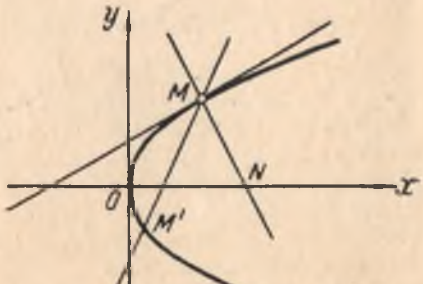
демак, M нуқта параболага қарашли бўлади. Шу йўл билан аниқланган ординаталар ўз бараварича пастга қараб давом эттирилса, M_1, N_1,... нуқталар аниқланади. Аниқланган нуқталарни бир-бири билан туташтириш натижасида изланган парабола ҳосил бўлади.

2. Узлуксиз ҳаракат ёрдами билан чизиш

Параболанинг фокуси F ва унинг директрисаси AB бўлсин (шакл 109). Буларнинг ёрдами билан парабола чизиш учун: чизғич, ип ва гўния керак бўлади. Узунлиги гўниянинг CD катетига тенг бўлган ипнинг бир учи гўниянинг C учига ва иккинчи учи F нуқтага ўрнатилади. Сўнгра шакл-



Шакл 109.



Шакл 110.

ёки

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1),$$

ёки

$$yy_1 - y_1^2 = px - px_1,$$

ёки (3) га асосан

$$yy_1 = px + px_1$$

ёки

$$yy_1 = p(x + x_1) \tag{6}$$

бўлади. Изланган уринманинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади; у параболанинг $M(x_1, y_1)$ нуқтасидан ўтади.

Энди нормалнинг тенгламасини тузамиз. Нормаль $M(x_1, y_1)$ нуқтадан ўтади. Умуман бу нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{7}$$

бўлади. Уринманинг бурчак коэффициенти k_1 фараз қилинса, (6) дан

$$k_1 = \frac{p}{y_1}$$

бўлади. Нормаль уринмага перпендикуляр бўлгани учун

$$k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{y_1}{p}.$$

Буни (7) га қўйсак, нормалнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1). \tag{8}$$

Мисол. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 12x$. Бунинг абсциссаси 3 ва ординатаси мусбат бўлган нуқтасидан ўтган уринма ва нормалнинг тенгламалари тузилсин.

Берилган тенгламадан $2p = 12$, $p = 6$, $x_1 = 3$, $y_1 > 0$ бўлгани учун:

$$y_1 = \sqrt{12 \cdot 3} = 6.$$

(6) га мувофиқ уринманинг тенгламаси

$$6y = 6(x + 3),$$

ёки

$$x - y + 3 = 0,$$

6y = 6x+18

6y − 6x − 18 = 0

(8) га мувофиқ нормалнинг тенгламаси

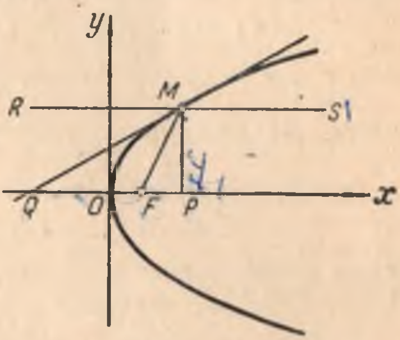
$$y - 6 = -(x - 3),$$

ёки

$$x + y - 9 = 0.$$

§ 72. ПАРАБОЛАГА ЎТКАЗИЛГАН УРИНМАНИНГ ХОССАСИ

Параболанинг бирор $M(x_1, y_1)$ нуқтасига уринма ўтказиб, у нуқтани параболанинг F фокуси билан туташтирамиз. Сўнгра M нуқтадан абсцисса ўқига параллель қилиб RS ни ўтказамиз (шакл 111). Маълумки



Шакл 111.

$$MF = r = x_1 + \frac{p}{2}. \qquad (1)$$

Уринманинг бурчак коэффициенти (§ 71)

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y_1}$$

эди. Шунинг учун

$$QP = MP \operatorname{ctg} \alpha = \frac{MP}{\operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= y_1 : \frac{p}{y_1} = 2x_1,$$

чунки $M(x_1, y_1)$ нуқта параболада бўлгани учун

$$y_1^2 = 2px_1.$$

Шаклга мувофиқ:

$$QF = QO + OF = QO + \frac{p}{2}.$$

Уринма остининг хоссасига асосан:

$$QO = QP - OP = 2x_1 - x_1 = x_1,$$

демак,

$$QF = x_1 + \frac{p}{2}$$

ёки буни (1) билан солиштириб қараганда

$$MF = QF.$$

Бу натижа MQF учбурчакнинг тенгёнли эканлигини кўрсатади. Шунинг учун

$$\angle MQF = \angle QMF.$$

Иккинчи томондан $RS \parallel Ox$ бўлгани учун,

$$\angle QMF = \angle RMQ.$$

Бунга қараганда: *параболанинг бирор нуқтасидан ўтган уринма у нуқтадан ўтиб парабола ўқига параллель бўлган тўғри чизиқ билан ва у нуқтанинг радиус-вектори билан ўзаро тенг бурчаклар ташкил қилади.*

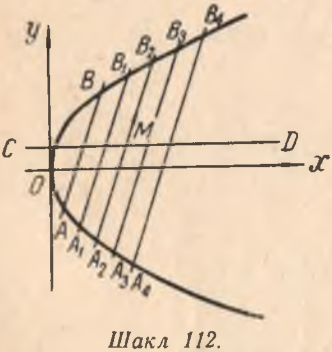
Уринманинг бу хоссаси параболада берилган нуқтадан уринма ўтка’иш учун яна бир йўл очиб беради. Масалан, параболада берилган M нуқтани F фокус билан туташтириб, M дан Ox га параллель RS ўтказамиз. Иккала тўғри чизиқдан ҳосил бўлган RMF бурчак тенг иккига бўлинса, MQ биссектриса изланган уринма бўлади.

§ 73. ПАРАБОЛАНИНГ ДИАМЕТРИ ВА МАРКАЗИ ТЎҒРИСИДА

Параболанинг тенгламаси

$$y^2 = 2px \tag{1}$$

фараз қилиб, берилган йўналишга параллель бўлган AB, A_1B_1, A_2B_2, ... ватарлар ўрта нуқталарининг геометрик ўрнини топамиз (шакл 112). Фараз қилайлик, бу ватарларнинг умумий тенгламаси



Шакл 112.

$$y = kx + l \tag{2}$$

бўлсин. Ватарлардан бирининг, масалан A_2B_2 нинг ўртасидаги M нуқтанинг координаталарини x ва y фараз қиламиз. $M(x, y)$ нуқтанинг координаталари орасидаги муносабатни аниқлаш учун A_2B_2 ватарнинг парабола билан кесишган $A_2(x_1, y_1)$ ва $B_2(x_2, y_2)$ нуқталарини топамиз. Бунинг учун (1) ва (2) ни бирлашган ҳолда ечишга тўғри келади. (1) ни x га нисбатан ечганда

$$x = \frac{y^2}{2p}$$

бўлади. Бу (2) га қўшилса

$$y = \frac{ky^2}{2p} + l,$$

ёки

$$2py = ky^2 + 2pl,$$

ёки

$$ky^2 - 2py + 2pl = 0,$$

ёки

$$y^2 - \frac{2p}{k} y + \frac{2pl}{k} = 0.$$

Бу квадрат тенгламанинг илдизлари y_1 ва y_2 фараз қилинса, илдизларнинг хоссасига мувофиқ:

$$y_1 + y_2 = \frac{2p}{k},$$

ёки

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{k}. \qquad (3)$$

$M(x, y)$ нуқта A_2B_2 ватарнинг ўртасида бўлгани учун

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

демак,

$$y = \frac{p}{k}. \qquad (4)$$

Изланган геометрик ўриннинг, яъни парабола диаметрининг тенгламаси шундан иборат. Бу тенгламада p ва k ўзгармас бўлгани учун, y абсцисса ўқига параллель бўлган (CD) тўғри чизиқни ифода қилади.

Параллель ватарлар параболанинг ўқига (Ox га) перпендикуляр бўлганда $k = \infty$ бўлади ва бу ҳолда

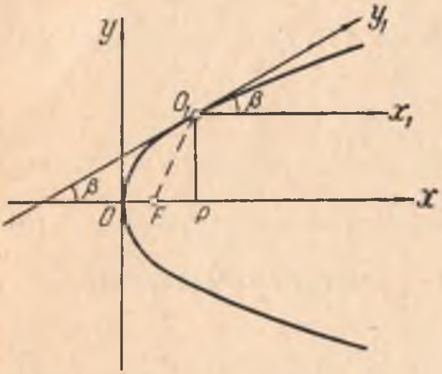
$$y = \frac{p}{\infty} = 0,$$

яъни параболанинг диаметри ўз ўқи (Ox) билан бирлашади.

Эллипснинг ва гиперболанинг диаметрлари эгри чизиқнинг марказида кесишган ҳолда параболанинг диаметри унинг ўқига параллель бўлади, яъни параболанинг ўқини чексиз узоқлашган нуқтада кесади. Шунинг учун параболани марказсиз чизиқ деб айтиш мумкин ёки маркази чексиз узоқда деб фараз қилиш мумкин.

§ 74. ПАРАБОЛАНИНГ ДИАМЕТРИГА ВА УНИНГ БИЛАН КЕСИШГАН НУҚТАСИДА ЎТКАЗИЛГАН УРИНМАГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Параболанинг тенгламаси $y^2 = 2px$ бўлсин ва ундаги бирор $O_1(a, b)$ нуқтадан O_1x_1 диаметр ва O_1y_1 уринма ўтказилган бўлсин (шакл 113). Параболанинг бу ўқларга қарашли тенгламасини тузамиз.



Шакл 113.

$O_1(a, b)$ нуқта параболада бўлгани учун

$$b^2 = 2ap \qquad (1)$$

Фараз қилайлик, уринманинг абсцисса ўқи билан ташкил қилган бурчаги β бўлсин. Бу ҳолда:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{2a} = \frac{bp}{2ap} = \frac{bp}{b^2} = \frac{p}{b}. \qquad (2)$$

$O_1(a, b)$ нуқтанинг радиус-вектори

$$r = \frac{p}{2} + a,$$

ёки

$$2r = p + 2a \qquad (3)$$

бўлади. $O_1x_1 \parallel Ox$ бўлгани учун алмаштириш формулаларида $\alpha = 0$ фараз қиламиз. Шунинг учун:

$$x = a + x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta = a + x_1 + y_1 \cos\beta,$$
$$y = b + x_1 \sin\alpha + y_1 \sin\beta = b + y_1 \sin\beta;$$

буларни параболанинг $y^2 = 2px$ тенгламасига қўямиз:

$$(b + y_1 \sin\beta)^2 = 2p(a + x_1 + y_1 \sin\beta);$$

ёки

$$y_1^2 \sin^2\beta + 2(b \sin\beta - p\cos\beta) y_1 + (b^2 - 2ap) = 2px_1;$$

(1) дан $b^2 - 2ap = 0$ ва (2) дан

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{p}{b},$$

ёки

$$b \sin\beta - p \cos\beta = 0$$

бўлгани учун

$$y_1^2 \sin^2\beta = 2px_1,$$

ёки

$$y_1^2 = 2\frac{p}{\sin^2\beta}x_1,$$

24
24

ёки

$$\frac{p}{\sin^2\beta} = p_1 \tag{4}$$

фараз қилинса:

$$y_1^2 = 2p_1x_1. \tag{5}$$

Демак, бу ҳолда ҳам параболанинг тенгламаси ўз шаклини сақлади. Энди янги тенгламанинг параметри p_1 нинг геометрик маъносини текширамиз, (2) дан

$$\sin^2\beta = \frac{p^2}{b^2+p^2} = \frac{p^2}{2ap+p^2} = \frac{p}{2a+p^2}$$

ёки (3) га асосан

$$\sin^2\beta = \frac{p}{2r},$$

бундан ва (4) дан

$$p_1 = 2r, \tag{6}$$

яъни бу ҳолда ҳам параметр p_1 янги координаталар системаси бошидан F фокусгача бўлган масофанинг икки баравариға тенг.

§ 75. ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ БУТУН ФУНКЦИЯНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИ

Фараз қилайлик, ушбу

$$y = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

кўринишдаги иккинчи даражали функция берилган бўлсин. Бундай функция математикада ғоят кўп учраб туради. Бу ерда биз унинг геометрик маъносини текшириб кўрамиз. Агар $a = 0$ бўлса, тенгламанинг кўриниши

$$y = bx + c$$

бўлади ва бу ҳолда тенглама тўғри чизиқни ифода қилади. Энди фараз қилайлик, $a \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда (1) тенгламанинг қандай эгри чизиқ ифода қилишини аниқлаш учун координаталар бошини бирор (x_0, y_0) нуқтага келтирамиз. Алмаштириш формулалари

$$x = x_1 + x_0, \quad y = y_1 + y_0$$

бўлади. Буларни (1) га қўйсак:

$$y_1 + y_0 = a(x_1 + x_0)^2 + b(x_1 + x_0) + c$$

ёки

$$y_1 + y_0 = ax_1^2 + 2ax_0x_1 + ax_0^2 + bx_1 + bx_0 + c$$

ёки

$$y_1 = ax_1^2 + (2ax_0 + b)x_1 + (ax_0^2 + bx_0 + c - y_0), \tag{2}$$

Олинган (x_0, y_0) нуқта ихтиёрий бўлгани учун x_0 ва y_0 нинг қийматларини шундай аниқлаймизки,

$$\left.\begin{aligned} 2ax_0 + b = 0, \\ ax_0^2 + bx_0 + c - y_0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

булсин. Бу ҳолда биринчи тенгламадан

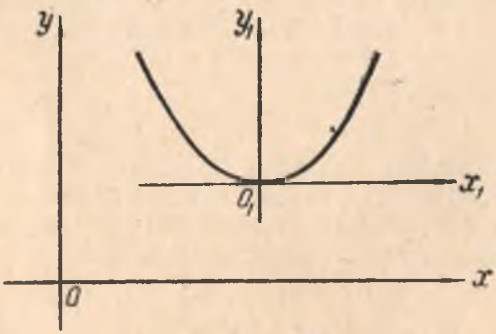
$$x_0 = -\frac{b}{2a} \tag{4}$$

ва бунинг ёрдами билан иккинчи тенгламадан

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{5}$$

Демак, олинган нуқтанинг координаталари (4) ва (5) каби булганда, берилган эгри чизиқнинг тенгламаси

$$y_1 = ax_1^2 \tag{6}$$



Шакл 114.

булади, яъни параболани ифода қилади (шакл 114). Бу параболанинг боши янги координаталар системасининг бошида бўлиб, янги ордината ўқи унинг симметрия ўқидан иборат.

Функциянинг ҳосиласи ёрдами билан (3) тенгламаларни ғоят қулайлик билан тузиш мумкин. Ҳақиқатан

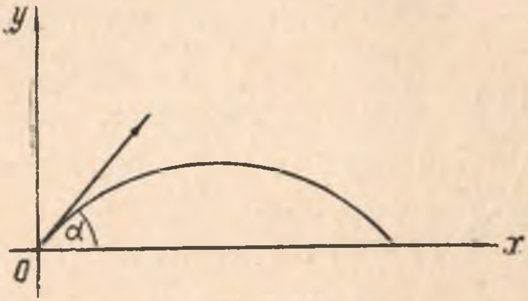
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

фараз қилинса,

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f'(x_0) = 2ax_0 + b,$$
$$f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c = y_0.$$

* *
*

Парабола айниқса баллистикада, яъни ўқ отиш назариясида муҳим роль ўйнайди. Масалан, фараз қилайлик O нуқтадан w тезлиги билан отилган жисм (масалан, ўқ) йўналиши



Шакл 114а.

OX горизонт билан α бурчак ташкил этган бўлсин (шакл 114 a).

Агарда ҳавонинг қаршилиги эътиборга олинмаса жисм (ўқ) нинг босган йўли (траекторияси) ушбу тенглама билан ифодаланади:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2w^2 \cos^2\alpha},$$

бунда g — оғирлик кучининг тезланиши. Бу эса параболанинг тенгламасидан иборат. Ҳақиқатда, агарда

$$A = -\frac{g}{2w^2 \cos^2\alpha}, \quad B = \operatorname{tg} \alpha$$

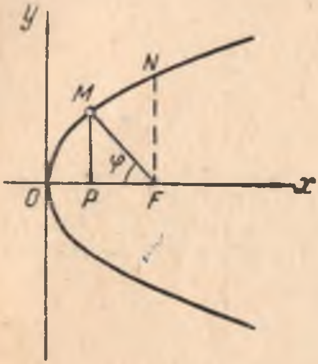
фараз қилинса, тенгламанинг кўриниши

$$y = Ax^2 + Bx$$

бўлиб, у янада равшан бўлади. Мисол учун келтирилган тенглама назарий механиканинг динамика бўлимида тузилади.

§ 76. ПАРАБОЛАНИНГ ҚУТБ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИДА ТЕНГЛАМАСИ

Параболанинг тенгламасини қутб координаталар системасида тузиш учун, унинг F фокусини қутб ва F дан параболанинг бошига қараб кетган FO йўналишни қутб ўқи фараз қиламиз (шакл 115).



Шакл 115.

Параболанинг бирор M нуқтасининг ўзгарувчи қутб координаталари r ва φ, декарт координаталари x ва y бўлсин, яъни:

$$MF = r, \quad \angle MFP = \varphi;$$

$$OP = x, \; MP = y.$$

Радиус-вектор формуласи бўйича

$$r = x + \frac{p}{2}. \qquad (1)$$

Шаклга мувофиқ:

$$x = OP = OF - PF = \frac{p}{2} - PF. \qquad (2)$$

MPF тўғрибурчакли учбурчакда

$$PF = MF\cos\varphi = r\cos\varphi,$$

демак

$$x = \frac{p}{2} - r\cos\varphi,$$

ёки бу (1) га қўйилса:

$$r = \frac{p}{2} - r\cos\varphi + \frac{p}{2},$$

ёки

$$r = p - r\cos\varphi,$$

ёки

$$r(1 + \cos\varphi) = p,$$

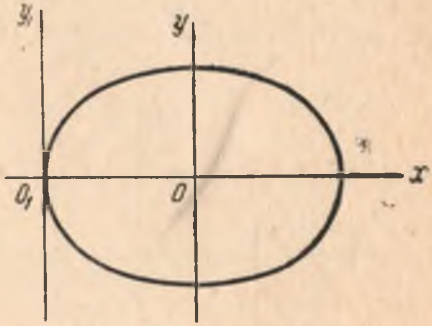
бундан

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}. \qquad (3)$$

Параболанинг қутб тенгламаси шундан иборат. $\varphi = 0$ бўлса, $\cos\varphi = 1$ ва $r = \frac{p}{2} = OF$ бўлади; $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\cos\varphi = 0$ ва $r = p = FN$ бўлади; $\varphi = \pi$ бўлганда $\cos\varphi = -1$ ва $r = \infty$ бўлади.

§ 77. ПАРАБОЛАНИНГ ЭЛЛИПС ВА ГИПЕРБОЛАГА АЛОҚАСИ

Параболанинг эллипс ва гиперболага алоқасини текшириш учун ярим ўқлари a ва b бўлган эллипс ва гиперболани ҳамда параметри $\frac{b^2}{a}$ бўлган параболани оламиз. Текшириш қулай бўлсин учун, энг аввал эллипс ва гиперболанинг тенгламаларини қуйидагича ўзгартиб тузамиз.



Шакл 116.

Қилинган шарт бўйича, ярим ўқлари a ва b бўлган эллипснинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

бўлади. Координата ўқларининг йўналишларини сақлаб, координаталар бошини эллипснинг $O_1(-a,\ 0)$ бошига келтирамиз. Бу ҳолда алмаштириш формулалари

$$x = x_1 - a \quad \text{ва} \quad y = y_1$$

бўлади (шакл 116). Булар эллипсниңг тенгламасига қўйилса:

$$\frac{(x_1 - a)^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$$

ёки

$$b^2(x_1 - a)^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2,$$

ёки

$$b^2 x_1^2 - 2ab^2 x_1 + a^2 b^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2,$$

ёки

$$a^2 y_1^2 = 2ab^2 x_1 - b^2 x_1^2,$$

ёки

$$y_1^2 = 2\frac{b^2}{a} x_1 - \frac{b^2}{a^2} x_1^2,$$

ёки $\frac{b^2}{a} = p$ фараз қилинса, эллипснинг янги xO_1y_1 системага нисбатан тенгламаси

$$y_1^2 = 2px_1 - \frac{p}{a} x_1^2$$

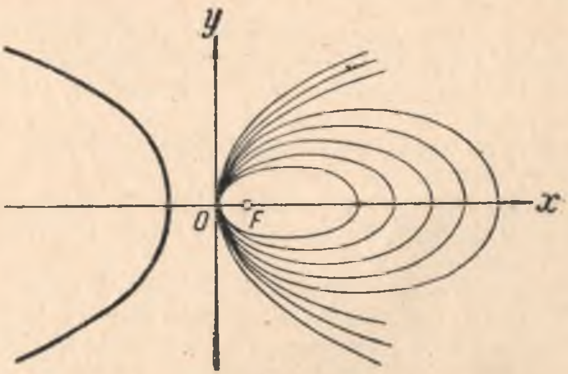
бўлади, ёки ўзгарувчи координаталар яна x ва y фараз қилинса:

ва ординатасининг квадрати эллипс ва гипербола ординаталари квадратларининг арифметик ўртаси экани кўринади.

Ўтган параграфлардан бизга маълумки эллипс ва гиперболанинг шакли уларнинг эксцентриситетларига, ёки a ва b нинг миқдорларига боғлиқдир. Буни назарда тутиб, a ва b нинг миқдорларини чексиз орттириб борамиз, **фақат $p - \frac{b^2}{a}$ ўзгармай ўз миқдорини сақлаш шарти билан.** Бу ҳолда a ва b ўсиб борганда $\frac{p}{a}$ камайиб боради. Бу эса иккала томондан эллипс ва гиперболанинг параболага яқинлашиб келишини кўрсатади ва a чексиз ўсиб борганда

$$\lim_{a \to \infty} \left(\frac{p}{a}\right) = 0$$

бўлади, бу ҳолда эллипс ва гипербола параболага айланади (шакл 118). Демак, *эллипс ва гиперболанинг ўқлари чек-*



Шакл 118.

сиз ўсиб борганда уларнинг умумий лимити парабола бўлади.

Агарда $\frac{p}{a}$ ни q фараз қилсак, учала эгри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad (4)$$

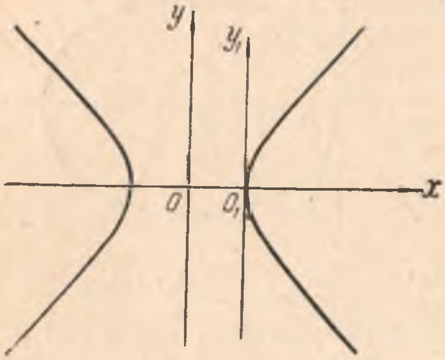
бўлади. $q < 0$ бўлганда бу тенглама эллипсни ифода қилади, $q > 0$ бўлганда у гиперболани ифода қилади ва $q = 0$ бўлганда параболани ифода қилади.

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2. \qquad (1)$$

Шунга ўхшаш гиперболанинг одатдаги

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламасини олиб, координаталар бошини гиперболанинг $O_1(a, 0)$ бошига келтирамиз (ўқларнинг йўналишлари сақланади). Бу ҳолда алмаштириш формулалари



Шакл 117.

$$x = x_1 + a \text{ ва } y = y_1$$

бўлади (шакл 117). Булар гиперболанинг тенгламасига қўйилса:

$$\frac{(x_1+a)^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

ёки

$$b^2(x_1+a)^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

ёки

$$b^2x_1^2 + 2ab^2x_1 + a^2b^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2,$$

ёки

$$a^2y_1^2 = 2ab^2x_1 + b^2x_1^2,$$

ёки

$$y_1^2 = 2\frac{b^2}{a}x_1 + \frac{b^2}{a^2}x_1^2,$$

ёки $\frac{b^2}{a} = p$ фараз қилиб, ўзгарувчи координаталар яна x ва y билан белгиланса,

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2 \qquad (2)$$

бўлади.

Энди параболанинг тенгламасини оламиз:

$$y^2 = 2px. \qquad (3)$$

(1), (2) ва (3) ни ўзаро солиштириб қараганда: параболанинг ўрни эллипс билан гиперболанинг ўртасида эканлиги

Шунга ўхшаш қутб системасида ҳам учала эгри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

бўлади; $e < 1$ бўлганда бу тенглама эллипсни ифода қилади, $e > 1$ бўлганда гиперболани ва $e = 1$ бўлганда параболани ифода қилади.

Саволлар ва масалалар

258. Парабола деб нимага айтилади?

259. Параболаниг каноник тенгламасини тузишда координата ўқлари қандай ўтказилади?

260. Параболанинг параметри деб нимага айтилади?

261. Параболанинг таърифига асосланиб, унинг тенгламасини қандай тузиш мумкин?

262. Узлуксиз ҳаракат билан парабола қандай чизилади?

263. Параболанинг фокуси (5, 0) нуқтада. Унинг каноник тенгламаси тузилсин.

264. Параболанинг тенгламаси $3y^2 - 5x = 0$. Бунинг параметри топилсин ва директрисасининг тенгламаси тузилсин.

265. Параболада шундай нуқта топилсинки, унинг координаталари ўзаро тенг бўлсин.

266. Парабола (3, 5) нуқтадан ўтади. Унинг каноник тенгламаси тузилсин.

267. Параболанинг боши координаталар бошида, ўзи y ўқига нисбатан симметрик ва фокуси (0, 4) нуқтада. Бунинг тенгламаси тузилсин.

268. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 3x$. Бунинг ординатаси 2 га тенг бўлган нуқтасининг радиус-вектори топилсин.

269. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 24x$ ва ундаги нуқтанинг радиус- вектори 14. Бу нуқтанинг парабола бошидан узоқлиги топилсин.

270. Тенгламаси $y^2 = 12x$ бўлган параболанинг бошидан икки тўғри чизиқ ўтказилган. Ҳар бир чизиқнинг парабола билан учрашган нуқтасидан унинг фокусигача масофаси 15 бўлса, у чизиқлар орасидаги бурчак қандай бўлади?

271. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 2x$. Бунинг $(2, -2)$ нуқтасидан ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламалари тузилсин.

272. Параболанинг тенгламаси $y^2 - \frac{4}{3}x$. Бунинг (3, 2) нуқтасидан ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламалари тузилсин.

273. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 4x$. Бунинг абсцисса-си 9 ва ординатаси мусбат бўлган нуқтасидан уринма ва нормаль ўтказилган. Уларнинг тенгламалари тузилсин.

274. Тенгламаси $y^2 = 12x$ бўлган параболанинг шундай нуқтасидан уринма ўтказилганки, у $3x - y - 4 = 0$ тўғри чизиққа параллель бўлган. Унинг тенгламаси тузилсин.

275. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 8x$, Бунинг шундай нуқтасидан уринма ўтказилганки, у $2x - 2y + 5 = 0$ тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган. Унинг тенгламаси тузилсин.

276. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 4x$. Ташқи $(-3, 2)$ нуқтадан бунга уринма ўтказилган. Унинг тенгламаси тузилсин.

277. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 2px$ бўлган ҳолда, қандай шарт билан $y = kx + l$ тўғри чизиқ унга уринма бўлади?

278. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 2px$. Бунга ўтказилган нормаль $(p, 4p)$ нуқтадан ўтади. Уинг тенгламаси тузилсин.

279. Тенгламаси $y^2 = 4x$ бўлган параболада шундай нуқта топилсинки, у нуқтага ўтказилган уринманинг узунлиги $\frac{4}{3}$ бўлсин.

280. $11x - 6y + 9 = 0$ тўғри чизиқнинг $y^2 = 11x$ параболага уринма эканлиги исбот қилинсин.

281. Параболанинг директрисасидаги ихтиёрий нуқтадан параболага икки уринма ўтказилган. Уларнинг ўзаро перпендикуляр эканлиги исбот қилинсин.

282. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 6x$. Бунинг текислигида $(4, 3)$ нуқта берилган. Параболанинг бу нуқтадан ўтган диаметри топилсин.

283. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 6x$. Бунинг шундай ватари топилсинки, у $(4, 3)$ нуқтада тенг иккига бўлинсин.

284. Параболаннинг тенгламаси $y^2 - 14x$. Бунинг $y = -6$ диаметри берилган. Параболанинг бошидан шундай ватар ўтказилсинкн, уни ҳалиги диаметр тенг иккига бўлсин.

285. Параболанинг фокусидан уринмага туширилган перпендикулярнинг узунлиги урнниш нуқтасининг радиус-векторлари билан параметрнинг тўртдан бири орасида ўрта пропорционал бўлади. Бу исбот қилинсин.

286. Параболанинг тенгламаси $y^2 = 4ax$. Бунинг директрисасининг ихтиёрий нуқтасидан параболага икки уринма ўтказилган. Бу уринмаларга параболанинг фокусидан ва бошидан туширилган перпендикулярларнинг ўзаро кўпайтмаси a^4 бўладн. Бу исбот қилиисин.

287. Параболанинг бирор нуқтасига ўтказилган уринма: директрисани ва фокусдан ўтиб парабола ўқига перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни шуидай нуқталарда учратадики, у нуқталарниинг фокусдан узоқликлари ўзаро тенг бўлади. Бу исбот қилинсии.

Ўн биринчи боб

КОНУС КЕСИМЛАРИ

§ 78. КОНУС КЕСИМЛАРИ—ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

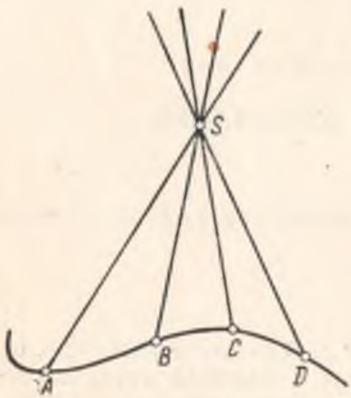
1. Алгебраик чизиқлар орасида энг оддийлари ва мукаммал суратда текширилганлари — иккинчи тартибли чизиқлардан иборатдир. Бу чизиқлар қадим замонлардан буён маълум ва машҳур бўлиб, улар билан грек философлари ва геометрлари машғул бўлганлар.

Лекин грек олимлари бу чизиқларни тўғри доиравий конусни турли вазиятдаги текисликлар билан кесиш натижасида ҳосил қилганлар. Шунинг учун иккинчи тартибли чизиқларни к о н у с к е с и м л а р и исми билан ҳам юргизадилар. Конус кесимлари тўғрисида биринчи системали асар эрамиздан олдинги III асрда яшаган искандария мактабининг олими Аполлоний томонидан ёзилгандир.

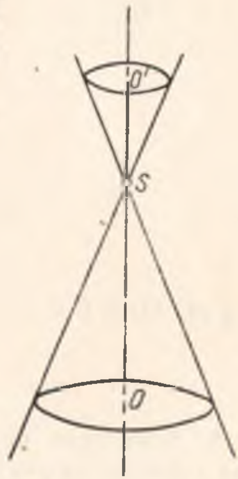
2. Конус кесимларини тасвирлаш учун энг аввал элементар геометриядан маълум бўлган конус тушунчасини кенгайтиришга тўғри келади. Фараз қилайлик, тўғри чизиқ фазодаги ўзгармас S нуқтадан ўтиб, фазодаги бирор $ABCD$ эгри чизиқ бўйича сирпаниб борсин. Бу ҳолда ҳалиги чизиқ к о н у с исмли сиртни чизади (шакл 119).

$ABCD$ эгри чизиқ конуснинг й ў н а л т и р у в ч и с и дейилади, SA тўғри чизиқ конуснинг я с о в ч и с и дейилади ва S нуқта конуснинг у ч и дейилади. Берилган таърифга қараганда конус икки томонга чексиз узайиб кетган ковак сиртдан иборатдир. Агар конуснинг йўналтирувчиси айлана бўлиб, унинг маркази билан учини туташтирувчи тўғри чизиқ йўналтирувчи айлананинг текислигига перпендикуляр бўлса, бундай конус **тўғри доиравий конус** деб аталади ва OSO' конуснинг ўқи дейилади (шакл 120).

А. Фараз қилайлик, тўғри доиравий конус берилган бўлсин ва кесувчи текислик унинг ҳеч бир ясовчисига парал-



Шакл 119.



Шакл 120.

лель бўлмай, конуснинг S учидан бир томонидаги коваклигини (конус ўқига параллель ёки перпендикуляр бўлмай) кесиб кетган бўлсин, масалан $A'MD$ текислиги (шакл 121).

Конуснинг ўқи устидан кесувчи текисликка перпендикуляр қилиб SBB' текисликни ўтказамиз; бу текислик ҳалиги кесувчи текисликни кесганда AA' тўғри чизиқ ҳосил бўлади. SAA' учбурчак текислигида иккита шундай айлана чизамизки, уларнинг O ва O' марказлари конуснинг ўқида ва ўзлари учбурчакнинг томонларига ёки уларнинг давомига (C, B, C', B' нуқталарда ва AA' нинг F' нуқтасида) уринма бўлсин.

Агар O ва O' айланалар конуснинг ўқи атрофида айлантирилса, икки шар ҳосил бўлади ва улар кесувчи текисликка унинг F ва F' нуқталарида уринма бўлади. Энди кесувчи текисликнинг конус билан кесишганидан ҳосил бўлган чизиқда бирор ихтиёрий M нуқтани олиб, уни F ва F' нуқталар билан ўзаро туташтирамиз. Сўнгра M нуқтадан SM ясовчи ўтказилса, у CC' ва BB' айланалар билан R ва R' нуқталарда кесишади. O шари кесувчи текисликка ва конусга уринма бўлгани учун

$$MF = MR,$$

шунга ўхшаш O' шари ҳам конусга ва кесувчи текисликка уринма бўлгани учун

$$MF' = MR',$$

буларни қўшсак:

$$MF + MF' = MR + MR' = RR'.$$

Иккинчи томондан $RR' = CB$, чунки булар кесик конуснинг ясовчиларидан иборат. Шунинг учун M нуқта AMA' эгри чизиқнинг қайси бир ерида бўлса-да, ҳамавақт

$$MF + MF' = CB \qquad (1)$$

яъни ўзгармас миқдордан иборат. Шунга ўхшаш бу натижа A ва A' нуқталарга татбиқ қилинса,

$$AF + AF' = A'F + A'F' = CB; \qquad (2)$$

шаклга асосан

$$AF + A'F = AF' + A'F' = AA'. \qquad (3)$$

(2) ва (3) ни қўшсак:

$$AF = A'F',$$

шунга ўхшаш

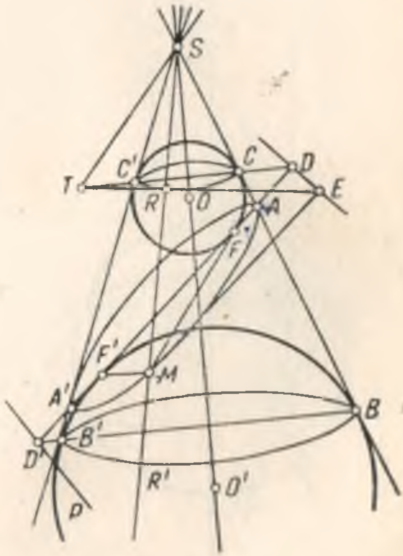
$$A'F = AF';$$

шунинг учун (2) ва (3) дан:

$$CB = A'F' + AF' = AA',$$

демак, (1) га асосан:

$$MF + MF' = AA'. \qquad (4)$$

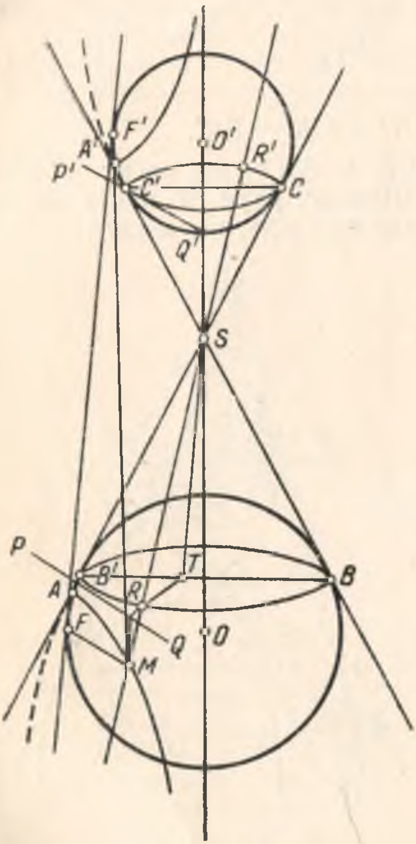


Шакл 121.

Бу эса AMA' текисликнинг конус билан кесишганидан ҳосил бўлган чизиқ — фокуслари F ва F' нуқталарда бўлиб, катта ўқи $2a = AA'$ бўлган эллипсдан иборат эканлигини кўрсатади.

DE ва $D'P$ тўғри чизиқлар бу эллипснинг F ва F' фокусларига нисбатан директрисалари бўлади. (Буни исбот қилиш ўқувчига тавсия қилинади).

Б. Фараз қилайлик, кесувчи текислик конуснинг ясовчиларидан иккитасига параллель бўлсин. Бу ҳолда кесувчи текислик конуснинг ҳар икки коваклигини кесиб кетади ва бундан ҳосил бўлган кесими икки чексиз тармоқлардан иборат бўлади (шакл 122).



Шакл 122.

Юқоридаги йўл билан давом этганда O ва O' шарлари конуснинг ҳар икки коваклигида бўлади. $ST \parallel AA'$ бўлгани учун

$$MF' - MF = MR' - MR = RR',$$

чунки шарга бир нуқтадан ўтказилган уринмалар ўзаро тенг бўлади. Иккинчи томондан

$$RR' = SR' + SR = SC + SB' = CB',$$

демак,

$$MF' - MF = CB', \qquad (5)$$

яъни ўзгармас миқдордан иборат. Шунга ўхшаш бу натижа A ва A' нуқталарга татбиқ қилинса:

$$A F' - AF = A'F - A'F' = CB', \qquad (6)$$

шаклга асосан

$$A'F - AF = AF' - A'F' = AA'; \qquad (7)$$

(6) ва (7) ни қўшсак:

$$AF = A'F',$$

шунг а ўхшаш

$$A'F = A'F',$$

шунинг учу н (6) ва (7) дан:

$$CB' = AF' - A'F' = AA',$$

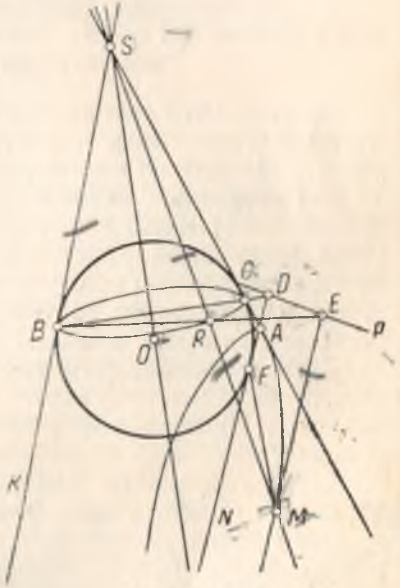
ёки

$$MF' - MF = AA'. \quad (8)$$

Бу эса AMA' текисликнинг конус билан кесишганидан ҳосил бўлган чизиқ — фокуслари F ва F' бўлиб, ҳақиқий ўқи $2a = AA'$ бўлган гиперболадан иборат эканлигини кўрсатади.

PQ ва $P'Q'$ тўғри чизиқлар бу гиперболанинг F ва F' фокусларига нисбатан директрисалари бўлади. (Буни исбот қилиш ўқувчига тавсия қилинади.)

С. Энди фараз қилайлик, кесувчи текислик конуснинг ясовчиларидан бирига параллель бўлсин. Бу ҳолда у конуснинг икки ковагидан бирини кесади (шакл 123). Фараз қилайлик, кесувчи текислик ANM бўлсин. Конуснинг S учидан кесувчи текисликка перпендикуляр қилиб, SAK текисликни ўтказамиз. Энди конуснинг ичига шундай доира чизамизки у доира кесувчи текисликка F нуқтада ва ясовчиларга B ва C нуқталарда уринма бўлсин. Албатта айлананинг O маркази конуснинг ўқида бўлади. Доирани конуснинг ўқи атрофида айлантириш натижасида шар ҳосил бўлади ва у конусга BC доиранинг айланаси бўйича уринма бўлади.



Шакл 123.

Фараз қилайлик, M кесувчи текисликнинг конус билан кесишганидан ҳосил бўлган чизиқнинг бирор ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқтадан SM ясовчи ўтказамиз. R бунинг BC айлана билан учрашган нуқтаси бўлсин. Фараз қилайлик, BC айлананинг текислиги билан кесувчи текисликнинг учрашганидан ҳосил бўлган чизиқ DP бўлсин. BC доиранинг текислиги ва кесувчи текисликнинг ўзи SAK текисликка перпендикуляр бўлгани учун DP ҳам бу текисликка, демак, AN га перпендикуляр бўлади. Энди SM ва SK ясовчиларнинг устидан текислик ўтказамиз. $AN \parallel SK$

Ун иккинчи боб

ИККИНЧИ ДАРАЖАЛИ АЛГЕБРАИК ТЕНГЛАМАНИНГ ГЕОМЕТРИК МАЪНОСИНИ ТЕКШИРИШ

§ 79. УМУМИЙ МУЛОҲАЗАЛАР

Иккинчи тартибли эгри чизиқлардан биз ҳозиргача эллипс, гипербола ва парабола билан танишиб келдик (айланани ҳисобга олмаймиз, чунки у эллипснинг хусусий ҳоли). Иккинчи тартибли эгри чизиқлар шулардангина иборатми ёки булардан бошқа яна иккинчи тартибли эгри чизиқлар ҳам борми?

Қуйилган саволга жавоб бериш учун иккинчи даражали энг умумий кўринишдаги алгебраик тенгламани олиб, уни текширишга тўғри келади. Алгебрадан маълумки, икки номаълумли иккинчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

бунда A, B, C, D, E, F — ҳақиқий ўзгармас сонлардан иборат.

Биз бу бобда декарт координаталарига нисбатан (1) тенгламанинг ё эллипс (айлана), ё гипербола, ё парабола (ё хусусий ҳолларда иккита тўғри чизиқ) ифода қилишини исбот қиламиз.

Баъзи вақт (1) тенгламани биржинсли координаталарда ифодалаш бирмунча қулайлик келтиради. Бунинг учун (1) даги x ва y нинг ўрнига $\frac{x}{t}$ ва $\frac{y}{t}$ қўйиб, сўнгра тенгламанинг иккала томонини t^2 га кўпайтирамиз. Натижада бундай тенглама ҳосил бўлади:

бўлгани учун, ҳалиги текислик кесувчи текисликни AN га параллель бўлган EM бўйича кесади ва $ME \perp DP$ бўлади. Ўтказилган текислик BC доиранинг текислиги билан BRE тўғри чизиқ бўйича кесишади. Шунинг учун MER ва RBS учбурчаклар ўзаро ўхшаш бўлади. Буларда:

$$\frac{MR}{ME} = \frac{SR}{SB},$$

ёки M нуқтадан шарга ўтказилган уринмалар ўзаро тенг, яъни $MR = MF$ бўлгани учун

$$\frac{MF}{ME} = \frac{SR}{SB};$$

шакл бўйича $SR = SB$. Демак,

$$MF = ME.$$

Бу эса ANM текисликнинг конус билан кесишганидан ҳосил бўлган чизиқ — фокуси F нуқтада бўлиб, директрисаси DP бўлган параболадан иборат эканини кўрсатади.

Биз юқорида, китобнинг эллипсга бағишлаган бобида (8-боб, § 45) Кеплер қонунлари тўғрисида тушунча бериб ўтган эдик. Энди фурсатдан фойдаланиб, мисол тариқасида бу қонунлардан биринчисини умумийлаштирамиз. Масала шундаки, Қуёшнинг тортиш кучи таъсири остида унинг атрофидаги самовий жисмлар умуман конус кесимлари (айланалар, эллипслар, гиперболалар ва параболалар) бўйича ҳаракатда бўлиши мумкин. Шунинг учун Кеплернинг зикр қилинган 1-қонунининг умумийлашган ифодаси қуйидагича бўлади:

Қуёш атрофидаги ҳар бир жисм конус кесими бўйича ҳаракатда бўлиб, униг фокусларидан бирида Қуёш туради.

Орбиталари айлана ва эллипс бўлган жисмларнинг ҳаракати даврий бўлган ҳолда, парабола ва гипербола бўйича ҳаракатда бўлган жисмлар ҳеч вақт (Қуёш атрофига) яна қайтиб келмайди.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2 = 0 \qquad (2)$$

Бу тенглама x, y, t га нисбатан биржинсли бўлиб, қайтиб декарт координаталарига ўтиш учун $t = 1$ фараз қилинса кифоя қилади. Тенгламанинг чап томонини $2f(x, y, t)$ ёки қисқача $2f$ билан белгилаймиз, яъни:

$$2f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2. \qquad (3)$$

Агар бу функциядан x, y ва t га нисбатан хусусий ҳосила олинса, 2 га қисқартгандан кейин:

$$f'_x = Ax + By + Dt,$$

$$f'_y = Bx + Cy + Et,$$

$$f'_t = Dx + Ey + Ft$$

бўлади. Энди бу тенгликлардан биринчисини x га, иккинчисини y га ва учинчисини t га кўпайтириб қўшамиз:

$$xf'_x + yf'_y + tf'_t =$$
$$= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxt + 2Eyt + Ft^2$$

ёки

$$xf'_x + yf'_y + tf'_t = 2f,$$

яъни *иккинчи даражали биржинсли функциядан олинган хусусий ҳосилалар ярмининг мос ўзгарувчиларга кўпайтмасининг йиғиндиси функциянинг ўзига тенг.*

Иккинчи даражали биржинсли функциянинг бу хоссаси, биржинсли функциянинг умумий хоссаси тўғрисидаги Эйлер теоремасининг хусусий ҳолидан иборат.

§ 80. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ИККИТА ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА АЖРАЛИШИ

Фараз қилайлик, иккинчи даражали алгебраик тенглама берилган бўлсин:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \qquad (1)$$

Умуман бу тенглама эгри чизиқ ифода қилса-да, лекин баъзи хусусий ҳолларда у иккита тўғри чизиқ ифода қилиши мумкин. Бундай ҳолларда (1) эгри чизиқ иккита тўғри чизиққа ажралади дейилади.

Бу масалани текшириш мақсади билан (1) тенгламани y нинг даражасига нисбатан ушбу кўринишда ёзиб оламиз:

$$Cy^2 + 2(Bx + E)y + Ax^2 + 2Dx + F = 0$$

ва бунда $C \neq 0$ фараз қилиб, тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{(Bx + E)^2 - C(Ax^2 + 2Dx + F)}}{C} =$$

$$= \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{B^2x^2 + 2BEx + E^2 - ACx^2 - 2CDx - CF}}{C} =$$

$$= \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - DC)x + E^2 - CF}}{C}. \qquad (2)$$

Агарда

$$\left.\begin{aligned} B^2 - AC &= M \\ BE - DC &= N \\ E^2 - CF &= P \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

фараз қилинса, (2) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm \sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}}{C} \qquad (4)$$

Бу тенгламанинг тўғри чизиқ ифода қилиши учун x ва y га нисбатан унинг биринчи даражали бўлиши лозим. Бу эса радикал остидаги ифода тўла квадрат бўлганда мумкин. У ифоданинг тўла квадрат бўлиши учун

$$4N^2 = 4MP,$$

ёки

$$N^2 = MP \qquad (5)$$

бўлиши керак (алгебрага қаранг). Бунга асосан

$$Mx^2 + 2Nx + P = Mx^2 \pm 2x\sqrt{MP} + P =$$

$$= (x\sqrt{M} \pm \sqrt{P})^2, \text{ чунки } N = \sqrt{MP}.$$

Шунинг билан (4) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y = \frac{-(Bx + E) \pm (x\sqrt{M} \pm \sqrt{P})}{C}. \qquad (6)$$

ёки бундан ушбу икки тенглама ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{-B+\sqrt{M}}{C}x+\frac{\sqrt{P}-E}{C}, \\ y &= \frac{-B-\sqrt{M}}{C}x-\frac{\sqrt{P}+E}{C}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Бу тенгламалардан ҳар бири x ва y га нисбатан биринчи даражали бўлгани учун, улар тўғри чизиқ ифода қилади. Буларнинг ҳақиқий ёки мавҳум бўлиши мумкин. Бу эса радикал остидаги M ва P миқдорларининг ишораларига боғлиқ. (5) га мувофиқ M ва P нинг ишоралари бир хил бўлади, чунки ҳамавақт $MP = N^2 > 0$. Шунинг учун:

1) $M = B^2 - AC > 0$ бўлган ҳолда (7) билан ифода қилинган иккала тўғри чизиқ ҳақиқий бўлади ва бир-бирини кесади,

2) $M = B^2 - AC < 0$ бўлган ҳолда улар мавҳум бўлади ва

3) $M = B^2 - AC = 0$ бўлган ҳолда улар ўзаро параллель бўлади,

Демак, $C \neq 0$ ва (5) тенглик мавжуд бўлган ҳолда (1) тенглама умуман икки тўғри чизиқни ифода қилади. Лекин (5) шартни яна бошқачароқ тасвир қилиш мумкин. Бунинг учун (5) га (3) дан M, N, P нинг ифодаларини қўямиз:

$$(BE - DC)^2 = (B^2 - AC)(E^2 - CF),$$

ёки

$$B^2E^2 - 2BCDE + D^2C^2 - B^2E^2 + B^2CF + ACE^2 - AC^2F = 0,$$

ёки

$$-2BCDE + D^2C^2 + B^2CF + ACE^2 - AC^2F = 0,$$

ёки

$$-C(2BDE - D^2C - B^2F - AE^2 + ACF) = 0.$$

Юқорида қилинган фаразга мувофиқ $C \neq 0$ эди. Шунинг учун:

$$2BDE - D^2C - B^2F - AE^2 + ACF = 0,$$

ёки

$$A(CF - E^2) - B(BF - DE) + D(BE - DC) = 0,$$

ёки

$$A\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} - B\begin{vmatrix} B & E \\ D & F \end{vmatrix} + D\begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix} = 0,$$

ёки

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Бу тенгликнинг чап томонидаги детерминант (1) тенгламанинг дискримнианти дейилади ва у одатда Δ билан ифода қилинади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Биз юқорида $C \neq 0$ фараз қилган эдик. Агарда $C = 0$ ва $A \neq 0$ бўлган ҳолда (1) тенгламани x га нисбатан ечиб, ҳалиги йўл билан давом қилинса, ҳамон шу натижанинг ўзи келиб чиқади; яъни $\Delta = 0$ бўлади.

Агар $A = C = 0$ ва $B \neq 0$ бўлса, у ҳолда тенгламанинг кўриниши

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

ёки

$$xy + \frac{D}{B}x + \frac{E}{B}y + \frac{F}{2B} = 0,$$

ёки

$$x\left(y + \frac{D}{B}\right) + \frac{E}{B}\left(y + \frac{D}{B}\right) + \frac{F}{2B} - \frac{DE}{B} = 0,$$

ёки

$$\left(y + \frac{D}{B}\right)\left(x + \frac{E}{B}\right) = \frac{2DE - BF}{2B^2}.$$

Бу тенгламанинг иккита тўғри чизиқ ифода қилиши учун

$$2DE - BF = 0$$

бўлиши шарт. Бу ҳолда

$$y + \frac{D}{B} = 0, \qquad x + \frac{E}{B} = 0$$

ва

$$\Delta = -B(BF - DE) + DBE = + B(2DE - BF).$$

Агар $2DE - BF = 0$ бўлса, $\Delta = 0$ бўлади; аксинча, $\Delta = 0$ ва $B \neq 0$ бўлса, $2DE - BF = 0$ бўлади. Агар $A = B = C \neq 0$ бўлса, (1) тенглама тўғри чизиқ ифода қилиши ўз-ўзидан кўриниб турмоқда. Бу ҳолда ҳам

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0.$$

Шунинг билан, ҳар ҳолда, (1) тенгламанинг иккита тўғри чизиқ ифода қилиши учун $\Delta = 0$ бўлиши лозим. Аксинча бу шарт ёки (5) бажарилган ҳолда (1) тенгламанинг чап томони иккита биринчи даражали кўпайтувчига ажралади, яъни тенглама ҳамон иккита тўғри чизиқ ифода қилади.

Мисол 1. Ушбу тенгламанинг иккита тўғри чизиқ ифода қилиши исбот қилинсин:

$$y^2 - 4xy - 5x^2 + 5x - y = 0.$$

Берилган тенгламани иккинчи даражали умумий тенглама билан солиштириб қараганда:

$$A = -5,\ B = -2,\ C = 1,\ D = 2\frac{1}{2},\quad E = -\frac{1}{2}, F = 0.$$

Демак,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -5, & -2, & 2\frac{1}{2} \\ -2, & +1, & -\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Бу эса берилган тенгламанинг иккита тўғри чизиқ ифода қилишини исбот қилади. $B^2 - AC = (-2)^2 - (-5) = 4 + 5 > 0$ бўлгани учун иккала чизиқ ҳақиқий ва бир-бирини кесувчи бўлади. Уларнинг тенгламаларини топиш учун берилган тенгламани y га нисбатан ечамиз:

$$y^2 - (4x + 1)\,y - 5x^2 + 5x = 0,$$

$$y = \frac{4x + 1 \pm \sqrt{(4x + 1)^2 - 4(-5x^2 + 5x)}}{2},$$

ёки

$$y = \frac{4x + 1 \pm \sqrt{36x^2 - 12x + 1}}{2},$$

ёки

$$y = \frac{4x + 1 \pm \sqrt{(6x - 1)^2}}{2},$$

ёки

$$y = \frac{4x + 1 \pm (6x - 1)}{2},$$

ёки

$$y = 5x, \ y = -x + 2$$

иккала тўғри чизиқнинг тенгламалари булади.

Мисол 2. Қуйидаги тенгламанинг иккита тўғри чизиқ ифода қилиши исбот қилиисин:

Берилган мисолда:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & -1, & -\frac{3}{2} \\ -1, & 1, & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2}, & \frac{3}{2}, & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

демак, берилган тенглама иккита тўғри чизиқни ифода қилади. $B^2 - AC = (-1)^2 - 1 = 0$ бўлгани учун улар ўзаро параллель булади. Буни синаб кўриш учун берилган тенгламани y га нисбатан ечиб кўрамиз:

$$y^2 - (2x - 3)y + x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$y = \frac{2x - 3 \pm \sqrt{(2x - 3)^2 - 4(x^2 - 3x + 2)}}{2},$$

ёки

$$y = \frac{2x - 3 \pm 1}{2} \text{ ёки } y = x - 1, \ y = x - 2,$$

ҳақиқатда булар иккита параллель тўғри чизиқдан иборат.

§ 81. КООРДИНАТАЛАР БОШИНИ КЎЧИРИШ

Ўтган параграфда чиқарилган натижага мувофиқ, иккинчи даражали ушбу

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

тенгламанинг дискриминанти $\Delta = 0$ бўлган чоғда у умуман иккита тўғри чизиқ ифода қилган эди. Энди $\Delta \neq 0$ фараз қиламиз, демак, бу ҳолда (1) тенглама умуман бирор эгри чизиқ ифода қилади. Бу ҳолни текширишда (1) тенгламани бирмунча соддалаштиришга тўғри келади. Бунинг учун энг аввал координата ўқларинннг йўналишларини сақлаб, унинг бошини бирор (a, b) нуқтага кўчирамиз ва бундай координаталар алмаштиришдан тенглама шаклининг қандай ўзгаришига диққат қиламиз. Бу ҳолда координаталар алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади:

$$x = x_1 + a,$$
$$y = y_1 + b.$$

Буларни (1) тенгламага қўямиз:

$$A(x_1 + a)^2 + 2B(x_1 + a)(y_1 + b) + C(y_1 + b)^2 + \\ + 2D(x_1 + a) + 2E(y_1 + b) + F = 0, \qquad (2)$$

Бундаги қавсларни очиб, сўнгра x_1 ва y_1 га нисбатан тенг даражали бўлган ҳадлари тўпланса, унинг кўриниши бундай бўлади:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2(Aa + Bb + D)x_1 + 2(Ba + \\ + Cb + E)y_1 + Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F = 0. \qquad (3)$$

Иккинчи томондан, агарда (1) тенгламанинг чап томонини $2f(x, y)$ фараз қилсак,

$$2f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \qquad (4)$$

бундан x ва y га нисбатан хусусий ҳосилалари олинса:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x, y) &= Ax + By + D, \\ f'_y(x, y) &= Bx + Cy + E, \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ёки (4) ва (5) дан:

$$\begin{aligned} 2f(a, b) &= Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F, \\ f'_x(a, b) &= Aa + Bb + D, \\ f'_y(a, b) &= Ba + Cb + E. \end{aligned} \qquad (6)$$

Буларга асосан (3) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f'_x(a, b)x_1 + \\ + 2f'_y(a, b)y_1 + 2f(a, b) = 0. \qquad (7)$$

Бу тенгламани (1) тенглама билан солиштириб қараганда, кўрамизки:

1) унинг иккинчи даражали ҳадларининг коэффициентлари ўзгармай қолган;

2) биринчи даражали ҳадларининг коэффициентлари (1) тенгламанинг чап томонидан x ва y га нисбатан олинган хусусий ҳосилаларнинг $x=a$, $y=b$ бўлган хусусий қийматларидан иборат ва;

3) тенгламанинг озод ҳади (1) тенгламанинг чап томонида x нинг ўрнига a ва y нинг ўрнига b қўйишдан чиққан натижадан иборат;

4) тенгламанинг дискриминанти ҳам худди аввалги (1) тенгламанинг дискриминантига тенг бўлади, яъни параллель алмаштиришдан иккинчи тартибли чизиқнинг дискриминанти ўзгармайди. Ҳақиқатда (1) тенгламанинг дискриминанти бундай бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \tag{8}$$

Координаталар бошини кўчириш натижасида ҳосил бўлган (7) тенгламанинг дискриминанти

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B & f'_x \\ B & C & f'_y \\ f'_x & f'_y & 2f \end{vmatrix} \tag{9}$$

Бу детерминантнинг биринчи устун элементларини a га ва иккинчи устун элементларини b га кўпайтириб, сўнгра уларнинг йиғиндисини учинчи устуннинг мос элементларидан айириб оламиз. Бу ҳолда учинчи устун элементлари қуйидагича бўлади:

$$f'_x - Aa - Bb$$

$$f'_y - Ba - Cb$$

$$2f - af'_x - bf'_y$$

(6) тенгликларга асосан бу ифодалардан биринчиси D га, иккинчиси E га ва учинчиси (§ 78) f_1 га тенг ($t=1$ бўлганда). Демак,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ f'_x & f'_y & f'_t \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{2(D+Ek)}{A+2Bk+Ck^2}. \qquad (4)$$

Агар ватарнинг ўртасидаги нуқтанинг координаталари x_0, y_0 фараз қилинса, у ҳолда

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = -\frac{D+Ek}{A+2Bk+Ck^2},$$

$$y_0 = kx_0 = -\frac{(D+Ek)\,k}{A+2Bk+Ck^2}$$

бўлади. Координаталар боши ватарнинг ўртасида бўлган ҳолда $x_0 = y_0 = 0$ бўлади. Бу эса

$$D + Ek = 0 \qquad (5)$$

бўлган ҳолда бўлади.

Агарда координаталар боши турган нуқтада ҳар қандай ватар тенг иккига бўлинса, у ҳолда (5) тенглама k нинг ҳар қандай қийматида қаноатланиши лозим, бу эса

$$D = 0 \text{ ва } E = 0 \qquad (6)$$

бўлган ҳолдагина мумкин, яъни (2) тенгламанинг кўриниши

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0 \qquad (7)$$

бўлган ҳолдагина мумкин. Бу ҳолнинг тескариси ҳам тўғри, чунки $D = 0$ ва $E = 0$ бўлгандагина k нинг ҳар қандай қийматида (5) шарт бажарилиши мумкин.

Шунинг билан, координаталар боши иккинчи тартибли чизиқнинг маркази бўлиши учун унинг тенгламасида биринчи даражали ҳадлар бўлмаслиги зарур ва кифоядир.

Ўтган параграфда чиқарилган натижага асосан координаталар бошини (a, b) нуқтага кўчирганда (2) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлган эди:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f'_x(a, b)\,x_1 +$$
$$+ 2f'_y(a, b)\,y_1 + 2f(a, b) = 0.$$

Агарда эгри чизиқнинг маркази мавжуд бўлиб, у координаталар бошида бўлган ҳолда, тенгламанинг биринчи даражали ҳадлари йўқолар эди. Демак, (a, b) нуқта ҳалиги эгри чизиқнинг маркази бўлиши учун a ва b қуйидаги тенгламаларни қаноатлантириши зарур ва кифоядир:

Бу детерминант устида ҳам ҳалиги каби амалларни бажарамиз: биринчи йўл элементларини a га ва иккинчисини b га кўпайтириб, сўнгра уларнинг йиғиндисини учинчи йўлнинг мос элементларидан айириб оламиз. Бу ҳолда:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

бу эса (1) тенгламанинг дискриминантидан иборат, яъни

$$\Delta = \Delta'. \qquad (11)$$

Шунинг билан, бажарилган координаталар алмаштириш натижасида (1) тенгламанинг дискриминанти ўзгармай, ўзини сақлаб қолди. Дискриминантнинг бу хусусияти одатда и н в а р и а н т дейилади.

§ 82. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ МАРКАЗИ

Эгри чизиқнинг маркази учун берилган умумий таърифни биз бу ерда яна бир мартаба эсга солиб ўтамиз: эгри чизиқнинг маркази деб, шундай нуқтага айтиладики, эгри чизиқнинг ундан ўтган ҳар бир ватари шу нуқтада тенг иккига бўлинади.

Бу таърифни эътиборга олиб, қандай шарт билан координаталар боши эгри чизиқнинг маркази бўлишлигини текширамиз. Бунинг учун фараз қилайлик, координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y = kx \qquad (1)$$

ва эгри чизиқнинг тенгламаси

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (2)$$

бўлсин. (1) ва (2) нинг ўзаро учрашган нуқталарини аниқлаш учун иккала тенгламани бирликда ечишга тўғри келади. Бунинг учун (1) дан y нинг ифодасини (2) га қўямиз:

$$Ax^2 + 2Bkx^2 + Ck^2x^2 + 2Dx + 2Ekx + F = 0,$$

ёки

$$(A + 2Bk + Ck^2)\, x^2 + 2\,(D + Ek)\, x + F = 0 \qquad (3)$$

Бу тенгламанинг x_1 ва x_2 илдизлари (1) ва (2) чизиқларнинг ўзаро кесишган нуқталарнинг абсциссалари бўлади. Квадрат тенгламанинг асосий хоссасига мувофиқ

$$\left.\begin{aligned} f'_x(a, b) = Aa + Bb + D = 0, \\ f'_y(a, b) = Ba + Cb + E = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Агар a ва b ўзгарувчи координаталар деб фараз қилинса, бу ҳолда (8) тенгламалардан ҳар бири текисликда тўғри чизиқ ифода қилади ва изланган (a, b) нуқта уларнинг кесишган нуқтасидан иборат бўлади. Шунинг учун:

1) Агар (8) тўғри чизиқлар ўзаро параллель бўлмаса, яъни

$$\frac{A}{B} \neq \frac{B}{C}$$

ёки

$$AC - B^2 \neq 0 \qquad (9)$$

бўлган ҳолда эгри чизиқ чекланган масофада биргина аниқ марказга эга бўлади ва бу ҳолда эгри чизиқнинг ўзи марказли эгри чизиқ дейилади.

2) Агар $AC - B^2 = 0$ бўлса, (8) тўғри чизиқлар ўзаро параллель бўлиб, икки ҳол бўлиши мумкин: а) тўғри чизиқлар бир-бири билан бирлашиб кетмаган ҳолда эгри чизиқнинг маркази бўлмайди ёки тўғриси унинг маркази чексиз узоқда бўлади ва б) тўғри чизиқлар бирлашиб кетган ҳолда эгри чизиқнинг саноқсиз кўп марказлари бўлади ва улар (8) тўғри чизиқлардан исталганини ташкил қилади. Бу ҳолда, яъни (8) чизиқлар бирлашиб кетганда

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E} \qquad (10)$$

ёки

$$BE - DC = 0, \; BD - AE = 0, \; AC - B^2 = 0, \qquad (11)$$

бу эса (2) тенглама дискриминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

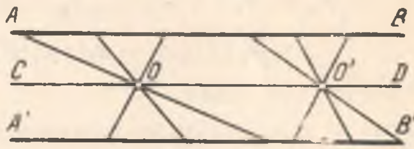
нинг учинчи йўл элементларига нисбатан минорларидан иборат, демак,

$$\Delta = 0.$$

Демак, бу ҳолда (2) эгри чизиқ иккита параллель (масалан, AB ва $A'B'$) тўғри чизиқларга ажралади ва улардан тенг масофада бўлиб, уларнинг орасидан ўтган CD тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси марказ ролини ўйнайди. Ҳақиқатда, CD нинг ихтиёрий бирор O нуқтасидан ўтган ҳар бир ватар тенг иккига бўлинади (шакл 124).

Натижада, (2) эгри чизиқнинг маркази мавжуд бўлган ҳолда, яъни $AC - B^2 \neq 0$ бўлганда унинг координаталари (8) системани ечиш билан топилади ва у қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{BE - DC}{AC - B^2} \\ b &= \frac{BD - AE}{AC - B^2} \end{aligned}\right| \qquad (12)$$



Шакл 124.

Шунинг билан, (8) га асосан иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази координаталар бошида бўлган ҳолда унинг тенгламаси бундай бўлади:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 + 2f(a,\ b) = 0,$$

бунда

$$2f(a, b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F.$$

§ 83. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚҚА УРИНМА ВА НОРМАЛЬ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Фараз қилайлик, иккинчи тартибли эгри чизиқ берилган бўлсин:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

ва бунинг бирор $M(x_1,\ y_1)$ нуқтасига уринма ўтказиш лозим бўлсин. Бунинг учун берилган эгри чизиқда ҳалиги M нуқтага қўшни бўлган яна бирор $M'(x_2,\ y_2)$ нуқтани оламиз. M ва M' нуқталардан ўтган кесувчи тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

ёки

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (2)$$

бўлади. M ва M' нуқталар (1) эгри чизиқда бўлгани учун

$$Ax_1^2 + 2Bx_1 y_1 + Cy_1^2 + 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0, \tag{3}$$

$$Ax_2^2 + 2Bx_2 y_2 + Cy_2^2 + 2Dx_2 + 2Ey_2 + F = 0. \tag{4}$$

(4) дан (3) айирилса:

$$A\left(x_2^2 - x_1^2\right) + 2B\left(x_2 y_2 - x_1 y_1\right) + C\left(y_2^2 - y_1^2\right) +$$
$$+ 2D(x_2 - x_1) + 2E(y_2 - y_1) = 0. \tag{5}$$

Иккинчи томондан

$$x_2y_2 - x_1y_1 = x_2y_2 - x_1y_1 + x_2y_1 - x_2y_1 =$$
$$= x_2(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)$$

бўлгани учун (5) ни бундай ёзиш мумкин:

$$A(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 2Bx_2(y_2 - y_1) + 2By_1(x_2 - x_1) +$$
$$+ C(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) + 2D(x_2 - x_1) + 2E(y_2 - y_1) = 0,$$

ёки

$$(x_2 - x_1)\left[A(x_2 + x_1) + 2By_1 + 2D\right] +$$
$$+ (y_2 - y_1)\left[C(y_2 + y_1) + 2Bx_2 + 2E\right] = 0;$$

бундан

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A(x_2 + x_1) + 2By_1 + 2D}{C(y_2 + y_1) + 2Bx_2 + 2E}.$$

Буни (2) га қўйсак:

$$y - y_1 = -\frac{A(x_2 + x_1) + 2By_1 + 2D}{C(y_2 + y_1) + 2Bx_2 + 2E}(x - x_1). \tag{6}$$

Берилган (1) эгри чизиқдаги M ва M' нуқтадан ўтган кесувчи чизиқнинг тенгламаси шундан иборат бўлиб, бу тенглама M ва M' эгри чизиқнинг қаерида бўлсада ўз кучини сақлайди. Маълумки, MM' кесувчи чизиқдан эгри чизиқнинг M нуқтасида уринма ҳосил қилиш учун M' нуқтаии M нуқтага чексиз яқинлаштириб келиш керак. Бу ҳолда, яъни

$$x_2 \to x_1, \quad y_2 \to y_1.$$

бўлганда (6) ннңг кўриниши, лимитга ўтилса

$$y - y_1 = -\frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E}(x - x_1) \tag{7}$$

бўлади. Буни қуйидагича соддалаштириш мумкин:

$$(Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y =$$
$$= Ax_1^2 + 2Bx_1\,y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1\,;$$

бунинг иккала томонига

$$Dx_1 + Ey_1 + F$$

ни қўшамиз. Бу ҳолда (3) га мувофиқ:

$$(Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)y +$$
$$+ (Dx_1 + Ey_1 + F) = 0. \tag{8}$$

Изланган уринманинг тенгламаси шундан иборат. Чиқарилган тенгламани симметрик формада ёзиш мумкин. Бунинг учун (1) тенгламанинг чап томонини учинчи (z) координата ёрдами билан бир жинсли функцияга айлантирамиз:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0,$$

бунда $z = 1$ бўлганда, аввалги (1) тенглама ҳосил бўлади. Агарда бу тенгламанинг чап томонини қисқача $2F(x,\ y,\ z)$ билан белгилаб олсак, у ҳолда:

$$F'_{x_1} = Ax_1 + By_1 + D,$$

$$F'_{y_1} = Bx_1 + Cy_1 + E,$$

$$F'_{z_1} = Dx_1 + Ey_1 + F.$$

Буларга асосан (8) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$xF'_{x_1} + yF'_{y_1} + zF'_{z_1} = 0. \tag{9}$$

Энди (1) эгри чизиқнинг $M(x_1,\ y_1)$ нуқтасидан ўтган нормалнинг тенгламасини тузамиз. Умуман $M(x_1,\ y_1)$ нуқтадан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$y - y_1 = k\,(x - x_1) \tag{10}$$

бўлади. Уринманинг k' бурчак коэффициенти унинг (8) тенгламасидан аниқланади:

$$k' = -\frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E},$$

Нормаль $M(x_1,\ y_1)$ нуқтада уринмага перпендикуляр бўлгани учун

$$k = -\frac{1}{k'} = \frac{Bx_1 + Cy_1 + E}{Ax_1 + By_1 + D}.$$

Бу (10) га қўйилса, нормалнинг тенгламаси

$$(Ax_1 + By_1 + D)(y - y_1) - (Bx_1 + Cy_1 + E)(x - x_1) = 0 \quad (11)$$

бўлади.

84. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ЧЕКСИЗ УЗОҚЛАШГАН НУҚТАЛАРИ ВА АСИМПТОТАЛАРИ

Фараз қилайлик, иккинчи тартибли эгри чизиқ берилган бўлсин:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (1)$$

Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг асимптоталари деб, шундай тўғри чизиқларга айтиладики, улардаги чексиз узоқлашган нуқта эгри чизиқ нуқталарига чексиз яқинлашиб келади.

Буларни излаш мақсадида энг аввал

$$y = kx + l \quad (2)$$

тўғри чизиқ билан (1) нинг ўзаро кесишган нуқтасини топамиз. (2) ни (1) га қўйсак,

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0, \quad (3)$$

бунда

$$M = A + 2Bk + Ck^2,$$
$$N = (B + Ck)l + (D + Ek),$$
$$P = Cl^2 + 2El + F.$$

Агар (3) тенгламанинг илдизлари x_1, x_2 фараз қилинса, (2) га асосан

$$y = kx_1 + l$$
$$y_2 = kx_2 + l$$

бўлиб, (x_1, y_1), (x_2, y_2) нуқталар аниқланади.

Агар x_1 ва x_2 илдизлар ҳақиқий ва ҳар хил бўлса, (2) тўғри чизиқ (1) ни икки нуқтада кесади, агарда x_1 ва x_2 мавҳум бўлса, кесишмайди ва агарда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ бўлса, у ҳолда иккала нуқта бирлашиб, урinma ҳосил бўлади.

Энди чексиз узоқлашган нуқталарни аниқлаймиз. Бунинг учун қандай шарт билан (3) тенгламанинг ҳеч бўлмаганда битта чексиз катта илдизи бўлишини билиш керак. Алгебрадан маълумки, бунинг учун (3) тенгламада $M = 0$ бўлиши лозим ва кифоядир, ёки:

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0, \quad (4)$$

бундан

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{C}. \quad (5)$$

Демак, иккинчи тартибли эгри чизиқни чексиз узоқлашган нуқтада кесадиган икки йўналиш бор, яъни иккинчи тартибли эгри чизиқниинг умуман иккита чексиз узоқлашган нуқталари бор. Агар

$$M = B^2 - AC > 0$$

бўлса, (1) эгри чизиқ иккита ҳақиқий чексиз узоқлашган нуқтага эга бўлади; агарда $M < 0$ бўлса, эгри чизиқнинг чексиз узоқлашган нуқталари мавҳум бўлади; агарда $M = 0$ бўлса, бу ҳолда иккала чексиз узоқлашган нуқталар бирлашиб кетади.

Агарда (3) тенгламаниинг иккала илдизи чексизликка айлаиса, бу ҳолда $M = 0$ ва $N = 0$, ёки

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0,$$

$$(B + Ck)\,l + (D + Ek) = 0.$$

Бу ҳолда $y = kx + l$ тўғри чизиқнииг эгри чизиқ билан бирлашган иккита чексиз узоқлашган нуқтаси бўлади, ёки бошқача айтганда $y = kx + l$ эгри чизиққа асимптота бўлади. Кейинги икки тенгликнинг иккинчисидан

$$l = -\frac{D + Ek}{B + Ck}. \tag{6}$$

k иинг k_1 ва k_2 қийматлари (5) дан аниқланади; демак,

$$l_1 = -\frac{D + Ek_1}{B + Ck_1},$$

$$l_2 = -\frac{D + Ek_2}{B + Ck_2}.$$

Натижада, асимптота тенгламалари

$$y = k_1x + l_1,$$

$$y = k_2x + l_2$$

бўлади.

рик ўриннинг, яъни диаметрнинг тўғри чизиқдан иборат экани маълўм бўлади.

(4) тенглама $Ax + By + D = 0$ ва $Bx + Cy + E = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасидан ўтган, яъни эгри чизиқнинг марказидан ўтган тўғри чизиқни кўрсатади. Демак, *иккинчи тартибли эгри чизиқнинг диаметрлари унинг марказидан ўтади.*

(4) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(A + Bk)\,x + (B + Ck)\,y + D + kE = 0, \qquad (5)$$

бундан, диаметрнинг бурчак коэффициенти k' фараз қилинса

$$k' = -\frac{A + Bk}{B + Ck} \qquad (6)$$

бўлади. Бунга қараганда k' нинг қиймати умуман k га боғлиқ бўлиб, k ўзгарганда k' ҳам ўзгаради. Бироқ $B^2 - AC = 0$ бўлган ҳолда, яъни эгри чизиқнинг маркази бўлмаган ҳолда k' нинг қиймати k га боғлиқ бўлмайди. Ҳақиқатда, бу ҳолда

$$C = \frac{B^2}{A}$$

бўлгани учун, бу (6) га қўйилса,

$$k' = -\frac{A}{B} \qquad (6')$$

бўлади ва k' нинг қиймати k га боғлиқ бўлмайди. Демак, бу ҳолда, яъни *эгри чизиқнинг маркази бўлмаган ҳолда унинг ҳамма диаметрлари ўзаро параллель бўлади.*

(6) ни махраждан қутқазиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$A + B\,(k + k') + Ckk' = 0. \qquad (7)$$

Бу тенгликнинг чап томони k ва k' га нисбатан симметрик, яъни унинг қиймати k ва k' ни ўзаро алмаштиришдан ўзгармайди. Демак, бурчак коэффициенти k' бўлган диаметр, бурчак коэффициенти k бўлган ватарларга нисбатан қўшма бўлса, аксинча, бурчак коэффициенти k бўлган диаметр, бурчак коэффициенти k' бўлган ватарларга қўшма бўлади. Бошқача қилиб ифода қилганда: *бир диаметр, иккинчи диаметрга параллель бўлган ватарларга нисбатан қўшма бўлса, у ҳолда иккинчи диаметр биринчи диаметрга параллель бўлган ватарларга нисбатан қўшма бўлади.* Бу хусусиятга эга бўлган икки диаметр **ўзаро қўшма** дейилади.

§ 85. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚНИИГ ДИАМЕТРЛАРИ

Эгри чизиқнинг диаметри деб, берилган йўналишдаги параллель ватарларнинг ўрта нуқталаридаи ҳосил бўлган геометрик ўринни айтган эдик. Бу таърифга асосланиб, иккичи тартибли эгри чизиқнинг диаметрини топамиз. Фараз қилайлик, эгри чизиқнинг тенгламаси

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (1)$$

бўлсин. Агарда k ии ўзгармас ва l ни ўзгарувчи параметр деб фараз қилсак, у ҳолда ўзаро параллель бўлган ва бурчак коэффициентлари k бўлган ҳамма ватарларнинг теиглaverмаси

$$y = kx + l \qquad (2)$$

бўлади. Фараз қилайлик, бу ватарлардан бирортасининг ўртасидаги нуқтанинг координаталари x_0 ва y_0 бўлсин. Агар ўқларнинг йўналишларини сақлаб, координаталар боши шу нуқтага кўчирилса, яъни $x = x_1 + x_0$ ва $y = y_1 + y_0$ фараз қилинса, (1) тенгламанинг кўриниши

$$Ax_1^2 + 2Bx_1 y_1 + Cy_1^2 + 2f_x'(x_0, y_0)x_1 +$$

$$+ 2f_y'(x_0, y_0)y_1 + 2f(x_0, y_0) = 0$$

бўлади (§ 81). Координаталар боши (x_0, y_0) нуқтанинг ўзида бўлган ҳолда ўтган параграфдаги (5) га асосан:

$$f_x'(x_0, y_0) + kf_y'(x_0, y_0) = 0,$$

ёки, ўзгарувчи координаталарни ҳамон x, y фараз қилганда,

$$f_x'(x, y) + kf_y'(x, y) = 0 \qquad (3)$$

бўлади. Изланган геометрик ўриннинг, яъни диаметрнинг тенгламаси шундан иборат. Бу тенгламада

$$f_x'(x, y) = Ax + By + D,$$

$$f_y'(x, y) = Bx + Cy + E$$

бўлгани учун, уни

$$(Ax + By + D) + k(Bx + Cy + E) = 0 \qquad (4)$$

шаклда ёзиш мумкин. Бу, демак, (3) тенглама x ва y га нисбатан биринчи даражали бўлгани учуи изланган геомет-

Ўзаро перпендикуляр бўлган қўшма диаметрлар эгри чизиқнинг бош диаметрлари ёки унинг ўқлари дейилади. Бу ҳолда $kk' + 1 = 0$ (перпендикулярлик шарти) ва бундан

$$kk' = -1, \tag{8}$$

ёки бу (7) га қўйилса,

$$A + B(k + k') - C = 0,$$

бундан

$$k + k' = -\frac{A - C}{B}. \tag{9}$$

(8) ва (9) га мувофиқ k ва k' ушбу

$$k^2 + \frac{A - C}{B}k - 1 = 0, \tag{10}$$

ёки

$$Bk^2 + (A - C)k - B = 0 \tag{11}$$

квадрат тенгламанинг илдизлари бўлади.

Бу тенгламада

$$(A - C)^2 + 4B^2$$

ҳамавақт нолдан катта бўлгани учун, (11) тенгламанинг илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлади. Бу эса марказли эгри чизиқнинг иккита ҳақиқий ўқи борлигини кўрсатади.

Маркази бўлмаган эгри чизиқнинг ҳамма диаметрлари ўзаро параллель бўлгани учун, бундай эгри чизиқнинг қўшма диаметрлари бўлмайди. Бундай эгри чизиқнинг ёлғиз биргина ўқи бўлади ва у тегишли параллель ватарларга перпендикуляр бўлади. Перпендикулярлик шарти бўйича $1 + kk' = 0$ ёки бундан

$$k = -\frac{1}{k'},$$

ёки (6′) га асосан

$$k = \frac{B}{A}.$$

Бу (4) га қўйилса, марказсиз эгри чизиқнинг ўқи учун тенглама ҳосил бўлади.

Мисол 1. Эгри чизиқнинг тенгламаси берилган:

$$x^2 - 2xy + y^2 + y - 1 = 0$$

Бунинг $x + 2y = 0$ тўғри чизиққа параллель бўлган ватарларга нисбатан қўшма диаметрининг тенгламаси топилсин.

Ватарларнинг бурчак коэффициенти $k = -\frac{1}{2}$ бўлгани учун буларга қўшма диаметрнинг тенгламаси

$$f'_x(x, y) - \frac{1}{2} f'_y(x, y) = 0$$

бўлади. Берилган мисолда:

$$f'_x(x, y) = x - y,$$

$$f'_y(x, y) = -x + y + \frac{1}{2}$$

ёки

$$6x - 6y - 1 = 0.$$

Мисол 2. Ушбу эгри чизиқнинг бош диаметрлари топилсин:

$$5x^2 - 4xy + y^2 - 2 = 0.$$

$$f'_x(x, y) = 5x - 2y; \quad f'_y(x, y) = -2x + y;$$

$$5x - 2y + k(-2x + y) = 0, \qquad (A)$$

бунинг бурчак коэффициенти

$$k' = \frac{5 - 2k}{2 - k}.$$

Эгри чизиқнинг бош диаметри ўзини иккига бўладиган ватарларга перпендикуляр бўлгани учун

$$1 + kk' = 0 \text{ ёки } 1 + \frac{5 - 2k}{2 - k} \cdot k = 0 \text{ ёки } k^2 - 2k - 1 = 0,$$

бундан

$$k_1 = 1 + \sqrt{2}, \; k_2 = 1 - \sqrt{2},$$

демак, бош диаметрларнинг тенгламалари (булар A га қўйилса):

$$(3 - 2\sqrt{2})x - (1 - \sqrt{2})y = 0,$$

$$(3 + 2\sqrt{2})x - (1 + \sqrt{2})y = 0.$$

Бу тенгламани яна соддалаштириш мақсади билан координата ўқларининг йўналишларини ўзгартирамиз, яъни бирор, ҳозирча маълум бўлмаган, ихтиёрий бурчакка айлантирамиз. Айлантирилган бурчак, яъни координата ўқларининг янги ва эски йўналишлари орасидаги бурчак α фараз қилинса ва эгри чизиқнинг янги системага нисбатан ўзгарувчи координаталари x ва y фараз қилинса, у ҳолда алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y_1 &= x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Буларни (6) га қўямиз:

$$A(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + 2B(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) +$$
$$+ C(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 = \frac{\Delta}{B^2 - AC},$$

ёки бундаги қавсларни очиб, x^2, xy ва y^2 ли ҳадлари тўплаб олинса, унинг кўриниши бундай бўлади:

$$(A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha)x^2 + 2(-A\cos\alpha\sin\alpha +$$
$$+ B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha)xy + (A\sin^2\alpha -$$
$$- 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y^2 = \frac{\Delta}{B^2 - AC}. \tag{8}$$

Бу тенгламанинг коэффициентларини қуйидагича ифода қиламиз:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha, \\ B_1 &= -A\cos\alpha\sin\alpha + B\cos^2\alpha - B\sin^2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha, \\ C_1 &= A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Бу ҳолда (8) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 = \frac{\Delta}{B^2 - AC}. \tag{10}$$

(9) даги ифодалардан биринчиси билан учинчисини қўшсак:

$$A_1 + C_1 = A + C \tag{11}$$

ва биринчисидан учинчисини айирсак:

$$A_1 - C_1 = A(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 4B\sin\alpha\cos\alpha - C(\cos^2\alpha -$$
$$- \sin^2\alpha) = (A - C)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 4B\sin\alpha\cos\alpha;$$

§ 86. МАРКАЗЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАСИНИ СОДДАЛАШТИРИШ

Ўтган параграфга мувофиқ иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази координаталар бошида бўлган ҳолда унинг тенгламаси

$$Ax_1^2 + 2Bx_1 y_1 + Cy_1^2 + 2f(a, b) = 0, \tag{1}$$

буида

$$2f(a, b) = Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F. \tag{2}$$

Шунинг билан баравар ўтган параграфдаги (3) га асосан марказли эгри чизиқнинг a ва b координаталари ушбу система билан аниқланган эди:

$$\left.\begin{aligned} Aa + Bb + D = 0, \\ Ba + Cb + E = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Булардан биринчисини a га ва иккинчисини b га кўпайтириб, сўнгра уларни қўшамиз. Бу чоғда

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + Da + Eb = 0$$

бўлади. Бунинг иккала томонига $Da + Eb + F$ ни қўшиб, (2) ни эътиборга олсак,

$$f(a, b) = Da + Eb + F \tag{4}$$

бўлади. Агар бундаги a ва b нинг ўрнига ўтган 82-параграфдаги уларнинг ифодалари қўйилса:

$$2f(a, b) = \frac{D^2C - BDE + AE^2 - BDE}{B^2 - AC} + F =$$

$$= \frac{D^2C - 2BDE + AE^2 + B^2F - ACF}{B^2 - AC},$$

ёки

$$2f(a, b) = -\frac{\Delta}{B^2 - AC}. \tag{5}$$

Шунинг учун (1) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$Ax_1^2 + 2Bx_1 y_1 + Cy_1^2 = \frac{\Delta}{B_2 - AC}. \tag{6}$$

$$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha, \quad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

бўлгани учун

$$A_1 - C_1 = (A - C)\cos 2\alpha + 2B\sin 2\alpha,$$

$$B_1 = B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) - (A - C)\cos\alpha\sin\alpha, \tag{12}$$

ёки

$$B_1 = B\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(A - C)\sin 2\alpha, \tag{13}$$

ёки

$$4B_1^2 = 4B^2\cos^2 2\alpha - 4B(A - C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha +$$

$$+ (A - C)^2\sin^2 2\alpha, \tag{14}$$

$$(A_1 - C_1)^2 = (A - C)^2\cos^2 2\alpha + 4B(A - C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha +$$

$$+ 4B^2\sin^2 2\alpha; \tag{15}$$

(14) ва (15) ни қўшганда

$$(A_1 - C_1)^2 + 4B_1^2 = (A - C)^2 + 4B^2.$$ 15.5

Сўнгги ифодадан (11) нинг квадратини айириб оламиз:

$$(A_1 - C_1)^2 - (A_1 + C_1)^2 + 4B^2 = (A - C)^2 - (A + C)^2 + 4B^2,$$

ёки

$$-4A_1C_1 + 4B_1^2 = -4AC + 4B^2,$$

ёки

$$B_1^2 - A_1C_1 = B^2 - AC. \tag{16}$$

Бажарилган алмаштириш муҳим хоссага эгадир. Ҳақиқатда, (6) тенглама, тўғрибурчакли координаталарда бажарилган (7) алмаштириш натижасида (10) га келиб, ҳамон ўз кўриншини сақлади; (6) тенгламанинг чап томонидаги x_1 ва y_1 га нисбатан тузилган бир жинсли иккинчи даражали кўп ҳадли худди шунга ўхшаш x ва y га нисбатан тузилган (10) нинг чап томонидаги кўпҳадлига айланди. Иккинчи томондан (11) ва (16) га мувофиқ.

$$A + C \text{ ва } B^2 - AC \tag{17}$$

ифодалар форма ва миқдор жиҳатдан ўзини сақлаб қолди; умуман бундай хоссага эга бўлган ҳалиги каби ифодаларни **инвариант** дейилади. Шунинг учун (17) ифодалари $Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2$ бир жинсли кўп ҳадлигининг (7) алмаштириш бўйича инварианти дейилади. α бурчаги ҳозиргача бизда ихтиерий эди. Энди унинг қийматини шундай қилиб аниқлаймизки, (10) тенгламанинг (xy) ли ҳади йўқ бўлсин. Бу эса (13) га асосан

$$B_1 = B\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(A - C)\sin 2\alpha = 0$$

бўлганда, ёки

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \tag{18}$$

бўлган ҳолда мумкин. Бу чоғда (10) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$A_1x^2 + C_1y^2 = \frac{\Delta}{B^2 - AC}. \tag{19}$$

Иккичи томондан $B_1 = 0$ бўлганда (16) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$-A_1C_1 = B^2 - AC,$$

ёки

$$A_1C_1 = AC - B^2. \tag{20}$$

(11) билан (20) га асосан (19) тенгламанинг A_1 ва C_1 коэффициентлари ушбу иккинчи даражали тенгламанинг илдизларидан иборат:

$$t^2 - (A + C)t + (AC - B^2) = 0,$$

демак,

$$A_1 = \frac{A + C + \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2} =$$

$$= \frac{A + C + \sqrt{A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + 4B^2}}{2} =$$

$$= \frac{A + C + \sqrt{A^2 - 2AC + C^2 + 4B^2}}{2} =$$

$$= \frac{A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}}{2}; \quad C_1 = \frac{A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^4}}{2}.$$

Шуниг билан натижада марказли эгри чизиқнинг энг содда ёки к а н о н и к тенгламасининг коэффициентлари ушбу формулалар билан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2}\left(A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}\right), \\ C_1 &= \frac{1}{2}\left(A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}\right). \end{aligned}\right| \tag{21}$$

§ 87. МАРКАЗЛИ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ КАНОНИК ТЕНГЛАМАСИНИ ТЕКШИРИШ

Ўтган параграфга мувофиқ марказли эгри чизиқнинг каноник тенгламаси

$$A_1x^2 + C_1y^2 = \frac{\Delta}{M}, \tag{1}$$

бунда

$$M = B^2 - AC. \tag{2}$$

Энди (1) тенгламанинг қандай эгри чизиқ ифода қилишини текширамиз. У тенгламанинг иккала томонини $\frac{\Delta}{M}$ га бўлганда

$$\frac{A_1M}{\Delta}x^2 + \frac{C_1M}{\Delta}y^2 = 1 \tag{3}$$

бўлади. Бу тенгламанинг геометрик маъноси унинг коэффициентларига боғлиқдир. Шунинг учун уларнинг устида турлича фараз қилишга тўғри келади. $M \neq 0$ бўлгани учун унинг устида икки хил фараз қилиш мумкин: 1) $M < 0$ ва 2) $M > 0$. Энг аввал биринчи ҳолни текширамиз, яъни

$$M = B^2 - AC < 0 \tag{4}$$

бўлсин. Ўтган параграфда ушбу икки муносабат чиқарилган эди:

$$A_1 + C_1 = A + C, \tag{5}$$

$$A_1C_1 = AC - B^2. \tag{6}$$

(4) га асосан

$$AC > B^2,$$

бу эса A ва C ишораларининг бир хиллигини кўрсатади. (4) га мувофиқ (6) дан

$$A_1C_1 > 0,$$

бу эса A_1 ва C_1 ишораларининг бир хиллигини кўрсатади. Шунинг учун $A_1 + C_1$ ва $A + C$ йиғиндилари ҳам бир хил ишорали бўлади. Иккинчи томондан (5) га асосан бу йиғиндилар ўзаро тенг бўлгани учун: A, C, A_1 ва C_1 коэффициентларнинг ишоралари бир хил бўлади. Шунинг учун улардан бирининг ишорасига диққат қилинса кифоя. Масалан, A ни олганда, агар:

а) $A \cdot \Delta < 0$ бўлса, яъни A ва Δ нинг ишоралари ҳар хил бўлса, у ҳолда (4) га асосан

$$\frac{A_1 M}{\Delta} > 0, \quad \frac{C_1 M}{\Delta} > 0.$$

Шунинг учун

$$\frac{A_1 M}{\Delta} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{C_1 M}{\Delta} = \frac{1}{b^2}$$

фараз қилинса, (3) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Бу эса ярим ўқлари a ва b дан иборат бўлган эллипсни ифода қилади,

б) $A \cdot \Delta > 0$ бўлса, яъни A ва Δ нинг ишоралари бир хил бўлса, у ҳолда (4) га асосан

$$\frac{A_1 M}{\Delta} < 0, \quad \frac{C_1 M}{\Delta} < 0.$$

Шунинг учун бу ҳолда

$$\frac{A_1 M}{\Delta} = -\frac{1}{a^2} \quad \frac{C_1 M}{\Delta} = -\frac{1}{b^2}$$

фараз қилинса, (3) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ ёки } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y_2}{b^2} = -1. \tag{8}$$

Бу тенгламада x ва y ҳеч қандай ҳақиқий қийматга эга бўла олмайди. Шунинг учун у мавҳум эллипсни ифода қилади.

Энди M ни мусбат фараз қиламиз:

$$M = B^2 - AC > 0. \tag{9}$$

Бу ҳолда (6) га асосан $A_1 C_1 < 0$, яъни A_1 ва C_1 нинг ишоралари ҳар хил бўлади. Шунинг учун бу ҳолда

$$\frac{A_1 M}{\Delta} = \pm \frac{1}{a^2}, \quad \frac{C_1 M}{\Delta} = \mp \frac{1}{b^2}$$

фараз қилиш мумкин. Бу ҳолда (3) тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{x^2}{\pm a^2} + \frac{y^2}{\mp b^2} = 1.$$

ёки

$$\frac{x^2}{a_2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1.$$

Бу эса ярим ўқлари a ва b дан иборат бўлган гиперболаии ифода қилади.

Мисол. Қуйидаги тенгламанииг геометрик маъносини текшириб, унинг каноник тенгламаси тузилсин:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$$

Эгри чизиқнинг жинсини аниқлаш учун Δ ва M ни ҳисоблашга тўғри келади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -1296, \quad A \cdot \Delta < 0.$$

$$M = B^2 - AC = 4 - 5 \cdot 8 = -36 < 0.$$

Демак, берилган тенглама ҳақиқий эллипсдаи иборат. Унинг каноник тенгламасининг кўриниши:

$$A_1 x^2 + C_1 y^2 = \frac{\Delta}{M},$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left[A + C + \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[5 + 8 + \sqrt{(5 - 8)^2 + 4 \cdot 2^2}\right] = 9;$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\left[A + C - \sqrt{(A - C)^2 + 4B^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[5 + 8 - \sqrt{(5 - 8)^2 + 4 \cdot 2^2}\right] = 4;$$

$$\frac{\Delta}{M} = \frac{-1296}{-36} = 36.$$

Демак, эллипснинг каноннк тенгламаси

$$9x^2 + 4y^2 = 36,$$

ёки

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

§ 88. МАРКАЗСИЗ ЭГРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕИГЛАМАСИИИ СОДДАЛАШТИРИШ

Эгри чизиқнинг маркази чексиз узоқда бўлган ҳолда

$$M = B^2 - AC = 0 \text{ ёки } AC = B^2 \tag{1}$$

бўлади. Иккинчи тартиблн эгри чизнқнинг умумий тенгламасини олиб унинг иккала томониии A га кўпайтирамиз:

$$A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 + A(2Dx + 2Ey + F) = 0,$$

ёки (1) га асосан:

$$(Ax + By)^2 + A(2Dx + 2Ey + F) = 0. \tag{2}$$

Тенгламани соддалаштириш мақсади билан координата ўқларининг йўналишларини ўзгартирамиз, масалан, уни бирор α бурчакка айлантирамиз. Бу ҳолда алмаштириш формулалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Булар (2) га қўйилса:

$$\left[A(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha) + B(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)\right]^2 +$$
$$+ A\left[2D(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha) + 2E(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha) + F\right] = 0,$$

ёки

$$\begin{aligned} &\left[(A\cos\alpha + B\sin\alpha)x_1 + (B\cos\alpha - A\sin\alpha)y_1\right]^2 + \\ &\quad + A\left[2(D\cos\alpha + E\sin\alpha)x_1 + \right. \\ &\quad\quad \left. + 2(E\cos\alpha - D\sin\alpha)y_1 + F\right] = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ҳозиргача α ихтиёрий бурчак эди. Энди унинг қийматиии шундай аниқлаймнзки,

$$A\cos\alpha + B\sin\alpha = 0$$

ёки

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{A}{B} \tag{5}$$

бўлсин. Буни эътиборга олнб,

$$\left.\begin{aligned} N &= (B\cos\alpha - A\sin\alpha)^2 \\ P &= A(D\cos\alpha + E\sin\alpha) \\ Q &= A(E\cos\alpha - D\sin\alpha) \\ R &= AF \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

фараз қилинса, (4) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$Ny_1^2 + 2Px_1 + 2Qy_1 + R = 0. \qquad (7)$$

(5) га асосан $\operatorname{tg}\alpha$ маълум бўлгани учун унинг ёрдами билан ҳамавақт (6) даги $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ ни аниқлаш мумкин. Демак (7) ннинг ҳамма коэффициентлари маълум бўлади.

(7) тенгламани яна соддалаштириш мақсади билан координаталар бошини бирор (a, b) нуқтага кўчирамиз. Бу ҳолда алмаштириш формулалари

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b$$

бўлади ва (7) нинг кўриниши

$$N(y+b)^2 + 2P(x+a) + 2Q(y+b) + R = 0,$$

ёки

$$Ny^2 + 2(Nb+Q)y + 2Px + (Nb^2 + 2Pa + 2Qb + R) = 0 \quad (8)$$

бўлади. Нуқтанинг a ва b координаталарига шундай қиймат тайин қиламизки,

$$Nb + Q = 0, \quad Nb^2 + 2Pa + 2Qb + R = 0$$

бўлсин. Бу эса

$$b = -\frac{Q}{N} \text{ ва } \frac{Q^2}{N} + 2Pa - \frac{2Q^2}{N} + R = 0$$

ёки

$$2PNa - Q^2 + NR = 0 \text{ ёки } a = \frac{Q^2 - NR}{2PN}$$

бўлган ҳолда мумкин. Бу чоғда (8) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$Ny^2 + 2Px = 0 \text{ ёки } y^2 = -2\frac{P}{N}x, \qquad (9)$$

ёки

$$-\frac{P}{N} = p$$

фараз қилинса,

$$y^2 = 2px \tag{10}$$

бўлади ва бу параболани ифода қилади.

p нинг қийматини аниқлаш учун (5) дан $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ нинг қийматларини аниқлашга тўғри келади. Бунинг учун (5) ни

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{A}{B} \text{ ёки } \frac{\sin\alpha}{-A} = \frac{\cos\alpha}{B}$$

каби ёзиб, ундан ушбу ҳосила пропорцияни тузамиз:

$$\frac{\sin\alpha}{-A} = \frac{\cos\alpha}{B} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Демак

$$\sin\alpha = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{11}$$

(6) га мувофиқ

$$P = \frac{ABD - A^2E}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$N = \left(\frac{A^2+B^2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = A^2 + B^2.$$

Демак

$$p = -\frac{P}{N} = \frac{A(AE-BD)}{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}} = \sqrt{\frac{A^2(AE-BD)^2}{(A^2+B^2)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{A^2(A^2E^2 - 2ABDE + B^2D^2)}{(A^2+B^2)^3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{A^2(A^2E^2 - 2ABDE + ACD^2)}{(A^2+AC)^3}} =$$

$$= \sqrt{-\frac{(-AE^2 + 2BDE - CD^2)}{(A+C)^3}} = \sqrt{-\frac{\Delta}{(A+C)^3}};$$

чунки $B^2 - AC = 0$ бўлганда $\Delta = -AE^2 + 2BDE - CD^2$ бўлади. Натижада

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{(A+C)^3}}. \tag{12}$$

$B^2 = AC$ бўлгани учун A ва C нинг ишоралари бир хил бўлади. A нинг ишорасини ҳамавақт мусбат қилиш мумкин. Шунинг учун $(A+C)$ ни мусбат фараз қилиб бўлади. Иккинчи томондан

$$\Delta = -AE^2 + 2BDE - CD^2 = -(AE^2 + CD^2 - 2BDE) =$$
$$= -(AE^2 + CD^2 - 2DE\sqrt{AC}) = -(E\sqrt{A} - D\sqrt{C})^2 < 0.$$

Шунинг учун иараболанинг дискримнианти ҳамавақт манфий бўлади ва радикал остида мусбат сон бўлади. Демак, p — ҳамавақт мавжуд ва мусбат соидаи иборат.

Шунинг билан, бу бобдаги текширишнинг натижасини ушбу жадвал билан тасвирлаш мумкин:

	$M < 0$		$M > 0$	$M = 0$
$\Delta \neq 0$	$A \cdot \Delta < 0$	эллипс	гипербола	парабола
	$A \cdot \Delta > 0$	мавҳум эллипс		
$\Delta = 0$		иккита бир-бирини кесувчи мавҳум тўғри чизиқ	иккита бир-бирини кесувчи ҳақиқий тўғри чизиқ	иккита параллель тўғри чизиқ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

$$M = B^2 - AC.$$

Саволлар ва масалалар

288. Координата ўқларини параллель алмаштириш натижасида нккинчи тартибли эгри чизиқ теигламасининг коэффициеитлари қандай ўзгаради?

289. Иккинчн тартибли эгри чизиқнинг маркази координаталар бошида бўлгаида тенгламасининг кўриниши қандай бўлади?

290. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази бўлиши учун қандай шарт мавжуд?

291. Иккиичи тартибли эгри чизиқиинг маркази қандай топилади?

292. Ушбу эгри чизиқнинг маркази топилсин:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0.$$

293. Ушбу эгри чизиқнинг маркази топилсин:

$$3x^2+10xy+7y^2+4x+2y+1=0.$$

294. Ушбу эгри чизиқнинг маркази топилсин:

$$2x^2-3xy-y^2+3x+2y=0.$$

295. Ушбу эгри чизиқнинг маркази топилсин:

$$9x^2-6xy+4x+3y+10=0.$$

296. Иккинчи тартибли эгри чизиқ диаметрининг тенгламаси қандай тузилади?

297. Эгри чизиқнинг тенгламаси

$$y^2-4xy-4x+3=0.$$

Бунинг $6x-5y+3=0$ тўғри чизиққа параллель бўлган ватарларга нисбатан диаметрининг ва бу диаметрга қўшма бўлган иккинчи диаметрининг тенгламаси топилсин.

298. Эгри чизиқнинг тенгламаси берилган:

$$3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0.$$

Агар бунинг диаметрларидан бири $x+2y-2=0$ бўлса, унинг бу диаметрга нисбатан қўшма бўлган диаметрининг тенгламаси қандай бўлади?

299. Эгри чизиқнинг тенгламаси берилган:

$$y^2-4xy-4x+3=0.$$

Бунинг координаталар бошидан ўтган диаметрининг ва бу диаметрга нисбатан қўшма бўлган диаметрининг тенгламаси топилсин.

300. Эгри чизиқнинг тенгламаси берилган:

$$y^2-2xy+3x^2+2y-4x-3=0.$$

Бунинг (1, 0) нуқтадан ўтган диаметрининг ва унга қўшма бўлган диаметрининг тенгламаси тузилсин.

301. Эгри чизиқнинг тенгламаси берилган:

$$4x^2+2xy-y^2+6x+2y+3=0.$$

Бунинг ордината ўқига параллель бўлган ватарларга нисбатан қўшма диаметри топилсин.

302. Қуйидаги тенгламаларнинг геометрик маънолари аниқлансин:

1) $x^2-xy+y^2-3x-3y=0.$

2) $y^2-2xy+2x-y+2=0.$

3) $2x-x^2-y+1=0.$

4) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$

5) $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x - 4y - 1 = 0.$

6) $8x^2 - 12xy + 3y^2 + 2x - 4y - 1 = 0.$

7) $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 2 = 0.$

8) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$

303. m нинг қиймати қандай бўлганда

$$2x^2 + mxy - 3y^2 - 4x + 9y - 6 = 0$$

тенглама иккита тўғри чизиқни ифода қилади?

304. m нинг қиймати қандай бўлганда

$$x^2 + 2my^2 - x + y = 0$$

тенглама параболани ифода қилади?

305. Қуйидаги эгри чизиқларнинг тенгламалари энг содда ҳолга келтирилсин:

1) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0.$

2) $16x^2 - 24xy + 9y^2 + 10x - 70y + 75 = 0.$

3) $5x^2 + 12xy - 22x - 11y - 19 = 0.$

4) $3y^2 + 12x + 5y - 7 = 0.$

5) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x - 4y - 1 = 0.$

6) $4y^2 - 4xy + x^2 + 6y - 2x + 2 = 0.$

7) $x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0.$

8) $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y = 0,$

306. Параболанинг тенгламаси

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{1/2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{1/2} = 1.$$

Бунинг ўқи аниқлансин.

ИККИНЧИ БЎЛИМ

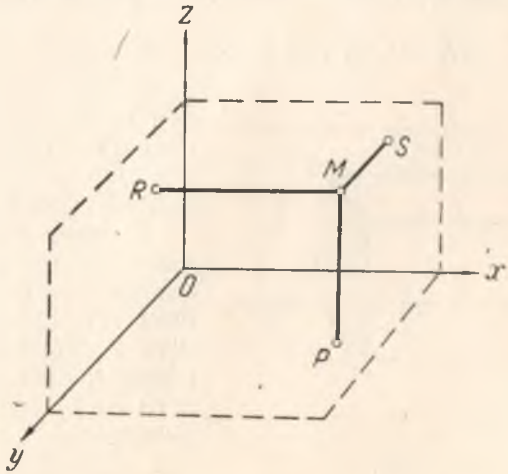
АНААИТИК ГЕОМЕТРИЯ ФАЗОДА

Ўн учинчи боб

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

§ 89. ФАЗОДАГИ НУҚТАНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

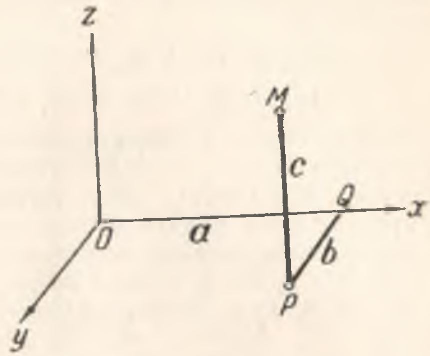
1. Китобнинг биринчи бўлимида текисликдаги шакллар билан машғул бўлган эдик. Энди бу иккинчи бўлимида ҳам-



Шакл 125.

ма бўлаклари билан бир текисликка жойлаша олмайдиган шакллар билан ёки фазо шакллари билан машғул бўламиз.

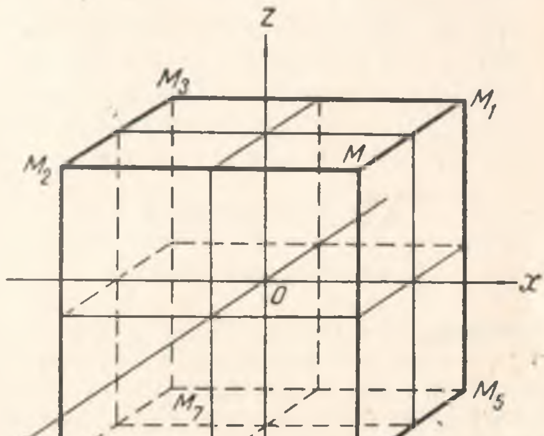
кесмалари ҳам M нуқтанинг координаталари бўла олади. Буни эътиборга олганда координаталари a, b ва c бўлган нуқтанинг ўрнини топиш усули қуйидагича бўлади: ҳалиги учёқли бурчакда O нуқтадан бошлаб Ox ўқида $OQ = a$ ўлчанади; сўнгра Q нуқтадан Oy га параллель чизиқ ўтказиб, $QP = b$ ни ва P дан Oz га параллель чизиқ ўтказиб, $PM = c$ ни ўлчаб олинса, бунинг натижасида биз излаган M нуқта аниқланади (шакл 127). Одатда нуқтанинг координаталари қавслар ичида ёзилади. Масалан, координаталари



Шакл 127.

$$x = a,\ y = b,\ z = c$$

бўлган M нуқта $M(a, b, c)$ равишда ёзилади. $x = a$ ни M нуқтанинг абсциссаси, $y = b$ ни — ординатаси ва



Шакл 128.

Шунинг учун энг аввал фазодаги нуқтанинг ўрнини аниқлаш усулидан бошлашга тўғри келади. Фазодаги нуқтанинг ўрнини аниқлаш учун: фазода бир-бирини бирор O нуқтада кесишган ва ўзаро перпендикуляр бўлган xOy, xOz, yOz текисликларини ўтказамиз; Ox, Oy, Oz — бу текисликларнинг ўзаро кесишганидан ҳосил бўлган чизиқлар бўлсин (шакл 125). Бу чизиқларда Ox, Oy, Oz йўналишлари мусбат ва буларга тескари йўналишлар манфий саналади. Бу ҳолда: ҳалиги текисликлар — координата текисликлари ва уларнинг ўзаро кесишганидан ҳосил бўлган чизиқлар — координата ўқлари ва O нуқта — координаталар боши дейилади.

xOy, xOz, yOz координата текисликлари ўзаро учёқли бурчак ташкил қилади.

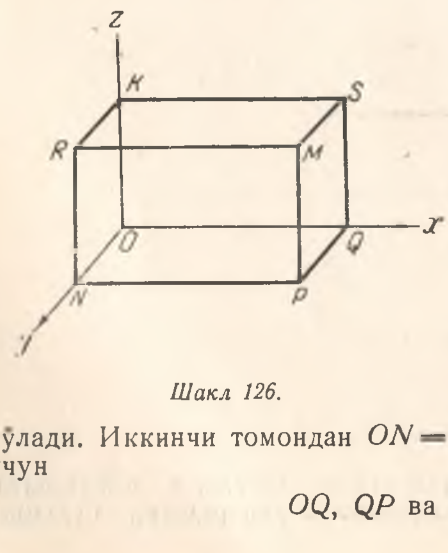
Бу учёқли бурчакнинг ичида бўлган ҳар бир нуқтанинг ўрни у нуқта билан координата текисликлари орасидаги масофалар ёрдами билан аниқланади. Масалан, унинг ичидаги M нуқтанинг ўрни

$$MR,\ MS \text{ ва } MP$$

кесмалари билан аниқланади. Булар M нуқтанинг **координаталари** дейилади.

Агар ҳалиги M нуқтанинг устидан координата текисликларига параллель қилиб текислик ўтказилса, у ҳолда (шакл 126):

$$MR = OQ,\ MS = ON,\ MP = OK.$$



Шакл 126.

Бунга қараганда M нуқтанинг координаталарини O нуқтадан бошлаб: Ox, Oy ва Oz ўқлари бўйича ҳисоблаш мумкин.

Шунинг учун нуқтанинг координаталари одатда тегишли ўқларнинг исмлари бўйича x, y ва z ҳарфлари билан ифода қилинади ва шаклдаги M нуқтанинг координаталари

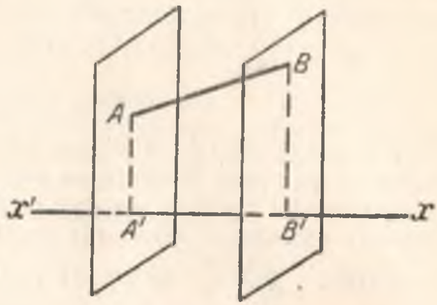
$$x = OQ,\ y = ON,\ z = OK$$

бўлади. Иккинчи томондан $ON = QP$ ва $OK = PM$ бўлгани учун

$$OQ,\ QP \text{ ва } PM$$

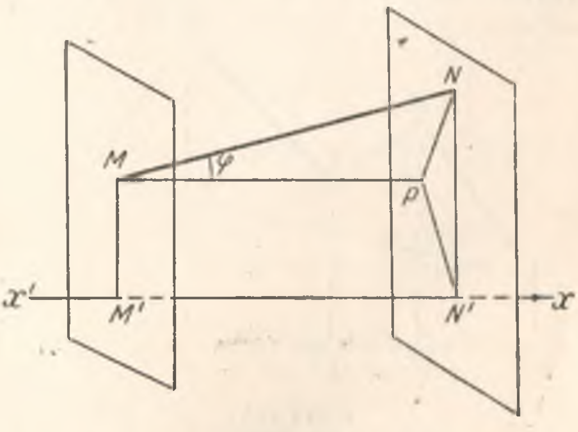
ҳилиги текислик xx' га перпендикуляр бўлгани учун AA' ва xx' га перпендикуляр бўлади.

Шунга ўхшаш AB кесманинг xx' ўқдаги проекцияси деб: A ва B нуқталарнинг xx' ўқдаги A' ва B' проекциялари орасидаги $A'B'$ кесмага айтилади. Тўғри чизиқ кесмаси билан унинг бирор ўқдаги проекцияси орасида муносабат мавжуддир.



Шакл 129.

Бу муносабатни чиқариш учун, фараз қилайлик, фазодаги бирор MN кесманинг xx' ўқдаги проекцияси $M'N'$ бўлсин (шакл 130). MM' ва NN' нинг ҳар бири xx' га перпендикуляр бўлса-да, бироқ улар ўзаро параллель бўлмаслиги мумкин, чунки M ва N нуқталар фазода бўлгани учун MM' ва NN' нинг иккаласи бир текисликда бўлмаслик эҳтимоли бор. Агар



Шакл 130.

M нуқтадан xx' га параллель чизиқ ўтказилса, у (N нуқтадан xx' га перпендикуляр қилиб ўтказилган) текисликнинг бирор P нуқтасида учрашади. Бу ҳолда $MP = M'N'$, чунки буларнинг иккаласи икки параллель текислик орасидаги параллель кесмалардан иборат.

$z = c$ ни — аппликатаси дейилади. Агар 126-шаклдаги M нуқтанинг координаталари a, b, c фараз қилинса, у ҳолда унда кўрсатилган нуқталарнинг координаталари қуйидагича ёзилади:

$$M(a, b, c),\ P(a, b, 0),\ S(a, 0, c),\ R(0, b, c),$$
$$Q(a, 0, 0),\ N(0, b, 0),\ K(0, 0, c),\ O(0, 0, 0).$$

2. Ҳар бир координата текислиги икки томонга қараб давом эттирилса, O нуқта атрофида 8 та учёқли бурчак ҳосил бўлади (шакл 128). Уларнинг ҳар бирида бўлган нуқтанинг ўрни ҳалиги усулда аниқланади. Бироқ координата текисликларидан масофалари (абсолют қийматлари): $x = a$, $y = b$, $z = c$ бўлган нуқта ҳалиги учёқли бурчакларнинг ҳар бирида бўлиши мумкин. Масалан, 128-шаклдаги M, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 каби.

Бу нуқталарни бир-биридан ажратиш учун ҳамон Декартнинг ишоралар қоидаси қўлланилади. Бу ҳолда ҳар қандай уч сонга фазода биргина нуқта тўғри келади ва 128-шаклдаги нуқталарнинг координаталари қуйидагича бўлади:

M ники $x = +a,\ y = +b,\ z = +c,$
M_1 „ $x = +a,\ y = -b,\ z = +c,$
M_2 „ $x = -a,\ y = +b,\ z = +c,$
M_3 „ $x = -a,\ y = -b,\ z = +c,$
M_4 „ $x = +a,\ y = +b,\ z = -c,$
M_5 „ $x = +a,\ y = -b,\ z = -c,$
M_6 „ $x = -a,\ y = +b,\ z = -c,$
M_7 „ $x = -a,\ y = -b,\ z = -c.$

§ 90. ПРОЕКЦИЯЛАР

1. Ўқдаги проекциялар

Фараз қилайлик, A фазодаги бирор нуқта ва xx' фазодаги бирор ўқ — маълум йўналишга эга бўлган тўғри чизиқ бўлсин (шакл 129). Агар A нуқтадан xx' га перпендикуляр қилиб текислик ўтказилса, у ҳалиги xx' билан бирор A' нуқтада учрашади. Бу ҳолда xx' проекция ўқи дейилади ва A' нуқта „A нуқтанинг xx' ўқдаги тўғри бурчакли проекцияси“ дейилади.

A нуқтанинг ўқдаги проекциясини аниқлаш учун у нуқтадан ўққа перпендикуляр чизиқ тушириш мумкин, чунки

MP ва $M'N'$ ўзаро параллель бўлгани учун MN билан проекция ўқи орасидаги бурчак MN билан MP орасидаги φ бурчаги бўлади. Энди P нуқтани N нуқта билан туташтирамиз. Бунинг натижасида тўғрибурчакли MNP учбурчак ҳосил бўлади, чунки MP ва NP ўзаро перпендикуляр бўлгани учун, учбурчакнинг P бурчаги тўғри бўлади. Демак,

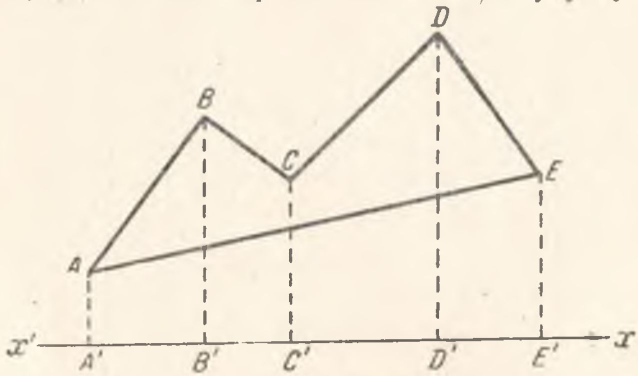
$$MP = MN \cos\varphi,$$

ёки

$$M'N' = MN \cos\varphi, \tag{1}$$

чунки шаклда $MP = M'N'$ эди. *Кесманинг йўналиши билан проекция ўқининг йўналиши бир хил бўлганда проекциянинг ишораси мусбат ва бир-бирига тескари бўлганда — манфий бўлади.* Буни (1) формула очиқ кўрсатмоқда. Ҳақиқатда, $\varphi > \frac{\pi}{2}$ бўлганда $\cos\varphi < 0$ ва бу ҳолда MN ва $M'N'$ нинг ишоралари ўзаро тескари бўлади. Шунинг билан, *фазодаги кесманинг ўқдаги проекцияси: кесма билан унинг проекцияси орасидаги бурчак косинусининг проекцияланган кесма билан кўпайтмасига тенг.*

Энди синиқ чизиқнинг ўқдаги проекциясини топамиз. Масалан, $ABCDE$ нинг проекциясини топиш учун уни таш-



Шакл 131.

кил этган AB, BC, CD, DE нинг xx' ўқдаги проекцияларини топамиз (шакл 131). Шаклга мувофиқ $ABCDE$ нинг проекцияси

$$A'B' + B'C' + C'D' + D'E' = A'E'.$$

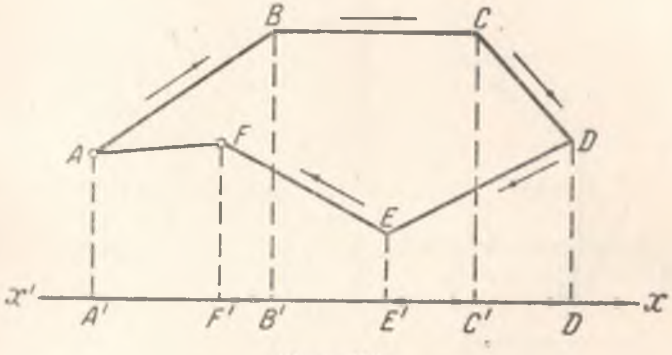
Иккинчи томондан $A'E'$ ҳалиги $ABCDE$ синиқ чизиқнинг A

ва E нуқталарини туташтирувчи AE нинг проекциясидан иборат, шунинг учун

$$\text{пр. } (ABCDEF) = \text{пр. } AF = A'F',$$

яъни *икки нуқта орасидаги синиқ чизиқнинг ўқдаги проекцияси у нуқталарни туташтирувчи кесманинг шу ўқдаги проекциясига тенг.*

Синиқ чизиқнинг шакли қандай бўлса-да бу теорема ўз кучини сақлайди. Масалан, 132-шаклдаги $ABCDEF$ синиқ чизиқнинг проекцияси қуйидагича бўлади:



Шакл 132.

$$\text{пр. } (ABCDEF) = A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'F'. \quad (2)$$

Проекцияларнинг йўналишларига асосан:

$$A'B' + B'C' - C'D' = A'D'$$

$$A'D' + D'E' = A'E'; \; A'E' + E'F' = A'F'.$$

Шунинг учун:

$$\text{пр. } (ABCDEF) = \text{пр. } AF = A'F'. \quad (3)$$

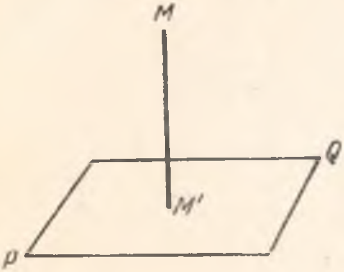
F нуқта A нуқта билан бирлашган ҳолда AF ва унинг $A'F'$ проекцияси нуқтага айланади. Бу ҳолда ҳалиги $ABCDEF$ синиқ чизиқ ёпиқ синиқ чизиққа айланади, демак, *ҳар қандай ёпиқ синиқ чизиқнинг ўқдаги проекцияси нолга тенг.*

Чизиқ эгри бўлган ҳолда ҳам исбот қилинган теорема ўз кучини сақлайди, чунки ҳар қандай эгри чизиқни маълум шарт билан синиқ чизиқнинг лимити фараз қилиш мумкин. Демак, умуман ҳар қандай ёпиқ чизиқнинг ўқдаги проекцияси нолга тенг.

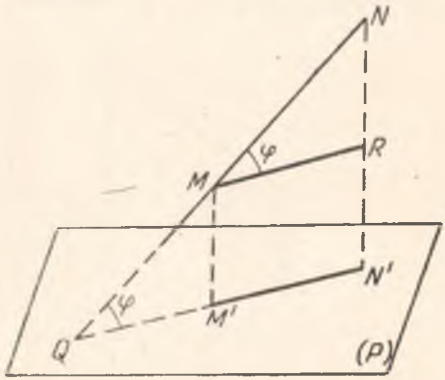
2. Текисликдаги проекциялар

Фазодаги M нуқтанинг бирор PQ текисликдаги проекцияси деб, у нуқтадан шу текисликка туширилган перпендикулярнинг у текислик билан учрашган M' нуқтасига айтилади (шакл 133). Бу ҳолда PQ текислиги проекция текислиги дейилади.

Шунга ўхшаш фазодаги MN кесманинг P текислигидаги проекцияси деб, M ва N нуқталарнинг P текисликдаги M' ва



Шакл 133.



Шакл 134.

N' проекциялари орасидаги $M'N'$ кесмага айтилади (шакл 134), M ва N нуқталардан P текисликка туширилган MM' ва NN' ўзаро параллель бўлгани учун улар бир текисликда бўлади. Шунинг учун MN билан $M'N'$ нинг давомлари проекция текислигининг бирор Q нуқтасида учрашади. Буларнинг орасидаги бурчакни φ фараз қилиб, M дан $M'N'$ га параллель MR ўтказилса, бунинг натижасида MNR тўғри-бурчакли учбурчак ҳосил бўлади. Бунда

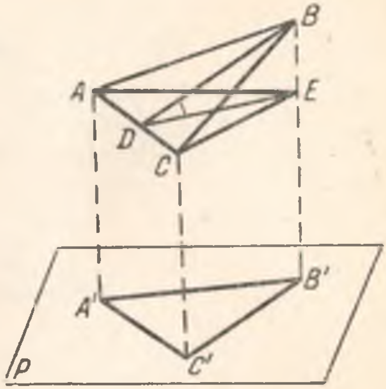
$$MR = MN\cos\varphi, \tag{1}$$

ёки

$$M'N' = MN\cos\varphi, \tag{2}$$

чунки шаклга мувофиқ $MR = M'N'$. Шунинг билан, *фазодаги кесманинг текисликдаги проекцияси проекцияланган кесманинг у кесма билан текислик орасидаги бурчакнинг косинуси кўпайтмасига тенг.*

Энди фазодаги ҳар қандай текис шакл билан унинг текисликдаги проекцияси орасида ҳам шунинг каби муносабат борлигини исбот қиламиз. Бунинг учун энг аввал фазодаги шаклни учбурчак фараз қиламиз; ABC учбурчакнинг томонларидан бири, масалан AC томони проекция текислигига параллель бўлсин (шакл 135).



Шакл 135.

Учбурчакнинг бурчаклари учларидан проекция текислигига перпендикуляр қилиб: AA', BB' ва CC' ни туширамиз. Бунинг нутижасида проекция текислигида ABC нинг $A'B'C'$ проекцияси ҳосил бўлади. Энди учбурчакнинг AC томонидан проекция текислиги P га параллель қилиб текислик ўтказамиз. AC проекция текислигига параллель бўлгани учун ACE айнан $A'B'C'$ га тенг бўлади. Сўнгра BE нинг устидан AC га перпендикуляр қилиб текислик ўтказамиз; бунинг AC билан учрашган нуқтаси D бўлсин. Шаклга мувофиқ:

$$A'B'C'_{\text{юзи}} = AEC_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} AC \cdot DE. \tag{3}$$

$\angle BDE = \varphi$ бўлсин. Бу ҳолда BDE учбурчакдан

$$DE = BD \cos \varphi,$$

ёки буни (3) га қўйсак,

$$A'B'C'_{\text{юзи}} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cos \varphi.$$

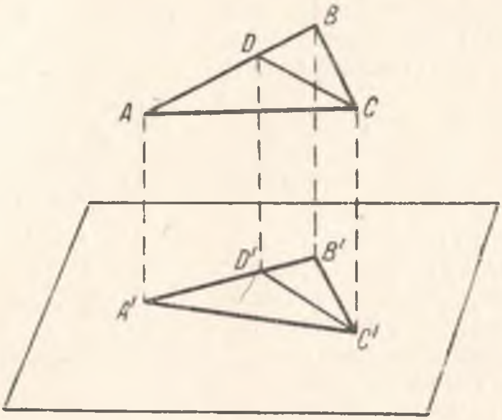
Шаклга мувофиқ

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD = ABC_{\text{юзи}},$$

демак

$$A'B'C'_{\text{юзи}} = ABC_{\text{юзи}} \cos \varphi.$$

Энди учбурчакнинг томонларидан ҳеч қайси бири проекция текислигига параллель эмас деб фараз қиламиз. Берилган учбурчак ABC бўлсин (шакл 136). Бунинг C бурчагининг учидан проекция текислигига параллель қилиб текислик ўтказамиз; бунинг AB томони билан учрашган нуқтаси D бўлсин. Бу ҳолда ADC ва BDC учбурчакларнинг ҳар бирида бир томон (DC) проекция текислигига параллель булади. Шунинг учун (4) га асосан:



Шакл 136.

$$A'C'D'_{юзи} = ACD_{юзи} \cos\varphi.$$

$$D'B'C'_{юзи} = DBC_{юзи} \cos\varphi,$$

ёки буларни ҳадлаб қушсак

$$A'B'C'_{юзи} = ABC_{юзи} \cos\varphi. \qquad (5)$$

φ бурчаги иккала учбурчак учун умумий булади, чунки уларнинг иккаласи бир текисликда.

Берилган шакл купбурчак булган ҳолда уни диагоналлар ёрдами билан бир неча учбурчакларга булиб, сунгра уларнинг ҳар бирига (5) ни татбиқ қилиш мумкин. Масалан, берилган шакл $ABCDE$ булсин (шакл 137). Бунинг бирор A бурчагининг учидан диагоналлар утказиб, сунгра ҳосил булган ҳар бир учбурчакка юқорида чиқарилган формулани татбиқ қилсак:

$$A'B'C'_{юзи} = ABC_{юзи} \cos\varphi,$$

$$A'C'D'_{юзи} = ACD_{юзи} \cos\varphi,$$

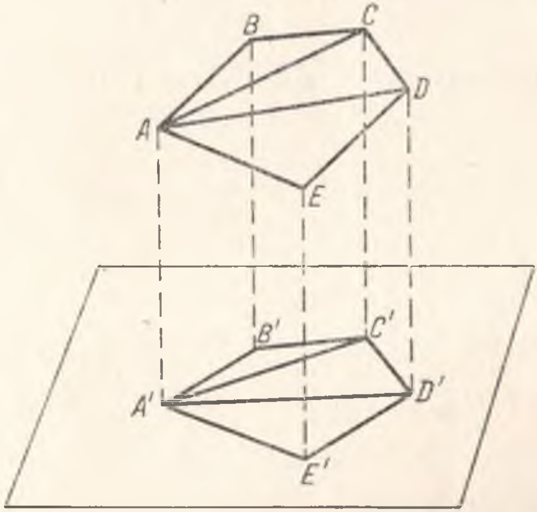
$$A'D'E'_{юзи} = ADE_{юзи} \cos\varphi,$$

φ бурчаги учала учбурчак учун умумий булади, чунки уларнинг ҳаммаси бир текисликда. Кейинги формулаларни ҳадлаб қўшиш натижасида ушбу формула келиб чиқади:

$$A'B'C'D'E'_{юзи} = ABCDE_{юзи} \cos \varphi. \qquad (6)$$

Демак, бу ҳолда ҳам юқорида чиқарилган асосий формула ўз кучини сақлайди.

Шакл эгри чизиқли бўлган ҳолда ҳам (6) формула ўз кучини сақлайди, чунки эгри чизиқни маълум шарт билан синиқ чизиқнинг лимити фараз қилиш мумкин.



Шакл 137.

§ 91. ИККИ НУҚТА ОРАСИДАГИ МАСОФА

Берилган нуқталардан бири $A(x_1, y_1, z_1)$ ва иккинчиси $B(x_2, y_2, z_2)$ бўлсин (шакл 138). Бу нуқталарнинг координаталари ёрдами билан улар орасидаги масофани топамиз. Бунинг учун берилган нуқталарнинг координаталарини чизамиз. Шаклда улар қуйидагилардан иборат:

$$x_1 = OC, \ y_1 = A_1C, \ z_1 = AA_1,$$
$$x_2 = OD, \ y_2 = B_1D, \ z_2 = BB_1.$$

AA_1 ва BB_1 ўзаро параллель бўлгани учун уларнинг иккаласи бир текисликда бўлади. Шунинг учун A_1 ва B_1 нуқталарни бир-бири билан туташтириб, A дан A_1B_1 га параллель чизиқ ўтказилса, у BB_1 билан бирор F нуқтада учрашади. Натижада тўғрибурчакли ABF учбурчак ҳосил булади; бунинг тўғри бурчаги AFB ва гипотенузаси AB булади. Пифагор формуласи бўйича:

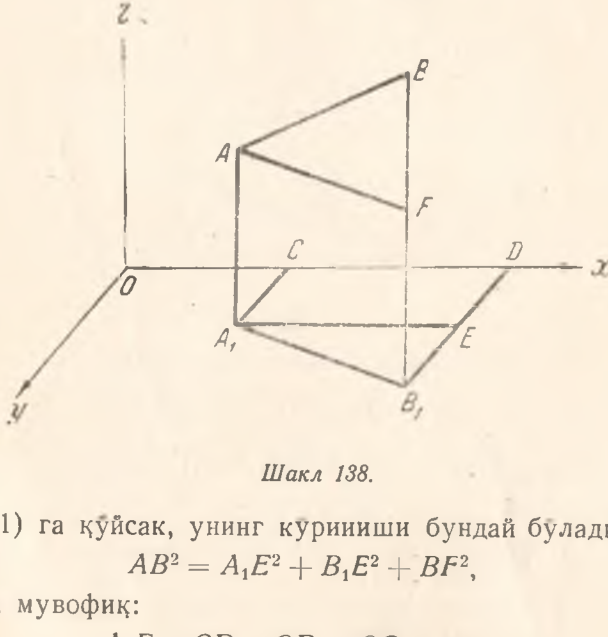
$$AB^2 = AF^2 + BF^2. \tag{1}$$

A_1 нуқтадан Ox ўқига параллель қилиб, A_1E ни ўтказамиз; бунинг натижасида тўғрибурчакли A_1B_1E учбурчак ҳосил булади. Шунинг учун бунда

$$A_1B_1^2 = A_1E^2 + B_1E^2;$$

ёки шаклга асосан $A_1B_1 = AF$ булгани учун:

$$AF^2 = A_1E^2 + B_1E^2.$$



Шакл 138.

Буни (1) га қўйсак, унинг куриниши бундай булади:

$$AB^2 = A_1E^2 + B_1E^2 + BF^2, \tag{2}$$

шаклга мувофиқ:

$$A_1E = CD = OD - OC = x_2 - x_1;$$
$$B_1E = B_1D - DE = B_1D - A_1C = y_2 - y_1;$$
$$BF = BB_1 - B_1F = BB_1 - AA_1 = z_2 - z_1.$$

Булар (2) га қўйилса, ушбу тенглик ҳосил булади:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \tag{3}$$

Икки нуқта орасидаги масофа мусбат саналади, чунки унинг йўналиши эътиборга олинмайди. Шунинг учун A ва B нуқталар орасидаги масофани қисқача „d“ ҳарфи билан ифода қилиб, (3) тенгликнинг иккала томонидан квадрат илдизи олинса, ушбу формула келиб чиқади:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \qquad (4)$$

A ва B нуқталари қаерда бўлса-да бу формула ўз кучини сақлайди. Бу формуланинг ёрдами билан координаталари белгили бўлган икки нуқта орасидаги масофа аниқланади. Агарда нуқталардан бири, масалан, иккиичиси координаталар бошида бўлса, бу ҳолда

$$x_2 = y_2 = z_2 = 0$$

бўлади ва (4) формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$d = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,. \qquad (5)$$

Мисол. $A(3, 2, 4)$ ва $B(7, 5, 1)$ нуқталар орасидаги масофа топилсин.

Берилган нуқталарнинг координаталари (4) формулага қўйилса:

$$d = AB = \sqrt{(7-3)^2 + (5-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{34}.$$

§ 91а. КЕСМАИИ БЕРИЛГАИ НИСБАТДА БЎЛИШ

Берилган нуқталардан бири $A(x_1, y_1, z_1)$ ва иккинчиси $B(x_2, y_2, z_2)$ бўлсин ва буларнинг орасидаги масофани $m:n$ нисбатда иккига бўлиш керак бўлсин (шакл 139). Бошқача қилиб айтганда: AB да шундай нуқтани топиш керакки, у нуқта AB ни $m:n$ нисбатда иккига бўлсин. Агарда номаълум нуқтани C деб фараз қилинса, масаланинг шартига мувофиқ,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n} \qquad (1)$$

бўлиши лозим.

A, B, C нуқталардан yz текислигига параллель қилиб текислик ўтказамиз. Буларииг абсцисса ўқи билан учрашган нуқталари $A_1B_1C_1$ бўлсин. Геометриядан маълумки, параллель текисликлар орасидаги икки тўғри чизиқ кесмалари узаро пропорционалдир. Шунинг учун:

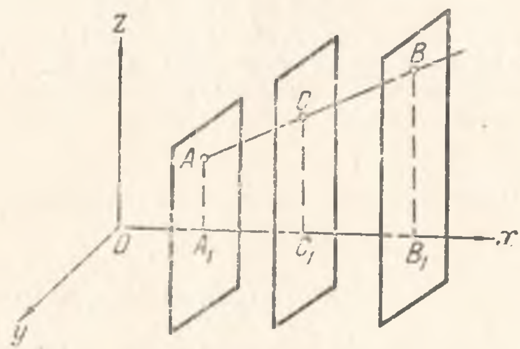
$$\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1},$$

ёки (1) га асосан

$$\frac{A_1C_1}{C_1B_1} = \frac{m}{n}. \qquad (2)$$

Номаълум C нуқтанинг координаталарини x, y, z фараз қиламиз. Шаклга мувофиқ:

$$A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x - x_1;$$
$$C_1B_1 = OB_1 - OC_1 = x_2 - x;$$



Шакл 139.

булар (2) га қуйилса:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}.$$

Бу тенгламадан x нинг қиймати аниқланади. Бунинг учун тенгламаии x га нисбатан ечамиз:

$$n(x - x_1) = m(x_2 - x_1),$$

ёки

$$x(n + m) = nx_1 + mx_2,$$

бундан

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}.$$

Агар A, B ва C нуқталардан xz ва xy текисликларига параллель текисликлар ўтказиб, ҳалиги йўл билан давом этилса, y ва z учун ҳам худди шунга ўхшаш яна икки ифода келиб чиқади:

$$y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}, \qquad z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m}.$$

Агар x, y, z ни ифода қилган касрларнинг сурат ва махражини m га бўлиб,

$$\frac{m}{n} = \lambda$$

фараз қилинса, чиқарилган формулаларнинг кўриниши қуйидагича булади:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \tag{3}$$

λ тўғрисида § 4 да қилинган мулоҳаза бу ерда ҳам ўз кучини сақлайди. C нуқта AB нинг тенг ўртасида бўлган ҳолда

$$\frac{m}{n} = \lambda = 1$$

бўлади ва бу ҳолда (3) формулаларнинг кўриниши қуйидагича булади:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{4}$$

Бу формулалар икки нуқта орасидаги масофани тенг иккига бўлиш керак бўлган ҳолда қўлланади.

Мисол. $A(2, 1, -3)$ ва $B(6, -9, 3)$ нуқталар орасидаги масофа $2:3$ нисбатда иккига бўлинсин.

Берилган мисолда: $\lambda = \frac{2}{3}$. Бу ва берилган нуқталарнинг координаталари (3) га қўйилса:

$$x = \frac{2 + \frac{2}{3} \cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = 3{,}6;$$

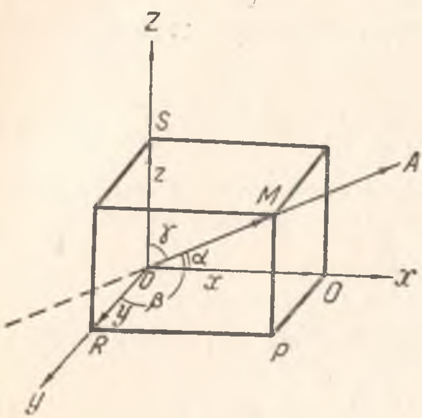
$$y = \frac{1 + \frac{2}{3} \cdot (-9)}{1 + \frac{2}{3}} = -3;$$

$$z = \frac{-3 + \frac{2}{3} \cdot 3}{1 + \frac{2}{3}} = -0{,}6.$$

Давлатча

§ 92. ФАЗОДАГИ ЙЎНАЛИШНИ АНИҚЛАШ

Координаталар бошидан ўтган ҳар бир чизиқда: координаталар бошига нисбатан иккита бир-бирига қарши йўналиш бўлади.



Шакл 140.

Булардан бирини, масалан O дан A га қаратилган йўналишни эътиборга олганда бу тўғри чизиқ координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан учта бурчак ташкил қилади (шакл 140).

Тўғри чизиқнинг Ox ўқи билан (ҳалиги маънода) ташкил қилган бурчагини α, Oy ўқи билан ташкил қилган бурчагини β ва Oz ўқи билан ташкил қилган бурчагини γ фараз қилиб, учала бурчакнинг косинуслари орасидаги муносабатни топамиз. Агарда OA тўғри чизиқдаги бирор $M(x, y, z)$ нуқта билан координаталар боши орасидаги масофани d фараз қилсак,

$$x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \tag{1}$$

бўлади. M нуқтадан координата текисликларига перпендикуляр қилиб MQ, MS, MR текисликлар ўтказилса, M нуқтанинг координаталари қуйидагича бўлади:

$$x = OQ, \; y = OR, \; z = OS.$$

Шаклга мувофиқ: x, y, z OM кесманинг тартиб билан: Ox, Oy, Oz ўқлардаги проекцияларидан иборат. Шунинг учун:

$$x = d\cos\alpha, \; y = d\cos\beta, \; z = d\cos\gamma.$$

Буларни (1) га қўйиб, сўнгра иккала томони a^2 га қисқартирилса, биз излаган формула келиб чиқади:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1} \tag{2}$$

Тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтмаган ҳолда ҳам бу формула ўз кучини сақлайди, чунки бу ҳолда координаталар бошидан у тўғри чизиққа параллель чизиқ ўтказилса, иккала тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари бир хил бўлади. $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — тўғри чизиқнинг **йуналтирувчи косинуслари** дейилади.

§ 93. ШАКЛНИНГ ЮЗИ БИЛАН УНИНГ КООРДИНАТА ТЕКИСЛИКЛАРИДАГИ ПРОЕКЦИЯЛАРИ ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТ

Ўтган параграфда чиқарилган асосий муносабат ёрдами билан яна бир муҳим муносабатни чиқариш мумкин. У муносабат, ҳар қандай текис шаклнинг юзи билан унинг координата текисликларидаги проекциялари орасидаги муносабатдан иборат.

Фараз қилайлик, фазодаги бирор текис шаклнинг юзи S, унинг yz текисликдаги проекцияси S_x, xz текисликдаги проекцияси S_y ва xy текисликдаги проекцияси S_z бўлсин (шакл 141). Сўнгра координаталар бошидан (S) шаклнинг юзига нормаль ўтказиб, унинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ фараз қиламиз.

S билан S_x орасидаги бурчак у текисликларга нормаль бўлган OS ва Ox нинг орасидаги α бурчагига тенг бўлади. Шунинг учун:

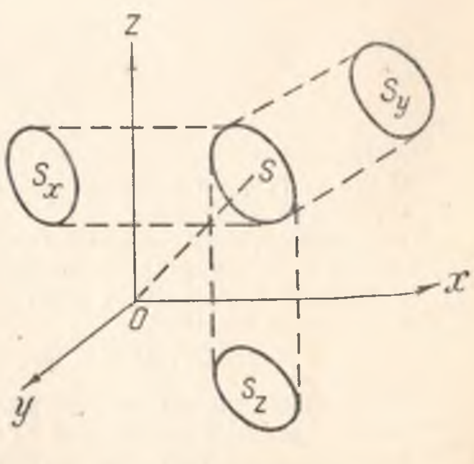
$$S_x = S\cos\alpha.$$

Шунга ўхшаш

$$S_y = S\cos\beta,\quad S_z = S\cos\gamma.$$

Учала тенгликнинг ҳар бирини квадратга кўтариб, сўнгра уларни ҳадлаб қўшганда:

$$S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$



Шакл 141.

Ўтган параграфда чиқарилган формулага мувофиқ:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

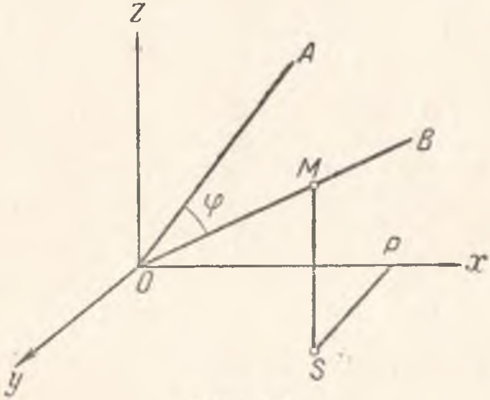
Шунинг учун:

$$\boxed{S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

яъни *фазодаги ҳар қандай текис шакл юзининг квадрати унинг ҳар бир координата текислигидаги проекцияси юзларининг квадратлари йиғиндисига тенгдир.*

§ 94. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ БУРЧАК

Тўғри чизиқлардан бири OA, иккинчиси OB ва улар орасидаги бурчак φ бўлсин (шакл 142). OA нинг координа-



Шакл 142.

та ўқларининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ ва OB нинг ташкил қилган бурчакларини α', β', γ' фараз қиламиз.

Бу бурчакларнинг ёрдами билан φ бурчакни аниқлаш мумкин. Бунинг учун тўғри чизиқларнинг бирида, масалан, OB да истаган бирор $M(x, y, z)$ нуқтани олиб, унинг координаталарини чизамиз:

$$x = OP, \; y = PS, \; z = MS.$$

$OPSM$ синиқ чизиқнинг OA ўққа проекцияси у синиқ чизиқнинг O ва M нуқталарини туташтирувчи OM нинг OA даги проекциясига тенг бўлади. Шунинг учун:

$$OM\cos\varphi = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma';$$

иккинчи томондан:

$$x = OM\cos\alpha, \; y = OM\cos\beta, \; z = OM\cos\gamma.$$

Буларни аввалги тенгликка қўйиб, сўнгра иккала томонини OM га қисқартиш натижасида ушбу формула келиб чиқади:

$$\boxed{\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'} \qquad (1)$$

OA ва OB тўғри чизиқлар ўзаро перпендикуляр бўлган ҳолда $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ва $\cos\varphi = 0$ бўлади. Шунинг учун икки тўғри чизиқнинг бир-бирига перпендикуляр бўлиш шарти қуйидагича бўлади:

$$\cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma' = 0. \qquad (2)$$

Баъзи вақт икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакнинг синусини аниқлашга тўғри келади. Бунинг учун Лагранжнинг ушбу айниятидан фойдаланамиз:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) - (aa_1 + bb_1 + cc_1)^2 =$$
$$= (bc_1 - cb_1)^2 + (ca_1 - ac_1)^2 + (ab_1 - ba_1)^2.$$

Бунинг тўғрилигини қавсларни очиб синаб кўриш мумкин. (1) га асосан:

$$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = 1 - (\cos\alpha\cdot\cos\alpha' +$$
$$+ \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma')^2;$$

иккинчи томондан

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

бўлгани учун юқоридаги тенгликни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\sin^2\varphi = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)(\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma') -$$
$$- (\cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma')^2,$$

ёки бунга Лагранж айнияти татбиқ қилинса:

$$\sin^2\varphi = (\cos\beta\cdot\cos\gamma' - \cos\gamma\cdot\cos\beta')^2 + (\cos\gamma\cdot\cos\alpha' -$$
$$- \cos\alpha\cdot\cos\gamma')^2 + (\cos\alpha\cdot\cos\beta' - \cos\beta\cdot\cos\alpha')^2. \qquad (3)$$

Иккала тўғри чизиқ параллель бўлган ҳолда $\varphi = 0$ ёки π бўлади ва бу ҳолда $\sin\varphi = 0$ бўлади. Иккинчи томондан $\sin^2\varphi$ нинг ифодаси уч квадратнинг йиғиндисидан иборат бўлгани учун улардан ҳар бири нолга тенг бўлиши лозим, яъни:

$$\cos\beta\cdot\cos\gamma' - \cos\gamma\cdot\cos\beta' = 0,$$
$$\cos\gamma\cdot\cos\alpha' - \cos\alpha\cdot\cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta' - \cos\beta\cdot\cos\alpha' = 0,$$

билан нуқтанинг ўрни аниқланмайди, чунки координаталар бошидан масофаси r га тенг бўлган саноқсиз куп нуқталар бор.

Ҳар қандай координаталар системасида фазодаги нуқтанинг ўрни уч координата билан аниқланади. Шунинг учун бизга яна икки координата керак бўлади. Буларни аниқлаш учун M нуқта билан Oz ўқидан текислик ўтказамиз. Бунинг xy текислиги билан учрашган чизиғи OS бўлсин. Бу ҳолда OM билан OS орасидаги $MOS = \varphi$ бурчаги иккинчи координата бўлади. Бу координата M нуқтанинг кенглик даражаси дейилади. Ўтказилган текислик билан Ox ўқи орасидаги $xOS = \theta$ бурчаги учинчи координата бўладн ва бу M нуқтанинг узоқлик даражаси дейилади. Шунинг билан M нуқтанинг қутб координаталари қуйидагича бўлади:

$$r = OM,\ \varphi = \angle MOS,\ \theta = \angle POS.$$

Нуқтанинг радиус-вектори мусбат саналади ва у 0 дан ∞ гача ўзгара олади; кенглик даражаси $-\frac{\pi}{2}$ дан $+\frac{\pi}{2}$ гача ва узоқлик даражаси 0 дан 2π гача ўзгара олади.

Нуқтанинг декарт координаталари билан қутб координаталари орасида белгили муносабат бордир. Буни чиқариш учун тўғрибурчакли OMS ва OSP учбурчакларга мурожаат қиламиз. Буларда:

$$x = OS\cos\theta,\quad y = OS\sin\theta,$$

$$z = r\sin\varphi,\quad OS = r\cos\varphi.$$

Кейинги тенгликдан OS нинг ифодаси аввалги иккитасига қуйилса, декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтиш учун ушбу формулалар ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\theta,\\ y &= r\cos\varphi\sin\theta,\\ z &= r\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Энди қутб координаталаридан декарт координаталарига ўтиш формулаларини чиқарамиз. Бунинг учун OMS тўғрибурчакли учбурчакка мурожаат қиламиз. Бунда

$$r^2 = OS^2 + z^2.$$

OSP тўғрибурчакли учбурчакда

$$OS^2 = x^2 + y^2,$$

демак

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

ёки

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}=\frac{\cos\beta}{\cos\beta'},\quad \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'},$$

$$\frac{\cos\beta}{\cos\beta'}=\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'},$$

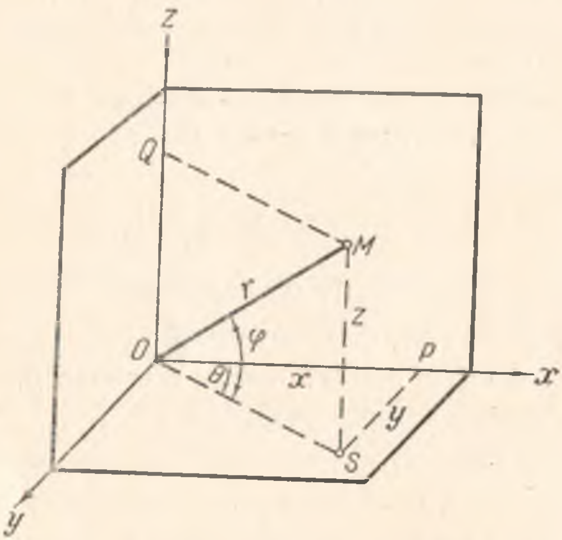
ёки

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}=\frac{\cos\beta}{\cos\beta'}=\frac{\cos\gamma}{\cos\gamma'}. \tag{4}$$

Икки туғри чизиқнинг параллеллик шарти шундан иборат.

§ 95. ҚУТБ КООРДИНАТАЛАРИ

Текисликдаги нуқтанинг қутб координаталари билан китобнинг 1-булимида танишган эдик. Энди фазодаги нуқта-



Шакл 143.

нинг қутб координаталари билан таништирамиз. Фазодаги бирор M нуқтанинг декарт координаталари $x=OP$, $y=SP$ ва $z=MS$ булсин (шакл 143). Бу нуқтанинг қутб координаталаридан бири унинг билан координаталар боши орасидаги $OM=r$ масофа саналади ва буни M нуқтанинг радиус-вектори дейилади. Албатта ёлғиз r нинг ўзи

бундан

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (2)$$

POS тўғрибурчакли учбурчакда:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \qquad (3)$$

Юқорида чиқарилган (1) тенгликлардан аввалги иккитасини квадратга кўтариб, сўнгра ҳадлаб қўшилса

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi,$$

бундан

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}. \qquad (4)$$

(1) тенгликлардан 3-сини $\sin\varphi$ га нисбатан ечилса:

$$\sin\varphi = \frac{z}{r} \qquad (5)$$

бўлади ва (5) нинг (4) га нисбати олинса:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (6)$$

Шунинг билан қутб координаталаридан декарт координаталарига ўтиш учун ушбу формулалар ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} r &= +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}, &\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

§ 96. КООРДИНАТАЛАР АЛМАШТИРИШ

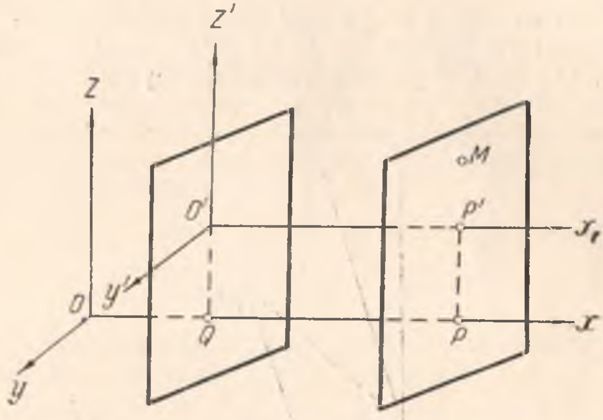
А. Текисликдаги координаталар алмаштириш каби фазода ҳам асосан уч ҳол бўлиши мумкин.

1-ҳол. Иккала системанинг бошлари турлича ва ўқларининг йўналишлари бир хил.

Фараз қилайлик, эски системанинг ўқлари Ox, Oy, Oz ва янги системанинг буларга параллель бўлган ўқлари $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ бўлсин. Янги системанинг эски системага нисбатан ўрни аниқ бўлиши учун янги система бошининг эски системага нисбатан координаталари маълум бўлса кифоя қилади. Фараз қилайлик, янги системанинг боши эски системага нисбатан $O'(a, b, c)$ нуқтада бўлсин (шакл 144).

Фазодаги бирор M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталарини x, y, z ва янги системага нисбатан координаталарини x', y', z' фараз қилиб, M ва O' нуқталардан yOz текисликка параллель текислик утказамиз. Фараз қилайлик, M нуқтадан ўтган текислик Ox ўқини P нуқтада ва $O'x'$ уқини P' нуқтада кесиб утган булсин; O' нуқтадан утган текислик Ox ўқини Q нуқтада кесган булсин. Шаклга мувофиқ:

$$x = OP = PQ + QO = P'O' + QO,$$



Шакл 144.

ёки

$$P'O' = x', \ QO = a$$

булгани учун

$$x = x' + a. \tag{1}$$

Шу йул билан давом этганда яна ушбу икки формулани чиқариш мумкин:

$$y = y' + b, \ z = z' + c. \tag{2}$$

Биринчи ҳолда қуйилган масала (1) ва (2) формулалар билан ечилади.

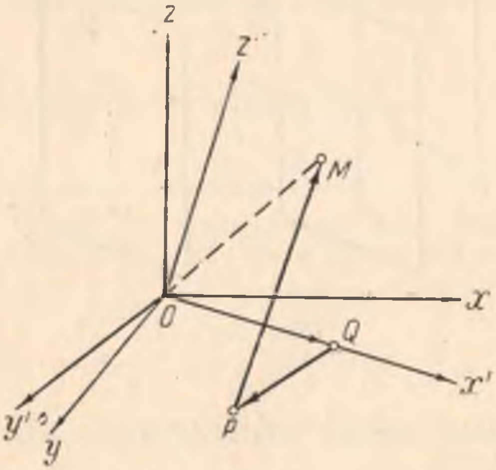
2-ҳол. Иккала системанинг бошлари умумий ва ўқларининг йўналишлари турлича.

Фараз қилайлик, янги ўқларнинг эски ўқлар билан ташкил қилган бурчаклари қуйидагича бўлсин:

	Ox	Oy	Oz
Ox'	α	β	γ
Oy'	α'	β'	γ'
Oz'	α''	β''	γ''

(3)

Масалан, Ox ва Ox' ўқлари орасидаги бурчак α, Oy ва Ox' ўқлари орасидаги бурчак β, Oz ва Ox' ўқлари орасидаги бурчак γ, Ox ва Oy' ўқлари орасидаги бурчак α' ва ҳ. к.



Шакл 145.

Фазодаги бирор M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталарини x, y, z ва янги системага нисбатан координаталарини x', y', z' фараз қиламиз (шакл 145). Шаклда:

$$x' = OQ, \ y' = PQ, \ z' = MP.$$

Энди $OQPM$ синиқ чизиқни оламиз. Бунинг боши O билан охири M ни туташтирувчи кесма OM бўлади. Проекция тўғрисидаги асосий теорема бўйича (ҳар қандай ўқда):

$$\text{пр. } OM = \text{пр. } OQ + \text{пр. } QP + \text{пр. } PM.$$

Агар Ox ўқи проекция ўқи фараз қилинса, бу ҳолда:

$$\text{пр. } OM = x; \text{ пр. } OQ = x' \cos\alpha;$$

$$\text{пр. } QP = y' \cos\alpha'; \text{ пр. } PM = z' \cos\alpha'',$$

демак,

$$x = x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha''. \tag{4}$$

Шунга ўхшаш ҳалиги кесмаларни қолган икки ўққа (Oy ва Oz га) проекциялаш натижасида яна ушбу икки формула ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} y &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'', \\ z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

(4) ва (5) формулалардаги тўққизта косинуслар ўзаро олтита муносабат билан боғланган; буларнинг учтаси (3) даги бурчакларга 92-параграфдаги (2) формулани татбиқ қилишдан ҳосил бўлади, яъни:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \\ \cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1, \\ \cos^2\alpha'' + \cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Қолган учтасини тузиш учун янги ўқларга перпендикулярлик шартини татбиқ қиламиз [§ 94, (2)]:

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma' = 0, \\ \cos\alpha'\cdot\cos\alpha'' + \cos\beta'\cdot\cos\beta'' + \cos\gamma'\cdot\cos\gamma'' = 0, \\ \cos\alpha''\cdot\cos\alpha + \cos\beta''\cdot\cos\beta + \cos\gamma''\cdot\cos\gamma = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Шунинг билан чиқарилган формулалардаги тўққизта бурчак ўзаро олти шарт билан, яъни (6) ва (7) билан боғланган бўлиб, у бурчаклардан фақат учтаси ихтиёрийдир.

Агар проекция ўқи учун навбат билан янги системанинг ўқлари қабул қилинса, у ҳолда (4) ва (5) формулалар каби ушбу формулалар келиб чиқади:

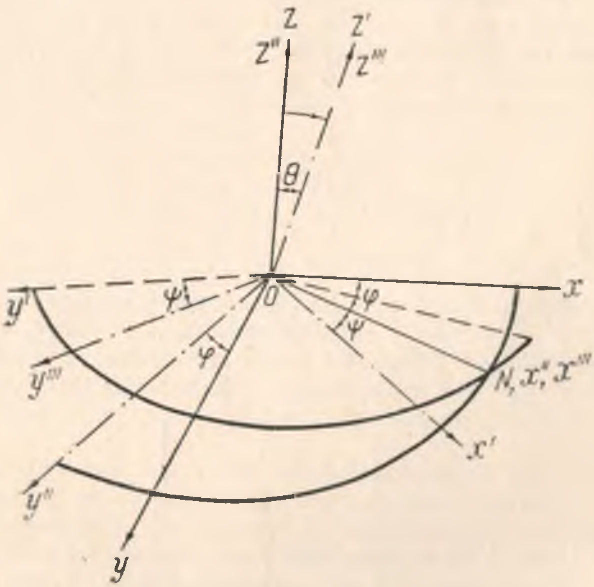
$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \\ y' &= x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma' \\ z' &= x\cos\alpha'' + y\cos\beta'' + z\cos\gamma'' \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

3-ҳол. Иккала системанинг бошлари ва ўқларининг йўналишлари турлича.

Фараз қилайлик, Ox, Oy, Oz эски системанинг ўқлари ва $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ янги системанинг ўқлари бўлсин. Иккала системанинг ўқлари орасидаги бурчаклари (3) бўлсин ва

Б*. Чиқарилган формулаларни амалда ишлатиш бирмунча ўнғайсиздир, чунки улардаги тўққизта бурчакдан олтитаси ортиқча (улар симметрия учун киргизилган). Шунинг учун амалий масалаларда, масалан, механикада қаттиқ жисмнинг қўзғалмас бир нуқта атрофида айланишини текширишда, янги ўқларнинг эски ўқларга нисбатан ўрни Эйлер бурчаклари исмли учта бурчак билан аниқланади.

Фараз қилайлик, xOy ва $x'Oy'$ текисликларининг ўзаро кесишганидан ҳосил бўлган тўғри чизиқ ON бўлсин (шакл 147). Бу ҳолда Эйлер бурчакларидан бири Ox ва ON

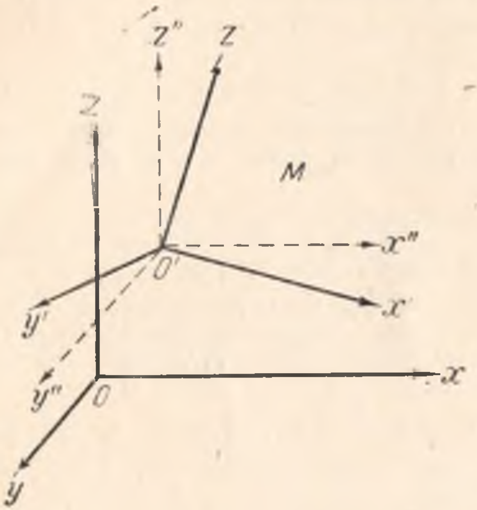


Шакл 147.

орасидаги φ бурчаги, иккинчиси Oz ва Oz' орасидаги θ бурчаги ва учинчиси Ox' ва ON орасидаги ψ бурчаги саналади.

Иккала системанинг бир-бирига нисбатан ўрни шу учта бурчак билан етарли даражада аниқланади. Буни ушбу мулоҳазалар исбот қилади. Дарҳақиқат, эски системани янги система билан бирлаштириш учун эски системани кетма-кет уч мартаба қуйидагича қилиб айлантирилса кифоя.

Эски системани Oz ўқи атрофида шундай қилиб айлантиянги система бошнинг эски системага нисбатан координаталари $x = a$, $y = b$, $z = c$ бўлсин (шакл 146).



Шакл 146.

Қуйилган масалани ечиш учун боши янги системанинг бошида ва ўқлари эски системанинг ўқларига параллель бўлган ёрдамчи координаталар системасини ўтказамиз. Фараз қилайлик, фазодаги бирор M нуқтанинг ёрдамчи системага нисбатан координаталари x'', y'', z'' бўлсин. Бу ҳолда эски системадан ёрдамчи системага ўтиш формулалари қуйидагича бўлади:

$$x = x'' + a,\ y = y'' + b,$$
$$z = z'' + c. \qquad (8)$$

Энди ёрдамчи системадан янги системага ўтамиз. Бу ҳолда алмаштириш формулалари қуйидагича буладн:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'',\\ y'' &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'',\\ z'' &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma''. \end{aligned}\right\} \qquad (8')$$

Булар (7) га қуйилса, биз излаган формулалар ҳосил бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha + y'\cos\alpha' + z'\cos\alpha'' + a,\\ y &= x'\cos\beta + y'\cos\beta' + z'\cos\beta'' + b,\\ z &= x'\cos\gamma + y'\cos\gamma' + z'\cos\gamma'' + c. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Тўғрибурчакли координаталарда алмаштириш формулаларининг энг умумий шакли шулардан иборат. Бу формулаларга қараганда нуқтанинг бирор тўғрибурчакли системага нисбатан координаталари у нуқтанинг бошқа тўғрибурчакли системага нисбатан координаталари орқали биринчи даражали кўпҳадлар билан нфода қилинади.

Саволлар ва масалалар

307. Тўғрибурчакли координаталар системасида фазодаги нуқтанинг урни қандай аниқланади?

308. Нуқта қаерда бўлганда унинг абсциссаси нолга тенг бўлади?

309. Нуқта қаерда бўлганда унинг ординатаси нолга тенг бўлади?

310. Нуқта қаерда бўлганда унинг аппликатаси нолга тенг бўлади?

311. Нуқта қаерда бўлганда унинг ординатаси ва аппликатаси нолга тенг бўлади?

312. Нуқта қаерда бўлганда унинг абсциссаси ва аппликатаси нолга тенг бўлади?

313. Нуқта қаерда булганда унинг абсциссаси ва ординатаси нолга тенг бўлади?

314. Ушбу нуқталарнинг ўринлари топилсин:

$$A(2, 1, 3);\ B(-1, 0, 1);\ C(2, -3, 0);$$
$$D(0, 0, -2);\ E(0, -3, 0);\ F(-2, 0, -5).$$

315. Кесманинг ўқдаги проекцияси нимага тенг? Текисликдаги проекцияси нимага тенг?

316. Қандай ҳолда кесманинг ўқдаги ёки текисликдаги проекцияси ноль бўлади?

317. Қандай ҳолда кесма проекциясининг ишораси манфий бўлади?

318. Синиқ чизиқнинг ўқдаги проекцияси нимага тенг?

319. Ёпиқ чизиқнинг ўқдаги проекцияси нимага тенг?

320. Кесманинг координата ўқларидаги проекциялари: 4, 7 ва 32 бўлса, унинг узунлиги қандай бўлади?

321. Агар тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари ўзаро тенг булса, у қандай бурчак?

322. Тўғри чизиқ координата ўқларининг бири билан 60° ва иккинчиси билан 45° бурчак ташкил қилса, учинчиси билан қандай бурчак ташкил қилади?

323. Бурчаклари учларининг координаталари $A(2, 3, 1)$, $B(0, 0, 0)$ ва $C(4, -1, 3)$ бўлган учбурчакнинг томонлари аниқлансин.

324. zOx текислигида шундай нуқта топилсинки, унинг $(0, 0, 4)$, $(2, 2, 2)$ ва $(0, 2, 1)$ нуқталаридан масофалари ўзаро тенг бўлсин.

рамизки, унинг Ox ўқи ON билан бирлашсин. Бунинг натижасида системанинг ўрни $x''y''z$ бўлади. Агар бу айланишнинг бурчагини, яъни Ox билан ON орасидаги бурчакни φ фараз қилинса, у ҳолда текисликдаги алмаштириш формуласи бўйича:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'' \cos\varphi - y'' \sin\varphi, \\ y &= x'' \sin\varphi + y'' \cos\varphi, \\ z &= z''. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эски системанинг xy текислигини ва Oz ўқини ON атрофида шундай қилиб айлантирамизки, xy текислиги $x'y'$ текислиги билан ва Oz ўқи Oz' ўқи билан бирлашсин. Бунинг натижасида системанинг ўрни $x''y'''z'$ бўлади. Агарда бу айланишдан ҳосил бўлган Oz ва Oz' орасидаги бурчакни θ фараз қилинса, бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x''' \\ y'' &= y''' \cos\theta - z''' \sin\theta, \\ z'' &= y''' \sin\theta + z''' \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Энди $x''y'''z'$ системани Oz' ўқи атрофида шундай қилиб айлантирамизки, Ox'' ўқи Ox' ўқи билан бирлашсин, бу ҳолда y''' ўқи y' ўқи билан бирлашади, яъни система $x'y'z'$ билан бирлашади. Агарда бу айланишдан ҳосил бўлган x'' ва x' ўқлар орасидаги бурчакни ψ фараз қилинса, бу ҳолда

$$\left.\begin{aligned} x''' &= x' \cos\psi - y' \sin\psi, \\ y''' &= x' \sin\psi + y' \cos\psi, \\ z''' &= z'. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

(10), (11) ва (12) муносабатлардан ёрдамчи координаталарни йўқ қилинса, ушбу формулалар ҳосил бўлади:

$$x = x' (\cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta) -$$

$$- y' (\cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta) + z' \sin\varphi \sin\theta, \tag{13}$$

$$y = x' (\sin\varphi \cos\psi + \cos\varphi \sin\psi \cos\theta) -$$

$$- y' (\sin\varphi \sin\psi - \cos\varphi \cos\psi \cos\theta) - z' \cos\varphi \sin\theta, \tag{14}$$

$$z = x' \sin\psi \sin\theta + y' \cos\psi \sin\theta + z' \cos\theta. \tag{15}$$

Юқорида айтилган Эйлер формулалари шулардан иборат.

325. Шундай нуқта топилсинки, унинг координаталар бошидан масофаси 10 га тенг бўлсин ва унинг (5, 6, 7) нуқтадан масофасининг ўртаси *Ox* ўқида бўлсин.

326. *Ox* ўқида шундай нуқта топилсинки, унинг билан (5, —4, 3) нуқта орасидаги масофанинг тенг ўртаси *yOz* текислигида бўлсин.

327. Координата ўқларининг бири билан 60° ва қолган ҳар бири билан 45° бурчак ташкил қилган тўғри чизиқ бўлиши мумкинми?

328. Доира текислиги билан проекция текислиги орасидаги бурчак 45°. Агарда доиранинг радиуси 10 бирликка тенг бўлса, унинг юзининг проекцияси қанча бўлади?

329. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак қандай аниқланади?

330. Икки тўғри чизиқнинг ўзаро перпендикуляр бўлиш шарти нимадан иборат?

331. Икки тўғри чизиқнинг ўзаро параллеллик шарти нимадан иборат?

332. Нуқтанинг қутб координаталари нимадан иборат?

333. Декарт системасидан қутб системасига ва, аксинча, қутб системасидан Декарт системасига қандай ўтилади?

334. Координаталар алмаштиришда қандай асосий ҳоллар ва формулалар бор?

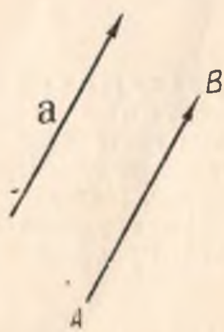
335. Эйлер бурчаклари ва уларнинг роли нимадан иборат?

Ўн тўртинчи боб

ВЕКТОРИАЛ АЛГЕБРА

§ 97. СКАЛЯР ВА ВЕКТОР

Математика ва физика фанларида кўпинча икки турли миқдор билан иш кўришга тўғри келади; улардан бири фақат ўзининг сон қиймати билан аниқлангани ҳолда, иккинчиси ўзининг сон қийматидан бошқа яна фазодаги йўналиши билан аниқланади. Масалан, узунлик, ҳажм, температура, потенциал энергия каби миқдорлар фақат ўзларининг сон қийматлари билангина аниқланади ва бундай миқдорлар, яъни фақат ўзининг сон қиймати билан аниқланган миқдорлар **скаляр** дейилади. Лекин куч, тезлик, тезланиш каби миқдорларни аниқлаш учун уларнинг сон қийматлари кифоя қилмайди ва уларнинг тўла аниқланиши учун фазодаги йўналишлари ҳам маълум бўлиши лозим. Бундай миқдорларни, яъни ўзининг сон қийматидан бошқа яна фазодаги йўналиши билан аниқланадиган миқдорлар **векториал миқдорлар** ёки қисқача **векторлар** дейилади.



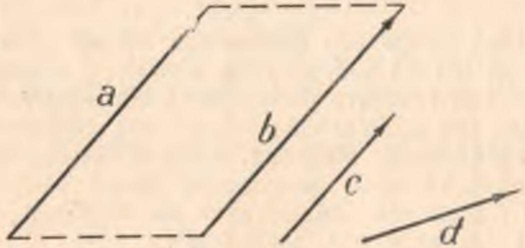
Шакл 148.

Векторнинг сон қиймати унинг узунлиги ёки **модули** дейилади. Вектор одатда стрелка ёрдами билан тасвир қилинади: стрелканинг йўналиши векторнинг йўналишини ва унинг узунлиги векторнинг узунлигини кўрсатади. Вектор кўпинча битта қора ҳарф билан белгиланади, масалан $\boldsymbol{a}$, ёки устига стрелка қўйилган иккита бош ҳарф билан белгиланади, масалан, $\overrightarrow{AB}$ (шакл 148). Бу ҳолда A — векторнинг бошланғич нуқтаси ва B унинг охирги нуқтаси ёки учи бўлиб, векторнинг йўналиши A дан B га томон саналади. Кўп вақт векторнинг ўзи қора ҳарф билан, унинг сон қиймати қора бўлмаган ўша ҳарфнинг ўзи билан белгиланади, масалан,

$$|\boldsymbol{a}| = a, \quad |\boldsymbol{A}| = A, \quad |\overrightarrow{AB}| = AB.$$

§ 98. ВЕКТОРЛАРНИНГ ТЕНГЛИГИ

Ҳар бир вектор ўзининг сон қиймати (ёки узунлиги) ва йўналиши билан аниқлангани учун, узунликлари тенг



Шакл 149.

ва йўналишлари бир хил бўлган икки вектор ўзаро тенг дейилади.

Икки векторнинг тенглиги тўғрисида берилган таърифга қараганда, векторнинг бошланғич нуқтасининг ўрни роль ўйнамайди. Масалан, шакл 149 да $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар ўзаро тенг, чунки уларнинг узунликлари тенг ва йўналишлари бир хил. Бу ҳолда алгебрадаги каби

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

ёзилади. $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторларнинг йўналишлари бир хил бўлса-да, лекин узунликлари тенг эмас, демак, $\boldsymbol{b}$ вектор $\boldsymbol{c}$ векторга тенг эмас.

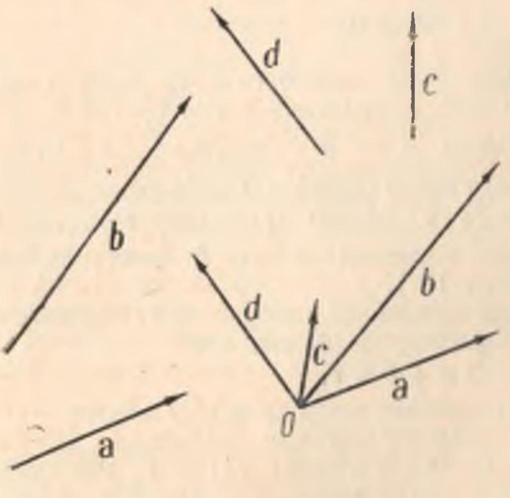
$$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{c}.$$

Шунга ўхшаш, c ва d векторлар ҳам ўзаро тенг эмас, чунки уларнинг узунликлари тенг бўлса-да, лекин йўналишлари ҳар хил.

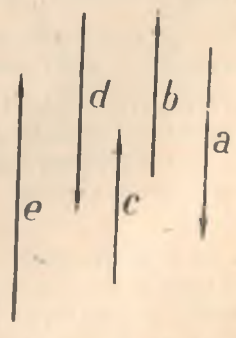
§ 99. КОЛЛИНЕАР ВЕКТОРЛАР

Фараз қилайлик, бир неча вектор, масалан: a, b, c ва d берилган бўлсин. Икки векторнинг тенглиги тўғрисида берилган таърифга мувофиқ векторнинг бошланғич нуқтаси роль ўйнамаган эди. Бунга асосланиб, исталган бирор O нуқтада ҳалиги a, b, c, d векторларга тенг булган векторларни ясаш мумкин, ёки, бошқача қилиб айтганда, берилган векторларни бир бошланғич нуқтага кўчириш мумкин. Бундай ясаш шакл 150 да бажарилган: берилган O нуқтада a, b, c, d векторларга тенг қилиб векторлар ясалган.

Агарда шунинг каби бир неча векторни бир бошланғич нуқтага кўчирганда, улар бир тўғри чизиқда ётса, бундай



Шакл 150.

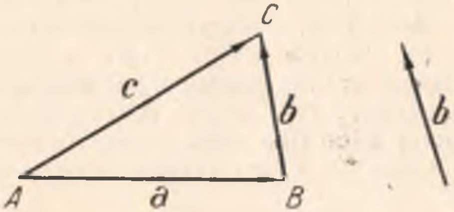


Шакл 151.

векторлар **коллинеар** векторлар дейилади. Коллинеар бўлган a ва b векторлар $a \parallel b$ равишда ифода қилинади. Масалан, шакл 149 даги a, b, c векторлар коллинеар векторлардир. Шунга ўхшаш, шакл 151 даги a, b, c, d ва e векторлар ҳам коллинеар векторлардан иборат, чунки уларни бирор бошланғич нуқтага келтирганда, улар бир тўғри чизиқда ётади.

§ 100. ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ ВА АЙИРИШ

1. Фараз қилайлик, бирор A нуқта олдин A дан B га AB бўйича, сўнгра B дан C га BC бўйича ҳаракат қилсин. Натижада у нуқта A дан C га келади. Шунинг учун $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ ва $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$ векторларнинг йиғиндиси учун $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ векторни



Шакл 152.

қабул қилиш табиийдир. Буни эътиборга олиб, икки $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторнинг йиғиндиси деб, қуйидагича ҳосил бўлган $\boldsymbol{c}$ векторга айтилади: берилган $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$ векторни B учидан $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$ векторни ясаб, сўнгра биринчи $\boldsymbol{a}$ векторнинг бошини иккинчи $\boldsymbol{b}$ векторнинг учи билан туташтирилади. Ҳосил бўлган $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ вектор — берилган $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг йиғиндиси бўлади (шакл 152).

Векторларни қўшиш амалининг ишораси учун одатдаги алгебраик қўшиш ишораси ишлатилади, яъни

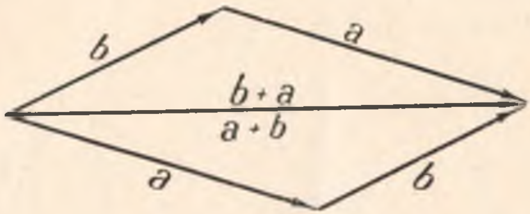
$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}.$$

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар — қўшилувчи векторлар ва $\boldsymbol{c}$ вектор — геометрик йиғинди ёки, қисқача, йиғинди дейилади. Шунинг билан, $\boldsymbol{a}$ векторга $\boldsymbol{b}$ векторни қўшиш учун: $\boldsymbol{a}$ векторнинг B учига $\boldsymbol{b}$ векторнинг бошини келтириб, сўнгра $\boldsymbol{a}$ векторнинг боши $\boldsymbol{b}$ векторнинг учи C билан туташтирилса, $\overrightarrow{AC}$ вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг йиғиндиси бўлади.

Шакл 153 дан очиқ кўринмоқдаки, $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг йиғиндиси у векторларда ясалган параллелограмнинг диагоналидан иборатдир. Бунга қараганда

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a},$$

демак, *геометрик қўшиш коммутатив қонунга бўйсунади*, яъни қўшилувчиларнинг тартиби геометрик йиғиндига таъсир этмайди. Учта: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларни қўшиш учун: $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$

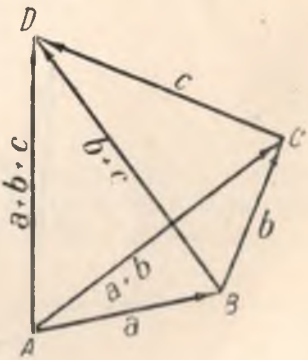


Шакл 153.

векторларнинг $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ йиғиндисига $\boldsymbol{c}$ векторни қўшамиз. Бундан ҳосил бўлган $\overrightarrow{AD}$ вектор учала векторнинг йиғиндиси бўлади (шакл 154). Лекин $\boldsymbol{a}$ векторга $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ йиғиндини қўшганда ҳам $\overrightarrow{AD}$ векторнинг ўзи ҳосил бўлади, демак:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},$$

яъни *геометрик қўшиш ассоциатив қонунига бўйсунади*, бошқача қилиб айтганда, геометрик йиғиндида қавсларни очиш ва қўшилувчиларни қавсларга киритиш мумкин.



Шакл 154.

Юқорида кўрсатилган усул билан сони исталганча бўлган векторларни қўшиш мумкин. Масалан,

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{e}$$

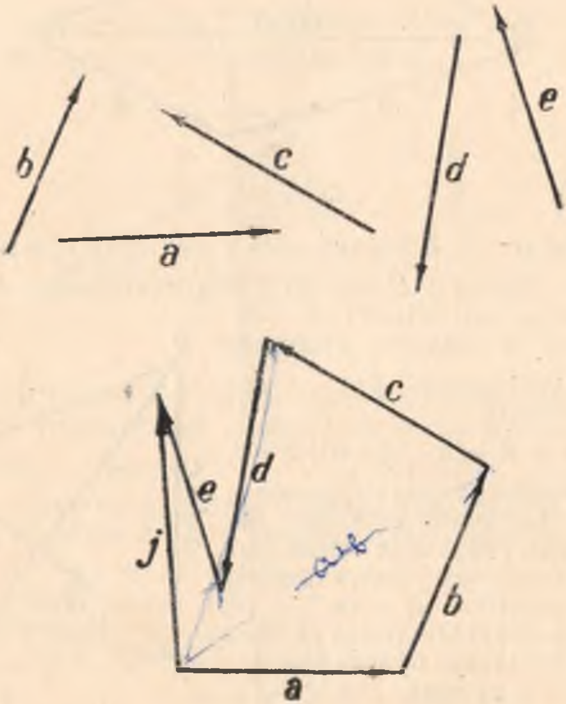
йиғиндини топиш учун $\boldsymbol{a}$ векторга $\boldsymbol{b}$ векторни қўшамиз, сўнгра ҳосил бўлган йиғиндига $\boldsymbol{c}$ векторни қўшамиз ва шунга ўхшаш кетма-кет давом этиб, охири $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ йиғиндига $\boldsymbol{e}$ векторни қўшамиз (шакл 155).

Демак, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{e}$ векторларни қўшиш учун $\boldsymbol{a}$ векторнинг учига $\boldsymbol{b}$ векторни, $\boldsymbol{b}$ векторнинг учига $\boldsymbol{c}$ векторни, $\boldsymbol{c}$ векторнинг учига $\boldsymbol{d}$ векторни, $\boldsymbol{d}$ векторнинг учига $\boldsymbol{e}$ векторни келтириб, сўнгра аввалги $\boldsymbol{a}$ векторнинг боши энг кейинги $\boldsymbol{e}$ векторнинг учи билан туташтирилса, изланган (j)

йиғинди вектор ҳосил бўлади. Бу қоида „Кўпбурчак қоидаси“ дейилади. Векторлар бир неча бўлган ҳолда ҳам ассоциатив қонуни ўз кучини сақлайди, яъни

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \cdots + \boldsymbol{t} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c} + \cdots + \boldsymbol{t})$$

ва шунга ўхшаш.



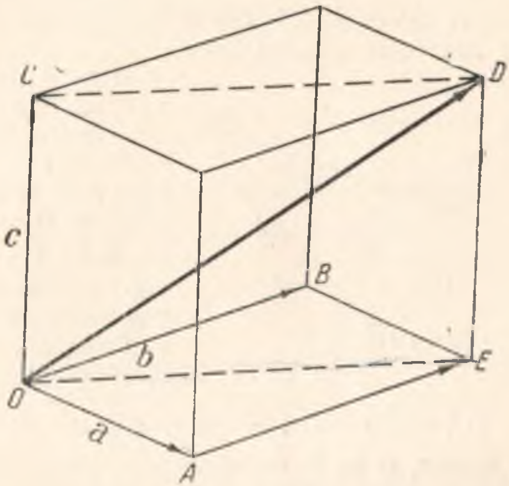
Шакл 155.

Фараз қилайлик, қўшилувчи векторлар: $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{OC}$ бўлсин. Агар шакл 156 да кўрсатилгандек учала векторларда параллелепипед ясалса,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}; \quad \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD},$$

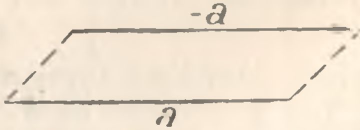
яъни бир текисликда ётмаган учта векторни умумий бир нуқтага келтирганда, у нуқтадан чиққан йиғинди-векторни ҳалиги уч векторда ясалган параллелепипеднинг шу нуқтадан чиққан диагонали ифода қилади.

2. Икки ёки бир неча векторни қўшишда махсус бир ҳолни учратиш мумкинки, у ҳам бўлса тенг ва йўналишла-



Шакл 156.

ри қарама-қарши бўлган векторларни қўшишдан иборат. Бундай векторларда параллелограм ясаб бўлмайди. Юқорида бир неча векторни қўшиш учун чиқарилган умумий қоидани татбиқ қилганда шундай „йиғинди-вектор“ ҳосил бўладики, унинг боши учи билан бирлашган бўлади. Бундай махсус „вектор“ ноль-вектор дейилади ва у одатда алгебрадаги 0 ишораси билан белгиланади, яъни (шакл 157):



Шакл 157.

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = 0.$$

Шунинг учун, агарда $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 0$ бўлса $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}$ ёзиш мумкин.

Энди, айириш амали қўшиш амалига тескари амал тариқасида қуйидагича аниқланади:

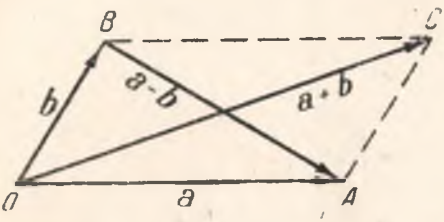
Иккита $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг айирмаси деб, шундай учинчи $\boldsymbol{c}$ векторга айтиладики, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторларнинг йиғиндиси $\boldsymbol{a}$ га тенг бўлса, яъни

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}, \text{ агар } \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \text{ бўлса.}$$

Агар кейинги тенгликнинг иккала томонига $(-\boldsymbol{b})$ вектордан қўшилса,

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$$

бўлади, яъни $\boldsymbol{a}$ вектордан $\boldsymbol{b}$ векторни айириш учун $\boldsymbol{c}$ векторга $(-\boldsymbol{b})$ векторни қўшиш керак.



Шакл 158.

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг айирмасини ясаш учун бу векторларни бирор бошланғич O нуқтага кўчириб, сўнгра $\boldsymbol{b}$ векторнинг B учидан $\boldsymbol{a}$ векторнинг A учига $\overrightarrow{BA}$ вектор ўтказилса, шунинг ўзи изланган $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ вектор бўлади, чунки (шакл 158):

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = -\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}.$$

Шуниң билан, $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларда ясалган параллелограмда диагоналларидан бири у векторларнинг йиғиндисини ва иккинчиси — айирмасини ифода қилади.

§ 101. ВЕКТОРНИ СКАЛЯРГА КЎПАЙТИРИШ

$\boldsymbol{a}$ векторни бирор λ скаляр (ҳақиқий) кўпайтувчига кўпайтириш, шундай янги $\boldsymbol{b}$ вектор ҳосил қилиш демакки,

$$\boldsymbol{b} = \lambda \boldsymbol{a}$$

бўлсин. Агар $\lambda > 0$ бўлса, $\boldsymbol{b}$ векторнинг йўналиши $\boldsymbol{a}$ векторнинг йўналиши каби бўлади, агарда $\lambda < 0$ бўлса, тескариси бўлади. Ҳар икки ҳолда ҳам

$$|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda| |\boldsymbol{a}|.$$

Векторнинг скалярга кўпайтмаси дистрибутив қонунига бўйсунади, яъни:

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b},$$

бошқача қилиб айтганда, оддий алгебра қоидаси бўйича қавсларни очиш мумкин. Ҳақиқатда (шакл 159):

$$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{OA^1} = \lambda \boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}, \quad \overrightarrow{A_1C_1} = \lambda\boldsymbol{b};$$

бундан

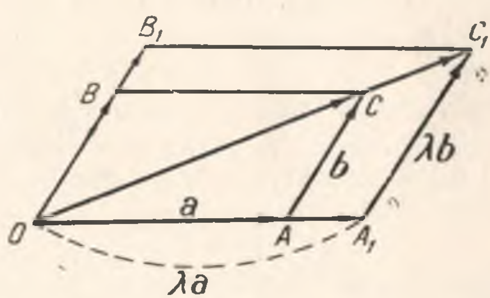
$$\overrightarrow{OA_1} = \lambda OA, \ \overrightarrow{A_1C_1} = \lambda AC,$$

яъни OAC ва OA_1C_1 учбурчаклар ўхшаш, демак,

$$\overrightarrow{OC_1} = \lambda\overrightarrow{OC},$$

шунинг учун:

$$\lambda\boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$



Шакл 159.

Узунлиги (модули) бирликка тенг бўлган вектор бирлик вектор ёки орт дейилади. Векторни скалярга кўпайтириш тушунчасидан фойдаланиб, ҳар қандай векторни шу йўналишдаги бирлик вектор ёрдами билан ифода қилиш мумкин, масалан, $\boldsymbol{a}$ векторни

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}_1$$

кўринишда ёзиш мумкин, a бунда a векторниг узунлиги ва a_1 унинг бирлик вектори, яъни йўналиши a векторнинг йўналиши каби бўлган бирлик вектор.

§ 102. ВЕКТОРНИ СОНГА БЎЛИШ

Векторни сонга бўлиш амали қуйидагича таъриф қилинади: $\boldsymbol{a}$ векторни $\lambda\,(\lambda \neq 0)$ сонга бўлиш, шундай $\boldsymbol{b}$ векторни топиш демакки, уни λ га кўпайтирганда $\boldsymbol{a}$ вектор ҳосил бўлсин, яънн

$$\lambda\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}.$$

Шунинг билан, бу амал векторни сонга кўпайтириш амалига тескари булган амалдан иборат. Агар бу тенгликнинг икка-ла томони $\frac{1}{\lambda}$ га кўпайтирилса, у ҳолда

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

яъни векторни (нолга тенг бўлмаган) сонга булиш учун у векторни шу соннинг тескарисига купайтирилса кифоя. Алгебрадаги каби $\boldsymbol{a}$ векторни λ сонга бўлиш натижаси $\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}$ ёки $\boldsymbol{a} : \lambda$ кўринишда ёзилади. Шунинг билан баравар

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\lambda}$$

вектордан иборат булиб, унинг узунлиги $\frac{a}{|\lambda|}$ га тенгдир; агар $\lambda > 0$ бўлса, йўналиши $\boldsymbol{a}$ векторнинг йўналиши каби булади, агар $\lambda < 0$ бўлса, унга тескари бўлади.

Агар икки вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} = 0 \qquad (1)$$

чизиқли муносабат билан боғланган булса, у ҳолда $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар коллинеар булади. Ҳақиқатда, фараз қилайлик, $\alpha \neq 0$ бўлснн. Бу ҳолда

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \boldsymbol{b},$$

бу эса $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг коллинеарлигини кўрсатади. Аксинча, агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{a}$ нинг $\boldsymbol{b}$ га нисбатини λ фараз қилиб,

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b} \text{ ёки } \boldsymbol{a} - \lambda \boldsymbol{b} = 0$$

ёзиш мумкин, бу эса чизиқли муносабатнинг хусусий ҳолидан иборат.

Агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар коллинеар бўлмаса, у ҳолда вектор

$$\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} \qquad (2)$$

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар билан аниқланган текисликка параллель бўлади, чунки бир текисликдаги $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг йиғиндиси шу текисликнинг узида булади. Бу ҳолда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{c}$ векторлар *компланар* векторлар, яъни бир текисликка параллель булган векторлар дейилади.

Аксинча, коллинеар бўлмаган $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларга компланар бўлган ҳар қандай $\boldsymbol{c}$ векторни (2) равишда ифода қилиш мумкин. Буни исбот қилиш учун $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларнинг учаласини бирор умумий O нуқтага кўчирамиз (шакл 160). Сўнгра $\boldsymbol{c}$ векторнинг C учидан $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларга параллель қилиб CD ва CE ни ўтказамиз. Бу ҳолда $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларга коллинеар бўлган $\alpha\boldsymbol{a}$ ва $\beta\boldsymbol{b}$ векторларнинг геометрик йиғиндиси $\boldsymbol{c}$ булади, яъни

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b}.$$

Шакл 160 да:

$$\alpha = -\frac{OE}{OA}; \quad \beta = \frac{OD}{OB}$$

фараз қилинади.

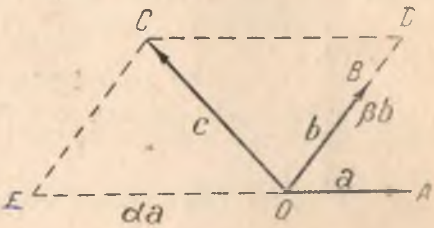
C векторнинг (2) каби ифода қилиниши ёки иккига ажралиши биргина бўлади. Ҳақиқатан,

$$\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{c} = \alpha'\boldsymbol{a} + \beta'\boldsymbol{b}$$

фараз қилинса, бу ҳолда

$$0 = (\alpha - \alpha')\,\boldsymbol{a} + (\beta - \beta')\,\boldsymbol{b}$$

бўлар эди. Иккинчи томондан $\boldsymbol{a}$ ва b векторлар параллель бўлмагани учун



Шакл 160.

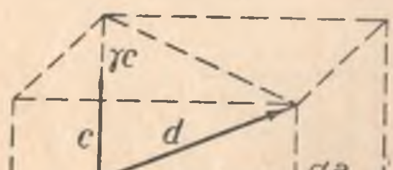
$$\alpha - \alpha' = 0, \quad \beta - \beta' = 0,$$

ёки

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

Бундан шундай натижа келиб чиқади: учта компланар вектор ҳамавақт ўзаро чизиқли муносабат билан боғлангандир:

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0.$$



Шакл 161.

Аксинча, агар бу муносабат бажарилса, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар компланар бўлади.

Агар учта $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлар компланар бўлмаса, у ҳолда ҳар бир $\boldsymbol{d}$ векторни

$$\boldsymbol{d} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} \qquad (3)$$

кўринишда учтага ажратиш мумкин. Бунинг мумкинлиги шакл 161 дан очиқ кўринмоқда. Шунинг билан баравар (3) ажратиш бир хилгина бўлади. Ҳақиқатда, агар

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c,$$
$$d = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c$$

фараз қилинса, бу ҳолда

$$0 = (\alpha - \alpha')\, a + (\beta - \beta')\, b + (\gamma - \gamma')\, c$$

бўлар эди ва агар $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$ айирмалардан ҳеч бўлмаганда бирортаси нолга тенг бўлмаса, a, b, c векторлар компланар бўлар эди, бу эса қилинган фаразга қарши бўлади. Шунинг учун

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma'.$$

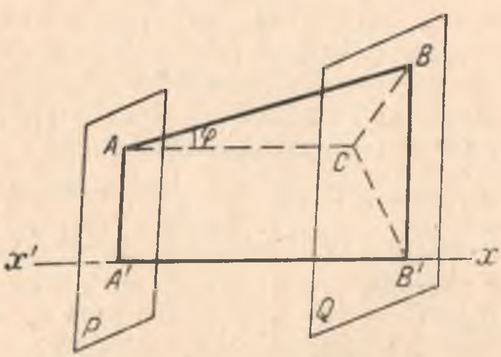
Бундан шундай натижа келиб чиқади: тўртта ихтиёрий a, b, c, d векторлар ҳамавақт чизиқли муносабат билан боғлангандир:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0, \qquad (3)$$

бунда коэффициентларидан ҳеч бўлмаганда бири нолга тенг эмас.

§ 103. ВЕКТОРНИНГ ЎҚДАГИ ПРОЕКЦИЯСИ

1. Китобнинг § 90 да проекциялар тўғрисида маълумот берилган эди. У ерда чиқарилган муносабатлар, умуман



Шакл 162.

айтганда, векториал алгебрада ҳам ўз кучини сақласа-да, биз бу ерда векторнинг ўқдаги проекцияси тўғрисида қисқача тушунча беришни лозим топдик.

Фараз қилайлик, $x'x$: йўналиши бирлик i вектор билан аниқланган тўғри чизиқ (ўқ) бўлсин (шакл 162). Бу йўналишда ёки ўқда бирор $\boldsymbol{a}$ векторнинг проекциясини аниқлаймиз. Бунинг учун $\boldsymbol{a}$ векторнинг боши A ва учи B дан $x'x$ га перпендикуляр қилиб текисликлар ўтказамиз. Бу текисликларнинг ўқ билан учрашган A' нуқтаси A нинг ва B' нуқтаси B нинг проекциялари бўлади; $A'B'$ эса $\boldsymbol{a}$ векторнинг $x'x$ ўқдаги проекцияси дейилади. Энди A дан $x'x$ ўқига параллель қилиб тўғри чизиқ ўтказилса, у Q текислик билан бирор C нуқтада учрашади. Фараз қилайлик, $\boldsymbol{a}$ вектор билан бирлик $\boldsymbol{i}$ векторнинг (ёки $x'x$ ўқининг) орасидаги бурчак φ бўлсин; $\boldsymbol{a}$ векторнинг $x'x$ ўқидаги проекциясини, яъни $A'B'$ ни a_i билан белгилаймиз. Шаклга мувофиқ:

$$\text{пр.}_i\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_i = A'B' = AC$$

бўлгани учун, ABC учбурчакдан

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}\cos\varphi. \tag{1}$$

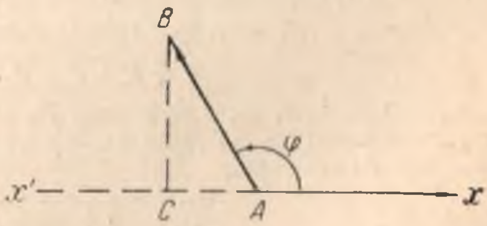
φ бурчаги $\frac{\pi}{2}$ дан катта бўлмаган ҳолда бу формуланинг тўғрилиги ўз-ўзидан кўринади; $\varphi > \frac{\pi}{2}$ бўлган ҳолда (шакл 163):

$$AC = a\cos(\pi - \varphi),$$

лекин бу ҳолда $\overleftarrow{AC}$ $\boldsymbol{i}$ га қарши йўналган, шунинг учун:

$$\boldsymbol{a}_i = -AC = -\boldsymbol{a}\cos(\pi - \varphi) = \boldsymbol{a}\cos\varphi,$$

демак, (1) формула умумий бўлиб, ҳар икки ҳолда ҳам кучини сақлайди. Ҳар икки ҳолда: векторнинг ўқдаги проекцияси вектор узунлигини у вектор билан ўқ орасидаги бурчакнинг косинуси билан кўпайтмасига тенг.



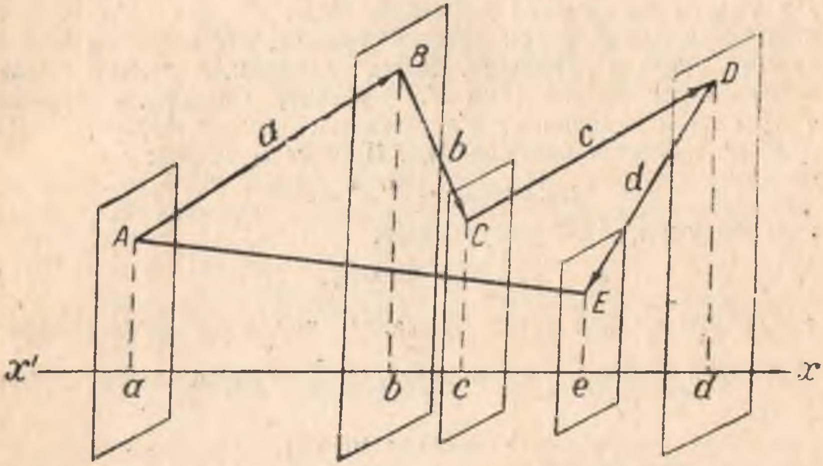
Шакл 163.

$\boldsymbol{a}$ векторнинг $\boldsymbol{i}$ йўналишдаги проекциясини биз вектор тариқасида ҳам ишлатишимиз мумкин. Бу ҳолда:

$$\boldsymbol{a}_i = a_i\boldsymbol{i} = \boldsymbol{a}\cos\varphi\boldsymbol{i}. \tag{2}$$

2. Энди бир неча вектор йиғиндисининг ўқдаги проекциясини аниқлаймиз. Соддалик нуқтаи-назаридан тўртта вектор оламиз: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$. Энг аввал, берилган векторларни „кўпбурчак қоидаси“ бўйича тузиб оламиз (шакл 164). Фараз қилайлик, берилган векторлар:

$$a = \overrightarrow{AB}, \quad b = \overrightarrow{BC}, \quad c = \overrightarrow{CD}, \quad d = \overrightarrow{ED}$$



Шакл 164.

бўлсин. „Кўпбурчак қоидаси“ га мувофиқ, бу векторларнинг йиғиндиси $\overrightarrow{AE}$ вектор бўлади, яъни:

$$a + b + c + d = \overrightarrow{AE}. \qquad (3)$$

Агар a, b, c, d, e нуқталар A, B, C, D, E нуқталарнинг проекциялари фараз қилинса, бу ҳолда векторларни қўшиш таърифига мувофиқ:

$$\overrightarrow{ae} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{de}. \qquad (4)$$

Иккинчи томондан:

$$\overrightarrow{ae} = \text{пр.}_l\overrightarrow{AE}, \quad \overrightarrow{ab} = \text{пр.}_l a, \quad \overrightarrow{bc} = \text{пр.}_l b,$$

демак:

$$\overrightarrow{cd} = \text{пр.}_l c, \quad \overrightarrow{de} = \text{пр.}_l d,$$

$$\text{пр.}_l(a + b + c + d) = \text{пр.}_l a + \text{пр.}_l b + \text{пр.}_l c + \text{пр.}_l d \qquad (5)$$

Векторларнинг сони ҳар қанча бўлган ҳолда ҳам ҳалиги йўл билан исбот қилинади. Шунинг билан: б и р н е ч а в е ктор йиғиндисининг ўқдаги проекцияси қўшилувчи векторларнинг шу ўқдаги проекцияларининг йиғиндисига тенг.

§ 104. ИККИ ВЕКТОРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ

Икки вектор $\boldsymbol{a}$ *ва* $\boldsymbol{b}$ *нинг скаляр кўпайтмаси деб, иккала вектор узунликларининг кўпайтмасини иккала вектор орасидаги бурчакнинг косинуси билан кўпайтмасига айтилади.*

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини $\boldsymbol{ab}$ символи билан белгилаймиз, демак таъриф бўйича:

$$\boldsymbol{ab} = ab\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \tag{1}$$

Скаляр кўпайтманинг бу тузилишига қараганда, уни яна бундай таърифлаш мумкин:

Икки вектор $\boldsymbol{a}$ *ва* $\boldsymbol{b}$ *нинг скаляр кўпайтмаси деб, бир векторнинг узунлигини иккинчи векторнинг биринчи вектор йўналиши бўйича олинган проекцияси билан кўпайтмасига айтилади*, яъни:

$$\boldsymbol{ab} = a \cdot \text{пр.}_{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b} = b \cdot \text{пр.}_{\boldsymbol{b}} \cdot \boldsymbol{a}. \tag{2}$$

Скаляр кўпайтманинг ҳар икки тузилишига қараганда икки вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ нинг кўпайтмаси скалярдан иборат.

$\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчак ўткир бўлганда $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ мусбат ва ўтмас бўлганда манфий бўлгани учун, агарда $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар орасидаги бурчак ўткир бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси мусбат ва ўтмас бўлса — манфий бўлади. Хусусий ҳолда вектор $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ га перпендикуляр бўлганда уларнинг скаляр кўпайтмаси 0 га тенг бўлади $\left(\text{чунки } \cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0\right)$:

$$\boldsymbol{ab} = 0 \tag{3}$$

вектор $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ га параллель бўлган ҳолда $\cos(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \cos 0° = 1$ бўлгани учун, бу ҳолда

$$\boldsymbol{ab} = ab, \tag{4}$$

Агарда вектор $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ га қарама-қарши бўлса

$$\boldsymbol{ab} = -ab, \tag{5}$$

чунки бу ҳолда $\cos(a, b) = -1$. Хусусий ҳолда

$$\boldsymbol{aa} = a^2. \tag{6}$$

2. Скаляр кўпайтма учун берилган таърифга асосан: *икки векторнинг скаляр кўпайтмаси коммутатив қонунга бўйсунади*, яъни

$$ab = ba. \tag{7}$$

Скаляр кўпайтма учун берилган иккинчи таърифга асосан

$$\lambda (ab) = \lambda \cdot (b \cdot \text{пр.}_b \cdot a) = b.(\lambda \cdot \text{пр.}_b \cdot a) = b \cdot (\text{пр.}_b \lambda a) = (\lambda a)\, b.$$

Буни ва (7) ни эътиборга олинса

$$\lambda (ab) = (\lambda a)\, b = a(\lambda b), \tag{8}$$

яъни скаляр кўпайтмани бирор сонга кўпайтириш учун кўпайтувчи векторлардан бирини шу сонга кўпайтирилса кифоя қилади.

Скаляр кўпайтма учун берилган иккинчи таърифга асосан:

$$a(b + c) = a \cdot \text{пр.}_a (b + c) = a\,(\text{пр.}_a b + \text{пр.}_a c) =$$
$$= a \cdot \text{пр.}_a \cdot b + a \cdot \text{пр.}_a \cdot c = ab + ac,$$

ёки

$$a(b + c) = ab + ac, \tag{9}$$

яъни *скаляр кўпайтма дистрибутив қонунига бўйсунади.*

§ 105. ИККИ ВЕКТОРНИНГ ВЕКТОРИАЛ КЎПАЙТМАСИ

Биз ўтган параграфда икки векторнинг скаляр кўпайтмаси билан шуғулланган эдик. Энди бу ерда икки векторнинг **векториал кўпайтмаси** деб аталган янги амал билан таништирамиз.

Фараз қилайлик, иккита a ва b векторлар берилган бўлсин. a векторнинг b векторга векториал кўпайтмаси деб, шундай учинчи c векторни айтиладики, у вектор қуйидагича аниқланади:

1) *c векторнинг узунлиги a ва b векторлар узунликларининг улар орасидаги бурчакнинг синуси билан кўпайтмасига тенг*, яъни

$$|c| = ab \sin (a,\ b), \tag{1}$$

бу таърифга қараганда c векторнинг узунлиги a ва b векторларда ясалган параллелограмнинг юзини ифодаловчи сон билан ифода қилинади;

2) c векторнинг йўналиши ҳалиги параллелограмнинг текислигига перпендикуляр бўлиб, ўнг ўймали винтни (ёки

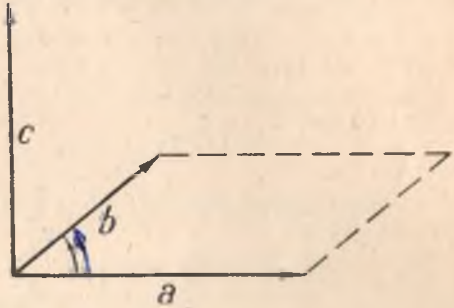
пармани) a вектордан b векторга қаратиб бураган чоғда унинг учи c вектор бўйича олдинга қараб ҳаракат этсин (шакл 165). a векторнинг b векторга векториал кўпайтмаси

$$[ab]$$

равишда белгиланади, яъни

$$c = [ab]$$

Фараз қилайлик, кичи оёғи билан юқорида айтилган параллелограм текислиги устида тикка турган ҳолда унинг боши ҳалиги c вектор томонида бўлсин. Бу ҳолда a ва b векторлар орасидаги бурчакнинг биссектрисасига қаралса, a вектор унинг ўнг томонида ва b вектор чап томонида бўлади, ёки: a йўналишидан b йўналишига қараб (энг қисқа йўл билан) айлантирилса, бу ҳаракат соат стрелкасининг юриш ҳаракатига тескари бўлиб кўринади. Бундай система ўнг система дейилади.



Шакл 165.

Аксинча, b дан a га томон (энг қисқа йўл билан) айлантириш натижасида c векторнинг йўналиши аввалгисига тескари бўлади. Шунинг учун

$$[ab] = -[ba],$$

яъни кўпайтувчи a ва b векторларни кўпайтириш тартиби ўзгарган чогда кўпайтманинг ишораси тескари бўлади. Демак, *векториал кўпайтма коммутатив қонунга бўйсунмайди.*

a ва b векторлар коллинеар бўлган ҳолда

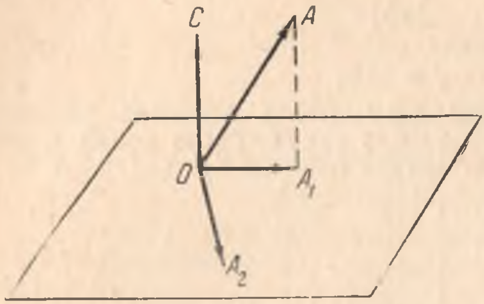
$$[ab] = 0, \qquad (2)$$

бу эса, юқорида векториал кўпайтмага берилган асосий таърифдан бевосита келиб чиқади.

Векториал кўпайтма дистрибутив қонунига бўйсунади, яъни

$$[(a + b)c] = [ac] + [bc]. \qquad (3)$$

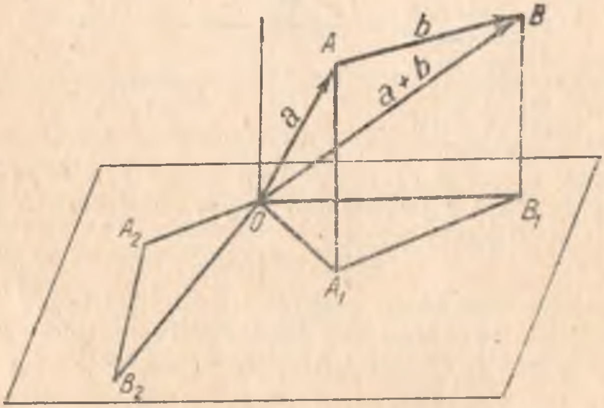
Буни исбот қилиш учун $c°$ ни бирлик вектор фараз қилиб, энг аввал $[ac°]$ векториал кўпайтмани ясаш усули билан топамиз. Шу мақсад билан $\boldsymbol{a} = OA$ векторни $\boldsymbol{c}^\circ$ векторга перпендикуляр бўлган текисликка OA_1 проекциясини туширамиз (шакл 166). Бу ҳолда



Шакл 166.

$$OA_1 = \boldsymbol{a}\cos(\boldsymbol{a},\ OA_1) = \boldsymbol{a}\sin(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c}^\circ).$$

Энди бу OA_1 проекцияни O нуқта атрофида (ҳалиги текисликда) соат стрелкасининг ҳаракати бўйича 90° га айлантирамиз. Фараз қилайлик, $\overrightarrow{OA_1}$ нинг янги ўрни $\overrightarrow{OA_2}$ бўлсин. Бу ҳолда ана шу вектор $\overrightarrow{OA_2}$ ўзи $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}^\circ]$ векториал кўпайтма бўлади, чунки



Шакл 167.

$$\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_1} = a\sin(a,\ c^\circ)$$

ва $\overrightarrow{OA_2}$ векторнинг ўзи $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{c}^\circ$ векторларга перпендикуляр бўлиб, шундай томонга йўналтирилганки, унинг a дан c° га айланиши соат стрелкасининг ҳаракатига қаршидир.

Энди фараз қилайлик, бирлик вектор $\boldsymbol{c}^\circ$ бирор текисликка перпендикуляр бўлсин ва $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$ бўлсин, демак, $\overrightarrow{OB} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (шакл 167). OAB учбурчакнинг ҳалиги текисликка проекциясини тушириб, сўнгра уни шу текисликда соат стрелкасининг ҳаракати бўйича 90° га айлантирамиз. Бу ҳолда, юқорида чиқарилган натижага мувофиқ

$$\overrightarrow{OA_2} = [ac^\circ], \quad \overrightarrow{A_2B_2} = [bc^\circ], \quad \overrightarrow{OB_2} = [(a+b)c^\circ],$$

иккинчи томондан

$$\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{A_2B_2}$$

бўлгани учун

$$[(a+b)\,c^\circ] = [ac^\circ] + [bc^\circ]$$

ёки бу тенгликнинг иккала томони скаляр c га кўпайтирилса

$$[(a+b)\,cc^\circ] = [acc^0] + [bcc^\circ]$$

ёки

$$[(a+b)\,c] = [ac] + [bc]$$

чунки

$$cc^\circ = c \text{ бўлади.}$$

§ 106. УЧ ВЕКТОРНИНГ АРАЛАШ КЎПАЙТМАСИ

Уч векторни ўзаро турли равишда кўпайтириш мумкин. Бу кўпайтмалардан биз бу ерда ушбу кўпайтмани текшириш билан чекланамиз:

$$[ab]\,c, \tag{1}$$

яъни a ва b векторларнинг векториал кўпайтмасининг учинчи c векторга скаляр кўпайтмасини тузамиз. Бундай кўпайтма **у ч в е к т о р н и н г а р а л а ш к ў п а й т м а с и** дейилади.

a ва b векторларнинг $[ab]$ векториал кўпайтмаси вектор бўлгани учун, бу векторнинг c векторга скаляр кўпайтмаси скаляр бўлади, демак, a, b, c векторларнинг (1) аралаш кўпайтмаси скалярдан иборат.

Бу кўпайтма оддий геометрик маънога эгадир. Ҳақиқатда, фараз қилайлик, учала вектор a, b, c бирор умумий O нуқтага келтирилганда, уларнинг ўринлари шакл 168 даги каби бўлсин. Бу векторларда параллелепипед ясаймиз; a ва b векторларда ясалган параллелограмнинг юзи

$$|[ab]|$$

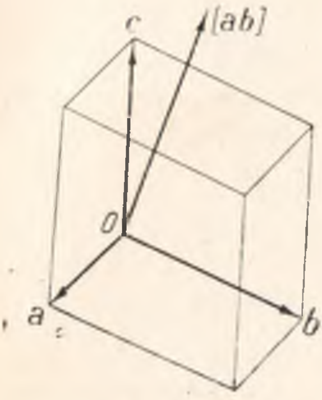
бўлади. Иккинчи томондан $[ab]$ вектор ҳалиги параллелограмнинг текислигига перпендикуляр бўлгани учун c векторни $[ab]$ векторнинг йўналишига проекциясини олиб, параллелепипеднинг баландлигини ҳосил қилиш мумкин.

Натижада

$$v = [ab]\,c \qquad (2)$$

аралаш кўпайтма a, b ва c векторларда ясалган параллелепипеднинг ҳажмини ифода қилади.

a, b ва c векторлар ўнг система ташкил қилганда, бу кўпайтма мусбат ва акси ҳолда манфий бўлади. Шу билан бирга бу ерда a, b, c векторларни кўпайтириш тартибига диққат қилиш керак,чунки учала кўпайтувчидан иккитасининг ўринлари ўзаро алмаштирилса, кўпайтманинг ишораси тескари бўлади, масалан:



Шакл 168.

$$[ab]\,c = -[ba]\,c, \qquad (3)$$

бу эса ўтган параграфларда таъриф этилган векториал ва скаляр кўпайтмаларнинг хоссаларидан келиб чиқади.

Лекин a, b, c векторларни доиравий алмаштирганда (яъни a ни b га, b ни c га, c ни a га алмаштирганда) аралаш кўпайтма ўзгармайди, масалан:

$$[ab]\,c = [bc]\,a = [ca]\,b, \qquad (4)$$

чунки бундан асосий система ўзгармайди. Ҳақиқатда, масалан, a, b, c чап система ташкил этса, у ҳолда b, c, a ҳам чап система ташкил этади.

Агарда a, b, c векторлар компланар бўлса, бу ҳолда $[ab]$ вектор c векторга перпендикуляр бўлгани учун

$$[ab]\,c = 0; \qquad (5)$$

геометрия нуқтаи назаридан, албатта шундай бўлиши керак, чунки a, b, c векторлар компланар бўлганда параллелепипеднинг ҳажми нолга айланади.

Хусусий ҳолда учала вектордан иккитаси ўзаро тенг бўлса, у ҳолда аралаш кўпайтма нолга айланади, масалан:

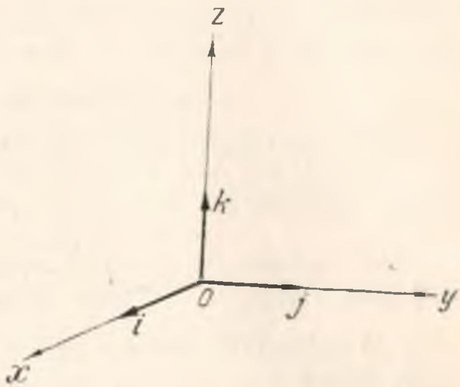
$$[aa]\,b = [ab]\,a = [ba]\,a = 0.$$

Аксинча, (5) тенглик бажарилганда параллелепипеднинг ҳажми нолга тенг бўлади ва бу ҳолда: ё учала вектордан бири нолга тенг ёки улардан иккитаси коллинеар ёки улар компланар бўлади.

§ 107. ВЕКТОРЛАРНИ ТЎҒРИБУРЧАКЛИ КООРДИНАТАЛАРДА ТАСВИРЛАШ

1. Биз § 102 да ҳар қандай векторни компланар булмаган учта векторга ажратиш мумкинлигини курсатган эдик. Бунга асосланиб, берилган векторни учта ўзаро перпендикуляр булган уқларга нисбатан олинган проекциялари орқали аниқлаб, векториал муносабатларни, уларнинг уқлардаги проекциялари орасидаги тегишли муносабатлар билан алмаштириш мумкин.

Бунинг учун $Oxyz$ тўғрибурчакли координаталар системасини олиб, унинг Ox, Oy, Oz ўқларини ёрдамчи векторлар орқали аниқлаймиз. Одатда ёрдамчи қилиб $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ бирлик векторлар қабул қилинади (шакл 169). Бу ҳолда



Шакл 169.

$$\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = 1; \quad (1)$$

$$\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{ki} = 0; \quad (2)$$

система ўнг булгани учун:

$$\boldsymbol{ijk} = 1 \quad (3)$$

$$[\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i},\ [\boldsymbol{ki}] = \boldsymbol{j}. \quad (4)$$

Энди фараз қилайлик, $\boldsymbol{a}$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари X, Y, Z бўлсин. Бу ҳолда:

$$\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos(\boldsymbol{a},\ x) \\ y &= a\cos(\boldsymbol{a},\ y) \\ z &= a\cos(\boldsymbol{a},\ z) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Аксинча $\boldsymbol{a}$ векторнинг ўқлардаги X, Y, Z проекциялари берилганда, буларнинг ёрдами билан $\boldsymbol{a}$ векторнинг узини аниқлаш мумкин. Ҳақиқатда, бу ҳолда $\boldsymbol{a}$ векторнинг йўналиши (6) дан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned}\cos(\boldsymbol{a},\ x) &= \frac{X}{a}\\ \cos(\boldsymbol{a},\ y) &= \frac{Y}{a}\\ \cos(\boldsymbol{a},\ z) &= \frac{Z}{a}\end{aligned}\right| \qquad (6')$$

X, Y, Z да ясалган тўғрибурчакли параллелепипеднинг диагонали эса a векторнинг узунлиги булади:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \qquad (7)$$

2. Курсатилган методга асосланиб, икки вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ нинг йиғиндисини ёки айирмасини уларнинг проекциялари орқали топамиз. Фараз қилайлик,

$$\boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{b} = X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k}$$

булсин. Бу ҳолда:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{i}(X_1 + X_2) + \boldsymbol{j}(Y_1 + Y_2) + \boldsymbol{k}(Z_1 + Z_2). \qquad (8)$$

Шу йул билан давом этганда икки $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторларнинг скаляр купайтмаси

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 \qquad (9$$

булади ва $\boldsymbol{a}$ вектор $\boldsymbol{b}$ векторга перпендикуляр булган ҳолда

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_3 = 0. \qquad (10)$$

3. Энди икки вектор $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ нинг векториал кўпайтмасини топамиз:

$$[\boldsymbol{ab}] = [(X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k})(X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k})] =$$
$$= [\boldsymbol{jk}](Y_1Z_2 - Z_1Y_2) + [\boldsymbol{ki}](Z_1X_2 - X_1Z_2) + [\boldsymbol{ij}](X_1Y_2 - Y_1X_2) =$$
$$= \boldsymbol{i}(Y_1Z_2 - Z_1Y_2) + \boldsymbol{j}(Z_1X_2 - X_1Z_2) + \boldsymbol{k}(X_1Y_2 - Y_1X_2), \qquad (11)$$

ёки детерминант куринишида

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Агар $\boldsymbol{a}$ ва $\boldsymbol{b}$ векторлар узаро параллель булса, у ҳолда

$$\boldsymbol{i}(Y_1Z_2 - Z_1Y_2) + \boldsymbol{j}(Z_1X_2 - X_1Z_2) + \boldsymbol{k}(X_1Y_2 - Y_1X_2) = 0$$

ёки

$$Y_1Z_2 - Z_1Y_2 = 0,$$

$$Z_1X_2 - X_1Z_2 = 0,$$
$$X_1Y_2 - Y_1X_2 = 0,$$

ёки, булардан

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2}, \qquad (13)$$

яъни *ўзаро параллель бўлган икки векторнинг мос проекциялари пропорционалдир.*

Саволлар ва масалалар

336. Вектор нима? Скаляр нима? Тенг векторларни таъриф қилинг.

337. Коллинеар векторлар деб қандай векторларни айтилади?

338. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ ва $\boldsymbol{d}$ векторлар берилган. Буларнинг йиғиндиси топилсин (векторларни исталганча олиб, шаклда кўрсатилсин).

339. Қай вақтда $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторлардан учбурчак тузиш мумкин?

340. Агар $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = \alpha\boldsymbol{a}' + \beta\boldsymbol{b}' + \gamma\boldsymbol{c}'$ бўлса, у ҳолда $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{c}'$ векторлар компланар бўлади. Бу исбот қилинсин.

341. Қандай шарт билан $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ ва $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади?

342. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ векторларни учбурчакнинг томонлари фараз қилиб, тригонометриянинг ушбу формуласи чиқарилсин:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$ косинуслар теоремаси

343. Ушбу тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин:

$$[\boldsymbol{ab}]^2 + (\boldsymbol{ab})^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2.$$

344. Ушбу тенгликнинг тўғрилиги исбот қилинсин:

$$[(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})] = 2\,[\boldsymbol{ab}].$$

345. Ҳар қандай учбурчакда учала баландлик ўзаро бир нуқтада кесишади. Буни векториал алгебра ёрдами билан исбот қилинсин.

Ўн бешинчи боб

ТЕКИСЛИК

§ 108. СИРТ ВА УНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

1. Фараз қилайлик, бизга учта ўзгарувчи координаталарни ўзаро боғлаган бир

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

тенглама берилган бўлсин. Биз бу тенгламани учала ўзгарувчидан ҳеч бўлмаганда бирига нисбатан ечиш мумкин деб фараз қиламиз. Масалан, тенгламани z га нисбатан ечиш мумкин бўлсин ва ечиш натижаси

$$z = \varphi(x, y) \tag{2}$$

бўлсин, бунда $\varphi(x, y)$ — бир қийматли ё кўп қийматли функция. Фараз қилайлик, бирор

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \quad y_1 \leqslant y \leqslant y_2$$

соҳада функция узлуксиз бўлсин. Буни эътиборга олиб

$$x = a, \ y = b$$

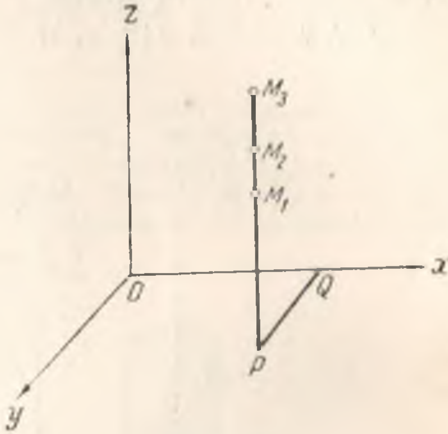
фараз қилинса, (2) га асосан z учун бир ёки бир неча қиймат белгиланади, масалан

$$z = c_1, \ c_2, \ c_3 \ldots \tag{3}$$

бўлсин. Натижада фазода $M_1(a, b, c_1)$, $M_2(a, b, c_2)$, $M_3(a, b, c_3)$,... нуқталар ҳосил бўлади ва буларнинг ҳаммаси Oz ўқига параллель бўлган чизиқда бўлади (шакл 170):

$$PM_1 = c_1,\ PM_2 = c_2,\ PM_3 = c_3, \ldots$$

Энди x ва y координаталарни берилган соҳада узлуксиз равишда ўзгартиб борамиз. Бу ҳолда (2) га мувофиқ, z нинг қийматлари ҳам узлуксиз равишда ўзгариб боради ва ҳалиги M_1, M_2, M_3,... нуқталар фазода бирор геометрик ўрин чизган булади. Бу геометрик ўрин сирт дейилади ва (2) ёки (1) тенглама бу сиртнинг тенгламаси дейилади. Бу сиртнинг келиб чиқишига қараганда, ундаги исталган нуқтанинг координаталари (2) ёки (1) тенгламани қаноатлантиради.



Шакл 170.

Энди фараз қилайлик, xOy координаталар системасига нисбатан бирор геометрик ўрин, яъни сирт берилган бўлсин. Бошқача айтганда геометрик ўринни ташкил этган нуқталарнинг хоссалари маълум фараз қилинади. Агар (шакл 171):

$$x = OQ,\ y = QP,\ z = PM$$

геометрик ўриннинг, яъни сиртнинг бирор ихтиёрий M нуқтасининг координаталари фараз қилинса, бу ҳолда M нуқтанинг ўрни, берилган геометрик ўринни тасвир қилган шартлар билан боғланган бўлади Иккинчи томондан M нуқтанинг ўрни x, y, z координаталари билан боғланган. Шунинг учун агар x, y, z ни берилган шартларга суяниб, ўзаро боғланса, бундан ҳосил бўлган $f(x, y, z) = 0$ боғланиш берилган геометрик ўриннинг, яъни сиртнинг тенгламаси бўлади. Тенгламадаги x, y, z — ўзгарувчи координаталар дейилади.

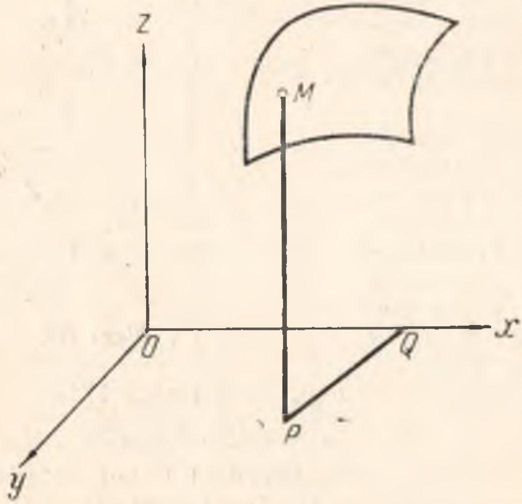
2. Энди фараз қилайлик, икки тенглама берилган бўлсин:

$$f(x,\ y,\ z) = 0 \text{ ва } \varphi(x,\ y,\ z) = 0. \tag{4}$$

Бу тенгламалардан ҳар бири, юқорида қилинган мулоҳазаларга мувофиқ, умуман бирон сиртни ифода қилади. Координаталари иккала тенгламани қаноатлантирган ҳар бир нуқта иккала сиртда ҳам бўлиши керак. Иккинчи томондан иккала сиртнинг умумий нуқталари уларнинг ӯзаро кесишган чизиғида бӯлади. Шунинг билан x, y, z *координаталари орасидаги икки тенглама умуман фазода чизиқ ифода қилади.* Агарда иккала сирт ӯзаро кесишса, чизиқни ҳақиқий ва кесишмаса — мавҳум фараз қилинади.

3. Энди фараз қилайлик x, y, z координаталар орасида учта тенглама берилган бӯлсин:

$$f(x, y, z) = 0, \ \varphi(x, y, z) = 0, \ \psi(x, y, z) = 0. \qquad (5)$$



Шакл 171.

Бу тенгламалардан бири қолган иккитасининг натижаси бӯлмаса ёки иккитаси бирининг натижаси бӯлмаса, у ҳолда булар фазода бир ёки бир неча нуқтани аниқлайди.

Ҳақиқатда, (5) тенгламалардан ҳар бири фазода бирор сиртни ифода қилади. Икки сиртнинг ӯзаро кесилишидан чизиқ ҳосил бӯлади ва бу чизиқ учинчи сиртни бир ёки бир неча нуқтада кесади. Бу нуқталарнинг координаталарини аниқлаш учун (5) тенгламаларни бирликда ечиш керак. Агарда учинчи тенглама аввалги икки тенгламанинг натижаси бӯлса, у ҳолда бу учинчи сирт аввалги икки сиртнинг ӯзаро кесишган чизиғи бӯйича ӯтиши маълум бӯлади.

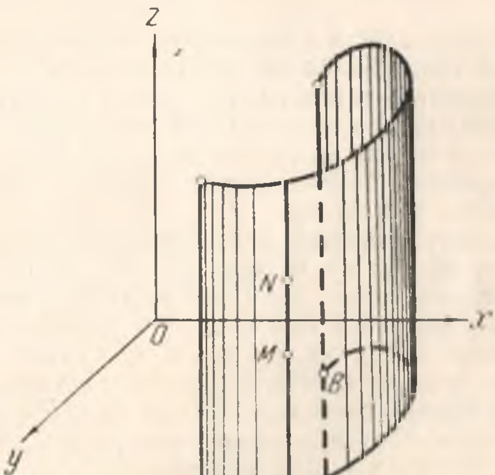
4. Фараз қилайлик x, y орасида бир тенглама берилган бўлсин:

$$f(x, y) = 0. \quad (6)$$

Бу тенглама xOy текислигида бирор AB чизиқни ифода қилади (шакл 172.) Бу чизиқда бирор P нуқтани оламиз. Фараз қилайлик, бу нуқтанинг координаталари ξ, η бўлсин P нуқта (6) чизиқда бўлгани учун унинг координаталари тенгламани қаноатлантиради:

$$f(\xi, \eta) = 0.$$

P нуқтадан Oz ўққа параллель чизиқ ўтказамиз. Бу ҳолда бу чизиқдаги ҳар бир: M, N,... нуқтанинг абсцисса ва ординатаси ξ, η бўлади, яъни (6) тенгламани қаноатлантиради, чунки унда z қатнашмайди. Агарда P нуқта AB чизиқ бўйича юрса, у ҳолда ξ, η ўзгаради ва P нуқтадан ўтган



Шакл 172.

тўғри чизиқ Oz ўқига параллель бўлиб ҳаракат қила бошлайди. Бунинг ҳаракати натижасида ҳосил бўлган сирт умуман **цилиндрик сирт** дейилади. AB — цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси ва цилиндрик сиртни чизувчи тўғри чизиқ унинг **ясовчиси** дейилади.

Шунинг билан умуман (6) тенглама: *фазода ясовчиси Oz ўқига параллель бўлган цилиндрик сиртни ифода қилади.* Шунга ўхшаш $\varphi(x, z) = 0$ тенглама — ясовчиси Oy ўқига параллель бўлган цилиндрик сиртни ва $\psi(y, z) = 0$ — ясовчиси Ox ўқига параллель бўлган цилиндрик сиртни ифода қилади.

Баъзи бир хусусий ҳолларда тенглама ҳеч қандай геометрик ўрин ифода қилмаслиги ҳам мумкин. Масалан, ушбу

$$x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 1 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

тенгламалардан биринчиси ҳеч қандай геометрик ўрин ифода қилмайди, чунки x, y, z нинг ҳеч қандай ҳақиқий қийматлари тенгламани қаноатлантирмайди ва иккинчиси бўлса, ёлғиз (0, 0,0) нуқтани ифода қилади.

§ 109. ТЕКИСЛИКИИНГ НОРМАЛЬ ТЕНГЛАМАСИ

Сиртнинг энг соддаси текисликдан иборат. Шунинг учун биз энг аввал текислик билан шуғулланамиз.

1. Текисликнинг тенгламасини тузиш — унинг фазодаги ўрнини аниқлаб турган элементлар (параметрлар) ёрдами билан текисликнинг ихтиёрий нуқтасига қарашли ўзгарувчи, координаталари орасидаги муносабатни тегишли тенглик билан ифода қилишдан иборатдир.

Фараз қилайлик, фазодаги текисликнинг координата ўқлари билан учрашган нуқталари A, B ва C бўлсин (шакл 173). Текисликнинг координата ўқларига нисбатан ўрни аниқ бўлсин учун координаталар бошидан унга перпендикуляр қилиб туширилган OP нинг узунлиги ва унинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари маълум бўлса кифоя қилади. Фараз қилайлик, $OP = p$ ва OP нинг Ox, Oy, Oz ўқларининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчаклари тартиб билан α, β, γ бўлсин.

Текисликдаги бирор M нуқтанинг координаталари: $x = OR$, $y = RN$, $z = MN$ бўлсин. M ва P нуқталарни ўзаро туташтириш натижасида $ORNMP$ синиқ чизиқ ҳосил бўлади ва бу синиқ чизиқнинг туташтирувчиси OP бўлади. Синиқ чизиқнинг ўқдаги проекцияси тўғрисидаги теорема бўйича ҳалиги синиқ чизиқнинг OP га проекцияси қуйидагича бўлади:

$$OR\cos\alpha + NR\cos\beta + NM\cos\gamma + MP\cos\frac{\pi}{2} = p,$$

ёки шаклга асосан

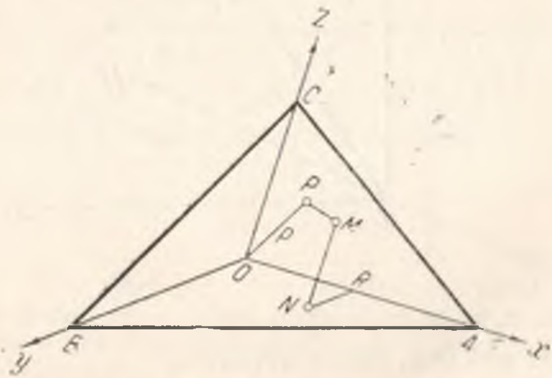
$$OR = x,\ NR = y,\ NM = z, \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

бўлгани учун текисликнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,} \qquad (1)$$

чунки M нуқта текисликнинг қайси ерида бўлса-да бу тенглама ўз кучини сақлайди.

Чиқарилган тенглама текисликнинг **нормаль тенгламаси** дейилади. Бу тенглама x, y, z га нисбатан биринчи даражали. Демак: *ҳар бир текислик ўзгарувчи x, y, z координаталарга нисбатан биринчи даражали тенглама билан ифода қилинади.*



Шакл 173.

2. Энди текислик тенгламасини векториал формада чиқарамиз. Фараз қилайлик, фазода бирор P текислик берилган бўлсин ва унга қутб қабул қилинган O нуқтадан туширилган перпендикуляр $ON = p$ бўлсин (шакл 174); $\boldsymbol{n}^\circ$ ни ON учун бирлик вектор фараз қиламиз. $M(\boldsymbol{r})$ текисликнинг бирор ихтиёрий нуқтаси бўлсин: $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}$.

Бунинг, яъни $\boldsymbol{r}$ нинг $\boldsymbol{n}^\circ$ йўналишига проекциясини тузамиз:

$$\text{пр.}_{n^\circ}\, \boldsymbol{r} = p$$

ёки скаляр кўпайтманинг таърифига мувофиқ:

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^\circ = p. \qquad (1)$$

1. Маълумки x, y, z га нисбатан биринчи даражали бўлган ҳар бир тенгламанинг умумий кўриниши:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

бўлади. Бу тенгламанинг иккала томонини ҳозирча аниқ бўлмаган бирор M сонга кўпайтирамиз:

$$MAx + MBy + MCz + MD = 0. \tag{2}$$

Бундаги M нинг шундай қийматини топиш керакки, (2) тенгламанинг коэффициентлари ушбу

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{3}$$

тенгламанинг коэффициентлари каби бўлсин, яъни:

$$MA = \cos\alpha, \quad MB = \cos\beta, \quad MC = \cos\gamma, \quad MD = -p \tag{4}$$

бўлишини талаб қиламиз.

Кейинги тенгликлардан аввалги учтасини квадратга кўтариб, сўнгра уларни қўшамиз:

$$M^2(A^2 + B^2 + C^2) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

бундан M учун қуйидаги қиймат аниқланади:

$$\boxed{M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \tag{5}$$

Демак, M шундай қийматга эга бўлган чоғда (2) ва (3) тенгламалар бир маъноли бўлади. M учун аниқланган ифодани (4) даги тенгликларга қўйилса α, β, γ ва p учун ушбу қийматлар аниқланади:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$p = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

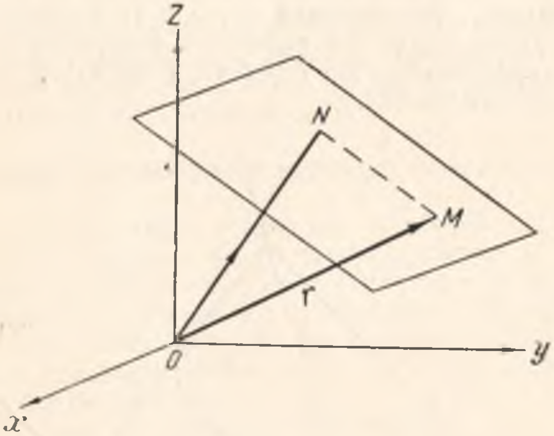
M нинг қиймати (2) га қўйилса, у тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

Бу муносабат фақат P текисликдаги нуқталарнигина қаноатлантиради. Шунинг учун (2) тенглама текисликнинг векториал формадаги тенгламаси бўлади.

Аксинча бу тенгламадан (1) тенгламага ўтиш мумкин. Ҳақиқатда, фараз қилайлик, вектор $\boldsymbol{n}^\circ$ нинг координата ўқлари билан ташкил этган бурчаклари α, β, γ бўлсин ва M нуқтанинг декарт координаталари x, y, z бўлсин. Бу ҳолда

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z,$$

$$\boldsymbol{n}^\circ = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma,$$



Шакл 174.

булар (2) га қўйилса, унинг кўриниши

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

бўлади, яъни яна юқорида декарт системасида чиқарилган тенглама ҳосил бўлади.

§ 110. ТЕКИСЛИКНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИ

Ўтган параграфда фазодаги ҳар бир текисликнинг биринчи даражали тенглама билан ифода қилинишини исбот қилинган эди. Энди бунинг тескарисини, яъни, ўзгарувчи x, y, z га нисбатан биринчи даражали бўлган ҳар бир тенгламанинг фазода бирор текислик ифода қилишини исбот қиламиз. Бунинг учун биринчи даражали тенгламани ўтган параграфда чиқарилган тенгламанинг кўринишига келтирилса кифоя қилади.

$$\boxed{\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0}$$

Кейинги тенгликлардаги $\pm$ ишораларидан қайси вақтда $+$ ва қайси вақтда $-$ бўлишини аниқлаш учун юқорида чиқарилган

$$MD=-p$$

ифодага мурожаат қиламиз. Бу ифодадаги p ҳамавақт мусбат саналади, чунки елғиз абсолют қиймати эътиборга олинади. Шунинг учун $MD<0$. Бу эса D нинг ишораси билан M нинг ишораси бир-бирига тескари бўлган ҳолдагина мумкин.

Шунинг билан натижада, ҳар қандай биринчи даражали тенгламани нормаль ҳолга келтириш мумкинлиги исбот қилинди. Демак, *ҳар бир x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали тенглама фазода бирор текисликни ифода қилади.*

Натижада, биринчи даражали ҳар қандай тенгламани текисликнинг нормаль тенгламасига келтириш қуйидагича бўлади:

$$Ax+By+Cz+D=0$$

тенгламани нормаль ҳолга келтириш учун унинг иккала томони

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

га кўпайтирилади; M нинг ишораси тенгламанинг озод ҳади бўлган D нинг ишорасига тескари қилиб олинади.

M нинг бу хусусиятини эътиборга олиб, уни нормаль кўпайтувчи дейилади.

Мисол. $2x-6y+9z-11=0$ тенгламани нормаль ҳолга келтирилсин.

Қоида бўйича энг аввал нормаль кўпайтувчини топамиз:

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{4+36+81}}=\pm\frac{1}{11};$$

берилган тенгламада $D=-11$ бўлгани учун M нинг ишораси $+$ бўлади:

$$M=\frac{1}{11}.$$

Бу сонга, берилган тенгламанинг иккала томони кўпайтирилса, унинг нормаль кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{2}{11}x - \frac{6}{11}y + \frac{9}{11}z - 1 = 0$$

демак:

$$\cos\alpha = \frac{2}{11}, \quad \cos\beta = -\frac{6}{11}, \quad \cos\gamma = \frac{9}{11}, \quad p = 1.$$

2. Энди масалани векториал формада ечамиз. Фараз қилайлик, x, y, z ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{6}$$

тенглама берилган бўлсин. Тенгламадаги A, B, C коэффициентларни $\boldsymbol{n}$ векторнинг координата ўқлардаги проекциялари фараз қиламиз, яъни

$$\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}. \tag{7}$$

$M(\boldsymbol{r})$ нуқтанинг ўзгарувчи радиус-вектори

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{8}$$

Бу ҳолда (6) тенгламани

$$\boldsymbol{rn} + D = 0 \tag{9}$$

векториал формада ёзиш мумкин.

Фараз қилайлик, n — вектор n нинг узунлиги бўлсин. (9) Тенгламанинг иккала томони $\pm n$ га бўлинса,

$$\boldsymbol{r}\frac{\boldsymbol{n}}{\pm n} \pm \frac{D}{n} = 0,$$

бундаги ишоралардан шундайини оламизки,

$$\frac{D}{\pm n} = -p < 0 \tag{10}$$

бўлсин; агар $\frac{\boldsymbol{n}}{n} = \boldsymbol{n}^\circ$ фараз қилинса,

$$\boldsymbol{rn}^\circ = p, \tag{11}$$

бу эса текисликнинг нормаль тенгламаси; $\pm\frac{1}{n}$ (9) тенгламанинг нормаль кўпайтувчисидан иборат, чунки бунга кўпайтириш натижасида бу тенглама нормаль формага келади; n нинг узунлиги бўлса (7) га мувофиқ

$$n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,. \tag{12}$$

$\boldsymbol{n}$ вектор текисликнинг йўналтирувчи вектори дейилади.

§ 111. ТЕКИСЛИКНИНГ УМУМИЙ ТЕНГЛАМАСИНИ ТЕКШИРИШ

Энди текислик тенгламасининг баъзи хусусий ҳолларини текширамиз. Текисликнинг умумий тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

эди. Хусусий ҳолларда тенгламанинг A, B, C, D коэффициентларидан баъзилари нолга тенг бўлиши мумкин. Масалан:

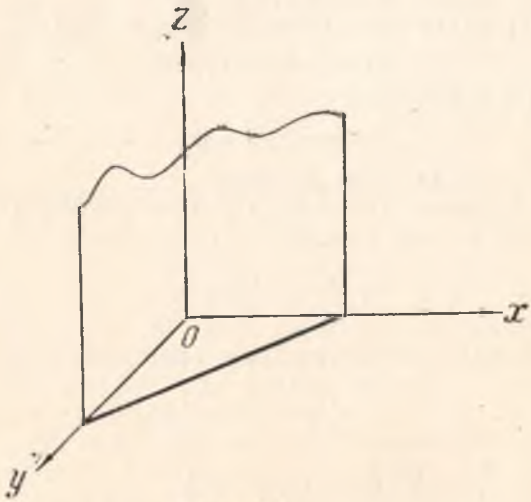
1) $D = 0$ бўлса, тенгламанинг кўриниши

$$Ax + By + Cz = 0 \tag{2}$$

бўлади ва координаталари $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ бўлган нуқта бу тенгламани қаноатлантиради. Демак, бу ҳолда (2) текислик координаталар бошидан ўтади.

2) $C = 0$ бўлса, (1) тенгламанинг кўриниши

$$Ax + By + D = 0 \tag{3}$$



Шакл 175.

бўлади. Бу тенглама xOy текисликда тўғри чизиқ ифода қилади; z нинг ўзгариши натижасида бу тўғри чизиқдан Oz ўқига *параллель текислик* ҳосил бўлади (шакл 175).

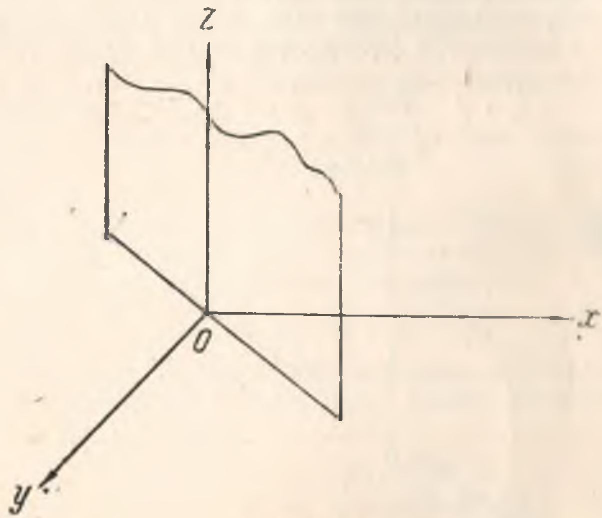
Шунга ўхшаш $B = 0$ бўлганда $Ax + Cz + D = 0$ тенглама Oy ўқига параллель текисликни ифода қилади ва $A = 0$ бўлганда $By + Cz + D = 0$ тенглама Ox ўқига параллель текисликни ифода қилади.

Умуман, *агар текислик тенгламасида учала координаталардан бири булмаса, у ҳолда текислик шу қатнашмаган координатага тегишли уққа параллель булади.*

3) Тенгламанинг коэффициентларидан иккитаси, масалан $D = 0$ ва $C = 0$ бӯлса, (1) тенгламанинг кӯриниши

$$Ax + By = 0 \tag{4}$$

бӯлади. $D = 0$ бӯлганда текислик координаталар бошидан ӯтар эди; $C = 0$ бӯлганда текислик Oz ӯқига параллель бӯлади. Демак, (4) текислик Oz ӯқидан ӯтади (176).



Шакл 176.

Шунга ӯхшаш $B = 0$ ва $D = 0$ бӯлса, тенгламанинг кӯриниши $Ax + Cz = 0$ бӯлади ва бу текислик Oy ӯқидан ӯтади ва $A = 0$, $D = 0$ бӯлса, $By + Cz = 0$ ва бу текислик Ox ӯқидан ӯтади.

Умуман, *текислик тенгламасида озод ҳад ва ӯзгарувчи координаталардан бири бӯлмаса, у текислик шу қатнашмаган координатага тегишли уқдан утади.*

4) Агар ӯзгарувчи координаталар олдидаги коэффициентлардан иккитаси, масалан, $A = 0$ ва $B = 0$ бӯлса, (1) тенгламанинг кӯриниши

$$Cz + D = 0 \tag{5}$$

бӯлади, ёки буни z га нисбатан ечганда:

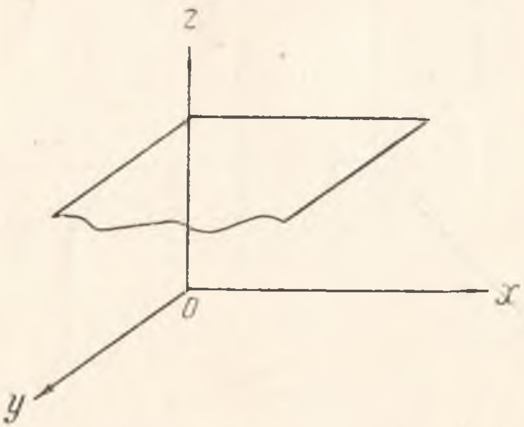
$$z = -\frac{D}{C}, (C \neq 0)$$

бўлади. Буига қараганда (5) текисликнинг ҳамма нуқталари xOy текислигидан тенг узоқликда бўлади, ёки бошқача қилиб айтганда, (5) текислик xOy текисликка параллель бўлади (шакл 177).

Шунга ўхшаш $By + D = 0$ текислиги xOz текислигига ва $Ax + D = 0$ текислиги yOz текислигига параллель бўлади.

Умуман, *агар текислик тенгламасида ўзгарувчи координаталардан иккитаси бўлмаса, у текислик шу қатнашмаган координаталарга тегишли текисликка параллель бўлади ва координата ўқларидан кесган кесмалари*

$$x = a = -\frac{D}{A}, \ y = b = -\frac{D}{B}, \ z = c = -\frac{D}{C} \text{ бўлади.}$$



Шакл 177.

5) Агар коэффициентлардан $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ бўлса, умумий тенгламанинг кўриниши

$$Ax = 0, \text{ ёки } x = 0 \ (A \neq 0)$$

бўлади. $B = 0$ ва $C = 0$ бўлганда текислик yOz текислигига параллель бўлар эди; иккинчи томондан $D = 0$ бўлганда текислик координаталар бошидан ўтади. Демак, $x = 0$ тенглама yOz текислигини ифода қилади. Шунга ўхшаш $y = 0$ тенглама xOz текислигини ва $z = 0$ тенглама xOy текислигини ифода қилади.

6) Агар учала координатанинг олдидаги коэффициентлари нолга айланса, яъни $A=0$, $B=0$, $C=0$ бўлса (1) тенгламанинг кўриниши $D=0$ ёки D га қисқартирилса, $1=0$ бўлади. Бу тенгламанинг маъноси бўлмаса-да, лекин унга шартли маъно берилади. Бу ҳолни текшириш учун текисликнинг координата ўқларидан кесган кесмаларининг ифодаларини оламиз:

$$a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}.$$

A B, C нолга интилганда a, b, c чексизликка интилади, яъни текисликнинг координата ўқларидаи кесган кесмалари чексизликка интилади. Шунинг учун $D=0$, *ёки* $1=0$ *тенглама чексиз узоқлашган текисликнинг тенгламаси* бўлади.

§ 112. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ЎТГАН ТЕКИСЛИКНИИГ ТЕИГЛАМАСИ

1. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M(x_1, y_1, z_1)$ бўлсин ва ундан ўтган текисликнинг тенгламасини тузиш талаб қилинсин. Изланган текисликнинг тенгламасини

$$Ax+By+Cz+D=0$$

фараз қиламиз. Бу текислик берилган нуқтадан ўтганда унинг коорднаталари бу тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,$$

ёки аввалги тенгликдан буни ҳадлаб айирсак,

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0. \qquad (1)$$

Бу тенглама берилган $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтган текисликниг тенгламаси бўлади, чунки $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтанинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради.

Бироқ, (1) тенгламада A, B, C коэффициентлари аниқланмай қолди. Бу эса табиий, чунки ёлғиз бир нуқта фазодаги текисликнинг ўрнини аниқлаб бера олмайди. Шунинг учун (1) тенглама $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтган ҳамма текисликларни ёки *текисликлар дастасини ифода қилади.*

2. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M_1(r_1)$ бўлсин. Агар изланган текисликни $\boldsymbol{n}$ векторга перпендикуляр фараз қилинса, бу ҳолда $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ ва $\boldsymbol{n}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки вектор $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ изланган текисликда ётади ва

вектор $\boldsymbol{n}$ ниит ўзи шу текисликка перпендикуляр. Шунинг учуи

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\,n=0. \tag{2}$$

Берилган $M_1(r_1)$ нуқтадаи ўтган текисликнинг векториал формадаги тенгламаси шуиинг ўзи бўлади. Бундан (1) теиг-ламага ўтиш учун

$$\boldsymbol{n}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$

фараз қилинса кифоя қилади.

§ 113. БЕРИЛГАН УЧ НУҚТАДАН ЎТГАН ТЕКИСЛИКНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

1. Фараз қилайлик, учта нуқта берилган бўлсин: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ва булардан ўтган текисликиинг тенгламасини тузиш талаб қилинсин. Изланган текисликнинг тенгламасини

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

фараз қиламиз.

Бу текислнк берилган уч нуқтадан ўтгаи ҳолда у нуқталарнинг координаталари (1) тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1+By_1+Cz_1+D=0,\\ Ax_2+By_2+Cz_2+D=0,\\ Ax_3+By_3+Cz_3+D=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгламалар A, B, C, D коэффициентларга нисбатан биринчи даражали бир жинсли теигламалар системасидан иборат. Бу системадан номаълумларни чиқариш натижасида, нолга тенг бўлган детерминант шаклида тенглама ҳосил бўлади (§ 12, 1-бўлнм):

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

Изланган текисликнинг тенгламаси шуннинг ўзи бўлади. Ҳақиқатда, бу тенглама x, y, z га нисбатан биринчи даражали; иккинчи томондан берилган нуқталардан ҳар бирининг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради.

Агар берилган уч нуқтадан ўтган (3) текислик бирор тўртинчи (x_4, y_4, z_4) нуқтадан ўтса, у ҳолда бу нуқтанинг координаталари (3) тенгламани қаноатлантириши лозим, яъни:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Бу тенглик тўрт нуқтанинг бир текисликда бўлиш шартини ифода қилади.

2. Энди талаб қилинган тенгламани векториал формада чиқарамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқталар $M_1(r_1)$, $M_2(r_2)$, $M_3(r_3)$ бўлсин.

Ўз-ўзидан равшанки,

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1$$

векторлар бизнинг текисликда бўлади. Шунинг учун уларнинг векториал кўпайтмаси: текисликка нормал бўлган вектор $\boldsymbol{n}$ дан иборат:

$$\boldsymbol{n} = [(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)(\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)]$$

демак, § 112 га мувофиқ изланган текисликнинг тенгламаси

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 [(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\ (\boldsymbol{r}_3 - \boldsymbol{r}_1)]) = 0.$$

бўлади.

§ 114. ТЕКИСЛИКНИНГ КЕСМАЛАР БЎЙИЧА ТЕНГЛАМАСИ

1. Текисликнинг фазодаги ўрни аниқ бўлиши учун унинг координата ўқларидан кесган кесмалари маълум бўлса кифоя қилади. Фараз қилайлик, текисликнинг координата ўқларидан кесган кесмалари:

$$OA = a,\ OB = b,\ OC = c$$

бўлсин (шакл 178).

Координаталар бошидан текисликка перпендикуляр қилиб $OP = p$ ни ўтказамиз. Фараз қилайлик, OP нинг координата ўқларининг мусбат йўналишлари билан ташкил қилган бур-

1020 Hamzo

чаклари α, β, γ бўлсин. Шаклга мувофиқ a, b ва c дан ҳар бирининг OP даги проекцияси OP нинг ўзи, яъни p бўлади. Шунинг учун:

$$p = a\cos\alpha,\ p = b\cos\beta,\ p = c\cos\gamma,$$

ёки булардан:

$$\cos\alpha = \frac{p}{a},\ \cos\beta = \frac{p}{b},\ \cos\gamma = \frac{p}{c};$$

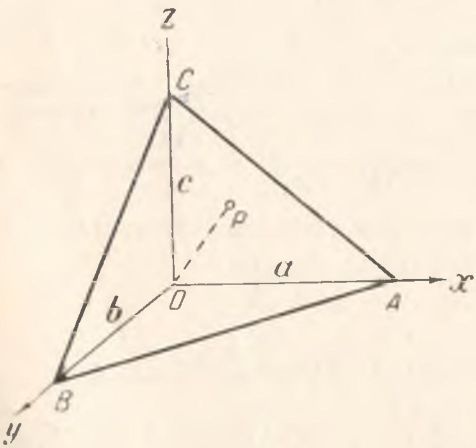
булар текисликнинг ушбу

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

тенгламасига қўйилса:

$$\frac{px}{a} + \frac{py}{b} + \frac{pz}{c} - p = 0,$$

ёки тенгламанинг иккала томонини p га бўлиб, сўнгра озод ҳадини ўнг томонга ўтказсак, тенгламанинг одатдаги кўриниши қуйидагича бўлади:



Шакл 178.

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \quad (1)$$

Тенгламадаги a, b, c нинг қийматлари алгебраик бўлиб, улар мусбат ва манфий бўлишлари мумкин.

2. Текисликнинг умумий тенгламаси бўлган ушбу

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (2)$$

тенгламанинг коэффициентларидан ҳеч бири нолга тенг бўлмаган ҳолда у тенгламани ҳамавақт (1) шаклга келтириш мумкин.

Бунинг учун тенгламанинг озод ҳади бўлган D ни ўнг томонга ўтказиб, сўнгра тенгламанинг иккала томонини $-D$ га бўламиз;

$$-\frac{Ax}{D} - \frac{By}{D} - \frac{Cz}{D} = 1.$$

ёки

$$-\frac{x}{\frac{D}{A}}-\frac{y}{\frac{D}{B}}-\frac{z}{\frac{D}{C}}=1,$$

демак:

$$a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}.$$

Масалан,

$$2x+3y-5z-7=0$$

тенгламани (1) шаклга келтириш учун -7 ни ўнг томонга ўтказиб, сўнгра тенгламанииг иккала томонини 7 га бўламиз:

$$2x+3y-5z=7,$$

$$\frac{2x}{7}+\frac{3y}{7}-\frac{5z}{7}=1,$$

ёки

$$\frac{x}{^7/_2}+\frac{y}{^7/_3}-\frac{z}{^7/_5}=1,$$

демак:

$$a={}^7/_2,\ b={}^7/_3,\ c=-{}^7/_5.$$

Бироқ текисликнинг ўқлардан кесган кесмаларини аниқлаш учун (2) тенгламада $y=0$, $z=0$ фараз қилинса, $Ax+D=0$ ва бундан

$$x=-\frac{D}{A}=a;$$

шунга ўхшаш $x=0$, $z=0$ фараз қилинса, $By+D=0$ ва бундан

$$y=-\frac{D}{B}=b;$$

$x=0$, $y=0$ фараз қилинса, $Cz+D=0$ ва бундан

$$z=-\frac{D}{C}=c.$$

3. Энди (1) тенгламани векториал формада ёзамиз. Текисликнинг координата ўқлари билан учрашган нуқталарининг радиус-векторларини

$$\boldsymbol{r}_1=a\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{r}_2=b\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{r}_3=c\boldsymbol{k}$$

Бу қийматлар (1) тенгликка қўйилса, қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \tag{2}$$

Икки текислик бир-бирини кесишганда умуман тўртта икки ёқли бурчак ҳосил бўлади. Булардан ҳар икки қарама-қарши бурчаклар ўзаро тенг бўлгани учун кейинги формулалардаги $\pm$ ишораларидан бири у бурчаклардан бирига ва қолгани унга қўшни бўлган бурчакка тегишлидир.

2. Иккала текислик ўзаро перпендикуляр бўлганда, яъни $\varphi = 90°$ бўлганда, $\cos\varphi = 0$ бўлади ва бу ҳолда (2) формуланинг сурати нолга айланади. Шунинг учун икки текисликнинг ўзаро перпендикуляр бўлиш шарти қуйидагича бўлади:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.} \tag{3}$$

Иккала текислик ўзаро параллель бўлганда уларга координаталар бошидан туширилган перпендикулярнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари бир-бирига умуман тенг бўлади, яъни

$$\cos\alpha = \pm\cos\alpha', \ \cos\beta = \pm\cos\beta', \ \cos\gamma = \pm\cos\gamma',$$

ёки буларнинг ўрнига ўз ифодалари қўйилса:

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Бу тенгликларнинг ҳар бири пропорция бўлгани учун уларни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\frac{A_1}{A_2} = \pm\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \pm\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ёки уч нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламасидан фойдаланилса (§ 113):

$$bc\boldsymbol{ri} + ca\boldsymbol{rj} + ab\boldsymbol{rk} = abc, \qquad (3)$$

чунки асосий координаталар векторларининг векториал кўпайтмаси қуйидагича бўлар эди:

$$[\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k},\ [\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i} \text{ ва ш. ў.},$$

ёки (3) нинг иккала томони abc га бўлинса,

$$\frac{\boldsymbol{ri}}{a} + \frac{\boldsymbol{rj}}{b} + \frac{\boldsymbol{rk}}{c} = 1. \qquad (3')$$

§ 115. ИККИ ТЕКИСЛИК ОРАСИДАГИ БУРЧАК

1. Фараз қилайлик, берилган текисликларнинг тенгламалари

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

бўлсин ва уларнинг орасидаги бурчакни аниқлаш талаб қилинсин.

Маълумки икки текислик орасидаги бурчак — уларга перпендикуляр икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакка тенг. Шунинг учун агарда координаталар бошидан биринчи текисликка туширилган перпендикулярнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ. иккинчи текисликка туширилган перпендикулярнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α', β', γ' ва изланган бурчакни φ фараз қилинса:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'. \qquad (1)$$

§ 110 да чиқарилган формулалар бўйича бу тенгликнинг ўнг томонидаги косинусларнинг ифодалари берилган тенгламаларнинг коэффициентлари орқали қуйидагича бўлади:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \qquad \cos\alpha' = \pm\frac{A_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \qquad \cos\beta' = \pm\frac{B_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \qquad \cos\gamma' = \pm\frac{C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \pm \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

ёки булардан

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \tag{4}$$

Демак, *икки текислик бир-бирига параллель бўлган ҳолда уларнинг ўзгарувчи координаталари олдидаги мос коэффициентлари пропорционал бўлиши шарт.*

Масалан, тенгламалари

$$x - 3y + 2z + 1 = 0,$$

$$4x - 12y + 8z - 7 = 0$$

бўлган икки текислик ўзаро параллель бўлади, чунки

$$\frac{1}{4} = \frac{-3}{-12} = \frac{2}{8}.$$

Ушбу тенгламалар билан ифода қилинган:

$$2x + y - 5z + 4 = 0,$$

$$3x + 4y + 2z - 1 = 0,$$

иккала текислик ўзаро перпендикуляр бўлади, чунки

$$2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + (-5) \cdot 2 = 0.$$

Мисол. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган икки текислик орасидаги бурчак аниқлансин:

$$2x - y + 2z - 5 = 0,$$

$$9x + 20y + 12z + 7 = 0.$$

Берилган тенгламаларнинг ўзгарувчи координаталари олдидаги коэффициентларни юқорида чиқарилган (2) формулага қўямиз:

$$\cos\varphi = \pm \frac{2 \cdot 9 - 1 \cdot 20 + 2 \cdot 12}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{9^2 + 20^2 + 12^2}} =$$

$$= \pm \frac{18 - 20 + 24}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{625}} = \pm \frac{22}{3 \cdot 25} = \pm \frac{22}{75}.$$

φ икки қийматга эга: агарда бурчаклардан бирини φ_1 фараз қилинса, иккинчиси $180^\circ - \varphi_1$ бўлади.

3. Энди икки текислик орасидаги бурчакни векториал формада тузамиз. Юқорида қилингаи мулоҳазаларга асосан икки текислик орасидаги бурчак у текисликларга тегишли йўналтирувчи векторлар (нормаллар) орасидаги бурчакка тенг. Йўналтирувчи векторлардан бирини $\boldsymbol{n}$ ва иккинчисини $\boldsymbol{n}'$ фараз қилиб, уларнинг скаляр кўпайтмасини тузамиз:

$$\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}' = nn' \cos\varphi,$$

бунда φ бурчаги $\boldsymbol{n}$ ва $\boldsymbol{n}'$ векторларнинг орасидаги бурчак. Бу тенгликдан $\cos\varphi$ ни аниқлаймиз:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}')}{nn'} \qquad (5)$$

Бу формуладан қайтиб (2) формулага ўтиш мумкин. Ҳақиқатда, фараз қнлайлик, берилган текисликларинг умумий тенгламалари

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

бўлсин; бу текисликларнинг йўналтирувчи векторлари қуйидагича бўлади:

$$\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{n}' = A_1\boldsymbol{i} + B_1\boldsymbol{j} + C_1\boldsymbol{k}.$$

Булар (5) га қўйилса, унинг кўриниши

$$\cos\varphi = \frac{AA_1 + BB_1 + CC_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

бўлади, яъни ҳамон юқорида чиқарилган формуланинг ўзи келиб чиқади.

§ 116. УЧ ТЕКИСЛИКНИНГ КЕСИШГАН НУҚТАСИ

Фараз қилайлик, уч текислик берилган бўлсин:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (2)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (3)$$

Бу текисликларнинг кесишган нуқтаси учала текислик учун умумий бўлганидан, унинг координаталари бу тенгламаларни қаноатлантириши лозим. Демак, кесишган нуқтанинг координаталарини аниқлаш учун берилган тенгламаларни бирликда ечишга тўғри келади. Уларни ечганда изланган нуқтанинг координаталари қуйидагича бўлади:

$$x=\frac{M}{\Delta}, \quad y=\frac{N}{\Delta} \quad z=\frac{P}{\Delta}, \tag{4}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad M=\begin{vmatrix} -D & B & C \\ -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix};$$

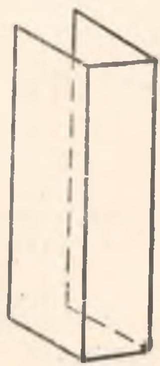
$$N=\begin{vmatrix} A & -D & C \\ A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad P=\begin{vmatrix} A & B & -D \\ A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \end{vmatrix}.$$

Бу ерда асосан ушбу ҳолларни учратиш мумкин:

1) Детерминант Δ нолга тенг бўлмаса, учала текислик аниқ нуқтада кесишиб, учёқли бурчак ташкил қилади ва у нуқтанинг координаталари (4) тенгликлар ёрдами билан топилади.

2) Детерминант $\Delta=0$ ва M, N, P нолга тенг бўлмаса (ёки булардан ҳеч бўлмаганда бири нолга тенг бўлмаса), у ҳолда учала текислик чексизликда кесишади. Иккинчи томондан маълумки икки текислик кесишганда тўғри чизиқ ҳосил булади. Демак, учала текисликнинг чексизликда кесилиши учун, улардан иккитасининг кесишган чизиғи учинчисига параллель бўлиши керак. Бу эса учала текислик бир тўғри чизиққа параллель бўлган ҳолда бўлади (масалан, учёқли призманинг ёқлари, шакл 179). Хусусий ҳолда булардан иккитаси ўзаро параллель бўлиши мумкин (шакл 180). Бу эса берилган тенгламалардан иккитасида ўзгарувчи координаталарнинг мос коэффициентлари пропорционал бўлган ҳолда бўлади.

Шакл 179.



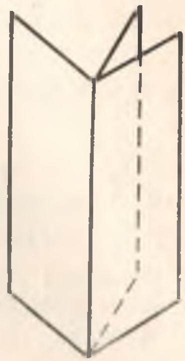
Шакл. 180.

3) Агар $\Delta=0$, $M=0$, $N=0$, $P=0$ бўлса, бу ҳолда

$$x=\frac{0}{0}, \quad y=\frac{0}{0}, \quad z=\frac{0}{0},$$

яъни бу ҳолда учала текисликнинг кесишгани аниқ эмас — кесишган нуқталари чексиз кўп. Бу нуқталар тўғри чизиқда ёки текисликда бўлиши мумкин.

Кесишган нуқталарнинг бир тўғри чизиқда бўлиши учун, текисликларни ифода қилган тенгламалардан бири қолган иккитасининг натижаси бўлиши лозим (чунки тўғри чизиқ икки текисликнинг кесишганидан ҳосил бўлади). Бу эса учинчи текислик биринчи икки текисликнинг кесишган чизиғидан ўтганда бўлади (шакл 181). Хусусий ҳолда учала текислик ўзаро параллель бўлиши мумкин.



Шакл 181.

Учала текисликнинг кесишган нуқталари бир текисликда бўлган ҳолда учала текисликнинг геометрик маъноси бирдай бўлади, бу эса учала тенгламадан иккитаси учинчисининг натижаси бўлган ҳолда бўлади ва буларнинг ҳар бири учинчисининг ҳар икки томонини бирор кўпайтувчига кўпайтиришдан ҳосил бўлади. Бу уч текислик бирлашиб, бир текислик ташкил қилганини кўрсатади. Шу билан бирга бу ҳолда

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1} = \frac{D}{D_1}$$

ва

$$\frac{A}{A_2} = \frac{B}{B_2} = \frac{C}{C_2} = \frac{D}{D_2}$$

бўлиши лозим. Бу ерда биз шу ҳолларни текшириш билан чекланишни лозим топамиз.

§ 117. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАН ТЕКИСЛИККА ПАРАЛЛЕЛЬ БЎЛГАН ТЕКИСЛИК

1. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M(x_1, y_1, z_1)$ ва берилган текисликнинг тенгламаси

$$A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \qquad (1)$$

бўлсин. Маълумки $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламаси

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \qquad (2)$$

§ 118. БЕРИЛГАН ИККИ НУҚТАДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАН ТЕКИСЛИККА ПЕРПЕНДИКУЛЯР БЎЛГАН ТЕКИСЛИК

Берилган нуқталар (x_1, y_1, z_1) ва (x_2, y_2, z_2) ва берилган текислик

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

бўлсин. Фараз қилайлик, изланган текислик

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (2)$$

бўлсин. Бу текислик иккала нуқтадан ўтиши керак. Шунинг учун берилган нуқталарнинг координаталари (2) ни қаноатлантириши лозим, яъни

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \qquad (3)$$

$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0. \qquad (4)$$

Изланган (2) текислик (1) текисликка перпендикуляр булгани учун

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = 0. \qquad (5)$$

(2), (3), (4) ва (5) тенгликлардан A, B, C ва D номаълумларни чиқариш натижасида нолга тенг бўлган дитерминант шаклида ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Мисол. (0, 0, 0) ва (1, 2, — 1) нуқтадан ўтиб, $2x - 6y + 5z - 8 = 0$ текисликка перпендикуляр бўлган текисликнинг тенгламаси топилсин.

(6) га асосан изланган текисликнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки детерминант иккинчи йўл элементларига нисбатан минорларга ажратилса:

бўлади. Бу текислик берилган (1) текисликка параллель бўлганда уларнинг ўзгарувчи координаталари олдидаги мос коэффициентлари пропорционал бўлади, яъни:

$$\frac{A}{A_1} = \frac{B}{B_1} = \frac{C}{C_1},$$

ёки бу нисбатларнинг умумий қиймати k фараз қилинса,

$$A = A_1 k, \ B = B_1 k, \ C = C_1 k$$

бўлади ва буларни (2) га қўйиб k га қисқартилса, ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$A_1 (x - x_1) + B_1 (y - y_1) + C_1 (z - z_1) = 0. \tag{3}$$

Изланган текисликнинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади, чунки у қўйилган иккала шартни ҳам таъмин қилади.

Масалан, (2, — 3,5) нуқтадан ўтиб, ушбу

$$4x + 3y - 7z + 15 = 0$$

текисликка параллель бўлган текисликнинг тенгламаси

$$4(x - 2) + 3(y + 3) - 7(z - 5) = 0,$$

ёки

$$4x + 3y - 7z + 36 = 0$$

бўлади. Бу текислик (2, — 3,5) нуқтадан ўтади, чунки у бу нуқтанинг координаталарини қаноатлантиради ва берилган текисликка параллель, чунки мос коэффициентлари пропорционал.

2. Энди масалани векториал формада ечамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M_1(r_1)$ ва берилган текисликнинг тенгламаси

$$\boldsymbol{rn} = p \tag{4}$$

бўлсин; $M(r)$ изланган текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу ҳолда:

$$\overrightarrow{M_1 M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1. \tag{5}$$

Иккинчи томондан $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)$ вектор берилган текисликка параллель бўлгани учун у $\boldsymbol{n}$ векторга перпендикуляр бўлади, демак,

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{n} = 0. \tag{6}$$

Изланган текисликнинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади, чунки бу тенглама шу текисликнинг исталган нуқтасини қаноатлантиради.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки детерминантнинг биринчи устун элементлари устига учинчи устуннинг мос элементлари қўшилса:

$$\begin{vmatrix} x+z, & y, & z \\ 0, & 2, & -1 \\ 7, & -6, & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки учинчи устун элементларини 2 га кўпайтириб, иккинчи устуннинг мос элементларига қўшилса:

$$\begin{vmatrix} x+z, & y+2z, & z \\ 0, & 0, & -1 \\ 7, & 4, & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки иккинчи йўл элементларига нисбатан минорларга ажратилса:

$$\begin{vmatrix} x+z, & y+2z \\ 7, & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

бундан

$$4x - 7y - 10z = 0.$$

Бу текислик (0, 0, 0) ва (1, 2, — 1) нуқтадан ўтади ва берилган текисликка перпендикуляр, чунки:

$$4.0 - 7\cdot 0 - 10\cdot 0 = 0,$$

$$4\cdot 1 - 7\cdot 2 - 10\cdot(-1) = 0,$$

$$4\cdot 2 - 7\cdot(-6) - 10\cdot 5 = 0.$$

§ 119. НУҚТА БИЛАН ТЕКИСЛИК ОРАСИДАГИ МАСОФА

1. Фараз қилайлик, берилган текисликнинг тенгламаси

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (1)$$

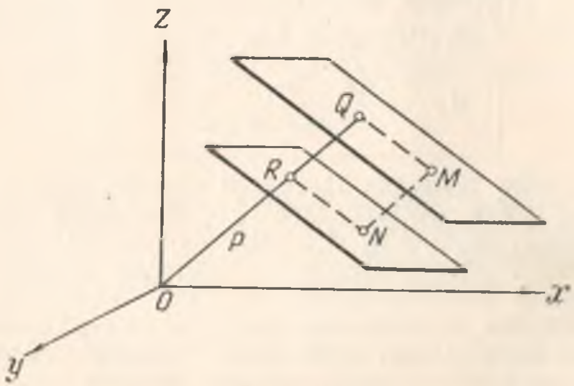
ва берилган нуқта $M(x_1, y_1, z_1)$ бўлсин (шакл 180). Берилган M нуқта билан берилган текислик орасидаги масофа у нуқтадан текисликка туширилган $MN = d$ перпендикулярдан иборат. M нуқтадан берилган текисликка параллель қилиб иккинчи текислик ўтказамиз. Сўнгра координаталар бошидан берилган текисликка перпендикуляр қилиб OR ни ўтказамиз. Бу перпендикулярнинг иккинчи текислик билан кесишган нуқтаси Q бўлсин. Албатта, иккала текислик ўзаро параллель бўлгани учун OQ иккинчи текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.

Маълумки, (1) тенгламадаги p координаталар бошидан биринчи текисликка туширилган перпендикулярдан иборат. Шунинг учун:

$$OQ = OR + RQ = OR + MN,$$

ёки

$$OQ = p + d.$$



Шакл 182.

Иккинчи томондан OQ нинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари α, β, γ бўлгани учун иккинчи текисликнинг тенгламаси

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - (p + d) = 0$$

бўлади. Бу текислик $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтгани учун

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - (p + d) = 0,$$

бундан

$$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p.$$

M нуқта берилган текисликнинг иккинчи томонида бўлган ҳолда $(p + d)$ ўрнида $(p - d)$ бўлади ва бу ҳолда

$$d = -(x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p),$$

шунинг учун умуман

$$d = \pm (x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p). \qquad (2)$$

Биз бу формулани чиқаришда берилган текисликнинг тенгламасини нормаль фараз қилган эдик. Агар текисликнинг тенгламаси умумий бўлса, яъни

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

бўлса, энг аввал уни нормаль ҳолга келтирамиз:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0,$$

сўнгра (2) га асосланиб, ўзгарувчи координаталарнинг ўрнига берилган нуқтанинг координаталарини қўямиз. Шунинг билан бу ҳолда формуланинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\boxed{d = \pm\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \tag{3}$$

Нуқта билан текислик орасидаги масофа мусбат саналади, шунинг учун формуладаги $\pm$ ишоралардан шундайини олиш керакки, натижада d мусбат бўлсин. Шунинг билан:

Нуқтанинг текисликкача масофасини топиш учун у текисликнинг тенгламасини нормаль ҳолга келтириб, унинг ўзгарувчи координаталари ўрнига берилган нуқтанинг координаталари қўйилади. Чиққан натижанинг абсолют қиймати изланган масофа бўлади.

Масалан, (3, — 6, 7) нуқта билан $2x - y + 2z - 5 = 0$ текислик орасидаги масофа қоида бўйича бундай бўлади:

$$d = \pm\frac{2\cdot 3 + 1\cdot 6 + 2\cdot 7 - 5}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{21}{3} = 7.$$

Масала. Берилган икки текисликдан тенг масофада бўлган геометрик ўрин топилсин.

Фараз қилайлик, берилган текисликларнинг тенгламалари

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

бўлсин. Изланган геометрик ўриннинг бирор (x, y, z) нуқтасидан биринчи текисликкача масофаси

$$\pm\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

ва иккинчи текисликкача масофаси

$$\pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

булади. Масаланинг шарти буйича бу масофалар узаро тенг булиши керак. Демак:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = 0, \tag{4}$$

яъни изланган геометрик урин иккита текисликдан иборат; буларнинг ҳар бири берилган текисликларнинг кесишган чизиғи орқали утади.

2. Энди масалани векториал формада ечамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M_1(r_1)$ ва берилган текислик тенгламаси

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^\circ = p \tag{5}$$

булсин.

Берилган M_1 нуқтадан текисликка перпендикуляр туширамиз. Фараз қилайлик бу перпендикулярнинг текислик билан учрашган нуқтаси M_2 булсин. M_2M_1 кесманинг узунлигини d билан белгилаймиз. Изланган масофа ана шунинг узи булади.

$\overrightarrow{M_2M_1}$ ва $\boldsymbol{n}^\circ$ векторлар берилган текисликка нормал булгани учун, улар коллинеардир, демак:

$$M_2M_1 = \delta \boldsymbol{n}^\circ \tag{6}$$

ёки

$$|\delta| = d$$

чунки $\boldsymbol{n}^\circ$ бирлик вектордан иборат.

Шунинг билан, агарда M_1 нуқта берилган текисликдан координаталар бошига нисбатан қарама-қарши томонда булса $\delta = d$ ва акс ҳолда $\delta = -d$ булади. Шаклга мувофиқ (шакл 183):

$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{n}^\circ \tag{7}$$

M_2 нуқта текисликда ётгани учун бу радиус-вектор (5) тенгламани қаноатлантириши керак, демак

$$(\boldsymbol{r}_1 - \delta \boldsymbol{n}^\circ)\, \boldsymbol{n}^\circ = p$$

ёки

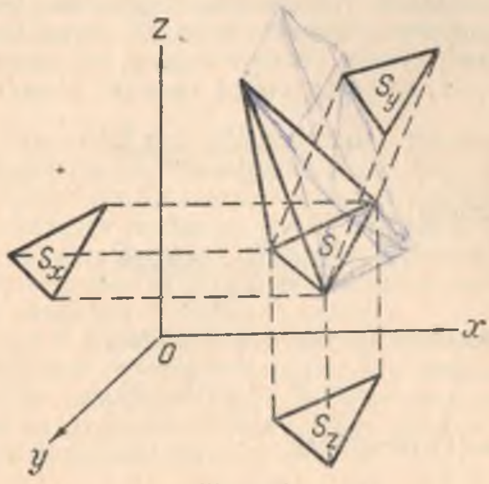
$$\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{n}^\circ - \delta = p,$$

Берилган M, N ва P нуқталардан ўтган текисликнинг тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

бўлади. Бу тенгламанинг чап томонидаги детерминантни унинг биринчи йўл элементларига нисбатан ёйилса

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$



Шакл 184.

бўлади, бунда

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \quad D = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Иккинчи томондан тетраэдр асосининг координата текисликларига проекциялари қуйидагича бўлади:

бундан

$$\delta = \boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^{\circ} - p \tag{8}$$

Агарда координатали ифодага ўтиш лозим бўлса, бу ҳолда нуқтанинг координаталарини x, y, z фараз қилиб

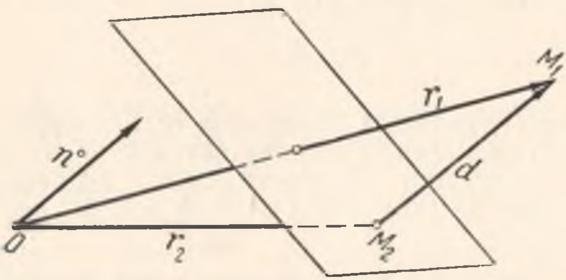
$$\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{n}^{\circ} = \cos\alpha\cdot\boldsymbol{i} + \cos\beta\cdot\boldsymbol{j} + \cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$$

ифодаларни (8) га қўямиз. Натижада

$$\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$$

бўлади.



Шакл 183

§ 120. ТЕТРАЭДРНИНГ ҲАЖМИ

Фараз қилайлик, тетраэдрнинг бурчаклари учларининг координаталари:

$$M(x_1, y_1, z_1),\ N(x_2, y_2, z_2),\ P(x_3, y_3, z_3),\ Q(x_4, y_4, z_4)$$

бўлсин. Маълумки тетраэдрнинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг. Буни назарда тутиб, берилган нуқталарнинг аввалги учтасидан ўтган текисликни тетраэдрнинг асоси ва бу нуқталар билан чегараланган учбурчакнинг юзини S фараз қиламиз. Агарда 4-нуқтадан тетраэдрнинг асосига туширилган перпендикулярнинг узунлиги H ва тетраэдрнинг ҳажми V фараз қилинса (шакл 184),

$$V = \frac{1}{3}SH. \tag{1}$$

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}; \quad S_y = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$S_z = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

демак,

$$A = 2S_x, \quad B = 2S_y, \quad C = 2S_z \tag{4}$$

Тетраэдрнинг баландлиги H унинг A_4 учидан асосига, яъни (2) текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлигидан иборат. Буни топиш учун (2) текисликни нормал ҳолга келтириб, сўнгра ўзгарувчи x, y, z координаталарнинг ўрнига x_4, y_4, z_4 қўйилса кифоя қилади, демак:

$$H = \frac{Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ёки (4) га асосан

$$H = \frac{Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D}{2\sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}}. \tag{5}$$

§ 92 да чиқарилган формулага мувофиқ

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}. \tag{6}$$

(5) ва (6) ни (1) га қўйсак,

$$V = \frac{1}{6}(Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D)$$

ёки (2) га мувофиқ

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

§ 121. ҚИСҚАРТМА БЕЛГИЛАШ МЕТОДИНИНГ ТЕКИСЛИКЛАРГА ТАТБИҚИ

1. Қисқартма белгилаш методи тўғрисида баъзи умумий мулоҳазалар ва бу методнинг текисликдаги тўғри чизиқларга нисбатан татбиқи устида § 31 да сўз бўлган эди.

Энди бу ерда шу методнинг текисликка нисбатан татбиқи тўғрисида баъзи асосий тушунчалар билан таништириб ўтамиз. Фараз қилайлик,

$$U_1 = 0 \text{ ва } U_2 = 0 \tag{1}$$

тенгламалардан ҳар бири бирор текисликнинг қисқартма тенгламаси бўлсин. Агар k ни бирор ихтиёрий ўзгармас сон фараз қилинса, бу ҳолда

$$U_1 - kU_2 = 0 \tag{2}$$

тенглама ҳам текислик ифода қилади. Иккинчи томондан (1) тенгламаларни қаноатлантирадиган ҳар бир (x, y, z) нуқта (2) тенгламани ҳам қаноатлантиради, яъни бундай нуқталар (1) текисликларга нисбатан умумий бўлади, ёки бундай нуқталар (1) текисликларнинг ўзаро кесишган чизиғида бўлади. Демак, (2) тенглама: (1) текисликларнинг кесишган чизиғидан ўтган текисликни ифода қилади.

Параметр k аниқ бўлмай, унга ҳар қандай қиймат бериш мумкин бўлгани учун, (2) тенглама (1) текисликларнинг ўзаро кесишган чизиғидан ўтган текисликлар системасини ёки **текисликлар дастасини** ифода қилади.

2. Энди фараз қилайлик,

$$\varphi_1 = 0 \text{ ва } \varphi_2 = 0 \tag{3}$$

тенгламалардан ҳар бири бирор текисликнинг нормаль тенгламаси бўлсин, яъни:

$$\varphi_1 = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1,$$

$$\varphi_2 = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 - p_2.$$

Фараз қилайлик,

$$\varphi_1 - k\varphi_2 = 0 \tag{4}$$

(3) текисликларнинг ўзаро кесишган чизиғидан ўтган бирор аниқ текисликнинг тенгламаси бўлсин. Бу ҳолда параметр k оддий геометрик маънога эгадир. Ҳақиқатда, агар $M(x_1, y_1, z_1)$ (4) текисликдаги бирор нуқтанинг координаталари бўлса, у ҳолда

$$k=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{x_1\cos\alpha_1+y_1\cos\beta_1+z_1\cos\gamma_1-p_1}{x_1\cos\alpha_2+y_1\cos\beta_2+z_1\cos\gamma_2-p_2}.$$

Бу касрнинг сурат ва махражи эса (4) текисликдаги $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтанинг берилган (3) текисликларгача масофаларидан иборат, демак, (4) тенгламадаги параметр k шу масофаларнинг бир-бирига нисбатини ифода қилади.

3. Фараз қилайлик, $U_3=0$ (2) дастага, яъни ушбу

$$U_1-kU_2=0$$

дастага қарашли бирор текислик бўлсин. Бу ҳолда бу тенгламадаги k параметрга шундай қиймат бериш мумкинки, U_1-kU_2 ва U_3 кўп ҳадлар бир-биридан фақат ўзгармас кўпайтувчи билан фарқланиши мумкин, яъни

$$U_1-kU_2=\lambda U_3$$

ёки

$$U_1-kU_2-\lambda U_3=0$$

Бу айният $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$ текисликларнинг бир тўғри чизиқдан ўтиш шартидан иборатдир. Агарда бу айниятнинг иккала томонини бирор k_1 ўзгармас сонга кўпайтириб, сўнгра

$$-kk_1=k_2 \text{ ва } -\lambda k_1=k_3$$

фараз қилинса,

$$k_1U_1+k_2U_2+k_3U_3=0 \tag{5}$$

бўлади. Бу айният учала

$$U_1=0,\ U_2=0,\ U_3=0$$

текисликларнинг бир тўғри чизиқдан ўтиш шартидан иборатдир.

4. Энди фараз қилайлик, $U_1=0$, $U_2=0$, $U_3=0$ текисликлар бир тўғри чизиқдан ўтмасин. Бу ҳолда k ва λ нинг аниқмас қийматларида

$$U_1-kU_2-\lambda U_3=0 \tag{6}$$

тенглама: берилган учала текисликнинг ўзаро учрашган нуқтасидан ўтувчи чексиз кўп текисликларни ифода қилади. Бир нуқтадан ўтувчи бу текисликлар **текисликлар боғи** дейилади.

Агарда $U_4=0$ (6) текисликлар боғига қарашли бирор текислик бўлса, бу ҳолда k ва λ нинг шундай қийматлари бўладики, у қийматларда $U_1-kU_2-\lambda U_3$ ва U_4 кўп ҳадлар бир-биридан фақат ўзгармас кўпайтувчи билан фарқланиши мумкин, яъни

$$U_1 - kU_2 - \lambda U_3 = \mu U_4,$$

ёки

$$U_1 - kU_2 - \lambda U_3 - \mu U_4 = 0,$$

ёки бу айниятнинг иккала томонини бирор k_1 ўзгармас сонга кўпайтириб, сўнгра

$$-kk_1 = k_2, \quad -\lambda k_1 = k_3, \quad \mu k_1 = k_4$$

фараз қилинса,

$$k_1U_1 + k_2U_2 + k_3U_3 + k_4U_4 = 0 \tag{7}$$

бўлади. Бу айният

$$U_1 = 0, \ U_2 = 0, \ U_3 = 0, \ U_4 = 0$$

текисликларнинг бир нуқтадан ўтиш шартидан иборатдир (k_1, k_2, k_3, k_4 сонлар бир вақтда нолга тенг бўлмаслиги керак). Фараз қилайлик,

$$U_1 = A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$U_2 = A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$U_3 = A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0,$$
$$U_4 = A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0$$

бўлсин. Бу ҳолда x, y, z нинг ҳар қандай қийматларида (7) нинг мавжуд бўлиши учун

$$k_1A_1 + k_2A_2 + k_3A_3 + k_4A_4 = 0,$$
$$k_1B_1 + k_2B_2 + k_3B_3 + k_4B_4 = 0,$$
$$k_1C_1 + k_2C_2 + k_3C_3 + k_4C_4 = 0,$$
$$k_1D_1 + k_2D_2 + k_3D_3 + k_4D_4 = 0$$

бўлиши керак, ёки булардан (§ 12):

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0;$$

демак, тўрт текисликнинг бир нуқтадан ўтиши учун у текисликларни ифода қилувчи тенгламаларнинг коэффициентларидан тузилган детерминант нолга тенг бўлиши лозим.

Саволлар ва масалалар

346. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган текисликларнинг координата ўқларига нисбатан ўринлари кўрсатилсин:

$$1)\ 2x+3y-5z=0,\quad 2)\ 3x-2y+5=0,$$

$$3)\ 3y-5z=0,\quad 4)\ 5x+3=0,$$

$$5)\ y+1=0,\quad 6)\ z+3y=0.$$

347. $(2, -3, 5)$ нуқтадан ўтиб, xOz текисликка параллель бўлган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

348. $(-5, 2, 8)$ нуқтадан ўтиб, yOz текисликка параллель бўлган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

349. $(5, -1, 7)$ нуқтадан ва Ox ўқидан ўтган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

350. $(-3, 2, -5)$ нуқтадан ва Oy ўқидан ўтган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

351. $(1, -5, -2)$ нуқтадан ва Oz ўқидан ўтган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

352. Ушбу тенгламалар билан ифода қилинган текисликларнинг координата ўқларидан кесган кесмалари аниқлансин:

$$1)\ 2x+3y-5z-6=0;\quad 3)\ 6x-y+z-8=0;$$

$$2)\ 5x+2y+z+7=0;\quad 4)\ x+2y-z+5=0.$$

353. Ушбу тенгламалар нормаль ҳолга келтирилсин:

$$1)\ 2x-y+2z-5=0;\quad 3)\ 3x+4z-5x+7=0;$$

$$2)\ x-y+4z-3=0;\quad 4)\ 5x+4y-2z+1=0.$$

354. $x+2y-2z+15=0$ текисликнинг координаталар бошидан масофаси ва бу мусофа йўналишининг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари аниқлансин;

355. $(5, 0, -2)$ нуқтадан ўтган ҳамма текисликларнинг тенгламаси тузилсин.

356. $(1, 3, 5)$ нуқтадан ўтган текислик координата ўқларининг мусбат томонларини кесиб, ўзаро тенг кесмалар ҳосил қилади. Бу текисликнинг тенгламаси тузилсин.

357. $A(0, 0, 0)$, $B(4, 3, 1)$ ва $C(0, 1, 2)$ нуқталардан ўтган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

358. $(6, 4, -5)$ нуқтадан ўтиб, Ox ва Oy ўқлардан кесган кесмалари 3 ва 2 бўлган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

359. $2x + y + 4z + 2 = 0$ ва $x + 2y - z + 1 = 0$ текисликлар орасидаги бурчак аниқлансин.

360. $(1, 4, 5)$ нуқтадан ўтиб, $7x + 4y + 2z - 30 = 0$ текисликка параллель бўлган текислик топилсин.

361. $(1, 2, 2)$ нуқтадан ўтиб, $x - 2y + z = 0$ текисликка параллель бўлган текислик топилсин.

362. $(5, -4, 3)$ ва $(-2, 1, 8)$ нуқталардан ўтиб xOy текисликка перпендикуляр бўлган текислик топилсин.

363. $(8, -3, 1)$ ва $(4, 7, 2)$ нуқталардан ўтиб, ушбу

$$3x + 5y - 7z - 21 = 0$$

текисликка перпендикуляр бўлган текислик топилсин.

364. $2x + y + 2z - 15 = 0$ текисликнинг $(5, -2, 8)$ нуқтадан қанча узоқликда тургани аниқлансин.

365. $(3, 0, 1)$ нуқта билан ушбу

$$x - 2y + z - 1 = 0$$

текислик орасидаги масофа топилсин.

366. Узаро параллель бўлган ушбу:

$$x - 2y + z - 1 = 0$$

ва

$$2x - 4y + 2z - 1 = 0$$

текисликлар орасидаги масофа топилсин.

367. *Oz* ўқида шундай нуқта топилсинки, у нуқта

$$16x - 12y + 15z - 9 = 0, \qquad 12x + 9y - 20z - 19 = 0$$

текисликлардан тенг масофада бўлсин.

368. Бурчаклари учларнинг координаталари $(2, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$ ва $(-1, -1, -2)$ бўлган учбурчакнинг юзи топилсин.

369. Бурчаклари учларининг координаталари $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ва $(1, 0, 0)$ бўлган тетраэдрнинг ҳажми аниқлансин.

370. $2x - 3y + z - 2 = 0$ ва $x - y - z - 3 = 0$ текисликларнинг кесишган чизиғидан ўтиб, ушбу $2x - 3z - 7 = 0$ текисликка перпендикуляр бўлган текислик топилсин.

371. $(2, 3, 5)$ нуқтадан ва ушбу

$$x - y + 2z + 1 = 0, \qquad x + y + z - 5 = 0$$

текисликларнинг кесишган чизиғидан ўтган текислик топилсин.

372. Ушбу текисликлар кесишган нуқта топилсин:

$$x + 2y - 23 = 0,\ 3x + 4z - 57 = 0,\ 5y + 6z - 94 = 0.$$

373. $x+y-4=0$ ва $x+z-3=0$ текисликлар орасидаги бурчакни тенг иккига бўлувчи текисликлар топилсин.

374. Текисликнинг тенгламаси берилган:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda=0;$$

$\lambda\neq 0$, α, β ва γ нинг ҳар бири нолга интилади. Текисликнинг ўрни қандай ўзгаради?

375. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўртта текисликнинг бир нуқтадан ўтиш шарти топилсин:

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0,\\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1&=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2&=0,\\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3&=0. \end{aligned}$$

376. *Ох* ўқидан шундай текислик ўтказилсинки, унга (5, 1, 6) нуқтадан туширилган перпендикулярнинг узунлиги 4 бирликка тенг бўлсин.

377. Ушбу текисликларнинг кесишган нуқталари аниқлансин:

$$1)\ \left.\begin{aligned} x+2y-z-2&=0,\\ 3x-y+z-3&=0,\\ x+2y+z-4&=0. \end{aligned}\right| \qquad 2)\ \left.\begin{aligned} x-3y-2z+1&=0,\\ 3x+5y-11&=0,\\ 2x+y-z-5&=0. \end{aligned}\right\}$$

378. Тетраэдрнинг қирраларига перпендикуляр бўлиб, уларни тенг иккига бўлувчи текисликлар ўзаро бир нуқтада кесишади. Буни исбот қилинсин.

Ўн олтинчи боб

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

§ 122. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1. Маълумки икки текисликнинг ўзаро кесишганидан тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Шунинг учун фазодаги тўғри чизиқни ушбу иккита биринчи даражали тенгламалар системаси билан ифода қилиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Иккала тенгламанинг ўзгарувчи координаталари олдидаги мос коэффициентлар ўзаро пропорционал бўлмаган ҳолда бу система фазода тўғри чизиқ ифода қилади.

Одатда (1) системанинг шаклини ўзгартиб, ишлатиш учун бирмунча қулай қилиб ёзилади. Бунинг учун биринчи тенгламани B' га ва иккинчини B га кўпайтириб, сўнгра биринчи натижадан иккинчи натижани айириб оламиз:

$$\begin{gathered} AB'x + BB'y + B'Cz + B'D = 0, \\ A'Bx + BB'y + BC'z + BD' = 0, \\ (AB' - A'B)x + (B'C - BC')z + B'D - BD' = 0, \end{gathered}$$

бундан

$$x = \frac{BC' - B'C}{AB' - A'B} z + \frac{BD' - B'D}{AB' - A'B},$$

ёки

$$\frac{BC' - B'C}{AB' - A'B} = m, \quad \frac{BD' - B'D}{AB' - A'B} = a$$

фараз қилинса

$$x = mz + a. \tag{2}$$

Шунга ўхшаш (1) системадан x ни чиқариб, чиққан тенглама y га нисбатан ечилса,

$$y = nz + b \tag{3}$$

кўринишда тенглама ҳосил бўладики, бундаги n ва b (1) системанинг коэффициентлардан тузилган ўзгармас сонлардан иборат. Шунинг билан (1) система ўрнига ушбу система ҳосил бўлди:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= mz + a \\ y &= nz + b \end{aligned}} \tag{4}$$

Фазодаги тўғри чизиқ тенгламаларининг бир кўриниши шундан иборат. Энди бу тенгламалардаги: m, n, a ва b коэффициентларнинг геометрик маъноларини текширамиз. (4) тенгламалардан биринчисида y ва иккинчисида x қатнашмагани учун улардан биринчиси Oy ўқига ва иккинчиси Ox ўқига параллель бўлган текисликни ифода қилади. Шунинг учун (4) тенгламалардан биринчисини xOz текисликда ва иккинчисини yOz текисликда қараган вақтда улардан биринчиси фазодаги тўғри чизиқнинг xOz текисликдаги проекциясини ва иккинчиси yOz текисликдаги проекциясини ифода қилади.

Бунга қараганда биринчи тенгламадаги m тўгри чизиқнинг xOz текисликдаги проекциясининг бурчак коэффициентини, яъни фазодаги тўғри чизиқ проекциясининг Oz ўқи билан ташкил қилган бурчагининг тангенсини ифода қилади. Шунга ўхшаш иккинчи тенгламадаги n тўғри чизиқнинг yOz текисликдаги проекциясининг бурчак коэффициентини, яъни фазодаги тўғри чизиқ проекциясининг Oz ўқи билан ташкил қилган бурчагининг тангенсини ифода қилади.

Агар (4) да $z = 0$ фараз қилинса, $x = a$, $y = b$ бўлади. Бу эса тўғри чизиқнинг $(a, b, 0)$ нуқтадан ўтганлигини кўрсатади. Бу нуқта xOy текисликда булгани учун у фазодаги тўғри чизиқнинг xOy текислиги билан учрашган нуқтаси бўлади. Бу нуқтани тўғри чизиқнинг xOy текисликдаги **изи** дейилади.

Иккинчи томондан a ва b нинг ҳар бирини алоҳида олганда a: фазодаги тўғри чизиқнинг xOz текисликдаги проекциясининг Ox ўқидан кесган кесмасини ифода қилади.

Шунга ўхшаш b: фазодаги тўғри чизиқнинг yOz текисликдаги проекциясининг Oy ўқидан кесган кесмасини ифода қилади.

Мисол. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган тўғри чизиқнинг тенгламалари $x = mz + a$ ва $y = nz + b$ шаклига келтирилсин:

$$x + 3y - 5z + 10 = 0,$$
$$2x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

Берилган тенгламалардан y ни йўқ қиламиз; бунинг учун биринчи тенгламани 2 га ва иккинчини 3 га кўпайтириб, сўнгра уларни ҳадлаб қўшамиз:

$$2x + 6y - 10z + 20 = 0,$$
$$6x - 6y + 9z - 12 = 0,$$
$$8x - z + 8 = 0,$$

бундан

$$x = \frac{1}{8} z - 1.$$

Шунга ўхшаш иккала тенгламадан x ни йўқ қиламиз. Бунинг учун биринчи тенгламани 2 га кўпайтириб, сўнгра чиққанидан иккинчи тенгламани айириб оламиз:

$$2x + 6y - 10z + 20 = 0,$$
$$2x - 2y + 3z - 4 = 0.$$
$$8y - 13z + 24 = 0,$$

бундан

$$y = \frac{13}{8} z - 3.$$

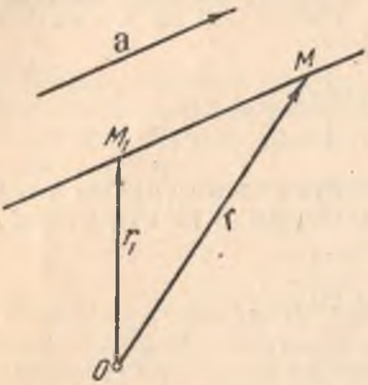
Шунинг билан берилган тенгламаларнинг одатдаги кўриниши бундай бўлади:

$$x = \frac{1}{8} z - 1,$$
$$y = \frac{13}{8} z - 3,$$

буларда:

$$m = \frac{1}{8},\ n = \frac{13}{8},\ a = -1,\ b = -3.$$

2. *Тўғри чизиқнинг векториал формадаги тенгламаси.* Фараз қилайлик, тўғри чизиқ M_1 (r_1) нуқтадан ўтган ва вектор $\boldsymbol{a}$ га параллель бўлсин. Тўғри чизиқда исталганча бирор M $(\boldsymbol{r})$ нуқтани оламиз. Бу ҳолда шакл 185 га мувофиқ



Шакл 185.

$$\overrightarrow{M_1M} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1;$$

бу вектор $\boldsymbol{a}$ векторга коллинеар бўлгани учун

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda \boldsymbol{a},$$

бунда λ параметр бўлиб, унинг қиймати M нуқтанинг ўрнига боғлиқдир. Кейинги тенгликдан:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a}. \qquad (5)$$

Текисликдаги ёки фазодаги тўғри чизиқнинг тенгламаси шундан иборат. λ $-\infty$ дан $+\infty$ гача ўзгарганда вектор $\boldsymbol{r}$ нинг учи тўғри чизиқ чизиб беради.

§ 123. ТЎҒРИ ЧИЗИҚИНГ НОРМАЛЬ ТЕНГЛАМАЛАРИ

Тўғри чизиқнинг координата ўқларига нисбатан ўрнини аниқлаш учун унинг координата ўқлари билан ташкил қилган α, β, γ бурчаклари ва ундаги бирор A нуқтанинг a, b, c координаталари маълум бўлса кифоя қилади. Тўғри чизиқдаги бирор M (x, y, z) нуқта билан $A(a, b, c)$ нуқта орасидаги масофа d бўлсин (шакл 186). Проекция теоремаси бўйича (d нинг координата ўқларидаги проекциялари $x-a$, $y-b$, $z-c$ бўлгани учун):

$$x - a = d \cos \alpha,$$

$$y - b = d \cos \beta,$$

$$z - c = d \cos \gamma,$$

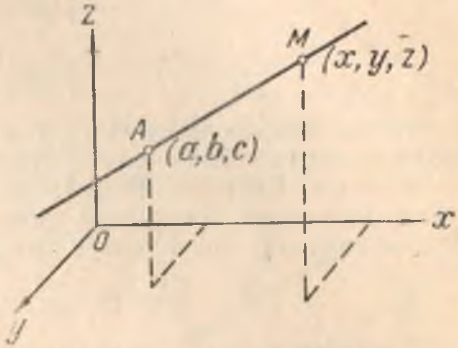
булардан

$$d = \frac{x-a}{\cos \alpha}, \quad d = \frac{y-b}{\cos \beta}, \quad d = \frac{z-c}{\cos \gamma}$$

ёки

$$\boxed{\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}} \qquad (1)$$

Бу тенгламалар (a, b, c) нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаларидан иборат, чунки улар x, y, z га нисбатан биринчи даражали бўлиб, берилган нуқтанинг (a, b, c) координаталарини қаноатлантиради; (1) тенгламалар тўғри чизиқнинг нормаль тенгламалари дейилади.



Шакл 186.

Тенгламалардан $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ни уларга пропорционал бўлган сонлар билан алмаштириш мумкин. Масалан, уларга пропорционал бўлган сонлар m, n, p бўлсин, яъни:

$$\frac{\cos\alpha}{m}=\frac{\cos\beta}{n}=\frac{\cos\gamma}{p}=k,$$

бунда тенг нисбатлар k ҳарфи билан ифода қилинди; булардан:

$$\cos\alpha=mk, \quad \cos\beta=nk, \quad \cos\gamma=pk, \qquad (2)$$

ёки буларни (1) га қўйиб, сўнгра k га қисқартилса (1) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p}} \qquad (3)$$

m, n, p берилганда (2) дан $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ни топиш мумкин. Бунинг учун (2) даги тенгликларнинг иккала томонларини квадратга кутариб, сўнгра уларни қўшамиз:

$$m^2k^2=\cos^2\alpha, \quad n^2k^2=\cos^2\beta, \quad p^2k^2=\cos^2\gamma,$$

$$k^2(m^2+n^2+p^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

бундан

$$k=\pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

бўлади. Бу чизиқ $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқтадан ўтганда унинг координаталари (1) тенгламаларни қаноатлантириши лозим, яъни

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{p}. \qquad (2)$$

(1) ни (2) га бўлинса, изланган тенгламалар келиб чиқади:

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}}. \qquad (3)$$

Бу тенгламалар берилган $A(x_1, y_1, z_1)$ ва $B(x_2, y_2, z_2)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқни ифода қилади, чунки булар x, y, z га нисбатан биринчи даражали бўлиб, ҳар икки нуқтанинг координаталарини қаноатлантиради. Масалан, $(-1, 3, -5)$ ва $(2, 1, 0)$ нуқталардан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламалари қуйидагича бўлади:

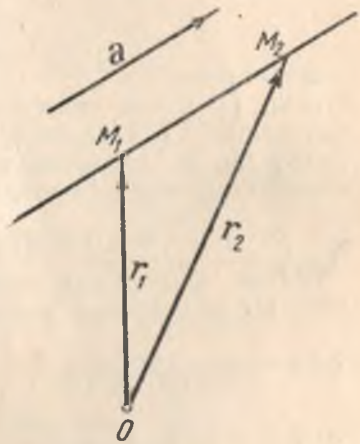
$$\frac{x+1}{2+1}=\frac{y-3}{1-3}=\frac{z+5}{0+5},$$

ёки

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+5}{5}.$$

Бу чизиқнинг берилган иккала нуқтадан ўтганлиги очиқ кўриниб туради.

2. Векториал формада. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқ M_1 (r_1) ва M_2 (r_2) нуқтадан ўтсин (шакл 187). Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторига $\overrightarrow{M_1 M_2}$ векторни қабул қиламиз, яъни:



Шакл 187.

$$\overrightarrow{M_1 M_2}=\boldsymbol{a}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1.$$

§ 122 даги (5) га мувофиқ:

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1) \qquad (4)$$

ёзиш мумкин. Қўйилган масаланинг векториал формада ечилиши шундан иборат.

(4) тенгламадан қайтиб (2) тенгламага ўтиш мумкин. Ҳақиқатан M_1 ва M_2 нуқталарнинг координаталари (x_1, y_1, z_1) ва (x_2, y_2, z_2) бўлсин; $(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$ векторнинг координата ўқларидаги проекциялари m, n, p бўлсин. Бу ҳолда:

ёки k учун аниқланган ифода (2) га қўйилса, ушбу формулалар келиб чиқади:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\beta &= \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},\\ \cos\gamma &= \pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.\end{aligned}\right| \tag{4}$$

Тўғри чизиқда мавжуд бўлган икки йўналишга қараб (4) формулаларда + ёки — олиш мумкин.

Мисол. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларининг косинуслари аниқлансин:

$$\frac{x-2}{12}=\frac{y-7}{20}=\frac{z-5}{9}.$$

Берилган мисолда: $m=12$, $n=20$, $p=9$. Буларни (4) га қўйиб, + ишора билан чегараланган ҳолда, изланган косинуслар қуйидагича бўлади:

$$\cos\alpha=\frac{12}{\sqrt{12^2+20^2+9^2}}=\frac{12}{25}=0{,}48$$

$$\cos\beta=\frac{20}{\sqrt{12^2+20^2+9^2}}=\frac{20}{25}=0{,}80,$$

$$\cos\gamma=\frac{9}{\sqrt{12^2+20^2+9^2}}=\frac{9}{25}=0{,}36,$$

ёки (минутлар билан чегараланганда):

$$\alpha=61^\circ19',\ \beta=36^\circ52',\ \gamma=18^\circ54'.$$

§ 124. ИККИ НУҚТАДАН ЎТГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1. Икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаларини тузамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқталардан бири $A(x_1, y_1, z_1)$ ва иккинчиси $B(x_2, y_2, z_2)$ бўлсин. Ўтган параграфда чиқарилган (3) га асосан $A(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламалари

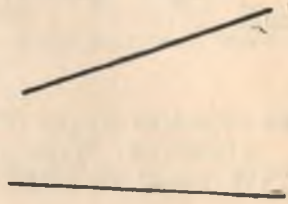
$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \tag{1}$$

рати нолга айланади. Шунинг учун икки тўғри чизиқнинг ўзаро перпендикуляр бўлиш шарти қуйидагича бўлади:

$$\boxed{mm_1 + nn_1 + pp_1 = 0} \tag{6}$$

Тенгламалардаги m, n, p, m_1, n_1, p_1 — тўғри чизиқларнинг йўналишларини аниқлайдиган бурчак коэффициентларидан иборат. Шунинг учун иккала тўғри чизиқнинг ўзаро параллеллик шарти қуйидагича бўлади:

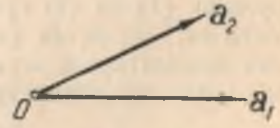
$$\boxed{\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}} \tag{7}$$



Мисол. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган тўғри чизиқлар орасидаги бурчак аниқлансин:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{5},$$

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-1}{2}.$$



Шакл 188.

Берилган мисолда: $m = 3$, $n = 2$, $p = 5$, $m_1 = 5$, $n_1 = 3$, $p_1 = 2$. Буларни (5) формулага қўйиб, плюс ишора билан чегаралансак:

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot5 + 2\cdot3 + 5\cdot2}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2}\cdot\sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2}} = \frac{31}{38},$$

бундан

$$\varphi = 35°20'.$$

2. Энди икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни векториал формада топамиз. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқларнинг тенгламалари

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda a_1, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \lambda a_2 \tag{9}$$

бўлсин. Бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчак эса $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ йўналтирувчи векторлар орасидаги бурчакка тенг (шакл 188). Шунинг учун § 115 да чиқарилган (5) формула бўйича исталган φ бурчакнинг векториал ифодаси қуйидагича бўлади:

$$x = x_1 + m\lambda,$$
$$y = y_1 + n\lambda,$$
$$z = z_1 + p\lambda,$$

ёки булардан λ ни чиқарилса

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

§ 125. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ БУРЧАК

1. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқларнинг тенгламалари

$$\frac{x - a}{m} = \frac{y - b}{n} = \frac{z - c}{p}, \tag{1}$$

$$\frac{x - a_1}{m_1} = \frac{y - b_1}{n_1} = \frac{z - c_1}{p_1} \tag{2}$$

бўлсин; (1) тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари α, β, γ ва (2) тўғри чизиқники α', β', γ' бўлсин. Бу ҳолда иккала тўғри чизиқ орасидаги φ бурчакнинг косинуси бундай бўлар эди:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\cdot\cos\alpha' + \cos\beta\cdot\cos\beta' + \cos\gamma\cdot\cos\gamma'. \tag{3}$$

Ўтган параграфда чиқарилган формулалар бўйича (3) даги косинусларнинг ифодалари бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \pm\frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, & \cos\alpha' &= \pm\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}},\\
\cos\beta &= \pm\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, & \cos\beta' &= \pm\frac{n_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}},\\
\cos\gamma &= \pm\frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, & \cos\gamma' &= \pm\frac{p_1}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}.
\end{aligned}\right| \tag{4}$$

Буларни (3) га қўйиш натижасида изланган φ бурчакнинг косинуси учун ушбу формула келиб чиқади:

$$\boxed{\cos\varphi = \pm\frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\cdot\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}}} \tag{5}$$

Иккала тўғри чизиқ ўзаро перпендикуляр бўлганда $\varphi = 90^\circ$ ва $\cos\varphi = 0$ бўлгани учун, бу ҳолда (5) формуланинг су-

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 a_2|}{a_1 a_2}. \tag{10}$$

Эслатма. Икки тўғри чизиқнинг кесишганидан ҳосил бўлган икки турли бурчакдан бирини φ фараз қилинса, иккинчиси $\pi - \varphi$ булади.

§ 126. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ПАРАЛЛЕЛЬ БЎЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1. Фараз қилайлик, берилган тўгри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \tag{1}$$

ва берилган нуқта $M(x_1, y_1, z_1)$ бўлсин.

Изланган тўғри чизиқ $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтгани учун унинг тенгламалари

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \tag{2}$$

бўлади. (1) ва (2) тўғри чизиқлар ўзаро параллель булгани учун m_1, n_1, p_1 ни уларга пропорционал булган m, n, p билан алмаштириш мумкин. Шунинг учун изланган тўғри чизиқнинг тенгламалари бундай бўлади:

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}. \tag{3}$$

2. Энди масалани векториал формада ечамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M_1(\boldsymbol{r}_1)$ ва берилган вектор $\boldsymbol{a}$ бўлсин. Агарда $M(\boldsymbol{r})$ тўғри чизиқдаги бирор ихтиёрий нуқта бўлса, у ҳолда вектор $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1$ вектор $\boldsymbol{a}$ га коллинеар бўлиши керак, яъни

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1 = \lambda \boldsymbol{a},$$

бунда λ — ўзгарувчи параметр. Бу параметрни йўқотиш учун ҳалиги тенгламанинг иккала томонини $\boldsymbol{a}$ га векторлаб кўпайтирамиз.

$$[(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\ \boldsymbol{a}] = 0,$$

ёки

$$[\boldsymbol{r}\boldsymbol{a}] = [\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{a}].$$

Исталган тўғри чизиқнинг векториал формадаги тенгламаси шундан иборат.

§ 127. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАН ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ПЕРПЕНДИКУЛЯР БЎЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқларнинг тенгламалари

$$\frac{x-a_1}{m_1}=\frac{y-b_1}{n_1}=\frac{z-c_1}{p_1}, \tag{1}$$

$$\frac{x-a_2}{m_2}=\frac{y-b_2}{n_2}=\frac{z-c_2}{p_2} \tag{2}$$

ва берилган нуқта $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ бўлсин. Изланган тўғри чизиқ $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтадан ўтгани учун унинг тенгламалари

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \tag{3}$$

бўлади. Бу чизиқ (1) ва (2) тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлиши керак. Шунинг учун:

$$mm_1+nn_1+pp_1=0,$$
$$mm_2+nn_2+pp_2=0,$$

ёки булардан (детерминант назариясига қаранг):

$$\frac{m}{n_1p_2-n_2p_1}=\frac{n}{m_2p_1-m_1p_2}=\frac{p}{m_1n_2-m_2n_1}$$

бўлгани учун, (3) тенгламаларнинг кўринишлари қуйидагича бўлади:

$$\frac{x-x_1}{n_1p_2-n_2p_1}=\frac{y-y_1}{m_2p_1-m_1p_2}=\frac{z-z_1}{m_1n_2-m_2n_1}. \tag{4}$$

Бу тўғри чизиқнинг берилган $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтадан ўтиши очиқдан-очиқ кўриниб туради. Иккинчи томондан у (1) ва (2) тўғри чизиқларга перпендикуляр, чунки:

$$m_1\,(n_1p_2-n_2p_1)+n_1\,(m_2p_1-m_1p_2)+p_1\,(m_1n_2-m_2n_1)=0,$$
$$m_2\,(n_1p_2-n_2p_1)+n_2\,(m_2p_1-m_1p_2)+p_2\,(m_1n_2-m_2n_1)=0.$$

2. Энди масалани векториал формада ечамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M_0\ (\boldsymbol{r}_0)$ ва берилган тўғри чизиқлар $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ векторларга параллель бўлсин; $\boldsymbol{a}$ шундай вектор бўлсинки, у вектор $\boldsymbol{a}_1$ ва вектор $\boldsymbol{a}_2$ нинг ҳар бирига перпендикуляр бўлсин. Бу ҳолда вектор $\boldsymbol{a}$ вектор $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]$ га параллель бўлади. Вектор $\boldsymbol{a}$ нинг узунлиги ихтиёрий бўлгани учун уни

$$\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]$$

қабул қилиш мумкин. Шунинг учун изланган тўгри чизиқнинг тенгламаси

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \lambda [\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] \tag{5}$$

булади.

§ 128. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН ТЕКИСЛИК ОРАСИДАГИ БУРЧАК

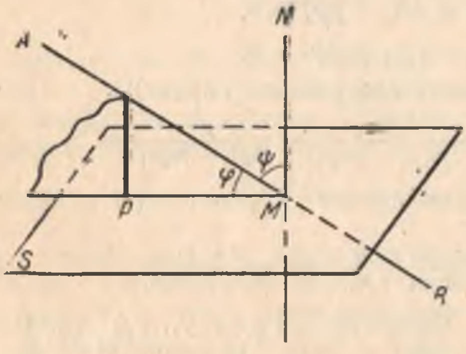
1. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \tag{1}$$

ва берилган текисликнинг тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

бўлсин. Маълумки тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак — тўғри чизиқ билан унинг шу текисликдаги проекцияси орасидаги бурчакка тенг.



Шакл 189.

Фараз қилайлик, AB тўғри чизиқ билан унинг S текисликдаги MP проекцияси орасидаги бурчак φ бўлсин (шакл 189). Тўғри чизиқнинг текислик билан учрашган M нуқтасига перпендикуляр ўтказиб, унинг билан AB нинг орасидаги бурчакни ψ фараз қилинса,

$$\sin \varphi = \pm \cos \psi \tag{3}$$

булади, чунки ψ бурчаги φ бурчагини $90°$ гача тулдирувчи бурчакдан иборат. Бунга қараганда $\cos \psi$ топилса, $\sin \varphi$ топилган булади; ψ бурчаги бўлса у икки тўғри чизиқ, яъни MN ва AB орасидаги бурчакдан иборат. Шунинг учун агар MN нинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ ва AB нинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α', β', γ' фараз қилинса,

$$\sin \varphi = \pm \cos \psi = \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' \tag{4}$$

булади ва бу формуланинг ўнг томонидаги косинусларнинг ифодалари қуйидагича булади:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha' = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta' = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma' = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Буларни (4) га қуйиш натижасида қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\sin\varphi = \pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}} \tag{5}$$

Туғри чизиқ текисликка параллель бўлганда $\varphi = 0°$(ёки π) ва $\sin\varphi = 0$ бўлади. Бу эса (5) формуланинг сурати нолга айланганда бўлади. Шунинг учун тугри чизиқнинг текисликка параллель бўлиш шарти қуйидагича бўлади:

$$\boxed{Am+Bn+Cp=0} \tag{6}$$

Туғри чизиқ текисликка перпендикуляр булган ҳолда у MN (нормал)га параллель бўлади. Шунинг учун тўғри чизиқнинг текисликка перпендикуляр булиш шарти ушбу тенглик билан ифода қилинади:

$$\boxed{\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}} \tag{7}$$

Мисол учун ушбу тенгламаларни оламиз:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{7},$$

$$3x+5y-3z+4=0.$$

Бу мисолда: $A=3$, $B=5$, $C=-3$, $m=2$, $n=3$, $p=7$. Шунинг учун:

$$3\cdot2+5\cdot3-3\cdot7=0,$$

яъни (6) шарт қаноатланади. Бу эса берилган тугри чизиқ билан берилган текисликнинг узаро параллеллигини кўрсатади.

Иккинчи мисол учун ушбу тенгламаларни оламиз:

қабул қилиш мумкин. Шунинг учун изланган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2] \tag{5}$$

бўлади.

§ 128. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН ТЕКИСЛИК ОРАСИДАГИ БУРЧАК

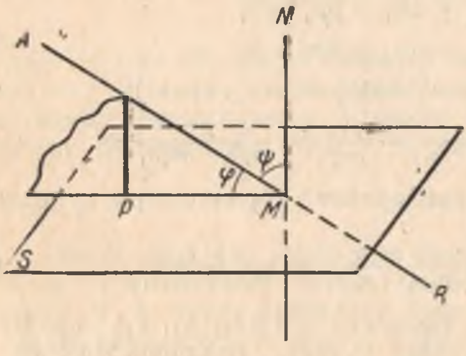
1. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \tag{1}$$

ва берилган текисликнинг тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

бўлсин. Маълумки тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак — тўғри чизиқ билан унинг шу текисликдаги проекцияси орасидаги бурчакка тенг.



Шакл 189.

Фараз қилайлик, AB тўгри чизиқ билан унинг S текисликдаги MP проекцияси орасидаги бурчак φ бўлсин (шакл 189). Тўғри чизиқнинг текислик билан учрашган M нуқтасига перпендикуляр ўтказиб, унинг билан AB нинг орасидаги бурчакни ψ фараз қилинса,

$$\sin \varphi = \pm \cos \psi \tag{3}$$

бўлади, чунки ψ бурчаги φ бурчагини 90° гача тўлдирувчи бурчакдан иборат. Бунга қараганда $\cos \psi$ топилса, $\sin \varphi$ топилган бўлади; ψ бурчаги бўлса у икки тўғри чизиқ, яъни MN ва AB орасидаги бурчакдан иборат. Шунинг учун агар MN нинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α, β, γ ва AB нинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларини α', β', γ' фараз қилинса,

$$\sin \varphi = \pm \cos \psi = \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \cos \beta \cdot \cos \beta' + \cos \gamma \cdot \cos \gamma' \tag{4}$$

булади ва бу формуланинг ўнг томонидаги косинусларнинг ифодалари қуйидагича булади:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\alpha' = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\beta = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta' = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}},$$

$$\cos\gamma = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma' = \pm\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Буларни (4) га қуйиш натижасида қуйидаги формула чиқади:

$$\boxed{\sin\varphi = \pm\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}} \tag{5}$$

Тўғри чизиқ текисликка параллель булганда $\varphi = 0°$(ёки π) ва $\sin\varphi = 0$ булади. Бу эса (5) формуланинг сурати нолга айланганда булади. Шунинг учун туғри чизиқнинг текисликка параллель булиш шарти қуйидагича булади:

$$\boxed{Am+Bn+Cp=0} \tag{6}$$

Туғри чизиқ текисликка перпендикуляр булган ҳолда у MN (нормал)га параллель булади. Шунинг учун туғри чизиқнинг текисликка перпендикуляр булиш шарти ушбу тенглик билан ифода қилинади:

$$\boxed{\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}} \tag{7}$$

Мисол учун ушбу тенгламаларни оламиз:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-4}{7},$$

$$3x+5y-3z+4=0.$$

Бу мисолда: $A=3,\ B=5,\ C=-3,\ m=2,\ n=3,\ p=7.$ Шунинг учун:

$$3\cdot2+5\cdot3-3\cdot7=0,$$

яъни (6) шарт қаноатланади. Бу эса берилган тўғри чизиқ билан берилган текисликнинг ўзаро параллеллигини кўрсатади.

Иккинчи мисол учун ушбу тенгламаларни оламиз:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-6}{2},$$

$$6x+10y+4z=0,$$

Бу мисолда

$$\frac{6}{3}=\frac{10}{5}=\frac{4}{2}.$$

Бу эса берилган тўғри чизиқнинг берилган текисликка перпендикуляр эканлигини кўрсатади.

2. Масаланинг векториал формада ечилиши. Фараз қилайлик, берилган текисликнинг тенгламаси

$$\boldsymbol{rn}=p \tag{8}$$

ва берилган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a} \tag{9}$$

бўлсин. Юқорида қилинган мулоҳазаларга асосан, (3) ни назарда тутиб $\boldsymbol{n}$ ва $\boldsymbol{a}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасидан

$$\sin\varphi=\frac{|an|}{an} \tag{10}$$

ҳосил бўлади.

§ 129. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАН ТЕКИСЛИККА ПЕРПЕНДИКУЛЯР БЎЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

1. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M(x_1, y_1, z_1)$ ва берилган текислик

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{1}$$

бўлсин. Берилган нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \tag{2}$$

бўлади. Бу чизиқнинг (1) текисликка перпендикуляр бўлиши учун перпендикулярлик шарти таъмин этилиши керак, яъни

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}. \tag{3}$$

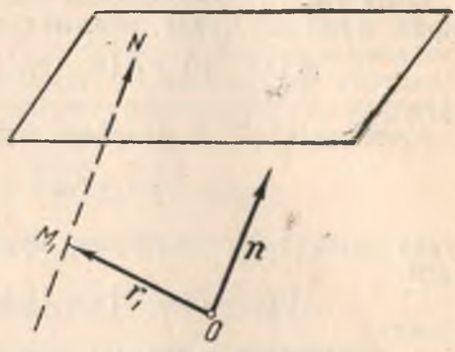
Буни эътиборга олганда (2) тенгламалардаги m, n, p ни уларга пропорционал бўлган A, B, C билан алмаштириш мумкин. Шунинг учун изланган тўғри чизиқнинг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}. \tag{4}$$

Масалан, (—2, 1,—5) нуқтадан ўтиб, $3x-4y+6z+1=0$ текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+5}{6}$$

бўлади.



Шакл 190.

2. Энди масалани векториал формада ечамиз. Фараз қилайлик, берилган нуқта M_1 $(\boldsymbol{r}_1)$ ва берилган текислик

$$\boldsymbol{r}\boldsymbol{n}^\circ=p \tag{5}$$

бўлсин (шакл 190). Шаклга мувофиқ изланган M_1N тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a} \tag{6}$$

бўлади, бунда $\boldsymbol{a}$ ҳали бизга маълум бўлмаган вектор. Иккинчи томондан $\boldsymbol{n}$ ва $\overline{M_1N}$ векторлар берилган текисликка перпендикуляр бўлгани учун буларнинг иккаласи ўзаро параллель бўлади. Шунинг учун (6) нинг кўриниши

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{n}^\circ \tag{7}$$

бўлади.

§ 130. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ПЕРПЕНДИКУЛЯР БЎЛГАН ТЕКИСЛИК

1. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва берилган тўғри чизиқ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{1}$$

бўлсин. Берилган нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламаси

$$A\ (x-x_1)+B\ (y-y_1)+C\ (z-z_1)=0 \tag{2}$$

бўлади. Бу текислик (1) тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиши учун

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p} \tag{3}$$

таъмин этилиши керак. Шунинг учун (2) тенгламадаги A, B, C ни уларга пропорционал бўлган m, n, p билан алмаштириш мумкин. Демак, изланган текисликнинг тенгламаси

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0 \tag{4}$$

булади.

Масалан, (5, 7, 4) нуқтадан ўтиб,

$$\frac{x-3}{6}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-8}{3}$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текисликнинг тенгламаси

$$6(x-5)+2(y-7)+3(z-4)=0$$

бўлади.

2. Масаланинг векториал формада ечилиши. Фараз қилайлик, ушбу

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a}$$

тўғри чизиқ ва $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ нуқта берилган булсин. Маълумки, берилган $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламаси

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{n}=0 \tag{5}$$

бўлади. Берилган тўғри чизиқ ва вектор $\boldsymbol{a}$ ўзаро параллель бўлгани учун вектор $\boldsymbol{a}$ изланган текисликка перпендикуляр бўлади. Шунинг учун йўналтирувчи векторга $\boldsymbol{a}$ векторни қабул қилиш мумкин, демак:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a}=0. \tag{6}$$

Изланган текисликнинг векториал формада тенгламаси шундан иборат.

§ 131. ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ ТЕКИСЛИК БИЛАН УЧРАШГАН НУҚТАСИ

1, Фараз қилайлик, тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{1}$$

ва берилган текисликнинг тенгламаси

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

булсин.

Ҳар қандай нуқта ўзининг координаталари билан аниқланади. Шунинг учун қўйилган масала (1) тўғри чизиқнинг (2) текислик билан учрашган нуқтасининг координаталарини топиш билан ечилади. Бунинг учун (1) ва (2) тенгламаларни бирликда ечишга тўғри келади, чунки (1) ва (2) нинг ўзаро учрашган нуқтасида x, y, z нинг қийматлари иккаласига умумий бўлади. Уч тенглама уч номаълумни аниқлаш учун кифоя қилади. Тенгламаларни ечиш қулай бўлсин учун (1) даги нисбатларнинг умумий қийматини t фараз қиламиз. Бу ҳолда:

$$x - a = mt,\ y - b = nt,\ z - c = pt,$$

ёки

$$x = a + mt,\ y = b + nt,\ z = c + pt; \tag{3}$$

бундаги x, y, z нинг ифодаларини (2) га қўямиз:

$$A\,(a + mt) + B\,(b + nt) + C\,(c + pt) + D = 0,$$

ёки

$$(Am + Bn + Cp)\,t + Aa + Bb + Cc + D = 0, \tag{4}$$

бундан

$$t = -\frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp}. \tag{5}$$

Энди t учун аниқланган ифодани (3) га қўямиз. Бу ҳолда изланган нуқтанинг координаталари бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= a - \frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp}\cdot m \\ y &= b - \frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp}\cdot n \\ z &= c - \frac{Aa + Bb + Cc + D}{Am + Bn + Cp}\cdot p \end{aligned}\right| \tag{6}$$

Бу қўйилган масаланинг умумий ечилиши. Энди бунинг баъзи хусусий ҳолларини текширамиз:

1) Агар формуладаги касрнинг умумий махражи нолга айланса, яъни

$$Am + Bn + Cp = 0 \tag{7}$$

бўлса, бу ҳолад

$$x = \infty,\ y = \infty$$

бўлади. Демак, бу ҳолда тўғри чизиқнинг текислик билан учрашган нуқтаси чексиз узоқда бўлади ёки тўғри чизиқ текисликка параллель бўлади.

2) Агар формуладаги касрнинг сурати нолга айланса, яъни

$$Aa + Bb + Cc + D = 0 \tag{8}$$

бўлса, бу ҳолда

$$x = a, \ y = b, \ z = c$$

булади ва (a, b, c) нуқта туғри чизиқнинг текислик билан учрашган нуқтаси бўлади.

3) Агарда формуладаги касрнинг сурати ва махражи бирданига нолга айланса, яъни

$$\left.\begin{aligned} Aa + Bb + Cc + D = 0, \\ Am + Bn + Cp = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

бўлган ҳолда x, y, z аниқмас булади. Бу эса тўғри чизиқ билан текисликнинг чексиз куп умумий нуқталари бўлган ҳолда булади ёки бошқача қилиб айтганда: туғри чизиқ текисликда ётган ҳолда бўлади.

2. Энди масалани векториал формада ечамиз. Фараз қилайлик, берилган текисликнинг тенгламаси

$$\mathbf{rn} = p \tag{10}$$

ва берилган туғри чизиқнинг тенгламаси

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a} \tag{11}$$

булсин. (10) ва (11) нинг учрашган нуқтаси иккаласига умумий бўлгани учун (11) дан $\mathbf{r}$ нинг ифодасини (10) га қўйиш мумкин. Бу ҳолда:

$$(\mathbf{r}_1 + \lambda \mathbf{a})\,\mathbf{n} = p,$$

бундан

$$\lambda = \frac{p - \mathbf{r}_1 \mathbf{n}}{\mathbf{an}}.$$

λ учун аниқланган бу ифода (11) га қуйилса, унинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}\frac{p - \mathbf{r}_1 \mathbf{n}}{\mathbf{an}}. \tag{12}$$

Масаланинг жавоби шунинг ўзи бўлади, чунки (12) изланган нуқтанинг радиус-векторини аниқлайди.

§ 132. БЕРИЛГАН НУҚТАДАН ВА БЕРИЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚДАН ЎТГАН ТЕКИСЛИК

1. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M(x_1, y_1, z_1)$ ва берилган тўғри чизиқ

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \qquad (1)$$

бўлсин. Изланган текислик $M(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтгани учун унинг тенгламаси

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \qquad (2)$$

бўлади. (1) тўғри чизиқ (2) текисликда ётгани учун:

$$\left.\begin{aligned} A(a-x_1)+B(b-y_1)+C(c-z_1)=0,\\ Am+Bn+Cp=0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(2) ва (3) дан A, B, C чиқарилса, изланган текисликнинг тенгламаси бундай бўлади:

$$\begin{vmatrix} x-x_1, & y-y_1, & z-z_1 \\ a-x_1, & b-y_1, & c-z_1 \\ m, & n, & p \end{vmatrix}=0. \qquad (4)$$

Масалан, (1, 1, 1) нуқтадан ва

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-7}{2}$$

тўғри чизиқдан ўтган текисликнинг тенгламаси

$$\begin{vmatrix} x-1, & y-1, & z-1 \\ 2-1, & 3-1, & 7-1 \\ 3, & 5, & 2 \end{vmatrix}=0.$$

ёки

$$\begin{vmatrix} x-1, & y-1, & z-1 \\ 1, & 2, & -5 \\ 3, & 5, & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Бу тенгламанинг чап томонидаги детерминантни очиш ўқувчига тавсия қилинади.

2. Берилган масаланинг векториал формада ечилиши. Фараз қилайлик, $M_0(\boldsymbol{r}_0)$ — берилган нуқта ва

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\lambda\boldsymbol{a} \qquad (5)$$

берилган тўғри чизиқ бўлсин. Бу ҳолда берилган нуқта ва берилган тўғри чизиқдан ўтган текисликнинг тенгламаси

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{n}=0 \qquad (6)$$

кўринишда бўлади. Бу текисликнинг йўналтирувчи вектори вектор $\boldsymbol{a}$ га перпендикуляр бўлади, чунки $\boldsymbol{a}$ вектор (6) текисликка параллель; иккинчи томондан (6) текнсликнинг йўналтирувчи вектори

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0 \tag{7}$$

векторга перпендикуляр бўлади, чунки вектор $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)$ (6) текисликда ётади. Шунинг учун (6) текисликнинг йўналтирувчи векторига $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0$ ва $\boldsymbol{a}$ векторларнинг векториал кўпайтмасини қабул қилиш мумкин, яъни:

$$\boldsymbol{n} = [(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a}], \tag{8}$$

демак, бунга асосан (6) тенгламанинг кўриниши

$$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)\,[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a}] = 0 \tag{9}$$

бўлади.

§ 133. БЕРИЛГАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚДАН ЎТИБ, БЕРИЛГАИ ТЕКИСЛИККА ПЕРПЕНДИКУЛЯР БЎЛГАН ТЕКИСЛИК

Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p} \tag{1}$$

ва берилган текисликнинг тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

бўлсин.

(1) тўғри чизиқ (a, b, c) нуқтадан ўтади. Бу нуқтадан ўтган текисликларнинг тенгламаси

$$A'(x-a) + B'(y-b) + C'(z-c) = 0 \tag{3}$$

бўлади. Бу текисликларнинг ичидан (1) тўғри чизиққа параллель бўлганини, яъни унинг устидан ўтганини танлаб оламиз:

$$A'm + B'n + C'p = 0 \tag{4}$$

ва шунинг билан баравар бу (3) текисликни (2) текисликка перпендикуляр бўлишини талаб қиламиз, яъни

$$A'A + B'B + C'C = 0. \tag{5}$$

(3), (4) ва (5) дан A', B', C' ни чиқариш натижасида ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{vmatrix} x-a, & y-b, & z-c \\ m, & n, & p \\ A, & B, & C \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

§ 134. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ БИР-БИРИ БИЛАН УЧРАШИШ ШАРТИ

1. Бир текисликда бўлган ва ўзаро параллель бўлмаган икки туғри чизиқ (давом эттирганда) ҳамавақт бир-бирини кесади. Фазода бўлса бир-бирига параллель бўлмаган икки туғри чизиқнинг учрашуви ва учрашмаслиги мумкин. Шунинг учун бу масала текширишни талаб қилади.

Фараз қилайлик, берилган туғри чизиқларнинг тенгламалари

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{1}$$

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'} \tag{2}$$

бўлсин. Иккала туғри чизиқ бир текисликда бўлган ҳолдагина улар учрашиши мумкин, шунинг учун у текисликнинг тенгламасини

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{3}$$

фараз қиламиз.

(1) туғри чизиқ (3) текисликда бўлган ҳолда унинг шарти бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} Aa+Bb+Cc+D=0 \\ Am+Bn+Cp=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Шунга ухшаш (2) туғри чизиқ (3) текисликда бўлган ҳолда унинг шарти бундай булади:

$$\left.\begin{aligned} Aa'+Bb'+Cc'+D=0 \\ Am'+Bn'+Cp'=0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

D ни йуқотиш учун (4) нинг биринчисидан (5) нинг биринчисини айириб оламиз:

$$A(a-a')+B(b-b')+C(c-c')=0. \tag{6}$$

(4) нинг иккинчисидан, (5) нинг иккинчисидан ва (6) дан A, B, C ни чиқариш натижасида нолга тенг бўлган детерминант шаклида ушбу тенглама ҳосил булади:

$$\begin{vmatrix} a-a', & b-b' & c-c' \\ m, & n, & p \\ m', & n', & p' \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

Бу муносабат фазодаги икки туғри чизиқнинг бир текисликда булиш шартини ифода қилади. Масалан, ушбу:

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-6}{4},$$

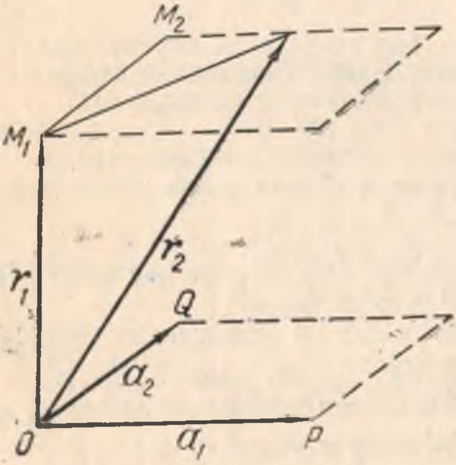
$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-5}{6}$$

тўғри чизиқлар бир текисликда бўла олмайди, чунки

$$\begin{vmatrix} 1, & -2, & 1 \\ 5, & 2, & 4 \\ 2, & 3, & 6 \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Масаланинг векториал формада ечилиши. Фараз қилайлик берилган тўғри чизиқларнинг векториал тенгламалари

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}_2 + \lambda \boldsymbol{a}_2 \end{aligned} \qquad (8)$$



Шакл 191.

бўлсин. Бу чизиқлар ўзаро учрашган ҳолда уларнинг учрашган нуқтасида

$$\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{r}_2 + \lambda \boldsymbol{a}_2$$

ёки

$$\lambda \boldsymbol{a}_1 - \lambda \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1. \qquad (9)$$

$\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ векторлар орасида чизиқли муносабат мавжуд бўлгани учун бу векторлар ўзаро компланардир (шакл 191). Бу эса $\overline{M_1 M_2} = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ вектор: $\boldsymbol{a}_1$ ва $\boldsymbol{a}_2$ векторлардан ташкил топган POQ текисликка параллель бўлган ҳолдагина мумкин. Буларнинг компланарлик шарти

$$(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\ [\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2] = 0 \qquad (10)$$

бўлади. (8) тўғри чизиқларнинг ўзаро учрашиш шарти шундан иборат.

§ 135. ИККИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ ЭНГ ҚИСҚА МАСОФА

1. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқларнинг тенгламаларн

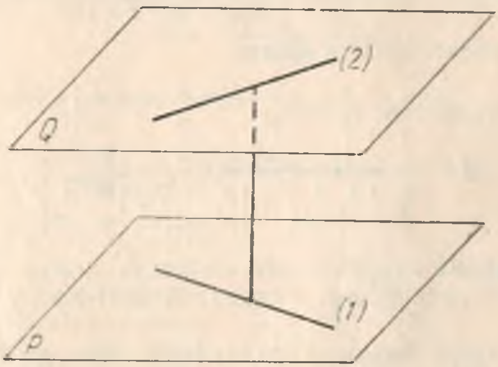
$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{1}$$

ва

$$\frac{x-a'}{m'}=\frac{y-b'}{n'}=\frac{z-c'}{p'} \tag{2}$$

бўлсин. Албатта, биз бу тўғри чизиқларни ўзаро кесишмайдиган фараз қиламиз.

(1) тўғри чизиқ устидан (2) тўғри чизиққа параллель қилиб P текисликни ва (2) тўғри чизиқ устидан (1) тўғри чизиққа параллель қилиб, Q текисликни ўтказамиз (шакл 192). Бу ҳолда изланган масофа иккала параллель текисликнинг орасидаги масофага тенг бўлади.



Шакл 192.

P текислик (1) тўғри чизиқдан ўтади; (1) тенгламага асосан (1) тўғри чизиқ (a, b, c) нуқтадан ўтади, демак, P текисликнинг ўзи ҳам (a, b, c) нуқтадан ўтади. Шунинг учун бу текисликнинг тенгламаси

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0 \tag{3}$$

бўлади. (1) тўғри чизиқ бу текисликда ётгани учун

$$Am+Bn+Cp=0 \tag{4}$$

ва (3) текислик (2) тўғри чизиққа параллель бўлгани учун

$$Am'+Bn'+Cp'=0. \tag{5}$$

(4) ва (5) A, B, C га нисбатан биринчи даражали бир жинсли тенгламалардан иборат. Булардан

$$\frac{A}{np'-n'p}=\frac{B}{m'p-mp'}=\frac{C}{mn'-m'n}, \tag{6}$$

демак, P текисликнинг тенгламаси (3) га асосан бундай бўлади:

$$(np' - n'p)(x - a) + (m'p - mp')(y - b) +$$
$$+ (mn' - m'n)(z - c) = 0. \tag{7}$$

Изланган масофа иккала текислик орасидаги масофага тенг бўлгани учун Q текисликдаги (a', b', c') нуқта билан P текислик орасидаги масофа аниқланса кифоя қилади. Бунинг учун (7) тенгламани нормаль ҳолга келтириб, сўнгра x, y, z ўзгарувчи координаталар ўрнига a', b', c' қўйилса бўлади. Шунинг учун изланган d масофа қуйидагича бўлади:

$$d = \frac{(np' - n'p)(a' - a) + (m'p - mp')(b' - b) + (mn' - m'n)(c' - c)}{\sqrt{(np' - np')^2 + (m'p - mp')^2 + (mn' - m'n)^2}} \tag{8}$$

ёки детерминант ёрдами билан:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} a' - a & b' - b & c' - c \\ m & n & p \\ m' & n' & p' \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n & p \\ n' & p' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & m \\ p' & m' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}^2}}. \tag{9}$$

Формуланинг сурати нолга айланган ҳолда иккала тўғри чизиқ ўзаро кесишган бўлади (§ 134) ва бу ҳолда $d = 0$ бўлади.

Иккала тўғри чизиқ параллель бўлганда формуланинг сурати ва махражи ҳам нолга айланиб, аниқсизлик ҳосил бўлади. Ҳақиқатда, иккала чизиқ параллель бўлганда формуланинг суратидаги детерминантнинг икки йўли пропорциональ бўлгани учун у нолга айланади; шунга ўхшаш бу ҳолда формуланинг махражи ҳам нолга айланади.

Чиқарилган формулада ҳамавақт d нинг абсолют қиймати олинади.

2. Масаланинг векториал формада ечилиши. Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқларнинг векториал тенгламалари

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a}_1, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 + \lambda \boldsymbol{a}_2 \tag{11}$$

бўлсин. (10) тўғри чизиқдан (11) тўғри чизиққа параллель қилиб P текисликни ва (11) тўғри чизиқдан (10) тўғри чизиққа параллель қилиб Q текисликни ўтказамиз (шакл 190). Бу текисликларнинг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1)\,[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]=0, \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2)\,[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]=0. \tag{13}$$

Бу текисликлар ўзаро параллель, чунки иккаласининг йўналтирувчи вектори $[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]$ дан иборат, демак, берилган тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа ҳалиги параллель текисликлар орасидаги масофадан иборат. Шунинг учун (12) ва (13) текисликлардан бирининг, масалан, иккинчисининг, бирор нуқтасидан биринчисигача бўлган масофа аниқланса кифоя. Бу эса тенгламани нормаль ҳолга келтиргандан кейин унинг чап томонидаги ўзгарувчи вектор $\boldsymbol{r}$ ни $\boldsymbol{r}_2$ га алмаштириш билан бўлади, яъни изланган масофа:

$$\delta=\frac{(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)\,[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]}{[\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2]}. \tag{14}$$

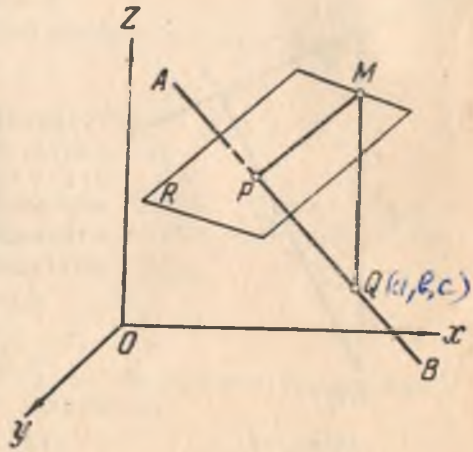
§ 136. НУҚТА БИЛАН ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ОРАСИДАГИ МАСОФА

1. Фараз қилайлик, берилган нуқта $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва берилган тўғри чизиқ (AB)

$$\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \tag{1}$$

бўлсин. M нуқта билан AB тўғри чизиқ орасидаги масофани аниқлаш учун M нуқтадан AB га перпендикуляр қилиб R текисликни ўтказамиз (шакл 193). P — бу текисликнинг AB билан учрашган нуқтаси бўлса, у ҳолда $MP=d$ изланган масофа бўлади. R текисликнинг тенгламаси

$$m(x-x_1)+n(y-y_1)+$$
$$+p(z-z_1)=0. \tag{2}$$



Шакл 193.

(1) тўғри чизиқ $(a,\ b,\ c)$ нуқтадан ўтади. Фараз қилайлик, AB даги Q нуқтанинг координаталари $a,\ b,\ c$ бўлсин. Бу ҳолда тўғрибурчакли MPQ учбурчакда

$$d^2=MP^2=MQ^2-PQ^2. \tag{3}$$

$Q\,(a,\ b,\ c)$ нуқта билан R текисликнинг орасидаги масофа

381. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак қандай топилади?

382. Икки тўғри чизиқнинг параллеллик ва перпендикулярлик шартлари нимадан иборат?

383. $A(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтиб, Ox ўқи билан $\frac{\pi}{4}$ ва Oz ўқи билан $\frac{\pi}{3}$ га тенг бурчак ташкил қилган тўғри чизиқнинг тенгламалари тузилсин.

384. Йўналтирувчи косинуслари $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ га пропорционал бўлган тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари аниқлансин.

385. Тўғри чизиқларнинг қуйидаги тенгламалари $x = mz + a$, $y = nz + b$ шаклга келтирилсин:

1) $2x + y - 2z + 1 = 0, \quad x - 2y + z - 3 = 0;$

2) $3x - 2y + z + 5 = 0, \quad x - y - 2z + 4 = 0.$

386. Тўғри чизиқларнинг қуйидаги тенгламалари пропорция шаклида ёзилсин:

1) $2x - y - z + 1 = 0, \quad x - y + 2z + 3 = 0;$

2) $x = 2, \; y = 3z + 1;$

3) $x - z + 2 = 0, \; y + z = 0;$

4) $x - 3z - 5 = 0, \; x - y = 0.$

387. Тенгламалари қуйидагича бўлган тўғри чизиқларнинг координата текисликларига нисбатан ўрни аниқлансин:

1) $y = nz + b, \; x = a;$

2) $x = pz, \; y = 0;$

3) $x = y = z.$

388. Ушбу тўғри чизиқларнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари аниқлансин:

1) $x - y + 2z + 3 = 0, \; 2x - y - z + 1 = 0;$

2) $x = 2, \; y = 3z + 1;$

3) $x + y = 0, \; x - y = 0;$

4) $x = 0, \; y = 5z.$

389. Икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламалари тузилсин:

1) (1, 0, 2) ва (2, 1, 3);

$$PQ = \frac{m(a - x_1) + n(b - y_1) + p(c - z_1)}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \tag{4}$$

ва

$$MQ^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2. \tag{5}$$

(4) ва (5) га асосан (3) нинг кўриниши бундай бўлади:

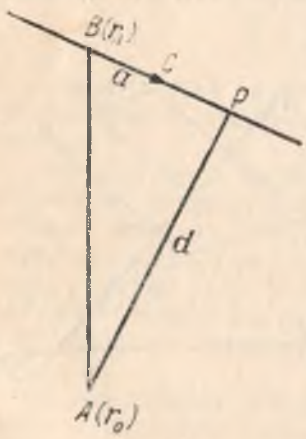
$$d^2 = (x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2 - \frac{[m(a - x_1) + n(b - y_1) + p(c - z_1)]^2}{m^2 + n^2 + p^2}$$

ёки

$$d^2 = \{(m^2 + n^2 + p^2)[(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 + (z_1 - c)^2] - [m(a - x_1) + n(b - y_1) + p(c - z_1)]^2\} : (m^2 + n^2 + p^2) \tag{6}$$

ёки Лагранж айниятига асосан:

$$d^2 = \frac{\begin{vmatrix} a - x_1, & b - y_1 \\ m, & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b - y_1, & c - z_1 \\ n, & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c - z_1, & a - x_1 \\ p, & m \end{vmatrix}^2}{m^2 + n^2 + p^2}. \tag{7}$$



Шакл 194.

2. Масаланинг векториал формада ечилиши. Фараз қилайлик

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{a}$$

тўғри чизиқ ва A $(\boldsymbol{r}_0)$ нуқта берилган бўлсин (шакл 194). Бу нуқта билан берилган тўғри чизиқ орасидаги $AP = d$ масофани топамиз. Агар $BC = a$ фараз қилинса, бу ҳолда:

$$d = AP = AB \sin \widehat{ABC} = AB \frac{|[\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}]|}{BA \cdot BC} = \frac{|[AB \cdot BC]|}{BC},$$

ёки

$$d = \frac{|[(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0)\,\boldsymbol{a}]|}{|\boldsymbol{a}|}.$$

Саволлар ва масалалар

379. Тўғри чизиқ тенгламаларининг асосий кўринишлари ва улардаги параметрларнинг геометрик маънолари қандай?

380. Тўғри чизиқнинг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчаклари қандай аниқланади?

2) $(0, -1, 3)$ ва $(-2, 3, 0)$;

3) $(-2, 0, 1)$ ва $(0, -5, -1)$;

4) $(0, 0, -1)$ ва $(1, 1, 1)$.

390. $(2, 1, -1)$, $(3, 3, -3)$ ва $(1, -1, 1)$ нуқталар бир тўғри чизиқда бўла оладими?

391. $(0, 0, 1)$, $(-2, 3, 1)$, $(5, -4, 0)$ нуқталар бир тўғри чизиқда бўла оладими?

392. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган ҳар икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак аниқлансин:

$$1)\ x - y - z - 1 = 0,\ x - y + 2z + 1 = 0;$$

ва

$$2)\ x - 2y + z + 1 = 0,\ x + 2y + z - 1 = 0.$$

393. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган икки тўғри чизиқнинг ўзаро перпендикуляр экани исбот қилинсин:

$$1)\ y + z = 0,\ y - z + 2 = 0;$$

ва

$$2)\ x + y = 0,\ x - y = 0.$$

394. Бурчакларнинг учлари $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ ва $(2, 3, 1)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг ички бурчаклари аниқлансин.

395. Қуйидаги тенгламаларда a ва b нинг қийматлари қандай бўлганда, улар ифода қилган тўғри чизиқлар ўзаро параллель бўлади?

$$\frac{x+1}{a} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{3},$$

$$\frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{b} = \frac{z-1}{4}.$$

396. $A(5, -3, -1)$ нуқтадан ўтиб, ушбу

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-3}{7}$$

тўғри чизиққа параллель бўлган тўғри чизиқнинг тенгламалари тузилсин.

397. Координаталар бошидан ўтиб, ушбу

$$\begin{cases} 2x + 2y - z + 2 = 0 \\ x - 2y - 2z + 7 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиққа параллель бўлган тўғри чизиқнинг тенгламалари тузилсин.

398. $(1, 0, 1)$ нуқтадан ўтиб, ушбу икки тўғри чизиққа

перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламалари тузилсин:

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \text{ва} \begin{cases} x - 2z - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

399. $(1, 1, 1)$ нуқтадан ўтиб, ушбу икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламалари топилсин:

$$1)\ x = 2z + 1,\ y = z - 2 \text{ ва } 2)\ x + y + z = 1,\ x = 2z.$$

400. $x = 2z - 1$, $y = -z + 3$ тўғри чизиқ билан $3x - 2y + 4z - 12 = 0$ текислик орасидаги бурчак аниқлансин.

401. $x - y - z = 0$, $3x - y + z + 6 = 0$ тўғри чизиқ билан $x + 2y - z - 1 = 0$ текислик орасидаги бурчак аниқлансин.

402. $3x - 2y + 4z - 12 = 0$ текислик ушбу

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{n} = \frac{z-3}{p}$$

тўғри чизиққа перпендикуляр бўлиши учун n ва p нинг қийматлари қандай бўлиши керак?

403. Текисликнинг $x + y - 6z + D = 0$ тенгламасида D нинг қиймати қандай бўлганда ушбу

$$\begin{cases} x - 2z + 9 = 0 \\ y - 4z + 23 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиқ ҳалиги текисликда ётади?

404. $(1, 2, 3)$ нуқтадан ўтиб, ушбу

$$4x - 5y - 8z + 21 = 0$$

текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси тузилсин.

405. Қуйидаги тенгламалар билан ифода қилинган икки тўғри чизиқнинг ўзаро кесилиши исбот қилинсин:

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-1}{-2},$$

$$\frac{x+7}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-1}{3}.$$

406. Қуйидаги текисликлар бир текисликдами?

$$3 - x = \frac{2y+10}{5} = 2z \text{ ва } 1 - y = \frac{x+1}{2} = z.$$

407. Ушбу тенгламалар билан ифода қилинган тўғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа топилсин:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{1},$$

$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}.$$

408. Ушбу тенгламалар билан ифода қилинган туғри чизиқлар орасидаги энг қисқа масофа топилсин:

$$\begin{cases} x+4z+1=0, \\ x-4y+9=0, \end{cases} \text{ва} \begin{cases} y=0, \\ x+2z-4=0. \end{cases}$$

409. (0, 1, 2) нуқтадан ушбу

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-3}{7}$$

тўғри чизиққача бўлган масофа аниқлансин.

410. (1, — 1, 2) нуқтанинг $x=y=2z$ туғри чизиққача масофаси аниқлансин.

411. $x=5z-8$, $y=9z-3$ тўғри чизиқдан ўтиб, $4x+3y+3z-1=0$ текисликка перпендикуляр бўлган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

412. $2x-3y+z-2=0$ ва $x-y-z-3=0$ текисликларнинг кесишган чизиғидан ўтиб ушбу

$$2x-3z-7=0$$

текисликка перпендикуляр бўлган текисликнинг тенгламаси тузилсин.

Ун еттинчи боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАРНИ КАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ БЎЙИЧА ТЕКШИРИШ

§ 137. УМУМИЙ МУЛОҲАЗАЛАР

Сиртлар, уларнинг Декарт координаталарига нисбатан ифода қилинган тенгламаларига қараб, текисликдаги чизиқлар каби, алгебраик ва трансцендент сиртларга бўлинади. Шунинг учун алгебраик сирт деб, шундай сиртга айтиладики, агарда уни

$$f(x, y, z) = 0$$

кўринишдаги тенглама билан ифодалаш мумкин бўлса ва $f(x, y, z)$ эса x, y, z га нисбатан полином (кўп ҳадли) бўлса, алгебраик булмаган ҳамма сиртларни трансцендент сиртлар дейилади.

Алгебраик сиртлар, ўз навбатида, турли тартибли сиртларга бўлинади. Агарда $f(x, y, z)$ полиномнинг даражаси n булса, ундай сиртни n-тартибли сирт дейилади.

Китобнинг бу ва келгуси бобида сўз фақат иккиичи тартибли сиртлар устида бўлади. Юқорида берилган умумий таърифга мувофиқ:

Декартнинг ўзгарувчи x, y, z координаталарига нисбатан иккинчи даражали алгебраик тенглама билан ифода қилинган сирт **иккинчи тартибли сирт** дейилади. Шунинг учун иккинчи тартибли сирт ифода қиладиган иккинчи даражали алгебраик тенгламанинг умумий кўриниши бундай булади:

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A_1}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{A_2}} + \frac{z^2}{-\frac{F}{A_3}} = 1. \qquad (2)$$

(1) тенгламанинг коэффициентлари тўғрисида қилинган фаразга мувофиқ F нинг ишораси қолган коэффициентларнинг ишорасига тескари бўлгани учун, (2) тенгламанинг чап томонидаги ҳар бир касрнинг махражи мусбат бўлади. Шунинг учун улардан биринчисини a^2, иккинчисини b^2 ва учинчисини c^2 фараз қиламиз:

$$-\frac{F}{A_1} = a^2, \quad -\frac{F}{A_2} = b^2, \quad -\frac{F}{A_3} = c^2, \qquad (3)$$

демак, (2) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1} \qquad (4)$$

Бу тенглама билан ифода қилинган сирт **эллипсоид** дейилади (шакл 195).

2. Тенгламанинг тузилишига қараганда унинг чап томонидаги ҳар бир касрнинг қиймати бирдан катта бўла олмайди, яъни

$$\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1, \quad \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,$$

ёки

$$x^2 \leqslant a^2, \quad y^2 \leqslant b^2, \quad z^2 \leqslant c^2,$$

демак,

$$|x| \leqslant a, \quad |y| \leqslant b, \quad |z| \leqslant c.$$

Энди эллипсоиднинг шаклини текширамиз. Бунинг учун энг аввал унинг координата ўқлари билан учрашган нуқталарини топамиз. Агар (4) тенгламада $y = 0$, $z = 0$ фараз қилинса,

$$x = \pm a$$

бўлади, яъни абсцисса ўқи эллипсоидни координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган $A(a, 0, 0)$ ва $A_1(-a, 0, 0)$ нуқталарда кесиб ўтади. Шунга ўхшаш $x = 0$, $z = 0$ фараз қилинса,

$$y = \pm b$$

бўлади, яъни ордината ўқи эллипсоидни координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган $B(0, b, 0)$ ва $B_1(0, -b, 0)$ нуқталарда кесиб ўтади; $x = 0$, $y = 0$ фараз қилинса,

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + B_1yz + B_2xz + B_3xy +$$
$$+ C_1x + C_2y + C_3z + F = 0,$$

бунда A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, ..., F коэффициентлар ҳақиқий ўзгармас сонлардан иборат бўлиб, хусусий ҳолда улардан баъзилари нолга тенг бўлиши мумкин. Бу тенгламанинг умумийлигига халал келтирмай уни бундай ёзиш мумкин:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy +$$
$$+ 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0. \qquad (1)$$

Тенгламани шундай қилиб ёзганда унинг билан боғланган амалларни бажариш бирмунча қулай бўлади.

Координаталар системасини алмаштириш ёрдами билан (1) тенгламани соддалаштириб, уни

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + F = 0 \qquad (2)$$

ёки

$$A_1x^2 + A_2y^2 + 2C_3z = 0 \qquad (3)$$

шаклга келтириш мумкин. Биз буни китобнинг келаси 18-бобида кўрсатамиз.

(2) тенглама билан ифода қилинган сирт иккинчи тартибли **марказли сирт** дейилади ва (3) тенглама билан ифода қилинган сирт иккинчи тартибли **марказсиз** (ёки маркази чексизликдаги) **сирт** дейилади. Китобнинг бу бобидан мақсад (2) ва (3) тенгламалардаги коэффициентларнинг ишоралари устида турли фаразлар қилиб, у тенгламаларни текширишдан иборат.

§ 138. ЭЛЛИПСОИД

1. Фараз қилайлик, иккинчи тартибли марказли сиртнинг энг содда тенгламаси берилган бўлсин:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + F = 0 \qquad (1)$$

ва бундаги озод ҳад бўлган F нинг ишораси қолган коэффициентларининг ишорасига тескари бўлсин. Тенгламанинг F коэффициентини унг томонга ўтказиб, сўнгра унинг иккала томонини $(-F)$ га бўламиз:

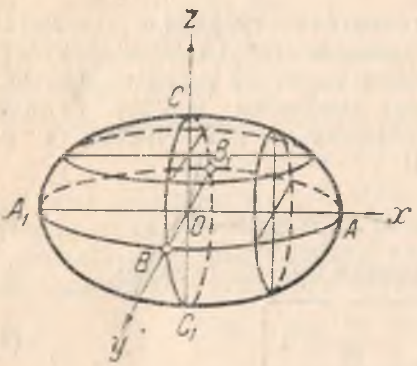
$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = -F,$$

$$\frac{A_1x^2}{-F} + \frac{A_2y^2}{-F} + \frac{A_3z^2}{-F} = 1,$$

ёки

$$z = \pm c$$

булади, яъни аппликата уқи эллипсоидни координаталар бошига нисбатан симметрик булган $C(0, 0, c)$ ва $C_1(0, 0, -c)$ нуқталарда кесиб утади.



Шакл 195.

Аниқланган нуқталардан A — эллипсоиднинг yOz текисликдан энг узоқлашган нуқтаси бўлади; шунга ўхшаш қолган нуқталар ҳам тегишли координата текисликларидан энг узоқлашган нуқталардан иборат. Шунинг учун уларни эллипсоиднинг бошлари дейилади ва ҳар икки нуқталарининг орасидаги

$$2a, \ 2b, \ 2c$$

масофалар эллипсоиднинг у қ л а р и дейилади. Эллипсоиднинг ўқлари туғрисида қушимча шарт булмаган ҳолда

$$a > b > c$$

фараз қилинади. Текширишдан чиқарилган натижаларга қараганда эллипсоид ёпиқ сиртдан иборат, чунки у

$$x = \pm a, \ y = \pm b, \ z = \pm c$$

текисликлардан ясалган параллелепипеднинг ичида булади.

3. Энди эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесилишидан ҳосил булган шаклларни текширамиз. Масалан, xOy текислиги билан кесиш учун $z = 0$ фараз қилишга тўғри келади ва бу ҳолда (4) нинг куриниши бундай булади:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (5)$$

Шунга ухшаш $y = 0$ фараз қилинса,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (6)$$

ва $x = 0$ фараз қилинса,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (7)$$

5), (6) ва (7) тенгламалардан ҳар бири эллипс ифода қилади. Демак, эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесимлари эллипслардан иборат. Булар эллипсоиднинг **бош кесимлари** дейилади.

Энди эллипсоидни координата текисликларига параллель булган текисликлар билан кесиб курамиз. Масалан, xOy текисликка параллель булган текисликнинг тенгламаси

$$z = k$$

булади (k — узгармас). Изланган кесимни аниқлаш учун бу тенглама билан эллипсоиднинг тенгламасини бирликда ечишга тўғри келади.

$z = k$ ни (4) га қўйилса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2} = 1,$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},$$

ёки

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2 - k^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2 - k^2)}{c^2}} = 1,$$

ёки

$$\frac{a^2(c^2 - k^2)}{c^2} = a_1^2, \quad \frac{b^2(c^2 - k^2)}{c^2} = b_1^2 \tag{8}$$

фараз қилинса, тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{9}$$

Бу тенглама эллипсни ифода қилади. Бироқ, бу эллипснинг ҳақиқий булиши учун $|k| \leqslant c$ булиши лозим, чунки (8) даги тенгликларга қараганда $|k| > c$ бўлган ҳолда a_1 ва b_1 мавҳум бўлади. Шунга ўхшаш эллипсоидни yOz ва xOz текисликларга параллель бўлган текислик билан кесган ҳолда ҳам ҳамон шу каби натижа келиб чиқади, яъни эллипс ҳосил бўлади.

Энди эллипсоидни бирор ихтиёрий текислик билан кесиб курамиз. Фараз қилайлик, бу текисликнинг тенгламаси

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{10}$$

бўлсин. Бу тенглама билан (4) тенглама бирликда изланган кесимни ифода қилади. Агар бу тенгламалардан z чиқарилса, изланган кесимнинг xOy текисликдаги проекцияси ҳосил бўлади. (10) дан ($C \neq 0$):

$$Z = -\frac{Ax + By + D}{C},$$

буни эллипсоиднинг (4) тенгламасига қўйсак:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(Ax + By + D)^2}{C^2c^2} = 1,$$

ёки қавсларни очиб, бу шаклда ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{C^2}{a^2} + \frac{A^2}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{C^2}{b^2} + \frac{B^2}{c^2}\right)y^2 + 2\frac{AB}{c^2}xy + 2\frac{AD}{c^2}x +$$

$$+ 2\frac{BD}{c^2}y + \frac{D^2}{c^2} - C^2 = 0,$$

ёки

$$\frac{C^2}{a^2} + \frac{A^2}{c^2} = A_1, \quad \frac{C^2}{b^2} + \frac{B^2}{c^2} = C_1,$$

$$\frac{AB}{c^2} = B_1, \quad \frac{AD}{c^2} = D_1, \quad \frac{BD}{c^2} = E_1,$$

$$\frac{D^2}{c^2} - C^2 = F_1$$

фараз қилинса:

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0. \qquad (11)$$

Бу тенглама xOy текисликда иккинчи тартибли чизиқни ифода қилади. Бу чизиқнинг жинсини текшириш учун

$$M = B_1^2 - A_1C_1$$

ва

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix}$$

тузишга тўғри келади. Бизда

$$M = \frac{A^2B^2}{c^4} - \frac{(C^2c^2 + A^2a^2)(C^2c^2 + B^2b^2)}{a^2b^2c^4} =$$

$$= -(A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2)\frac{C^2}{a^2b^2c^4} < 0; \qquad (12)$$

Δ ни тузганда унинг ифодаси қуйидагича булади:

$$\Delta = -\frac{A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2}{a^2b^2c^2} \cdot C^4 \qquad (13)$$

(12) га қараганда ҳамавақт $M < 0$, лекин (13) га қараганда Δ нинг нолдан кичик ёки нолдан катта ёки нолга тенг бўлиши мумкин. Бунга қараб (11) тенглама ҳақиқий эллипсни ёки мавҳум эллипсни ёки нуқтани ифода қилади.

(13) нинг тузилишига қараганда Δ нинг миқдори ўз навбатида ушбу ифодага боғлиқ:

$$a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - D^2. \tag{14}$$

Агар бу ифода мусбат бўлса, $\Delta < 0$ бўлади ва бу ҳолда изланган кесим ҳақиқий эллипсдан иборат бўлади; шунга ўхшаш агар (14) манфий бўлса, $\Delta > 0$ бўлади ва бу ҳолда изланган кесим мавҳум эллипсдан иборат бўлади, агарда (14) нолга тенг бўлса, бу ҳолда $\Delta = 0$ бўлади ва изланган кесим нуқтага айланади.

Шунинг билан агарда текислик эллипсоидни кесса, эллипс ҳосил бўлади, ёки текислик билан эллипсоиднинг умумий нуқтаси бўлмайди, ёки иккаласининг бир умумий нуқтаси бўлади.

4. Текислик билан эллипсоиднинг бир умумий нуқтаси бўлганда, яъни текислик эллипсоидга уринма бўлганда

$$\boxed{a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - D^2 = 0} \tag{15}$$

бўлади. Бу муносабатга асосланиб, эллипсоидга уринма бўлган текисликнинг тенгламасини тузиш мумкин. Ҳақиқатда, (15) ни бундай ёзиш мумкин;

$$\left(-\frac{a^2A}{D}\right)^2 : a^2 + \left(-\frac{b^2B}{D}\right)^2 : b^2 + \left(-\frac{c^2C}{D}\right)^2 : c^2 = 1,$$

яъни координаталари

$$x_1 = -\frac{a^2A}{D}, \quad y_1 = -\frac{b^2B}{D}, \quad z_1 = -\frac{c^2C}{D} \tag{16}$$

бўлган нуқта эллипсоид тенгламасини қаноатлантиради. Иккинчи томондан (15) таъмин этилганда (x_1, y_1, z_1) нуқтанинг координаталари (10) текисликнинг тенгламасини ҳам қаноатлантиради. Демак, (x_1, y_1, z_1) нуқта (10) тенгламанинг эллипсоидга уриниш нуқтаси бўлади. Эллипсоидга уринма бўлган (10) текисликнинг коэффициентлари (16) дан аниқланади:

$$A = -\frac{Dx_1}{a^2}, \quad B = -\frac{Dy_1}{b^2}, \quad C = -\frac{Dz_1}{c^2},$$

натижада, эллипсоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасидан ўтган урин-текислик билан (20) ни кесганда яна айлана ҳосил бўлади.

Агар (4) тенгламада

$$a > b = c$$

фараз қилинса, у тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1 \qquad (21)$$

бўлади ва бу эллипсоид чўзиқ эллипсоид дейилади, чунки у

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

эллипснинг катта ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлади.

Агар (21) да $x = 0$ фараз қилинса

$$y^2 + z^2 = b^2$$

бўлади, яъни чўзиқ эллипсоиднинг yOz текислиги билан кесими айланадан иборат. Шунга ухшаш yOz текислигига параллель бўлган текислик билан (21) ни кесганда, яна айлана ҳосил бўлади.

Эллипсоиднинг ўқлари ўзаро тенг бўлган ҳолда, яъни $a = b = c$ бўлганда (4) тенгламанинг кўриниши

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \qquad (22)$$

бўлади. Бу тенглама маркази координаталар бошида бўлган ва радиуси a га тенг бўлган сферани ифода қилади.

6. Энди маркази координаталар бошида ва радиуси R бўлган сфера билан эллипсоидннинг ўзаро кесилишидан ҳосил бўлган шаклни текширамиз. Бунинг учун сфера тенгламасини

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ва эллипсоид тенгламасини

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

бирликда ечишга тўғри келади. Шу мақсад билан сфера тенгламасини

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1$$

шаклда ёзиб, буни эллипсоиднинг тенгламасидан айирамиз:

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{R^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2}\right) y^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{R^2}\right) z^2 = 0.$$

ма текисликнинг тенгламаси қуйидагича булади:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}+\frac{zz_1}{c^2}=1} \tag{17}$$

Уринманинг уриниш нуқтасидан утиб, уринма текисликка перпендикуляр булган тўғри чизиқни сиртнинг шу нуқтасида нормаль дейилади. Бу тўғри чизиқ (x_1, y_1, z_1) нуқтадан утгани учун унинг тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p} \tag{18}$$

булади. Бу чизиқ (17) текисликка перпендикуляр булгани учун

$$m:\frac{x_1}{a^2}=n:\frac{y_1}{b^2}=p:\frac{z_1}{c^2}=k,$$

бундан

$$m=\frac{x_1}{a^2}k; \quad n=\frac{y_1}{b^2}k; \quad p=\frac{z_1}{c^2}k;$$

буларни (18) га қуйиб, сунгра k га қисқартирилса, нормалнинг тенгламаси бундай булади:

$$\frac{a^2(x-x_1)}{x_1}=\frac{b^2(y-y_1)}{y_1}=\frac{c^2(z-z_1)}{z_1} \tag{19}$$

5. Эллипсоиднинг уқларидан иккитаси узаро тенг булганда, ундай эллипсоид айланма эллипсоид дейилади. Масалан, эллипсоиднинг (4) теигламасида

$$a=b>c$$

фараз қилинса, у тенгламанинг куриниши

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{20}$$

булади ва бу эллипсоид сиқма эллипсоид дейилади, чунки

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипснинг кичик уқи атрофида айланишидан ҳосил булади.

Агар (20) да $z=0$ фараз қилинса,

$$x^2+y^2=a^2$$

булади, бу эса айланани ифода қилади. Демак, (20) айланма эллипсоиднинг xOy текислиги билан кесими айланадан иборат. Шунга ухшаш, xOy текислигига параллель булган эллипсоидни кесганда қандай чизиқ ҳосил бўлса, (23) текисликлардан ҳар бири эллипсоидни кесганда худди шу чизиқнинг ўзи ҳосил бўлади.

Маълумки текислик сферани кесганда айлана ҳосил бўлади. Демак, (4) эллипсоид билан сферанинг кесими икки айланадан иборат бўлади.

(23) текисликлардан ҳар бири координаталар бошидан ва сферанинг марказидан ўтади; бу айланалар **эллипсоиднинг бош доиравий кесимлари** дейилади.

Шунга ўхшаш, (23) текисликларга параллель бўлган ҳар бир текисликнинг эллипсоид билан кесимлари ҳам айланалардан иборат. Буни исбот қилиш мумкин бўлса-да, бироқ биз бу ерда шу билан чегараланишни лозим топамиз.

7. Координаталар бошидан ўтган бирор тўғри чизиқнинг эллипсоид билан учрашган нуқталарини топамиз. Координаталар бошидан ўтган ҳар қандай тўғри чизиқнинг тенгламалари

$$\frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = t,$$

ёки

$$x = mt, \; y = nt, \; z = pt \tag{24}$$

бўлади. Бунинг (4) эллипсоид билан учрашган нуқталарини топиш учун (4) билан (24) ни бирликда ечамиз; (24) ни (4) га қўйсак:

$$t^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right) = 1,$$

бундан

$$t = \pm\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{25}$$

Бунга қараганда t учун икки қиймат аниқланади ва уларнинг абсолют қийматлари ўзаро тенг булиб, ишоралари тескари булади. Бунга қараб, (24) дан x, y, z учун ҳам икки жуфт қийматлар аниқланадики, уларнинг абсолют қийматлари ўзаро тенг ва ишоралари тескари бўлади. Шунинг билан (24) нинг эллипсоид билан учрашган иккала нуқтаси координаталар бошига нисбатан симметрик булиб, бу нуқталар орасидаги ватар координаталар бошида тенг иккига бўлинади.

(24) ихтиёрий тўғри чизиқ бўлгани учун: координаталар бошидан ўтган эллипсоиднинг ҳар бир ватари у нуқтада тенг иккига бўлинади. Бундай хусусиятга эга бўлган нуқта

Бу тенглама эллипсоид билан сферанинг ўзаро кесишган чизиғи устидан ўтган сиртни ифода қилади. Хусусий ҳолда бу сирт текисликлардан иборат бўлиши мумкин. Бунинг учун ҳалиги тенгламанинг чап томони биринчи даражали кўпайтувчиларга ажралиши лозим. Бу эса тенгламанинг коэффициентларидан бири нолга айланган ҳолда мумкин, яъни

$$R^2 = a^2, \text{ ёки } R^2 = b^2, \text{ ёки } R^2 = c^2;$$

буларга қараб, ҳалиги тенгламанинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) y^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) z_2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right) x^2 + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) y^2 = 0.$$

$a > b > c$ фараз қилганда бу тенгламалардан биринчиси ва учинчисининг чап томонлари икки квадратнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, уларни икки ҳақиқий биринчи даражали кўпайтувчига ажратиб бўлмайди. Иккинчисини эса бундай ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) x^2 - \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 0,$$

ёки

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 - \frac{b^2 - c}{c^2} z^2 = 0,$$

ёки

$$\left(\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} - \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2}\right)\left(\frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2}\right) = 0.$$

ёки бундан

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} - \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = 0, \\ \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{z}{c}\sqrt{b^2 - c^2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Қилинган фаразга мувофиқ $a > b > c$ бўлгани учун (23) даги тенгламалардан ҳар бири ҳақиқий текисликни ифода қилади. Демак, сфера билан эллипсоид кесимидаги ҳар бир (x, y, z) нуқтанинг координаталари (22) сферанинг тенгламасини ва (23) текисликлардан ҳар бирининг тенгламасини қаноатлантиради, ёки бошқача қилиб айтганда, (22) сфера сиртнинг маркази дейилади ва марказдан ўтган ватар сиртнинг диаметри дейилади. Шунинг билан координаталар боши эллипсоиднинг маркази ва (24) унинг диаметрининг тенгламалари булади.

8. Энди эллипсоиднинг берилган йўналишга параллель бўлган ватарлари ўрта нуқталарининг геометрик ўрнини топамиз. Фараз қилайлик, ватарлар ушбу тўғри чизиққа параллель бўлсин:

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}. \tag{A}$$

Ватарлардан бирортасининг ўрта нуқтасининг координаталари (x_0, y_0, z_0) фараз қилинса, у ҳолда берилган йўналишга параллель бўлган ҳар бир ватарнинг тенгламалари

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

ёки

$$x=mt+x_0,\ y=nt+y_0,\ z=pt+z_0 \tag{26}$$

бўлади. Бунинг (4) эллипсоид билан учрашган нуқталарини топиш учун (4) ва (26) ни бирликда ечишға тўғри келади. (26) дан x, y, z нинг қийматлари (4) га қўйилса:

$$\frac{(mt+x_0)^2}{a^2}+\frac{(nt+y_0)^2}{b^2}+\frac{(pt+z_0)^2}{c^2}=1,$$

ёки

$$Mt^2+2Nt+P=0, \tag{27}$$

бунда

$$M=\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2},$$

$$N=\frac{mx_0}{a^2}+\frac{ny_0}{b^2}+\frac{pz_0}{c^2},$$

$$P=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1.$$

(27) тенгламадан умуман t учун икки қиймат: t_1 ва t_2 аниқланади. Бунга қараб (26) ватарнинг эллипсоид билан учрашган икки $M(x_1, y_1, z_1)$ ва $N(x_2, y_2, z_2)$ нуқталари аниқланади. Иккинчи томондан (x_0, y_0, z_0) нуқта MN нинг ўртасида бўлгани учун:

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{2x_0+m(t_1+t_2)}{2}=x_0+m\frac{t_1+t_2}{2},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2y_0 + n(t_1 + t_2)}{2} = y_0 + n\frac{t_1 + t_2}{2},$$

$$z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2z_0 + p(t_1 + t_2)}{2} = z_0 + p\frac{t_1 + t_2}{2},$$

ёки

$$m\frac{t_1 + t_2}{2} = 0, \ n\frac{t_1 + t_2}{2} = 0, \ p\frac{t_1 + t_2}{2} = 0,$$

ёки

$$t_1 + t_2 = 0,$$

чунки m, n, p бирданига ҳаммаси нолга тенг бўла олмайди. Бироқ (27) тенгламада t_1 ва t_2 илдизларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши учун $N = 0$, ёки

$$\frac{mx_0}{a^2} + \frac{ny_0}{b^2} + \frac{pz_0}{c^2} = 0$$

бўлиши керак. Изланган геометрик ўриннинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади. Бу тенгламада x_0, y_0, z_0 исталган ватарнинг ўртасидаги нуқтанинг координаталари эди. Шунинг учун уларнинг ўрнига x, y, z ёзилса, тенгламанинг кўриниши

$$\boxed{\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} + \frac{pz}{c^2} = 0} \tag{28}$$

бўлади. Бу тенглама координаталар бошидан ўтган текисликни ифода қилади. Демак, берилган йўналишга параллель бўлган ватарларнинг ўртаси (28) текисликда бўлади. Бу текисликни **берилган йўналишга қўшма бўлган диаметрал текислик** дейилади.

Ҳар бир берилган m, n, p йўналишга аниқ диаметрал (28) текислик тўғри келади. Агарда $p = 0$ бўлса, (A) диаметри xOy текисликда бўлади ва бу ҳолда (28) текислик Oz ўқидан ўтади. Умуман, бош кесимлардан бирининг диаметрига қўшма бўлган диаметрал текислик шу кесимга перпендикуляр бўлган ўқдан ўтади.

Фараз қилайлик,

$$\frac{x}{m_1} = \frac{y}{n_1} = \frac{z}{p_1}, \quad \frac{x}{m_2} = \frac{y}{n_2} = \frac{z}{p_2} \tag{29}$$

эллипсоиднинг икки диаметри бўлсин ва

$$\frac{m_1x}{a^2} + \frac{n_1y}{b^2} + \frac{p_1z}{c^2} = 0, \quad \frac{m_2x}{a^2} + \frac{n_2y}{b^2} + \frac{p_2z}{c^2} = 0 \tag{30}$$

уларға нисбатан кўшма диаметрал текислик бўлсин. (29) қушма булганда улардан ҳар бири иккинчисининг қўшма текислигида бўлади. Бунинг учун (тўғри чизиқнинг текисликда булиш шарти):

$$\boxed{\frac{m_1 m_2}{a^2} + \frac{n_1 n_2}{b^2} + \frac{p_1 p_2}{c^2} = 0}$$

бўлиши керак; эллипсоид (30) диаметрларнинг ўзаро қўшма бўлиш шарти шундан иборат.

§ 139. БИР КОВАКЛИ ГИПЕРБОЛОИД

1. Иккинчи тартибли марказли сиртнинг энг содда тенгламасини оламиз:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + F = 0. \tag{1}$$

Ўтган параграфдаги текширишда бу тенгламада F нинг ишораси қолган коэффициентларининг ишорасига тескари фараз қилинган эди. Энди F нинг ишорасини қолган коэффициентларидан иккитасининг ишорасига тескари фараз қиламиз. Масалан, F нинг ишораси A_1 ва A_2 нинг ишорасига тескари бўлсин. Бу ҳолни текшириш мақсади билан F ни ўнг томонга ўтказиб, сўнгра тенгламанинг иккала томонини $-F$ га бўламиз:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 = -F,$$

$$\frac{A_1x^2}{-F} + \frac{A_2y^2}{-F} + \frac{A_3z^2}{-F} = 1,$$

ёки

$$\frac{x^2}{-\frac{F}{A_1}} + \frac{y^2}{-\frac{F}{A_2}} + \frac{z^2}{-\frac{F}{A_3}} = 1. \tag{2}$$

(1) тенгламанинг коэффициентлари тўғрисида қилинган фаразияга мувофиқ

$$-\frac{F}{A_1} > 0, \quad -\frac{F}{A_2} > 0, \quad -\frac{F}{A_3} < 0$$

бўлгани учун

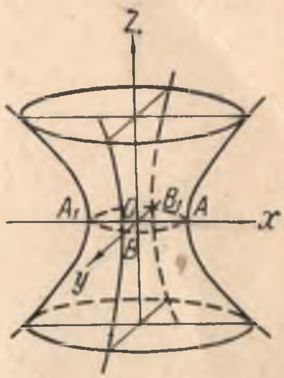
$$-\frac{F}{A_1} = a^2, \quad -\frac{F}{A_2} = b^2, \quad -\frac{F}{A_3} = -c^2 \tag{3}$$

фараз қиламиз. Бу ҳолда (2) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1} \tag{4}$$

Бу тенглама билан ифода қилинган сирт бир коваклн гиперболоид дейилади (шакл 196).

2. ~~Энди бир ковакли~~ гиперболоиднинг шаклини текширамиз. Бунинг учун унинг координата ўқлари билан учрашган нуқталарини ва координата текисликлари билан кесимларинн топамиз. Агар (4) да $y = 0$, $z = 0$ фараз қилинса $x = \pm a$ бўлади. Демак, бир ковакли гиперболоид xx_1 ўқи билаи $A(+a, 0, 0)$ ва $A_1(-a, 0, 0)$ нуқталарда учрашади; шунга ухшаш $x = 0$, $z = 0$ фараз қилинса, $y = \pm b$ булади. Демак, бир ковакли гиперболоид yy_1 ўқи билан $B(0, b, 0)$ ва $B_1(0, -b, 0)$ нуқталарда учрашади. Аниқланган нуқталар бир ковакли гиперболоиднинг бошлари дейилади. Агар $x = 0$, $y = 0$ фараз қилинса,



Шакл 196.

$$y = \pm\sqrt{-c^2} = \pm ci,$$

яъни бир ковакли гнперболоид zz_1 ўқи билан ҳеч қаерда учрашмайдн. Шунинг учун zz_1 бир ковакли гиперболоиднинг мавҳум ўқи дейилади.

Энди бир ковакли гиперболоиднинг координата текисликлари билан кесимларини текширамиз. Агар (4) тенгламада $z = 0$ фараз қилииса,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

бўлади. Шунга ўхшаш агар $y = 0$, сўнгра $x = 0$ фараз қилинса,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{6}$$

бўлади. (5) тенглама эллипс ифода қилади, демак, xOy текислиги бир ковакли гиперболоидни эллипс бўйича кесади; (6) тенгламалардан ҳар бири гипербола ифода қилади, демак, xOz ва yOz текислнклари бир ковакли гиперболоидни гипербола бўйича кесади.

3. Энди бир ковакли гиперболоидни координата текисликларига параллель бўлган текисликлар билан кесиб кўрамиз. Масалан, xOy текислигига параллель бўлган текисликнинг тенгламаси

$$z = k$$

бўлади (k — ўзгармас). Изланган кесимни аниқлаш учун бу тенглама билан бир ковакли гиперболоиднинг тенгламасини бирликда ечишга тўғри келади, $z = k$ ни (4) га қўйсак:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 1$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}$$

ёки

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(c^2+k^2)}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^2(c^2+k^2)}{c^2}} = 1$$

ёки

$$\frac{a^2(c^2+k^2)}{c^2} = a_1^2, \quad \frac{b^2(c^2+k^2)}{c^2} = b_1^2$$

фараз қилинса, тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1. \tag{7}$$

Бу тенглама эллипсни ифода қилади. k нинг абсолют қиймати ҳар қанча катта бўлса-да, бу тенглама ўз кучини сақлайди. Бу эса бир ковакли гиперболоиднинг xOy текислигидан юқорига ва қуйига қараб чексиз узоққа кетганлигини ва уни xOy текислигига параллель бўлган ҳар қандай текислик билан кесишиш натижасида эллипс ҳосил бўлишини кўрсатади.

Энди сиртни xOz текислигига параллель бўлган текислик билан кесиб кўрамиз. Бундай текисликнинг тенгламаси $y = k$ бўлади. Буни (4) тенгламага қўйиб, сунгра юқоридаги каби амаллар ижро қилинса,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2},\tag{8}$$

ёки

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(b^2-k^2)}{b^2}}-\frac{z^2}{\frac{c^2(b^2-k^2)}{b^2}}=1,$$

ёки

$$\frac{a^2(b^2-k^2)}{b^2}=a_1^2,\quad \frac{c^2(b^2-k^2)}{b^2}=a_1^2\tag{9}$$

фараз қилинса, тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{z^2}{c_1^2}=1\tag{10}$$

бўлади. Бу тенглама гиперболани ифода қилади; $|k|<b$ бўлганда ҳақиқий ўқи Ox ўқига параллель бўлган ва мавҳум ўқи Oz ўқига параллель бўлган гипербола ҳосил бўлади; $|k|>b$ бўлганда ҳақиқий ўқи Oz ўқига параллель ва мавҳум ўқи Ox ўқига параллель бўлган гипербола ҳосил бўлади. $|k|=b$ бўлганда (8) нинг ўнг томони нолга айланиб, тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,$$

ёки

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0,$$

бундан

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \quad\text{ва}\quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0,\tag{11}$$

яъни бу ҳолда (10) гипербола икки тўғри чизиққа ажралади. Шунга ўхшаш, сиртни yOz текисликка параллель бўлган текислик билан кесганда ҳамон ҳалиги каби натижалар келиб чиқади.

Энди бир ковакли гиперболоидни бирор ихтиёрий текислик билан кесиб кўрамиз. Фараз қилайлик, бу текисликнинг тенгламаси

$$Ax+By+Cz+D=0\tag{12}$$

бўлсин. Бу тенглама билан (4) тенглама бирликда изланган кесимни ифода қилади. (12) дан ($C\neq 0$):

$$z=-\frac{Ax+By+D}{C},$$

буни (4) га қуйилса,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(Ax+By+D)^2}{C^2c^2}=1,$$

ёки

$$\left(\frac{C^2}{a^2}-\frac{A^2}{c^2}\right)x^2+\left(\frac{C^2}{b^2}-\frac{B^2}{c^2}\right)y^2-2\frac{AB}{c^2}xy-$$

$$-2\frac{AD}{c^2}x-2\frac{BD}{c^2}y-\frac{D^2}{c^2}-C^2=0,$$

ёки

$$\frac{C^2}{a^2}-\frac{A^2}{c^2}=A_1,\quad \frac{C^2}{b^2}-\frac{B^2}{c^2}=C_1,\quad -\frac{AB}{c^2}=B_1,$$

$$-\frac{AD}{c^2}=D_1,\quad -\frac{BD}{c^2}=E_1,\quad -\frac{D^2}{c^2}-C^2=F_1$$

фараз қилинса:

$$A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0. \qquad (13)$$

Бу тенглама xOy текисликда иккинчи тартибли чизиқни ифода қилади. Бу чизиқнинг жинсини текшириш учун M ва Δ ни тузишга тўғри келади. Бизда

$$M=B_1^2-A_1C_1=$$

$$=\frac{A^2B^2}{c^4}-\left(\frac{C^2}{a^2}-\frac{A^2}{c^2}\right)\left(\frac{C^2}{b^2}-\frac{B^2}{c^2}\right)=$$

$$=(A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2)\cdot\frac{C^2}{a^2b^2c^2}; \qquad (14)$$

Δ ни тузганда унинг ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\Delta=-\frac{A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2-D^2}{a^2b^2c^2}\cdot C^4. \qquad (15)$$

(14) ва (15) га қараганда M ва Δ нинг қийматлари турлича бўлиши мумкин. Шунинг учун бир ковакли гиперболоидни турли текисликлар билан кесганда турли иккинчи тартибли чизиқлар ҳосил бўлиши (хусусий ҳолда иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлиши) мумкин.

4. Текислик билан бир ковакли гиперболоиднинг бир умумий нуқтаси бўлган ҳолда, яъни текислик сиртга уринма бўлганда $\Delta=0$ бўлади, ёки (15) га мувофиқ,

$$A^2a^2+B^2b^2-C^2c^2-D^2=0. \qquad (16)$$

Бу муносабатга асосланиб, бир ковакли гиперболоидга уринма бўлган текисликнинг тенгламасини тузиш мумкин. Ҳақиқатда (16) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\left(-\frac{Aa^2}{D}\right)^2 : a^2 + \left(-\frac{Bb^2}{D}\right)^2 : b^2 - \left(+\frac{Cc^2}{D}\right)^2 : c^2 = 1,$$

бунга қараганда, координаталари:

$$x_1 = -\frac{Aa^2}{D}, \quad y_1 = -\frac{Bb^2}{D}, \quad z_1 = -\frac{Cc^2}{D} \qquad (17)$$

бўлган нуқта (12) текисликнинг сиртга уриниш нуқтаси бўлади, чунки (16) таъмин этилганда (x_1, y_1, z_1) нуқтанинг координаталари (12) ни ва сиртнинг тенгламасини қаноатлантиради.

Уринма текисликнинг, яъни (12) нинг коэффициентлари (17) дан аниқланади:

$$A = -\frac{Dx_1}{a^2}, \quad B = -\frac{Dy_1}{b^2}, \quad C = +\frac{Dz_1}{c^2},$$

натижада бир ковакли гиперболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасидан ўтган уринма текисликнинг тенгламаси бундай бўлади:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = 1} \qquad (18)$$

Нормалнинг таърифига мувофиқ бир ковакли гиперболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасида тенгламаси бундай бўлади:

$$\frac{a^2(x - x_1)}{x_1} = \frac{b^2(y - y_1)}{y_1} = \frac{c^2(z - z_1)}{-z_1}. \qquad (19)$$

5. Бир ковакли гиперболоиднинг тенгламасида $a = b$ бўлган ҳолда (4) тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (20)$$

бўлади. Бу тенглама билан ифода қилинган сирт **айланма бир ковакли гиперболоид** дейилади, чунки у, тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

бўлган гиперболанинг ўз ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлади. Шу сабабдан айланма гиперболоиднинг xOy текислигига параллель бўлган текислик билан кесими айланадан иборат. Ҳақиқатда xOy текисликка параллель бўлган текисликнинг тенгламаси $z = k$ бўлади (k — узгармас сон). Буни (4) га қўйсак:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{k^2}{c^2} = 1,$$

ёки

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}=\frac{k^2+c^2}{c^2},$$

ёки

$$x^2+y^2=\frac{a^2(k^2+c^2)}{c^2};$$

бу эса маркази координаталар бошида булган ва радиуси

$$R=\frac{a}{c}\sqrt{k^2+c^2}$$

булган айланани ифода қилади. Бундаги k нинг қиймати ҳар қандай булиши мумкин:

$$-\infty<k<+\infty.$$

6. Энди бир ковакли гиперболоиднинг доиравий кесимларини излаймиз. Бунинг учун айнан § 138 даги йул билан муҳокама қилишга туғри келади.

Маркази координаталар бошида ва радиуси R булган сферани оламиз:

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

ёки

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=1. \tag{21}$$

Изланган кесимни аниқлаш мақсади билан (21) ни сиртнинг (4) тенгламасидан айирамиз:

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{R^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{R^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{R^2}\right)z^2=0.$$

Бу тенглама бир ковакли гиперболоид билан сферанинг узаро кесишиш чизиғидан утган сиртни ифода қилади.

Хусусий ҳолда бу сирт текисликлардан иборат булиши мумкин. Бунинг учун ҳалиги тенгламанинг чап томони биринчи даражали купайтувчиларга ажралиши лозим. Бу эса тенгламанинг коэффициентларидан бири нолга айланган ҳолда мумкин, яъни

$$R^2=a^2, \text{ ёки } R^2=b^2, \text{ ёки } R^2=-c^2;$$

буларга қараб, ҳалиги тенгламанинг куриниши қуйидагича булади:

$$\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)z^2=0,$$

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)x^2-\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{b^2}\right)z^2=0,$$

$$\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)y^2=0,$$

ёки буларни яна бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}y^2-\frac{a^2+c^2}{c^2}z^2=0,$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2+\frac{b^2+c^2}{c^2}z^2=0,$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2=0.$$

$a>b>c$ фараз қилганда бу тенгламалардан иккинчи ва учинчисининг чап томонлари икки квадратнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, улар икки ҳақиқий биринчи даражали кўпайтувчига ажралмайди. Биринчисини эса бундай ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}\right)\left(\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}\right)=0,$$

ёки бундан

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}-\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0,\\ \frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2}+\frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

Қилинган фаразга мувофиқ $a>b>c$ бўлгани учун (22) тенгламалардан ҳар бири ҳақиқий текисликни ифода қилади ва § 138 да қилинган муҳокамага мувофиқ булардан ҳар бири сферани, демак, бир ковакли гиперболоидни айлана бўйича кесади. Улар сиртнинг **бош доиравий кесимлари** дейилади.

Шунга ўхшаш (22) текисликларга параллель бўлган ҳар бир текисликнинг бир ковакли гиперболоид билан кесимлари ҳам айланадан иборат. Буни исбот қилиш мумкин бўлса-да, бироқ биз бу ерда бу масала устида тўхтамаймиз.

7. Бир ковакли гиперболоиднинг координаталар бошидан ўтган ҳар бир ватари тенг иккига бўлинади, яъни координаталар боши сиртнинг маркази бўлади. Буни исбот қилиш § 138 нинг 7-моддасидаги сўзларни такрор қилиш демакдир.

8. Энди сиртнинг берилган йўналишга параллель бўлган ватарлари ўрта нуқталарининг геометрик ўрнини топамиз. Фараз қилайлик (x_0, y_0, z_0) ўзгарувчи ватарларнинг ўртаси ва

$$x=mt+x_0,\ y=nt+y_0,\ z=pt+z_0 \qquad (23)$$

уларга нисбатан қўшма диаметрал текислик бўлсин. (26) қўшма бўлганда улардан ҳар бири иккинчисининг қўшма текислигида булади (§ 138). Бунинг учун (тўғри чизиқнинг текисликда бўлиш шарти):

$$\boxed{\frac{m_1m_2}{a^2}+\frac{n_1n_2}{b^2}-\frac{p_1p_2}{c^2}=0} \tag{28}$$

бўлиши керак; бир ковакли гиперболоид диаметрларининг ўзаро қўшма бўлиш шарти шундан иборат.

9. Бир ковакли гиперболоиднинг тенгламасини

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

ёки

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{29}$$

шаклида ёзиш мумкин. Фараз қилайлик, m ва n аниқмас параметр булсин. Бу ҳолда (29) ни қуйидаги биринчи даражали тенгламаларнинг кўпайтмасидан ҳосил бўлган деб фараз қилиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=m\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{m}\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right| \tag{30}$$

ва

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}&=n\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=\frac{1}{n}\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{aligned}\right| \tag{31}$$

(30) ва (31) даги тенгламалардан ҳар бири текислик ифода қилади, демак, булардаги ҳар бир жуфт текислик — тўғри чизиқ ифода қилади; фараз қилайлик (x_1, y_1, z_1) нуқта (30) ёки (31) даги тўғри чизиқда бўлсин, яъни:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}&=m\left(1-\frac{y_1}{a}\right)\\ \frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}&=\frac{1}{m}\left(1+\frac{y_1}{b}\right)\end{aligned}\right| \tag{32}$$

унинг тенгламалари бўлсин. Бунинг (4) сирт билан учрашган нуқталарини аниқлаш учун (4) ва (23) ни бирликда ечишга тўғри келади. Натижада

$$Mt^2 + 2Nt + P = 0, \tag{24}$$

бунда

$$M = \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} - \frac{p^2}{c^2},$$

$$N = \frac{mx_0}{a^2} + \frac{ny_0}{b^2} - \frac{pz_0}{c^2},$$

$$P = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{c^2} - 1.$$

§ 138 нинг 8-моддасидаги йўл билан муҳокама қилганда, кўрамизки (24) нинг t_1 ва t_2 илдизларининг йиғиндиси нолга айланади:

$$t_1 + t_2 = 0.$$

Иккинчи томондан (24) тенгламанинг t_1 ва t_2 илдизларининг йиғиндиси нолга тенг бўлиши учун $N = 0$ ёки

$$\frac{mx_0}{a^2} + \frac{ny_0}{b^2} - \frac{pz_0}{c^2} = 0$$

бўлиши керак. Изланган геометрик ўриннинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади. Бу тенгламада x_0, y_0, z_0 исталган ватарнинг ўртасидаги нуқтанинг координаталари эди. Шунинг учун уларнинг ўрнига x, y, z ёзилса, тенгламанинг кўриниши

$$\boxed{\frac{mx}{a^2} + \frac{ny}{b^2} - \frac{pz}{c^2} = 0} \tag{25}$$

булади. Бу тенглама координаталар бошидан ўтган текисликни ифода қилади. Демак, берилган йўналишга параллель бўлган ватарларнинг ўртаси (25) текисликда бўлади. Бу **текислик берилган йўналишга қўшма бўлган диаметрал текислик** дейилади.

Фараз қилайлик,

$$\frac{x}{m_1} = \frac{y}{n_1} = \frac{z}{p_1}, \quad \frac{x}{m_2} = \frac{y}{n_2} = \frac{z}{p_2} \tag{26}$$

бир ковакли гиперболоиднинг икки диаметри бўлсин ва

$$\frac{m_1x}{a^2} + \frac{n_1y}{b^2} - \frac{p_1z}{c^2} = 0, \quad \frac{m_2x}{a^2} + \frac{n_2y}{b^2} - \frac{p_2z}{c^2} = 0 \tag{27}$$

тескари бўлсин. Бу ҳолда ўтган параграфларда қилинган муҳокама ёрдами билан (1) тенгламани:

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad (2)$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама билан ифода қилинган сирт **икки ковакли гиперболоид** дейилади.

2. Энди сиртнинг шаклини текширамиз. Агар $x=0$, $y=0$ фараз қилинса, $z=\pm c$ бўлади. Демак, zz' ўқи сиртни $(0, 0, c)$ ва $(0, 0, -c)$ нуқталарда кесади. Агар $y=0$, $z=0$ фараз қилинса, $x=\pm ai$ бўлади. Шунга ўхшаш агарда $x=0$, $z=0$ фараз қилинса, $y=\pm bi$ бўлади. Демак, сиртни xx' ва yy' ўқлари кесмайди.

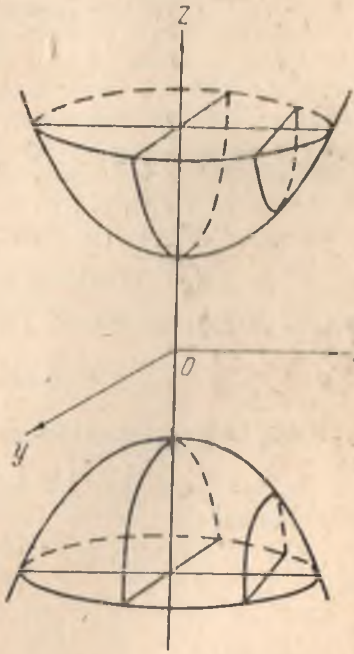
Энди сиртнинг координата текисликлари билан кесимларини излаймиз. Кетма-кет $x=0$, $y=0$, $z=0$ фараз қилинса:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

бўлади. Бу тенгламалардан биринчиси yOz текисликдаги ва иккинчиси xOz текисликдаги гиперболани ифода қилади; учинчи тенгламани бўлса x ва y нинг ҳеч қандай ҳақиқий қийматлари қаноатлантира олмайди, яъни xOy текислиги сирт билан учрашмайди (шакл 198).



Шакл 198.

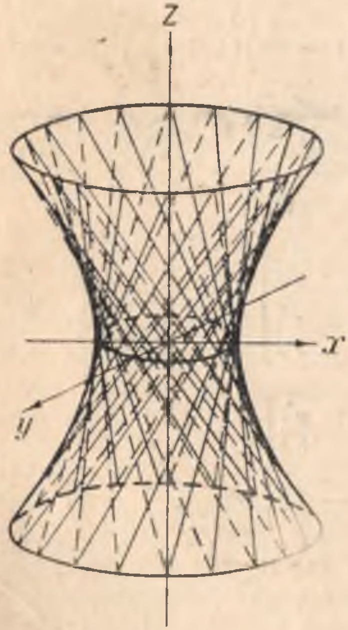
3. Энди сиртнинг координата текисликларига параллель бўлган текисликлар билан кесимларини излаб кўрамиз.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1}{a}-\frac{z_1}{c}&=n\left(1+\frac{y_1}{b}\right)\\ \frac{x_1}{a}+\frac{z_1}{c}&=\frac{1}{n}\left(1-\frac{y_1}{b}\right)\end{aligned}\right| \qquad (33)$$

(32) ёки (33) даги ҳар бир жуфт тенгликларни ўзаро кўпайтирганда, ушбу айният келиб чиқади:

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=1-\frac{y_1^2}{b^2}, \qquad (34)$$

яъни (x_1, y_1, z_1) нуқта бир ковакли гиперболоидда эканлиги кўринади. (30) ёки (31) чизиқларда олинган (x_1, y_1, z_1) нуқта ихтиёрий бўлгани учун m ва n нинг ҳар бир қийматида (30) ва (31) тўғри чизиқлардан ҳар бири гиперболоидда бўлади. m ва n га турли қийматлар бериш натижасида (30) ва (31) дан икки система тўғри чизиқлар ҳосил бўлади ва булар гиперболоидда бўлади. Гиперболоидни шу тўғри чизиқларнинг геометрик ўрни фараз қилиш мумкин. Шунинг учун уларни гиперболоиднинг тўғри чизиқли ясовчилари дейилади (шакл 197).



Шакл 197.

Бир системанинг ясовчилари ўзаро кесишмайди ва ҳар хил системаларнинг ясовчилари ўзаро кесишади. Машқ тариқасида буни исбот қилишни ўқувчига тавсия қиламиз.

§ 140. ИККИ КОВАКЛИ ГИПЕРБОЛОИД

1. Иккинчи тартибли марказли сиртнинг энг содда тенгламасини оламиз:

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+F=0. \qquad (1)$$

Фараз қилайлик, бу тенгламада F нинг ишораси қолган коэффициентларидан бирининг, масалан, A_3 нинг ишорасига

$$M = (A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2)\frac{C^2c^2}{a^2b^2c^2}, \qquad (5)$$

$$\Delta = (A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 + D^2)\frac{C^4}{a^2b^2c^2}, \qquad (6)$$

M ва Δ нинг тузилишига қараганда уларнинг қийматлари турлича бўлиши мумкин. Шунинг учун икки ковакли гиперболоидни турли текисликлар билан кесганда турлича иккинчи тартибли чизиқлар ҳосил бўлиши мумкин.

4. Текислик билан сиртнинг бир умумий нуқтаси бўлган ҳолда, яъни текислик сиртга уринма бўлганда $\Delta = 0$ бўлади, ёки (6) га асосан

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2c^2 + D^2 = 0. \qquad (7)$$

Бу шартни назарда тутиб, § 138 даги каби муҳокама қилганда кўрамизки, координаталари

$$x_1 = \frac{Aa^2}{D},\ y_1 = \frac{Bb^2}{D},\ z_1 = -\frac{Cc^2}{D} \qquad (8)$$

бўлган нуқта (3) текисликнинг (2) сиртга уриниш нуқтаси бўлади ва булардан (3) нинг коэффициентлари аниқланади:

$$A = \frac{Dx_1}{a^2},\ B = \frac{Dy_1}{b^2},\ C = -\frac{Dz_1}{a^2}; \qquad (9)$$

натижада икки ковакли гиперболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасидан ўтган уринма текисликнинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\boxed{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - \frac{zz_1}{c^2} = -1} \qquad (10)$$

Нормалнинг таърифига мувофиқ икки ковакли гиперболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасида унинг тенгламаси бундай бўлади

$$\frac{a^2(x - x_1)}{x_1} + \frac{b^2(y - y_1)}{y_1} = \frac{c^2(z - z_1)}{-z_1}. \qquad (11)$$

5. Икки ковакли гиперболоиднинг тенгламасида $a = b$ фараз қилинса, унинг кўриниши

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (12)$$

xOy текисликка параллель булган текислик билан кесимини топиш учун $z=k$ фараз қилиб, бу тенглама билан сиртнинг тенгламасини бирликда ечамиз. Бу ҳолда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{k^2}{c^2}=-1,$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2-c^2}{c^2},$$

ёки

$$\frac{x^2}{\frac{a^2(k^2-c^2)}{c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^2(k^2-c^2)}{c^2}}=1.$$

Бу эса xOy текисликдаги эллипсни ифода қилади. Лекин $|k|>c$ булган ҳолда эллипс ҳақиқий булиб, акс ҳолда у мавҳум бўлади, яъни $|k|<c$ булганда текислик сирт билан учрашмайди. $|k|=c$ булганда эллипс нуқтага айланади. Сиртнинг yOz текисликка ёки xOz текисликка параллель бўлган текислик билан кесими гиперболадан иборатдир. Буни исбот қилиш ўқувчнга тавсия қилинади.

Энди сиртни бирор ихтиёрий текислик билан кесиб кўрамиз. Фараз қилайлик, бу текисликнинг тенгламаси

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (3)$$

булсин. $C\neq 0$ фараз қилиб, (3) ни z га нисбатан ечилса,

$$z=-\frac{Ax+By+D}{C}$$

ва буни сиртнинг тенгламасига қуйилса,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(Ax+By+D)^2}{C^2c^2}=-1$$

ёки

$$A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0 \qquad (4)$$

бунда

$$A_1=\frac{C^2}{a^2}-\frac{A^2}{c^2},\quad B_1=-\frac{AB}{c^2},$$

$$C_1=\frac{C^2}{b^2}-\frac{B^2}{c^2},\quad D_1=-\frac{AD}{c^2},$$

$$E_1=-\frac{BD}{c^2},\quad F_1=-\frac{D^2}{c^2}+C^2.$$

(4) тенглама xOy текисликда иккинчи тартибли чизиқни ифода қилади. Буни аниқлаш учун M ва Δ ни тузганда, улар қуйидагича бўлади:

шиш чизиғидан ўтган сиртни ифода қилади. Бу тенгламанинг коэффициентларидан бири нолга айланган ҳолда у икки текисликни ифода қилади. Агар кетма-кет

$$R^2 = -a^2,\ R^2 = -b^2,\ R^2 = c^2 \tag{16}$$

фараз қилинса, бу чоғда (15) нинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\frac{y^2(a^2-b^2)}{b^2} - \frac{z^2(a^2+c^2)}{c^2} = 0, \tag{17}$$

$$\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^2} + \frac{z^2(b^2+c^2)}{c^2} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{x^2(a^2+c^2)}{a^2} + \frac{y^2(b^2+c^2)}{b^2} = 0. \tag{19}$$

$a > b$ фараз қилиб, бу тенгламалардан биринчисини бундай ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2} - \frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}\right)\left(\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2} + \frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2} - \frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2} = 0. \\ &\frac{y}{b}\sqrt{a^2-b^2} + \frac{z}{c}\sqrt{a^2+c^2} = 0. \end{aligned}\right| \tag{20}$$

Бу тенгламалардан ҳар бири текисликни ифода қилади ва икки ковакли гиперболоидни айланалар бўйича кесади. Булар сиртнинг б о ш д о и р а в и й к е с и м л а р и дейилади; (20) текисликларга параллель бўлган ҳар бир текислик ҳам сиртни айланалар бўйича кесади.

Энди (18) ва (19) тенгламаларни оламиз. Бу тенгламаларнинг чап томонларини икки квадратнинг йиғиндиси фараз қилиш мумкин. Шунинг учун буларнинг чап томонлари фақат биринчи даражали мавҳум кўпайтувчиларга ажралиши мумкин. Демак, буларнинг ҳар бири икки мавҳум текисликни ифода қилади, — доиравий кесим бермайди.

7. Икки ковакли гиперболоиднинг координаталар бошидан ўтган ҳар бир ватари у нуқтада тенг иккига бўлинади, яъни координаталар боши сиртнинг маркази бўлади. Буни исбот қилиш, § 138 нинг 7-моддасидаги сўзларни такрор қилиш демакдир.

8. § 138 нинг 8-моддасида кўрсатилган йўл билан давом

бўлади. Бу тенглама билан ифода қилинган сирт икки ковакли айланма гиперболоид дейилади, чунки у, тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

булган гиперболанинг ўз ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлади.

Бунинг xOy текисликка параллель булган текислик билан кесими айланадан иборат. Ҳақиқатда, бундай текисликнинг тенгламаси $z=k$ бўлади. Буни (12) га қўйилса:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{k^2}{c^2}=-1$$

ёки

$$x^2+y^2=a^2\left(\frac{k^2}{c^2}-1\right),$$

бу эса маркази координаталар бошида ва радиуси

$$R=a\sqrt{\frac{k^2}{c^2}-1}$$

бўлган айланадан иборат. Албатта, k нинг c га муносабати тўғрисида юқорида қилинган мулоҳаза бу ерда ҳам ўз кучини сақлайди.

6. Энди икки ковакли гиперболоиднинг доиравий кесимларини излаймиз. Бунинг учун маркази координаталар бошида ва радиуси R бўлган сферани оламиз:

$$x^2+y^2+z^2=R^2, \tag{13}$$

ёки

$$\frac{x^2}{R^2}+\frac{y^2}{R^2}+\frac{z^2}{R^2}=-1.$$

Сиртнинг тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \tag{14}$$

Иккала тенгламани қўшиш натижасида ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{R^2}\right)x^2+\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{R^2}\right)y^2-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{R^2}\right)z^2=0. \tag{15}$$

Бу тенглама (14) сирт билан (13) сферанинг ўзаро кеси-

Тенгламанинг тузилишига қараганда бу сирт, яъни конус координаталар бошидан ўтади.

2. Энди (2) конуснинг координата текисликлари билан кесимларини текширамиз. Масалан, xOy текислиги билан кесимини топиш учун $z = 0$ фараз қиламиз. Бу ҳолда (2) нинг кўриниши

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

бўлади. Бу тенглама ёлғиз $x = 0$, $y = 0$ қийматларни қаноатлантиради. Демак, xOy текислиги конусни координаталар бошида учратади.

Шунга ўхшаш агар $y = 0$ фараз қилинса, (2) тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

бўлади. Бу тенгламани бундай ёзиш мумкин:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0.$$

ёки

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0. \qquad (3)$$

Бу тенгламалардан ҳар бири xOz текислигида координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқни ифода қилади.

Агар (2) тенгламада $x = 0$ фараз қилинса, унинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

ёки

$$\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 0,$$

ёки

$$\frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0. \qquad (4)$$

Бу тенгламалардан ҳар бири yOz текислигида координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқни ифода қилади. (3) ва (4) чизиқлар конуснинг ясовчиларидан иборат.

3. Энди конуснинг координата текисликларига параллель бўлган текисликлар билан кесиб кўрамиз. Масалан, конусни

этганда (m, n, p) йўналишга қўшма бўлган икки ковакли гиперболоиднинг диаметрал текислик тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$-\frac{mx}{a^2}-\frac{ny}{b^2}+\frac{pz}{c^2}=0; \tag{21}$$

фараз қилайлик,

$$\frac{x}{m_1}=\frac{y}{n_1}=\frac{z}{p_1}, \qquad \frac{x}{m_2}=\frac{y}{n_2}=\frac{z}{p_2} \tag{22}$$

икки ковакли гиперболоиднинг икки диаметри бўлсин ва

$$-\frac{m_1x}{a^2}-\frac{n_1y}{b^2}+\frac{p_1z}{c^2}=0, \quad -\frac{m_2x}{a^2}-\frac{n_2y}{b^2}+\frac{p_2z}{c^2}=0$$

уларга нисбатан қўшма диаметрал текислик бўлсин. Бу ҳолда иккала диаметрнинг қўшма булиш шарти қуйидагича бўлади (§ 139):

$$-\frac{m_1m_2}{a^2}-\frac{n_1n_2}{b^2}+\frac{p_1p_2}{c^2}=0. \tag{23}$$

§ 141. КОНУС

1. Иккинчи тартибли марказли сиртнинг тенгламасида $D=0$ фараз қилинса, унинг кўриниши

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2=0 \tag{1}$$

бўлади. Бу тенгламада ҳамма коэффициентларнинг ишоралари бир хил бўлган ҳолда у ёлғиз (0, 0, 0) нуқтани ифода қилади, Шунинг учун тенгламани текширишда коэффициентларидан бирининг ишорасини қолган иккитасининг ишорасига тескари фараз қиламиз. Бу ҳолда (1) тенглама конусни ифода қилади.

Фараз қилайлик

$$A_1>0,\ A_2>0,\ A_3<0$$

бўлсин. Агар

$$A_1=\frac{1}{a^2},\quad A_2=\frac{1}{b^2},\quad A_3=-\frac{1}{c^2}$$

фараз қилинса, (1) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{2}$$

$z = k$ текислик билан, яъни xOy текисликка параллель текислик билан кесиб курамиз. Бу ҳолда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{k^2}{c^2} = 0,$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2},$$

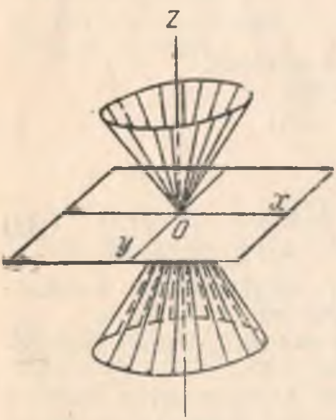
ёки

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ak}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{bk}{c}\right)^2} = 1.$$

Бу тенглама ярим ўқлари

$$a_1 = \frac{ak}{c}, \quad b_1 = \frac{bk}{c}$$

бўлган эллипсни ифода қилади. Демак, (2) конуснинг xOy текисликка параллель текислик билан кесими эллипсдан иборат (шакл 199).



Шакл. 199.

Энди (2) конусни yOz текисликка параллель текислик билан кесамиз. Бундай текисликнинг тенгламаси умуман $x = k$ бўлади. Бунинг билан (2) ни бирликда ечганда

$$\frac{k^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{k^2}{a^2},$$

ёки

$$\frac{z^2}{\left(\frac{ck}{a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{bk}{a}\right)^2} = 1.$$

Бу тенглама гиперболани ифода қилади. Демак, (2) конуснинг yOz текисликка параллель текислик билан кесими гиперболадан иборат. Шунга ўхшаш (2) конуснинг xOz текисликка параллель текислик билан кесими ҳам гиперболадан иборат.

Энди (2) конусни ихтиёрий текислик билан кесиб кўрамиз:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{5}$$

бундан ($C \neq 0$):

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C} \tag{6}$$

ёки буни (2) га қўйсак,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(Ax + By + D)^2}{C^2c^2} = 0,$$

ёки

$$A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0, \tag{7}$$

бунда

$$A_1 = \frac{C^2}{a^2} - \frac{A^2}{b^2}, \quad B_1 = -\frac{AB}{c^2},$$

$$C_1 = \frac{C^2}{b^2} - \frac{B^2}{c^2}, \quad D_1 = -\frac{AD}{c^2},$$

$$E_1 = -\frac{ED}{c^2}, \quad F_1 = -\frac{D^2}{c^2};$$

бу ерда

$$M = B_1^2 - A_1C_1 =$$

$$= (A^2a^2 + B^2 - C^2c^2)\frac{C^4}{a^2b^2c^2}. \tag{8}$$

M нинг тузилишига қараганда унинг қиймати турлича бўлиши мумкин (нолдан катта ёки нолдан кичик ёки нолга тенг). Демак, конуснинг ихтиёрий текислик билан кесими турли иккинчи тартибли чизиқ бўла олади.

4. Конуснинг тенгламаси билан гиперболоидларнинг тенгламалари орасидаги фарқи уларнинг озод ҳадида булгани учун § 138, 139 да қилинган муҳокамаларга асосан, (2) конуснинг доиравий кесимлари ушбу тенгламалар билан аниқланади:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{b}\sqrt{a^2 - b^2} - \frac{z}{c}\sqrt{a^2 + c^2} = 0 \\ \frac{y}{b}\sqrt{a^2 - b^2} + \frac{z}{c}\sqrt{a^2 + c^2} = 0 \end{aligned}\right|$$

кесимларини текширамиз. Агар (4) да $z = 0$ фараз қилинса,

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = 0$$

бўлади. Бу тенгламани ёлгиз $x = 0$, $y = 0$ қаноатлантиради. Демак, эллиптик параболоид xOy текисликни координаталар бошида учратади, ёки бошқача қилиб айтганда, xOy текислиги координаталар бошида сиртга уринма бўлади.

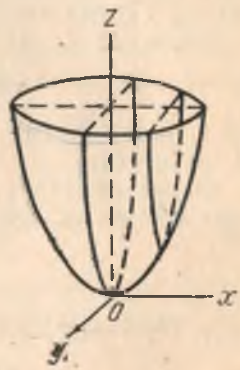
Шунга ўхшаш агар (4) да $y = 0$ фараз қилинса,

$$z = \frac{x^2}{2q}, \quad \text{ёки} \quad x^2 = 2pz,$$

$x = 0$ фараз қилинса,

$$z = \frac{y^2}{2q} \text{ ёки } y^2 = 2qz$$

бўлади. Демак, сиртнинг xOz ва yOz текисликлар билан кесимлари параболалардан иборат (шакл 200). O (0, 0, 0) нуқта сиртнинг боши дейилади.



Шакл. 200

3. Энди сиртнинг координата текисликларига параллель бўлган текисликлар билан кесимларини текширамиз. Агар $z = k$ фараз қилинса, (4) нинг кўриниши

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = k,$$

ёки

$$\frac{x^2}{2kp} + \frac{y^2}{2kq} = 1$$

бўлади: $k > 0$ бўлганда бу тенглама ҳақиқий эллипсни ифода қилади.

Агарда $y = k$ фараз қилинса,

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{k^2}{2q},$$

ёки

$$x^2 = 2p\left(z - \frac{k^2}{2q}\right), \tag{5}$$

ва $x = k$ фараз қилинса,

Агар (2) тенгламада а $= b$ фараз қилинса, у тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

бўлади. Бу конус доиравий конус дейилади, чуики унинг xOy текисликка параллель бўлган ҳамма кесимлари айланалардан иборат.

§ 142. ЭЛЛИПТИК ПАРАБОЛОИД

1. Иккинчи тартибли марказсиз сиртнинг энг содда тенгламасини оламиз:

$$A_1x^2+A_2y^2+2Cz=0. \tag{1}$$

Бу тенглама билан ифода қилинган сиртнинг шакли ундаги коэффициентлариинг ишораларига боғлиқдир.

Фараз қилайлик, (1) тенгламада A_1 ва A_2 коэффициентларининг ишоралари бир хил бўлсин. Бу ҳолда (1) теиглама ифода қилган сирт **эллиптик параболоид** дейилади.

Тенгламадаги C нинг ишорасини A_1 ва A_2 нинг ишорасига тескари фараз қилиб, C нинг ўз ишорасини ҳамавақт мусбат фараз қилиш мумкин, (1) тенгламани z га нисбатан ечганда:

$$z=-\frac{A_1x^2}{2C}-\frac{A_2y^2}{2C},$$

ёки

$$z=\frac{x^2}{-\frac{2C}{A_1}}+\frac{y^2}{-\frac{2C'}{A_2}} \tag{2}$$

ёки

$$-\frac{C}{A_1}=p, \quad -\frac{C'}{A_2}=q \tag{3}$$

фараз қилинса, (2) нинг, демак (1) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{z=\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}} \tag{4}$$

Юқорида (1) тенгламанинг коэффициентлари тўғрисида қилинган фаразга мувофиқ $p>0$ ва $b>0$ бўлади.

2. Энди (4) сиртнинг координата текисликлари билан

$$z = \frac{k^2}{2p} + \frac{y^2}{2q},$$

ёки

$$y^2 = 2q\left(z - \frac{k^2}{2p}\right). \tag{6}$$

(5) ва (6) тенгламалардан ҳар бири параболани ифода қилади. Демак, xOz текисликларга параллель бўлган текисликлар сиртни кесганда парабола ҳосил бўлади.

Энди сиртни ихтиерий текислик билан кесиб кўрамиз:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{7}$$

Бу ерда биз айрим икки ҳолни текшириб курамиз: 1) $C \neq 0$ ва 2) $C = 0$.

Фараз қилайлик, $C \neq 0$, яъни текислик Oz ўқига параллель бўлмасин. Бу ҳолда (7) дан

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C};$$

буни (4) га қўйсак,

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} + \frac{Ax + By + D}{C} = 0. \tag{8}$$

Бу чизиқнинг жинсини текшириш учун M ни тузамиз:

$$M = B_1^2 - A_1C_1 = -\frac{1}{2p}\cdot\frac{1}{2q} < 0,$$

демак, изланган кесим эллипсдан иборат.

Энди иккинчи ҳолни текширамиз: $C = 0$. Бу ҳолда (7) нинг кўриниши

$$Ax + By + D = 0 \tag{9}$$

бўлади, бундан

$$y = -\frac{Ax + D}{B};$$

буни (4) га қўйсак, тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{(Ax + D)^2}{2B^2q} = z,$$

ёки

$$\left(\frac{B^2}{2p} + \frac{A^2}{2q}\right)x^2 + \frac{AD}{q}x - B^2z + \frac{D^2}{2q} = 0 \tag{10}$$

бўлади. Бу эса парабола ифода қилади, чунки бунда

$$M = B_1^2 - A_1C_1 = 0.$$

Шунинг билан, кесувчи текислик Oz ўқига параллель бўлган ҳолда изланган кесим параболадан иборат булади.

Агар $p = q$ булса. (4) нинг кўриниши

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0$$

булади ва бу ҳолда сирт айланма параболоид дейилади. Бу сиртнинг ҳар қандай $z = k > 0$ текислик билан кесимлари айланалардан иборатдир. Бу ҳолда сиртни xOz текисликдаги параболани Oz ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган деб фараз қилиш мумкин.

4. Юқорида қилинган муҳокамалардан маълумки, (7) текисликнинг (4) сиртга уринма бўлиши учун (8) да $\Delta = 0$ бўлиши керак, ёки

$$\Delta = A^2p + B^2q - 2CD = 0. \tag{11}$$

Бу муносабатга асосланиб, эллиптик параболоидга уринма бўлган текисликнинг тенгламасини тузиш мумкин. Ҳақиқатда, (11) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\left(-\frac{Ap}{C}\right)^2 : 2p + \left(-\frac{Bq}{C}\right)^2 : 2q = \frac{D}{C},$$

бунга қараганда координаталари:

$$x_1 = -\frac{Ap}{C}, \ y_1 = -\frac{Bq}{C}, \ z_1 = \frac{D}{C} \tag{12}$$

бўлган нуқта (7) текисликнинг сиртга уриниш нуқтаси бўлади, чунки (11) таъмин этилганда (x_1, y_1, z_1) нуқтанинг координаталари (7) ни ва сиртнинг тенгламасини қаноатлантиради. Уринма текисликнинг, яъни (7) нинг коэффициентлари (12) дан аниқланади:

$$A = -\frac{Cx_1}{p}, \ B = -\frac{Cy_1}{q}, \ D = Cz_1,$$

натижада эллиптик параболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасидан ўтган уринма текисликнинг тенгламаси бундай булади:

$$\boxed{\frac{xx_1}{p} + \frac{yy_1}{q} = z + z_1.} \tag{13}$$

Нормалнинг таърифига мувофиқ эллиптик параболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасида унинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{p(x-x_1)}{x_1} = \frac{q(y-y_1)}{y_1} = \frac{z-z_1}{-1}. \tag{14}$$

5. Энди эллиптик параболоиднинг доиравий кесимларини излаймиз. Бунинг учун маркази эллиптик параболоиднинг ўқида ва ўзи xOy текисликка урима булган ушбу сферани оламиз:

$$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2,$$

ёки

$$\frac{x^2}{2R} + \frac{y^2}{2R} + \frac{z^2}{2R} = z; \tag{15}$$

сиртнинг, яъни эллиптик параболоиднинг тенгламаси бундай эди:

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z. \tag{16}$$

§ 137 да кўрсатилган йўл билан давом қилиб, (16) дан (15) ни айирамиз:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{R}\right)x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{R}\right)y^2 - \frac{z^2}{2R} = 0. \tag{17}$$

Бу тенглама эллиптик параболоид билан (15) сферанинг ўзаро кесишиш чизиғи устидан ўтган сиртни ифода қилади. Бу сирт текислик бўлган ҳолда доиравий кесим ҳосил бўлади (§ 138). Бу эса (17) тенгламанинг чап томони 1-даражали кўпайтувчиларга ажралганда мумкин. Бунинг учун (17) тенгламанинг коэффициентларидан бири ноль бўлиши керак, яъни:

$$R = p, \text{ ёки } R = q, \text{ ёки } R = \infty; \tag{18}$$

буларга қараб, (17) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)y^2 - \frac{z^2}{p} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)x^2 - \frac{z^2}{q} = 0,$$

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 0,$$

ёки буларни бундай ёзиш мумкин:

$$\frac{(p-q)\,y^2}{q}-z^2=0,$$

$$\frac{(p-q)\,x^2}{p}+z^2=0,$$

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0,$$

$p>q$ фараз қилганда бу тенгламалардан иккинчи ва учинчисининг чап томони икки квадратнинг йиғиндисидан иборат бўлиб, улар икки ҳақиқий биринчи даражали кўпайтувчиларга ажралмайди. Биринчиси бўлса, уни бундай ёзиш мумкин:

$$\left(y\sqrt{\frac{p-q}{q}}-z\right)\left(y\sqrt{\frac{p-q}{q}}+z\right)=0,$$

ёки бундан:

$$y\sqrt{\frac{p-q}{q}}-z=0,\quad y\sqrt{\frac{p-q}{q}}+z=0. \tag{19}$$

$p>q$ бўлгани учун (19) тенгламалардан ҳар бири ҳақиқий текисликни ифода қилади ва § 138 да қилинган муҳокамага мувофиқ булардан ҳар бири сферани, демак, эллиптик параболоидни айлана бўйича кесади. Улар сиртнинг **бош доиравий кесимлари** дейилади.

Шунга ўхшаш (19) текисликларга параллель бўлган ҳар бир текисликнинг эллиптик параболоид билан кесимлари ҳам айланалардан иборат. Буни исбот қилиш мумкин.

6. § 138 нинг 8-моддасида кўрсатилган йўл билан давом этганда $(m,\ n,\ p')$ йўналишга қўшма бўлган эллиптик параболоиднинг диаметрал текислик тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{mx}{p}+\frac{ny}{q}-p'=0. \tag{20}$$

Йўналишларнинг орасида энг муҳими $p'=0$, яъни эллиптик параболоиднинг ўқига перпендикуляр бўлган йўналиш саналади. Бу ҳолда (20) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{mx}{p}+\frac{ny}{q}=0. \tag{21}$$

7. Энди маълум шарт билан эллиптик параболоидни ва

тенгламасидаги A_1 ва A_2 коэффициентларининг ишоралари ҳар хил булса, бу ҳолда у тенглама гиперболик параболоид номли сиртни ифода қилади.

Фараз қилайлик, $A_1 > 0$ ва $A_2 < 0$ бўлсин; масала аниқ бўлиши учун $C < 0$ фараз қиламиз (акс ҳолда Oz ўқининг йўналишини ўзгартиш мумкин). Шунинг учун тенгламани z га нисбатан ечиб, сўнгра (§ 142):

$$-\frac{C}{A_1} = p > 0, -\frac{C}{A_2} = -q < 0 \tag{2}$$

фараз қилинса, (1) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\boxed{z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}} \tag{3}$$

2. Сиртнинг шаклини текшириш учун уни энг аввал координата текисликлари билан кесиб кўрамиз. Агар $z = 0$ фараз қилинса, (3) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0 \text{ ёки } \quad \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 0,$$

ёки

$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 0,$$

ё[illegible]

$$\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} = 0, \quad \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} = 0. \tag{4}$$

Бу тенгламалардан ҳар бири xOy текисликда координаталар бошидан ўтган тўғри чизиқни ифода қилади.

Агар $y = 0$, сўнгра $x = O$ фараз қилинса:

$$z = \frac{x^2}{2p} \text{ ёки } x^2 = 2pz,$$

$$z = -\frac{y^2}{2q} \text{ ёки } y^2 = -2qz;$$

демак, сиртнинг xOz ва yOz текисликлар билан кесимлари параболалардан иборат.

3. Энди сиртнинг координата текисликларига параллель бўлган текисликлар билан кесимларини текширамиз. Агар (3) да $z = k$ фараз қилинса,

эллипсоидни ўзаро солиштириб кўрамиз. Бунинг учун энг аввал координата ўқларининг йўналишларини сақлаб, координаталар бошини эллипсоиднинг $(-a, 0, 0)$ нуқтасига келтирамиз. Бу ҳолда координаталар алмаштириш формулалари бундай бўлади:

$$x = x_1 - a,\ y = y_1,\ z = z_1; \tag{22}$$

булар эллипсоиднинг тенгламасига қўйилса:

$$\frac{(x_1 - a)^2}{q^2} + \frac{y_1^2}{p^2} = \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

ёки

$$\frac{x_1^2 - 2ax_1 + a^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

ёки

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^3} + \frac{z_1^2}{c^2} = \frac{2x_1}{a},$$

ёки

$$\frac{x_1^2}{2a} + \frac{ay_1^2}{2b^2} + \frac{az_1^2}{2c^3} = x_1,$$

ёки

$$\frac{x_1^2}{2a} + y_1^2 : 2\frac{b^2}{a} + z_1^2 : 2\frac{c^2}{a} = x_1. \tag{23}$$

Фараз қилайлик, эллипсоиднинг ўқлари чексиз ўссин, лекин шу билан бирга

$$\lim \frac{b^2}{a^2} = p,\ \lim \frac{c^2}{a} = q \tag{24}$$

чекли бўлсин. Бу ҳолда (23) нинг кўриниши

$$\frac{y_1^2}{2p} + \frac{z_1^2}{2q} = x_1$$

бўлади, яъни эллиптик параболоид беради (унинг ўқи Ox). Демак, эллипсоиднинг ўқлари чексиз ўсган ҳолда (24) эътиборга олинса, унинг лимити эллиптик параболоид бўлади.

§ 143. ГИПЕРБОЛИК ПАРАБОЛОИД

1. Агарда иккинчи тартибли марказсиз сиртнинг ушбу

$$A_1x^2 + A_2y^2 + 2Cz = 0 \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = k,$$

ёки

$$\frac{x^2}{2pk} - \frac{y^2}{2qk} = 1,$$

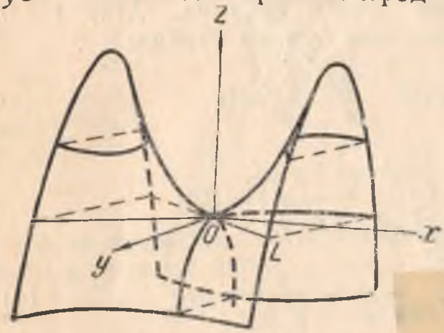
бу эса xOy текисликда гипербола ифода қилади.

Агарда $y = l$, сўнгра $x = m$ фараз қилинса, (3) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{l^2}{2q}, \text{ ёки } x^2 = 2p\left(z + \frac{l^2}{2q}\right);$$

$$z = \frac{m^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}, \text{ ёки } y^2 = -2p\left(z - \frac{m^2}{2p}\right);$$

бу тенгламалардан биринчиси xOz текисликда ва иккинчиси yOz текисликда парабола ифода қилади (шакл 201).



Шакл 201.

Энди сиртни ихтиёрий текислик билан кесиб кўрамиз:

$$Ax + By + Cz + \\ + D = 0. \qquad (5)$$

Бу ерда биз айрим икки ҳолни текширамиз:

1) $C \neq 0$ ва 2) $C = 0$.

Фараз қилайлик, $C \neq 0$, яъни текислик Oz ўқига параллель бўлмасин. Бу ҳолда (5) дан:

$$z = -\frac{Ax + By + D}{C};$$

буни (3) га қўйсак,

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} + \frac{Ax + By + D}{C} = 0. \qquad (6)$$

Бу чизиқнинг жинсини текшириш учун M ни тузамиз:

$$M = B_1^2 - A_1C_1 = \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{2q} > 0,$$

демак, изланган кесим гиперболадан иборат.

Энди иккинчи ҳолни текширамиз: $C=0$. Бу ҳолда (5) нинг кўриниши

$$Ax+By+D=0 \tag{7}$$

бўлади, бундан:

$$y=-\frac{Ax+D}{B};$$

буни (3) га қўйсак, тенгламанинг кўриниши

$$\frac{x^2}{2p}-\frac{(Ax+D)^2}{2B^2q}=z,$$

ёки

$$\left(\frac{B^2}{2p}-\frac{A^2}{2q}\right)x^2-\frac{AD}{q}x-B^2z-\frac{D^2}{2q}=0 \tag{8}$$

бўлади. Бу эса параболани ифода қилади, чунки бунда

$$M=B_1^2-A_1C_1=0.$$

...нинг билан, кесувчи текислик Oz ўқига параллель бўл... ҳолда изланган кесим параболадан иборат бўлади.

... Ўтган параграфларда қилинган муҳокамалардан маъ...ки, (5) текислик (3) сиртга уринма бўлиши учун (6) да ... бўлиши керак, ёки,

$$\Delta=A^2p-B^2q-2CD=0. \tag{9}$$

Бу муносабатга асосланиб, гиперболик параболоидга ...има бўлган текисликнинг тенгламасини тузиш мумкин. ...ҳақиқат, (9) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\left(-\frac{Ap}{C}\right)^2:2p+\left(\frac{Bq}{C}\right)^2:2q=\frac{D}{C}, \tag{10}$$

бунга қараганда координаталари:

$$x_1=-\frac{Ap}{C},\quad y_1=\frac{Bq}{C},\quad z_1=\frac{D}{C} \tag{11}$$

бўлган нуқта (5) текисликнинг сиртга уриниш нуқтаси бўлади, чунки (9) таъмин этилганда (11) координаталар текисликнинг ва сиртнинг тенгламаларини қаноатлантиради. Уринма текисликнинг, яъни (5) нинг коэффициентлари (11) дан аниқланади:

$$A=-\frac{Cx_1}{p},\ B=\frac{Cy_1}{q},\ D=Cz_1,$$

ва

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=k, \\ \frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=\frac{2z}{k}. \end{aligned}\right| \qquad (18)$$

(17) ва (18) даги тенгламалардан ҳар бири текисликни ифода қилади, демак, булардаги ҳар бир жуфт текислик тўғри чизиқни ифода қилади; фараз қилайлик (x_1, y_1, z_1) нуқта (17) ёки (18) даги тўғри чизиқда бўлсин, яъни:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{y_1}{\sqrt{q}}&=h \\ \frac{x_1}{\sqrt{p}}+\frac{y_1}{\sqrt{q}}&=\frac{2z_1}{h}. \end{aligned}\right| \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{x_1}{\sqrt{p}}+\frac{y_1}{\sqrt{q}}&=k, \\ \frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{y_1}{\sqrt{q}}&=\frac{2z_1}{k}. \end{aligned}\right| \qquad (20)$$

(19) ва (20) даги ҳар бир жуфт тengликларни ўзаро кўпайтирганда ушбу айният келиб чиқади:

$$\frac{x_1^2}{p}-\frac{y_1^2}{q}=2z_1\,, \qquad (21)$$

демак, (x_1, y_1, z_1) нуқта гиперболик параболоидда (17) ва (18) чизиқларда олинган (x_1, y_1, z_1) нуқта ихтиёрий бўлгани учун h ва k нинг ҳар бир қийматида (17) ва (18) тўғри чизиқлардан ҳар бири гиперболик параболоидда бўлади. h ва k ға турли қиймат бериш натижасида (17) ва (18) дан икки система тўғри чизиқлар ҳосил бўлади ва улар гиперболик параболоидда бўлади. Сиртни шу тўғри чизиқларнинг геометрик ўрни фараз қилиш мумкин. Шунинг учун улар сиртнинг тўғри чизиқли ясовчилари дейилади.

Бир системанинг ясовчилари ўзаро кесишмайди ва ҳар хил системаларнинг ясовчилари ўзаро кесишади. Машқ тариқасида буни исбот қилишни ўқувчига тавсия қиламиз.

8. Ўтган параграфда исбот қилингани каби бу ерда ҳам гиперболик параболоидни — ўқлари чексиз ўсган бир ковакли гиперболоидининг лимити эканлигини исбот қилиш мумкин. Бунинг учун энг аввал координата ўқларининг йўна-

натижада гиперболик параболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасидан ўтган уринма текисликнинг тенгламаси бундай бўлади:

$$\boxed{\frac{xx_1}{p} - \frac{yy_1}{q} = z + z_1} \tag{12}$$

Нормалнинг таърифига мувофиқ гиперболик параболоиднинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасида унинг тенгламаси бундай бўлади:

$$\frac{p(x - x_1)}{x_1} = \frac{q(y - y_1)}{-y_1} = \frac{z - z_1}{-1}. \tag{13}$$

5. Сиртнинг текисликлар билан турли кесимлари орасида эллиптик кесими йўқлиги юқорида маълум бўлган эди. Шунинг учун унинг доиравий кесимлари ҳам бўлмайди.

6. § 138 да қўлланган метод билан давом этганда (m, n, p') йўналишга қўшма бўлган гиперболик параболоиднинг диаметрал текислик тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{mx}{p} - \frac{ny}{q} - p' = 0. \tag{14}$$

Йўналишлар орасида энг муҳими $p' = 0$, яъни гиперболик параболоиднинг ўқига перпендикуляр бўлган йўналиш саналади. Бу ҳолда (14) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\frac{mx}{p} - \frac{ny}{p} = 0. \tag{15}$$

7. Гиперболик параболоиднинг тенгламасини

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z,$$

ёки

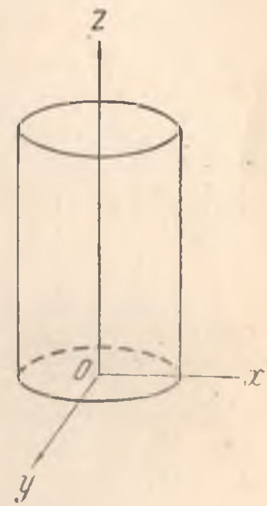
$$\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2z \tag{16}$$

тариқада ёзиш мумкин. Фараз қилайлик, h ва k аниқмас параметр бўлсин. Бу ҳолда (16) ни қуйидаги биринчи даражали тенгламаларнинг кўпайтмасидан ҳосил бўлган деб фараз қилиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}} &= h, \\ \frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}} &= \frac{2z}{h}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\ y^2=2px. \tag{3}$$

Бу тенгламалар билан ифода қилинган иккинчи тартибли сиртлардан биринчиси эллиптик цилиндр (шакл 202), иккинчиси гиперболик цилиндр (шакл 203) ва учинчиси параболик цилиндр (шакл 204) дейилади. (3) тенгламалардан биринчисида $b=a$ фараз қилинса, унинг куриниши $x^2+y^2=a^2$ булади ва бу тенглама фазода доиравий цилиндрни ифода қилади.



Шакл 202.

2. Цилиндрик сиртнинг бирор (x_1, y_1, z_1) нуқтасига уринма булган тўғри чизиқларнинг геометрик ўрнини топамиз. Мисол учун параболик цилиндрни оламиз:

$$y^2=2px. \tag{4}$$

(x_1, y_1, z_1) нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p'}=t \tag{5}$$

бўлади. Бунинг билан (4) нинг учрашган нуқталарини топамиз. Бунинг учун (4) ва (5) ни бирликда ечишга тўғри келади. (5) дан:

$$x=mt+x_1,\ y=nt+y_1,\ z=pt+z_1, \tag{6}$$

буларни (4) га қўямиз:

$$(nt+y_1)^2=2p(mt+x_1),$$

ёки

$$n^2t_2+2(ny_1-mp)t+\left(y_1^2-2px_1\right)=0,$$

ёки

$$n^2t^2+2(ny_1-mp)\,t=0, \tag{7}$$

чунки (x_1, y_1, z_1) нуқта сиртда бўлгани учун

$$y_1^2=2px_1, \tag{8}$$

(7) дан

$$t\,[nt+2(ny_1-mp)]=0.$$

лишларини сақлаб, координаталар бошини сиртнинг $(-a, 0, 0)$ нуқтасига келтирамиз. Бу ҳолда сиртнинг тенгламаси бундай бўлади (§ 141):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\frac{2x}{a},$$

$$\frac{x^2}{2a}+y^2:2\frac{b^2}{a^2}-z^2:2\frac{c^2}{a}=x. \qquad (22)$$

Фараз қилайлик, бир ковакли гиперболоиднинг ўқлари чексиз ўссин, лекин шу билан бирга

$$\lim\frac{b^2}{a}=p, \quad \lim\frac{c^2}{a}=q \qquad (23)$$

чекли бўлсин. Бу ҳолда (22) нинг кўриниши

$$\frac{y^2}{2p}-\frac{z^2}{2q}=x$$

бўлади, яъни гиперболик параболоид беради. Демак, бир ковакли гиперболоиднинг ўқлари чексиз ўсган ҳолда (23) таъмин этилса, унинг (бир ковакли гиперболоиднинг) лимити гиперболик параболоид бўлади.

§ 144. ЦИЛИНДРИК СИРТЛАР

Китобнинг бу иккинчи бўлимида цилиндрик сиртлар тўғрисида умумий тушунча берилган эди. Энди бу ерда иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар билан таништириб ўтамиз.

1. Маълумки фазодаги декарт координаталари системасида

$$f(x, y)=0 \qquad (1)$$

тенглама умуман ясовчиси Oz ўқига параллель бўлган цилиндрик сиртни ифода қилади ва (1) тенглама xOy текисликда цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси бўлади. Шунинг учун ясовчиси Oz ўқига параллель бўлган иккинчи тартибли цилиндрик сиртнинг умумий тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \qquad (2)$$

Бу тенгламанинг коэффициентлари орасидаги муносабатларга қараб, цилиндрик сиртнинг йўналтирувчиси xOy текисликда эллипс, гипербола ва парабола (хусусий ҳолда икки тўғри чизиқ) бўлиши мумкин:

ски (8) га асосан

$$yy_1 = p(x + x_1), \qquad (11)$$

яъни изланган геометрик ўрин Oz ўқига параллель бўлган текисликдан иборат.

Шунга ўхшаш эллиптик ва гиперболик цилиндрларнинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасидан ўтган уринма текисликларнинг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1, \qquad \frac{xx_1}{a} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Юқорида қўлланган методлардан фойдаланиб, цилиндрик сиртларнинг текисликлар билан кесимларини текширишни ўқувчига тавсия қиламиз.

Саволлар ва масалалар

413. Иккинчи тартибли марказли сиртнинг энг содда тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

414. Иккинчи тартибли марказсиз сиртнинг энг содда тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

415. Эллипсоиднинг бош кесимлари нималардан иборат?

416. Эллипсоиднинг бош доиравий кесимлари нималардан иборат?

417. Ушбу эллипсоид берилган:

$$3x^2 + 36y^2 + 81z^2 - 324 = 0.$$

Бунинг координата текисликлари билан кесилишидан ҳосил бўлган кесимлари аниқлансин.

418. Ушбу сфера берилган:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14.$$

Бунинг $2x + z = 5$, $y - 2z + 4 = 0$ тўғри чизиқ билан учрашган нуқталари топилсин.

419. Ушбу сирт берилган:

$$9x^2 + 36y^2 - 4z^2 + 36 = 0.$$

Бунинг билан $x - 3 = y - 1 = \frac{z-6}{3}$ тўғри чизиқнинг ўзаро кесишган нуқталари аниқлансин.

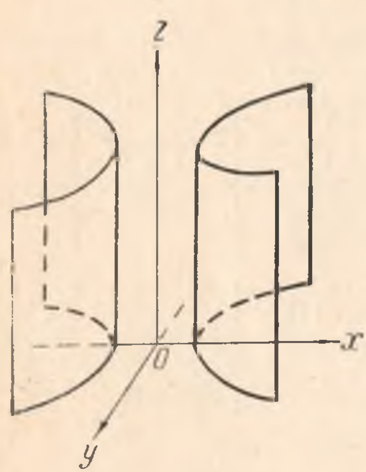
420. $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликнинг ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ сферага уринма бўлиш шарти топилсин.

421. $b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0$ эллипсоидга $Ax +$

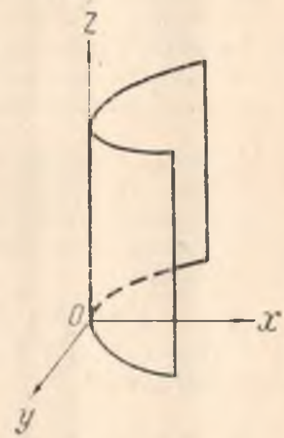
бундан

$$t_1 = 0, \ t_2 = -2\frac{ny_1 - mp}{n}. \tag{9}$$

$t_1 = 0$ бўлганда (5) га асосан тўғри чизиқнинг сирт билан учрашган (x_1, y_1, z_1) нуқтаси ҳосил бўлади. (5) тўғри чизиқнинг сиртга уринма бўлиши учун унинг сирт билан уч-



Шакл 203.



Шакл 204.

рашган иккинчи нуқтаси биринчи нуқтаси билан бирлашиши керак, бу эса $t_2 = 0$ бўлган ҳолда бўлади, ёки (9) дан:

$$ny_1 - mp = 0. \tag{10}$$

(10) ва (5) дан n ва p параметрлар чиқарилса, изланган геометрик ўриннинг тенгламаси чиқади. Бунинг учун (10) ни t га кўпайтирамиз:

$$nty_1 - mtp = 0,$$

ёки (6) дан

$$nt = y - y_1, \ mt = x - x_1$$

бўлгани учун

$$(y - y_1)\ y_1 - (x - x_1)p = 0,$$

ёки

$$yy_1 - y_1^2 - px + px_1 = 0,$$

Ун саккизинчи боб

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАРНИНГ УМУМИЙ НАЗАРИЯСИ

§ 145. УМУМИЙ ТУШУНЧАЛАР

1. Иккинчи тартибли сирт тенгламасининг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + 2C_1x + \\ + 2C_2y + 2C_3z + F = 0 \qquad (1)$$

Иккинчи тартибли сиртнинг (1) тенгламасига қараб, унда ўнта коэффициент борлигини кўрамиз. Лекин тенглама коэффициентларининг ўзларига боғлиқ бўлмай, балки улар орасидаги нисбатларга боғлиқдир. Демак, (1) тенгламанинг аниқланиши учун унинг коэффициентларидан бирининг қолганларига нисбатлари берилса кифоя қилади. Бунга қараганда иккинчи тартибли сирт умуман тўққиз шарт билан аниқланади; масалан, устидан ўтиши лозим бўлган тўққиз нуқта берилса, иккинчи тартибли сирт аниқланади.

(1) тенглама ундаги коэффициентларнинг орасидаги муносабатларга қараб, турли геометрик ўринларни ифода қилади. Китобнинг бу бобидан мақсад шу масалани текширишдан иборатдир.

2. Иккинчи тартибли сирт тенгламасидаги коэффициентлардан тузилган ушбу 4 ва 3-тартибли детерминантлар иккинчи тартибли сиртларнинг назариясида катта роль ўйнайди:

$+By+Cz+D=0$ текисликниг уринма булиш шарти топилсин.

422. $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ сфера берилган. Бу сферага (x^1, y^1, z^1) нуқтадан ўтказилган урима масофасининг квадрати

$$(x_1-a)^2+(y_1-b)^2+(z_1-c)^2=r^2$$

булади. Буни исбот қилинсин.

423. $4x^2+36y^2-9z^2+36=0$ сиртнинг $(-6, 2, 6)$ нуқтасига уринма булган текисликнинг тенгламаси топилсин.

424. $3x^2+4y^2-12z^2=0$ конуснинг $(4, -6, 4)$ нуқтасига уринма булган текисликнинг тенгламаси топилсин.

425. Ушбу тенгламалар ифода қилган сиртлар аниқлансин:

1) $6x^2+8y^2-12z^2-24=0.$
2) $15z=3x^2+5y^2.$
3) $8x^2+18y^2-36z^2+72=0.$
4) $12x^2+15y^2-20z^2=0.$

426. Эллипсоидда шундай нуқта топилсинки, у нуқтада уринма булган текисликнинг координата ўқларидан кесилган кесмалари ўзаро тенг булсин.

Бу муносабат анализдан маълум бўлган Эйлеринг бир жинсли функциялар тўғрисидаги теоремасининг хусусий ҳолидан иборат.

4. Ҳар қандай текисликнинг (1) сирт билан кесими умуман иккинчи тартибли эгри чизиқдан иборат. Буни исбот қилиш учун (1) сиртнинг координата текисликларидан бирортаси билан, масалан, xOy текислиги билан кесими аниқланса кифоя қилади. (1) да $z = 0$ фараз қилинса,

$$A_1x^2 + A_2y^2 + 2B_3xy + 2C_1x + 2C_2y + F = 0 \tag{7}$$

бўлади. Демак, изланган чизиқ иккинчи тартибли бўлади. Албатта, (7) тенглама коэффициентларининг қийматларига қараб ҳалиги чизиқнинг ҳақиқий, мавҳум ёки тўғри чизиқларга ажраладиган бўлиши мумкин.

§ 146. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТНИНГ ПАРАЛЛЕЛЬ ЎҚЛАРГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Фараз қилайлик, иккинчи тартибли сиртнинг умумий тенгламаси берилган бўлсин:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + \\ + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0 \tag{1}$$

Иккинчи тартибли эгри чизиқни текширгандагидек, бу ерда ҳам (1) тенгламани текширишда координаталар алмаштириш асосий роль ўйнайди. Шунинг учун энг аввал координата ўқларининг йўналишларини сақлаб, унинг бошини бирор (a, b, c) нуқтага келтирамиз ва бунинг натижасида тенглама шаклининг қандай ўзгаришига диққат қиламиз. Айтилган ҳолда координаталар алмаштириш формулалари қуйидағича бўлади:

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b, \quad z = z_1 + c;$$

буларни (1) тенгламага қўямиз:

$$A_1(x_1 + a)^2 + A_2(y_1 + b)^2 + A_3(z_1 + c)^2 + \\ + 2B_1(y_1 + b)(z_1 + c) + 2B_2(x_1 + a)(z_1 + c) + \\ + 2B_3(x_1 + a)(y_1 + b) + 2C_1(x_1 + a) + 2C_2(y_1 + b) + \\ + 2C_3(z_1 + c) + F = 0,$$

ёки қавсларни очиб, сўнгра x_1 ва y_1 га нисбатан ўлчовлари бир хил бўлган ҳадлари тўпланса, кўриниши бундай бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 & C_1 \\ B_3 & A_2 & B_1 & C_2 \\ B_2 & B_1 & A_3 & C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 & F \end{vmatrix} \tag{2}$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Бу детерминантлардан биринчиси (Δ) иккинчи тартибли сирт тенгламасининг дискриминанти ва униг F элементининг минори булган иккинчиси (δ) сирт тенгламасининг икки ўлчовли ҳадларининг дискриминанти дейилади. Биз кўпинча булардан биринчисини „катта детерминант" ва иккинчисини „кичик детерминант" исми билан юритамиз.

3. Турли амалларда иккинчи сирт тенгламасининг татбиқи қулай бўлсин учун тўртинчи (t) координаталар ёрдами билан уни бир жинсли тенгламага айлантирилади. Бу ҳолда (1) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + \\ + 2C_1xt + 2C_2yt + 2C_3zt + Ft^2 = 0, \tag{4}$$

$t = 1$ бўлганда бу тенглама яна (1) тенгламага айланади.

Агар бу тенгламанинг чап томонини қисқача $2f$ билан ифода қилиб, ундан x, y, z, t га нисбатан хусусий ҳосила олинса, бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= A_1x + B_3y + B_2z + C_1t, \\ f'_y &= B_3x + A_2y + B_1z + C_2t, \\ f'_z &= B_2x + B_1y + A_3z + C_3t, \\ f'_t &= C_1x + C_2y + C_3z + Ft, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ёки булардан ҳар бирининг иккала томонини биринчисидан бошлаб тартиб билан x, y, z, t га кўпайтириб, сўнгра қўшсак, ушбу натижа ҳосил бўлади:

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + tf'_t = 2f(x, y, z, t). \tag{6}$$

$$A_1x_1^2 + A_2y_1^2 + A_3z_1^2 + 2B_1y_1z_1 + 2B_2x_1z_1 + 2B_3x_1y_1 +$$
$$+ 2(A_1a + B_3b + B_2c + C_1)x_1 + 2(B_3a + A_2b + B_1c + C_2)y_1 +$$
$$+ 2(B_2a + B_1b + A_3c + C_3)z_1 + A_1a^2 + A_2b^2 + A_3c^2 +$$
$$+ 2B_1bc + 2B_2ac + 2B_3ab + 2C_1a + 2C_2b + 2C_3c + F = 0. \quad (2)$$

Агар юқорида айтилганча (1) тенгламанинг чап томонини $2f(x, y, z)$ фараз қилиб, ундан x, y, z га нисбатан хусусий ҳосилалар олиб, сўнгра x, y, z ни тартиб билан a, b, c га алмаштирилса, қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} f'_x(a, b, c) &= A_1a + B_3b + B_2c + C_1, \\ f'_y(a, b, c) &= B_3a + A_2b + B_1c + C_2, \\ f'_z(a, b, c) &= B_2a + B_1b + A_3c + C_3. \end{aligned}\right| \quad (3)$$

(2) нинг озод ҳади $2f(a, b, c)$ дан иборат, яъни

$$2f(a, b, c) = A_1a^2 + A_2b^2 + A_3c^2 + 2B_1bc +$$
$$+ 2B_2ac + 2B_3ab + 2C_1a + 2C_2b + 2C_3c + F. \quad (4)$$

(3) ва (4) га ва ўтган параграфдаги (4) га асосан (1) тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$A_1x_1^2 + A_2y_1^2 + A_3z_1^2 + 2B_1y_1z_1 + 2B_2x_1z_1 + 2B_3x_1y_1 +$$
$$+ 2x_1f'_x(a, b, c) + 2y_1f'_y(a, b, c) + 2z_1f'_z(a, b, c) +$$
$$+ 2f(a, b, c) = 0. \quad (5)$$

Бу тенгламани (1) тенглама билан солиштириб қараганда, кўрамизки:

1) унинг икки ўлчовли ҳадларининг коэффициентлари ўзгармай қолган,

2) биринчи ўлчовли ҳадларининг коэффициентлари (1) тенгламанинг чап томонидан x, y, z га нисбатан олинган хусусий ҳосилаларнинг $x = a$, $y = b$, $z = c$ бўлган хусусий қийматларидан иборат ва

3) тенгламанинг озод ҳади (1) тенгламанинг чап томонида x, y, z ўрнига тартиб билан a, b, c ни қўйишдан чиққан натижадан иборат.

(5) тенгламанинг дискриминанти ҳам худди аввалги (1) тенгламанинг дискриминанти бўлади, яъни параллель алмаштиришдан иккинчи тартибли сирт тенгламасининг дискриминанти ўзгармайди, яъни инвариантдан иборат. Ҳақиқатда (5) тенгламанинг дискриминанти бундай бўлади:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 & f'_x \\ B_3 & A_2 & B_1 & f'_y \\ B_2 & B_1 & A_3 & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 2f \end{vmatrix} \tag{6}$$

Бу детерминантнинг бириичи устун элементларини a га, иккинчисини b га, учинчисини c га купайтириб, сунгра уларнинг йиғиндисини тўртинчи устуннинг мос элементларидан айириб оламиз. Бу ҳолда туртинчи устуннинг биринчи элементи

$$f'_x - A_1a - B_3b - B_2c$$

булади ва утган параграфдаги (5) га асосан бу C_1t га тенг бўлади; шунга ухшаш туртинчи устуннинг иккинчи ва учинчи элементлари C_2t, C_3t га тенг бўлади; тўртинчи устуннинг қолган элементи бўлса у

$$2f - \left(af'_x + bf'_y + cf'_z\right)$$

булади, бу эса Эйлер теоремасига мувофиқ tf'_t бўлади. Шунинг учун (6) нинг кўриниши ($t = 1$) бундай бўлади:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 & C_1 \\ B_3 & A_2 & B_1 & C_2 \\ B_2 & B_1 & A_3 & C_3 \\ f'_x & f'_y & f'_z & f'_t \end{vmatrix} \tag{7}$$

Бу детерминант устида ҳам ҳалиги каби амалларни бажарамиз; биринчи йул элементларини a га, иккинчисини b га, учинчисини c га кўпайтириб, сўнгра уларнинг йиғиндиларини тўртинчи йўлнинг мос элементларидан айириб оламиз. Бу ҳолда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 & C_1 \\ B_3 & A_2 & B_1 & C_2 \\ B_2 & B_1 & A_3 & C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 & F \end{vmatrix}$$

бу эса (1) тенгламанинг Δ дискриминантидан иборат. Демак, $\Delta = \Delta'$.

булади, ёки a, b, c нинг ўрнига x, y, z ёзиб, сўнгра (5) ни ёйиб ёзсак:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_3y + B_2z + C_1 = 0, \\ B_3x + A_2y + B_1z + C_2 = 0, \\ B_2x + B_1y + A_3z + C_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Бу тенгламаларнинг ҳар бири x, y, z га нисбатан биринчи даражали бўлиб, текислик ифода қилади. Демак, иккинчи тартибли сиртнинг маркази (6) даги уч текисликнинг кесилиши билан аниқланади (6) тенгламаларни ечиб, марказнинг координаталарини a, b, c фараз қилинса:

$$a = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad b = \frac{\delta_2}{\delta}, \quad c = \frac{\delta_3}{\delta}, \qquad (7)$$

бунда

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = -\begin{vmatrix} C_1 & B_3 & B_2 \\ C_2 & A_2 & B_1 \\ C_3 & B_3 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$\delta_2 = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & B_2 \\ B_3 & C_2 & B_1 \\ B_2 & C_3 & A_3 \end{vmatrix}, \quad \delta_3 = -\begin{vmatrix} A_1 & B_3 & C_1 \\ B_3 & A_2 & C_2 \\ B_2 & B_1 & C_3 \end{vmatrix} \qquad (8)$$

§ 116 да уч текисликнинг кесишган нуқтаси текширилган эди. Иккинчи тартибли сиртнинг маркази ҳам уч текисликнинг кесишган нуқтасидан иборат бўлгани учун § 116 да чиқарилган натижаларга мувофиқ:

1) Агар δ нолга тенг бўлмаса, у ҳолда марказнинг координаталари аниқ чекли қийматга эга бўлади. Демак, бу ҳолда сиртнинг биргина (чекли масофада) аниқ маркази бўлади ва бундай сирт **м а р к а з л и** сирт дейилади (булар — эллипсоидлар, гиперболоидлар, конуслар).

2) Агар $\delta = 0$ ва (7) нинг суратларидан ҳеч бўлмаганда бири нолга тенг бўлмаса, у ҳолда ҳеч бўлмаганда марказнинг координаталаридан бири чексиз катта қийматга эга бўлиб, сиртнинг маркази чексиз узоқлашган нуқтада бўлади. Бу ҳолда (6) текисликлар ё ўзаро параллель бўлади ёки учаласи бир тўғри чизиққа параллель бўлади (булар — параболоидлардан иборат).

3) Агарда $\delta = 0$, $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 0$ бўлса, марказнинг координаталари аниқ бўлмайди ва бу ҳолда сиртнинг чексиз кўп марказлари бўлади. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: а) агарда (6) тенгламалардан бири қолган иккитасининг на-

§ 147. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТНИНГ МАРКАЗИ

Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази тўғрисидаги таъриф бу ерда, иккинчи тартибли сиртлар учун ҳам ўз кучини сақлайди, яъни сиртнинг маркази деб, шундай нуқтани айтиладики, сиртнинг ундан ўтган ҳар бир ватари у нуқтада тенг иккига бўлинсин. Буни назарда тутиб, иккинчи тартибли сиртнинг ушбу умумий тенгламасини оламиз:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + \\ + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0 \qquad (1)$$

ва қандай шарт билан координаталар боши сиртнинг маркази бўлишини топамиз.

Фараз қилайлик, координаталар боши сиртнинг маркази бўлсин. Бу ҳолда сиртдаги ҳар бир (x, y, z) нуқтага у сиртда $(-x, -y, -z)$ нуқта тўғри келиши керак. Бу эса иккинчи тартибли сиртнинг (1) тенгламасидаги биринчи даражали ўзгарувчи координаталарнинг коэффициентлари нолга айланганда, яъни

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0 \qquad (2)$$

бўлганда ва тенгламанинг кўриниши

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + F = 0 \qquad (3)$$

бўлганда мумкин. Демак, иккинчи тартибли сиртнинг маркази координаталар бошида бўлган ҳолда унинг тенгламасида биринчи даражали ўзгарувчи координаталари бўлмайди.

Энди фараз қилайлик (a, b, c) бирор нуқта бўлсин. Координаталар боши бу нуқтага келтирилса, яъни

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b, \quad z = z_1 + c$$

фараз қилинса, бу ҳолда ўтган параграфда чиқарилган натижага мувофиқ:

$$A_1x_1^2 + A_2y_1^2 + A_3z_1^2 + 2B_1y_1z_1 + 2B_2x_1z_1 + 2B_3x_1y_1 + \\ + 2x_1f_x'(a, b, c) + 2y_1f_y'(a, b, c) + 2z_1f_z'(a, b, c) + \\ + 2f(a, b, c) = 0 \qquad (4)$$

(2) га асосан (a, b, c) нуқта сиртнинг марказида бўлганда

$$f_x'(a, b, c) = 0, \quad f_y'(a, b, c) = 0, \quad f_z'(a, b, c) = 0 \qquad (5)$$

тижаси бӯлса, бу ҳолда учала текислик ӯзаро бир тӯғри чизиқ бӯйича кесишади ва бу чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг координаталари (6) тенгламаларни қаноатлантиради; бу чизиқ **марказ чизиғи** дейилади (бундай сиртлар — эллиптик ва гиперболик цилиндрлардан иборат бӯлиб, уларнинг ӯқлари марказ чизиғи бӯлади) ва б) агар (6) тенгламалардан иккитаси учинчисининг натижаси бӯлса, у ҳолда (6) нинг учаласи ҳам бир тенгламага айланиб учала текислик ӯзаро бирлашиб кетган бӯлади; бу текисликнинг ҳар бир нуқтаси сиртнинг маркази бӯлиб, уни **марказ текислиги** дейилади. Бу ҳолда (1) сирт иккита параллель текисликларга ажралган бӯлади.

§ 148. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТИИНГ МАРКАЗГА НИСБАТАН ТЕНГЛАМАСИ

Фараз қилайлик $(a,\ b,\ c)$ нуқта берилган бӯлсин. § 146 га мувофиқ ӯқларнинг йӯналишларини сақлаб, коо[illegible]аталар бошини бу нуқтага келтирилса, яъни сиртнинг [illegible]й тенгламасида

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b, \quad z = z_1 + c$$

фараз қилинса, тенгламанинг кӯриниши бундай бӯлади:

$$\begin{aligned} A_1x_1^2 + A_2y_1^2 + A_3z_1^2 + 2B_1y_1z_1 + \\ + 2B_2x_1z_1 + 2B_3x_1y_1 + 2x_1f'_x(a,\ b,\ c) + \\ + 2y_1f'_y(a,\ b,\ c) + 2z_1f'_z(a,\ b,\ c) + 2f(a,\ b,\ c) = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Фараз қилайлик, сиртнинг аниқ маркази бӯлсин. Агарда сиртнинг марказини янги координаталар бошида, яъни (a, b, c) нуқтада деб фараз қилинса, ӯтган параграфга мувофиқ:

$$f'_x(a,\ b,\ c) = 0, \quad f'_y(a,\ b,\ c) = 0, \quad f'_z(a,\ b,\ c) = 0.$$

ёки буларни очиб ёзганда:

$$\left.\begin{aligned} A_1a + B_3b + B_2c + C_1 = 0, \\ B_3a + A_2b + B_1c + C_2 = 0, \\ B_2a + B_1b + A_3c + C_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Шунинг билан бу ҳолда (1) тенгламанинг кӯриниши бундай бӯлади:

дейилади. Бундай тўғри чизиқни — сиртнинг ҳар бир нуқтасига уринма бўлган тўғри чизиқ деб фараз қилиш мумкин.

§ 151. УРИНМА ТЕКИСЛИК ВА НОРМАЛЬ

Фараз қилайлик, иккинчи тартибли сиртнинг тенгламаси берилган бўлсин:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz +$$
$$+ 2B_3xy + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0. \qquad (1)$$

Бу сиртнинг бирор (x_1, y_1, z_1) нуқтасига уринма бўлган тўғри чизиқларнинг геометрик ўрнини топамиз. Берилган (x_1, y_1, z_1) нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари бундай бўлади (§ 149):

$$x = x_1 + ms, \quad y = y_1 + ns, \quad z = z_1 + ps. \qquad (2)$$

Бунинг (1) сирт билан учрашган нуқталарини топамиз. Бунинг учун (1) ва (2) ни бирликда ечишга тўғри келади. (2) дан x, y, z нинг ифодалари (1) га қўйилса, § 150 га мувофиқ:

$$Ps^2 + 2Qs + R = 0 \qquad (3)$$

бўлади [§ 145 даги (5) га қаранг].

Қўйилган шартга мувофиқ (x_1, y_1, z_1) нуқта сиртда бўлгани учун

$$R = 2f(x_1, y_1, z_1) = 0 \qquad (4)$$

бўлади. Бу ҳолда (3) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$Ps^2 + 2Qs = 0 \quad \text{ёки} \quad s(Ps + 2Q) = 0,$$

ёки бундан

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -\frac{2Q}{P}. \qquad (5)$$

$s = 0$ бўлганда (2) га асосан тўғри чизиқнинг сирт билан учрашган (x_1, y_1, z_1) нуқтаси ҳосил бўлади. Тўғри чизиқнинг сиртга уринма бўлиши учун унинг сирт билан учрашган иккинчи нуқтаси биринчи нуқтаси билан бирлашиши керак, бу эса $s_2 = 0$, ёки $Q = 0$ бўлган ҳолда мумкин:

$$Q = mf'_x(x_1, y_1, z_1) + nf'_y(x_1, y_1, z_1) + pf'_z(x_1, y_1, z_1) = 0. \qquad (6)$$

(2) ва (6) дан m, n, p чиқарилса, изланган геометрик ўриннинг тенгламаси ҳосил бўлади. Бунинг учун (6) даги m, n, p

ни (2) дан уларга пропорционал бўлган: $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$ билан алмаштирамиз:

$$(x - x_1) f'_x(x_1, y_1, z_1) + (y - y_1) f'_y(x_1, y_1, z_1) + \\ + (z - z_1) f'_z(x_1, y_1, z_1) = 0. \qquad (7)$$

Изланган геометрик ўриннинг тенгламаси шунинг ўзи бўлади. Бу эса текисликдан иборат. Шунинг учун уни сиртнинг (x_1, y_1, z_1) нуқтасига уринма текислик дейилади.

Сиртдаги (x_1, y_1, z_1) нуқтадан ўтиб, шу нуқтадаги уринма текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ нормаль дейилади. (7) га асосан унинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$\frac{x - x_1}{f'_x(x_1, y_1, z_1)} = \frac{y - y_1}{f'_y(x_1, y_1, z_1)} = \frac{z - z_1}{f'_z(x_1, y_1, z_1)}.$$

§ 152. ДИАМЕТРАЛ ТЕКИСЛИКЛАР ВА ДИАМЕТРЛАР

1. Фараз қилайлик, иккинчи тартибли сиртнинг тенгламаси берилган булсин:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + \\ + 2B_3xy + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0. \qquad (1)$$

Берилган (m, n, p) йўналишга параллель бўлган ҳамма ватарларнинг геометрик ўрнини топамиз. Агар (m, n, p) йўналиши асимптотик бўлмаса, бу ҳолда у йўналишга параллель бўлган ҳар бир тўғри чизиқ сиртни умуман икки нуқтада учратади.

Узгарувчи ватарнинг ўрта нуқтасини, яъни изланган геометрик ўриннинг нуқталаридан бирини $M(x_0, y_0, z_0)$ фараз қиламиз. Бу нуқтадан ўтиб, берилган (m, n, p) йўналишга параллель бўлган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари бундай бўлади;

$$x = x_0 + ms, \quad y = y_0 + ns, \quad z = z_0 + ps. \qquad (2)$$

Ватарнинг сирт билан учрашган $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарини аниқлайдиган параметрнинг s_1 ва s_2 қийматларини топиш учун (2) ни (1) га қўямиз. Бу ҳолда (§ 148) s га нисбатан бундай тенглама ҳосил бўлади:

$$Ps^2 + 2Qs + R = 0, \qquad (3)$$

бунда

$$P = A_1m^2 + A_2n^2 + A_3p^2 + 2B_1np + 2B_2mp + 2B_3mn, \qquad (4)$$

$$Q = mf'_x(x_0, y_0, z_0) + nf'_y(x_0, y_0, z_0) + pf'_z(x_0, y_0, z_0), \quad (5)$$

$$R = 2f(x_0, y_0, z_0). \quad (6)$$

1) Фараз қилайлик $P \neq 0$, s_1 ва s_2 (3) нинг илдизлари бўлсин; бу ҳолда

$$\left.\begin{array}{ll} x = x_0 + ms_1, & x_2 = x_0 + ms_2 \\ y_1 = y_0 + ns_1, & y_2 = y_0 + ns_2 \\ z_1 = z_0 + ps_1, & z_2 = z_0 + ps_2 \end{array}\right\} \quad (7)$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ нуқта M_1M_2 ватарнинг ўртасида бўлгани учун

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2x_0 + m(s_1 + s_2)}{2} = x_0 + m\frac{s_1 + s_2}{2},$$

ёки бундан

$$m\frac{s_1 + s_2}{2} = 0;$$

шунга ўхшаш

$$n\frac{s_1 + s_2}{2} = 0, \quad p\frac{s_1 + s_2}{2} = 0.$$

m, n, p бирданига нолга тенг бўла олмагани учун

$$s_1 + s_2 = 0;$$

иккинчи томондан (3) да

$$s_1 + s_2 = -\frac{2Q}{P}.$$

Демак, $Q = 0$ ёки

$$mf'_x(x_0, y_0, z_0) + nf'_y(x_0, y_0, z_0) + pf'_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Изланган геометрик ўрининг тенгламаси шунинг ўзи бўлади. Агарда ўзгарувчи координаталарнинг ролини ўйнаган x_0, y_0, z_0 ни эскича x, y, z га алмаштирилса, тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$mf'_x(x, y, z) + nf'_y(x, y, z) + pf'_z(x, y, z) = 0, \quad (8)$$

ёки (§ 149):

$$\begin{array}{l} (A_1x + B_3y + B_2z + C_1)m + \\ + (B_3x + A_2y + B_1z + C_2)n + \\ + (B_2x + B_1y + A_3z + C_3p = 0, \end{array} \quad (9)$$

ёкн

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \quad (10)$$

бунда

$$\left.\begin{aligned} A' &= A_1m + B_3n + B_2p, \\ B' &= B_3m + A_2n + B_1p, \\ C' &= B_2m + B_1n + A_3p, \\ D' &= C_1m + C_2n + C_3p. \end{aligned}\right| \tag{11}$$

(10) тенглама текисликни ифода қилади. Шунинг билан изланган геометрик ўрин (10) текисликдан иборат. Уни берилган (m, n, p) йўналишга қўшма бўлган диаметрал текислик дейилади.

P нолга тенг бўлмаган ҳолда (10) тенгламадаги A', B', C' коэффициентлар бирданига нолга тенг бўла олмайди. Ҳақиқатан, (11) тенгликлардан аввалги учтасини тартиб билан m, n, p га кўпайтириб, сўнгра уларни қўшсак:

$$A'm + B'n + C'p = A_1m^2 + A_2n^2 + A_3p^2 + \\ + 2B_1np + 2B_2mp + 2B_3mn = P;$$

A', B', C' бирданига нолга тенг бўлганда $P = 0$ бўлар эди, ҳолбуки қилинган фаразга мувофиқ $P \neq 0$.

(9) тенгламани § 146 даги (6) билан солиштириб қараганда кўрамизки, m, n, p нинг ихтиёрий қийматларида иккинчи тартибли сирт марказининг координаталари (9) ни, яъни диаметрал текислик тенгламасини қаноатлантиради. Демак:

Иккинчи тартибли сиртнинг маркази бўлган ҳолда унинг ҳамма диаметрал текисликлари сиртнинг марказидан ўтади; иккинчи тартибли сиртнинг марказ чизиғи бўлган ҳолда унинг ҳамма диаметрал текисликлари шу марказ чизиғи бўйича ўтади; иккинчи тартибли сиртнинг марказ текислиги бўлган ҳолда унинг ҳамма диаметрал текисликлари бирлашиб кетади.

2) Энди фараз қилайлик $P = 0$ бўлсин, ёки

$$A_1m^2 + A_2n^2 + A_3p^2 + 2B_1np + 2A_2mp + 2B_3mn = 0, \tag{12}$$

яъни § 149 га мувофиқ (m, n, p) асимптотик йўналиш бўлсин; бу ҳолнинг $Q = 0$ ва $R \neq 0$ ёки $Q = 0$ ва $R = 0$ бўлган ҳолларининг геометрик маънолари § 149 да текширилган эди.

(12) тенгликни бундай қилиб ёзамиз:

$$(A_1m + B_3n + B_2p)\,m + \\ + (B_3m + A_2n + B_1p)\,n + \\ + (B_2m + B_3n + A_3p)\,p = 0,$$

ёки (11) ға мувофиқ

$$A'm + B'n + C'p = 0, \tag{13}$$

яъни (10) текислик (2) тўғри чизиққа параллель бўлади; иккинчи томондан бу тўгри чизиқ текисликда ётган (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтади; демак, тўғри чизиқ текисликда ётган бўлади. Шунинг билан (10) текислик (m, n, p) йўналишга нисбатан сирт асимптоталарининг геометрик ўрни бўлади ва бундай текисликни м а х с у с д и а м е т р а л т е к и с л и к дейилади.

Маълумки (12) тенглик сиртнинг чексиз узоқ нуқталарининг йўналишларини аниқлайди. Агар (2) да $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ фараз қилиб, сўнгра қолган тенгликлардан ва (12) дан m, n, p чиқарилса,

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy = 0 \tag{14}$$

бўлади, яъни ўтган параграфлардан бирида текширилган конуснинг тенгламаси келиб чиқади.

2. Фараз қилайлик, ушбу тенгламалар

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{15}$$

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \tag{16}$$

(m, n, p) ва (m_1, n_1, p_1) йўналишга қўшма бўлган диаметрал текисликларнинг тенгламалари бўлсин; (11) га асосан буидаги коэффицпентларнинг ифодалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} A' &= A_1m + B_3n + B_3p, \\ B' &= B_3m + A_2n + B_1p, \\ C' &= B_2m + B_1n + A_3p. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} A'' &= A_1m_1 + B_3n_1 + B_2p_1 \\ B'' &= B_3m_1 + A_2n_1 + B_1p_1 \\ C'' &= B_2m_1 + B_1n_1 + A_3p_1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Маълумки (15) текисликнинг иккинчи (m_1, n_1, p_1) йўналишға параллеллик шарти бундай бўлади:

$$A'm_1 + B'n_1 + C'p_1 = 0. \tag{19}$$

Шунга ўхшаш (16) текисликнинг биринчи (m, n, p) йўналишга параллеллик шарти бундай бўлади:

$$A''m + B''n + C''p = 0. \tag{20}$$

(19) ва (20) нинг коэффициентлари (17) ва (18) дан қараганда иккала шартнинг, яъни (19) ва (20) нинг айнан бир хиллигини кўрамиз.

бунда

$$\left.\begin{aligned} A' &= A_1m + B_3n + B_2p, \\ B' &= B_3m + A_2n + B_1p, \\ C' &= B_2m + B_1n + A_3p, \\ D' &= C_1m + C_2n + C_3p. \end{aligned}\right| \qquad (11)$$

(10) тенглама текисликни ифода қилади. Шунинг билан изланган геометрик ўрин (10) текисликдан иборат. Уни берилган (m, n, p) йўналишга қўшма бўлган диаметрал текислик дейилади.

P нолга тенг бўлмаган ҳолда (10) тенгламадаги A', B', C' коэффициентлар бирданига нолга тенг бўла олмайди. Ҳақиқатан, (11) тенгликлардан аввалги учтасини тартиб билан m, n, p га кўпайтириб, сўнгра уларни қўшсак:

$$A'm + B'n + C'p = A_1m^2 + A_2n^2 + A_3p^2 + \\ + 2B_1np + 2B_2mp + 2B_3mn = P;$$

A', B', C' бирданига нолга тенг бўлганда $P = 0$ бўлар эди, ҳолбуки қилинган фаразга мувофиқ $P \neq 0$.

(9) тенгламани § 146 даги (6) билан солиштириб қараганда кўрамизки, m, n, p нинг ихтиёрий қийматларида иккинчи тартибли сирт марказининг координаталари (9) ни, яъни диаметрал текислик тенгламасини қаноатлантиради. Демак:

Иккинчи тартибли сиртнинг маркази бўлган ҳолда унинг ҳамма диаметрал текисликлари сиртнинг марказидан ўтади; иккинчи тартибли сиртнинг марказ чизиғи бўлган ҳолда унинг ҳамма диаметрал текисликлари шу марказ чизиғи бўйича ўтади; иккинчи тартибли сиртнинг марказ текислиги бўлган ҳолда унинг ҳамма диаметрал текисликлари бирлашиб кетади.

2) Энди фараз қилайлик $P = 0$ бўлсин, ёки

$$A_1m^2 + A_2n^2 + A_3p^2 + 2B_1np + 2A_2mp + 2B_3mn = 0, \qquad (12)$$

яъни § 149 га мувофиқ (m, n, p) асимптотик йўналиш бўлсин; бу ҳолнинг $Q = 0$ ва $R \neq 0$ ёки $Q = 0$ ва $R = 0$ бўлган ҳолларнинг геометрик маънолари § 149 да текширилган эди.

(12) тенгликни бундай қилиб ёзамиз:

$$(A_1m + B_3n + B_2p)\,m + \\ + (B_3m + A_2n + B_1p)\,n + \\ + (B_2m + B_3n + A_3p)\,p = 0,$$

ёки (11) га мувофиқ

$$A'm + B'n + C'p = 0, \tag{13}$$

яъни (10) текислик (2) тўғри чизиққа параллель бўлади; иккинчи томондан бу тўғри чизиқ текисликда ётган (x_0, y_0, z_0) нуқтадан ўтади; демак, тўғри чизиқ текисликда ётган бўлади. Шунинг билан (10) текислик (m, n, p) йўналишга нисбатан сирт асимптоталарининг геометрик ўрни бўлади ва бундай текисликни махсус диаметрал текислик дейилади.

Маълумки (12) тенглик сиртнинг чексиз узоқ нуқталарининг йўналишларини аниқлайди. Агар (2) да $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ фараз қилиб, сўнгра қолган тенгликлардан ва (12) дан m, n, p чиқарилса,

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy = 0 \tag{14}$$

бўлади, яъни ўтган параграфлардан бирида текширилган конуснинг тенгламаси келиб чиқади.

2. Фараз қилайлик, ушбу тенгламалар

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{15}$$

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \tag{16}$$

(m, n, p) ва (m_1, n_1, p_1) йўналишга қўшма бўлган диаметрал текисликларнинг тенгламалари бўлсин; (11) га асосан бундаги коэффициентларнинг ифодалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} A' &= A_1m + B_3n + B_3p, \\ B' &= B_3m + A_2n + B_1p, \\ C' &= B_2m + B_1n + A_3p. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} A'' &= A_1m_1 + B_3n_1 + B_2p_1 \\ B'' &= B_3m_1 + A_2n_1 + B_1p_1 \\ C'' &= B_2m_1 + B_1n_1 + A_3p_1 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Маълумки (15) текисликнинг иккинчи (m_1, n_1, p_1) йўналишга параллеллик шарти бундай бўлади:

$$A'm_1 + B'n_1 + C'p_1 = 0. \tag{19}$$

Шунга ўхшаш (16) текисликнинг биринчи (m, n, p) йўналишга параллеллик шарти бундай бўлади:

$$A''m + B''n + C''p = 0. \tag{20}$$

(19) ва (20) нинг коэффициентлари (17) ва (18) дан қараганда иккала шартнинг, яъни (19) ва (20) нинг айнан бир хиллигини кўрамиз.

$$\begin{vmatrix} A_1m + B_3n + B_2p, & B_3, & B_2 \\ B_3m + A_2n + B_1p, & A_2, & B_1 \\ B_2m + B_1n + A_3p, & B_1, & A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки (11) га асосан

$$\begin{vmatrix} A' & B_3 & B_2 \\ B' & A_2 & B_1 \\ C' & B_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки

$$A'\left(A_2A_3 - B_1^2\right) + B'(B_1B_2 - A_3B_3) + C'(B_1B_3 - A_2B_2) = 0,$$

бу эса (10) текисликнинг ушбу

$$\frac{x - x_1}{A_2A_3 - B_1^2} = \frac{y - y_1}{B_1B_2 - A_3B_3} = \frac{z - z_1}{B_1B_3 - A_2B_3} \qquad (24)$$

тўғри чизиққа параллеллигини кўрсатади. Маркази чексиз узоқда бўлган сиртнинг диаметри шунинг ўзи бўлади.

§ 153. БОШ ДИАМЕТРАЛ ТЕКИСЛИКЛАР

1. Ўз қўшма ватарларига перпендикуляр бўлган диаметрал текислик **бош диаметрал текислик** дейилади. Бош диаметрал текисликларга қўшма бўлган ватарларнинг йўналишлари — сиртнинг **бош йўналишлари** дейилади. Бош диаметрал текисликнинг таърифига мувофиқ у сиртнинг **симметрия текислиги** бўлади ва уларнинг ўзаро кесишганидан ҳосил бўлган диаметрлар сиртнинг **ўқлари** дейилади.

Ҳамма йўналишлар ичида бош йўналишлар иккинчи тартибли сиртларнинг назариясида муҳим роль ўйнайди. Буларни аниқлаш учун (m, n, p) йўналишга қўшма бўлган диаметрал текисликнинг тенгламасини оламиз:

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad (1)$$

бунда

$$\left.\begin{aligned} A' &= A_1m + B_3n + B_2p, \\ B' &= B_3m + A_2n + B_1p, \\ C' &= B_2m + B_1n + A_3p, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

юқорида қилинган таърифга мувофиқ (m, n, p) йўналишнинг бош йўналиш бўлиши учун (1) текислик (m, n, p) йўналишга перпендикуляр бўлиши керак. Бу эса A', B', C' билан m, n, p ўзаро пропорционал бўлган ҳолда бўлади, яъни

Демак, *икки диаметрал текисликдан бири иккинчисининг ватарларига параллель бўлса, у ҳолда иккинчиси ҳам биринчисининг ватарларига параллель бўлади.* Бундай диаметрал текисликлар қ ў ш м а текисликлар дейилади.

3. Диаметрал текисликларнинг кесишганидан ҳосил бўлган тўғри чизиқ сиртнинг д и а м е т р и дейилади.

Бу таърифга қараганда марказли сиртларнинг ҳамма диаметрлари уларнинг марказларидан ўтади ва марказсиз сиртларнинг диаметрлари ўзаро параллель бўлади.

(8) га асосан сиртнинг бирор диаметрининг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{array}{l} mf'_x + nf'_y + pf'_z = 0 \\ m_1f'_x + nf'_y + p_1f'_z = 0 \end{array}\right\} \qquad (21)$$

чунки булардан ҳар бири диаметрал текисликнинг тенгламаси бўлиб, иккаласи бирликда уларнинг кесишганидан ҳосил бўлган тўғри чизиқни, яъни сиртнинг диаметрини ифода қилади. (21) ни яна бундай ёзиш мумкин (детерминант назариясига қаралсин);

$$\frac{f'x}{np_1 - n_1p} = \frac{f'y}{m_1p - mp_1} = \frac{f'z}{mn_1 - m_1n},$$

ёки

$$\left.\begin{array}{l} np_1 - n_1p = M \\ m_1p - mp_1 = N \\ mn_1 - m_1n = P \end{array}\right\} \qquad (22)$$

фараз қилинса, диаметрнинг тенгламалари

$$\frac{f'x}{M} = \frac{f'y}{N} = \frac{f'z}{P} \qquad (23)$$

бўлади (марказли сирт учун).

Сиртнинг маркази чексиз узоқда бўлган ҳолда:

$$\delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix} = 0,$$

ёки детерминантнинг 1, 2 ва 3-устун элементларини тартиб билан m, n, p га кўпайтириб, сўнгра уларни қўшсак:

эканлиги эътиборга олинса, (8) тенгламанинг кўриииишн бундай бўлади:

$$\lambda^3 - R\lambda^2 + S\lambda - \delta = 0, \qquad (9)$$

биз бу тенгламани бундан буён қисқача $D(\lambda) = 0$ шаклда ёзиб борамиз, яъни

$$D(\lambda) = \lambda^3 - R\lambda^2 + S\lambda - \delta = 0. \qquad (10)$$

Бу теиглама λ га нисбатаи учинчи даражада бўлгани учун унинг учта илдизи бўлади. Бунинг ҳар бир илдизига (3) ва (1) га асосан бош диаметрал текислик тўғри келади. Бунга қараганда ҳар бир иккинчи тартибли сирт умуман учта бош диаметрал текисликларга эга бўлади.

Шунинг билаи баравар (3) ни (1) га қўйганда бош диаметрал текисликнинг тенгламаси бундай бўлади:

$$\lambda(mx + ny + pz) + D' = 0. \qquad (11)$$

2. $D(\lambda) = 0$ тенгламанинг ҳамма илдизлари ҳақиқий. Буни исбот қилиш учун, фараз қилайлик, тенгламанинг илдизларидан бири мавҳум бўлсин, масалан, $\lambda_1 = a + bi$ булсин. Бу ҳолда тенгламанинг бу илдизига қўшма бўлган иккинчи $\lambda_2 = a - bi$ илдизи ҳам бўлади,

$D(\lambda) = 0$ тенгламанинг λ_1 илдизига тўғри келган (4) системанинг илдизларини m_1, n_1, p_1 ва λ_2 га тўғри келган илдизларини m_2, n_2, p_2 фараз қиламиз, яъни:

$$\left.\begin{aligned} A_1m_1 + B_3n_1 + B_2p_1 &= \lambda_1 m_1 \\ B_3m_1 + A_2n_1 + B_1p_1 &= \lambda_1 n_1 \\ B_2m_1 + B_1n_1 + A_3p_1 &= \lambda_1 p_1 \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1m_2 + B_3n_2 + B_2p_2 &= \lambda_2 m_2 \\ B_3m_2 + A_2n_2 + B_1p_2 &= \lambda_2 n_2 \\ B_2m_2 + B_1n_2 + A_3p_2 &= \lambda_2 p_2 \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

λ_1 ва λ_2 ўзаро қўшма комплекс сонлар бўлгаии учун m_1, n_1, p_1 ва m_2, n_2, p_2 сонлар ҳам умуман қўшма комплекс сонлар бўлади, чункн акси ҳолда (12) ва (13) нииг ўнг томонлари мавҳум ва чап томонлари ҳақиқий бўлар эди.

Буларни назарда тутиб, (12) тенгламалардан биринчисини m_2 га, иккинчисини n_2 га ва учинчисини p_2 га кўпайтириб, сўнгра уларни қўшамиз:

$$(A_1m_1 + B_3n_1 + B_2p_1)m_2 + (B_3m_1 + A_2n_1 + B_1p_1)n_2 +$$
$$+ (B_2m_1 + B_1n_1 + A_3p_1)p_2 = \lambda_1(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2). \qquad (14)$$

$$\frac{A'}{m}=\frac{B'}{n}=\frac{C'}{p},$$

ёки бу нисбатларнинг умумий қиймати λ фараз қилинса,

$$A'=\lambda m,\quad B'=\lambda n,\quad C'=\lambda p \tag{3}$$

ёки (2) га асосан:

$$\left.\begin{aligned} A_1 m + B_3 n + B_2 p &= \lambda m,\\ B_3 m + A_2 n + B_1 p &= \lambda n,\\ B_2 m + B_1 n + B_3 p &= \lambda p, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

ёки

$$\left.\begin{aligned} (A_1-\lambda) m + B_3 n + B_2 p &= 0,\\ B_3 m + (A_2-\lambda) n + B_1 p &= 0,\\ B_2 m + B_1 n + (A_3-\lambda) p &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Бу система m, n, p га нисбатан бир жинсли системадан иборат. Фаразга мувофиқ m, n, p бирданига нолга тенг бўлмагани учун бу системаннинг коэффициентларидан тузилган детерминант нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} A_1-\lambda, & B_3, & B_2\\ B_3, & A_2-\lambda, & B_1\\ B_2, & B_1, & A_3-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{6}$$

ёки

$$(A_1-\lambda)(A_2-\lambda)(A_3-\lambda)-B_1^2(A_1-\lambda)-$$
$$-B_2^2(A_2-\lambda)-B_3^2(A_3-\lambda)+2B_1B_2B_3=0, \tag{7}$$

ёки қавсларни очиб, ҳадларнинг ишораларини тескари қилгандан сўнг λ га нисбатан тўпланса:

$$\lambda^3-(A_1+A_2+A_3)\lambda^2+$$
$$+(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1-B_1^2-B_2^2-B_3^2)\lambda-$$
$$-(A_1A_2A_3+2B_1B_2B_3-A_1B_1^2-A_2B_2^2-A_3B_3^2)=0, \tag{8}$$

ёки

$$R=A_1+A_2+A_3,$$
$$S=A_1A_2+A_2A_3+A_3A_1-B_1^2-B_2^2-B_3^2,$$

фараз қилиб,

$$\delta=A_1A_2A_3+2B_1B_2B_3-A_1B_1^2-A_2B_2^2-A_3B_3^2$$

Шунинг билан $D(\lambda) = 0$ тенгламанинг учала λ_1, λ_2, λ_3 илдизи ҳар хил бўлиб, ҳеч қайси бири нолга тенг бўлмаганда, иккинчи тартибли сиртнинг учта ўзаро перпендикуляр қўшма диаметрал текисликлари мавжуд бўлиб, (11) га асосан уларнинг тенгламалари қуйидагича бўлади:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(mx + ny + pz) + D' = 0, \\ \lambda_2(mx + ny + pz) + D' = 0, \\ \lambda_3(mx + ny + pz) + D' = 0. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Албатта, бу ҳол фақат марказли сиртда бўлади.

Энди фараз қилайлик, сиртнинг маркази чексиз узоқда бўлсин, яъни $\delta = 0$ бўлсин. Бу ҳолда (10) нинг кўриниши бундай булади:

$$\lambda^3 - R\lambda^2 + S\lambda = 0,$$

ёки

$$\lambda(\lambda^2 - R\lambda + S) = 0,$$

бундан $\lambda_1 = 0$ бўлиб, қолган λ_2 ва λ_3 бўлса, улар

$$\lambda^2 - R\lambda + S = 0$$

тенгламадан аниқланади.

Иккинчи томондан $\lambda_1 = 0$ бўлганда (17) текисликлардан биринчиси чексиз узоқда бўлади ва буни эътиборга олинмаса, марказсиз иккинчи тартибли сиртнинг фақат иккита бош диаметрал текисликлари бўлади.

4. Алгебрадан маълумки (10) тенгламанинг илдизлари λ_1, λ_2, λ_3 фараз қилинса, у ҳолда

$$\lambda^3 - R\lambda^2 + S\lambda - \delta = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3),$$

ёки қавсларни очиб, сўнгра λ нинг даражаларига нисбатан тўпланса:

$$\lambda^3 - R\lambda^2 + S\lambda - \delta = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + \\ + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)\lambda + \lambda_1\lambda_2\lambda_3;$$

бу тенглик λ га нисбатан айниятдан иборат. Шунинг учун

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = R, \quad (18)$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = S, \quad (19)$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \delta. \quad (20)$$

§ 154. МАРКАЗЛИ СИРТНИНГ ТЕНГЛАМАСИНИ СОДДАЛАШТИРИШ

1. Иккинчи тартибли сиртнинг тенгламасини соддалаштириш учун и... тартибли эгри чизиқнинг тенгламасини сод-

Шунга ўхшаш (13) тенгламалардан биринчисини m_1 га, иккинчисини n_1 га ва учинчисини p_1 га кўпайтириб, сўнгра уларни қўшамиз:

$$(A_1m_2 + B_3n_2 + B_2p_2)m_1 + (B_3m_2 + A_2n_2 + B_1p_2)n_1 +$$
$$+ (B_2m_2 + B_1n_2 + A_3p_1)p_1 = \lambda_2(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2). \quad (15)$$

(14) ва (15) тенгликларнинг чап томонлари ўзаро тенг бўлгани учун ўнг томонлари ҳам ўзаро тенг бўлади, яъни

$$\lambda_1(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2) = \lambda_2(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2),$$

ёки бундан

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2) = 0. \quad (16)$$

Алгебрадан маълумки, ҳамавақт

$$(A + Bi)(A - Bi) = A^2 + B^2,$$

шунинг учун

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 \neq 0,$$

демак

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 0.$$

ёки

$$\lambda_1 - \lambda_2 = (a + bi) - (a - bi) = 2bi,$$

ёки $b = 0$, бу эса λ_1 нинг ҳақиқий эканлигини кўрсатади. $D(\lambda) = 0$ тенгламанинг учала илдизининг ҳақиқийлиги — иккинчи тартибли сиртнинг учала бош диаметрал текисликларининг ҳамавақт ҳақиқий эканлигини кўрсатади.

3. Фараз қилайлик $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $D(\lambda) = 0$ тенгламанинг ҳар хил илдизлари бўлсин ва бу илдизларга тўғри келган m, n, p нинг қийматлари $m_1, n_1, p_1, m_2, n_2, p_2, m_3, n_3, p_3$ бўлсин. Бу ҳолда (16) га асосланиб ушбу тенгликларни ёзиш мумкин:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2) = 0,$$
$$(\lambda_1 - \lambda_3)(m_1m_3 + n_1n_3 + p_1p_3) = 0,$$
$$(\lambda_2 - \lambda_3)(m_2m_3 + n_2n_3 + p_2p_3) = 0.$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ бўлган ҳолда

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0,$$
$$m_1m_3 + n_1n_3 + p_1p_3 = 0,$$
$$m_2m_3 + n_2n_3 + p_2p_3 = 0,$$

яъни бу ҳолда ҳар икки бош диаметрал текисликлар ўзаро перпендикуляр бўлади. Юқорида берилган таърифга мувофиқ бундай диаметрал текисликлар қўшма бўлади.

далаштиришда қўлланилган методдан фойдаланиш мумкин. Бу метод координата ўқларини қулай қилиб олишдан иборат.

Фараз қилайлик, иккинчи тартибли марказли сиртнинг тенгламаси берилган бўлсин:

$$A_1x_1^2 + A_2y_1^2 + A_3z_1^2 + 2B_1y_1z_1 + 2B_2x_1z_1 + 2B_3x_1y_1 +$$
$$+ 2C_1x_1 + 2C_2y_1 + 2C_3z_1 + F = 0. \qquad (1)$$

Қуйидаги текширишларга қараганда координата текисликлари учун сиртнинг бош диаметрал текисликлари қабул қилинса, тенгламанинг шакли соддалашади. Бунинг учун энг аввал

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c$$

фараз қилиб, координаталар бошини сиртнинг марказига келтирамиз. Бу ҳолда:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + F' = 0, \qquad (2)$$

бунда

$$F' = \frac{\Delta}{\delta}. \qquad (3)$$

Фараз қилайлик, сиртнинг ўқларидан бирининг координата ўқлари билан ташкил қилган бурчакларининг косинуслари m_1, n_1, p_1, иккинчисиники m_2, n_2, p_2 ва учинчисиники m_3, n_3, p_3 бўлсин*. Бу ҳолда (x, y, z) системасидан янги (x_1, y_1, z_1) системага ўтиш формулалари бундай бўлади:

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1x_1 + m_2y_1 + m_3z_1, \\ y &= n_1x_1 + n_2y_1 + n_3z_1, \\ z &= p_1x_1 + p_2y_1 + p_3z_1. \end{aligned}\right| \begin{aligned} &A_1 \\ &B_3 \\ &B_2 \end{aligned} \qquad (4)$$

Бундаги x, y, z нинг ифодаларини (2) га қўйишдан кура қисқароқ йул билан мақсадга етиш мумкин. Бунинг учун (4) тенгламалардан биринчисини A_1 га, иккинчисини B_3 га ва учинчисини B_2 га купайтириб, сўнгра уларни қўшамиз:

$$A_1x + B_3y + B_2z = (A_1m_1 + B_3n_1 + B_2p_1)\,x_1 +$$
$$+ (A_1m_2 + B_3n_2 + B_2p_2)\,y_1 + (A_1m_3 + B_3n_3 + B_2p_3)\,z_1. \qquad (5)$$

Шунга ўхшаш (4) тенгламалардан биринчисини B_3 га, иккинчисини A_2 га ва учинчисини B_1 га купайтириб, сўнгра уларни қўшамиз:

$$B_3x + A_2y + B_1z = (B_3m_1 + A_2n_1 + B_1p_1)\,x_1 +$$
$$+ (B_3m_2 + A_2n_2 + B_1p_2)\,y_1 + (B_3m_3 + A_2n_3 + B_1p_3)\,z_1.$$

* Булар ҳозиргача косинусларга пропорци[illegible] иборат

Энди (4) тенгламалардан биринчисини B_2 га, иккинчисини B_1 га ва учинчисини A_3 га кўпайтириб, сунгра уларни қўшамиз;

$$B_2x + B_1y + A_3z = (B_2m_1 + B_1n_1 + A_3p_1)x_1 +$$
$$+ (B_2m_2 + B_1n_2 + A_3p_2)y_1 + (B_2m_3 + B_1n_3 + A_3p_3)z_1. \quad (7)$$

Ўтган параграфдаги (12) га асосланиб (5), (6) ва (7) ни бундай ёзиш мумкин:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_3y + B_2z &= \lambda_1m_1x_1 + \lambda_2m_2y_1 + \lambda_3m_3z_1, \\ B_3x + A_2y + B_1z &= \lambda_1n_1x_1 + \lambda_2n_2y_1 + \lambda_3n_3z_1, \\ B_2x + B_1y + A_3z &= \lambda_1p_1x_1 + \lambda_2p_2y_1 + \lambda_3p_3z_1 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad (8)$$

Бу тенгликлардан биринчисини x га, иккинчисини y га ва учинчисини z га кўпайтириб, сунгра уларни қўшамиз:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy =$$
$$= x_1\lambda_1(m_1x + n_1y + p_1z) + y_1\lambda_2(m_2x + n_2y + p_2z) +$$
$$+ z_1\lambda_3(m_3x + n_3y + p_3z).$$

Координаталар алмаштириш формулаларига мувофиқ:

$$m_1x + n_1y + p_1z = x_1,$$
$$m_2x + n_2y + p_2z = y_1,$$
$$m_3x + n_3y + p_3z = z_1$$

булгани учун (9) нинг куриниши бундай бўлади:

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy =$$
$$= \lambda_1x_1^2 + \lambda_1y_1^2 + \lambda_3z_1^2,$$

ёки (2) га асосан

$$\lambda_1x_1^2 + \lambda_2y_1^2 + \lambda_3z_1^2 + F' = 0, \quad (10)$$

бунда

$$F' = \frac{\Delta}{\delta}.$$

Иккинчи тартибли марказли сиртнинг бош ўқларига нисбатан тенгламаси шунинг ўзи бўлади.

2. Бу тенгламанинг қандай геометрик ўрин ифода қилиши ундаги λ_1, λ_2, λ_3, F' коэффициентларнинг ишораларига боғлиқдир.

Тенгламанинг иккала томони $-\frac{\Delta}{\delta}$ га бўлинса;

$$\frac{\lambda_1 x_1^2}{-\frac{\Delta}{\delta}} + \frac{\lambda_2 y_1^2}{-\frac{\Delta}{\delta}} + \frac{\lambda_3 z_1^2}{-\frac{\Delta}{\delta}} = 1,$$

$$\delta = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

бўлгани учун

$$\frac{x_1^2}{\frac{\lambda_2\lambda_3\Delta}{-\delta^2}} + \frac{y_1^2}{\frac{\lambda_1\lambda_3\Delta}{-\delta^2}} + \frac{z_1^2}{\frac{\lambda_1\lambda_2\Delta}{-\delta^2}} = 1. \tag{11}$$

Бу тенгламада δ^2 ҳамавақт мусбат сон. Шунинг учун ҳамма гап λ_1, λ_2, λ_3 ва Δ ниинг ишораларида. Буни назарда тутиб, (11) ни §§ 137, 138, 139 да текширилгаи тенгламалар билан солиштириб қараганда, кўрамизки:

1) агар δ^2, λ_2, λ_3 иинг ишоралари бир хил бўлса ва $\Delta < 0$ бўлса, (11) тенглама ҳақиқий эллипсоид ифода қилади;

2) агар λ_1, λ_2, λ_3 иинг ишоралари бир хил бўлса ва $\Delta > 0$ бўлса, (11) тенглама мавҳум эллипсоид ифода қилади;

3) агар λ_1, λ_2, λ_3 нинг ишоралари бир хил бўлса ва $\Delta < 0$ бўлса, (11) тенглама икки ковакли гиперболоид ифода қилади;

4) агар λ_1, λ_2, λ_3 нинг ишоралари ҳар хил бўлса ва $\Delta > 0$ бўлса, (11) тенглама бир ковакли гиперболоид ифода қилади.

Шунинг билан баравар $\Delta = 0$ бўлганда §§ 140, 148 га асосан:

5) агар λ_1, λ_2, λ_3 нинг ишоралари бир хил бўлса, (11) тенглама мавҳум конус ифода қилади;

6) агар λ_1, λ_2, λ_3 иинг ишоралари ҳар хил бўлса, (11) тенглама ҳақиқий конус ифода қилади.

§ 155. МАРКАЗСИЗ СИРТНИИГ ТЕНГЛАМАСИИИ СОДДАЛАШТИРИШ

Фараз қилайлик, иккинчи тартибли сиртнинг тенгламаси берилган бўлсин:

$$A_1x^2 + A_1y^2 + A_3z^2 + 2B_1xz + 2B_2yz + 2B_3xy +$$
$$+ 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + F = 0; \tag{1}$$

шунинг билан баравар фараз қилайлик,

$$\delta = 0 \tag{2}$$

бўлсин. Бу ҳолда $D(\lambda) = 0$ тенгламанинг илдизларидан бири ёки иккитаси нолга тенг бўлади, чунки

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \delta$$

эди. Масала аниқ бўлиши учун, фараз қилайлик, $\lambda_3 = 0$ бўлсин. Бу ҳолда $D(\lambda) = 0$ тенгламаннинг λ_1 ва λ_2 илдизларига иккита бош диаметрал текислик тўғри келади. Буни эътиборга олиб, координаталар бошини ўзгартмай, ўқларнинг йўналишларини шундай ўзгартамизки, улардан иккитаси ҳалиги иккита бош диаметрал текисликларга перпендикуляр бўлсин ва учинчиси уларнинг ўзаро кесишганидан ҳосил бўлган чизиққа параллель бўлсин. Бу ҳолда (1) тенгламанинг озод ҳади ўзгармайди ва тенгламанинг кўриниши бундай бўлади:

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + 2C_1' x_1 + 2C_2' y_1 + 2C_3' z_1 + F = 0. \qquad (3)$$

Энди ўқларнинг йўналишларини сақлаб, координаталар бошини бирор $(a,\ b,\ c)$ нуқтага келтирамиз, яъни

$$x_1 = x + a, \quad y_1 = y + b, \quad z_1 = z + c$$

фараз қиламиз. Бу ҳолда (3) нинг кўриниши бундай бўлади:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2xf_x'(a,\ b,\ c) + 2yf_y'(a,\ b,\ c) +$$
$$+ 2zf_z'(a,\ b,\ c) + 2f(a,\ b,\ c) = 0. \qquad (4)$$

Агар координаталар системасининг боши бўлган $(a,\ b,\ c)$ нуқтани шундай танлаб олинсаки,

$$f_x'(a,\ b,\ c) = 0, \quad f_y'(a,\ b,\ c) = 0, \quad f_z'(a,\ b,\ c) = 0 \qquad (5)$$

бўлса, у ҳолда (4) тенгламанинг кўриниши

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2zf_z'(a,\ b,\ c) = 0,$$

ёки

$$f_z'(a,\ b,\ c) = C \qquad (6)$$

фараз қилинса

$$\lambda_1 x^2 + \lambda y^2 + 2Cz = 0.$$

(3) тенгламанинг (демак, берилган тенгламанинг) дискриминанти бундай бўлади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & f_x' \\ 0 & \lambda_2 & 0 & f_y' \\ 0 & 0 & 0 & f_z' \\ f_x' & f_y' & f_z' & 2f \end{vmatrix} = -f_z'^2 \cdot \lambda_1\lambda_2$$

$$\ldots \Delta = -\lambda_1\lambda_2 C^2. \qquad (8)$$

... $\neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, ... баравар:
...а, бу ҳолда

$$\ldots \lambda_2 C^2 < 0 \text{ ёки } -\lambda_1\lambda_2 < 0,$$

$$\lambda_1\lambda_2 > 0,$$

яъни бу ҳолда λ_1 ва λ_2 нинг ишоралари бир хил бўлади ва (7) тенглама эллиптик параболоид ифода қилади;

2) агар $\Delta > 0$ бўлса, бу ҳолда

$$-\lambda_1\lambda_2 C^2 > 0 \text{ ёки } -\lambda_1\lambda_2 > 0,$$

ёки

$$\lambda_1\lambda_2 < 0,$$

яъни бу ҳолда λ_1 ва λ_2 нинг ишоралари ҳар хил бўлади ва (7) тенглама гиперболик параболоид ифода қилади.

Энди фараз қилайлик $\Delta = 0$ бўлсин. Бу ҳолда $-\lambda_1\lambda_2 C^2 = 0$ ёки $\lambda_1\lambda_2 C^2 = 0$ бўлгани учун λ_1 ва λ_2 дан ҳеч бири нолга тенг бўлмаганда

$$C = f'_z(a, b, c) = 0$$

бўлади ва (4) тенгламанинг кўриниши

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2xf'_x(a, b, c) + 2yf'_y(a, b, c) + 2f(a, b, c) = 0$$

бўлади, ёки қисқача

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Маълумки, бундай тенглама умуман ясовчиси Oz ўқига параллель бўлган цилиндрни ифода қилади. Шунинг билан баравар: агар λ_1 ва λ_2 нинг ишоралари бир хил бўлса — эллиптик цилиндр, ҳар хил бўлса — гиперболик цилиндр ва λ_1, λ_2 дан бири ноль бўлса — параболик цилиндр (ёки хусусий ҳолда икки ҳақиқий ёки мавҳум текислик) ифода қилади. Нега?

Иккинчи тартибли сиртнинг икки текисликка ажралиш ҳолини эътиборга олмай, бу бобда чиқарилган натижаларни тўпласак, иккинчи тартибли сиртни текшириш учун ушбу жадвал ҳосил бўлади:

<table>
<tr><td rowspan="2">$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ нинг ишоралари</td><td colspan="2">$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$</td><td colspan="3">$\lambda_3 = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta \neq 0$</td><td>$\delta = 0, \Delta \neq 0$</td><td colspan="2">$\delta = 0, \Delta = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">бир хил</td><td>$\Delta < 0$</td><td>эллипсоид</td><td rowspan="3">эллиптик параболоид</td><td rowspan="3" colspan="2">Эллиптик цилиндр (мавҳум ёки ҳақиқий)</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>мавҳум конус</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>мавҳум эллипсоид</td></tr>
<tr><td rowspan="3">ҳар хил</td><td>$\Delta < 0$</td><td>икки ковакли гиперболоид</td><td rowspan="3">$\Delta > 0$ гиперболик параболоид</td><td rowspan="2">$\lambda_1\lambda_2 < 0$</td><td rowspan="2">гиперболик цилиндр</td></tr>
<tr><td>$\Delta = 0$</td><td>конус</td></tr>
<tr><td>$\Delta > 0$</td><td>бир ковакли гиперболоид</td><td>ё $\lambda_1 = 0$
ё $\lambda_2 = 0$</td><td>параболик цилиндр</td></tr>
</table>

Саволлар ва масалалар

427. Иккинчи тартибли сирт тенгламасининг умумий кўриниши қандай бўлади?

428. Иккинчи тартибли сирт тенгламасининг дискриминанти қандай тузилади?

429. Иккинчи тартибли сиртнинг параллель ўқларга нисбатан тенгламаси аввалги тенгламага нисбатан қандай ўзгаради?

430. Иккинчи тартибли сиртнинг марказга нисбатан тенгламаси қандай тузилади?

431. Қай вақтда иккинчи тартибли сирт конус ифода қилади?

432. Иккинчи тартибли сиртнинг диаметрал текисликлари деб қандай текисликларни айтилади? Қўшма диаметрал текисликлар нима? Бош диаметрал текисликлар нима?

433. Ушбу сиртларнинг марказлари аниқлансин:

а) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2(xy + yz + xz) + x + y + z - 1 = 0;$

б) $8xy + 16xz + 8yz - 8x + 8y - 16z - 7 = 0;$

в) $4x^2 + 7y^2 + 9z^2 + 14yz + 8xz + 8yz + 8x + 2y + 2z + 5 = 0;$

г) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z - 5 = 0;$

д) $x^2 + 3y^2 - z^2 + 2yz - 4xy - 8y + 4z - 11 = 0;$

е) $(\alpha y + \beta x + c\gamma)^2 - \alpha\beta(xy - z^2) = 0.$

$+ 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ сирт-
а бўлган текислик топилсин,
сиртнинг ушбу тенгламаси берил-

$xz - 16yz + 14x + 4y + 34z - 29 = 0.$

ментлари 1, 1, 1 бўлган ватарларига
л текисликиинг тенгламаси тузилсин.
ли сиртнинг ушбу тенгламаси берил-

$2x^2 + 5y^2 + \ldots + 6zx + 2xy + 8x + 14y + 18z = 0.$

Бу сиртнинг шундай диаметрал текислиги топилсинки, у

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-5}$$

тўғри чизиққа параллель бўлган ватарларга қўшма бўлсин.

437. Иккинчи тартибли сиртнинг ушбу тенгламаси берилган:

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x - 1 = 0.$$

Бунинг шундай диаметрал текислиги топилсинки, у $x + yz + 1$ текисликка параллель бўлсин.

438. Иккинчи тартибли сиртнинг ушбу тенгламаси берилган:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y - 1 = 0.$$

Бунинг координаталар бошидан ўтган диаметрал текислиги топилсин.

439. Ушбу тенгламалардан ҳар бири қандай сиртни ифода қилади:

а) $6x^2 + 28y^2 + 5z^2 - 8xy - 4xz - 6 = 0;$
б) $y^2 + xz + 3xy + 2yz + 3x + 2y = 0;$
в) $2x^2 + 4y^2 - z^2 - 8xy + 8x - 8y + 4 = 0;$
г) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z - 7 = 0;$
д) $xy + yz + zx - 9 = 0;$
е) $4x^2 - 9z^2 + 2xz - 8x - 4y + 36z - 32 = 0.$

440. Ушбу иккинчи тартибли сиртларнинг тенгламалари соддалаштирилсин:

а) $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0;$
б) $3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 4z = 0;$
в) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0;$
г) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$

441. Иккиичи тартибли сиртнинг тенгламаси берилган:

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0.$$

Бу сирт асимптотик йўналишларга эгами?

Курсатма: Қўйилган саволга жавоб бериш учун ушбу муносабатдан фойдаланиш керак:

$$A_1m^2 + A_2n^2 + A_3p^2 + 2B_1np + 2B_2mp + 2B_3mn = 0.$$

434. $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0$ сиртга $(0, -4,4)$ нуқтада уринма булган текислик топилсин,

435. Иккинчи тартибли сиртнинг ушбу тенгламаси берилган:

$$7x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 4xy - 20xz - 16yz + 14x + 4y + 34z - 29 = 0.$$

Бунинг бурчак коэффициентлари 1, 1, 1 булган ватарларига қушма булган диаметрал текисликнинг тенгламаси тузилсин.

436. Иккинчи тартибли сиртнинг ушбу тенгламаси берилган:

$$2x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 12yz + 6zx + 2xy + 8x + 14y + 18z = 0.$$

Бу сиртнинг шундай диаметрал текислиги топилсинки, у

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-5}$$

туғри чизиққа параллель булган ватарларга қушма булсин.

437. Иккинчи тартибли сиртнинг ушбу тенгламаси берилган:

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x - 1 = 0.$$

Бунинг шундай диаметрал текислиги топилсинки, у $x + yz + 1$ текисликка параллель булсин.

438. Иккинчи тартибли сиртнинг ушбу тенгламаси берилган:

$$4x^2 + y^2 + z^2 + 4xy - 4xz - 2yz + x - y - 1 = 0.$$

Бунинг координаталар бошидан утган диаметрал текислиги топилсин.

439. Ушбу тенгламалардан ҳар бири қандай сиртни ифода қилади:

а) $6x^2 + 28y^2 + 5z^2 - 8xy - 4xz - 6 = 0;$
б) $y^2 + xz + 3xy + 2yz + 3x + 2y = 0;$
в) $2x^2 + 4y^2 - z^2 - 8xy + 8x - 8y + 4 = 0;$
г) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 4z - 7 = 0;$
д) $xy + yz + zx - 9 = 0;$
е) $4x^2 - 9z^2 + 2xz - 8x - 4y + 36z - 32 = 0.$

440. Ушбу иккинчи тартибли сиртларининг тенгламалари соддалаштирилсин:

а) $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 - 4xy + 4yz + 4x + 6y + 4z - 27 = 0;$
б) $3x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 4z = 0;$
в) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 4y - 10z - 1 = 0;$
г) $5x^2 - y^2 + z^2 + 4xy + 6xz + 2x + 4y + 6z - 8 = 0.$

441. Иккинчи тартибли сиртнинг тенгламаси берилган:

$$2x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x - y - 2z = 0.$$

Бу сирт асимптотик йўналишларга эгами?

Кўрсатма: Қўйилган саволга жавоб бериш учун ушбу муносабатдан фойдаланиш керак:

$$A_1m^2 + A_2n^2 + A_3p^2 + 2B_1np + 2B_2mp + 2B_3mn = 0.$$

МАСАЛАЛАРНИНГ ЖАВОБЛАРИ

9. $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$; $\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$;
$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$; $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$.

11. $A(0, 0)$; $B\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}a\sqrt{3}\right)$;
$C(a, 0)$.

15. 1) $4\sqrt{5}$; 2) 5; 3) 2; 4) $\sqrt{a^2+b^2}$;
5) $\sqrt{q^2+l^2}$.

16. 1) 5; 2) 13; 3) 8; 4) $\sqrt{a^2+b^2}$.

17. $AB = 14$; $BC = 15$; $AC = 13$.

18. 12.

19. $AB = \sqrt{10}$; $BC = 13$; $CD =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{73}$; $AD = \frac{11}{2}\sqrt{5}$

20. $x = -6{,}75$.

22. Масаланинг шартини икки нуқта қаноатлантиради: $(0, 0)$ ва $(10, 0)$ нуқталар.

23. $(1, 5)$ ва $(-7, 5)$.

24. $\left(\frac{13}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

27. $\left(\frac{7}{5}, -\frac{13}{5}\right)$.

28. 0,5.

29. $(1, 4)$; $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$; $\left(2\frac{1}{2}, 3\right)$

30. $(4, 4)$; $(-6, -2)$.

31. $(0, 4)$; $(1, 2)$, $(2, 0)$.

32. $(-3, 5)$ ё $(15, 3)$ ё $(-7, -9)$.

33. 5; 5; $\sqrt{10}$.

34. $(0, 3)$; $(2, 1)$; $(4, -3)$.

35. $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$

36. $(-4, -1)$; $(1, -4)$.

37. $S = 16$ *кв.* бирлик.

38. $S = 9$ *кв.* бирлик.

39. $(15, 0)$.

44. $8\sqrt{3}$.

45. $\sqrt{13}$.

46. $S = 5$ *кв.* бирлик.

48. 1) 0; 2) -1; 3) 1.

49. 1) 28; 2) 180; 3) $5ae - 5bd$.

50. 1) $x = 1$, $y = 3$; 2) $x = 2$, $y = -3$;
3) $x = y = 5$.

51. 1) $x = 1, y = 2, z = 3$.
2) $x = 0, y = 3, z = 4$.
3) $x = 2, y = 1, z = 5$.
4) $x = 5, y = 4, z = 3$.

5. $x = k,\ y = -2k,\ \ z = k$ (k — исталган сон).

7. $D = a^4 + b^4 + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 - 2a^2b^2$.

8. $x_1 = 2;\ x_2 = -\frac{11}{7}$.

9. 334.

50. $\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -a+b+c, & a+b, & 1 \\ a-b+c, & a-b+c, & 1 \\ a+b-c, & a-b, & 1 \end{vmatrix}$.

$x + y = 0$.

$x^2 + (y-5)^2 - 9 = 0$.

1) ўтмас; 2) ўткир; 3) ўткир; 4) ўткир; 5) ўтмас; 6) ўткир; 7) ўтмас; 8) ўтмас.

2, 5 ва 8-чизиқлар координаталар бошидан ўтади; 4 ва 7—иккала координата ўқларини кесади; 1 ва 6 — абсцисса ўқига параллель; 3 — ордината ўқига параллель.

6. Учинчиси.

7. 1) 45°, 2) 135°.

8. $y - \sqrt{3}\,x = 0$.

9. $y + x - 5 = 0$.

90. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

91. $5x - 7y + 35 = 0$.

92. $x + y - 2 = 0$.

94. 1) $a = 3\frac{3}{4},\ b = -3$;

2) $a = -2\frac{2}{3},\ b = -2$;

3) $a = 2,\ b = -1\frac{3}{7}$.

95. 1) $y = -\frac{5}{8}x - \frac{5}{4}$, 2) $y = -\frac{1}{3}x$,

3) $y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$.

96. 1) $\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$;

2) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 4 = 0$;

3) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{5}{2\sqrt{5}} = 0$.

97. 6 *кв.* бирлик.

98. 1,5.

99. 7,5.

100. 1) $y = k(x+3)$; 2) $y - 5 = kx$; 3) $y - 3 = k(x+2)$.

101. 1) $y - 3x - 7 = 0$; 2) $y - 6 = 0$; 3) $y = \frac{3}{2}x$; 4) $y - 1 = 0$.

102. $x + 2y - 3 = 0 \ldots (AB)$;
$x - 3 = 0 \ldots (BC)$;
$3x - 2y - 1 = 0 \ldots (AC)$.

103. $x - 2 = 0,\ x - 2y = 0,\ x + 2y - 4 = 0$.

104. $4x + 9y - 30 = 0$ ёки $x + y - 5 = 0$.

105. 7.

106. $-1,5$.

107. $2y - y + 3 = 0$.

108. Бўлади; $5x - y - 7 = 0$.

109. 8.

110. 90°.

111. 45°.

112. $\operatorname{tg} A = 1\frac{2}{3}$; $\operatorname{tg} B = 2\frac{9}{13}$; $\operatorname{tg} C = 1\frac{1}{4}$.

113. 27°15′19″; 40°21′53″; 112°22′48″

114. $x - 2y - 9 = 0$.

115. $7x - y - 13 = 0$.

116. $3x + y = 0$.

117. $a'b = b'a$.

119. $x + y + 2 = 0$.

120. $3x - 4y - 27 = 0$.

121. $x - 3y - 11 = 0,\ y + 1 = 0,\ x + y - 7 = 0$.

122. $4x - 6y + 13 = 0,\ 3x + 5y - 17 = 0,\ 10x + 4y - 21 = 0$.

123. $A = 7,5$ бўлганда параллель ва $A = -\frac{10}{3}$ бўлганда перпендикуляр бўлади.

124. $A(1, 1),\ B(3, 0),\ C(3, 4)$.

125. $3x - 2y = 0$.

126. $3x - 4y + 15 = 0$.

127. Ўтади.

128. $C = -2$ бўлганда.

129. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

130. 3.

131. $\frac{8}{\sqrt{10}}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{8}{\sqrt{10}}$.
132. $y = x + 4$ ёки $y = -x + 8$.
133. A бурчагининг биссектрисаси $x - 2y = 0$ ва $2x + y = 0$; B бурчагининг биссектрисаси $2x + (1 - \sqrt{5})y - 20 = 0$ ва $2x + (1 + \sqrt{5})y - 20 = 0$; C бурчагининг биссектрисаси $4x - 3y = 0$ ва $2x + y - 20 = 0$.
134. $x - 2 = 0$ ёки $8x - 15y - 61 = 0$.
135. $\frac{3}{2\sqrt{13}}$.
136. $4x - 3y + 10 = 0$ ёки $4x + 3y - 2 = 0$.
137. $4x + 3y + 1 \pm 15 = 0$.
138. $\frac{7x}{16} + \frac{y}{56} = 1$ ёки $\frac{x}{16} + \frac{y}{8} = 1$.
140. $\frac{4\pi}{13 + 4\sqrt{10}}$.
141. $115x + 69y + 99 = 0$ ёки $69x - 115y - 199 = 0$.
142. $3x + y - 16 = 0$ ёки $3y - x - 8 = 0$.
143. $8x + 7y - 19 = 0$ ёки $16x + 3y + 17 = 0$.
144. $x - 2y - 5 = 0$.
145. $x - y + 3 = 0$.
146. $25y - 20x + 6 = 0$.
151. $\sqrt{\frac{5}{2}}$.
156. 1) $(-5, 2)$; $(-3, 1)$; 3) $(-2, 8)$.
157. $2x' + 3y' + 2 = 0$.
158. $y_1 = x_1^2$.
159. $x_1^2 + y_1^2 = 25$.
160. $x_1y_1 + 2 = 0$.
161. $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}(-2)$.
162. $x^2 + y^2 = a^2$.
163. $(y - x)^2 = 4(x + y) + 8$.
164. $x^2 - y^2 = -2x_1y_1$.
165. $x_1^2 + y_1^2 - 10x_1y_1 - 12 = 0$.
166. $4x_1^2 - 7\sqrt{2}x_1y_1 + 7y_1^2 = 2$ ёки $4x_1^2 \pm \sqrt{2}x_1y_1 + y_1^2 = 2$.
174. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 9 = 0$.
175. $x^2 + (y + 3)^2 - 25 = 0$.
176. $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
177. a) $(-1, 3)$, $R = \sqrt{5}$;
b) $(-2, 0)$, $R = 3$;
c) $(0, -2)$, $R = 3$;
b) $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$, $R = \frac{1}{8}\sqrt{153}$.
178. $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 6)$, $(0, 1)$.
184. $4x^2 + 9y^2 = 36$.
185. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.
186. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.
187. $3x^2 + 9y^2 = 27$.
189. a) $2a = 6$, $2b = 4$, $2c = 2\sqrt{5}$, $e = \frac{1}{3}\sqrt{5}$;
b) $2a = 2\sqrt{5}$, $2b = 2\sqrt{3}$, $2c = 2\sqrt{2}$, $e = \sqrt{\frac{2}{5}}$;
c) $2a = 2\sqrt{2}$, $2b = 2\sqrt{\frac{6}{5}}$, $2c = 2\sqrt{\frac{4}{5}}$, $e = \sqrt{\frac{2}{5}}$.
190. 20.
191. $3x^2 + 7y^2 = 115$.
192. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.
193. $\left(\pm\frac{12}{\sqrt{3}}, \pm\frac{12}{\sqrt{3}}\right)$ ёки $\left(\pm\frac{12}{\sqrt{13}}, \mp\frac{12}{\sqrt{13}}\right)$.
194. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{2hx}{a^2} + \frac{2ky}{b^2} = 0$.
195. $\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1$ бўлганда.

196. $2\frac{3}{5}$; $7\frac{2}{5}$.

197. $83°6'$, 5.

198. $y = \pm\frac{25}{4}$.

199. $2x - 3y - 8 = 0$.

200. $2x + 3y - 9 = 0$.

201. $2y - 6x = 13$ ва $6x - 2y = 13$.

202. $y = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

203. $2x + y \pm 8 = 0$.

204. $2x - 3y \pm 8 = 0$.

205. 1) эллипсда; 2) эллипсдан ташқарида; 3) эллипсда. 4) эллипснинг ичида.

206. $x - 3y + 4 = 0$ ва $23x - 21y = 52$.

207. $T = \frac{51}{20}$, $N = \frac{34}{25}$, $t = \frac{9}{4}$, $n = \frac{16}{25}$.

208. Уринма: $8x + 15y - 50 = 0$; нормаль: $75x - 40y - 252 = 0$.

209. Изланган бурчакнинг тангенси $= \frac{125}{126}$.

210. $\left(\pm\frac{8}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{35}\right)$.

211. $x^2 + 2y^2 = 3$.

212. $\frac{12}{13}$.

213. $l = \pm\sqrt{b^2 + a^2k^2}$ бўлса.

214. $y = \frac{3}{2}x$, $y = -\frac{5}{12}x$;

215. $2\sqrt{\frac{130}{23}}$, $2\sqrt{\frac{169}{23}}$.

223. $\frac{x^2}{\text{[illegible]}} - \frac{y^2}{2} = 1$.

224. $\frac{x^2}{16} - \frac{21y^2}{2500} = 1$.

225. $7x^2 - 3y^2 = 148$.

226. $2a = 10$, $2b = 8$, $F(\pm\sqrt{41}, 0)$ $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$.

227. $\sqrt{2}$.

228. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{225} = 1$.

229. $x^2 - 4y^2 = -1$; $e = \sqrt{5}$.

230. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2\left(\frac{hx}{a^2} - \frac{ky}{b^2}\right) = 0$.

231. 6 ва 14.

232. $\left(\frac{27}{5}, \pm\frac{8\sqrt{14}}{5}\right)$.

233. $5x \pm 16 = 0$.

234. Асимптоталари $y = \pm\frac{4}{5}x$, директрисалари $\sqrt{41}\,x \pm 25 = 0$.

235. $\operatorname{tg}\varphi = \pm\frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

236. $60°$.

240. $\operatorname{arc\,tg}(4\sqrt{5})$; $e = \frac{3}{2}$.

241. $y = 8x \pm 15$.

242. $3y - 4x = 5$ ва $16x + 3y = 25$.

243. $5x - 2y = \pm 2\sqrt{21}$.

244. $4x^2 - 9y^2 = 64$.

245. *в.*

246. $y = \frac{4}{5}x$.

247. $x \pm 3y = 0$, $2x \pm y = 0$.

248. $y - 3 = \frac{125}{48}(x - 5)$.

249. $x \pm 3y = 0$.

252. $\left(\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$.

254. 1.

255. $x^2 - 2y^2 = 6$.

263. $y^2 = 20x$.

264. $p = \frac{5}{6}$, $12x + 5 = 0$.

265. $(0, 0)$ ва $(2p, 2p)$.

266. $y^2 = \frac{25}{3}x$.

267. $x^2 = 16y$.

268. $2\frac{3}{4}$.

269. 16.
270. Туғри бурчак.
271. Уринма $x+2y+2=0$, нормаль $2x-y-6=0$.
272. Уринма $x-3y+3=0$, нормаль $3x+y-11=0$.
273. Уринма $x-3y+9=0$, нормаль $3x+y-33=0$.
274. $3x-y+1=0$.
275. $x+y+2=0$.
276. $x-3y+9=0$ ва $x-y+1=0$.
277. $l=\frac{p}{2k}$ булганда.
278. $2x+py-6p=0$.
279. $\left(\frac{1}{3}, \pm\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.
282. $y=3$.
283. $x-y-1=0$.
284. $7x+3y=0$.
292. $(-3, 2)$.
293. $\left(\frac{9}{4}, -\frac{7}{4}\right)$.
294. $(0, 1)$.
295. Маркази чексизликда (парабола).
297. $y=-3x-\frac{5}{2}$; $y=\frac{6}{5}x-\frac{2}{5}$.
298. $x+1=0$.
299. $y=2x$; $x=-\frac{1}{2}$.
300. $y-x+1=0$; $x=\frac{1}{2}$.
301. $x-y+1=0$.
302. 1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) иккита параллель туғри чизиқ; 5) эллипс; 6) гипербола; 7) иккита параллель туғри чизиқ; 8) парабола.
303. $m=1$ булса.
304. $m=0$ булса.
305. 1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$; 2) $y^2=2x$;

3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$; 4) $y^2=4x$;

5) $6x^2+y^2=6$; 6) $y^2=$
$=\frac{2}{5}\sqrt{5x}$; 7) $x^2+3y^2=8$;

8) $y^2=\frac{\sqrt{2}}{5}x$.
306. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$.
320. $\sqrt{209}$.
321. $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=34°15'$, 9.
322. 60°.
323. $\sqrt{14}$; $\sqrt{26}$; $2\sqrt{6}$.
324. $\left(\frac{8}{3}, 0, \frac{11}{6}\right)$.
325. $(\pm\sqrt{15}, -6, -7)$.
326. $(-5, 0, 0)$.
327. Йуқ.
328. $\frac{100\pi}{\sqrt{2}}$.
339. $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=0$ булганда, чунки шу вақтдагина у векторлардан ҳосил булган синиқ чизиқ епиқ булади.
340. $\alpha(\mathbf{a}-\mathbf{a}')+\beta(\mathbf{b}-\mathbf{b}')+\gamma(\mathbf{c}-\mathbf{c}')=0$, демак, $\mathbf{a}-\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}-\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}-\mathbf{c}'$ векторлар узаро чизиқли муносабат билан боғланган, бу эса уларнинг компланарлигини курсатади.
341. Скаляр купайтманинг хоссасидан фойдаланиб $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$ езиш мумкин. Демак, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ нинг $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ га перпендикуляр булиши учун $\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$ ёки $a=b$ булиши керак.
342. Учбурчакнинг томонларини ташкил этган $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ векторларнинг узунликлари a, b, c булсин. Бу ҳолда: $\mathbf{a}=\mathbf{b}-\mathbf{c}$ ёзиш мумкин, бундан

$$\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2+\mathbf{c}^2-2\mathbf{bc}.$$

Иккинчи томондан
$\mathbf{a}^2=a^2$, $\mathbf{b}^2=b^2$, $\mathbf{c}^2=c^2$, $\mathbf{bc}=bc\cos A$ булгани учун
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
343. $[\mathbf{ab}]^2=a^2b^2\sin^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; $(\mathbf{ab})^2=a^2b^2\cos^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ булгани учун, буларни ҳадлаб қушилса

$$[\mathbf{ab}]^2+(\mathbf{ab})^2=a^2b^2.$$

344. $[(a-b)(a+b)]=[ab]-[ba]+$ $+[aa]-[bb]$; $[aa]=0$, $[bb]=0$ булгани учун:
$[(a-b)(a+b)]=-[ba]+[ab]=$ $=[ab]+[ab]=2[ab]$.
Бу тенглик оддий геометрик маънога эгадир, яъни: параллелограмнинг диагоналларида ясалган параллелограмнинг юзи берилган параллелограм юзининг икки баробарига тенг.

345. ABC учбурчакда: $\overrightarrow{BC}=a$, $\overrightarrow{AC}=$ $=b$, $\overrightarrow{AB}=c$ булсин; учбурчакнинг A ва B бурчаклари учларидан туширилган баландликларнинг учрашган нуқтаси M булсин. Агар

$$\overrightarrow{MA}=m,\ \overrightarrow{MB}=n,\ \overrightarrow{MC}=p$$

фараз қилинса, бу ҳолда:

$a=p-n$, $b=m-p$, $c=n-m$.
MA ва BC узаро перпендикуляр булгани учун
$ma=m(p-n)=mp-mn=0$;
шунга ухшаш MB ва AC узаро перпендикуляр булгани учун
$nb=n(m-p)=nm-np=0$.
Кейинги иккала тенгликларни ҳадлаб қушсак:
$mp-np+mn-nm=0$,
ёки $(m-n)p=0$, ёки $-cp=0$, демак, $MC\perp AB$, бу эса M нуқтанинг ҳам C дан AB га туширилган баландликда эканлигини курсатади.

346. 1) Координаталар бошидан утади;
2) Oz уқига параллель;
3) Oz уқидан утади;
4) yOz текисликка параллель;
5) xOz „ „
6) Ox уқидан утади.

347. $y+3=0$.
348. $x+5=0$.
349. $7y+z=0$.
350. $5x-3z=0$.
351. $5x+y=0$.

352. 1) $a=3, b=2, c=-\frac{6}{5}$;

2) $a=-\frac{7}{5},\ b=-\frac{7}{2},\ c=-7$;

3) $a=\frac{4}{3},\ b=8,\ c=8$;

4) $a=-5,\ b=-\frac{5}{2},\ c=5$.

353. 1) $\dfrac{2x-y+2z-5}{3}=0$;

2) $\dfrac{x-y+4z-3}{3\sqrt{2}}=0$;

3) $\dfrac{-3x-4y+5z-7}{5\sqrt{2}}=0$;

4) $\dfrac{-5x-4y-2z-1}{3\sqrt{5}}=0$.

354. $p=5$; $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$, $\cos\beta=$ $=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$.

355. $A(x-5)+By+C(z+2)=0$.
356. $x+y+z-9=0$.
357. $5x-8y+4z=0$.
358. $10x+15y+18z-30=0$.
359. 90°.
360. $7x+4y+2z-33=0$.
361. $x-2y+z+1=0$.
362. $5x+7y+3=0$.
363. $\begin{vmatrix} x-4, & y-7, & z-2 \\ 4, & -10, & -1 \\ 4, & 5, & -7 \end{vmatrix}=0$.
364. 3.
365. $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$.
366. $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$.
367. $\left(-\frac{2}{7},\ 0,\ 0\right)(-5, 6, 0, 0)$.
368. $\frac{1}{2}\sqrt{101}$.
369. $\frac{1}{6}$.
370. $9x-4y+6z-7=0$.
371. $x+3y-11=0$.

372. (7, 8, 9).
373. $x + y - 4 = \pm (x + z - 3)$.
374. Чексиз узоқлашади.
375. $\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_3 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$
376. $\dfrac{6 \pm 4\sqrt{21}}{15} y + z = 0.$
377. 1) (1, 1, 1); 2) бир тўғри чизиқ устидан ўтади.
383. $(x - x_1)\sqrt{2} = \pm (y - y_1)$
$2 = \pm (z - z_1)\, 2.$
384. $\cos\alpha = \pm \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \pm \dfrac{2}{\sqrt{14}},$
$\cos\gamma = \pm \dfrac{1}{\sqrt{14}}.$
385. 1) $x = \dfrac{3}{5} z + \dfrac{1}{5}, y = \dfrac{4}{5} z - \dfrac{7}{5};$
2) $x = -5z + 3, \quad y = -7z + 7.$
386. 1) $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-5}{5} = \dfrac{z-0}{1}.$
2) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{1}.$
3) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-2}{2}.$
4) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}.$
387. 1) yOz текисликка параллель;
2) xOz текисликда;
Координаталар бошидан ўтади.
388. Мусбат қийматлари билан чегаралаинлса:
1) $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{35}}$, $\cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{35}},$
$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{35}};$
2) $\cos\alpha = 0, \cos\beta = \dfrac{3}{\sqrt{10}},$
$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{10}};$
3) $\cos\alpha = 0. \ \cos\beta = 0, \ \cos\gamma = 1;$
4) $\cos\alpha = 0, \cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{26}},$
$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{26}}.$
389. 1) $y = x - 1 = z - 2;$
2) $\dfrac{y+1}{4} = -\dfrac{x}{2} = \dfrac{z-5}{-3};$
3) $\dfrac{y}{-5} = \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{z-1}{-2};$
4) $y = x = \dfrac{1}{2}(z + 1.$
390. Бўлади.
391. Йўқ.
392. 60°.
394. 30°, 60°, 90°.
395. $a = \dfrac{3}{2}, \ b = \dfrac{20}{3}$ бўлганда,
396. $\dfrac{x - 5}{2} = \dfrac{y+3}{3} = \dfrac{z+1}{7}.$
397. $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}.$
398. $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-5}.$
399. $y = 1; \ 2x + z - 3 = 0.$
400. 65°30′.
401. 90°.
402. $n = -2, \ p = 4.$
403. 32 бўлганда.
404. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-5} = \dfrac{z-3}{-8}.$
406. Йўқ.
407. $\dfrac{14}{\sqrt{35}}.$
408. 3.
409. $2\sqrt{\dfrac{6}{83}}.$
410. $\dfrac{5}{3}\sqrt{2}.$
411. $5x - 2y - 7z + 34 = 0.$
412. $9x - 14y + 6z - 7 = 0.$

417. $x^2 + y^2 = 9$ (xy текислиги билан — айлана); $4x^2 + 9z^2 - 36 = 0$ (xz текислиги билан — эллипс); $4y^2 + 9z^2 - 36 = 0$ (yz текислиги билан — эллипс).

418. $(1, 2, 3)$; $\left(2\frac{5}{21}, -2\frac{20}{21}, -\frac{11}{21}\right)$.

419. $(4, 2, 9)$ — тўгри чизиқ сиртга уринма.

420. $r = \dfrac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

421. $a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - D^2 = 0$.

423. $4x - 12y + 9z - 6 = 0$.

424. $x - 2y - 4z = 0$.

425. 1) бир ковакли гиперболоид,
2) эллиптик параболоид,
Икки ковакли гиперболоид,
Конус.

426. $\left(\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \dfrac{c^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right)$.

433. а) $\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$; б) $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$;
в) $(-2, 1, 0)$; г) марказ чизиғи; $2x + 1 = 0$, $2y - 2z - 1 = 0$;
д) маркази йўқ;
е) $\left(\frac{2c\gamma}{3\beta}, -\frac{2c\gamma}{3\alpha}, 0\right)$.

434. $5x + 6y + 7z - 4 = 0$.

435. $x + 8y + 14z - 26 = 0$.

436. $7x + 17y + 19z + 19 = 0$.

437. $x + y + z - 6 = 0$.

438. $2x + y - z = 0$.

439. а) эллипсоид; б) бир ковакли гиперболоид; в) конус; г) сфера; д) икки ковакли айланма гиперболоид;
е) гиперболик параболоид.

440. а) $2x^2 + 5y^2 + 8z^2 - 32 = 0$;
б) $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 1 = 0$;
в) $y^2 - z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$;
г) $7y^2 - 2z^2 = \frac{8x}{\sqrt{14}}$.

441. Эга.

МУНДАРИЖА

БИРИНЧИ БЎЛИМ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ТЕКИСЛИКДА

Китобнинг учинчи нашрига сўз боши 5
Китобнинг тўртинчи нашрига сўз боши 7

1-боб. **Асосий тушунчалар**

§ 1. Аналитик геометрия 11
§ 2. Тўғрибурчакли координаталар системаси 12
§ 3. Икки нуқта орасидаги масофа 17
§ 4. Кесмани берилган нисбатда бўлиш 20
§ 5. Учбурчакнинг ва кўпбурчакнинг юзи 27
§ 6. Қутб координаталар системаси 31
§ 7. Нуқтанинг декарт ва қутб координаталари орасидаги асосий муносабатлар 34

2-боб. **Детерминант назариясининг асослари**

§ 8. Иккинчи тартибли детерминант 37
§ 9. Учинчи тартибли детерминант 41
§ 10. Детерминантнинг асосий хоссалари 45
§ 11. Детерминантнинг минорлари 49
§ 12. Биринчи даражали биржинсли тенгламалар системаси . . . 53
§ 13. Детерминантларни ўзаро кўпайтириш 57

3-боб. Чизиқ ва тенглама

§ 14. Тенгламанинг геометрик маъноси 60
§ 15. Чизиқнинг тенгламасини тузиш 64
§ 16. Чизиқнинг параметрик тенгламалари 67
§ 17. Алгебраик ва трансцендент чизиқлар 69

4-боб. Тўғри чизиқ

§ 18. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси . . . 73
§ 19. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси 79
§ 20. Тўғри чизиқнинг кесмалар бўйича тенгламаси 83
§ 21. Тўғри чизиқнинг нормаль тенгламаси 87
§ 22. Тўғри чизиқ тенгламасини нормаль ҳолга келтириш . . . 89
§ 23. Берилган нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси . . 93
§ 24. Берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси 94
§ 25. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак 98
§ 26. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа параллель ёки перпендикуляр бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси 102
§ 27. Икки тўғри чизиқнинг бир-бири билан кесишган нуқтаси . . 107
§ 28. Уч тўғри чизиқнинг бир нуқтадан ўтиш шарти 109
§ 29. Нуқта билан тўғри чизиқ орасидаги масофа 110
§ 30. Баъзи теоремалар ва уларнинг аналитик исботлари . . . 115

5-боб. Қисқартма белгилаш методи. Биржинсли координаталар

§ 31. Қисқартма белгилаш методи 121
§ 32. Биржинсли координаталар 127

6-боб. Баъзи алмаштиришлар

§ 33. Тўғрибурчакли координаталарни алмаштириш 129
§ 34. Қийшиқбурчакли координаталарни алмаштириш . . . 133
§ 35. Конгруэнт ва аффин алмаштиришлар тўғрисида тушунча . 137

7-боб. Айлана

§ 36. Айлананинг тенгламаси 145
§ 37. Айлананинг марказини ва радиусини аниқлаш 147
§ 38. Уч нуқтадан ўтган айлана 150

8-боб. Эллипс

2. § 39. Эллипсининг тенгламаси . . . 152
§ 40. Эллипснинг шаклини унинг тенгламаси бўйича текшириш . . 154
§ 41. Эллипсни чизиш . . . 158
§ 42. Эллипс ва айлана . . . 160
§ 43. Эллипснинг параметрик тенгламалари. Эллипсограф . . . 162
3 § 44. Эллипсининг эксцентриситети . . . 164
3, § 45. Эллипснинг радиус-векторлари . . . 165
4 § 46. Эллипснинг директрисалари . . . 168
4 § 47. Эллипсга уринма ва нормаль тенгламалари . . . 169
4 § 48. Эллипсга ўтказилган уринманинг хоссаси . . . 173
5 § 49. Эллипснинг диаметрлари . . . 175
5 § 50. Эллипснинг қўшма диаметрларига нисбатан тенгламаси . . 179
§ 51. Аполлоний теоремалари . . . 180
6 § 52. Эллипснинг қутб координаталар системасида тенгламаси . . 184

9-боб. Гипербола

7 § 53. Гиперболанинг тенгламаси . . . 189
§ 54. Гиперболанинг шаклини унинг тенгламаси бўйича текшириш 191
§ 55. Гиперболани чизиш . . . 194
§ 56. Тенгтомонли ва қўшма гипербола . . . 196
8 § 57. Гиперболанинг асимптоталари . . . 196
9 § 58. Гиперболанинг эксцентриситети . . . 199
10 § 59. Гиперболанинг радиус-векторлари . . . 201
11 § 60. Гиперболанинг директрисалари . . . 202
12 § 61. Гиперболага уринма ва нормаль тенгламалари . . . 204
13 § 62. Гиперболага ўтказилган уринманинг хоссаси . . . 206
14 § 63. Гиперболанинг диаметрлари . . . 207
§ 64. Аполлоний теоремалари . . . 210
15 § 65. Гиперболанинг қўшма диаметрларига нисбатан тенгламаси . 212
16 § 66. Гиперболанинг асимптоталарига нисбатан тенгламаси . . 214
17 § 67. Гиперболанинг қутб координаталар системасида тенгламаси 215

10-боб. Парабола

18 § 68. Параболанинг тенгламаси . . . 220
§ 69. Параболанинг шаклини унинг тенгламаси бўйича текшириш 222
§ 70. Параболани чизиш . . . 224
19 § 71. Параболага уринма ва нормаль тенгламалари . . . 227
20 § 72. Параболага ўтказилган уринманинг хоссаси . . . 229
21 § 73. Параболанинг диаметри ва маркази тўғрисида . . . 230

§ 74. Параболанинг диаметрига ва унинг билан кесишган нуқтасида ўтказилган уринмага нисбатан тенгламаси 232
§ 75. Иккинчи даражали бутун функциянинг геометрик маъноси 233
22 § 76. Параболанинг қутб координаталар системасида тенгламаси . 236
§ 77. Параболанинг эллипс ва гиперболага алоқаси 237

11-б о б. Конус кесимлари

23 § 78. Конус кесимлари — иккинчи тартибли чизиқлар 243

12-б о б. Иккинчи даражали алгебраик тенгламанинг геометрик маъносини текшириш

§ 79. Умумий мулоҳазалар 249
24 § 80. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг иккита тўғри чизиққа ажралиши 250
§ 81. Координаталар бошини кўчириш 255
25 § 82. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг маркази 258
26 § 83. Иккинчи тартибли эгри чизиққа уринма ва нормаль тенгламалари 261
§ 84. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг чексиз узоқлашган нуқталари ва асимптоталари 264
28 § 85. Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг диаметрлари 266
29 § 86. Марказли эгри чизиқнинг тенгламасини соддалаштириш . . 270
§ 87. Марказли эгри чизиқнинг каноник тенгламасини текшириш . 274
30. § 88. Марказсиз эгри чизиқнинг тенгламасини соддалаштириш . 277

ИККИНЧИ БЎЛИМ

АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ФАЗОДА

13-б о б. Асосий тушунчалар

§ 89. Фазодаги нуқтанинг координаталари 285
§ 90. Проекциялар 288
§ 91. Икки нуқта орасидаги масофа 295
§ 91а. Кесмани берилган нисбатда бўлиш 297
§ 92. Фазодаги йўналишни аниқлаш 300
§ 93. Шаклнинг юзи билан унинг координата текисликларидаги проекциялари орасидаги муносабат 301
§ 94. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак 302
§ 95. Қутб координаталари 304
§ 96. Координаталар алмаштириш 306

14-боб. Векториал алгебра

§ 97. Скаляр ва вектор 315
§ 98. Векторларнинг тенглиги 316
§ 99. Коллинеар векторлар 317
§ 100. Векторларни қўшиш ва айириш 318
§ 101. Векторни скалярга кўпайтириш 322
§ 102. Векторни сонга бўлиш 323
§ 103. Векторнинг ўқдаги проекцияси 326
§ 104. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси 329
§ 105. Икки векторнинг векториал кўпайтмаси 330
§ 106. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси 333
§ 107. Векторларни тўғрибурчакли координаталарда тасвирлаш . . 335

15-боб. Текислик

§ 108. Сирт ва унинг тенгламаси 338
§ 109. Текисликнинг нормаль тенгламаси 342
§ 110. Текисликнинг умумий тенгламаси 344
§ 111. Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш . . . 348
§ 112. Берилган нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламаси . . 351
§ 113. Берилган уч нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламаси . . 352
§ 114. Текисликнинг кесмалар бўйича тенгламаси 353
§ 115. Икки текислик орасидаги бурчак 356
§ 116. Уч текисликнинг кесишган нуқтаси 359
§ 117. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган текисликка параллель бўлган текислик 361
§ 118. Берилган икки нуқтадан ўтиб, берилган текисликка перпендикуляр бўлган текислик 363
§ 119. Нуқта билан текислик орасидаги масофа 364
§ 120. Тетраэдрнинг ҳажми 368
§ 121. Қисқартма белгилаш методининг текисликларга татбиқи . 371

16-боб. Тўғри чизиқ

§ 122. Тўғри чизиқнинг тенгламалари 377
§ 123. Тўғри чизиқнинг нормаль тенгламалари 380
§ 124. Икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламалари . . 382
§ 125. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак 384
§ 126. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа параллель бўлган тўғри чизиқ 386
§ 127. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган икки тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ 387
§ 128. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак . . . 388

§ 129. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқ 390
§ 130. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик 391
§ 131. Тўғри чизиқнинг текислик билан учрашган нуқтаси . . 392
§ 132. Берилган нуқтадан ва берилган тўғри чизиқдан ўтган текислик 394
§ 133. Берилган тўғри чизиқдан ўтиб, берилган текисликка перпендикуляр бўлган текислик 396
§ 134. Икки тўғри чизиқнинг бир-бири билан учрашиш шарти . . 397
§ 135. Икки тўғри чизиқ орасидаги энг қисқа масофа . . . 398
§ 136. Нуқта билан тўғри чизиқ орасидаги масофа 401 (1)

17-б о б. **Иккинчи тартибли сиртларни каноник тенгламалари бўйича текшириш**

§ 137. Умумий мулоҳазалар 407
31 § 138. Эллипсоид 408
32 § 139. Бир ковакли гиперболоид 420
33 § 140. Икки ковакли гиперболоид 430
34 § 141. Конус 436
35 § 142. Эллиптик параболоид 440
36 § 143. Гиперболик параболоид 446
37 § 144. Цилиндрик сиртлар 452

18-б о б. **Иккинчи тартибли сиртларнинг умумий назарияси**

§ 145. Умумий тушунчалар 457
§ 146. Иккинчи тартибли сиртнинг параллель ўқларга нисбатан тенгламаси 459
38 § 147. Иккинчи тартибли сиртнинг маркази 462
39 § 148. Иккинчи тартибли сиртнинг марказга нисбатан тенгламаси 464
40 § 149. Иккинчи тартибли сиртнинг конус ифода қилиш шарти . . 466
41 § 150. Иккинчи тартибли сирт ва тўғри чизиқ 467
42 § 151. Уринма текислик ва нормаль 469
43 § 152. Диаметраль текисликлар ва диаметрлар 470
§ 153. Бош диаметраль текисликлар 475
44 § 154. Марказли сиртнинг тенгламасини соддалаштириш . . . 479
45 § 155. Марказсиз сиртнинг тенгламасини соддалаштириш . . . 482
Масалаларнинг жавоблари 488

На узбекском языке

Ташмухамед Ниязович
Кары-Ниязов

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
В 8 ТОМАХ

Том первый

ОСНОВНОЙ КУРС
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изд-во „Фан" УзССР
Ташкент — 1967

Муҳаррир *Ҳ. Бектемиров*
Рассом *В. С. Тий*
Расмлар муҳаррири *Д. Файзирахмонов*
Техмуҳаррир *Г. Колесник*
Корректорлар *Л. Эркинова, М. Алиева*

Р—13321. Теришга берилди 18/V-1967 й. Босишга рухсат этилди 26/VI-1967 й.
Формати $60\times90^{1}|_{16}$=15,6 қоғоз л.—31,25 босма л. Уч. нашриёт л. 30,0
Нашриёт № 2125. Тиражи 3000. Баҳоси 2 с. 47 т.

ЎзССР „Фан" нашриётининг босмахонаси,
Черданцев кучаси, 21. Заказ 186
Нашриёт адреси: Гоголь кучаси, 70.

Қори-Ниёзий Т. Н.
Танланган асарлар. 8 томлик. т. I. Т.,
«Фан», 1967.
(ЎзССР. Фанлар акад.).
Т. I. Аналитик геометрия асосий курси.
1967. 502 бет.
Кары-Ниязов Т. Н. Избранные труды. т. I. Основной курс
аналитической геометрии.
517.3

На узбекском языке

Ташмухамед Ниязович
Кары-Ниязов

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ
В 8 ТОМАХ

Том первый

ОСНОВНОЙ КУРС
АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изд-во „Фан“ УзССР
Ташкент — 1967

Муҳаррир *Ҳ. Бектемиров*
Рассом *В. С. Тий*
Расмлар муҳаррири *Д. Файзирахмонов*
Техмуҳаррир *Г. Колесник*
Корректорлар *Л. Эркинова, М. Алиева*

Р—13321. Теришга берилди 18/V-1967 й. Босишга рухсат этилди 26/VI-1967 й.
Формати $60 \times 90^1/_{16}$=15,6 қоғоз л.—31,25 босма л. Уч. нашриёт л. 30,0
Нашриёт № 2125. Тиражи 3000. Баҳоси 2 с. 47 т.

ЎзССР „Фан“ нашриётининг босмахонаси,
Черданцев кучаси, 21. Заказ 186
Нашриёт адреси: Гоголь кўчаси, 70.

Қори-Ниёзий Т. Н.
Танланган асарлар. 8 томлик. т. 1. Т.,
«Фан», 1967.
(ЎзССР. Фанлар акад.).
Т. I. Аналитик геометрия асосий курси.
1967. 502 бет.
Кары-Ниязов Т. Н. Избранные труды. т. I. Основной курс
аналитической геометрии.
517.3