

**Министерство высшего и среднего специального  
образования Республики Узбекистан**

**Чирчикский государственный педагогический  
институт Ташкентской области**

**И.Г. Турсунов, Г.И.Мухамедов,  
О.Л. Бабушкин**

# **О Б Щ А Я Ф И З И К А**

**Механика и молекулярная физика**

**Учебное пособие**

**Ташкент-2021**

**УЎК 531(075)**  
**КБК 22.251я73**

Составители: и.о.проф. И.Г. Турсунов, проф. Г.И.Мухамедов, доцент О.Л. Бабушкин. **“Общая физика” (Механика и молекулярная физика)** учебное пособие. Т.:“Ishonchli hamkor”, 2021.-214 с.

Пособие содержит краткие теоретические описания по физике, предусмотренные программой этой дисциплины.

Ответственный редактор: и.о.проф. Ш.Н. Усманов.

Согласно приказу Министерства высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан № 110 от 01 марта 2021 года учебное пособие разрешен к изданию в лицензированных издательствах Кабинетом Министров Республики Узбекистан.

**ISBN 978-9943-7090-8-9**

**© И.Г. Турсунов, Г.И.Мухамедов, О.Л. Бабушкин.**  
**© Редакция «Ishonchli hamkor», 2021.**

## ВВЕДЕНИЕ

Физика изучает свойства материи, законы её изменения, связи между явлениями.

На начальном этапе древней греческой культуры физика охватывала всё, что было известно о земных и небесных явлениях. В течение многих веков её называли натуральной философией.

По мере накопления фактических данных, их научного обобщения стали дифференцироваться научные знания и методы исследования. Из натуральной философии, как общего учения о природе, стали выделяться такие науки, как астрономия, физика, химия, биология, геология, география и другие естественные и технические науки.

Особенностью физики является то, что она контактирует с очень большим количеством других наук и ограничить класс изучаемых её объектов очень трудно.

Широкая разветвлённость современной физики, её тесная связь с другими направлениями науки и техники обусловили появление таких научных дисциплин, как астрофизика, биофизика, геофизика, химическая физика и физическая химия, агрофизика и многие другие.

Если говорить в целом, физика – наука о наиболее общих свойствах материального мира, о существующих формах материи и её строении (физические поля, элементарные частицы, атомы, молекулы, кристаллы, жидкости, газы и т.д.), о взаимодействии различных форм материи и их движении (механические, тепловые, электромагнитные, гравитационные, атомные, ядерные и др. процессы).

В данном курсе будут рассматриваться основы кинематики, динамики, механики жидкостей, колебания и волны, молекулярная физика и основы термодинамики.

## Физическая величина

Все естественные науки связаны с материальными физическими объектами и процессами. Вы изучаете географическую оболочку Земли, её структуру, взаимосвязи и взаимодействия её компонентов. Они являются материальными системами, состоящими из физических объектов, между которыми постоянно происходит обмен вещества и энергии.

Например, в океанах с теплыми и холодными течениями происходит перенос массы и энергии. Тепло из экваториальных районов переносится на север, а холодные течения переносят холод на юг. Происходит процесс испарения с поверхности воды с затратой большого количества тепла. Влага переносится на сушу, конденсируется с выделением тепла и т.д.

Для того, чтобы описывать физические объекты и явления, необходимо договориться о терминологии. Поэтому вводится понятие «физическая величина».

Физическая величина – это характеристика одного из свойств физического объекта, системы, явления или процесса, общая в качественном отношении для многих физических объектов. В количественном отношении она индивидуальна для каждого объекта. Но для сравнения физических объектов должны быть выбраны единицы измерения физических величин.

Если взять линейные размеры, то размер единицы может изменяться. Например: радиус Земли измеряется в километрах (км), линейные размеры материков тоже в этой единице. Длина комнаты измеряется в метрах (м), длина тетради – в сантиметрах ( $10^{-2}$  м), её толщина – в миллиметрах ( $10^{-3}$  м), длина микроба – в микрометрах ( $10^{-6}$  м), размер атомов – в нанометрах ( $10^{-9}$  м).

Это все однородные физические величины, определяющие линейные размеры. Но и для одного предмета можно использовать различные единицы. Например, длина карандаша 18 см, но можно его представить и как 180 мм или 0,18 м.

В прогнозах погоды говорится, что скорость ветра ожидается 3 – 5 м/с, а в новостях сообщается, что при прохождении урагана скорость ветра достигала 180 км/ч. Как сравнить эти величины, что больше и несколько: 5 м/с или 180 км/ч? Здесь

необходимо эти данные привести в единую систему единиц и окажется, что в урагане скорость ветра в 10 раз выше (5 и 50 м/с).

Особенно важно, чтобы при установлении соотношения между различными физическими величинами выполнялись определенные правила.

Для каждой величины можно произвольно установить единицу измерения, независимо от других. Но можно ограничиться выбором нескольких основных величин. А другие устанавливать на их основе, воспользовавшись физическими законами.

В 1960 г. Конференцией по мерам и весам принята Международная система единиц SI (SISTEM INTERNATION). У нас это система называется СИ (Система интернациональная).

Основными единицами СИ являются:

единица длины – метр ( <b>м</b> );	единица электрического тока
единица массы – килограмм ( <b>кг</b> )	– Ампер ( <b>А</b> )
единица времени – секунда ( <b>с</b> )	единица силы света –
единица термодинамической температуры – Кельвин ( <b>К</b> )	кандела ( <b>кд</b> )
	единица количества вещества – моль ( <b>моль</b> )

Эта система является универсальной и охватывает все области измерений. Семь основных единиц позволяют образовывать единицы для любых физических величин во всех областях науки и техники.

## Скалярные и векторные величины

Все физические величины подразделяются на две группы: *скалярные (скаляры)* и *векторные (векторы)*.

Скалярная величина полностью определяется *числовым значением*. Скалярами являются, например, время, площадь, масса, работа. Действия над скалярами производятся по правилам алгебры, дифференциального и интегрального исчислений.

Векторная величина полностью определяется *числовым значением* и *направлением*. Векторами являются, например, скорость, ускорение, сила. В отличие от скаляров вектора

обозначаются полужирными буквами или буквами со стрелкой сверху.

Например,  $\vec{v}$  - вектор скорости,  $F$  - вектор силы и т. п. Графически вектор изображают отрезком со стрелкой на конце. Длина отрезка соответствует (в произвольном масштабе) числовому значению вектора; стрелка указывает направление вектора. На рис. 1 изображен вектор силы тяжести  $P$ , числовое значение которого  $4\text{ Н}$  (Ньютон).



Рис. 1

Векторы, имеющие одинаковые модули и направления, равны между собой. Отсюда следует, что при параллельном переносе вектор не изменяется.

Два численно равных, но противоположно направленных вектора  $A$  и  $B$  называются *противоположными векторами*. Для них имеет место равенство

$$A = -B, \text{ или } B = -A.$$

Действия над векторами производятся по правилам векторного исчисления. Ознакомимся с некоторыми из них.

а) *Сложение векторов*. Сложение производится по *правилу параллелограмма*.

Чтобы сложить два вектора  $A$  и  $B$  (рис. 2, а), необходимо путем параллельного переноса совместить их начала и построить на векторах параллелограмм (рис. 2, б). Вектор  $C$ , являющийся диагональю параллелограмма, представляет собой искомую сумму:

$$A + B = C.$$

Из рис. 2 б следует, что данные векторы можно сложить и другим способом, совмещая начало второго вектора с концом первого. Вектор  $C$ , соединяющий начало первого вектора с концом второго, также представляет искомую сумму (рис. 2, в). Этот способ, называемый *правилом треугольника*, особенно удобен при сложении нескольких векторов.

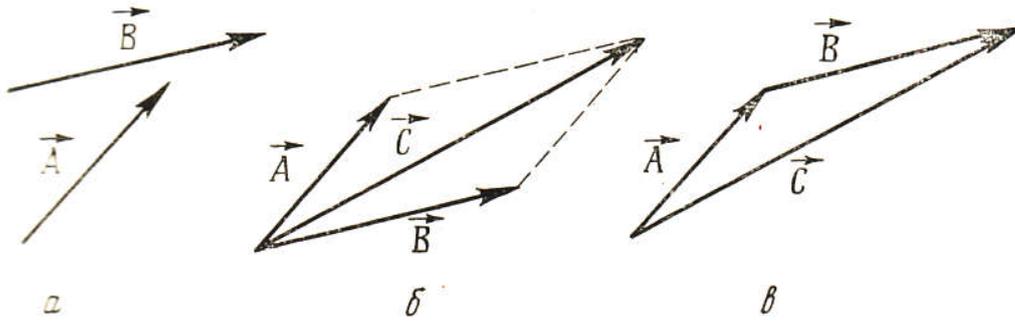


Рис. 2

Например, четырех:  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  (рис. 3, а). В этом случае начало второго вектора совмещают с концом первого, начало третьего – с концом второго и т.д. (рис. 3, б). Вектор  $E$ , соединяющий начало первого вектора с концом последнего, является суммой данных векторов:

$$A + B + C + D = E.$$

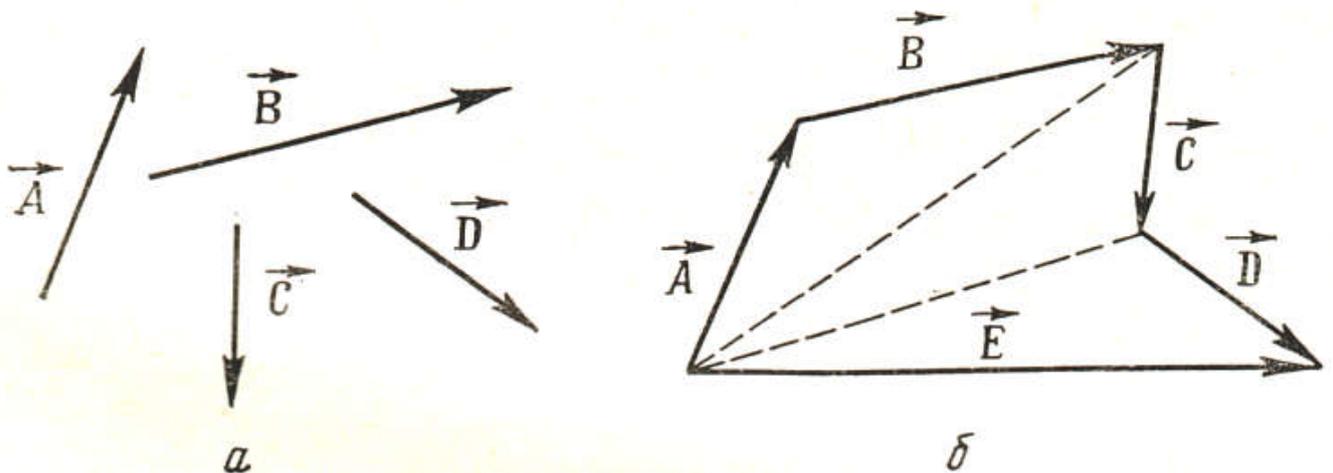


Рис. 3

Он не зависит от последовательности, в которой производилось сложение векторов, в чем легко убедиться путем соответствующих построений.

б) Вычитание вектора  $B$  из вектора  $A$  можно заменить сложением  $A$  с вектором  $(-B)$ , противоположным  $B$  (рис. 4, а):

$$A - B = A + (-B) = C.$$

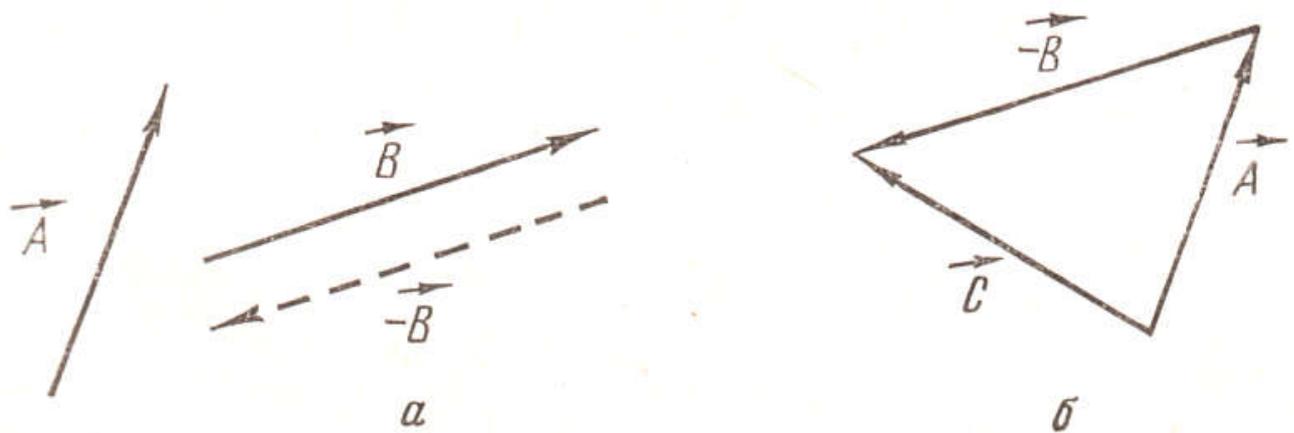


Рис. 4

Тогда, применив правило треугольника, получим вектор разности  $\vec{C}$  (рис. 4, б).

в) *Умножение и деление вектора на скаляр.* При умножении вектора  $\vec{A}$  на скаляр  $n$  получается вектор, совпадающий по направлению с  $\vec{A}$  и равный по величине  $nA$ . Скаляр  $n$  может иметь любые значения (целые и дробные, положительные и отрицательные). Поэтому данное правило умножения является вместе с тем и правилом деления вектора на скаляр. Примером умножения вектора на скаляр может служить определение перемещения  $\vec{s}$  по скорости  $\vec{v}$  и времени  $t$  (при равномерном прямолинейном движении):  $\vec{s} = \vec{v} \cdot t$ .

Примером деления вектора на скаляр является определение ускорения  $\vec{a}$  по силе  $\vec{F}$ , действующей на тело, и массе  $m$  тела:  $\vec{F} / m = \vec{a}$ .

# Глава I. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ)

## § 1.1. Общий случай криволинейного движения материальной точки. Основные характеристики движения

Простейшим видом движения материи является *механическое движение*, представляющее собой перемещение в пространстве тел или их частей относительно друг друга.

Различают три вида механического движения тел – *поступательное, вращательное и колебательное*. При поступательном движении твердого тела все его точки описывают совершенно одинаковые (при наложении совпадающие) линии и имеют одинаковую скорость и одинаковое ускорение (в данный момент времени). Если форма и размеры тела не оказывают существенного влияния на характер его движения, то такое тело можно рассматривать как *материальную точку*. *Материальной точкой называется тело, формой и размерами которого можно пренебречь в данной задаче.*

Последняя оговорка весьма существенна: при рассмотрении одного движения тела можно считать его материальной точкой, тогда как при рассмотрении другого движения того же самого тела это может оказаться недопустимым. Например, изучая движение Земли вокруг Солнца, можно и Землю, и Солнце считать материальными точками. Изучая же движение Земли вокруг своей оси, нельзя принимать Землю за материальную точку, так как на характер вращательного движения Земли существенно влияют её форма и размеры.

Перемещение тела можно рассматривать только относительно какого-либо другого тела или группы тел. Поэтому и при изучении движения материальной точки необходимо, прежде всего, выбрать *систему отсчета*, т.е. систему координат, связанную с телом, относительно которого рассматривается движение материальной точки. Такой системой отсчёта может служить, например, прямоугольная система координат  $XYZ$ , связанная с какой-нибудь точкой  $O$  земной поверхности (рис. 1.1). Тогда

положение материальной точки  $A$  в любой момент времени определится координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Линия, описываемая движущейся материальной точкой, называется *траекторией*.

Отрезок траектории  $BC$ , пройденный точкой за некоторый промежуток времени, представляет *путь*, пройденный точкой за этот промежуток времени, а прямолинейный отрезок  $BC$  – *перемещение* точки (рис. 1.1).

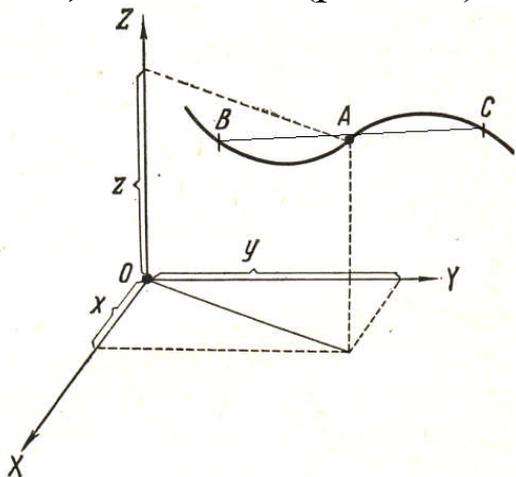


Рис. 1.1

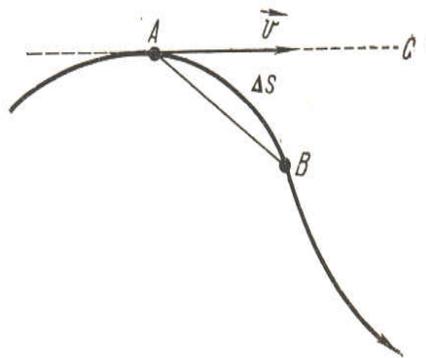


Рис. 1.2

Движение называется *прямолинейным*, если траектория – прямая линия, и *криволинейным*, если траектория – кривая линия. Очевидно, что при прямолинейном движении перемещение и путь совпадают.

Пусть материальная точка, двигаясь по криволинейной траектории, прошла за малый промежуток времени  $\Delta t$  малый путь –  $\Delta s$  (рис. 1.2). Проведем касательную  $AC$  к траектории в точке  $A$  и хорду  $AB$ .

*Отношение пути, пройденного материальной точкой, к промежутку времени, за который этот путь пройден, называется средней скоростью движения  $\mathcal{V}_{cp}$ :*

$$\mathcal{V}_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1.1)$$

В общем случае криволинейного (и прямолинейного) движения средняя скорость может быть различной на разных участках траектории и зависит от пути  $\Delta s$ , или, что тоже, от промежутка времени  $\Delta t$ .

Следовательно,  $\mathcal{G}_{cp}$  недостаточно полно характеризует движение. Поэтому вводят понятия *мгновенной скорости* (скорости в данный момент времени в данной точке). Будем бесконечно уменьшать промежуток времени, т.е. положим  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда точка  $B$  стремится к точке  $A$ , хорда  $AB$  – к дуге  $\Delta s$  и обе они в пределе совпадут с касательной  $AC$ . Таким образом, криволинейное движение по малой дуге  $\Delta s$  перейдет в прямолинейное движение по бесконечно малому отрезку касательной к траектории вблизи точки  $A$ , а средняя скорость на малом пути  $\Delta s$  перейдет в *мгновенную скорость*  $\mathcal{G}$  в точке  $A$ . Поэтому величина мгновенной скорости

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{G}_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \quad (1.2)$$

Как видно из рис. 1.2, мгновенная скорость направлена по касательной к траектории.

Итак, *мгновенная скорость движения в любой точке траектории есть вектор, направленный по касательной к траектории, а по величине равный пределу средней скорости при стремлении промежутка времени к нулю:*

$$\mathcal{G} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathcal{G}_{cp}.$$

Из формул (1.1) и (1.2) следует, что скорость выражается в *метрах в секунду* (м/с). Движение материальной точки называется *равномерным*, если его скорость не изменяется с течением времени; в противном случае движение называется *неравномерным*. Неравномерность движения характеризуется физической величиной, называемой *ускорением*.

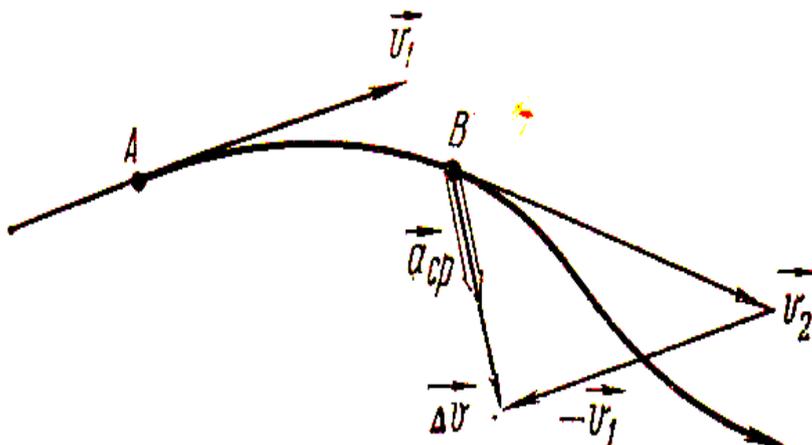


Рис.1.3.

Пусть материальная точка переместилась за малый промежуток времени  $\Delta t$  из  $A$ , где она имела скорость  $\mathcal{V}_1$ , в  $B$ , где она имеет скорость  $\mathcal{V}_2$  (рис. 1.3). Изменение (приращение) скорости точки есть вектор  $\Delta \mathcal{V}$ , равный разности векторов конечной и начальной скоростей:  $\Delta \mathcal{V} = \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1$ .

*Отношение изменения скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло, называется средним ускорением  $a_{cp}$ :*

$$a_{cp} = \frac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

Из правила деления вектора на скаляр следует, что среднее ускорение направлено так же, как приращение скорости, т. е. под углом к траектории в сторону её вогнутости (рис. 1.3).

В общем случае среднее ускорение может быть различным на различных участках траектории. Оно зависит от промежутка времени, по которому проводится усреднение. Будем уменьшать промежуток времени. В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  точка  $B$  будет стремиться к точке  $A$  и среднее ускорение на пути  $AB$  превратится в *мгновенное ускорение  $\mathbf{a}$*  в точке  $A$ . Поэтому

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta t} = \frac{d\mathcal{V}}{dt}. \quad (1.4)$$

*Итак, мгновенное ускорение движения в любой точке траектории есть вектор, направленный под углом к траектории в сторону её вогнутости, а по модулю равный пределу среднего ускорения при стремлении промежутка времени к нулю.*

Из формул (1.3) и (1.4) следует, что ускорение выражается в *метрах на секунду в квадрате ( $\text{м/с}^2$ )*.

Вектор ускорения принято раскладывать на две составляющие, одна из которых направлена по касательной к траектории и называется *касательным или тангенциальным ускорением  $\mathbf{a}_k$* , другая – по нормали к траектории и называется *нормальным или центростремительным ускорением  $\mathbf{a}_ц$*  (рис. 1.4). Будучи перпендикулярным касательной, вектор  $\mathbf{a}_ц$  направлен по радиусу кривизны траектории к центру кривизны  $O$  (рис. 1.4), отсюда название – *центростремительное ускорение*.

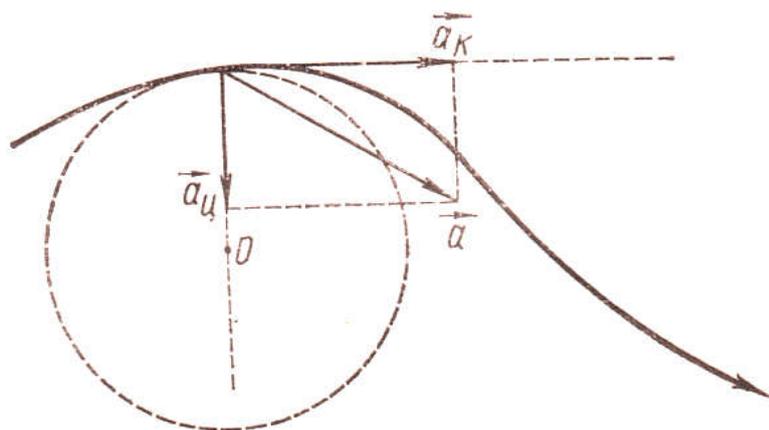


Рис.1.4

Ускорение и его составляющие связаны между собой очевидными соотношениями:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_k + \mathbf{a}_ц, \quad a = \sqrt{a_k^2 + a_ц^2}$$

Касательное ускорение изменяет только величину скорости, а центростремительное ускорение – только ее направление.

Очевидно, что криволинейное движение происходит всегда с ускорением, так как в этом случае скорость обязательно изменяется (по крайней мере, по направлению).

Пользуясь понятиями высшей математики, можно заменить пределы отношений, стоящих в формулах (2) и (4), производными и написать:  $v = ds/dt$  и  $a = dv/dt$ , где  $ds$ ,  $dv$  и  $dt$  означают соответственно бесконечно малые изменения (дифференциалы) перемещения, скорости и времени.

Следовательно, скорость представляет собой производную перемещения по времени, а ускорение – производную скорости по времени.

## § 1.2. Прямолинейное движение материальной точки

При прямолинейном движении центростремительная составляющая ускорения отсутствует ( $a_ц=0$ ), поэтому полное ускорение совпадает со своей касательной составляющей ( $\mathbf{a} = \mathbf{a}_k$ ).

*Движение, происходящее с постоянным ускорением ( $\mathbf{a} = \text{const}$ ), называется равномерно переменным (равноускоренным, если  $a > 0$ , и равнозамедленным, если  $a < 0$ ).*

В этом случае мгновенное ускорение равно среднему

ускорению за *любой* промежуток времени. Тогда из формулы (1.3) получим

$$a = a_{cp} = \frac{\Delta \mathcal{V}}{\Delta t} = \frac{\mathcal{V} - \mathcal{V}_0}{t},$$

откуда

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 + at, \quad (1.5)$$

где  $\mathcal{V}_0$  – начальная скорость движения,  $\mathcal{V}$  – скорость в момент времени  $t$ .

Средняя скорость на *любом отрезке* пути  $s$  в этом случае равна  $(\mathcal{V}_0 + \mathcal{V})/2$ . Тогда, учитывая формулу (1.1), можно написать, что

$$\mathcal{V}_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s}{t} = \frac{\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}}{2}$$

откуда

$$s = \frac{\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}}{2} t.$$

Подставляя выражение  $\mathcal{V}$  из формулы (1.5), получим

$$s = \frac{\mathcal{V}_0 + \mathcal{V}_0 + at}{2} t,$$

или

$$s = \mathcal{V}_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.6)$$

Решая совместно уравнения (1.5) и (1.6) и исключая из них время  $t$ , получим

$$\mathcal{V}^2 - \mathcal{V}_0^2 = 2as. \quad (1.7)$$

Формулы (1.5), (1.6) и (1.7) справедливы для любого равнопеременного прямолинейного движения, в том числе для свободного падения тела и для движения тела, брошенного вертикально вверх. В этих случаях, как известно,  $a = g = 9,81 \text{ м/с}^2$  (ускорение свободного падения).

Для *равномерного прямолинейного* движения  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 = \text{const}$  и  $a = 0$ . В этом случае формула (1.6) примет вид

$$s = \mathcal{V} \cdot t. \quad (1.8)$$

### § 1.3. Движение материальной точки по окружности

Рассмотрим движение материальной точки по окружности с постоянной по модулю скоростью. В этом случае, называемом *равномерным движением по окружности*, касательная состав-

ляющая ускорения отсутствует ( $a_k = 0$ ) и ускорение совпадает со своей центростремительной составляющей ( $a = a_{ц}$ ). Определим величину центростремительного ускорения.

Пусть за малый промежуток времени  $\Delta t$  точка прошла путь  $\Delta s$ , переместившись из точки  $A$ , где она имела скорость  $\mathcal{G}_1$ , в точку  $B$ , где она имеет скорость  $\mathcal{G}_2$ , а радиус-вектор движущейся точки повернулся на малый угол  $\Delta\varphi$  (рис. 1.5).

Построим вектор изменения скорости  $\Delta\mathcal{G} = \mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_1$  и определим его величину  $\Delta\mathcal{G}$ .  $\angle AOB = \angle BCD$  как углы с взаимно перпендикулярными сторонами;  $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 = \mathcal{G}$ , так как по числовому значению скорость постоянна. Следовательно,  $\triangle AOB$  и  $\triangle BCD$  подобны как равнобедренные с одинаковыми углами при вершине, поэтому

$$\frac{\Delta\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = \frac{AB}{R} \quad \text{и} \quad \Delta\mathcal{G} = \frac{\mathcal{G}}{R} AB.$$

Тогда, согласно формуле (1.4),

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathcal{G}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathcal{G} \cdot |AB|}{R \Delta t}, \quad \text{или,}$$

учитывая, что  $\mathcal{G}$  и  $R$  постоянны и  $a = a_{ц}$ , получим

$$a_{ц} = \frac{\mathcal{G}}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|AB|}{\Delta t}.$$

При  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, хорда  $AB$  стремится к дуге  $\Delta s$ , поэтому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|AB|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \mathcal{G}.$$

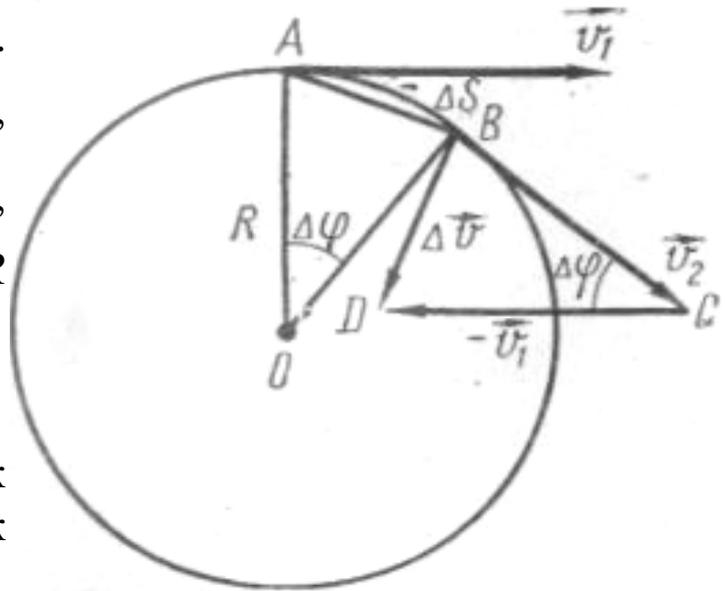


Рис. 1.5

Следовательно,

$$a_{ц} = \frac{\mathcal{G}^2}{R}. \quad (1.9)$$

Рис. 1.5 позволяет ещё раз убедиться в том, что полученное ускорение действительно является центростремительным. В самом деле, при  $\Delta t \rightarrow 0$  будет и  $\Delta\varphi \rightarrow 0$ . При этом векторы  $\Delta\mathcal{G}$  и  $a$ , имеющие одинаковое направление, совпадут с радиусом окруж-

ности и будут направлены к её центру  $O$ .

Наряду со скоростью  $\mathcal{G}$ , равномерное движение материальной точки по окружности можно характеризовать угловой скоростью  $\omega$ , понимая под ней отношение угла  $\Delta\varphi$  поворота радиуса  $R$  (т.е. отношение *углового пути*) к промежутку времени  $\Delta t$ , за который этот поворот произошел (см. рис. 1.5)

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} . \quad (1.10)$$

Для неравномерного движения вводится понятие *мгновенной угловой скорости*

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} .$$

Единицей угловой скорости является *радиан в секунду* (рад/с или  $\text{с}^{-1}$ ).

1 рад/с – *угловая скорость равномерно вращающегося тела, при которой за время 1 с совершается поворот тела относительно оси на угол 1 рад.*

В отличие от угловой скорости  $\omega$  скорость  $\mathcal{G}$  принято называть *линейной*.

Умножая обе части равенства (1.10) на  $R$  и учитывая, что  $R \cdot \Delta\varphi = \Delta s$  (так как  $\Delta\varphi$  выражается в радианах), получим соотношение, связывающее линейную скорость с угловой:

$$\mathcal{G} = \omega \cdot R . \quad (1.11)$$

Введём ещё две характеристики движения материальной точки по окружности: *период вращения*  $T$  (время одного оборота точки по окружности) и число оборотов в единицу времени  $\nu$ . Очевидно, что  $T$  и  $\nu$  – величины взаимно обратные:

$$T = \frac{1}{\nu} . \quad (1.12)$$

Единицей измерения периода вращения является *секунда* (с); единицей измерения частоты вращения – *герц* (Гц).

1 Гц – *частота периодического процесса, при которой за время 1 с происходит один цикл периодического процесса.*

Так как за период  $T$  радиус окружности, связанный с материальной точкой, повернется на угол  $2\pi$ , то

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.13)$$

Из формул (1.11) - (1.13) следует, что

$$\mathcal{G} = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi R\nu. \quad (1.14)$$

При неравномерном движении материальной точки по окружности вместе с линейной скоростью изменяется и угловая. Поэтому можно ввести понятие углового ускорения (по аналогии с линейным ускорением  $a$ ).

*Средним угловым ускорением  $\beta_{\text{ср}}$  называется отношение изменения угловой скорости  $\Delta\omega$  к промежутку времени, за который это изменение произошло:*

$$\beta_{\text{ср}} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (1.15)$$

*Мгновенным угловым ускорением называется предел среднего углового ускорения при стремлении промежутка времени к нулю:*

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (1.16)$$

При  $R = \text{const}$  изменение  $\Delta\omega$  обусловлено только изменением  $\Delta\mathcal{G}$ . Поэтому

$$\Delta\mathcal{G} = R \cdot \Delta\omega,$$

откуда

$$\Delta\omega = \frac{\Delta\mathcal{G}}{R}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (1.16), получим

$$\beta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathcal{G}}{R \cdot \Delta t} = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathcal{G}}{\Delta t} = \frac{a}{R},$$

откуда

$$a = \beta \cdot R. \quad (1.17)$$

Угловая скорость и угловое ускорение – величины векторные. Вектор угловой скорости  $\omega$  направлен из центра  $O$  окружности с радиусом  $R$ , по которой движется материальная точка  $A$ , перпендикулярно плоскости этой окружности (рис. 1.6) в сторону поступательного движения буравчика, рукоятка которого вращается в направлении линейной скорости  $\mathcal{G}$ .

Очевидно, что вектору  $-\omega$  соответствует противоположное направление движения (вращения) материальной точки. Что касается углового ускорения  $\vec{\beta}$ , то его направление совпадает с направлением вектора изменения угловой скорости  $\Delta\vec{\omega}$ .

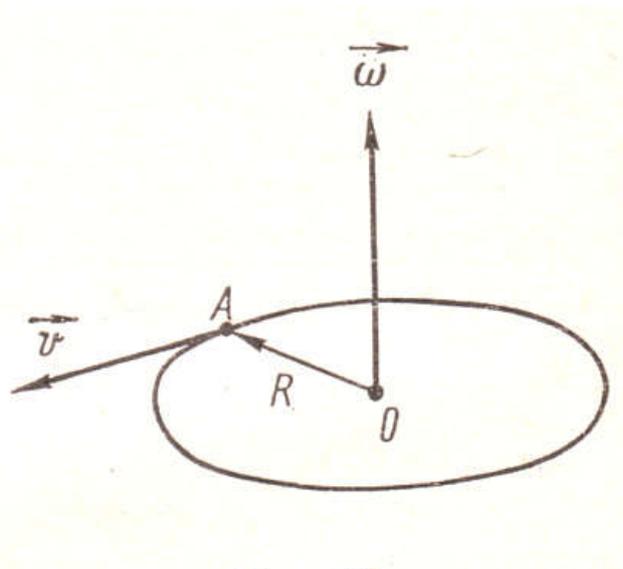


Рис.1.6

При *равнопеременном* движении материальной точки по окружности ( $a_{ц} = \text{const}$ ,  $a_{к} = \text{const}$ )

линейная скорость и пройденный путь определяются по формулам (1.5) и (1.6), в которых в качестве ускорения надо брать его касательную составляющую. Поделив обе части каждой из этих формул на радиус окружности и учитывая, что согласно формулам (1.11) и (1.17)

$$\omega = \frac{v}{R} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{a}{R},$$

получим соответствующие выражения для угловой скорости  $\omega$  и угла  $\varphi$  поворота радиуса (углового пути):

$$\omega = \omega_0 + \beta t, \quad \varphi = \omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}. \quad (1.18)$$

где  $\omega_0$  – начальная угловая скорость движения материальной точки.

## Глава II. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

### § 2.1. Законы Ньютона. Масса и сила

В предыдущей главе рассматривалось движение тел (материальных точек) вне зависимости от причин, его вызывающих. Соответствующий раздел механики называется *кинематикой*. Теперь перейдём к разделу, называемому *динамикой*, в котором движение тел изучается в связи с вызывающими его физическими причинами – *силами*.

Основные законы динамики были сформулированы в 80-х годах XVII века *Ньютоном*. Они представляют собой обобщение результатов многовекового человеческого опыта. Приведём современные формулировки трёх законов Ньютона.

**Первый закон Ньютона** (закон инерции): *всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие других тел не выведет его из этого состояния.*

Свойство тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инерцией*. Опыт показывает, что при одинаковом воздействии различные тела по-разному изменяют свою скорость. Иными словами, *одинаковые воздействия вызывают у различных тел различные ускорения*. Следовательно, ускорение, приобретаемое телом, зависит не только от величины воздействия, но и от некоторого *собственного свойства* тела. Это свойство тела характеризуется физической величиной, называемой *массой*. В этом смысле можно сказать, что *масса есть мера инерции тела*.

Масса является одной из основных физических величин. Отметим, что она характеризует не только инерцию тел, но и их *гравитационные свойства* (тяготение). Это связано с движением небесных тел, с падением тел в земных условиях.

Масса тел определяется путем сравнения с массой некоторого произвольно выбранного эталонного тела. По международному соглашению, таким эталоном является платино – иридиевый цилиндр, хранящийся в Париже и называемый *килограммом* (кг); эта масса принята за единицу массы – 1 кг. Тысячная доля

килограмма называется граммом массы (г). С высокой степенью точности масса  $1 \text{ см}^3$  дистиллированной воды при  $4^\circ\text{C}$  равна 1 г.

Отмеченное в законе инерции «воздействие других тел» (как причина, изменяющая состояние *данного тела*) получило общее название *силы*, действующей на данное тело. Опыт показывает, что различные силы сообщают одному и тому же телу различные ускорения. Кроме того, оказывается, что сила есть *вектор*, направленный так же, как вектор вызванного этой силой ускорения. Обобщение приведенных опытных фактов составляет содержание следующего закона.

**Второй закон Ньютона** (основной закон динамики поступательного движения): *ускорение  $\vec{a}$ , приобретаемое телом под действием силы  $\vec{F}$ , направлено так же, как сила, а по величине пропорционально силе и обратно пропорционально массе  $m$  тела:*

$$\vec{a} \sim \frac{\vec{F}}{m} .$$

Из последнего соотношения следует, что  $\vec{F} \sim m\vec{a}$ . Вводя коэффициент пропорциональности  $k$ , получим

$$\vec{F} = km \vec{a} . \quad (2.1)$$

Единицы силы можно выбрать так, чтобы  $k = 1$ . Для этого примем за единицу силы такую силу, которая единичной массе сообщает единичное ускорение. Тогда из соотношения (2.1) получим

$$1 \text{ (силы)} = k \cdot 1 \text{ (массы)} \cdot 1 \text{ (ускорения)}$$

откуда следует, что  $k = 1$ .

Вообще: *в физической формуле коэффициент пропорциональности можно принимать равным единице, если по этой формуле устанавливается единица одной из величин, входящих в формулу.* Этим приёмом мы будем очень часто пользоваться в дальнейшем. Если же все физические величины, входящие в формулу, имеют уже единицы (установленные по другим физическим соотношениям), то коэффициент пропорциональности нельзя выбирать произвольно. В этом случае числовое значение коэффициента определяется опытным путем.

Итак, полагая в формуле (2.1)  $k = 1$ , получим

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} . \quad (2.2)$$

В таком математическом виде принято выражать второй закон Ньютона. Отметим, что под  $\vec{F}$  подразумевается результирующая всех сил, действующих на тело.

Если одно тело действует на второе, то в свою очередь второе тело действует на первое. Например, груз, давящий на опору, сам испытывает давление со стороны этой опоры. Соотношение между силами, приложенными к взаимодействующим телам, описывается **третьим законом Ньютона** (закон действия и противодействия): *два взаимодействующих тела действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположными по направлению:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} , \quad (2.3)$$

где  $\vec{F}_{12}$  – сила действия первого тела на второе,  $\vec{F}_{21}$  – сила действия второго тела на первое.

Из формулы (2.3) следует, что только одно взаимодействие двух тел друг с другом не может вызвать движения обоих тел в одном и том же направлении. Для того чтобы два взаимодействующих тела пришли в движение в одном направлении, должно иметь место взаимодействие их (или одного из них) с некоторым *третьим* телом. Например, тепловоз тянет вагоны не за счет своего взаимодействия с вагонами, а за счет своего взаимодействия с опорой (рельсами), обусловленного трением.

На основании законов Ньютона можно уточнить формулировку понятия силы.

*Сила – физическая величина, характеризующая взаимодействие тел, в результате которого они приобретают ускорение.* Следует, однако, отметить, что действие силы проявляется не только в ускорении движения тел. Сила вызывает также *деформацию* (изменение формы) тела. Например, груз, висящий на проволоке, растягивает её. По деформации можно определить силу. На этом, как известно, основано измерение силы пружинным *динамометром*.

Установим теперь единицу силы. В соответствии с формулой (2.2) за единицу силы следует принять *ньютон* ( $H$ ).  $1 H$  – сила, которая телу массой  $1$  кг сообщает ускорение  $1 \text{ м/с}^2$  в направлении действия силы:  $1 H = 1 \text{ кг} \cdot \text{м/с}^2$ .

## § 2.2. Закон изменения импульса

Пользуясь математическим выражением второго закона Ньютона (2.2), можно определять значения движущей силы, массы и ускорения тела для *данного момента времени*. Однако зачастую бывает необходимо определять эти характеристики для *любого наперед заданного момента времени* (будущего или прошедшего). Для такого рода расчетов применяется *закон изменения количества движения*, являющийся одним из выражений второго закона Ньютона.

Пусть в течение некоторого промежутка времени  $t$  на тело массой  $m$ , двигавшегося ранее со скоростью  $\vec{g}_0$ , подействовала постоянная сила  $\vec{F}$ . Она сообщает телу постоянное ускорение  $\vec{a}$ , в связи с чем к концу промежутка времени тело приобретёт скорость  $\vec{g}$ .

Тогда, согласно второму закону Ньютона,

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{\vec{g} - \vec{g}_0}{t} \quad \text{или} \quad \vec{F}t = m\vec{g} - m\vec{g}_0, \quad (2.4)$$

где *произведение массы тела на его скорость называется импульсом (количеством движения) тела*, а *произведение движущей силы на время её действия – импульсом силы*.

*Импульс постоянной силы, действующей на тело, равен изменению импульса тела [закон изменения импульса]*. Если на тело действует не одна, а несколько сил, то под  $\vec{F}$  следует понимать их *результатирующую*.

Так как сила, действующая в течение малого промежутка времени  $\Delta t$ , практически является постоянной, то закону изменения импульса можно дать ещё такую формулировку: *импульс силы, действующей на тело в течение малого*

промежутка времени, равен изменению импульса тела за этот промежуток времени.

Этот закон позволяет определять конечную скорость движения тела по его начальной скорости и импульсу движущей силы.

Чтобы применять закон изменения импульса к случаям действия переменной силы, надо обобщить понятие импульса силы на *любой* промежуток времени. С этой целью разобьём промежуток времени  $t$  на  $n$  столь малых промежутков  $(\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3 \dots \Delta t_n)$ , что силу, действующую в течение каждого из них, можно считать постоянной и соответственно равной  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ . Тогда, согласно формуле (2.4), для каждого из этих промежутков времени

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \cdot \Delta t_1 &= m \vec{v}_1 - m \vec{v}_0 \\ \vec{F}_2 \cdot \Delta t_2 &= m \vec{v}_2 - m \vec{v}_1 \\ \vec{F}_3 \cdot \Delta t_3 &= m \vec{v}_3 - m \vec{v}_2 \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{F}_n \cdot \Delta t_n &= m \vec{v}_n - m \vec{v}_{n-1} , \end{aligned}$$

поскольку скорость в начале каждого последующего промежутка времени равна скорости в конце предыдущего промежутка времени.

Складывая равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \cdot \Delta t_i = m v_n - m v_{n-1} . \quad (2.5)$$

Сумма, стоящая в левой части равенства, называется полным импульсом переменной силы. Следовательно, *полный импульс переменной силы, действующей на тело, равен изменению импульса тела.*

### § 2.3. Закон сохранения импульса в изолированной системе

*Изолированной системой называется группа тел, взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующих ни с какими иными телами.* (В случае, если имеет место действие внешних

сил, то их результирующая должна быть равна нулю).

Отметим, что *абсолютно* изолированных систем не существует. Невозможно полностью изолировать систему от внешней (окружающей) среды хотя бы потому, что нет абсолютных теплоизоляторов и средств, экранирующих действие гравитационных полей. Однако во многих случаях взаимодействие системы с внешней средой может оказаться несущественным для тех протекающих в системе процессов, которые рассматриваются в данной задаче. Поэтому в целом ряде *конкретных задач* реальные системы можно считать изолированными.

Представим себе *механическую* изолированную систему, состоящую из  $n$  тел. Пусть для наглядности это будут упругие шары, беспорядочно движущиеся в некоторой части пространства (благодаря взаимным столкновениям). Сталкиваясь друг с другом, тела изменяют свой импульс. Рассматривая взаимодействие тел в течение небольшого промежутка времени  $\Delta t$  и применяя к каждому из тел закон изменения импульса (2.4), напомним:

$$\vec{F}_1 \cdot \Delta t_1 = m_1 \vec{\mathcal{G}}_1 - m_1 \vec{\mathcal{G}}_0$$

$$\vec{F}_2 \cdot \Delta t_2 = m_2 \vec{\mathcal{G}}_2 - m_2 \vec{\mathcal{G}}_1$$

$$\vec{F}_3 \cdot \Delta t_3 = m_3 \vec{\mathcal{G}}_3 - m_3 \vec{\mathcal{G}}_2$$

.....

$$\vec{F}_i \cdot \Delta t_i = m_i \vec{\mathcal{G}}_i - m_i \vec{\mathcal{G}}_{i-1}$$

где  $F_i$  – результирующая всех сил, действующих на  $i$  – е тело,  $m_i$  – масса  $i$  – го тела,  $\mathcal{G}_{i-1}$  и  $\mathcal{G}_i$  – его скорости в начале и в конце промежутка времени  $\Delta t$ . Складывая эти равенства почленно, получим

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_i \cdot \Delta t = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \mathcal{G}_i - \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \mathcal{G}_{i-1} .$$

Левая часть равенства представляет собой произведение  $\Delta t$  на геометрическую сумму всех сил, действующих на тела изолированной системы. Все эти силы – *внутренние*; внешние силы на изолированную систему не действуют. Так как, по третьему закону Ньютона, каждой силе соответствует равная по величине

*противодействующая* сила, то при сложении все эти силы взаимно уничтожаются, и левая, а следовательно, и правая часть последнего равенства обратятся в нуль. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \mathcal{G}_i = \sum_{i=1}^{i=n} m_i \cdot \mathcal{G}_{i-1} .$$

Это означает, что сумма импульсов всех тел не изменяется со временем:

$$m_1 \mathcal{G}_1 + m_2 \mathcal{G}_2 + \dots + m_n \mathcal{G}_n = const \quad (2.6)$$

Формула (2.6) выражает **закон сохранения количества движения (импульса)**: *в изолированной системе сумма импульсов всех тел есть величина постоянная.*

Особый интерес представляет приложение закона сохранения импульса к явлению «непрерывной отдачи», происходящему в реактивном двигателе (ракете). В этом случае изолированная система состоит из тела ракеты и вытекающего из её сопла газообразного продукта сгорания. Приблизительно ракету можно рассматривать как орудие, непрерывно стреляющее струёй газа и потому непрерывно движущееся в сторону, противоположную направлению этой струи.

Ракета – *единственный* аппарат, способный придать движение и изменять его *без опоры* (без посредства внешней среды). Поэтому реактивный двигатель является единственно возможным двигателем космических снарядов и кораблей.

## § 2.4. Силы упругости

До сих пор говорилось о силе вообще, не интересуясь её происхождением. Теперь перейдем к изучению некоторых конкретных разновидностей сил, широко представленных в природе и технике и играющих важную роль в *механических процессах*. К ним относятся силы упругости, трения, тяготения и некоторые другие. Начнем с рассмотрения сил упругости.

Как уже отмечалось, сила может деформировать тело – смещать составляющие его частицы относительно друг друга. При этом (в соответствии с третьим законом Ньютона) внутри

деформированного тела возникает противодействующая сила, равная по модулю деформирующей силе, которая и называется *силой упругости*. Например, груз, растягивающий пружину, подвергается действию силы упругости пружины. Силы упругости обусловлены взаимодействием между частицами (*молекулами и атомами*) тела и имеют в конечном счете электрическую природу.

Существует несколько видов деформации тел: одностороннее растяжение или сжатие, всестороннее растяжение или сжатие, кручение, сдвиг, изгиб. Каждый вид деформации вызывает появление соответствующей силы упругости.

На основе опытных данных Р. Гуком был сформулирован закон, названный его именем. Закон Гука: *сила упругости  $F$ , возникающая при малых деформациях любого вида, пропорциональна деформации (смещению)  $\Delta x$* :

$$F = -k \cdot \Delta x, \quad (2.7)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности. Знак минус показывает, что направление силы упругости противоположно направлению смещения.

Деформация называется упругой, если после устранения деформирующей силы силы упругости полностью восстанавливают первоначальную форму и размер тела. При малых смещениях  $\Delta x$  деформацию реальных тел можно считать упругой. При больших смещениях  $\Delta x$  возникает остаточная деформация – тело не восстанавливает полностью свою форму и размер.

При значительных деформациях может произойти разрушение тела (разрыв – при растяжении, излом - при изгибе и т.п.). Рассмотрим упругую деформацию одностороннего стержня (рис. 2.1).

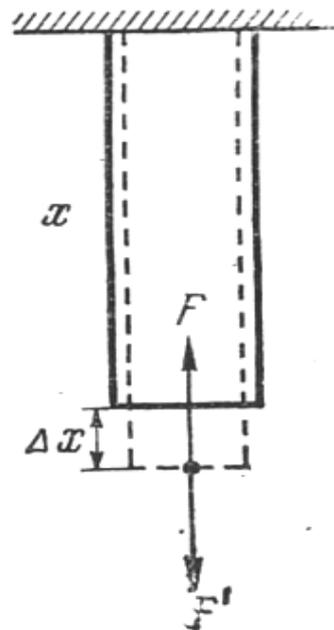


Рис.2.1

Пусть к нижнему концу закрепленного стержня длиной  $x$  и

площадью поперечного сечения  $S$  приложена деформирующая сила  $F'$ .

Стержень удлинится на величину  $\Delta x$  и в нём возникает сила упругости  $F = -F'$ . Опыт показывает, что удлинение пропорционально деформирующей силе и первоначальной площади его поперечного сечения:

$$\Delta x = \frac{F' x}{ES} = -\frac{Fx}{ES}, \quad (2.8)$$

откуда

$$F = -\frac{ES \cdot \Delta x}{x}. \quad (2.9)$$

где  $E$  – коэффициент, характеризующий упругие свойства стержня, называемый модулем упругости, или модулем Юнга. Согласно формуле (2.8)

$$E = -\frac{F' \cdot x}{S \cdot \Delta x}. \quad (2.10)$$

Полагая  $\Delta x = x$  и  $S = 1$ , получим  $E = F'$ , т. е. *модуль упругости вещества равен отношению силы, растягивающей вдвое стержень из этого вещества, к площади поперечного сечения стержня*. Следует отметить, что практически измерять модуль упругости таким методом нельзя, так как подавляющее большинство реальных тел разрушается при растяжениях значительно меньших двукратного. Модуль упругости измеряется в *ньютонах на квадратный метр* ( $\text{Н/м}^2$ ).

Очевидно, что все вышеизложенное ранее остается справедливым и для деформации одностороннего сжатия, если считать  $\Delta x$  не удлинением, а укорочением стержня.

Следует отметить, что все другие виды деформации могут быть сведены к соответствующим комбинациям деформаций одностороннего растяжения и сжатия. Например, деформация изгиба стержня сводится к деформации одностороннего растяжения верхней части стержня при одновременной деформации одностороннего сжатия нижней его части.

## § 2.5. Силы трения

Весьма распространенным взаимодействием тел является трение. Сила, препятствующая скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга, называется *силой трения*. Она направлена по касательной к поверхности соприкосновения тел противоположно скорости скольжения данного тела (*трение скольжения*). Трение существует и в случае неподвижных относительно друг друга тел (*трение покоя*). Максимальная сила трения покоя равна той наименьшей, внешней силе, которая вызывает скольжение тел. С момента начала скольжения сила трения несколько уменьшается (сила трения скольжения всегда меньше максимальной силы трения покоя).

Благодаря трению *равномерное прямолинейное движение тела возможно только тогда, когда сила трения скольжения уравновешена внешней (движущей) силой*.

Трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей - взаимным зацеплением выступов на них. При достаточно гладких поверхностях главной причиной трения становятся силы сцепления между молекулами трущихся поверхностей. Опыт показывает, что сила трения  $F_{\text{тр}}$  пропорциональна силе  $P$ , прижимающей соприкасающиеся тела друг к другу (т.е. силе *нормального давления*). В случае скольжения тела по горизонтальной поверхности сила нормального давления равна весу тела

$$F_{\text{тр}} = k \cdot P. \quad (2.11)$$

Множитель  $k$  называется *коэффициентом трения*. Он зависит от рода вещества и качества обработки трущихся поверхностей. В некоторой мере он зависит также от относительной скорости скольжения и от внешних условий (температуры, влажности и т.п.). Определяется коэффициент трения экспериментально по формуле (2.11). В технических таблицах обычно даются средние значения коэффициента трения. Например, для стали по стали  $k = 0,17$ , для стали по дереву  $k = 0,48$ .

Трение играет большую роль в природе и технике.

Посредством трения осуществляется необратимый переход всех видов энергии в теплоту. Благодаря трению приходит в движение и останавливается транспорт. Трение удерживает корни растений в почве, песок – в железнодорожной насыпи. За счет трения о земную поверхность снижается скорость ветра в приземном слое воздуха и т. п.

В тех случаях, когда трение играет вредную роль, его уменьшают, помещая между трущимися поверхностями вязкую жидкость (смазку). Тем самым внешнее трение твердых тел заменяют значительно меньшим *внутренним трением* жидкости.

Другой способ уменьшения трения – замена скольжения качением: применение колёс, катков, шариковых и роликовых подшипников. Коэффициент трения качения в десятки раз меньше коэффициента трения скольжения. Существенно, что сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела. В связи с этим у транспорта, предназначенного для движения по плохим дорогам (у телег, например), колеса имеют большой радиус. Сила трения качения выражается формулой

$$F_{\text{тр.к}} = \eta \frac{P}{R},$$

где  $P$  – сила нормального давления;  $R$  – радиус катящегося тела;  $\eta$  – коэффициент трения, зависящий от свойств материала соприкасающихся поверхностей. Как видно из формулы,  $\eta$  имеет размерность длины.

## § 2.6. Силы тяготения

Изучая движение небесных тел и падение тел в земных условиях, Ньютон установил **закон всемирного тяготения**, согласно которому *материальные точки притягиваются друг к другу с силой  $F$ , пропорциональной их массам  $m_1$  и  $m_2$  и обратно пропорциональной квадрату расстояния  $r$  между ними*

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.12)$$

Закон справедлив также для взаимодействия шаров и взаимодействия большого шара с малым телом. При этом под  $r$

следует понимать расстояние между центрами шаров. Коэффициент  $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  был определен экспериментально *Г.Кавендишем* в 1798 г. с помощью крутильных весов и назван *гравитационной постоянной*.

Согласно формуле (2.12), физический смысл гравитационной постоянной заключается в том, что она равна выраженной в ньютонах силе тяготения между двумя точечными массами по 1 кг каждая, находящимися на расстоянии 1 м друг от друга. Из формулы (2.12) следует, что силы тяготения (гравитационные силы) огромны для небесных тел и ничтожны для микрочастиц. Так, сила тяготения между Землей и Луной имеет порядок  $10^{20}$  Н, а между двумя почти соприкасающимися ( $r = 3 \cdot 10^{-8}$  см) молекулами кислорода –  $10^{-32}$  Н.

Притяжение между телами осуществляется через пространство, которое, *казалось бы*, не заполнено никакой материальной средой. Однако взаимодействие между материальными телами может осуществляться только *материальным посредником*. В данном случае таким посредником является *гравитационное поле* (поле силы тяготения). *Гравитационное поле – это особый вид материи, посредством которого осуществляется взаимное притяжение тел.*

Это относится и к другому виду взаимодействия через пространство – к электромагнитному взаимодействию. Вообще современная физика считает, что существует *два вида материи: вещество и поле*. Свойства поля существенно отличаются от свойств вещества. Если вещество подвержено действию некоторого поля, то и само оно способно создавать такое поле. Поэтому всякое взаимодействие тел через пространство можно схематически представить следующим образом: первое тело создает поле, которое действует на второе тело; в свою очередь второе тело действует своим полем на первое тело.

Возвращаясь к закону всемирного тяготения и применяя его к случаю взаимодействия земного шара с телами, расположенными вблизи земной поверхности, получим

$$F = \gamma \frac{Mm}{(R + h)^2},$$

где  $M$  – масса Земли,  $R$  – её радиус,  $m$  – масса тела,  $h$  – её высота над земной поверхностью. Так как  $R \gg h$ , то выражение силы тяготения тел к Земле можно представить в виде

$$F = \gamma \frac{Mm}{R^2}. \quad (2.13)$$

С другой стороны

$$F = mg, \quad (2.14)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения тел вблизи земной поверхности. Из формул (2.13) и (2.14) следует, что

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} = const, \quad (2.15)$$

так как  $\gamma$ ,  $M$  и  $R$  – постоянные величины. Таким образом, из закона всемирного тяготения следует, что вблизи Земли все тела падают с одинаковым ускорением  $g \approx 9,81 \text{ м/с}^2$ . Естественно, на больших высотах пренебрегать величиной  $h$  нельзя.

Строго говоря, благодаря вращению Земли вокруг своей оси ускорение  $g$  не является постоянным, а несколько изменяется в зависимости от широты и высоты места. Так, ускорение свободного падения на уровне моря на полюсе составляет  $9,83216 \text{ м/с}^2$ , на широте  $45^\circ$  –  $9,80616 \text{ м/с}^2$ , на экваторе –  $9,78030 \text{ м/с}^2$ , на высоте  $10 \text{ км}$  –  $9,7759 \text{ м/с}^2$ ,  $50 \text{ км}$  –  $9,6542 \text{ м/с}^2$ .

## § 2.7. Силы, возникающие при криволинейном движении

Равномерное движение тела по окружности характеризуется, как мы видели, центростремительным ускорением. Сила *любой природы*, вызывающая это ускорение, называется *центростремительной*. Она приложена к телу, направлена к центру окружности и, согласно второму закону Ньютона, равна

$$F_{\text{ц}} = ma_{\text{ц}} = m \frac{v^2}{R} = m\omega R, \quad (2.16)$$

где  $m$  – масса тела,  $a_{\text{ц}}$  – центростремительное ускорение,  $v$  и  $\omega$  – линейная и угловая скорости,  $R$  – радиус окружности.

Центростремительная сила создаётся связью, удерживающей тело на окружности; она обусловлена реакцией связи на стремление тела удалиться от центра окружности. Рассмотрим в качестве примера движение шарика по окружности на резиновом шнурке (рис. 2.2).

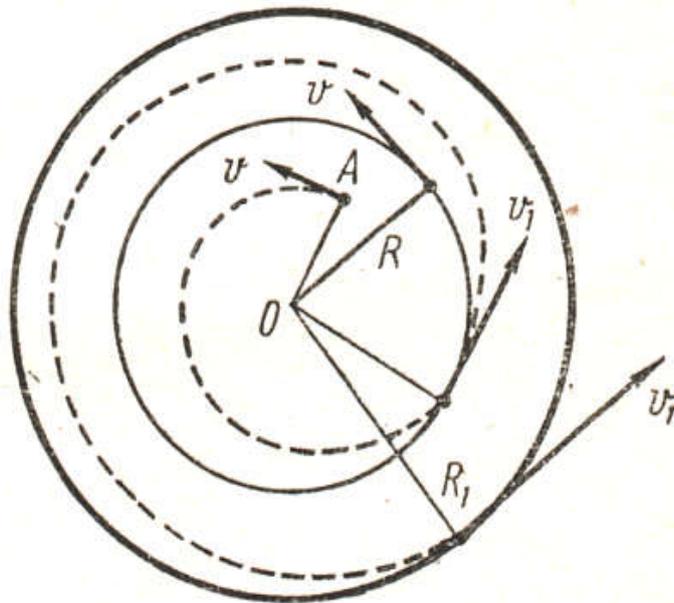


Рис.2.2

Сообщим шарикам  $A$  скорость  $\mathcal{V}$  перпендикулярно шнуру (связи)  $OA$ , закреплённому на точке  $O$ .

Шарик начнет двигаться по инерции прямолинейно, удаляясь от точки  $O$ . При этом шнур растягивается и возникающая в нем сила упругости, препятствуя прямолинейному движению шарика, заставит шарик двигаться по раскручивающейся спирали.

Когда возрастающая по мере растяжения шнура сила упругости станет достаточной для того, чтобы воспрепятствовать удалению шарика от точки  $O$ , он начнёт двигаться по окружности радиусом  $R$ . Очевидно, что при этом упругая сила связи будет равна центростремительной силе:

$$F = m \frac{\mathcal{V}^2}{R}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае роль центростремительной силы играет сила упругости шнура.

Если по какой-либо причине скорость шарика возрастет до значения  $\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}$ , то он опять начнет удаляться от центра  $O$  по спирали до тех пор, пока упругая сила дополнительно растянувшегося шнура не заставит его двигаться по окружности радиусом  $R_1 > R$ . При этом опять сила упругости связи станет равна центростремительной силе:

$$F = m \frac{g_1^2}{R_1}.$$

При некоторой достаточно большой скорости вращения шнур не выдержит растяжения и разорвется, а шарик полетит прямолинейно – по касательной к окружности. Именно так летят раскалённые частицы искры, отрывающиеся от точильного круга.

Разрыв связи может произойти у махового колеса при слишком большой скорости вращения. На разрыве связи основано действие центробежных механизмов, как, например, сушильная машина, медогонка, молочный сепаратор, центробежный насос. В сушильной машине связью является сцепление воды с тканью, в медогонке – сцепление мёда с сотами, в центробежном насосе – трение воды (или воздуха) о вращающиеся лопасти насоса.

Рассмотрим еще один пример – вращение эластичного резинового шара с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси, проходящей через его центр (рис. 2.3). Мысленно разобьём шар на маленькие частицы – шарики одинаковой массы и представим, что сцепление между ними обеспечивается резиновыми шнурами (связями), к которым шарики прикреплены.

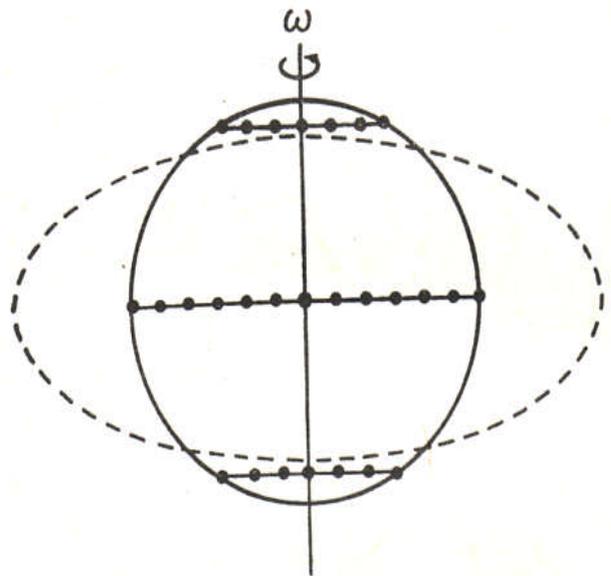


Рис.2.3

Так как массы и угловые скорости у всех шариков одинаковы, то, согласно формуле (2.16), наибольшая центробежная сила будет действовать на шарики, наиболее удалённые от оси вращения. Таких шариков больше всего в «экваториальном» слое шара и меньше всего в «приполярных» слоях. Поэтому связи сильнее растянутся в «экваториальном» слое. В результате шар примет форму эллипсоида вращения. Аналогично деформируется земной шар: он растянут у экватора и приплюснут у полюсов так, что экваториальный радиус на 1/300

больше полярного. В связи с неоднородностью состава Земли она имеет форму так называемого геоида, близкого к эллипсоиду вращения.

В заключение отметим, что, согласно третьему закону Ньютона, вместе с центростремительной силой, приложенной к телу, возникает равная ей по величине, но противоположно направленная сила, приложенная к связи: она называется *центробежной силой*.

## **§ 2.8. Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции**

Система отсчета, движущаяся (относительно звезд) равномерно и прямолинейно (т.е. по инерции), называется *инерциальной*. Очевидно, что таких систем отсчета – неисчислимое множество, поскольку любая система, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы отсчета равномерно и прямолинейно, тоже инерциальна. Системы отсчета, движущиеся (относительно инерциальной системы) с ускорением, называются *неинерциальными*. Опыт показывает, что *во всех инерциальных системах отсчета все механические процессы протекают совершенно одинаково (при одинаковых условиях)* [**механический принцип относительности или принцип относительности Галилея**].

Этот принцип назван по имени *Г. Галилея*, сформулировавшего его в 1636 г. на примере механических процессов, совершающихся в каюте корабля, плывущего равномерно и прямолинейно по спокойному морю. Для наблюдателя, находящегося в каюте, колебание маятника, падение тел и другие механические процессы протекают точно так же, как и на неподвижном корабле. Поэтому, наблюдая эти процессы, невозможно установить ни скорость, ни даже сам факт движения корабля. Чтобы судить о движении корабля относительно какой-либо системы отсчета (например, поверхности воды), необходимо вести наблюдения и за этой системой (видеть, как удаляются предметы, лежащие на воде, и т.п.).

К началу XX в. выяснилось, что не только механические, но

и тепловые, электрические, оптические и все другие процессы, и явления природы протекают совершенно одинаково во всех инерциальных системах отсчета. На этом основании *А. Эйнштейн* в 1905 г. сформулировал **обобщенный принцип относительности**: *во всех инерциальных системах отсчета все физические процессы протекают совершенно одинаково при одинаковых условиях* [принцип относительности Эйнштейна].

Этот принцип положен в основу *специальной теории относительности*, разработанной Эйнштейном.

*Законы Ньютона и другие, рассмотренные нами законы динамики, выполняются только в инерциальных системах отсчета.* В неинерциальных системах отсчета эти законы, вообще говоря, уже несправедливы. Рассмотрим пример, поясняющий последнее утверждение.

На совершенно гладкой платформе, движущейся равномерно и прямолинейно, лежит шар массой  $m$ ; на этой же платформе находится наблюдатель. Другой наблюдатель стоит на Земле недалеко от места, мимо которого вскоре должна пройти платформа. Очевидно, что оба наблюдателя связаны с инерциальными системами отсчета.

Пусть теперь, в момент прохождения мимо наблюдателя, связанного с Землей, платформа начнет двигаться с ускорением  $a$ , т.е. сделается *неинерциальной* системой отсчета. При этом шар, ранее покоившийся относительно платформы, придет (относительно неё же) в движение с ускорением  $a$ , противоположным по направлению и равным по значению ускорению, приобретённому платформой. Выясним, как выглядит поведение шара с точек зрения каждого из наблюдателей.

Для наблюдателя, связанного с инерциальной системой отсчета - Землей, шар продолжает двигаться равномерно и прямолинейно в полном соответствии с законом инерции (поскольку на него не действуют никакие силы, кроме силы тяжести, уравновешиваемой реакцией опоры).

Наблюдателю, связанному с *неинерциальной* системой отсчета – платформой, представляется иная картина: шар приходит в движение и приобретает ускорение *без воздействия силы*

(поскольку наблюдатель не обнаруживает воздействия на шар каких-либо других тел, сообщающих шару ускорение). Это явно противоречит закону инерции. Не выполняется и второй закон Ньютона: применив его, наблюдатель получил бы, что

$$0 \text{ (сила)} = - ma,$$

а это невозможно, так как ни  $m$ , ни  $a$  не равны нулю.

Можно, однако, сделать законы динамики применимыми и для описания движений в *неинерциальных* системах отсчета, если ввести в рассмотрение силы особого рода – *силы инерции*. Тогда в нашем примере наблюдатель, связанный с платформой, может считать, что шар пришел в движение под действием силы инерции

$$F = - ma.$$

Введение силы инерции позволяет записывать второй закон Ньютона (и его следствия) в обычной форме; только под действующей силой надо теперь понимать *резльтирующую* «обычных» ( $F$ ) и инерциальных ( $F_{\text{и}}$ ) сил:

$$F + F_{\text{и}} = - ma, \quad (2.17)$$

где  $m$  – масса тела,  $a$  – его ускорение.

Силы инерции мы назвали силами «особого рода», во-первых, потому, что они действуют только в неинерциальных системах отсчета, и, во-вторых, потому, что для них, в отличие от «обычных» сил, невозможно указать, действием каких именно других тел (на рассматриваемое тело) они обусловлены. Очевидно, по этой причине к силам инерции невозможно применить третий закон Ньютона (и его следствия); это является третьей особенностью сил инерции.

Силы инерции возникают не только в прямолинейно движущихся, но и во вращающихся неинерциальных системах отсчета. Пусть, например, на горизонтальной

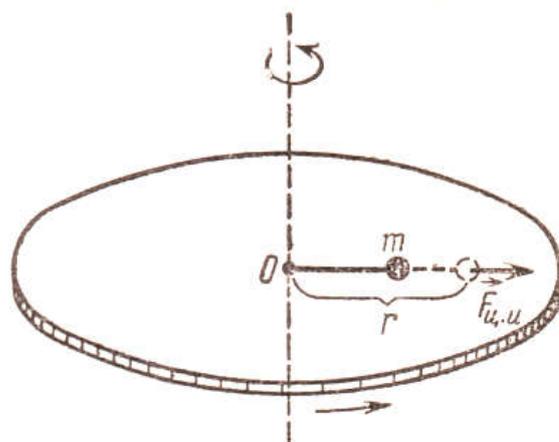


Рис.2.4

платформе, которая может вращаться вокруг вертикальной оси, лежит тело массой  $m$ , связанное с центром вращения  $O$  резиновым шнуром (рис. 2.4).

Если платформа начнёт вращаться с угловой скоростью  $\omega$  (и, следовательно, превратится в неинерциальную систему), то благодаря трению тело тоже будет вовлечено во вращение. Вместе с тем оно будет перемещаться в радиальном направлении от центра платформы до тех пор, пока возрастающая сила упругости растягивающегося шнура не остановит это перемещение. Тогда тело начнет вращаться на расстоянии  $r$  от центра  $O$ .

С точки зрения наблюдателя, связанного с платформой, перемещение шара относительно неё обусловлено некоторой силой  $F_{ц.и.}$ . Это есть *сила инерции*, поскольку она не вызвана действием на шар других определенных тел; её называют *центробежной силой инерции*. Очевидно, что центробежная сила инерции равна по модулю и противоположна по направлению силе упругости растянутого шнура, играющей роль центростремительной силы, которая действует на тело, вращающееся по отношению к инерциальной системе. Поэтому

$$F_{ц.и.} = m\omega^2 r, \quad (2.18)$$

следовательно, центробежная сила инерции пропорциональна расстоянию тела от оси вращения.

## § 2.9. Вес тел. Ускорение свободного падения. Невесомость

Введение сил инерции упрощает и делает более наглядным решение целого ряда вопросов и задач о движении тел в *неинерциальных системах*. Получим уточненные выражения веса тела и ускорения свободного падения.

Сила, с которой тело притягивается к Земле, называется *силой тяжести*. *Вес тела равен силе, с которой неподвижное относительно Земли и находящееся в пустоте тело давит на горизонтальную опору или растягивает пружину вследствие притяжения к Земле.*

Таким образом, вес тела *равен* силе тяжести; поэтому зачастую пользуются этими терминами как равнозначными.

(Строго говоря, сила тяжести и вес не тождественные понятия: сила тяжести приложена к телу, а вес к опоре (подставке, подвесу и т.п.). Поэтому вес проявляется только при соприкосновении тела с опорой.). Если бы Земля не имела суточного вращения, то вес тела был бы равен силе тяготения тела к Земле, определяемой по формуле

$$F = \gamma \frac{Mm}{R^2} . \quad (2.19).$$

Благодаря суточному вращению Земли (в котором участвуют и все земные тела) на тело  $M$ , лежащее на земной поверхности, кроме силы тяготения  $F$ , направленной по радиусу  $R$  к центру  $O$  Земли, действует центробежная сила инерции  $F_{ц.и}$ , направленная по линии продолжения радиуса  $r$  от оси вращения Земли (рис. 2.5).

Разложим  $F_{ц.и}$  на две составляющие:  $F'_{ц.и}$  — в направлении радиуса  $R$ ,  $F''_{ц.и}$  — в направлении, перпендикулярном  $R$ . Составляющая  $F''_{ц.и}$  уравнивается силой трения о земную поверхность; составляющая  $F'_{ц.и}$  противодействует силе тяготения тела к Земле. Поэтому сила притяжения тела к Земле, т.е. вес  $P$  тела выразится разностью силы тяготения  $F$  и составляющей центробежной силы инерции  $F''_{ц.и}$ .

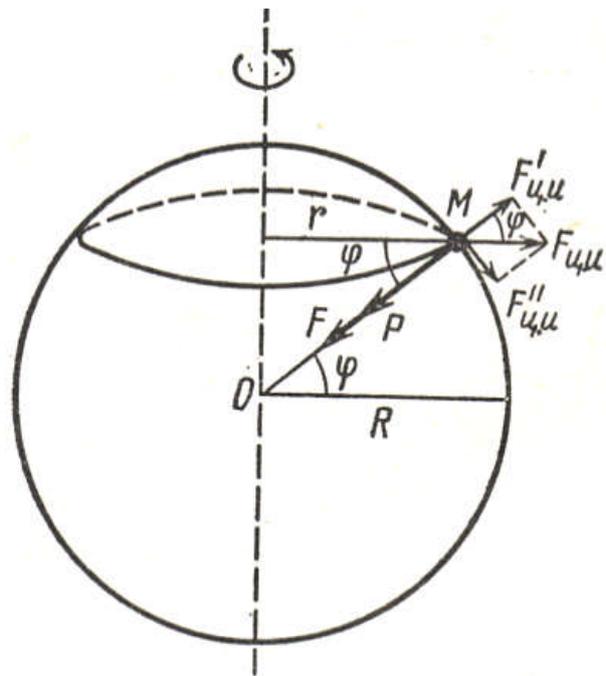


Рис.2.5

$$P = F - F'_{ц.и} = F - F_{ц.и} \cos \varphi . \quad (2.20)$$

Учитывая формулы (2.19) и (2.20), получим:

$$P = \gamma \frac{mM}{R^2} - m\omega^2 r \cos \varphi ,$$

где  $m$  – масса тела,  $M$  – масса Земли,  $\omega = 7,3 \cdot 10^{-5}$  рад/с – угловая скорость суточного вращения Земли. Но  $r = R \cos \varphi$ , поэтому

$$P = \gamma \frac{mM}{R^2} - m\omega^2 R \cos^2 \varphi. \quad (2.21)$$

Из формулы (2.21) следует, что вес тела зависит от широты места: уменьшается от полюса к экватору благодаря увеличению в этом направлении  $\cos \varphi$  и  $R$ .

На полюсе  $P = \gamma \frac{mM}{R^2}$ , на экваторе  $P = \gamma \frac{mM}{R^2} - m\omega^2 R$ .

Так как ускорение силы тяжести  $g = \frac{P}{m}$ , то

$$g = \gamma \frac{M}{R^2} - \omega^2 R \cos^2 \varphi. \quad (2.22)$$

Следовательно, ускорение свободного падения также уменьшается от полюса к экватору. Правда, это уменьшение столь мало (не превышает 0,5%), что во многих практических расчетах его не учитывают. С помощью сил инерции можно объяснить *состояние невесомости*. Тело, подверженное этому состоянию, не оказывает давления на опоры даже находясь в соприкосновении с ними. При этом тело не испытывает деформации. Состояние невесомости наступает в случае, когда на тело действует *только* сила тяготения, т.е. когда тело *свободно* движется в поле тяготения. Это происходит, например, в искусственном спутнике Земли, выведенном на орбиту и *свободно* движущемся в поле земного тяготения, т.е. вращающемся вокруг Земли. При этом вращательном движении возникает центробежная сила инерции. Так как центробежная сила инерции, действующая на *каждую* *частицу* тела, находящегося в спутнике (и самого спутника), равна по модулю и противоположна по направлению силе тяготения, действующей на соответствующую частицу, то эти силы взаимно уравниваются. В результате тело не подвергается деформации и не оказывает давления на стенки спутника (и другие возможные опоры), т.е. оно оказывается невесомым.

## § 2.10. Сила Кориолиса

С вращением Земли вокруг своей оси связано ещё одно немаловажное явление: отклонение тел, движущихся по земной поверхности, от первоначального направления. Пусть тело массой  $m$ , двигаясь прямолинейно в северном полушарии, например, вдоль меридиана, переместилось с широты  $\varphi_1$ , которой соответствует линейная скорость  $\mathcal{V}_1$ , на широту  $\varphi_2$ , которой соответствует скорость  $\mathcal{V}_2$  (рис. 2.6).

Сохраняя по инерции свою первоначальную скорость  $\mathcal{V}_1$ , тело имеет на широте  $\varphi_2$  большую скорость, чем находящаяся под ним земная поверхность. Иначе говоря, на широте  $\varphi_2$  тело приобретает ускорение  $a_k$  относительно земной поверхности, направленное вправо перпендикулярно перемещению  $S$  тела. В результате тело отклонится вправо от первоначального (меридионального) направления движения и его траектория (относительно земной поверхности) окажется *криволинейной*.

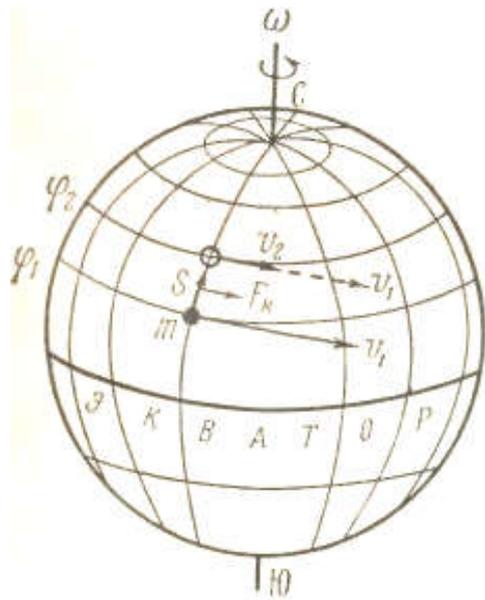


Рис.2.5

Наблюдатель, связанный с вращающейся Землей (и потому не замечающий её вращения), объяснит данное явление действием на тело некоторой силы инерции, направленной вправо перпендикулярно к скорости перемещения тела равной  $F_k = ma_k$ . Эта сила получила название *кориолисовой силы* или *силы Кориолиса*.

Сила Кориолиса действует только на движущиеся (относительно Земли) тела. Будучи перпендикулярной скорости движения тела, она изменяет только направление, но не модуль этой скорости. В северном полушарии кориолисова сила направлена вправо, в южном полушарии – влево. Во избежание

недоразумений отметим, что сила Кориолиса возникает при любом (а не только при меридиональном) направлении движения тел.

Сила Кориолиса пропорциональна скорости движения тела, его массе и угловой скорости суточного вращения Земли:

$$F_k = 2\omega v m \sin\varphi. \quad (2.23)$$

Поскольку угловая скорость вращения Земли невелика, сила Кориолиса может принимать большие значения и вызывать существенные отклонения только у тел, движущихся с большой скоростью (например, у находящихся в полете межконтинентальных баллистических ракет).

Если движение тел на земной поверхности ограничено (в боковом направлении) какой – либо связью, то тело давит на эту связь с силой, равной кориолисовой. При *длительном* воздействии сила Кориолиса, несмотря на её сравнительно малое значение, вызывает заметный эффект. Действием силы Кориолиса обусловлен и повышенный износ правого рельса железнодорожных путей в *северном* полушарии. Благодаря ей реки *северного* полушария подмывают *правые* берега (*закон Бера*).

В атмосфере существуют крупные барические образования: циклоны и антициклоны. У первых в центре пониженное давление, у вторых – повышенное. За счет разности давлений воздушные частицы в циклонах должны двигаться к центру, а в антициклонах от центра. В результате действий кориолисовых сил частицы в северном полушарии отклоняются вправо, а в южном влево. Поэтому в северном полушарии в циклонах воздушные частицы приобретают вращательное движение против часовой стрелки, в антициклонах – по часовой. В южном полушарии происходит обратная картина.

## Глава III. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

### § 3.1. Работа и мощность

Пусть под действием постоянной силы  $F$  тело  $B$  совершило перемещение  $s$ . Очевидно, что перемещение тела обусловлено только касательной (к траектории) составляющей силы  $F \cos \alpha$ , которую мы будем называть *движущей силой* (рис. 3.1).

Для характеристики перемещающего действия силы вводится понятие *работа*.

*Работа равна произведению движущей силы на величину перемещения:*

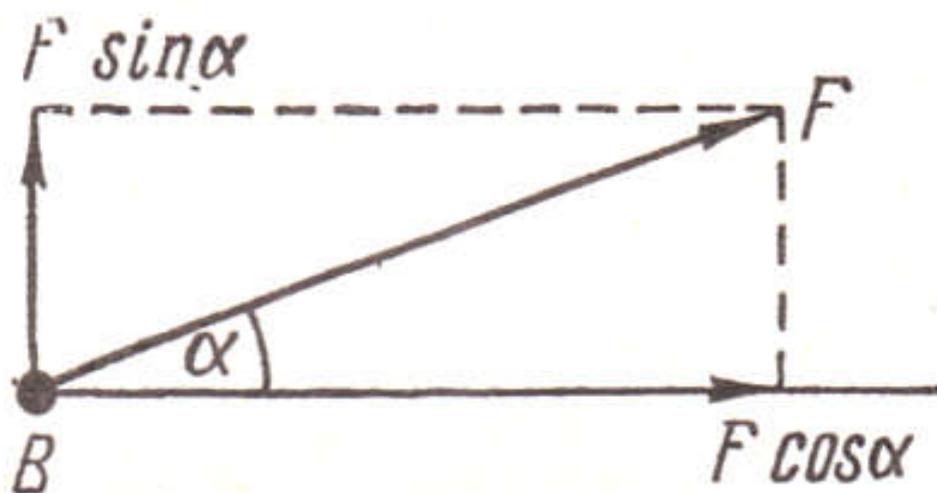


Рис.3.1

$$A = (F \cos \alpha) s = F s \cos \alpha. \quad (3.1)$$

При  $0 < \alpha < 90^\circ$  работа положительна – сила вызывает перемещение тела; при  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  работа отрицательна – сила препятствует движению тела; при  $\alpha = 90^\circ$  сила не совершает работы по перемещению тела. Если направления силы и перемещения совпадают ( $\alpha = 0$ ), то

$$A = F s \quad (3.2)$$

Если тело перемещается под действием нескольких сил, то совершаемая ими работа равна сумме работ всех этих сил (т.е. равна работе результирующей этих сил). Работа, определяемая

произведением векторов силы и перемещения на косинус угла между ними, является скалярной величиной. Единицей работы является джоуль (Дж).

1 Дж – работа, совершаемая силой 1 Н при перемещении тела на расстояние 1 м в направлении действия силы:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В случае переменной силы и криволинейного пути надо разбить весь путь  $s$  на столь малые (практически прямолинейные) отрезки  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ , чтобы силы, действующие на каждом из них, можно было считать постоянными и соответственно равными  $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ . Тогда полная работа на всем пути

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} F_i \Delta s_i \cos \alpha_i$$

Если график переменной силы изображается кривой  $BC$ , то работа на  $i$ -м отрезке пути графически представляется площадью узкого прямоугольника  $abcd$ , а полная работа на всем пути – площадью фигуры  $OBCD$  (рис. 3.2). Для оценки эффективности механизма важно знать, как быстро совершает он данную работу.

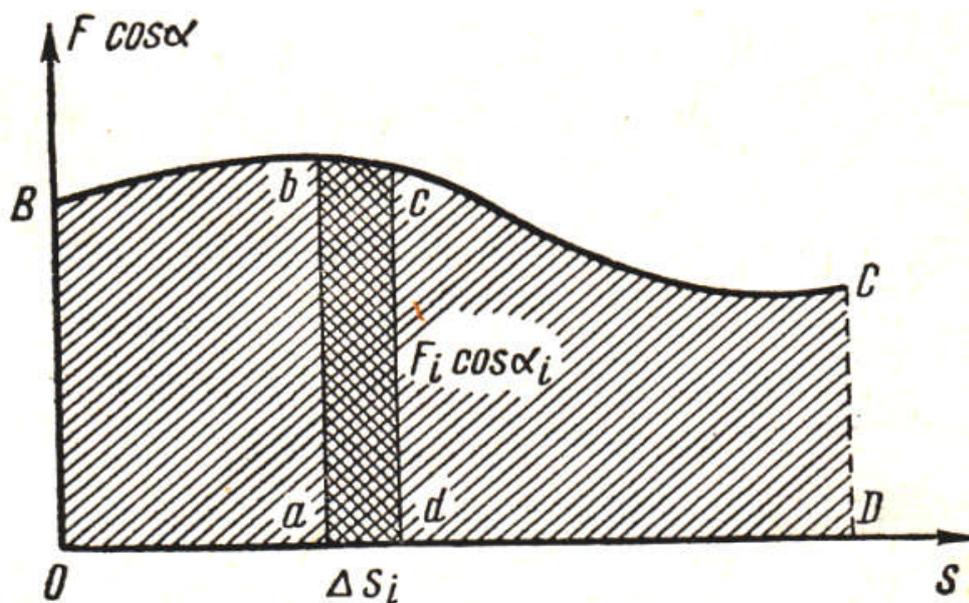


Рис. 3.2

С этой целью вводится понятие мощности. Мощность  $N$

измеряется отношением работы  $\Delta A$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за который она совершена:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

В случае движения тела с постоянной скоростью  $v$  под воздействием силы  $F$  (преодолевающей сопротивление движению) мощность может быть выражена формулой

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{F \Delta s}{\Delta t} = F v.$$

Единицей мощности в СИ служит *ватт (Вт)*. *1 Вт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж: то есть  $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$ .*

### § 3.2. Энергия

Энергия является важнейшей физической величиной, характеризующей способность тела или системы тел совершать работу; она измеряется величиной максимальной работы, которую *при определенных (заданных) условиях* может совершить эта система. Например, катящийся шар, сталкиваясь с некоторым телом, перемещает его, т.е. совершает работу. Следовательно, катящийся шар обладает энергией. Растянутая пружина, сокращаясь после устранения деформирующей силы, совершает работу по перемещению своих частей (витков) или какого – либо другого тела. Следовательно, растянутая пружина обладает энергией. Система, состоящая из земного шара и расположенного на некоторой высоте над ним тела, обладает энергией, так как при устранении связи, удерживающей тело на высоте, оно начнет двигаться (падать) и может совершать работу. Подчеркнем, что катящийся шар, деформированная пружина и поднятое над Землей тело обладают энергией независимо от того, совершают они в данный момент работу или нет: *энергия характеризует состояние системы, способность (возможность) системы к совершению работы при переходе из одного состояния в другое.*

Обычно за *другое* (конечное) состояние системы принимают такое её состояние, называемое «*нормальным*», в котором она

уже не может совершать работу при *данных* условиях за счёт энергии данного вида. Так, например, для растянутой пружины нормальным состоянием является такое, при котором полностью ликвидирована её деформация, для приподнятого над Землей тела – такое, при котором оно пришло в соприкосновение с земной поверхностью, и т.п.

Из приведённых примеров видно, что энергия связана либо с движением системы или её частей – в этом случае она называется кинетической, либо с взаимным расположением взаимодействующих частей системы – в этом случае она называется *потенциальной*. Потенциальная энергия тесно связана с существованием полей (гравитационных, электрических, магнитных и т.д.).

*Изменение энергии измеряется работой, которую может совершить система, переходя из данного состояния в другое.* Иными словами, работа  $A$ , совершаемая системой при переходе из одного состояния в другое, равна разности энергий, присущих системе в этих состояниях:

$$A = W_0 - W_n, \quad (3.3)$$

где  $W_0$  и  $W_n$  – энергии системы в исходном и конечном состояниях. В соответствии с этим определением получим конкретные выражения энергии для некоторых простейших (механических систем).

## КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА

Пусть под действием постоянной тормозящей силы  $F$  (например, силы трения), тело массой  $m$ , совершив перемещение  $s$  при прямолинейном движении, изменило свою скорость от  $v_0$  до  $v_n$ . Тогда работа, совершённая телом против силы торможения, равна

$$A = Fs = mas. \quad (3.4)$$

Так как движение тела в этом случае равнозамедленное, то

$$\vec{a} = \frac{\vec{g}_0 - \vec{g}_n}{t} \quad \text{и} \quad s = \frac{g_0 + g_n}{2} t,$$

где  $a$  – ускорение,  $t$  – время прохождения телом пути  $s$ . Подставляя выражения  $a$  и  $s$  в формулу (3.4), после простых преобразований получим

$$A = \frac{m g_0^2}{2} - \frac{m g_n^2}{2}. \quad (3.5)$$

Из сопоставления формул (3.3) и (3.5) следует, что величина

$$W = \frac{m g^2}{2} \quad (3.5a)$$

представляет собой кинетическую энергию тела.

Таким образом, *работа, совершаемая движущимся телом, равна изменению (убыли) его кинетической энергии.*

Если в конце рассматриваемого перемещения тело останавливается ( $g_n = 0$ ), то совершённая максимальная работа равна кинетической энергии тела в начале перемещения.

## ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГО ДЕФОРМИРОВАННОГО ТЕЛА

Определим потенциальную энергию  $W_n$  упруго растянутого стержня. Она равна максимальной работе  $A$ , совершаемой силами упругости, восстанавливающими первоначальный размер и форму стержня:  $W_n = A$ .

Упругая сила равна по величине:  $F = \frac{ES\Delta x}{x}$ ,

где  $x$  и  $S$  – длина и площадь поперечного сечения недеформированного стержня,  $\Delta x$  – его удлинение при деформации,  $E$  – модуль упругости.

При вычислении работы  $A$  надо иметь в виду, что сила упругости является переменной величиной: она линейно зависит от удлинения  $\Delta x$ , изменяясь от нуля (при  $\Delta x = 0$ ) до  $F$ . Поэтому можно считать, что при перемещении  $\Delta x$  действует *средняя* сила упругости

$$\bar{F} = \frac{0 + F}{2} = \frac{1}{2} F, \quad \text{тогда} \quad A = \bar{F} \Delta x = \frac{1}{2} F \Delta x = \frac{ES \Delta x^2}{2x}.$$

Следовательно,

$$W_n = k \frac{\Delta x^2}{2}, \quad (3.6)$$

где величина  $k = \frac{ES}{x}$  сохраняет смысл и размерность коэффициента пропорциональности в законе Гука.

Итак, потенциальная энергия упруго растянутого стержня пропорциональна квадрату его удлинения. Отметим, что и при всех других видах деформации потенциальная энергия тоже пропорциональна квадрату деформации (смещения).

### ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Определим потенциальную энергию тела массой  $m$ , находящегося в гравитационном поле другого тела массой  $M$  на расстоянии  $r_0$  от него (рис. 3.3). Для этого рассчитаем работу  $A$  по перемещению первого тела на пути  $x$ , соответствующему максимальному сближению тел.

Учитывая переменный характер силы тяготения, разобьём путь на достаточно малые отрезки  $\Delta r$ , на каждом из которых можно считать силу тяготения постоянной.

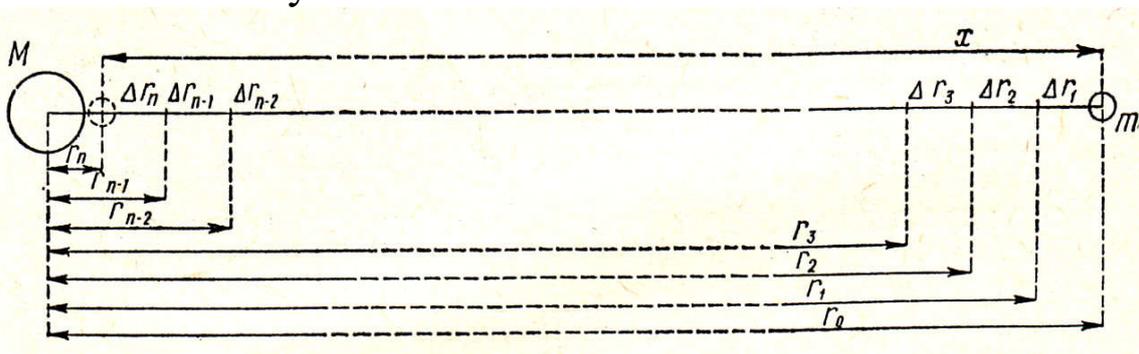


Рис. 3.3

Величина силы тяготения на первом отрезке  $\Delta r_1$  изменяется от  $\gamma Mm/r_0^2$  до  $\gamma Mm/r_1^2$ . Положим, что на отрезке  $\Delta r_1$  действует постоянная сила  $F_1$ , равная среднему геометрическому этих сил:

$$F_1 = \sqrt{\gamma^2 \frac{M^2 m^2}{r_0^2 r_1^2}} = \gamma \frac{Mm}{r_0 r_1}.$$

Тогда для работы перемещения тела на отрезке  $\Delta r_1 = r_0 - r_1$  получим выражение

$$\Delta A_1 = F \cdot \Delta r_1 = \gamma \frac{Mm}{r_0 r_1} (r_0 - r_1)$$

или 
$$\Delta A_1 = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right).$$

Путем аналогичных рассуждений найдем выражения работы на других отрезках  $\Delta r_2, \Delta r_3, \dots, \Delta r_{n-1}, \Delta r_n$ :

$$\Delta A_2 = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right),$$

$$\Delta A_3 = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right),$$

.....

$$\Delta A_{n-1} = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_{n-2}} \right),$$

$$\Delta A_n = \gamma Mm \left( \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}} \right).$$

Складывая эти равенства, получим после несложных преобразований искомую работу  $A$ :

$$A = \gamma \frac{Mm}{r_n} - \gamma \frac{Mm}{r_0}. \quad (3.7)$$

Отметим, что формулу (3.7) было бы проще вывести посредством интегрирования:

$$A = - \int_{r_0}^{r_n} F dr = - \gamma m M \int_{r_0}^{r_n} \frac{dr}{r^2} = \gamma \frac{Mm}{r_n} - \gamma \frac{Mm}{r_0},$$

где  $\gamma$  – переменное расстояние между центрами тяготеющих масс. Знак минус перед интегралом поставлен в связи с тем, что для сближающихся масс величина  $dr$  отрицательна, тогда как работа  $dA = F dr$  должна быть положительной, поскольку перемещение массы происходит в направлении действия силы.

Из сопоставления формул (3.3) и (3.7) следует, что величина

$$W_n = \gamma \frac{Mm}{r} \quad (3.8)$$

представляет собой потенциальную энергию тяготения. Знак минус обусловлен тем, что по мере самопроизвольного сближения тяготеющих тел их потенциальная энергия должна уменьшаться, переходя в кинетическую. В этой связи уместно отметить, что всякая предоставленная самой себе система стремится перейти в состояние, соответствующее минимуму потенциальной энергии. Из формулы (3.8) следует, что максимальное значение потенциальной энергии ( $W_n = 0$ ) тяготеющие тела будут иметь в том случае, когда они бесконечно удалены ( $r = \infty$ ) друг от друга. (Так как потенциальная энергия отрицательна, то  $W_n = 0$  (при  $r = \infty$ ) является его максимальным значением.)

### § 3.3. Закон сохранения и превращения энергии

Механическая энергия является лишь одним из многих видов энергии. В настоящее время кроме механической энергии известны химическая, электрическая, электромагнитная (в частности, лучистая), ядерная и др. В природе и технике постоянно имеют место переходы (превращения) энергии из одних видов в другие. Приведем примеры процессов, сопровождающихся превращением энергии.

*Полная энергия системы  $W$  складывается из всех присущих системе видов энергии. Опыт показывает, что какие бы превращения энергии не происходили в изолированной системе, полная энергия изолированной системы остаётся постоянной:*

$$W = const .$$

При этом, *будучи несоздаваемой и неуничтожаемой, энергия может превращаться из одних видов в другие [закон сохранения и превращения энергии].*

В этой формулировке отражены основные свойства энергии: количественная неизменность и качественная изменчивость.

<i>Процесс или прибор</i>	<i>Превращение энергии</i>	
	<i>из вида</i>	<i>в вид</i>
Электромашинный генератор	Механическая.	Электрическая
Гальванический элемент	Химическая	Электрическая
Электродвигатель	Электрическая	Механическая.
Зарядка аккумулятора	Электромагнитная	Химическая
Фотосинтез		Химическая
Фотоэффект	Ядерная	Электрическая
Ядерный реактор		Механическая, электромагнитная и др.

Применительно к неизолрированным системам этот закон формулируется так: *изменение энергии неизолрированной системы равно работе, совершаемой системой* [**закон сохранения и превращения энергии**]:

$$\Delta W = -A.$$

Если работа совершается внутренними силами самой системы, то  $A > 0$  и энергия системы убывает. Если же работа совершается внешними силами над системой, то  $A < 0$  и энергия системы возрастает.

Закон сохранения и превращения энергии раскрывает физический смысл понятий энергии и работы.

*Энергия есть количественная и качественная характеристика движения материи, а работа количественная характеристика превращения одних форм движения материи в другие.*

### § 3.4. Космические скорости

Как известно, для запуска искусственных космических тел: спутников, планет и звезд; им необходимо сообщать определенные (довольно большие) начальные скорости, называемые *космическими*. Так, для запуска искусственного спутника Земли (вблизи Земли) ему должна быть сообщена скорость в горизонтальном направлении не менее  $v_1 = 8 \text{ км/с}$  (*круговая, или первая космическая скорость*), для запуска искусственной

планеты ей необходимо сообщить начальную скорость удаления от Земли не менее  $\mathcal{G}_2 = 11,2$  км/с (*параболическая, или вторая космическая скорость*). Для запуска искусственной звезды в пределы Галактики она должна получить начальную скорость удаления от Земли не менее  $\mathcal{G}_3 = 16,7$  км/с (*третья космическая скорость*), а для запуска искусственной звезды за пределы Галактики  $\mathcal{G}_4 = 290$  км/с (*четвёртая космическая скорость*). Впервые в мире космические скорости ( $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$ ) были достигнуты в СССР при запуске искусственного спутника (4 октября 1957 г.) и искусственной планеты (2 января 1959 г.).

На основании рассмотренных ранее законов механики можно вычислить указанные значения космических скоростей.

**Первая космическая скорость.** Для того чтобы тело двигалось вблизи Земли по круговой орбите *1* (рис. 3.4), т.е. стало искусственным спутником, необходимо, чтобы действующая на него центростремительная сила была равна силе тяготения:

$$\frac{m \mathcal{G}_1^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

где  $m$  – масса тела,  $\mathcal{G}_1$  – касательная к орбите скорость его движения,  $R$  – радиус орбиты,  $M$  – масса Земли,  $\gamma$  – гравитационная постоянная. При небольшой высоте тела над Землёй (порядка нескольких сотен метров) можно считать  $R \approx R_0 = 6400$  км, где  $R_0$  – радиус Земли.

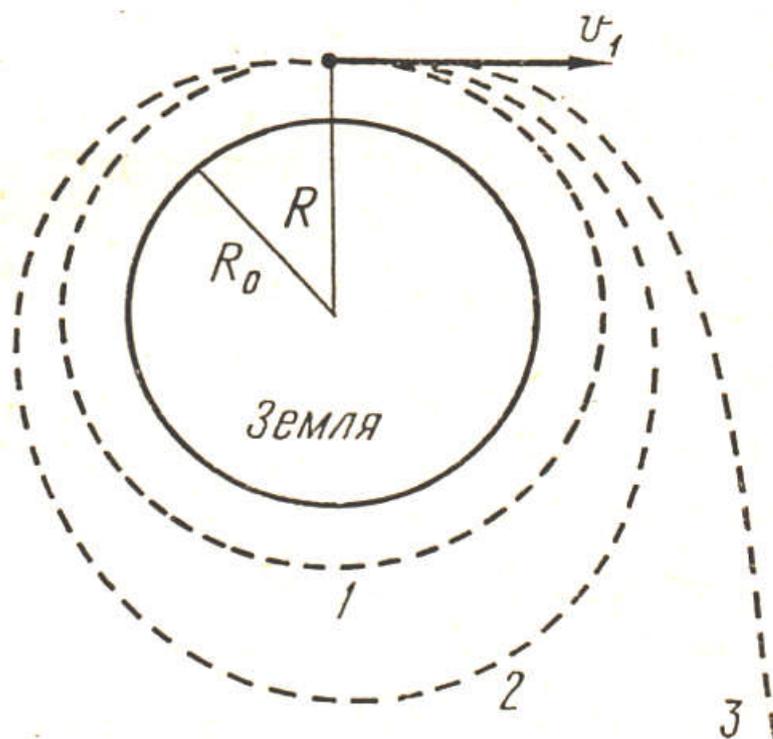


Рис.3.4

Тогда  $\frac{\mathcal{Q}_1^2}{R_0} = \gamma \frac{M}{R_0^2}$ , но  $\gamma \frac{M}{R_0^2} = g$ .

Поэтому  $\mathcal{Q}_1 = \sqrt{gR_0} = \sqrt{0,0098 \cdot 6400} = 7,9$  км/с, что соответствует первой космической скорости.

Из-за наличия атмосферы орбита вблизи земной поверхности неосуществима. Только на высоте 160 км спутник способен осуществить хотя бы один оборот вокруг Земли. Здесь круговая скорость спутника равна 7,79 км/с.

При скорости большей  $\mathcal{Q}_1$  тело будет двигаться по эллиптической орбите 2, а при скорости, равной  $\mathcal{Q}_2$  (вторая космическая), начнет двигаться по параболической орбите 3 и уйдёт из сферы земного притяжения (рис. 3.4).

**Вторая космическая скорость.** Для того чтобы тело вышло из сферы земного притяжения и стало обращаться вокруг Солнца, т.е. превратилось в искусственную планету, необходимо сообщить ему такую кинетическую энергию, которая была бы равна работе перемещения тела с земной поверхности на бесконечность (практически - за пределы заметного влияния земного тяготения).

Тогда, полагая в формуле  $A = \gamma \frac{Mm}{r} - \gamma \frac{Mm}{r_0}$ , где  $r_0 = R_0$  и  $r = \infty$  и учитывая, что работа внешних сил *отрицательна*, получим

$$\frac{m\mathcal{Q}_2^2}{2} = \gamma \frac{mM}{R_0}, \quad (3.9)$$

где  $\mathcal{Q}_2$  – начальная скорость отлёта тела с Земли.

Таким образом, искомая кинетическая энергия равна потенциальной энергии тела, находящегося на земной поверхности. Отметим, что направление скорости  $\mathcal{Q}_2$  может быть *каким угодно*: тело станет искусственной планетой при любом направлении скорости  $\mathcal{Q}_2$ . Из формулы (3.9) найдем

$$\mathcal{Q}_2^2 = 2\gamma \frac{M}{R_0}. \quad (3.10)$$

Умножая и деля правую часть (3.10) на  $R_0$  и учитывая, что

$\gamma \frac{M}{R_0^2} = g$ , получим  $\mathcal{V}_2 = \sqrt{2R_0 g} = \sqrt{2}\mathcal{V}_1 = 1,4 \cdot 8 = 11,19 \text{ км/с}$ , что

соответствует второй космической скорости.

**Третья космическая**

**скорость.** Для того чтобы тело вышло из сферы притяжения Солнца и удалилось в Галактику, превратившись в искусственную звезду, необходимо сообщить ему кинетическую энергию, равную работе перемещения тела с земной орбиты на бесконечность. Очевидно, что эта работа равна потенциальной энергии тела, находящегося в поле солнечного тяготения на расстоянии радиуса земной орбиты от Солнца (рис.3.5):

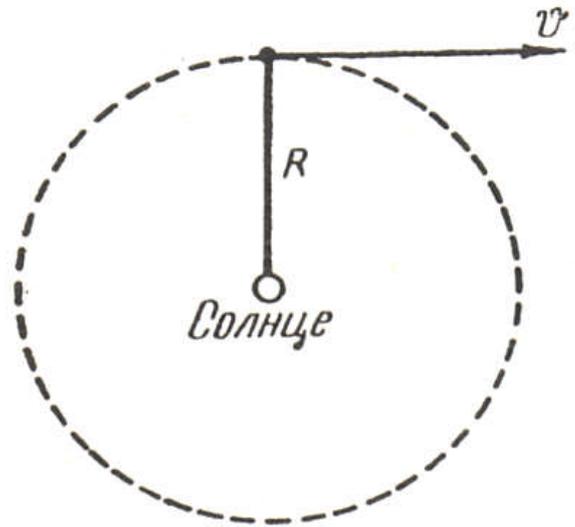


Рис.3.5

$$\frac{m\mathcal{V}^2}{2} = \gamma \frac{mM_c}{R},$$

где  $M_c$  – масса Солнца,  $R = 1,5 \cdot 10^8 \text{ км}$  – радиус земной орбиты,  $\mathcal{V}$  – скорость тела относительно Солнца. Тогда

$$\mathcal{V} = \sqrt{2\gamma \frac{M_c}{R}}.$$

Умножая и деля подкоренное выражение на  $R_0^2$  и учитывая, что масса Солнца в 332 400 раз больше массы Земли, получим

$$\mathcal{V} = \sqrt{2R_0\gamma \frac{M}{R_0^2} \frac{332400}{R}} = \mathcal{V}_2 \sqrt{\frac{332400 \cdot 6400}{15 \cdot 10^7}} = 11,2 \cdot 3,77 = 42,2 \text{ км/с}.$$

Скорость  $\mathcal{V}$  можно сообщить телу в любом направлении. Очевидно, что выгоднее всего сообщить её в направлении касательной к земной орбите (рис. 3.5), так как в этом направлении тело уже имеет относительно Солнца орбитальную скорость Земли, равную 29,8 км/с. Поэтому относительно Земли достаточно сообщить телу скорость

$$g^* = g - u = 42,2 - 29,8 = 12,4 \text{ (км/с)}.$$

Следует учесть, что скорость  $g^*$  тело должно иметь *после выхода из поля тяготения Земли*. Поэтому начальная скорость  $g_3$  отлёта тела с земной поверхности должна быть несколько больше  $g^*$ . Для определения  $g_3$  будем исходить из следующих соображений. Чтобы отлетающее с Земли тело могло уйти из сферы земного тяготения, сохранив после этого скорость  $g^*$ , его кинетическая энергия в момент отлета должна быть равной сумме потенциальной энергии тела наземной поверхности и кинетической энергии тела, движущегося со скоростью  $g^*$ :

$$\frac{m g_3^2}{2} = \gamma \frac{mM}{R_0} + \frac{m(g^*)^2}{2},$$

откуда 
$$g_3^2 = 2\gamma \frac{M}{R_0} + (g^*)^2$$

или, согласно формуле (3.8),

$$g_3 = \sqrt{g_2^2 + (g^*)^2} = \sqrt{(11,2)^2 + (12,4)^2} = 16,7 \text{ км/с},$$

что соответствует третьей космической скорости.

**Четвёртая космическая скорость.** При этой скорости земное тело смогло бы преодолеть тяготение Галактики и уйти во Вселенную. Расчёт четвёртой космической скорости довольно сложен, поэтому мы ограничимся приближенной оценкой её значения, исходя из следующих соображений.

Астрофизические наблюдения показывают, что среди звезд, движущихся вокруг центра Галактики на том же расстоянии, что и Солнце, не существует ни одной звезды, скорость которой превышала бы 285 км/с. (Само Солнце имеет скорость 220 км/с.) Это обусловлено, вероятно, тем, что 285 км/с есть та наибольшая скорость, при которой звёзды, находящиеся в указанной области Галактики, ещё могут оставаться в её пределах; при большей скорости они уже не удерживаются нашей звёздной системой. Следовательно, четвертая космическая скорость должна быть несколько больше 285 км/с, т.е.  $g_4 \approx 290 \text{ км/с}$ .

## Глава IV. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА

### § 4.1. Основной закон динамики вращения

В этой главе твёрдое тело рассматривается как совокупность материальных точек, не смещающихся друг относительно друга. Такое не поддающееся деформации тело называется *абсолютно твёрдым*.

Пусть твёрдое тело произвольной формы вращается под действием силы  $F^*$  вокруг неподвижной оси  $OO'$  (рис. 4.1). Тогда все его точки описывают окружности с центрами на этой оси. Понятно, что все точки тела имеют одинаковую угловую скорость и одинаковое угловое ускорение (в данный момент времени).

Разложим действующую силу  $F^*$  на три взаимно перпендикулярные составляющие:  $F'$  (параллельную оси),  $F''$  (перпендикулярную оси и лежащую на линии, проходящей через ось) и  $F$  (перпендикулярную  $F'$  и  $F''$ ). Очевидно, что вращение тела вызывает только составляющая  $F$ , являющаяся касательной к окружности, описываемой точкой приложения

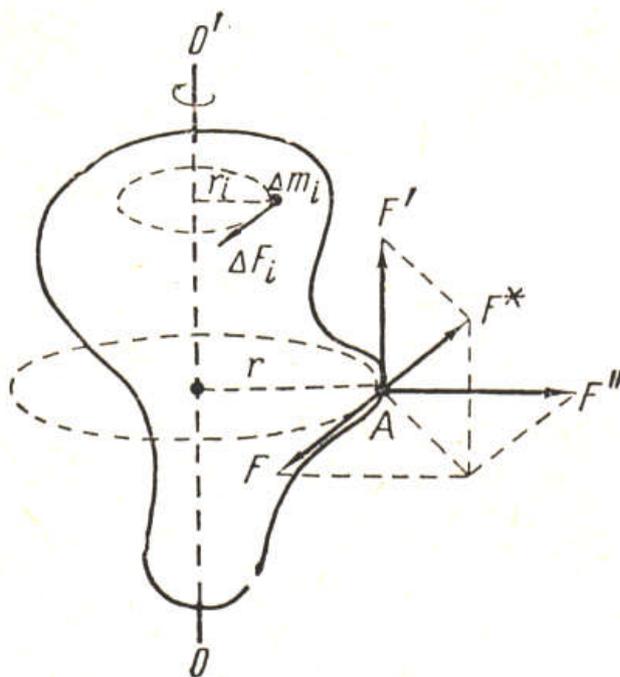


Рис.4.1

силы. Составляющие  $F'$  и  $F''$  вращения не вызывают.

Назовем  $F$  *вращающей силой*. Действие силы  $F$  зависит не только от её значения, но и от расстояния точки её приложения  $A$  до оси вращения, т.е. зависит от момента силы.

*Моментом  $M$  вращающей силы (вращающим моментом) называется произведение вращающей силы  $F$  на радиус окружности  $r$ , описываемой точкой приложения силы:*

$$M = F \cdot r . \quad (4.1)$$

Мысленно разобьём всё тело на очень малые частицы - элементарные массы. Хотя сила  $F$  приложена к одной точке  $A$  тела, её вращающее действие передается всем частицам: к каждой элементарной массе  $\Delta m_i$  будет приложена элементарная вращающая сила  $\Delta F_i$  (рис. 4.1). Согласно второму закону Ньютона,

$$\Delta F_i = \Delta m_i a_i ,$$

где  $a_i$  – линейное ускорение, сообщаемое элементарной массе.

Умножая обе части этого равенства на радиус  $r_i$  окружности, описываемой элементарной массой, и вводя вместо линейного угловое ускорение  $\beta$ , получим

$$\Delta F_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \beta .$$

Учитывая, что  $\Delta F_i r_i = \Delta M_i$  - вращающий момент, приложенный к элементарной массе, и обозначая

$$\Delta J_i = \Delta m_i r_i^2 , \quad (4.2)$$

получим

$$\Delta M = \Delta J_i \beta ,$$

где  $\Delta J_i$  – *момент инерции* элементарной массы (материальной точки).

Следовательно, *моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси вращения называется произведение массы материальной точки на квадрат её расстояния до этой оси.*

Суммируя вращающие моменты  $\Delta M_i$ , приложенные ко всем элементарным массам, составляющим тело, получим

$$\sum \Delta M_i = \beta \sum \Delta J_i , \quad (4.3)$$

где  $\sum \Delta M_i = M$  - *вращающий момент*, приложенный к телу, т.е. момент вращающей силы  $F$ ;  $\sum \Delta J_i = J$  - *момент инерции тела.*

Следовательно, *моментом инерции тела называется сумма моментов инерции всех материальных точек, составляющих тело.* Теперь можно переписать формулу (4.3) в виде

$$M = J \cdot \beta . \quad (4.4)$$

*Момент вращающей силы, приложенной к телу, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение [основной закон динамики вращения, или второй закон Ньютона для вращательного движения].*

Из формулы (4.4) видно, что угловое ускорение, сообщаемое телу вращающим моментом, зависит от момента инерции тела: чем больше момент инерции, тем меньше угловое ускорение. Следовательно, момент инерции характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении подобно тому, как масса характеризует инерционные свойства тела при поступательном движении. Однако в отличие от массы момент инерции данного тела может иметь множество значений в соответствии с множеством возможных осей вращения. Поэтому, говоря о моменте инерции твёрдого тела, необходимо указывать, относительно какой оси он рассчитывается. На практике обычно приходится иметь дело с моментами инерции относительно осей симметрии тела.

Из формулы (4.2) следует, что единицей момента инерции является килограмм - квадратный метр ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ).

Если вращающий момент  $M = \text{const}$  и момент инерции тела  $J = \text{const}$ , то формулу (4.4) можно представить в виде

$$M = J \frac{\omega_0 - \omega}{t}$$

или

$$Mt = J\omega_0 - J\omega, \quad (4.5)$$

где  $t$  - промежуток времени, в течение которого угловая скорость вращения тела изменяется от  $\omega_0$  до  $\omega$ . Произведение  $Mt$  (аналогичное импульсу силы  $Ft$ ) называется *импульсом момента силы*, произведение  $J\omega$  (аналогичное импульсу тела  $m\mathcal{V}$ ) называется *моментом импульса тела*.

*Изменение момента импульса тела за некоторый промежуток времени равно импульсу момента силы за тот же промежуток времени [закон изменения момента импульса].*

Закон (4.5) аналогичен закону изменения импульса. Отметим, что закон изменения момента импульса остается спра-

ведливым и в общем случае переменного вращающего момента  $M \neq const$ .

Вращающий момент, импульс момента и момент импульса являются *векторными* величинами; они направлены по оси вращения в соответствии с правилом буравчика, т.е. так же, как вектор угловой скорости.

## § 4.2. Моменты инерции некоторых тел

Для неоднородных тел и тел неправильной формы момент инерции определяют экспериментально, а для однородных тел геометрически правильной формы - посредством интегрирования. Правда, для *тонкого стержня* момент инерции можно рассчитать и элементарным путем.

Приведем (без вывода) формулы для расчета момента инерции некоторых однородных тел геометрически правильной формы массой  $m$  относительно оси симметрии  $OO'$ .

1. Момент инерции тонкого стержня длиной  $l$  (рис. 4.2, а)

$$J = \frac{1}{2} ml^2. \quad (4.6)$$

2. Момент инерции бруска длиной  $a$  и шириной  $b$  (рис. 4.2, б)

$$J = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \quad (4.7)$$

3. Момент инерции кольца, внешний радиус которого  $R$ , а внутренний -  $r$  (рис. 4.2, в),

$$J = \frac{1}{2} m(R^2 + r^2). \quad (4.8)$$

4. Момент инерции тонкостенного кольца (обруча) радиусом  $(R)$  (рис. 4.2, г)

$$J = m \cdot R^2. \quad (4.9)$$

Формулу (4.9) легко получить, полагая в формуле (4.8)  $r = R = \bar{R}$

5. Момент инерции диска (цилиндра) радиусом  $R$  (рис. 4.2,  $\delta$ )

$$J = \frac{1}{2} mR^2. \quad (4.10)$$

Формулу (4.10) легко получить, полагая в формуле (4.8)  $r = 0$ .

6. Момент инерции шара радиусом  $R$  (рис. 4.2,  $e$ )

$$J = \frac{2}{5} mR^2. \quad (4.11)$$

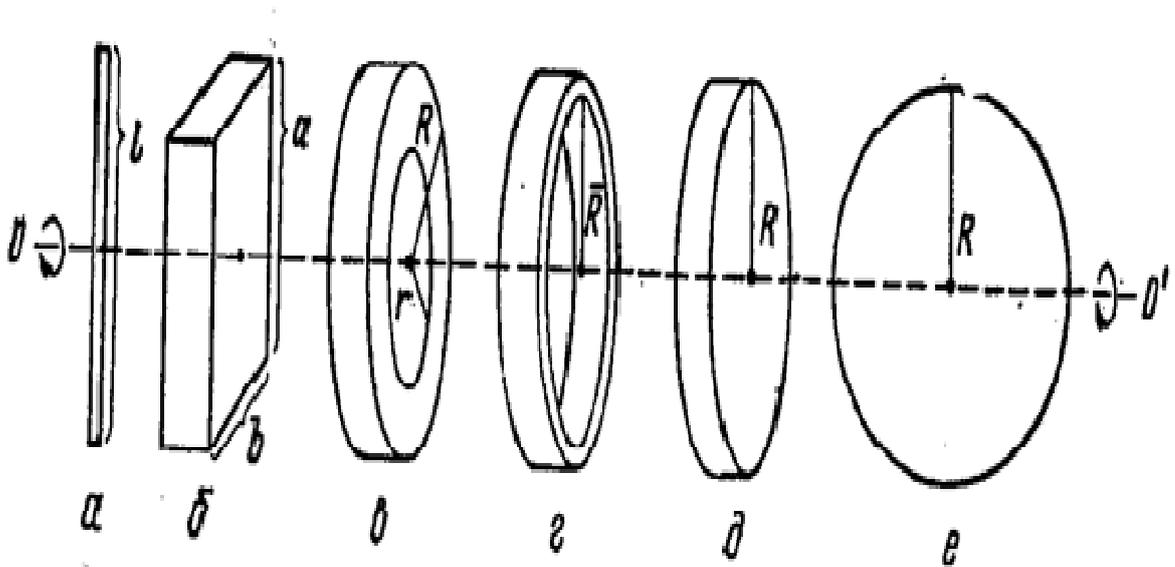


Рис.4.2

Если ось вращения тела параллельна оси симметрии  $OO'$ , но смещена от неё на расстояние  $d$ , то момент инерции  $J'$  относительно параллельно смещённой оси выражается соотношением, называемым *теоремой Штейнера*:

$$J' = J + md^2, \quad (4.12)$$

где  $J$  – момент инерции тела относительно оси симметрии.

Например, момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей перпендикулярно стержню через его конец, равен

$$J' = \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2,$$

что совпадает с результатом расчетов, проведённых в начале данного параграфа.

### § 4.3. Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося тела

Сравним попарно между собой следующие законы (формулы) механики поступательного движения и механики вращательного движения: второй закон Ньютона – с основным законом динамики вращения, закон изменения импульса – с законом изменения момента импульса, выражение линейной скорости – с выражением угловой скорости. Бросается в глаза большое сходство в формулировках сравниваемых законов и в структуре сравниваемых формул. Каждой физической величине, характеризующей поступательное движение, соответствует определённая физическая величина, характеризующая вращательное движение. Например, линейной скорости аналогична угловая скорость, силе – момент силы, массе – момент инерции и т.п. Эти аналогичные физические величины выписаны для наглядности в таблицу:

<i>Поступательное движение</i>		<i>Вращательное движение</i>	
Время	$t$	Время	$t$
Линейный путь	$s$	Угловой путь	$\varphi$
Линейная скорость	$v$	Угловая скорость	$\omega$
Линейное ускорение	$a$	Угловое ускорение	$\beta$
Сила	$F$	Момент силы	$M$
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Импульс силы	$Ft$	Импульс момента силы	$Mt$
Импульс тела	$mv$	Момент импульса тела	$J\omega$

Обнаруженное сходство с законами поступательного движения имеет место вообще для всех законов вращательного движения. Пользуясь этим, напомним по аналогии (с помощью таблицы) закон вращательного движения, аналогичный закону сохранения количества движения:

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 + J_3\omega_3 + \dots + J_n\omega_n = const, \quad (4.13)$$

где  $J_i$  и  $\omega_i$  – моменты инерции и угловые скорости тел,

составляющих изолированную систему.

*В изолированной системе сумма моментов импульса всех тел - величина постоянная [закон сохранения момента импульса].*

Для изолированной системы, состоящей из одного тела, закон сохранения (4.13) запишется в виде

$$J\omega = const. \quad (4.14)$$

Из формулы (4.14) следует, что изменение момента инерции тела должно сопровождаться изменением угловой скорости вращения тела: увеличение (уменьшение)  $J$  вызывает соответствующее уменьшение (увеличение)  $\omega$ . Это следствие рассматриваемого закона обычно демонстрируют с помощью вращающейся скамьи («скамья Жуковского»), человек с расставленными в стороны руками вращается, стоя на скамье Жуковского (рис. 4.3). Затем он быстро опускает руки. При этом его момент инерции уменьшается, а угловая скорость вращения увеличивается. На законе сохранения момента импульса основаны известный акробатический приём «сальто-мортале», балетный приём «пируэт» и т.п. Все свободные гироскопы действуют на основе этого закона: вращающаяся с большой скоростью масса сохраняет вектор момента импульса, т.е. сохраняет неизменной ось своего вращения.

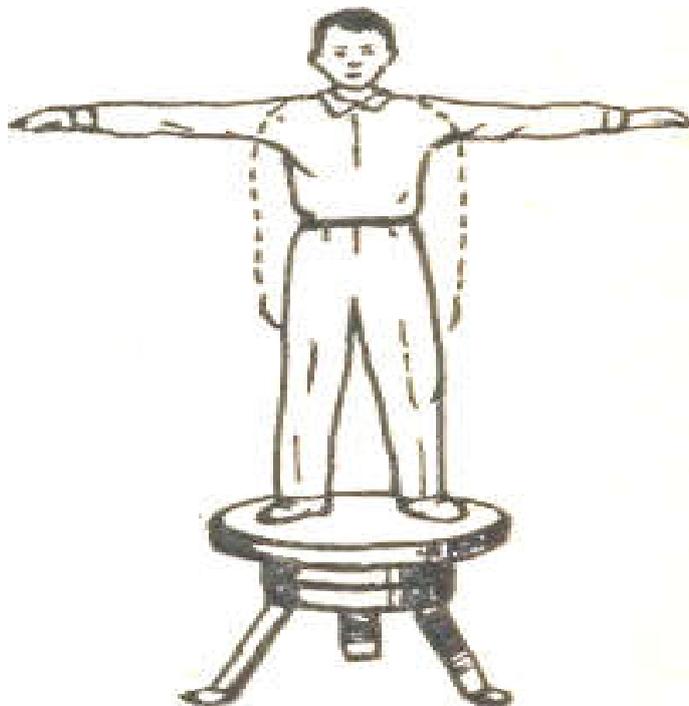


Рис.4.3

Этим объясняется устойчивость положения земной оси, продольной оси летящего артиллерийского снаряда, ружейной пули, вертикальная устойчивость движущегося велосипеда и т.п.

Пользуясь ранее приведённой таблицей, напишем выражение кинетической энергии вращающегося тела ( $W_{к.вр.}$ ) по аналогии с выражением кинетической энергии поступательно движущегося тела:

$$W_{к.вр.} = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (4.15)$$

$J$  – момент инерции,  $\omega$  – угловая скорость вращения тела. Для того чтобы ещё раз убедиться в правомерности применения «метода аналогии» к законам вращательного движения, получим формулу (4.15) путем вывода. Кинетическая энергия одной частицы вращающегося тела массой  $\Delta m_i$ , движущаяся со скоростью  $\vartheta_i$  по окружности радиусом  $r_i$  равна

$$\Delta W_i = \frac{\Delta m_i \vartheta_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\Delta J_i \omega^2}{2},$$

где  $\Delta J_i$  – момент инерции частицы,  $\omega$  – угловая скорость вращения тела. Тогда, суммируя энергии  $\Delta W_i$  всех частиц, составляющих тело, получим выражение кинетической энергии вращающегося тела:

$$W_{к.вр.} = \sum_1^N \Delta W_i = \frac{\omega^2}{2} \sum_1^N \Delta J_i = \frac{J\omega^2}{2}.$$

За счет кинетической энергии вращения тело может совершать работу. Очевидно, что эта работа равна изменению (убыли) кинетической энергии вращения:

$$A = \frac{J\omega_0^2}{2} - \frac{J\omega^2}{2}, \quad (4.16)$$

где  $\omega_0$  и  $\omega$  – начальная и конечная угловые скорости вращения.

В технике для обеспечения равномерного хода машин (тракторов, кораблей, прокатных станков и т.п.) широко используется кинетическая энергия махового колеса: при внезапном увеличении нагрузки машина не останавливается, а совершает работу за счёт запаса кинетической энергии вращения маховика.

Если тело одновременно участвует в поступательном и вращательном движениях, то его кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий поступательного движения и

вращения:

$$W_k = \frac{m\mathcal{G}^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (4.17)$$

Это положение надо учитывать при решении многих практических задач.

## Глава V. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

### § 5.1. Основные определения. Уравнение неразрывности

В отличие от твёрдого тела, в жидкости возможны значительные смещения составляющих её частиц относительно друг друга. Поэтому движущаяся жидкость может изменять свою форму в соответствии с формой русла или сосуда.

Реальная жидкость *сжимаема*: её объём уменьшается, а плотность увеличивается с повышением давления. Однако сжимаемость жидкости мала. Например, при повышении давления от  $10^5$  до  $10^7$  Па плотность воды увеличивается всего лишь на 0,5%. В движущейся жидкости обычно не бывает столь больших перепадов давления. Поэтому сжимаемостью движущейся жидкости можно пренебречь.

Реальная жидкость *вязкая*: в движущейся жидкости всегда возникают силы внутреннего трения. Если условия движения жидкости таковы, что силы внутреннего трения малы по сравнению с другими  $a$  действующими в ней силами (давления, тяжести и т.п.), то жидкость можно считать практически невязкой. Воображаемая жидкость, *совершенно* не обладающая вязкостью, называется *идеальной*. Рассмотрим некоторый объём внутри движущейся идеальной несжимаемой жидкости. Мысленно отметим в нём ряд точек и изобразим векторами скорость движения частиц жидкости, находящихся в данный момент времени в этих точках (рис. 5.1,  $a$ ).

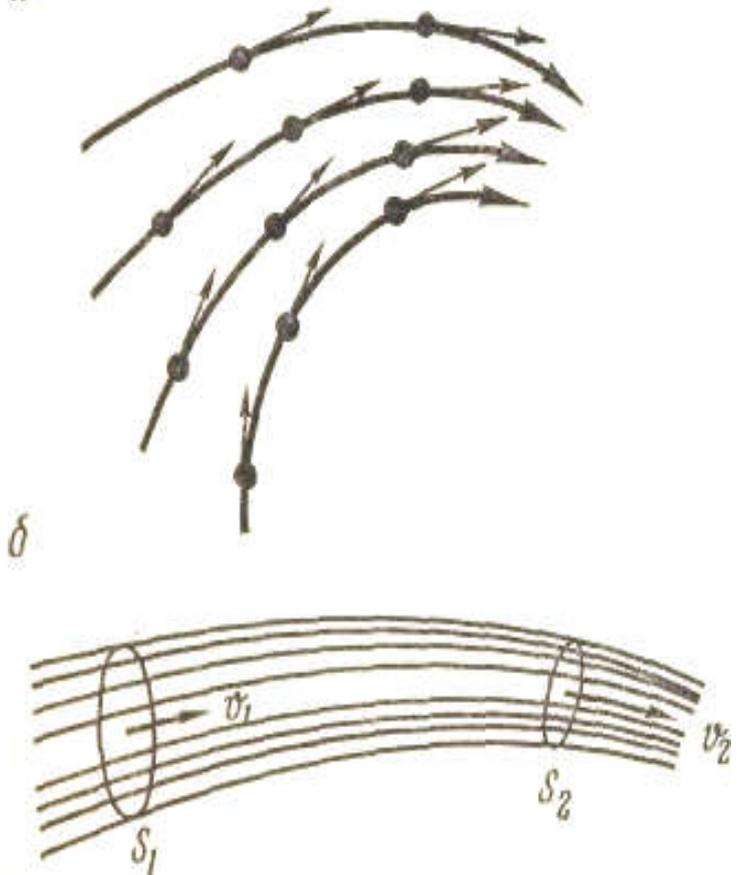


Рис.5.1

Проведём линии, в каждой точке которых касательная совпадает с вектором скорости движения частиц жидкости.

Такие линии называются *линиями тока*. Движение жидкости называется *установившимся (стационарным)*, если скорость жидкости в каждой точке объёма не изменяется с течением времени. В этом случае линии тока также остаются неизменными и частица жидкости, находящаяся в данный момент на некоторой линии тока, все время остается на этой линии.

Иными словами, *при установившемся движении траектории частиц жидкости совпадают с линиями тока*. Установившееся движение жидкости имеет место в случаях, когда силы, вызывающие движение, не изменяются со временем.

В этой главе рассматривается только *установившееся движение идеальной несжимаемой жидкости*.

Прежде всего покажем (прибегая к доказательству «от противного»), что линии тока не пересекаются между собой. Предположим, что две линии тока пересеклись. Тогда частица жидкости, находящаяся в точке пересечения, должна двигаться одновременно по двум траекториям, что невозможно. Следовательно, линии тока не пересекаются.

Выделим теперь в движущейся жидкости объём, ограниченный линиями тока (рис. 5.1, б). Из положения о непересекаемости линий тока следует, что жидкость не может проходить через боковую поверхность этого объёма (ни внутрь объёма, ни из него).

Таким образом, рассматриваемый объём подобен трубке с непроницаемыми для жидкости стенками. Поэтому объём жидкости, ограниченный линиями тока, называется *трубкой тока*.

Выберем в трубке тока два поперечных сечения:  $S_1$  (где скорость течения жидкости  $\mathcal{V}_1$ ) и  $S_2$  (где скорость течения жидкости  $\mathcal{V}_2$ ). Так как жидкость не сжимается, не *разрывается* и не переходит через боковую поверхность трубки, то за время  $\Delta t$  через эти сечения пройдут одинаковые объёмы, а следовательно, и одинаковые массы  $\Delta m$  жидкости. Объём жидкости, протекающей через широкое сечение, имеет форму цилиндра с основанием  $S_1$  и

высотой  $\mathcal{Q}_1 \Delta t$ ; он равен  $S_1 \mathcal{Q}_1 \cdot \Delta t$ . Точно так же объём жидкости, протекающей через узкое сечение, равен  $S_2 \mathcal{Q}_2 \cdot \Delta t$ . Тогда  $S_1 \mathcal{Q}_1 = S_2 \mathcal{Q}_2$ , так как сечения были выбраны произвольно, то

$$S \mathcal{Q} = const, \quad (5.1)$$

т.е. для данной трубки тока произведение площади поперечного сечения трубки на скорость течения жидкости есть величина постоянная.

Соотношение (5.1) называется уравнением неразрывности струи. Оно справедливо не только для трубки тока, но и для всякой реальной трубы, для русла реки и т.п. В соответствии с уравнением неразрывности скорость течения на узких и мелких участках речного русла больше, чем на широких и глубоких; скорость воды в струе, вырывающейся из брандспойта, больше, чем в шланге, и т.п.

На рис. 5.2 изображено с помощью линий тока движение жидкости в трубе переменного сечения. В узкой части трубы, где скорость течения наибольшая, линии тока оказываются сгущенными.



Рис.5.2

Таким образом, картина линий тока даёт представление не только о направлении, но и о значении скорости течения жидкости.

## § 5.2. Уравнение Бернулли

Пусть по наклонной трубке тока (или реальной трубе) переменного сечения движется жидкость в направлении слева направо. Мысленно выделим область трубки, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , в которых скорости течения равны соответственно  $\mathcal{Q}_1$  и  $\mathcal{Q}_2$  (рис. 5.3).

Определим изменение полной энергии, происходящее в этой области за малый промежуток времени  $\Delta t$ . За это время масса жидкости, заключенная между сечениями  $S'_1$  и  $S_1$ , втекает в рассматриваемую область, а масса, заключённая между сечениями  $S'_2$  и  $S_2$ , вытекает из неё.

Иных изменений в данной области не происходит. Поэтому изменение полной энергии  $\Delta W$  равно разности полных энергий вытекающей и втекающей масс. Учитывая, что полная энергия идеальной несжимаемой жидкости складывается из её кинетической  $W_K$  и потенциальной  $W_n$  энергий, получим

$$\Delta W = (W_k + W_n)_2 - (W_k + W_n)_1, \quad (5.2)$$

где индексы 1 и 2 относятся соответственно к сечениям  $S_1$  и  $S_2$ .

Как мы уже видели, вытекающая и втекающая массы оказываются одинаковыми ( $\Delta m$ ). Вводя в формулу (5.2) выражения кинетической и потенциальной энергий, напишем

$$\Delta W = \frac{\Delta m \mathcal{G}_2^2}{2} + \Delta m g h_2 - \frac{\Delta m \mathcal{G}_1^2}{2} + \Delta m g h_1. \quad (5.3)$$

В соответствии с законом сохранения энергии найденное изменение энергии равно работе  $\Delta A$  внешних сил (давления) по перемещению массы  $\Delta m$ :

$$\Delta W = \Delta A. \quad (5.4)$$

Определим эту работу. Внешняя сила давления  $F_1$  совершает работу  $\Delta A_1$  по перемещению втекающей массы на пути  $\mathcal{G}_1 \cdot \Delta t$ ; в то же время вытекающая масса совершает работу  $\Delta A_2$  против внешней силы давления  $F_2$  на пути  $\mathcal{G}_2 \cdot \Delta t$ . Поэтому

$$\Delta A_1 = F_1 \mathcal{G}_1 \cdot \Delta t, \quad \Delta A_2 = -F_2 \mathcal{G}_2 \cdot \Delta t,$$

а искомая работа

$$\Delta A = \Delta A_1 + \Delta A_2 = F_1 \mathcal{G}_1 \cdot \Delta t - F_2 \mathcal{G}_2 \cdot \Delta t.$$

Учитывая, что

$$F_1 = p_1 S_1 \quad \text{и} \quad F_2 = p_2 S_2,$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — давления на сечениях  $S_1$  и  $S_2$ , получим

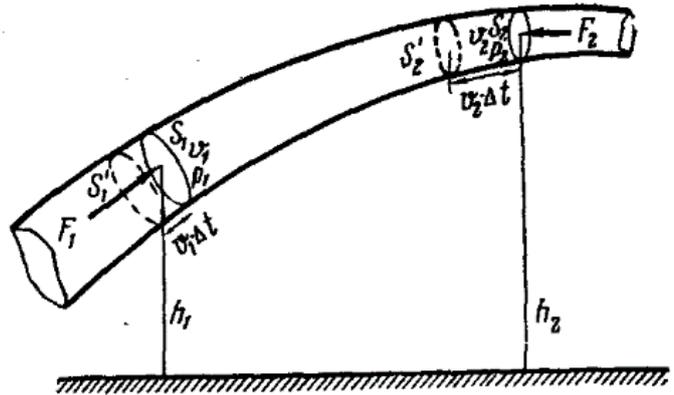


Рис.5.3

$\Delta A = p_1 S_1 \mathcal{G}_1 \cdot \Delta t - p_2 S_2 \mathcal{G}_2 \cdot \Delta t$  но  $S_1 \mathcal{G}_1 \cdot \Delta t = S_2 \mathcal{G}_2 \cdot \Delta t = \Delta V$ , где  $\Delta V$  – объём каждой из рассматриваемых масс. Поэтому

$$\Delta A = p_1 \cdot \Delta V - p_2 \cdot \Delta V. \quad (5.5)$$

Объединяя формулы (5.3), (5.4) и (5.5), получим после перегруппировки слагаемых

$$\frac{\Delta m \mathcal{G}_2^2}{2} + \Delta m g h_2 + p_2 \cdot \Delta V = \frac{\Delta m \mathcal{G}_1^2}{2} + \Delta m g h_1 + p_1 \cdot \Delta V.$$

Поделив обе части последнего равенства на  $\Delta V$  и учитывая, что  $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$ , где  $\rho$  – плотность жидкости, получим

$$\frac{\rho \mathcal{G}_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2 = \frac{\rho \mathcal{G}_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1.$$

Поскольку сечения  $S_1$  и  $S_2$  выбраны произвольно, можно окончательно написать

$$\frac{\rho \mathcal{G}^2}{2} + \rho g h + p = const. \quad (5.6)$$

Это соотношение, выведенное в 1738 г. *Д. Бернулли*, называется *уравнением Бернулли*. Первое слагаемое левой части этого уравнения представляет собой удельную кинетическую энергию жидкости; второе – удельную потенциальную энергию жидкости в поле силы тяжести; третье – удельную энергию жидкости, обусловленную силами давления (удельная энергия - энергия, отнесённая к объёму жидкости).

Единицей давления является *паскаль* (Па). Паскаль – давление, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределённой по нормальной к ней поверхности площадью 1 м<sup>2</sup>:

$$Pa = N/m^2 = N \cdot m/m^3 = Дж/м^3.$$

Следовательно, уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии (удельной) и может быть сформулировано так: *при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости сумма удельной энергии давления и кинетической, и потенциальной удельных энергий остаётся постоянной на любом поперечном сечении потока.*

Из приведённого преобразования единиц давления в едини-

цы удельной энергии следует, что все члены левой части уравнения (5.6) можно ещё рассматривать как давления, причем  $p$  называют *статическим*,  $\frac{\rho v^2}{2}$  – *динамическим*,  $\rho gh$  – *гидравлическим давлением*.

Следовательно, в установившемся потоке идеальной несжимаемой жидкости полное давление, слагающееся из динамического, гидравлического и статического давлений, постоянно на любом поперечном сечении.

Для горизонтальной трубки тока (или реальной трубы) уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = const . \quad (5.7)$$

(так как  $\rho gh = const$ ).

Из уравнений Бернулли и неразрывности следует, что в местах сужения трубопровода скорость течения жидкости возрастает, а давление понижается.

В заключение остановимся на следующем важном положении. Уравнения (5.1) и (5.6) применимы не только к жидкостям, но и к газам в случаях, когда сжимаемостью и вязкостью газа можно пренебрегать. Оказывается, что это можно делать при небольших скоростях движения газа, когда в газовом потоке обычно не возникает больших градиентов скорости, а, следовательно, и больших сил вязкости. Что касается сжимаемости газа, то, как показывают теория и опыт, ею можно пренебречь при скоростях движения газа, меньших скорости распространения звука в нём. Скорость звука в воздухе вблизи поверхности Земли составляет около  $340 \text{ м/с} = 1224 \text{ км/ч}$ . Поэтому воздух, движущийся со скоростью, не превышающей  $150 - 200 \text{ м/с}$ , допустимо считать идеальной несжимаемой жидкостью и применять к нему уравнение неразрывности и уравнение Бернулли.

## § 5.3. Некоторые приложения уравнения Бернулли

Уравнение Бернулли является одним из основных законов механики движения жидкостей и газов (гидро – и аэродинамики), имеющим большое прикладное значение. Приведём несколько примеров.

### 1. Гидротурбина

Вода, находящаяся под большим давлением, но имеющая малую скорость, поступает по суживающемуся трубопроводу *A* через сопло *B* на лопатки *C* рабочего колеса *D* (рис. 5.4).

Согласно уравнению Бернулли, потенциальная энергия давления воды переходит в узком трубопроводе и сопле в кинетическую энергию, за счет которой рабочее колесо приводится во вращение.

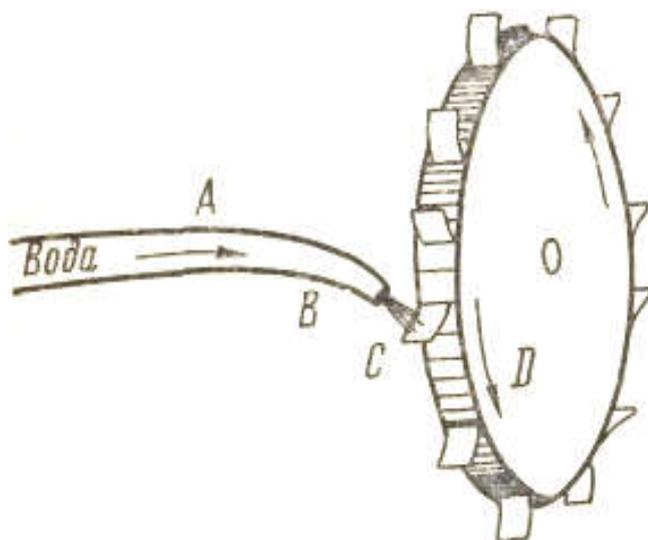


Рис.5.4

Аналогично поток газа приводит в действие газотурбину.

### 2. Гидротаран

Вода движется от плотины по наклонному трубопроводу *A* (рис. 5.5). В конце трубопровода имеется подвижная заслонка *B*, которая может периодически быстро перекрывать трубопровод.

При каждом перекрытии потока динамическое давление в нём внезапно падает до нуля, а

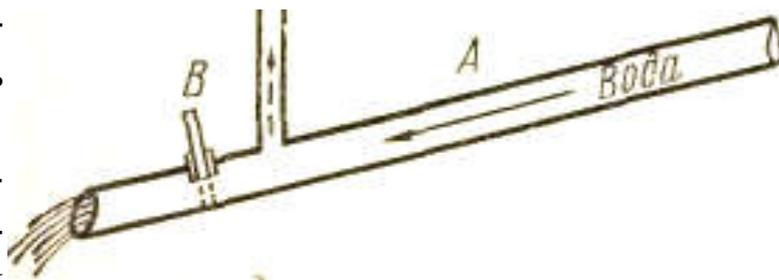


Рис.5.5

статическое резко возрастает, перегоняя часть воды по вертикальной трубе *C* в водонапорный бак. Простота устройства и эксплуатации гидротарана позволяет применять его везде, где есть хотя бы небольшая речка. Вода из водонапорного бака может быть использована для орошения земель, водоснабжения животноводческих ферм и т.д.

### 3. Водоструйный насос

Вода течёт по трубе, имеющей в узкой части неплотное сочленение (рис. 5.6). На выходе из трубы давление в струе воды равно атмосферному. Тогда, согласно уравнению Бернулли, давление в суженной части трубы ниже атмосферного. Поэтому воздух из резервуара *A*, окружающего сужение, засасывается в трубу через сочленение и выходит из неё вместе с водой.

Трубка *B* присоединяется к сосуду, из которого надо откачать воздух (или какой-нибудь другой газ). Будучи крайне простым по устройству и эксплуатации, водоструйный насос может создавать разрежения до 90 Па. Водоструйные насосы широко используются в лабораториях, в конденсаторных установках паровых турбин и т.п.

Аналогично водоструйному насосу действует пароструйный насос (*инжектор*), служащий для питания водой паровых котлов.

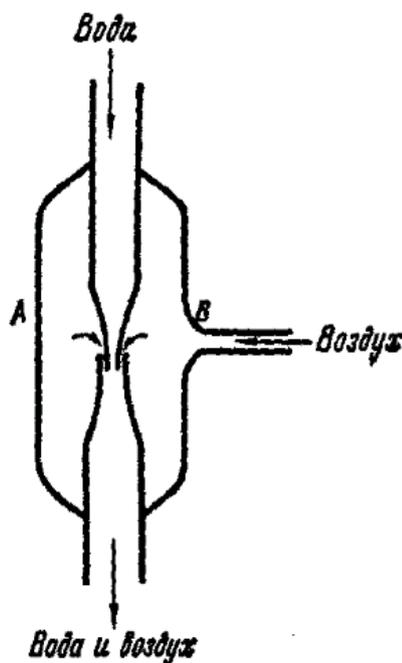


Рис.5.6

### 4. Подъёмная сила крыла самолета

На рис. 5.7 представлена форма поперечного сечения крыла самолета («профиль Жуковского»), разработанная в 1904 г. Осно-

вателем аэродинамики *Н.Е. Жуковским*. Благодаря этой форме вокруг движущегося крыла возникает циркуляция (круговое течение) воздуха, направленная по часовой стрелке. Над крылом скорости циркуляции  $\mathcal{G}_c$  и встречного воздушного потока  $\mathcal{G}$  складываются, под крылом – вычитаются. Поэтому относительная скорость движения воздуха над крылом ( $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G} + \mathcal{G}_c$ ) превышает относительную скорость под крылом ( $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G} - \mathcal{G}_c$ ), т. е.  $\mathcal{G}_1 < \mathcal{G}_2$ , что отражено густотой линий тока (рис. 5.8).

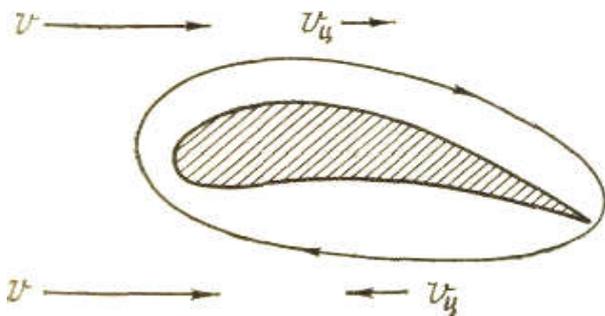


Рис.5.7

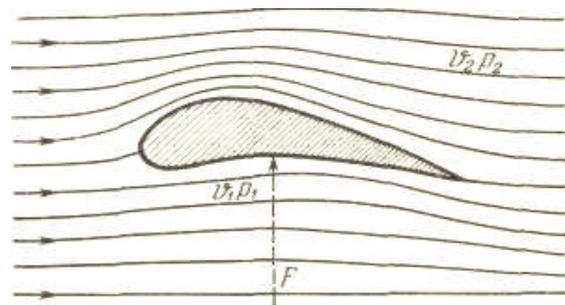


Рис.5.8

Тогда, согласно уравнению Бернулли, давление под крылом  $p_1$  будет больше, чем над крылом  $p_2$  ( $p_2 < p_1$ ). За счёт разности давлений  $p_1 - p_2$  возникает подъёмная сила  $F$  крыла самолета. Отметим, что отчасти подъёмная сила обусловлена ещё и небольшим наклоном плоскости крыла к направлению движения самолета (угол атаки).

В заключение отметим, что на основе уравнения Бернулли действуют *карбюратор* двигателя внутреннего сгорания, *пульверизатор*, *опрыскиватель* сельскохозяйственных растений, *ингалятор* и другие распылители жидкости.

## Глава VI. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### § 6.1. Гармоническое колебание и его характеристики

*Колебательным движением (колебанием) называется процесс, при котором система, многократно отклоняясь от своего состояния равновесия, каждый раз вновь возвращается к нему. Если этот возврат совершается через равные промежутки времени, то колебание называется периодическим. Наглядным примером колебания может служить движение часового маятника.*

Колебательные движения исключительно широко распространены в природе и технике. Вибрация натянутой струны, движение поршня дизеля и ножей косилки, суточные и годовые изменения температуры воздуха, морские приливы и отливы, волнение водной поверхности, биение сердца, дыхание, тепловое движение ионов кристаллической решётки твёрдого тела, переменный ток и его электромагнитное поле, движение электронов в атоме и т.д. – все это в конечном счёте колебательные процессы. Несмотря на большое разнообразие колебательных процессов как по физической природе, так и по степени сложности, все они совершаются по некоторым общим закономерностям и могут быть сведены к совокупности простейших периодических колебаний, называемых *гармоническими*. В этой главе рассматриваются именно гармонические колебания.

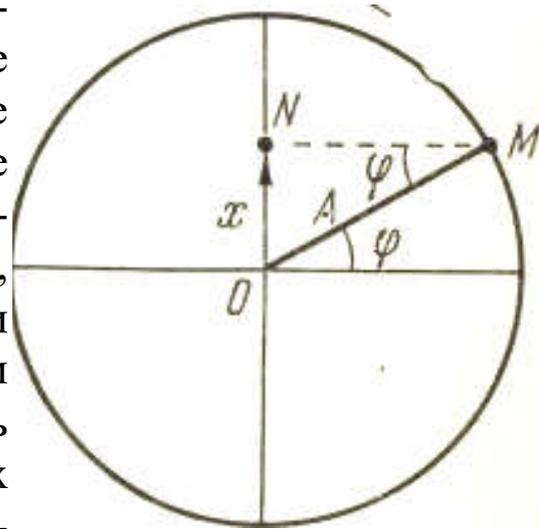


Рис.6.1

С основными закономерностями и характеристиками гармонического колебания проще всего ознакомиться на примере равномерного движения материальной точки по окружности. Пусть материальная точка  $M$  движется против часовой стрелки по окружности радиусом  $A$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$  (рис. 6.1). Тогда её проекция  $N$  на вертикальный диаметр совершает периодические колебания около положения равновесия  $O$ , а смещение этой проекции ( $x = ON$ ) изменяется в пределах от

$+A$  до  $-A$ , также совершая периодические колебания. Величина смещения в любой момент времени  $t$  определяется очевидным соотношением

$$x = A \sin \varphi. \quad (6.1)$$

Так как период вращения материальной точки  $T$ , число её оборотов в секунду  $\nu$ , угловая скорость  $\omega$  и угол поворота радиуса  $\varphi$  связаны между собой соотношениями

$$\varphi = \omega t = \frac{2\pi}{T} t = 2\pi \nu t, \text{ то формулу (6.1) можно написать ещё так:}$$

$$x = A \sin \omega t, \quad x = A \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad x = A \sin 2\pi \nu t \quad (6.2)$$

Соотношения (6.1) – (6.2) являются разновидностями уравнения гармонических колебаний.

Следовательно, гармоническим называется колебание, при котором изменение колеблющейся величины со временем происходит по закону синуса (или косинуса, если точка  $M$  проецируется на горизонтальный диаметр). Смещение  $x$  положительно, когда направлено вверх от положения равновесия, и отрицательно, когда направлено вниз. Абсолютное значение максимального смещения  $A$  называется амплитудой колебания.

При описании колебательных процессов физические величины  $T$ ,  $\nu$ ,  $\omega$  и  $\varphi$  принято называть:  $T$  – периодом колебания,  $\nu$  – частотой колебания,  $\omega$  – круговой или циклической частотой,  $\varphi$  – фазой колебания. Единицы этих величин остаются, конечно, прежними.

Фазой колебания  $\varphi = \omega t$  называется аргумент тригонометрической функции в уравнении гармонического колебания. Физический смысл фазы состоит в том, что она определяет смещение в любой момент времени, т.е. определяет состояние колебательной системы. Действительно, например, при  $\varphi = \frac{\pi}{6}$

смещение  $x = \frac{A}{2}$ , при  $\varphi = \pi$   $x = 0$ , при  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$   $x = -A$  и т.п. Из уравнения (6.1) следует, что фазам, различающимся между собой на величину, кратную  $2\pi$ , соответствуют одинаковые смещения.

Изменение фазы на  $2\pi$  рад соответствует промежутку времени в один период  $T$ .

Скорость  $\mathcal{V}$  колебания точки  $N$  определим как производную смещения (6.2) по времени:

$$\mathcal{V} = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos \omega t,$$

или, учитывая правило приведения тригонометрических функций,

$$\mathcal{V} = \omega A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6.3)$$

Из уравнения (6.3), видно, что скорость колебания изменяется со временем. Следовательно, колебательное движение совершается с ускорением  $a$ , которое можно определить, продифференцировав выражение скорости (6.3) по времени:

$$a = \frac{d\mathcal{V}}{dt} = \omega^2 A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi). \quad (6.4)$$

Учитывая формулу (6.2), можно выразить ускорение через смещение:

$$a = \omega^2 A \sin(\omega t + \pi) = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 x. \quad (6.5)$$

Сравнение формул (6.2) - (6.4) приводит к следующим выводам.

1. Как и смещение  $x$ , скорость  $\mathcal{V}$  и ускорение  $a$  точки  $N$  совершают гармонические колебания с одинаковыми круговой частотой  $\omega$  и периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

2. Амплитуды этих колебаний различны:  $A$  - у смещения,  $\omega A$  - у скорости и  $\omega^2 A$  - у ускорения.

3. Фазы колебаний также различны: колебание скорости опережает колебание смещения по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  (по времени на  $\frac{T}{4}$ ), колебание ускорения опережает колебание смещения по фазе на  $\pi$  (по времени на  $T/2$ ).

Для наглядности, изменения  $x$ ,  $\mathcal{V}$  и  $a$  со временем (при гармоническом колебании), рассчитанные по уравнениям (6.2),

(6.3) и (6.4), приведены в таблице и представлены на рис. 6.2

$t$	$x$	$g$	$A$
$0$	$0$	$\omega A$	$0$
$T/4$	$A$	$0$	$-\omega^2 A$
$T/2$	$0$	$-\omega A$	$0$
$3T/4$	$-A$	$0$	$\omega^2 A$
$T$	$0$	$\omega A$	$0$

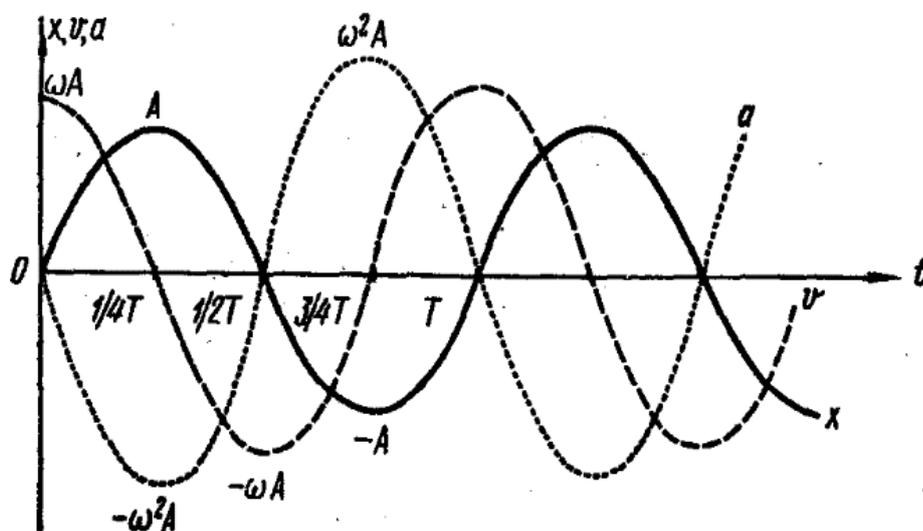


Рис. 6.2

Как видно на этом рисунке, в момент прохождения колеблющейся точкой положения равновесия ( $x=0$ ) её скорость максимальна ( $g_m = \pm\omega A$ ), а ускорение равно нулю ( $a=0$ ). Когда же точка максимально отклонится от положения равновесия  $x=+A$  или  $x=-A$ , её скорость равна нулю ( $g=0$ ), а ускорение становится максимальным ( $a_m = \pm\omega^2 A$ ). Знак ускорения всегда противоположен знаку смещения. Следовательно, ускорение всегда направлено к положению равновесия  $O$  колеблющейся точки.

## § 6.2. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний

Независимые гармонические колебания могут складываться друг с другом. Например, в точке разветвления проводов трехфазной сети переменного тока (соединённых «звездой») складываются различные синусоидальные переменные токи. В результате возникает более сложное колебание, характер которого зависит от соотношения фаз, частот, амплитуд и направлений слагаемых колебаний. Рассмотрим несколько наиболее простых случаев сложения гармонических колебаний.

*Сложение двух колебаний одного направления.*

1. *Круговые частоты и фазы колебаний одинаковы, амплитуды различны:*

$$x_1 = A_1 \sin \omega t; \quad x_2 = A_2 \sin \omega t.$$

Тогда

$$x = x_1 + x_2 = (A_1 + A_2) \sin \omega t = A \sin \omega t,$$

т.е. возникает гармоническое колебание такой же частоты с амплитудой, равной сумме амплитуд слагаемых колебаний.

2. *Круговые частоты и амплитуды одинаковы, фазы различны:*

$$x_1 = A \sin \omega t; \quad x_2 = A \sin(\omega t + \theta),$$

где  $\theta$  - разность фаз.

Тогда, применяя формулу сложения синусов, получим

$$x = x_1 + x_2 = 2A \cos \frac{\theta}{2} \sin \left( \omega t + \frac{\theta}{2} \right) = B \sin \left( \omega t + \frac{\theta}{2} \right).$$

Возникает гармоническое колебание такой же частоты, но отличающееся по фазе от первичных колебаний на половину разности фаз этих колебаний. Амплитуда  $B = 2A \cos \frac{\theta}{2}$ , вообще говоря, меньше суммы амплитуд первичных колебаний. Только при разности фаз, кратной  $2\pi$ ,  $B=2A$ . При разности фаз, равной  $(2n+1)\pi$  (где  $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ ),  $B=0$  и слагаемые колебания взаимно «гасятся».

### § 6.3. Динамика колебательного движения. Маятник

При колебательном движении ускорение *переменно*. Следовательно, это движение обусловлено действием *переменной* силы. Пусть под действием переменной силы  $F$  материальная точка массой  $m$  совершает гармоническое колебание с ускорением  $a$ . Тогда, учитывая формулу (6.5), можно написать

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \quad (6.6)$$

где

$$k = m\omega^2. \quad (6.7)$$

Таким образом, сила, вызывающая гармоническое колебание, пропорциональна смещению и направлена против смещения. В связи с этим можно дать следующее определение гармонического колебания: *гармоническим называется колебание, вызываемое силой, пропорциональной смещению и направленной против смещения*. Эта сила стремится вернуть точку в положение равновесия, поэтому её называют *возвращающей силой*. Возвращающей силой может быть, например, сила упругости, так как она тоже пропорциональна смещению и противоположна ему по знаку. Возвращающие силы могут иметь и иную, не упругую природу. В этих случаях они называются *квазиупругими силами*.

Если известны масса материальной точки и коэффициент  $k$ , то из формулы (6.7) можно определить круговую частоту и

период колебания:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6.8)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (6.9)$$

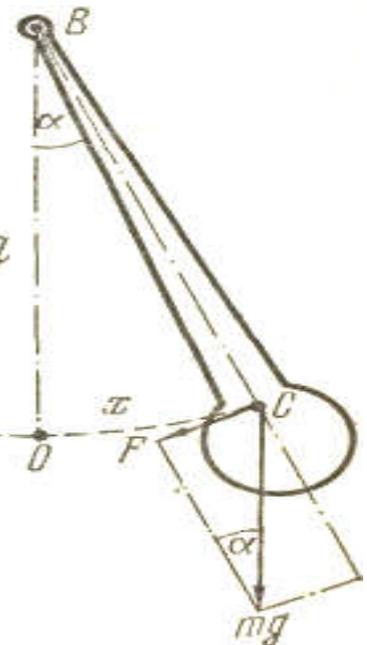
Рассмотрим теперь механическую колебательную систему, называемую *физическим маятником*; это твёрдое тело, совершающее колебания под действием силы тяжести относительно горизонтальной оси.

Обычно физический маятник представляет собой стержень с утяжелённым концом; другой его конец подвижно связан с горизонтальной осью  $B$ , перпендикулярной стержню (рис. 6.3).

Отклонённый от положения равновесия  $OB$  на угол  $\alpha$ , маятник под действием силы тяжести возвращается к этому положению, переходит его по инерции, отклоняется в противоположную сторону, затем опять переходит положение равновесия и т.д. Если трение в подвесе мало, то маятник будет колебаться очень долго.

Центр масс маятника  $C$  описывает дугу окружности  $COD$ . Условимся считать угол  $\alpha$  положительным при отклонении маятника вправо от положения равновесия и отрицательным – при отклонении влево.

Возвращающая сила  $F = -P \sin \alpha = -mg \sin \alpha$ , где  $m$  – масса маятника. Знак минус обусловлен тем, что направления силы и угла отклонения всегда противоположны.



При малых отклонениях

$$(\alpha < 0,14 \text{ рад} = 8^\circ) \sin \alpha \approx \alpha.$$

Рис.6.3

тогда

$$F = -mga = -mgx/l, \quad (6.10)$$

где  $x = |OC|$  – дуговое смещение центра масс маятника от положения равновесия,  $l = |BC|$  – длина маятника (расстояние от точки подвеса до центра масс).

Таким образом, возвращающая сила оказывается пропорциональной смещению и противоположной ему по знаку (т.е. является квазиупругой силой). Следовательно, колебания маятника гармонические.

В соответствии с основным законом динамики вращения момент  $M$  возвращающей силы  $F$  выразится соотношением

$$M = Fl = J\beta,$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси подвеса,  $\beta$

– угловое ускорение. Тогда  $F = \frac{J\beta}{l}$ .

Так как  $\beta = a/l$ , то, учитывая формулу (6.5), определим

$$F = \frac{Ja}{l^2} = -\frac{J}{l^2} \omega^2 x, \quad (6.11)$$

где  $\omega$  – круговая частота колебаний маятника.

Сопоставляя формулы (6.10) и (6.11), получим  $mgl = J\omega^2$ , откуда найдем выражения круговой частоты и периода колебаний физического маятника:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (6.12)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (6.13)$$

На практике часто физический маятник можно рассматривать как математический. *Математическим маятником называется материальная точка, колеблющаяся на невесомой и недеформируемой нити* (рис. 6.4).

Согласно определению момента инерции материальной точки, момент инерции математического маятника равен  $J = ml^2$ , где  $m$  – масса материальной точки,  $l$  – длина нити

Подставляя это выражение  $J$  в (6.13), получим окончательную формулу периода колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (6.14)$$

Из (6.14) следует, что *при малых отклонениях а период колебания математического маятника пропорционален квадратному корню из длины маятника, обратно пропорционален квадратному корню из ускорения свободного падения и не зависит от амплитуды колебаний и массы маятника.* При гармоническом колебании происходит периодическое взаимное превращение кинетической энергии колеблющегося тела  $W_k$  и

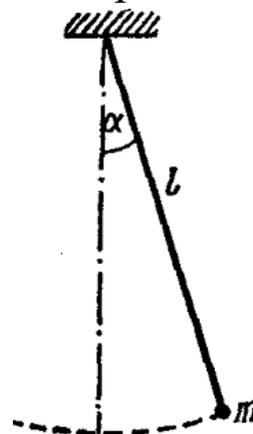


Рис.6.4

потенциальной энергии  $W_n$ , обусловленной действием квазиупругой силы. Из этих энергий складывается полная энергия  $W$  колебательной системы:

$$W = W_k + W_n . \quad (6.15)$$

Учитывая формулу (6.3), напишем

$$W_k = \frac{m \mathcal{V}^2}{2} = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \sin^2 \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \cos^2 \omega t , \quad (6.16)$$

где  $\mathcal{V}$  – скорость движения тела,  $m$  – его масса.

Потенциальная энергия, обусловленная квазиупругой силой, выражается так же, как потенциальная энергия упругодеформированного тела, т.е. должна быть пропорциональна квадрату смещения. Тогда, учитывая формулу (6.2), находим

$$W_n = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} A^2 \sin^2 \omega t ,$$

где  $k = m\omega^2$ , поэтому  $W_n = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$ . (6.17)

Сопоставляя формулы (6.15) - (6.16), получим

$$W = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{m}{2} \omega^2 A^2 . \quad (6.18)$$

Таким образом, *полная энергия гармонического колебания постоянна и пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату круговой частоты колебания.*

## § 6.4. Волновой процесс

Если в упругую среду поместить колеблющееся тело (источник колебаний), то соседние с ним частицы среды тоже придут в колебательное движение. Колебание этих частиц передаётся (силами упругости) соседним частицам среды и т.д. Через некоторое время колебание охватит всю среду. Однако оно будет совершаться с различными фазами: чем дальше расположена частица от источника колебаний, тем позднее начнет она колебаться и тем больше будет запаздывать по фазе её колебание. Распространение колебаний в среде называется *волновым про-*

цессом, или волной. Примером волнового процесса могут служить волны на поверхности воды, расходящиеся от места падения камня. Направление распространения волны (колебания) называется лучом.

Волна называется поперечной, если частицы среды колеблются перпендикулярно лучу. Если же они колеблются вдоль луча, то волна называется продольной.

В свободно подвешенной длинной пружине возникает поперечная волна, если по нижнему концу пружины нанесен удар в горизонтальном направлении (рис. 6.5, а). В этой же пружине возникает продольная волна, если удар нанесён в вертикальном направлении (рис. 6.5, б). Отметим, что частицы среды не перемещаются вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия; перемещается только колебательный процесс, точнее говоря, фаза колебаний (гребни и впадины пружины – в случае поперечной волны или сгущения и разрежения витков пружины – в случае продольной волны). Продольные волны могут возникать в среде, обладающей упругостью объема, т.е. в твёрдых, жидких и газообразных телах.

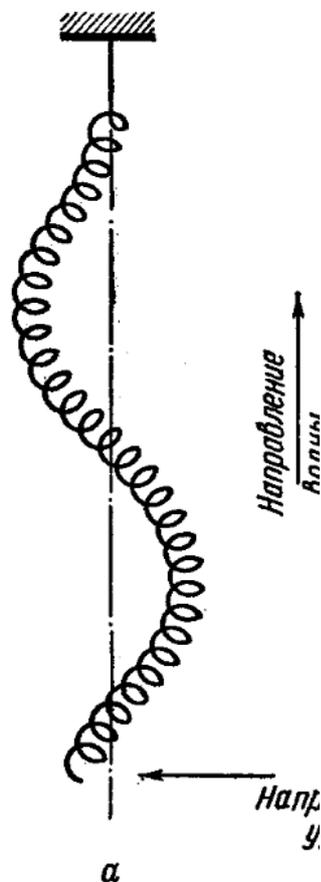


Рис.6.5

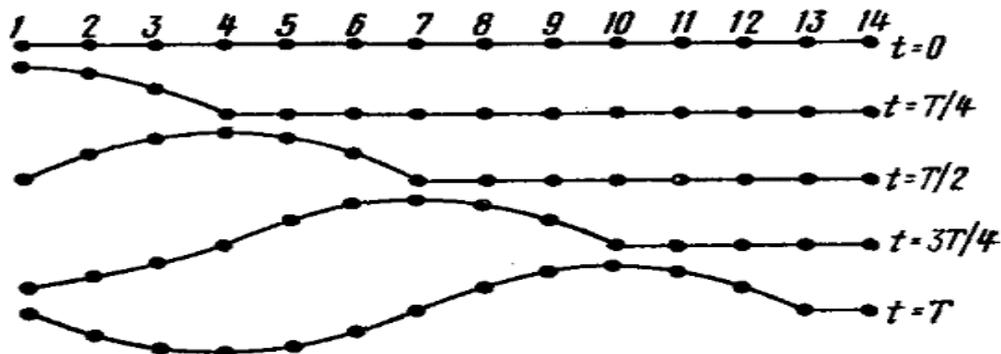


Рис.6.6

Поперечные волны возникают только в среде, обладающей упругостью формы (деформацией сдвига), т.е. только в твёрдых телах. Чтобы получить наглядное представление о волновом процессе, рассмотрим схемы распространения поперечных и продольных волн. В покоящейся среде, обладающей упругостью формы, отметим и пронумеруем ряд частиц, расположенных вдоль горизонтальной линии (рис. 6.6). Пусть в начальный момент  $t = 0$  частица 1 приходит в гармоническое колебание с периодом  $T$  под действием толчка, направленного вертикально вверх. С некоторым запаздыванием придут в колебание и соседние частицы. Через четверть периода частица 1 максимально сместится вверх, частицы 2 и 3 также получают некоторое смещение, а до частицы 4 колебание ещё только дойдет. Через половину периода частица максимально сместится вверх, частицы 5 и 6 также получают некоторое смещение, а до частицы 7 колебание ещё только дойдёт. В это время частицы 3 и 2 будут уже смещаться вниз, а частица 1 придёт в положение равновесия. Очевидно, что к концу периода колебание дойдёт до частицы 13 и начнет распространяться далее. Так образуется поперечная волна. Подобные волны возникают, например, в металлическом стержне (или натянутой струне) при ударе, нанесённом перпендикулярно его длине.

Предположим теперь, что в начальный момент  $t = 0$  частица 1 пришла в гармоническое колебание вдоль линии расположения частиц (рис. 6.7).

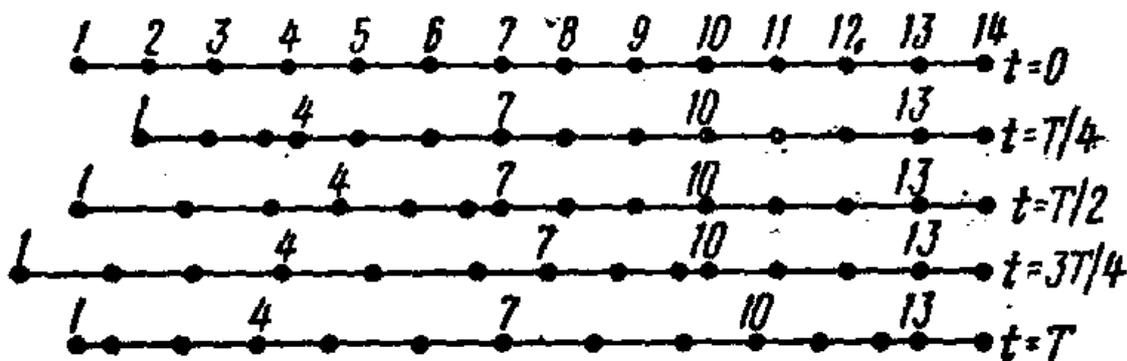


Рис.6.7

С некоторым запаздыванием придут в такое колебание и

остальные частицы среды. Рассуждения, аналогичные предыдущим, покажут, что в этом случае образуется продольная волна уплотнений и разрежений среды. Такие волны возникают, например, в металлическом стержне при ударе, нанесённом перпендикулярно его торцу.

Скорость распространения упругих колебаний, т.е. *скорость волны*  $\vartheta$ , зависит от упругих свойств и плотности  $\rho$  среды:

$$\vartheta = \sqrt{\frac{\chi}{\rho}},$$

где  $\chi$  – коэффициент, характеризующий упругие свойства среды. В частности, для продольных волн в твёрдом теле  $\chi = E$ ; для поперечных волн  $\chi = 0,4E$  ( $E$  – модуль упругости).

Подчеркнём, что основные закономерности волнового процесса справедливы не только для механических волн упругой среды (волн давления, звуковых и т.п.), но и для волн любой природы, в частности для волн электромагнитного поля (электромагнитных волн).

## § 6.5. Уравнение волны. Интенсивность волны

Установим зависимость между смещением  $x$  частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием  $y$  этих частиц от источника  $O$  колебаний для любого момента времени  $t$ . Для большей наглядности рассмотрим поперечную волну, хотя все последующие рассуждения верны и для продольной волны. Пусть колебания источника являются гармоническими:  $x = A \sin \omega t$ , где  $A$  – амплитуда,  $\omega$  – круговая частота колебаний. Тогда все частицы среды тоже придут в гармоническое колебание с той же частотой и амплитудой, но с различными фазами. В среде возникает синусоидальная волна (рис. 6.8).

График волны (рис. 6.8) внешне похож на график гармонического коле-

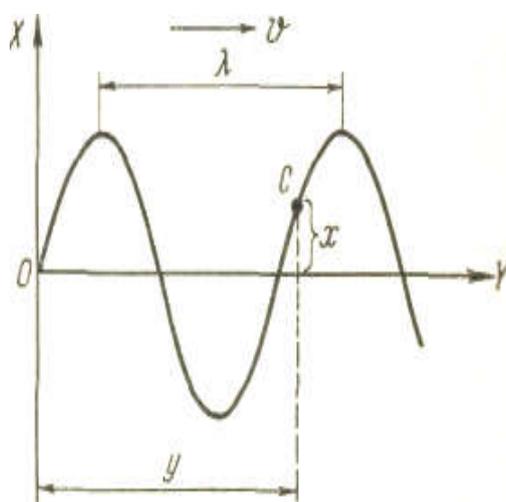


Рис.6.8

бания, но по существу они различны. График колебания представляет зависимость *смещения данной частицы от времени*, график волны – *смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени*.

Он является как бы моментальной фотографией волны. Рассмотрим некоторую частицу  $C$ , находящуюся на расстоянии  $y$  от источника колебаний (частицы  $O$ ). Очевидно, что если частица  $O$  колеблется уже  $t$  секунд, то частица  $C$  колеблется ещё только  $(t - \tau)c$ , где  $\tau$  – время распространения колебаний от  $O$  до  $C$ , т.е. время, за которое волна переместилась на  $y$ . Тогда уравнение колебания частицы  $C$  следует написать так:  $x = A \sin \omega(t - \tau)$ .

Но  $\tau = y/g$ , где  $g$  – скорость распространения волны. Тогда

$$x = A \sin \omega \left( t - \frac{y}{g} \right). \quad (6.19)$$

Соотношение (6.19), позволяющее определить смещение любой точки волны в любой момент времени, называется *уравнением волны*. Вводя в рассмотрение длину волны  $\lambda$  как расстояние между двумя ближайшими точками волны, находящимися в одинаковой фазе, например, между двумя соседними гребнями волны, можно придать уравнению волны другой вид. Очевидно, что длина волны равна расстоянию, на которое распространяется колебание за период  $T$  со скоростью  $g$ :

$$\lambda = gT = \frac{g}{\nu}, \quad (6.20)$$

где  $\nu$  – частота волны. Тогда, подставляя в уравнение (6.19)  $g = \lambda/T$  и учитывая, что  $\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu$ , получим другие формы уравнения волны:

$$x = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{y}{\lambda} \right) = A \sin 2\pi \left( \nu t - \frac{y}{\lambda} \right) = A \sin \left( \omega t - 2\pi \frac{y}{\lambda} \right). \quad (6.21)$$

Так как прохождение волны сопровождается колебанием частиц среды, то вместе с волной перемещается в пространстве и энергия колебаний. Энергия, переносимая волной за единицу времени через единицу площади, перпендикулярной к лучу, называется интенсивностью волны (или плотностью потока энергии). Получим выражение для интенсивности волны  $I$ .

Пусть в  $1 \text{ см}^3$  среды содержится  $n_0$  частиц массой  $m$ . Тогда в соответствии с формулой (6.18), энергия колебания среды в единице объёма будет равна  $\Omega = n_0 \frac{m\omega^2}{2} A^2 = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}$  где  $\rho = m \cdot n$  плотность среды.

Очевидно, что за  $1 \text{ с}$  сквозь площадку  $1 \text{ см}^2$  переносится энергия, содержащаяся в объёме прямоугольного параллелепипеда с основанием  $1 \text{ см}^2$  и высотой, равной  $\mathcal{L}$  (рис. 6.9); следовательно,

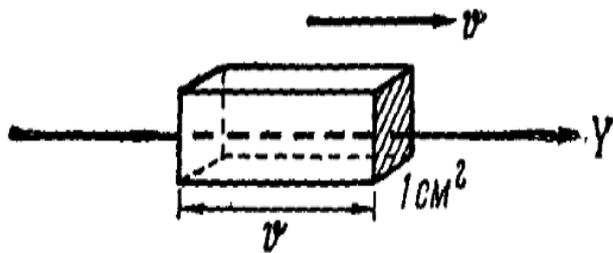


Рис.6.9

$$I = \Omega \mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \mathcal{L} \omega^2 A^2 \quad (6.22)$$

Таким образом, *интенсивность волны пропорциональна плотности среды и скорости, квадрату круговой частоты и квадрату амплитуды волны.*

## § 6.6. Интерференция волн

Если в среде находится несколько источников колебаний, то исходящие от них волны распространяются независимо друг от друга и после взаимного пересечения расходятся, не имея никаких следов происшедшей встречи. Это положение называется *принципом суперпозиции*. Его иллюстрацией может служить распространение водяных волн, вызванных двумя брошенными на поверхность воды камнями.

В местах встречи волн колебания среды, вызванные каждой из волн, складываются друг с другом. Результат сложения (результатирующая волна) зависит от соотношения фаз, периодов и амплитуд встречающихся волн. Большой практический интерес представляет случай сложения двух (или нескольких) волн, имеющих *постоянную разность фаз*. Такие волны и создающие их источники колебаний называются *когерентными*. Сложение когерентных волн называется *интерференцией*.

Рассмотрим интерференцию двух волн одинаковой амплитуды, исходящих из когерентных источников  $S'$  и  $S''$  и встречающихся в точке  $P$  (рис. 6.10).

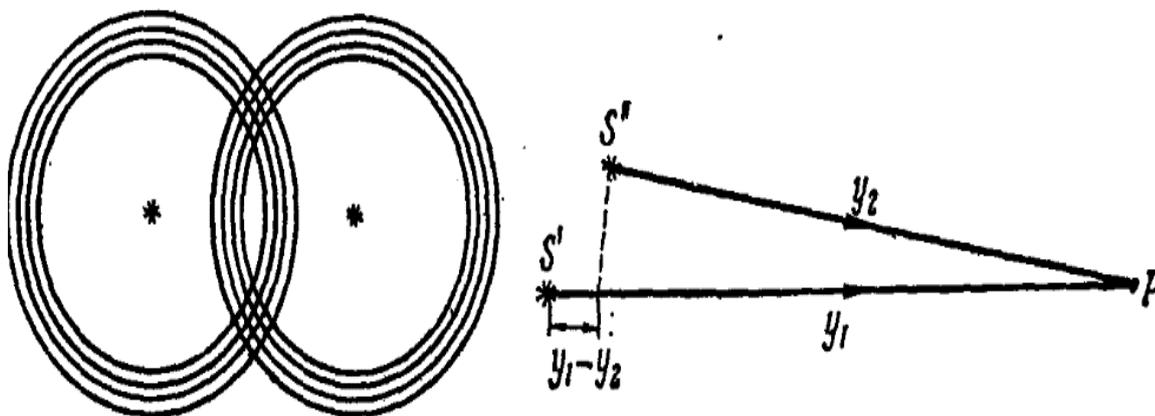


Рис.6.10

Согласно уравнению волны (6.21), смещения, вызванные в точке  $P$  первой и второй волнами, равны соответственно:

$$x_1 = A \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{y_1}{\lambda}\right) \quad \text{и} \quad x_2 = A \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{y_2}{\lambda}\right).$$

Тогда результат сложения определится разностью фаз

$$\theta = 2\pi \frac{y_1 - y_2}{\lambda}.$$

Если

$$2\pi \frac{y_1 - y_2}{\lambda} = 2\pi n, \quad (6.23)$$

то в точке  $P$  наблюдается *максимум*: колебания максимально усилят друг друга и результирующая амплитуда будет равна  $2A$ .

Если же

$$2\pi \frac{y_1 - y_2}{\lambda} = (2n + 1)\pi, \quad (6.24)$$

где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то в точке  $P$  будет *минимум*: колебания взаимно погасятся и результирующая амплитуда в этом случае равна нулю.

Условия максимума (6.23) и минимума (6.24) можно ещё записать соответственно так:

$$y_1 - y_2 = n\lambda = 2n\frac{\lambda}{2} \quad (6.25)$$

и

$$y_1 - y_2 = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (6.26)$$

Разность  $y_1 - y_2$  называется *разность хода волн*, или *разность хода лучей*.

Следовательно, в точке  $P$  будет максимум, если разность хода составляет чётное число полуволен (целое число волн); если разность хода составляет нечётное число полуволен, то в точке  $P$  будет минимум.

## 2. Молекулярная физика и термодинамика

### Глава VII. Общие сведения о строении вещества

#### § 7.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

Ещё в V веке до нашей эры Демокритом было высказано предположение, что все тела состоят из мельчайших частиц – атомов. Но затем это забылось и только во второй половине XVII в. это положение было возрождено Бойлем, а в XVII–XIX вв. развито Ломоносовым, Дальтоном, Больцманом, Максвеллом и др. Эта научная теория получила название молекулярно-кинетической теории. Эта теория основана на следующих положениях.

1. *Все вещества состоят из очень мелких отдельных частиц-молекул.* Молекулы образующие конкретное вещество одинаковы. Различные вещества состоят из различных молекул. В природе существует чрезвычайно большое разнообразие молекул.

*Молекулы в свою очередь состоят из более мелких частиц-атомов.* Число различных атомов сравнительно невелико и равно числу химических элементов и их изотопов (в настоящее время насчитывается 118 элементов и 1500 изотопов). Различные комбинации атомов создают всё многообразие молекул.

Атомы представляют весьма сложные образования, состоящие из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронов. Однако классическую молекулярно-кинетическую теорию не касается вопрос о строении атомов. В этой теории атомы рассматриваются упрощённо как твёрдые частицы сферической формы. Размеры (диаметры) атомов и молекул имеют в среднем порядок  $10^{-8} \div 10^{-7}$  см.

2. *Между молекулами тела одновременно действуют силы взаимного притяжения и силы взаимного отталкивания.* При этом силы отталкивания должны убывать быстрее с увеличением расстояния, чем силы притяжения. Только при этом условии молекулы могут находиться в устойчивом равновесии на

определенном расстоянии друг от друга (на котором силы сцепления равны силам отталкивания). Если по какой-то причине молекулы сблизятся на расстояние меньше равновесного, то силы отталкивания начнут преобладать над силами притяжения и восстановят равновесное расстояние между молекулами. Если молекулы разойдутся на расстояние, большее равновесного, то начнут преобладать силы сцепления и сблизят молекулы на расстояние, соответствующее равновесному.

Экспериментальные и теоретические исследования показали, что межмолекулярные силы взаимодействия  $f$  обратно пропорциональны  $n$ -й степени расстояния между молекулами

$$f \approx \frac{1}{r^n},$$

где для сил притяжения  $n = 7$ , а для сил отталкивания принимает значения от 9 до 15.

Таким образом, действительно, эти силы очень быстро убывают с увеличением расстояния между молекулами, причем особенно быстро убывают силы отталкивания.

На рис. 7.1 а представлен примерный характер взаимодействия молекул в зависимости от расстояния между ними. По оси абсцисс отложены расстояния, по оси ординат – величины сил отталкивания и сил притяжения между молекулами, а также результирующей этих сил. Причем силы отталкивания приняты положительными, а силы притяжения – отрицательными.

Таким образом, для каждого расстояния  $r$  результирующая  $F = f_0 - f_n$  и положительные её

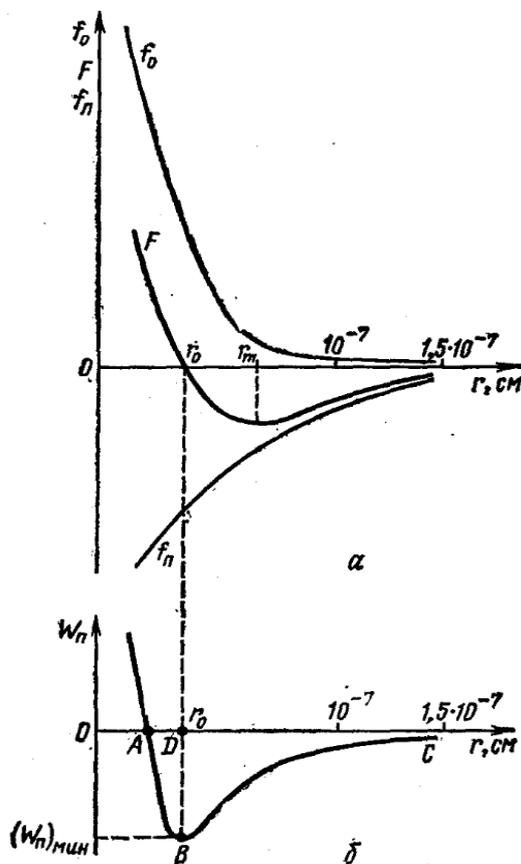


Рис.7.1

значения соответствуют отталкиванию, а отрицательные – притяжению между молекулами. Очевидно, что равновесное  $r_0$  расстояние между молекулами составляет около  $3 \cdot 10^{-8}$  см, так как на этом расстоянии  $F = 0$ .

При  $r < 3 \cdot 10^{-8}$  см преобладают силы отталкивания ( $F > 0$ ), а при  $r > 3 \cdot 10^{-8}$  см преобладают силы притяжения ( $F < 0$ ). На расстоянии  $r \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$  см межмолекулярные силы перестают действовать ( $F \rightarrow 0$ ).

Таким образом, силы межмолекулярного взаимодействия проявляются на расстояниях такого же порядка, как размер самих молекул.

Установим теперь примерный характер зависимости потенциальной энергии взаимодействия молекул  $W_n$  от расстояния между ними. Потенциальную энергию тяготеющих тел, находящихся на бесконечном расстоянии друг от друга, мы условились считать равной нулю. Поэтому при  $r = \infty$  будет  $W_n = 0$ . Если молекулы окажутся на расстоянии  $r \approx 1,5 \cdot 10^{-7}$  см друг от друга, то они начнут сближаться за счёт работы силы притяжения, а потенциальная энергия молекул будет уменьшаться и достигнет своего минимального значения  $(W_n)_{\min}$  при  $r = r_0$  при ( $F = 0$ ). Дальнейшее сближения возможно только за счёт работы против сил отталкивания. При этом потенциальная энергия молекул начинает резко возрастать. В результате кривая потенциальной энергии взаимодействия молекул (рис. 7.1 б) будет иметь мини-мум при  $r = r_0$ . Следовательно, *положение устойчивого равновесия молекул соответствует минимуму их потенциальной энергии.*

График зависимости потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними называют *потенциальной кривой*, а участок его снижения ниже нуля (ABC) – *потенциальной ямой*, точку B – *дном потенциальной ямы*, а ординату BD – *глубинной потенциальной ямы*.

3. Молекулы, образующие тело, находятся в состоянии непрерывного беспорядочного движения. При этом молекулы сталкиваются друг с другом и изменяют свою скорость как по направлению, так и по величине. В обычном понимании этого слова столкновение не осуществляется, т.к. очень сильны силы отталкивания. Однако результат оказывается тот же, что и при обычном столкновении, т.е. сблизившиеся молекулы отскакивают друг от друга.

Скорость движения молекул тела тесно связана с его температурой. Чем больше эта скорость, тем выше температура тела.

Таким образом, скорость движения молекул определяет тепловое состояние тела – его внутреннюю энергию, поэтому хаотическое движение молекул называют тепловым движением. Под внутренней энергией тела подразумевают совокупность кинетической энергии их взаимодействия.

По мере увеличения интенсивности теплового движения среднее расстояние между молекулами возрастает, а силы сцепления уменьшаются. Этому процессу соответствует переход из твёрдого состояния в жидкое. При достаточно большом расстоянии между молекулами ( $> 1,5 \cdot 10^{-7}$  см) силы сцепления между ними практически перестают действовать и тело переходит в газообразное состояние.

Таким образом, от интенсивности теплового движения молекул и от внешних условий зависит, в каком из возможных агрегатных состояниях находится вещество (твёрдом, жидком или газообразном).

## **§ 7.2. О некоторых явлениях, подтверждающих основные положения молекулярно-кинетической теории**

Вполне убедительным косвенным подтверждением того, что все физические тела построены из молекул, отделенных друг от друга промежутками, служит изменимость объёма газа, например, его сжимаемость. Очевидно, что уменьшение объёма возможно только благодаря взаимному сближению состав-

ляющих газ молекул за счёт сокращения промежутков между ними.

Наличие сил притяжения и отталкивания хорошо обнаруживается в свойствах твёрдых тел сохранять свою форму. Даже для небольшой деформации требуется приложить большое усилие. Растяжению тела препятствуют силы притяжения, а сжатия – отталкивания между молекулами.

Большое усилие требуется для разрушения этих сил т.к. это усилие идёт на преодоление сил сцепления между молекулами, но ещё труднее восстановить разломанное тело, невозможно восстановить тело, просто складывая его части. Молекулы находятся на значительном расстоянии друг от друга, т.е. на большем расстоянии, чем действуют силы сцепления. Для этого надо либо расплавить тело, что даёт возможность расположить большинство молекул близко друг к другу, либо склеить их с помощью клея, т.е. состава, который сам располагается близко к молекулам и соединяет его части. Таким образом, в зоне соединения молекулы оказываются сближенными между собой на расстояние, достаточное для действия сил сцепления.

Непрерывное хаотическое движение молекул проявляется в таких явлениях как диффузия и броуновское движение.

Диффузией называют процесс проникновения молекул одного вещества между молекулами другого вещества.

Одним их примеров диффузии является распространение паров бора в воздухе. В стакан помещали каплю бора, которая испарялась, образуя тёмно-бурые пары. Постепенно в течение получаса пары бора поднимались на высоту около 30 см, но пары бора тяжелее воздуха, поэтому перемешивание происходило не за счёт силы тяжести, а за счёт движения молекул (плотность бора в 4 раза больше плотности воздуха), т.е. за счёт диффузии.

Вторым явлением является броуновское движение. В 1827 г. английский ботаник Броун, исследуя под микроскопом жидкие препараты, обнаружил, что пыльца растений, взвешенная в воде, совершает быстрые беспорядочные движения. Частицы описывали беспорядочные зигзагообразные движения. Это движение и получило его имя. Причина броуновского движения

кроется в хаотическом движении молекул. Так, как броуновские частицы лишь в сотни раз больше диаметра молекул, то они могут перемещаться под действием направленных ударов молекул воды. Для такой малой частицы не безразлично, что с одной стороны в неё ударяется на несколько молекул воды больше, чем с другой. То есть с разных сторон в частичку ударяется разное число молекул, причем силы удара отдельных молекул также не одинаковы, поэтому частица получает преимущественный толчок то с одной стороны, то с другой. Поэтому в микроскопе и представляется, что частица мечется из стороны в сторону по зигзагообразной траектории.

### § 7.3. Теплота и температура

Теплота или тепловое состояние тела определяется интенсивностью хаотического движения молекул. При изменении интенсивности этого движения изменяется внутренняя энергия тела и его тепловое состояние.

Если взять два тела с различным тепловым состоянием, то есть с различной интенсивностью хаотического движения молекул, и соединить их, то в месте соприкосновения тел молекулы с большей интенсивностью движения передают часть своей энергии менее интенсивным молекулам второго тела. В результате тепловое состояние тел изменится: внутренняя энергия одного тела уменьшится, а другого возрастёт.

Теплота или количество теплоты – это энергия, передаваемая более нагретым телом менее нагретому телу, и не связанная с переносом вещества и совершением работы.

В качестве характеристики теплового состояния тела вводится понятие температуры, как физической величины, количественно определяющей интенсивность хаотического движения молекул. Чем выше интенсивность хаотического движения молекул, тем выше температура.

Если при тепловом контакте тел их тепловое состояние не изменяется, то их температура одинакова, тела находятся в тепловом равновесии.

При изменении теплового состояния тела изменяется и ряд

его других (кроме температуры) физических характеристик. Например, его размеры, в том числе и объём. По изменению этих характеристик можно определить его температуру. Прибор, измеряющий температуру, называется термометром. При измерении температуры приводят в тепловой контакт тело и термометр. Когда устанавливается тепловое равновесие, температура тела и термометра будут равны.

Простейшим термометром является жидкостный (ртутный, спиртовой). Температура определяется по высоте столбика жидкости в капиллярной трубке с расширением в нижнем конце (резервуаре). С изменением температуры происходит изменение объёма жидкости, следовательно, и высота столбика.

Наиболее распространённой температурной шкалой является шкала Цельсия, за основные точки которой приняты положения верхних уровней столбика жидкости, когда термометр находится в тепловом контакте: 1) с тающим льдом; 2) с паром кипящей воды при нормальном атмосферном давлении. Расстояние между этими уровнями разделено на 100 равных частей; 0,01 этого расстояния принята за один градус температурной шкалы Цельсия ( $1^{\circ}\text{C}$ ), что соответствует одному Кельвину ( $1\text{K}$ ), о котором будет сказано далее.

Количество теплоты как энергия, передаваемая от более нагретого тела менее нагретому, выражается в единицах энергии (работы), т.е. в джоулях (Дж).

Опыт показывает, что количество теплоты  $Q$ , необходимое для нагревания массы  $m$  вещества от температуры  $T_1$  до  $T_2$  пропорционально массе вещества и изменению температуры

$$Q = cm(T_2 - T_1),$$

$c$  – коэффициент пропорциональности, называется *удельной теплоёмкостью вещества*. Из последней формулы следует

$$c = \frac{Q}{m(T_2 - T_1)}.$$

Отсюда видно, что *удельной теплоёмкостью вещества называют количество теплоты необходимое для нагревания единицы массы вещества на один кельвин*. Единицей удельной теплоёмкости является.  $\text{Дж}/\text{кг}\cdot\text{K}$

## Глава VIII. ГАЗЫ

### § 8.1. Экспериментальные газовые законы: Бойля-Мариотта, Гейлюсака, Дальтона, Авогадро. Абсолютная температура

Состояние газа принято характеризовать тремя основными физическими величинами: давлением  $p$ , объёмом  $V$  и температурой  $T$ . Изменение состояния газа, сопровождаемое изменением этих величин, называется газовым процессом. Процесс изменения давления газа в зависимости от объёма, протекающий при неизменной температуре, называется изотермическим. Процесс изменения объёма газа в зависимости от температуры, протекающий при неизменном давлении, называется изобарическим. Процесс изменения давления газа в зависимости от температуры, протекающий при неизменном объёме, называется изохорическим.

#### Закон Бойля – Мариотта.

Изучая изотермические газовые процессы, английский ученый Р.Бойль (в 1662 г.) и французский ученый Э.Мариотт (в 1667 г.) независимо друг от друга установили следующий закон, получивший название закона Бойля – Мариотта:

*для данной массы газа при постоянной температуре ( $t=const$ ) давление газа изменяется обратно пропорционально объёму:*

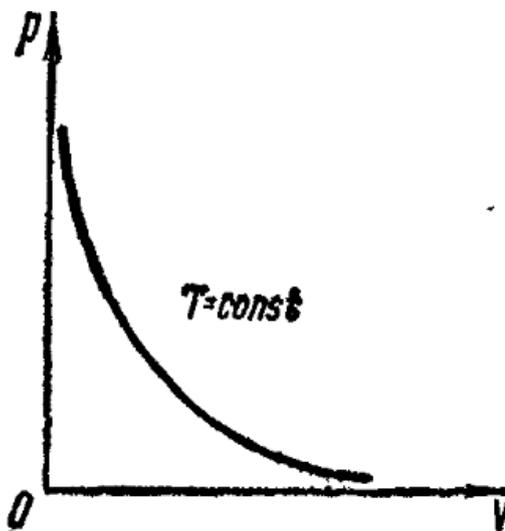


Рис.8.1

$$pV = const. \quad (8.1)$$

В соответствии с формулой, изотермический процесс представляется в виде равнобокой гиперболы – изотермой (рис. 8.1).

**Законы Гейлюсака.** Изучая изобарические и изохорические газовые процессы, французский физик Гейлюсак в 1802 году установил два закона, названные его именем.

1. Для данной массы газа при постоянном давлении ( $P = \text{const}$ ) объём газа изменяется линейно с температурой:

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad (8.2)$$

где  $V_0$  – объём газа при  $0^\circ\text{C}$ ,  $V$  – объём газа при температуре  $t^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – коэффициент объёмного расширения газа.

2. Для данной массы газа при постоянном объёме ( $V = \text{const}$ ) давление газа изменяется линейно с температурой:

$$p = p_0(1 + \gamma t) \quad (8.3)$$

где  $p_0$  – давление газа при  $0^\circ\text{C}$ ,  $p$  – давление газа при температуре  $t^\circ\text{C}$ ,  $\gamma$  – термический коэффициент давления газа.

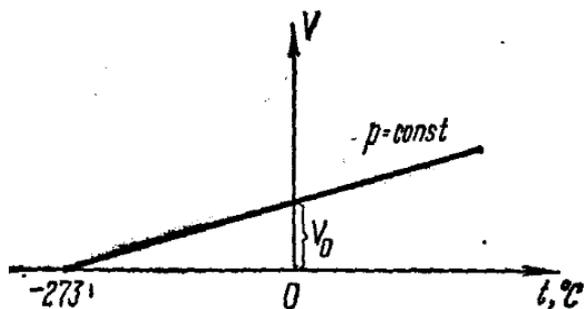


Рис.8.2

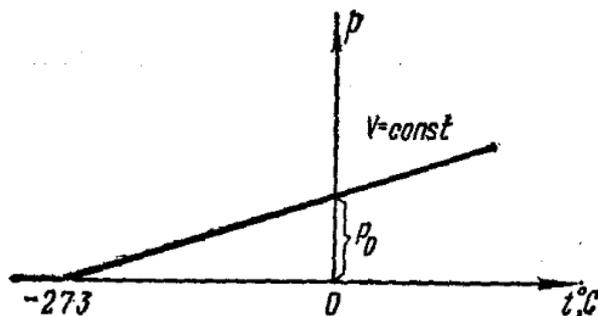


Рис.8.3

Оказалось, что для всех газов

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{273,16} \approx \frac{1}{273} (\text{K}^{-1}).$$

Согласно формулам (8.2) и (8.3) изобарический и изохорический процессы представляются на графиках прямыми линиями (изобарами и изохорами), проходящими наклонно к оси температур и пересекающими её в точке  $t = -273,16 \approx -273^\circ\text{C}$  (рис. 8.2 и 8.3).

Точка  $t = -273^\circ\text{C}$  принята за начало отсчёта новой шкалы температур, называемой абсолютной (или шкалой Кельвина, или термодинамической шкалой). Температура, отсчитываемая по абсолютной шкале, называется абсолютной или термодина-

мической температурой; нуль этой шкалы называется абсолютным нулём. Если цену деления термодинамической шкалы сохранить ту же, что и на шкале Цельсия, то абсолютная температура  $T$  будет связана с температурой  $t$ , измеряемой по шкале Цельсия, соотношением

$$T = t + 273,16 \text{ } ^\circ\text{C}, \quad (8.4)$$

при этом абсолютный нуль равен  $-273,16 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Из формулы (8.2) следует, что при температуре, равной абсолютному нулю,

$$V = V_0 \left( 1 + \frac{-273}{273} \right) = 0$$

т.е., что при абсолютном нуле температуры вещество исчезает. Этот вывод происходит из того, что газовые законы не действуют при низких температурах. При низких температурах вещество не может существовать в газовом состоянии. Оно переходит в жидкое и твёрдое состояние.

В настоящее время удаётся достигнуть температур, отличающихся от абсолютного нуля на несколько тысячных кельвина.

С помощью абсолютной температуры можно придать формуле (8.2) более простой вид:

$$V = V_0(1 + \alpha t) = V_0 \left( 1 + \frac{1}{273} t \right) = V_0 \frac{273 + t}{273} = V_0 \frac{T}{T_0},$$

где  $T_0 = 273 \text{ К}$  соответствует  $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ .

Следовательно,

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0}, \quad (8.5)$$

т.е. *при постоянном давлении объём газа пропорционален абсолютной температуре.*

Преобразуя аналогичным путём формулу (8.3), получим

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T}{T_0}, \quad (8.6)$$

т.е. *при постоянном объёме давление газа пропорционально*

*абсолютной температуре.*

Формулы (8.5) и (8.6) представляют собой математические выражения законов Гей–Люссака.

**Закон Дальтона.** Пусть в некотором объёме находится смесь газов (например, воздух), имеющая давление  $p$ . Удалим из объёма все газы, кроме одного (например, азота). Тогда он займёт весь объём (смеси) и будет иметь давление  $p_1$ , называемое парциальным давлением первого газа.

*Парциальным давлением газа, входящего в газовую смесь, называется давление, которое имел бы этот газ, если бы он один занимал весь объём, предоставленной смеси.*

Вновь заполнив объём смесью газов, удалим затем из объёма все газы, кроме второго (например, кислорода). Тогда второй газ, заняв весь объём, приобретёт давление  $p_2$ , являющееся его парциальным давлением. Проведя аналогичные операции со всеми остальными газами смеси, определим парциальные давления третьего газа  $p_3$ , четвертого газа  $p_4$  и т.д.

В 1801 г. английский физик и химик *Дальтон* установил соотношение между давлением газовой смеси и парциальными давлениями входящих в неё газов, получившее название *закона Дальтона: давление газовой смеси равно сумме парциальных давлений входящих в неё газов:*

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \dots p_n. \quad (8.7)$$

**Закон Авогадро.** На основании опытов с различными газами итальянский учёный Авогадро в 1811 г. сформулировал следующий закон, названный его именем:

*при одинаковых температуре и давлении моли любых газов занимают одинаковые объёмы.*

При нормальных условиях, т.е. давлении  $1,0133 \cdot 10^5$  Па, температуре  $273,15$  К, их объём составляет  $0,022414 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$ .

## § 8.2. Уравнение Менделеева – Клапейрона

Французский физик Клапейрон в 1834 г. установил соотношение, описывающее процессы, при которых одновременно изменяются все три параметра состояния газа  $(P, V, T)$ .

Пусть состояние некоторой массы  $m$  газа характеризуется параметрами  $V_1, P_1$  и  $T_1$ . Переведём её в другое состояние, характеризующееся параметрами  $V_2, P_2$  и  $T_2$ . Этот процесс осуществим в два этапа:

1) изотермически ( $T_1 = const$ ) изменим, объём газа до значения  $V_2$ , при этом его давление станет равным  $p_1'$ ;

2) изохорически ( $V_2 = const$ ) изменим температуру до такого значения  $T_2$ , при котором давление окажется равным  $p_2$ .

Первый этап процесса описывается законом Бойля-Мариотта и поэтому

$$V_1 p_1 = V_2 p_1',$$

откуда 
$$p_1' = \frac{V_1 p_1}{V_2}.$$

Второй этап процесса описывается законом Гей-Люссака (8.6) и, следовательно,

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

Подставляя в последнюю формулу выражение  $p_1'$ , получим

$$\frac{V_1 p_1}{V_2 p_2} = \frac{T_1}{T_2},$$

откуда 
$$\frac{V_1 p_1}{T_1} = \frac{V_2 p_2}{T_2}.$$

Это значит, что для данной массы газа величина  $\frac{pV}{T}$  остаётся неизменной:

$$\frac{pV}{T} = B = const. \quad (8.8)$$

Выражение (8.8) называется уравнением (законом)

*Клапейрона.*

Некоторым недостатком уравнения Клапейрона является то обстоятельство, что постоянная величина  $B$  различна для различных газов. Для устранения этого недостатка Менделеев в 1875 г. несколько видоизменил закон Клапейрона, объединив его с законом Авогадро.

Рассмотрим для этой цели моль газа, обозначив его объём через  $V_M$ , называемый молярным. В этом случае уравнение Клапейрона примет вид

$$\frac{pV_M}{T} = B.$$

Согласно закону Авогадро, при одинаковых значениях  $p$  и  $T$  моли всех газов имеют одинаковое значение  $V_M$  и, следовательно, постоянная  $B$  будет одинаковой для всех газов. Обозначим это значение  $B$  через  $R$ , тогда

$$\frac{pV_M}{T} = R. \quad (8.9)$$

Постоянная  $R$  называется *универсальной газовой постоянной*. Из формулы (8.9) следует, что

$$pV_M = RT. \quad (8.10)$$

Это выражение называется *уравнением (законом) Клапейрона-Менделеева для моля газа*. Так как объём газа пропорционален его массе (при одинаковых  $p$  и  $T$ ), то

$$\frac{V_M}{V} = \frac{M}{m},$$

где  $M$  – молярная масса газа, а  $V$  – объём  $m$  массы этого газа.

Тогда,

$$V_M = V \frac{M}{m}.$$

Подставляя это выражение  $V_M$  в формулу (7.10), получим

$$pV \frac{M}{m} = RT,$$

$$pV = \frac{m}{M}RT. \quad (8.11)$$

Последнее выражение называется *уравнением (законом) Клапейрона – Менделеева для любой массы газа*. Из формулы (8.11) можно выразить плотность  $\rho$  газа:

$$\rho = \frac{m}{MV}RT,$$

но 
$$\rho = \frac{m}{V},$$

тогда 
$$p = \frac{\rho}{M}RT,$$

откуда 
$$\rho = \frac{pM}{RT}. \quad (8.12)$$

Численное значение универсальной газовой постоянной определим из формулы (8.9), полагая, что моль газа находится при нормальных условиях ( $p = 1,0133 \cdot 10^5$  Па,  $T = 273,15$  К,  $V_M = 0,022414 \frac{\text{м}^3}{\text{моль}}$ ):

$$R = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot 0,02241 \text{ м}^3 / \text{моль}}{273 \text{ К}} = 8,32 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль}).$$

Поскольку закон Клапейрона–Менделеева обобщает экспериментальные законы, то и сам он является экспериментальным законом.

### § 8.3. Основное уравнение кинетической теории идеального газа

С точки зрения молекулярно–кинетической теории находящийся в сосуде газ представляет собой совокупность множества хаотически движущихся молекул. В процессе этого движения молекулы газа ударяются о стенки сосуда. При каждом ударе молекула действует на стенку с некоторой, сравнительно небольшой силой, нормальной (перпендикулярной) к поверхности стенки. Ввиду крайней многочисленности молекул стенки сосуда испытывают как бы непрерывное действие некоторой, уже

сравнительно большой, нормально направленной силы.

Рассчитанная на единицу площади стенки, эта сила, очевидно, представит собой давление газа. Таким образом, давление газа обусловлено тепловым движением его молекул и проявляется благодаря ударам молекул о стенки сосуда.

Сила удара молекул зависит от скорости их движения, а, следовательно, и от кинетической энергии поступательного движения молекул. Поэтому *давление  $p$  газа должно являться функцией  $\varphi$  средней кинетической энергии поступательного движения его молекул  $\bar{W}$*  :

$$p = \varphi(\bar{W}) . \quad (8.13)$$

Основное уравнение кинетической теории идеального газа как раз и устанавливает зависимость между давлением газа и средней кинетической энергией поступательного движения его молекул, т.е. устанавливает конкретный вид функции  $\varphi$  . Основное уравнение было выведено (в современной форме) немецким физиком *Клаузиусом* в 50-х годах XIX в.

Прежде чем приступить к выводу этого уравнения, сделаем несколько упрощающих предположений относительно самого газа. Будем считать, что молекулы газа находятся в среднем настолько далеко друг от друга, что их размерами можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними, т.е. рассматривать молекулы как материальные точки. В таком случае можно пренебречь также и силами взаимодействия (сцепления и отталкивания) между молекулами. Исключение составляют моменты сближения молекул, соответствующие столкновениям между ними. При этом будем считать, что молекулы сталкиваются друг с другом и со стенками сосуда, в котором заключен газ, как *абсолютно упругие* шарики, изменяя только направление, но не величину скорости. Наконец, ввиду большого среднего расстояния между молекулами можно пренебречь числом взаимостолкновений молекул по сравнению с числом их ударов о стенки сосуда. Таким образом, наши упрощающие предположения о газе можно кратко сформулировать следующим образом:

1. Молекулы – упругие шарики пренебрежимо малого размера (материальные точки).

2. Силы сцепления между молекулами пренебрежимо малы.

3. Силы отталкивания между молекулами проявляются только в моменты взаимостолкновений последних.

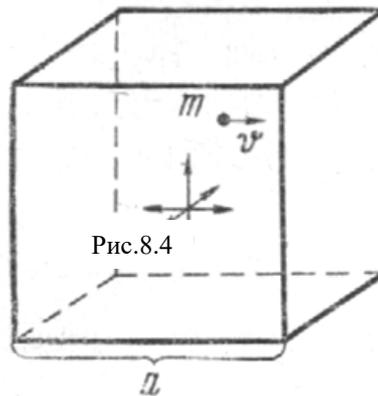


Рис.8.4

4. Число взаимостолкновений между молекулами пренебрежимо мало по сравнению с числом их ударов о стенки сосуда.

Газ, удовлетворяющий этим условиям, называется *идеальным*.

Таким образом, *идеальным газом называется такой воображаемый газ, молекулы которого представляют собой упругие материальные точки, не связанные друг с другом межмолекулярными силами сцепления.*

Здесь уместно поставить вопрос: не увели ли нас эти упрощающие предположения слишком далеко от действительности? Иными словами не будет ли беспредметным изучение идеального газа? Оказывается, что реальный газ в условиях, близких к нормальным, а также при низких давлениях и при высоких температурах близок по своим свойствам к идеальному газу. Таким образом, рассмотренные экспериментальные газовые законы справедливы, по существу, для идеального газа. Выведем основное уравнение для случая, когда газ находится в сосуде кубической формы. (Это делается только ради упрощения расчёта. Вообще же основное уравнение можно вывести для газа, находящегося в сосуде любой формы и даже при *отсутствии* всякого сосуда.)

Пусть в кубическом сосуде с ребром  $a$  находится идеальный газ, состоящий из  $N$  молекул; масса каждой молекулы  $m$ . Ввиду полной хаотичности движения молекул результат их действия на стенки сосуда будет таким же, как в случае, если бы  $1/3$  всех молекул двигалась прямолинейно между передней и задней

стенками сосуда,  $1/3$  между правой и левой и  $1/3$  между верхней и нижней (рис.8.4). Поэтому допустим, что число молекул, движущихся в каждом из трёх взаимно перпендикулярных (и перпендикулярных к соответствующим стенкам) направлений, равно  $N' = \frac{1}{3}N$ .

Проследим мысленно за одной из молекул, летящей со скоростью  $v$  в направлении правой стенки сосуда (см.рис.8.4). Долетев до стенки, молекула ударит в неё, отскочит назад, полетит к левой стенке, ударит в неё и т.д. Обозначим силу удара молекулы о стенку через  $\Delta f$ , а продолжительность времени удара — через  $\Delta t$ . Тогда импульс силы, сообщённый молекулой стенке при ударе, равен  $\Delta f \cdot \Delta t$ .

Согласно закону изменения количества движения, импульс силы равен изменению количества движения:

$$\Delta f \cdot \Delta t = m_g - (-m_g) = 2 m_g.$$

Знак минус показывает, что скорость при ударе изменяет направление на противоположное.

Молекула действует на правую стенку с силой  $\Delta f$  кратко- временно, только в моменты ударов; остальную и притом большую часть времени между ударами она не действует на эту стенку. Поэтому средняя сила  $\Delta \bar{f}$  действия молекулы на правую стенку за одну секунду значительно меньше фактической силы  $\Delta f$ . Очевидно, что импульс средней силы равен сумме импульсов всех сил  $\Delta f$ , действующих на стенку в течение одной секунды:

$$\Delta \bar{f} \cdot 1 = \Delta f \cdot \Delta t \cdot k,$$

где  $k$  — число ударов молекулы в правую стенку за одну секунду.

Число  $k$  равно перемещению молекулы за 1 с, делённому на перемещение  $2a$ , совершаемое ею между двумя последовательными ударами в правую стенку. Так как перемещение молекулы за одну секунду численно равно скорости  $g$ , то  $k = g / 2a$ . Тогда средняя сила

$$\Delta \bar{f} = \Delta f \cdot \Delta t \frac{g}{2a} = 2 m_g \frac{g}{2a} = \frac{m g^2}{a}.$$

Учитывая, что на правую стенку сосуда действуют и все другие ( $N'$ ) молекулы газа, найдем полную силу  $f$ , с которой газ

действует на правую стенку:

$$f = \sum_1^N \Delta f_i = \sum_1^N \frac{m g_i^2}{a} = \frac{m}{a} \sum_1^N g_i^2,$$

где  $g_1, g_2, g_3 \dots g_N$  – скорости молекул.

Разделим и умножим правую часть равенства на  $N'$ :

$$f = \frac{mN}{a} = \frac{1}{N} \sum_1^N g_i^2.$$

Нетрудно установить, что выражение  $\frac{1}{N} \sum_1^N g_i^2$  представляет собой квадрат *средней квадратичной скорости молекул*, которую мы обозначим через  $u$ . Тогда

$$f = \frac{mN' u^2}{a}$$

Разделим обе части последнего равенства на  $a^2$  и заменим  $N'$  на  $\frac{1}{3} N$ :

$$\frac{f}{a^2} = \frac{1}{3} \frac{mNu^2}{a^3}.$$

Но  $a^2 = S$  – площадь правой стенки сосуда, а  $a^3 = V$  – объём сосуда.

Тогда 
$$\frac{f}{S} = \frac{1}{3} \frac{mNu^2}{V}.$$

Очевидно, что  $f/S = p$  – давление газа на правую стенку, а  $N/V = n_0$  – число молекул в единице объёма газа. Поэтому

$$p = \frac{1}{3} m n_0 u^2. \quad (8.14)$$

Разделив и умножив правую часть этого равенства на 2, получим

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{m u^2}{2},$$

где  $m u^2 / 2 = \bar{w}$  – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы. Следовательно,

$$p = \frac{2}{3} n_0 \bar{w}. \quad (8.15)$$

Очевидно, что совершенно такие же выражения (8.14) и (8.15) получаются и для давления газа на каждую из остальных стенок сосуда.

Следовательно, формулы (8.14) и (8.15) дают искомое [формула (8.13)] выражение давления газа. Они представляют собой разновидности *основного уравнения кинетической теории идеального газа (уравнения Клаузиуса)*. Основное уравнение показывает, что *давление газа прямо пропорционально средней кинетической энергии поступательного движения молекул, содержащихся в единице объёма газа*.

#### § 8.4. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа

В предыдущем параграфе средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа была выражена через массу молекулы и среднюю квадратичную скорость:

$$\bar{W} = \frac{m\bar{u}^2}{2}.$$

Поскольку скорость молекулы зависит от температуры газа, то и средняя энергия молекулы должна зависеть от температуры. Важно получить выражение энергии через температуру газа, так как измерение температуры газа выполняется весьма просто, чего никак нельзя сказать о средней квадратичной скорости. С этой целью обе части основного уравнения (8.15) умножим на молярный объём газа  $V_M$ :

$$pV_M = \frac{2}{3}n_0\bar{W}V_M.$$

Так как  $n_0V_M = N_A$  (где  $N_A$  – постоянная Авагадро) то

$$pV_M = \frac{2}{3}N_A\bar{W}.$$

Но согласно уравнению Клайперона-Менделеева (8.10),

$$pV_M = RT.$$

Из двух последних формул следует, что

$$\frac{2}{3}N_A\bar{W} = RT,$$

откуда

$$\bar{W} = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T.$$

Обозначим  $R/N_A = k$ , тогда

$$\bar{W} = \frac{3}{2} kT. \quad (8.17)$$

Очевидно, что  $k$  – постоянная величина. Она называется *постоянной Больцмана*. Из формулы (8.17) следует, что *средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа пропорциональна абсолютной температуре и зависит только от неё*.

Численное значение постоянной Больцмана определим из формулы

$$k = \frac{R}{N_A} = \frac{8.32 \text{ Дж} / (\text{К} \cdot \text{моль})}{6,02 \cdot 10^{23} 1 / \text{моль}} = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}.$$

Подставим в формулу (8.15) вместо  $\bar{W}$  её выражение из формулы (8.17) и получим зависимость давления газа от температуры:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \frac{3}{2} kT = n_0 kT.$$

Из этого выражения находим, что

$$n_0 = \frac{p}{kT}. \quad (8.18)$$

Из формулы (8.18) видно, что *при одинаковых температуре и давлении все газы содержат в единице объёма одинаковое число молекул*. Число молекул, содержащееся в  $1 \text{ м}^3$  газа при нормальных условиях, называется *числом Лошмидта*.

Определим это число по формуле (18):

$$n_0 = \frac{1.013 \cdot 10^5 \text{ Па}}{1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К} \cdot 273 \text{ К}} = 2.69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Пользуясь формулой (8.17), подсчитаем среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы газа при нормальных условиях:

$$\bar{W} = \frac{3}{2} kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 = 5,7 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}.$$

## § 8.5. О числе степеней свободы. Внутренняя энергия газа

Молекулы идеального газа не взаимодействуют друг с другом и, следовательно, не обладают потенциальной энергией. Поэтому вся энергия молекул идеального газа состоит *только из кинетической энергии поступательного и вращательного движений*. Среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекулы мы определили в предыдущем параграфе [формула (8.17)]. Для учёта средней кинетической энергии вращательного движения молекулы необходимо ввести в рассмотрение понятие *числа степеней свободы тела*. *Числом степеней свободы тела называется число независимых координат, определяющих положение тела в пространстве*.

Поясним данное определение. Если тело перемещается в пространстве совершенно произвольно, то это перемещение всегда можно составить из шести одновременных независимых движений: трёх поступательных (вдоль трёх осей прямоугольной системы координат) и трёх вращательных (вокруг трёх взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр тяжести тела) (рис. 8.5).

Иными словами, положение тела в пространстве определяется в этом случае шестью независимыми координатами: тремя линейными ( $x, y, z$ ) и тремя угловыми ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). Следовательно, согласно определению, число степеней свободы произвольно движущегося в пространстве тела равно шести (три поступательных и три вращательных степени свободы). Если свобода движения тела ограничена, то его число степеней свободы меньше шести.

Например, тело движется только по плоскости, имея при этом возможность произвольного вращения (катящийся мяч).

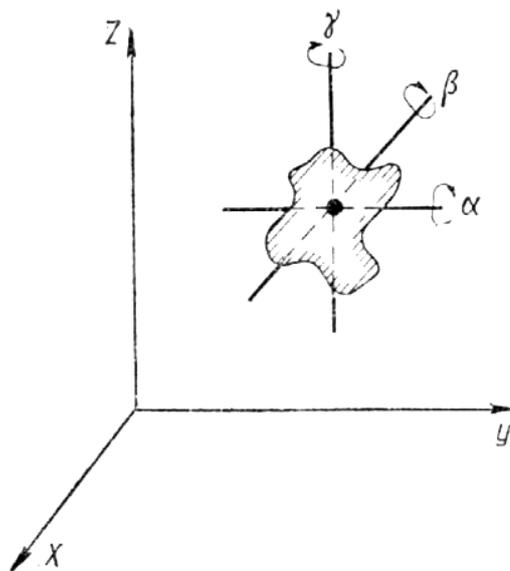


Рис.8.5

Тогда число его степеней свободы равно пяти (две поступательных и три вращательных). Железнодорожный вагон имеет одну степень свободы (поступательную), так как он движется только по линии. Колесо вагона имеет две степени свободы: одну поступательную (вместе с вагоном) и одну вращательную (вокруг горизонтальной оси).

Вернемся теперь к вопросу о кинетической энергии молекулы газа. Ввиду полной хаотичности движения молекул все виды их движений (и поступательные, и вращательные) одинаково возможны (*равновероятны*). Поэтому на *каждую степень свободы молекулы приходится в среднем одинаковое количество энергии (теорема Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы)*.

Поскольку молекулы движутся совершенно произвольно, они должны были бы иметь по шесть степеней свободы. Однако здесь надо принять во внимание следующее обстоятельство.

Молекулу одноатомного газа (например, *He*) можно представить как материальную точку, вращение которой вокруг собственных осей не изменяет её положения в пространстве. Значит, для определения положения одноатомной молекулы достаточно задать только её линейные координаты. Поэтому одноатомной молекуле следует приписать число степеней свободы, равное трём (поступательным). С физической точки зрения это обстоятельство можно пояснить так. Кинетическая энергия вращательного движения тела равна

$$W_{\text{к.вр}} = \frac{I\omega^2}{2},$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения,  $I$  – момент инерции тела.

Для материальной точки

$$I = mr^2,$$

где  $m$  – масса материальной точки,  $r$  – её расстояние от оси вращения.

Если материальная точка вращается вокруг своей оси, то  $r=0$ . Но тогда и  $I=0$  и  $W_{\text{к.вр.}}=0$ .

Следовательно, у одноатомной молекулы на вращательное

движение (на вращательные степени свободы) приходится бесконечно малая энергия, которой можно пренебречь. Строгое доказательство этого положения возможно только на основе квантовой механики.

Молекулу двухатомного газа (например,  $O_2$ ) можно представить как совокупность двух материальных точек атомов, жестко связанных между собой химическими связями (рис. 8.6, а). Вращение такой молекулы вокруг оси, проходящей через оба атома, не меняет положения молекулы в пространстве. С физической же точки зрения энергия, приходящаяся на вращение молекулы вокруг оси, проходящей через атомы, близка к нулю. Поэтому двухатомной молекуле следует, приписать пять степеней свободы (три поступательных и две вращательных).

Что касается трёхатомной молекулы (рис. 8.6, б), то она, очевидно, имеет все шесть степеней свободы (три поступательных и три вращательных). Столько же степеней свободы имеют и другие многоатомные (четырёхатомные, пятиатомные и т. д.) молекулы.

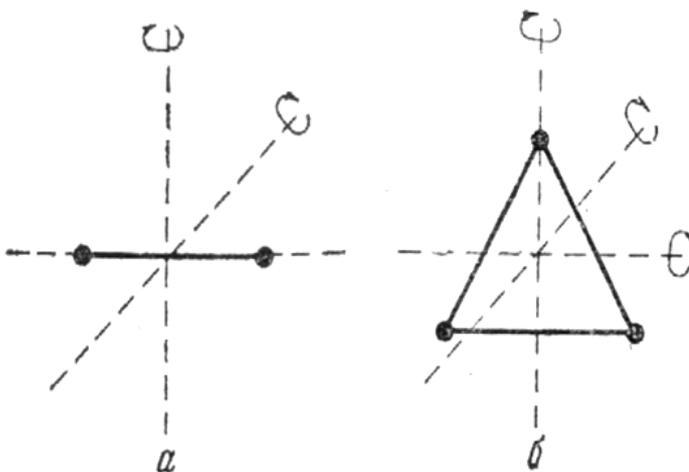


Рис.8.6

Для подсчёта средней кинетической энергии, приходящейся на одну степень свободы молекулы, воспользуемся формулой (8.17):

$$\bar{W} = \frac{3}{2} kT.$$

Так как эта энергия получена для одноатомной молекулы (как материальной точки), имеющей три степени свободы, то на одну степень свободы молекулы приходится энергия

$$W_0 = \frac{\bar{W}}{3} = \frac{1}{2} kT. \quad (8.18)$$

Тогда, согласно упомянутой теореме Больцмана, молекула,

имеющая  $i$  степеней свободы, будет обладать *полной* кинетической энергией

$$W = W_0 i$$

или

$$W = \frac{i}{2} kT \quad (8.19)$$

Следовательно, *полная кинетическая энергия молекулы газа пропорциональна его абсолютной температуре и зависит только от неё.*

Из формулы (8.19) вытекает физический смысл абсолютного нуля температуры: при  $T = 0$  будет и  $W = 0$ , т.е. при *абсолютном нуле прекращается движение молекул газа.*

Согласно формуле (8.19), одноатомная молекула ( $i = 3$ ) имеет полную энергию

$$W_1 = \frac{3}{2} kT,$$

двухатомная молекула ( $i = 5$ ) имеет полную энергию

$$W_2 = \frac{5}{2} kT,$$

трехатомная и многоатомная молекулы ( $i=6$ ) имеют полную энергию

$$W_3 = \frac{6}{2} kT = 3kT.$$

Тогда внутренняя энергия  $U$  некоторой массы газа равна произведению числа  $N$  молекул, содержащихся в этой массе, на полную кинетическую энергию одной молекулы:

$$U = NW = N \frac{i}{2} kT.$$

Так как для моля газа  $N=N_A$ , то для внутренней энергии моля получим (учитывая, что  $k = R/N_A$ )

$$U_M = N_A \frac{i}{2} kT = N_A \frac{i}{2} \frac{R}{N_A} T,$$

*т.е.* 
$$U_M = \frac{i}{2} RT. \quad (8.19')$$

Из формулы (8.19') легко получить удобное для практических расчетов выражение внутренней энергии  $U$  любой массы

$m$  газа, учитывая, что число молей этого газа равно  $m/M$ , где  $M$  – молярная масса, тогда

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT. \quad (8.19'')$$

Следовательно, *внутренняя энергия любой массы газа пропорциональна числу степеней свободы молекулы, абсолютной температуре и массе газа.*

Несмотря на то, что здесь рассматривался идеальный газ, мы уже отказались от одного упрощающего предположения, приписанного ему. Молекулы многоатомных газов обсуждались здесь не как материальные точки, а как тела – системы материальных точек. Тем самым учитывалась индивидуальность газа, допускалось их некоторое разнообразие.

## § 8.6. Теплоёмкости газа. Физический смысл универсальной газовой постоянной

Помимо удельной теплоёмкости  $c$  вещества введём понятие молярной теплоёмкости  $C_M$ . *Молярной теплоёмкостью называется количество теплоты, необходимое для нагревания моля вещества на 1 К.* Из определения удельной теплоёмкости следует, что она связана с молярной соотношением

$$C_M = M \cdot c,$$

где  $M$  – молярная масса вещества. Единицей измерения  $C_M$  является 1 Дж/(К·моль).

Величина теплоёмкости газа существенно зависит от того, при каких условиях он нагревается: при постоянном объёме или при постоянном давлении. В первом случае все сообщённое газу тепло идет только на увеличение внутренней энергии газа (так как объём газа не изменяется). Во втором случае требуется ещё дополнительное количество тепла на совершение работы расширения газа (так как неизменность давления обеспечивается увеличением объёма газа). Поэтому у газа различают две молярные (и удельные) теплоёмкости: теплоёмкость при постоянном объёме  $C_V$  и теплоёмкость при постоянном давлении  $C_P$ . Очевидно, что  $C_P > C_V$ . Ознакомимся более подробно с этими теплоёмкостями.

**1. Теплоёмкость при постоянном объёме.** *Молярной теплоёмкостью при постоянном объёме называется количество теплоты, необходимое для нагревания моля газа на 1К при постоянном объёме.* Так как в данном случае всё тепло идет на увеличение внутренней энергии газа, то молярную теплоёмкость при постоянном объёме можно определить как отношение приращения внутренней энергии моля газа  $\Delta U_M$  к изменению температуры  $\Delta T$ , вызвавшему это приращение:

$$C_V = \frac{\Delta U_M}{\Delta T}. \quad (8.20)$$

Но согласно формуле (8.19'),

$$\Delta U_M = \frac{i}{2} R \Delta T.$$

Поэтому

$$C_V = \frac{i}{2} R. \quad (8.20')$$

**2. Теплоёмкость при постоянном давлении.** *Молярной теплоёмкостью при постоянном давлении называется количество теплоты, необходимое для нагревания моля газа на 1К при постоянном давлении.* Как уже отмечалось, на нагревание моля газа расходуется дополнительное количество тепла, равное работе  $A$  по расширению газа. Поэтому  $C_P > C_V$  на величину работы  $A$

$$C_P = C_V + A. \quad (8.21)$$

Для подсчёта этой работы заключим моль газа, имеющий температуру  $T$ , объём  $V_M$  и давление  $p$ , в цилиндр под поршень площадью  $S$ , а затем нагреем его на 1 К при  $p = const$  (рис. 8.7).

Расширяясь, газ поднимет поршень на высоту  $\Delta h$  и займет объём  $V_M$ , совершив при этом работу

$$A = pS\Delta h,$$

где  $pS$  – сила, поднимающая поршень;  $S \cdot \Delta h = \Delta V$  – увеличение объёма газа. Но  $\Delta V = V'_M - V_M$ , поэтому

$$A = p \cdot \Delta V = p(V'_M - V_M) = pV'_M - pV_M. \quad (8.21')$$

Согласно уравнению Клапейрона – Менделеева,  $pV'_M = R(T + 1)$ , а

$$pV_M = RT,$$

тогда

$$A = R(T + 1) - RT = RT + R - RT = R.$$

Итак,

$$A = R \quad (8.22)$$

Формула (8.22) позволяет установить физический смысл молярной газовой постоянной: *универсальная газовая постоянная численно равна работе по расширению моля идеального газа при нагревании его на 1К (при постоянном давлении).*

Сопоставляя формулы (8.21) и (8.22), получим соотношение

$$C_p = C_v + R, \quad (8.23)$$

называемое *уравнением Майера*. Подставляя в это уравнение  $C_v$  из формулы (8.20'), найдем выражение  $C_p$ :

$$C_p = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (8.24)$$

Обозначим отношение теплоёмкостей буквой  $\gamma$ , тогда из формул (8.20') и (8.24) Получим

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} \quad (8.25)$$

Очевидно, что  $\gamma > 1$  и зависит только от сорта газа (числа степеней свободы). Наряду с теплоёмкостями  $\gamma$  является важной тепловой характеристикой газа.

## § 8.7. Скорость поступательного движения молекул газа.

### Распределение числа молекул по скоростям

Для нахождения средней квадратичной скорости поступа-

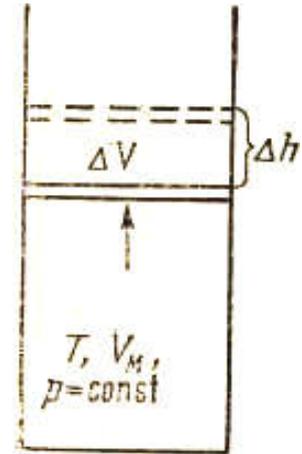


рис.8.7

тельного движения газовых молекул напишем полученные ранее выражения средней кинетической энергии поступательного движения молекул:

$$\overline{W} = \frac{mu^2}{2} \quad \text{и} \quad \overline{W} = \frac{3}{2}kT.$$

Приравняв правые части этих выражений, получим

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

откуда

$$u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{N_A m}},$$

но  $N_A \cdot m = M$  (молярной массе газа), поэтому

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (8.26)$$

т.е. для данного газа средняя квадратичная скорость молекул пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры и зависит только от неё. Формула (8.26) выражает среднюю квадратичную скорость молекул через легко измеряемую макроскопическую характеристику газа – температуру. Подсчитаем, например, среднюю квадратичную скорость молекул кислорода при температуре 0°C. Так как  $T = 273 \text{ K}$ , а  $M = 0,032 \text{ кг/моль}$ , то

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.32 \text{ Дж/(Кмоль)} \cdot 273 \text{ K}}{0,032 \text{ кг/моль}}} \approx 460 \text{ м/с}.$$

Таким образом, при комнатной температуре молекулы газа движутся со скоростями, близкими к скорости полета снаряда.

Средняя квадратичная скорость – лишь *статистическая* характеристика движения молекул, полученная путём усреднения различных значений скорости множества молекул. В действительности же молекулы движутся с различными скоростями  $\vartheta$  даже при некоторой заданной температуре  $T$ . Разобьём весь диапазон этих скоростей на малые интервалы, равные  $\Delta\vartheta$ . Тогда на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул  $\Delta N$  (имеющих скорость, заключенную в этом интервале). Очевидно, что отношение  $\Delta N / \Delta\vartheta$  показывает,

сколько молекул приходится на каждый единичный интервал скорости, иными словами, каково распределение числа молекул по скоростям;  $\Delta N / \Delta \mathcal{G}$  зависит от скорости и называется *функцией распределения числа молекул по скоростям*. Эту функцию распределения впервые определил английский физик *Максвелл* теоретическим путём – на основе теории вероятностей. Максвелл-ловская функция распределения выражается следующей формулой, называемой законом Максвелла:

$$\frac{\Delta N}{\Delta \mathcal{G}} = N \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{M}{2RT} \right)^{3/2} e^{-M\mathcal{G}^2 / 2RT} \cdot \mathcal{G}^2, \quad (8.27)$$

где  $N$  – общее число молекул газа,  $M$  – молярная масса газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $e$  – основание натуральных логарифмов.

Из математического анализа закона Максвелла следует, что функция распределения стремится к нулю при  $\mathcal{G} \rightarrow 0$  и при  $\mathcal{G} \rightarrow \infty$ , а при

$$\mathcal{G} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

имеет максимум. Обозначим эту скорость буквой  $\mathcal{G}_B$  и назовем *наиболее вероятной скоростью*. *Наиболее вероятной называется скорость, вблизи которой на единичный интервал приходится наибольшее число молекул*; она рассчитывается по формуле

$$\mathcal{G}_B = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (8.28)$$

Из анализа закона Максвелла (8.27) следует, что графически он представляется кривой линией, исходящей из начала координат, достигающей максимума при  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_B$  и затем асимптотически приближающейся к оси абсцисс (рис. 8.8).

$\Delta \mathcal{G}, \text{ м/с}$	$\Delta N$	$\Delta N / N\%$
0–100	14 000	1,4
100–200	81000	8,1
200–300	165	16,5
300–400	214	21,4
400–500	206	20,6
500–600	151	15,1
600–700	92 000	9,2
700–800	48 000	4,8
800–900	20 000	2,0
900–	6 000	0,6
1000	3 000	0,3
Всего	$10^6$	100

График наглядно показывает, что молекул с малыми и большими скоростями мало и что большинство молекул имеют скорости, близкие к наиболее вероятной скорости. Из закона Максвелла можно получить выражение для средней арифметической скорости  $\bar{v}$ :

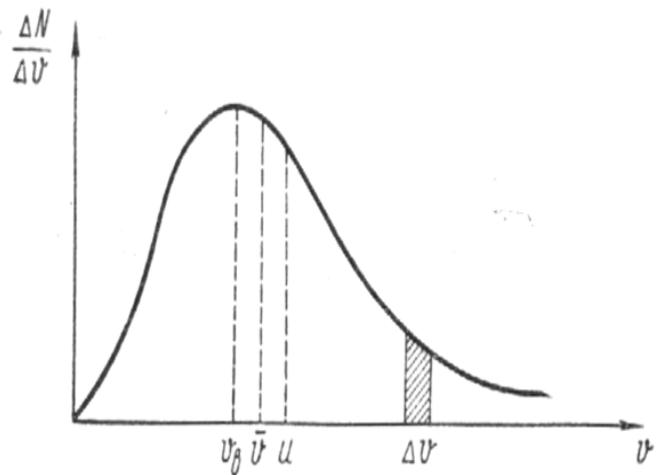


рис.8.8

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad (8.29)$$

Формулы (8.26), (8.28) и (8.29) показывают, что скорости  $u$ ,  $\bar{v}$ ,  $v_0$  различаются между собой только численными коэффициентами и  $u > \bar{v} > v_0$ .

Количественное соотношение между ними таково:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &\approx 0.92u \\ v_0 &\approx 0.82u \end{aligned} \right\} \quad (8.30)$$

В нашем примере с кислородом при температуре  $0^\circ\text{C}$  оказалось, что  $u=460$  м/с. Тогда по формулам (8.30) получим  $\bar{v} = 423$  м/с и  $v_0=377$  м/с.

Отметим на оси абсцисс (рис. 8.8) один интервал скоростей  $\Delta v$  и проведем ординаты его границ. Площадь очень узкого (заштрихованного) прямоугольника равна  $\Delta v \frac{\Delta N}{\Delta v} = \Delta N$ , т.е. числу молекул, имеющих скорость в интервале  $\Delta v$ . Следовательно, площадь, заключенная между всей кривой распределения и осью абсцисс, равна общему числу молекул газа  $N$ .

При изменении температуры газа изменяются скорости движения всех молекул, а следовательно, и наиболее вероятная скорость. Поэтому максимум кривой будет смещаться вправо (при повышении температуры) или

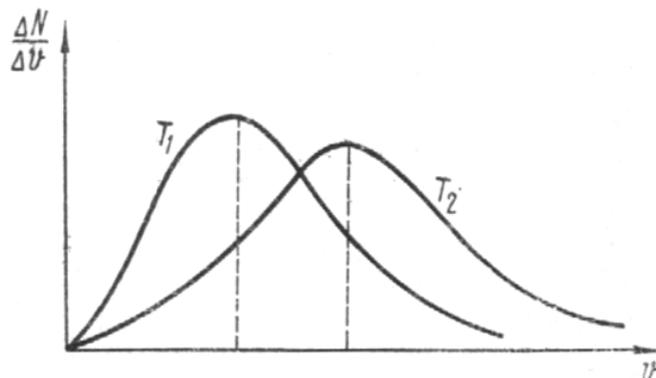


Рис.8.9

влево (при понижении температуры). Однако площадь, ограниченная кривой, останется неизменной, так как общее число молекул газа не зависит от температуры. В связи с этим при повышении температуры кривая распределения будет растягиваться и понижаться, а при понижении температуры, наоборот, — сужаться и повышаться, как это показано на рис. 8.9.

### § 8.8. Средняя длина свободного пробега молекул

Ввиду хаотичности теплового движения траектория молекул представляет собой ломаную линию, похожую на траекторию броуновской частицы. Изломы траектории соответствуют столкновениям молекул друг с другом. Изобразим путь, пройденный некоторой молекулой за одну секунду (рис. 8.10).

Назовем *длиной свободного пробега молекулы*  $\bar{\lambda}$  путь, проходимый ею между двумя последовательными столкновениями. Длина свободного пробега всё время меняется.

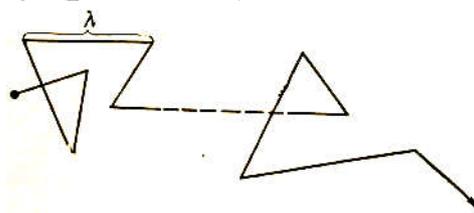


Рис.8.10

Поэтому следует говорить о *средней длине свободного пробега*  $\bar{\lambda}$  как о *среднем* пути, проходимом молекулой между двумя последовательными столкновениями. Очевидно, что для определения  $\bar{\lambda}$  достаточно разделить весь путь, пройденный молекулой за секунду и численно равный её средней скорости  $\bar{v}$ , на среднее число столкновений  $\bar{z}$ , испытываемых молекулой за

секунду:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\mathcal{G}}}{\bar{z}} \quad (8.31)$$

Для определения  $\bar{z}$  учтём размер молекул, рассматривая их как шарики радиусом  $r$  (рис. 8.11). Возьмём мысленно под наблюдение одну из молекул (крайнюю слева на рисунке) и изобразим путь, пройденный ею за секунду.

Остальные молекулы пока считаем неподвижными. Очевидно, что движущаяся молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых лежат внутри ломаного цилиндра радиусом  $2r$  (осью цилиндра является траектория молекулы).

Следовательно, среднее число столкновений  $\bar{z}$  за секунду равно числу молекул  $N$  в объёме  $V$  ломаного цилиндра:

$$\bar{z} = N, \text{ или } \bar{z} = n_0 V,$$

где  $n_0$  – число молекул в единице объёма.

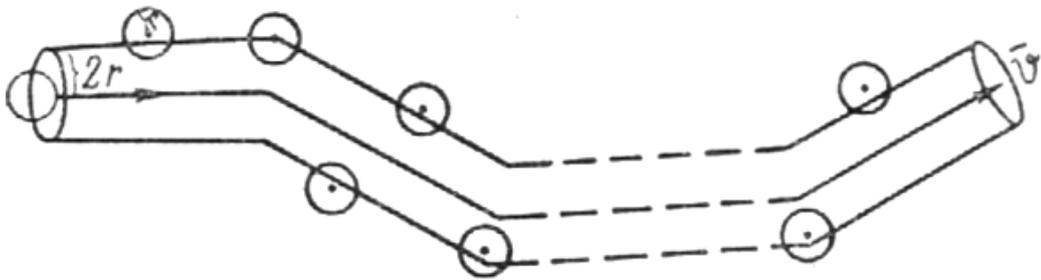


Рис.8.11

Объём ломаного цилиндра можно с пренебрежимо малой ошибкой приравнять к объёму спрямленного цилиндра высотой  $\bar{\mathcal{G}}$  и площадью основания  $\pi(2r)^2$ .

Поэтому 
$$\bar{z} = 4\pi r^2 n_0 \bar{\mathcal{G}}. \quad (8.32)$$

В этом выводе мы полагали, что все молекулы, кроме взятой под наблюдение, неподвижны. В действительности они тоже движутся. Поэтому, как показывает более строгий расчёт, число столкновений оказывается в  $\sqrt{2}$  раз больше выведенного нами:

$$\bar{z} = 4\sqrt{2}\pi r^2 n_0 \bar{g} . \quad (8.32')$$

Согласно (8.31) и (8.32') получаем

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi r^2 n_0 \bar{g}} . \quad (8.33)$$

Отсюда видно, что  $\bar{\lambda}$  не зависит от температуры. Опыт же показывает, что  $\bar{\lambda}$  несколько возрастает с повышением температуры. Это объясняется тем, что с повышением температуры увеличивается скорость молекул, благодаря чему сталкивающиеся молекулы могут ближе подходить друг к другу (преодолевая силы межмолекулярного отталкивания). Таким образом, с повышением температуры уменьшается радиус шарообразной модели молекулы, а вместе с ним уменьшаются объём ломаного цилиндра (рис. 8.11) и число столкновений  $\bar{z}$ .

Так как  $n_0$  пропорционально давлению газа  $p$ , а давление в свою очередь пропорционально плотности газа  $\rho$ , то, согласно формуле (8.33), средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна давлению газа или его плотности. Поэтому

$$\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_{23}} = \frac{n_{01}}{n_{02}} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} . \quad (8.34)$$

Подсчитаем значения  $\bar{z}$  и  $\bar{\lambda}$  для газа, находящегося при нормальных условиях.

Полагая  $r = 0,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ ,  $n_0 = 2,7 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ ,  $\bar{g} = 5 \cdot 10^2 \text{ м/с}$

Найдем по формуле (8.32)

$$\bar{z} = 4\sqrt{2}\pi(0,2 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 2,7 \cdot 10^{25} \cdot 5 \cdot 10^2 \approx 10^{10} (\text{с}^{-1}) .$$

Тогда по формуле (8.31) получим

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{g}}{z} = \frac{5 \cdot 10^2}{10^{10}} \approx 5 \cdot 10^{-8} \text{ м} .$$

По мере понижения давления газа средняя длина свободного пробега его молекул возрастает и при сильном разрежении, например при  $p = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ Па}$  достигнет нескольких метров. В самом деле, применяя формулу (8.34), получим

$$\frac{5 \cdot 10^{-8}}{\bar{\lambda}_2} = \frac{1.33 \cdot 10^{-3}}{1.013 \cdot 10^5}$$

Откуда  $\bar{\lambda} = 3.8 \text{ м}$ .

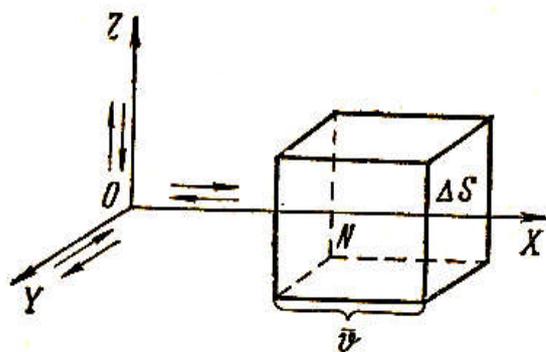
### § 8.9. Явления переноса в газах. Уравнение переноса

Хаотическое движение газовых молекул ведёт к непрерывному перемешиванию газа. С этим связан ряд следующих важных явлений, происходящих в газах. К ним относится диффузия – явление перемешивания двух различных газов, находящихся в соприкосновении, или выравниваний с течением времени плотности газа, если в начальный момент плотность была не одинакова по объёму; теплопроводность – явление выравнивания температуры за счёт переноса молекулы своей энергии; внутреннее трение или вязкость – свойство газа оказывать сопротивление перемещению одних слоёв относительно других под действием внешних сил.

Все названные ранее явления обусловлены одной причиной – *переносом* молекулами газа (в процессе хаотического движения) своих физических характеристик: массы (диффузия), или энергии (теплопроводность), или количества движения (внутреннее трение). Поэтому механизм всех этих явлений одинаков и все они объединены общим названием явлений переноса.

Исходя из представлений молекулярно–кинетической теории выведем общее для явлений переноса уравнение переноса. С этой целью определим прежде всего количество молекул, переходящее за промежуток времени  $\Delta t$  через некоторую воображаемую площадку  $\Delta S$ , помещённую в газе (рис. 8.12).

Ориентируем ось  $Ox$  перпендикулярно площадке  $\Delta S$ . Ввиду хаотичности движения молекул допустим, что вдоль этой оси движется  $1/3$  часть всех молекул:  $1/6$  часть – слева направо и  $1/6$  часть – справа налево. Тогда за



единицу времени через площадку  $\Delta S$  перейдёт слева направо 1/6 часть всех молекул, находящихся в объёме прямо-угольного параллелепипеда с основанием  $\Delta S$  и высотой, равной средней скорости движения молекул  $\bar{g}$ , т.е.  $1/6 n_0 \Delta S \bar{g}$ , где  $n_0$  – число молекул в единице объёма газа (концентрация молекул). В таком случае число молекул  $N$ , переходящих через площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$  в одном направлении, выразится формулой

Рис.8.12

$$N = \frac{1}{6} n_0 \bar{g} \cdot \Delta S \cdot \Delta t .$$

Эти молекулы переносят через площадку  $\Delta S$  и значения своих физических характеристик (массу, энергию, количество движения и т.п.). Рассматривая общий механизм переноса, не будем пока конкретизировать, какую именно физическую характеристику переносят молекулы, и обозначим её буквой  $\varphi$ . Тогда количество физической характеристики, перенесённое молекулами в одном направлении через площадку  $\Delta S$  за время  $\Delta t$

$$N\varphi = \frac{1}{6} (n_0 \varphi) \bar{g} \cdot \Delta S \cdot \Delta t . \quad (8.35)$$

Очевидно, что такое же количество будет перенесено и в обратном направлении.

Предположим теперь, что рассматриваемый газ неоднороден по своим свойствам, т.е. концентрация  $n_0$  его молекул различна в разных местах объёма газа и сами молекулы имеют неодинаковые значения физической величины  $\varphi$ . Тогда количество физической величины  $n_0 \varphi$  содержащейся в единице объёма газа, будет различным в разных местах объёма газа. Пусть количество  $n_0 \varphi$  убывает в положительном направлении  $OX$ , будучи равным  $(n_0 \varphi)_1$  слева от площадки  $\Delta S$  и  $(n_0 \varphi)_2$  – справа от нее. В этом случае имеет место *преимущественный* перенос физической величины  $N\varphi$  через площадку  $\Delta S$  слева направо; согласно формуле (8.35) он равен

$$\Delta(N\varphi) = (N\varphi)_1 - (N\varphi)_2 = \frac{1}{6} [(n_0 \varphi)_1 - (n_0 \varphi)_2] \bar{g} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \quad (8.36)$$

Теперь остаётся выяснить, исходя из физических соображений, на каком расстоянии от площадки  $\Delta S$  следует взять значения  $n_0\varphi$ . Обмен значениями  $\varphi$  и изменение концентрации происходят только при взаимостолкновениях молекул, т.е. на расстоянии  $\bar{\lambda}$ , равном средней длине свободного пробега молекул. Поэтому можно положить, что значения величины  $n_0\varphi$  сохраняются неизменными на расстоянии  $\bar{\lambda}$  влево и вправо от  $\Delta S$ . На этих расстояниях и будем брать значения  $n_0\varphi$  (рис. 8.13).

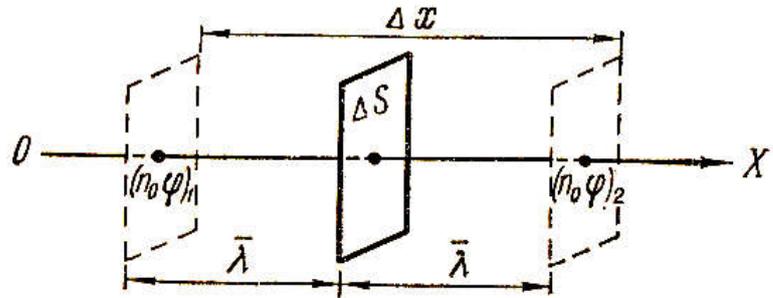


Рис.8.13

Умножив и разделив на  $2\bar{\lambda}$  правую часть формулы (8.36), получим

$$\Delta(N_\varphi) = \frac{1}{3} \frac{(n_0\varphi)_1 - (n_0\varphi)_2}{2\bar{\lambda}} \bar{\lambda} \cdot \bar{g} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \quad (8.37)$$

Как видно на рис. 8.13, отношение  $\frac{(n_0\varphi)_1 - (n_0\varphi)_2}{2\bar{\lambda}}$  представляет собой *градиент* величины  $n_0\varphi$ , который мы условились обозначать символом  $\frac{\Delta(n_0\varphi)}{\Delta x}$ .

Тогда формула (8.37) примет вид

$$\Delta(N_\varphi) = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} \frac{\Delta(n_0\varphi)}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \quad (8.38)$$

Знак минус обусловлен тем, что перенос физической величины происходит в направлении, противоположном градиенту ( $\text{grad}\varphi$  направлен справа налево, а перенос  $\varphi$  – слева направо).

Формула (8.38) называется *уравнением переноса*. На его основе рассмотрим теперь конкретные явления переноса: диффузию, теплопроводность и внутреннее трение.

## § 8.10. Диффузия

Пусть в некотором объёме газа имеет место неоднородность в отношении плотности: плотность  $\rho$  убывает в направлении  $OX$  (рис. 8.14). Это может быть, например, в случае, когда в левой части объёма находится источник  $O$  газа (испаряющаяся жидкость).

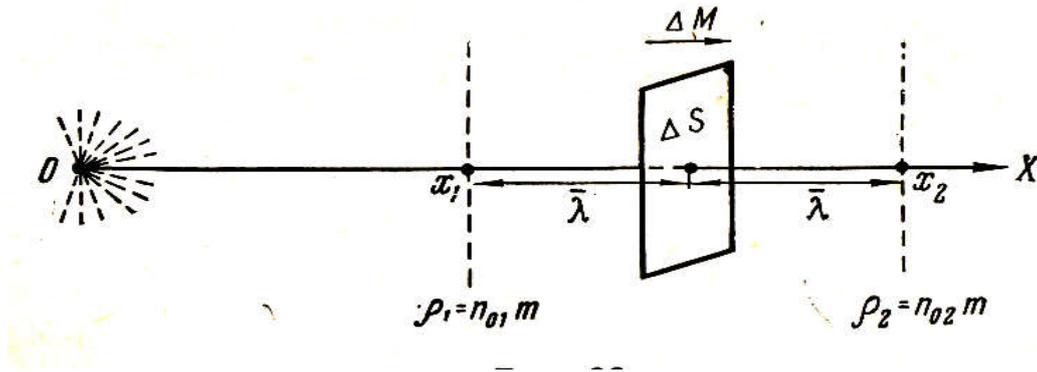


Рис.8.14

Обозначим через  $\rho_1$  и  $\rho_2$  значения плотности на расстояниях  $\bar{\lambda}$  влево и вправо от  $\Delta S$ . Тогда  $\rho_1 > \rho_2$ . Так как

$$\rho = n_0 m,$$

где  $m$  – масса молекулы, одинаковая для всех молекул газа, то  $n_{01} > n_{02}$ , т.е. концентрация молекул убывает в направлении  $OX$  вместе с плотностью.

Применяя уравнение переноса (8.38), заметим, что в нашем случае переносимой физической характеристикой является масса молекулы, т.е.  $\varphi = m$ .

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} n_0 \varphi = n m = \rho_0 \\ \Delta(N_\varphi) = \Delta(N_m) = \Delta M \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

где  $\Delta M$  – масса газа, переносимая путем диффузии за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную направлению убывания плотности. Подставляя выражения (8.39) в уравнение переноса (8.38), получим

$$\Delta M = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t. \quad (8.40)$$

Обозначив

$$\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} = D, \quad (8.41)$$

напишем

$$\Delta M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t. \quad (8.42)$$

Откуда следует, что масса газа  $\Delta M$ , переносимая благодаря диффузии через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную к направлению  $Ox$ , в котором убывает плотность, пропорциональна размеру этой площадки, промежутку времени  $\Delta t$  переноса и градиенту плотности  $\Delta \rho / \Delta x$ . Формула (8.42) называется уравнением диффузии, или законом Фика.

Коэффициент пропорциональности  $D$  называется коэффициентом диффузии. Полагая в формуле (8.42)  $\Delta S = 1 \text{ м}^2$ ,  $\Delta t = 1 \text{ с}$  и

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta x} = -1 \text{ кг} / \text{м}^4$$

получим  $\Delta M = D$ , т.е. коэффициент диффузии численно равен массе газа, переносимой через площадку в  $1 \text{ м}^2$  за  $1 \text{ с}$  при градиенте плотности в  $1 \text{ кг} / \text{м}^4$ . Из формул (8.41) и (8.42) следует, что коэффициент диффузии измеряется в  $\text{м}^2 / \text{с}$ .

Поскольку, как было установлено ранее,

$$\bar{\lambda} \sim \frac{1}{p}, \quad \text{а} \quad \bar{g} \sim \sqrt{\frac{T}{M}},$$

формула (8.41) показывает, что коэффициент диффузии зависит от сорта газа ( $M$ ) и его состояния ( $p$  и  $T$ ); он пропорционален квадратному корню из абсолютной температуры газа и обратно пропорционален давлению газа и квадратному корню из молярной массы. Чтобы получить представление о порядке величины коэффициента диффузии подсчитаем его по формуле (8.41) для кислорода при нормальных условиях, принимая  $\bar{\lambda} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ ,  $\bar{g} = 5 \cdot 10^2 \text{ м} / \text{с}$ .

Тогда

$$D = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} = \frac{5}{3} \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^2 \approx 8 \cdot 10^{-6} (\text{м}^2 / \text{с})$$

что соответствует опытным данным по определению коэффициента диффузии.

Диффузионные процессы играют весьма важную роль в природе. Достаточно указать на то, что дыхание осуществляется путем диффузии кислорода из внешней среды внутрь организма сквозь его покров, у человека и животных – через лёгкие, растений – через листья.

Диффузия является основным механизмом, обеспечивающим газообмен между почвенным и атмосферным воздухом, т.е. вынос углекислого газа из почвы в атмосферу и перенос кислорода в обратном направлении.

### § 8.11. Теплопроводность

Пусть в некотором объёме газа температура  $T$  убывает в направлении  $OX$  (рис. 8.15). Это может иметь место, например, в случае, когда в левой части  $O$  объёма находится нагреватель. Обозначим через  $T_1$  и  $T_2$  значения температуры на расстояниях  $\bar{\lambda}$  от площадки  $\Delta S$ . Тогда  $T_1 > T_2$ . Так как кинетическая энергия газовой молекулы

$$W = \frac{i}{2} kT$$

то  $W_1 > W_2$ , т.е. энергия молекул, находящихся слева от  $\Delta S$ , больше энергии молекул, находящихся справа от  $\Delta S$ . Поэтому в направлении убывания температуры будет происходить преимущественный перенос энергии, а следовательно, и количества теплоты  $\Delta Q$ , поскольку внутренняя энергия газа складывается из кинетической энергии его молекул.

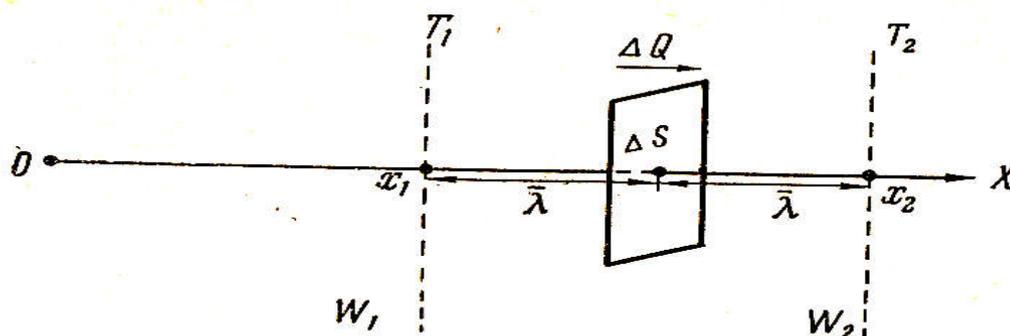


Рис.8.15

Применяя уравнение переноса (8.38), заметим, что в данном случае переносимой физической характеристикой является энергия молекулы т.е.  $\varphi = W$ . Тогда, поскольку концентрацию молекул  $n_0$  можно считать одинаковой во всём объёме газа,

$$\Delta(n_0\varphi) = \Delta(n_0W) = \Delta\left(\frac{i}{2}kT\right) = n_0 \frac{i}{2}k \cdot \Delta T, \quad (8.43)$$

где  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Кроме того, очевидно, что

$$\Delta(N\varphi) = \Delta(NW) = \Delta Q, \quad (8.44)$$

где  $\Delta Q$  – количество теплоты (внутренней энергии), переносимое за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$  перпендикулярную направлению убывания температуры. Подставляя выражения (8.43) и (8.44) в уравнение переноса (8.38), получим

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} n_0 \frac{i}{2} k \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t.$$

Умножая и деля правую часть этого равенства на массу молекулы  $m$  и учитывая, что  $k=R/N_A$ , напомним

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} \frac{n_0 m}{N_A m} \frac{i}{2} R \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t,$$

Так как

$$n_0 m = \rho, \quad N_A m = M \quad \text{и} \quad \frac{i}{2} R = C_V,$$

где  $\rho$  – плотность газа,  $M$  – молярная масса,  $C_V$  – молярная теплоёмкость при постоянном объёме, то последнее равенство примет вид

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} \rho \frac{C_V}{M} \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t.$$

Но

$$\frac{C_V}{M} = c_V$$

где  $c_V$  – удельная теплоёмкость газа при постоянном объёме. Поэтому окончательно получим

$$\Delta Q = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{\mathcal{G}} p c_V \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t. \quad (8.45)$$

Обозначив

$$\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{\mathcal{G}} p c_V = x, \quad (8.46)$$

найдем

$$\Delta Q = -x \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t. \quad (8.47)$$

Отсюда следует, что количество теплоты  $\Delta Q$ , переносимое через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную направлению  $OX$ , в котором убывает температура, пропорционально размеру этой площадки, промежутку времени  $\Delta t$  переноса и градиенту температуры  $\Delta T/\Delta x$ .

Формула (8.47) называется уравнением теплопроводности, или законом Фурье.

Коэффициент пропорциональности  $x$  называется коэффициентом теплопроводности. Полагая в формуле (8.47)  $\Delta S = 1 \text{ м}^2$ ,  $\Delta t = 1 \text{ с}$  и  $\Delta T / \Delta x = -1 \text{ К/м}$ , получим

$$\Delta Q = \chi$$

т.е. коэффициент теплопроводности численно равен количеству теплоты, переносимому через площадку в  $1 \text{ м}^2$  за  $1 \text{ с}$  при градиенте температуры в  $1 \text{ К/м}$ . Из формул (8.46) и (8.47) следует, что коэффициент теплопроводности измеряется в  $\text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})$

Чтобы получить представление о порядке величины коэффициента теплопроводности, подсчитаем его по формуле (8.46) для кислорода при нормальных условиях, принимая

$$\bar{\lambda} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}, \quad \bar{\mathcal{G}} = 5 \cdot 10^2 \text{ м/с}, \quad p = 143 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$$

$$c_V = \frac{i}{2M} R = \frac{5}{2 \cdot 0.032} \cdot 8.32 \approx 650 [\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})].$$

Тогда

$$\chi = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{\mathcal{G}} p c_V = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 143 \cdot 10^{-2} \cdot 650 \approx 8 \cdot 10^{-3} [\text{Дж}/(\text{м} \cdot \text{с} \cdot \text{К})],$$

что соответствует опытным данным по определению коэффициента теплопроводности.

Поскольку  $\bar{\lambda} \sim \frac{1}{p}$ , а  $\rho \sim p$  то произведение  $\bar{\lambda}\rho$  не зависит от давления. Поэтому, согласно формуле (8.46), коэффициент теплопроводности не зависит от давления. Опыт подтвердил этот кажущийся странным вывод.

Следует, однако, иметь в виду, что у сильно разреженных газов, заключенных в сосуд, коэффициент теплопроводности может оказаться зависящим от давления.

Будем разрезать газ, находящийся, например, в кубическом сосуде с ребром  $a$  (рис. 8.16). При этом  $\bar{\lambda}$  будет увеличиваться, а  $\rho$  — уменьшаться. Поэтому произведение  $\bar{\lambda}\rho$ , а следовательно, и  $\chi$  останутся постоянными.

Понизим давление до такой степени, что  $\bar{\lambda}$  станет равной  $a$ .

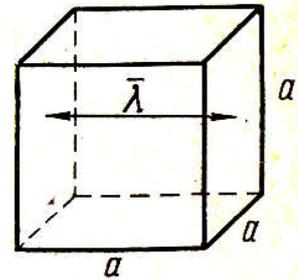


Рис.8.16

Тогда при дальнейшем разрежении  $\rho$  будет уменьшаться, а  $\bar{\lambda}$  уже не сможет увеличиваться — не позволят стенки сосуда. Поэтому произведение  $\bar{\lambda}\rho$ , а следовательно, и  $\chi$  будут теперь уменьшаться вместе с уменьшением давления. Следовательно, коэффициент теплопроводности пропорционален давлению, если средняя длина свободного пробега молекул газа превышает размер сосуда. Итак, при  $\bar{\lambda} \leq a$   $\chi$  не зависит от  $p$ , при  $\bar{\lambda} > a$   $\chi \sim p$ .

Очевидно, что степень разрежения, при которой  $\chi$  начинает зависеть от давления, определяется размером сосуда: чем больше размер сосуда, тем меньше станет давление. Подсчитаем, например, величину этого давления  $p_x$  для кислорода, находящегося в сосуде кубической формы с ребром  $a = 1$  см. При давлении  $p_x$  средняя длина свободного пробега  $\bar{\lambda}_x > 1$  см; при нормальном давлении  $p_0$  средняя длина свободного пробега  $\bar{\lambda} = 5 \cdot 10^{-6}$  см.

Так как  $\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_x} = \frac{p_x}{p_0}$ , то  $p_x = p_0 \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\lambda}_x}$ .

Откуда, подставляя соответствующие значения, получим

$$p_x < 1.013 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-6}}{1} = 0.507 (\text{Па}).$$

Следовательно, в сосуде с ребром  $a = 1$  см  $\chi$  зависит от давления при давлениях  $p_x < 0,507$  Па.

Зависимость коэффициента теплопроводности от давления в разреженном газе используется в устройстве термоса (сосуда Дьюара).

Термос представляет собой сосуд с двойными стенками (рис. 8.17), между которыми находится сильно разреженный ( $\bar{\lambda} > a$ ) газ, имеющий поэтому малый коэффициент теплопроводности  $\chi$ . Теплообмен между внутренним объёмом термоса и внешней средой происходит практически только через узкую горловину, закрытую пробкой.

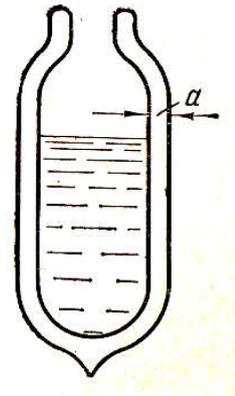


Рис.8.17

## § 8.12. Внутреннее трение (вязкость)

Пусть в ламинарном потоке газа скорость течения убывает в направлении  $OX$  (рис.8.18). Как мы уже видели, это может иметь место, например, когда газ течёт вблизи твёрдой стенки. Вообразим площадку  $\Delta S$ , по которой соприкасаются два соседних слоя газа, и обозначим через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  значения скоростей течения на расстояниях  $\bar{\lambda}$  от этой площадки ( $\omega_1 > \omega_2$ ).

Очевидно, что на хаотическое движение молекул наложится скорость потока  $\omega$ , ввиду чего молекулы верхнего слоя будут обладать большим количеством движения, чем молекулы нижнего слоя:

$$m\omega_1 > m\omega_2,$$

где  $m$  – масса молекулы.

В процессе хаотического движения молекулы верхнего слоя будут переносить свое количество движения в нижний слой, увеличивая тем самым его скорость; в свою очередь молекулы нижнего слоя будут переносить своё количество движения в верхний слой, уменьшая тем самым его скорость. В результате между слоями возникает внутреннее трение, сила которого будет действовать вдоль площадки  $\Delta S$  параллельно скорости потока.

Применяя уравнение переноса (8.38), заметим, что в этом случае переносимой физической характеристикой является количество движения молекулы:

$$\varphi = k = m\omega.$$

Тогда, поскольку концентрацию молекул  $n_0$  можно считать одинаковой во всём объёме газа:

$$\Delta(n_0\varphi) = \Delta(n_0k) = \Delta(n_0m\omega) = n_0m \cdot \Delta\omega, \quad (8.48)$$

где  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Кроме того очевидно что

$$\Delta(N\varphi) = \Delta(Nk) = \Delta k, \quad (8.49)$$

где  $\Delta k$  – изменение количества движения одного слоя относительно другого, происходящее за время  $\Delta t$  на пограничной площадке  $\Delta S$ . Так как изменение количества движения равно импульсу действующей силы, то  $\Delta k = F \cdot \Delta t$ , где  $F$  – сила взаимодействия между слоями газа, действующая в плоскости их соприкосновения, т.е. сила *внутреннего трения*. Поэтому формулу (8.49) можно представить в виде

$$\Delta(N\varphi) = \Delta k = P \cdot \Delta t. \quad (8.50)$$

Подставляя выражения (8.49) и (8.50) в уравнение переноса (8.38), получим

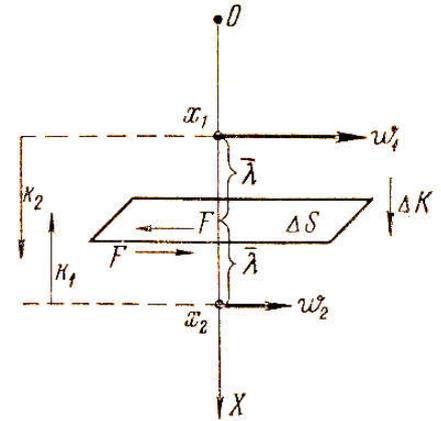


Рис.8.18

$$F \cdot \Delta t = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} n_0 m \frac{\Delta \omega}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t.$$

Сокращая последнее равенство на  $\Delta t$  и учитывая, что  $n_0 m = \rho$  найдём

$$F = -\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} \rho \frac{\Delta \omega}{\Delta x} \cdot \Delta S. \quad (8.51)$$

Обозначив

$$\frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} \rho = \eta, \quad (8.52)$$

напишем

$$F = -\eta \frac{\Delta \omega}{\Delta x} \cdot \Delta S, \quad (8.53)$$

откуда следует, что сила внутреннего трения, возникающая в плоскости соприкосновения двух скользящих относительно друг друга слоёв газа, пропорциональна площади их соприкосновения  $\Delta S$  и градиенту скорости  $\Delta \omega / \Delta x$ .

Формула (8.53) называется уравнением внутреннего трения, или законом Ньютона (так как Ньютон получил такое же уравнение из опыта с жидкостью).

Коэффициент пропорциональности  $\eta$  называется коэффициентом внутреннего трения (вязкости). Полагая в формуле (8.53)

$$\Delta S = 1 \text{ м}^2 \quad \text{и} \quad \frac{\Delta \omega}{\Delta x} = -1 \text{ с}^{-1}, \quad \text{получим} \quad F = \eta,$$

т.е. коэффициент вязкости численно равен силе внутреннего трения, действующей на  $1 \text{ м}^2$  площади соприкосновения параллельно движущихся слоёв газа при градиенте скорости в  $1 \text{ с}^{-1}$ . Из формул (8.52) и (8.53) следует, что коэффициент внутреннего трения измеряется в  $\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ .

Из пропорциональности  $\eta$  произведению  $\bar{\lambda} \rho$  [формула (8.52)] следует, что, как и  $\chi$ , коэффициент внутреннего трения не зависит от давления, за исключением случаев сильного разрежения газа, когда средняя длина свободного пробега молекул становится больше размера сосуда. Чтобы получить представление о порядке величины коэффициента внутреннего трения, подсчитаем его для кислорода при нормальных условиях, принимая

$$\bar{\lambda} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ м}, \quad \bar{g} = 5 \cdot 10^2 \text{ м/с} \quad \text{и} \quad \rho = 143 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3.$$

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{\lambda} \bar{g} \rho = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 10^{-8} \cdot 5 \cdot 10^2 \cdot 143 \cdot 10^{-2} \approx 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}$$

Это соответствует опытным данным по определению коэффициента внутреннего трения. В заключение отметим, что вытекающие из сопоставления формул (8.41), (8.46), (8.52) соотношения между коэффициентами переноса  $D$ ,  $\chi$  и  $\eta$ .

$$\frac{\eta}{D} = \rho \quad \text{и} \quad \frac{\chi}{\eta} = C_v$$

также находятся в соответствии с опытными данными, это является дополнительным подтверждением правильности рассмотренной нами молекулярно-кинетической теории газа.

## Глава IX. ЖИДКОСТИ И ТВЁРДЫЕ ТЕЛА

### § 9.1. Особенности строения жидкостей и твёрдых тел

Газ, жидкость и твёрдое тело представляют собой агрегатные состояния вещества и в этом смысле между ними нет непреодолимого различия: всякое вещество в зависимости от температуры и давления может находиться в любом из агрегатных состояний. Вместе с тем, между газообразным, жидким и твердым телами имеются существенные различия. Поскольку у твёрдых и жидких тел есть много общих свойств, имеет смысл рассматривать в нашем курсе эти два агрегатных состояния совместно.

Существенное различие между газом с одной стороны и твёрдым и жидким телами с другой стороны состоит в том, что газ занимает весь предоставленный ему объём сосуда, тогда как жидкость или твёрдое тело, помещенные в сосуд, занимают в нём лишь вполне определенный объём. Это обусловлено различием в характере теплового движения в газах и в твёрдых и жидких телах.

Молекулы газа практически не связаны между собой межмолекулярными силами. Во всяком случае средняя кинетическая энергия  $\bar{W}_k$  теплового движения молекул газа гораздо больше средней потенциальной энергии  $\bar{W}_п$ , обусловленной силами сцепления между ними ( $\bar{W}_п \leq \bar{W}_k$ ). Поэтому молекулы газа совершают сравнительно большие свободные пробеги, «разлетаясь» друг от друга так далеко, как позволяет размер сосуда, и занимая весь его объём. В соответствии с этим диффузия в газах протекает достаточно быстро.

В твёрдых и жидких телах силы сцепления между молекулами (атомами, ионами) играют уже существенную роль, удерживая их на определенных расстояниях, друг от друга (см. рис. 7.1 а). В этих телах средняя потенциальная энергия, обусловленная силами сцепления между молекулами, больше средней кинетической энергии теплового движения молекул ( $\bar{W}_п > \bar{W}_k$ ). Иначе говоря, в среднем кинетическая энергия молекул недостаточна для преодоления сил притяжения между ними.

Благодаря плотной «упаковке» молекул в жидкости, они уже не совершают свободных пробегов, а как бы «толкуются» на месте

(колеблются около некоторого положения равновесия). Лишь время от времени молекула вследствие благоприятной комбинации столкновений, может перейти на новое место на расстояние, сравнимое с размером самой молекулы. Естественно, что диффузия в жидкостях протекает значительно медленнее, чем в газах.

В твёрдом теле частицы (молекулы, атомы, ионы) расположены в геометрически строго определённом порядке, образуя так называемую *кристаллическую решётку*. Частицы совершают колебательные движения около своих положений равновесия. Переходы частиц с места на место в твёрдом теле возможны, но весьма редки. Поэтому, хотя диффузия существует и в твёрдых телах, она протекает здесь ещё медленнее, чем в жидкостях.

Физическую сущность различия между твёрдым, жидким и газообразным состояниями вещества можно ещё нагляднее объяснить с помощью потенциальной кривой взаимодействия молекул. Воспроизведём эту кривую с некоторыми дополнениями (рис. 9.1).

По оси ординат отложены значения потенциальной энергии взаимодействия молекул, по оси абсцисс — расстояния  $r$  между молекулами. Значения средней кинетической энергии  $\bar{W}_k$  теплового движения молекул будем для удобства сравнения откладывать от уровня дна  $B$  потенциальной ямы.

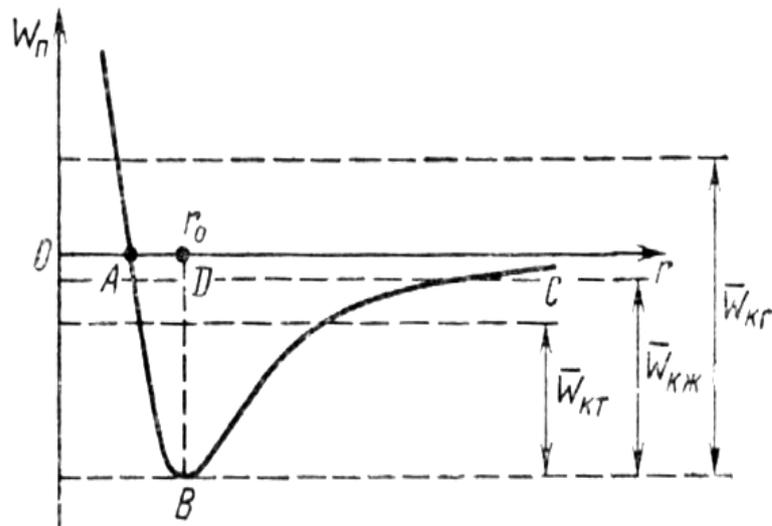


Рис.9.1

Если средняя кинетическая энергия теплового движения молекул значительно меньше глубины потенциальной ямы ( $W_{кТ} \ll DB$ ), то молекулы совершают небольшие колебания, оставаясь в нижней части потенциальной ямы (ниже уровня  $W_{кТ}$ ). Этот случай соответствует твёрдому состоянию вещества.

Если средняя кинетическая энергия теплового движения

молекул немного меньше глубины потенциальной ямы ( $\overline{W}_{КЖ} < DB$ ), то молекулы совершают значительные колебательные движения, но всё же останутся в пределах потенциальной ямы. Этот случай соответствует жидкому состоянию вещества.

Если же средняя кинетическая энергия теплового движения молекул значительно больше глубины потенциальной ямы ( $W_{КТ} \gg DB$ ), то молекулы вырвутся из неё и, потеряв взаимосвязь, будут двигаться свободно (совершать свободные пробеги). Этот случай соответствует газообразному состоянию вещества.

Таким образом, существенное различие между газом с одной стороны и твёрдым и жидким телами с другой стороны обусловлено тем, что у молекул газа значение средней кинетической энергии теплового движения *больше* глубины потенциальной ямы, а у молекул твёрдого и жидкого тел – *меньше* глубины потенциальной ямы.

Благодаря тому, что молекулы твёрдого тела связаны между собой прочнее, чем молекулы жидкости, для твёрдого тела в отличие от жидкости характерно постоянство не только объёма, но и формы. Рассмотрим несколько подробнее вопрос о кристаллическом строении твёрдого тела.

Характерным внешним признаком кристалла является его геометрически правильная форма (рис. 9.2). Так, например, кристалл поваренной соли имеет форму куба (а), кристалл льда – форму шестигранной призмы (б), кристалл алмаза – форму октаэдра (восьми-гранника, в) и т. д.

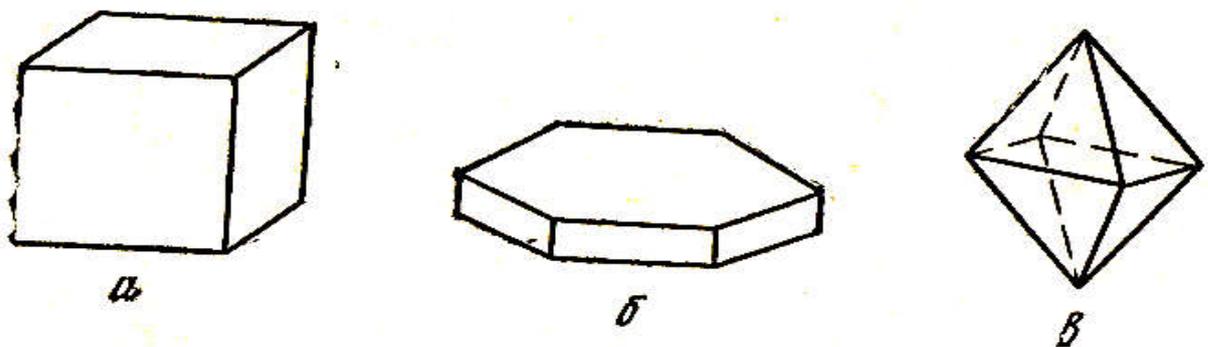


Рис.9.2

У каждого кристаллического вещества угол между ограничивающими его поверхностями (гранями) имеет строго определённое значение (у поваренной соли –  $90^\circ$ , у льда –  $120^\circ$  и т. п.).

Кристаллы легко раскалываются по определённым плоскостям, называемым *плоскостями спайности*. При этом получаются кристаллики меньшего размера, но той же формы. Так, при дроблении кристалла поварённой соли образуются мелкие кубики и прямоугольные параллелепипеды. Отмеченные факты навели в своё время на мысль о том что кристаллическое тело построено из *элементарных ячеек* (кубиков, или шестигранных призм, или октаэдров и т.п. ), *плотно приложенных друг к другу*. А это означает, что в кристаллическом теле частицы (молекулы или атомы, или ионы) расположены в строго симметричном порядке относительно друг друга, образуя пространственную, или кристаллическую, решётку; места расположения частиц называются *узлами решётки*.

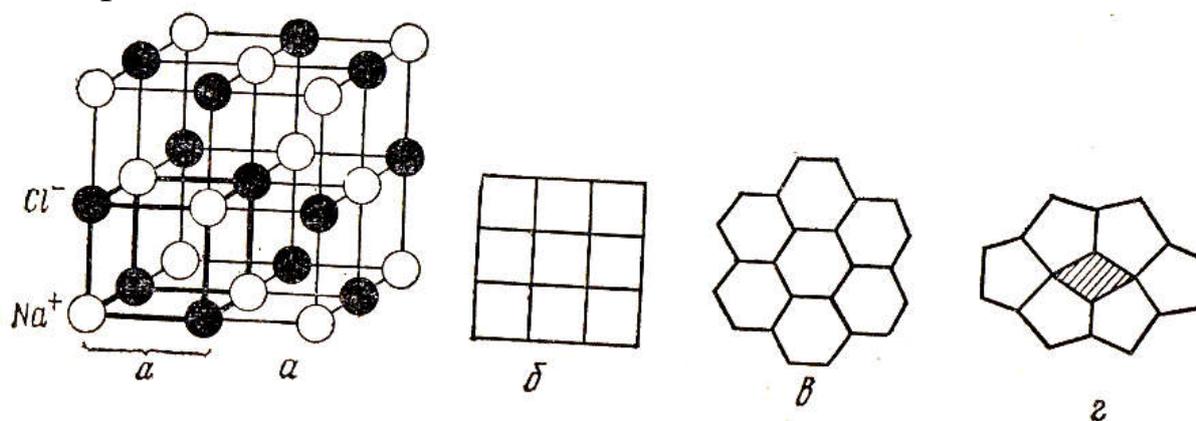


Рис.9.3

Примером простейшей пространственной решётки может служить кристаллическая решётка поварённой соли NaCl (рис. 9.3, а). Её элементарная ячейка с ребром  $a$  (выделена на рисунке полужирными линиями) образована положительными ионами натрия и отрицательными ионами хлора, расположенными в вершинах куба.

Формы пространственных решёток могут быть разнообразными, но не любыми: необходимо, чтобы элементарные ячейки, составляющие решётку, вплотную, без зазоров прикладывались

друг к другу, что соответствует минимуму потенциальной энергии решётки. Требуемым образом можно, например, уложить кубические ячейки и ячейки в виде шестигранных призм (рис. 9.3, б и в), но нельзя уложить ячейки в виде пятигранных призм (рис. 9.3, г).

Симметричность расположения частиц в кристаллической решётке обусловлена тем, что в этом случае силы взаимодействия (притяжения и отталкивания) между частицами *уравновешиваются*. При этом потенциальная энергия частиц минимальна. Расстояния между частицами в кристалле малы – порядка размера самих частиц ( $10^{-8}$  см). Такого же порядка и расстояние между молекулами в жидкости, поскольку, как известно, при плавлении кристалла не происходит существенного увеличения его объёма.

Замечательной особенностью кристалла является его *анизотропия*; в различных направлениях кристалл обладает различными физическими свойствами. Так, например, всем без исключения кристаллам присуща анизотропия прочности; подавляющее большинство кристаллов анизотропно и в отношении теплопроводности, электропроводности, лучепреломления и т.п. Анизотропия кристаллов объясняется тем, что в пространственной решётке оказывается различным число частиц, приходящихся на одинаковые по длине, но различные по направлению отрезки.

На рис. 9.4 показано, что на горизонтальном отрезке решётки находится 8, на наклонном – 6, на другом наклонном – 3 частицы). Понятно, что различие в плотности расположения частиц кристаллической решётки по различным направлениям должно приводить и к различию во многих других свойствах по этим направлениям кристалла.

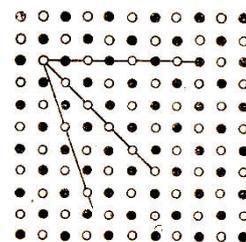


Рис.9.4

Тела подразделяют на две группы: монокристаллы и поликристаллы. Монокристалл - тело, все частицы которого укладываются в одну общую пространственную решётку. Монокристалл *анизотропен*. Монокристаллами является большинство минералов.

Поликристалл – тело, состоящее из множества мелких монокристалликов, беспорядочно расположенных друг относи-

тельно друга. Поэтому поликристаллы *изотропны*, т.е. обладают одинаковыми физическими свойствами по всем направлениям. Примером поликристаллов могут служить металлы.

В зависимости от того, из каких именно частиц образована кристаллическая решётка, различают четыре основных группы решёток: ионную, атомную, молекулярную и металлическую.

**Ионная решётка** образована разноименно заряженными ионами, удерживаемыми в узлах решётки электрическими силами. Ионную решётку имеет подавляющее большинство кристаллов.

**Атомная решётка** образована нейтральными атомами, удерживаемыми в узлах решётки химическими (валентными) связями: у соседних атомов обобществлены внешние (валентные) электроны. Атомную решётку имеет, например, графит.

**Молекулярная решётка** образована полярными (дипольными) молекулами, удерживаемыми в узлах решётки также электрическими силами. Однако для полярных молекул действие этих сил сказывается слабее, чем для ионов. Поэтому вещества с молекулярной решёткой сравнительно легко деформируются. Молекулярную кристаллическую решётку имеет большинство органических соединений (целлюлоза, резина, парафин и т. п.).

**Металлическая решётка** образована положительными ионами металла, окружёнными свободными электронами. Эти электроны и связывают между собой ионы металлической решётки. Такая решётка свойственна металлам.

Жидкостям, свойственно беспорядочное расположение частиц, поэтому жидкости изотропны. Некоторые жидкости могут быть сильно переохлаждены, не переходя при этом в твёрдое (кристаллическое) состояние. Однако вязкость таких жидкостей столь огромна, что они практически теряют текучесть, сохраняя, как и твёрдые тела, свою форму. Подобные тела называются аморфными. Таким образом, современная физика считает аморфные тела переохлажденными жидкостями, обладающими огромной вязкостью. К аморфным телам относятся, например, вар, стекло, смола-канифоль и т.п. Понятно, что аморфные тела изотропны.

## § 9.2. Деформация твёрдого тела

Опишем процесс деформации тела с помощью графика, основанного на опытных данных. Для определённости рассмотрим, например, деформацию одностороннего растяжения. По оси абсцисс графика будем откладывать смещение (удлинение)  $\Delta x$ , по оси ординат – напряжение

$$p = \frac{F}{S},$$

т.е. деформирующую силу  $F$ , приходящуюся на единицу площади поперечного сечения  $S$  деформируемого тела (рис. 9.5).

При небольших напряжениях удлинение практически пропорционально напряжению. Эта область деформаций называется *упругой деформацией*. На графике ей соответствует почти прямолинейный участок  $Oa$ . Напряжение  $p_y$ , соответствующее границе участка  $a$ , называется *пределом упругости*. При дальнейшем увеличении напряжения наступает *пластическая деформация* (участок  $ab$ ):

небольшие увеличения напряжения вызывают значительные удлинения, приводящие в конечном счёте к разрушению (разрыву) тела (точка  $b$ ). Разрыву обычно предшествует состояние, при котором сопротивляемость тела растяжению вновь несколько возрастает (участок  $cd$ ). Напряжение  $p_{II}$ , соответствующее разрушению тела, называется *пределом прочности*.

Если при деформации тела предел его упругости не был превзойден, то после устранения деформирующей силы тело полностью восстанавливает первоначальную форму; на графике процесс восстановления идёт по линии  $aO$ . Если же деформирующее напряжение превысило предел упругости (что соответствует точке  $k$ ), то после его устранения тело не восста-

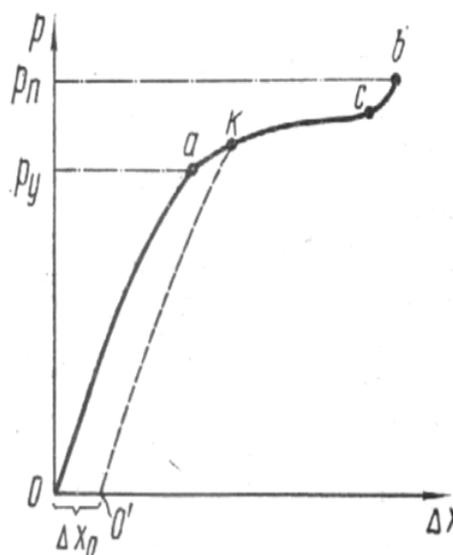


Рис.9.5

навливают первоначальную форму, сохраняя *навсегда* некоторую деформацию  $\Delta x_0$ , называемую *остаточной*. Процесс частичного восстановления формы тела представляется на графике линией  $кО'$ .

Отметим, что и в случае упругой деформации первоначальная форма тела восстанавливается не мгновенно, а через некоторое время (измеряемое иногда часами и даже днями). Это явление называется упругим последствием.

В свете представлений об атомно-молекулярном строении вещества физическая сущность описанного процесса деформации твёрдого (кристаллического) тела объясняется следующим образом.

При *упругой* деформации *монокристалла*, например при деформации сдвига, происходит только небольшое искажение его пространственной решётки (рис.9.6, б). Сопутствующее этому искажению изменение межионных (межатомных, межмолекулярных) расстояний ведёт к нарушению равновесия между силами взаимопритяжения и взаимоотталкивания ионов, в связи с чем в кристалле возникают упругие силы, восстанавливающие первоначальную форму (рис. 9.6, а) кристалла после устранения деформирующей силы. При упругой деформации не нарушаются межионные связи: каждый ион остается в окружении своих прежних соседей, как это видно на рис. 9.6, а и б (для четырёх пронумерованных ионов).

При *пластической* деформации монокристалла происходит значительное искажение его решётки благодаря скольжению одних ионных плоскостей вдоль других. В результате *нарушаются прежние и устанавливаются новые межионные связи*: ионы

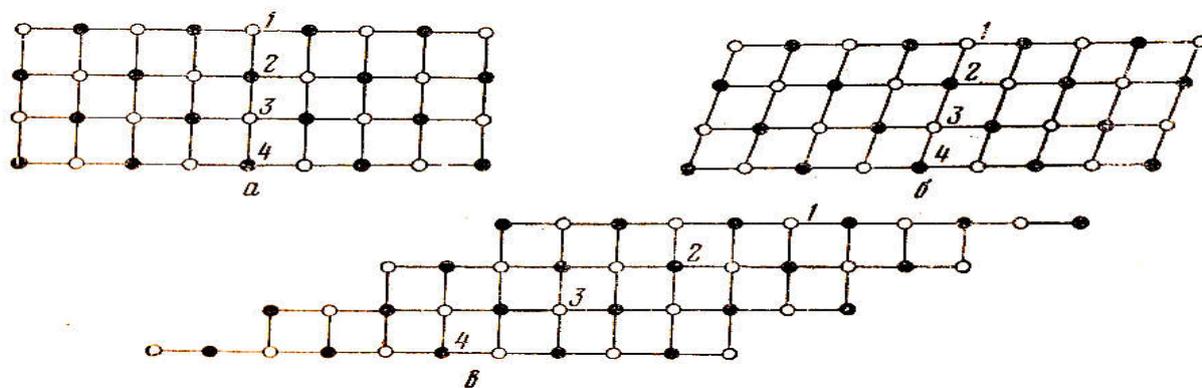


Рис.9.6

меняют своих соседей, как это видно на рис.9.6, в (для тех же четырёх пронумерованных ионов).

При смещении двух соседних слоёв друг относительно друга на расстояние, равное удвоенному размеру элементарной ячейки, силы взаимопритяжения и взаимоотталкивания ионов вновь оказываются уравновешенными (решётка вновь принимает соответствующую данному кристаллу форму, на нашем рисунке – кубическую). В связи с этим исчезают упругие силы, способные сместить ионы в исходное положение (см, рис.9.6, а). В результате появляется остаточная деформация (см. рис. 9.6, б).

Пластическая деформация одностороннего растяжения также обусловлена скольжением ионных плоскостей друг относительно друга. На рис. 9.7 схематически изображена деформация монокристаллического стержня, подвергнутого одностороннему растяжению. Скольжение слоёв начинается в наиболее слабых местах стержня (где решётка ослаблена трещинами и другими дефектами) и постепенно распространяется на весь стержень. В результате в стержне образуются скошенные слои, называемые *пачками скольжения* (рис. 9.7, б). Толщина пачек скольжения разнообразна, но имеет порядок  $10^{-5}$  см. Первоначально гладкая поверхность стержня (рис. 97, а) становится в процессе пластической деформации шероховатой (рис.9.7, б), что подтверждается опытными данными.

Одновременно с удлинением стержня происходит его утоньшение. При этом у стержня появляются местные сужения – шейки (рис. 9.7, в), в которых и сосредоточивается дальнейшая деформация, приводящая к разрыву стержня (рис. 9.7, г). Такова же в общих чертах (но более сложная в деталях) картина деформации поликристаллических тел. Кристаллические зёрна расположены внутри поликристалла

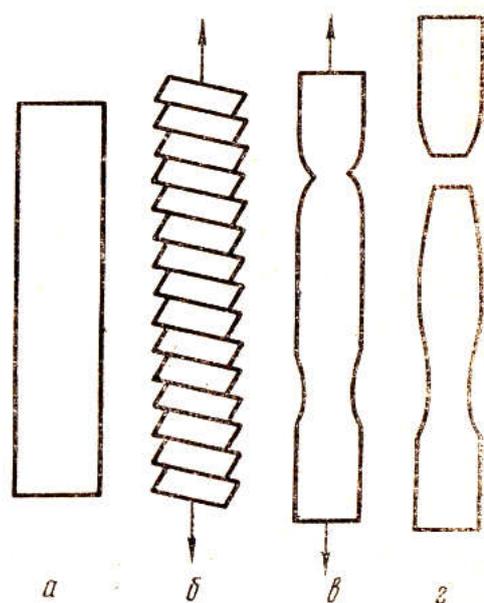


Рис.9.7

беспорядочно, в связи с чем беспорядочно расположены и плоскости наиболее лёгкого скольжения ионных слоёв. Благодаря этому пластическая деформация поликристаллических тел требует большего напряжения, чем пластическая деформации монокристаллов.

### § 9.3. Тепловое расширение твёрдых и жидких тел

При повышении температуры твердого тела усиливается тепловое движение его частиц и среднее расстояние между ними возрастает. Поэтому при нагревании твердое тело расширяется. Опыт показывает, что удлинение  $\Delta l$  тела (линейное расширение) пропорционально изменению его температуры:

$$\Delta l = \alpha l_0 \cdot \Delta t, \quad (9.1)$$

где  $l_0$  – длина тела при температуре  $t_0$ ,  $l = l_0 + \Delta l$  – длина тела при температуре  $t$ ,  $\Delta t = t - t_0$ ,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения.

Полагая  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , из формулы (1) получим

$$l = l_0(1 + \alpha t) \quad (9.2)$$

$$\alpha = \frac{l - l_0}{l_0 t}; \quad (9.3)$$

откуда следует, что коэффициент линейного расширения равен относительному удлинению тела при нагревании на 1 К. Для твёрдых тел  $\alpha$  имеет порядок  $10^{-5} - 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

В результате линейного расширения увеличивается и объём тела. Возьмём тело кубической формы с ребром  $l_0$  при температуре  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Его объём  $V_0 = l_0^3$ . После нагревания до температуры  $t$  ребро станет равным  $l_0(1 + \alpha t)$ , а объём

$$V = [l_0(1 + \alpha t)]^3 = l_0^3(1 + 3\alpha t + 3\alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3).$$

В связи с малостью  $\alpha$  можно пренебречь членами, содержащими  $\alpha^2$  и  $\alpha^3$ , написав  $V = V_0(1 + 3\alpha t)$ , Обозначив  $3\alpha = \beta$ , получим

$$V = V_0(1 + \beta t). \quad (9.4)$$

Величина  $\beta$  называется коэффициентом объёмного расши-

рения. Очевидно, что порядок величины  $\beta$  такой же, как и у  $\alpha$ .

Поскольку плотность тела  $\rho = m/V$ , то, согласно формуле (9.4), получим

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}, \quad (9.5)$$

где  $\rho_0 = m/V_0$  – плотность тела при температуре  $t=0^\circ\text{C}$ .

Таким образом, плотность тела уменьшается с повышением его температуры.

Формулы (9.2), (9.4) и (9.5) остаются справедливыми и для жидких тел, только коэффициент объёмного расширения у жидкостей больше, чем у твёрдых тел; он имеет порядок  $10^{-3} - 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

Благодаря уменьшению плотности с повышением температуры в нагреваемом снизу объёме жидкости (и газа) возникает конвекция: нижние слои жидкости (газа), как менее плотные, начинают подниматься вверх, а верхние слои опускаются вниз; этим значительно ускоряется нагревание объёма. Конвекция играет важную роль в процессах теплообмена в атмосфере и водных бассейнах.

## § 9.4. Теплоёмкость твёрдых и жидких тел

Поскольку частица твёрдого тела колеблется около положения равновесия (узла пространственной решётки), её энергия складывается из кинетической энергии  $W_K$  теплового движения и потенциальной энергии  $W_{II}$  смещения от положения равновесия. В среднем при достаточно высокой температуре эти энергии можно считать одинаковыми. Поэтому в среднем полная энергия одной частицы

$$W = W_K + W_{II} = 2W_K.$$

Поскольку  $W_K = ikT/2$ , получим

$$W = ikT,$$

где  $i$  – число степеней свободы частицы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура. Так как частица может колебаться и в любом направлении, её число степеней свободы будет равно трём; тогда

$$W = 3kT.$$

В одном моле химически простого вещества содержится  $N_A$  частиц (атомов), где  $N_A$  – постоянная Авогадро. Поэтому внутренняя энергия моля

$$U_M = WN_A = 3kTN_A = 3\frac{R}{N_A}N_AT = 3RT,$$

а молярная теплоёмкость  $C$  равна внутренней энергии моля, отнесённой к его температуре, т.е.

$$C = \frac{U_M}{T} = 3R.$$

Полагая  $R=8,32$  Дж/(К·моль), получим

$$C = 25 \text{ Дж/(Кмоль)}. \quad (9.6)$$

Следовательно, *атомная теплоёмкость всех химически простых кристаллических твёрдых тел при достаточно высокой температуре равна 25 Дж/(К моль).*

Этот вывод был впервые получен в 1819 г. *Дюлонгом и Пти* опытным путём, в связи с чем он назван *законом Дюлонга и Пти*.

В случае твёрдых химических соединений число частиц в моле будет уже не  $N_A$ , а  $nN_A$ , где  $n$  – число атомов в молекуле. Например, в одном моле поваренной соли NaCl содержится  $2N_A$  атомов (ионов NaCl). Поэтому молярная теплоёмкость химического соединения выразится формулой

$$C = 25n \text{ Дж/(К·моль)}. \quad (9.7)$$

Следовательно, *молярная теплоёмкость твёрдого химического соединения равна сумме атомных теплоёмкостей входящих в него элементов.*

Этот вывод также был получен опытным путём (в 1864 г. *Коппом* и затем *Джоулем*) и носит название закона *Джоуля и Коппа*.

Из формул (9.6) и (9.7) следует, например, что теплоёмкость цинка равна 25 Дж/(К моль), а теплоёмкость хлористого кальция  $\text{CaCl}_2$  – 75 Дж/(К·моль).

## § 9.5. Диффузия в жидких и твёрдых телах

Две соприкасающиеся жидкости диффундируют друг в друга до полного перемешивания. Если, например, на дно сосуда с водой налить при помощи воронки с длинной трубкой раствор медного

купороса, то первоначально резкая граница раздела между этими жидкостями начнет постепенно размываться. Полное перемешивание произойдет через несколько месяцев.

Процесс диффузии жидкостей описывается законом Фика, который был выведен нами ранее для газов (формула (8.45)):

$$\Delta M = -D \frac{\Delta \rho}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \quad (9.8)$$

где  $\Delta M$  – масса жидкости, переносимой путем диффузии за время  $\Delta t$  через площадку  $\Delta S$ , перпендикулярную направлению изменения плотности,  $\Delta \rho / \Delta x$  – градиент плотности,  $D$  – коэффициент диффузии жидкости. Учтём, что

$$\Delta M = m \cdot \Delta N \quad \text{и} \quad \Delta \rho = m \cdot \Delta n_0$$

где  $m$  – масса частицы жидкости (молекулы или атома),  $\Delta N$  – число продиффундировавших частиц,  $\Delta n_0$  – разность числа частиц в единице объёма первой и второй жидкостей (разность концентраций молекул). Тогда, поделив обе частицы равенства (9.8) на  $m$ , получим выражение, связывающее число продиффундировавших частиц с градиентом концентрации молекул:

$$\Delta N = -D \frac{\Delta n_0}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t \quad (9.9)$$

Следует иметь в виду, что коэффициент диффузии жидкостей нельзя рассчитывать по формуле (8.44), выведенной для газов, так как характер теплового движения в жидкости существенно отличен от такового в газах: частицы жидкости не совершают свободных пробегов. Поэтому коэффициент диффузии у жидкостей в сотни тысяч раз меньше, чем у газов, т.е. имеет порядок  $10^{-10}$ – $10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с. В соответствии с этим диффузия в жидкостях протекает гораздо медленнее, чем в газах. Однако в случае больших градиентов концентрации, которые часто имеют место в жидкостях, диффузия может проходить довольно интенсивно и в жидкостях, несмотря на малое значение коэффициента диффузии [см. формулу (9.9)].

Диффузия наблюдается и в твёрдых телах, при этом к ней также применим закон Фика [см. (9.8) и (9.9)]. Однако протекает она ещё медленнее, чем в жидкостях; коэффициент диффузии твёрдых тел гораздо меньше, чем жидкостей. Процесс диффузии в

твёрдых телах можно значительно ускорить повышением температуры. Так, например, при температуре  $220^{\circ}\text{C}$  между плотно приложенными пластинами меди и цинка образуется через 12 ч пограничный слой толщиной 0,3 мм, состоящий из частиц меди и цинка. Пластины прочно спаиваются между собой, хотя температуры плавления меди и цинка значительно выше  $220^{\circ}\text{C}$  ( $1083^{\circ}\text{C}$  – у меди и  $419^{\circ}\text{C}$  – у цинка).

В твёрдом кристаллическом теле частицы расположены очень близко друг к другу и имеют возможность лишь колебаться около узлов пространственной решётки. Поэтому для объяснения диффузии в кристаллах приходится предположить, что в кристаллической решётке существуют «дырки» – узлы, не занятые частицами. Тогда колеблющаяся частица может перескочить в соседний «вакантный» узел; на её место может перескочить другая частица и т. д. Явление диффузии играет важную роль в природе и технике. Благодаря диффузии осуществляется, например, питание растений. Находящаяся внутри корней растения почвенная вода содержит в себе различные растворенные вещества. Вещества, являющиеся питательными для растения, быстро усваиваются им. Поэтому концентрация этих веществ оказывается внутри корней все время меньшей, чем вне корней. Наличие градиента концентрации у поверхности корней поддерживает в соответствии с формулой (9.9) непрерывный диффузионный поток питательных веществ из окружающей почвенной воды в корневую систему. Вместе с тем растворенные вещества, не нужные растению и, следовательно, не усваиваемые им, имеют одинаковую концентрацию как внутри, так и вне корней. Отсутствие градиента концентрации приостанавливает диффузионный поток не нужных растению растворенных веществ в его корневую систему.

Аналогичную роль играет диффузия в питании животных и человека. Через стенки желудка и кишечника организм «всасывает» только те растворенные в пище вещества, которые нужны для построения его клеток. Поэтому у стенок пищеварительного тракта его создаются градиенты концентрации питательных веществ, поддерживающие диффузию этих веществ в организм.

В свеклосахарном производстве диффузию используют для извлечения сахара из свекольной массы.

Особый интерес представляет рассматриваемое далее явление диффузии растворителей через полупроницаемые перегородки, называемое *осмосом*.

## § 9.6. Осмос

При растворении в жидкости твёрдого вещества его молекулы равномерно распределяются во всём объёме жидкости, образуя среду, называемую *раствором*; жидкость называется *растворителем*, твёрдое вещество – *растворенным веществом*. Масса  $m$  растворенного вещества, приходящаяся на единицу объёма  $V$  раствора, называется концентрацией раствора  $C$ ; следовательно

$$C = \frac{m}{V}. \quad (9.10)$$

Растворы малой концентрации называются *слабыми*, или *разбавленными*. Представим себе слабый раствор, налитый в сосуд (рис. 9.8); молекулы растворенного вещества изображены на рисунке точками. Размеры молекул растворенного вещества малы по сравнению с расстояниями между ними. Поэтому взаимодействия между этими молекулами практически не будет.

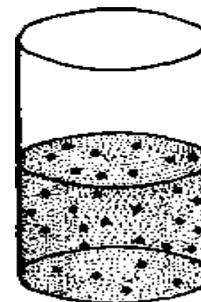


Рис.9.8

Таким образом, в слабом растворе растворенное вещество напоминает идеальный газ с той лишь разницей, что в растворе свобода движения молекул растворенного вещества ограничена присутствием молекул растворителя. Тем не менее, отмеченная аналогия между идеальным газом и растворенным веществом в слабом растворе наводит на мысль о возможности применения к растворенному веществу законов идеального газа. В частности, можно предположить, что растворенное вещество обладает парциальным давлением  $p$ , которое по основному уравнению кинетической теории газа и по закону Клапейрон-Менделеева выражается формулами

$$p = \frac{2}{3} n_0 W \quad (9.11)$$

и

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V}, \quad (9.12)$$

где в данном случае  $n_0$  – концентрация молекул растворенного вещества (число молекул растворенного вещества в единице объёма раствора),  $W$  – средняя кинетическая энергия молекулы растворенного вещества,  $m$  и  $M$  – масса растворенного вещества и его молярная масса,  $V$  и  $T$  – объём и температура раствора,  $R$  – универсальная газовая постоянная.

Для того чтобы обнаружить это давление, необходимо отделить раствор от чистого растворителя так называемой *полупроницаемой перегородкой*, пропускающей молекулы растворителя, но не пропускающей молекулы растворенного вещества. Для водного раствора сахара такой полупроницаемой перегородкой являются, например, бычий пузырь, кишечная ткань и некоторые искусственные пластмассовые плёнки. Поры в этих перегородках столь малы, что через них могут пройти молекулы воды, но не пройдут более крупные молекулы сахара. Прделаем теперь такой опыт. В воронку, раструб которой затянут бычьим пузырём, нальём слабый водный раствор сахара и установим её в сосуд с чистой водой (рис. 9.9) так, чтобы уровни жидкостей в воронке и в сосуде совпали. Через некоторое время уровень раствора в воронке, как покажет наблюдение, начнет медленно повышаться и, наконец, установится над уровнем воды в сосуде на высоте  $h$ .

Происходит это по следующей причине. Концентрация молекул воды в сосуде больше концентрации молекул воды в воронке на величину концентрации молекул сахара. Поэтому через полу-

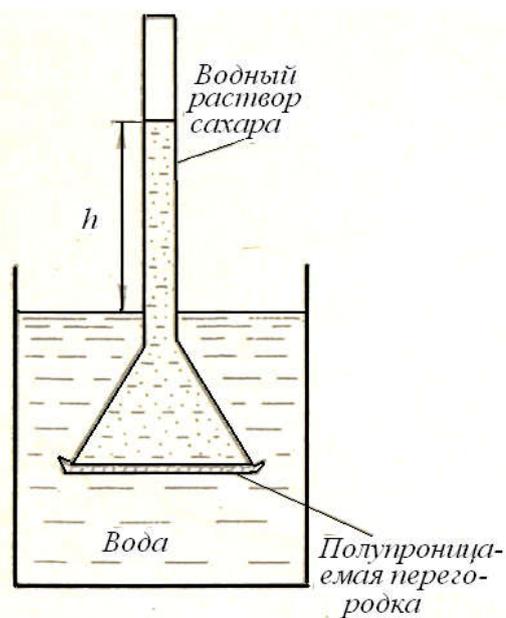


Рис.9.9

нищаемую перегородку диффундирует больше молекул воды из сосуда в воронку, чем в обратном направлении, что вызывает подъём уровня жидкости в воронке.

Молекулы же сахара не могут перейти через полупроницаемую перегородку из воронки в сосуд. В результате концентрации молекул воды в воронке и в сосуде уравниваются, а концентрации молекул сахара останутся различными:  $n_0$  – в воронке и нуль – в сосуде. Избыточная концентрация  $n_0$  молекул сахара создаст, согласно формуле (9.11), парциальное давление растворенного вещества, уравновешиваемое гидростатическим давлением столбика раствора высотой  $h$ . Рассмотренное явление диффузии растворителя через полупроницаемую перегородку, отделяющую раствор от чистого растворителя, называется *осмосом*, а возникающее при этом в растворе избыточное давление (равное парциальному давлению  $p$  растворенного вещества) называется *осмотическим давлением*.

Поскольку давление столбика  $h$  раствора равно  $\rho gh$ , то из рассмотренного опыта легко определить осмотическое давление по формуле

$$p = \rho gh$$

где  $\rho$  – плотность раствора,  $g$  – ускорение силы тяжести. С другой стороны, можно рассчитать осмотическое давление по формуле (9.11) или (9.12). Оба расчёта дают хорошо совпадающие значения осмотического давления, что подтверждает допустимость аналогии, проведенной между идеальным газом и растворенным веществом в слабом растворе.

Чтобы получить представление о величине осмотического давления, подсчитаем его по формуле (9.12) для водного раствора тростникового сахара  $C_{12}H_{22}O_{11}$  при температуре  $27^\circ C$ , если концентрация раствора соответствует  $0,342$  кг/моль. Тогда

$$p = \frac{m}{M} \frac{RT}{V} = \frac{0,034 \cdot 8,32 \cdot 300}{0,342 \cdot 10^{-3}} \approx 25 \cdot 10^4 \text{ Па} .$$

Пользуясь формулой (9.10), введём в формулу (9.12) концентрацию раствора  $C$ . Тогда

$$p = \frac{CRT}{M}, \quad (9.13)$$

откуда следует, что *осмотическое давление пропорционально концентрации и температуре раствора и обратно пропорционально-молярной массе растворенного вещества.*

Этот закон был установлен в 1887 г. голландским химиком Вант–Гоффом. Следует подчеркнуть, что, согласно закону Вант–Гоффа, осмотическое давление не зависит от свойств растворителя.

Явление осмоса играет исключительно важную роль в жизни растительных и животных организмов. Оболочки живых клеток представляют собой полупроницаемые перегородки; они проницаемые молекулы воды и непроницаемые для молекул сложных органических соединений, создающихся внутри клетки в процессе её жизнедеятельности. Благодаря этому внутри клетки образуется раствор и возникает осмотическое давление, делающее клетку упругой. Как надутый резиновый мяч. Понятно, что построенные из таких клеток растительные и животные ткани будут обладать большой упругостью и приобретут способность сохранять свою форму. В биологии это обусловленное осмосом явление носит название *тургора клеток.*

## § 9.7. Теплопроводность жидких и твёрдых тел

Процесс теплопроводности в твёрдых и жидких телах описывается тем же законом Фурье, который был выведен нами для газов:

$$\Delta Q = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x} \cdot \Delta S \cdot \Delta t, \quad (9.14)$$

где  $\chi$  – коэффициент теплопроводности,  $\Delta T/\Delta x$  – градиент температуры,  $\Delta S$  – площадь, через которую переносится теплота,  $\Delta t$  – продолжительность времени переноса. Однако коэффициент теплопроводности у твёрдых и жидких тел значительно больше, чем у газов. Особенно большими значениями  $\chi$  отличаются металлы. Коэффициент теплопроводности имеет порядок у газов –  $10^{-3}$ , у жидкостей и неметаллических твёрдых тел –  $10^{-1}$ , у металлов –

$10^1$  Дж/(м·с·К). Максимальное значение  $\chi = 423$  Дж/(м·с·К) имеет серебро.

Процесс теплопроводности в твёрдых и жидких телах осуществляется путём взаимодействия колеблющихся частиц (молекул, атомов, ионов), составляющих тело. Наиболее интенсивное колебание частиц, происходящее в области повышенной температуры, передаётся соседним частицам, постепенно распространяясь на всё тело. В металлах, кроме того, теплопроводность значительно увеличивается благодаря свободным электронам, которые могут перемещаться внутри металла, непосредственно перенося свою кинетическую энергию из области повышенной температуры в область более низкой температуры. Важная роль свободных электронов в процессе теплопроводности подтверждается тем фактом, что коэффициент теплопроводности металлов приблизительно пропорционален их коэффициенту электропроводности. В жидкостях (как и в газах) процесс передачи теплоты может усиливаться *конвекцией*, если нагретые части жидкости расположены ниже холодных.

Теплопроводность твёрдого тела в большой мере зависит от его структуры: наименьшей теплопроводностью характеризуются пористые тела, так как газ, заполняющий поры, имеет сравнительно малый коэффициент теплопроводности.

## § 9.8. Вязкость жидкости. Турбулентное движение жидкости

В первой части курса рассматривалось движение невязкой (идеальной) жидкости. Реальная жидкость обладает вязкостью (внутренним трением), обусловленной сцеплением между её молекулами. Благодаря вязкости движение жидкости, как и движение газа, носит ламинарный характер. Сила внутреннего трения  $F$  выражается законом Ньютона

$$F = -\eta \frac{\Delta\omega}{\Delta x} \cdot \Delta S, \quad (9.15)$$

где  $\Delta\omega/\Delta x$  – градиент скорости течения жидкости,  $\Delta S$  – площадь соприкосновения слоёв жидкости,  $\eta$  – коэффициент вязкости (внутреннего трения) жидкости.

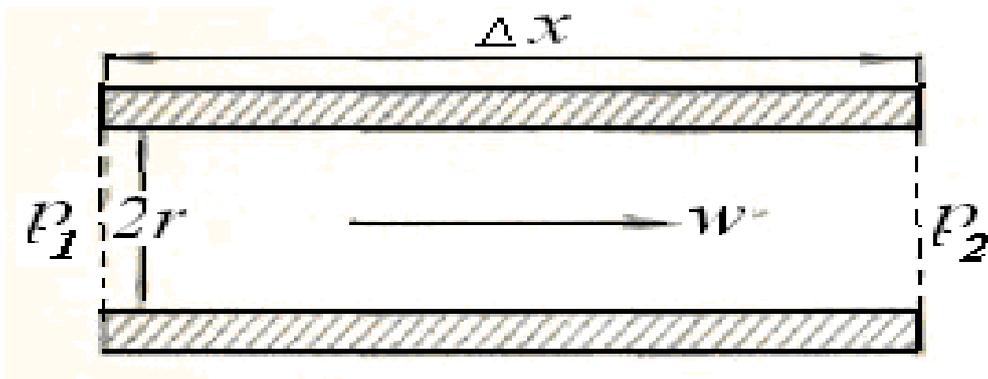


Рис.9.10

Вязкость жидкости во много раз превосходит вязкость газа. Значение коэффициента вязкости жидкости находится в пределах  $10^{-3} - 1$  кг/(м·с).

Вместе с тем вязкость жидкости сильно зависит от температуры. Она уменьшается с повышением температуры, так как при этом увеличивается среднее расстояние между молекулами и, следовательно, уменьшается сцепление между ними. У воды, например,  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3}$  кг/(м·с) при  $0^\circ$  С и  $\eta = 3,2 \cdot 10^{-4}$  кг/(м·с) при  $90^\circ$  С. Вязкость затрудняет течение жидкости по трубе (или иному руслу), уменьшая его скорость.

Французский физик и физиолог Пуазейль в 1841 г. установил, что средняя скорость  $\Delta\omega$  ламинарного течения жидкости по трубе пропорциональна градиенту давления  $\Delta p / \Delta x$  жидкости, квадрату радиуса  $r$  трубы и обратно пропорциональна коэффициенту вязкости жидкости (рис. 9.10; ламинарное течение вязкой жидкости в трубе при постоянной разности давлений  $p_1 - p_2 = \Delta p$  на её концах);

$$\omega = - \frac{\Delta p r^2}{\Delta x 8\eta} \quad (9.16)$$

Формула (9.16) называется законом Пуазейля, знак минус показывает, что скорость течения направлена противоположно градиенту давления. Так как объём жидкости  $\Delta V$ , протекающей за время  $\Delta t$  через трубу, выражается формулой

$$\Delta V = S\omega \cdot \Delta t = \pi r^2 \omega \cdot \Delta t, \quad (9.17)$$

где  $S = \pi r^2$  – площадь поперечного сечения трубы, то, подставив выражение скорости из формулы (9.16) в формулу (9.17),

получим

$$\Delta V = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta x} \cdot \Delta t, \quad (9.18)$$

т.е. объём жидкости, протекающей по трубе, пропорционален четвёртой степени радиуса трубы, времени и градиенту давления жидкости и обратно пропорционален коэффициенту вязкости жидкости. По формуле (9.18) можно опытным путем определить коэффициент вязкости жидкости, что и было сделано Пуазейлем.

Благодаря вязкости тело, движущееся в жидкости, увлекает прилегающие к нему слои жидкости и потому испытывает сопротивление (трение) со стороны жидкости. Сила сопротивления зависит от скорости движения тела, его размеров и формы. Как установил английский физик и математик Стокс, для тел шарообразной формы, движущихся с небольшой скоростью, сила сопротивления жидкости пропорциональна коэффициенту вязкости жидкости  $\eta$ , радиусу шара  $r$  и скорости движения  $\omega$ :

$$F = 6\pi\eta r \omega. \quad (9.19)$$

Формула (9.19), называемая *законом Стокса*, применима также к движению шарообразных тел в газе, например, к случаю падения дождевых капель в атмосфере.

На шар массой  $m$  и радиусом  $r$  падающий со скоростью  $\vartheta$  в жидкости с вязкостью  $\eta$ , действуют три силы: сила тяжести  $F_1$ , выталкивающая сила жидкости  $F_2$  и сила сопротивления жидкости  $F$  (рис. 9.11).

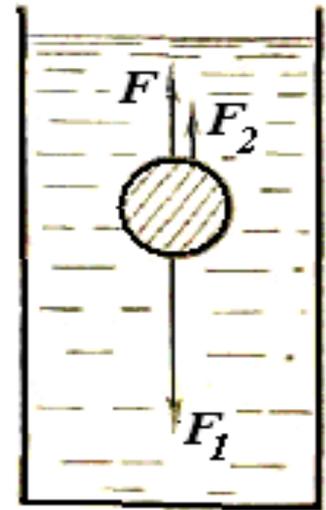


Рис.9.11

Так как силы  $F_1$  и  $F_2$  постоянны, а сила  $F$  возрастает с увеличением скорости движения шара, то с некоторого момента времени эти силы уравновесят друг друга:

$$F_1 = F_2 + F$$

Тогда шар будет двигаться равномерно. Учитывая, что, по закону Ньютона,

$$F_1 = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g ,$$

а по закону Архимеда

$$F_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g ,$$

где  $\rho_1$  – плотность шара,  $\rho_2$  – плотность жидкости и  $g$  – ускорение силы тяжести, напишем

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 g = 6\pi\eta r \omega + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_2 g ,$$

откуда после соответствующих преобразований получим выражение

$$\eta = \frac{2r^2 g(\rho_1 - \rho_2)}{9\omega} ,$$

по которому можно определить опытным путём коэффициент вязкости жидкости. Из последней формулы можно выразить скорость падения шара:

$$\omega = \frac{2r^2 g(\rho_1 - \rho_2)}{9\eta} .$$

По этой формуле определяется, например, скорость падения дождевых капель в воздухе.

Ламинарный характер течения жидкости (или газа) имеет место только при небольших скоростях. При больших скоростях в потоке появляются вихри, перемешивающие между собой все слои жидкости; такое движение называется *турбулентным*. В этом случае скорость течения становится почти одинаковой по всему сечению трубы (или иного русла) и лишь вблизи её стенок возникают очень большие градиенты скорости (рис. 9.12;  $\omega$  – скорость потока,  $a$  – вихрь в потоке).

Сила трения, действующая на тело, находящееся в турбулентном потоке, резко возрастает, становясь пропорциональной уже не первой степени, а квадрату и даже кубу скорости.

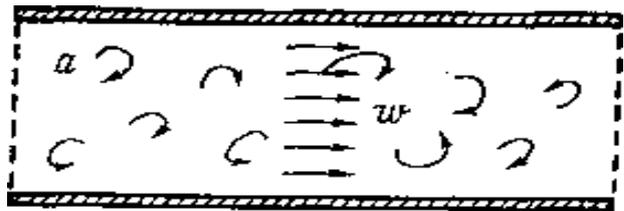


Рис.9.12

Турбулентное движение можно, например, наблюдать в водном потоке на узких и мелких участках русла реки; здесь появляются характерные водяные вихри – водовороты. В воздушном потоке это движение наблюдается, например, вблизи строений; возникающие здесь при сильном ветре воздушные вихри поднимают с земли и «крутят» пыль, обрывки бумаги и другие лёгкие предметы.

### § 9.9. Внутреннее давление в жидкости. Поверхностное натяжение и свободная энергия поверхности жидкости

На каждую молекулу жидкости действуют силы притяжения со стороны окружающих молекул, удалённых от неё на расстояние, не превышающее  $1,5 \cdot 10^{-7}$  см, т.е. находящихся (центрами) внутри сферы радиусом  $R = 1,5 \cdot 10^{-7}$  см (см. рис. 9.13).

Эта сфера называется *сферой молекулярного действия*. Поскольку радиус  $r$  самих молекул составляет приблизительно  $5 \cdot 10^{-8}$  см, то  $R \approx 3r$ , т.е. радиус сферы молекулярного действия приблизительно равен полутора диаметрам молекулы.

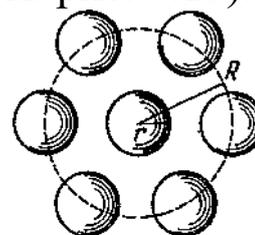


Рис.9.13

Следовательно, каждая молекула жидкости взаимодействует только с непосредственно прилегающими к ней соседними молекулами. Рассмотрим молекулу, расположенную внутри жидкости (а и б), налитой в сосуд (рис. 9.14). Со всех сторон её окружает в среднем одинаковое число молекул, поэтому результирующая сил притяжения, действующих на молекулу, в среднем равна нулю. Иначе обстоит дело с молекулой, лежащей на поверхности жидкости (рис. 9.14, в и г).

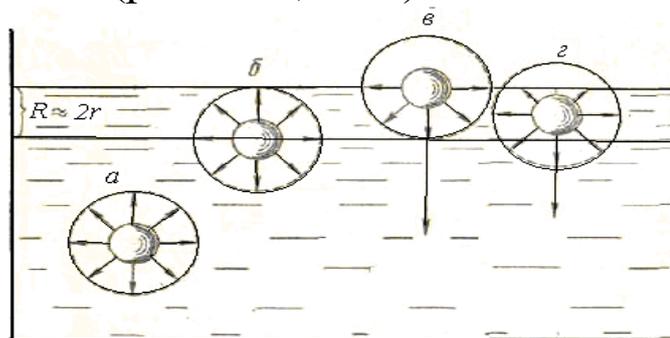


рис. 9.14

Так как концентрация молекул в расположенном над жидкостью газе мала по сравнению с концентрацией молекул в жидкости, то результирующая сил, действующих на молекулу, оказывается не равной нулю и направленной внутрь жидкости перпендикулярно её поверхности. В таком же положении будут находиться все молекулы, лежащие в поверхностном слое жидкости толщиной, приблизительно равной радиусу сферы молекулярного действия.

Таким образом, поверхностный мономолекулярный слой жидкости толщиной  $1,5 \cdot 10^{-7}$  см оказывает на всю жидкость давление, равное сумме результирующих сил, действующих на все молекулы, лежащие в одном квадратном метре этого слоя. Это давление называется внутренним, или молекулярным.

Благодаря тому что молекулы жидкости находятся близко друг от друга, жидкость оказывается трудно сжимаемой: вступающие в действие на очень малых расстояниях силы отталкивания между молекулами препятствуют сжатию жидкости. Так как внутреннее давление направлено перпендикулярно поверхности жидкости, то масса жидкости, не подверженная действию внешних сил (рис. 9.15, *а*) должна принять форму шара (рис. 9.15, *б*), ибо только в этом случае силы внутреннего давления взаимно уравниваются. Такое явление можно наблюдать на маленьких массах жидкости, для которых действие силы тяжести пренебрежимо мало по сравнению с действием сил внутреннего давления.

Сферическую форму принимают, например, мелкие дождевые капли, масло, налитое в смесь воды со спиртом, имеющую плотность, равную плотности масла (опыт Плато).

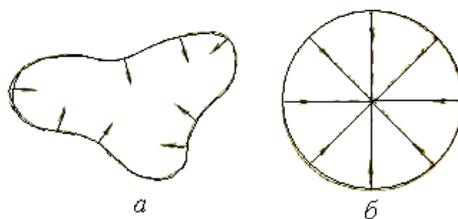


Рис.9.15

В этом случае сила тяжести, действующая на масло, компенсируется, по закону Архимеда, выталкивающей силой воды, делая масло как бы невесомым.

Форме шара соответствует, как известно, наименьшая поверхность при данном объёме. Следовательно, под влиянием

молекулярных сил поверхность жидкости сокращается до минимально возможных размеров. Это означает, что *поверхностный слой жидкости подобен эластичной растянутой плёнке*, например, оболочке резинового мяча.

Напряжённое состояние поверхностного слоя жидкости называется *поверхностным натяжением*, оно вызвано силами сцепления между молекулами этого слоя. Выделим мысленно в поверхностном слое жидкости круговой контур длиной  $l$  (рис. 9.16). Молекулы жидкости, составляющие контур, притягиваются молекулами, расположенными внутри контура; *силы притяжения касательные к поверхности жидкости и перпендикулярны контуру*. Сумма сил притяжения, действующих на контур, ограничивающий поверхность жидкости, называется *силой поверхностного натяжения  $F$* . Эта сила пропорциональна числу молекул, прилегающих к контуру, которое в свою очередь пропорционально длине контура; следовательно,

$$F = \alpha \cdot l, \quad (9.20)$$

где  $\alpha$  – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом поверхностного натяжения*.

Очевидно, что с такой же силой поверхностного натяжения действуют на контур и молекулы, расположенные вне его. Поэтому контур находится в равновесии. Для того чтобы обнаружить действие силы поверхностного натяжения, надо устранить ограниченную им внутреннюю или внешнюю часть поверхности жидкости. Это можно сделать, например, следующим образом. «Натянув» на проволочную раму плёнку мыльной воды, надо положить на неё петлю (контур) из тонкой нитки (рис. 9.17, а) и затем проткнуть плёнку внутри петли (рис. 9.17, б). Под действием силы поверхностного натяжения со стороны сохранившейся (внешней) части плёнки контур немедленно растянется, приняв форму окружности.

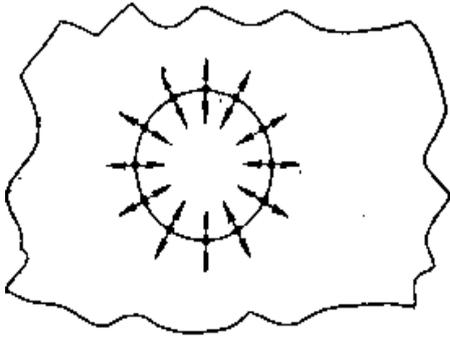


Рис.9.16

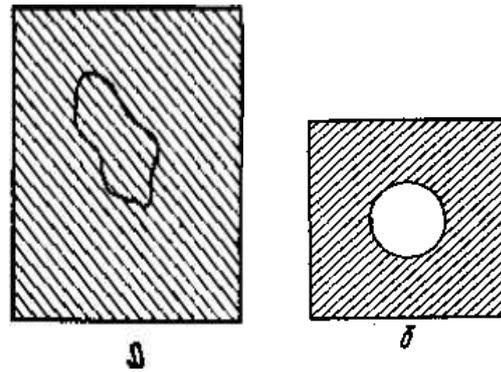


Рис.9.17

Из формулы (9.20) следует, что

$$\alpha = \frac{F}{l}, \quad (9.21)$$

т. е. коэффициент поверхностного натяжения жидкости равен силе поверхностного натяжения, действующей на единицу длины контура, ограничивающего поверхность жидкости. Измеряется  $\alpha$  в Н/м. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости имеет порядок  $10^{-2} - 10^{-1}$  Н/м; для воды, например, он равен 0,073 Н/м, для ртути – 0,54 Н/м. С повышением температуры коэффициент поверхностного натяжения уменьшается в связи с увеличением среднего расстояния между молекулами жидкости.

Для растяжения (увеличения) поверхности жидкости необходимо совершить работу против молекулярных сил. Действительно, растяжение поверхностного слоя сопровождается извлечением из глубинных слоёв на поверхность новых молекул жидкости, чему препятствуют направленные внутрь жидкости результирующие сил притяжения «глубинных» молекул. Наоборот, при сокращении поверхности молекулярные силы сами совершают работу по затягиванию «лишних» молекул с поверхности в глубь жидкости. Таким образом, при растяжении поверхности жидкости её потенциальная энергия увеличивается, при сокращении – уменьшается.

Определим работу, совершаемую при сокращении поверхности жидкости. С этой целью «натянем» жидкую плёнку на проволочную рамку, правая сторона которой, имеющая длину  $l$ , может свободно перемещаться влево от положения, зафик-

сированного на рис. 9.18. Тогда под действием постоянной силы поверхностного натяжения эта сторона будет перемещаться влево, а поверхность плёнки – сокращаться. Работа  $\Delta A$ , совершенная при сокращении плёнки в связи с перемещением стороны рамки на расстояние  $\Delta x$ , выразится формулой

$$A = F \cdot \Delta x = 2\alpha l \cdot \Delta x = \alpha \cdot \Delta S \quad (9.22)$$

где  $\Delta S = 2l \cdot \Delta x$  – изменение площади поверхности плёнки. Множитель 2 обусловлен тем, что плёнка имеет две поверхности.

Работа  $\Delta A$  совершается за счёт уменьшения потенциальной энергии поверхности плёнки.

Та часть потенциальной энергии поверхности жидкости, которая может перейти в работу по изотермическому сокращению поверхности жидкости, называется свободной энергией поверхности жидкости  $\Delta W$ .

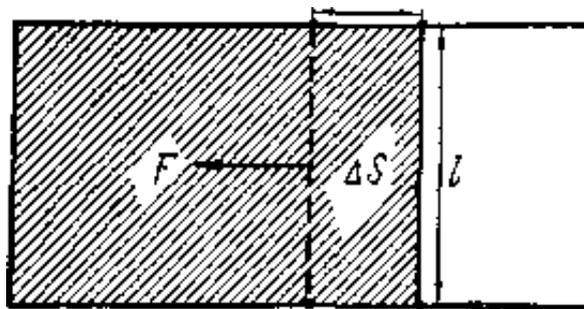


Рис.9.18

Из формулы (9.22) следует, что,

$$\Delta W = \Delta A = \alpha \cdot \Delta S.$$

Очевидно, что свободная энергия всей поверхности жидкости равна произведению коэффициента поверхностного натяжения на площадь этой поверхности:

$$W = \alpha \cdot S. \quad (9.23)$$

Из формулы (9.23) следует другое определение  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{W}{S}. \quad (9.24)$$

т.е. коэффициент поверхностного натяжения равен свободной энергии единицы поверхности жидкости. Поэтому  $\alpha$  можно ещё измерять и в Дж/м<sup>2</sup>.

Существование поверхностной плёнки можно легко обнаружить, если, например, аккуратно положить на воду лезвие безопасной бритвы: слегка прогнув поверхностную плёнку, лезвие останется лежать на ней. В водоёмах по поверхностной плёнке воды свободно бегают и прыгают насекомые «водомерки». Улитка «прудовик», имеющая массу до 50 г, ползает по нижней стороне поверхностной плёнки воды, как муха по

потолку. Наличием поверхностной пленки обусловлено образование пены на воде, представляющей собой скопление множества мелких пузырьков воздуха, под этой плёнкой: пузырьки приподнимают плёнку, не прорывая её. Слипание мокрых волос, мокрых песчинок и т.п. также связано с жидкими пленками, с их стремлением приобрести минимальную поверхность. При соприкосновении друг с другом нескольких мокрых песчинок окружающие их тонкие водяные оболочки сливаются в одну, поверхность которой (рис.9.19, б) будет меньше суммы поверхностей оболочек на отдельных песчинках (рис 9.19 а)

В результате этого комплекс песчинок оказывается прочно стянутым поверхностной плёнкой воды. На поверхностное натяжение жидкости большое влияние



Рис.9.19

оказывают находящиеся в ней примеси. Например, мыло, растворенное в воде, уменьшает её коэффициент поверхностного натяжения с 0,075 до 0,045 Н/м. Вещество, ослабляющее поверхностное натяжение жидкости, называется *поверхностно-активным*. По отношению к воде поверхностно-активными являются нефть, спирт, эфир, мыло и многие другие жидкие и твёрдые вещества.

С точки зрения молекулярной теории, влияние поверхностно-активных веществ объясняется следующим образом. Силы притяжения между молекулами самой жидкости больше сил притяжения между молекулами жидкости и поверхностно – активной примеси. Поэтому расположенные в поверхностном слое молекулы жидкости притягиваются внутрь жидкости сильнее, чем молекулы примеси. В результате молекулы уходят из поверхностного слоя внутрь жидкости, а молекулы поверхностно-активного вещества вытесняются на поверхность.

Некоторые вещества увеличивают поверхностное натяжение жидкости в связи с тем, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Очевидно, что молекулы таких примесей будут втянуты

внутри жидкости и в поверхностном слое останутся преимущественно молекулы жидкости. По отношению к воде примером такого рода примесей могут служить сахар и соль.

Таким образом, поверхность мыльной воды будет состоять преимущественно из молекул мыла, поверхность водного раствора спирта из молекул спирта, а поверхность водного раствора сахара будет состоять преимущественно из молекул воды.

Добавленная в небольшом количестве к воде нефть, будучи поверхностно-активным веществом, значительно ослабляет поверхностную плёнку воды. Плёнка уже не выдерживает тяжести личинки. Личинка погружается на глубину и, лишённая воздуха, погибает.

Возвращаясь теперь к формуле (9.23), можно сказать, что уменьшение свободной энергии поверхности жидкости может осуществляться двумя путями: во-первых, сокращением поверхности жидкости и, во-вторых, ослаблением поверхностного натяжения с помощью поверхностно-активных веществ.

### § 9.10. Дополнительное давление под искривлённой поверхностью жидкости. Формула Лапласа

Под искривлённой поверхностью жидкости помимо внутреннего давления создаётся ещё дополнительное давление, обусловленное кривизной поверхности. Представим себе жидкость в трёх сосудах, в одном из которых её поверхность имеет выпуклую форму, в другом плоскую, и в третьем – вогнутую.

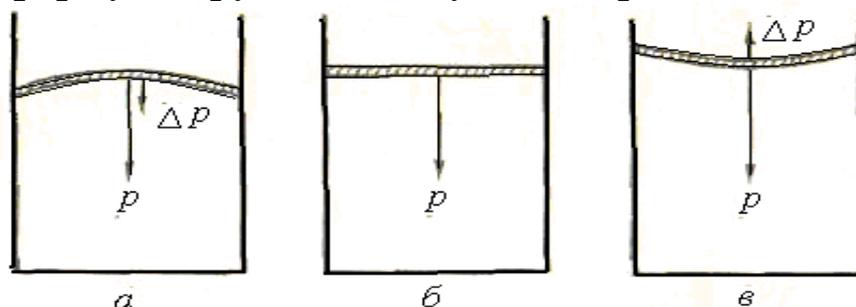


Рис.9.20

Поскольку поверхностный слой жидкости подобен напряжённой плёнке, выпуклая поверхность, стремясь сократиться и принять плоскую форму, будет, очевидно, оказывать на жидкость

дополнительное давление  $\Delta p$ , направленное так же, как внутреннее давление  $p$  (рис. 9.20, а). По той же причине под вогнутой поверхностью возникает дополнительное давление, направленное противоположно внутреннему давлению (рис. 9.20, в). Под плоской поверхностью дополнительного давления не будет (рис. 9.20, б).

Естественно предположить, что величина дополнительного давления должна зависеть от величины силы поверхностного натяжения жидкости и от степени искривлённости её поверхности, иначе говоря, от коэффициента поверхностного натяжения  $\alpha$  и радиуса кривизны поверхности  $R$ . Характер зависимости тоже очевиден: дополнительное давление должно быть *пропорционально* коэффициенту поверхностного натяжения и *обратно пропорционально* радиусу кривизны поверхности жидкости

$$\Delta p \approx \frac{\alpha}{R}.$$

Точное выражение для дополнительного давления под жидкой искривлённой поверхностью любой формы теоретически вывел в 1805 г. французский математик и физик *Лаплас*.

$$\Delta p = \pm \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (9.25)$$

Это выражение называется *формулой Лапласа*. Знак плюс соответствует выпуклой поверхности, знак минус – вогнутой поверхности;  $R_1$  и  $R_2$  – *радиусы кривизны двух нормальных взаимно перпендикулярных сечений поверхности*, изображённых на рис. 9.21. Если искривлённую поверхность пересечь двумя плоскостями ( $A_1O_1B_1$  и  $A_2O_2B_2$ ) так, чтобы они были взаимно перпендикулярны и содержали в себе нормаль  $n$  к поверхности в точке  $M$ , то на поверхности получатся две дуги  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  радиусами  $R_1$  и  $R_2$ ; это и есть радиусы кривизны *нормальных взаимно перпендикулярных сечений*.

Полусумма  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$  называется *средней кривизной поверхности* в точке  $M$ . Для всех форм поверхности, которые могут образоваться у жидкости, средняя кривизна остаётся постоянной для любой пары нормальных взаимно перпендикулярных сечений поверхности в данной точке. В случае сферической поверхности  $R_1=R_2=R$ , поэтому, согласно формуле Лапласа, дополнительное давление будет

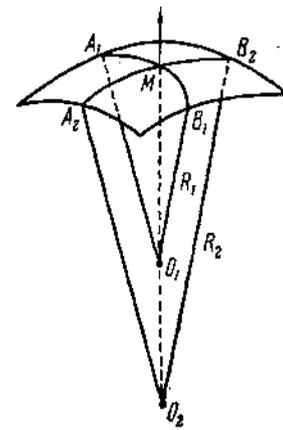


Рис.9.21

$$\Delta p = \pm \frac{2\alpha}{R} \quad (9.26)$$

В случае цилиндрической поверхности следует взять одно сечение поперёк цилиндра, другое – вдоль его образующей. Тогда, очевидно,  $R_1=R$  и  $R_2=\infty$  (рис. 9.22).

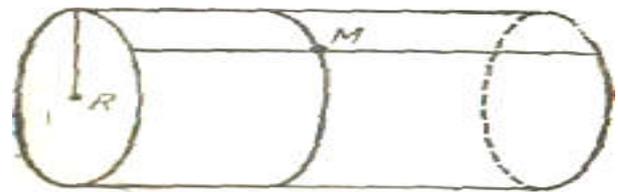


Рис.9.22

Поэтому дополнительное давление будет

$$\Delta p = \pm \frac{\alpha}{R} \quad (9.27)$$

Наконец, в случае плоской поверхности

$$R_1=R_2=\infty \text{ и } \Delta p = \pm \alpha \left( \frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty} \right) = 0.$$

При большой кривизне поверхности, которая имеет место, например, у очень маленьких капелек, дополнительное давление может быть довольно значительным. Подсчитаем  $\Delta p$  для капельки воды радиусом 0,001 мм

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R} = \frac{2 \cdot 73 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}}{10^{-6} \text{ м}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

Отметим, что из капелек данного размера образуются туманы и дымки. Дополнительное давление играет большую

роль в так называемых *капиллярных явлениях*.

### § 9.11. Капиллярные явления; формула Жюрена

Рассмотрим некоторые молекулярные явления, обнаруживающиеся на границе соприкосновения жидкости с твёрдым телом. Если силы сцепления между молекулами жидкости больше, чем между молекулами жидкости и твёрдого тела, то жидкость стремится уменьшить границу (площадь) своего соприкосновения с твёрдым телом, по возможности отступая от него. Капля такой жидкости на горизонтальной поверхности твёрдого тела примет форму сплюснутого шара (рис. 9.23, *а*).

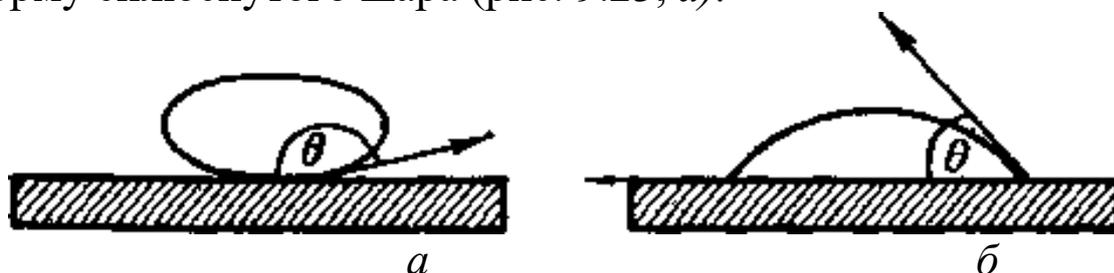


рис.9.23

В этом случае жидкость называется *не смачивающей* твёрдое тело. Угол  $\theta$ , образованный поверхностью твёрдого тела и касательной к поверхности жидкости, называется *краевым*. Для не смачивающей жидкости  $\theta > 90^\circ$ . Случай, когда  $\theta = 180^\circ$ , называется *полным несмачиванием*.

Если силы сцепления между молекулами жидкости меньше, чем между молекулами жидкости и твёрдого тела, то жидкость стремится увеличить границу соприкосновения с твёрдым телом. Капля такой жидкости примет форму, изображённую на рис. 9.23, *б*. В этом случае жидкость называется *смачивающей* твёрдое тело; краевой угол  $\theta < 90^\circ$ . При  $\theta = 0$  наблюдается *полное смачивание*: жидкость растекается по всей поверхности твёрдого тела.

Очевидно, что смачиваемость и несмачиваемость – понятия относительные: жидкость, смачивающая одно твёрдое тело, может не смачивать другое тело. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин; ртуть не смачивает стекло, но смачивает медь.

Согласно изложенному, поверхность жидкости, налитой в сосуд, должна искривиться вблизи его стенок: приподняться – в случае смачивающей жидкости (рис. 9.24, *а*) и опуститься – в случае несмачивающей (рис. 9.24, *б*). В узком сосуде краевые искривления охватывают всю поверхность жидкости, делая её целиком изогнутой: вогнутой – для смачивающей жидкости (рис. 9.25, *а*), выпуклой – для несмачивающей (рис. 9.25, *б*). Такая изогнутая поверхность называется *мениском*. Узкие сосуды–трубки, щели и т.п. – называются *капиллярами*. Благодаря большой кривизне мениска под ним создается значительное избыточное давление, что ведёт к поднятию (в случае смачивания) или опусканию (в случае несмачивания) жидкости в капилляре. В самом деле, пусть конец цилиндрического капилляра радиусом  $r$  погружен в смачивающую жидкость (рис. 9.26).

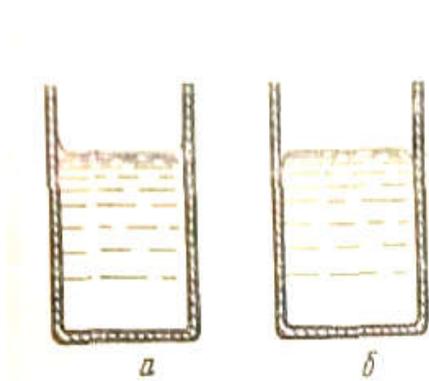


Рис.9.24

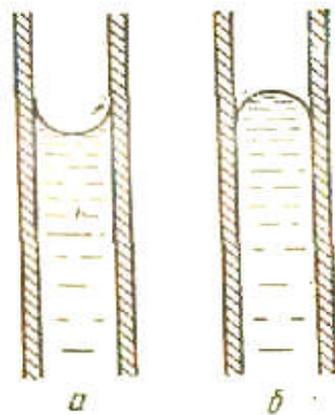


Рис.9.25

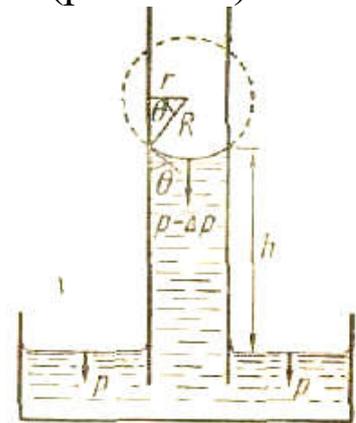


рис.9.26

Поверхность жидкости в капилляре примет вогнутую сферическую форму. Внутреннее давление  $p$  жидкости в капилляре будет меньше, чем вне капилляра, на величину избыточного давления под сферической поверхностью:

$$\Delta p = \frac{2\alpha}{R},$$

где  $R$  – радиус кривизны мениска,  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Поэтому жидкость в капилляре поднимается на такую высоту  $h$ , при которой оказываемое ею давление станет равным избыточному:

$$h \rho g = \frac{2 \alpha}{R},$$

откуда

$$h = \frac{2 \alpha}{\rho g R},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $g$  – ускорение силы тяжести.

Так как угол между радиусами  $r$  и  $R$  (см. рис. 9.26) и краевой угол  $\Theta$  равны между собой (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), то

$$R = \frac{r}{\cos \Theta}.$$

Подставляя это значение в формулу высоты, получим

$$h = \frac{2 \alpha \cos \Theta}{\rho g r}. \quad (9.28)$$

Таким образом, *высота поднятия смачивающей жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу*. Очевидно, что формула (9.28) применима и к случаю опускания несмачивающей жидкости в капилляре. Соотношение (9.28) называется *формулой Борелли-Жюрена* (оно было получено в 1670 г. итальянским ученым Борелли и независимо от него английским ученым Жюреном в 1718 г.). Величина  $2\alpha/\rho g$ , входящая в правую часть формулы Жюрена, называется *капиллярной постоянной*; она является важной физико-химической характеристикой жидкости.

В очень тонких капиллярах подъём жидкости может достигать большой высоты. Например, в капилляре диаметром 1 мкм вода ( $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, а  $\alpha = 0,073$  Н/м) при условии полного смачивания ( $\Theta = 0$ ) поднимется на высоту

$$h = \frac{2 \alpha \cos \Theta}{\rho g r} = \frac{2 \cdot 0,073 \cdot 1}{10^3 \cdot 9,8 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} \approx 30 \text{ м}.$$

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Если, как мы видели ранее, поступление питательных веществ в корневую систему растения регулируется процессом диффузии, то подъём питательного раствора по стеблю или стволу растения в значительной мере обусловлен явлением капиллярности: раствор поднимается по тонким капиллярным трубкам, образованным стенками растительных клеток. По

капиллярам почвы поднимается вода из глубины в поверхностные слои почвы. Уменьшая диаметр почвенных капилляров путем уплотнения почвы, можно усилить приток воды к поверхности почвы, т.е. к зоне испарения, и этим ускорить высушивание почвы. Наоборот, разрыхляя поверхность почвы и создавая тем самым прерывистость в системе почвенных капилляров, можно задержать приток воды к зоне испарения и замедлить высушивание почвы. Именно на этом основаны известные агротехнические приёмы регулирования водного режима почвы – *прикатка и боронование*. По капиллярам кладки зданий происходит подъём грунтовой воды (в отсутствие гидроизоляции); по капиллярам фитиля поднимаются горючие и смазочные вещества (фитильная смазка); на капиллярности основано использование промокательной бумаги и т. п.

Отметим, наконец, что пчёлы извлекают нектар из глубин цветка посредством очень тонкой капиллярной трубки, находящейся внутри пчелиного хоботка.

## Глава X. ИЗМЕНЕНИЕ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА (ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ)

### § 10.1. Понятие о фазовых превращениях и диаграмме состояний вещества

Всякое вещество может находиться в трех агрегатных состояниях: твердом, жидком и газообразном. Эти состояния называются также *фазами* вещества. От соотношения между средней кинетической и средней потенциальной энергиями частиц вещества (молекул, атомов, ионов) зависит, в какой именно фазе оно будет находиться, а это соотношение в свою очередь зависит от внешних условий: от температуры и давления. При высоких температурах и низких давлениях вещество находится в газообразной фазе, при низких температурах и высоких давлениях – в твердой фазе, промежуточные значения температуры и давления соответствуют жидкой фазе вещества.

Таким образом, в конечном счете, *фазовые превращения вещества обусловлены изменениями температуры и давления.*

Вместо того чтобы описывать условия (температуру и давление) существования фаз данного вещества посредством числовой таблицы, общепринято пользоваться графиком с координатными осями  $T$  (температура) и  $p$  (давление). Такой график называется *диаграммой состояний* или *диаграммой равновесия фаз*.

На рис.10.1 изображена примерная диаграмма состояний некоторого вещества. Линиями  $AD$ ,  $BD$  и  $CD$  поле диаграммы разделяется на три области, соответствующие условиям существования твердой I, жидкой II и газообразной III фаз. Линии диаграммы называются *кривыми фазового равновесия*. Они соответствуют условиям сколь угодно долгого сосуществования (равновесия) двух смежных фаз: кривая  $AD$  – сосуществованию твердого тела и жидкости, кривая  $CD$  жидкости и газа, кривая  $BD$  твердого тела и газа. Точка  $D$  называется *тройной*, она соответствует условиям сосуществования всех трех фаз вещества. Например, тройная точка воды соответствует одновременному существованию льда, воды и водяного пара, соприкасающихся, между собой. Тройная точка воды характеризуется температурой

$T = 273,16 \text{ K}$  и давлением  $p = 610,514 \text{ Па}$ .

Диаграмма равновесия фаз удобна для выяснения вопроса о том, в каком состоянии находится данное вещество при заданных условиях ( $p$  и  $T$ ). Ответ получается сразу же после построения на диаграмме точки по заданным координатам ( $p$ ,  $T$ ). Например, при условиях, соответствующих точке 1, вещество находится в газообразном состоянии, при условиях,

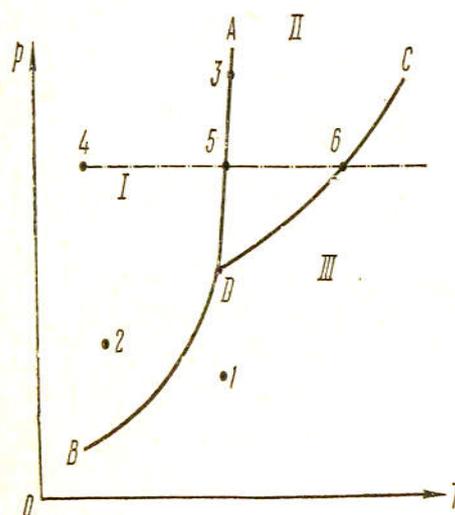


Рис.10.1

соответствующих точке 2, – в твёрдом состоянии, а при условиях, соответствующих точке 3, – одновременно в твёрдом и жидком состояниях (равновесие фаз). На диаграмме удобно изображать также процессы изменения состояния вещества. Например, изобарическое ( $p = \text{const}$ ) нагревание вещества, находящегося в твёрдом состоянии (точка 4), изображается прерывистой прямой, параллельной оси абсцисс. Эта прямая показывает, что при температуре, соответствующей точке 5, тело начинает плавиться, при более высокой температуре превращается в жидкость, при температуре, соответствующей точке 6, начинает превращаться в газ и при дальнейшем повышении температуры целиком переходит в газообразное состояние. В последующих параграфах мы познакомимся с фазовыми превращениями вещества более подробно.

## § 10.2. Реальный газ. Уравнение Ван-дер-Вальса

Уравнение Клапейрона – Менделеева описывает поведение *идеального газа*, молекулы которого можно рассматривать как материальные точки, не взаимодействующие друг с другом. Молекулы реального газа имеют, как мы знаем, некоторый, хотя и очень малый, размер и связаны между собой силами сцепления, правда, тоже малыми. Однако при низких температурах или при высоких давлениях, когда молекулы газа находятся близко друг

от друга, пренебрегать их размерами и силами сцепления уже недопустимо. В этих случаях уравнение Клапейрона – Менделеева, т.е. уравнение состояния идеального газа, оказывается уже весьма неточным. Чтобы получить уравнение состояния реального газа, голландский физик Ван-дер-Вальса в 1873 г. ввёл в уравнение Клапейрона – Менделеева поправки на размер молекул и на действие сил сцепления между ними. Это было сделано следующим образом. В уравнении Клапейрона – Менделеева для моля газа

$$pV_M = RT, \quad (10.1)$$

$V_M$  – объём газа, или, что то же, объём сосуда, предоставленный для движения молекул.

У реального газа часть  $b$  этого объёма занимают сами молекулы. Поэтому фактический свободный объём, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет меньше  $V_M$  и равен

$$V_M - b.$$

Подставляя это значение вместо  $V_M$  в формулу (10.1), получим

$$p(V_M - b) = RT \quad (10.2)$$

Объём  $b$ , занимаемый самими молекулами, больше суммы собственных объёмов этих молекул, так как даже при самой плотной упаковке между молекулами остались бы «бесполезные» зазоры, недоступные для движения молекул (рис. 10.2). В действительности же эти зазоры будут ещё большими, так как силы отталкивания не допустят такой плотной упаковки молекул. Расчёты показывают, что объём, занимаемый самими молекулами моля газа, приблизительно равен учетверённому собственному объёму этих молекул:

$$b \approx 4 \gamma N_A,$$

где  $\gamma$  – собственный объём молекулы,  $N_A$  – постоянная Авогадро. Давление  $p$  в формуле (10.1), производимое на идеальный газ стенками сосуда, является внешним. Действие сил притяжения между молекулами реального газа вызывает добавочное сжатие газа, создавая тем самым

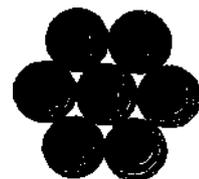


Рис.10.2

добавочное *внутреннее давление*  $p'$ , аналогичное внутреннему давлению жидкости. Поэтому фактическое давление реального газа будет больше  $p$  и равно  $p + p'$ . Подставляя это значение вместо  $p$  в формулу (10.2), получим

$$(p + p') (V_M - b) = RT \quad (10.3)$$

Нетрудно установить, что внутреннее давление  $p'$  должно быть приблизительно пропорционально квадрату плотности газа. Действительно, разделим газ воображаемой плоскостью на две части (рис. 10.3) и рассмотрим слои газа, прилежащие к этой плоскости.

Очевидно, что сила взаимного притяжения этих слоёв пропорциональна числам молекул в каждом из них, т.е. пропорциональна *квадрату* числа молекул газа. Но число молекул пропорционально плотности газа  $\rho$ . Поэтому сила притяжения слоёв, а следовательно, и внутреннее давление  $p'$  пропорциональны квадрату плотности:  $p' \sim \rho^2$ .



Рис.10.3

Так как плотность обратно пропорциональна объёму, то внутреннее давление обратно пропорционально квадрату объёма:

$$p' = \frac{a}{V_M^2},$$

где  $a$  – коэффициент пропорциональности. Подставляя выражение  $p'$  в формулу (10.3), получим

$$\left( p + \frac{a}{V_M^2} \right) (V_M - b) = RT \quad (10.4)$$

Это и есть *уравнение состояния реального газа* или *уравнение Ван-дер-Ваальса* для моля газа.

Преобразуя это уравнение, учитывая, что  $V_M \cdot m/M = V$ , получим уравнение Ван-дер-Ваальса для любой массы газа  $m$ :

$$\left( p + \frac{m^2}{M^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{m}{M} b \right) = \frac{m}{M} RT, \quad (10.5)$$

где  $V$  – объём массы газа,  $M$  – молярная масса газа.

При малых давлениях и высоких температурах объём  $V_M$

становится большим;  $b \ll V_M$  и  $\frac{a}{V_M^2} \ll p$ , т.е. поправки в уравнении Ван-дер-Ваальса становятся пренебрежимо малыми и оно превращается в уравнение Клайперона–Менделеева.

Проведём некоторый анализ уравнения Ван-дер-Ваальса. С этой целью прежде всего составим таблицы зависимости давления от объёма газа *при постоянной температуре* для нескольких значений температуры ( $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$ ). Результаты таких расчётов представлены графически на рис. 10.4. Полученные кривые – *изотермы Ван-дер-Ваальса* – оказываются довольно своеобразными: при низких температурах они имеют волнообразные участки (максимумы и минимумы), при некоторой температуре  $T_K$  на изотерме имеется только *точка перегиба K*, при высоких температурах изотермы Ван-дер-Ваальса похожи на изотермы идеального газа (Бойля–Мариотта или Клапейрона–Менделеева).

С математической точки зрения такой характер изотерм объясняется очень просто. Если привести уравнение Ван-дер-Ваальса к нормальному виду, то оно окажется *кубическим* уравнением относительно объёма  $V_M$ :

$$pV_M^3 - (pb + RT)V_M^2 + aV_M - ab = 0.$$

Кубическое уравнение может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный корень и два мнимых.

Очевидно, что первому случаю соответствуют изотермы при низких температурах (три значения объёма газа  $V_M', V_M''$  и  $V_M'''$  отвечают одному значению давления  $p_1$ ), а второму случаю – изотермы при высоких температурах (одно значение объёма  $V_M$  отвечает одному значению давления  $p$ ).

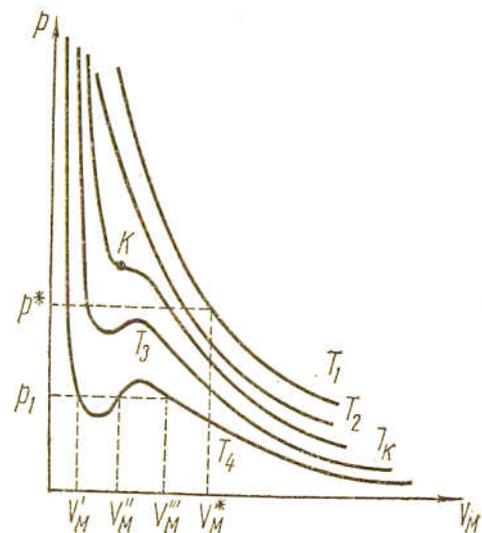


Рис.10.4

### § 10.3. Опыт Эндрюса. Критическая температура

Для практической проверки уравнения состояния реального газа и выяснения физического смысла своеобразного характера изотерм Ван-дер-Ваальса удобно воспользоваться результатами *опыта*, поставленного в 1869 г. незадолго до теоретических исследований Ван-дер-Ваальса английским химиком Эндрюсом.

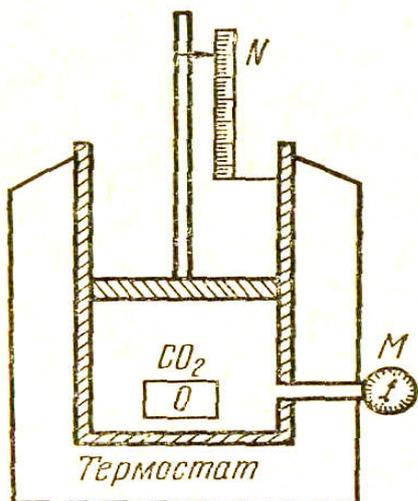


Рис.10.5

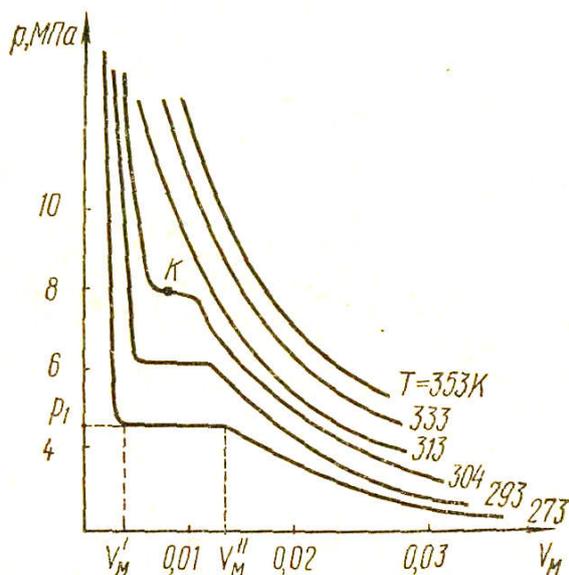


Рис.10.6

Эндрюс экспериментировал с углекислым газом ( $\text{CO}_2$ ). Схема опыта изображена на рис. 10.5. Под поршнем цилиндра помещался моль углекислого газа. Давление и объем газа при любом положении поршня определялись по манометру  $M$  и шкале объемов  $N$ . Через герметически застеклённое окошко  $O$  можно было видеть пространство, занятое газом. Весь цилиндр помещался в термостат, позволявший устанавливать и поддерживать необходимую температуру газа. С помощью этой установки Эндрюс провел с углекислым газом ряд изотермических процессов при различных температурах. Полученные им результаты представлены на рис. 10.6.

В опыте Эндрюса надо отметить следующее весьма важное обстоятельство. До тех пор пока газ сжимался при высоких температурах ( $> 304 \text{ K}$ ), в пространстве под поршнем не происходило никаких *видимых* процессов, когда же сжатие производилось при низких температурах ( $< 304 \text{ K}$ ), Эндрюс увидел, что

на некоторой стадии сжатия под поршнем появлялись капельки жидкости (туман), оседающие на стенки и стекающие на дно цилиндра. В конце концов весь цилиндр заполнился жидкой углекислотой. Давление на всей этой стадии, которой соответствуют горизонтальные участки изотерм, оставалось неизменным.

Таким образом, *горизонтальные участки («плато») экспериментальных изотерм соответствуют стадии сжижения газа, совершающегося при постоянном давлении. Иначе говоря, плато соответствует сосуществованию жидкой и газообразной фаз.*

Давление, при котором начинается сжижение газа, зависит от температуры: уменьшается с уменьшением температуры. Это давление называется *упругостью насыщенного пара*. Сжижение газа начинается при объёме  $V_M''$ , соответствующем началу плато. По мере сокращения объёма от  $V_M''$  до  $V_M'$  всё большее и большее количество газа (точнее, насыщенного пара) переходит в жидкость. При объёме, равном и меньшем  $V_M'$  — вся углекислота находится в жидком состоянии. Жидкость, как мы уже знаем, трудно сжимаема. Поэтому левая ветвь изотермы, соответствующая жидкой фазе, круто поднимается вверх.

Из сравнения экспериментальных (рис. 10.6) и теоретических (рис. 10.4) изотерм следует, что они имеют *одинаковый вид* с той лишь разницей, что превращению газа в жидкость соответствуют: на изотермах Эндрюса — участки плато, а на изотермах Ван-дер-Ваальса — волнообразные участки.

Таким образом, опыт Эндрюса показывает, что уравнение Ван-дер-Ваальса хорошо отражает действительность и что его можно рассматривать как уравнение состояния реального газа, описывающее также состояние жидкости и процесс перехода газа в жидкость.

Вместе с тем необходимо подчеркнуть, что уравнение Ван-дер-Ваальса, будучи одним из лучших приближений к уравнению состояния, является всё же *приближённым*.

Из опыта Эндрюса и аналогичных опытов с другими газами выяснилось, что газ может быть переведён в жидкое состояние

только при температурах, меньших некоторой *определённой* для *данного газа температуры*  $T_k$ ; при температурах, больших  $T_k$ , газ нельзя перевести в жидкое состояние никаким давлением. Температура  $T_k$  называется *критической*. Для углекислого газа  $T_k = 304 \text{ К}$  (см. рис. 10.6).

Итак, *критической называется такая температура, выше которой газ нельзя превратить в жидкость никаким давлением, а ниже которой газ можно превратить в жидкость при некотором давлении, тем меньшем, чем ниже температура.*

Следовательно, газ, находящийся при температуре, большей критической, отличается от газа, находящегося при температуре, меньше критической. В этой связи *газ, находящийся при температуре, меньшей критической, называется паром.*

Изучая поверхностное натяжение на границе жидкости и её пара Д.И. Менделеев в 1860 г., т.е. ещё до исследований Эндрюса и Ван-дер-Ваальса, пришел к выводу о существовании критической температуры (названной им *температурой абсолютного кипения*), при которой *различие в свойствах между жидкостью и газом исчезает и коэффициент поверхностного натяжения обращается в нуль.*

Изотерма реального газа, соответствующая критической температуре, точка перегиба  $K$  и соответствующее ей состояние вещества, объём и давление, соответствующие критическому состоянию (координаты точки  $K$ ), называются *критическими* (см. рис. 10.4).

Исследуя в конце прошлого века критическое состояние вещества, *М. П. Авенариус, А. И. Надеждин* и другие определили критические температуры и давления многих газов и газовых смесей.

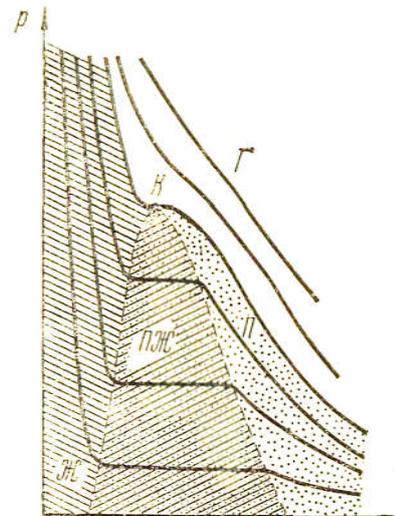


Рис.10.7

Воздух и водород в нормальных атмосферных условиях могут существовать только в газообразном состоянии. На графике изотерм реального газа выделены области, соответствующие газообразной (Г), парообразной (П) и жидкой (Ж) фазам, и область (ПЖ) сосуществования жидкости и насыщенного пара (рис. 10.7).

Вещество	$T_{кр},$ К	$P_{кр},$ $10^5$ Па
Вода	647	218
Аммиак	406	112,3
Углекислота	304	72,7
Кислород	154	49,7
Воздух (без $CO_2$ )	132	38,5
Азот	126	33,4
Водород	33	13,2
Гелий	5	2,3

Из таблицы, где приведены критические температура и давление некоторых веществ, видно, что, например, вода и углекислый газ в нормальных атмосферных условиях находятся при температуре, меньшей критической, и потому могут существовать как в жидком, так и газообразном (парообразном) состояниях.

#### § 10.4. Сжижение газов. Эффект Джоуля – Томсона

Понятие критической температуры сыграло большую роль в физике низких температур и технике сжижения газов. Благодаря ему стало очевидным, что *любой* газ можно превратить в жидкость путём сжатия с предварительным охлаждением до температуры, *меньшей* критической.

В технике для сжижения газов широко применяется машина *Линде*, основанная на так называемом *положительном эффекте Джоуля-Томсона*. Английские физики *Джоуль* и *Томсон* экспериментально обнаружили, что при расширении реального газа в пустоту (т.е. без совершения внешней работы) его температура изменяется (эффект Джоуля – Томсона). При этом может быть два случая:

- 1) *при низкой начальной температуре все газы, расширяясь, охлаждаются (положительный эффект Джоуля – Томсона);*

2) при высокой начальной температуре все газы, расширяясь, нагреваются (отрицательный эффект Джоуля – Томсона).

Совершенно очевидно, что для каждого газа должно существовать такое промежуточное значение температуры, при котором газ, расширяясь, не будет ни охлаждаться, ни нагреваться. Эта температура называется *температурой инверсии*  $T_i$ .

Для подавляющего большинства газов температура инверсии выше нормальной температуры. Поэтому расширяясь при нормальной температуре, газы охлаждаются. Исключение составляют водород ( $T_i < 193$  К) и гелий ( $T_i < 15$  К), которые нагреваются, расширяясь при нормальной температуре.

Схема машины Линде представлена на рис. 10.8. Газ, например воздух, сжимается в компрессоре  $K$  до давления порядка  $2 \cdot 10^7$  Па и охлаждается в холодильнике  $X$  проточной водой (это необходимо в связи с тем, что благодаря положительному эффекту Джоуля – Томсона при сжатии газ нагревается).

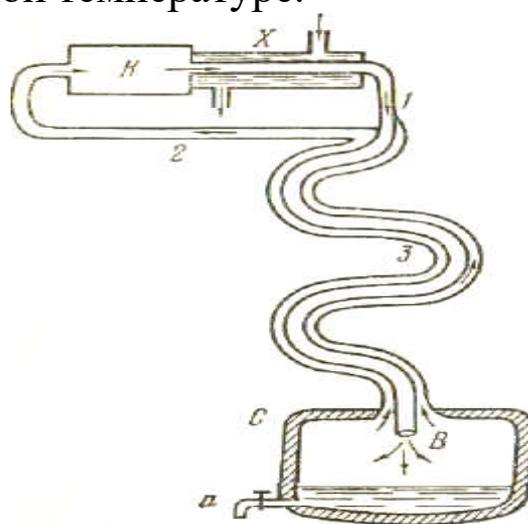


Рис.10.8

Затем сжатый воздух проходит по внутренней трубке 1 змеевика 3 и расширяется на её конце в конденсаторе  $C$  до давления в  $10^5$  Па.

При этом он охлаждается примерно на 20 К. Расширившийся воздух вновь засасывается в компрессор по внешней трубке 2 змеевика, охлаждая вторую порцию сжатого воздуха, текущего по трубке 1. Таким образом, вторая порция газа предварительно охлаждается уже в змеевике на 20 К и затем при расширении в конденсаторе еще на 20 К.

Описанный процесс повторяется многократно. Каждая последующая порция расширяющегося воздуха будет, очевидно, охлаждаться сильнее предыдущей на 20 К. В результате воздух охладится до температуры, меньшей критической.

При дальнейшей работе машины часть расширяющегося воз-

духа будет переводиться в жидкость и стекать на дно конденсатора. Через кран *a* жидкий воздух сливается в дьюаровские сосуды для хранения.

Машиной Линде можно переводить в жидкость все газы, у которых температура инверсии выше нормальной (точнее, комнатной). Водород и гелий следует предварительно охлаждать до температуры  $T < T_i$ : первый – жидким кислородом, второй – жидким водородом.

Более эффективными установками для сжижения газа являются *детандеры* – поршневые машины, в которых газ охлаждается не только за счёт расширения, но и за счёт совершения внешней работы по передвижению поршня. На этом же принципе работает сконструированный *П. Л. Коппецией турбодетандер*, в котором газ, сжатый *всего лишь* до  $5 \cdot 10^5 - 6 \cdot 10^5$  Па, охлаждается, совершая работу по вращению турбины.

## § 10.5. Испарение и конденсация. Кипение

Средняя кинетическая энергия молекул жидкости зависит от температуры – возрастает с её повышением. Однако в связи с хаотичностью теплового движения даже при невысокой температуре всегда имеются отдельные молекулы с повышенной скоростью, а следовательно, и с повышенной кинетической энергией. Они могут преодолеть силы притяжения со стороны других молекул и, «прорвав» поверхностную плёнку жидкости, вылететь наружу – перейти в пар. Этот процесс называется *испарением*. Потеря молекул, обладающих большой кинетической энергией, ведёт к уменьшению внутренней энергии жидкости. Поэтому испарение сопровождается охлаждением жидкости. Чтобы испарение происходило при постоянной температуре, необходимо подводить к жидкости теплоту извне. *Количество теплоты, необходимое для превращения единицы массы жидкости в пар при данной температуре, называется удельной теплотой испарения  $\lambda$  при этой температуре*. Например, для воды при  $0^\circ\text{C}$

$$\lambda = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} = 2,5 \text{ МДж/кг.}$$

Испарение жидкости происходит при любой температуре.

Очевидно, однако, что с повышением температуры интенсивность испарения должна возрастать, так как при этом повышается кинетическая энергия молекул, что облегчает им «прорыв» поверхностной плёнки жидкости.

По этой же причине удельная теплота испарения должна уменьшаться с повышением температуры. Действительно, для воды при  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$   $\lambda = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг} = 2,26 \text{ МДж/кг}$ .

Хаотически движущиеся молекулы пара, подлетая к поверхности жидкости, могут попасть в сферу действия сил притяжения её молекул и перейти в жидкость (как бы утонуть в ней). Этот процесс называется *конденсацией*. При конденсации жидкость нагревается, так как влетающие в неё молекулы пара возвращают ей повышенную кинетическую энергию, унесенную при испарении. Удельная теплота конденсации равна удельной теплоте испарения.

Процессы испарения и конденсации идут одновременно. Если преобладает первый из них, то количество жидкости уменьшается, а количество пара над ней увеличивается. Если же преобладает второй процесс, то имеет место обратная картина. Если число молекул, покидающих жидкость за одну секунду, равно числу молекул, возвращающихся в неё за то же время из пара, то наступает динамическое равновесие: количество жидкости и пара остается неизменным. *Пар, находящийся в равновесии с жидкостью, называется насыщенным*. На диаграмме состояний (см. рис.10.1) этому состоянию соответствует кривая *CD*. *Давление (упругость) насыщенного пара возрастает с повышением температуры*, так как при этом возрастает число вылетающих молекул (т.е. плотность пара) и их кинетическая энергия. Это также отражено на упомянутой диаграмме состояний (наклоном кривой *CD*).

Если упругость насыщенного пара станет равной внешнему (атмосферному) давлению, то характер испарения существенно изменится: испарение будет происходить не только с поверхности жидкости, но и *во всём её объёме*. Внутри жидкости начинают возникать пузырьки пара, всплывающие на поверхность и разрывающиеся над ней. Этот очень интенсивный процесс испарения называется *кипением*. Соответствующая ему темпера-

тура называется *температурой кипения*. Таким образом, *температура кипения жидкости зависит от внешнего давления: возрастает с повышением давления!* Это свойство широко используется в технике для повышения температуры кипения жидкости (паровые машины высокого давления, автоклавы и т.п.). С уменьшением внешнего давления температура кипения понижается. Известно, например, что в высокогорной местности вода закипает при температуре, меньшей  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  (на высоте 5 км – при  $82\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).

Если нагревать жидкость в герметически закрытом сосуде, то по мере повышения температуры плотность жидкости будет уменьшаться (за счёт расширения), а плотность пара – увеличиваться (за счёт повышения упругости насыщения). При этом коэффициент поверхностного натяжения  $a$  и удельная теплота испарения  $X$  будут, как мы уже знаем, уменьшаться (за счёт уменьшения сил сцепления между молекулами). Наконец, при температуре, равной критической, плотность жидкости сравняется с плотностью насыщенного пара, а  $a$  и  $X$  станут равными нулю. Различие между жидкостью и паром исчезает; вещество превратится в газ в полном смысле этого слова.

До сих пор мы предполагали, что образующийся при испарении насыщенный пар остаётся над жидкостью. Если же этот пар будет уноситься в окружающее пространство (путём диффузии или благодаря воздушным потокам), то насыщения и динамического равновесия не наступит: жидкость будет всё время испаряться, причём тем интенсивнее, чем быстрее уносится прочь её пар. Такое явление имеет место, например, при испарении с открытых водных бассейнов (рек, озёр и т.п.). Особенно интенсивно идёт испарение в жаркое время при сильном ветре.

Испарение и конденсация играют исключительно важную роль в процессах влагооборота и теплообмена на земном шаре. Благодаря испарению воды с поверхности водных бассейнов и с поверхности Земли воздух всегда содержит некоторое (переменное) количество водяного пара. Воздух, как говорят, всегда влажен.

При конденсации водяного пара в атмосфере образуются: на

поверхности Земли и наземных предметах – роса, в приземном слое воздуха – туман, в свободной атмосфере – облака. Дождь, выпадающий из облаков, вновь возвращает на Землю испарившуюся с неё воду. Этот кругооборот воды сопровождается кругооборотом теплоты, поскольку в районах, где происходит испарение воды, поглощается огромное количество теплоты, а в районах, где происходит конденсация пара, эта теплота выделяется. Испарением, например, объясняется умеренность климата приморских районов.

Испарение и конденсация регулируют теплообмен и влагообмен животных и растительных организмов. Человеческий организм, например, испаряет за сутки от одного до двух килограммов воды. Излишний нагрев организма сопровождается, как известно, обильным потовыделением. Испарение пота с поверхности кожи и сопутствующее ему поглощение теплоты предотвращает перегрев организма. Растения испаряют воду поверхностью листьев. В связи с этим растения засушливых районов имеют обычно маленькие и немногочисленные листья или даже совсем лишены их. Кроме того, листья этих растений зачастую бывают покрыты тончайшими серебристыми волосками («пушком»), которые затрудняют «проветривание» поверхности листа и, следовательно, замедляют процесс испарения.

### § 10.6. Упругость насыщенного пара над искривлённой поверхностью жидкости и над раствором

Представим себе вогнутую (*а*), выпуклую (*б*) и плоскую (*в*) поверхности жидкости, вблизи которых находится молекула пара (рис. 10.9). Очевидно, что молекула, находящаяся над вогнутой поверхностью,

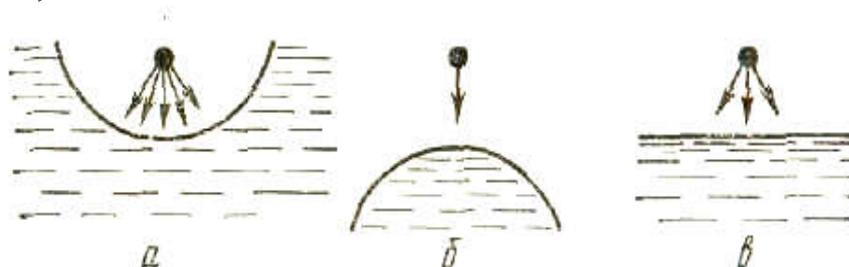


Рис.10.9

притягивается жидкостью сильнее, а молекула, находящаяся над выпуклой поверхностью, – слабее, чем молекула, находящаяся на том же расстоянии над плоской поверхностью жидкости. Это обстоятельство затрудняет испарение с вогнутой поверхности и облегчает испарение с выпуклой поверхности по сравнению с испарением с плоской поверхности. Поэтому в случае (а) динамическое равновесие жидкости с паром должно наступить при меньшей упругости пара, чем в (б). Следовательно, упругость насыщенного пара над вогнутой поверхностью жидкости меньше, а над выпуклой – больше, чем над плоской поверхностью.

Величину изменения упругости насыщенного пара  $\Delta p$  над сферической поверхностью (по сравнению с плоской) можно определить исходя из следующих соображений. Пусть в жидкость, налитую в закрытый сосуд, погружен конец полностью смачиваемой капиллярной трубки радиусом  $r$  (рис. 10.10).

Тогда в трубке на высоте  $h$  создастся вогнутый мениск, радиус кривизны которого также равен  $r$ . В сосуде находится насыщенный пар жидкости. Давление этого пара на уровне плоской поверхности обозначим  $p$ , а на уровне  $h$ , т.е. над мениском, – через  $p_1$ . В связи с тем что в поле силы тяжести давление газа (и пара) уменьшается с высотой,  $p_1$  меньше  $p$  на величину веса столбика пара высотой  $h$  и площадью поперечного сечения  $1 \text{ см}^2$ :

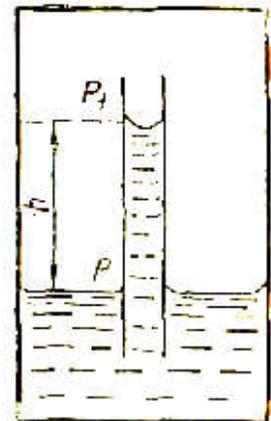


Рис.10.10

$$\Delta p = p - p_1 = \rho_n g h,$$

где  $\rho_n$  – плотность пара.

Согласно формуле Борелли–Жюрена, в случае полного смачивания

$$h = \frac{2\alpha}{r\rho g},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\alpha$  – коэффициент поверхностного натяжения. Тогда

$$\Delta p = \rho_n g \frac{2\alpha}{r\rho g} = \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_n}{p}.$$

Аналогичный расчёт для несмачиваемого капилляра покажет, что упругость насыщенного пара над выпуклой поверхностью на такую же величину больше, чем над плоской поверхностью. Поэтому

$$\Delta p = \pm \frac{2\alpha}{r} \cdot \frac{\rho_n}{p}. \quad (10.6)$$

(знак плюс соответствует случаю выпуклой поверхности, знак минус – случаю вогнутой поверхности).

Зависимость упругости насыщенного пара от кривизны поверхности жидкости обуславливает целый ряд важных метеорологических явлений. Прежде всего следует подчеркнуть, что в свободной атмосфере нет тех *плоских поверхностей*, на которых мог бы конденсироваться водяной пар, насыщенный относительно плоской водной поверхности. Конденсация же пара на отдельных молекулах газов, входящих в состав воздуха, невозможна: крайне малому размеру (радиусу) этих молекул соответствует очень большая упругость насыщенного пара, не встречающаяся в реальной атмосфере. Между тем возникновение облаков свидетельствует о том, что конденсация водяного пара в атмосфере происходит. Дело в том, что пар конденсируется на так называемых *атмосферных ядрах конденсации*: пылинках, частицах дыма, кристалликах морской соли и других мелких «посторонних» частицах, всегда взвешенных в воздухе в достаточном количестве. Адсорбируя молекулы водяного пара, эти ядра покрываются мономолекулярной плёнкой воды, уподобляясь, таким образом, *водяным капелькам достаточно крупного размера*. Для дальнейшей конденсации пара на таких капельках уже не требуется больших перенасыщений ( $\Delta p$ ). Особенно активно действуют в этом отношении электрически заряженные ядра конденсации (атмосферные ионы) и гигроскопические растворимые в воде ядра.

Между прочим, сущность известного агротехнического приёма защиты растений от заморозков путем «задымления» полей, огородов и садов состоит не только в том, что излучение

теплоты с почвы задерживается пленой *самого* дыма. Немаловажную роль здесь может играть конденсация пара на частицах дыма (как на активных ядрах конденсации), приводящая к образованию плотного приземного тумана и сопровождающаяся выделением *теплоты конденсации*.

Если в водяном паре находятся две капельки воды различного размера, причем пар является насыщенным относительно более крупной капельки, то наблюдается следующее интересное явление. Относительно меньшей капельки пар, согласно формуле (10.6), оказывается *ненасыщенным* и капелька начинает испаряться. Благодаря этому упругость пара увеличивается, он становится *пересыщенным* относительно крупной капельки и конденсируется на ней. Таким образом, крупная *капелька растёт за счёт мелкой*. Такая «перекачка» воды с мелких капелек на более крупные происходит в облаках и является одним из способов укрупнения облачных капелек до размера дождевых капель.

«Перекачку» влаги с мелких капель на крупные можно наблюдать под микроскопом, если подышать на слегка охлаждённое предметное стекло, чтобы на нём образовались капли воды.

Дополнительная упругость насыщенного пара над искривлённой поверхностью жидкости обуславливает так называемую *капиллярную конденсацию* на почве. Почвенные капилляры, как правило, смачиваются водой, поэтому почвенная вода образует в них вогнутые мениски. Пар, не насыщенный относительно плоской поверхности, может оказаться пересыщенным относительно менисков воды в почвенных капиллярах и начнёт конденсироваться на них.

Если в жидкости растворено какое-нибудь нелетучее твёрдое вещество (например, сахар в воде), то упругость её насыщенного пара *понижается*. Это можно объяснить тем, что число молекул жидкости на единице поверхности раствора меньше, чем на единице поверхности чистой жидкости (часть поверхности занята молекулами растворенного вещества). Поэтому уменьшается число испаряющихся молекул и следовательно, понижается упругость

насыщенного пара.

В 1886 г. французский химик Рауль установил, что *понижение упругости насыщенного пара над раствором пропорционально числу молекул растворенного вещества в единице объёма раствора и не зависит от их химического состава:*

$$\Delta p = p \frac{n_1}{n + n_1}$$

где  $p$  – упругость насыщенного пара над чистым растворителем,  $n_1$  – число молей вещества, растворенного в  $n$  молях растворителя. Это утверждение называется *законом Рауля, который хорошо выполняется для слабых (идеальных) растворов.*

Из закона Рауля следует, что температура кипения у раствора выше, чем у чистого растворителя, так как раствор надо нагреть сильнее растворителя, чтобы упругость насыщенного пара над ним стала равной внешнему давлению.

## § 10.7. Плавление и затвердевание (кристаллизация). Возгонка

Опыт показывает, что всякое кристаллическое твёрдое вещество переходит в жидкое состояние при *вполне определённой* температуре. Этот процесс называется *плавлением*; соответствующая ему температура называется *температурой плавления*. Ход плавления во времени  $t$  представлен на рис. 10.11.

По мере сообщения теплоты кристаллу его температура  $T$  сначала повышается, а затем, когда он нагреется до температуры плавления  $T_{\text{п}}$ , начнётся его превращение в жидкость. При этом, несмотря на продолжающееся нагревание,

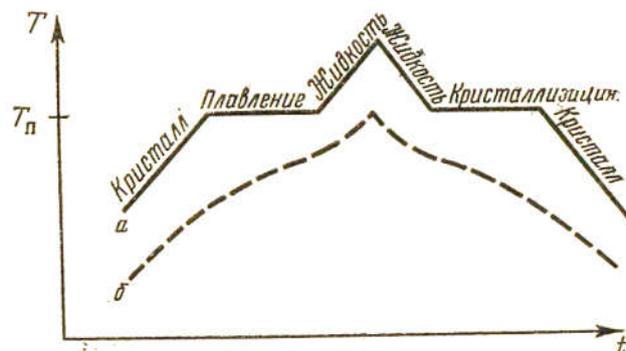


Рис.10.11

*температура вещества остаётся постоянной, равной  $T_{\text{п}}$ .*

Когда весь кристалл расплавится, температура расплава

(т.е. жидкости) опять начнёт повышаться. При охлаждении жидкости имеет место обратная картина (нисходящая ветвь кривой *a*). Сначала температура жидкости понижается; затем начинается кристаллизация, происходящая при *неизменной температуре*. Когда вся жидкость полностью кристаллизуется, температура кристалла опять начнет понижаться. Горизонтальные участки кривой *a* соответствуют сосуществованию жидкой и кристаллической фаз вещества. Температура кристаллизации равна температуре плавления.

Описанный характер процессов плавления и кристаллизации объясняется следующим образом. По мере нагревания вещества кинетическая энергия его молекул возрастает, но остается недостаточной для того, чтобы преодолеть прочные связи, упорядочивающие расположение молекул, и разрушить кристаллическую решётку. Поэтому температура вещества повышается, но оно продолжает оставаться в кристаллическом состоянии. Когда кристалл нагревается до температуры плавления, кинетическая энергия его молекул станет достаточной для разрушения кристаллической решётки. Начнется плавление. Вся теплота, сообщаемая веществу, пойдет теперь на совершение работы по разрушению решётки. Поэтому температура остаётся постоянной до тех пор, пока не расплавится весь кристалл. После этого сообщаемое тепло пойдет опять на увеличение кинетической энергии молекул вещества и его температура опять начнёт повышаться. Если во время плавления прекратить подачу теплоты извне, то процесс плавления приостановится: наступит динамическое равновесие между кристаллической и жидкой фазами.

Аналогично объясняется и характер процесса кристаллизации. Совершая работу по застройке кристаллической решётки, молекулярные силы возвращают в виде теплоты ту энергию, которая была затрачена на разрушение решётки при плавлении. Поэтому, несмотря на продолжающееся охлаждение кристаллизуемого вещества, его температура остаётся постоянной.

*Количество теплоты, необходимое для расплавления единицы массы кристаллического вещества при температуре плавления, называется удельной теплотой плавления  $r$ . Для льда,*

например,  $r=3,35 \cdot 10^6$  Дж/кг.

Аморфные твёрдые тела не имеют определённой температуры плавления; они переходят в жидкое состояние постепенно при непрерывном повышении температуры (кривая *б* на рис. 10.11). Это вполне согласуется с представлением об аморфном теле как об очень вязкой (переохлаждённой) жидкости. Между аморфным твёрдым телом и жидкостью *нет качественного различия*.

Для упорядоченного расположения молекул вещества (его кристаллизации) требуется некоторое время. Если жидкость охлаждается быстро, то возрастающая при этом вязкость может воспрепятствовать размещению молекул в необходимом порядке и тогда вместо кристалла образуется аморфное твёрдое тело. Наличие в жидкости готовых кристалликов (*ядер кристаллизации*) облегчает и ускоряет процесс кристаллизации жидкости (подобно тому, как наличие ядер конденсации облегчает и ускоряет конденсацию водяного пара в атмосфере). Поэтому, например, в сахарном производстве в сироп засыпают сахарную пудру.

Температура плавления зависит от внешнего давления: для большинства веществ она *увеличивается с повышением давления*, как это видно на диаграмме состояний вещества, где кривая равновесия фаз *AD* имеет небольшой наклон вправо. Однако некоторые (немногие) вещества, в том числе лёд, чугун, висмут, сурьма, составляют исключение: у них температура плавления уменьшается с повышением давления. Дело в том, что у этих веществ объём при плавлении *уменьшается* (а не увеличивается, как у всех остальных). Повышение внешнего давления способствует уменьшению объёма этих веществ, помогает плавлению, в результате чего температура плавления уменьшается. У льда, например, это уменьшение равно приблизительно 1 К на 13 МПа.

Почему же названные вещества сжимаются при плавлении и, следовательно, расширяются при кристаллизации? Причина лежит в особенностях структуры этих веществ: их кристаллические решётки имеют большие пустоты. Например, в кристаллической решётке льда имеются широкие шестигранные каналы (рис. 10.12), которые при плавлении льда заполняются молеку-

лами воды и объём вещества уменьшается. Поэтому вода плотнее льда. При  $0^{\circ}\text{C}$  плотность льда  $920 \text{ кг/м}^3$ , а плотность воды  $999,9 \text{ кг/м}^3$ ; максимальную плотность, равную  $1000 \text{ кг/м}^3$ , вода имеет при  $4^{\circ}\text{C}$ .

Рассмотренное свойство воды играет чрезвычайно большую роль в нашей жизни. Поверхностный слой воды, охлаждаясь ниже  $4^{\circ}\text{C}$ , становится менее плотным остаётся на поверхности, благодаря чему задерживается осеннее «выхолаживание» водоёма.

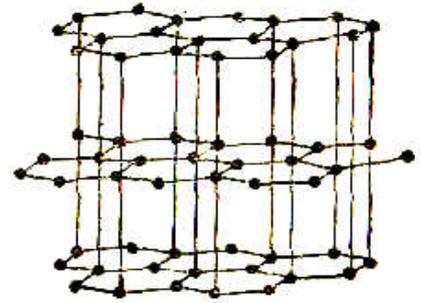


Рис.10.12

Наоборот, при весеннем нагреве воды верхние слои, как более плотные, опускаются на дно, ускоряя прогревание водоёма. Лёд, плавая на воде, предохраняет водоёмы от промерзания их до дна. Отметим также, что расширение воды (льда) при замерзании в трещинах горных пород ведёт к их постепенному разрушению.

Испарение происходит не только с поверхности жидкости, но и с поверхности всех твёрдых тел. Этот процесс называется *возгонкой*, или *сублимацией*. Интенсивно возгоняются такие «пахучие» вещества, как нафталин, камфара и некоторые другие. Наглядным примером возгонки льда может служить высыхание мокрого белья на морозе. При возгонке, как и при испарении, вещество охлаждается. Удельная теплота возгонки  $S$  равна сумме удельных теплот плавления  $r$  и испарения  $\lambda$ . Например, для воды при  $0^{\circ}\text{C}$

$$S = r + \lambda = 3,35 \cdot 10^5 + 25 \cdot 10^5 = 28,35 \cdot 10^5 \text{ (Дж/кг)}$$

Процессом, противоположным возгонке, является непосредственная (без перехода в жидкость) кристаллизация насыщенного пара. Именно таким путём растут в атмосфере снежинки.

## Глава XI. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

### § 11.1. О некоторых общих понятиях термодинамики.

#### Первое начало термодинамики

*Термодинамика* изучает количественные закономерности превращения энергии в различных процессах (тепловых, механических, электрических, магнитных и др.) обусловленного *тепловым* (беспорядочным) движением молекул.

Уже в первой половине XIX в. перед теплотехникой со всей остротой встал вопрос об увеличении экономической эффективности тепловых машин, решение которого требовало глубокого знания законов энергетических превращений, в первую очередь превращения теплоты в механическую работу. В связи с этим требованием теплотехники возникла и начала быстро развиваться термодинамика.

Теплота и температура, газовые процессы, теплоёмкости веществ, испарение и плавление – все это вопросы, относящиеся к области термодинамики.

Термодинамика построена в основном на двух фундаментальных законах, полученных из многовекового опыта человеческой деятельности и называемых *началами термодинамики*. *Первое начало* описывает количественную и качественную стороны процессов превращения энергии; *второе начало* позволяет судить о направлении этих процессов.

Прежде всего познакомимся с некоторыми из основных понятий термодинамики.

*Термодинамической системой* называется *макроскопическое* тело (или группа тел), которому свойственны процессы, сопровождающиеся переходом теплоты в другие виды энергии и обратные процессы. Примером термодинамической системы может служить газ, заключенный в цилиндр под поршнем. В систему могут входить электрическое, магнитное и гравитационное поля. Отвлекаясь от этих полей, мы ограничимся рассмотрением простейших однородных систем – газов, жидкостей и изотропных твёрдых тел.

Если внешние условия неизменны, то термодинамическая

система, оказавшаяся в этих условиях, приходит через некоторое время в состояние, при котором в ней прекращаются всякие *макроскопические* изменения. Такое состояние называется *термодинамическим* равновесием. При термодинамическом равновесии состояние системы в целом, может описываться следующими тремя параметрами: *температурой*  $T$ , *давлением*  $p$  и *объёмом*  $V$ . Эти параметры связаны между собой зависимостью, которую в общем виде можно выразить уравнением

$$f(T, p, V) = 0,$$

называемым *уравнением состояния системы*. Для идеального газа таковым является уравнение Клапейрона – Менделеева, для реальных газов и жидкостей – уравнение Ван-дер-Ваальса. Для твёрдых тел общего уравнения состояния пока не установлено. Если известны любые два параметра состояния системы, например  $p$  и  $V$ , то третий параметр  $T$  можно вычислить по уравнению состояния. Именно на этом основаны рассмотренные нами ранее способы определения температуры.

Переход системы из одного состояния  $(p_1, V_1, T_1)$  в другое  $(p_2, V_2, T_2)$  называется *термодинамическим процессом*. На диаграмме состояний (с координатными осями, например,  $p$  и  $V$ ) состояние системы изображается точкой  $p_i, V_i$ , а процесс – кривой линией  $12$  (рис. 11.1). При этом подразумевается, что в каждом данном состоянии системы – начальном  $1$ , промежуточных и конечном  $2$  – значения температуры и давления должны быть *одинаковыми для всех точек (частей) системы*. Иначе говоря, в каждом из этих состояний система должна находиться в *термодинамическом равновесии*. Между тем, например, во время быстрого сжатия газа давление в его части, прилегающей к поршню, будет несколько *больше*, а во время *быстрого* расширения – *меньше*, чем в остальных его частях. Во избежание этой неоднородности (неравномерности) системы термодинамические процессы должны протекать *медленно* (в принципе – бесконечно медленно).

Процесс перехода системы из состояния 1 в состояние 2 (рис. 11.1) называется обратимым, если возможен процесс перехода системы из 2 в 1, при котором система, пройдя последовательно, но в обратном порядке, через все состояния  $i$  первого процесса, вернется в начальное состояние 1, после чего ни в системе, ни в окру-

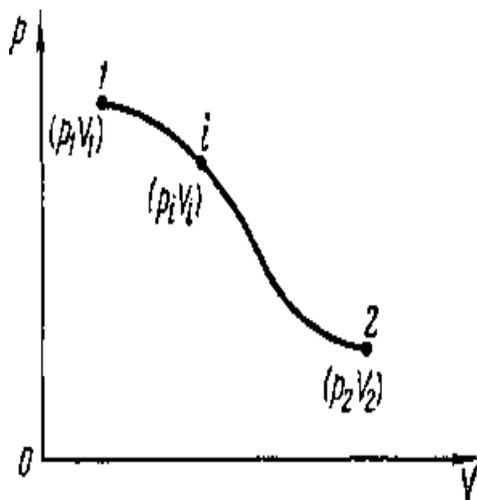


Рис.11.1

жающей среде не останется никаких изменений; в противном случае процесс называется необратимым. Иначе говоря, *процесс перехода системы из состояния 1 в 2 обратим, если возможен процесс перехода системы из 2 в 1, в результате которого полностью ликвидируются следы обоих процессов как в окружающей среде, так и в самой системе.* Примером обратимого процесса могло бы служить колебание маятника, если бы оно происходило без трения: в течение одного периода колебания маятник возвратился бы в начальное положение, причём ни в окружающей среде, ни в системе (маятнике) не осталось бы следов от происшедших за этот период изменений. Все чисто механические процессы, происходящие *без трения*, были бы обратимыми. Однако трение неустранимо. Поэтому часть механической энергии системы всегда переходит в теплоту и *безвозвратно* рассеивается в окружающей среде. Следовательно, механические процессы необратимы. *Вообще в природе нет обратимых процессов.* Наглядным примером необратимости реальных процессов являются процессы *теплообмена и расширения газа в пустоту.* Теплота самопроизвольно переходит от горячего тела к холодному, но обратный самопроизвольный процесс не имеет места. Газ самопроизвольно расширяется в пустоту, но обратный процесс – самопроизвольное сжатие не имеет места. Здесь дело не в том, что эти процессы *самопроизвольно* необратимы.

Их нельзя обратить и посредством внешнего воздействия. Дейст-

вительно, например, при расширении газов в пустоту он не совершает внешней работы и, следовательно, его внутренняя энергия не изменяется. Сожмём теперь газ до первоначального объёма сами, совершая внешнюю работу  $A$  против силы давления газа.

При этом внутренняя энергия газа возрастает на величину, равную работе  $A$ , и температура газа повысится. Через некоторое время газ отдаст избыток теплоты окружающей среде и примет первоначальную температуру. В результате, хотя газ и вернулся в первоначальное состояние, но во внешней среде появилось и *сохранилось изменение*: часть её механической энергии превратилась в теплоту.

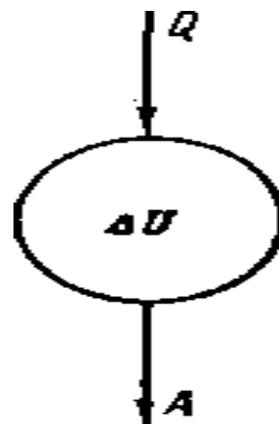


Рис.11.2

Следовательно, процесс расширения газа в пустоту является необратимым.

Итак, *обратимые процессы – понятие идеализированное*. Однако их изучение представляет значительный интерес, поскольку в целом ряде конкретных задач реальные процессы с большой степенью точности можно рассматривать как обратимые. *Обратимый процесс есть идеализированная модель реальных процессов, необходимая для успешного изучения последних*.

Перейдем теперь к рассмотрению первого начала термодинамики.

Допустим, что некоторая система (например, газ, заключённый в цилиндр под поршнем), обладающая внутренней энергией  $U_1$ , получила количество теплоты  $Q$  и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией  $U_2$ , совершила внешнюю работу  $A$  (рис. 11.2). Условимся в дальнейшем считать количество теплоты *положительным*, когда оно *подводится* к системе, а работу – *положительной*, когда система совершает её *против* внешних сил. Опыт неоспоримо доказывает, что при *любом* способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии системы  $U_2 - U_1$  будет *одинаковым* и равным разности между количеством теплоты  $Q$ , полученным системой, и работой  $A$ , совершённой системой:

$$U_2 - U_1 = Q - A$$

или

$$Q = (U_2 - U_1) + A.$$

Введём обозначение :  $U_2 - U_1 = \Delta U$ . Тогда последнее равенство примет вид

$$Q = \Delta U + A. \quad (11.1)$$

Эта формула и есть математическое выражение первого начала термодинамики. Таким образом, первое начало утверждает, что всё количество теплоты, переданное системе, идёт на изменение внутренней энергии системы и на совершаемую системой работу.

Учитывая, что  $Q$  и  $A$  эквивалентны энергии, можно сформулировать первое начало так: *будучи не создаваемой и неуничтожимой, энергия может видоизменяться*. В такой формулировке первое начало термодинамики представляет собой общее выражение закона сохранения и превращения энергии.

Если система периодически возвращается в исходное состояние, то изменение её внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу термодинамики (11.1),

$$A = Q.$$

Это означает, что невозможно создать периодически действующий механизм, который совершал бы работу, превышающую получаемую им энергию. *Воображаемый* механизм, совершающий работу, большую получаемой энергии, называется *вечным двигателем первого рода*. Поэтому первому началу термодинамики можно ещё дать и такую формулировку: *вечный двигатель первого рода невозможен*. В этой связи интересно отметить, что открытие первого начала термодинамики положило конец многочисленным, но бесплодным попыткам построить вечный двигатель.

Если система, получая бесконечно малое количество теплоты  $dQ$ , претерпевает бесконечно малое изменение внутренней энергии  $dU$  то и совершаемая ею работа будет бесконечно малой –  $dA$ . В этом случае выражение (11.1) первого начала термодинамики запишется в дифференциальном виде:

$$dQ = dU + dA. \quad (11.2)$$

## § 11.2. Работа, совершаемая при изменении объёма газа. Адиабатические процессы

Представим себе газ, расширяющийся в цилиндре под поршнем от объёма  $V_1$  при давлении  $p_1$  до объёма  $V_2$  при давлении  $p_2$ .

На графике этот процесс изобразится кривой линией 1–2 (рис. 11.3). Рассмотрим маленький интервал расширения  $\Delta V$ , для которого давление можно считать приблизительно постоянным и равным  $p$ . Работа, совершаемая при малом расширении, равна произведению  $p \cdot \Delta V$ . На графике видно, что эта работа численно равна площади узкой полоски шириной  $\Delta V$ . Разбивая полное изменение объёма от  $V_1$  до  $V_2$  на  $n$  малых интервалов:  $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3, \dots, \Delta V_n$ , получим, очевидно, что полная работа  $A$ , совершаемая при изменении объёма газа, численно равна сумме площадей всех  $n$  полосок, т.е. равна площади, ограниченной кривой 12, ординатами  $p_1$  и  $p_2$  и осью абсцисс:

$$A = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \cdot \Delta V_i .$$

Если теперь перейдем от конечных малых интервалов  $\Delta V$  к бесконечно малым интервалам  $dV$ , то работа на каждом из этих интервалов будет бесконечно малой и равной

$$dA = p \cdot dV \quad (11.3)$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от  $V_1$  до  $V_2$ , получим выражение полной работы, совершаемой при изменении объёма газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV \quad (11.4)$$

Пользуясь последним выражением, рассчитаем работу, совершаемую при изотермическом изменении объёма одного моля идеального газа.

Согласно закону Клапейрона - Менделеева,

$$p = \frac{RT}{V} .$$

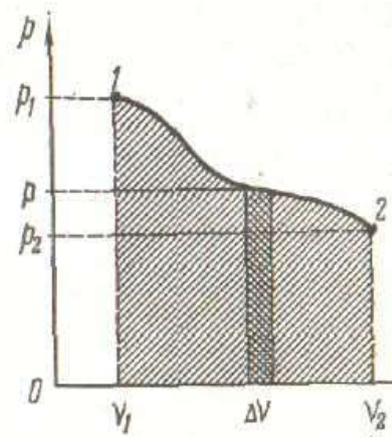


рис. 11.3

Подставляя это выражение  $p$  в формулу (11.4) и учитывая, что при изотермическом процессе  $T = \text{const}$ , получим

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} \cdot dV = RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = RT(\ln V_2 - \ln V_1),$$

или окончательно

$$A = RT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Ещё проще рассчитывается работа *изобарического* ( $p = \text{const}$ ) изменения объёма газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1).$$

Кроме уже знакомых нам изобарического и изотермического процессов изменения объёма газа существует так называемый *адиабатический процесс*. *Адиабатическими* называются процессы, происходящие при отсутствии теплообмена между системой и окружающей средой. В этом случае  $dQ = 0$  и формула (11.2) первого начала термодинамики принимает вид

$$dA = -dU. \quad (11.6)$$

Знак минус показывает, что при адиабатическом расширении внутренняя энергия системы уменьшается: система совершает работу за счёт своей внутренней энергии. В случае адиабатического сжатия внутренняя энергия системы увеличивается за счёт работы, совершаемой внешними силами. Поэтому  $dU$  будет положительно, но зато  $dA$  примет отрицательное значение и равенство (11.6) остается справедливым.

Рассмотрим адиабатический процесс в системе, состоящей из одного моля идеального газа, помещённого в цилиндр, стенки и поршень которого абсолютно не теплопроводны. Как известно, внутренняя энергия моля идеального газа равна

$$U = C_V T \quad (11.7)$$

где  $C_V$  – молярная теплоёмкость при постоянном объёме,  $T$  – температура. Так как  $C_V$  – постоянная величина, то, дифференцируя равенство (11.7), получим

$$dU = C_V \cdot dT \quad (11.8)$$

Подставляя в формулу (11.6) выражения  $dA$  из формулы (1.3) и  $dU$  из формулы (11.8), получим

$$p \cdot dV = -C_V \cdot dT$$

Используя закон Клапейрона – Менделеева, заменим  $p$  на  $RT/V$ :

$$\frac{RT}{V} \cdot dV = -C_V \cdot dT, \text{ или } \frac{R}{C_V} \cdot \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}.$$

Из последнего равенства следует, что *адиабатическое изменение объёма газа сопровождается изменением его температуры*. Интегрируя это равенство в пределах от  $V_1$  до  $V_2$  и, соответственно, от  $T_1$  до  $T_2$ , получим

$$\frac{R}{C_V} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T},$$

откуда

$$\frac{R}{C_V} (\ln V_2 - \ln V_1) = \ln T_1 - \ln T_2,$$

или

$$\ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{R/C_V} = \ln \frac{T_1}{T_2}.$$

Потенцируя последнее равенство и учитывая, что  $C_p = C_V + R$ ,

а  $\frac{C_p}{C_V} = \gamma$ , то

$$\frac{R}{C_V} = \frac{C_p - C_V}{C_V} = \gamma - 1,$$

получим

$$\left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \quad (11.9)$$

и

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (11.10)$$

или окончательно

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (11.11)$$

Формула (11.11) выражает закон Пуассона, описывающий адиабатические процессы в идеальном газе. Из закона Пуассона следует, что *при адиабатическом расширении газа его температура понижается, а при сжатии – повышается.*

Для осуществления адиабатических процессов необходима *абсолютная теплоизоляция* системы от окружающей среды. Наоборот, для осуществления изотермических процессов необходимо обеспечить *абсолютную теплопроводность* между системой и средой. Однако в природе нет ни абсолютных теплоизоляторов, ни абсолютных теплопроводников. Поэтому реальные процессы изменения объёма газа могут быть только близкими к адиабатическим (если теплообмен между системой и средой незначителен) или к изотермическим (если теплообмен между системой и средой хороший).

Для практического осуществления процессов, близких к адиабатическим, возможны два пути: 1) *очень быстрое* изменение объёма газа и 2) изменение объёма *очень большой массы* газа. В обоих случаях не успевают произойти значительного теплообмена между системой (газом) и окружающей средой, что равносильно наличию хорошей теплоизоляции между ними.

Примером адиабатического процесса, осуществляемого первым путем, может служить *быстрое* накачивание велокамеры насосом. Значительное количество теплоты, выделяющееся при многократном частом сжатии воздуха, не успевает переходить в окружающую среду, в результате чего, насос, как известно, заметно нагревается.

Адиабатическими можно считать такие процессы, как расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах двигателя внутреннего сгорания. Особенно отчетливо выражен адиабатический характер процесса сжатия в дизеле. Дизель не имеет зажигания: *адиабатическое* нагревание смеси при сжатии приводит к её самовоспламенению.

Что касается адиабатических процессов *в больших массах* газа, то они весьма распространены в природе. Если, например, большой участок вспаханного поля *a* граничит с водным бассейном *b* и лесным массивом *c*, то в ясный летний день

полевой участок нагреется солнцем сильнее соседних участков (рис.11.4).

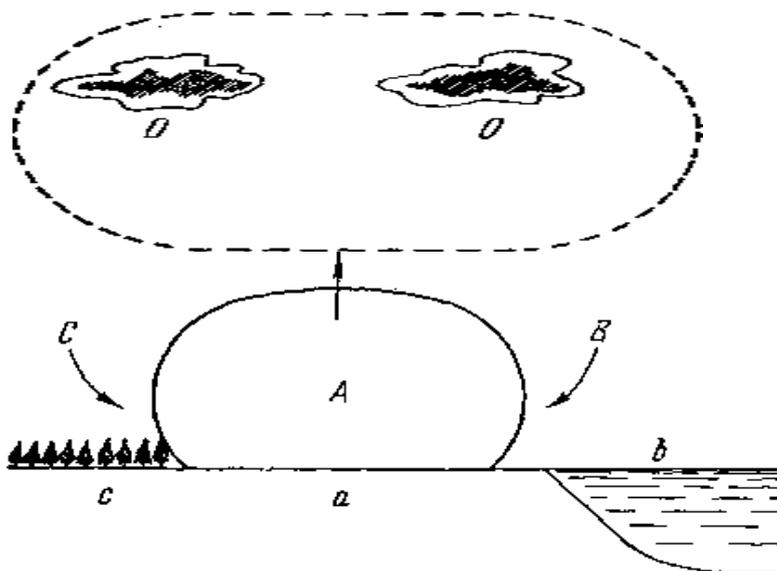


Рис.11.4

Расположенная над этим участком воздушная масса  $A$  также нагреется сильнее соседних масс  $B$  и  $C$  и, сделавшись более лёгкой, начнёт подниматься (конвекция). Так как давление в атмосфере убывает с высотой, то по мере подъёма воздушная масса будет *расширяться* и, следовательно, *адиабатически охлаждаться*. Когда её температура понизится до точки росы, водяной пар, находящийся в воздушной массе, начнет конденсироваться на ядрах конденсации. Образуются *кучевые облака*  $O$ , типичные для полуденного времени жаркого дня и потому называемые также «облаками хорошей погоды».

Возвратимся к закону Пуассона и придадим формуле (11.11) несколько иной вид, выразив температуру через давление. Так как, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева,

$$T = \frac{pV}{R},$$

то, подставляя это выражение температуры в формулу (11.11), получим

$$\frac{pV}{R} V^{\gamma-1} = const$$

или

$$pV^{\gamma} = const \quad (11.12)$$

(поскольку  $R \cdot const = const$ ). Формула (11.12) представляет собой закон Пуассона, связывающий изменения объёма и давления газа при адиабатическом процессе.

Пользуясь законами Пуассона (11.12) и Бойля – Мариотта ( $pV = const$ ), представим на графике адиабатический и изотермический процессы (рис. 11.5). Оказывается, что адиабата 1 идет круче изотермы 2.

Это объясняется тем, что при изотермическом расширении давление газа уменьшается только за счёт увеличения объёма, тогда как при адиабатическом расширении оно уменьшается и за счет увеличения объёма, и за счет понижения температуры.

В заключение выразим работу  $A$ , совершаемую газом при адиабатическом процессе, в результате которого температура газа изменяется от  $T_1$  до  $T_2$ . Объединяя формулы (11.6) и (11.8), получим для элементарной работы

$$dA = -C_V \cdot dT.$$

Интегрируя последнее равенство, найдем

$$A = -\int_{T_1}^{T_2} C_V \cdot dT = -C_V (T_2 - T_1)$$

или окончательно

$$A = -C_V (T_2 - T_1) \quad (11.13)$$

Следовательно, работа совершаемая газом при адиабатическом процессе, пропорциональна изменению температуры газа.

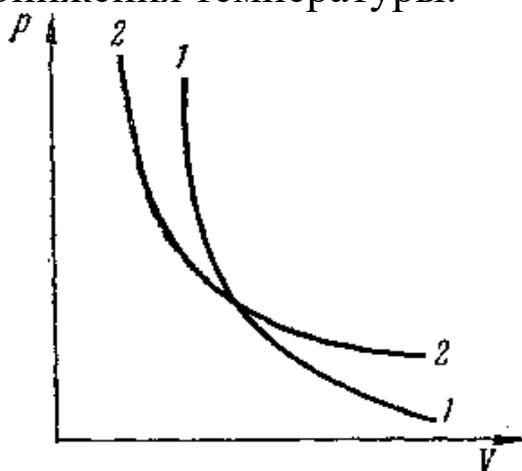


Рис.11.5

### § 11.3. Цикл Карно. Второе начало термодинамики

Круговым процессом, или циклом, называется процесс, в результате которого система, пройдя через ряд состояний, возвра-

щается в исходное состояние. Очевидно, что на графике круговой процесс изобразится замкнутой кривой линией (рис. 11.6).

Работа  $A$ , совершаемая при круговом процессе, численно равна площади  $a1b2$ , ограниченной этой замкнутой линией. Поясним данное утверждение, полагая для определённости, что системой является некоторая масса газа. Цикл состоит из двух последовательных процессов: расширения ( $a \rightarrow 1 \rightarrow b$ ) и сжатия ( $b \rightarrow 2 \rightarrow a$ ) газа.

В соответствии с графическим представлением работы  $A_1$  совершаемая газом при расширении, выразится площадью фигуры  $da1bc$ ; эта работа положительна. На тех же основаниях работа  $A_2$ , совершаемая при сжатии газа, выразится площадью фигуры  $da2bc$  и будет отрицательной.

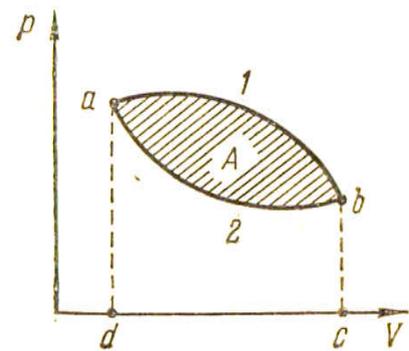


Рис.11.6

Тогда работа, совершенная при круговом процессе.

$$A = A_1 - A_2$$

выразится разностью площадей фигур  $da1bc$ , и  $da2bc$  т.е. площадью фигуры, ограниченной замкнутой линией  $a1b2$ . Если круговой процесс идет по часовой стрелке ( $a \rightarrow 1 \rightarrow b \rightarrow 2 \rightarrow a$ ), то работа будет положительной (так как  $A_1 - A_2 > 0$ ), если же круговой процесс идет против часовой стрелки ( $a \rightarrow 2 \rightarrow b \rightarrow 1 \rightarrow a$ ), то отрицательной (так как  $A_2 - A_1 < 0$ ).

Если в результате цикла совершается некоторая работа  $A$ , то система, периодически повторяющая такой цикл, называется машиной.

В 1824 г, французский инженер Сади Карно теоретически рассмотрел работу идеальной тепловой машины, состоящей из одного моля идеального газа (рабочее тело), заключённого в цилиндр под поршнем, нагревателя и холодильника. Эта система периодически совершает обратимые циклы, состоящие из двух изотермических ( $1 \rightarrow 2$  и  $3 \rightarrow 4$ ) и двух адиабатических ( $2 \rightarrow 3$  и

4 → 1) процессов (рис. 11.7). Стенки цилиндра и поршень абсолютно не теплопроводны, а дно цилиндра абсолютно теплопроводно.

Однако с помощью абсолютно нетеплопроводной крышки  $K$ , прикладываемой ко дну цилиндра, можно было сделать весь цилиндр абсолютно нетеплопроводным. Трение и тепловые потери в системе полностью отсутствуют.

Проследим за работой этой идеальной тепловой машины, получившей название цикл *Карно*. Изменения состояния системы будем изображать на диаграмме, а положения поршня в цилиндре – на схеме (рис. 11.7).

1. Газ находится в сжатом состоянии 1 ( $p_1, V_1, T_1$ ), поршень – в положении 1. Чтобы обеспечить *изотермическое* расширение газа, приведем дно цилиндра в тепловой контакт с нагревателем  $H$ , находящимся при температуре  $T_1$ .

2. Когда газ расширится до состояния 2 ( $p_2, V_2, T_2$ ), уберём нагреватель и, закрыв дно крышкой  $K$ , предоставим газу возможность закончить расширение адиабатически до состояния 3 ( $p_3, V_3, T_2$ ). Совершая работу по расширению, газ охладится; поэтому  $T_2 < T_1$ .

3. Чтобы завершить цикл, т.е. вернуть газ в начальное состояние 1, а поршень – в исходное положение 1, необходимо совершить внешнюю работу сжатия газа. Будем сначала сжимать газ изотермически до состояния 4 ( $p_4, V_4, T_2$ ), заменив крышку холодильника  $X$  (при температуре  $T_2$ ). Причем состояние 4 надо выбрать заранее, с таким расчётом, чтобы из него по адиабате 4 → 1 можно было перевести газ в начальное состояние 1.

4) Завершим сжатие газа до

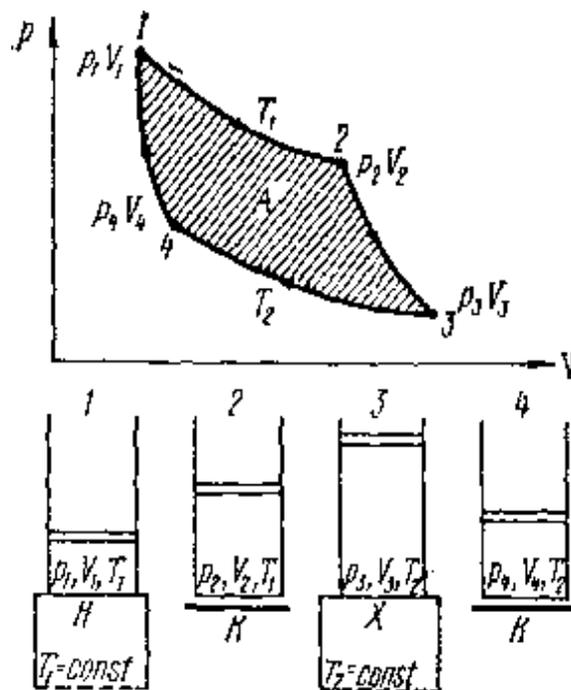


Рис.11.7

начального состояния  $1 (p_1 V_1 T_1)$  адиабатически, заменив холодильник крышкой  $K$ .

Цикл закончен и может быть затем многократно повторен. На участке  $1 \rightarrow 2$  газ совершил работу  $A_1$  по изотермическому расширению, получив от нагревателя количество теплоты  $Q_1 = A_1$ . На участке  $2 \rightarrow 3$  газ совершил работу  $A'$  по адиабатическому расширению за счет своей внутренней энергии. На участке  $3 \rightarrow 4$  внешние силы совершили работу  $A_2$  по изотермическому сжатию газа; при этом он отдал холодильнику количество теплоты  $Q_2 = A_2$ . Наконец, на участке  $4 \rightarrow 1$  внешние силы совершили работу  $A''$  по адиабатическому сжатию газа, повысив его внутреннюю энергию.

Так как газ вернулся в первоначальное состояние, то изменение его внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу термодинамики [ $Q = \Delta U + A$ ], полученное газом в результате всего цикла количество теплоты  $Q_1 - Q_2$  должно равняться совершенной им за время цикла работе:

$$Q_1 - Q_2 = A_1 + A' - A_2 - A'' \quad (11.14)$$

Нетрудно показать, что по абсолютной величине  $|A'| = |A''|$ . Действительно, оба адиабатических процесса (и  $4 \rightarrow 1$ ) осуществлялись в одном и том же интервале температур ( $T_1 \rightarrow T_2$  и  $T_2 \rightarrow T_1$ ). Тогда, согласно формуле (11.13) будут одинаковыми и совершаемые при этих процессах работы. Поэтому формула (11.14) примет вид

$$Q_1 - Q_2 = A_1 + A_2 = A \quad (11.15)$$

где  $A$  – суммарная работа, совершаемая за весь цикл и численно равная площади 1234, ограниченной графиком цикла. Так как цикл проводился по часовой стрелке, то эта работа положительна. Итак, в результате цикла газ, получив количество теплоты  $Q_1$  от нагревателя и передав часть этого количества теплоты  $Q_2$  холодильнику, совершил внешнюю работу, равную

$$A = Q_1 - Q_2 \quad (11.16)$$

Зададимся вопросом: может ли рассматриваемая тепловая машина совершать работу только за счёт получения количества

теплоты  $Q_1$  от нагревателя, не отдавая части количества теплоты  $Q_2$  холодильнику?

Иными словами, можно ли теплоту  $Q_1$  целиком превращать в работу? Очевидно, что при отсутствии холодильника процесс  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$  можно было бы замкнуть (т.е. получить *цикл*) только посредством обратного процесса  $3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ . Площадь такого цикла, а следовательно, и совершаемая работа будут равны нулю. Таким образом, отдача части теплоты  $Q_2$  холодильнику является *необходимым* условием совершения работы. Но тогда, согласно формуле (11.16),

$$A < Q_1, \quad (11.17)$$

т.е. рассматриваемая тепловая машина не может всё полученное количество теплоты целиком переводить в работу. Как показывают опыт и выводы из всей термодинамики, это невозможно не только для данной машины, но и *вообще*.

*Невозможен механизм, который всё получаемое от нагревателя количество теплоты целиком переводил бы в работу, часть этого количества теплоты должна быть отдана холодильнику.*

Это утверждение является одной из формулировок *второго начала термодинамики*, а формулы (11.16) и (11.17) – его математическими выражениями. Таким образом, тепловая машина должна работать по схеме, представленной на рис. 11.8.

Рассчитаем теперь коэффициент полезного действия  $\eta$  идеальной тепловой машины. Он равен отношению полезной работы к совершенной, т.е. учетом формулы (11.15)

$$\eta = \frac{A}{A_1} = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (11.18)$$

Принимая во внимания формулу (11.5), можем написать

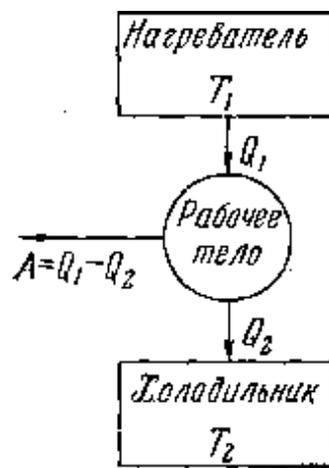


Рис.11.8

$$\eta = \frac{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (11.19)$$

Но, согласно формуле (11.9),

$$\left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \text{и} \quad \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1},$$

откуда следует, что

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4} \quad \text{или} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Поэтому все логарифмы в формуле (11.19) оказываются одинаковыми и могут быть сокращены. Тогда формула (11.19) примет вид

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (11.20)$$

или

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.21)$$

Откуда следует, что

$$\eta < 1, \quad (11.22)$$

т.е. коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины меньше единицы. Для его повышения необходимо увеличить разность температур нагревателя и холодильника. Возьмём такие наиболее благоприятные реально возможные условия:  $T_1 = 500 \text{ К}$  (паровой котёл высокого давления) и  $T_2 = 250 \text{ К}$  (воздушное охлаждение в зимнее время). В этом случае

$$\eta = \frac{500 - 250}{500} = 0,5 = 50\%.$$

Понятно, что реальные тепловые машины благодаря трению и неизбежным тепловым потерям имеют значительно меньший коэффициент полезного действия (поршневая паровая машина – 20 %, паровая турбина – до 30 % и двигатель внутреннего сгорания – до 45 %).

Обратный цикл Карно ( $1 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ) можно использовать в качестве идеальной холодильной машины, работающей по схеме, представленной на рис. 11.9 ( $T_1 > T_2$ ).

За счёт работы внешних сил  $A$  газ (рабочее тело) отнимает от холодильника количество теплоты  $Q_2$  и передаёт нагревателю количество теплоты  $Q_1$ .

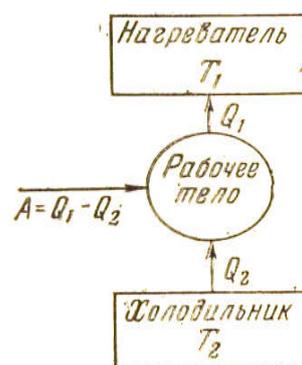


Рис.11.9

## § 11.4. Энтропия

Из формул (11.18) и (11.20) выражающих значение коэффициента полезного действия тепловой машины, следует, что

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

или

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

откуда получаем

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0.$$

Учтём теперь, что  $Q_2$ , как количество теплоты, отдаваемое рабочим веществом холодильнику, является отрицательным. Тогда левую часть последней формулы можно записать в виде алгебраической суммы:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (11.23)$$

Отношение  $\left(\frac{Q}{T}\right)$  теплоты, переданной рабочему веществу (или рабочим веществом), к абсолютной температуре, при которой происходила эта передача, называется *приведённой теплотой*. Из формулы (11.23) следует, что для цикла Карно алгебраическая сумма приведённых теплот равна нулю.

Покажем, что это положение справедливо для любого обратимого кругового процесса  $A \rightarrow a \rightarrow B \rightarrow b \rightarrow A$  (рис.11.10). Замкнутая кривая линия  $AaBbA$ , изображающая процесс, приближенно может быть заменена замкнутой ломаной линией  $AaBbA$ , состоящей из малых отрезков изотерм и адиабат.

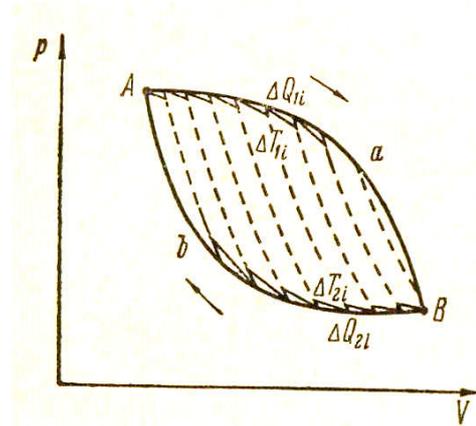


Рис.11.10

Для каждого из элементарных циклов Карно справедлива формула (11.23):

$$\frac{\Delta Q_{11}}{T_{11}} + \frac{\Delta Q_{21}}{T_{21}} = 0,$$

$$\frac{\Delta Q_{12}}{T_{12}} + \frac{\Delta Q_{22}}{T_{22}} = 0,$$

.....

$$\frac{\Delta Q_{1i}}{T_{1i}} + \frac{\Delta Q_{2i}}{T_{2i}} = 0,$$

.....

$$\frac{\Delta Q_{1n}}{T_{1n}} + \frac{\Delta Q_{2n}}{T_{2n}} = 0,$$

где  $\Delta Q_{1i}$  – теплота, полученная рабочим телом на  $i$ -м участке расширения при температуре  $T_{1i}$ , а  $\Delta Q_{2i}$  – теплота, отданная им на  $i$ -м участке сжатия при температуре  $T_{2i}$ . Суммируя все эти равенства, получим

$$\left( \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta Q_{1i}}{T_{1i}} \right)_{AaB} + \left( \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\Delta Q_{2i}}{T_{2i}} \right)_{BbA} = 0 \quad (11.24)$$

Если перейдем теперь к бесконечно большому числу ( $n \rightarrow \infty$ ) бесконечно узких циклов Карно, то ломаная линия превратится в кривую  $AaBbA$ , а суммы формулы (11.24) – в интегралы:

$$\int_{(AaB)} \frac{dQ}{T} + \int_{(BbA)} \frac{dQ}{T} = 0, \quad \text{или} \quad \int_{(AaBbA)} \frac{dQ}{T} = 0. \quad (11.25)$$

Из равенства нулю интеграла (11.25), взятого по замкнутому контуру  $AaBbA$ , следует, что подынтегральное выражение  $dQ/T$  представляет собой полный дифференциал некоторой функции  $S$ , зависящей только от состояния системы и не зависящей от пути, каким система пришла в это состояние. Таким образом,

$$\frac{dQ}{T} = dS. \quad (11.26)$$

Функция  $S$  была введена в рассмотрение в 1865 г. Клаузиусом и названа им энтропией. Наряду с энергией энтропия является важной *характеристикой состояния системы*.

Если посредством обратимого процесса система переходит из состояния  $A$  в состояние  $B$ , то происходящее при этом изменение энтропии системы определяется путем интегрирования равенства (11.26):

$$\int_A^B dS = S|_A^B = S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T}, \quad (11.27)$$

где  $S_A$  - энтропия системы в начальном состоянии  $A$ ,  $S_B$  - энтропия системы в конечном состоянии  $B$ ,  $\Delta S = S_B - S_A$  - изменение энтропии.

Клаузиусом были получены следующие важные положения, которые мы приведём без доказательств.

Энтропия системы, состоящей из нескольких тел, равна сумме энтропий этих тел.

Если в *изолированной* системе происходят *обратимые* процессы, то её энтропия остаётся *неизменной*. Если в *изолированной* системе происходят *необратимые* процессы, то её энтропия *возрастает*. Энтропия *изолированной* системы не может уменьшаться ни при каких процессах. Математически эти положения можно записать в виде неравенства

$$\Delta S \geq 0, \quad (11.28)$$

называемого *неравенством Клаузиуса*.

Как мы уже знаем, все реальные процессы являются *необратимыми*. Поэтому можно утверждать, что *все процессы в конечной изолированной системе ведут к увеличению её энтропии*. Это положение называется *принципом возрастания*

*энтропии*. Вместе с тем оно представляет собой ещё одну формулировку второго начала термодинамики, указывающую направление реальных процессов:

*возможны лишь такие процессы, которые ведут к увеличению энтропии изолированной системы.*

В качестве примера принципа возрастания энтропии рассмотрим такой важный процесс, как теплообмен, происходящий в изолированной системе между телом с температурой  $T_1$  и телом с температурой  $T_2 < T_1$ . Первое тело отдаёт количество теплоты  $-\Delta Q$ , второе получает количество теплоты  $+\Delta Q$ . Изменение энтропии системы равно алгебраической сумме энтропии обоих тел:

$$S_2 - S_1 = \frac{\Delta Q}{T_2} + \frac{-\Delta Q}{T_1} = \Delta Q \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) > 0,$$

откуда

$$S_2 > S_1.$$

Таким образом, хотя в результате теплообмена энергия системы не изменилась (в соответствии с первым началом термодинамики), её энтропия возросла (в соответствии со вторым началом термодинамики).

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Введение</b>	3
Физическая величина	4
Скалярные и векторные величины	5
<b>Глава I. ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ (ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ)</b>	9
§1.1.Общий случай криволинейного движения материальной точки. Основные характеристики движения	9
§1.2.Прямолинейное движение материальной точки	13
§1.3.Движение материальной точки по окружности	14
<b>Глава II. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ</b>	19
§2.1.Законы Ньютона. Масса и сила.	19
§2.2.Закон изменения импульса	22
§2.3.Закон сохранения импульса в изолированной системе	23
§2.4.Силы упругости	25
§2.5.Силы трения	28
§2.6.Силы тяготения	29
§2.7.Силы, возникающие при криволинейном движении	31
§2.8.Инерциальные и неинерциальные системы отсчёта.	34
Силы инерции	
§2.9.Вес тел. Ускорение свободного падения. Невесомость	37
§2.10.Сила Кориолиса	40
<b>Глава III. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ</b>	42
§3.1.Работа и мощность	42
§3.2.Энергия	44
§3.3.Закон сохранения и превращения энергии	49
§3.4.Космические скорости	50
<b>Глава IV. ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЁРДОГО ТЕЛА</b>	55
§4.1.Основной закон динамики вращения	55
§4.2.Моменты инерции некоторых тел	58
§4.3.Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося тела	60
<b>Глава V. ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ</b>	64
§5.1.Основные определения. Уравнение неразрывности	64
§5.2.Уравнение Бернулли	66
§5.3.Некоторые приложения уравнения Бернулли	70
<b>Глава VI. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ</b>	73

§6.1. Гармоническое колебание и его характеристики	73
§6.2. Сложение одинаково направленных гармонических колебаний	77
§6.3. Динамика колебательного движения. Маятник	78
§6.4. Волновой процесс	81
§6.5. Уравнение волны. Интенсивность волны	84
§6.6. Интерференция волн	86
<b>МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА</b>	89
<b>Глава VII. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СТРОЕНИИ ВЕЩЕСТВА</b>	
§7.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории	89
§7.2. О некоторых явлениях, подтверждающих основные положения молекулярно-кинетической теории	92
§7.3. Теплота и температура	94
<b>Глава VIII. ГАЗЫ</b>	96
§8.1. Экспериментальные газовые законы: Бойля-Ма-риотта, Гейлюсака, Дальтона, Авогадро. Абсолютная температура	96
§8.2. Уравнение Менделеева-Клапейрона	100
§8.3. Основное уравнение кинетической теории идеального газа	102
§8.4. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы идеального газа	107
§8.5. О числе степеней свободы. Внутренняя энергия газа	109
§8.6. Теплоёмкость газа. Физический смысл универсальной газовой постоянной	113
§8.7. Скорость поступательного движения молекул газа. Распределение числа молекул по скоростям	115
§8.8. Средняя длина свободного пробега молекул	119
§8.9. Явления переноса в газах. Уравнение переноса	122
§8.10. Диффузия	125
§8.11. Теплопроводность	127
§8.12. Внутреннее трение (вязкость)	131
<b>Глава IX. ЖИДКОСТИ И ТВЁРДЫЕ ТЕЛА</b>	135
§9.1. Особенности строения жидкостей и твёрдых тел	135
§9.2. Деформация твёрдого тела	141
§9.3. Тепловое расширение твёрдых и жидких тел	144
§9.4. Теплоёмкость твёрдых и жидких тел	145

§9.5. Диффузия в жидких и твёрдых телах	146
§9.6. Осмос	149
§9.7. Теплопроводность жидких и твёрдых тел	152
§9.8. Вязкость жидкости. Турбулентное движение жидкости	153
§9.9. Внутреннее давление в жидкости. Поверхностное натяжение и свободная энергия поверхности жидкости	157
§9.10. Дополнительное давление под искривлённой поверхностью жидкости. Формула Лапласа	163
§9.11. Капиллярные явления; формула Жюрена	166
<b>Глава X. ИЗМЕНЕНИЕ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА (ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ)</b>	170
§10.1. Понятие о фазовых превращениях и диаграмме состояний вещества	170
§10.2. Реальный газ. Уравнение Ван-дер-Ваальса	171
§10.3. Опыт Эндрюса. Критическая температура	175
§10.4. Сжижение газов. Эффект Джоуля-Томсона	178
§10.5. Испарение и конденсация. Кипение	180
§10.6. Упругость насыщенного пара над искривлённой поверхностью жидкости и над раствором	183
§10.7. Плавление и затвердевание (кристаллизация). Возгонка	187
<b>Глава XI. ОСНОВЫ ТЕРМОДИНАМИКИ</b>	191
§11.1. О некоторых общих понятиях термодинамики. Первое начало термодинамики	191
§11.2. Работа, совершаемая при изменении объёма газа. Адиабатические процессы	196
§11.3. Цикл Карно. Второе начало термодинамики	201
§11.4. Энтропия	207

**Турсунов Икромжон Гуламжонович,  
Мухамедов Гафурджан Исраилович,  
Бабушкин Олег Леонидович.**

**“ОБЩАЯ ФИЗИКА”  
(Механика и молекулярная физика)  
Учебное пособие**

**Ташкент – Издательство “Ishonchli hamkor” 2021**

Редактор: Халимджон Тахиров  
Техник редактор: Темурмалик Рахматуллаев  
Корректор: Мавлуда Юнусова  
Верстка: Гули Аскархужаева

**Лицензия №2044, от 25.08.2020 г.**

Адрес: г.Ташкент, Яшнабадский район, 22-военный городок



