# УМУМИЙ ЎРТА ТАЪЛИМ МАКТАБЛАРИДА БАЪЗИ БИР ЭЛЕМЕНТАР ФУНКЦИЯЛАРНИНГ ҲОСИЛАСИНИ ОЛИШНИНГ ИННОВАЦИОН УСЛУБЛАРИ

***М.Н. Солаева, Ф.С. Актамов***
*Чирчиқ давлат педагогика институти*

*Ушбу мақолада функциялар ва уларнинг ҳосиласини олишнинг инновацион услублари ҳақида сўз юритилган. Функция хосиласи бу олий математика курсининг катта ва мураккаб мавзуларидан бири бўлиб ҳисобланади. Бу мавзуни эса мактаб ўқувчиларига тушунтириш қийинлик туғдириб келган шу сабабдан мактаб математика курсида ҳосила мавзусини қандай ўтиш самарали натижа беради? Саволига жавоб беришга ҳаракат қилганмиз.*

***Таянч сўзлар**: элементар функциялар, функцияларнинг ҳосиласи, инновацион услублар.*

*This article discusses functions and innovative ways of deriving them. Function formulation is one of the biggest and most complex topics of higher mathematics. As this has been difficult to explain to school students, so how can the transfer of subject matter in a school math course be effective? We tried to answer the question.*

***Keywords:** elementary functions, function derivatives, innovative methods.*

*В этой статье рассмотрено инновационные методы нахождения производной функции. Производная функции - одна из самых больших и сложных тем высшей математики. Эту тему объяснить школьникам сложно, поэтому возникает вопрос “Каким методом нужно объяснить школьникам тему производной функции?”. Мы пытались ответить на вопрос.*

***Ключевые слова**: элементарные функции, производной функции, инновационные методы.*

Ўзбекистон Республикасида умумий ўрта ва мактабдан ташқари таълимни тизимли ислоҳ қилишнинг устувор йўналишларини белгилаш, ўсиб келаётган ёш авлодни маънавий-ахлоқий ва интеллектуал ривожлантиришни сифат жиҳатидан янги даражага кўтариш, ўқув-тарбия жараёнига таълимнинг инновацион шакллари ва усулларини жорий этиш мақсадида, шунингдек, Ўзбекистон Республикаси Президентининг 2018 йил 5 сентябрдаги “Халқ таълимини бошқариш тизимини такомиллаштириш бўйича қўшимча чора-тадбирлар тўғрисида”ги ПФ-5538-сон Фармонига мувофиқ, ҳозирги кунда учрайдиган баъзи ҳаётий муаммоларнинг инновацион ечимларини кўрсатиш талаб этилади. Бунда айрим муаммоларни ечишда математик аппарат; хусусан ҳосилани қўллаш ижобий натижалар беради.

Ҳосила тушунчасига олиб келадиган масалалар билан танишиб олсак. Бундай масалаларга моддий нуқтанинг босиб ўтган йўлининг вақтга боғлиқлигини ифодаловчи функция маълум бўлса, у ҳолда, ушбу моддий нуқтанинг маълум вақтдаги оний тезлигини топиш, ёки бирор функциянинг графиги эгри чизиқдан иборат бўлиб, шу эгри чизиққа аргументнинг бирор қийматида ўтказилган уринмасининг бурчак каэффициентини топишларни келтириш мумкин.

Масалан, метро станциясида тормоз белгисидан биринчи вагоннинг тўхташигача бўлган масофа *80 м* га тенг. Агар метро поезди тўҳташ белгисидан кейин 1,6 $м/с^2$ текис секинланувчан тезланиш билан ҳаракат қилса, у ҳолда метро поъезди бу белгига қандай тезлик билан келиши керак?

Масалани ечиш учун поезднинг тўҳташ белгисидан ўтиш моментидаги тезлигини, яъни шу вақт моментидаги оний тезлигини топиш керак. Тормоз йўли $S=at^2/2$ формула билан ҳисобланади, бунда – $a$ тезланиш, $t$ тормознинг вақти. Мазкур ҳолда $s=80km,$ $a=1,6\ m/c^2$ шунинг учун $80=0,8t^2$ , бундан $t=10c.$ $v=at$ формуладан оний тезликни топамиз: $v=1,6\cdot 10=16$ яъни $v=16$ *m/с.*

Нуқта тўғри чизиқ бўйлаб ҳаракат қилаётган ва ҳаракат бошлангандан t вақт ўтганда *s(t)* йўл ўтган бўлсин, яъни *s(t)* функция берилган бўлсин.

Бирор *t* моментини тайинлаймиз ва *t* дан *t+h* гача вақт оралиғини қараймиз, бунда *h* – ихтиёрий кичик сон. Нуқта *t* дан *t+h* гача вақт оралиғида *S(t+h)-S(t)* масофа ўтади.

Нуқта харакатининг шу вақт оралиғидаги ўртача тезлиги қуйидаги нисбатга тенг:

$$v_{¢ðò} = \frac{s(t+h)-s(t)}{h}.$$

Физика курсидан маълумки, h камайиши билан бу нисбат t вақт моментидаги оний тезлик деб аталувчи ва *v(t)* каби белгиланувчи бирор миқдорга яқинлашади. *v(t)* миқдори бу нисбатнинг *h* нолга интилгандаги лимити деб аталади ва қуйидагича ёзилади:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$$

Биз бу мақолада ўқувчиларга етарли даражада тушунарли бўладиган, англашга ва таҳлил қилишга осон бўлган таърифни кўриб чиқамиз.

Ушбу $\frac{s(t+h)-s(t)}{h}$ айирмали нисбатнинг $h\to 0$ даги лимити эса *s(t)* функциянинг ҳосиласи деб аталади. Табиийки ўқувчи учун янги бўлган лимит тушунчаси кириб келди. Хозирги математика курсининг 11 синф дарслигида ўқувчилари функция лимити тушунчасини кўриб ўтишган ва 1996- 2006 йиллар давомидаги ўқувчилар лимит тушунчасини киритмасдан ҳосиланинг таърифини интилиш орқали киритишган. Биз бу мақолада иккита таърифни ўқувчиларга етарли даражада етказиб беришни ва самарадорлигини кўриб чиқамиз. Ҳосила тушунчасини ҳали яхши англаб ета олмаган ўқувчиларга лимит тушунчасини киритишимиз анча оғирлик қилади. Чунки лимит тушунчаси бир нечта тушунчаларга таянади. Хозирги кун мактаб алгебра курсида киритилган лимит тушунчаси ўқувчиларда функциянинг лимити фақатгина нуқтада берилган экан деган ҳулосага олиб келади. Бу эса кейинчалик олий математика курсида лимитни тушунишда ўқувчиларда иккиланиш юзага келишига сабаб бўлади. Шу сабабдан лимит тушунчасини чеклаб ўтган холда ҳосилага қандай таъриф бериш мумкин? деган саволга жавоб беришга харакат қиламиз.

**Таъриф:** $f(x)$ функция бирор оралиқда аниқланган бўлиб, $x$ шу оралиқнинг нуқтаси ва $h\neq 0$ шундай сон бўлсинки, $x+h$ ҳам берилган оралиққа тегишли бўлсин. У ҳолда $h\to 0$ яъни $h$ нолга интилгандаги $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ айирмали нисбатнинг қийматига (агар у мавжуд бўлса) $f(x)$ функциянинг $x$ нуқтадаги ҳосиласи деб аталади ва $f'(x)$ каби белгиланади·

Масалан $f(x)=x^2+5x$ функция ҳосиласини топинг.

Биз биринчи навбатда айирмали нисбат тузамиз:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+5(x+h)-x^2-5x}{h}=$$

$$=\frac{x^2+2xh+h^2+5x+5h-x^2-5x}{h}=\frac{2xh+5h+h^2}{h}=\frac{h(2x+5+h)}{h}=(2x+5+h)$$

Агар $h\to 0$ бўлса $2x+5+h \to 2x+5$ бўлади. Демак $f'(x)=2x+5$ бўлади.

Энди биз хосиланинг хозирги кундаги мактаб математикасидаги таърифини келтирамиз.

**Таъриф:** $y=f(x)$ функциянинг ҳосиласи деб қуйидаги лимитга (агар у мавжуд бўлса) айтилади:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Одатда *y=f(x)* функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ каби белгиланади. Ҳосилани топиш амали дифференциаллаш дейилади.

Юқоридаги таърифда ўз- ўзидан ўқувчи таббиийки иккита янги тушунчага дуч келади биринчиси ҳосила ва иккинчиси дифференциаллаш. Бу тушунчалар туб моҳияти бўйича бир бирига боғлиқ тушунчалар бўлиши мумкин лекин бир ҳил тушунча эмас.

Юқорида айтиб ўтганимиздек, бу тушунчаларни ўқувчиларга шунчаки оғзаки тушунтириш қийинлиги учун ҳосилани лимитлар тилида эмас, балки оддий атама- яқинлашиш билан тушунтириш самарали натижа беради. Сабаби аслини олиб қараганда лимит маъноси яқинлашишдир, шунинг учун ўқувчи ўзига оддий ва тушунарли атамадан фойдаланиш яхши тушунарли бўлади деб ўйлаймиз.

Ҳосила тушунчасига таъриф берилгач, одатда жуда кўп педагоглар тўғридан тўғри ҳосила жадвалини беришади. Бу энг катта хатолардан биридир. Сабаби ўқувчи хеч бўлмаганда учта ёки тўртта элементар функцияларнинг ҳосиласи қандай келиб чиққанлигини билиб олса, у ҳолда ўқувчида ҳосила мавзусида тушунча пайдо бўлади.

Масалан, биринчи элементар функциялардан бири бу *y=c c=const* яъни функция ўзгармас миқдор бўлган холда функциянинг ҳосиласи нимага тенг?

Айирмали нисбатни тузиб оламиз $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{c-c}{h}=0$ бу айирмали нисбатимиз *h* га боғлиқ бўлмаганлиги учун функция ўзгармас сон бўлганда ҳосиласи нолга тенг бўлишини кўриш қийин эмас.

Асосий элементар функцияларимиздан биттаси бу чизиқли функция: $f(x)=kx+b$. Шу функциянинг ҳосиласини топамиз. Бунинг учун айирмали нисбат тузамиз

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{k(x+h)+b-kx-b}{h}=\frac{kh}{h}=k\ .$$

Бундан кўринадики, $f'(x)=k$ тенглик ўринли.

Кейинги асосий элементар функциялардан бири $f(x)=x^n$ кўринишидаги функциядир бу функциянинг ҳосиласини топамиз.

Аввал айирмали нисбат тузамиз. $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$.

Бу айирмали нисбатнинг суратидаги даражали қавсни Ньютон бином формуласидан очиб чиқамиз

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\frac{x^n+nx^{n-1}h+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}h^2+...+h^n+x^n}{h}=$$

$$=\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}h^2+...+h^n}{h}$$

ва бу ифоданинг суратидан $h$ ни қавсдан ташқарига чиқариб соддалаштиргач, қуйидагига келамиз

$$\frac{nx^{n-1}h+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}h^2+...+h^n}{h}=\frac{h(nx^{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}h+...+h^{n-1})}{h}=$$

$$=nx^{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}h+...+h^{n-1}$$

Юқоридаги ифодада $h\to 0$ ифоданинг қиймати қуйидагига тенг бўлади $nx^{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}h+...+h^{n-1}=nx^{n-1}$, бундан кўринадики

$f'(x)=nx^{n-1}$ бўлади. Шу билан бирга $f(x)=(x+a)^n$ ва $f(x)=(ax+b)^n$ кўринишдаги функция хосилаларини кўриб чиқамиз ва албатта айирмали нисбат тузамиз.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h+a)^n-(x+h)^n}{h}=\frac{((x+a)+h)^n-(x+a)^n}{h}=$$

$$=\frac{(x+a)^n+n(x+a)^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}(x+a)^{n-2}h^2+...+h^n-(x+a)^n}{h}=$$

$$=\frac{n(x+a)^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2}(x+a)^{n-2}h^2+...+h^n}{h}=$$

$$=n(x+a)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}(x+a)^{n-2}h+...+h^{n-1}$$

Бу ифодадан $h\to 0$ да қуйидаги тенгликка келамиз $f'(x)=n(x+a)^{n-1}$.

Энди $f(x)=(ax+b)^n$ кўринишдаги функция хосиласини кўриб чикамиз.

Бунинг учун яна

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(a(x+h)+b)^n-(ax+b)^n}{h}=\frac{((ax+ah)+b)^n-(ax+b)^n}{h}=$$

$$=\frac{((ax+b)+ah)^n-(ax+b)^n}{h}=$$

$$=\frac{(ax+b)^n+n(ax+b)^{n-1}ah+\frac{n(n-1)}{2}(ax+b)^{n-2}h^2+...+h^n-(ax+b)^n}{h}=$$

$$= \frac{n(ax+b)^{n-1}(ah) + \dfrac{n(n-1)}{2}(ax+b)^{n-2}(ah^2) + \ldots + (ah^n)}{h} =$$

$$= n(ax+b)^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2}(ax+b)^{n-2}ah + \ldots + (ah^{n-1})$$

Бу ифодада $h \to 0$ да $f'(x) = na(ax+b)^{n-1}$ эканлигини кўрамиз.

**Адабиётлар:**

1. Ш.О.Алимов, Ю.М.Колягин, Ю.В.Сидаров, Н.Е.Федарова, М.И.Шабунин. Алгебра ва анализ асослари: - 10-11 синфлари учун дарсли Тошкент- "Ўқитувчи" . 2001.

2. М.А.Мирзааҳмедов, Ш.Н.Исмаилов, А.Қ.Аманов. Математика: - 11-сиф Тошкент- 2018.

3. Ўзбекистон Республикасининг таълим тўғрисида қонуни http://www.uza.uz/oz/documents/zbekiston-respublika-si-khal-talimi-tizimini-2030-yilgacha-ri-29-04-2019 .