BA'ZI GEOMETRIK MASALALARNI TENGSIZLIKLAR YORDAMIDA YECHISH

O.Sh. Qarshiboyev, S.M. Islomov, F.S. Aktamov, G.B. Kuzmanova, *Toshkent viloyati Chirchiq DPI o'qituvchilari*

Maqolada o'rta maktab geometriya kursida uchraydigan eng katta yoki eng kichik qiymatlarni topishga doir misollar tengsizliklar yordamida yechilgan.

Tayanch so'zlar: *tengsizlik, uchburchak, perimetr, yarim perimetr, aylana, vatar, o'tkir burchak, mediana, sinuslar teoremasi*

В статье приводятся примеры нахождения наибольших или наименьших значений, встречающихся в курсе геометрии средней школы, решаемых с помощью неравенств

Ключевые слова: *неравенство, треугольник, периметр, полупериметр, ватар, линия, острый угол, медиана, теорема синусов*

The article provides examples of finding the greatest or least values found in geometry of the secondary school that is solved by inequality.

Keywords: *inequality, triangle, perimeter, semiperimeter, vatar, line, acute angle, median, sine theorem*

Ma'lumki, akademik litsey talabalari va maktab o'quvchilarini matematika fani bo'yicha har xil tanlovlar va olimpiadalariga tayyorlash o'rta maxsus ta'limining ajralmas qismidan iborat. O'quvchilar ijodiy qobiliyatlarini rivojlantirishi uchun murakkab va nostandart masalalar yechish eng muhim omillardan biridir. Geometriya bo'yicha ba'zi masalalarni, masalan, eng katta yoki eng kichik miqdorlarni topishga oid masalalarni yechish uchun ko'p jihatdan ularni yechish tajribasiga va yechish usullarini o'zlashtirganlik darajasiga bog'liq. Shuning uchun berilgan masalaga qarab qaysi tengsizlikni qo'llash va uni isbotlash muhimdir.Keyingi yillarda matematika bo‘yicha viloyat, respublika va hatto jahon miqyosida o‘tkazilayotgan tanlovlarda ba’zi geometrik masalalarni yechishga tengsizliklarni qo‘llash va ularni isbotlashga doir masalalar ko‘p uchramoqda[3]. Bunday masalalarni o‘rganish muhim ahamiyatga ega. O‘quvchilarning nazariy va mantiqiy fikrlashlari hamda ijodiy qobiliyatlarini rivojlantiradigan o‘quv faoliyatining muhim turi bo‘lib masalalar yechish hisoblanadi. Yuqori sinf o‘quvchilarining matematik qobiliyatlarini rivojlantirish va ijodiy salohiyatini oshirish quyidagilarni o‘z ichiga oladi:yechishning turli vaziyatlarini topish, ularning eng ratsionalini oddiy tahlil qilish maqsadida har bir yechish usulining kuchli va kuchsiz tomonlarini aniqlash. Bitta masalani turli xil taqqoslash va tahlil qilish, bilimlarni puxta va ongli bo‘lishiga yordam beradi. Bitta masalani turli xil usullar bilan yechish shunga o‘xshash mashqlarni qatorlashtirib yechishdan ko‘p foyda keltiradi. Nostandart va olimpiada masalalari- bu shunday masalalarki, ularni yechish uchun o‘quvchilarda algoritm yo‘q va tayanch g‘oyani mustaqil izlash zarur. Nostandart geometrik masalalarni yechishda matematik tasavvur shakllanadi, aqlning ziyrakligi tarbiyalanadi va matematikaning yagonaligi tushuntirish amalga oshiriladi. Quyida esa ba’zi geometrik masalalarni tengsizliklar yordamida yechishga harakat qilamiz.

1-masala. Tengsizlikni isbotlang.

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

a,b,c —uchburchak tomonlari, p —yarim perimetr.

Yechish. Isbotlashdan oldin quyidagi tengsizlikni hosil qilaylik:

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\geq\frac{4}{m+n}$$

Bu yerda $m>0, n>0$ Haqiqatan ham ko‘rinib turibdiki, $(m-n)^2\geq 0$ yoki $m^2-2mn+n^2\geq 0$. Bu ifodaning shaklini almashtiramiz $m^2+2mn+n^2-4mn\ge 0$ $(m+n)^2-4mn\ge 0$ va $(m+n)^2\ge 4mn$

$$\frac{m+n}{mn}\ge\frac{4}{m+n}\qquad \frac{1}{m}+\frac{1}{n}\ge\frac{4}{m+n.}$$

Bulardan esa quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{c}\cdot$$

Shunga o'xshash $\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{a}$, $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-c}\ge\frac{4}{b}$

Yuqoridagilarni hadma-had qo'shib,

$$\frac{2}{p-a}+\frac{2}{p-b}+\frac{2}{p-c}\ge\frac{4}{a}+\frac{4}{b}+\frac{4}{c}\ \text{ yoki}$$

$$\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Tengsizlik isbotlandi.

2-masala. Quyidagi tengsizlikning bajarilishini isbotlang: $2\sqrt{(p-b)(p-c)}\le a\cdot$

Bu yerda a,b,c- uchburchak tomonlari, P -uning yarim perimetri.

Isbot. Yarim perimetr p=(a+b+c)/2 ekanligini hisobga olib, masala shartining chap tomoniga qo'ysak,

$$2\sqrt{(p-b)(p-c)}=\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}=\sqrt{a^2-(b-c)^2}\le a.$$

Ko'rinib turibdiki, tenglik faqat $b=c$ bo'lganda bajariladi.

3-masala. Uchburchakning ichidan shunday nuqta topingki, bu nuqtadan tomonlargacha bo'lgan masofalar ko'paytmasi eng katta bo'lsin.

Yechish. M nuqtadan uchburchak ABC tomonlari BC, AC, AB gacha bo'lgan masofalarni x, y, z orqali belgilaymiz. U holda uchburchak yuzasining ikkilangangani $ax+by+cz=2S$. xyz ko‘paytma eng katta qiymatga erishishi uchun $ax\cdot by\cdot cz$ eng katta qiymatga ega bo‘lishi kerak. Oxirgi tenglikdan $ax=by=cz=\frac{2S}{3}$

Bundan $x=\frac{2S}{3a}=\frac{ah_a}{3a}=\frac{h_a}{3}$, $y=\frac{h_b}{3}$, $z=\frac{h_c}{3}$

Bu yerda u h_a, h_b, h_c -uchburchak balandligi. Oxirgi uchta tenglikdan, izlanayotgan nuqta medianalar kesishish nuqtasi ekanligini topamiz.

4-masala. Aylanada olingan nuqta orqali o‘tgan eng kichik uzunlikka ega vatarni toping.

Yechish. Aylanada yotuvchi P nuqta olaylik. P nuqta orqali 2 ta vatar: AB diametrga perpendikulyar va A_1B_1-ixtiyoriy P nuqtadan o‘tuvchi vatar o‘tkazami.

A_1B_1 ga OP_1 perpendikulyar kesma o‘tkazamiz. Hosil bo‘lgan OP_1P to’g’ri burchakli uchburchakda OP gipotenuza OP_1 katetdan katta. Shunday qilib, $AB<A_1B_1$

Demak, P nuqtadan o‘tuvchi eng kichik vatar mavjud va u diametrga perpendikulyar .

5-masala.Berilgan aylanaga ichki chizilgan muntazam $n-$burchak va $2n-$burchakning tomonlari a_n va a_{2n} bo‘lsa, $a_{2n}<\frac{2}{3}a_n$ tengsizlikni isbotlang.

Isbot. $AB=a_n$, $AM=a_{2n}$ va AB ning o‘rtasi C nuqta bo‘lsin. AMB yoy $\frac{360°}{n}$, MB yoy $\frac{180°}{n}$ dan tuzilgan.

Biz $AM=a_{2n}=\frac{AM}{\cos(\angle MAB)}=\frac{AB}{2\cos(\angle MAB)}=\frac{a_n}{2\cos(\angle MAB)}$

ga egamiz. Demak, $a_{2n}=\frac{a_n}{2\cos(\angle MAB)}$

$$n \geq 3 \text{ da } a_{2n} \leq \frac{a_n}{2\cos 30°} = \frac{a_n}{\sqrt{3}} \text{ va } \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{2}{3} \text{ ekanligidan } a_{2n} < \frac{2}{3}a_n$$

kelib chiqadi.

Xulosa. Tajriba shuni ko'rsatadiki, geometrik masalalarni algebraik tengsizliklar yordamida yechish o'quvchilardan chuqur bilimni va matematik didni shakllantirishda muhim ahamiyatga ega. Matematikani chuqur o'rganuvchi sinflarda fakultativ darslarda o'quvchilarni ijodkorlik qobiliyatini chuqurlashtiradi va ularni olimpiadalarga tayyorlashga katta yordam beradi, matematikaga yuqori talab qo'yilgan oliy o'quv yurtlariga kirish imtihonlariga tayyorlaydi.

Adabiyotlar

1.Ismoilov Sh., Qo'chqorov A., Abdurahmonov B. Tengsizliklar-I, II Isbotlashning klassik usullari -Toshkent, -2008.

2.Сивяшенский И.Х. Неравенства в задачах. Москва, 1966

3.Mathematical Olympiads,Problems and solutions from around the world,1998-1999.Edited by Andreescu T. and Feng Z. Washington 2000

4.Math Links, http://www.mathlinks.ro

5.Math Pro Press, http://www.mathpropress.com

6.Ayupov Sh., Rihsiyev B., Quchqorov O."Matematika olimpiada masalalari"-1,2 qismlar. -T.:Fan, 2004.

OLIMPIADA VA MASALALAR YECHISH BOʻLIMI

FMI jurnalining Aziz muxlislari! Ushbu «Masalalar boʻlimi» jurnal tashkil qilingandan buyon faoliyat koʻrsatib keladi.

Bu yerda berilgan masalalarni yechib tahririyatga yuboring. Xat mualliflarining ismi jurnal sahifalarida e'lon qilinadi.

Shuningdek, oʻzingizga manzur boʻlgan va boshqalar uchun ham qiziqarli boʻlishi kutilgan misol va masalalarni toʻplab, tanlab yuboring. Ism va familiyangiz bilan jurnalda berib boramiz.

Bu ishga iqtidorli oʻquvchilar bilan shugʻullanayotgan ustoz muallimlar va matematika toʻgaragi rahbarlarini jalb qilamiz.

Xat va masalalaringizni quyidagi manzilga yuboring:

Toshkent shahri, Furqat koʻchasi 174 - uy.
Oʻzbekiston Pedagogika fanlari ilmiy
tadqiqot instituti, FMI jurnali.

Agar yangi masalalar tuzib yuborsangiz unga alohida e'tibor beriladi. Jurnalimiz haqidagi har qanday taklif va fikr mulohazalaringizni mamnuniyat bilan qabul qilamiz.

Masalalar boʻlimida qanday tipdagi masalalar boʻlishini xohlaysiz. Xatlaringizni kutamiz.

Masalalar

M.566. Tekislikda n ta toʻgʻri chiziq oʻtkazilgan. Har biri qolganlari bilan 1999 marta kesishadi n ning mumkin boʻlgan barcha qiymatini toping.

M.567. Ali va Vali ketma-ketlik bilan koʻrishayabdi. Dastlab ketma-ketlikda bitta natural son bore di. Soʻngra ular navbati bilan quydagicha sonlarni yozishdi. Ali oldingi songa uning biror raqamini qoʻshadi, Vali esa oldingi sondan biror raqmini ayirdi. Qaysidir raqam bu ketma-ketlikda kamida 10 marta takrorlashini isbotlang.

M.566. ABC uchburchakning tashqi-ichki aylanasi AC va CB tomonlarini K va L nuqtalarda urinadi KL va AB kesmalarning oʻrtalarini