

26 – mavzu: Ikki ayqash to'g'ri chiziq orasidagi masofa. To'g'ri chiziq bilan tekislikning o'zaro joylashuvi. Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak.

Darsda yechiladigan misollar

1.Masala. Kanonik tenglamalari bilan berilgan to'g'ri chiziqlar

$$d_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}, \quad d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$$

orasidagi burchakni hisoblang.

Yechish. d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi $\vec{p}_1(4, 3, -1)$, $\vec{p}_2(-1, 3, 5)$ bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 = 0, \text{ bundan } \vec{p}_1 \perp \vec{p}_2.$$

Demak, to'g'ri chiziqlar perpendikulyar.

$$M_1(2, -1, 0) \in d_1, \quad M_2(1, 0, 1) \in d_2. \quad \vec{M}_1 \vec{M}_2(-1, 1, 1).$$

$$(M_1 M_2 \vec{p}_1 \vec{p}_2) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -22 \neq 0$$

Demak, d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar ayqash.

1-misol. Ikkita d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlar kanonik

$$d_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}$$

$$d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}$$

tenglamalari bilan berilgan. Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

Yechish. Avval boshlang'ich nuqta va yo'naltiruvchi vektorlarni aniqlaylik. $M_1(3, -15, 9)$, $M_2(-1, 1, 9)$, $\vec{p}_1(2, -7, 3)$, $\vec{p}_2(2, 1, -3)$. $\vec{M}_1 \vec{M}_2(-4, 16, 0)$. Endi d_1 va d_2 to'g'ri chiziqlarni (18.1) va (18.2) formulalardan foydalanib d_1 va d_2 larning o'zaro vaziyatini aniqlaylik.

$$\begin{vmatrix} -4 & 16 & 0 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 192 \neq 0. \text{ Demak, } d_1 \text{ va } d_2 \text{ to'g'ri chiziqlar ayqash. (21.1)}$$

formuladan foydalanib ular orasidagi masofani topamiz.

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{192}{4\sqrt{3}} = \frac{48}{3}\sqrt{3} = 16\sqrt{3}.$$

2-misol. d to'g'ri chiziq va T tekislik ushbu tenglamalar bilan berilgan:

$$x = 3 + \sqrt{5}t,$$

$$d: y = -1 + \sqrt{5}t,$$

$$z = \sqrt{6}t.$$

$$T: x - y + 2z - 5 = 0.$$

d to'g'ri chiziq bilan T tekislik orasidagi burchakni toping.

Yechish. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakni topish uchun (20.2) formuladan foydalanamiz

$$\sin \varphi = \frac{|\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{6}|}{\sqrt{6}\sqrt{16}} = \frac{1}{2}.$$

Bundan $\varphi = 30^\circ$.

3-misol. d to'g'ri chiziq umumiy

$$d: \begin{cases} 2x + 2y - 6z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

tenglamasi bilan berilgan. d to'g'ri chiziq $T: 2x + 7y + 3z - 12 = 0$ tekislikka perpendikulyar ekanligini isbotlang.

Yechish. d to'g'ri chiziqlarning yo'naltiruvchi vektorini topaylik.

$$\vec{p} \left(\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right), \vec{p}(-4, -14, -6).$$

T tekislikning normal vektori $\vec{n}(2, 7, 3)$. Demak, $\vec{n} = -\frac{1}{2} \vec{p} \Rightarrow d \perp T$.

4 - misol. Berilgan $M_1(4, -5, 3)$ nuqtadan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani toping. d to'g'ri chiziq kanonik tenglamasi bilan berilgan.

$$d: \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}$$

Yechish. $M_0(5, -2, 6) \in d$, $\vec{p}(3, -4, 5)$ yo'naltiruvchi vektori, $\vec{M_0M_1}(-1, -3, -3)$.

$$\rho(M_1, d) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{9+16+25}} = \frac{\sqrt{457}}{5}.$$

2.3.3. ([1], p72) $\triangle ABC$ uchburchakning B , C uchlari kўzgalmas бўлса $AC^2 - AB^2 = constant$ муносабатни қаноатлантирувчи барча A нуқталарнинг геометрик ўрни тўғри чизик эканлигини исботланг ҳамда бу тўғри чизикнинг BC томон билан ҳосил қилган бурчагини топинг.

2.3.10. ([1], p72) $x + 5y - z + 2 = 0$, $4x - y + 3z - 1 = 0$ текисликларнинг кесишиш тўғри чизигидан ўтувчи ва

а) Oy ўқига параллел;

б) $2x - y + 5z - 3 = 0$ текисликка перпендикуляр текисликлар тенгламалари топилсин.

2.3.12. ([1], p72) $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$, $C(1, 0, 1)$, $D(-1, 1, 1)$ нуқталар берилган. A, B нуқталардан ўтувчи ҳамда CD тўғри чизикқа параллел текислик тенгламасини тузинг.

2.3.14. ([1], p72) $A(4,0,1)$ нуқтадан ўтувчи ва $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{3}$, $\frac{x}{5} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқлар билан кесишувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

2.3.16. ([1], p72) Фазода $(d_1) \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-4}{1}$, $(d_2) \frac{x+10}{11} = \frac{y+8}{10} = \frac{z-1}{2}$ тўғри чизиқ тенгламалари берилган.

i) тўғри чизиқлар бир текисликда ётишини кўрсатинг ва бу текислик тенгламасини тузинг.

ii) тўғри чизиқлар орасидаги ўтмас бурчакни кўрсатинг ва бу бурчак бистерисаси тенгламасини тузинг.

1([2]). Berilgan $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tuvchi va

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

tekislikga perpendikulyar to'g'ri chiziqliq tenglamasini yozing.

2([2]). Quyidagi to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini toping:

1) $8x - 3y - 1 = 0$, $4x + y - 13 = 0$

2) $3x + 7y - 15 = 0$, $9x + 21y - 32 = 0$

3) $5x - 2y + 13 = 0$, $x + 3y - 11 = 0$

3([2]). Quyidagi uchta to'g'ri chiziqlar bir nuqtadan o'tadimi?

1) $3x - y - 1 = 0$, $2x - y + 3 = 0$, $x - y + 7 = 0$

2) $x + 3y - 1 = 0$, $5x + y - 10 = 0$, $3x - 5y - 8 = 0$

3) $3x - y + 6 = 0$, $4x - 3y - 5 = 0$, $2x - y + 5 = 0$.

4([2]). Uchburchak tomonlari

$$x + 2y + 3 = 0, 3x - 7y + 9 = 0, 5x - 3y - 11 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning balandliklari kesishgan nuqtani toping.

5([2]). To'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni aniqlang.

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \text{ va } \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

6([2]). Quyidagi to'g'ri chiziqliq va tekislikning kesishish nuqtasini toping.

1) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ va $3x - 3y + 2z - 5 = 0$

2) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ va $x + 2y - 4z + 1 = 0$

7([2]). Berilgan $A(4, -3, 1)$ nuqtaning $x + 2y - z - 3 = 0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

8([2]). Berilgan $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+1}{-2}$ to'g'ri chiziqliqning $x - y + 3z + 8 = 0$ tekislikdagi proeksiyasini toping.

9([2]). Berilgan to'g'ri chiziq berilgan tekislikda yotadimi?

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$, $4x + 3y - z + 3 = 0$

2) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$, $5x - 8y - 2z - 1 = 0$

3) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$, $3x - 2y - z - 1 = 0$

10([2]). Berilgan to'g'ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

1) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{5}$, $4x + 3y - z + 3 = 0$

2) $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{7} = \frac{z-2}{3}$, $5x - 8y - 2z - 1 = 0$

3) $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{1}$, $3x - 2y - z - 1 = 0$

11([2]). To'g'ri chiziqlarning tenglamalarini kanonik ko'rinishga keltiring.

$$1) \begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$$

12([2]). To'g'ri to'rtburchakning uchta tomoni

$$x + y = 0, \quad x - y = 0, \quad x - y - 4 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uning yuzasi 10 ga teng bo'lsa, to'rtburchakning to'rtinchi tomoni tenglamasini tuzing.

13([2]). Uchburchak tomonlari

$$x + 2y + 3 = 0, \quad 3x - 7y + 9 = 0, \quad 5x - 3y - 11 = 0$$

tenglamalar bilan berilgan. Uchburchakning medianalari kesishgan nuqtani toping.