16-mavzu:
Darsda yechiladigan misollar

Masala. 1. Koordinatalari (39.4) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o`rnini tekshiring.

Yechish (39.4) tenglamani

$$x^2 + Dx + \frac{D^2}{4} + y^2 + Ey + \frac{E^2}{4} + F - \frac{D^2}{4} - \frac{E^2}{4} = 0$$

yoki

$$(x + \frac{D}{2})^2 + (y + \frac{E}{2})^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} = \frac{p}{2} \qquad (39.5)$$

ko'rinishda yozaylik. Bu yerda $p=D^2+E^2-4F$.

Quyidagi hollardan biri bo`lishi mumkin:

1.$D^2+E^2-4F > 0$ bo`lsa, (39.5) tenglama markazi $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$ nuqtada radiusi $r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ ga teng aylana tenglamasidir.

2.$D^2+E^2-4F = 0$ bo`lsa, (39.5) tenglamani bittagina $(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$ nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, geometrik o`rin bitta nuqtadan iborat bo`ladi.

3.$D^2+E^2-4F < 0$ bo`lsa, u holda koordinatalari (39.5) tenglamani qanoatlantiruvchi bitta ham haqiqiy nuqta mavjud emas.

2-Masala. quyida berilgan tenglamalarning qaysi birlari aylanani aniqlaydi. Agar tenglamalar aylanani aniqlasa, uning markazining koordinatalarini va radiusini toping.

a) $x^2+y^2-4x+8y+4=0$;

b) $x^2+2y^2-4x=0$;

v) $x^2+y^2-3=0$;

g) $4x^2+4y^2-4x+8y+5=0$.

Yechish. hamma hol uchun $p=D^2+E^2-4F$.

a) $p=(-4)^2+8^2-4+4=64$, $(x-2)+(y+4)=16$.

Bu markazi $C(2;-4)$ nuqtada radiusi $r=4$ bo`lgan aylanani aniqlaydi.

b) x^2, y^2 lar oldidagi koeffitsientlari teng emas, demak bu tenglama aylanani aniqlamaydi.

v) $\rho = 0 + 0 + 4 \cdot 3 = 12 > 0$.

Tenglamalar markazi koordinatalar boshida radiusi $r=\frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{3}$ bo`lgan aylanani ifodalaydi.

g) berilgan tenglamada x^2 va y^2 larning oldidagi koeffitsientlar bir-biriga teng shartga ko`ra aylanani ifodalaydi. Uning markazi va radiusini topaylik. Tenglamani 4 ga bo`lib,

$x^2+y^2-x+2y+\frac{5}{4}=0$

$\rho=D^2+E^2-4F=1+4-5=0$. Shunday qilib, tenglama faqat bitta ($\frac{1}{2}$; 1) nuqtani aniqlaydi.

3-misol. Agar quyidagilar berilgan bo`lsa, ellipsning kanonik tenglamasini tuzing.

a)ellips uchlarining koordinatalari $A_1(5,0)$, $A_2(-5,0)$, $B_1(0,3)$, $B_2(0,-3)$

b) ekstsentrisitet $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$, katta yarim o`q $a=3$

v) fokal masofa $2c=8$, kichik yarim o`q $b=4$

Yechish. a) katta yarim o`q $a=5$, kichik yarim o`q $b=3$ teng, ellips ushbu $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ kanonik tenglama bilan aniqlanadi.

b) $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a=3$, shuning uchun $c=\sqrt{3}$. $b^2=a^2-c^2=9-3=6$, $b=\sqrt{6}$. Shuning uchun ellips $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ kanonik tenglama bilan aniqlanadi.

v) $c=4$, $a^2=b^2+c^2=16+16=32$, $a=4\sqrt{2}$. Biz ellipsning ushbu kanonik tenglamasiga $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$ ega bo`lamiz.

4-misol. a) $16x^2+25y^2-400=0$ b) $9x^2+25y^2-225=0$

Yechish. 1) $16x^2+25y^2-400=0$, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ bu yerda $a=5$, $b=4$, $c=\sqrt{25-16}=3$, $e_1=\frac{3}{5}$.

2) $9x^2+25y^2-225=0$, bundan $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ bu yerda $a=5$, $b=3$, $c=\sqrt{25-9}=4$, $e_2=\frac{4}{5}$.

$e_1<e_2$ birinchi ellips ikkinchiga nisbatan o`zining katta o`qiga siqilgan, ya'ni cho`ziqroq.

3-misol. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsning $M_0(1,\frac{4\sqrt{2}}{3})$ nuqtasiga urinma o`tkazing.

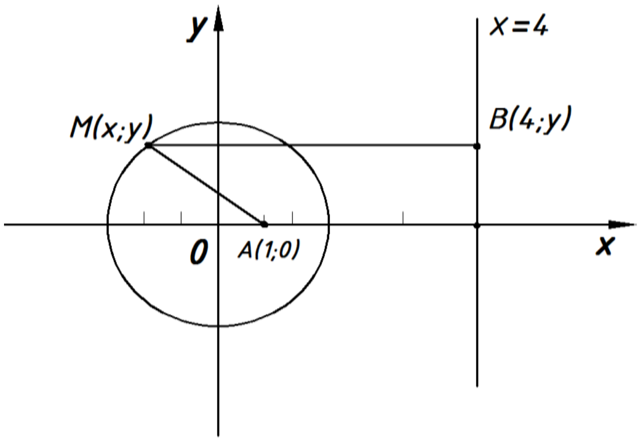
Yechish. M_0 nuqta ellipsda yotadi. Uning koordinatalari (15.16) tenglamaga qo`yib urinma tenglamasini topamiz.

$\frac{x}{9}+\frac{y\cdot 4\sqrt{2}}{4\cdot 3}=1$ yoki $x+3\sqrt{2}y-9=0.$

254. Текисликда A (3; 0) нутагача ва $x=12$ тўғри чизиққача бўлган масофанинг нисбати $\lambda=\frac{1}{2}$ га тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини топинг.

255. Ўзининг текисликдаги харакат давомида A (1; 0) нуқтага $x=4$ тўғри чизиққа нисбатан икки марта яқинда қоладиган M нуқтанинг ҳаракат траекторияси тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Масала шартидан, изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий М$(x; y)$ нуқта учун $2MA = MB$ тенглик ўринли бўлиши келиб чмқади (39-расм).



(1.1) формула бўйича:

$MA = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ ва $MB = \sqrt{(x-4)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{(x-4)^2} = |x-4|$ ёки

$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-4|$.

Чап ва ўнг томонларини квадратга кўтарамиз:

$$4(x-1)^2 + 4y^2 = (x-4)^2.$$

Соддалаштиришлардан сўнг,

$3x^2 + 4y^2 = 12$ ёки $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ ни ҳосил қиламиз.

256. Ўзининг текислик бўйлаб ҳаракати давомида $y = 9$ тўғри чизиқдан А (0; 1) нуқтага қараганда уч марта узоқда қоладиган М нуқтанинг траектория тенгламасини тузинг.

257. Текисликда шундай нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузингки, уларнинг ҳар биридан $x = 2$ тўғри чизиққача бўлган масофа улардан А (8; 0) нуқтагача бўлган масофага қараганда икки марта яқин бўлсин.

258. Ўзининг текислик бўйича ҳаракати давомида $x = 1$ чизиққа А (9; 0) нуқтага қараганда уч марта яқин қолдирган М $(x; y)$ нуқтанинг траектория тенгламасини тузинг.

259. Текисликда 0х ўқдан ва А (0; - 2) нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

260. Текисликда 0у ўқдан ва А (3; 0) нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

261. Текисликда $y = 1$ тўғри чизиқ ва А (0; -3) нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини ёзинг.

262. Текисликда ҳар биридан $x = -2$ тўғри чизиққача бўлган масофага улардан А (3; - 4) нуқтагача бўлган масофага тенг бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.

263. Текисликда ҳар бири А (- 2; 3) нуқтадан ва $x = 4$ тўғри чизиқдан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини топинг.

264. Текисликда ҳар бири $y = -2$ тўғри чизиқдан ва A (-3; 4) нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни тенгламасини топинг.

265. Агар текисликда ҳаракатланаётган нуқтанинг ҳаракати давомида ундан A (2; -1) нуқтагача бўлган масофанинг квадрати ҳар доим ундан $0x$ ўққача бўлган масофанинг квадратига тенг бўлса, нуқтанинг траектория тенгламасини тузинг.

266. Агар текисликда берилган нуқтанинг ҳаракати давомида ундан A (- 3; 4) нуқтагача бўлган масофанинг квадрати ҳар доим ундан $0x$ ўққача бўлган масофа квадратининг иккиланганига тенг бўлса, бу нуқтанинг ҳаракат траекторияси тенгламасини топинг.

267. агар текисликдаги нуқталарнинг геометрик ўрнининг ҳар бир нуқтасини абциссаси бу нуқтанинг ординатаси ва бу нуқтани A (1; 0) нуқта билан туташтирувчи кесманинг узунлиги орасида ўрта пропорционал бўлса, бу нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

Ечилиши. а ва b сонларнинг ўрта пропорционали деб $m = \sqrt{ab}$ сонга айтилишини эслатиб ўтамиз.

Масала шатидан, геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий N

N $(x; y)$ нуқта учун ушбу тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади:

$$OB = \sqrt{BN \cdot AN},$$

$$OB = |x|, \qquad BN = |y|, \qquad AN = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}.$$

Бу қийматларни биринчи тенгликка қўйиб топамиз:

$$|x| = \sqrt{|y|\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \ .$$

Ифодани радикаллардан қутқариб, соддалаштирилгандан сўнг, ушбуга эга бўламиз:

$$x = |y|\sqrt{(x-1)^2 + y^2}; \qquad x^4 = y^2(x-1)^2 + y^4$$

ёки

$$x^4 - y^4 = y^2(x-1)^2.$$

268. Агар геометрик ўриннинг ҳар бир нуқтасини координаталар боши билан туташтирувчи кесма бу нуқтанинг абциссаси ва ординатаси орасида ўрта пропорционал бўлса текисликдаги бу нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

269. Текисликда шундай нуқталарнинг геометрик ўрнини топингки, бу геометрик ўрнининг нуқтасини A (-1; -2) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти худди шу нуқтанинг ўзини B (-4; 2) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентидан уч марта катта бўлсин.

Ечилиши. масала шартидан, изланаётган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли бўлган ихтиёрий M (x ; y) нуқтаучун $k_{MA} = 3k_{MB}$ тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади.

(2.19) формула бўйича ёзамиз:

$$k_{MA} = \frac{y+2}{x+1}; \qquad k_{MB} = \frac{y-2}{x+1}.$$

k_{MA} ва k_{MB} нинг қийматини юқоридаги тенгликка қўйиб,

$$\frac{y+2}{x+1} = 3\frac{y-2}{x+4} \qquad \text{ни ҳосил қиламиз.}$$

Соддалаштиришлардан сўнг,

$2xy - 8x - y - 14 = 0$ га эга бўламиз.

270. Текисликда шундай нуқталарнинг геометрик ўрнини топингки, бу геометрик ўрнининг исталган нуқтасини A (2; 3) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти геометрик ўриннинг худди шу нуқтасини B (5; 1) нуқта билан туташтирувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентидан икки марта кичик бўлсин.

17- §. Айлана

Айлана деб текисликда берилган нукта (марказ)даи бир хил масофа (радиус)га узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнига айтилади.

Маркази координаталар бошида ва радиуси r бўлган айлананинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 = r^2$$

бўлади.

Маркази Ox (a;b) нуқтада ва радиуси r бўлган айлананинг тенгламаси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

бўлади.

Айлананинг умумий кўринишдаги тенгламаси:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0.$$

Умумий кўринишдаги айланаиннг хусусий ҳоли:

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0\,.$$

(3.1) — (3.4) тенгламаларда x ва y ўзгарувчи координаталар системасининг исталган нуқтасинин координаталари. (3.3) ва (3.44) темгламаларда A, B, C, D, M, N ва P —ўзгармас коэфициентлар. Шуни назарда тутиш керакки, хусусий ҳолларда (3. 3) шунингдек, (3.4) тенгламаларда айлананинг координата ўқларига нисбатан вазиятига қараб, B, C ёки D ва мос равишда M, N ва P коэффициентларнинг ҳар қайсиси алоҳида ёки иккитаси бир пайтда нолга тенг бўлиб қолиши мумкин.

Айлананинг (3-4) тенгламасида M ва N коэффициентлар билан айлана маркази Ox (a; b) нинг координаталари орасида ушбу содда

$$a = -\frac{M}{2}\,;\;\; b = -\frac{N}{2}$$

муносабат, шунингдек, M, N ва P билан айлана радиуси r ўртасида

$$r = \frac{\sqrt{M^2 + N^2 - 4P}}{2}$$

муносабат мавжуд (305- масаланинг ечилишига қаранг).

I. Берилган нуқталарнинг айланага тегишлилигини текшириш

271. (2; 4), (7; 1) ва (0; 2) нухталарнинг $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ чайланага тегишлилигини текшириб кўринг.

272.(— 4; 3) ва (5; 0) нуқталарнинг $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 35 = 0$ айланага тегишлилигини текшириб кўринг.

II. Маркази берилган нуқтада бўлган ва раднуси берилган айлананинг тенгламасини тузиш

273. Маркази $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ нуқтада ва радиуси 2 га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг. Бу айлаиани ясанг.

Ечилиши. Масала шартидан:

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{4} \text{ ва } r = 2.$$

Бу қийматларни (3- 2) тенгламага қўйиб, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left[y - \left(-\frac{3}{4}\right)\right]^2 = 2^2.$$

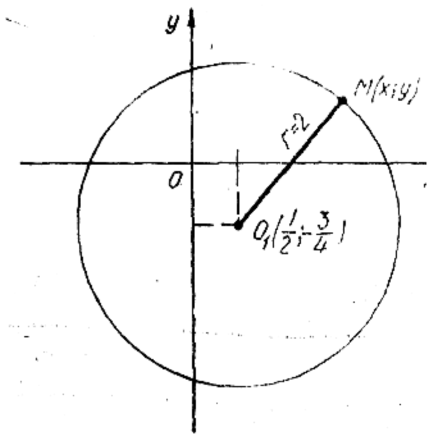
Квадратга кўтаргандан ва озод ҳадни чап томонга ўтказгандан сўнг айлананинг (3.3) кўринишдаги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 51 = 0.$$

Айланани ясаш: 1) айлананинг марказини, яъни $O_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ нуктани ясаймиз 2) O_1 марказдан 2 га тенг радиуси билан айлана чизамиз (43- расм).

274. Маркази координаталар бошида ва радиуси 3 га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг.

275. Маркази (— 2; —5) нуқтада ва радиуси 3 га тенг бўлган айлананинг тенгламасини тузинг. Бу айланани ясанг.



43- расм.