8-mavzu: Darsda yechiladigan misollar

1-masala. $F(x,\ y)=\dfrac{x}{y}-1$ ifoda $y\neq 0$ bo'lganda ma'noga ega bo'lib, uning aniqlanish sohasi tekislikning Ox o'qida yotmagan barcha nuqtalar to'plamidan iborat bo'ladi.

2-masala. $F(x,\ y)=\sqrt{-(x^2+y^2+1)}$ ifoda $x,\ y$ haqiqiy sonlarning har qanday qiymatlarida ma'noga ega emas.

Ushbu

$$F(x,\ y)=0 \quad (F(x,\ y)\vee 0) \qquad (19.1)$$

ko'rinishdagi tenglama (tengsizliklarni) qaraymiz. $(>, <, \geq, \leq)$ belgilarning hammasini bitta $\vee$ belgi bilan belgilaymiz.

Agar $x=x_0, y=y_0$ sonlarni (19.1) dagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'ysak, uni to'g'ri tenglikka (tengsizlikka) aylantirsa, bu sonlar (19.1) tenglamaning (tengsizlikning) yechimi deyiladi.

3-masala. $F(x,\ y)=3x+2y-2=0$, $x=4$, $y=-5$ sonlar tenglamaning yechimi bo'ladi, chunki bu sonlar tenglamani qanoatlantiradi $x=5$, $y=7$ sonlar tenglamani qanoatlantirmaydi, demak tenglama yechimi bo'lolmaydi.

4-masala. $F(x,\ y)=3x+2y>1$ olaylik $x=4$, $y=-5$ sonlar $3x+2y>1$ tengsizlik yechimi bo'ladi, chunki bu sonlarni tengsizlikdagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'ysak,

$3\cdot 4+2\cdot(-5)>1, \quad 2>1$ to'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi.

$x=4$, $y=-6$ sonlar tengsizlikning yechimi bo'la olmaydi, chunki bu sonlarni tengsizlikdagi o'zgaruvchilar o'rniga qo'yganda $0>1$ noto'g'ri tengsizlik hosil bo'ladi.

(19.1) tenglamaning (tengsizlikning) barcha echimlar to'plami tekislikda biror figurani aniqlaydi. Endi figuraning tenglamasi (figurani aniqlovchi tengsizlik) tushunchasini kiritamiz.

To'g'ri chiziqning turli tenglamalariga doir masalalar echamiz:

1-masala. $M_0(1,-3)$ nuqtadan o'tuvchi $\overline{P}(2,-5)$ vektorga perallel to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish (21.3) formuladan foydalanamiz.

$a_1 = 2, a_2 = -5, x_0 = 1, y_0 = -3.$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-5};\quad -5x+5=2y+6$$

yoki

$5x+2y+1=0.$

***2*-masala**. Ushbu $M_1(1,-3)$, $M_2(3,7)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri, chiziq tenglamasini yozing.

Yechish (21.5) formulaga koordinatalarning qiymatlarini qo'yib, ushbuga

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+3}{7+3};\ \ 10x-10=2y+6$$

yoki

10x-2y-16=0.

3-masala. To'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida, $A(a,0)$ nuqtadan o'tuvchi va Oy o'qiga parallel bo'lgan d to'g'ri chiziq tenglamasini yozing.

Yechish Tekislikdagi $N(x, y)$ nuqta d to'g'ri chiziqda yotishi uchun

$$x=a \qquad (19.2)$$

bo'lishi zarur va yetarlidir. (36-chizma)

Haqiqatan, agar $N_0(x_0, y_0)$ nuqta d to'g'ri chiziqda yotsa, u holda A nuqta N_0 nuqtaning Ox o'qdagi proeksiyasi bo'ladi, shuning uchun N_0 va A nuqtalar bir xil proeksiyalarga ega bo'ladi, ya'ni $x_0=a$.

N_0 nuqtaning koordinatalari (19.2) tenglamani qanoatlantiradi.

Agar $N_1(x_1, y_1)$ nuqta d to'g'ri chiziqda yotmasa, u holda uning Ox o'qdagi proeksiyasi N_1' nuqta**,** A nuqta bilan ustma-ust tushmaydi (34-chizma), shuning uchun $x_1 \neq a$, demak, N_1' nuqtaning koordinatalari (19.2) tenglamani qanoatlantirmaydi.

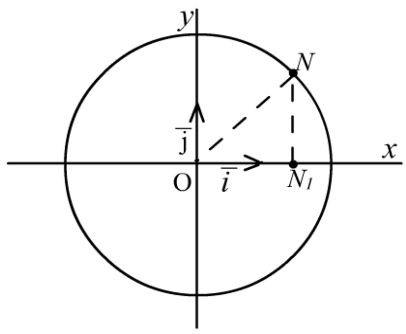
Shunday qilib, (19.2) tenglama d to'g'ri chiziqning tenglamasi ekanligi isbotlandi.

2) Yuqorida qo'yilgan ikkinchi muammoni hal qiluvchi masalani ko'raylik.

4-masala. F figuraning

$$x^2+y^2=4 \qquad (19.3)$$

tenglamasi berilgan. Uning xossalarini o'rganib qanday chiziq ekanligini aniqlang.



37-chizma

Yechish: Agar $N(x,y)$ nuqta F ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, uning koordinatalari (19.3) tenglamani qanoatlantirishi kerak. $ON^2=x^2+y^2$ bo'lsa, u holda N nuqta uchun $ON^2=4$ yoki $ON=2$.

Shunday qilib, F figuraning ixtiyoriy nuqtasi koordinatalr boshidan $ON=r=2$ uzoqlikda yotadi.

Ya'ni markazi koordinatalar boshida radiusi r bo'lgan aylanada yotadi. Bu aylanani $S(0,r)$ ko'rinishda belgilaymiz (37-chizma).

Agar $N_1(x_1, y_1)$ nuqta F ga tegishli bo'lmasa, u holda $x_1^2+y_1^2\neq 4$.(36-chizma)

Ya'ni, $ON_1\neq 2$. Bu esa $N_1\notin S(0,r)$.

Shunday qilib, (19.3) tenglama bilan berilgan F figura $S(0,r)$ aylanadan iborat.

5-masala. $\left(0, \bar{e}_1, \bar{e}_2\right)$ koordinatalar sistemasida

$$x^2+y^2+1=0$$

tenglama bilan berilgan F shaklni aniqlang.

Yechish Tekislikning ixtiyoriy $N(x,y)$ nuqtasining koordinatasi haqiqiy sonlardan iborat, u holda $x^2\geq 0$, $y^2\geq 0$. Shuning uchun tekislikning ixtiyoriy nuqtasida $x^2+y^2+1>0$. Demak, tekislikda koordinatalari $x^2+y^2+1=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi birorta ham nuqta yo'q. F bo'sh to'plam.

6 - masala. $F(x,y) = y$ bo'lsin. U holda:

$F_1=\{ N(x,y) \mid y=0\}$ - Ox absissa o'qi.

$F_2=\{ N(x,y) \mid y>0\}$ - ya'ni Ox o'qi kirmagan Oy oqini musbat qismini o'z ichiga olgan yarim tekislik.

$F_3=\{ N(x,y) \mid y<0\}$ - Ox o'qi kirmagan Oy oqini manfiy qismini o'z ichiga olgan yarim tekislik.

$F_4=\{ N(x,y) \mid y\geq 0\}$ - Ox o'qni va Oy oqini musbat qismini o'z ichiga olgan yarim tekislik.

$F_5=\{ N(x,y) \mid y\leq 0)$ - Ox o'qni va Oy oqini manfiy qismini o'z ichiga olgan yarim tekislik.

Misollar:

1. Ikkita $ax+by+c=0$ va $bx-ay+c'=0$ to'g'ri chiziqlar to'g'ri burchak ostida kesishishini ko'rsating.
2. $y=x\cot\alpha \ \ (-\frac{\pi}{2}<\alpha<0)$ to'g'ri chiziqning x o'qi bilan tashkil qilgan burchagi nimaga teng?
3. Ushbu $x+2y=0$, $2x+y=0$ va $x+y=1$ tenglamalar bilan berilgan to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan uchburchakning ichki burchaklarini toping.
4. Ushbu to'rtta , $\pm ax\pm by+c=0 \ \ (a,b,c\neq 0)$ to'g'ri chiziqlar kesishishidan hosil bo'lgan to'rtburchakning romb ekanini ko'rsating va koordinata o'qlari uning diagonallari ekanini isbotlang.

1 topshiriq

Quyidagi to'g'ri chiziqlarning kanonik tenglamasini tuzing

1. $2x-3y+2z+2=0,$
   $2x+3y+z+14=0.$

10. $x+y-2z-2=0,$
    $x-y+z+2=0.$

2. $x-2y+2z-4=0,$
   $2x+2y-2z-8=0.$

11. $x+5y-z+11=0,$
    $x-y+2z-1=0.$

$x + y + z - 2 = 0,$
3. $x - y - 3z + 2 = 0.$

$2x + 3y + z + 3 = 0,$
4 $x - 3y - 2z + 3 = 0.$

$x + y - z - 4 = 0,$
5. $x - y + 2z = 0.$

$x + y - 2z - 1 = 0,$
6. $x - 2y + 2z = 0.$

$2x + 2y - 2z + 1 = 0,$
7 l$3x - 2y + 3z + 4 = 0.$

$4x + y - 3z + 4 = 0,$
8. $2x - y + 2z + 2 = 0.$

$x - y - z - 2 = 0,$
9. $x - 3y + z + 4 = 0.$

$x - y + z - 2 = 0,$
12. $x - 2y - z + 4 = 0.$

$6x - 7y - z - 2 = 0,$
13. $x + 7y - 4z - 5 = 0.$

$x + 5y + 2z - 5 = 0,$
14. $2x - 5y - z + 5 = 0.$

$x - 3y + z + 2 = 0,$
15. $x + 3y + 2z + 14 = 0.$

$2x + 3y - 2z + 6 = 0,$
16. $x - 3y + z + 3 = 0.$

$3x + 4y + 3z + 1 = 0,$
17. $2x - 4y - 2z + 4 = 0$

$3x + 3y + z - 1 = 0,$
18. $2x - 3y - 2z + 6 = 0.$

2 topshiriq

Quyidagi to’g’ri chiziqlarning kanonik tenglamasini tuzing.

1. $\begin{cases} 2x - 3y + 2z + 2 = 0, \\ 2x + 3y + z + 14 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - 2y + 2z - 4 = 0, \\ 2x + 2y - 2z - 8 = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z - 2 = 0, \\ x - y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y + z + 3 = 0, \\ x - 3y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

1. Берилган $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик берилган CE кесманинг кесишиш шартини ёзинг.
2. Учта текислик

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлса, уларнинг бир нуқтада кесишиш шартини топинг.

3. Иккита параллел бўлмаган тўғри чизиқлар

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлса, улар ҳосил қилган бурчакнинг биссектрисалари тенгламаларини тузинг.

4. Берилган $M(x_0, y_0)$ нуқтадан ўтувчи ва $y = kx + b$ тўғри чизиқ билан маълум φ бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

5. Учта тўғри чизиқ

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлса, уларнинг бир нуқтада кесишиш шартини топинг.

6. Иккита параллел бўлмаган текисликлар

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тенгламалар билан берилган бўлса, улар ҳосил қилган икки ёқли бурчаклар учун биссекториал текисликлар тенгламаларини тузинг.

7. Иккита параллел бўлмаган текисликлар

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тенгламалар билан берилган бўлса, берилган $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарнинг текисликлар ҳосил қилган икки ёқли бурчакларга нисбатан ҳолатини аниқланг.

8. Иккита параллел бўлмаган тўғри чизиқлар

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,,$$
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

тенгламалар билан берилган бўлса, координата боши ва берилган $M_1(x_1, y_1)$ нуқтанинг тўғри чизиқлар ҳосил қилган бурчакларга нисбатан ҳолатини аниқланг.

9. Берилган $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтувчи ва $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ текисликка перпендикуляр тўғри чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

10. Тўғри чизиқ $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{p}$ тенглама билан берилган бўлса, бу тўғри чизиқ ва унга тегишли бўлмаган $M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуқтадан ўтувчи текислик тенгламасини ёзинг.

11. Аффин координаталар системасини аниқловчи базис векторлари орасидаги бурчак $\dfrac{\pi}{3}$ га тенг бўлса, $4x - 5y + 7 = 0$ ва $9x + 4y - 11 = 0$ тенгламалар билан берилган тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

12. Аффин координаталар системаси ўқлари орсасидаги бурчак $\dfrac{\pi}{3}$ га тенг бўлса, учлари $A(-1,2)$, $B(1,1)$, $C\left(2,-\dfrac{5}{2}\right)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг AB томони ва C учидан туширилган медианаси орасидаги бурчакни топинг.

13. Қуйидаги учта тўғри чизиқ битта нуқтада кесишадими: $3x - y - 1 = 0$,$2x - y + 3 = 0$,$x - y + 7 = 0$?

14. Иккита тўғри чизиқ $x - 3y + 10 = 0$, $2x + y - 8 = 0$ тенгламалар билан берилган бўлса, бу тўғри чизиқлар орасидаги қисми $P(0,1)$ нуқтада тенг иккига бўлинувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

15. Учбурчак томонлари $2x - y + 3 = 0$, $x + 5y - 7 = 0$ ва $3x - 2y + 6 = 0$ тенгламалар билан берилган бўлса, унинг баландликлари тенгламаларини тузинг.

16. Тўртбурчак томонлари $x - y = 0$, $x + 3y = 0$, $x - y - 4 = 0$, $3x + y - 12 = 0$ тенгламалари билан берилган. Тўртбурчак диагоналлари тенгламаларини тузинг.

17. Учбурчак томонлари $2x - 5y - 2 = 0$, $x + y - 8 = 0$, $5x - 2y - 5 = 0$ тенгламалар билан берилган. Учбурчак ичида шундай нуқта топингки, бу нуқта билан учбурчак учларини туташтирувчи тўғри чизиқлар учбурчакни тенг юзали учбурчакларга ажратсин.

18. Тўғри чизиқ $12x + 5y - 52 = 0$ тенглама билан берилган бўлса, унга параллел ва ундан 2 бирлик масофада бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

19. Иккита айқаш тўғри чизиқ $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ ва $\frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ тенгламалар билан берилган. Уларнинг умумий перпендикуляри тенгламаси тузилсин.

20. Тўғри чизиқ $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-2}$ тенглама билан берилган бўлса, унга координата бошидан туширилган перпендикуляр тенгламасини тузинг.

21. Тўғри чизиқ $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ тенглама билан берилган бўлса, унга $A(4,0,-1)$ нуқтадан туширилган перпендикуляр тенгламасини тузинг.

16.5 Exercises

1. Show that the straight lines $ax + by + c = 0$ and $bx - ay + c' = 0$ intersect at right angles.

2. What angle is formed with the x-axis by the straight line

$$y = x \cot \alpha, \quad \text{if } -\frac{\pi}{2} < \alpha 0?$$

3. Form the equations of the sides of a right-angled triangle whose side is equal to 1, taking one of the sides and the altitude for the coordinate axes.

4. Find the interior angles of he triangle bounded by the straight lines $x + 2y = 0$, $2x + y = 0$, and $x + y = 1$.

5. Under what condition for the straight lines $ax + by = 0$ and $a_1x + b_1y = 0$ is the x-axis the bisector of the angles formed by them?

16.3 Exercises

1. Under what condition does the straight line

$$ax + by + c = 0$$

intersect the positive semi-axis x (the negative semi-axis x)?

2. Under what condition does the straight line

$$ax + by + c = 0$$

not intersect the first quadrant?

3. Show that the straight lines given by the equations

$$ax + by + c = 0, \quad ax - by + c = 0, \qquad b \neq 0,$$