ISSN 2181-7839

XALQ TA'LIMI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ TA'LIMI VAZIRLIGINING
ILMIY-METODIK JURNALI

Muassis:
O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligi

PUBLIC EDUCATION

SCIENTIFIC-METHODICAL JOURNAL
MINISTRY OF PUBLIC EDUCATION OF THE
REPUBLIC OF UZBEKISTAN

2021

2-son
(Maxsus)

Jurnal 1918-yil dekabr oyidan chiqa boshlagan
O'zMAA tomonidan 2013-yil 4-martda qaytadan ro'yxatga olinib, 0104-raqamli guvohnoma berilgan.

TOSHKENT

MUNDARIJA

TAHRIRIYAT

TA'LIM VA TARBIYA NAZARIYASI

TA'LIM VA TARBIYA METODIKASI

ZAMONAVIY TA'LIM TEXNOLOGIYALARI

Gulhayo KUZMANOVA,
Bekzod ALIMOV,
Nurseit BEKETOV,
Chirchiq davlat pedagogika instituti
“Boshlang‘ich ta’lim” kafedrasi o‘qituvchilari

UCHINCHI TARTIBLI TENGLAMALAR

Annotatsiya

Ushbu maqolada ilk bor italiyalik matematik olim Spision Del Ferro tomonidan umumiy yechim topilgan musbat ozod had va birinchi darajali musbat koeffitsientli noma’lum to‘la bo‘lmagan kubik tenglamani turli ishorali to‘la bo‘lmagan kubik tenglamaning umumiy yechimi va undan kelib chiquvchi teorema va natijasi keltirilgan. Bu turdagi tenglamalarni yechishning ba’zi misollardagi tatbiqlari keltirilgan.

Kalit so‘zlar. To‘la bo‘lmagan kubik tenglama, ildiz, haqiqiy ildiz, mavhum ildiz, yechim, qo‘shma sonlar, karrali ildiz.

В этой статье приведено общее решение неполное кубическое уравнение с разными знаками и теорема и результат следующего неполного решения от этого который впервые дал общее обозрение итальянский математик Списион Дель Ферро для с положительным свободным членом и неизвестного первого порядка с положительным коэффициентом.

Ключевые слова. Неполное кубическое уравнение, корень, действительный корень, мнимый корень, решение, сопряженные числа, кратный корень.

This article provides a common solution to the incomplete cubic equation with different marks and theorem and the result of the next incomplete decision from this which for the first time gave general overview of the Italian mathematician Listion Del Ferro for a positive free member and an unknown first order with a positive coefficient.

Key words. Incomplete cubic equation, root, real root, abstract root, solution, composite numbers, multiple root.

XVI asr boshida Italiya matematigi Spision Del Ferro kubik tenglamalarning muhim sinfi bo‘lgan, ya’ni n va m musbat bo‘lgan, tenglamaning umumiy yechimini topgan. Agarda m, n manfiy sonlar bo‘lganda har qanday kubik tenglamani quyidagi (1) ko‘rinishga keltirish mumkin, ammo u vaqtlarda manfiy sonlar ma’lum bo‘lmagan. Del Ferro o‘limi oldidan shogirdi Antonio Fiorega ma’lum qilmagunga qadar o‘z ixtirosini sir saqlagan.

$$x^3 + px + q = 0 \ (p,q \in \mathrm{C}) \qquad (1)$$

tenglama to‘la bo‘lmagan kubik tenglama deyiladi. (1) tenglamaga ni qo‘yamiz. Ya’ni (1) tenglamadagi o‘zgaruvchining o‘rniga qo‘yamiz.

$(u+v)^3 + p \cdot (u+v) + q = 0$ yoki $u^3 + 3uv\,(u+v) + v^3 + q + p \cdot (u+v) = 0$

$u^3+v^3 + q + (u+v)(3uv + q) = 0$ (2) ni hosil qilamiz.

Bu yerda $(3uv + q) = 0$ shart bajarilishini talab qilamiz, ya’ni $uv = -\frac{p}{3}$. Bu shart bajarilganda u va v lar

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$$ (3) sistemani qanoatlantiradi.

(3), (2), (1)ga asosan quyidagi xulosaga kelinadi: agar (u,v) (3) sistemaning yechimi bo‘lsa, u holda, $u+v$ yig‘indi (1) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Teskari tasdiq o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. Agar x (1) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda (3) sistemani shunday (u,v) yechimi bo‘lib, $x=u+v$ o‘rinli. Bizning ishimizda (1) tenglamaning ildizi bo‘lsin.

$y^2 - xy - \frac{p}{3} = 0$ $y_1 = u,\ y_2 = v$ tenglamani qaraymiz.

u va y tenglamaning kompleks ildizlari bo‘lsin. U holda, Viyet formulasiga ko‘ra, $x = u + v,\ uv = -\frac{p}{3}$ o‘rinli. x (1) tenglamaning ildizi bo‘lsa, u holda (u,v) (2) yechimi bundan kelib chiqadiki (u,v) (3)ning yechimini bilib, (1) tenglamaning barcha ildizlarini topish mumkin.

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$ (4) tenglamalar sistemasi (3) sistemaning natijasi ekanligi ma’lum,

sonlar (4) ni qanoatlantiradi, faqat va faqat $u^3,\ v^3$

$$z^3 + qz - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (5)$$

$$\begin{cases} z_1 = u^3 \\ z_2 = v^3 \end{cases}$$ kvadratik tenglamaning ildizi bo‘lganda

bu tenglama (1) tenglamadan kelib chiqadi. Buning diskremenantini Δ orqali belgilaymiz.

$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ $\Delta = b^2 - 4ac$ $z^2 + 2\frac{q}{2}z - \frac{p^3}{27} = 0$ $z_1,\ z_2$ (5) tenglamaning ildizlari (6) formulalar orqali ifodalanadi.

$$z_1 = u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta} \quad z_2 = v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta} \qquad (6)$$

Bu yerdan (4) sistemaning to‘qqizta yechimini topamiz. Ulardan faqat (4) sistemaning shunday (u,v) yechimini olamiz. Yechimni qanoatlantiruvchi $uv = -\frac{p}{3}$ ni (3) sistemaning barcha yechimlariga ega bo‘lamiz.

(3) sistema hech bo‘lmaganda 1 ta yechimga ega. (u,v) (4) tenglamalar sistemasining qandaydir yechimi bo‘lsin, u holda $u_1^3 v_1^3 = -\frac{p^3}{27}$. Demak, $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$ yoki $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}\varepsilon$ yoki $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}\varepsilon^2$. Bu yerda $\varepsilon^3=1$ ga teng.

Shu sababli, $u_1 v_1 = -\frac{p}{3}$, ya’ni $u_1(v_1\varepsilon^2) = -\frac{p}{3}$. Shunday qilib, uchinchi darajali ildizlar z_1 ixtiyoriy qiymatlari uchun shunday v mavjudki, z_2 uchinchi darajali ildizdan $uv = -\frac{p}{3}$, ya’ni (u,v) (3) sistemaning ildizi bo‘ladi.

Agar $u,\ u\varepsilon,\ u\varepsilon^2$ uchinchi darajali z ildizi bo‘lsa, u holda ularga mos ravishda $v,\ v\varepsilon^2,\ v\varepsilon$ uchinchi darajali z_2 dan ildiz bo‘ladi. Agar (u,v) (3) sistemaning qandaydir ildizi bo‘lsa, u holda (u,v) $(u\varepsilon,\ v\varepsilon^2)$ $(u\varepsilon^2,\ v\varepsilon)$ (3) tenglamaning barcha yechimlari bilan ustma-ust tushadi.

Demak, (3) sistema turli xil 3 ta yechimga ega $x_1=u+v$, $x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2$, $x_3=u\varepsilon^2+v\varepsilon$ bo‘lsa, quyidagi xulosani chiqaramiz.

TEOREMA. (1) $x^3+px+q=0$ tenglama berilgan bo‘lsin. z_1 va z_2 $z^3+qz-\frac{p^3}{27}=0$ tenglama natijasining ildizi bo‘lsin. Bunda (1) tenglamaning ildizi $x_1=u+v$, $x_2=u\varepsilon+v\varepsilon^2$, $x_3=u\varepsilon^2+v\varepsilon$ (I) formula orqali ifodalanadi. Bu yerda u va v sonlar $u^3=z_1$, $v^3=z_2$ $uv=-\frac{p}{3}$ shartni qanoatlantiradi va ε uchinchi darajali tenglamaning birlik mavhum ildizi bo‘ladi.

ISBOT. Bevosita tekshirishning ko‘rsatishicha, x^3+px+q $x-x_1$ ga bo‘linadi va hatto bo‘linma $x^2+x_1x+x^2_1+p$ ga teng.

Natijada $x^3+px+q=(x-x_1)(x^2+x_1x+x^2_1+p)$ (2)

Navbatda $(x-x_2)(x-x^3)=x^2-(x_2+x_3)x+x_2x_3$ (3) ga bo‘lamiz.

Viyet formulasiga ko‘ra, $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$ $\varepsilon+\varepsilon^3=-1$. Bu yerda (I) formuladan (5) kelib chiqadi.

$x_1+x_2+x_3=0$ $-(x_2+x_3)=x_1$ (5)

(I) va (4) formulalarga ko‘ra, (6) ga ega bo‘lamiz.

$x_2 \bullet x_3 = (u\varepsilon + v\varepsilon_2)(u\varepsilon^2 + v\varepsilon) = u^2 + v^2 + uv(\varepsilon^2 + \varepsilon) = u^2 + v^2 - uv = (u + v)^2 - 3uv = x_1^2 + p$

$x_2 \bullet x_3 = x_1^2 \bullet p$ (6)

(3) formulani (5) va (6) formulalarga ko‘ra, $(x - x_2)(x - x_3)=x^2 + x_1x + x_1^2 + p$ (7) ko‘rinishda yozish mumkin.

(2) va (7) ga asosan $x^3+px+q=(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ xulosaga kelamiz.

NATIJA. (1) tenglamaning ildizlari $x_1 = u + v$, $x_2=-\frac{1}{2}(u+v)$, $x_3=i\frac{\sqrt{3}}{2}(u+v)$ (II) formulalar orqali ifodalanadi. Bu yerda, u va v formulani qanoatlantiruvchi sonlar.

ISBOT. (II) formula (I) formuladan $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ qo‘yish yo‘li bilan hosil qilinadi.

Haqiqiy koeffitsientli uchinchi darajali tenglamalar ildizlari tadqiqi natijasida quyidagi teorema uchinchi darajali tenglamaning haqiqiy va mavhum ildizlari sonini aniqlash imkonini beradi.

TEOREMA: $x^3 + px + q = 0$ koeffitsientlari haqiqiy bo‘lgan tenglama va $\Delta=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$. U holda,

a) $\Delta > 0$ bo‘lsa, (1) tenglama 1 ta haqiqiy va 2 ta qo‘shma mavhum ildizlarga ega.

b) $\Delta = 0$ bo‘lsa, (1) tenglamaning ildizlari haqiqiy va ulardan birortasi karrali bo‘ladi.

c) $\Delta < 0$ bo‘lsa, (1) tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy va turlicha bo‘ladi.

ISBOT: 1-holat. $\Delta > 0$. Bu holatda tenglamaning yechimi bo‘lgan z_1, z_2 haqiqiy va turlichadir. Natijada, hech bo‘lmaganda ulardan birortasi misol uchun z_1 noldan farqli. $u=(z_1)^{\frac{1}{3}}-z_1$ dan arifmetik ildiz bo‘lsin. v soni ham haqiqiy son hisoblanadi. Chunki, $uv=-\frac{p}{3}$ $z_1 \neq z_2$ emas ekan, bundan kelib chiqadiki $u^3 \neq v^3$. U holda $u \neq v$. Natija: $x_1=u+v$,

$$x_2=-\frac{1}{2}(u+v)+i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v)$$

$$x_3=-\frac{1}{2}(u+v)-i\frac{\sqrt{3}}{2}(u-v) \qquad \text{(II)}$$

u va v lar haqiqiy ekan. (II) formuladan kelib chiqadiki, x_1 – haqiqiy ildiz x_2, x_3 – lar mavhum qo‘shma ildizlardir.

2-holat. $\Delta = 0$. Agar $\Delta = 0$ q $\neq 0$ bo‘lsa, u holda $z_1=z=-\frac{q}{2}\neq 0$.

$u=\left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{q}{2}$ sonidan arifmetik ildiz bo‘lsin.

$uv=-\frac{p}{3}$ haqiqiy son bo‘lsa $v=\left(-\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$, ya’ni $u=v\neq 0$ (II) ga ko‘ra quyidagi kelib chiqadi: $x_1=2u\neq 0$ $x_2=x_3=-u$.

Shu tarzda $q\neq 0$ da (I) tenglama 2 ta haqiqiy ildizga ega. Ulardan biri 2 ga karrali ildizdir. Agar $\Delta = 0$ va $q = 0$ bo'lsa, bu holda $p = 0$ bo'ladi. Bu holatda (I) tenglamada $x^3=0,\ x_1=x_2=x_3=0$.

3-holat. $\Delta < 0$ bu holatda $z_1 = u^3 = -\frac{q}{2}+\sqrt{\Delta}$ $\ z_2 = v^3 = -\frac{q}{2}-\sqrt{\Delta}$ tenglamaga ko'ra $u^3=z_1$, $uv=-\frac{p}{3}$, v^3+z_2 bo'lgan u va v sonlar mavjud. (1) va (3)ga ko'ra, $|u^3|=|v|^3\neq 0$. (2)ga ko'ra $u \neq v$. (3) va (4) asoslanib, $-\frac{p}{3|\vec{u}|^2}=1$ (6) xulosaga kelamiz. (3) va (6) larga asoslanib, $v=-\frac{p}{3\cdot u}=-\frac{p}{3\cdot u\cdot \vec{u}}\cdot\vec{u}=-\frac{p}{3|u|^2}\cdot\vec{u}=u$ (5) va (7) dan u va v lar mavhum qo'shma sonlar ekanligi kelib chiqadi.

Quyidagi misolni qaraymiz.

$x^3-3x+2=0$ tenglama [4] berilgan. Bu tenglamani $x=u+v$ ga almashtirib olib bajaramiz. Bu yerda $p=-3$, $q=2$ $(u+v)^3-3(u+v)+2=0$ kublar formulasiga ko'ra, qavslarni ochamiz.

$u^3+v^3+3u^2u+3uv^2-3(u+v)+2=0$

$u^3+v^3+2+3uv(u+v)-3(u+v)=0$

$u^3+v^3+2+(u+v)\bullet(3uv-3)=0$

Tenglama nolga teng bo'lishi uchun $\begin{cases} u^3+v^3+2=0 \\ 3uv-3=0 \end{cases}$ bo'lishi kerak.

Sistemadan quyidagini hosil qilamiz.

$\begin{cases} u^3+v^3=-2 \\ uv=1 \end{cases} \Rightarrow u^3+v^3=-2$ ifodaga $u=\frac{1}{v}$ ni qo'yamiz. Masalan,

$$\left(\frac{1}{v}\right)^3+v^3=-2$$

$$v^6+2v^3+1=0$$

$$\frac{1}{v^3}+v^3=-2$$

$$v^3=1$$

$$v^3=t$$

$$t^2+2t+1=0$$

$$(t+1)^2=0$$

$$t=-1$$

$$v=-1$$

$$u=\frac{1}{v}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$x=u+v=-1-1=-2$$

tenglamadagi x ning o'rniga qiymatini qo'yamiz.

$x^3-3x+2=0$ $(-2)^3-3(-2)+2=-8+6+2=0$. Demak, $x=-2$ tenglamaning yechimi bo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar:

1. https://ru.wikipedia.org/wiki/ Дель Ферро, Сципион.

2. https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубическое_уравнение #cite_ref-22

3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. – М.: Высш. шк., 1979. – С.559.

4. Лельчук М.П. и др. Практическое занятия по алгебре и теории чисел. – Мн.: Выш. шк., 1986. – С. 302.

5. Kuzmanova G.B.,.Beketov N.A (2020). Use Of Historical Materials In Teaching Mathematics In Continuous Education. The American Journal of Social Science and Education Innovations, 2(09), 531-537.