

ПРАКТИКУМ  
ДЛЯ ВУЗОВ

**И.Е. Малова, С.К. Горохова**

**Н.А. Малинникова, Г.А. Яцковская**

# ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

*Допущено Учебно-методическим объединением  
по специальностям педагогического образования  
в качестве учебного пособия для студентов  
высших учебных заведений*

Москва



2009

УДК 373.167.1:51  
ББК 22.1p1я73-1+74.262.21я73-1  
Т33

**Малова И.Е.**  
Т33 Теория и методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студентов вузов / И.Е. Малова [и др.]. — М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2009. — 445 с. : табл. — (Практикум для вузов).  
ISBN 978-5-691-01527-4.  
Агентство СІР РГБ.

В пособии рассматривается содержание лекций, практических занятий и лабораторных работ, вопросы зачетов и экзаменов по курсу теории и методики обучения математике в средней школе. Оно направлено на формирование и совершенствование базовых методических умений и творческого подхода к организации и проведению урока в средней школе у будущего учителя математики, к осуществлению личностно ориентированного обучения учащихся.

Адресовано студентам физико-математических факультетов педвузов, учителям математики общеобразовательных школ.

УДК 373.167.1:51  
ББК 22.1p1я73-1+74.262.21я73-1

© Малова И.Е., Горохова С.К., Малинникова Н.А.,  
Яцковская Г.А., 2009  
© ООО «Гуманитарный издательский центр  
ВЛАДОС», 2009  
© ГОУ ВПО «Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского», 2009  
© Оформление. ООО «Гуманитарный издательский  
центр ВЛАДОС», 2009

ISBN 978-5-691-01527-4

## Предисловие

В настоящее время происходит переориентация всей системы образования на приоритет развивающей функции обучения по отношению к информационной, поэтому проблема методической подготовки учителя к личностно ориентированному обучению учащихся является актуальной. Эта общая проблема сводится к методической подготовке учителя к личностно ориентированному обучению **на каждом уроке**, что в свою очередь приводит к необходимости существенных изменений в **основах методической подготовки учителя**.

**Личностно ориентированное обучение (ЛОО)** — это такое обучение, при котором учащиеся являются *субъектами обучения и собственного развития*.

**Теоретические положения личностно ориентированного обучения:**

1. Основная *цель обучения* — это обогащение субъектного опыта учащихся средствами учебного предмета. Развитие учащихся — это результат достижения этой цели.

2. *Объектом методической деятельности* учителя должен быть педагогический процесс, в котором учащиеся являются субъектами обучения и собственного развития.

3. Основными *источниками* обогащения субъектного опыта учащихся являются содержание учебного предмета и процесс его освоения.

4. *Организация процесса* освоения учебного предмета должна быть личностно ориентированной.

5. Существенными *условиями реализации* личностно ориентированного обучения являются: организация диалога, выводящего учащихся на ведущие позиции в обучении, и формирование у учащихся открытой познавательной позиции.

**Субъектный опыт учащихся** — это опыт жизнедеятельности, адекватно соответствующий социальному опыту:

- 1) *знания*,
- 2) *опыт репродуктивной деятельности*,

3) *опыт творческой деятельности,*

4) *опыт эмоционально-ценностного отношения к деятельности, ее субъектам и объектам.*

Причем в каждом случае речь идет об умственной, физической, трудовой, коммуникативной деятельности.

Пособие написано в соответствии с программой по теории и методике обучения математике для педагогических вузов, которая предусматривает чтение лекций, проведение практических и лабораторных работ, зачетов и экзаменов, написание контрольных и курсовых работ.

Ключевыми направлениями методической подготовки будущего учителя математики являются: *ученик, математика, урок.*

В связи с этим выделены следующие основы:

1) вся деятельность учителя должна быть направлена на формирование, актуализацию и обогащение субъектного опыта учащихся и на формирование у них системы математических знаний;

2) основными структурными элементами математики являются понятия, умения, теоремы, задачи, поэтому соответствующие методики их формирования являются базовыми, и должны быть освоены учителем с учетом личностно ориентированного обучения учащихся;

3) эффективность урока математики определяется целями его проведения, структурой построения, выбором содержания, методами и приемами учителя, способами организации деятельности учащихся, применением дидактических средств; каждая составляющая урока должна быть освоена с учетом их ориентации на учащихся;

4) учет возрастных особенностей учащихся 5—6 и 7—9 классов при построении урока математики — необходимое условие успешной работы учителя.

Система подготовки будущего учителя предусматривает формирование базовых профессиональных умений и творческого подхода к организации и проведению урока математики. К базовым профессиональным умениям относятся умения: *анализировать, конструировать, оценивать* свою деятельность и деятельность учащихся.

Прежде всего, учителю надо уметь анализировать содержание школьных учебников не только с позиций учебного предмета (математики), но и с позиций ученика: *мотивирован ли материал, сможет ли ученик в нем самостоятельно разобраться* (а если нет, то с какими трудностями столкнется), *какой развивающий*

*потенциал он несет, какую пользу приносит ученику и т. д.* Ключевыми с позиции ученика являются следующие вопросы анализа:

- как этот материал связан с предыдущим, на какой опыт учащихся можно опереться;
- какова структура определения, встречалась ли она раньше;
- какова идея доказательства, как она связана с опытом учащихся;
- каково назначение иллюстрации, задачи, как они связаны с опытом учащихся, как их можно использовать для выведения учащихся на позицию субъектов обучения и собственного развития;
- в чем сущность предложенного метода, как он связан с опытом учащихся;
- каковы связи между понятиями, утверждениями, задачами, как их можно использовать;
- каковы основы решения задач, как они связаны с опытом учащихся?

Обобщающим в анализе является вопрос: «Как обогащается опыт учащихся в связи с изучением этого материала?».

В пособии предусмотрены следующие *этапы развития умения проводить анализ*:

- отдельных компонентов учебного материала (пункта учебника, понятия, теоремы, алгоритма, задачи, системы упражнений);
- реализации содержательных линий математики;
- фрагмента конспекта (анализ фрагмента урока);
- конспекта (анализ урока);
- математических и методических ошибок и причин их возникновения;
- темы;
- различных подходов к изучению темы;
- различных школьных учебников.

Проходит следующие *этапы развития умения конструировать*:

- задания по базовым методикам (методике формирования понятий, методике формирования умений, методике изучения теорем, методике обучения решению задач);
- фрагменты уроков по базовым методикам;
- уроки по одной и той же теме, но по разным учебникам;
- уроки с учетом возраста учащихся;

- задания различного характера (обучающие, проблемные, поисковые);
- уроки одного вида, но с применением разных методов;
- уроки разных видов;
- пары взаимосвязанных уроков;
- серию уроков по теме.

*Умение оценивать свою деятельность* включает в себя: самоанализ, самоконтроль, осознание и обобщение собственного уровня профессионального развития. В пособии предусмотрена серия заданий, способствующая развитию этого умения.

*Формирование базовых профессиональных умений* обеспечивается:

- предоставлением ориентировочных основ по каждой базовой методике, по конструированию уроков;
- демонстрацией образцов деятельности учителя;
- использованием заданий на разработку аналогичных методических вопросов;
- повторением основ методической подготовки на новом материале;
- обогащением основ с учетом особенностей математического материала;
- интегрированием освоенного.

*Рост методического мастерства* обеспечивается:

- повторяемостью методических заданий каждого вида;
- последовательностью освоения уровней (охарактеризовать — раскрыть — разработать — показать методику);
- использованием заданий на сравнение различных вариантов;
- выделением типичных методических ошибок и обеспечением самоконтроля;
- использованием заданий типа: «Изменится ли методика..., если...»;
- использованием заданий, связанных с реконструкцией содержания и методики в соответствии с дифференциацией, индивидуализацией обучения и обеспечением развития учащихся.

Большое внимание в пособии уделено ведению учебных диалогов. Диалог учителя подчинен следующим **правилам**:

- 1) диалог мотивирован;
- 2) диалог несет определенную (ясную для учащихся) направленность;

- 3) диалог должен соблюдать этапность;
- 4) в диалоге используются преимущественно общие вопросы;
- 5) диалог устанавливает связи с предыдущим, последующим и будущим;
- 6) диалог переходит в полилог, когда на вопрос учителя или ученика отвечают разные учащиеся, когда ученики сами проводят коррекцию ответов и т. д.;
- 7) по мере изучения материала диалог начинается с обращения к опыту ученика;
- 8) постепенно инициатива ведения диалога перекладывается на учащихся.

В пособии также:

- выделены основные диалоги, соответствующие базовым методикам обучения;
- выделены типичные ошибки в ведении учебных диалогов;
- предоставлены задания на выстраивание учебных диалогов;
- рассмотрены различные виды диалогов (обучающие, формирующие, проблемные, обобщающие, исследовательские).

В пособии *учтена индивидуальность студентов*, что выражается:

- предоставлением им возможности выбора;
- демонстрацией разных методов объяснения одной и той же темы;
- демонстрацией уроков различных видов;
- демонстрацией объяснения одной и той же темы по различным учебникам;
- мотивацией изучаемого материала;
- предоставлением заданий разного уровня методической сложности;
- предоставлением заданий творческого характера;
- выполнением поисковых домашних заданий.

В систему профессиональной подготовки учителя входит овладение различными формами организации деятельности учащихся. В связи с этим предполагается использование разнообразных форм работы со студентами. Можно указать некоторые формы аудиторной работы при изучении курса теории и методики обучения математике:

- привлечение студентов к чтению лекций на младших курсах;
- ведение лекций в высшей школе с использованием диалоговых методов;
- семинар-дискуссия;
- семинар-деловая игра;

- семинар с использованием видеофильмов;
- использование малых групп для решения различных методических проблем.

С целью успешного прохождения студентами педагогической практики можно рекомендовать:

- проведение «круглых столов» по итогам пассивной практики;
- проведение цикла семинаров с целью подготовки к практике;
- проведение уроков методистами вуза с последующим обсуждением;
- апробирование уроков по одной и той же теме, но
  - а) различных видов;
  - б) с использованием разных школьных учебников;
  - в) с учетом профильности класса;
  - г) с использованием различных технологий;
- проведение педагогических экспериментов студентами, занимающимися научно-исследовательской деятельностью.

В пособии даны темы и планы лекций, посвященных вопросам *общей теории и методики обучения математике и методике обучения алгебре и геометрии в основной и старшей школе*. Практические занятия и лабораторные работы представлены в виде методических заданий для студентов с указанием литературы, приложений и видеофильмов.

Приведенные в приложениях примеры соответствуют **современным требованиям к методике обучения учащихся**. К ним относятся:

- учет психологических особенностей процесса образования понятий;
- формирование открытой познавательной позиции;
- математическая строгость изложения;
- конструирование урока в системе с прошедшими и будущими уроками;
- обязательное ведение учебных диалогов, выводящих учащихся на ведущие позиции;
- реализация личностно ориентированного обучения учащихся.

Пособие может быть использовано для самостоятельной работы студентов и учителей с целью самосовершенствования профессионального мастерства. Этой цели способствуют тесты для самоконтроля, приведенные в приложениях примеры и специальные задания творческого саморазвития. Читателям рекомендуется

самостоятельно разработать методики обучения конкретным математическим вопросам, с помощью методических тестов их проанализировать, затем изучить предложенные в пособии методики и провести сравнительный анализ своего и предложенного в пособии варианта. При этом полезно найти ответ на вопрос, **почему** в пособии так сформулировано задание для учащихся, так поставлен вопрос, в такой последовательности выстроен урок и т. п.

Авторы выражают искреннюю благодарность своим коллегам Г.Е. Пуличевой, М.А. Скоробогатой за ценные предложения, конструктивные замечания, за идейную поддержку.

# СЛОВАРЬ ТЕРМИНОВ

## *Методика*

Совокупность способов практического выполнения чего-нибудь (из словаря С.И. Ожегова)

Описание ответов на вопросы:

- зачем надо изучать?
- что надо изучать?
- как надо изучать?

## *Охарактеризовать*

Дать описание отличительных черт, качеств (из словаря С.И. Ожегова)

Выделить этапы, виды, части и т. д.; описать назначение и суть каждого

## *Раскрыть*

Сделать доступным (из словаря С.И. Ожегова)

Дать краткие ответы на три вопроса методики: зачем? чему? как?; показать логику изложения; выделить методические и математические основы

## *Разработать*

Тщательно, всесторонне исследовать, подготовить, обработать во всех подробностях (из словаря С.И. Ожегова)

Дать развернутые ответы на три вопроса методики: зачем? чему? как?, включая: мотивацию для учеников; возможные диалоги; формы организации; используемые средства; оформление основных заданий и т. п. Оформляется фрагмент конспекта урока

*Проанализировать*

Провести исследование путем рассмотрения отдельных сторон, свойств, составных частей чего-нибудь (из словаря С.И. Ожегова)

Применяются в сочетаниях проанализировать:

- статью;
- пункт учебника;
- определение, теорему, алгоритм;
- тему;
- систему заданий;
- урок и т. д.

*Показать*

Дать возможность увидеть (из словаря С.И. Ожегова)

Применяется для указания на ситуацию, приближенную к реальному уроку (показать фрагмент урока, показать методику введения определения и т. п.). Оформляется фрагмент конспекта и готовится его проигрывание в аудитории

*Карта*

Лист бумаги, картона с каким-нибудь текстом, изображением (из словаря С.И. Ожегова)

Изображение основных или методических элементов с указанием графического и словесного перемещения от одного элемента к другому

# **ПРОГРАММА ПО ТЕОРИИ И МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ**

## **I семестр**

### **Планы лекций**

#### ***Общая методика***

#### ***Тема 1. Цели обучения математике в средней общеобразовательной школе. Анализ программ по математике для средней школы***

##### ***План:***

1. Предмет теории и методики обучения математике.
2. Цели обучения математике в средней школе (общеобразовательные, воспитательные, развивающие).
3. Структура программ по математике для общеобразовательной школы и для школ (классов) с углубленным изучением математики.
4. Ведущие идеи обучения математике в школе (преемственность, межпредметные связи, прикладная и практическая направленность, деятельностный подход, алгоритмический подход, компьютеризация, ориентация на субъектный опыт учащихся).
5. Основы личностно ориентированного обучения. Правила ведения учебного диалога.

***Литература:*** [68, Гл. I, § 2, 4, 5]; [70, Гл. I, § 2, 3]; [93].

#### ***Темы 2—3. Методы научного исследования и их применение при обучении математике***

##### ***План:***

1. Этапы процесса исследования. Мыслительные операции: сравнение и аналогия, обобщение, абстрагирование и конкретизация.
2. Анализ и синтез как мыслительные операции, методы исследования и методы обучения.
3. Индукция и дедукция как виды умозаключения, методы исследования и методы обучения. Виды индукций.

***Литература:*** [68, Гл. II, § 4; Гл. III, § 8]; [70, Гл. IV, § 3—7].

#### **Тема 4. Математические понятия и методика их формирования**

##### **План:**

1. Понятие как форма мышления. Содержание и объем понятия.
2. Определение понятия, виды определений. Классификация понятий.
3. Методика формирования понятий в курсе средней школы (пропедевтика, введение определений, усвоение определений, закрепление понятий, предупреждение ошибок).

**Литература:** [68, Гл. III, § 2—3]; [70, Гл. III, § 1]; [98, П. 6]; [62, С. 37—46]; [63].

#### **Тема 5. Математические предложения и методика доказательства теорем**

##### **План:**

1. Виды математических предложений.
2. Логическая структура теорем. Виды теорем и связь между ними.
3. Необходимые и достаточные условия, теоремы-свойства и теоремы-признаки.
4. Методика обучения доказательству теорем (введение, усвоение, закрепление).

**Литература:** [68, Гл. III, § 4—6, 10]; [70, Гл. III, § 2, 3]; [98, П. 7]; [62, С. 47—59]; [63].

#### **Тема 6. Методика формирования умений. Алгоритмы в школьном курсе математики**

##### **План:**

1. Психолого-педагогические требования к формированию умений. Этапы формирования умения.
2. Интуитивное понятие алгоритма, общие свойства алгоритма.
3. Типы алгоритмов и способы их записи. Пути введения алгоритмов.

**Литература:** [62, С. 59—66]; [63].

### **Тема 7. Задачи в обучении математике**

#### **План:**

1. Роль задач в обучении математике и этапы решения задач.
2. Виды задач в школьном курсе математики.
3. Арифметический и алгебраический методы решения текстовых задач и методика обучения этим методам.
4. Методика обучения учащихся решению задач на движение.
5. Методика обучения учащихся решению задач на работу.

**Литература:** [68, Гл. IV, § 3—6]; [102]; [62, С. 68—78]; [46]; [102]; [98, С. 158]; [63]; [26, Гл. 10]; [27, Гл. 10].

### **Методика изучения числовых систем**

#### **Тема 8. Методика изучения натуральных чисел и десятичных дробей**

#### **План:**

1. Развитие понятия числа в курсе средней школы. Два источника появления новых чисел.
2. Схема изучения числовых систем.
3. Цели изучения натуральных чисел в 5 классе.
4. Методика изучения десятичных дробей.

**Литература:** [20]; [10]; [39]; [25]; [26]; [64]; [65]; [77]; [78]; [71, Гл. I, § 1—3]; [69, Гл. XII, § 1—3]; [98, П. 15—16].

#### **Тема 9. Методика изучения положительных и отрицательных чисел**

#### **План:**

1. Формально-логический и реально-конкретный пути введения отрицательных чисел.
2. Методика изучения сравнения.
3. Методика изучения действий над отрицательными и положительными числами.
4. Методика изучения свойств действий.

**Литература:** [20]; [10]; [39]; [64]; [65]; [27]; [71, Гл. I, § 4, Гл. IV, § 11]; [69, Гл. XII, § 4—5]; [98, П. 15—16].

**Тема 10. Методика изучения рациональных чисел****План:**

1. Последовательность изучения обыкновенных дробей в школьном курсе математики.
2. Методика изучения обыкновенных дробей и смешанных чисел в 5 классе.
3. Методика изучения обыкновенных дробей и рациональных чисел в 6 классе.
4. Методика обучения решению задач на части и проценты.

**Литература:** [10]; [20]; [39]; [64]; [65]; [77]; [78]; [28]; [29].

**Тема 11. Методика изучения действительных чисел****План:**

1. Программные требования к изучению темы.
2. Методика введения иррациональных чисел.
3. Методика изучения действий с действительными числами.
4. Комплексные числа (в классах и школах с углубленным изучением математики).

**Литература:** [2]; [10]; [34]; [40]; [93].

**Тема 12. Обучение приближенным вычислениям****План:**

1. Программные требования к обучению приближенным вычислениям.
2. Методика формирования практических умений приближенных вычислений.
3. Возможности применения микрокалькуляторов и ЭВМ при обучении математике.

**Литература:** [1]; [2]; [7]; [10]; [15]; [20]; [78]; [93].

**Методика изучения алгебры в основной школе****Темы 13—14. Математические выражения  
и тождественные преобразования в школьном курсе математики****План:**

1. Классификация математических выражений.
2. Пропедевтика тождественных преобразований.

3. Тождественные преобразования выражений на различных этапах обучения.

4. Введение определения «тождественно равные выражения» и методика работы с математическими тождествами.

5. Методика формирования навыков тождественных преобразований.

**Литература:** [48, 1983, № 5, С. 30—35; 1985, № 5, С. 17—21]; [69, Гл. XIII, § 1—3]; [71, Гл. 5]; [93].

### **Темы 15—16. Уравнения и неравенства в школьном курсе математики**

#### **План:**

1. Значение изучения темы.

2. Методика формирования понятий «уравнение», «неравенство», «решение уравнения», «решение неравенства».

3. Виды уравнений и неравенств на различных этапах обучения и методика обучения их решению.

**Литература:** [1]; [2]; [3]; [7]; [10]; [15]; [20]; [75]; [77]; [78]; [69, Гл. XVI, § 1, 2, 3, 4, 5]; [71, Гл. 9]; [98, П. 20].

### **Тема 17. Функции в основной школе**

#### **План:**

1. Программные требования к изучению данной темы. Развитие функциональной линии в основной школе. Функциональная пропедевтика.

2. Методика формирования понятия «функция» в 7 классе.

3. Схема изучения функций в основной школе.

4. Методика изучения линейной функции.

**Литература:** [1]; [2]; [3]; [10]; [20]; [21]; [77]; [81]; [75], [69, Гл. XIV, § 1—3]; [71, Гл. 8].

### **Планы практических занятий**

#### **Часть 1. Анализ программ и знакомство с учебниками**

**Цели:** Познакомиться с программой по математике для общеобразовательной школы и учебниками для 5—6 классов. Сформировать первые навыки работы с этими материалами.

**Тема 1. Анализ программы по математике  
для средней общеобразовательной школы.  
Знакомство с учебниками для 5—6 классов**

**План:**

1. Проведите анализ программы по математике для средней общеобразовательной школы с выделением:

а) структуры программы;  
б) целей обучения в 5—6, 7—9, 10—11 классах как по алгебре, так и по геометрии;

в) основных содержательных линий (числовые системы, тождественные преобразования, уравнения и неравенства, функции, геометрические фигуры и их свойства, геометрические величины и их измерения, геометрические построения, равенство геометрических фигур, геометрические преобразования, координаты и векторы, тригонометрия, производная, интеграл).

2. Выделите содержательные линии математики 5—6 классов и составьте математические карты их реализации по учебникам 5—6 классов [20], [21]. Подготовьте беседу «Как работать с учебником».

3. Изучите структуру учебников по математике для 5—6 классов и определите в них место текстовых задач.

4. Ответьте на вопросы:

- Какую информацию можно получить из программы по математике для общеобразовательной школы?
- Когда и зачем следует обращаться к программе?
- Как можно сориентироваться по учебнику математики для 5—6 классов?
- Какие материалы, связанные с программой изучения математики, печатаются в журнале «Математика в школе»?

**Литература:** [93]; [20]; [21]; [111]; [78]; [64]; [65]; [25—30], [48, 1996, № 5].

**Часть 2. Методика работы с текстовой задачей**

**Цели:** Установить основные этапы деятельности по решению текстовых задач и выделить основные моменты методики работы на каждом этапе. Рассмотреть различные виды задач: на движение, работу, части, проценты; методы и способы их решения. Освоить методику работы с конкретной текстовой задачей.

## **Тема 2. Решение текстовых задач на движение**

### **План:**

#### **Задание 1. Изучаем методику обучения учащихся решению текстовых задач**

1. Изучите методику работы с текстовыми задачами (Приложение 11).
2. Установите основные этапы деятельности учащихся по решению текстовых задач.
3. На этапе анализа условия задачи выделите основные вопросы учителя.
4. Перечислите основные способы оформления условия текстовых задач.
5. Объясните суть арифметического и алгебраического методов решения текстовых задач. Перечислите способы оформления решения задач арифметическим (алгебраическим) методом.

#### **Задание 2. Осваиваем этапы работы с текстовой задачей**

1. Проведите анализ условия следующей задачи с одновременным оформлением ее краткой записи:

*Из двух городов, расстояние между которыми 507 км, навстречу друг другу должны были выйти товарный и пассажирский поезда. Но отправление товарного поезда было задержано на 30 мин. Скорость товарного поезда 92 км/ч, скорость пассажирского — 66 км/ч. Через сколько часов после выхода товарного поезда встретятся поезда? [27].*

2. Осуществите поиск решения данной задачи двумя методами: аналитическим; синтетическим. Продумайте оформление поиска решения (Приложение 14).
3. Решите данную задачу арифметическим и алгебраическим методами. Оформите решение данной задачи разными способами.

#### **Задание 3. Подводим итоги**

1. Выделите виды задач на движение. Подберите задачи на каждый вид и представьте условия этих задач с помощью чертежа или таблицы. Выделите задачу, решаемую арифметическим методом, но разными способами.
2. Используя Приложение 11, ответьте на вопрос: «В чем состоит методика обучения решению текстовой задачи?»
3. Ответьте на вопрос: «Чем помогла рекомендованная литература?»

**Контрольное задание.** Разработайте методику решения следующей задачи в 8 классе (предусмотрите различные способы решения):

*Из города А в город В, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через час после этого из города А на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в А в тот момент, когда первый курьер достиг города В. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?*

**Литература:** [63], [71, Гл. 7]; [10, № 96—99, 104, 107, 108, 113, 114]; [26, Гл. 10]; [27, Гл. 10]; [62, С. 73—78]; [60]; [46].

**Видеофильмы:** «Методика обучения решению текстовых задач на движение», «Методика обучения решению задач алгебраическим методом».

### **Тема 3. Решение текстовых задач на работу**

#### **План:**

#### **Задание 1. Изучаем методику обучения учащихся решению задач на работу**

1. Выделите виды текстовых задач на работу.
2. Подберите задачи на каждый вид.
3. Раскройте методику решения задач каждого вида.

#### **Задание 2. Осваиваем два вида задач на работу**

1. Разработайте методику решения следующей задачи:

*В бассейн проведены три трубы. Через первую бассейн может наполниться за 6 ч, через вторую — за 8 ч, а через третью опорожниться за 4 ч. Через сколько часов непрерывной работы всех трех труб может наполниться бассейн?*

2. Разработайте методику решения следующей задачи:

*Рабочий должен изготовить 40 деталей. После того, как была выполнена половина работы, он стал изготавливать на одну деталь в час меньше. За какое время он должен был выполнить всю работу, если первые 30 деталей он изготовил за 6,5 ч?*

3. Ответьте на вопрос: «Чем помогла рекомендованная литература?»

**Контрольное задание.** Разработайте методику решения подобранных задач на работу (подготовьте фрагмент урока, продумав систему учебных заданий для учащихся (прочитайте..., выделите..., оформите... и т. п.)).

**Литература:** [63]; [10, № 109—112]; [28, С. 143—146, Задания 20—24]; [35, § 10]; [46].

#### **Тема 4. Решение текстовых задач на части и проценты**

##### **План:**

##### **Задание 1. Изучаем методику обучения учащихся решению задач на части и проценты**

1. Выделите виды задач на части. Приведите примеры. Раскройте методику обучения каждому из них: а) в 5 классе; б) в 6 классе.

2. Выделите виды задач на проценты. Приведите примеры. Раскройте методику обучения решению основных задач на проценты.

3. Раскройте методику решения задач на сушку, сплавы, смеси арифметическим методом.

##### **Задание 2. Осваиваем методику работы с задачами на проценты**

1. Раскройте методику работы со следующей задачей: а) в 5 классе, б) в 6 классе:

*Швейная фабрика выпустила 1200 костюмов. Из них 32% костюмов нового фасона. Сколько костюмов нового фасона выпустила фабрика?*

2. Разработайте методику работы со следующей задачей, решаемой арифметическим методом:

*Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?*

3. Разработайте методику работы со следующей задачей, решаемой алгебраическим методом:

*Смешали 30%-ный раствор соляной кислоты с 10%-ным и получили 600 г 15%-ного раствора. Сколько грамм каждого раствора было взято?*

Подготовьте фрагмент урока.

4. Ответьте на вопросы:

- Чем помогла рекомендованная литература?
- Каковы, на Ваш взгляд, пути обучения учащихся решению текстовых задач?

**Литература:** [63]; [10, № 115,116]; [28, Задания 128—130]; [111, § 75—77]; [60], [46].

**Видеофильм:** «Методика обучения учащихся решению задач на части».

#### **Часть 3. Методика изучения числовых систем**

**Цели:** Раскрыть методику формирования понятия рационального числа в курсе математики 5—6 классов. Познакомиться с особенностями работы в 5—6 классах (индуктивный характер изложения

материала, смена и разнообразие видов деятельности учащихся, формирование культуры изучения математики, широкое использование наглядности и т. п.). Освоить методику работы с заданиями вида «Найти значение выражения».

### **Тема 5. Методика изучения десятичных дробей**

#### **План:**

#### **Задание 1. Изучаем методические основы обучения числовым системам**

1. Используя Приложение 30, опишите развитие понятия рационального числа в современных школьных учебниках математики. Перечислите основные вопросы изучения числовых систем (Приложение 28).

2. Используя Приложение 29, ознакомьтесь с различными подходами к изучению десятичных дробей в современных школьных учебниках.

3. Повторите методику формирования математических умений. Охарактеризуйте алгоритмический подход к изучению действий над десятичными дробями.

#### **Задание 2. Осваиваем методику формирования понятия десятичной дроби и операций с десятичными дробями**

1. Подготовьте фрагмент урока (Приложение 18) по введению понятия «десятичная дробь», ее чтения и записи:

- а) на основе понятия обыкновенной дроби;
- б) на основе расширения разрядной таблицы вправо.

2. Осветите математические основы совместного изучения округления натуральных чисел и десятичных дробей (мотивация, правила округления).

3. Раскройте методику формирования операций:

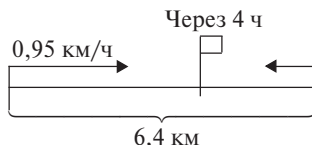
- а) сложение десятичных дробей;
- б) деление на десятичную дробь.

4. Используя Приложение 5, проанализируйте систему заданий на рассматриваемые операции в современных школьных учебниках.

5. Используя наглядность, сделайте сообщение:

- а) о составлении индивидуальных карточек-заданий по теме «Действия с десятичными дробями» с целью устранения типичных ошибок;
- б) о примерах устного счета в виде игр «Беглый счет», «Счет-дополнение», «Не зевай», «Молчанка»;

- в) о системе заданий возрастающей трудности по закреплению навыка деления десятичных дробей на 10, 100, 1000, ...;
  - г) об обучающих работах с объяснительным текстом по теме «Сложение десятичных дробей»;
  - д) о тесте кратковременного контроля вычислений с десятичными дробями на все действия.
6. Разработайте методику решения следующей задачи:  
*Сформулируйте вопрос задачи по чертежу:*



Чем отличается таким образом представленная в учебнике [26] задача от традиционных школьных?

**Литература:** [20]; [78]; [65]; [111]; [10]; [25]; [26]; [71, Гл. 1]; [48, 1993, № 1, С. 30—31; 1993, № 5, С. 9—10; 1991, № 3, С. 21—23; 2001, № 3, С. 43; 2001, № 3, С. 25; 2001, № 5, С. 23].

### **Тема 6. Методика изучения положительных и отрицательных чисел**

#### **План:**

#### **Задание 1. Осваиваем методику формирования понятий темы**

1. Определите роль, место и основные вопросы изучения темы «Отрицательные и положительные числа» в курсе математики 6 класса.
2. Охарактеризуйте различные мотивы введения понятия отрицательного числа. Используя Приложение 2, изучите систему упражнений, связанную с формированием понятий. Проанализируйте с этих позиций систему упражнений, связанную с формированием понятия «числовая ось» или «координатная прямая» в современных школьных учебниках.

3. Составьте вопросы и задания для фронтальной устной проверки знаний по теме «Положительные и отрицательные числа» (не включая операции над числами). Покажите фрагмент урока.

#### **Задание 2. Осваиваем методику формирования операций с положительными и отрицательными числами**

1. Разработайте методику изучения действий:
  - а) сложение чисел с разными знаками (в том числе сложение на координатной прямой);

- б) умножение отрицательных чисел (используя различные подходы).
2. Осветите разнообразные формы и методы работы по закреплению действий с отрицательными числами, сделав сообщение:
- а) об использовании перфокарт при изучении тем: «Сложение чисел с разными знаками», «Умножение чисел с разными знаками»;
- б) о составлении карточек для тренажа по теме «Положительные и отрицательные числа», которые можно использовать для устной работы в парах;
- в) об игре «Волшебный квадрат» по определению знака числового выражения;
- г) о составлении диктанта по теме «Сложение отрицательных чисел», «Раскрытие скобок»;
- д) о вариативных самостоятельных работах.
3. Составьте устный счет в игровой форме на действия с отрицательными числами.
4. Составьте памятки для учащихся по формированию отдельных элементов культуры изучения математики.

**Литература:** [20]; [65]; [10, № 55, 60, 53, 57, 58, 45, 46]; [27]; [65]; [71, Гл. 1]; [111]; [48, 1995, № 3, С. 14–16; 1993, № 3, С. 17–21; 1994, № 4, С. 20; 2001, № 2, С. 44–49; 1980, № 5, С. 37–40].

**Видеофильмы:** «Сложение целых чисел», «Умножение целых чисел».

## **Тема 7. Методика изучения рациональных чисел**

### **План:**

#### **Задание 1. Осваиваем методику формирования основных понятий темы**

1. Определите место, роль и основные вопросы изучения обыкновенных дробей и смешанных чисел в 5 классе (Приложение 30). Охарактеризуйте возможные мотивы и разработайте методику введения понятия «обыкновенная дробь». Проанализируйте систему упражнений, связанную с понятием обыкновенной дроби (Приложение 2).
2. Определите место, роль и основные вопросы изучения обыкновенных дробей и смешанных чисел в 6 классе (Приложение 30).
3. Составьте рассказ «Рациональные числа в школьном курсе математики» (можно создать рекламу, комикс, научный трактат на уровне 6 класса, витрину и т. п.).

**Задание 2. Осваиваем методику формирования операций с рациональными числами**

1. Составьте лабораторную работу по теме «Основное свойство дроби».

2. Подготовьте фрагмент урока по изучению сложения дробей с разными знаменателями методом объяснительно-иллюстративной беседы (Приложение 21).

3. Охарактеризуйте математические основы операций с рациональными числами.

4. Раскройте методику работы над заданиями (Приложение 10) вида «Найти значение выражения»:

а) сложение и вычитание целых чисел:  $-521 - (-95) - (-544 + (-146) - (+417))$ ;

б) вычитание смешанных чисел:  $22\frac{7}{18} - 13\frac{11}{18}$ ;

в) сложение рациональных чисел:  $2\frac{3}{7} - 5\frac{1}{3}$ ;

г) нахождение алгебраической суммы:

$3\frac{1}{3} - 0,8 - 2\frac{3}{4} + 2,5 + 0,3 + 1\frac{7}{12}$ ;

д) решение примера на все действия с рациональными числами:

$45,09 : 1,5 - (2\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} - 2,5 \cdot 2\frac{1}{2}) : 4\frac{1}{4}$ .

**Контрольное задание.** Разработайте методику решения следующей задачи: *В растворе содержится 40% соли. Если добавить 120 г соли, то в растворе будет содержаться 70% соли. Сколько грамм соли было в растворе первоначально?* [21]

**Литература:** [10]; [20]; [78]; [111]; [39]; [28]; [29]; [64]; [65]; [71, Гл. 1]; [48, 2001, № 8, С. 5–9, С. 12–14; 2001, № 4, С. 41–42].

**Видеофильм:** «Умножение рациональных чисел».

**Тема 8. Методика изучения сравнений во всех числовых системах****План:**

**Задание 1. Осваиваем методику изучения теоретических основ сравнения рациональных чисел**

1. Выделите способы математического обоснования:
  - а) равенства десятичных дробей;
  - б) равенства обыкновенных дробей.
2. Раскройте методику изучения правил сравнений:
  - а) десятичных дробей;
  - б) обыкновенных дробей;
  - в) положительных и отрицательных чисел.

Перечислите другие способы сравнения рациональных чисел. Какие из них являются универсальными, а какие частными?

3. Определите роль и место использования координатной прямой для изучения сравнения чисел.

### **Задание 2. Разрабатываем задания и методику работы с ними**

1. Составьте и охарактеризуйте по теме «Сравнение рациональных чисел»:

- а) задания с перфокартами;
- б) диктант;
- в) устные упражнения;
- г) систему заданий нарастающей трудности;
- д) вариативную самостоятельную работу.

Продемонстрируйте работу с помощью кодоскопа (или компьютера).

2. Подготовьте сообщение о применении компьютера для проверки усвоения темы «Сравнение десятичных дробей».

3. Покажите методику работы с заданием на сравнение рациональных чисел:

*Расположите числа 2,8; 0,5; 0; -1; -1,1; 0,1 и -1,6:*

- а) в порядке возрастания;
- б) в порядке убывания [20].

Предложите различные формы организации работы с заданием. Изменится ли методика, если работать со следующим заданием?

*Расположите числа в порядке возрастания:*

|    |                 |      |                 |      |     |
|----|-----------------|------|-----------------|------|-----|
| -1 | $-2\frac{3}{4}$ | -1,7 | $-\frac{63}{4}$ | -2,1 | -15 |
| Б  | Д               | Л    | М               | У    | О   |

*Какой математический смысл имеет полученное слово? [28]*

**Литература:** [10]; [20]; [78]; [111]; [39]; [64]; [65]; [25—30]; [48, 1993, № 5, С. 51—52]; [71, Гл. 1].

**Видеофильм:** «Числовой луч».

## Планы лабораторных работ

Подготовка учителя к уроку включает в себя анализ учебного материала. В связи с этим необходимо владеть общими приемами выполнения анализа учебного материала (пункта учебника, определения, алгоритма, математического утверждения).

В содержании пункта школьного учебника вычленяются два крупных блока: теоретический и задачный материал. Теоретический материал представлен *понятиями* и их определениями, *утверждениями* (аксиомы, теоремы, свойства, признаки и т. п.), *алгоритмами* (правила, формулы и др.), различными по степени общности и предметному содержанию математическими *методами* (аксиоматический, координатный, векторный, метод уравнений и неравенств, метод равных треугольников, метод геометрических преобразований и др.).

При анализе пункта школьного учебника выясняют:

- какие новые *понятия* рассматриваются, даются ли им определения;
- какие новые *утверждения* изучаются, даются ли им доказательства;
- какие новые *виды задач и примеров* рассматриваются, каково их применение, приводятся ли *алгоритмы* их решения;
- какие *иллюстрации* приводятся, каково их назначение.

Математические задачи разделяют на группы по цели их использования. Для этого определяют, на формирование каких знаний или умений направлено то или иное задание, чем отличаются задания внутри каждой группы, какова основа их решения. Особо выделяются *задачи*:

- обязательного уровня;
- связанные с отработкой отдельных этапов выполнения алгоритма (пошаговые задания);
- содержащие образец выполнения (базовые задания);
- на результат которых при решении других задач можно делать ссылки (опорные задачи);
- познавательные для обнаружения новых математических фактов.

### Основное назначение лабораторных работ:

- освоить анализ учебного материала;
- раскрыть базовые методики обучения математике;
- познакомиться с технологией составления конспектов урока изучения нового материала, урока совершенствования умений и урока контроля знаний в 5—6 классах.

## Лабораторная работа № 1

### Анализ пункта школьного учебника

**Цель:** *Раскрыть общий прием выполнения анализа пункта школьного учебника.*

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2.** Знакомимся с приемом выполнения анализа пункта школьного учебника

Ответьте на вопросы:

1. Какова структура учебного материала пункта школьного учебника?
2. В чем суть анализа теоретического материала?
3. В чем суть анализа задачного материала?
4. Как вы понимаете фразу:
  - а) понятие введено на уровне представления;
  - б) понятие введено на уровне определения?
5. Как вы понимаете фразу:
  - а) утверждение рассматривается индуктивно;
  - б) утверждение рассматривается дедуктивно?
6. Как можно определить, приведен ли алгоритм выполнения задания?
7. Что общего и чем отличается анализ пункта школьных учебников алгебры и геометрии (Приложение 16).

**Задание 3.** Осваиваем анализ учебного материала

Выполните анализ учебного материала конкретного пункта:

- определение степени с натуральным показателем [1, П. 16];
- средняя линия треугольника [11, П. 62].

**Литература:** [63].

## Лабораторная работа № 2

### Методика формирования математических понятий

**Цели:** *Раскрыть логико-математическую структуру типичных для школьного курса математики определений. Раскрыть на конкретных примерах основные этапы формирования математических понятий в школе.*

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Изучаем теорию и анализируем определения**

1. Ответьте на вопросы:
  - Что такое понятие? Что такое определение понятия?
  - Какие виды определений чаще всего встречаются в школе?
  - Какова структура определений и как провести ее логический анализ?
2. Выберите из школьных учебников примеры различных видов определений и выполните логический анализ их структуры.
3. Рассмотрите два подхода к выделению этапов формирования понятий:

| Первый подход                                                                                                                       | Второй подход                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1-й этап: введение определения;<br>2-й этап: усвоение определения;<br>3-й этап: закрепление понятия;<br>4-й этап: подведение итогов | 1-й этап: мотивировка;<br>2-й этап: категоризация;<br>3-й этап: обогащение;<br>4-й этап: перенос;<br>5-й этап: свертывание |

Охарактеризуйте основные этапы формирования понятий и виды заданий на каждый этап (Приложение 2).

4. Рассмотрите примеры реализации методики формирования понятий (Приложение 1).

**Задание 3. Осваиваем методику формирования понятий**

1. Раскройте основные этапы формирования одного из следующих понятий:
  - пропорция;
  - среднее арифметическое;
  - подобные слагаемые;
  - медиана треугольника;
  - высота треугольника.
2. Составьте конспект фрагмента урока по введению и усвоению рассмотренного определения (Приложение 17, Приложение 21).

3. Используя Приложение 3, проверьте, нет ли в вашем конспекте урока типичных методических ошибок.

**Литература:** [63]; [62, С. 37—46]; [70, Гл. 3, § 1]; [103, С. 323—334]; [26]; [27].

### **Лабораторная работа № 3** **Методика формирования математических умений**

**Цели:** *Раскрыть общий прием выполнения логико-математического анализа конкретных алгоритмов. Раскрыть на конкретном примере этапы формирования математических умений.*

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Изучаем теорию**

1. Ответьте на вопросы:
  - Какова сущность понятия «алгоритм»? Какими свойствами должен обладать алгоритм?
  - Каково отличие правила от алгоритма? Из школьных учебников приведите пример правил, не являющихся алгоритмами, и составьте на их основе соответствующий алгоритм.
  - В чем состоит логико-математический анализ алгоритма? Приведите пример.
  - Какие психолого-педагогические требования предъявляются к формированию умения?
2. Охарактеризуйте основные этапы формирования математических умений (Приложение 4, Приложение 5).
3. Выполните задание 2 [62, С. 64].

#### **Задание 3. Осваиваем методику формирования умений**

1. Раскройте основные этапы формирования одного из умений:
  - приведение подобных слагаемых;
  - нахождение неизвестного члена пропорции;
  - нахождение средней скорости движения;
  - вынесение общего множителя за скобки в 7 классе;
  - решение линейных уравнений в 5 классе;
  - решение линейных уравнений в 6 классе.
2. Составьте конспект фрагмента урока по введению и усвоению алгоритма выполнения рассмотренного умения.
3. Используя Приложение 6, проанализируйте свой конспект в соответствии с типичными ошибками.

**Литература:** [63]; [62, С. 59—66]; [27]; [26]; [31].

## Лабораторная работа № 4

### Методика изучения теорем

**Цели:** Раскрыть общий прием выполнения логико-математического анализа конкретных теорем. Раскрыть на конкретном примере этапы изучения теорем.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Изучаем теорию и анализируем формулировки теорем**

1. Ответьте на вопросы:
  - Какова структура теоремы?
  - В каких формах могут быть сформулированы теоремы?
2. Выполните логико-математический анализ и сделайте краткую запись следующих теорем:
  - Если прямая, не проходящая ни через одну из вершин треугольника, пересекает одну из его сторон, то она пересекает только одну из двух других сторон [90, С. 17].
  - Сумма смежных углов равна  $180^\circ$  [90, С. 24].
  - Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один [90, С. 58].
  - Косинус угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника [90, С. 102].
  - Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом необходимо и достаточно, чтобы противоположные его стороны были попарно конгруэнтны [38, С. 160].
  - Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину [90, С. 74].
  - Любая прямая в декартовых координатах имеет уравнение вида  $ax + by + c = 0$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — некоторые числа [90, С. 125].
3. Какие виды теорем выделяются в математике? Какова связь между ними?
4. Охарактеризуйте основные этапы изучения теорем (Приложение 7) и виды заданий на каждом этапе (Приложение 8); раскройте этапы мотивации и закрепления теоремы Виета, связь между теоремами.

#### **Задание 3. Осваиваем методику изучения теорем**

1. Раскройте этапы изучения одной из теорем:
  - теорема Пифагора [11, С. 126];

- теорема о равноудаленности точек, лежащих на параллельных прямых [11, С. 78];
- теорема о свойствах диагоналей ромба [11, С. 105];
- теорема о вписанном угле [11, С. 164];
- теорема о произведении отрезков пересекающихся хорд [11, С. 165];
- признак прямоугольника [11, С. 105].

2. Составьте конспект фрагмента урока по введению и усвоению рассмотренной теоремы.

3. Используя Приложение 9, проанализируйте свой конспект в соответствии с типичными ошибками.

**Литература:** [63]; [62, С. 47—59]; [11]; [90]; [38]; [70, Гл. III, § 2—3]; [76, С. 139].

### Лабораторная работа № 5

#### Конспект урока по изучению нового материала

**Цели:** Рассмотреть наиболее распространенные типы уроков математики и их структуру. Познакомиться с основными педагогическими и методическими требованиями к уроку математики. Познакомиться со схемой записи конспекта урока. Составить конспект урока по указанной теме.

**Замечание:** К занятию выполните анализ пункта 1.5 «Наибольший общий делитель» [78].

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2.** Изучаем теорию и анализируем образцы конспектов урока

1. Изучите:

- Классификацию уроков по организации деятельности учащихся. Охарактеризуйте структуру этих уроков.
- Методические требования к уроку математики и технологию составления конспекта урока (Приложение 17, Приложение 18).

2. Познакомьтесь с конспектом урока по теме: «Наибольший общий делитель» по учебнику [78] (Приложение 19). Покажите на нем реализацию выполнения требований к конспекту урока (Приложение 17).

3. Какие, на Ваш взгляд, изменения следует внести в предложенный конспект урока, если изучение материала идет по учебникам [21]; [30]. Сравните свои предложения с Приложением 19.

Предложите вариант использования учебника [65] по теме «Наибольший общий делитель».

**Задание 3. Разрабатываем конспект урока**

Разработайте конспект урока по теме «Наименьшее общее кратное» [21].

**Литература:** [62, С. 94—97]; [78]; [53]; [20]; [65]; [30]; [68, С. 250—268]; [86, тема 15]; [70, Гл. VI, § 1, 2].

**Лабораторная работа № 6**  
**Урок математики (6 класс). Деловая игра**

**Цели:** Проведение урока в студенческой группе, его наблюдение и анализ.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Знакомимся со схемой анализа урока**

Изучите примерную схему анализа урока (Приложение 20) и ответьте на вопросы:

1. Какую информацию должен сообщить учитель до начала просмотра урока?
2. Какие записи желательно делать во время просмотра урока?
3. Что анализируется после просмотра урока?

**Задание 3. Учимся наблюдать и анализировать урок**

1. Обсудите составленные планы урока по теме «Наименьшее общее кратное».
2. Продемонстрируйте и проанализируйте каждый этап урока.
3. Обсудите иные варианты проведения урока.
4. Проведите самоанализ собственного конспекта.

**Литература:** [62, С. 97—99]; [86, тема 15].

**Лабораторная работа № 7**  
**Школьный кабинет математики.**  
**Наглядность при обучении математике**

**Цели:** Раскрыть значение школьного кабинета математики; раскрыть функции наглядности и правила ее подбора, рассмотреть виды наглядности. Познакомиться с «технологией» изготовления различных видов наглядности.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Знакомимся со школьным кабинетом математики**

1. Изучите методические рекомендации «Школьный кабинет математики» [108].

2. Ответьте на вопрос: «В чем состоит преимущество кабинетной системы организации учебного процесса?»

3. Охарактеризуйте рабочее место учителя и учащегося.

4. Дайте характеристику разделов школьного кабинета математики.

5. Познакомьтесь с составлением тематической карточки и планом работы кабинета [76, С. 148, 157].

6. Познакомьтесь с путеводителем по кабинету математики в Вашем учебном заведении.

**Задание 3. Осваиваем использование наглядности**

1. Разработайте фрагменты урока с использованием наглядности:

- Рабочая таблица (составьте серию вопросов при использовании рабочей таблицы «Линейная функция»).

- Диафильм (продумайте объяснение нового материала с использованием диафильма «Прямоугольный параллелепипед»).

- Магнитная доска. Покажите использование магнитной доски при изучении темы 6 класса:

- а) «координатная плоскость»;

- б) «решение уравнений».

- Модель (покажите использование модели для демонстрации линейных углов к стереометрическим задачам).

- Модель (объясните сложение отрицательных чисел с использованием модели термометра).

2. Изготовьте и продемонстрируйте серию кодопозитивов (или компьютерных слайдов), отражающих:

- Задания для устного счета по теме «Действия с рациональными числами».

- Варианты составления краткой записи условия следующей задачи:

*На ремонт физкультурного зала было израсходовано 44 кг краски, что составляет 20% всей краски, отпускаемой колхозом на ремонт школы. Сколько килограммов краски купил колхоз, если школе было отпущено 12,5% купленной краски.*

- Текст для письменной самостоятельной работы на уроке с последующей ее проверкой.

- Запись доказательства второго признака равенства треугольников и серия задач по готовым чертежам для усвоения теоремы [11].
- Разные способы решения задачи:

*Собака увидела зайца на расстоянии 240 м и погналась за ним. Через какое время собака догонит зайца, если она пробегает в минуту 660 м, а заяц — 420 м?*

- Поэтапное построение чертежа к задаче:

*Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через вершины  $A$ ,  $C$  и точку  $M$  ребра  $A_1 B_1$ .*

*Литература:* [11]; [108]; [79]; [70, Гл. VII, § 3—5]; [10, № 143, 144].

## Лабораторная работа № 8

### Виды, формы, способы и средства контроля. Нормы оценок

**Цели:** Выделить виды, формы, способы и средства контроля знаний и умений учащихся; установить требования к контролю знаний и умений учащихся; установить, в чем заключается подготовка учителя к контрольной работе и анализ результатов такой работы.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2.** Изучаем теорию и анализируем практику работы школы

Ответьте на вопросы:

1. Каковы цели, функции, компоненты контроля знаний?
2. Каковы виды, формы, способы и средства контроля:
  - а) выполнения домашних заданий;
  - б) на уроках совершенствования умений;
  - в) усвоения темы (Приложение 27)?
3. Каковы требования к проверке тетрадей и нормы оценок успеваемости учащихся по математике в средней школе?
4. В чем заключается подготовка учителя к контрольной работе?
5. В чем заключается проверка контрольной работы и анализ ее результатов?

**Задание 3.** Осваиваем предупреждение математических ошибок

1. Проанализируйте тему «Деление десятичных дробей». Выделите возможные типичные ошибки учащихся по этой теме

и предложите варианты их предотвращения. Просмотрите фрагмент урока «Внимание! Нуль!»

Охарактеризуйте математические способы контроля выполнения арифметических действий.

2. Для конкретной контрольной работы № 7 [48, 1996, № 5, С. 21] продумайте норму оценок. Выделите возможные типичные ошибки и разработайте урок подготовки к контрольной работе.

#### **Задание 4. Осваиваем технологию составления самостоятельных работ**

1. Составьте самостоятельную работу по теме «Сложение рациональных чисел» (2 варианта):

- а) предложите многовариантный выбор ответов с учетом типичных ошибок;
- б) предложите использование перфокарты для проверки данной работы;
- в) предложите использование программно-контрольного устройства «Огонек-1» для проверки данной самостоятельной работы.

2. Составьте разноуровневую самостоятельную работу по теме «Решение уравнений» (6 класс) [48, 1991, № 3, С. 12—15; 1994, № 4, С. 20—22].

3. Разработайте фрагмент урока с использованием математического диктанта в 5 классе [67; 76, С. 140].

**Литература:** [62, С. 84—94]; [93]; [67]; [48, 1987, № 4; 1988, № 3, С. 24]; [70, Гл. VI, § 7]; [76, С. 144, 147, 161].

### **Лабораторная работа № 9**

#### **Различные формы работы на уроках совершенствования умений**

**Цели:** Рассмотреть формы работы на уроках совершенствования умений.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2.** Изучите различные формы работы при разных видах закрепления.

**1. Первичное закрепление:**

- а) учащийся выполняет задание у доски с подробным объяснением;

- б) пара учащихся у доски;
- в) комментированные объяснения по цепочке;
- г) работа с карточками типа «Делай по образцу», «Заполни пропуски»;
- д) устная работа на отработку отдельных элементов.

## 2. Тренаж:

- а) дидактические игры;
- б) работа учащегося у закрытой доски с последующим объяснением другим учеником выполненного решения;
- в) несколько человек у доски решают одно и то же задание, но разными способами;
- г) несколько человек у доски решают одно и то же задание, затем проверяют друг друга;
- д) дети на местах самостоятельно решают, а затем:
  - учитель проверяет;
  - осуществляется взаимоконтроль;
  - осуществляется самоконтроль;
- е) один ученик объяснил подробно решение, а другой его выполнил;
- ж) работа по карточкам;
- з) устная фронтальная работа.

## 3. Углубленное закрепление для сильных учащихся:

- а) исследовательская работа;
- б) решение прикладных заданий;
- в) выполнение заданий типа «Составь задачу».

**Задание 3.** Проведите пресс-конференцию по материалам **задания 2**, пригласив «специалистов» по первичному закреплению, по тренажу, по углубленному закреплению в 5—6 классах.

**Задание 4.** Разработайте планы уроков совершенствования по теме «Произведение многочленов» (7 класс) (Приложение 25).

**Литература:** [1]; [56]; [95]; [70, Гл. VI, § 3—6, Гл. V, § 5].

## **Вопросы к зачету по общей методике и методике обучения математике в 5—6 классах**

1. В чем состоит методика формирования понятий?
2. В чем состоит методика формирования умений?

3. В чем состоит методика изучения теорем?
4. Схема анализа пункта школьного учебника.
5. Технология составления конспекта.
6. Схема анализа урока.
7. Схема изучения числовых систем.
8. Методика изучения натуральных чисел:
  - а) цели изучения;
  - б) основные направления обобщения изученного в начальной школе.
9. Методика изучения десятичных дробей:
  - а) пути введения;
  - б) методика изучения сравнения;
  - в) методика изучения действий.
10. Методика изучения обыкновенных дробей и смешанных чисел в 5—6 классах:
  - а) пути введения;
  - б) методика изучения сравнения;
  - в) методика изучения действий.
11. Методика изучения положительных и отрицательных чисел:
  - а) пути введения;
  - б) методика изучения сравнения;
  - в) методика изучения действий.
12. Методика работы с текстовой задачей:
  - а) анализ условия;
  - б) запись условия задачи;
  - в) алгебраический и арифметический методы решения (суть, оформление решения);
  - г) вопросы поиска решения задачи арифметическим методом и его оформление;
  - д) вопросы поиска решения задачи алгебраическим методом и его оформление.
13. Методика работы с задачами следующих видов:
  - а) задачи на движение (виды задач, основные умения, обучение учащихся их решению);
  - б) задачи на работу (виды задач, основные умения, обучение учащихся их решению);
  - в) задачи на проценты, сушку и сплавы (виды задач, основные умения, обучение учащихся их решению).

## II семестр

### Планы лекций

#### **Методика изучения планиметрии**

##### **Тема 1. Логическое строение школьного курса геометрии. Методика изучения аксиом**

###### **План:**

1. Основные идеи курса геометрии и основные ступени его изучения.
2. Сущность аксиоматического метода.
3. Пути построения школьного курса геометрии в зависимости от выбора системы аксиом.
4. Методика ознакомления учащихся с системой аксиом планиметрии.
5. Методика обучения решению первых задач по планиметрии.

**Литература:** [11]; [90]; [93]; [48, 1986, № 1, С. 12—19]; [69, Гл. XV, § 1, 2; Гл. XIX, § 1, 2].

##### **Тема 2. Методика изучения геометрических фигур и их свойств**

###### **План:**

1. Виды геометрических фигур в школьном курсе планиметрии и место их изучения.
2. Схема изучения геометрических фигур и общие рекомендации ее реализации.
3. Методика изучения треугольников.
4. Методика изучения четырехугольников.
5. Методика изучения многоугольников.
6. Методика изучения окружности.

**Литература:** [11]; [54]; [23]; [90]; [48, 1985, № 1, С. 32—39; 1989, № 2, С. 35].

##### **Тема 3. Равенство геометрических фигур в школьном курсе математики**

###### **План:**

1. Пропедевтика понятия равенства фигур в 5—6 классах.
2. Определения равенства фигур в различных школьных учебниках. Свойства равных фигур.

3. Методика изучения признаков равенства треугольников.
4. Обучение решению задач с помощью признаков равенства треугольников.
5. Метод доказательства равенства фигур с помощью геометрических преобразований.

**Литература:** [11]; [77]; [90]; [93]; [23]; [54]; [48, 1985, № 6, С. 38—40; 1988, № 6, С. 26; 1985, № 5, С. 29—30].

#### **Тема 4. Геометрические преобразования в школьном курсе геометрии. Подобие фигур**

##### **План:**

1. Понятие геометрического преобразования и виды геометрических преобразований, изучаемых в курсе средней школы.
2. Методика изучения свойств движения и его видов.
3. Методика введения определения подобных фигур.
4. Методика изучения признаков подобия треугольников.

**Литература:** [11], [23], [54], [90]; [48, 1990, № 6, С. 27]; [71, Гл. 15].

#### **Тема 5. Векторы и координаты в школьном курсе геометрии**

##### **План:**

1. Роль и место темы «Координаты» в школьном курсе геометрии.
2. Методика изучения темы «Декартовы координаты на плоскости».
3. Различные трактовки понятия «вектор».
4. Методика изучения темы «Векторы».

**Литература:** [11], [12], [23], [50], [90], [93]; [62, С. 140—149, 151—155]; [71, Гл. 15].

#### **Тема 6. Методика изучения геометрических величин (длина, угловая мера, площадь)**

##### **План:**

1. Сущность измерения величин (на примере измерения длины отрезка или площади простой фигуры).
2. Аксиоматический подход к измерению величин (длины, площади, величины угла) в школьном курсе геометрии.

3. Пропедевтика измерения величин в 5–6 классах.
4. Математические и методические идеи вывода основных формул вычисления площадей фигур.

**Литература:** [11], [23], [54], [90]; [69, Гл. XVIII, § 1–3].

## Планы практических занятий

### Часть 1. Методика изучения алгебры

**Цели:** Освоить базовые методики обучения математике на алгебраическом материале. Раскрыть методику изучения основных содержательных линий школьного курса алгебры (тождественные преобразования, уравнения и неравенства, функции и их графики) и характер системы упражнений по этим содержательным линиям.

Познакомиться с особенностями работы при изучении алгебры в основной школе: алгебраический подход к исследованию проблем (решение задач в общем виде, сведение к алгебраическим методам), использование математических тождеств и формул, использование алгебраических теорем, применение алгебраических методов (метод уравнений и неравенств, метод использования свойств функций, графический метод, метод замены переменных, метод разложения на множители, метод математического моделирования и т. д.).

Познакомиться с изучением нового материала разными методами, с технологией проведения урока обобщения.

Освоить методику работы с некоторыми видами алгебраических заданий: «Доказать тождество», «Решить уравнение или неравенство», «Упростить выражение», «Построить график функции и, используя график, провести исследование свойств функции».

### Тема 1. Алгебраический материал в курсе математики 5–6 классов

#### План:

**Задание 1.** Изучаем структурные связи алгебраического материала в 5–6 классах

1. Определите, какие содержательные линии, изучаемые алгеброй, находят отражение в курсе математики 5–6 классов.

2. Составьте математические карты реализации каждой содержательной линии в учебниках математики [77], [78]. Сравните их с математическими картами по учебникам [20].

**Задание 2. Осваиваем методику изучения алгебраического материала в 5—6 классах**

1. Раскройте методику изучения числовых и буквенных выражений. Охарактеризуйте виды заданий по теме. Покажите методику работы с заданием на доказательство:

*Докажите, что при любом значении буквы значение выражения:*  
 $5 \cdot (7y - 2) - 7 \cdot (5y + 2)$  равно  $-24$  [20].

2. Раскройте методику изучения уравнений в курсе математики 5—6 классов. Выделите пути введения определения понятия уравнения в 5 классе. Охарактеризуйте виды уравнений и методы их решения. Разработайте методику выполнения задания:

*Решите уравнение:*  $(8,3 - x) \cdot 4,7 = 5,64$  [20].

3. Охарактеризуйте функциональную пропедевтику в курсе математики 5—6 классов.

**Литература:** [20]; [69]; [71]; [77]; [78]; [25]—[27]; [10, № 76, 77].

**Видеофильм:** «Решение уравнений в 6 классе».

**Тема 2. Математические выражения  
и тождественные преобразования в основной школе****План:****Задание 1. «Изучаем теорию тождественных преобразований»**

1. Охарактеризуйте виды алгебраических выражений в курсе алгебры основной школы (последовательность изучения видов, мотивацию каждого вида, основы выполнения операций).

2. Раскройте схему изучения тождеств (Приложение 5).

3. Раскройте схему изучения тождественных преобразований.

**Задание 2. Осваиваем виды тождественных преобразований**

1. Раскройте методику изучения тождественных преобразований целых выражений. Разработайте методику введения определения тождества.

2. По теме «Тождественные преобразования рациональных выражений»:

- Покажите методику изучения теоремы о сумме алгебраических дробей с одинаковыми знаменателями методами: объяснительно-иллюстративной беседы (Приложение 21), лекции (Приложение 22), проблемной беседы (Приложение 23), работы по учебнику (Приложение 24).
- Охарактеризуйте систему упражнений на сложение и вычитание алгебраических дробей с разными знаменателями. Подберите упражнения на отработку отдельных шагов сложения

алгебраических дробей и продемонстрируйте их с помощью кодоскопа (компьютера).

- Покажите методику работы с заданием:

*Упростите выражение:*

$$\left( \frac{2a}{2a+b} - \frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2} \right) : \left( \frac{2a}{4a^2-b^2} + \frac{1}{b-2a} \right) [2].$$

Изменится ли методика, если работать с заданием 2 [33, С. 169]?

3. Подготовьтесь к опросу по листу взаимоконтроля по теме «Квадратные корни» в 8 классе (Приложение 27). Какие вопросы по теме «Тождественные преобразования иррациональных выражений» Вы бы составили по материалам курса алгебры 9 класса?

4. Охарактеризуйте методику формирования умения работать с тождествами сокращенного умножения (Приложение 5). Разработайте методику введения формулы  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ . Проанализируйте виды упражнений на применение формул сокращенного умножения.

5. Выделите типичные ошибки учащихся, связанные с тождественными преобразованиями и причины их появления.

**Литература:** [1]; [2]; [3]; [14]; [32]; [33]; [34]; [31]; [69]; [71]; [4]; [5]; [6]; [75].

**Видеофильм:** «Действия со степенями».

### **Тема 3. Уравнения в курсе математики основной школы**

**План:**

#### **Задание 1. Изучаем теорию уравнений**

1. Перечислите основные определения, связанные с уравнениями, свойства равносильности уравнений и их систем.

2. Составьте математические карты изучения уравнений и их систем в курсе математики 7—9 классов (виды уравнений и их систем). Охарактеризуйте систему упражнений, связанную с уравнениями.

#### **Задание 2. Осваиваем виды уравнений**

1. Изучите методическую карту «Квадратные уравнения» (Приложение 36). Перечислите отличия изучения квадратных уравнений в учебниках [2], [35].

2. Раскройте методику изучения дробно-рациональных уравнений. Разработайте методику введения определения дробно-

рационального уравнения. Покажите образцы записи решения уравнения:

$$\frac{10}{y^3 - y} + \frac{1}{y - y^2} = \frac{1}{1 + y}, \text{ используя:}$$

- условие равенства дроби нулю;
- условие равенства двух дробей с одинаковыми знаменателями;
- критерий равенства двух дробей;
- свойство равенства.

3. Покажите методику работы с текстовой задачей, решаемой методом составления системы уравнений:

*Из пунктов А и В, расстояние между которыми равно 280 км, выходят одновременно два автомобиля. Если автомобили будут двигаться навстречу друг другу, то встреча произойдет через 2 ч. Если же они будут двигаться в одном направлении, то автомобиль, вышедший из А, догонит автомобиль, вышедший из В, через 14 ч. Какова скорость каждого автомобиля?*

Охарактеризуйте систему обучающих заданий по решению текстовых задач с использованием систем уравнений [94, С. 62—64, № 17—22].

4. Выделите типичные ошибки учащихся, связанные с решением уравнений и их систем.

5. Познакомьтесь со статьей «Математическое моделирование — необходимый компонент современной подготовки школьников» [48, 1984, № 3]; описанием математических моделей в учебном пособии [94] и учебнике [75].

**Литература:** [1]; [2]; [3]; [33]; [35]; [69]; [71]; [94]; [75]; [48, 2001, № 3, С. 36].

#### **Тема 4. Неравенства в курсе математики основной школы**

##### **План:**

##### **Задание 1. Изучаем теорию неравенств**

1. Перечислите основные определения, связанные с неравенствами, и свойства равносильности неравенств.

2. Составьте математические карты изучения неравенств и их систем в основной школе (виды неравенств и их систем). Охарактеризуйте систему упражнений, связанную с неравенствами.

3. Ознакомьтесь с логико-дидактическим анализом темы «Неравенства» [62, С. 179—190].

4. Раскройте методику изучения числовых неравенств и доказательства свойства об умножении обеих частей неравенства на одно и то же отличное от нуля число.

**Задание 2. Осваиваем виды неравенств**

1. Разработайте методику изучения неравенств с одной переменной, сводящихся к линейным.

2. Покажите методику работы с заданием:

*Решите систему неравенств:*

$$\begin{cases} 2y - (y - 4) < 6, \\ y > 3 \cdot (2y - 1) + 18. \end{cases} [2].$$

3. Покажите образцы решения дробно-рационального неравенства:

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} \leq 2 \text{ двумя способами:}$$

а) путем использования системы;

б) методом интервалов.

4. Раскройте методику работы с текстовой задачей, решаемой методом неравенств:

*Туристы отправились на моторной лодке по течению реки и должны вернуться обратно к стоянке не позднее, чем через 3 ч. На какое расстояние могут отъехать туристы, если скорость течения реки 2 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде 18 км/ч [2].*

5. Ответьте на вопрос: «Каковы на Ваш взгляд, пути обучения учащихся решению текстовых задач?»

**Литература:** [1]; [2]; [3]; [69]; [71]; [4]; [5]; [6]; [75].

**Тема 5. Изучение функциональной зависимости  
в курсе математики основной школы**

**План:**

**Задание 1. Изучаем теорию функций**

1. Перечислите основные определения, связанные с функциями и способы их задания.

2. Составьте математическую карту изучения функций в учебниках [1]; [2]; [3]. Сравните реализацию содержательной линии функций в учебниках [1]; [2] и [36]. Ответьте на вопрос: «Какие преимущества дает введение понятия функции только в 9 классе основной школы?» (Приложение 32).

3. Подготовьте фрагмент урока в 7 классе по введению понятия функции. Выделите вопросы, которые останутся для учащихся не раскрытыми.

### **Задание 2. Осваиваем виды функций**

1. Раскройте реализацию методической схемы изучения функций:  $y = kx + b$ ,  $y = kx$ ,  $y = \frac{k}{x}$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x^n$ ,  $n \in Z$  (Приложение 31, Приложение 10). Охарактеризуйте систему упражнений, связанную с функциями.

2. Определите роль и место свойств функций, изучаемых в основной школе, и раскройте алгоритмы исследования свойств функций элементарными способами, используя «Примеры выполнения заданий по свойствам функций» [36, С. 312—322].

**Литература:** [1]; [2]; [3]; [4]; [5]; [6]; [14]; [69]; [71]; [36]; [37]; [75].

## **Тема 6. Квадратичная функция**

### **План:**

1. Составьте математическую карту изучения квадратичной функции и ее частных случаев. Сравните с Приложением 34.

2. Раскройте методику изучения доказательств свойств функции  $y = ax^2$ .

3. Опираясь на записи, сделанные учителем на доске, по теме «Функция  $y = ax^2 + n$ » (Приложение 35), сформулируйте задания, которые предлагались учащимся, и определите их назначение.

4. Охарактеризуйте способы построения графика квадратичной функции и их алгоритмы:

- а) по характерным точкам;
- б) по шаблонам;
- в) с помощью преобразований.

5. Покажите методику работы с заданием:

*Постройте график функции  $y = -x^2 + 2x + 8$  и найдите, используя график:*

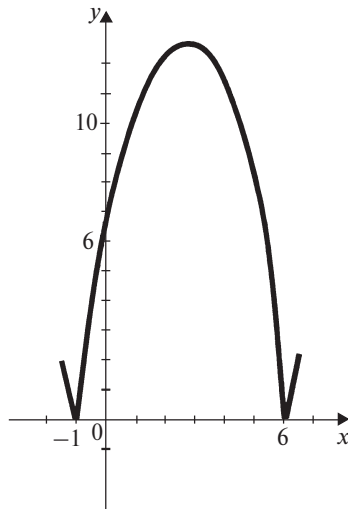
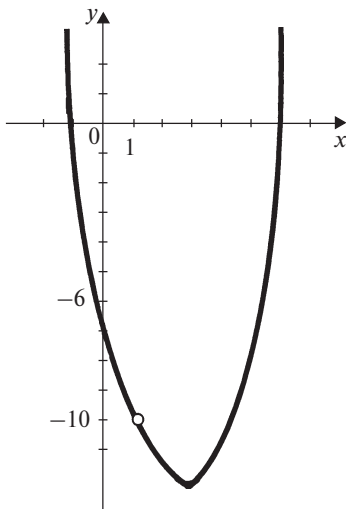
- а) значение функции при  $x = 2,5; -0,5; -3$ ;
- б) значения аргумента, при которых  $y = 6; 0; -2$ ;
- в) нули функции, промежутки, в которых  $y > 0$ ,  $y < 0$ ;
- г) промежутки возрастания и убывания функции, область значений функции.

6. Выполните задания [37]:

1. Графики каких из функций изображены на рисунке:

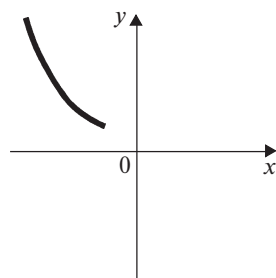
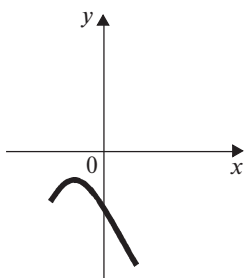
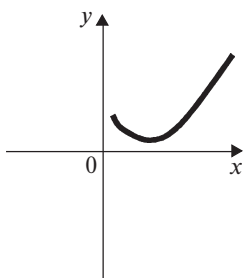
а)  $y = |x^2 - 5x - 6|$ ;    б)  $y = x^2 - |5x - 6|$ ;

в)  $y = x^2 - |5x - 6|$ ;    г)  $y = \frac{x^3 - 6x^2 - x - 6}{x - 1}$ .



2. На каком из рисунков расположен фрагмент графика

$$y = 11,3x + \sqrt{47x + 1001} ?$$

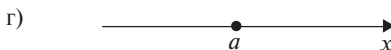
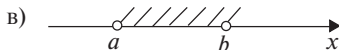


Верно ли, что график данной функции:

- а) «идет вверх» на промежутках  $[100; 1000]$  и  $[-1; 1]$ ;  
 б) пересекает ось абсцисс;

- в) лежит выше прямой  $y = 100$ ;
- г) лежит левее прямой  $x = 2000$ ;
- д) имеет ось симметрии?

3. Запишите неравенство второй степени, имеющее множество решений:



**Контрольное задание.** Разработайте методику обучения учащихся решению квадратных неравенств и составьте конспект первого урока.

**Литература:** [3]; [5]; [71]; [37]; [75], [48, 2001, № 7, С. 39, № 7, С. 34; 2001, № 6, С. 21].

**Видеофильм:** «Решение квадратных неравенств».

### **Тема 7. Подготовка к экзамену по алгебре за курс основной школы**

#### **План:**

1. Раскройте систему работы учителя по подготовке учащихся к экзамену по алгебре за курс основной школы, опираясь на практику работы школы.

2. Выделите темы, выносимые на экзамен по алгебре за курс основной школы, и составьте план заключительного повторения по выделенным темам курса (20 ч).

3. Раскройте методику итогового повторения темы «Функция» за курс основной школы (3 ч). Покажите первый урок (урок-лекцию) по этой теме. Предусмотрите:

- обобщение теоретического материала;
- выделение основных видов заданий по теме и алгоритмов их решения (Приложение 26).

4. Выполните и правильно оформите экзаменационную работу по алгебре за курс основной школы и предложите коллеге проверить ее:

1) Упростите выражение:  $4ab + 2 \cdot (a - b)^2$ .

2) Решите систему уравнений: 
$$\begin{cases} 4x - 2y = -6, \\ 6x + y = 11. \end{cases}$$

3) Решите неравенство:  $6 - 3x < 19 - (x - 7)$ .

4) Решите уравнение:  $6 + \frac{7}{x} = x$ .

5) а) Постройте график функции  $y = -x^2 - 2x + 3$ .

б) Найдите значения  $x$ , при которых  $y = 3$ .

б) На соревнованиях по кольцевой трассе один лыжник проходил круг на 2 мин быстрее другого и через час обогнал его ровно на круг. За сколько минут каждый лыжник проходил круг?

Найдите  $\cos \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

**Литература:** [6]; [36]; [37]; [59]; [48, 1999, № 4, С. 80; 1994, №1, С. 24; 2001, № 3, С. 14; 2001, № 8, С. 12].

## Часть 2. Методика изучения планиметрии

**Цели:** Освоить базовые методики обучения математике на планиметрическом материале. Раскрыть методику изучения основных содержательных линий школьного курса планиметрии (геометрические фигуры и их свойства, геометрические построения, измерения геометрических величин, равенство геометрических фигур, геометрические преобразования) и характер системы задач по этим содержательным линиям.

Познакомиться с особенностями работы при изучении планиметрии (дедуктивный характер изложения, использование аксиоматического метода, метода от противного, методов доказательства равенства фигур на основе признаков равенства треугольников и на основе движения, метода подобия, алгебраического метода и др.). Познакомиться с методикой преобразования задач по схеме: стандартная — обучающая — поисковая.

### Тема 8. Геометрический материал в 5—6 классах

#### План:

**Задание 1.** Знакомимся со структурой пропедевтического курса геометрии

1. Проанализируйте два подхода к изучению геометрического материала:

- а) геометрический материал распределен между другими темами математики;
- б) геометрический материал изучается единым блоком.

2. Охарактеризуйте цели, содержательные геометрические линии и методические особенности пропедевтического курса геометрии 5—6 классов, реализованные в учебниках [20], [82]—[84]; [107]. Приведите примеры типовых заданий.

3. Раскройте изучение измерения величин в 5—6 классах (длина, площадь, объем, мера угла).

### **Задание 2. Осваиваем методику изучения геометрического материала в пропедевтическом курсе**

1. Разработайте методику изучения в пропедевтическом курсе понятий:

- а) окружность;
- б) биссектриса угла.

2. Покажите фрагмент урока по изучению объема прямоугольного параллелепипеда.

3. Раскройте методику формирования умения пользоваться транспортом.

**Литература:** [20]; [65]; [77]; [78]; [93]; [10, № 126—136]; [82]—[84]; [107].

**Видеофильм:** «Урок геометрии в начальной школе».

## **Тема 9. Изучение аксиом в курсе планиметрии**

### **План:**

#### **Задание 1. Знакомимся со структурой курса планиметрии**

1. Охарактеризуйте сущность аксиоматического метода. Продемонстрируйте логическое строение геометрии на одном из понятий, на одном из утверждений.

2. Составьте перечень математических карт реализации содержательных линий школьного курса планиметрии. Разработайте математическую карту изучения треугольников в учебнике [90] и сравните с изучением треугольников в учебниках [11] и [8].

3. Сделайте сообщение:

- о совместном изучении планиметрии и стереометрии [44],
- о дискуссии на тему раннего введения аксиом [71].

#### **Задание 2. Осваиваем методику изучения первых разделов планиметрии**

1. Подготовьте конспект первого урока планиметрии (включить вводную беседу и методику изучения I группы аксиом — аксиом принадлежности по учебнику [90]). Изменится ли содержание первого урока, если работать по учебнику [11]?

2. Раскройте методику формирования понятий:

а) отрезка; треугольника;

б) луча; угла.

3. Охарактеризуйте первые теоремы учебника геометрии (до изучения признаков равенства треугольников). Раскройте изучение понятия «теорема». Составьте беседу о необходимости изучения теорем и их доказательств. Покажите методику доказательства теоремы о пересечении сторон треугольника в учебнике [90] на рисунках без письменного оформления этапов доказательства.

4. Раскройте методику работы с задачами, разобранными в тексте § 1 учебника [90].

5. Укажите отличия в формулировке аксиомы параллельности прямых в учебниках [11] и [90]. Охарактеризуйте метод от противного и покажите методику его использования при доказательстве транзитивности параллельности прямых.

6. Решите задачу:

*Дан треугольник  $ABC$ . На стороне  $AC$  взята точка  $B_1$ , а на стороне  $BC$  — точка  $A_1$ . Докажите, что отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются* [90, № 47, § 1].

**Литература:** [11]; [90]; [54]; [23]; [71, С. 260—263 и гл. 16]; [8]; [69, гл. XIX]; [56, С. 6—7]; [44]; [48, 2001, № 8, С. 35—36, 42—44].

## **Тема 10. Равенство фигур в школьном курсе планиметрии**

### **План:**

#### **Задание 1. Изучаем математические основы равенства фигур**

1. Составьте карты реализации линии равенства фигур в школьном курсе планиметрии в учебниках [11] и [90].

2. Раскройте методику изучения аксиомы существования треугольника, равного данному, и определите ее роль в доказательстве признаков равенства треугольников в учебнике [90].

3. Определите математические основы доказательства признаков равенства треугольников в учебнике [11].

#### **Задание 2. Осваиваем методику изучения признаков равенства треугольников**

1. Разработайте методику изучения третьего признака равенства треугольников по двум учебникам. Охарактеризуйте содержание математического диктанта по теме «Третий признак равенства треугольников» [67].

2. Сделайте эскиз таблицы «Признаки равенства треугольников». Предложите различные варианты ее использования. Разработайте

план обобщающего урока по теме «Признаки равенства треугольников».

3. Покажите методику применения признаков равенства треугольников для доказательств равенства фигур на примере решения задачи:

*На сторонах угла  $O$  отмечены точки  $A$  и  $B$  так, что  $OA = OB$ . Через эти точки проведены прямые, перпендикулярные к сторонам угла и пересекающиеся в точке  $C$ . Докажите, что луч  $OC$  — биссектриса угла  $O$ .*

Продумайте использование трафарета:

Рассмотрим  $\Delta...$  и  $\Delta...$  В них:

а)  $\left. \begin{array}{l} \text{б) } \\ \text{в) } \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta... = \Delta... \text{ (по ... признаку),}$

значит,  $\left[ \frac{\text{отрезок}}{\text{угол}} \right] \dots = \left[ \frac{\text{отрезку}}{\text{углу}} \right] \dots$

Предложенную задачу можно преобразовать, сделав открытым заключение. Например, так: «Что еще можно доказать по данному условию?». Преобразуйте задачу так, чтобы сделать открытым условие. Какие преимущества дает использование «открытых» задач? Преобразуйте задачу в вычислительную (Приложение 15).

**Литература:** [11]; [90]; [71]; [48, 1993, № 2, С. 17—18]; [68, гл. IV, § 5]; [63, задача 2]; [67, С. 41]; [48, 2001, № 2, С. 23; 2001, № 8, С. 36—38, 44—46].

## **Тема 11. Геометрические преобразования (движение и подобие)**

**План:**

### **Задание 1. Осваиваем методику изучения движений**

1. Составьте математическую карту изучения движений в курсе планиметрии.

2. Раскройте методику изучения параллельного переноса как одного из видов движения в учебнике [90]. Изменится ли эта методика, если работать по учебнику [11]?

3. Покажите методику применения движений:

а) Для доказательства равенства фигур на примере задачи:

*Докажите, что два параллелограмма равны, если смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма соответственного равны смежным сторонам и углу между ними другого параллелограмма [11, № 1157].*

б) Для решения задач на построение на примере задачи:

*Даны две пересекающиеся окружности. Постройте отрезок, концы которого лежат соответственно на данных окружностях, а его середина совпадает с одной из точек пересечения данных окружностей [11, № 1227].*

### **Задание 2. Осваиваем методику изучения подобия**

1. Составьте математические карты изучения подобных фигур в учебниках [11] и [90].

2. Охарактеризуйте методику введения определения подобных фигур (предусмотрите использование наглядности).

3. Охарактеризуйте применение подобия для решения задач:

- на доказательство;
- на вычисление;
- на построение.

Приведите примеры.

**Контрольное задание.** Раскройте методику изучения 2-го признака подобия треугольников по учебнику [90]. Изменится ли эта методика, если работать по учебнику [11]?

**Литература:** [11]; [90]; [71]; [69]; [74]; [48, 2001, № 8-обложка, С. 3—5].

## ***Тема 12. Четырехугольники и многоугольники***

### ***План:***

#### **Задание 1. Осваиваем методику изучения четырехугольников**

1. Проведите сравнительный анализ изучения четырехугольников по учебникам [11], [90] и составьте математическую карту «Изучение четырехугольников».

2. Охарактеризуйте теоремы-свойства и теоремы-признаки в школьном курсе планиметрии. Покажите методику формирования этих понятий при изучении темы «Параллелограмм».

3. Проанализируйте теоремы по теме «Четырехугольники» и определите, какие из них можно рассмотреть совместно с классом, какие можно предложить для работы по учебнику, а какие для самостоятельного «открытия». Охарактеризуйте методику работы в каждом случае.

4. Разработайте план-конспект урока лекции на тему «Виды параллелограмма».

5. Подготовьте обобщающий урок по теме «Четырехугольники» (рассмотрите различные формы работы, используйте наглядность). Предусмотрите единый план ответа учащихся по каждому виду четырехугольников.

6. Охарактеризуйте задачи по теме: «Вписанные и описанные четырехугольники» и покажите методику работы с одной из них (по учебнику [11]).

### **Задание 2. Осваиваем методику изучения многоугольников**

1. Приведите сравнительный анализ изучения многоугольников по учебникам [11], [90], составьте математическую карту «Изучение многоугольников».

2. Охарактеризуйте задачи по теме: «Многоугольники» (по учебнику [90]), «Правильные многоугольники» (по учебнику [11]).

**Литература:** [11]; [90]; [48, 1985, № 1, С. 32—39; 1986, № 2, С. 44—47; 1993, № 2, С. 14—17, С. 56—57]; [71, § 46]; [63, С. 13—18, 24—30]; [56, С. 92—94].

## ***Тема 13. Методика изучения площадей***

### ***План:***

### **Задание 1. Изучаем аксиоматический подход к измерению геометрических величин**

1. Определите последовательность изучения и место темы «Площади» в курсе планиметрии, составьте математические карты по учебникам [11], [90].

2. Раскройте изучение понятия «Площадь плоских фигур». Проведите сравнительный анализ с изучением понятия «Длина». Охарактеризуйте аксиоматический подход к измерению площадей в школьном курсе планиметрии.

3. Раскройте методику работы с учебником при изучении площади:

а) прямоугольника (по учебнику [90]);

б) квадрата (по учебнику [11]).

### **Задание 2. Осваиваем методику вывода формул вычисления площадей и их использования**

1. Определите, при выводе каких формул вычисления площадей используются следующие приемы:

- прием достраивания до изученной фигуры;
- прием реконструкции фигуры;
- прием разбиения на изученные фигуры.

Составьте планы доказательства выделенных теорем.

2. Оформите вид доски при выводе формулы площади круга:

а) по учебнику [90];

б) по учебнику [11].

3. Определите, при доказательстве каких теорем школьного курса планиметрии площадь фигуры используется как вспомогательная величина.

4. Составьте эскиз справочной таблицы всех формул площадей геометрических фигур, изучаемых в курсе планиметрии. Охарактеризуйте варианты использования такой таблицы.

5. Разработайте математический диктант по теме «Площади фигур» по двум учебникам (2 подгруппы).

6. Используя Приложение 14, опишите урок решения задач по теме «Площади». Продумайте возможности использования планшетов (прозрачных папок для бумаг) в процессе обучения решению задач по теме «Площади фигур».

7. Составьте вариативную самостоятельную работу по теме «Площади фигур».

**Литература:** [11]; [90]; [54]; [23]; [69, Гл. XVIII, § 1—3]; [67]; [48, 1994, № 4, С. 20—22].

#### **Тема 14. Обсуждение домашней контрольной работы «Методика изучения темы»**

Разделы контрольной работы:

- математическая карта темы;
- планирование темы;
- развернутые планы уроков различных видов и с применением различных методов.

Развернутый план урока — это план-конспект, в котором:

- 1) указаны ключевые вопросы диалога на каждом этапе урока;
- 2) выполнены основные рисунки, включая краткую запись условий рассматриваемых задач;
- 3) оформлены доказательства и решения (вид доски и тетрадей);
- 4) выделены названия этапов доказательства (для этапа усвоения теоремы);
- 5) указаны варианты организации работы учащихся на уроке:
  - описание дидактических средств по теме;
  - аннотированный список методической литературы по теме.

## Планы лабораторных работ

### Часть 1. Методика обучения решению планиметрических задач

Эта методика включает в себя:

- овладение этапами анализа условия с одновременным построением чертежа, поиска, оформления и исследования решения;
- овладение различными методами решения геометрических задач;
- овладение способами решения задач различных видов;
- анализ задач пункта учебника геометрии с целью выделения групп задач и создания их комплексов;
- выделение задач с разной целевой установкой (опорные задачи, задачи обязательного уровня, тренажные задачи, познавательные задачи и т. д.).

#### Лабораторная работа № 1

#### Методика решения планиметрических задач

**Цели:** Повторить этапы деятельности при решении математических задач, выделить методы решения геометрических задач (метод от противного, алгебраический метод, метод доказательства равенства фигур с использованием признаков равенства треугольников), познакомиться с методикой создания комплексов задач, раскрыть организацию обучения решению геометрических задач.

**Замечание:** К занятию решить упражнения № 18—51, § 4 [90].

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2.** Осваиваем отдельные этапы работы над задачей и методы решения планиметрических задач

1. Познакомьтесь с методикой работы с геометрической задачей (Приложение 12).

2. Выясните, при решении какой из предложенных задач могут возникнуть трудности при построении чертежа? Продумайте серию предварительных вопросов, чтобы избежать возможных трудностей при решении задачи № 32:

*Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен  $70^\circ$ . Найдите углы треугольника.*

3. Верно ли, что оформление решения задачи № 35 (*В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $CD$ . Какая из трех точек  $A$ ,  $B$ ,  $D$  лежит между двумя другими, если углы  $A$  и  $B$  треугольника острые?*) вызывает затруднение у учащихся? Каким методом решается эта задача? Назовите этапы этого метода. Какова методика поиска пути решения задачи, если метод учащимся известен? Проведите этап поиска решения задачи № 35. Какие задачи § 4 решаются тем же методом?

4. Верно ли, что задача № 27 (*В равнобедренном треугольнике  $ABC$  с основанием  $AC$  проведена биссектриса  $CD$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ , если угол  $ADC$  равен  $60^\circ$* ) решается алгебраическим методом? Назовите этапы этого метода. Проведите к задаче № 27 этапы анализа условия и поиска решения. Приведите пример задачи § 4, решаемой алгебраическим методом.

5. Верно ли, что в задаче № 49 (*Отрезок  $BC$  пересекает прямую  $a$  в точке  $O$ . Расстояния от точек  $B$  и  $C$  до прямой  $a$  равны. Докажите, что точка  $O$  является серединой отрезка  $BC$* ) требуется доказать равенство фигур через равенство треугольников? Назовите этапы этого доказательства. Составьте основные вопросы, используемые в задачах рассматриваемого типа. Разработайте методику решения задачи № 49. Приведите примеры задач § 4 на доказательство равенства фигур и раскройте методику их совместного решения.

6. Верно ли, что задачу № 37 (*Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию*) удобно решить методом введения вспомогательной величины? Назовите этапы этого метода. Оформите этапы анализа условия и поиска решения задачи № 37. Приведите пример задачи § 4, решаемой методом вспомогательной величины.

### **Задание 3. Осваиваем создание комплексов задач по единому требованию**

1. Рассмотрите задачи: № 18, 22, 23, 24, 25, 26, 30, 44, 41. Что общего в требованиях этих задач? Составьте альбом следующих рисунков:

- а) произвольного треугольника с двумя известными углами (№ 18);
- б) равнобедренного треугольника:
  - с известным углом при основании треугольника (№ 22);
  - известным углом при вершине треугольника (№ 23);
  - точно не указанным расположением угла (№ 24; 25);
- в) прямоугольного треугольника (№ 41);

г) прямоугольного равнобедренного треугольника (№ 44);

д) равностороннего треугольника (№ 26; 30).

Продумайте варианты использования альбома при работе с указанным комплексом задач.

2. Составьте аналогичный альбом рисунков для комплекса задач на нахождение внешних углов треугольника.

3. Раскройте варианты организации обучения решению геометрических задач § 4.

*Литература:* [90]; [63, задача 2]; [70, Гл. V, § 4, 5]; [68, Гл. IV, § 6].

### Лабораторная работа № 2

#### Методика решения геометрических задач на построение методом геометрических мест и методом вспомогательного треугольника

*Цели:* Ознакомиться со схемой решения геометрических задач на построение; выделить основные задачи на построение и описать методику их решения; раскрыть методику обучения поиску решения геометрических задач на построение методом геометрических мест и методом вспомогательного треугольника.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Осваиваем схему решения задач на построение и метод геометрических мест**

1. Ответьте на вопросы:

а) Какова общая схема решения задач на построение и в чем сущность каждого этапа этой схемы?

б) Какие основные геометрические места точек используются в школьном курсе планиметрии?

в) Какие построения можно назвать основными? В чем состоит методика обучения учащихся решению основных задач на построение (на примере построения биссектрисы угла) (Приложение 4)?

г) В чем сущность метода геометрических мест?

2. Определите, какую роль в формировании метода геометрических мест играет следующее задание:

*Используя слова: «точка равноудалена от ...», «точка находится на расстоянии ... от ...» расскажите:*

а) о точке  $B$ , если  $A$  и  $P$  заданы, и  $AB = BP$ ;

б) о точке  $P$ , если  $A$  и  $B$  заданы, и  $AB = PP$ ;

в) о точке  $A$ , если  $B$  и  $C$  заданы, и  $AB = AC$ ;  
 г) о точке  $A$ , если  $AB = AC$ , точки  $B$  и  $C$  не заданы, но есть дополнительное условие:  $AB \perp DE$ ,  $AC \perp MK$ , где  $DE$  и  $MK$  — заданные прямые.

3. О каких геометрических местах точек идет речь в следующих задачах:

- Дан треугольник  $ABC$ . На биссектрисе угла  $A$  найти точку  $X$ , равноудаленную от вершин  $B$  и  $C$ .
- Даны угол  $A$  и точки  $B$  и  $C$ , расположенные одна на одной стороне угла, другая на другой. Найти точку  $P$ , такую, чтобы каждая из точек  $B$  и  $C$  одинаково отстояла бы от  $A$  и  $P$ .

4. Предложите схему оформления анализа следующей задачи: Даны четыре точки  $A, B, C, D$ . Найти точку  $X$ , которая одинаково удалена от точек  $A$  и  $B$  и одинаково удалена от точек  $C$  и  $D$ .

Составьте диалог с учащимися, в результате которого могла возникнуть предложенная вами запись.

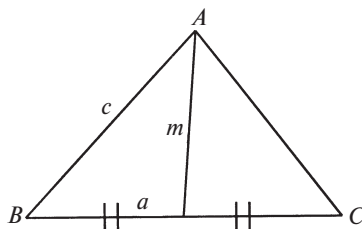
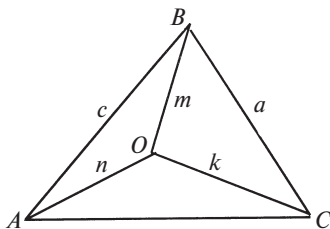
5. Разработайте поиск решения следующей задачи:

Дан треугольник  $ABC$  с прямым углом  $A$ . На стороне  $AB$  постройте точку  $M$ , находящуюся на расстоянии  $AM$  от прямой  $BC$  [11, № 321].

### **Задание 3. Осваиваем метод вспомогательного треугольника**

1. Ответьте на вопросы:

- В чем сущность решения задач на построение с помощью вспомогательного треугольника (Приложение 13)?
- Сколько и каких данных достаточно, чтобы построить:
  - треугольник;
  - прямоугольный треугольник?
- Какой треугольник можно построить, если все данные элементы отмечены на рисунке:



Как, используя эти чертежи, ввести метод вспомогательного треугольника?

2. Оформите этап анализа следующих задач: § 5 № 37, 39, 47; § 6, № 71 [90].

3. Разработайте методику решения задачи [11, № 287].

Используя Приложение 6, проанализируйте свою методику с учетом типичных ошибок.

**Литература:** [11]; [74]; [63, С. 90]; [90].

### Лабораторная работа № 3

#### Методика решения геометрических задач на построение методом геометрических преобразований и методом подобия

**Цели:** Раскрыть методику обучения решению геометрических задач методом геометрических преобразований и методом подобия.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Осваиваем метод геометрических преобразований**

1. Определите, какие геометрические преобразования переводят точку  $A$  в точку  $B$ , если:

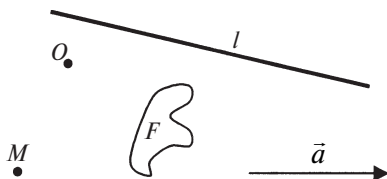
- точка  $O$  является серединой отрезка  $AB$ ;
- прямая  $l$  является серединным перпендикуляром к отрезку  $AB$ ;
- $AO = OB$  и  $\angle AOB = \alpha$ ?

2. Выполните лабораторную работу и определите ее роль в формировании метода геометрических преобразований:

#### **Часть I. Цели:**

- повторить построение образов точек при заданном движении;
- составить алгоритм построения фигуры при заданном движении.

**Задание.** Дана фигура  $F$ ; четыре модели фигур, равных фигуре  $F$ ; точки  $O$  и  $M$ ; прямая  $l$  и вектор  $\vec{a}$ . Постройте фигуру: а) симметричную фигуре  $F$  относительно точки  $O$ ; б) симметричную фигуре  $F$  относительно прямой  $l$ ; в) полученную из фигуры  $F$  поворотом вокруг точки  $M$  на угол  $90^\circ$  против часовой стрелки; г) полученную из фигуры  $F$  параллельным переносом на вектор  $\vec{a}$ .

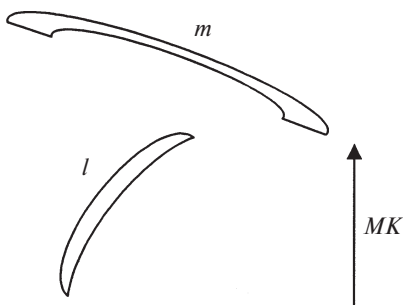


*Алгоритм построения фигуры при заданном движении:*

- 1)
- 2)
- 3)

**Часть II. Цели:** Обнаружить свойство точек, связанных друг с другом некоторым движением.

**Задание.** Даны две линии  $l$  и  $m$  (представьте, что это тонкие линии под микроскопом с многократным увеличением); модели равных им фигур и вектор  $MK$ . Известно, что точка  $A$  лежит на линии  $l$ , точка  $B$  — на линии  $m$ ; точка  $A$  переходит в точку  $B$  при параллельном переносе на вектор  $MK$ . Постройте точки  $A$  и  $B$ .



**Оформление построения:**

| Дано: | Способ 1 | Способ 2 |
|-------|----------|----------|
|       |          |          |

$A$  — ?  $B$  — ?

Формулировка свойства:

3. Разработайте поиск решения задачи:

Даны три попарно пересекающиеся прямые:  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Постройте отрезок, перпендикулярный прямой  $b$ , с серединой на прямой  $b$  и концами на прямых  $a$  и  $c$  [90, § 9, № 2].

4. Разработайте поиск решения задачи:

Даны прямая, окружность и точка  $A$ , не лежащая на них. Постройте квадрат  $ABCD$  так, чтобы вершина  $B$  лежала на данной прямой, а вершина  $D$  — на данной окружности [11, № 1231].

**Задание 3. Осваиваем метод подобия**

1. Охарактеризуйте варианты использования опорных задач:

*Построить треугольник, подобный некоторому треугольнику, если известно:*

- отношение двух сторон и угол между ними;
- два угла.

Оформите этап построения одной из задач № 586—590 [11] и составьте план решения остальных.

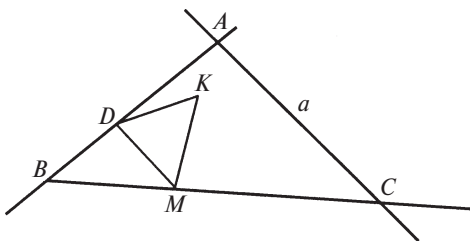
2. Решите опорную задачу:

*Построить отрезок  $x$  так, чтобы  $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  длины отрезков и покажите ее использование при решении задачи № 361 [11]. (Построить треугольник по периметру и двум углам.)*

3. Решите задачу:

Дан  $\angle ABC$ ,  $\triangle MDK$  и прямая  $a$  (рис.)

Постройте  $\triangle M_1D_1K_1$ , гомотетичный  $\triangle MDK$  относительно центра  $B$  так, чтобы вершина  $K_1$  лежала на прямой  $a$ .



Сделайте переход от этой задачи к следующей:

*Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной стороне, а две другие вершины — на двух других сторонах [90, § 11, № 9].*

4. Разработайте методику решения задачи:

*Даны угол и внутри его точка  $A$ . Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку  $A$  [90, § 11, № 8].*

**Литература:** [11]; [74]; [90].

### Лабораторная работа № 4

#### Анализ системы упражнений по геометрии с целью выделения опорных задач и задач единой геометрической конструкции

**Замечание:** К занятию решить все упражнения из § 6 «Четырехугольники» [90].

**Цель:** Познакомиться с анализом системы геометрических задач, выделить опорные задачи и создать комплексы задач темы «Четырехугольники».

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Составляем комплексы задач по теме «Параллелограмм»**

1. Выделите задачи, которые относятся к теме «Параллелограмм», и, используя [63], проведите анализ выделенного блока задач по их заключению. Выделите по обязательным результатам обучения задачи, связанные с параллелограммом и его видами и продумайте варианты включения этих задач в устную работу.

2. Разработайте альбомы рисунков для комплексов задач на вычисление сторон (или периметра) параллелограмма, углов параллелограмма (*по подгруппам*). Продумайте вариант демонстрации альбома при обсуждении вопроса: «Что может быть известно, чтобы можно было найти стороны (углы) параллелограмма?»

3. Проанализируйте задачи № 19, 28, 34. Что общего в этих задачах? Сформулируйте задачу, являющуюся опорной для решения этих трех задач. Охарактеризуйте вариант решения указанных задач на одном уроке.

4. Составьте или подберите задачи (2—3), в решении которых будет использоваться следующая опорная задача:

*Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.*

5. Что общего в задачах № 31, 32? Подберите задачи из § 6, имеющие похожую геометрическую конструкцию. Раскройте вариант создания и использования на этой базе комплекса задач.

6. Разработайте на основе задач § 6 еще один комплекс задач единой конструкции.

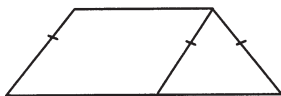
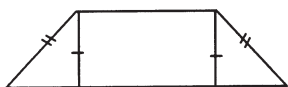
**Задание 3. Составляем комплекс задач по теме «Трапеция»**

1. Ознакомьтесь с анализом дидактического материала темы «Трапеция» [63, С. 14] и раскройте вариант методики обучения учащихся решению задач выделенных видов.

2. Решите задачу № 60:

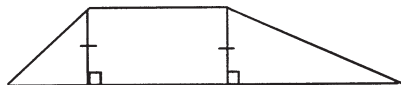
*Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.*

Докажите, что эта задача является опорной. Используя рисунки (см. ниже), определите способы ее решения и опишите возможные диалоги с учащимися по открытию этих способов и по подведению итогов в связи с используемыми стандартными дополнительными построениями.



3. Сформулируйте математические факты, вытекающие из задачи № 60, которые часто используются при решении задач. Проиллюстрируйте каждый факт на чертеже.

Например: для любой трапеции перпендикуляры, опущенные из вершин одного основания на другое (высоты трапеции), равны.



Есть ли среди перечисленных вами математических фактов тот, который является опорным при решении задач № 62, 63?

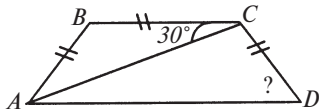
4. Разработайте методику решения задачи № 64 в сильном классе:

*Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Найдите углы трапеции.*

**Рекомендация:** Воспользуйтесь приемом «Вы — автор учебника». Предложите учащимся, которые смогли решить задачу самостоятельно, разработать указания по задаче, аналогичные тем, которые указываются в ответах к задачам учебника.

Изменится ли методика работы с задачей № 64, если предварительно решить вспомогательные задачи:

1)



$\angle ACD = ?$

$\angle D = ?$

2) Какой другой угол может быть известен, чтобы найти  $\angle D$ ?

3) Можно ли найти  $\angle D$ , если будет известен  $\angle ACD$ ?

5. Ответьте на вопрос: «Каковы, на Ваш взгляд, пути обучения учащихся решению задач?»

## **Часть 2. Конструирование урока геометрии (урок изучения нового материала)**

### **Лабораторная работа № 5**

#### **Конспект урока по геометрии (урок изучения нового материала)**

**Цель:** *Используя технологическую карту урока по геометрии, составить его конспект.*

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Осваиваем анализ пункта школьного учебника**

1. Выполните анализ теоретического материала п. 126 «Площадь трапеции» [90], ответив на вопросы:

- а) Какие понятия изучаются? Даются ли им определения?
- б) Какие утверждения рассматриваются? Доказываются ли они?
- в) Какие задачи рассматриваются? Дается ли алгоритм их решения? Какова цель этих задач?

2. Выполните анализ задачного материала. С этой целью:

1) выделите группы заданий по цели их использования и выясните отличия заданий внутри каждой группы и основы их решения;

2) особо выделите:

- задачи обязательного уровня;
- задачи, связанные с отработкой отдельных этапов выполнения алгоритма (пошаговые задания);
- задачи, содержащие образец выполнения (базовые задания);
- задачи, на которые можно делать ссылки при решении других задач (опорные задачи);
- задачи для обнаружения новых математических фактов (познавательные задачи).

3. Спланируйте изучение данного пункта, указав цели каждого урока. Удобно планирование представить таблично:

| № | Цели урока | Распределение материала: |        | Контроль |
|---|------------|--------------------------|--------|----------|
|   |            | в классе                 | на дом |          |
|   |            |                          |        |          |

### Задание 3. Осваиваем составление конспекта урока изучения нового материала

Составьте подробный конспект урока, используя ниже предложенную технологическую карту.

*Тема урока:*

*Цели урока:*

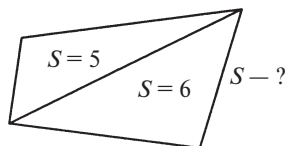
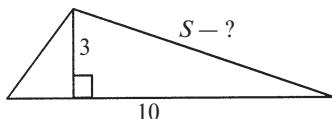
*Ход урока:*

I. Постановка целей перед учащимися:

II. Актуализация знаний учащихся.

а)

б)

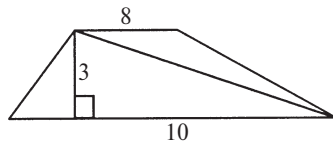
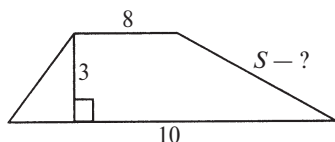


(Продумайте мотивацию решения этих задач, форму предъявления, организацию работы, подведение итогов.)

III. Изучение нового материала:

а) введение определения высоты трапеции (используйте методику формирования понятий);

б) решение задачи:



$$1) S_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3; S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3$$

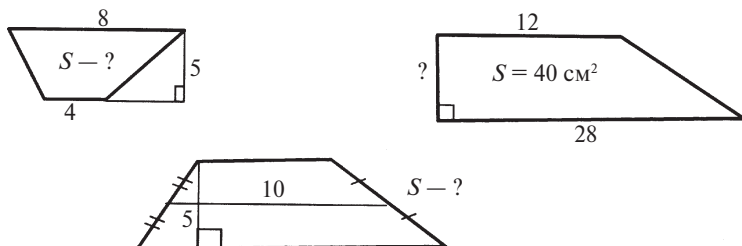
$$2) S = S_1 + S_2$$

$$3) S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (10 + 8) = \frac{10+8}{2} \cdot 3$$

(Сделайте переход от понятия высоты трапеции; предложите учащимся решить задачу на основе уже известного материала с целью обнаружения формулы, по которой можно будет вычислить площадь любой трапеции; продумайте вариант построения данной трапеции на основе рисунка решенной задачи о площади треугольника; подведите итог.)

в) формулировка теоремы и доказательство ее в общем виде с использованием параллели с ранее решенной задачей (должна соблюдаться методика изучения теоремы).

На этапе усвоения теоремы решение следующих устных задач по готовым чертежам, учащиеся формулируют условия этих задач:



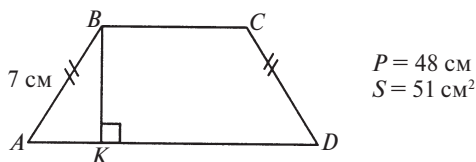
(Используя эту задачу, сделайте вывод, чему равна площадь трапеции через среднюю линию.)

#### IV. Закрепление нового материала.

№ 38 (продумайте организацию работы с задачей и подведение итогов по ее решению).

Итог урока, постановка домашнего задания:

- теорема (формулировка и доказательство);
- составить 2—3 задачи, связанные с площадью трапеции;
- № 40 (разобрать по учебнику, оформить решение в тетради в виде теоремы);
- решить задачу:



(Продумайте серию вопросов по итогу урока.)

#### **Задание 4. Осваиваем составление конспекта урока совершенствования умений**

**Домашнее задание:** напишите конспект второго урока по теме «Площадь трапеции», используя ниже предложенную технологическую карту.

*Тема урока:*

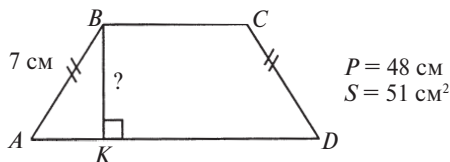
*Цели урока:*

*Ход урока:*

I. Постановка целей урока.

II. Проверка домашнего задания:

а) Решение задачи



(Продумайте вариант занятости тех, кто справился с задачей дома, на время обсуждения возникших трудностей у остальных учащихся. Предусмотрите серию вопросов к задаче и использование кодоскопа.)

б) Фронтальный опрос по изученному материалу.

(Предложите составить коллективные ответы на темы:

1) «Фигура и ее основные элементы»;

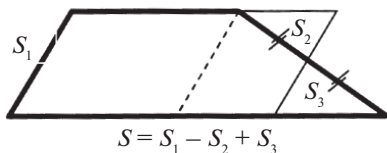
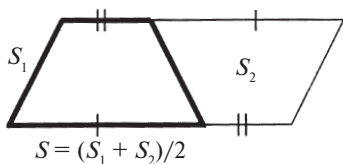
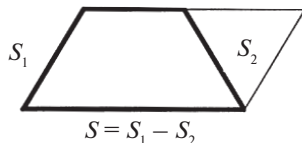
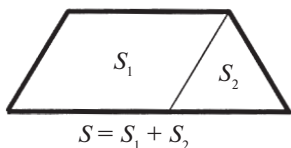
2) «Доказательство теоремы о площади трапеции и ее следствие».)

(В опрос включите вопросы, связанные с задачей № 40.)

в) Обсуждение составленных задач по готовым чертежам.

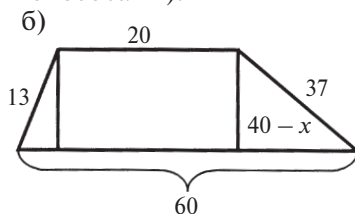
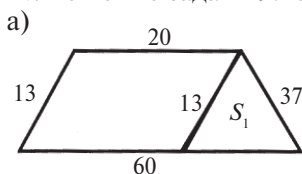
(Продумайте организацию работы.)

III. Работа в микрогруппах: используя предложенные чертежи и указания, вывести формулу площади трапеции:



(Продумайте организацию работы и контроль выполнения.)

## IV. Решение задачи № 37 (двумя способами):

1)  $S_1$ ; 2)  $h$ ; 3)  $S_{\text{тр.}}$ ;1)  $x$ ; 2)  $h_1, h_2$ ; 3)  $h_1 = h_2$ .

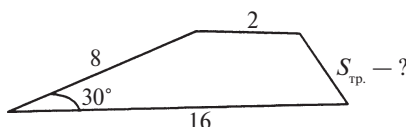
(Продумайте организацию работы и подведение итогов с целью акцентирования внимания на методы решения. Сделайте комментарий по задаче № 39, вынесенной на домашнюю работу.)

## V. Итог урока, постановка домашнего задания.

а) повторить формулы вычисления площадей фигур;

б) № 39.

в)



(Продумайте серию вопросов.)

**Литература:** [11]; [90]; [23]; [54]; [63, С. 13—18].**Лабораторная работа № 6****Деловая игра «Урок совершенствования умений»**

**Цели:** Отработать фрагменты урока совершенствования умений и его анализ.

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Учимся наблюдать и анализировать урок**

1. Проведите в студенческой группе, используя все необходимые наглядные пособия, урок совершенствования умений по теме «Площадь трапеции».

2. Напишите анализ просмотренного урока.

3. Разработайте дифференцированную проверочную работу на 10 мин по теме «Площадь трапеции» (три варианта). Проанализируйте просмотренный урок с позиций подготовки учащихся к выполнению составленной вами проверочной работы.

**Литература:** [62, С. 102—107]; [23]; [54], Приложение 25.

## Лабораторная работа № 7

### Зачет на уроках математики

***Цели:** Познакомиться с организацией урока зачета, выяснить наиболее существенные стороны и специфику его реализации, разработать урок-зачет по одной из тем геометрии.*

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Знакомимся с организацией урока зачета**

Изучите предложенную литературу и ответьте на вопросы:

1. Каковы задачи зачетных уроков?
2. Как готовятся учащиеся к уроку-зачету?
3. Как готовится учитель к уроку-зачету?
4. Каковы формы проведения урока-зачета.

**Задание 3. Разрабатываем урок зачет**

1. Разработайте урок зачет по теме «Теорема Пифагора» (8 класс) [90].

2. Изготовьте дидактические средства справочного, тренировочного и проверочного характера к разработанному вами уроку зачету [48, 1987, № 6, С. 30].

3. Предложите вариант проведения зачета по системе В.Ф. Шаталова (Приложение 27).

**Литература:** [90]; [11]; [54]; [23]; [80, С. 113—123]; [53, С. 80]; [48, 1991, № 3, С. 25; 1988, № 6, С. 21; 1988, № 4, С. 21; 1988, № 3, С. 32]; [52, Гл. VI]; [113].

**Видеофильм:** «Урок-зачет по математике».

### Вопросы к экзамену по общей методике и методике обучения математике в основной школе (5—9 классы)

1. Цели обучения математике в средней общеобразовательной школе.

2. Анализ и синтез как методы исследования и методы обучения.

3. Индукция и дедукция как виды умозаключения и методы обучения.

4. Математические понятия и их определения. Объем и содержание понятия. Виды определений.

5. Классификация понятий. Методика формирования понятий.
6. Виды математических предложений. Виды теорем. Методика изучения теорем.
7. Методика формирования умений.
8. Алгоритмы в школьном курсе математики.
9. Задачи в обучении математике (роль задач, основные виды задач, этапы решения задач, методика обучения учащихся их решению).
10. Задачи на построение (основные виды задач, этапы решения задач, методика обучения учащихся их решению).
11. Методика изучения натуральных чисел в 5 классе.
12. Методика изучения десятичных дробей (понятие, сравнение, округление).
13. Методика изучения десятичных дробей (действия с десятичными дробями).
14. Методика изучения отрицательных чисел (понятие, сравнение, сложение).
15. Методика изучения отрицательных чисел (вычитание, алгебраическое сложение, умножение, деление).
16. Методика изучения рациональных положительных чисел в 5 классе.
17. Методика изучения рациональных чисел в 6 классе.
18. Математические выражения и тождественные преобразования в 5—6 классах.
19. Уравнения и неравенства в 5—6 классах.
20. Обучение приближенным вычислениям.
21. Методика изучения функции (понятие функции, ее графика, способы задания, область определения).
22. Методика изучения линейной функции.
23. Методика изучения обратной пропорциональности.
24. Методика изучения квадратичной функции.
25. Математические выражения и тождественные преобразования в 7 классе.
26. Математические выражения и тождественные преобразования в 8 классе.
27. Математические выражения и тождественные преобразования в 9 классе.
28. Методика изучения степени в основной школе.
29. Методика изучения линейных уравнений и неравенств в 7—8 классах.
30. Методика изучения квадратных уравнений и неравенств в 8—9 классах.

31. Методика изучения дробно-рациональных уравнений и неравенств.

32. Логическое строение школьного курса планиметрии.

33. Методика изучения аксиом.

34. Методика изучения треугольников.

35. Методика изучения окружности.

36. Методика изучения многоугольников.

37. Методика изучения равенства геометрических фигур в школьном курсе геометрии (общий взгляд на тему; определение понятий равенства отрезков, углов, треугольников в систематическом курсе геометрии; аксиома существования треугольника, равного данному).

38. Методика изучения признаков равенства треугольников (методика изучения конкретного признака равенства треугольников, обучение решению задач с помощью признаков равенства треугольников).

39. Методика изучения движений.

40. Методика изучения подобия.

41. Методика изучения векторов (координатная форма).

42. Методика изучения векторов (геометрическая форма).

43. Методика изучения координат в школьном курсе планиметрии.

44. Аксиоматический подход к изучению геометрических величин.

45. Изучение площади многоугольников по учебнику А.В. Погорелова.

46. Изучение площади многоугольников по учебнику Л.С. Атанасяна.

47. Методика изучения длины окружности и площади круга.

*Третий вопрос экзамена — методика решения конкретной задачи из курса алгебры или планиметрии.*

### **Задания для творческого саморазвития**

Задания можно выполнять по любой теме программы курса «Теория и методика обучения математике».

1. Разработайте урок индивидуальной работы.

2. Опишите организацию сотрудничества учащихся и учителя при подготовке и проведении:

- урока изучения нового материала;
- урока закрепления изученного;

- урока совершенствования умений;
- урока консультации;
- урока подготовки к контрольной работе;
- урока контроля и проверки знаний;
- урока обобщения.

По каждому виду уроков продумайте следующие формы их проведения:

- урок — конференция;
- урок — круглый стол;
- урок — решения одной проблемы;
- урок — лабораторная работа;
- урок — семинар;
- урок — лекция.

3. Ситуация считается проблемной, когда учащиеся осознают недостаточность знаний для ответа на поставленный вопрос и стремятся к приобретению новых знаний. Разработайте проблемную ситуацию и пути выхода из нее.

4. Проанализируйте, какие методы обучения учащихся вам более удаются, а какие вызывают трудности. Попробуйте объяснить причины удач и затруднений.

5. Разработайте пути осуществления обратной связи на уроке.

6. Опишите организацию опережающего обучения.

7. Продумайте организацию обучения, ориентированного на взаимообучение учащихся.

8. Продумайте урок (уроки), ориентированный на творчество учащихся:

- одного класса;
- разновозрастных классов;
- классов одной параллели.

9. Приведите примеры нестандартных, на ваш взгляд, уроков.

10. Разработайте задания для индивидуальной работы с учащимися на уроке.

11. Разработайте задания для дифференцированной работы с учащимися.

12. Разработайте задания для репродуктивной самостоятельной работы. Преобразуйте их в задания для вариативной самостоятельной работы.

13. Разработайте задания для дидактической игры.

14. Разработайте задания для контрольного тестирования.

15. Разработайте задания для использования перфокарт.

16. Разработайте задания для работы с микрокалькулятором.

17. Разработайте задания для работы с компьютером.

18. Разработайте задания для математического диктанта.
19. Разработайте творческие задания для учащихся.
20. Предложите нестандартные задания для учащихся.
21. Изготовьте многофункциональное наглядное пособие и опишите методику его использования.
22. Выделите типичные математические ошибки. Разработайте систему заданий для их предотвращения и ликвидации.
23. Предложите пути учета успеваемости учащихся и ее изменения.
24. Выделите типичные методические ошибки. Разработайте систему заданий для их предотвращения и ликвидации.
25. Разработайте методические задания, ориентированные на творчество учителя.
26. Предложите темы курсовых работ.
27. Разработайте сценарий видеофильма.
28. Разработайте компьютерную программу обучения математике.
29. Разработайте компьютерную программу по курсу теории и методики обучения математике.
30. Предложите свою форму проведения занятия по теории и методике обучения математике.

# **ПРОГРАММА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СТАРШИХ КЛАССАХ**

## **III семестр**

### **Планы лекций**

#### ***Методика изучения алгебры и начал анализа***

##### ***Тема 1. Методика изучения функций в старших классах (4 ч)***

###### ***План:***

1. Развитие функциональной линии в старших классах.
2. Методическая схема изучения функций в старших классах и способы обоснования их свойств.
3. Методика изучения тригонометрических функций.
4. Методика изучения показательной функции.
5. Развитие линии тождественных преобразований в старших классах и методика изучения логарифмов.

***Литература:*** [7], [8], [11], [15], [41], [59], [75].

##### ***Тема 2. Методика изучения производной (4 ч)***

###### ***План:***

1. Предел и непрерывность функции — основные понятия математического анализа.
2. Возможные подходы к введению понятия производной.
3. Использование определения для нахождения производной отдельных функций, для вывода правил дифференцирования.
4. Методика изучения сложной функции и ее производной.
5. Закрепление понятия производной при решении функциональных уравнений, неравенств.
6. Применение производной:
  - к исследованию функций;
  - для составления уравнения касательной;
  - к приближенным вычислениям.
7. Виды физических задач, решаемых с помощью производной.

8. Схема решения задач на наибольшее и наименьшее значение с применением производной.

**Литература:** [7], [15], [41], [75], [69] Гл. XVII, § 5,6; [71] Гл. 9, § 29—32; [98] § 22.

### **Тема 3. Методика изучения первообразной и интеграла (4 ч)**

#### **План:**

1. Методика формирования понятия первообразной.
2. Понятие криволинейной трапеции и вычисление ее площади как приращения первообразной.
3. Методика введения интеграла как предела интегральной суммы.
4. Геометрический смысл интеграла и формула Ньютона-Лейбница.
5. Методика обучения вычислению площадей криволинейных фигур.
6. Применение интеграла к вычислению объемов тел.

**Литература:** [7], [15], [41], [75]; [48], 1982, № 3; [69], Гл. XVII, § 7; [74], Гл. 9, § 33; [98].

## **Планы практических занятий**

### **Часть 1. Методика изучения тригонометрии**

**Цели:** Раскрыть методику изучения основных содержательных линий тригонометрии (тождественные преобразования тригонометрических выражений, тригонометрические уравнения и неравенства, тригонометрические функции и их графики). Познакомиться с проблемами учащихся при изучении тригонометрии и наметить пути их преодоления:

- систематизация в 10 классе тригонометрического материала, изученного в основной школе;
- обучение анализу тригонометрических выражений, уравнений и неравенств с целью поиска решения;
- соблюдение этапов изучения тригонометрических формул, получаемых из тригонометрических тождеств;
- соблюдение базовых методик (методика формирования понятий, методика формирования умений, методика изучения теорем).

*Освоить методику работы с некоторыми тригонометрическими заданиями: «Упростить выражение», «Доказать тождество», «Решить уравнение или неравенство», «Исследовать свойства тригонометрических функций элементарными средствами и построить график функции».*

### **Тема 1. Методика изучения тригонометрических понятий, тригонометрических тождеств и тригонометрических функций**

#### **План:**

#### **Задание 1. Осваиваем методику изучения основных тригонометрических понятий**

1. Определите последовательность изучения тригонометрического материала в курсе геометрии основной школы и составьте список вопросов для его повторения. Используя Приложение 37, расскажите, как можно мотивировать изучение тригонометрических понятий в курсе геометрии основной школы в следующей последовательности:

- признаки равенства прямоугольных треугольников;
- однозначность построения прямоугольных треугольников по двум определенным элементам;
- возможность нахождения всех остальных элементов прямоугольного треугольника по двум заданным;
- тригонометрические понятия как характеристика связи между сторонами и углами прямоугольного треугольника;
- необходимость исследования соотношений в произвольном треугольнике;
- введение тригонометрических понятий для углов от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ .

2. Используя Приложение 38, ответьте на следующие вопросы:

- Каково назначение раздела «Проверка готовности» по учебнику М.И. Башмакова [16]?
- Как соответствует содержание этого раздела содержанию выделенных вами вопросов для повторения?
- Какова организация урока-повторения по этим вопросам? Рассмотрите два варианта: 1) повторение осуществляется до начала изучения тригонометрических вопросов в 10 классе, 2) повторение осуществляется внутри темы (используйте [75, § 7]).

3. Используя Приложение 39, раскройте методику изучения радианной меры угла в 10 классе.

4. Раскройте методику изучения числовой окружности по учебнику [75, С. 5—24] и охарактеризуйте значимость такого подхода при изучении тригонометрии.

**Контрольное задание.** Раскройте методику введения тригонометрических определений в 10 классе.

**Задание 2. Осваиваем методику изучения тригонометрических тождеств**

1. Охарактеризуйте общую методику изучения тригонометрических тождеств:

- выделите три подхода к обоснованию тригонометрических тождеств [15, С. 151] и составьте математическую карту взаимосвязи всех тригонометрических тождеств;
- охарактеризуйте доказательство одного из тождеств в каждом из трех случаев (работа по подгруппам).

2. Повторите схему работы с тождествами [65, с. 64—65] и покажите ее реализацию на примере выбранного тождества.

3. Изучите примерную схему анализа тригонометрического выражения и поиска способа его преобразования и покажите ее применение при выполнении следующих заданий:

а) Упростите:  $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha},$

б) Доказать тождество:

$$(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)^2 = 1.$$

*Схема анализа условия и поиска способа преобразования тригонометрического выражения*

*Анализ условия*

- Какие алгебраические операции производятся над тригонометрическими функциями?
- Какие тригонометрические функции входят в данное выражение, одинаковые ли аргументы у этих функций или разные? Какова связь между рассматриваемыми тригонометрическими функциями?

*Поиск способа преобразования тригонометрического выражения*

- Какие алгебраические преобразования можно было бы применить? Что это дает? Как поступить дальше?
- Какие тригонометрические формулы можно применить? Что это дает? Как поступить дальше?

**Задание 3. Учимся исследовать функцию элементарными средствами**

1. Перечислите этапы исследования функции и раскройте суть каждого этапа.

2. Перечислите способы построения графика тригонометрической функции.

3. Исследуйте функцию элементарными средствами и постройте ее график:  $y = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 3$ .

**Литература:** [6]; [7]; [8]; [11]; [15]; [41]; [90]; [48] — 1982, № 1, с. 71; 1993, № 2, с. 75—77; 1993, № 3, с. 12—15; 1994, № 2, с. 25—26; 1995, № 5, с. 20—21.

**Тема 2. Методика изучения тригонометрических уравнений и неравенств****План:****Задание 1. Осваиваем методику изучения аркфункций**

1. Выясните роль и место изучения аркфункций в действующих учебниках для 10—11 классов.

2. Используя Приложение 40, рассмотрите следующие подходы введения определений арксинуса, арккосинуса, арктангенса: геометрический; словесный; аналитический.

3. Составьте план-конспект второго урока по этой теме, предусмотрев использование диагностического задания, связанного с умением вычислять значения аркфункций.

**Задание 2. Осваиваем методику обучения решению тригонометрических уравнений**

1. Разработайте урок-лекцию по изучению простейшего тригонометрического уравнения  $\sin x = a$ . Выделите основные этапы доказательства и обобщите их для случая любого другого простейшего тригонометрического уравнения.

**План лекции**

1. Сообщить идею применения графического метода для вывода формул (можно с использованием графика, а можно с использованием единичной окружности).

2. Выделить и рассмотреть случаи:

- когда уравнение не имеет решений;
- основной случай;
- частные случаи.

3. Подвести итоги.

2. Охарактеризуйте методы решения тригонометрических уравнений.

3. Продумайте организацию помощи ученику при выполнении следующего задания:

*Найдите все решения уравнения  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = \frac{3}{2}$  на*

*отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .*

**Задание 3. Осваиваем методику обучения учащихся решению тригонометрических неравенств**

1. Изучите схемы решения тригонометрических неравенств (Приложение 41) и составьте упражнения на отработку шагов этих схем.

2. Разработайте фрагмент урока по объяснению решения простейшего тригонометрического неравенства:  $\sin x \leq \frac{1}{2}$  (Приложение 41).

**Литература:** [6]; [7]; [8]; [11]; [15]; [41]; [90]; [48] — 1987, № 3, С. 8—17; 1992, № 6, С. 17—18; 1993, № 3, С. 12—15; 1995, № 2, С. 23—33; 1995, № 3, С. 12—13.

Видеофильм «Тригонометрические неравенства».

## **Часть 2. Методика изучения функций в старших классах**

**Цели:** Раскрыть методическую схему изучения функций в старших классах и методику обучения учащихся решению показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

### **Тема 3. Методика изучения показательной и логарифмической функций в старших классах**

**План:**

**Задание 1. Осваиваем методику изучения показательной и логарифмической функций**

1. Составьте математическую карту, отражающую связь показательной и логарифмической функций. Используя Приложение 42, охарактеризуйте методическую схему изучения этих функций.

2. Разработайте методику изучения логарифмической функции:
  - введение определения логарифмической функции;
  - изучение свойств логарифмической функции (по определению логарифма);
  - построение графика логарифмической функции (по точкам).
3. Охарактеризуйте изучение логарифмической функции через понятие обратной функции.

**Задание 2. Осваиваем методику обучения учащихся решению логарифмических и показательных уравнений и неравенств**

1. Заполните таблицу на с. 81 по решению показательных уравнений и выясните, какие изменения следует внести в эту таблицу при работе с показательными неравенствами.

2. Разработайте аналогичные таблицы по решению логарифмических уравнений, логарифмических неравенств.

**Контрольное задание.** Сформулируйте алгоритмы решения показательных (логарифмических) уравнений и неравенств и разработайте специальные упражнения для отработки отдельных шагов алгоритмов.

3. Продумайте основные ошибки учащихся при решении показательных и логарифмических неравенств:

- приводимых к одному основанию;
- решаемых заменой переменной.

Предложите пути их предотвращения.

4. Продумайте организацию помощи ученику при выполнении следующего задания:

• Решите уравнение:  $x^{\log_2 x + 4} = 32$

• Решите неравенство:  $\frac{1}{4} \cdot x^{2^{\frac{1}{2} \log_2 x}} \geq 2^{\frac{1}{4} \log_2^2 x}$

**Литература:** [7]; [15]; [41]; [59]; [48] — 1996, № 6, С. 3—4; 1982, № 2, С. 78; 1983, № 1, С. 34; 1988, № 4, С. 50—53, 1996, № 2, С. 37—39; 1996, № 4, С. 11—12; 1981, № 3, С. 22—24; 1995, № 3, С. 31—33.

### **Часть 3. Методика изучения начал анализа**

**Цели:** Раскрыть методику изучения двух содержательных линий курса математики старших классов (производная, интеграл) и характер системы упражнений по этим содержательным линиям.

| Признаки показательного уравнения                                                                               | Виды показательных уравнений                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Способ решения | Пример из школьного учебника |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|------------------------------|
| Уравнение содержит только операции умножения, деления, возведения в степень и не содержит операций в общем виде | <p>Да <math>a^{f(x)} = a^{g(x)}</math> (1)</p> <p>Нет</p> <p>Приводятся к одному основанию</p> <p>Да <math>a^{f(x)} = a^{g(x)}</math> (2)</p> <p>Нет <math>a^{f(x)} = b</math> (3)</p> <p>Приводятся к одному показателю</p>                                                                                                                                                                                              |                |                              |
| Уравнение содержит алгебраическое сложение степеней                                                             | <p>Да <math>A_0 a^{f(x)+a} + \dots + A_n a^{f(x)+n} = M(4)</math></p> <p>Нет</p> <p>Показатели степеней имеют одинаковую буквенную часть</p> <p>Да <math>A_0 a^x + A_1 a^2 b^2 + A_2 b^x</math> (5)</p> <p>Нет</p> <p>Приводятся к одному основанию</p> <p>Да</p> <p>Уравнение однородное</p> <p>Нет</p> <p>Выделить одинаковую степень и ввести новую переменную</p> <p>Попытаться найти специальные способы решения</p> |                |                              |

*Познакомиться с особенностями работы при изучении начал анализа в старших классах: привлечение графической наглядности и интуитивных представлений учащихся о математических понятиях начал анализа, перевод наглядно-интуитивных представлений на формально-логический язык и обратно, осуществление взаимосвязей с курсами физики и геометрии, учет мировоззренческого характера материала.*

*Освоить методику работы с некоторыми видами математических заданий: «Найти значение производной в некоторой точке», «Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график», «Решить текстовую задачу на наибольшее или наименьшее значение», «Вычислить площадь криволинейной фигуры», «Найти объем тела с помощью интеграла».*

*Познакомиться с модульной технологией обучения. Суть ее в том, что каждый ученик индивидуально работает по специально составленным учебным текстам. В них весь материал разбит на блоки (модули) изучения нового, тренажа, и предусмотрен промежуточный и итоговый контроль в различных формах (отчет учителю, консультанту, самопроверка по решебникам, взаимопроверка и др.).*

#### **Тема 4. Методика изучения производной в курсе средней школы (4 ч)**

##### ***План:***

**Задание 1. Осваиваем методику введения понятия производной и методику изучения правил вычисления производных**

1. Используя Приложение 43, изучите вариант учебных материалов модульной технологии по введению производной на основе физической задачи с последующей геометрической интерпретацией. Составьте свой вариант учебных материалов по введению производной на основе геометрической задачи с последующей физической интерпретацией.

2. Выполните лабораторную работу № 3 [15, С. 323]. Разработайте организацию проведения данной лабораторной работы в классе.

3. Разработайте учебные материалы для учащихся по модульной технологии по теме «Правила вычисления производных».

**Задание 2. Осваиваем методику исследования функции с помощью производной**

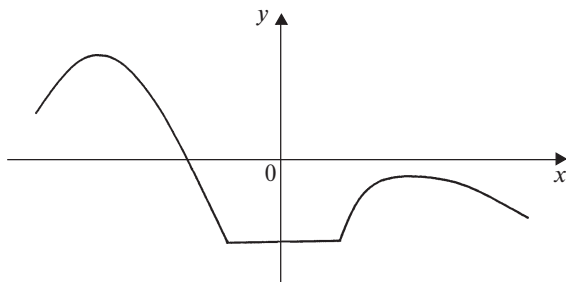
1. Сравните определения понятия «критическая точка» и формулировку достаточного условия возрастания (убывания) функции

в действующих школьных учебниках, справочниках и вузовских учебниках.

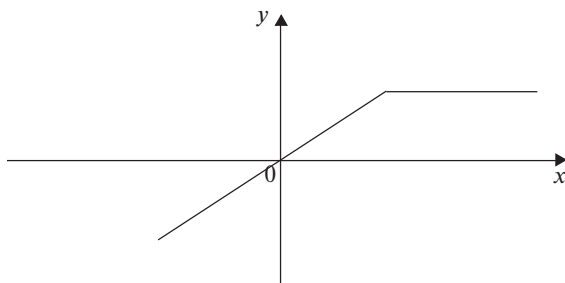
2. Разработайте лекцию по теме «Исследование функции на монотонность и экстремумы с помощью производной» по учебнику [22].

3. Составьте и решите задачи аналогичные предложенным:

*По эскизу графика функции  $f$  постройте эскиз графика ее производной  $f'$ .*



*По эскизу графика производной  $f'$  восстановите график функции  $f$ .*



4. Выделите типовые задания на исследование функций с помощью производной и покажите методику работы со следующим заданием:

*Исследуйте функцию и постройте ее график  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$  [15,*

*С. 119, № 39].*

**Задание 3. Изучаем иные применения производной**

1. Выделите типовые задания на применение производной:

- для приближенных вычислений;
- для составления уравнения касательной;
- для решения физических задач.

2. Покажите оформление задач на наибольшее и наименьшее значение на основе стереометрической задачи: *Из кружка жести радиуса  $R$  вырезается сектор и из оставшейся части и делается коническая воронка. При какой величине угла вырезанного сектора объем воронки будет наибольшим?*

**Литература:** [7], [15], [48]: 1982, № 3, С. 26—31; 1983, № 1, С. 10—14; С. 14—19; 1983, № 4, С. 60—67; 1983, № 5, С. 40—43; 1984, № 3, обложка; 1984, № 2, С. 21—22; 1988, № 3, С. 21; 1988, № 4, С. 55—56; 1988, № 5, С. 28; 1989, № 4, С. 66—67; 1991, № 2, С. 16; 1992, № 1, С. 30; 1993, № 1, С. 29—30; 1993, № 3, С. 15—20; 1994, № 5, С. 16—17; 1994, № 6, С. 25—27; 1994, № 6, С. 13—17; 1996, № 4, С. 11—12; 1998, 36, С. 18—21.

### **Тема 5. Методика изучения первообразной, криволинейной трапеции и интеграла**

#### **План:**

#### **Задание 1. Осваиваем методику изучения первообразной**

1. Составьте математическую карту по теме «Первообразная».

2. Раскройте методику изучения первообразной:

- разработайте опорный конспект по введению понятия первообразной и покажите фрагмент урока с его использованием;
- определите виды задач для усвоения понятия первообразной;
- подготовьте фронтальный опрос по таблице первообразных;
- выделите виды задач, связанных с первообразной, и составьте алгоритмы их решения.

**Контрольное задание.** Раскройте методику доказательства одного из правил вычисления первообразной.

#### **Задание 2. Осваиваем методику изучения криволинейной трапеции и интеграла**

1. Проанализируйте фрагмент конспекта урока по теме «Площадь криволинейной трапеции» (Приложение 44). Предложите иные варианты введения и усвоения определения криволинейной трапеции.

2. Выполните лабораторную работу № 9 [15]. Разработайте организацию проведения данной лабораторной работы в классе.

3. Разработайте фрагмент справочника для поступающих в вузы по теме «Интеграл». Продумайте использование этого справочника на уроках.

4. Проверьте правильность решения:

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-2} = \ln|x-2| \Big|_0^3 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2.$$

5. На примере задачи № 372 [7] (а) *выведите формулу объема шарового сегмента радиуса  $R$  и высоты  $H$* ; б) *выведите формулу объема усеченного конуса высотой  $H$  с радиусами оснований  $R$  и  $r$* ) покажите применение интеграла для вычисления объемов.

**Литература:** [7]; [15]; [41]; [71], гл. 9, § 33; [48] — 1982, № 5, С. 10—15; 1986, № 1, С. 49—53; 1994, № 5, С. 25—27; 1985, № 1, С. 49; 1981, 34, С. 63—65; 1976, № 6, С. 15—18; 1986, № 3, С. 24; 1988, № 2, С. 15; 1989, № 3, С. 30—37.

### Контрольная работа по теме

#### «Методика изучения пункта по курсу алгебры и начал анализа»

**Цели:** Проверить умение студентов осуществлять перенос общей методики изучения основных содержательных линий школьного курса алгебры и начал анализа, а также некоторых технологических приемов на не рассматриваемый на занятиях материал.

С этой целью предлагаются следующие темы:

1. Производная тригонометрических функций (п. 17) [7].
2. Иррациональные уравнения (п. 33) [7].
3. Производная логарифмической функции (п. 42) [7].
4. Степенная функция (п. 43) [7].

**Контрольная работа предусматривает выполнение следующих заданий:**

1. Выполните анализ пункта.
2. Составьте опорный конспект теоретического материала с его дешифровкой.
3. Разработайте учебные материалы по модульной технологии.
4. Разработайте фрагмент справочника для поступающих в вузы.
5. Составьте план-конспект урока закрепления с элементами диагностики.
6. Перечислите общие рекомендации по изучению пункта, исходя из того, к какой содержательной линии относится тема.

## Планы лабораторных работ

### **Методика обучения учащихся решению стереометрических задач**

#### **Лабораторная работа № 1**

#### **Методика работы с отдельной стереометрической задачей**

***Цели:** Повторить этапы деятельности при решении математических задач. Выяснить основные трудности, появляющиеся у учащихся при анализе условия задачи, при построении стереометрического чертежа и поиске решения. Раскрыть методику использования опорных задач в стереометрии, разработать методику работы с отдельной стереометрической задачей.*

#### **План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2.** Знакомимся с этапами работы со стереометрической задачей

Рассмотрите методику решения стереометрической задачи (Приложение 47). Определите:

- этапы работы над задачей и обсудите суть каждого этапа;
- ключевые вопросы для анализа условия задачи;
- последовательность построения чертежа и нанесения данных;
- метод, которым осуществлен поиск решения задачи;
- оформление схемы поиска решения этой задачи.

**Задание 3.** Знакомимся со схемами нанесения на чертеж заданных углов и расстояний

1. Осуществите взаимопроверку определений следующих понятий:

- угла между прямой и плоскостью;
- угла между плоскостями;
- угла между скрещивающимися прямыми;
- расстояние от точки до прямой;
- расстояние от точки до плоскости;
- расстояние между скрещивающимися прямыми;
- расстояние между прямой и параллельной плоскостью;
- расстояние между параллельными плоскостями.

Покажите, что большинство из перечисленных понятий может быть использовано в задаче со следующим условием: *Из вершины прямоугольника построен перпендикуляр к его плоскости.*

2. Используя Приложение 46, познакомьтесь со схемами нанесения на чертеж заданных углов и расстояний. Продемонстрируйте

схемы на следующих задачах учебника [90]: § 18 № 38 (угол между прямой и плоскостью); § 18 № 45 (угол между плоскостями); § 20 № 6 (угол между скрещивающимися прямыми); § 17 № 52 (расстояние от точки до прямой); § 20 № 5 (расстояние между скрещивающимися прямыми), § 19 № 19 (расстояние между скрещивающимися прямыми).

3. Решите задачу: *Через вершину прямого угла  $C$  прямоугольного треугольника  $ABC$  проведена плоскость, параллельная гипотенузе, на расстоянии 1 м от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 м и 5 м. Найдите гипотенузу (№ 27, § 17, [90]).* Какие ошибки могут допустить ученики при построении чертежа? Какая наглядность может предотвратить эти ошибки?

Выберите, на ваш взгляд, наиболее удобный порядок выполнения чертежа:

а) Начать построение с плоскости — начать построение с треугольника.

б) Плоскость расположить горизонтально — плоскость расположить не горизонтально.

в) Треугольник расположить под плоскостью — треугольник расположить над плоскостью.

**Задание 4.** Используя Приложение 48, познакомьтесь с опорными задачами стереометрии. Продумайте организацию работы на уроках стереометрии с использованием опорных задач (когда и как формулируется опорная задача, надо ли ее доказывать, как ее использовать при решении задач).

**Контрольное задание.** Разработайте методику работы со следующей задачей:

*Основанием пирамиды является правильный треугольник; одна из боковых граней перпендикулярна основанию, а две другие наклонены к нему под углом  $\alpha$ . Как наклонены к плоскости основания боковые ребра? (№ 43 § 19, [90]).*

Сформулируйте опорные задачи, необходимые для ее решения. Сравните свои формулировки опорных задач с Приложением 48.

## Лабораторная работа № 2

### Методика работы с задачным материалом темы (на примере темы «Перпендикулярность в пространстве»)

**Цели:** *Выяснить основные трудности, которые возникают у учащихся при доказательстве перпендикулярности двух прямых; повторить методику анализа задачного материала темы; познакомиться с технологией создания комплексов задач на основе единой*

конструкции; разработать вариант организации урока, на котором используются укрупненные дидактические единицы (комплексы задач); рассмотреть связи задачного материала с предыдущими и последующими темами стереометрии, связи планиметрических и стереометрических задач.

### План:

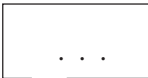
**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

### **Задание 2. Осваиваем способы доказательства перпендикулярности прямых в пространстве**

1. Охарактеризуйте суть следующих способов доказательства — *перпендикулярность прямых*:

- следует из определения перпендикулярности прямой и плоскости,
- и плоскости предварительно доказываем с использованием соответствующего признака,
- доказывается с использованием теоремы о трех перпендикулярах,
- следует из перпендикулярности соответствующих плоскостей.

2. Для доказательства перпендикулярности прямых 

и  с использованием теоремы о трех перпендикулярах

можно использовать следующий трафарет:

Рассмотрим плоскость  $\alpha$  — ..... и прямую ,

лежащую в плоскости  $\alpha$

(главный перпендикуляр)  $\dots \perp \alpha$  (по .....)

$\left[ \begin{array}{c} \text{наклонная} \\ \text{проекция} \end{array} \right] \dots \perp \dots$   (.....)  $\left. \vphantom{\left[ \begin{array}{c} \text{наклонная} \\ \text{проекция} \end{array} \right] \dots \perp \dots} \right\} \Rightarrow$

$\left[ \begin{array}{c} \text{проекция} \\ \text{наклонная} \end{array} \right] \dots$    $\dots \perp \dots$   (по теореме

о трех перпендикулярах)

Составьте шаблоны, которые можно использовать для других способов доказательства перпендикулярности двух прямых в пространстве.

3. Покажите применение составленных трафаретов при решении задач со следующим условием: *Из вершины прямоугольника построен перпендикуляр к его плоскости.*

**Задание 3. Осваиваем технологию создания комплексов задач на базе геометрической конструкции**

1. Повторите схему анализа задачного материала темы (Приложение 49) и проанализируйте задачный материал темы «Перпендикулярность в пространстве». Перечислите задачи, связанные с геометрической конструкцией: *Из вершины прямоугольника построен перпендикуляр к его плоскости.*

2. На базе геометрической конструкции (*из вершины прямоугольника построен перпендикуляр к его плоскости*) создайте укрупненную дидактическую единицу (комплекс задач), соблюдая следующие этапы:

I. Выделяется ключевая информация из данного условия — информация, лежащая в основе решения всех задач с данной конструкцией.

Выделите ключевую информацию из данного условия (*из вершины прямоугольника построен перпендикуляр к его плоскости*) и сравните свой ответ со следующим: «В данной конструкции все образовавшиеся треугольники являются прямоугольными».

Сформулируйте **задание 1** для учащихся, связанное с этой информацией, и сравните свой ответ со следующим: «Из вершины  $A$  прямоугольника  $ABCD$  построен перпендикуляр  $AK$  к его плоскости. Назовите образовавшиеся прямоугольные треугольники и обоснуйте свой выбор».

II. Создается серия вычислительных задач.

1) **Задача преобразуется в вычислительную с открытым условием или заключением.**

Составьте **задание 2**, закончив предложение: «Что нужно знать, чтобы найти...?», так, чтобы учащиеся смогли сформулировать условие, аналогичное задаче:

*Через вершину  $A$  прямоугольника  $ABCD$  проведена прямая  $AK$ , перпендикулярная его плоскости. Расстояние от точки  $K$  до других вершин прямоугольника равны 6 м, 7 м и 9 м. Найдите отрезок  $AK$  (№ 7, § 17, [90]).*

Продумайте возможные ответы учащихся на **задание 2**.

2) **Изменяются числовые данные (возможно обобщение) и добавляются новые вопросы.**

Составьте **задание 3**, закончив предложение: «Изменится ли план решения задачи, если: а) ... (изменяются числовые данные), б) ... (добавляется новый вопрос)?», так, чтобы помочь учащимся сформулировать задачу, аналогичную задаче:

*Из вершины прямоугольника восстановлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин прямоугольника равны  $a$ ,  $b$  и  $c$  ( $a < c$ ,  $b < c$ ). Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата. (№ 42, § 17, [90]).*

**3) Рассматривается частный случай фигуры.**

Составьте **задание 4**, в котором учащиеся формулируют задачу, аналогичную задаче:

*Из вершины квадрата восстановлен перпендикуляр к его плоскости. Расстояния от конца этого перпендикуляра до других вершин квадрата равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Найдите длину перпендикуляра и сторону квадрата (№ 41, § 17, [90]).*

**III. Преобразуется геометрическая конструкция.**

Составьте **задание 5**, в котором преобразуется чертеж так, чтобы выполнялось условие: *из вершины острого угла прямоугольного треугольника построен перпендикуляр к его плоскости*. Включите в задание задачу с открытым заключением так, чтобы помочь учащимся сформулировать задачу, аналогичную задаче:

*Через вершину острого угла прямоугольного треугольника  $ABC$  с прямым углом  $C$  проведена прямая  $AD$ , перпендикулярная плоскости треугольника. Найдите расстояние от точки  $D$  до вершин  $B$  и  $C$ , если  $AC = a$ ,  $BC = b$ ,  $AD = c$ . (№ 8, § 17, [90]).*

3. Назовите темы курса планиметрии, которые используются при решении задач составленной укрупненной дидактической единицы (УДЕ).

4. Разработайте развернутый план урока, на котором используется составленная УДЕ (комплекс).

**Задание 4.**

1. Проанализируйте задачи № 14, 15, 16, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 56, 57 и покажите, что в каждой из них следует уметь выделять следующую геометрическую конструкцию: через концы отрезка и одну из его точек проведены прямые, перпендикулярные данной плоскости, причем:

- а) отрезок может не пересекать плоскость,
- б) отрезок может пересекать плоскость,
- в) один конец отрезка может лежать в другой плоскости.

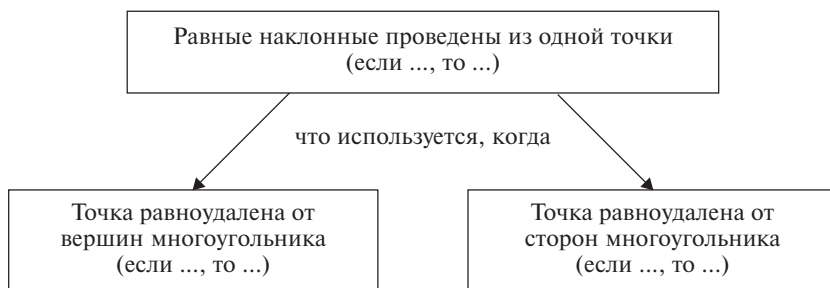
2. Сравните эту геометрическую конструкцию со следующей, которая используется в теме «Параллельность в пространстве»: «Через концы отрезка и одну из его точек проведены параллельные

прямые до пересечения с плоскостью», и предложите ее использование при демонстрации связей между темами «Параллельность в пространстве» и «Перпендикулярность в пространстве». Используя Приложение 48, укажите опорную задачу для решения задач с данной геометрической конструкцией.

**Контрольное задание.** Составьте укрупненную дидактическую единицу, в которой использовалось бы как можно больше перечисленных выше задач темы «Перпендикулярность в пространстве».

**Задание 5. Осваиваем технологию создания комплексов задач на основе опорных задач**

1. Сформулируйте опорные задачи (прямые и обратные) по каждому пункту схемы, а затем проверьте себя, используя Приложение 48:



2. Укажите номера задач § 17 [90], в которых используются эти опорные задачи, и на их основе составьте комплекс с прямыми и обратными задачами. Какие темы из планиметрии требуются для его решения?

3. Подберите или составьте задачи, связанные с пирамидой, в которых используются опорные задачи о проекции вершины пирамиды (Приложение 48, задачи 8 и 9).

### Лабораторная работа № 3

#### Методика обучения учащихся решению стереометрических задач на построение сечений многогранников плоскостью

**Цели:** Ознакомиться с основами решения задач на построение сечений многогранников плоскостью. Выделить виды задач на построение сечений и описать методику ведения диалога при построении сечений.

**План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Обсуждаем основы решения задач на построение сечений**

Ответьте на вопросы.

1. Что называется сечением многогранника плоскостью?  
2. Какие из перечисленных утверждений могут использоваться при построении сечений (верные утверждения подтвердите рисунками задач на построение):

а) если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку;

б) если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, пересекает другую плоскость, то она пересекает линию пересечения плоскостей;

в) если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны;

г) секущая плоскость пересекает грань многогранника по ломаной линии;

д) в сечении четырехугольной призмы плоскостью может получиться:

- отрезок;
- треугольник;
- четырехугольник;
- пятиугольник;
- шестиугольник;
- семиугольник;

е) вершины сечения многогранника плоскостью могут лежать не на ребрах многогранника;

ж) если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости;

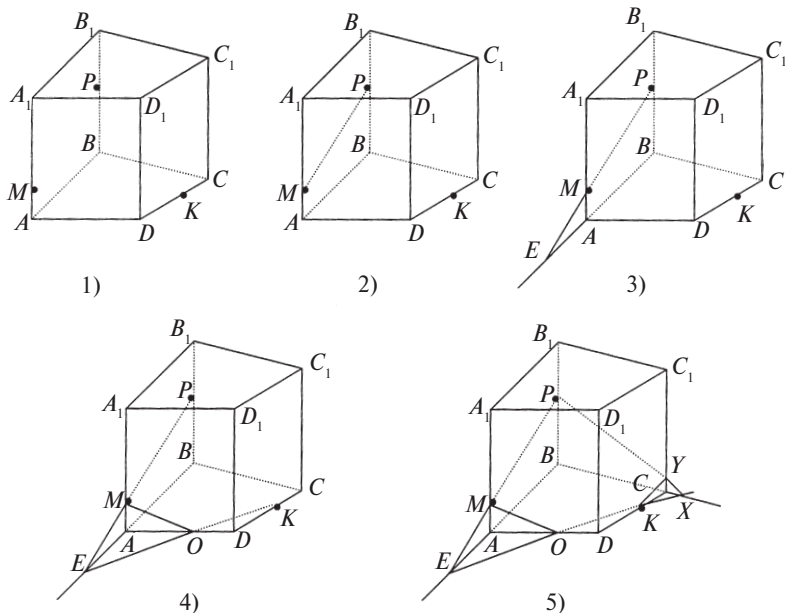
з) секущая плоскость однозначно может быть задана следующими данными:

- тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- прямой и не лежащей на ней точкой;
- прямой  $a$  и условием параллельности секущей плоскости заданной прямой  $b$  (рассмотреть различные случаи расположения прямых).

Проверьте себя, используя Приложение 51 и Приложение 52.

**Задание 3. Осваиваем 1-й вид задач на построение сечений**

1. Используя рисунки, создайте серию кодопозитивов (компьютерных слайдов) для демонстрации процесса построения сечения призмы плоскостью, для случая, когда среди трех данных точек есть две, лежащие в одной грани.



Ответьте на вопросы:

- Почему сначала работали с точками  $M$  и  $P$ ?
- Зачем понадобилась точка  $E$ ?
- Почему для построения точки  $E$  продолжали именно ребро  $AB$ ?
- Почему необходимо выделять точку  $O$ ?
- Можно ли точку  $Y$  построить, используя прямую  $MO$  и точку  $K$ ?

2. Разработайте упражнения, связанные с пирамидой, для формирования следующих умений:

- указывать грань, в которой лежит заданная точка,
- указывать точки, лежащие в одной грани,
- указывать линию пересечения граней,
- строить точку пересечения данной прямой с плоскостью заданной грани.

Продемонстрируйте составленные упражнения с помощью кодоскопа (компьютера).

*Замечание.* Упражнения, связанные с призмой смотри в пособии [74].

**Контрольное задание.** Используя Приложение 51, на своем примере раскройте этапы работы с задачей на построение сечений многогранников плоскостью, проходящей через три заданные точки, среди которых есть две, лежащие в одной грани.

**Задание 4. Осваиваем 2-й вид задач на построение сечений**

1. Ознакомьтесь со схемой решения задач на построение сечений многогранников плоскостью, проходящей через три заданные точки, среди которых нет двух, лежащих в одной грани (Приложение 51).

2. Разработайте методику решения следующей задачи с использованием дополнительной плоскости:

*Дана призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Построить сечение плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $P$  и  $K$  такие, что  $M \in BB_1 C_1 C$ ,  $P \in AA_1 B_1 B$ ,  $K \in CC_1 D_1 D$ .*

3. Решите эту же задачу с использованием двух дополнительных плоскостей (одна проходит через точки  $P$  и  $K$ , другая через  $M$  и  $D_1$ ) и объясните, почему в этом случае говорят о методе внутреннего проектирования.

4. Решите задачу:

*Дана призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Построить сечение плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $P$  и  $K$  такие, что  $M \in AA_1 D_1 D$ ,  $P \in A_1 D_1$ ,  $K \in BB_1 C_1 C$ .*

Какие трудности могут испытывать учащиеся при решении этой задачи? Каковы возможные пути преодоления этих трудностей? Можно ли использовать дополнительную плоскость в этой задаче? Можно ли использовать метод внутреннего проектирования в этой задаче?

**Задание 5. Осваиваем 3-й вид задач на построение сечений**

1. Выберите из школьных учебников по геометрии задачи на построение сечений многогранников плоскостью, если секущая плоскость проходит:

- а) параллельно заданной прямой;
- б) параллельно заданной плоскости.

2. Разработайте методику обучения учащихся решению следующей задачи:  $DABC$  — тетраэдр,  $P \in AB$ ;  $DE$  — медиана грани  $CDB$ . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки  $C$  и  $P$  параллельно  $DE$ .

В случае затруднений, воспользуйтесь Приложением 52.

## Лабораторная работа № 4

## Методика обучения учащихся решению стереометрических задач на комбинацию тел

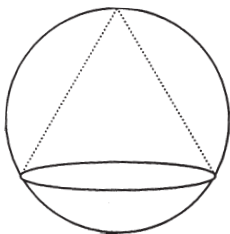
**Цели:** Познакомиться с анализом системы стереометрических задач на комбинацию тел; выделить всевозможные комбинации тел, изучающиеся в школьном курсе геометрии; сформировать комплексы задач по различным комбинациям; раскрыть организацию и методику обучения решению одного из комплексов таких задач, используя наглядность.

**План:**

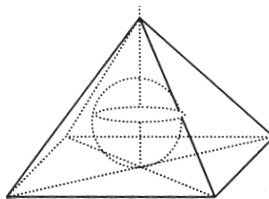
**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Осваиваем построение чертежа**

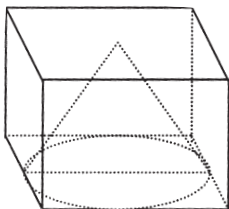
1. Укажите ошибки построения на следующих рисунках:



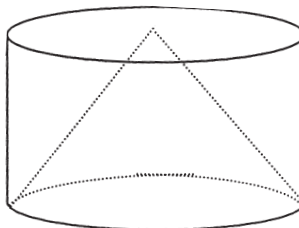
1) конус, вписанный в шар



2) шар, вписанный  
в правильную четырехугольную  
пирамиду



3) конус, вписанный в прямой  
параллелепипед, в основании  
которого ромб



4) конус, вписанный в цилиндр

Рассмотрите всевозможные комбинации тел, изучаемых в школьном курсе геометрии (призма, пирамида, конус, цилиндр, сфера), сделайте чертежи и укажите номера соответствующих задач школьных учебников.

**Задание 3. Создаем комплекс задач, связанный с комбинацией тел**

1. Составьте альбом серии задач, связанной со сферой и вписанной в нее правильной треугольной пирамидой, если известны сторона основания пирамиды и радиус описанной сферы.

Для этого *составьте*:

- а) задание с открытым заключением;
- б) обратные задачи;
- в) новые задачи, изменив данные по пирамиде.

2. Сформулируйте опорные задачи, необходимые для решения составленных Вами задач. Сравните свои формулировки опорных задач с Приложением 53.

3. Предложить организацию и методику работы с составленным альбомом.

4. Составьте альбомы серий задач, связанных со сферой и вписанной в нее правильной четырехугольной (шестиугольной) пирамидой.

**Задание 4. Формируем представление о теле, полученном при вращении плоской геометрической фигуры вокруг заданной оси**

1. Опишите тело, образованное вращением:

- прямоугольного треугольника около внешней оси, параллельной катету;
- трапеции около оси, проходящей через вершину большего основания перпендикулярно к нему.

Подберите или изготовьте наглядные пособия к этим телам.

2. Составьте свои задания на описание тел вращения.

### **Лабораторная работа № 5** **Координаты и векторы в пространстве**

**Цели:** *Ознакомиться с последовательностью изучения темы «Векторы и координаты» на плоскости и в пространстве; соотнести изученные ранее на геометрическом языке понятия с их интерпретацией на векторном и координатном языках и познакомиться с доказательством каждой из формул; проанализировать различные варианты организации самостоятельной работы учащихся по изучению этих доказательств; выделить виды задач по теме и описать методику работы с задачей, связанной с уравнением геометрического места точек.*

**План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Осваиваем методику изучения основных формул темы**

1. Сравните порядок изучения темы «Координаты и векторы» в учебниках [11], [12] и [90]. Выясните, как эта последовательность отражается на изучении действий над векторами в пространстве.

2. Заполните таблицу векторных и координатных формул в пространстве:

| Геометрический язык                                                                           | Векторный язык | Координатный язык |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------|-------------------|
| Длина отрезка                                                                                 |                |                   |
| Величина угла                                                                                 |                |                   |
| $a \parallel b$                                                                               |                |                   |
| $a \perp b$                                                                                   |                |                   |
| Точки $A, B$ и $C$ принадлежат прямой $a$                                                     |                |                   |
| Точка $C$ принадлежит отрезку $AB$ , где $AC : CB = m : n$ (делит отрезок в данном отношении) |                |                   |

3. Оформите письменно доказательство каждой из формул.

4. Предложите способы организации работы по самостоятельному их изучению учащимися.

5. Разработайте содержание раздела «Проверка готовности» к теме «Декартовы координаты и векторы в пространстве» в виде обучающих заданий по работе с учебником.

**Задание 3. Осваиваем методику обучения решению основных задач темы**

1. Выделите основные виды задач по темам «Векторы и координаты» на плоскости. Определите, добавляются ли новые виды задач при изучении этих тем в пространстве, каковы схемы решения основных задач темы.

2. Покажите методику решения задачи координатным методом:

*Даны две точки  $A$  и  $B$ . Найдите множество всех точек, для каждой из которых расстояние от точки  $A$  в два раза больше расстояния от точки  $B$  (№ 981, [11]).*

Рассмотрите два варианта работы: 1) с осуществлением поиска решения задачи, 2) с составлением плана решения задач рассматриваемого вида, опираясь на решение, представленное в учебнике.

### **Лабораторная работа № 6** **Координатный и векторный методы доказательства теорем и решения задач**

**Цели:** Ознакомиться с основами решения геометрических задач векторным и координатным методами; выделить умения, которыми должны овладеть учащиеся и разработать упражнения, способствующие формированию этих умений; рассмотреть возможности использования векторного и координатного методов при доказательстве теорем; показать методику работы с задачей.

**План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Осваиваем методику формирования умения решать задачи координатным и векторным методами**

1. Используя Приложение 54 и Приложение 55, выделите основные умения, которыми должны овладеть учащиеся, чтобы решать задачи:

- а) координатным методом;
- б) векторным методом.

2. Составьте упражнения, способствующие формированию перечисленных умений.

**Задание 3. Применяем координатный и векторный методы при доказательстве теорем и решении задач**

1. Выделите теоремы школьного курса геометрии, которые доказываются или могли бы доказываться векторным или координатным методом. Приведите примеры доказательств.

2. Решите задачу тремя методами (координатным, векторным, геометрическим) и покажите методику работы с ней, используя каждый из методов:

*Докажите, что угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых содержит диагональ куба, а другая — диагональ грани куба, равен  $90^\circ$  (№ 471 [12]).*

3. Изучите по журналу «Математика в школе» (1981, № 4, С. 69) пять способов решения следующей задачи: *Дан равнобедренный прямоугольный треугольник  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Построен отрезок  $CC_1$  ( $C_1 \in AB$ ), перпендикулярный медиане  $AA_1$ . Найдите отношение  $BC_1 : C_1A$ .*

Решите задачу координатным методом.

Составьте план урока одной задачи с применением различных методов ее решения (Приложение 50).

**Контрольное задание.** Пройдите тест по методике обучения учащихся решению задач в курсе математики средней школы (Приложение 56).

### Вопросы к зачету по методике преподавания алгебры и начала анализа

1. Развитие функциональной линии в старших классах.
2. Развитие линии тождественных преобразований в старших классах.
3. Развитие линии уравнений и неравенств в старших классах.
4. Алгоритмы решения показательных уравнений (неравенств).
5. Алгоритмы решения логарифмических уравнений (неравенств).
6. Основные вопросы изучения производной в школьном курсе математики.
7. Основные вопросы изучения интеграла в школьном курсе математики.
8. Методика работы со стереометрической задачей.
9. Опорные задачи по стереометрии и методика их использования.
10. Виды и схемы решения задач на построение сечений многогранников плоскостью. Методика ведения диалога с учащимися при построении сечений.
11. Схемы решения задач координатным и векторным методом. Виды задач, решаемых этими методами.
12. Технология составления диагностического задания, связанного с некоторым математическим умением.
13. Технология составления комплекса стереометрических задач на основе геометрической конструкции, на основе опорной задачи.
14. Технология составления учебного модуля для учащихся.

## IV семестр

### Планы лекций

#### **Методика изучения стереометрии**

##### **Тема 1. Логическое строение школьного курса стереометрии**

###### **План:**

1. Основные трудности в изучении стереометрии и пути их преодоления.
2. Основные содержательные линии стереометрии и ее основные разделы.
3. Логическое строение школьного курса стереометрии по учебнику [90] и [9].
4. Методика изучения аксиом стереометрии.
5. Методика изучения следствий из аксиом.
6. Методика работы с задачами § 15 [90].

**Литература:** [9]; [12]; [44]; [90].

##### **Тема 2. Методика изучения темы «Параллельность в пространстве»**

###### **План:**

1. Основные разделы темы, основные вопросы каждого раздела и методика их изучения.
2. Методика изучения параллельности прямой и плоскости.
3. Параллельная проекция и ее свойства.

**Литература:** [9]; [12]; [44]; [90]; [48] — 1985, № 1, С. 44.

##### **Тема 3. Методика изучения темы «Перпендикулярность в пространстве»**

###### **План:**

1. Основные разделы темы, основные вопросы каждого раздела и методика их изучения.
2. Методика изучения признака перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Методика изучения теоремы о трех перпендикулярах и ее использование.
4. Значение темы для решения задач.

**Литература:** [9]; [12]; [44]; [90]; [48] — 1985, № 2, С. 25—28.

#### **Тема 4. Методика изучения многогранников**

##### **План:**

1. Основные вопросы изучения геометрических фигур (определение, элементы, свойства, признаки, построение, виды, измерения).
2. Три представления о многогранниках (каркасное, поверхностное и как тело).
3. Методика введения понятия многогранника и его основных элементов.
4. Виды многогранников и методика изучения одного из них:
  - введение определения и основных элементов на ниточной модели (по учебнику [90]),
  - построение на проекционном чертеже, свойства основных элементов и их доказательство,
  - вычисление площади поверхности.

**Литература:** [9]; [12]; [44]; [90].

#### **Тема 5. Методика изучения тел вращения**

##### **План:**

1. Виды тел вращения и методика изучения одного из них:
  - введение определения и основных элементов на ниточной модели [90],
  - построение на проекционном чертеже,
  - свойства основных элементов и их доказательство,
  - сечения тел вращения.
2. Использование аналогии с многогранниками для цилиндра и конуса, с кругом для шара.
3. Демонстрация возникновения тел вращения при вращении плоских фигур.

**Литература:** [9]; [12]; [44]; [90].

#### **Тема 6. Геометрические величины в школьном курсе стереометрии (площади поверхности и объемы)**

##### **План:**

1. Изучение площади поверхности тел вращения через вписанные и описанные многогранники.
2. Аксиоматическое изучение объемов тел, использование аналогии с изучением площади.
3. Различные способы вывода формулы объема пирамиды.

**Литература:** [9]; [12]; [44]; [90].

## Планы практических занятий

### Методика изучения стереометрии

**Цели:** Освоить базовые методики изучения математики на стереометрическом материале. Раскрыть методику изучения основных содержательных линий школьного курса стереометрии (геометрические фигуры и их свойства, параллельность и перпендикулярность в пространстве, геометрические построения, измерения геометрических величин) и характер системы стереометрических задач по этим содержательным линиям. Продолжить знакомство с особенностями работы при изучении геометрии (дедуктивный характер изложения, использование аксиоматического метода, метода от противного, использование наглядности с целью развития пространственных представлений и др.). Познакомиться со способами мотивации при изучении стереометрии.

#### Тема 1. Логическое строение школьного курса стереометрии

##### План:

##### Задание 1. Знакомимся с аксиоматическим методом в стереометрии

1. Ответьте на вопросы:

- В чем сущность аксиоматического метода?
- В чем состоит отличие аксиоматики Л.С. Атанасяна от аксиоматики А.В. Погорелова (от аксиоматики А.Д. Александрова, от аксиоматики В.А. Гусева)?

2. Продемонстрируйте логическое строение школьного курса стереометрии:

- на понятии скрещивающихся прямых («Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися» [90, 239], «Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости» [12, 15]);
- на теореме о задании плоскости тремя точками, не лежащими на одной прямой [90].

##### Задание 2. Осваиваем методику изучения понятия плоскости и аксиом стереометрии

1. Раскройте методику введения неопределяемого понятия «плоскость» по следующему плану:

- мотивация,
- наглядное представление плоскости с помощью моделей,

- способы изображения плоскости,
  - обозначение плоскости с помощью букв греческого алфавита.
2. Ответьте на вопросы:
- О чем идет речь в каждой из аксиом стереометрии учебника [90], и как каждая аксиома характеризует плоскость?
  - Какие **выводы** можно сделать, если будет известно, что некоторая точка лежит в каждой из двух различных плоскостей?
  - Известно, что две плоскости пересекаются. Какая фигура является их пересечением? Сколько прямых пересечения могут иметь две различные плоскости?
  - Известно, что точка  $A$  является общей для двух плоскостей. На каких фигурах лежит эта точка?
  - Какие фигуры надо задать, чтобы через них можно было провести плоскость?
3. Раскройте методику изучения аксиомы о плоскостях, имеющих общую точку по следующему плану:
- мотивация (можно указать необходимость изучения взаимного расположения двух плоскостей),
  - введение (наглядное представление аксиомы, формулировка, построение чертежа), краткая запись:

$\alpha$  и  $\beta$  — различные,  $A \in \alpha, A \in \beta$   
1)  $\alpha \cap \beta = a$ , 2)  $A \in a$

- усвоение с помощью вопросов: «О каких фигурах идет речь?», «Что утверждается в аксиоме?»,
- подведение итогов (Приложение 45).

**Задание 3. Осваиваем методику изучения первых теорем стереометрии**

1. Изучите методику работы над теоремой о задании плоскости с помощью прямой и не принадлежащей ей точки (теорема 15.1, учебник [90]), используя Приложение 45.

Ответьте на вопросы:

- Как мотивируется теорема?
- Как поясняется формулировка теоремы и, в частности, слова «можно провести»?
- Каким методом осуществляется поиск доказательства существования плоскости?
- Как мотивируется выбор точки на прямой и необходимость проведения прямой через выбранную точку?

- Как подводятся итоги доказательства существования плоскости?
- Как поясняется необходимость доказательства единственности построения плоскости, хотя о единственности идет речь в аксиоме  $C_3$ ?
- Как мотивируется метод доказательства единственности?
- Как мотивируется обращение к аксиоме  $C_2$  при доказательстве единственности?
- Как оформлено доказательство теоремы?
- Как осуществлено обобщение теорем о существовании и единственности?
- Как осуществлено усвоение теоремы?

2. Раскройте доказательство теоремы 15.2 [90, С. 234], выделив два этапа:

- 1) построение дополнительной плоскости;
- 2) определение взаимного расположения этой плоскости с другими данными фигурами.

Приведите примеры задач и теорем, где можно выделить эти же этапы.

3. Составьте вопросы, связанные с методикой изучения теоремы о принадлежности прямой плоскости в учебнике [90], предложите свои варианты ответов.

**Задание 4. Осваиваем методику обучения решению задач на основе аксиоматического метода**

1. Выделите в § 15 учебника [90] следующие группы задач:
  - Задачи, в условии которых ключевыми являются слова «можно ли...». Какими методами они решаются?
  - Задачи, в условии которых ключевыми являются слова «все... лежат в одной плоскости». Какова схема решения таких задач, как она может быть составлена учащимися?
  - Задачи, в которых идет речь о четырех точках, не лежащих в одной плоскости. Составьте на их основе комплекс задач и покажите методику работы с ним.
2. Переформулируйте задачу № 5 так, чтобы в ней не участвовали обозначения прямых, раскройте роль этой задачи при изучении параллельности в пространстве и при решении задач на построение сечений.
3. Какие вопросы из задания 2 могут помочь при работе с задачами № 3 § 15 учебника [90]? (*Точки  $A, B, C$  лежат в каждой из двух различных плоскостей. Докажите, что эти точки лежат на одной прямой.*)

**Литература:** [12]; [90]; [50].

## **Тема 2. Методика изучения темы «Параллельность в пространстве»**

### **План:**

#### **Задание 1. Устанавливаем связи между изучением параллельности в планиметрии и стереометрии**

1. Разработайте раздел «Проверки готовности» к изучению темы «Параллельность в пространстве» в одном из вариантов:
  - 1) В виде беседы с одновременным созданием математической карты по теоретическому материалу темы «Параллельность в планиметрии».
  - 2) В виде тест-заданий по теме «Параллельность в планиметрии».
  - 3) В виде комплексного задания, использующего как можно больше различных теоретических фактов по теме «Параллельность в планиметрии».
2. Продумайте возможности использования аналогии при изучении темы «Параллельность в пространстве». Для этого:
  - подберите примеры аналогичных определений, формулировок теорем, задач в планиметрии и стереометрии,
  - найдите в стереометрии задачу, аналогичную следующей:  
*Докажите, что если некоторая прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Разработайте методику работы с найденной задачей, используя аналогию при формулировании задачи и при ее решении.

3. Охарактеризуйте основные разделы тем «Параллельность на плоскости» и «Параллельность в пространстве» и основные вопросы каждого раздела (определение, возможность построения, признаки, свойства).

#### **Задание 2. Осваиваем методику изучения взаимного расположения фигур в пространстве**

1. Сравните два определения параллельных прямых:
  - Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.
  - Две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.Какое из этих определений не исключает случая совпадения параллельных прямых?
2. Сравните два определения скрещивающихся прямых:
  - Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются скрещивающимися [90, С. 239].
  - Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости [12, С. 15].

Какое из этих определений является избыточным?

3. Подготовьте фрагмент урока по изучению взаимного расположения прямых в пространстве.

Предложите использование схемы изучения взаимного расположения прямых в пространстве при изучении взаимного расположения прямой и плоскости, двух плоскостей.

### **Задание 3. Осваиваем методику изучения теорем-признаков**

1. Разработайте методику изучения признака параллельности прямых: *две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны* [90, С. 240]. Продумайте мотивацию каждого шага доказательства (обоснованность дополнительных построений, обращение к той или иной теореме или аксиоме и т. д.).

2. **Контрольное задание.** Разработайте методику изучения признака скрещивающихся прямых: *Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются* [12, С. 15].

3. Раскройте основные идеи доказательства признака параллельности прямой и плоскости, признака параллельности плоскостей.

### **Задание 4. Осваиваем методику обучения учащихся решению задач по теме «Параллельность в пространстве»**

1. Разработайте методику работы с задачей:

*Через концы отрезка  $AB$  и его середину  $M$  проведены параллельные прямые, пересекающие некоторую плоскость в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $M_1$ . Найдите длину отрезка  $MM_1$ , если отрезок  $AB$  не пересекает плоскость и если:  $AA_1 = 5$  м,  $BB_1 = 7$  м [90, § 16, № 5].*

Создайте комплекс задач, включающий эту задачу.

2. Охарактеризуйте основные виды задач на построение в стереометрии:

- а) задачи на воображаемое построение;
- б) задачи на проекционном чертеже:
  - с использованием свойств параллельной проекции,
  - на построение сечений.

Найдите в школьных учебниках примеры задач на построение каждого вида. Какие теоремы темы «Параллельность в пространстве» связаны с воображаемым построением?

3. Разработайте методику работы со следующей задачей:

*Пусть  $A_1B_1C_1D_1$  — проекция ромба  $ABCD$  на плоскость  $\alpha$ ,  $M_1$  — проекция точки  $M$ , лежащей на стороне  $BC$ . Постройте проекцию  $M_1N_1$  перпендикуляра  $MN$ , опущенного из точки  $M$  на диагональ  $BD$ .*

**Литература:** [9]; [12]; [90]. МШ, 2—96, С. 59.

**Видеофильм:** «Параллельность прямых в пространстве».

### Тема 3. Методика изучения темы «Перпендикулярность в пространстве»

#### План:

#### Задание 1. Осваиваем связи между темами «Параллельность» и «Перпендикулярность»

1. Разработайте раздел «Проверки готовности» к изучению темы «Перпендикулярность в пространстве» в различных вариантах (см. тему 2, задание 1).
2. Заполните пропуски в краткой записи формулировок теорем, отражающих связь параллельности и перпендикулярности.

|                                              |                                               |                              |                                       |
|----------------------------------------------|-----------------------------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| Дано:<br>$a \parallel b$<br>$a \perp \alpha$ | Дано:<br>$a \perp \alpha$<br>$b \perp \alpha$ | Дано:<br>?                   | Дано:<br>?                            |
| Доказать:<br>?                               | Доказать:<br>?                                | Доказать:<br>$a \perp \beta$ | Доказать:<br>$\alpha \parallel \beta$ |

Сформулируйте эти теоремы. Укажите теоремы, аналогичные данным в планиметрии. Сформулируйте утверждения о параллельности и перпендикулярности для трех плоскостей. Истинны ли они?

3. Сравните основные разделы тем «Параллельность в пространстве» и «Перпендикулярность в пространстве», охарактеризуйте основные вопросы каждого раздела темы «Перпендикулярность в пространстве» (определение, признак, возможность построения).

#### Задание 2. Осваиваем методику изучения основных понятий темы

1. Сравните два определения перпендикулярных прямых:

- Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом [90, С. 252].
- Две прямые называются перпендикулярными, если угол между ними равен  $90^\circ$  [12, С. 36].

В чем существенное отличие этих двух определений? Как это отражается при изучении других видов перпендикулярности?

2. Раскройте логико-математическую структуру следующих определений:

- Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым [90, С. 260].

- Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен  $90^\circ$  [12, С. 52].

3. Подготовьте фрагмент урока по введению определения перпендикулярных плоскостей по учебникам [90], [12] (работа по группам).

### **Задание 3. Осваиваем методику изучения основных теорем темы**

1. Изложите основные идеи доказательства признака перпендикулярности прямой и плоскости, используя наглядность, демонстрирующую поэтапность построения чертежа, по учебникам [90], [12], [23].

Какие проблемы могут возникнуть при замене учителем, работающим по одному учебнику, доказательством данного признака из другого учебника. Например:

Доказательства данного признака по учебнику [90] доказательством по учебнику [12].

Доказательства данного признака по учебнику [12] доказательством по учебнику [23].

2. Раскройте методику работы с признаком перпендикулярности плоскостей по учебнику [90].

3. Раскройте роль теоремы о трех перпендикулярах.

### **Задание 4. Осваиваем методику обучения учащихся решению задач по теме «Перпендикулярность в пространстве»**

1. Проанализируйте систему упражнений § 1, 2 главы II учебника [12] № 116—165.

2. Выделите комплексы взаимосвязанных задач.

**Литература:** [9]; [12]; [90]; [23].

**Видеофильм:** «Урок-семинар».

## **Тема 4. Методика изучения темы «Многогранники»**

### **План:**

### **Задание 1. Осваиваем подготовительную работу учителя к изучению темы**

1. Проведите сравнительный анализ изучения видов многогранников по учебникам [12], [90] и составьте математические карты «Изучение многогранников».

2. Подготовьте обобщающий урок по теме «Многогранники» (рассмотрите различные формы работы, используйте наглядность). Предусмотрите единый план ответа учащихся по каждому

виду многогранников. Составьте комплексы задач по каждому многограннику.

3. Оформите решение контрольной работы [48, 1996, № 5, С. 67—68] по теме «Многогранники».

Выделите основные умения, необходимые для решения задач контрольной работы и формируемые в изучаемой теме.

Подберите или составьте серию задач на отработку выделенных умений.

Опишите структуру урока-подготовки к контрольной работе и организацию на каждом этапе.

**Задание 2. Осваиваем методику изучения одного из многогранников**

1. Разработайте план-конспект урока лекции на тему «Призма» по учебнику [12], выделив:

- введение определения на моделях;
- элементы и их свойства;
- построение чертежа;
- площадь поверхности;
- виды призм.

Как изменится работа учителя на уроке, если в учебнике [90]:

- используется иное определение призмы;
- на изучение призмы отведено 7 пунктов.

2. Охарактеризуйте следующие виды задач по теме «Призма» из § 19 учебника [90]:

- на вычисление элементов призмы (высоты, бокового ребра, диагонали);
- на построение сечений призмы плоскостью, вычисление площади сечения;
- на вычисление площади поверхности призмы;
- на доказательство;
- задачи повышенной сложности.

3. Раскройте изучение объемов многогранников по следующей схеме:

- введение свойств объемов по аналогии со свойствами площадей;
- последовательность изучения объемов в разных учебниках;
- объем параллелепипеда (продумать организацию самостоятельного изучения теоремы с использованием учебника).

Подберите или составьте дифференцированные задачи по теме «Объемы многогранников».

***Литература:*** [9]; [12]; [90].

## Тема 5. Методика изучения темы «Тела вращения»

### План:

#### **Задание 1. Осваиваем методические связи в изучении тел вращения**

Охарактеризуйте виды тел вращения, изучаемых в школьном курсе стереометрии, и следующие методические особенности их изучения:

- соблюдение единого плана изучения (определение, элементы, построение на проекционном чертеже, свойства элементов и их доказательство, основные сечения);
- использование аналогии с многогранниками (для цилиндра и пирамиды), с кругом (для шара);
- возникновение тел вращения при вращении плоских фигур;
- роль тел вращения в практической жизни.

#### **Задание 2. Осваиваем методику изучения цилиндра**

1. Проанализируйте теоретический материал темы «Цилиндр» и заполните возможный вид доски при изучении данной темы.

*Вид доски*

#### Цилиндр (от греческого валик, каток)

| Элементы       | Свойства элементов | Обоснование |
|----------------|--------------------|-------------|
| 1.<br>2.<br>3. |                    |             |

#### Сечения цилиндра

| Параллельно основанию | Через ось | Параллельно оси |
|-----------------------|-----------|-----------------|
| Рисунок               |           |                 |
| Свойства сечений      |           |                 |

Цилиндр — фигура, полученная при вращении ...

Охарактеризуйте составление этого конспекта на уроке-лекции с элементами беседы по теме «Цилиндр».

2. Составьте комплексы задач, связанные со следующими геометрическими конструкциями:

- в цилиндре проведено осевое сечение;
- в цилиндре проведено сечение, параллельное его оси;
- в цилиндре проведено сечение, параллельное его основанию.

(Для выполнения задания проанализируйте задачный материал как школьных учебников, так и дополнительных задачников.)

3. Раскройте методику изучения:

- объема цилиндра;
- площади поверхности цилиндра.

### **Задание 3. Осваиваем методику изучения шара**

1. Разработайте методику организации групповой работы при изучении теорем по теме «Шар» [90].

2. Вернитесь к лабораторной работе «Методика обучения решению стереометрических задач на комбинацию тел» и охарактеризуйте основные этапы этой методики.

3. Выберите задачу из вступительных экзаменов в ВУЗ, связанную с комбинацией тел, и продемонстрируйте методику работы с нею на факультативном занятии.

**Литература:** [13]; [90]; [75].

## **Планы лабораторных работ**

### **Технологии обучения**

#### **Лабораторная работа № 1**

#### **Группы технологий обучения учащихся**

**Цели:** *Познакомиться с различными группами технологий обучения, научиться находить примеры технологий, используемых авторами школьных учебников, составлять планы реализации лично-стно ориентированного обучения при организации самостоятельной работы учащихся.*

#### **План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Знакомимся с различиями технологий обучения**

1. Используя Приложение 21, составьте опорный конспект о четырех группах технологий и условиях реализации развивающего и лично-стно ориентированного обучения.

2. Пр продемонстрируйте на примерах учебников [16], [65], [111], [75], какие из следующих технологий обучения используются авторами:

- структурно-логические,
- задачные,
- игровые,
- диалоговые,
- тренинговые.

Покажите на примерах, что в учебниках серии МПИ [31], [32], [33] авторами используются перечисленные технологии.

Выясните, в каких школьных учебниках математики используются компьютерные технологии.

3. Рассмотрите три варианта предъявления задания.

| Вариант 1                                                                                                  | Вариант 2                                                                                                             | Вариант 3                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Постройте графики следующих функций:</p> $y = x^2 + 2x,$ $y = x^2 + 2,$ $y = 2x^2 + x,$ $y = 2x^2 + 1.$ | <p>Составьте квадратичные функции, коэффициентами которых являются числа 0; 1; 2. Постройте графики этих функций.</p> | <p>Составьте квадратичные функции, коэффициентами которых являются числа 0; 1; 2. Постройте графики этих функций. Сколько различных функций у вас получилось? Есть ли параболы, которые можно совместить некоторым перемещением? [37].</p> |

Ответьте на вопросы:

- Какой вариант характерен для традиционного обучения?
- Какие варианты можно использовать в структурно-логических технологиях и почему?
- Какие варианты можно использовать в диалоговых технологиях и почему?
- Какие варианты позволяют устанавливать связи между понятиями?

4. Разработайте или подберите задание, связанное с построением графика квадратичной функции, которое можно было бы использовать в следующих технологиях:

- задачных,
- тренинговых,
- компьютерных,
- игровых.

### **Задание 3. Знакомимся с различиями информационного и личностно ориентированного обучения**

1. Изучите Приложение 58 и объясните, почему в одном случае используется название «информационное обучение», а в другом — «личностно ориентированное обучение».

2. Вернитесь к вариантам предъявления заданий (из задания 2) и определите, в каком из них содержание является личностно ориентированным и почему.

3. Изучите Приложение 63 и покажите, что предложенные варианты введения определений опираются на **субъектный опыт** учащихся, устанавливают связи нового материала с ранее изученным, **мотивируют** деятельность учащихся.

4. Познакомьтесь с конспектами двух последовательных уроков и докажите, что они являются личностно ориентированными (Приложение 66).

### **Задание 4. Осваиваем личностно ориентированную организацию самостоятельной работы учащихся**

1. Изучите Приложение 59 и предложите план организации учителем самостоятельной деятельности ученика N при реализации целей личностно ориентированного обучения учащихся решению задач.

Реализуйте составленный план в следующей ситуации.

| Исходная информация                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Ситуация                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>В классе обсуждались:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Схема работы с любым заданием (анализ условия, поиск решения, решение, исследование).</li> <li>2. Метод замены переменных при решении неравенств.</li> <li>3. Способы решения дробно рациональных неравенств.</li> <li>4. Схема решения простейших показательных неравенств.</li> <li>5. Примеры решения показательных неравенств [15, № 59 (4, 14), С. 226].</li> </ol> | <p>Ученику предложено решить самостоятельно № 59 (16):</p> $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} \leq \frac{5}{3}.$ <p>Опишите организацию самостоятельной деятельности ученика по решению этого задания в случае, если он испытывает затруднение в его решении (предусмотрите различные ситуации и их преодоление).</p> |

Сравните свой вариант выполнения задания с вариантом использования приема запрошенной помощи (Приложение 65).

2. Рассмотрите три группы ситуаций, в каждой группе выберите ситуацию, соответствующую личностно ориентированному обучению, и обоснуйте свой выбор.

**I группа (организация тренажа).**

1) Учитель предлагает ученикам решить около двадцати неравенств второй степени.

2) Учитель предлагает ученикам просмотреть около двадцати заданий, связанных с неравенствами второй степени, и выбрать те, которые кажутся им полезными для выработки умения решать неравенства второй степени.

**II группа (организация контроля).**

1) После решения учениками неравенств, учитель собирает их работы для проверки, указывает ошибки и возвращает ученикам.

2) Учитель предлагает ученикам задание:

*Найдите ошибки в решении неравенств второй степени.*

1.  $x^2 - 2x + 4 > 0$ .

*Решение:*

1.  $a = 1, a > 0 \dots$

2.  $D < 0$ . Трехчлен  $x^2 - 2x + 4$  не имеет действительных корней, ...

*Ответ:*  $\emptyset$ .

2.  $-x^2 - 4x - 4 \geq 0$ .

*Решение:*

$-(x+2)^2 \geq 0$ .

...

*Ответ:*  $\emptyset$ .

3.  $-23x^2 + 69x < 0$ .

*Решение:*

$-23x(x-3) < 0$ ;

$x-3 < 0$ ;

$x < 3$ .

*Ответ:*  $(-\infty; 3)$ .

*Каковы на ваш взгляд причины допущенных ошибок?*

*Составьте задание, в котором были бы показаны наиболее типичные, на ваш взгляд, ошибки при решении неравенств [37].*

**III группа (организация проверки выполнения домашних заданий).**

1) Несколько учеников не смогли справиться с домашним заданием. Учитель на уроке вызывает ученика, справившегося с заданием, и просит его рассказать решение.

2) Несколько учеников не смогли справиться с домашним заданием. Учитель выносит на обсуждение проблемы, с которыми столкнулись эти ученики дома (начали решать, но не смогли закончить; не смогли придумать идею решения и т. д.), и просит учеников, справившихся с заданием, объяснить, как им удалось этих проблем избежать, и какие советы они могли бы дать учащимся, не справившимся с заданием.

## Лабораторная работа № 2

### Адаптивные технологии обучения учащихся

**Цели:** Познакомиться с адаптивными технологиями обучения, научиться их применять на уроке подготовки к контрольной работе.

#### **План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Знакомимся с различиями технологий обучения**

1. Изучите Приложение 24 и составьте вопросы, на которые необходимо ответить учителю при проектировании урока подготовки к контрольной работе с использованием следующих адаптивных технологий:

- технологии полного усвоения,
- технологии разноуровневого обучения,
- технологии КСО.

2. Конкретизируйте свои вопросы при подготовке к контрольной работе по теме «Первообразная и интеграл»:

1) Для функции  $f(x)$  найдите первообразную, график которой проходит через точку А:

$$f(x) = 2x^2 + x, A(1; 1).$$

2) Вычислите интеграл:

$$\text{а) } \int_0^1 (2x^2 + 3)dx, \quad \text{б) } \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x dx.$$

3) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) параболой  $y = (x - 1)^2$ , прямой  $y = x + 1$  и осью  $Ox$ ,

б) графиком функции  $y = \sqrt{x} + 2$ , прямой  $x = 2$  и осями  $Ox$  и  $Oy$  [66, № 5, 1996, С. 64].

**Задание 3. Осваиваем проектирование урока подготовки к контрольной работе**

1. Составьте вопросы, по которым можно **определить готовность учащихся** к выполнению заданий контрольной работы. Предложите организацию проверки готовности к контрольной работе методом статических пар.

2. Для задания по нахождению первообразной заданной функции, график которой проходит через заданную точку, **выделите пошаговые**

**умения**, определите, какие шаги могут быть дифференцированы по уровням, как можно **сформулировать задание для каждого уровня**. Результаты занесите в следующую таблицу:

| Функция              | (1 шаг)<br>..... | (2 шаг)<br>..... | (3 шаг)<br>..... |
|----------------------|------------------|------------------|------------------|
| (1 уровень)<br>..... |                  |                  |                  |
| (2 уровень)<br>..... |                  |                  |                  |
| (3 уровень)<br>..... |                  |                  |                  |
| (4 уровень)<br>..... |                  |                  |                  |

Сформулируйте задание для учащихся, которое соответствует тому уровню, который должен быть достигнут каждым.

Докажите, что составленное вами задание можно использовать в технологии разноуровневого обучения.

3. Предложите организацию работы с составленным вами разноуровневым заданием методом динамических пар.

4. Предложите организацию работы со следующим заданием методом вариационных пар:

*Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:*

*параболой  $y = 2x^2 + x$ ,*

*В. 1. прямыми  $x = 1$ ,  $x = 2$  и осью  $OX$ ,*

*В. 2. осью  $OX$  и прямой  $x = 2$ ,*

*В. 3. осью  $OX$  и прямой  $y = -x + 3$ ,*

*В. 4. прямой  $y = 3x + 4$ .*

5. Сравните традиционный вариант проведения урока подготовки к контрольной работе с вариантом использования:

а) адаптивных технологий на этом уроке,

б) открытой контрольной работы (Приложение 67).

### Лабораторная работа № 3

#### Укрупнение дидактических единиц при обучении математике

**Цели:** Изучить основные положения теории укрупнения дидактических единиц (УДЕ) в обучении математике; выделить возможные направления применения УДЕ при обучении математике; рассмотреть некоторые способы составления УДЕ.

**План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Изучаем основные положения теории УДЕ**

1. Разъясните **понятие УДЕ** как *клеточки учебного процесса, состоящей из логически различных элементов, обладающих в то же время информационной общностью* [110, С. 9]; [112, С. 6], и факторы, обеспечивающие качество укрупненной дидактической единицы (общий графический образ, общность символов для групп формул, наличие одних и тех же слов или словосочетаний в сравниваемых высказываниях, в цепи доказательств).

2. Охарактеризуйте следующие **виды математических упражнений** в теории УДЕ:

- деформированное упражнение [110, С. 50]; [112, С. 31],
- матричное (табличное) упражнение [110, Ч. I, П. 19]; [112, П. 13],
- составное (многокомпонентное) упражнение [110, С. 17]; [112, С. 14].

3. Охарактеризуйте следующие **приемы укрупненного освоения математической информации**:

- совместное и одновременное изучение взаимосвязанных понятий и операций,
- обращение задач (теорем, функций) и сравнение соответствующих суждений в процессе выполнения упражнений,
- составление упражнений, аналогичных решенным,
- обеспечение единства процессов составления и решения задач (уравнений, неравенств и т. п.),
- рассмотрение во взаимопереходах определенных и неопределенных заданий,
- одновременное решение группы взаимосвязанных задач,
- использование в системе упражнений противоположных кодовых переходов мысли (от рисунка к слову и наоборот),
- параллельная запись сравниваемых правил (задач, преобразований),
- двухэтажная запись некоторых аналогичных высказываний [110, С. 10]; [112, С. 7, 187].

**Задание 3. Изучаем примеры УДЕ**

1. Приведите примеры УДЕ различных видов из школьных учебников математики.

2. Выберите какой-нибудь комплекс стереометрических задач, составленных вами, и охарактеризуйте его как укрупненную дидактическую единицу.

3. Охарактеризуйте способы составления УДЕ (Приложение 62).

#### **Задание 4. Изучаем методику УДЕ**

1. Охарактеризуйте методику изучения нового материала, выполнения упражнений и повторения с использованием УДЕ.

2. Разработайте фрагмент урока по теме «Положительные и отрицательные числа» с использованием УДЕ в следующих ситуациях:

- при изучении нового материала,
- при выполнении упражнений,
- при организации повторения.

3. Укажите преимущества и недостатки использования УДЕ на уроках математики и возможные темы эффективного использования УДЕ при изучении нового материала.

### **Лабораторная работа № 4** **Групповая работа на уроках математики**

***Цели:** Освоить методику организации групповой работы на уроках математики при изучении нового, закреплении изученного, обобщении и систематизации.*

#### **План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

#### **Задание 2. Осваиваем методику организации групповой работы**

1. Проанализируйте свой опыт участия в групповой работе и выделите проблемы ее организации. Составьте памятки по организации работы групп. Сравните свой вариант с Приложением 61.

2. Ответьте на вопросы:

- а) Каков оптимальный состав группы?
- б) Какие характеристики учащихся учитель должен учитывать при объединении их в группы?

3. Охарактеризуйте организацию групповой работы (цели, содержание, средства, формы организации и осуществления контроля):

- при изучении нового материала;
- при закреплении изученного;
- при обобщении и систематизации знаний.

**Задание 3. Проектируем групповую работу**

1. Подготовьте проект организации группой работы по темам:
  - «Логарифмические уравнения и неравенства» на уроках обобщения и систематизации знаний (11 класс);
  - «Вписанные и описанные четырехугольники» на уроках изучения нового материала (8 класс).

Для этого:

- а) выполните анализ соответствующих пунктов школьных учебников;
  - б) сформулируйте цели организуемой вами групповой работы;
  - в) продумайте мотивацию проведения групповой работы;
  - г) разработайте задания для групп;
  - д) продумайте способы организации работы каждого члена группы;
  - е) продумайте варианты контроля и быстрой проверки выполнения заданий;
  - ж) продумайте варианты подведения итогов работы групп.
2. Разработайте проект организации групповой работы на уроках закрепления по выбранной вами теме школьного курса.
  3. Продемонстрируйте организацию групповой работы по разработанному вами проекту (деловая игра).

### **Лабораторная работа № 5** **Урок «одной задачи»**

***Цели:** Охарактеризовать организацию урока «одной задачи», описать технологию составления конспекта урока «одной задачи».*

***План:***

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2.** Изучаем теорию и анализируем математическую задачу

1. Охарактеризуйте организацию урока «одной задачи» (цели, содержание, методы обучения, средства, формы проведения и осуществления контроля) [80, С. 97—100]; Приложение 50 [48, № 6, 1990, С. 37].

2. Решите следующую задачу геометрическим, векторным и координатным методами: *Основанием пирамиды  $SABC$  является равносторонний треугольник  $ABC$ , длина стороны которого равна*

$4\sqrt{2}$ . Боковое ребро  $SC$  перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку  $S$  и середину ребра  $BC$ , а другая проходит через точку  $C$  и середину ребра  $AB$ . (Ю.В. Нестеренко и др. Задачи вступительных экзаменов по математике. — М., 1980.)

3. Выделите основные умения и связанные с ними знания, которыми должны владеть учащиеся для решения этой задачи: а) геометрическим, б) векторным и в) координатным методами, заполнив следующую таблицу.

| Метод          | Раздел                      | Умения | Обоснование умений |
|----------------|-----------------------------|--------|--------------------|
| Геометрический | Планиметрия<br>Стереометрия |        |                    |
| Векторный      | Стереометрия                |        |                    |
| Координатный   | Стереометрия                |        |                    |

4. Перечислите достоинства рассмотренной задачи, которые определяют ее выбор для урока «одной задачи».

**Задание 3. Осваиваем технологию проектирования урока одной задачи**

1. Составьте подробный конспект урока «одной задачи», используя предложенную ниже технологическую карту.

**Технологическая карта урока «одной задачи» в 11 классе.**

*Тема урока:*

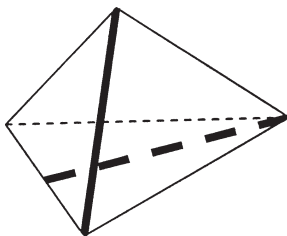
*Цели урока:*

*Ход урока:*

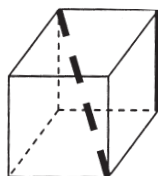
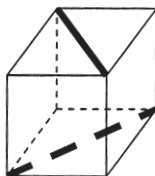
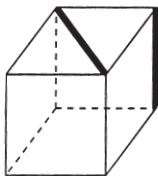
I. Постановка целей урока перед учащимися.

II. Актуализация знаний учащихся через выполнение следующих заданий.

**Задание 1. Отметьте угол между выделенными прямыми.**



**Задание 2.** Найдите расстояние между выделенными прямыми, если ребро куба равно  $a$ .



Продумайте мотивацию выполнения этих заданий, форму предъявления, организацию работы, подведение итогов. При работе с заданиями повторите определение угла между скрещивающимися прямыми, способы нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми (Приложение 46), способы доказательства перпендикулярности прямых.

III. Решение задачи геометрическим методом. (Примените методику работы с отдельной стереометрической задачей [63], С. 93—98.)

**1. Ознакомление учащихся с текстом задачи:** Основанием пирамиды  $SABC$  является равносторонний треугольник  $ABC$ , длина стороны которого равна  $4\sqrt{2}$ . Боковое ребро  $SC$  перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку  $S$  и середину ребра  $BC$ , а другая проходит через точку  $C$  и середину ребра  $AB$ .

(Продумайте форму предъявления условия задачи учащимся.)

**2. Анализ условия задачи, построение чертежа** и разбиение задачи на две части в соответствии с ее требованиями.

(Поставьте вопросы к условию задачи с одновременным построением чертежа на доске, выделите в требовании задачи две части, отметив их в краткой записи словесно.)

| Деятельность учителя       | Выполнение чертежа и краткой записи                               |
|----------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1.<br>2.<br>3.<br>4.<br>5. | <p>Дано:</p> <p>Найти:<br/>1) угол....;<br/>2) расстояние....</p> |



## Решение:

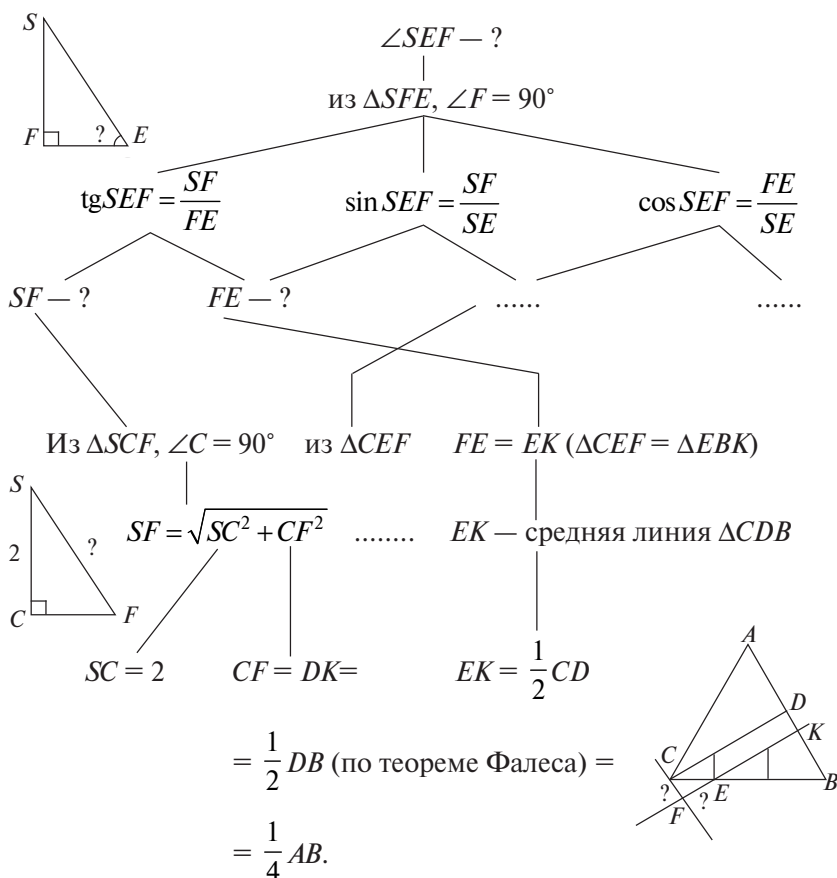
I часть.

1. Построим угол между прямыми  $SE$  и  $CD$ .а)  $MN \parallel CD$ ,  $E \in MN$ ,б)  $\angle \dots$  — искомый.2.  $MN \parallel CD$ ,  $CD \perp AB$ , значит, ...Пусть  $CF \parallel AB$ , тогда  $CF \perp MN$ , значит, ...

(по теореме о трех перпендикулярах).

4. Оформление поиска способа вычисления  $\angle SEF$ .

(Постройте диалог с учащимися с одновременным построением граф-схем поиска решения задачи, заполните предлагаемые граф-схемы и сделайте к ним выносные чертежи.)



5. Составление плана решения задачи по вычислению угла между прямыми  $SE$  и  $CD$ .

(По построенным граф-схемам выберите один из способов вычисления угла  $SEF$ , составьте план нахождения угла  $SEF$ , выделив в граф-схеме соответствующие шаги.)

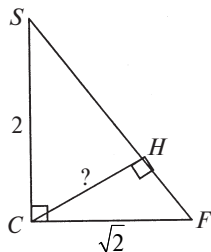
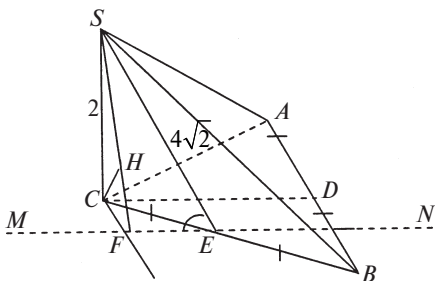
**4. Осуществление решения по нахождению угла между прямыми  $SE$  и  $CD$ .**

(Продумайте запись решения, организацию работы, подведение итогов. В итогах отметьте не только различные способы вычисления нужного угла из одного и того же треугольника, но и метод замены одного отрезка другим, ему равным.)

**5. Поиск способа вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми  $SE$  и  $CD$ .**

1. Построение отрезка, соответствующего расстоянию между скрещивающимися прямыми  $SE$  и  $CD$ .

(Поставьте вопросы по подведению учащихся к тому, что искомое расстояние равно расстоянию от точки  $C$  до плоскости  $SFE$ , после чего отметьте на чертеже соответствующий отрезок  $CH$ , сделайте выносной чертеж и оформите запись построения.)



Часть II.

1. Построим отрезок, соответствующий расстоянию между прямыми  $SE$  и  $CS$ .

а)  $(SFE) \parallel CD$  (по признаку .....),

б) пусть  $CH \perp SF$ , тогда  $CH \perp FE$  (по .....), значит,  $CH \perp (SFE)$

(по .....), следовательно,  $CH$  — искомое расстояние.

2. Обсуждение способов вычисления высоты прямоугольного треугольника, опущенного на гипотенузу.

(По выносному чертежу организуйте поиск нахождения  $CH$ : а) через подобные треугольники, б) через свойство пропорциональных отрезков в прямоугольном треугольнике, в) через использование площади. Оттолкнувшись от способа использования площади треугольника для нахождения его высоты, предложите учащимся способ использования объема пирамиды, для которой  $CH$  является высотой, т. е. пирамиды  $SCEF$ .)

**6. Осуществление решения по нахождению расстояния между прямыми  $SF$  и  $CD$ .**

(Запишите вычисления по нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми разными способами, продумайте организацию этой работы в классе по группам и подведение итогов.)

**IV. Решение задачи по нахождению угла между скрещивающимися прямыми векторными и координатными методами.**

**1. Мотивация методов.**

(Сделайте переход от геометрического метода решения задачи к векторному и координатному методам, отметив трудности, с которыми пришлось столкнуться учащимся при решении задачи геометрическим методом.)

**2. Актуализация знаний.**

(Вспомните схему решения задач векторным (координатным) методом и геометрическую (координатную) формулу нахождения угла между векторами.)

**3. Решение задачи по нахождению угла между скрещивающимися прямыми векторным и координатными методами.**

Организуйте групповую работу учащихся по поиску ответов на следующие вопросы:

- Какие векторы выбрать за основные? (Как выбрать систему координат?)
- Какие векторы надо рассмотреть, чтобы найти угол между прямыми  $SE$  и  $CD$  и как их выразить через основные векторы? (Какие векторы надо рассмотреть, чтобы найти угол между прямыми  $SE$  и  $CD$  и как найти их координаты?)
- Как найти угол между выбранными векторами?

(Предложите вариант контроля деятельности групп: а) по поиску решения и составлению плана решения задачи векторным или координатными методами, б) по оформлению решения.)

**V. Составление плана решения задачи по нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми координатным методом.**

1. Поиск идей вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми координатным методом.

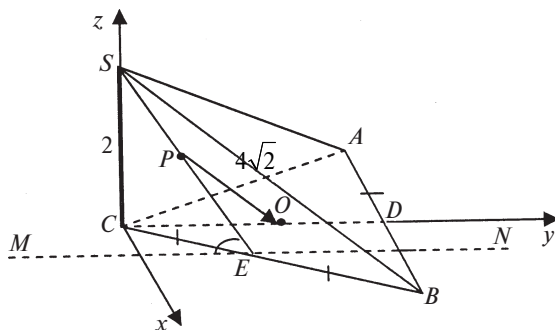
(Вернитесь к способам нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми, обсудите возможность нахождения расстояния от точки  $C$  до плоскости  $SFE$  координатным методом, сообщив учащимся соответствующую формулу, и идею нахождения длины общего перпендикуляра, зная координаты соответствующего вектора.)

2. Составление плана решения задачи по формуле расстояния от точки до плоскости.

(Проанализируйте с учащимися формулу и выясните, что для ее использования необходимо знать уравнение плоскости  $SFE$  и координаты точки  $C$ ; используя аналогию с составлением уравнения прямой по координатам двух ее точек, подведите учащихся к способу составления уравнения плоскости по координатам трех ее точек; запишите план решения задачи.)

3. Составление плана вычисления длины общего перпендикуляра к прямым  $SE$  и  $CD$ .

(Начните с того, что для нахождения длины вектора нужны его координаты, в стереометрии вектор определяется тремя координатами, значит, необходимо найти три условия, связанных с вектором общего перпендикуляра. Два условия получаются из определения общего перпендикуляра: вектор перпендикулярен каждой из заданных прямых, поэтому соответствующие скалярные произведения равны нулю. Но не всякий вектор, перпендикулярный данным прямым, будет соответствовать общему перпендикуляру, поэтому получаем дополнительные условия: начало вектора лежит на одной из данных прямых, а его конец — на другой. Пусть  $P$  — начало соответствующего вектора — лежит на прямой  $SE$ , тогда векторы  $SP$  и  $SE$  будут коллинеарны, а, значит, их координаты будут пропорциональны, пусть коэффициент пропорциональности будет  $\beta$ . Аналогично, вектор  $CQ$  коллинеарен вектору  $CD$ , где  $Q$  — конец вектора общего перпендикуляра, лежащий на прямой  $CD$ , пусть коэффициент пропорциональности координат соответствующих векторов будет  $\beta$ . Вектор  $PQ$  можно выразить по правилу многоугольника через векторы  $PS$ ,  $SC$ ,  $CQ$ , тогда координаты вектора  $PQ$  будут содержать только две неизвестных величины  $\alpha$ ,  $\beta$ . Поэтому двух условий перпендикулярности вектора  $PQ$  заданным прямым будет достаточно. Составьте граф-схему проведенных рассуждений и план вычисления длины общего перпендикуляра координатным методом.)



VI. Подведение итогов урока и постановка домашнего задания.

(Составьте вопросы по итогам урока. Решите задачу по нахождению расстояния между скрещивающимися прямыми координатным методом двумя способами с тем, чтобы: а) можно было дать учащимся комментарий по этому решению, б) иметь возможность дать дифференцированное домашнее задание, в) учесть форму контроля за выполнением домашнего задания на следующем уроке.)

1. Сравните уроки «одной задачи» (разработанный по технологической карте и изложенные в Приложении 48) и ответьте на вопросы:

- Одинаковые ли цели этих уроков?
- Какие еще возможны цели уроков «одной задачи»?
- В чем состоит технология разработки урока «одной задачи»?

### Лабораторная работа № 6 Диагностика в обучении математике

**Цели:** Изучить понятие диагностического задания, познакомиться с различными видами диагностических заданий, технологией их составления и способами организации работы с ними, разработать некоторые диагностические задания по теме «Квадратные уравнения (неравенства)».

**План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

## **Задание 2. Знакомимся с теоретическими основами диагностики на уроках математики**

Используя Приложение 68, охарактеризуйте:

- понятие диагностического задания,
- виды диагностических заданий в зависимости от их назначения (задания для входной, текущей и итоговой диагностики) и технологию их составления,
- требования, предъявляемые к диагностическим заданиям.

## **Задание 3. Разрабатываем диагностические задания**

1. Разработайте задание входной диагностики по теме «Квадратные уравнения» («Неравенства второй степени»). Для этого:

- проанализируйте взаимосвязь данной темы с ранее изученным материалом по содержательной линии «Уравнения (неравенства) и их системы» и выделите **общие умения**, связанные с решением уравнений (неравенств), которые должны входить в субъектный опыт ученика к началу изучения новой темы, чтобы обеспечить успешность ее изучения;
- проанализируйте тему «Квадратные уравнения» («Неравенства второй степени») и выделите **специфические умения**, связанные с решением квадратных уравнений (неравенств второй степени);
- на основе выделенных умений составьте диагностическое задание, включив в него коррекционную часть.

2. Разработайте задание текущей диагностики по теме «Квадратные уравнения» («Неравенства второй степени»). Для этого:

- определите **общие и специфические умения**, которые должны быть сформированы в теме;
- разработайте задание текущей диагностики, предлагаемое после изучения алгоритма решения квадратного уравнения через дискриминант (неравенства второй степени графическим методом), включите в него блок пошаговой диагностики и коррекционную часть.

3. Разработайте задание итоговой диагностики по теме «Квадратные уравнения» («Неравенства второй степени»). Для этого:

- выделите связи, относящиеся к теоретическим основам темы, для составления первого блока диагностического задания;
- выделите особенности темы по отношению к другим темам, относящимся к содержательной линии уравнений (неравенств), для разработки второго блока диагностического задания;

- проанализируйте задачный материал темы и определите варианты комплексного применения знаний по теме для составления третьего блока диагностического задания.

#### **Задание 4. Разрабатываем способы организации диагностической работы на уроках математики**

1. Разработайте организацию проведения входной диагностики по теме «Квадратные уравнения» или «Неравенства второй степени» (предложите несколько вариантов организации работы, продумайте мотивацию проведения диагностической работы и видов предлагаемых заданий, продумайте способ ознакомления учащихся с диагностическими заданиями (на карточках, на доске, на кодоскопе, компьютере и т. п.), способы обработки и анализа результатов диагностики).

2. Разработайте организацию работы с составленным заданием текущей диагностики по теме «Квадратные уравнения» или «Неравенства второй степени» с учетом тех, кто быстро и успешно справился с заданием, и тех, кто нуждается в помощи и коррекции.

3. Разработайте организацию проведения итоговой диагностики по теме «Квадратные уравнения» или «Неравенства второй степени».

### **Лабораторная работа № 7** **Логико-дидактический анализ темы** **«Арифметическая и геометрическая прогрессии»**

***Цели:** Освоить технологию логико-математического анализа темы.*

***План:***

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Осваиваем технологию логико-математического анализа темы**

1. Ознакомьтесь с пятью составляющими логико-дидактического анализа темы [62, С. 166—171].

2. Проведите логико-дидактический анализ темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» [3] по следующему плану:

- 1) По программе по математике выделите цели изучения темы и требования к математической подготовке учащихся по этой теме.

- 2) Выполните логико-математический анализ теоретического материала темы. Для этого выясните:
  - а) какие понятия вводятся, даются ли им определения, каковы связи между этими понятиями;
  - б) какие утверждения изучаются, доказываются ли они, каковы связи между ними;
  - в) какие задачи приведены в теоретической части, какова цель их рассмотрения;
  - г) какой может быть математическая карта темы.
- 3) Выполните анализ задачного материала. Для этого выделите:
  - а) задачи, которые соответствуют обязательным результатам обучения;
  - б) задачи, в которых формулируются важные теоретические утверждения (познавательные задачи);
  - в) группы взаимосвязанных задач:
    - прямые и обратные задания для каждой из прогрессий;
    - по единой основе решения (по определению, по формуле);
    - по единому требованию с варьированием данных задачи (что должно быть известно, чтобы найти 1-й член?  $n$ -й член?).
- 4) Ознакомьтесь с рекомендуемыми контрольными работами [48, 1996, № 5, С. 28] и примерными вариантами самостоятельных работ по этой теме. Выясните, соответствуют ли предложенные работы целям, сформулированным в программе и обязательным результатам обучения.
- 5) Ознакомьтесь с тематическим планированием темы [48, 1996, № 5, С. 26] и разработайте планирование этой темы, заполнив таблицу:

| № | Тема урока | Распределение материала |        | Контроль (укажите виды, способы, формы, средства) |
|---|------------|-------------------------|--------|---------------------------------------------------|
|   |            | в классе                | на дом |                                                   |
|   |            |                         |        |                                                   |

- б) Составьте аннотированный список методической литературы по теме.
3. Ответьте на вопрос: «Что общего в логико-математическом анализе темы и пункта школьного учебника [63, С. 6—12] и чем они отличаются?»

**Лабораторная работа № 8**  
**Организация изучения темы методом крупных блоков**  
**(на примере темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии»)**

***Цели:** Освоить технологию изучения темы методом крупных блоков.*

***План:***

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Осваиваем технологию изучения темы методом крупных блоков**

1. Рассмотрите различные формы работы учителей, используя литературу: [48]: 1987, № 3, С. 8—17; 1986, № 2, С. 18—23; 1987, № 4, С. 16; 1992, № 2—3, С. 20—24; 1988, № 4, С. 47—49 (индивидуальные задания).

2. Спланируйте изучение темы «Арифметическая и геометрическая прогрессии» крупными блоками и разработайте план-конспект учебных занятий следующих видов:

- урок лекция ([95, С. 107]; Приложение 64);
- урок решения ключевых задач [48, 1987, № 4, С. 17]; [52, С. 44—62];
- урок практикум [48, 1990, № 6, С. 37—40; 1987, № 5, С. 25];
- урок коррекции и урок диагностики (Приложение 68);
- урок подготовки к контрольной работе (лабораторная работа С. 36);
- урок анализа контрольной работы [48, 1988, № 3, С. 24; 1989, № 4, С. 65];
- урок семинар (видеофильм «Урок-семинар»; [48], 1987, № 2, С. 9—11; 1989, № 3, С. 30—37; 1987, № 3, С. 9);
- урок обобщения и систематизации знаний ([95], С. 124, [48], 1999, № 5, С. 9—11);
- урок зачет (видеофильм «Урок-зачет по математике»; [48], 1987, № 4, С. 19—20; 1987, № 3, С. 10—11; [52], С. 96—126).

**Лабораторная работа № 9**  
**Углубленное изучение математики**

***Цели:** Познакомиться с организацией углубленного изучения математики.*

**План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанными целями сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Осваиваем технологию изучения темы в углубленном изучении математики**

1. Выполните сравнительный анализ программ курса математики в 9 классе при традиционном ее изучении и при углубленном изучении [48, 1997; № 3 и 5] с целью обоснования места и содержания темы «Числовые последовательности».

2. Составьте аннотации следующих книг и статей: [85]; [99]; [105] с целью их использования при разработке содержания темы «Числовые последовательности». Продумайте формы представления этих книг и статей (это может быть реклама, презентация, рассказ и т. д.).

3. Составьте тематическое планирование изучения темы «Числовые последовательности» при углубленном изучении [48, 1997, № 5, С. 12], продумав различные формы ее планирования.

4. Выполните контрольную работу № 9, вариант 1 [48, 1997, № 5, С. 16]. Определите, чем содержание представленной контрольной работы отличается от содержания контрольной работы в общеобразовательных классах по рассматриваемой теме. Продумайте методику обучения учащихся предложенным в контрольной работе заданиям.

1. Первый член арифметической прогрессии равен  $2\frac{1}{3}$ , а сумма первых десяти членов равна  $90\frac{5}{6}$ . Найдите десятый член и разность прогрессии.

2. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, кратных 8.

3. В геометрической прогрессии отношение суммы третьего, пятого и восьмого членов к сумме шестого, восьмого и одиннадцатого равно 8. Найдите сумму первых  $n$  членов прогрессии, если сумма квадратов второго и третьего ее членов равна 320.

4. Докажите равенство при  $n \in N$ :

$$a) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \dots + n \cdot (2n+1) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6};$$

$$б) \frac{1}{2 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{(5n-3)(5n+2)} = \frac{n}{2(5n+2)}.$$

5. Найдите четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, последние три составляют арифметическую прогрессию, причем сумма крайних чисел равна 29, а сумма средних чисел равна 20.

6. Докажите, что

$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{(5n)^2} < \frac{n}{2(5n+2)}, n \in N.$$

5. Выделите общее и различное в методике изучения темы «Числовые последовательности» в общеобразовательных классах и классах с углубленным изучением математики.

**Литература:** [48]; [85]; [99]; [105].

### Лабораторная работа № 10

**Анализ экзаменационной работы по алгебре и началам анализа в классе с углубленным изучением математики**

**Цели:** Познакомиться с итоговым контролем углубленного изучения математики.

**План:**

**Задание 1.** В соответствии с указанной целью сформулируйте вопросы, на которые хотели бы получить ответ в ходе выполнения лабораторной работы, и вернитесь к ним после ее завершения.

**Задание 2. Знакомимся с содержанием экзаменационной работы в классе с углубленным изучением математики**

1. Выполните один из вариантов экзаменационной работы за 1990/91 учебный год:

Задание № 1. Решить уравнение:

$$27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 2^{3x} = 0 \text{ (I в.)} \quad 8^x - 2 \cdot 20^x + 3 \cdot 50^x = 6 \cdot 125^x \text{ (II в.)}.$$

Задание № 2. Решить уравнение:

$$\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \operatorname{ctg} x \text{ (I в.)} \quad \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \text{ (II в.)}.$$

Задание № 3. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \sqrt{(2x-1)(x+3)} \geq x+1, \\ \log_{3x-2} 28 > 2. \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{(2x-1)(x+3)} \geq x, \\ \log_{3x-2} 27 > 2. \end{cases}$$

Задание № 4. Пользуясь геометрической интерпретацией определенного интеграла, вычислить:

$$\int_{-1}^0 \sqrt{3-2x-x^2} dx \text{ (I в.)}$$

$$\int_{-2}^{-1} \sqrt{-x^2-6x-5} dx \text{ (II в.)}$$

Задание № 5. Пусть  $M$  — множество точек  $z_1$  комплексной плоскости таких, что  $|iz_1 + \sqrt{2}| = 0,5$ ;  $K$  — множество точек  $z_2$  комплексной плоскости вида  $z_2 = iz_1$ , где  $z_1 \in M$ . Найдите расстояние между фигурами  $M$  и  $K$ . (I в.)

Пусть  $M$  — множество точек  $z_1$  комплексной плоскости таких, что  $|-z_1 i - 2\sqrt{2}i| = 1$  множество точек  $z_2$  комплексной плоскости вида  $z_2 = -iz_1$ , где  $z_1 \in M$ . Найдите расстояние между фигурами  $M$  и  $K$ . (II в.)

Задание № 6.

При каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = \sqrt{ax}$  касается графика функции  $y = \ln x - ax^2$ ? (I в.)

При каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = ax + \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$  касается графика функции  $y = \sqrt{x}$ ? (II в.)

2. Продумайте представление одного из заданий рассмотренной экзаменационной работы:

- возможные способы решения;
- трудности, с которыми могут встретиться учащиеся при выполнении задания;
- типичные ошибки.

**Задание 3. Осваиваем методику подготовки к выполнению заданий итогового контроля при углубленном изучении математики**

1. Составьте аналогичные задания и продумайте организацию диалога в классе по их выполнению на уроке:

- изучения нового материала,
- закрепления,
- подготовки к контрольной работе.

2. Сравните тексты экзаменационных работ в классах с углубленным изучением математики за последние пять лет с рассмотренным. Сравните их с заданиями ЕГЭ. Выберите понравившиеся вам задания и покажите методику работы с ними.

### Вопросы к экзамену по методике обучения учащихся в 10–11 классах

1. Развитие понятия функции в старших классах и методика изучения свойств функций в старших классах.
2. Методика изучения функции  $y = \sin x$ .
3. Методика изучения функции  $y = \cos x$ .
4. Методика изучения функции  $y = \operatorname{tg} x$ .
5. Методика изучения функции  $y = \operatorname{ctg} x$ .
6. Методика обучения решению тригонометрических уравнений вида  $\sin x = a$ .
7. Методика обучения решению тригонометрических уравнений вида  $\cos x = a$ .
8. Методика обучения решению тригонометрических уравнений вида  $\operatorname{tg} x = a$ .
9. Виды тригонометрических уравнений и методика обучения их решению.
10. Методика обучения решению тригонометрических неравенств.
11. Методика изучения показательной функции.
12. Методика обучения решению показательных уравнений и неравенств.
13. Методика изучения логарифмической функции.
14. Методика обучения решению логарифмических уравнений и неравенств.
15. Методика изучения логарифма и его свойств.
16. Методика введения понятия производной, таблицы производных и правил дифференцирования.
17. Применение производной для составления уравнения касательной, для приближенных вычислений.
18. Применение производной для исследования функции и решения задач на наименьшее и наибольшее значения.
19. Методика изучения первообразной.
20. Методика изучения интеграла.
21. Логическое строение школьного курса стереометрии и методика изучения аксиом.
22. Методика изучения следствий из аксиом и решения задач первого параграфа курса стереометрии.
23. Параллельность в пространстве. Методика изучения параллельности прямых.
24. Параллельность в пространстве. Методика изучения параллельности прямой и плоскости.

25. Параллельность в пространстве. Методика изучения параллельности плоскостей.
26. Перпендикулярность в пространстве. Методика изучения перпендикулярности прямой и плоскости.
27. Перпендикулярность в пространстве. Методика изучения теоремы о трех перпендикулярах.
28. Перпендикулярность в пространстве. Методика изучения перпендикулярности плоскостей.
29. Методика изучения углов в пространстве.
30. Методика изучения расстояний в пространстве.
31. Методика изучения призмы.
32. Методика изучения пирамиды.
33. Методика изучения цилиндра.
34. Методика изучения конуса.
35. Методика изучения шара и сферы.
36. Методика изучения объемов многогранников.
37. Методика изучения площади поверхности тел вращения.
38. Методика изучения объемов тел вращения.
39. Методика изучения координат в пространстве.
40. Методика изучения векторов в пространстве.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Часть I. Методика формирования математических понятий

**Методика формирования математических понятий** включает следующие этапы:

- 1) *введение определения;*
- 2) *усвоение определения;*
- 3) *закрепление понятия.*

**Введение определения** может осуществляться двумя методами: *конкретно-индуктивным* (на основе рассмотрения конкретных примеров или задач приходят к новому понятию и его определению) или *абстрактно-дедуктивным* (определение понятия формулируется сразу после объявления нового термина). Желательно мотивировать изучение понятия и пояснить происхождение термина. При конкретно индуктивном введении понятия следует *соблюдать два требования*:

- пример, на основе которого вводится понятие, должен носить общий, а не частный характер;
- обсуждение основных признаков понятия на конкретном примере следует вести в той терминологии, которая используется в определении.

На этапе **усвоения определения** преследуются *две цели*: запомнить определение и научиться проверять, подходит объект под рассматриваемое понятие или нет. Этот этап осуществляется на специально составленных упражнениях — «да» и «нет», которые формулируются, начиная со слов «Является ли...». Аргументируя свой ответ, ученики осваивают признаки понятия и выучивают определение. При составлении примеров на «да», учитель варьирует несущественные признаки (включает частные случаи, изменяет размеры, расположение фигур), при составлении примеров на «нет» отвергает один или несколько существенных признаков. Этап усвоения требует подведения итогов, где повторяется определение понятия, его существенные признаки, а также некоторые несущественные признаки (расположение, размеры, частные случаи).

На этапе **закрепления понятия** решаются более сложные задачи, где используются как определение понятия, так и его свойства. В процессе закрепления регулярно подводятся итоги, где обсуждается, что нового узнали о понятии, что научились делать в связи с рассматриваемым понятием, какие виды задач научились решать. Поэтому процесс закрепления понятия называют *обогащением*.

## Приложение 1

### Примеры конструирования методики формирования понятий

#### *Методика формирования понятия арифметической прогрессии*

Согласно методике формирования понятий, важной является работа с признаками понятия, зафиксированными в его определении. Выделению этих признаков способствует логико-математический анализ определения. Выделенные признаки помогают составить упражнения на подведение под понятие (упражнения на «да» и «нет»). Для этого полезно составить таблицу учета (или опровержения) соответствующих признаков. К тому же таблица позволяет проанализировать составленные примеры по объему (рассмотрены ли все частные случаи, учтены ли все существенные признаки и т. д.). Подобная подготовительная работа учителя (проведение логико-математического анализа и составление упражнений на подведение под определение) показана в первой части рассмотренной ниже методики. Во второй части дан фрагмент урока.

#### *1. Логико-математический анализ определения.*

При подготовке к уроку учителю необходимо провести анализ логико-математической структуры определения с целью выделения существенных признаков понятия, положенных в основу определения, что позволит составить примеры на подведение объектов под определение.

Проведем анализ определения: *арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.*

**Термин** — арифметическая прогрессия.

**Род** — последовательность.

**Видовые отличия** — каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом (или в таком виде:  $a_{n+1} = a_n + d$ , где  $a_1$  и  $d$  заданы,  $n$  — любое натуральное).

Это определение рекурсивное, так как в видовых отличиях указаны действия получения последующего члена, если известен предыдущий. Видовые отличия можно расписать подробнее: второй член равен сумме первого с каким-то числом, третий равен второму, сложенному с этим же числом, и т. д.

Выполним действия подведения объектов под определение, результаты занесем в таблицу:

| № п/п | Примеры                                           | Последовательность (да — «+», нет — «-») | Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему с одним и тем же числом (да — «+», нет — «-») | Вывод: данный объект есть арифметическая прогрессия (да «+», нет «-») |
|-------|---------------------------------------------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1.    | 0; -5; -10; -15; ...; $-5(n-1)$ , ...             | +                                        | +                                                                                                | +                                                                     |
| 2.    | 1; 3; 5; 10                                       | +                                        | -                                                                                                | -                                                                     |
| 3.    | $x + 7$                                           | -                                        |                                                                                                  | -                                                                     |
| 4.    | 7; 7; 7; 7                                        | +                                        | +                                                                                                | +                                                                     |
| 5.    | $\frac{1}{3}$ ; $\frac{2}{3}$ ; 1; $1\frac{1}{3}$ | +                                        | +                                                                                                | +                                                                     |

В таблице представлены все виды арифметической прогрессии: возрастающая, убывающая, постоянная; конечная, бесконечная; разность может быть положительным, отрицательным числом и нулем; члены прогрессии могут быть натуральными, целыми, дробными.

II. *Опишем этапы формирования понятия арифметической прогрессии.*

### Введение определения

Приведем фрагмент урока по введению определения арифметической прогрессии.

Запись на доске. 42, 44, 46... – размеры одежды.

| Схема 1             | Схема 2                             | Схема 3                             |
|---------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 – $\boxed{42}$    | 1 – $\boxed{42}$                    | 1 – $\boxed{a_1}$                   |
| 2 – $\boxed{44}$    | 2 – $\boxed{42} + \boxed{2}$        | 2 – $\boxed{a_1} + \boxed{d}$       |
| 3 – $\boxed{46}$    | 3 – $\boxed{44} + \boxed{2}$        | 3 – $\boxed{a_2} + \boxed{d}$       |
| 4 – $\boxed{48}$    | 4 – $\boxed{46} + \boxed{2}$        | 4 – $\boxed{a_3} + \boxed{d}$       |
| ...                 | ...                                 | ...                                 |
| ...                 | ...                                 | ...                                 |
| $n$ – $\boxed{a_n}$ | $n$ – $\boxed{a_{n-1}} + \boxed{2}$ | $n$ – $\boxed{a_{n-1}} + \boxed{d}$ |
|                     |                                     | $n+1$ – $\boxed{a_n} + \boxed{d}$   |

— Сегодня познакомимся с последовательностью, которую можно встретить в жизни. Рассмотрим, например, последовательность размеров одежды. Назовите первый, второй, третий и так далее члены заданной последовательности. (Ученики отвечают по очереди. Учитель заполняет окошки схемы 1.)

— Какая закономерность прослеживается в записи членов этой последовательности? (Если возникает затруднение в ответе на этот вопрос, то предлагается дополнительное задание.)

— Сравним каждый последующий член последовательности с предыдущим, заполнив окошки схемы 2.

— Итак, каждый член последовательности, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом 2. Такая последовательность является примером арифметической прогрессии.

**Определение.** Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

— Это определение можно записать в виде формулы, которую получим, заполнив окошки схемы 3.

Пусть члены прогрессии записаны в виде:  $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$ .

Число, которое прибавляется к каждому члену прогрессии, может быть не только 2, обозначим его буквой  $d$  (заполняются окошки схемы 3).

Итак, для любого натурального  $n$  выполняется условие  $a_{n+1} = a_n + d$ , где  $d$  – некоторое число.

$d$  – называют разностью арифметической прогрессии, так как  $d = a_{n+1} - a_n$ .

### Усвоение определения

На этапе усвоения определения арифметической прогрессии ставятся *две задачи*: выучить определение и научиться проверять, является ли последовательность арифметической прогрессией или нет. Эти две задачи решаются одновременно, если ученики дают пояснения, почему предлагаемая последовательность является или не является арифметической прогрессией.

На скрытой доске заранее записаны примеры.

**Задание 1.** Выберите арифметические прогрессии среди примеров, записанных на доске. Объясните свой ответ.

- 1)  $0; -5; -10; -15; \dots; -5 \cdot (n + 1); \dots$
- 2)  $1; 3; 5; 10; \dots$
- 3)  $x + 7$
- 4)  $7; 7; 7; 7; \dots$
- 5)  $\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1; 1\frac{1}{3}; \dots$
- 6)  $0; 0; 0; 0; 0.$
- 7)  $-1; -1; -1; -1.$
- 8)  $-1; 0; -1; 0; -1$
- 9)  $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \dots$
- 10)  $5; 3; 1; -1; -3; -5.$

В выбранных примерах назовите разность арифметической прогрессии и ее первый член.

**Задание 2.**

а) Приведите свой пример арифметической прогрессии.

б) Мы рассматривали размеры одежды и пришли к определению арифметической прогрессии. Где еще в практической жизни можно встретиться с арифметической прогрессией? (Номера домов четной стороны улицы, размеры обуви.)

в) На размеры одежды можно посмотреть как на последовательность чисел, делящихся на 2. Будет ли последовательность чисел, которые при делении на число 2 дают остаток 1, являться арифметической прогрессией? Приведите свой пример.

— Итак, мы рассмотрели примеры арифметических прогрессий, заданных *перечислением своих членов*. Рассмотрим иное задание арифметической прогрессии.

**Задание 3.** Запишите несколько первых членов арифметической прогрессии, заданных первым членом и разностью:

а)  $a_1 = 3, d = 2$ ;

б)  $a_1 = 0, d = -2$ ;

в)  $a_1 = -3, d = 0$ ;

г)  $a_1 = -\frac{1}{5}, d = -3$ ;

д)  $a_1 = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}$ .

— Итак, каким способом может быть задана арифметическая прогрессия? Предложите свои примеры арифметических прогрессий, заданных этим способом.

— Итак, что в связи с понятием арифметической прогрессии мы узнали? (Определение, виды, два способа задания.)

**Замечание.** Возможен другой вариант введения определения арифметической прогрессии, когда арифметическая и геометрическая прогрессии изучаются совместно.

### Закрепление понятия арифметической прогрессии

Закрепление понятия арифметической прогрессии осуществляется при выводе и использовании формулы  $n$ -го члена для решения как прямых, так и обратных задач, причем арифметическая прогрессия может быть задана разными способами (перечислением своих членов, первым членом и разностью, любыми двумя членами); при выводе и использовании формулы суммы  $n$  первых членов; при решении задач, где предварительно требуется доказать, что заданная последовательность чисел является арифметической прогрессией, а затем уже найти недостающие члены прогрессии или сумму заданных чисел и т. д.

### Методика формирования понятия трапеции

I. Проведем *логико-математический анализ* следующего определения: «Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны» [11].

Выделим термин, род, видовые отличия и их логические связи:

**термин** — трапеция,

**род** — четырехугольник,

**видовые отличия** — 1) две стороны параллельны,  
2) две другие стороны не параллельны.

Видовые отличия связаны логическим союзом «и», значит, имеет место конъюнктивное определение.

Определение трапеции в учебнике [90] аналогичное, однако, видовые отличия сформулированы несколько иначе — «..., у которого только две противолежащие стороны параллельны ...». С учащимися необходимо провести выяснение того, что это означает: две противолежащие стороны параллельны, а две другие противолежащие стороны не параллельны. После этого очевидно логическое строение определения и его конъюнктивный характер.

На основе проведенного логико-математического анализа определяют пути введения определения и составляют систему упражнений для его усвоения.

Полезно составлять карту введения определения, указав в ней мотив темы, возможные варианты введения определения и их мотивацию, этапы реализации каждого варианта:



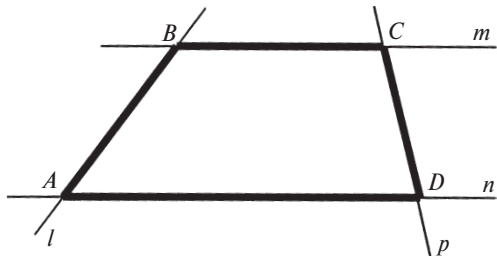
## II. Этапы формирования понятия.

### Введение определения

Рассмотрим введение определения трапеции на основе построения четырехугольника с двумя видовыми отличиями.

**Задание** для учащихся:

1) с помощью линейки и угольника проведите две параллельные прямые  $m$  и  $n$ ;



2) проведите две не параллельные прямые  $l$  и  $p$ , которые пересекают прямые  $m$  и  $n$ ,

3) обозначьте точки пересечения прямых  $m$ ,  $n$  с прямыми  $l$ ,  $p$  и выделите получившийся четырехугольник  $ABCD$ ;

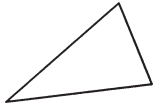
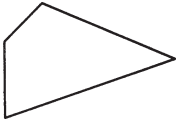
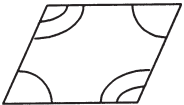
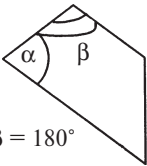
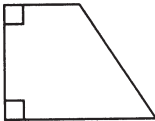
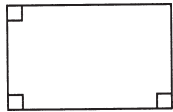
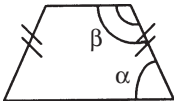
4) укажите и запишите отношения сторон в четырехугольнике  $ABCD - BC \parallel AD, BA \nparallel CD$ .

Далее учитель сообщает, что построенный четырехугольник называется трапецией, акцентирует внимание на соотношениях сторон в четырехугольнике и предлагает учащимся дать определение трапеции, а затем сравнить полученную формулировку с формулировкой определения в учебнике. Учителю полезно сообщить учащимся, что «трапеция» — греческое слово, означавшее в древности «столик». По-гречески «трапезион» означает обеденный столик, отсюда произошли слова трапеза, трапезная.

Вернувшись к отношению между сторонами трапеции, можно ввести понятия «основания трапеции», «боковые стороны трапеции».

### Усвоение определения

Усвоение определения можно осуществить с помощью таблицы на основе выполнения следующего **задания**: установите, какие из фигур, представленных в таблице, являются трапециями, и обоснуйте свой ответ.

| № | Пример                                                                                                              | Свойства объектов                            |                                                           |                                                                      |                                                                             |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
|   |                                                                                                                     | Четырех-<br>угольник<br>(да «+»,<br>нет «-») | Две сторо-<br>ны парал-<br>лельны<br>(да «+»,<br>нет «-») | Две другие<br>стороны<br>не парал-<br>лельны (да<br>«+», нет<br>«-») | В ы в о д :<br>дан н ы й<br>объект есть<br>трапеция<br>(да «+»,<br>нет «-») |
| 1 |                                    | —                                            |                                                           |                                                                      | —                                                                           |
| 2 |                                    | +                                            | —                                                         |                                                                      | —                                                                           |
| 3 |                                    | +                                            | +                                                         | —                                                                    | —                                                                           |
| 4 | <br>$\alpha + \beta = 180^\circ$   | +                                            | +                                                         | +                                                                    | +                                                                           |
| 5 |                                    | +                                            | +                                                         | +                                                                    | +(прямо-<br>уголь-<br>ная)                                                  |
| 6 |                                   | +                                            | +                                                         | —                                                                    | —                                                                           |
| 7 | <br>$\alpha + \beta = 180^\circ$ | +                                            | +                                                         | +                                                                    | +(равно-<br>бокая)                                                          |
| 8 |                                  | —                                            |                                                           |                                                                      | —                                                                           |

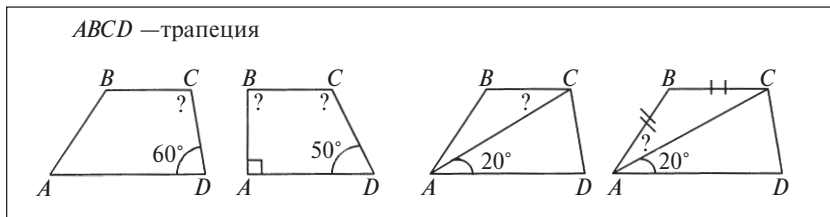
### Закрепление понятия

Закрепление понятия трапеции происходит как при изучении темы «Четырехугольники», так и темы «Площади фигур». Рассмотрим закрепление в теме «Четырехугольники».

**Первый этап закрепления** понятия трапеции происходит в процессе получения и использования следствий из определения трапеции:

- 1) сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна  $180^\circ$ ,
- 2) противолежащие углы не равны, но диагональ выделяет в них равные углы.

Закреплению способствует решение простейших задач по готовым чертежам:



**Второй этап закрепления** осуществляется при доказательстве свойств углов и диагоналей равнобокой трапеции (прямое и обратное утверждения), решении задач, связанных с равнобокой трапецией, со средней линией трапеции, и решении задач на построение трапеции по ее элементам с помощью циркуля и линейки.

### Методика формирования понятия средней линии трапеции

I. Проведем *логико-математический анализ* определения: «Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон» [90].

Выделим термин, род, видовые отличия и их логические связи:  
**термин** — средняя линия трапеции,

**род** — отрезок,

**видовые отличия** — соединяет: 1) середину одной боковой стороны с 2) серединой другой боковой стороны.

Видовые отличия связаны логическим союзом «и», т. е. определение — конъюнктивное.

## II. Этапы формирования понятия.

### Введение определения

Видовые отличия имеют конструктивный характер, поэтому определение средней линии трапеции желательно ввести на основе задания на построение.

**Задание** для учащихся:

- 1) постройте трапецию;
- 2) с помощью масштабной линейки отметьте середину боковой стороны трапеции и обозначьте ее буквой  $M$ ;
- 3) отметьте и обозначьте середину другой боковой стороны буквой  $N$ ;
- 4) постройте отрезок  $MN$ , концами которого являются середины боковых сторон трапеции.

На основе выполненного задания вводятся определение средней линии трапеции, ее обозначение на чертежах и запись:  $MN$  — средняя линия трапеции.

Другой путь — дедуктивное введение определения средней линии трапеции (формулировка определения дается сразу после мотива рассмотрения еще одного элемента трапеции, который называется «средняя линия трапеции»). Проанализировав определение, т. е. выделив в нем род и видовые отличия, учащиеся переходят от определения к построению средних линий для конкретных трапеций.

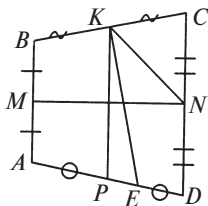
### Усвоение определения

Так как определение конъюнктивное, то усвоение определения можно провести с помощью таблицы, аналогичной рассмотренной для усвоения определения трапеции. Покажем несколько иной вариант.

Усвоение определения средней линии трапеции проведем *по следующим этапам*:

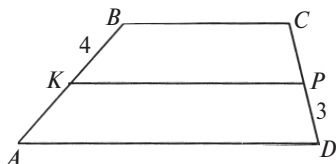
- 1) построение средней линии для равнобокой и прямоугольной трапеции,

2) рассмотрение контрпримеров и примера на одном рисунке, причем расположение трапеции изменено:



Будут ли отрезки  $MN$ ,  $KN$ ,  $KE$ ,  $KP$  средними линиями трапеции? Почему?

3) решение задачи:



$KP$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ . Известно, что  $PD = 3$  см,  $BK = 4$  см. Найдите боковые стороны трапеции. Является ли трапеция равнобокой? Какое условие задачи не нанесено на чертеж?

### Закрепление понятия средней линии трапеции

Параллельно с процессом построения средней линии трапеции желательно подвести учащихся к «открытию» ее свойств, доказательство которых будет соответствовать первому этапу закрепления понятия.

Процесс обогащения понятия осуществляется при решении задач, связанных с применением этих свойств для вычисления как средней линии трапеции, так и ее оснований; при решении задач, когда предварительно необходимо доказать, что заданный четырехугольник является трапецией, а проведенный в нем отрезок — ее средней линией (см., например, № 66, § 6 [90]).

При изучении темы «Площади фигур» учащиеся выведут формулу вычисления площади трапеции с использованием длины ее средней линии и высоты.

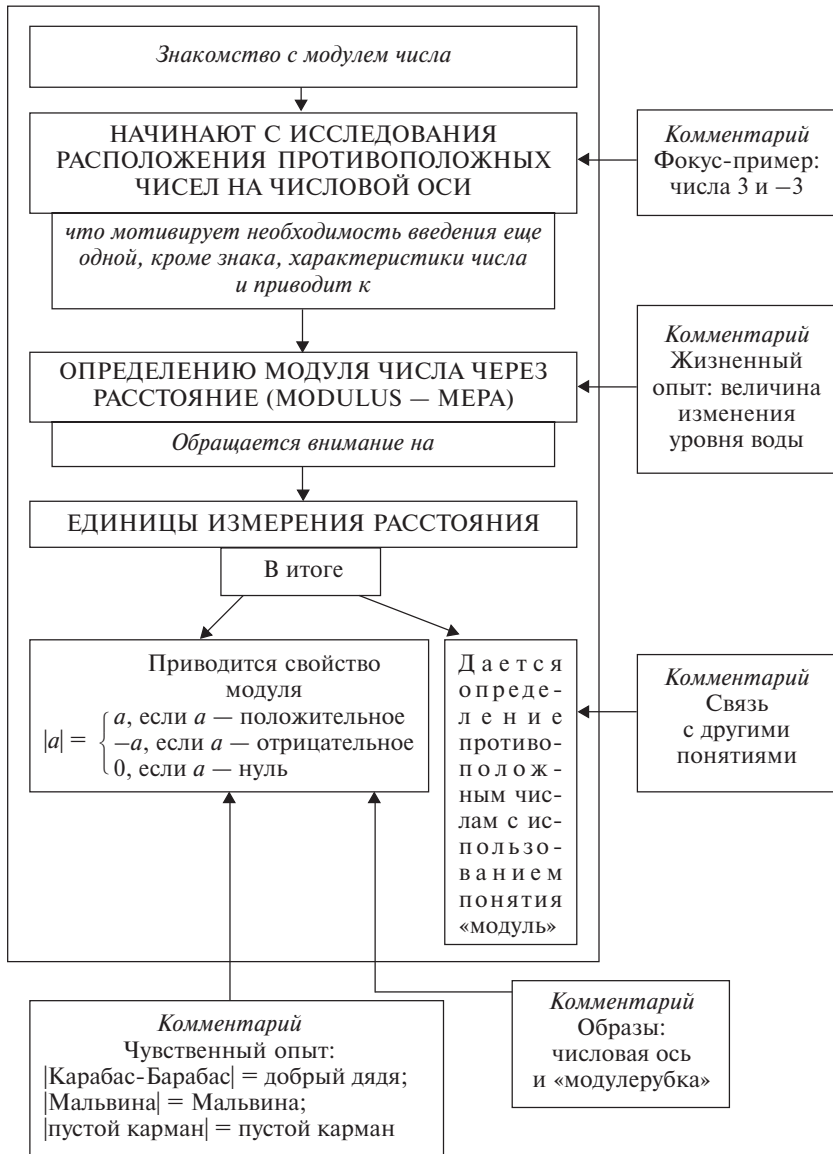
**Система упражнений, связанная с формированием понятия**

Система упражнений, связанная с формированием понятия, должна включать в себя:

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |                                                       |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"><li>1) основное задание (фокус-пример), на основе которого вводится определение;</li><li>2) задания на подключение образного, словесного и чувственного опыта учащихся (возможна интерпретация фокус-примера через образ, чувства, слово);</li><li>3) задания на подключение предметного или жизненного опыта учащихся;</li></ul>                                                                                                                            | } | <b>На этапе<br/>введения<br/>определе-<br/>ния</b>    |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |                                                       |
| <ul style="list-style-type: none"><li>4) задания на распознавание объектов, принадлежащих объему понятия (задания на «да» и «нет»);</li><li>5) задания, в которых понятие представлено в различных формах (задания на формирование способности к словесно-образному переводу);</li><li>6) задания на выведение следствий из определения понятия;</li></ul>                                                                                                                                     | } | <b>На этапе<br/>усвоения<br/>определе-<br/>ния</b>    |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |   |                                                       |
| <ul style="list-style-type: none"><li>7) задания на включение исходного понятия в систему связей с другими понятиями (возможно составление родословной понятия);</li><li>8) задания на применение понятия в различных ситуациях;</li><li>9) задания на систематизацию понятий, возможно, через их классификацию;</li><li>10) задания на развитие мыслительных операций, лежащих в основе образования понятий (анализ, синтез, обобщение, сравнение, конкретизация, абстрагирование).</li></ul> | } | <b>На<br/>этапе<br/>закреп-<br/>ления<br/>понятия</b> |

# **Пример. Формирование понятия модуля числа в учебнике [27].**

*Математическая карта введения определения модуля  
и комментарий к ней*



## Усвоение определения

### Задание 1.

1) Заполните таблицу:

| Число | Модуль числа | Расстояние от точки, соответствующей числу, до точки $O$ | Положение точки относительно $O$ | Разные формы понятий |
|-------|--------------|----------------------------------------------------------|----------------------------------|----------------------|
| -2    | ...          | ...                                                      | слева                            |                      |
| ...   | ...          | 15                                                       | справа                           |                      |
| ...   | 100          | ...                                                      | ...                              |                      |
| -37   | ...          | 37                                                       | ...                              |                      |
| 29    | ...          | ...                                                      | слева                            |                      |
| ...   | 52           | -52                                                      | слева                            |                      |
| $a$   | ...          | ...                                                      | слева                            |                      |

2) Есть ли в каких-нибудь строках лишние данные?

3) Есть ли строки, которые можно заполнить неединственным способом?

4) Есть ли строки, которые вообще нельзя заполнить?

Развитие  
мыслительных  
операций

### Задание 2.

1) Найдите координаты точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , изображенных на числовой оси (*дан рисунок*), и запишите расстояние от точек до начала отсчета, используя знак модуля.

2) Есть ли среди данных точек точки с противоположными координатами? Если да, то сравните модули координат этих точек.

Разные формы  
понятия и его  
связи с другими  
понятиями

### Задание 3.

Даны равенства:

а)  $|-2| = 2$ ;

б)  $|3| = -3$ ;

в)  $|-3| = -(-3)$ ;

г)  $-|3| = -3$ .

Проверьте равенства. Если есть ошибка, то исправьте ее и прочитайте равенство, используя слова «модуль» и «расстояние».

### Закрепление понятия

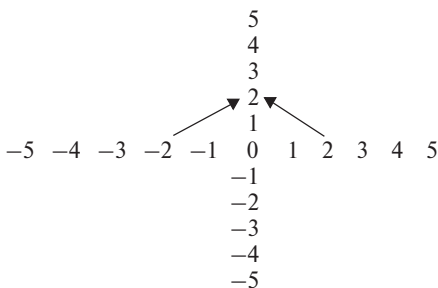
#### Задание 4.

Отметьте на числовой оси точки с координатами, модуль которых равен числам 4, 12, 0. Сколько точек вы отметили в каждом из случаев?

Различные ситуации:  
Дан модуль, надо отметить точки на числовой оси (пропедевтика уравнений с модулем)

#### Задание 5.

Для каждого числа из строчки найдите модуль этого числа в столбце. Проведите стрелку от числа к его модулю.

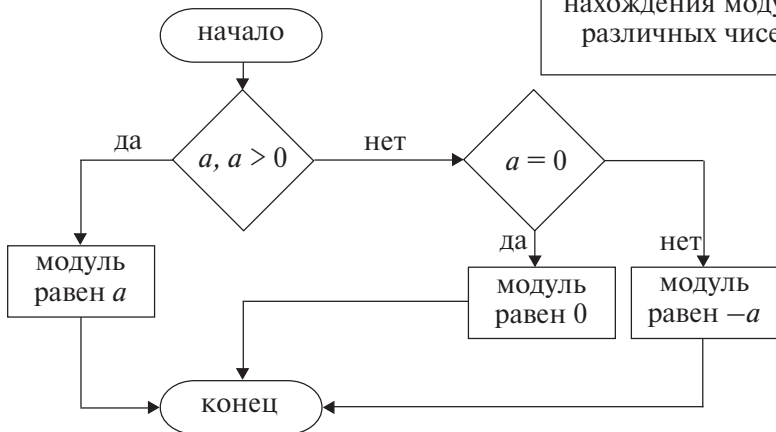


Образное представление свойства:  
модуль — *число неотрицательное*

#### Задание 6.

1. Правильно ли составлен алгоритм нахождения модуля числа?

Алгоритм нахождения модуля различных чисел



2. Покажите движение по блок-схеме при вычислении модуля числа  $a$ , если  $a = -307, 0, 13$ .

### Задание 7.

1. Заполните таблицу:

| Число | Модуль числа | Противоположное число | Модуль противоположного числа |
|-------|--------------|-----------------------|-------------------------------|
| $x$   | $ x $        | $-x$                  | $ -x $                        |
| $-30$ | ...          | $30$                  | ...                           |
| ...   | ...          | ...                   | $5$                           |
| $10$  | ...          | ...                   | ...                           |
| ...   | ...          | $0$                   | ...                           |
| ...   | ...          | $-28$                 | ...                           |
| ...   | $4$          | ...                   | ...                           |

1) зная модуль, найти число (и наоборот);  
2) зная модуль противоположного числа, найти число (и наоборот)

2. Какие строки можно заполнить несколькими способами?

3. Сравните модули противоположных чисел. Дайте определение противоположных чисел, используя понятие «модуль».

Развитие мыслительных операций и связи между понятиями

### Задание 8.

1. Даны числа  $-300, -10, -3, 0, 2, 3, 11, 274$ :

а) Какому из чисел соответствует на числовой оси точка, находящаяся на самом большем (самом маленьком) расстоянии от точки  $O$ ?

б) Какое из чисел имеет наибольший (наименьший) модуль?

2. Расположите числа  $-31, -2, -3, -242, 240, 30, 0, -22$  в порядке убывания их модулей.

Пропедевтика сравнения, сложения

### Задание 9.

1. Заполните таблицу:

| $a$ | $-a$ | Расстояние между $A(a)$ и $O(0)$ | Расстояние между $A(a)$ и $B(-a)$ |
|-----|------|----------------------------------|-----------------------------------|
|     | $x$  |                                  |                                   |
|     |      | $y$                              |                                   |

Углубление

2. Какие значения (положительные, отрицательные или нуль) может принимать  $x$ ;  $y$ ?

Далее следуют уравнения с модулем.

### Типичные методические ошибки при изучении понятий

Типичными методическими ошибками при изучении понятий являются ошибки следующих видов:

#### I. Ошибки в подборе содержания:

- для обсуждения на этапе введения определения выбран частный случай;
- на этапе усвоения представлен не полный набор упражнений на существенные и несущественные признаки понятия;
- при подборе заданий не учитываются связи между понятиями.

#### II. Ошибки в структуре изложения:

- пропущен этап мотивации;
- пропущен этап усвоения;
- пропущен этап подведения итогов перед переходом к этапу закрепления (в процессе закрепления; при обобщении знаний по рассматриваемому понятию).

#### III. Ошибки в ведении диалога:

- предложен монолог вместо диалога, что лишает учеников возможности участия в процессе формирования определения;
- признаки понятия на основном примере обсуждаются в терминологии, отличной от терминологии определения;
- исправление ошибок учащихся берет на себя учитель вместо того, чтобы:
  - привести контрпример и предложить ученикам обсудить, подходит он под определение или нет;
  - привлечь учеников к обнаружению и исправлению ошибок.

#### IV. Ошибки в логике изложения:

- связи с прошлым материалом отсутствуют или являются для учащихся необоснованными; связь считается необоснованной, если учитель задает вопросы по прошлому материалу, не связывая их с изучаемым понятием;
- нет логического перехода от примера к определению (например, вместо: «Вот такие числа, которые..., называются...» используется «Вот такие числа называются»);
- не намечены пути дальнейшей работы с изучаемым понятием.

## Часть II. Методика формирования математических умений

**Методика формирования математических умений** опирается на следующие *психолого-педагогические требования*:

1) при формировании умения следует четко выделять этапы его выполнения (или его алгоритм);

2) выделенные этапы следует формулировать в общем виде, что позволяет решать целый класс задач;

3) *каждый* этап должен быть отработан *отдельно* от других с помощью *специально подобранных* упражнений;

Наиважнейшее требование!!!

4) при первоначальной отработке умения каждый этап следует проговаривать вслух, поскольку многие ученики не могут пропустить этап «внешней речи» при переходе от общего к частному;

5) желательно, чтобы учащиеся самостоятельно составляли алгоритм выполнения данного умения, хотя результаты выполнения умения в этом случае будут теми же, что и в случае, когда алгоритм будет дан в готовом виде. Участие учеников в создании алгоритма способствует их развитию.

**Методика формирования умений** включает следующие *этапы*:

- **Введение алгоритма.** Введение может осуществляться двумя методами: *конкретно-индуктивным*, когда алгоритм составляется на основе общего примера, и *абстрактно-дедуктивным*, когда алгоритм дается в готовом виде или на основе теоретического положения (формулы, определения, теоремы). На этом этапе демонстрируется образец выполнения задания и обосновывается алгоритм решения. Если какой-то шаг алгоритма может быть выполнен неоднозначно, то необходимо рассмотреть на том же задании все возможные способы решения.
- **Усвоение алгоритма.** Усвоение преследует следующие *цели*: *усвоить признаки*, по которым можно определить, что можно пользоваться изученным алгоритмом; *усвоить отдельные шаги* алгоритма; *запомнить алгоритм* выполнения умения; *изучить частные случаи* применения алгоритма.
- **Закрепление умения.** Этап закрепления включает различные случаи и ситуации применения алгоритма. В процессе закрепления *важно подводить итоги* по обогащению знаний по формируемому умению.

## Примеры конструирования методики формирования умений

### **Методика формирования умения определять, является ли данное число членом данной арифметической прогрессии**

#### **I. Введение схемы решения**

I. Решается задание: *Содержит ли арифметическая прогрессия 2; 9;... число 156?* (№ 359 (а)).

Сначала выясняется идея решения, которая позволяет составить план ответа на вопрос задачи.

— Как на языке последовательности сказать иначе, что последовательность содержит (или не содержит) какое-то число?

— Это значит, что число является (или не является) членом последовательности.

— Чем определяется место члена последовательности?

— Номером члена последовательности.

— Каким числом является номер?

— Натуральным.

— Итак, если нам удастся определить номер числа 156 в арифметической прогрессии, то как мы ответим на вопрос задачи?

— Прогрессия содержит число 156.

— Что известно об арифметической прогрессии и достаточно ли этих данных для ответа на этот вопрос?

— В прогрессии известны первый и второй члены, значит, прогрессия задана полностью, поэтому, данных достаточно.

— Что позволит найти номер члена прогрессии?

— Формула  $n$ -го члена (записывается на доске, и анализируются известные величины). В ней известны  $n$ -й член и первый, разность прогрессии можем найти по условию задачи. Значит, сможем найти число  $n$ .

Составляется план решения и записывается решение.

1) Найдем для данной арифметической прогрессии разность  $d$  по формуле  $x_2 - x_1 = d$ , т. е.  $d = 9 - 2 = 7$ .

2) Запишем формулу  $n$ -го члена арифметической прогрессии:

$$x_n = x_1 + d(n - 1).$$

3) Подставим в эту формулу значения  $x_1$  и  $d$ , а вместо  $x_n$  данное число 156, получим уравнение:  $156 = 2 + 7(n - 1)$ .

4) Решим полученное уравнение относительно неизвестного  $n$ .

$$156 = 2 + 7n - 7;$$

$$7n = 151;$$

$$n = 23.$$

5) Так как  $n$ , равное 23, является натуральным числом, то делаем вывод, что данная арифметическая прогрессия содержит число 156; оно будет 23 членом этой прогрессии.

*Ответ:* число 156 является членом данной арифметической прогрессии.

II. Составляется схема выполнения заданий рассмотренного вида.

1. Найти или указать первый член и разность арифметической прогрессии ( $x_1$  и  $d$ ).

2. Записать формулу  $n$ -го члена прогрессии  $x_n = x_1 + d(n - 1)$ .

3. Подставить в эту формулу найденные значения  $x_1$  и  $d$ , а вместо  $x_n$  — заданное число.

4. Решить полученное уравнение относительно  $n$ .

5. Сделать вывод: если  $n \in N$ , то данное число является членом прогрессии, если  $n \notin N$ , то данное число не является членом данной арифметической прогрессии.

6. Записать ответ.

## II. Выполнение упражнений на отработку шагов алгоритма

I. Упражнения на повторение умения находить первый член и разность для арифметической прогрессии (1-й шаг алгоритма).

1) Найдите разность арифметической прогрессии

а)  $-\frac{1}{2}; 1; \dots$

б)  $4,5; -6; \dots$

в)  $3; 4\frac{1}{2}; \dots$

г)  $y_1 = 8, y_2 = 24$ .

д)  $a_1 = 3\frac{1}{2}, a_7 = 9\frac{1}{2}$ .

2) Найдите первый член арифметической прогрессии, если:

а)  $a_5 = 162, d = 2$ ;

б)  $a_8 = -27, d = -1,5$ .

3) Найдите первый член арифметической прогрессии, если известно:

а)  $c_5 = -2; c_8 = -9$ ;

б)  $a_3 = 5,5; a_9 = 14,5$ .

II. Упражнения на формирование умения составлять уравнения и находить номер заданного члена последовательности (3—4-й шаг алгоритма).

Найдите номер члена арифметической прогрессии:

а) равного  $-2,94$ , если  $a_1 = 1,26$  и  $d = 0,3$ ;

б) равного  $50$ , если заданы два первых члена прогрессии  $\frac{1}{2}, 1, \dots$

III. Упражнения на формирование умения делать вывод о принадлежности заданного числа данной прогрессии (5-й шаг алгоритма).

Может ли член арифметической прогрессии иметь номер, равный:

а)  $-1\frac{2}{3}$ ; б)  $0$ ; в)  $24$ ; г)  $1,5$ ; д)  $-\frac{1}{3}$ ; е)  $-7$ ?

### III. Закрепление умения

Выполняются упражнения на закрепление умения определять, является ли данное число членом данной арифметической прогрессии или нет.

1. Содержит ли арифметическая прогрессия  $2; 9; \dots$  число:

а)  $269$ ; б)  $16,1$ ; в)  $-7,3$ ; г)  $0$ ?

2. Дана арифметическая прогрессия  $(a_n)$ , у которой  $a_1 = 23$ ,  $d = -1,5$ . Является ли членом этой прогрессии число:

а)  $0$ ; б)  $-28$ ; в)  $47$ ?

3. Является ли членом арифметической прогрессии число  $34$ , если:

а)  $y_1 = 10$ ,  $y_2 = 22$ ;

б)  $x_{32} = 138$ ,  $d = 4$ ?

4. Является ли число  $45$  членом арифметической прогрессии  $(a_n)$ , если  $a_4 = 25$ ,  $a_7 = 40$ ?

**Замечание.** В примерах на закрепление меняются способы задания арифметической прогрессии и ее виды.

### Методика формирования умения раскладывать многочлен на множители способом группировки

#### I. Актуализация знаний

Учащимся предлагается задание:

Разложите на множители (письменно):

а)  $3x + 3y$ ; б)  $7a^3 + 7b^3$ ; в)  $-3a^2b - 6ab^2$ ; г)  $x(b + c) + 3(b + c)$ ;  
д)  $y(a - c) - 5(c - a)$ .

Выполняя последний пример, учащиеся проговаривают, что слагаемые имеют противоположные множители, значит, один из них надо заменить на противоположный, вынося  $(-1)$  за скобки, или меняя знак слагаемого на противоположный, пользуясь равенством:  $(a - b) = - (b - a)$ .

Подводя итог выполнения задания, учащиеся называют метод, который они использовали для разложения на множители, и формулируют правило вынесения общего множителя за скобки, пользуясь схемой:

$$A + B = O \cdot \Delta + O \cdot \square = O \cdot (\Delta + \square).$$

## II. Введение схемы разложения многочлена на множители методом группировки

I. Выполняется конкретное задание.

Рассматривая конкретный пример, учитель в процессе беседы с учащимися выделяет этапы его выполнения.

**Задание:** Разложить на множители многочлен

$$ax + 2a - 3x - 6.$$

— Можно ли данный многочлен разложить на множители методом вынесения за скобки общего множителя? (Нет, так как нельзя каждый член многочлена представить в виде произведения двух множителей, один из которых будет один и тот же.)

— Следовательно, данный многочлен нельзя разложить на множители вынесением общего множителя за скобки. Будем искать другой метод. Выделим члены, к которым можно применить способ разложения на множители путем вынесения общего множителя за скобки:

$$\underline{ax} + \underline{2a} - \underline{3x} - \underline{6} =$$

— Выделенные члены объединим в группы, т. е. заключим их в скобки:

$$= (ax + 2a) + (-3x - 6) =$$

— Вынесем за скобки общий множитель в каждой группе:

$= a(x + 2) - 3(x + 2) =$  (каждое слагаемое имеет общий множитель, подчеркнем его:  $a(\underline{x + 2}) - 3(\underline{x + 2})$ )

— Вынесем за скобки общий многочлен полученного выражения:

$$= \underline{(x + 2)} \cdot (a - 3).$$

$$\text{Ответ: } ax + 2a - 3x - 6 = (x + 2)(a - 3).$$

Вид доски:

$$\underline{ax} + \underline{2a} - \underline{3x} - \underline{6} = (ax + 2a) + (-3x - 6) = a(x + 2) - 3(x + 2) = \underline{(x + 2)(a - 3)}.$$

$$\text{Ответ: } ax + 2a - 3x - 6 = (x + 2)(a - 3).$$

II. Составляется схема разложения на множители методом группировки.

Учитель сообщает, что данный метод разложения многочлена на множители получил название метода группировки, и, возвращаясь к решенному примеру, обсуждает с учащимися, каков был первый шаг, второй и т. д. В результате формулируется правило:

**Для того, чтобы разложить многочлен на множители методом группировки надо:**

1. Выделить слагаемые для группировки.
2. Выделенные слагаемые заключить в скобки.
3. Вынести за скобки общие множители в каждой группе.
4. В полученном выражении вынести за скобки общий многочлен.
5. Записать ответ.

Данное правило можно записать, пользуясь следующей схемой:

$$A + B + C + D = \underbrace{\quad\quad\quad}_{} + \underbrace{\quad\quad\quad}_{} =$$

$$= \bigcirc \underline{(\quad)} + \square \underline{(\quad)} = \underline{(\quad)} \cdot \left[ \bigcirc + \square \right]$$

III. Обсуждаются возможные способы разложения на множители методом группировки одного и того же примера.

1) Вернемся к рассмотренному примеру и сгруппируем другие пары слагаемых. (В ходе выполнения задания учащиеся проговаривают каждый шаг его выполнения.)

— Выделяем слагаемые для группировки:

$$\underline{ax} + \underline{2a} - \underline{3x} - \underline{6} =$$

— Выделенные слагаемые заключаем в скобки:

$$= (ax - 3x) + (2a - 6) =$$

— Выносим за скобки общий множитель в каждой группе:

$$= x(\underline{a - 3}) + 2(\underline{a - 3}) =$$

— В полученном выражении выносим общий многочлен:

$$= (a - 3)(x + 2).$$

— Записываем ответ:  $ax + 2a - 3x - 6 = (a - 3)(x + 2)$ .

Вид доски:

$$\underline{ax} + \underline{2a} - \underline{3x} - \underline{6} = (ax - 3x) + (-2a - 6) = x(\underline{a} + \underline{3}) - 2(\underline{a} - \underline{3}) = (a - 3)(x + 2).$$

$$\text{Ответ: } ax + 2a - 3x - 6 = (a - 3)(x + 2).$$

В итоге данный ответ сравнивается с ранее полученным, и делается вывод, что ответы одинаковые по переместительному свойству умножения.

2) Вернемся к первоначальному примеру и посмотрим, можно ли было заключать слагаемые в скобки, перед которыми стоит знак «-». (В ходе выполнения задания учащиеся проговаривают каждый шаг его выполнения.)

— Выделяем слагаемые для группировки:

$$\underline{ax} + \underline{2a} - \underline{3x} - \underline{6} =$$

— Выделенные слагаемые заключаем в скобки (если перед скобками ставится знак «-», то заключаемые в скобки слагаемые записываем с противоположными знаками):

$$= (ax + 2a) - (3x + 6) =$$

— Выносим за скобки общий множитель в каждой группе:

$$= a(x + 2) - 3(x + 2) =$$

— В полученном выражении выносим общий множитель:

$$= (x + 2)(a - 3).$$

— Записываем ответ:  $ax + 2a - 3x - 6 = (x + 2)(a - 3).$

Вид доски:

$$\underline{ax} + \underline{2a} - \underline{3x} - \underline{6} = (ax - 2a) - (3x - 6) = a(\underline{x} + \underline{2}) - 3(\underline{x} + \underline{2}) = (x + 2)(a - 3).$$

$$\text{Ответ: } ax + 2a - 3x - 6 = (x + 2)(a - 3).$$

— Сравните данный ответ с ранее полученным. Какой вывод можно сделать?

IV. Выясняются способы контроля.

— Сравните три полученных решения и сформулируйте способы контроля правильности выполненного вами решения. (Можно попробовать группировать слагаемые по-другому, можно заключать слагаемые в скобки, перед которыми стоит знак плюс или минус, ответы должны получиться одинаковыми.)

— Можно ли сделать проверку, используя полученный результат разложения на множители? (Можно раскрыть скобки и полученный многочлен сравнить с исходным.)

### III. Выполнение упражнений на отработку шагов алгоритма

I. Умение группировать члены, имеющие одинаковые множители.

**Задание 1.** Сгруппируйте члены, имеющие одинаковые множители, разными способами.

а)  $mx + my + 6x + 6y$ ;

б)  $9x + ay + 9y + ax$ ;

в)  $7a - 7b + an - bn$ ;

г)  $ab - 8a - bx + 8x$ .

**Задание 2.** Проверьте, правильно ли сгруппированы члены:

а)  $x^2y^2 + xy - y^3 - x^3 = (x^2y^2 - y^3) + (xy - x^3)$ ;

б)  $x^2y^2 + xy - y^3 - x^3 = (x^2y^2 + xy) - (y^3 - x^3)$ ;

в)  $\underline{8ab} - \underline{2b^2} + \underline{12a^2} - \underline{3ab} = (8ab - 3ab) + (12a^2 - 2b^2)$ .

II. Умение выносить общий многочлен за скобки.

**Задание 1.** Заполните пропуски:

а)  $m(x + y) - x - y = m(x + y) - (\dots + \dots) = (x + y) (\dots - 1)$ ;

б)  $ab - a - b + 1 = (ab - a) - (b - 1) = a(\dots - \dots) - (b - 1) = \dots$

**Задание 2.** Вынесите общий многочлен за скобки:

а)  $9p(a^2 + 6a + 1) - 3(a^2 + 6a + 1)$ ;

б)  $3p^2(a - b) - 9(a - b)$ ;

в)  $p(c - d) - (c - d)$ ;

г)  $a(p - q) + q - p$ .

### IV. Закрепление умения

I. Применение алгоритма в стандартной ситуации.

Учащиеся у доски выполняют упражнение на использование всего правила с четким проговариванием шагов, например:

**Задание 1.** Разложите на множители многочлен:

а)  $ab - 8a - bx + 8x$ ;

б)  $ax - 2bx + ay - 2by$ .

**Задание 2.** Представьте в виде произведения:

а)  $ac^2 - ad + c^3 - cd - bc^2 + bd$ ;

б)  $ax^2 + ay^2 - bx^2 - by^2 + b - a$ ;

в)  $an^2 + cn^2 - ap + ap^2 - cp + cp^2$ ;

г)  $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$ .

II. Применение алгоритма в иных ситуациях.

**Задание 1.** Найдите значение выражения:

$p^2q^2 + pq - q^3 - p^3$  при  $p = 0,5$ ,  $q = -0,5$ .

**Задание 2.** Вычислите наиболее простым способом:

$19,9 \cdot 18 - 19,9 \cdot 16 + 30,1 \cdot 18 - 30,1 \cdot 16$ .

**Задание 3.** Разложите на множители трехчлен:

а)  $x^2 + 6x + 5$ ;

б)  $x^2 - x - 6$ ;

в)  $x^2 - 10x + 24$ .

**Задание 4.** Докажите тождество:

а)  $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ ;

б)  $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$ .

**Задание 5.** Решите уравнения:

а)  $x^2 + 8x - 4x - 32 = 0$ ;

б)  $x^2 + 6x + 5 = 0$ .

**Замечание.** При подведении итогов полезно попросить учащихся перечислить ситуации использования разложения на множители методом группировки.

## ***Методика работы по формированию умения строить биссектрису угла с помощью циркуля и линейки***

### **І. Введение алгоритма построения биссектрисы угла**

1. *Мотивация.* В геометрии важную роль играет треугольник и его элементы. Мы уже умеем строить отрезок, равный данному; угол, равный данному, значит, сможем построить отрезки и углы, равные сторонам и углам данного треугольника. Изучив построение биссектрисы угла, сможем построить биссектрису треугольника.

2. *Актуализация знаний* (позволит вспомнить понятие биссектрисы угла и измерение углов с помощью транспортира, кроме того, использование транспортира может служить способом проверки построения угла с помощью циркуля и линейки).

**Задание 1.** Постройте угол, равный  $60^\circ$ , и с помощью транспортира постройте его биссектрису. Сформулируйте определение биссектрисы угла.

3. *Выполнение задания на построение биссектрисы угла с помощью циркуля и линейки* (позволит познакомиться со способом построения биссектрисы данного угла).

**Задание 2.** Постройте угол, равный  $60^\circ$ . Необходимо построить с помощью циркуля и линейки биссектрису этого угла.

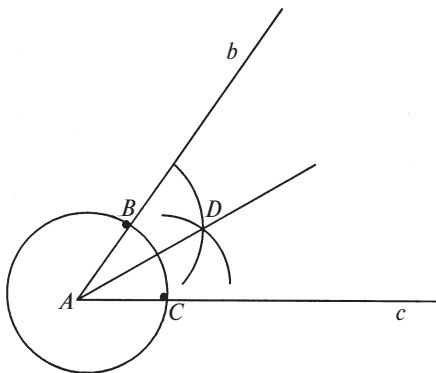
Учитель на доске, а ученики в тетрадях выполняют построения и записывают последовательность каждого шага. При этом учитель четко проговаривает каждый шаг построения:

а) Построим окружность произвольного радиуса с центром в вершине угла и отметим точки пересечения этой окружности

со сторонами угла. (Позднее можно оговорить, что для нахождения точек пересечения со сторонами угла не обязательно строить всю окружность, достаточно построить дугу произвольного радиуса с центром в вершине угла.)

б) Построим две окружности с тем же радиусом, но с центрами в полученных точках на сторонах угла и отметим точку их пересечения.

в) Из вершины угла через полученную точку строим луч.



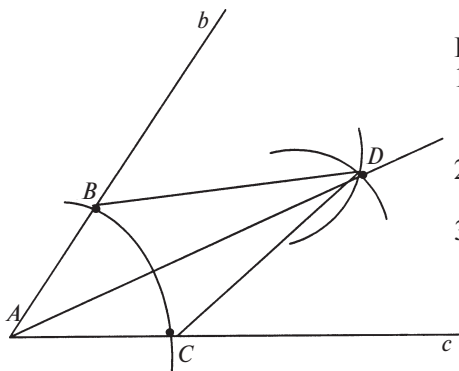
Построение.

- 1) окр.  $(A, R)$ ,  
 $B = \text{окр.}(A, R) \cap b$ ,  
 $C = \text{окр.}(A, R) \cap c$ ,
- 2) окр.  $(B, R)$ , окр.  $(C, R)$ ,  
 $D = \text{окр.}(B, R) \cap \text{окр.}(C, R)$ ,
- 3)  $AD$

Проверим с помощью транспортира, что построенный луч является биссектрисой угла.

Итак, мы нашли способ построения биссектрисы угла с помощью циркуля и линейки. Интересно, получится ли биссектриса угла, если изменим радиус первой окружности, а радиус двух других окружностей возьмем отличным от первого.

**Задание 3.** Постройте угол, равный  $60^\circ$ , и с помощью циркуля и линейки постройте биссектрису этого угла, изменив радиусы вспомогательных окружностей.

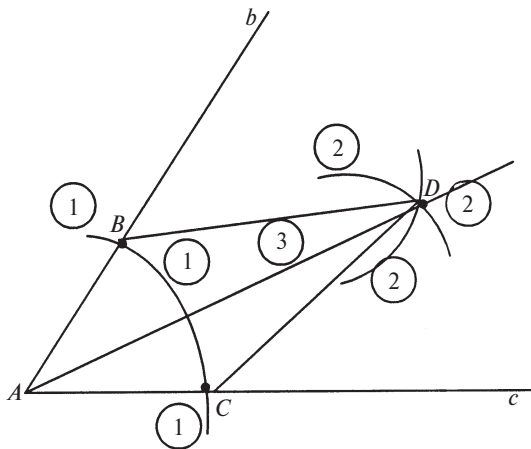


Построение.

- 1) окр.  $(A, R)$ ,  
 $B = \text{окр.}(A, R) \cap b$ ,  
 $C = \text{окр.}(A, R) \cap c$ ,
- 2) окр.  $(B, R_1)$ , окр.  $(C, R_1)$ ,  
 $D = \text{окр.}(B, R_1) \cap \text{окр.}(C, R_1)$ ,
- 3)  $AD$

Проверим с помощью транспортира, правильно ли построена биссектриса.

Повторим этапы построения. (Учитель спрашивает, что делали на первом, втором, третьем шаге, и отмечает номера шагов на рисунке.)



4. Мотивация обоснования алгоритма и доказательство того, что таким образом построенный луч является биссектрисой угла.

Случайно ли получилось, что  $AD$  является биссектрисой угла? Попробуем провести доказательство того, что работая по тому же алгоритму, всегда получится биссектриса угла.

— В каком случае луч является биссектрисой угла? (Когда он выходит из вершины угла и делит угол пополам.)

— Чтобы  $AD$  была биссектрисой, равенство каких углов необходимо доказать? (Угла  $BAD$  и угла  $DAC$ .)

— Как обычно доказывают равенство углов? (Из равенства треугольников.)

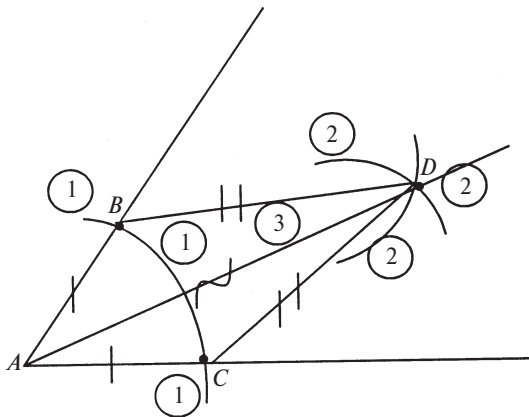
— Какие треугольники можно рассмотреть? ( $\triangle BAD$  и  $\triangle DAC$ .)

— Вернемся к каждому шагу построения и посмотрим, какую информацию об этих треугольниках мы можем получить. Что мы делали на первом шаге и равенство каких элементов треугольников можем отметить? (Мы строили окружность с центром в вершине угла и находили точки пересечения этой окружности со сторонами угла, значит,  $AB = AC$ .)

— Что делали на втором шаге и равенство каких элементов треугольников можем отметить? (Мы строили окружности одного и того же радиуса с центрами в точках  $B$  и  $C$  и находили точку их пересечения — точку  $D$ , значит,  $BD = DC$ .)

— Итак, в нужных треугольниках мы нашли две пары равных элементов, а для равенства треугольников их нужно три. Посмотрим на чертеж, какое условие о нужных нам треугольниках можем выделить? (Сторона  $AD$  является общей.)

В ходе диалога учитель равенство названных отрезков отмечает на чертеже, а потом оформляется доказательство.



Доказательство.

Рассмотрим  $\triangle BAD$  и  $\triangle DAC$ . В них:

- |                                                                                 |   |                                                                    |
|---------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------|
| а) $AB = AC$ (построение 1),<br>б) $BD = DC$ (построение 2),<br>в) $AD$ — общая | } | $\Rightarrow \triangle BAD = \triangle DAC$<br>(по трем сторонам). |
|---------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------|

Значит,  $\angle BAD = \angle DAC$  (как соответствующие углы равных треугольников), следовательно,  $AD$  — биссектриса угла  $A$ .

#### 5. Подведение итогов.

Итак, мы построили биссектрису угла с помощью циркуля и линейки и доказали правильность построений. Повторим алгоритм построения биссектрисы угла.

(Ученик называет все шаги алгоритма, а другие, в случае необходимости поправляют его. Учитель помогает отвечающему демонстрацией того или иного шага на имеющемся рисунке (см. выше).)

*Алгоритм построения биссектрисы угла:*

1) построить окружность произвольного радиуса с центром в вершине угла и отметить точки пересечения этой окружности со сторонами угла;

2) построить две окружности с тем же радиусом, но с центрами в полученных на сторонах угла точках и отметить точку их пересечения;

3) из вершины угла через полученную точку построить луч. Этот луч и будет биссектрисой угла.

— Обязательно ли на втором шаге строить окружности тем же радиусом, что и первую? (Нет.)

— Обязательно ли на втором шаге строить окружности одним и тем же радиусом? (Да.)

— На чем основано доказательство того, что построение выполнено правильно? (На равенстве треугольников по трем сторонам.)

— Почему  $AB = AC$ ? (Мы строили окружность с центром в точке  $A$ ,  $AB$  и  $AC$  являются радиусами этой окружности, а у окружности все радиусы равны.)

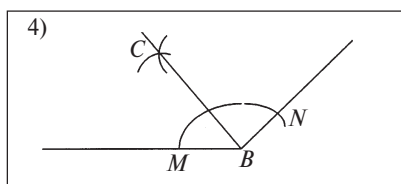
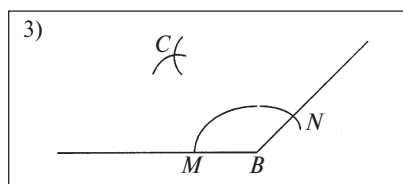
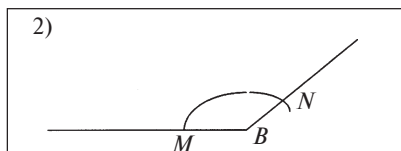
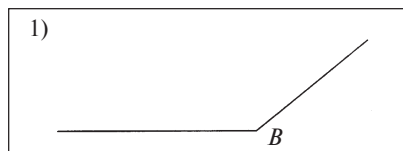
— Почему  $BD = CD$ ? (Мы строили окружности с центрами в точках  $B$  и  $C$  одним и тем же радиусом.)

— Какой третий элемент в треугольниках выделяли для равенства треугольников? ( $AD$  — общая.)

## II. Усвоение алгоритма построения биссектрисы угла

На доске заранее приготовлены рисунки, которые по мере ответов учеников открываются. Ученики по этим рисункам определяют, с чего начинается построение биссектрисы угла, затем проверяют правильность этого шага на соответствующем рисунке, по нему проговаривают, каким будет следующий шаг, свой ответ проверяют на следующем рисунке и т. д.

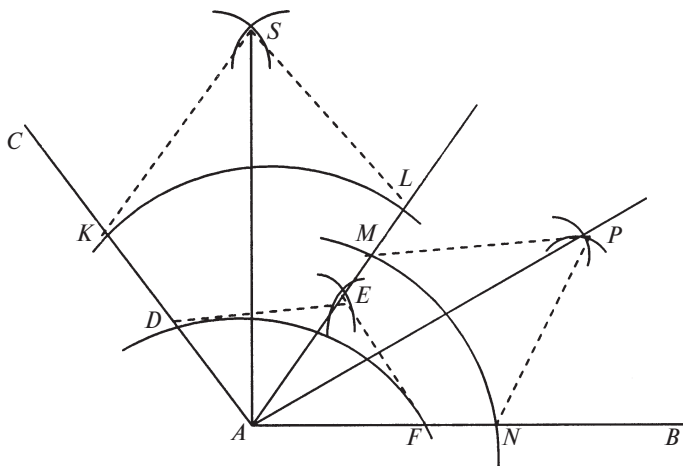
**Задание 4.** Ученику требовалось построить биссектрису угла  $B$ . Опишите последовательность его действий.



### III. Закрепление алгоритма построения биссектрисы угла

**Задание 5.** Постройте угол, равный  $81^\circ$ , и разделите его пополам.

**Задание 6.**  $\angle BAC$  разделили на четыре равные части. По чертежу объясните процесс деления данного угла на четыре равные части.



**Задание 7.** Дан  $\triangle ABC$ . Постройте биссектрису угла  $B$ .

**Задание 8.** Дан четырехугольник  $ABCD$ . Постройте биссектрису угла  $D$ .

#### Приложение 5

#### Система упражнений, связанная с формированием операции (умения)

Система упражнений, связанная с формированием операции (умения) должна включать в себя:

- 1) задания на подключение образного, словесного и чувственного опыта учащихся;
- 2) задания на подключение предметного или жизненного опыта учащихся;
- 3) задания, связанные с обоснованием операции (умения);
- 4) задания на пошаговую отработку;
- 5) обсуждение частных случаев, включая работу на классификацию;

На этапе  
введения  
алгоритма

На этапе  
усвоения  
алгоритма

6) тренаж разного уровня и формы предъявления, включающий упражнения, снимающие наложение навыков;

7) обучение самоконтролю;

8) решение задач на рассматриваемую операцию (на применение умения);

9) составление учащимися примеров, дидактических игр, задач.

На этапе  
закрепления  
умения

**Пример. Изучение тождеств сокращенного умножения** в учебнике [32].

Рассмотрим изучение тождества  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

Тождество содержит две формулы:

1) формулу квадрата суммы.

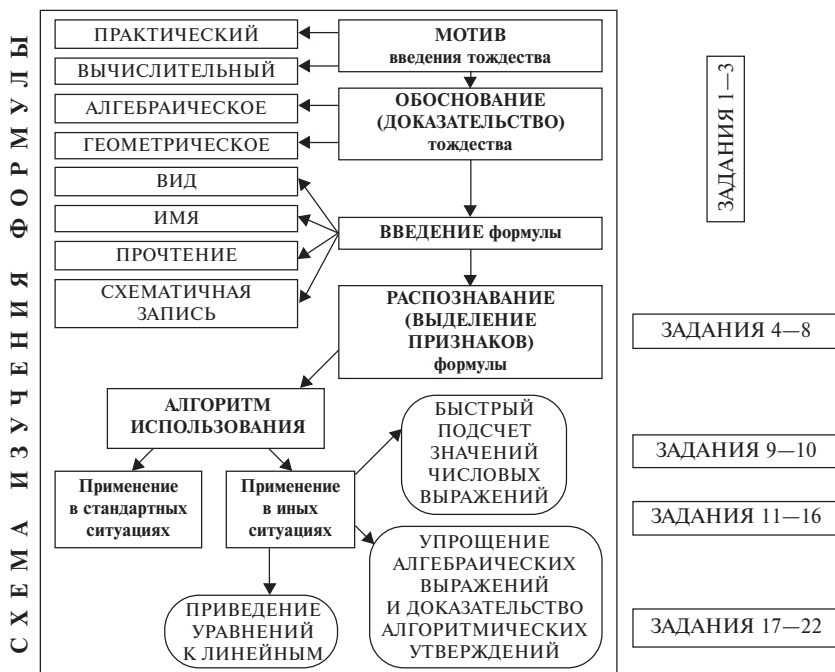
Схема формулы:  $(\Delta + \square)^2 = \Delta^2 + 2\Delta\square + \square^2$

2) формулу полного квадрата.

Схема формулы:  $\Delta^2 + 2\Delta\square + \square^2 = (\Delta + \square)^2$

### КАК ИЗУЧАЕТСЯ ФОРМУЛА?

(Математическая карта разработана А. Колягиным)



## Типичные методические ошибки при формировании умений

Типичными методическими ошибками при формировании умений являются:

### I. Ошибки в подборе содержания:

- для обсуждения на этапе введения выбран частный случай;
- на этапе усвоения отсутствуют упражнения на отработку новых шагов алгоритма, требующих специального тренажа;
- отсутствуют задания, связанные с распознаванием возможности использования алгоритма;
- отсутствуют задания, связанные с усвоением последовательности выполнения алгоритма;
- не вынесены на обсуждение особенности частных случаев использования алгоритма;
- нет заданий на обучение контролю и поиск ошибок.

### II. Ошибки в структуре изложения:

- пропущен этап мотивации;
- пропущен этап усвоения;
- пропущен этап подведения итогов перед переходом к этапу закрепления (в процессе закрепления, при обобщении знаний по формулируемому умению).

### III. Ошибки в ведении диалога:

- предложен монолог вместо диалога;
- вопросы учителя не стимулируют учащихся на самостоятельное составление алгоритма;
- выделенные шаги формулируются в частном, а не в общем виде;
- на этапе закрепления учитель называет сам содержание шагов алгоритма (например, вместо: «Что нужно сделать сейчас?» учитель спрашивает: «Какую величину обозначим за  $x$ ?», хотя этот вопрос должен следовать после того, как ученики сами назовут шаг алгоритма: «Нужно одну из величин обозначить за  $x$ »).

### IV. Ошибки в логике изложения:

- связи с прошлым материалом отсутствуют или являются необоснованными; связь считается необоснованной, если учитель задает вопросы по прошлому материалу, не связывая их с изучаемым умением;
- нет математического обоснования вводимого алгоритма или введение алгоритма не является достаточно убедительным

для учащихся (обоснование алгоритма не является достаточно убедительным для учащихся, если им не ясна идея привлечения именно этого обоснования);

- не показан образец оформления задания;
- не намечены пути дальнейшей работы с алгоритмом.

#### V. Ошибки в организации работы с упражнениями:

- на первоначальном этапе применения алгоритма его этапы не проговариваются вслух;
- контроль выполнения заданий берет на себя учитель, вместо подключения взаимоконтроля и самоконтроля;
- не продумано оказание помощи ученикам, испытывающим затруднения (образцы решения, задания с пропусками, схемы выполнения заданий и т. п.).

## Часть III. Методика изучения теорем

*Методика изучения теорем* включает следующие *этапы*:

- подготовительный этап;
- введение теоремы;
- усвоение теоремы;
- закрепление теоремы.

На *первом*, подготовительном, этапе осуществляется актуализация знаний, необходимых для доказательства теоремы, причем желательно использовать задачи, для решения которых применяется нужный теоретический материал, а не использовать фронтальный опрос теории. На этом этапе, по возможности, проводится мотивация изучения теоремы.

*Введение* формулировки теоремы может осуществляться двумя методами: *конкретно-индуктивным* и *абстрактно-дедуктивным*. В первом случае используют практическую работу или задачу. Во втором случае формулируют теорему сразу. На этапе введения делают чертеж, разбивают формулировку на условие и заключение и делают краткую запись формулировки теоремы (Дано:..., Доказать:...), осуществляют доказательство теоремы. Обязательным требованием к доказательству теоремы является четкое выделение этапов доказательства. Однако не следует выделять много мелких этапов, поскольку в этом случае затруднено их запоминание. Если теорема сложная, то учитель сообщает ученикам идею доказательства, если теорема доказывается методом, известным учащимся, то ученики привлекаются к выделению этапов доказательства, если теорема «прозрачная», то ученики либо сами открывают доказательство

(для чего используются методы анализа или синтеза), либо самостоятельно изучают доказательство по учебнику.

На этапе **усвоения** теоремы повторяется формулировка (Что было дано? Что требовалось доказать? Какова полная формулировка?), основные этапы доказательства (С чего начинали? Что делали дальше? Зачем? Какие теоремы использовались при доказательстве? Какова цель их использования?) и решаются задачи на непосредственное применение теоремы (задачи в один шаг) устного характера на готовых чертежах.

На этапе **закрепления** осуществляется проверка формулировки и доказательства теоремы, и решаются более сложные задачи с применением изученной теоремы. Желательно выделять с учащимися ситуации, в которых применяется теорема. При подведении итогов обсуждается: с каким новым математическим фактом познакомились, какие математические понятия он характеризует, при решении задач каких видов используется этот факт.

## Приложение 7

### Примеры конструирования методики изучения теорем

#### **Методика изучения теоремы Виета**

Согласно методике изучения теорем, весьма важной является работа с условием и заключением теоремы, зафиксированными в ее формулировке. Многие теоремы имеют сложное условие, состоящее из нескольких утверждений, и сложное заключение. Их выделению способствует логико-математический анализ формулировки теоремы. Выделенные условия помогают составить упражнения на проверку применимости теоремы, а заключения — на выведение следствий из этих условий.

I. Выполним *логико-математический анализ формулировки* теоремы Виета: *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.*

Теорема сформулирована в категоричной форме.

**Разъяснительная часть:** теорема рассматривается на множестве квадратных уравнений.

**Условие:** 1) уравнение приведенное;

2) уравнение имеет действительные корни.

**Заключение:** 1) сумма корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком;

2) произведение корней равно свободному члену.

Теорема сложная, так как в ней два условия и два заключения.

II. Рассмотрим этапы изучения теоремы.

### Подготовительный этап

С целью «открытия» формулировки теоремы, повторения формул решения квадратных уравнений и условия их существования целесообразно включить в домашнюю работу учащихся задание по заполнению следующей таблицы.

| Уравнения                              | Корни |       | $x_1 + x_2$ | $x_1 \cdot x_2$ | $x_1 : x_2$ |
|----------------------------------------|-------|-------|-------------|-----------------|-------------|
|                                        | $x_1$ | $x_2$ |             |                 |             |
| $x^2 - 2x - 4 = 0$                     |       |       |             |                 |             |
| $x^2 + 12x + 30 = 0$                   |       |       |             |                 |             |
| $x^2 - 1,25x + 0,375 = 0$              |       |       |             |                 |             |
| $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ |       |       |             |                 |             |
| $x^2 + x - 30 = 0$                     |       |       |             |                 |             |
| $x^2 + x + 30 = 0$                     |       |       |             |                 |             |
| $3x^2 - x - 2 = 0$                     |       |       |             |                 |             |

### Введение теоремы

Обобщая результаты наблюдений в заполненной таблице, школьники самостоятельно смогут «открыть» формулировку теоремы: *Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.* В таблице рассматривались три известные учащимся операции с числами (корнями уравнения). Такое «экспериментирование» с числами позволяет не только прийти к «открытию» теоремы Виета, но и показать учащимся пути новых открытий: можно составлять различные выражения с корнями уравнения и обнаруживать (или отвергать) закономерную связь их значений с коэффициентами уравнения.

Работа над структурой формулировки теоремы приводит к выделению ее условия и заключения. На доске и в тетрадях

делается краткая запись формулировки, т.е. выделяется, что дано и что требуется доказать:

Дано:

$$x_2^2 + px + q = 0;$$

$x_1, x_2$  — корни уравнения.

Доказать:

$$x_1 + x_2 = -p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

*Поиск путей доказательства* можно осуществить аналитически и синтетически. В первом случае выясняется, что для доказательства данных равенств надо вычислить корни  $x_1$  и  $x_2$  приведенного квадратного уравнения, а затем найти их сумму и произведение. Во втором случае обращаются к условию и выясняют: «Что можно найти, имея квадратное уравнение? Помогут ли найденные корни уравнения для доказательства?». (Другое доказательство можно получить, оттолкнувшись от условия, что  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения.) Поиск доказательства завершается следующим планом его осуществления:

1. Записать формулы для нахождения  $x_1$  и  $x_2$ .
2. Найти сумму корней  $x_1 + x_2$ .
3. Найти произведение корней  $x_1 \cdot x_2$ .

Оформление доказательства на доске и в тетрадях может иметь следующий вид:

1. Так как  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , то

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}, \quad \text{где } D = p^2 - 4q \geq 0.$$

$$2. \quad x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = -p.$$

$$3. \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p + \sqrt{D}) \cdot (-p - \sqrt{D})}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

### Усвоение теоремы

Для усвоения формулировки теоремы учитель предлагает следующие задания:

- определите, верно ли сформулирована теорема: сумма корней квадратного уравнения равна второму коэффициенту,

взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену;

- повторите формулировку теоремы;
- сформулируйте теорему со словами «Если ..., то ...».

Для усвоения *этапов доказательства* учитель просит учащихся повторить их, а также уточнить те математические факты, которые используются в ходе доказательства.

Перед решением *заданий на непосредственное применение* доказанной теоремы уместно выяснить, какие задачи можно решать с помощью доказанной теоремы, для чего можно поставить такие вопросы:

- Что позволяет находить доказанная теорема? (Сумму и произведение корней квадратного уравнения.)
- Что в этом случае должно быть дано (известно)? (Квадратное уравнение, которое является приведенным, имеющим корни.)

После этого предлагаются учащимся следующие задания.

**Задание 1.** Выберите, для каких квадратных уравнений можно применить доказанную теорему и обоснуйте свой выбор:

- 1)  $x^2 - 37x + 27 = 0$ ;
- 2)  $2x^2 - 9x - 10 = 0$ ;
- 3)  $x^2 - 3x + 5 = 0$ .

(Только для уравнения 1), поскольку уравнение 2) не является приведенным, а уравнение 3) не имеет действительных корней.)

**Задание 2.** Найдите сумму и произведение корней квадратного уравнения (устно):

- 1)  $x^2 - 37x + 27 = 0$ ;
- 2)  $x^2 - 210x = 0$ ;
- 3)  $x^2 - 19 = 0$ .

**Задание 3.** Не решая квадратного уравнения, определите знаки его корней (устно):

- 1)  $x^2 - 3x + 3 = 0$ ;
- 2)  $x^2 + 6x - 8 = 0$ ;
- 3)  $x^2 - 2x - 9 = 0$ .

(Следует обратить внимание на то, что первое уравнение вообще не имеет действительных корней. Задание фиксирует внимание учащихся на необходимость проверки условия существования корней приведенного квадратного уравнения. Поэтому после выполнения задания при подведении его итогов полезно спросить, что необходимо сначала проверить при обращении к результатам теоремы.)

Перед выполнением задания 4 полезно поставить вопрос, можно ли выразить сумму и произведение корней произвольного квадратного уравнения.

**Задание 4.** Найти сумму и произведение корней квадратного уравнения:

1)  $2x^2 - 9x - 10 = 0$ ;

2)  $ax^2 + bx + c = 0$ .

В случае затруднения предложить следующую подсказку:

1. Замените данное уравнение равносильным ему приведенным квадратным уравнением. (Возможен вопрос: «Что мешает применению доказанной теоремы?»)

2. Укажите наличие действительных корней квадратного уравнения. (Возможен вопрос: «Итак, получили приведенное квадратное уравнение. Можно ли теперь находить сумму и произведение его корней?»)

3. Запишите равенства, используя доказанную теорему, и сделайте вывод о сумме и произведении корней квадратного уравнения.

В результате проделанной работы на доске и в тетради должны появиться следующие записи:

|                                                                                                                                                   |                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $2x^2 - 9x - 10 = 0;$ $x^2 - \frac{9}{2}x - 5 = 0;$ $D = \frac{81}{4} + 20 = \frac{161}{4} > 0;$ $x_1 + x_2 = \frac{9}{2};$ $x_1 \cdot x_2 = -5.$ | $ax^2 + bx + c = 0;$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$ $D \geq 0;$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Подводя *итог этапу усвоения*, учитель выясняет, какие задачи можно решать с помощью рассмотренной теоремы, какова схема их решения.

Схема решения:

1) проверить, имеет ли квадратное уравнение действительные корни;

2) выяснить, является ли квадратное уравнение приведенным или нет;

3) если квадратное уравнение является приведенным, то воспользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p, \\ x_1 \cdot x_2 &= q \end{aligned} \right\},$$

если квадратное уравнение является произвольным, то воспользоваться формулами

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Полезно вернуться к началу урока и выделить все приемы рассуждений, которые использовались (иными словами, выделить гуманитарный потенциал темы). К таким приемам относятся: 1) индукция для открытия новых фактов; 2) анализ или синтез для поиска путей возможных доказательств; 3) прием сведения к известному при работе с квадратным уравнением, не являющимся приведенным; 4) аналогия при работе с конкретным уравнением и уравнением общего вида. Возвращаясь к таблице, использовавшейся на первом этапе урока, можно закрывая те или иные записи, составить различные задачи с применением теоремы Виета, а также подойти к обратной теореме.

Завершая этап усвоения, учитель сообщает, что сегодня на уроке работали с теоремой, которая называется теоремой Виета по имени знаменитого французского математика Франсуа Виета (1540—1603). Эта теорема отражает еще одну **связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения**.

Для общего случая квадратного уравнения формулировку теоремы можно продекламировать в стихотворной форме:

*По праву достойна в стихах быть воспева*

*О свойствах корней теорема Виета.*

*Что лучше, скажи, постоянства такого:*

*Умножишь ты корни — и дробь уж готова?*

*В числителе  $c$ , в знаменателе  $a$ .*

*А сумма корней тоже дроби равна,*

*Хоть с минусом дробь, что за беда!*

*В числителе  $b$ , в знаменателе  $a$ . ([48], 1992, № 2—3, С. 29.)*

### Закрепление теоремы

*Закрепление теоремы* Виета и ей обратной осуществляется при отработке навыков их применения при решении упражнений следующих видов:

- проверка правильности вычисления корней;
- подбор целых корней приведенного квадратного уравнения с целыми коэффициентами;

- определение знаков корней уравнения (если они существуют), не решая его;
- доказательство того, что уравнение не может иметь корни одинаковых (разных) знаков.

На последующих уроках полезно предлагать упражнения более высокого уровня сложности. Приведем пример такого задания.

**Задание.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  – корни уравнения  $x^2 + 7x - 11 = 0$ . Не решая уравнения, найдите значения следующих выражений:

а)  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ; б)  $x_1^2 + x_2^2$ ; в)  $(x_1 - x_2)^2$ ; г)  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ ; д)  $x_1^3 + x_2^3$ .

### **Методика доказательства теоремы о средней линии трапеции**

Прежде всего, отметим, что согласно учебникам [11] и [90] трапеция изучается в теме «Четырехугольники». В учебнике [90] средняя линия трапеции и ее свойства рассматриваются в этой же теме и доказываются, опираясь на теорему о средней линии треугольника.

В учебнике [11] средняя линия и ее свойства рассматриваются в теме «Векторы». Доказательство свойств опирается на действия над векторами, признак и свойства коллинеарных векторов.

Остановимся на варианте из учебника [90]. Выполним логико-математический анализ теоремы «*Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме*».

Теорема сформулирована в категорической форме. Сформулируем ее в имплицативной форме, выделив явно разъяснительную часть: *в любой трапеции, если отрезок есть ее средняя линия, то он параллелен основаниям и равен их полусумме*.

В такой формулировке явно видна структура теоремы:

**Разъяснительная часть:** в любой трапеции.

**Условие:** отрезок есть средняя линия трапеции.

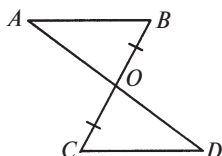
**Заключение:** 1) отрезок параллелен основаниям;  
2) отрезок равен полусумме оснований.

Теорема содержит два заключения, значит, она сложная по структуре (но не обязательно сложным является ее доказательство).

### *Подготовительный этап*

Проанализировав доказательство теоремы, следует выделить опорные знания (задачи) и повторить (решить) их на этапе актуализации. В данном случае следует повторить свойство параллельных

прямых и признак равенства треугольников через решение следующей задачи:



Дано:  $AB \parallel CD$ ;  $BO = CO$ .

Доказать:  $\triangle ABO = \triangle DCO$ .

### Введение теоремы

Возможно дедуктивное введение теоремы и синтетический способ ее доказательства.

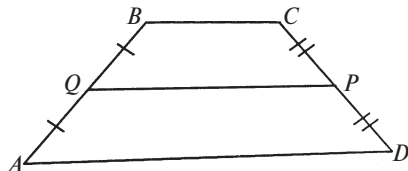
Свойства средней линии можно «открыть» параллельно с процессом построения средней линии в произвольной, равнобокой и прямоугольной трапециях. Учащимся предлагается:

1. Сравнить визуально взаимное расположение средней линии и оснований трапеции.

2. Построить отрезок, длина которого равна сумме длин оснований трапеции. Сколько раз средняя линия укладывается на этом отрезке?

Можно использовать аналогию со средней линией треугольника для «открытия» теоремы. Возможны вопросы: «Для какой фигуры, кроме трапеции, определено понятие средней линии, какими свойствами обладает средняя линия этой фигуры?». В случае затруднений с длиной средней линии, можно предложить учащимся «поэкспериментировать» с отрезками (основаниями трапеции и средней линией). Возможно и использование приема реконструкции фигуры для обнаружения закономерных связей. Так, уменьшение длины одного из оснований трапеции до нуля, превращает трапецию в треугольник, причем средняя линия трапеции превращается в среднюю линию треугольника. Увеличение основания трапеции на 1 единицу длины увеличивает среднюю линию на  $\frac{1}{2}$  единицы.

На основе выполнения задания выдвигается гипотеза. Далее формулируется теорема, делается чертеж, записывается, что дано и что требуется доказать.



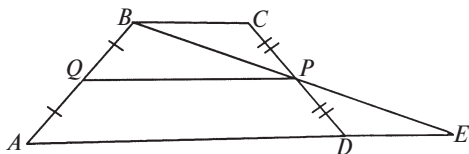
Дано:  $ABCD$  — трапеция,  
 $AD$  и  $BC$  — основания,  
 $QP$  — средняя линия.

Доказать: 1)  $QP \parallel AD$ ,  $QP \parallel BC$ ;

$$2) QP = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

Поиск идеи доказательства (анализ) желательно осуществить совместно с учащимися. Выясняем, что для доказательства параллельности средней линии основаниям трапеции, достаточно доказать параллельность одному из оснований.

Использование аналогии в свойствах средней линии трапеции и треугольника позволяет сделать вывод о том, что для доказательства свойств средней линии трапеции желательно построить треугольник, средняя линия которого совпадает со средней линией трапеции.



Намечают с учащимися основные пункты доказательства: если доказать, что  $QP$  — средняя линия в построенном треугольнике, а  $AE$  равно сумме оснований, то теорема будет доказана. Вопрос: «Что для этого необходимо доказать и как?» позволяет составить план доказательства.

Доказательство:

1. Дополнительное построение:  $BP \cap AD = E$ .

2. Рассмотрим  $\triangle BCP$  и  $\triangle EDP$ . В них:

а)  $CP = DP$  ( $P$  — середина  $CD$ ),

б)  $\angle BPC = \angle EPD$  (как вертикальные),

в)  $\angle BCP = \angle EDP$  (как накрест лежащие углы при параллельных  $BC$  и  $AD$  и секущей  $CD$ ).

$\triangle BCP$  и  $\triangle EDP$   
 $\Rightarrow$  (по второму признаку)

Значит,  $BC = DE$ ;  $BP = PE$ .

3. Рассмотрим  $\triangle ABE$ .

$Q$  — середина  $AB$  (по условию),  $P$  — середина  $BE$  (по доказанному), значит,  $QP$  — средняя линия  $\triangle ABE$  (по определению).

$$QP \parallel AE; QP = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC).$$

4.  $AD \parallel BC$  (по определению трапеции),  $QP \parallel AD$  (по доказанному), значит,  $QP \parallel BC$  (по признаку параллельности прямых).

Рационально также применить и другой порядок работы над доказательством:

1) наметить план доказательства;

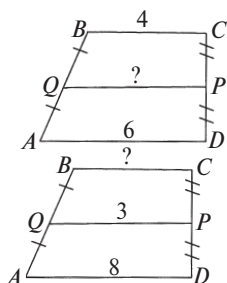
2) провести доказательство устно;

3) провести повторное доказательство с краткой записью.

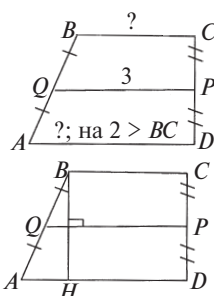
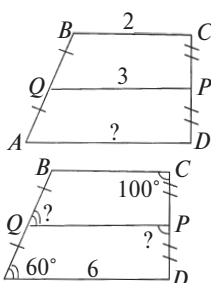
### Усвоение теоремы

Для усвоения содержания теоремы и ее доказательства можно повторить формулировку теоремы и основные этапы ее доказательства или предложить прочитать соответствующий материал в учебнике.

В качестве заданий на непосредственное применение свойств средней линии трапеции можно использовать устные задачи по готовым чертежам:



Имеет ли задача решение?



Доказать, что  $BH$  — высота трапеции.

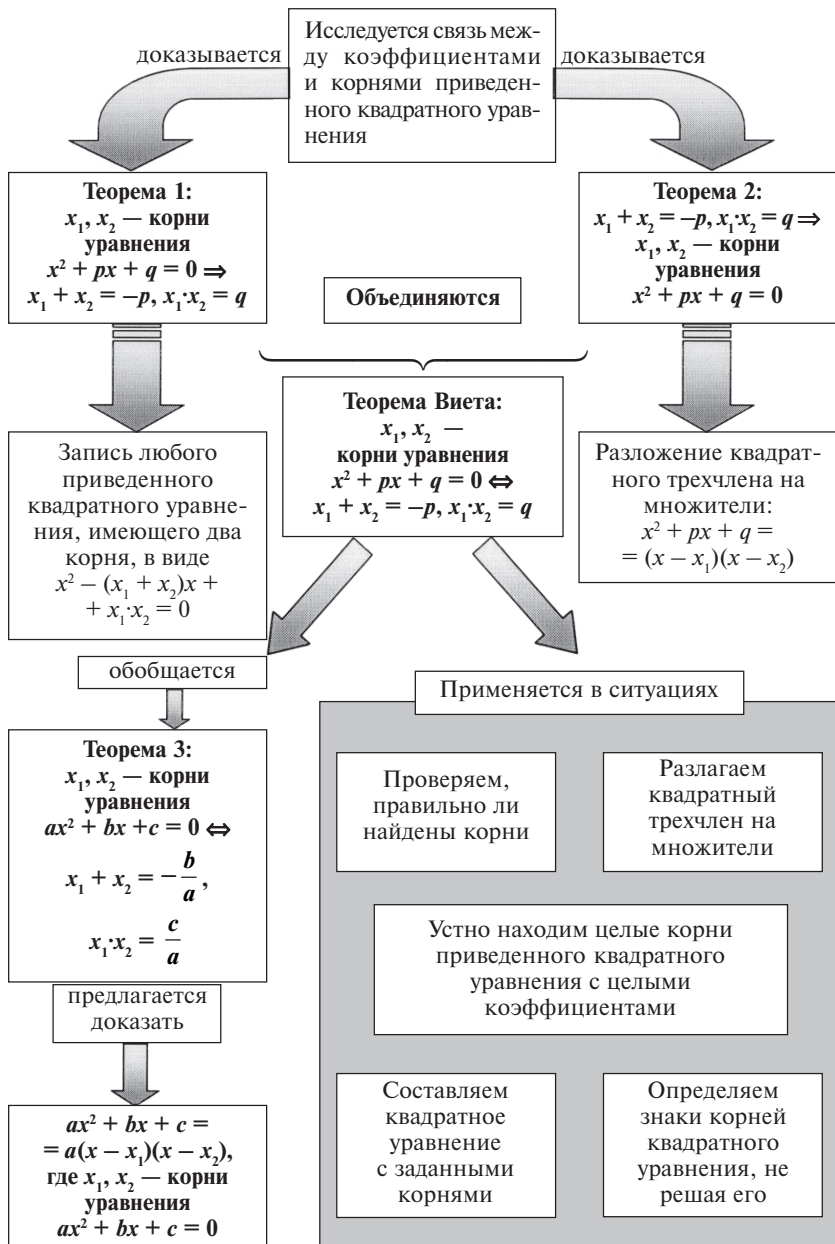
### Приложение 8

#### Система упражнений, связанная с изучением теоремы

Система упражнений, связанная с изучением теоремы должна включать:

- |                                                                                                       |                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|
| 1) задания, при выполнении которых осуществляется актуализация необходимого теоретического материала; | } На подготовительном этапе |
| 2) задания по готовым чертежам на непосредственное применение теоремы;                                |                             |
| 3) задания на выведение следствий из условия теоремы;                                                 | } На этапе усвоения         |
| 4) задания — образцы, связанные с применением теоремы;                                                |                             |
| 5) задания — комплексы;                                                                               | } На этапе закрепления      |
| 6) задания разного уровня сложности;                                                                  |                             |
| 7) открытые задания.                                                                                  |                             |

## Математическая карта изучения теоремы Виета по учебнику [35]



### Типичные методические ошибки при изучении теорем

Типичными методическими ошибками при изучении теорем являются:

#### I. Ошибки в подборе содержания:

- для этапа усвоения не составлены задачи по готовым чертежам;
- задачи на готовых чертежах предложены без обоснованной системы;
- не выделены ситуации, в которых может применяться изученная теорема.

#### II. Ошибки в структуре изложения:

- пропущен этап мотивации;
- пропущен этап усвоения;
- пропущен этап подведения итогов.

#### III. Ошибки в ведении диалога:

- учащиеся не привлекаются к работе с формулировкой теоремы;
- учащимся задаются мелкие вопросы, связанные с доказательством, что сбивает темп усвоения логики доказательства;
- учитель не ставит вопросов, напоминающих ход доказательства (Что теперь нужно доказать? Сможем ли? Почему?);
- учитель решил не привлекать учеников к доказательству, но не озвучил идею доказательства и диалог с самим собой, в результате ученикам остается только механическое запоминание доказательства;
- не продуманы диалоги по повторению основных моментов доказательства;
- не продуманы диалоги по решению задач по готовым чертежам.

#### IV. Ошибки в логике изложения:

- связи с прошлым отсутствуют или являются для учащихся необоснованными;
- не четко выделены этапы доказательства;
- выделены очень мелкие этапы;
- идея доказательства не сформулирована;
- на этапе доказательства четко не просматриваются составляющие части дедуктивного утверждения (посылка, заключение, обоснование);
- не намечены пути дальнейшей работы с изученной теоремой.

#### V. Ошибки в организации работы с теоремой:

- не продумана запись доказательства на доске и в тетрадях учеников;
- не продумана помощь ученикам в запоминании теоремы;
- не намечены способы опроса доказательства с целью успешного усвоения каждым учеником.

### **Часть IV. Методика работы с математическими заданиями**

*Методика работы с математическими заданиями* разрабатывается в соответствии с этапами деятельности (анализ условия, представление условия в удобной форме, поиск способов решения, оформление решения, исследование полученных результатов и извлечение пользы на будущее), а также с учетом методики формирования математических умений.

Приступая к решению какой-либо задачи, часто бывает полезно узнать, какого она вида. Ведь зная вид задачи, в большинстве случаев можно знать и способы ее решения. В этой части приложений показана методика работы с отдельно взятой задачей определенного вида при условии, что ученики уже сталкивались с похожими задачами, но испытывают затруднения в их решении. В этом случае рекомендуется соблюдать этапы работы над задачей и организовывать специальный диалог с учащимися, сопровождающийся графическими иллюстрациями, поскольку современная методика опирается на психологические требования учета различных способов представления информации и оперирования с ней. При работе с математическими заданиями уделяется большое внимание наиболее сложным этапам: анализу условия задачи и поиску способов ее решения.

В приложениях рассматриваются:

- методика работы с вычислительным заданием;
- методика работы с текстовой задачей;
- методика работы с геометрической задачей на доказательство;
- методика работы с геометрической задачей на построение;
- оформление в виде граф-схемы этапа поиска решения геометрической задачи на вычисление;
- различные виды задач (стандартная, обучающая, поисковая, проблемная), пути их составления и преобразования.

## Разработка методики выполнения задания

I. Выяснить *математическую* сущность задания. Для этого нужно:

- решить задание;
- продумать возможные способы решения и их оформление;
- выяснить математические основы способов решения.

II. Определить *методические* основы выполнения задания. Для этого нужно:

- 1) определить **назначение** задания;
- 2) продумать **мотивацию** выполнения задания;
- 3) предложить возможные варианты **организации** работы над заданием во время урока. Предусмотреть две ситуации:

Задание используется *при изучении* нового материала.

*Основы:* методика формирования умений.

**В диалоге** озвучиваются основные этапы выполнения задания.

Задание предложено *для закрепления*.

*Основы:* после анализа условия составляется план работы с заданием, а далее следует самостоятельная работа учащихся.

**В диалоге** задаются общие вопросы типа: «Как мы поступаем, если требуется...?», «С чего начинаем...?», «Что делаем дальше?» и т. п.

Продумывать вопросы для подведения итогов по выполнению задания.

4) предусмотреть возможные **трудности и ошибки** и продумать оказание помощи учащимся для их преодоления или предупреждения.

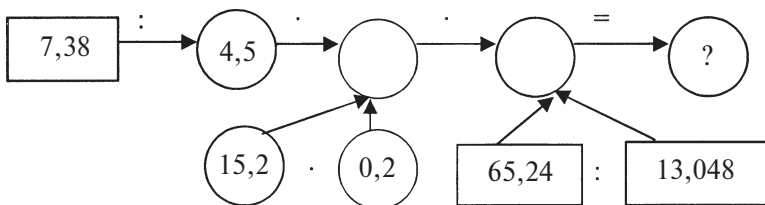
III. Разработать или подобрать *дополнительные* задания:

- для предварительной работы;
- на отработку отдельных этапов выполнения задания;
- на закрепление для тех, кто может испытывать затруднения при выполнении задания.

**Пример** выполнения задания, связанного с *нахождением значения выражения*:

1. Составьте свою схему решения примера и сравните с предложенной:

$$(7,38 : 4,5 \cdot (15,2 \cdot 0,2)) \cdot (65,24 : 13,048)$$



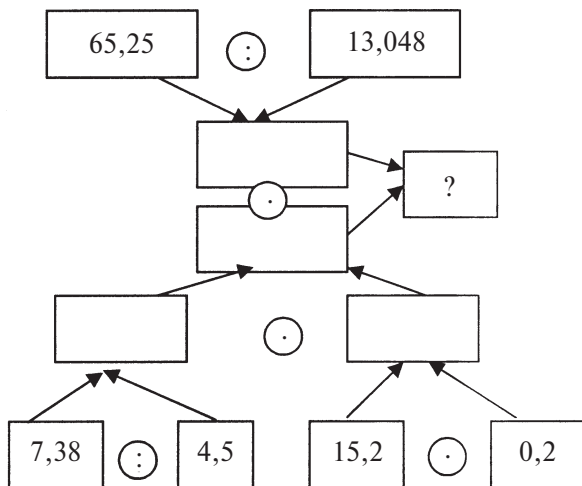
Найдите значение числового выражения.

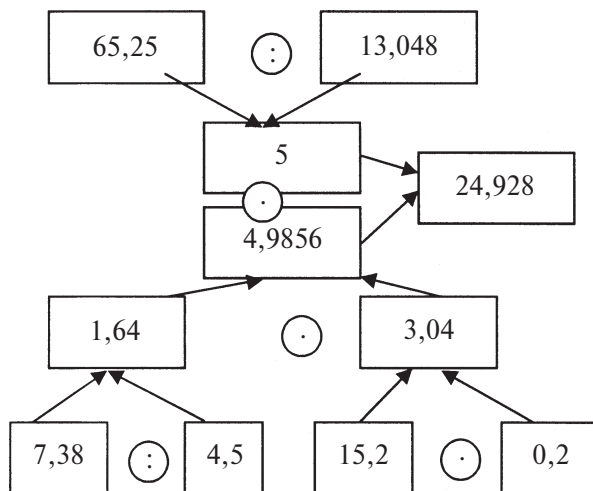
2. Составьте схему решения примера и решите его:

$$(0,78 + 1,14) : (1,14 : (1,14 - 0,76)) + 0,054 : 0,012.$$

### Выясним математическую сущность задания

Это задание на все действия с десятичными дробями. Числовое выражение содержит скобки, что влияет на выбор порядка действий. Последнее действие — умножение, значит, на основе переместительного закона умножения результат не изменится, если изменить порядок работы с его компонентами. Поэтому задание может быть выполнено по следующей схеме (с последующим заполнением):





**Решение** задания в тетрадях выглядит так: записано условие примера, в нем расставлен порядок действий; начерчена своя схема решения; в ней разными пастами отмечены данные числа и результаты промежуточных действий; подсчеты результатов выполняются на черновиках; в схеме выделен окончательный результат, он же записан и в данном примере.

### Определим методические основы выполнения задания

1. Задание **направлено** на обучение учащихся решению примеров на все действия, где очень важен правильный порядок действий и составление выражений для каждого действия.

2. **Мотивировать** выполнение задания можно так: «Часто приходится передавать сообщение разными способами. При выполнении заданий на все действия можно не выписывать отдельно каждое действие, а рисовать схемы. В них можно увидеть, какие действия выполняются, с какими числами, что делать с полученным результатом. Иногда это очень удобно, особенно, если работать с машинами».

### 3. Организация работы с заданием.

*Рассмотрим ситуацию, когда задания такого типа являются новыми для ребят.*

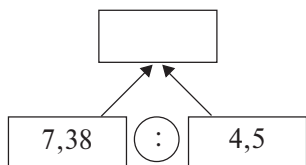
## Вариант 1

(Если большинство учащихся самостоятельно не могут справиться с заданием, то предполагается фронтальная **организация** работы.)

**На этапе анализа** условия задания и **поиска решения** возможен такой диалог (условие примера и схема его выполнения записаны на доске заранее):

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• Что известно в задании? (Дан пример на все действия.)</li> <li>• Как мы обычно поступаем, когда надо решить пример на все действия? (Сначала определяем порядок действий, а потом выполняем каждое действие.)</li> <li>• Есть ли правило, по которому можно определить порядок действий? (Сначала выполняют действия в скобках, а потом слева направо действия умножения или деления, а затем действия сложения или вычитания.)</li> <li>• Так мы обычно работали, а что просят сделать в данном задании? (Составить схему решения примера.)</li> <li>• Попробуйте описать, что вы видите на предлагаемой схеме. (Выслушиваются ответы.)</li> <li>• Попробуйте описать начало работы по схеме. (Нужно 7,38 умножить на 4,5.)</li> <li>• Что делать с результатом? (Его надо запомнить или отдельно выписать.)</li> <li>• Можно ли было начать с другого участка схемы? (Можно было 65,24 разделить на 13,048.)</li> <li>• Что в таком случае сделали бы с результатом? (Вписали бы в свободный кружок, к которому подходит стрелка от чисел 65,24 и 13,048.)</li> <li>• Есть другой вариант начала работы? (Можно 15,2 умножить на 0,2, а результат записать в свободный кружок, к которому подходят стрелки от чисел 15,2 и 0,2.)</li> <li>• Выберите для себя начало работы по схеме и попробуйте расставить порядок всех дальнейших действий. (Самостоятельная работа с последующей взаимопроверкой.)</li> <li>• Есть ли вопросы по схеме? Итак, со схемой разобрались, теперь вернемся к примеру. Связана ли предложенная схема с заданным примером? Если да, то назовите, что в них общего. (В них одни и те же числа, одни и те же операции действий, один и тот же порядок действий.)</li> </ul> | Увидим знакомую<br>ситуацию! |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Изучим<br>рисунок!           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Поймем первый<br>шаг работы! |

- Вернемся к заданию. Что просят сделать? (Составить свою схему решения.)
- Как вы предполагаете выполнить это задание? Чем ваша схема может отличаться от рассмотренной? (Необязательно рисовать кружки, можно строить только прямоугольники, можно поменять расположение отдельных частей. Важно только, чтобы порядок действий соответствовал примеру, и было ясно, с какими числами работаем, что делаем с результатом.)
- Посмотрите на другой вариант построения начала схемы:

Сначала  
подумаем!Сделаем  
первый шаг!

(Здесь показано, с какими числами работаем, какое действие выполняем, куда записать результат.)

Затем ученики продолжают по очереди строить схему на доске.

## Вариант 2

Ученики самостоятельно продумают ответы на вопросы:

- а) Как устроена схема?
- б) Как работать по схеме?
- в) Как схема связана с примером?

Затем кто-то из учеников объясняет свой ответ (выступает в роли учителя), остальные ученики задают уточняющие вопросы. Если вопросов не будет, то сам учитель такие вопросы должен задать с тем, чтобы помочь каждому разобраться с заданием. («Как ты догадался, с какого участка начать, какое действие выполнять, что делать с результатом?», «Можно ли было начать с другого участка схемы?»)

Не  
бросаем!

*Рассмотрим ситуацию, когда задание предложено для закрепления.*

Условие примера записывается на доске и сообщается задание: «Составить схему решения примера». Далее возможен такой диалог по обсуждению плана работы:

- Из чего состоит схема решения? (Это фигуры для данных чисел и для результатов действий, это знаки действий, стрелки для движения по схеме.)
- Как мы поступаем, если требуется составить схему решения примера? (Определяем порядок действий, описываем схематически каждое действие.)
- Расставьте порядок действий и скажите, с какого действия начнете составление схемы.

Сначала  
подумаем!

Дальнейшая **организация** может быть такой:

- ученики по очереди строят фрагменты схемы;
- пара учеников выполняют построение одной схемы на доске;
- пара учеников выполняют построения своих схем на доске;
- все ученики работают самостоятельно по составлению схемы, а затем обсуждаются интересные варианты;
- конструируются схемы с помощью наглядного пособия.

По окончании составления схемы ученики самостоятельно ее заполняют, затем сверяют результаты последнего действия и промежуточных результатов.

Завершая работу с заданием, важно задать вопрос: «**Что полезного учтем на будущее?**» (При выполнении примеров на все действия удобно строить схемы; схемы можно составлять по-разному; возможен различный порядок работы со схемой.)

Задание 2 можно предложить на дом, предварительно предложив ученикам задать по заданию уточняющие вопросы.

#### 4. Предотвращение трудностей и ошибок.

Для предотвращения **трудностей** при выполнении задания следует соединять словесное и образное описание работы, показ движений по схеме. Помогут и ключевые вопросы: какое первое действие? с какими числами работаем? как показать, какое действие выполняем? куда записываем результат?

В случае **ошибок** при вычислениях возможен такой диалог:

— Какое действие нужно было выполнить? (Разделить на десятичную дробь.)

— Какая особенность в действии  $65,24 : 13,048$ ? (В делителе больше десятичных знаков, чем в делимом, поэтому в делимом надо приписать один ноль, когда заменяем деление на десятичную дробь делением на натуральное число.)

Общие  
вопросы!

**Дополнительные задания:**

1) Заполните схему:



(Можно схему усложнить, важно только научиться читать ее.)

2) Верно ли расставлен порядок действий:

$$7,2 \overset{2}{\cdot} 6,2 \overset{1}{-} 4,9 \overset{5}{+} 250 \overset{4}{:} (8 \overset{3}{-} 5,5)$$

Измените условие примера так, чтобы расставленный порядок действий оказался правильным. (Нужно разность  $6,2 - 4,9$  заключить в скобки.)

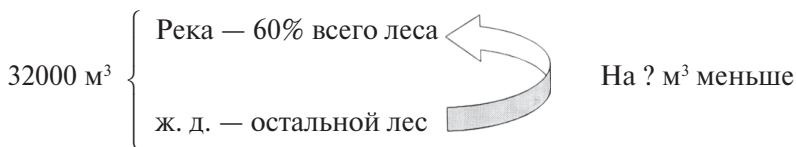
*Приложение 11***Методика работы с текстовой задачей****Методика работы с текстовой задачей,  
решаемой арифметическим методом**

**Задача.** Лесорубы заготовили  $32000 \text{ м}^3$  строительного леса; 60% заготовленного леса сплавили по реке, а остальное отправили по железной дороге. На сколько кубометров леса меньше отправлено по железной дороге, чем по воде?

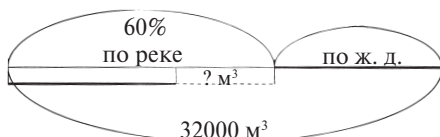
**I этап. Анализ условия задачи**

| Деятельность учителя                 | Деятельность ученика                                                                                                      |
|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. О чем идет речь в задаче?         | 1. О лесе.                                                                                                                |
| 2. Что происходит по условию задачи? | 2. Часть заготовленного леса сплавляют по реке, а остальной лес — отправляют по железной дороге.                          |
| 3. Что известно из условия задачи?   | 3. а) заготовлено леса $32000 \text{ м}^3$ ,<br>б) отправлено по реке 60% леса,<br>в) по железной дороге — остальной лес. |
| 4. Что надо узнать в задаче?         | 4. На сколько меньше леса отправлено по железной дороге, чем по воде.                                                     |

## Схематическая запись задачи



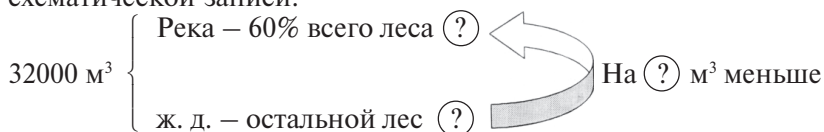
Условие задачи может быть отражено графически:



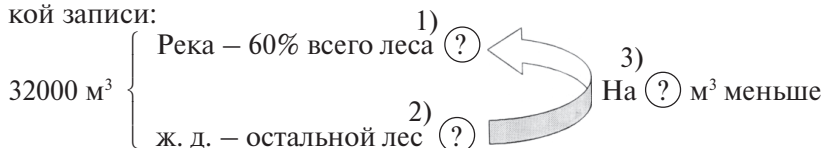
## II этап. Поиск способа решения задачи

| Деятельность учителя                                                                                                                                                                                              | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Что нужно найти в задаче?                                                                                                                                                                                      | 1. На сколько кубометров леса меньше отправлено по железной дороге, чем по воде?                                                                                                                                                                                                |
| 2. Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос задачи?                                                                                                                                                              | 2. Сколько леса отправлено по воде и сколько леса по железной дороге.                                                                                                                                                                                                           |
| 3. Можно ли найти количество леса, отправленного по реке?<br>Как мы поступаем с процентами, заданными в условии задачи?<br>Итак, как можно сформулировать задачу о поиске количества леса, отправленного по реке? | 3. 32000 м <sup>3</sup> — это 100%. Надо найти 60% от всего количества. Переводим проценты в десятичную дробь.<br>Надо найти 0,6 от 3200 м <sup>3</sup> .                                                                                                                       |
| 4. Можно ли найти количество леса, отправленного по железной дороге?                                                                                                                                              | 4. Можно, нужно от всего количества леса вычесть количество леса, отправленного по реке.                                                                                                                                                                                        |
| 5. Можно ли теперь ответить на вопрос задачи?                                                                                                                                                                     | 5. Можно, нужно от количества леса, отправленного по реке, вычесть количество леса, отправленного по железной дороге.                                                                                                                                                           |
| 6. Отсюда возникает план решения задачи. Назовите его, указав, с помощью каких операций осуществляется каждое действие.                                                                                           | 6. 1) Найти количество леса, отправленного по реке (с помощью умножения).<br>2) Найти количество леса, отправленного по железной дороге (с помощью вычитания).<br>3) Найти, на сколько кубометров леса меньше отправлено по железной дороге, чем по воде (с помощью вычитания). |

Поиск способа решения задачи может быть оформлен в ее схематической записи:



План решения задачи также может быть отражен в ее краткой записи:



### III этап. Оформление решения задачи

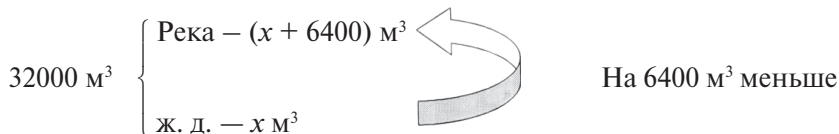
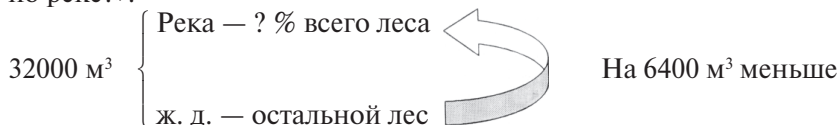
1)  $32000 \cdot 0,6 = 19200$  (м<sup>3</sup>) — количество леса, отправленного по реке.

2)  $32000 - 19200 = 12800$  (м<sup>3</sup>) — количество леса, отправленного по железной дороге.

3)  $19200 - 12800 = 6400$  (м<sup>3</sup>) — на столько кубометров леса меньше отправлено по железной дороге, чем по воде.

### IV этап. Проверка решения и запись ответа

Осуществим проверку составлением и решением обратной задачи: «Лесорубы заготовили 32000 м<sup>3</sup> строительного леса, часть леса сплавили по реке, а остальное отправили по железной дороге, причем по железной дороге отправлено на 6400 м<sup>3</sup> меньше, чем по воде. Сколько процентов заготовленного леса сплавили по реке?».



$$(x + 6400) + x = 32000, 2x + 6400 = 32000, 2x = 25600, x = 12800.$$

Итак, по железной дороге отправлено  $12800 \text{ м}^3$  леса, тогда по реке —  $19200 \text{ м}^3$ , что составляет 0,6 всего заготовленного леса или 60%. Получили число, которое задано в условии задачи.

Ответ:  $6400 \text{ м}^3$ .

### У этап. Исследование задачи

Можно ли иначе решить задачу?

1. Можно узнать, какое количество леса отправлено по железной дороге, зная, что оно составляет 40% от всего заготовленного леса, а затем ответить на вопрос задачи.

2. Можно узнать, на сколько процентов меньше отправлено по железной дороге, чем по реке, а затем узнать сколько кубических метров леса составляют эти проценты.

**На будущее полезно запомнить**, что условие задачи, связанной с процентами, удобно изображать графически.

### **Методика работы с текстовой задачей, решаемой алгебраическим методом**

**Задача.** Из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми равно 60 км, выехал автобус, а через 20 мин вслед за ним выехал легковой автомобиль, скорость которого на 20 км/ч больше скорости автобуса. Автобус пришел в пункт *B* на 10 мин позже легкового автомобиля. Найдите скорость автобуса и легкового автомобиля.

### І этап. Анализ условия задачи

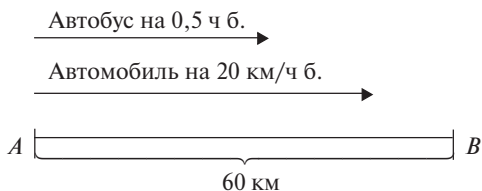
| Деятельность учителя                                                                                                               | Деятельность ученика                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| С чего начинают работу над любой задачей?<br>Итак, проведем анализ условия задачи. (В дальнейшем в роли учителя выступает ученик.) | С анализа ее условия.                                   |
| 1. Какого типа эта задача? (Возможны вопросы: «О чем идет речь в задаче?», «О каком процессе говорится в задаче?»)                 | 1. Задача на движение. (В задаче идет речь о движении.) |

Окончание табл.

| Деятельность учителя                                                                                                                                                                                                                                        | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>2. О каких объектах идет речь в задаче? Каков характер их взаимодействия?</p> <p>Итак, какие части можно выделить в задаче?</p>                                                                                                                          | <p>2. В задаче идет речь об автобусе и легковом автомобиле; они выезжают из одного пункта и едут в одном направлении. Можно выделить две части, одна связана с движением автобуса, вторая — с движением легкового автомобиля.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p>3. Какими величинами характеризуется движение этих объектов? (Возможен вопрос: «Какими ключевыми словами можно описать происходящее в задаче?») Какова связь между этими величинами?</p>                                                                 | <p>3. Движение этих объектов характеризуется тремя величинами: скорость, время, расстояние.</p> $S = v \cdot t$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| <p>4. Что в задаче известно о движении автобуса?</p> <p>Что в задаче известно о движении легкового автомобиля?</p> <p>Уточните известные и неизвестные величины.</p> <p>Какая связь существует в задаче между соответствующими неизвестными величинами?</p> | <p>4. 1) Его скорость на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля.<br/>2) Он вышел из пункта <i>A</i> на 20 мин раньше, а прибыл в пункт <i>B</i> на 10 мин позже, т. е. он был в пути на 30 мин больше, чем легковой автомобиль.<br/>3) Он прошел 60 км.<br/>1) Его скорость на 20 км/ч больше скорости автобуса.<br/>2) Он был в пути на 30 мин меньше, чем автобус.<br/>3) Он прошел 60 км.<br/>Известен путь каждого объекта, неизвестны их скорости и время движения.<br/>1) Скорость легкового автомобиля на 20 км/ч больше скорости автобуса.<br/>2) Автобус был в пути на 30 мин больше, чем легковой автомобиль.</p> |
| <p>5. Что требуется найти?</p> <p>Итак, отбросив всю несущественную информацию, как можно переформулировать задачу в форму, удобную для поиска решения?</p>                                                                                                 | <p>5. Скорость автобуса и скорость легкового автомобиля.<br/><i>Скорость автобуса на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля, время движения автобуса на 30 мин или 0,5 ч больше времени движения легкового автомобиля. Автобус и легковой автомобиль проехали одинаковое расстояние, равное 60 км. Требуется определить скорость автобуса и легкового автомобиля.</i></p>                                                                                                                                                                                                                                                   |

### Схематическая запись задачи

Одновременно с выполнением анализа осуществляется схематическая запись задачи.



Можно запись условия и требования задачи осуществить в виде таблицы:

|            | Скорость        | Время         | Расстояние |
|------------|-----------------|---------------|------------|
| Автобус    | ? на 20 км/ч м. | ? на 0,5 ч б. | 60 км      |
| Автомобиль | ?               |               | 60 км      |

### II этап. Поиск способа решения задачи

| Деятельность учителя                                                                                              | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Итак, что нужно найти в задаче?                                                                                | 1. Скорость автобуса и легкового автомобиля.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 2. Каким методом (по действиям или с помощью уравнения) будем решать задачу?                                      | Задачу будем решать алгебраическим методом.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 3. С чего начинают решение задачи алгебраическим методом? Какое условие можно выбирать для составления уравнения? | 3. С выбора условия для составления уравнения.<br>Любое из данных: <ul style="list-style-type: none"> <li>• скорость автобуса на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля,</li> <li>• время движения автобуса на 0,5 ч больше времени движения легкового автомобиля,</li> <li>• автобус проехал расстояние, равное 60 км,</li> <li>• легковой автомобиль проехал то же расстояние, что и автобус.</li> </ul> |

Окончание табл.

| Деятельность учителя                                                                                                                                                                  | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Какое условие выберем?<br><br>Составьте схему уравнения.                                                                                                                              | Время движения автобуса на 0,5 ч больше времени движения легкового автомобиля<br>$t_1 = t_2 + 0,5$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 4. Итак, условие для составления уравнения выбрали. Что делаем дальше?<br>Какую величину можно обозначать за $x$ ?<br><br>Какую же неизвестную величину мы обозначим за $x$ и почему? | 4. Одну из неизвестных величин обозначаем за $x$ .<br><br>Любую неизвестную (скорость автобуса, скорость автомобиля, время движения автобуса, время движения автомобиля).<br>За $x$ обозначим скорость автобуса, так как она меньше и ее требуется найти.                                                                                                                                                                                                      |
| 5. Итак, $x$ ввели. Что делаем дальше?<br><br>Какие величины нужны, и можно ли их выразить через $x$ ?                                                                                | 5. Остальные неизвестные величины выражаем через $x$ .<br>Нужно время движения каждого объекта, а время находят делением пройденного расстояния на скорость движения, значит, чтобы время выразить через $x$ , нужно знать скорости движения. Скорость автобуса — $x$ км/ч, а скорость легкового автомобиля на 20 км/ч больше, т. е. $(x + 20)$ км/ч.<br>Время движения автобуса $\frac{60}{x}$ ч.<br>Время движения легкового автомобиля $\frac{60}{x+20}$ ч. |
| 6. Итак, нужные величины выразили через $x$ . Сможем ли теперь составить уравнение?                                                                                                   | 6. В схему $t_1 = t_2 + 0,5$ вместо $t_1$ подставим время движения автобуса, т. е. $\frac{60}{x}$ ч вместо $t_2$ — время движения легкового автомобиля, т. е. $\frac{60}{x+20}$ ч.                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 7. Назовите план решения задачи.                                                                                                                                                      | 7. 1) Скорость автобуса обозначаем за $x$ км/ч.<br>2) Выражаем скорость автомобиля и время движения каждого объекта через $x$ .<br>3) Используя связь между временем движения автобуса и легкового автомобиля, составляем уравнение.                                                                                                                                                                                                                           |

### III этап. Оформление решения задачи

Пусть  $x$  км/ч — скорость движения автобуса, тогда  $(x + 20)$  км/ч — скорость легкового автомобиля,  $\frac{60}{x}$  ч — время движения автобуса,  $\frac{60}{x+20}$  ч — время движения легкового автомобиля. По условию задачи  $\frac{60}{x}$  больше  $\frac{60}{x+20}$  на 0,5 ч.

Составим уравнение:

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+20} = \frac{1}{2}$$

Решим уравнение:

$$\frac{60 \cdot 2 \cdot (x+20) - 60 \cdot x \cdot 2 - x(x+20)}{2x(x+20)} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 20x + 2400}{2x(x+20)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 20x - 2400 = 0 \\ 2x(x+20) \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 20x - 2400 = 0 \\ D = 10000, x_1 = 40, x_2 = -60 \end{cases}$$

Оба корня удовлетворяют решению системы и, следовательно, уравнение имеет два корня: 40 и  $-60$ .

Условию задачи удовлетворяет один корень, так как скорость в данной задаче не может быть отрицательной.

Итак, скорость автобуса 40 км/ч. Тогда скорость легкового автомобиля 60 км/ч.

На практике, наряду с развернутой записью решения, часто используется краткая запись. Так, решение может быть отражено помощью таблицы:

|                            | Скорость<br>(км/ч) | Время<br>(ч)      | Расстояние<br>(км) | Уравнение                                                                                                                                  |
|----------------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Автобус</i>             | $x$                | $\frac{60}{x}$    | 60                 | Время движения легкового автобуса на $\frac{1}{2}$ ч больше времени движения автомобиля:<br>$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+20} = \frac{1}{2}$ |
| <i>Легковой автомобиль</i> | $x + 20$           | $\frac{60}{x+20}$ | 60                 |                                                                                                                                            |

Используя обозначения, известные из курса физики, те же самые рассуждения можно оформить в следующем виде:

$$v_1 = x \qquad t_1 = \frac{60}{x} \qquad t_1 - t_2 = \frac{1}{2}$$

$$v_2 = x + 20 \qquad t_2 = \frac{60}{x+20} \qquad \frac{60}{x} - \frac{60}{x+20} = \frac{1}{2}$$

#### IV этап. Проверка решения и запись ответа

1. Ответы соответствуют реальному смыслу задачи.

2. Покажем сначала, как нежелательно осуществлять проверку решения задачи.

Пусть скорость автобуса — 40 км/ч;

$60 : 40 = 1,5$  (ч) — время его движения;

$40 + 20 = 60$  (км/ч) — скорость легкового автомобиля;

$60 : 60 = 1$  (ч) — время движения легкового автомобиля;

$1,5 - 1 = 0,5$  (ч) — разность времени движения, что соответствует условию задачи.

Значит, найденное значение  $x = 40$  удовлетворяет условию задачи.

Фактически в этом случае проверка решения задачи свелась

к подстановке значения корня  $x = 40$  в уравнение  $\frac{60}{x} - \frac{60}{x+20} = \frac{1}{2}$ .

Проверка решения должна проводиться по условию задачи, а не по оставленному уравнению, так как при составлении можно получить неверное уравнение, а решив его верно и проверив корни, мы установим только, что они удовлетворяют уравнению.

Чтобы этого избежать, желательно проверять так, чтобы в последнем вопросе проверки бралась та зависимость, которая не была использована в качестве главного данного при составлении уравнения. В нашем случае уравнение было составлено по разности времени движения; в последнем действии проверки надо получить иное данное (разность скоростей; один и тот же путь, пройденный объектами и т. д.).

Практически это означает, что для проверки решения задачи мы должны взять найденное значение неизвестного и часть

данных; составить и решить новую задачу; в результате получить значение одного из данных задачи, которое не использовалось как главное при составлении уравнения.

Проверим, например, будет ли скорость легкового автомобиля больше скорости автобуса на 20 км/ч.

Пусть скорость автобуса равна 40 км/ч, тогда время его движения —  $60 : 40 = 1,5$  (ч). Время движения легкового автомобиля на 0,5 ч меньше, т. е. равно  $1,5 - 0,5 = 1$  (ч). Скорость легкового автомобиля равна  $60 : 1 = 60$  (км/ч), что соответствует условию задачи ( $60 - 40 = 20$  (км/ч)).

Итак, задача решена верно.

Ответ: 40 км/ч, 60 км/ч.

*Примечание.* Данной проверке соответствует следующая задача: Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 60 км, выехал автобус со скоростью 40 км/ч, а через 20 мин вслед за ним выехал легковой автомобиль. Автобус пришел в пункт В на 10 мин позже легкового автомобиля. На сколько км/ч скорость легкового автомобиля больше скорости автобуса?

## У этап. Исследование задачи

В исследовании выясняется, можно ли задачу решить иначе, и что из работы над задачей полезно запомнить на будущее.

Можно предположить другие способы решения.

**Можно выбрать другое условие для составления уравнения.** Если за основание для составления уравнения выбрать то, что расстояние, пройденное автобусом, равно 60 км, то получим уравнение:

$$\left( \frac{60}{x+20} + 0,5 \right) x = 60.$$

Если за основание для составления уравнения выбрать то, что скорость легкового автомобиля больше скорости автобуса на

20 км/ч, то получим уравнение:  $60 : \left( \frac{60}{x} - 0,5 \right) = x + 20.$

**Можно решить задачу с помощью системы уравнений:**

$$\begin{array}{lll} v_1 = x & t_1 = y & s_1 = 60 \\ v_2 = x + 20 & t_2 = y - \frac{1}{2} & s_2 = 60 \end{array} \quad \begin{cases} xy = 60 \\ (x+20)(y - \frac{1}{2}) = 60 \end{cases}$$

На будущее полезно запомнить, что если сравнивается время выхода двух объектов, а затем время их прибытия, то полезно выяснить, на сколько один объект был больше в пути, чем другой.

### **Разработка методики решения задачи**

I. Выяснить *математическую* сущность задачи. Для этого нужно:

- решить задачу;
- продумать возможные способы решения и их оформление;
- выяснить математические основы способов решения.

II. Определить *методические* основы решения задачи. Для этого нужно:

- 1) определить **назначение** задачи;
- 2) продумать **мотивацию** решения задачи;
- 3) предложить возможные варианты **организации** работы с задачей во время урока;

Предусмотреть две ситуации:

|                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Задача используется <i>при изучении</i> нового материала</p> <p><i>Основы:</i> методика формирования умений.</p> <p><b>В диалоге</b> озвучиваются основные этапы работы с задачей.</p> <p>Продумывать вопросы для подведения итогов по решению задачи.</p> | <p>Задача предложена <i>для закрепления</i></p> <p><i>Основы:</i> после анализа условия составляется план решения задачи, а далее следует самостоятельная работа учащихся.</p> <p><b>В диалоге</b> задаются общие вопросы типа: «Как мы поступаем, если требуется...?», «С чего начинаем...?», «Что делаем дальше?» и т. п.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

4) предусмотреть возможные **трудности и ошибки** учащихся и продумать оказание помощи учащимся для их преодоления или предупреждения.

III. Разработать или подобрать **дополнительные** задачи:

- для предварительной работы;
- на отработку отдельных этапов решения задачи;
- на закрепление для тех, кто может испытывать затруднения при решении задачи.

**Пример** выполнения задания, связанного с **решением задачи**:

*Если в каждый пакет положить по 2 кг крупы, то для всей крупы не хватает 10 пакетов, а если положить по 3 кг крупы, то останется 20 свободных пакетов. Сколько крупы и сколько пакетов было? [27].*

**Выясним математическую сущность задачи.**

|           | В одном пакете | Количество пакетов   | Всего, кг   |
|-----------|----------------|----------------------|-------------|
| I способ  | 2 кг           | Не хватит 10 пакетов | } Одинаково |
| II способ | 3 кг           | Останется 20 пакетов |             |

*Пусть было  $x$  пакетов.*

|           | В одном пакете | Количество пакетов | Всего, кг          |
|-----------|----------------|--------------------|--------------------|
| I способ  | 2 кг           | $x + 10$           | $2 \cdot (x + 10)$ |
| II способ | 3 кг           | $x - 20$           | $3 \cdot (x - 20)$ |

*По условию задачи количество крупы не изменялось.*

**Уравнение:**

$$2 \cdot (x + 10) = 3 \cdot (x - 20),$$

$$2x + 20 = 3x - 60,$$

$$x = 80.$$

*Итак, было 80 пакетов, тогда крупы было  $2 \cdot (80 + 10) = 180$  (кг).*

Задачу **можно решить иначе**, если за  $x$  выбрать все количество крупы. В таком случае получится уравнение:  $x : 2 - 10 = x : 3 + 20$ .

Такой способ может вызвать затруднения, если уравнения указанного вида еще не рассматривались.

Если за  $x$  взять количество требуемых пакетов при расфасовке по 2 кг, то получится уравнение:  $2x = 3 \cdot (x - 30)$ .

Задача решена алгебраическим способом, возможно, есть графическое решение.

### Определим методические основы решения задачи

1. Задача связана с методом уравнений, **направлена** на обучение работе с текстами, содержащими сослагательное наклонение (если бы...).

2. **Мотивировать** решение задачи можно так: «Сегодня попробуем решить задачу, а в 7 классе вернемся и посмотрим другие способы ее решения, поскольку задача интересная».

### 3. Организация работы с задачей.

*Рассмотрим ситуацию, когда ученики не смогли справиться с задачей самостоятельно.*

— На этапах **анализа** условия и **поиска** решения задачи возможен следующий диалог:

— О чем идет речь в задаче? (О крупе.)

— Что происходит с крупой по условию задачи? (Крупа раскладывается по пакетам, причем по-разному.)

— Сколько частей (или ситуаций) можно выделить в задаче? (Две: когда раскладывают по 2 кг и когда раскладывают по 3 кг.)

— Можно ли описать происходящее в задаче, используя слова «в одном пакете», «количество пакетов», «всего килограмм»? Как можно представить условие задачи? (Можно таблицей, рисунком, схемой.)

Представьте условие задачи, например, таблицей.

Ученики легко справляются с таким заполнением:

|           | В одном пакете | Количество пакетов   | Всего, кг |
|-----------|----------------|----------------------|-----------|
| I способ  | 2 кг           | Не хватит 10 пакетов |           |
| II способ | 3 кг           | Останется 20 пакетов |           |

Тогда на вопрос: «Что известно о количестве крупы в двух случаях?» следует ответ: «Оно одинаково»:

|    | В одном пакете | Количество пакетов   | Всего, кг   |
|----|----------------|----------------------|-------------|
| I  | 2 кг           | Не хватит 10 пакетов | } Одинаково |
| II | 3 кг           | Останется 20 пакетов |             |

Дальнейший диалог строится вокруг схемы решения задач алгебраическим методом:

— Видит ли кто-нибудь решение по действиям? (Допустим, следует ответ: «Нет».)

— Как же решают задачи в таком случае? (Решают методом составления уравнений.)

— С чего начинают решение задачи этим методом? (Выбирают основание для составления уравнения.)

— Какое условие можно выбрать за основание для составления уравнения? (Учащиеся перечисляют разные варианты). Какое условие выберем? (Крупы в двух случаях одинаковое количество.)

— Что делаем дальше? (Одну из величин обозначаем за  $x$ .)

— Какую величину можно обозначить за  $x$ ? (Учащиеся перечисляют разные варианты). Какую величину выберем? (Количество пакетов.)

— Что делаем дальше? (Выражаем остальные величины через  $x$ .)

— Какие величины нужно выразить через  $x$ ? (Количество пакетов для первого способа, количество пакетов для второго способа и количество крупы в каждом случае.)

$x$  — количество пакетов

|           | В одном пакете | Количество пакетов | Всего, кг |
|-----------|----------------|--------------------|-----------|
| I способ  | 2 кг           | ✓                  | ✓         |
| II способ | 3 кг           | ✓                  | ✓         |

— Что известно о количестве пакетов в первом способе? (Их требуется на 10 больше, чем есть, поэтому можно записать, что их  $x + 10$ .)

|           | В одном пакете | Количество пакетов | Всего, кг |
|-----------|----------------|--------------------|-----------|
| I способ  | 2 кг           | $x + 10$ ✓         | ✓         |
| II способ | 3 кг           | ✓                  | ✓         |

— Можно ли выразить все оставшиеся величины? (Ученики заполняют таблицу, а в случае затруднения идет диалог по тем же вопросам: «Что известно...?», «Можем ли выразить...?»)

|           | В одном пакете | Количество пакетов | Всего, кг            |
|-----------|----------------|--------------------|----------------------|
| I способ  | 2 кг           | $x + 10$ ✓         | $2 \cdot (x + 10)$ ✓ |
| II способ | 3 кг           | $x - 20$ ✓         | $3 \cdot (x - 20)$ ✓ |

— Что делаем дальше? (Составляем уравнение.)

— Какое условие выбрали для составления уравнения? (Крупы одинаковое количество.)

Составьте уравнение и решите его.

$$\begin{aligned}2 \cdot (x + 10) &= 3 \cdot (x - 20), \\2x + 20 &= 3x - 60, \\x &= 80.\end{aligned}$$

— Что мы нашли, и что требовалось определить по условию задачи? (Мы нашли, что пактов было 80, а еще требуется узнать, сколько было крупы.)

— Как ответить на этот вопрос? (Ученики используют выражения из таблицы:  $2 \cdot (x + 10)$  или  $3 \cdot (x - 20)$ . Записывают ответ задачи.)

— Можно ли решить задачу иначе? (Выслушиваются предложения учеников.)

*Рассмотрим ситуацию, когда задача предложена  
для самостоятельного решения*

**Вариант 1.** В классе читается условие задачи, и по следующим вопросам ученики самостоятельно работают:

- О чем идет речь в задаче?
- Что происходит по условию задачи?
- Сколько частей можно выделить в задаче?
- Можно ли описать происходящее в задаче, используя слова «в 1 пакет», «количество пакетов», «всего килограмм»?
- Как можно представить условие задачи?
- Какое условие можно выбрать за основание для составления уравнения?
- Какую величину можно обозначить за  $x$ ?
- Какие величины нужно выразить через  $x$ ?
- Какое получится уравнение?
- Как ответить на вопросы задачи?

После самостоятельной работы можно обсудить возникшие проблемы по указанным вопросам как по шагам решения.

Завершая работу над задачей, важно задать вопрос: «Что полезного учтем на будущее?». Ответы могут быть такими:

- удобно пользоваться таблицей;
- важно подумать обо всех величинах задачи, чтобы не пропустить, например, слово «одинаково»;
- надо быть внимательным со словами «не хватает», «останется».

**Вариант 2.** Ученики решают задачу дома. А затем на уроке выбираются ученики, справившиеся с задачей. Весь класс разбирается на микрогруппы, в которых эти ученики выполняют роль учителя.

4. **Трудности** могут возникнуть на этапе анализа условия задачи, поэтому в диалог включен вопрос: «Можно ли происходящее в задаче описать с помощью слов...», что к тому же дает возможность использовать таблицу. Как показывает практика, решение текстовых задач с помощью таблицы помогает ученикам, так как по ней видно, какие величины требуется выразить через  $x$ . При возникновении проблем с переводом «не хватает 10 пакетов — требуется  $x + 10$  пакетов» можно подключить предметный опыт со словами: «Есть столько-то, требуется еще столько-то, т. е. не хватает столько-то, как узнать, сколько всего?» Выбор основания для составления уравнения будет облегчен, если при анализе условия задачи выделить слово «одинаково», что делается с помощью вопроса: «Что известно о крупе при двух способах перекладывания?»

Для обучения **контролю** можно предложить задание «Найди ошибку», а ошибки выписать предварительно из работ учеников, не называя, конечно, их фамилий.

## Приложение 12

### Методика работы с планиметрической задачей на доказательство

**Задача.** В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  углы  $A$  и  $A_1$  — прямые,  $BD$  и  $B_1D_1$  — биссектрисы. Докажите, что треугольники равны, если угол  $B$  равен углу  $B_1$  и  $BD = B_1D_1$ .

#### I этап. Анализ условия задачи построение чертежа

| Деятельность учителя                   | Деятельность ученика                                                                                                                            |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Какого типа эта задача?             | Геометрическая задача на доказательство.                                                                                                        |
| 2. Какие фигуры участвуют в задаче?    | Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ .                                                                                                              |
| 3. Что известно об этих треугольниках? | Треугольники прямоугольные, $\angle B = \angle B_1$ . В этих треугольниках из вершин $B$ и $B_1$ проведены биссектрисы и эти биссектрисы равны. |
| 4. Сделайте чертеж и нанесите данные.  |                                                                                                                                                 |

Окончание табл.

| Деятельность учителя                            | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 5. Что требуется доказать?                      | $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$                                                                                                                                                                                                      |
| 6. Запишите кратко условие и требование задачи. | Дано: $\triangle ABC$ , $\triangle A_1 B_1 C_1$ ,<br>$\angle A = \angle A_1 = 90^\circ$ , $\angle B = \angle B_1$ ,<br>$BD = B_1 D_1$ , $\angle 1 = \angle 3$ , $\angle 2 = \angle 4$ .<br>Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$ |

## II этап. Поиск путей доказательства

| Деятельность учителя                                                                                                                             | Деятельность ученика                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. В задаче требуется доказать, что $\triangle ABC = \triangle A_1 B_1 C_1$ . Чем мы пользуемся для доказательства того, что треугольники равны? | Признаками равенства треугольников.                                                                    |
| 2. Что нужно найти в этих треугольниках, чтобы доказать их равенство?                                                                            | Нужно найти равные элементы.                                                                           |
| 3. Сколько пар равных элементов нам необходимо найти в этих треугольниках? Почему?                                                               | Необходимо найти две пары, так как $\triangle ABC$ и $\triangle A_1 B_1 C_1$ по условию прямоугольные. |
| 4. Какие равные элементы мы имеем по условию задачи?                                                                                             | Дано, что $\angle B = \angle B_1$ .                                                                    |
| 5. Каких равных элементов нам не хватает, что бы применить один из признаков?                                                                    | Нам не хватает или равенства гипотенуз, или равенства катетов.                                         |
| 6. Попробуем доказать равенство катетов $AB$ и $A_1 B_1$ . Как мы доказываем равенство отрезков?                                                 | Равенство отрезков мы доказываем через равенство треугольников.                                        |
| 7. Чтобы доказать равенство катетов $AB$ и $A_1 B_1$ , какие треугольники следует рассмотреть?                                                   | Нужно рассмотреть $\triangle ABD$ и $\triangle A_1 B_1 D_1$ .                                          |
| 8. Определите вид треугольников.                                                                                                                 | Они прямоугольные, так как $\angle A = \angle A_1 = 90^\circ$ .                                        |
| 9. Сколько пар равных элементов нам следует найти в этих треугольниках?                                                                          | Две пары.                                                                                              |
| 10. Что известно об этих треугольниках по условию?                                                                                               | $BD = B_1 D_1$ , $\angle 1 = \angle 2$ (как половина равных углов).                                    |
| 11. Итак, какой вывод можно сделать о треугольниках $\triangle ABD$ и $\triangle A_1 B_1 D_1$ ?                                                  | $\triangle ABD = \triangle A_1 B_1 D_1$ по катету и острому углу.                                      |



2. Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  — прямоугольные.  

$$\left. \begin{array}{l} AB = A_1B_1 \text{ (по доказанному)} \\ \angle B = \angle B_1 \text{ (по условию)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$
  
 $\Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  (по катету и острому углу).

#### IV этап. Исследование задачи

Посмотрим, **нельзя ли решить задачу иным способом**. В решении мы доказываем равенство катетов  $AB$  и  $A_1B_1$  данных треугольников. Можно ли было доказать равенство гипотенуз  $BC$  и  $B_1C_1$ ?

| Деятельность учителя                                                                           | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Как мы доказываем равенство отрезков?                                                       | Через равенство треугольников.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 2. Чтобы доказать равенство отрезков $BC$ и $B_1C_1$ , какие треугольники следует рассмотреть? | $\triangle BDC$ и $\triangle B_1D_1C_1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| 3. Сколько пар равных элементов нам следует найти в этих треугольниках?                        | Нужно найти три пары, так как это произвольные треугольники.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 4. Сколько пар равных треугольников мы знаем по условию?                                       | Две. Это $BD = B_1D_1$ , $\angle 3 = \angle 4$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| 5. Равенство какой пары элементов нам нужно установить?                                        | $\angle D$ и $\angle D_1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 6. Что известно об этих углах?                                                                 | $\angle D$ — внешний для $\triangle ABD$ ,<br>$\angle D = \angle A + \angle 1$ ,<br>$\angle D_1$ — внешний для $\triangle ABD_1$ ,<br>$\angle D_1 = \angle A + \angle 2$ ,<br>следовательно, $\angle D = \angle D_1$ .                                                                                                                                                                                                 |
| 7. Итак, сделайте вывод о $\triangle BDC$ и $\triangle B_1D_1C_1$ .                            | $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| 8. Сделайте вывод о сторонах $BC$ и $B_1C_1$ этих треугольников?                               | $BC = B_1C_1$ по определению равенства треугольников.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 9. Итак, какой вывод можно сделать о $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ ?                 | $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (по гипотенузе и острому углу).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 10. Можно ли было иначе доказать равенство углов $D$ и $D_1$ ?                                 | Да, если применить теорему о сумме углов треугольника.<br>$\left. \begin{array}{l} \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \\ \angle A_1 + \angle B_1 + \angle C_1 = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle C = \angle C_1$<br>$\left. \begin{array}{l} \angle D + \angle 3 + \angle C = 180^\circ \\ \angle D + \angle 4 + \angle C = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle D = \angle D_1$ |

На будущее полезно запомнить то, что сформулированный в задаче факт можно считать еще одним признаком равенства прямоугольных треугольников. Список признаков может быть продолжен, если провести дополнительное исследование, связанное с выбором двух элементов прямоугольного треугольника, среди которых есть линейный элемент, по которым можно утверждать равенство прямоугольных треугольников.

### Приложение 13

#### Методика работы с задачей на построение

**Задача.** Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

#### I этап. Анализ задачи

- С чего начинается работа над задачей на построение?
- *С анализа задачи.*
- С чего начинается анализ задачи?
- *Предполагаем задачу решенной, делаем чертеж и наносим данные на чертеж (рис. 1):*

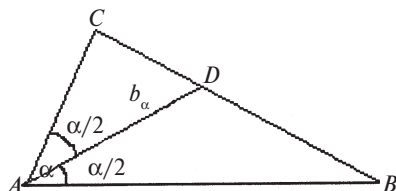


Рис. 1

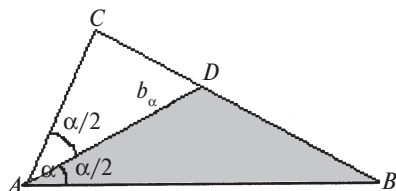


Рис. 2

- Каким методом будем решать задачу? (Этот вопрос задается, если к моменту предъявления задачи их было несколько. В противном случае задается вопрос: «Есть ли треугольник, который можно построить?»)

— *Методом вспомогательного треугольника, так как из рисунка видно, что треугольник ADB можно построить по двум сторонам и углу между ними.*

— Выделите вспомогательный треугольник (рис. 2). Если построим вспомогательный треугольник  $ADB$ , то какие вершины искомого треугольника будут определены, а какие останется построить?

— Будут определены вершины  $A$  и  $B$ , останется построить вершину  $C$ .

— Итак, какую **точку выберем за искомую**?

— Точку  $C$ .

— Что делают дальше при анализе задачи?

— Выбирают два условия, которым должна удовлетворять искомая точка.

— Назовите условия, которым удовлетворяет искомая точка  $C$ ?

— 1) Точка  $C$  лежит на луче  $BD$ ,

2)  $\angle BAC = \alpha$ .

— Какой вывод нужно сделать из выделенных условий?

— Нужно **определить фигуры, на которых лежит искомая точка  $C$** .

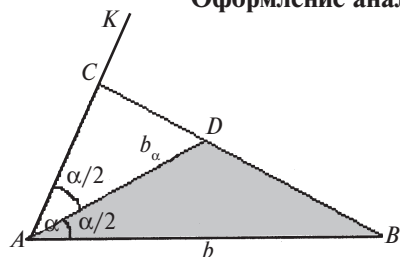
— Назовите эти фигуры.

— Из первого условия — это луч  $BD$ , а из второго — луч  $AK$ , такой, что  $\angle KAB = \alpha$ .

— Итак, назовите план построения.

— 1) построим  $\triangle ADB$ ; 2) построим луч  $AK$ ; 3) построим точку  $C$ .

### Оформление анализа задачи на доске.



$\triangle ADB$  — вспомогательный,  $C$  — ?

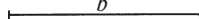
1)  $C \in BD$ ,

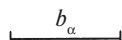
2)  $\angle BAC = \alpha \rightarrow C \in AK$ ,

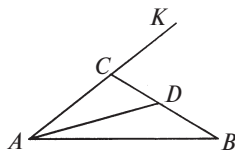
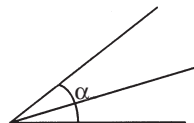
$C$  — точка пересечения луча  $BD$  и луча  $AK$

( $C = BD \cap AK$ ).

### II этап. Построение

Дано:  






Построение:

1.  $\triangle ADB$ :  $AB = b$ ,

$\angle DAB = \frac{\alpha}{2}$ ,  $AD = b_\alpha$ ;

2.  $AK$ :  $\angle KAB = \alpha$ ;

3.  $C$ ;  $C = BD \cap AK$ .

### III этап. Доказательство (можно проводить устно)

$AB = b$  (по построению 1);  
 $AD$  — биссектриса (по построениям 1 и 2);  
 $AD = b_\alpha$  (по построению 1);  
 $\angle BAC = \alpha$  (по построениям 2 и 3).  
 Значит,  $\triangle ABC$  — искомый

### IV этап. Исследование

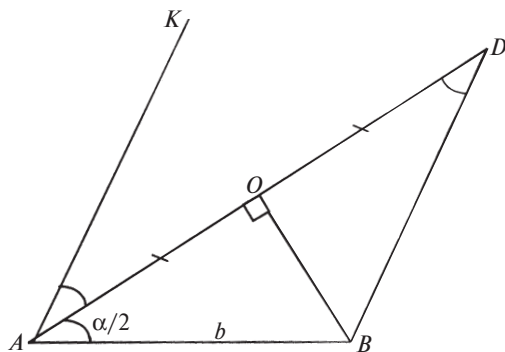
Исследование проводим, анализируя каждый шаг построения:

1) Вспомогательный треугольник строится по двум сторонам и углу между ними, значит, его всегда можно построить при условии, что данный угол меньше  $180^\circ$ ; если пренебречь положением треугольника на плоскости, то такой треугольник единственный.

2) От данной стороны в заданной полуплоскости можно отложить единственный угол, равный данному.

3) Два луча  $AK$  и  $BD$  могут пересечься, если они не являются параллельными и не расходятся.

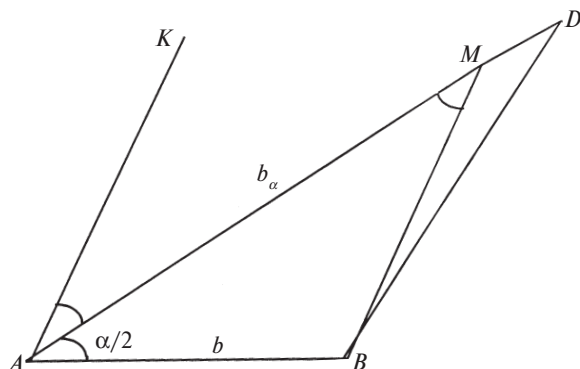
Рассмотрим первый случай ( $AK \parallel BD$ ).



Если  $AK \parallel BD$ , то угол  $ADB = \frac{\alpha}{2}$ , значит,  $\triangle ADB$  — равнобедренный. Найдём связь между  $b$ ,  $b_\alpha$  и  $\alpha$  в этом случае. Для этого выразим  $b_\alpha$  через  $b$  и  $\alpha$ . Проведём в треугольнике  $ADB$  высоту  $BO$ .

Тогда  $AO = b \cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $AD = 2b \cos \frac{\alpha}{2}$ . Значит, если  $b_\alpha = 2b \cos \frac{\alpha}{2}$ , задача решения не имеет.

Рассмотрим второй случай ( $AK$  и  $BD$  — расходятся).



Проведем  $BM$  параллельно  $AK$ , тогда  $AM = 2b \cos \frac{\alpha}{2}$ . Значит,

если  $b_\alpha > 2b \cos \frac{\alpha}{2}$ , то задача решения не имеет.

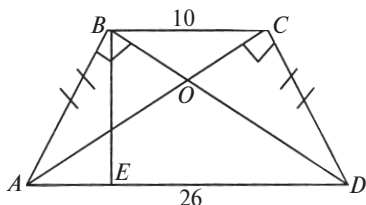
Итак, задача имеет:

- единственное решение, если  $b_\alpha < 2b \cos \frac{\alpha}{2}$ ;
- не имеет решения, если  $b_\alpha \geq 2b \cos \frac{\alpha}{2}$ .

## Приложение 14

### Схематический граф поиска решения задачи

**Задача.** Определить площадь равнобедренной трапеции, у которой основания равны 10 см и 26 см, а диагонали перпендикулярны к боковым сторонам.



Дано:  $ABCD$  — трапеция,  
 $AB = CD$ ,  $AC \perp CD$ ,  $BD \perp AB$ ,  
 $BC = 10$  см,  $AD = 26$  см.  
 Найти:  $S_{\text{тр.}}$

Поиск решения задачи можно провести двумя методами: *аналитическим* и *синтетическим*.

Поиск решения задачи методом **анализа** (начинается поиск с требования):

1) Что требуется найти? (Площадь трапеции.) По какой формуле находится площадь трапеции? (Для того чтобы найти иско-мое – площадь трапеции, необходимо воспользоваться формулой:

$$S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BE, \text{ где } BC \text{ и } AD \text{ известны, } BE \text{ неизвестно.})$$

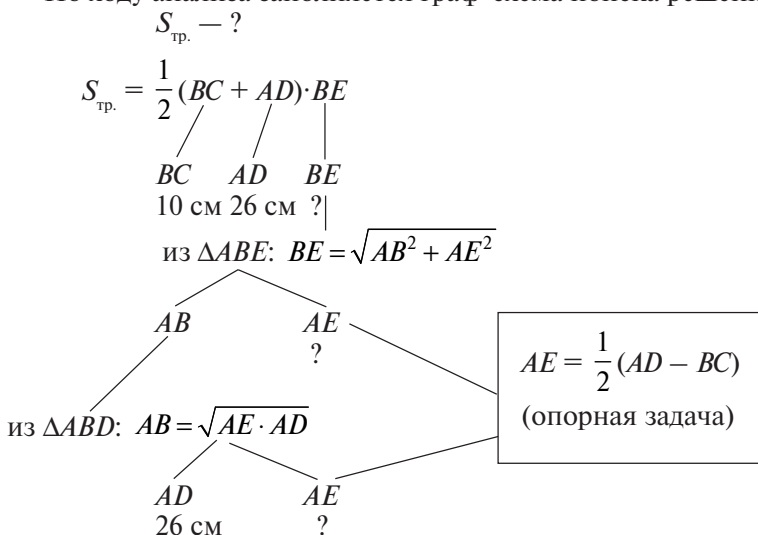
2) Из какой фигуры можно найти  $BE$ ? ( $BE$  можно найти из  $\triangle ABE$ ,  $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2}$ , где  $AB$  и  $AE$  неизвестны.)

(Возможен и ответ: из  $\triangle ABD$ . Этот вариант будет рассмотрен при синтетическом методе поиска решения задачи.)

3) Из какой фигуры можно найти  $AB$ ? ( $AB$  можно найти из треугольника  $\triangle ABD$ :  $AB = \sqrt{AE \cdot AD}$ , где  $AE$  неизвестно,  $AD$  известно.) (В случае затруднений полезно спросить, какое условие задачи еще не использовали?)

4) Как в трапеции находят длину отрезка  $AE$ ? ( $AE$  находим по опорной задаче:  $AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , где  $AD$  и  $BC$  известны.)

По ходу анализа заполняется граф-схема поиска решения:



Поиск решения задачи закончен. По построенному графу составляется план решения:

- 1)  $AE$ ,
- 2)  $AB$ ,
- 3)  $BE$ ,
- 4)  $S_{\text{тр.}}$ .

Поиск решения задачи методом **синтеза** (начинается поиск с условия):

1) Что можно найти, зная основания равнобокой трапеции? (Длину отрезков большего основания, которые отсекаются высотами трапеции, к нему проведенными.)

2) Что можно найти, зная в прямоугольном треугольнике  $ABD$  длины отрезков, на которые разбивает гипотенузу высота, проведенная из вершины прямого угла? (Можно найти высоту треугольника, значит, и высоту трапеции.)

По ходу синтеза заполняется граф-схема поиска решения:

- $AE: AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$  (опорная задача)

$$AD = 26 \quad BC = 10$$

- $BE: BE = \sqrt{AE \cdot ED}$ ,  
где  $ED = AD - AE$

- $S_{\text{тр.}}: S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BE$

Вычисления:

$$1. AE = (26 - 10):2 = 8 \text{ (см)},$$

$$2. ED = 26 - 8 = 18 \text{ (см)},$$

$$3. BE = \sqrt{8 \cdot 18} =$$

$$= \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} =$$

$$= 4 \cdot 3 = 12 \text{ (см)},$$

$$4. S_{\text{тр.}} = \frac{1}{2}(10 + 26) \cdot 12 =$$

$$= 18 \cdot 12 = 216 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $216 \text{ см}^2$ .

Приложение 15

### Преобразование задач

В структуре любой задачи выделяются следующие части:

- условие задачи;
- обоснование решения;

- решение задачи;
- заключение задачи.

Если все структурные части известны (так обычно бывает, когда дан образец решения), то говорят, что задача *стандартная* [27, С. 157, № 4]. Преобразовать стандартную задачу можно, если заменить некоторые записи в образце пропусками [27, С. 276, № 4], или предложить найти ошибку [27, С. 234, № 6], или по образцу ответить на некоторые вопросы [26, № 116].

Если неизвестна одна часть (чаще всего решение), то говорят, что задача *обучающая*. Преобразовать обучающую задачу можно несколькими способами:

- изменить представление условия задачи (чаще всего задачи представлены в словесной форме, а можно задачи представлять чертежом, таблицей, краткой записью, в таком случае ученикам предлагается сформулировать условие задачи) [26, С. 178, № 11, С. 179, № 13];
- сделать известным решение, по которому восстанавливается условие задачи или ее заключение [26, № 102(2)];
- сделать условие с недостающими или избыточными данными [26, С. 175, № 8];
- рассмотреть несколько способов решения [33, С. 208, № 4].

Если неизвестны две части, то говорят, что задача *поисковая*. Поисковая задача может получиться из обучающей, если сделать открытым ее условие (в этом случае обычно задается вопрос: «Что должно быть известно, чтобы можно было доказать... или найти...?») [36, № 62]; [37, С. 176, № 1] или заключение (в этом случае задается вопрос: «Что можно найти или доказать по заданному условию?») [26, С. 182, № 24], [37, С. 107, № 15]. Поисковая задача получается, если, например, по уравнению требуется составить задачу [35, С. 169, № 5], если требуется определить, что изменится в решении, если изменить часть условия определенным образом [35, С. 164, № 2].

Если неизвестны три части задачи, то задача *проблемная*. О них идет речь в тех случаях, когда учеников просят составить задачи на определенную тему [35, С. 175, № 9]. Преобразовываются такие задачи формой предъявления: составить пример, составить дидактическую игру, составить контрольную работу, составить реферат, составить рекламу, составить комикс и т. д. [26, С. 45]; [32, С. 59]; [35, С. 67, № 4]; [36, С. 169]; [37, С. 111, № 25].

## Часть V. Урок математики

В этой части представлены:

- *схема анализа пункта школьного учебника и примеры такого анализа;*
- *требования к конспекту урока;*
- *технология составления конспекта урока;*
- *конспекты уроков с увеличением самостоятельной работы при изучении нового;*
- *схема анализа урока и пример анализа урока;*
- *планы-конспекты уроков изучения нового материала различными методами;*
- *планы-конспекты уроков различных видов (урок закрепления, обобщающий урок).*

В настоящее время существует множество разнообразных уроков, следовательно, возникает проблема их классификации. М.И. Махмутов предложил классифицировать уроки по цели их организации. Свой выбор автор обосновывает тем, что в основе любой человеческой деятельности лежит целеполагание. Учебная деятельность не должна быть исключением. Классификация М.И. Махмутова предусматривает субъектную деятельность учащихся, значит, при конструировании личностно ориентированных уроков (уроков, на которых учащиеся являются субъектами обучения и собственного развития) желательно опираться именно на эту классификацию.

Сравним классификацию М.И. Махмутова с классификацией, в основе которой лежит дидактическая цель. М.И. Махмутов при делении уроков на типы предлагает опираться *на цели организации занятий*, а затем конкретизировать каждый урок *в соответствии с дидактической целью*. Первая цель имеет более общий и чисто педагогический характер: организовать изучение нового материала, совершенствовать знания, умения, навыки учащихся, а вторая цель уточняет сущность изучения или совершенствования: усвоение новых понятий, применение усвоенного в упражнениях и при решении задач и т. д. Иными словами, дидактическая цель связана с той конкретной целью, которые должны достичь учащиеся на уроке.

Конструирование урока начинается с определения его целей и составления плана урока. *Основная цель* личностно ориентированного урока помимо достижения учащимися определенного

учебного результата состоит в обогащении опыта учащихся, связанного с постижением знаний, организацией процесса обучения и самообучения, с рефлексией, т. е. опыта «быть субъектами обучения и собственного развития».

При составлении плана урока опираются на понятия дидактической и методической структуры урока. Так, дидактическая структура уроков изучения нового материала имеет вид:

- I. Актуализация знаний.
- II. Изучение нового материала.
- III. Первичное применение нового материала.
- IV. Подведение итогов урока.

Дидактическая структура уроков совершенствования знаний, умений, навыков имеет вид:

- I. Актуализация знаний.
- II. Совершенствование ЗУН.
- III. Подведение итогов урока.

Методическую структуру урока рассматривают в соответствии с этапами базовых методик обучения учащихся математике. **Технология составления плана урока** имеет следующие этапы:

1. Выделить дидактическую структуру урока.
2. Проверить, отражает ли каждый пункт плана цель этого этапа.
3. Скорректировать каждый пункт плана, чтобы он отражал математическое содержание и соответствовал базовым методикам обучения учащихся математике.
4. Продумать форму организации деятельности учащихся, чтобы они были субъектами обучения и собственного развития.

Покажем особенности конструирования каждого элемента дидактической структуры урока с позиции личностно ориентированного обучения. При традиционном обучении этап *актуализации знаний* осуществляется либо через опрос учащихся, фронтальную беседу, причем вопросы подбирает сам учитель; либо этот этап отсутствует. На личностно ориентированном уроке этап актуализации начинается с *мотивации* темы урока, поскольку учащимся необходимо понимать, почему именно такое содержание материала выносится на этап актуализации. Сама актуализация может быть связана с *систематизацией и обобщением* ранее изученного; со старым опытом, который необходимо использовать или перестроить. Актуализация знаний при личностно ориентированном обучении также может проходить в виде

фронтальной работы. Однако, *во-первых*, она должна осуществляться вокруг ключевых идей, выделенных учащимися (это могут быть названия заголовков разделов учебника или записей в тетрадях, основные вопросы рассматриваемой содержательной линии, ключевые понятия темы и т. д.). *Во-вторых*, вопросы подбираются самостоятельно учащимися. *В-третьих*, учитель старается задействовать все способы кодирования информации, поэтому фронтальная работа проводится с помощью наглядных пособий, с записями на доске, или по специально разработанным заданиям. Часто на основе этих записей учащиеся *конструируют план урока*. Также, составление плана изучения нового материала может опираться на вопросы учащихся в связи с объявленной темой урока, которые записываются на доску, чтобы в них увидеть мотив для деятельности.

Конструирование этапа *изучения нового материала* следует вести в соответствии с требованиями к этапам введения и усвоения дидактических единиц.

На этапе *первичного применения нового материала* при традиционном обучении вся инициатива находится в руках учителя: он предлагает список номеров из учебника, затем вызывает учащегося к доске для решения того или иного примера, тем самым учащиеся, работающие на местах, оказываются в ситуации, когда они вынуждены списывать готовые решения. Таким образом, при традиционном обучении зачастую не учитываются индивидуальные стили работы учащихся, их возможные трудности. Поэтому с позиции личностно ориентированного обучения при решении упражнений важно инициативу передавать в руки учащихся, тем самым последним предоставляется роль ведущих, а не ведомых. Учитель сначала предлагает список номеров из учебника, обсуждает задания и назначение (особенности) каждого номера, организует анализ ситуаций. Затем учащимся предлагается выбрать, какой из номеров им бы хотелось обсудить в классе (свой выбор учащиеся обосновывают). После чего по желанию учащиеся вызываются к доске. Выполнение выбранного номера начинается с анализа условия и поиска решения примера. Затем учащийся у доски осуществляет комментированную запись решения данного примера, поскольку многие учащиеся не могут пропустить этап «внешней речи». И в завершении этапа первичного применения учащимся предоставляется право выбора примеров для самостоятельной работы.

На этапе *совершенствования ЗУН* планируются направления, по которым осуществляется совершенствование (отработка

отдельных этапов деятельности, освоение определенных ситуаций применения изученного, изучение особых случаев и т. д.). При личностно ориентированном обучении учащиеся осуществляют обзор и отбор задачного материала, планируют направления совершенствования ЗУН и своего опыта работы (например, опыта самоконтроля, опыта групповой работы и пр.), выбирают способ организации выполнения заданий.

При традиционном *подведении итогов урока* используются следующие варианты:

1. Учитель задает вопросы, касающиеся только материала урока.
2. В качестве итогов называются отметки.
3. Учитель сам перечисляет, что было на уроке.

Если идти по первому пути, то при таком приеме основное назначение этапа подведения итогов — повторение рассмотренного. А при личностно ориентированном обучении назначение этапа подведения итогов состоит в том, чтобы обобщить и систематизировать изученное и возникшие во время урока трудности, повторить пути их преодоления. Для этого учитель должен задать такие вопросы, которые выводят учащихся на этап систематизации и обобщения. Эти вопросы касаются не только материала, но и процесса его изучения.

М.И. Махмутов при описании уроков выделил следующие трудности их конструирования:

- 1) организация самостоятельной познавательной деятельности учащихся;
- 2) подбор материала для индивидуальной, групповой, фронтальной работы;
- 3) обеспечение экономии времени;
- 4) мотивация деятельности учащихся.

С теми же трудностями сталкивается учитель при конструировании личностно ориентированных уроков. Преодолеть их помогают:

- 1) специальные приемы личностно ориентированной организации урока;
- 2) учебные задания для учащихся и их мотивация;
- 3) дидактические материалы — протоколы деятельности учащихся.

Изучение нового материала может осуществляться различными методами. Ниже перечислены используемые методы и дана характеристика, позволяющая разобраться в отличиях этих методов.

| Метод                                       | Характеристика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Объяснительно-иллюстративный в форме беседы | Учитель проводит беседу с учениками в вопросно-ответной форме. Вопросы должны быть на размышление, а не только репродуктивные, однако весь ход урока при использовании этого метода предполагает однозначные ответы. <i>Приемы</i> метода: грамотно построенная актуализация знаний, подбор примеров сопоставительного характера (что общего, чем отличаются), сообщение основной идеи изучаемого, обсуждение примера в соответствии с этапами деятельности (анализ, поиск решения и т. д.), озвучивание (выделение) характерных признаков и т. д. |
| Объяснительно-иллюстративный в форме лекции | Учитель сообщает ученикам цель и план лекции. На лекцию обычно выносятся материал, который можно изложить блоком. Каждая часть лекции мотивируется, аргументируется и структурируется. В ходе лекции учитель с помощью вопросов проверяет усвоение материала. Перед началом лекции возможна актуализация знаний                                                                                                                                                                                                                                    |
| Репродуктивный                              | Метод предполагает воспроизведение изученного. Применяется, когда надо воспроизвести формулировки и основные положения теоретического материала (словесная форма), когда надо продемонстрировать применение знаний в знакомой ситуации (практическая форма)                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| Частично-поисковый                          | При использовании этого метода ученики делают выводы, которые требуют иных размышлений, чем при объяснительно-иллюстративном методе, поскольку вывод носит элемент открытия; применяют знания в измененной ситуации, когда нужно догадаться о способе выполнения задания, но знаний для этого достаточно                                                                                                                                                                                                                                           |
| Проблемный                                  | При использовании этого метода ученики обсуждают проблему, решение которой требует новых знаний, причем учитель старается, чтобы открытия сделали сами ученики. <i>Приемы</i> метода: постановка общих вопросов, фиксация всех предложений учащихся с последующим их анализом, применение известных способов решения с целью получения ответа на проблему, а затем поиск более рациональных новых способов и т. д.                                                                                                                                 |
| Использование учебной книги                 | Возможны два варианта: учебная книга — справочник и учебная книга — самоучитель. В первом случае учитель предлагает ученикам серию вопросов, ответы на которые надо найти в книге. Во втором случае вопросы уже введены в учебный текст, и учителю необходимо организовать деятельность учащихся на поиск ответов на поставленные вопросы. В этом случае используется и фронтальная, и групповая, и самостоятельная работа                                                                                                                         |

### Анализ пункта школьного учебника

Подготовка учителя к уроку включает в себя анализ учебного материала. В связи с этим необходимо владеть общими приемами выполнения анализа учебного материала (пункта учебника, определения, алгоритма, математического утверждения).

В содержании пункта школьного учебника вычленяются два крупных блока: теоретический материал и задачный материал. Теоретический материал представлен *понятиями* и их определениями, *утверждениями* (теоремы, свойства, признаки и т. п.), *алгоритмами* (правила, формулы и др.), различными по степени общности и предметному содержанию математическими *методами* (аксиоматический, координатный, векторный, метод уравнений и неравенств, метод равных треугольников, метод геометрических преобразований и др.).

При анализе пункта школьного учебника удобно пользоваться следующей **схемой**.

I. Провести анализ объяснительного текста. С этой целью выяснить:

- 1) какие новые *понятия* рассматриваются, даются ли им определения;
- 2) какие новые *утверждения* изучаются, даются ли им доказательства, каковы основные идеи доказательств;
- 3) какие новые *виды задач и примеров* рассматриваются, каково их назначение, приводятся ли *алгоритмы* их решения;
- 4) какие *иллюстрации* приводятся, каково их назначение.

II. Провести анализ задачного материала. С этой целью:

1) выделить группы математических заданий по цели их использования и выяснить, чем отличаются задания внутри каждой группы, каковы основы их решения;

2) особо выделить:

- задачи, связанные с отработкой отдельных этапов выполнения алгоритма (пошаговые задания);
- задачи, содержащие образец выполнения (базовые задания);
- задачи обязательного уровня;
- задачи, на результат которых при решении других задач можно делать ссылки (опорные задачи);
- задачи для обнаружения новых математических фактов (познавательные задачи).

III. Составить поурочное планирование, выделив цели каждого урока, отводимого на изучение пункта. Удобно поурочное планирование представить в виде таблицы:

| № | Цели урока | Распределение материала |        | Контроль |
|---|------------|-------------------------|--------|----------|
|   |            | в классе                | на дом |          |
|   |            |                         |        |          |

### **Анализ пункта 16 «Определение арифметической прогрессии. Формула $n$ -го члена арифметической прогрессии» [3]**

#### **I. Проведем анализ объяснительного материала.**

1. Содержание пункта начинается с рассмотрения примера последовательности натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1, что позволяет ввести два **понятия**: арифметической прогрессии и разности арифметической прогрессии (числа  $d$ ). Каждому из этих понятий дается определение, причем определение арифметической прогрессии представлено в двух формах: 1) в виде словесной формулировки (*арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом*), 2) в виде аналитической записи (*арифметическая прогрессия — последовательность, заданная формулой  $a_{n+1} = a_n + d$ , где  $d$  — некоторое число*).

2. В пункте рассматриваются и доказываются два **утверждения**:

1) формула  $n$ -го члена арифметической прогрессии ( $a_n = a_1 + d(n - 1)$ ),

2) следствия из формулы (прямое и обратное утверждения, связанные с формулой  $a_n = kn + b$ ). *Прямое утверждение*: любая арифметическая прогрессия может быть задана формулой вида  $a_n = kn + b$ , где  $k$  и  $b$  — некоторые числа. *Обратное утверждение*: последовательность  $(a_n)$ , заданная формулой вида  $a_n = kn + b$ , где  $k$  и  $b$  — некоторые числа, является арифметической прогрессией. Эти следствия позволяют показать, что любая арифметическая прогрессия есть линейная функция, заданная на множестве натуральных чисел. И наоборот, что любую линейную функцию, заданную на множестве натуральных чисел, можно рассматривать как арифметическую прогрессию. Формула  $n$ -го члена выводится индуктивно, на основании обобщения вида

записи первых шести членов некоторой арифметической прогрессии. Идея доказательства прямого утверждения о задании арифметической прогрессии формулой вида  $a_n = kn + b$  заключается в преобразовании формулы  $n$ -го члена арифметической прогрессии  $a_n = a_1 + d(n - 1)$  к виду  $a_n = dn + (a_1 - d)$ . Для доказательства обратного утверждения находят разность  $(n + 1)$ -го и  $n$ -го членов последовательности  $(a_n)$  и показывают, что эта разность является постоянным числом, значит,  $a_{n+1} = a_n + k$ , отсюда делается вывод, что последовательность  $(a_n)$  является арифметической прогрессией с разностью  $d$ .

3. В объяснительном тексте пункта рассмотрено **три задания**, которые решаются по определению или по формуле  $n$ -го члена арифметической прогрессии.

а) Примеры нахождения нескольких членов арифметической прогрессии  $(a_n)$ , если известны  $a_1$  и  $d$ , которые позволяют усвоить определение арифметической прогрессии и рассмотреть ее случаи, когда  $a_1$  и  $d$  являются натуральными, целыми отрицательными числами; рассмотрен случай, когда  $d = 0$ .

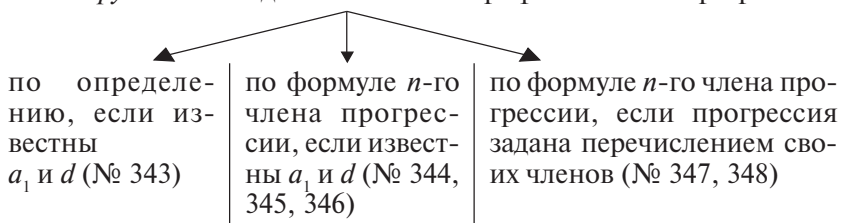
б) Задача на вычисление  $n$ -го члена арифметической прогрессии  $(a_n)$ , если известны  $a_1$  и  $d$  этой прогрессии, которая демонстрирует вычисления по формуле  $n$ -го члена.

в) Задание на определение того, является ли данное число прогрессии  $(x_n)$ , для которой указаны несколько первых членов. Алгоритма выполнения задания в пункте не дается, но последовательность действий можно выделить.

## II. Проведем анализ задачного материала пункта.

Все задачи пункта условно можно разделить на 5 групп, каждая из которых отрабатывает определенные умения.

*1-я группа.* Нахождение  $n$ -го члена арифметической прогрессии:

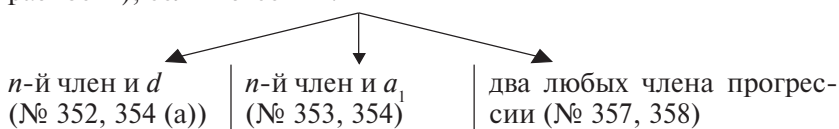


В этих задачах рассматриваются всевозможные значения  $a_1$  и  $d$ , первый член как положительный, так и отрицательный (№ 345 (а, б), № 348 (а)); разность прогрессии тоже может быть как отрицательной (№ 345 (б), 346 (б)), так и положительной. Такой подбор первых членов арифметической прогрессии и разности

позволяет отработать понятия убывающей и возрастающей арифметической прогрессии.

*2-я группа* (обратная к 1-й группе).

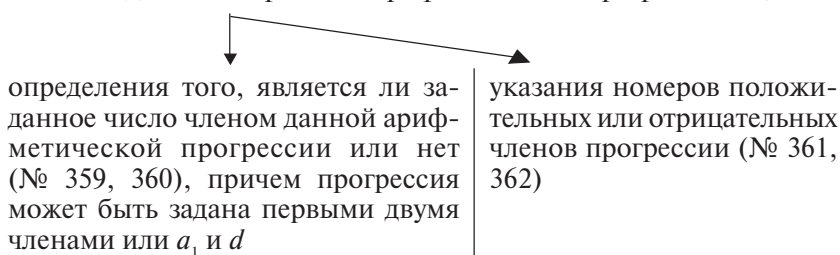
Нахождение первого члена арифметической прогрессии (или разности), если известны:



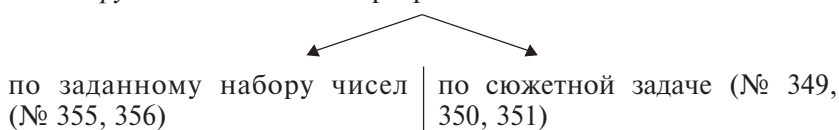
В этих упражнениях решение сводится к составлению уравнения или системы двух уравнений с двумя неизвестными.

*3-я группа* (обратная к 1-й группе).

Нахождение номера члена арифметической прогрессии с целью:



*4-я группа.* Составление прогрессии:



Задачи № 355, 356 даны с целью отработки умения нахождения нескольких членов арифметической прогрессии, стоящих между первым и  $n$ -м членом прогрессии, т. е. умения по заданным  $a_1$  и  $a_n$  находить  $d$ , используя формулу  $a_n = a_1 + d(n - 1)$ , а затем по определению записывать несколько членов арифметической прогрессии.

В сюжетных задачах нужно определить, что рассматриваемый процесс (физический № 349, 350 или геометрический № 351) можно задать арифметической прогрессией; определить ее первый член и разность, а затем  $n$ -й член прогрессии и дать ответ на поставленный вопрос задачи. Эти задания позволяют показать использование арифметической прогрессии в практической жизни.

5-я группа. Использование признака арифметической прогрессии: последовательность вида  $x_n = kn + b$  является арифметической прогрессией (№ 363, 364).

В упражнении № 363 нужно по виду формулы общего члена последовательности ( $a_n$ ) установить, является ли последовательность арифметической прогрессией или нет, т. е. отрабатывается умение сравнить данную формулу с формулой  $a_n = kn + b$ , определения значений  $k$  и  $b$ .

Задача 364 на доказательство, для решения которой необходимо знать формулы суммы внутренних углов треугольника, четырехугольника,  $n$ -угольника, составить последовательность этих сумм, сравнить формулу общего члена полученной последовательности с формулой  $x_n = kn + b$ , т. е. определить  $k$  и  $b$ , и сделать вывод о том, является ли данная последовательность арифметической прогрессией.

### III. Поурочное планирование (3 ч).

| №  | Цели урока                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Распределение материала                                                                                                       |                                                                                                   | Контроль                                                                                                    |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | в классе                                                                                                                      | на дом                                                                                            |                                                                                                             |
| 1. | Ввести понятие арифметической прогрессии, научиться находить по определению члены прогрессии, если прогрессия задана первым членом и разностью или перечислением ее первых членов, вывести формулу $n$ -го члена, научиться находить по этой формуле члены прогрессии, если прогрессия задана первым членом и разностью или перечислением ее первых членов | 1. Примеры на «да» и «нет»<br>2. № 343<br>3. Дано: ар. пр.: $-1, 1, 3, 5, \dots$<br>Найти: $a_5, a_6$<br>4. № 344<br>5. № 345 | 1. Выучить определение и формулу $n$ -го члена.<br>2. Привести примеры ар. пр.<br>3. № 346, № 348 | 1. Опрос в парах и обмен примерами, где «авторы» обосновывают свой выбор<br>2. № 347, аналогичный домашнему |
| 2. | Проверить усвоение определения и формулы, научиться составлять и решать задачи, обратные рассмотренным на 1-м уроке, научиться работать с арифметической прогрессией, заданной двумя своими членами                                                                                                                                                        | № 347, аналогичный домашнему,<br>№ 352,<br>№ 353,<br>№ 357,<br>№ 359                                                          | № 354,<br>№ 358,<br>№ 360                                                                         | Самостоятельная работа по обязательным результатам                                                          |

Окончание табл.

| №  | Цели урока                                                                                                                                                                                                                                                           | Распределение материала   |                           | Контроль                                                                 |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                      | в классе                  | на дом                    |                                                                          |
| 3. | Проверить обязательные результаты обучения, рассмотреть составление арифметической прогрессии: а) по заданному набору чисел, б) по сюжетной задаче, научиться проверять, является ли последовательность, заданная формулой $n$ -го члена, арифметической прогрессией | № 355,<br>№ 349,<br>№ 363 | № 356,<br>№ 350,<br>№ 362 | Самостоятельная работа по обратным задачам, № 361, аналогичный домашнему |

### Анализ пункта 59 «Трапеция» [90]

#### I. Проведем анализ объяснительного материала.

1. В рассматриваемом пункте вводится пять новых **понятий**: *трапеция, основания трапеции, боковые стороны трапеции, равнобокая трапеция, средняя линия трапеции*. Основными понятиями темы являются понятия трапеции, равнобокой трапеции, средней линии трапеции.

Основные понятия вводятся на уровне определений, которые относятся к одному виду: через ближайший род и видовые отличия.

Все понятия в пункте вводятся дедуктивно. Такой подход к ведению понятий «основания трапеции», «боковые стороны трапеций», «равнобокая трапеция» является рациональным. Однако, определения трапеции и ее средней линии желательно вводить конкретно-индуктивным методом.

2. Главным математическим **утверждением** является теорема о свойстве средней линии трапеции, которая сформулирована в категоричной форме: *средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме*.

Теорема сложная, так как в ней два заключения. Идея доказательства заключается в следующем:

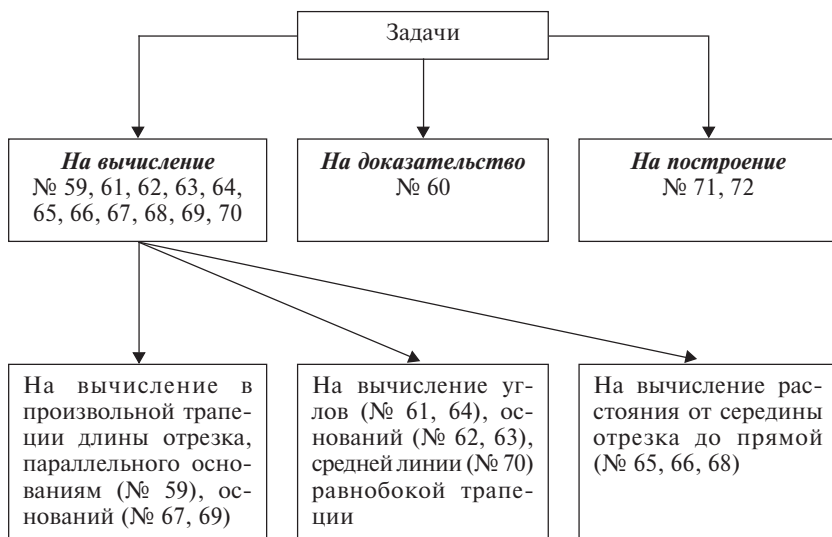
- в дополнительном построении треугольника, для которого средняя линия совпадает со средней линией трапеции,
- в применении свойств средней линии треугольника.

3. В объяснительном тексте пункта рассматривается решение **задачи** о свойстве углов при основании равнобокой трапеции. Эта задача включена в объяснительный материал, так как относится к познавательным задачам рассматриваемой темы: содержит новый математический факт. Кроме того, задача открывает способ решения других задач: при работе с трапецией может помочь стандартное дополнительное построение, когда через вершину тупого угла трапеции проводится прямая, параллельная боковой стороне.

4. В пункте приведены три **рисунка**. *Первый* рисунок иллюстрирует понятие трапеции; *второй* — служит чертежом для доказательства теоремы для средней линии трапеции; *третий* — является чертежом для доказательства свойств углов при основании равнобокой трапеции.

## II. Проведем анализ задачного материала пункта.

Из 74 задач параграфа «Четырехугольники» к пункту «Трапеция» относится 14 задач (№ 59—72). Разобьем их на группы *по заключению*:



Задачи № 61, 63, 65 соответствуют *обязательным результатам* обучения. Задача № 60 является *познавательной задачей*, так как в ней обнаруживается новый математический факт.

Разобьем задачи на группы *по дидактическому назначению*:

| Для закрепления математического факта                                                |                                   | Для обнаружения нового математического факта | Для открытия способа решения других задач |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| Понятие «Трапеция»                                                                   | № 59                              | № 60                                         | № 60<br>№ 62                              |
| Понятие «Равнобокая трапеция»                                                        | № 62                              |                                              |                                           |
| Понятие «Средняя линия трапеции»                                                     | № 59,<br>№ 65                     |                                              |                                           |
| Утверждения «Средняя линия трапеции параллельна основаниям»                          | № 59                              |                                              |                                           |
| Утверждения «Средняя линия равна полусумме оснований»                                | № 59,<br>65, 67,<br>68, 69,<br>70 |                                              |                                           |
| Математический факт (из задачи № 60): «Углы при основании равнобокой трапеции равны» | № 61,<br>64                       |                                              |                                           |
| Способа решения (из задачи № 60)                                                     | № 71,<br>72                       |                                              |                                           |

Опишем основы решения задач темы «Трапеция», которые позволяют выделить группы *по способам решения*.

Шесть задач на вычисление (№ 62, 63, 65, 66, 68, 70) решаются геометрическим методом, а пять (№ 59, 61, 64, 67, 69) — алгебраическим.

В задачах № 59, 60, 71, 72 удобно использовать **стандартное дополнительное построение**, когда через вершину трапеции проводится прямая, параллельная боковой стороне или диагонали. В задаче № 66 через один конец данного отрезка строится прямая, параллельная данной прямой, что приводит к образованию треугольника, для которого можно вычислить среднюю линию.

В задачах № 62, 63, 70 удобно использовать **стандартное дополнительное построение**, когда через вершины одного основания трапеции проводятся прямые, перпендикулярные другому основанию.

В задачах № 62, 63, 70 решение включает в себя использование большого списка теоретических положений (свойство углов

равнобокой трапеции, параллельность двух прямых, перпендикулярных третьей, определение и свойства прямоугольника, признаки равенства треугольников), поэтому перед решением этих задач рассмотреть опорную задачу, на результат которой в дальнейшем можно сослаться. Сформулируем эту **опорную задачу**: «Доказать, что перпендикуляры, опущенные из вершин меньшего основания равнобокой трапеции на другое основание, отсекают от нее равные треугольники, причем проекция боковой стороны на большее основание равна  $(a - b) : 2$ , где  $a$  — большее основание трапеции,  $b$  — меньшее». Кроме того, задача № 70 **обобщает** данные задачи № 63 и расширяет ее заключение, в результате чего можно сделать вывод, что зная отрезки, на которые высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание, можно найти меньшее основание трапеции и ее среднюю линию.

В задачах № 65, 68 **предварительно надо доказать**, что образовавшаяся фигура является трапецией с использованием признака параллельности двух прямых, перпендикулярных третьей, и что прямая, проходящая через середину одной боковой стороны трапеции параллельно основаниям, проходит через середину другой боковой стороны, т. е. содержит среднюю линию трапеции. В задаче № 68 используется определение касательной и **прием замены одного отрезка другим, равным ему** (один диаметр заменяется другим диаметром той же окружности).

Задачи № 65, 66, 68 имеют **единую конструкцию**: через концы отрезка и его середину проведены параллельные прямые до пересечения с третьей прямой, поэтому могут быть объединены в одну *группу*.

### III. Поурочное планирование.

| №  | Цели урока                                                                                                                                                                                                                              | Распределение материала                                           |                                                                                         | Контроль                                                                                                                    |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    |                                                                                                                                                                                                                                         | в классе                                                          | на дом                                                                                  |                                                                                                                             |
| 1. | Ввести определение трапеции, элементы трапеции (основания, боковые стороны), определение равнобокой трапеции; изучить свойства равнобокой трапеции об углах при основании, о диагоналях, о треугольниках, отсекаемых высотами трапеции. | 1. Примера на «да», «нет»<br>2. № 60 и устный счет<br>3. № 64, 62 | 1. Выучить определения новых понятий; знать свойства равнобокой трапеции<br>2. № 61, 63 | 1. Опрос в парах по теоретическому материалу<br>2. В равнобокой трапеции с основаниями $a$ и $b$ ( $a > b$ ) найти проекцию |

Окончание табл.

| №  | Цели урока                                                                                                                                                                                                                                                                                | Распределение материала                                    |                                                                                    | Контроль                                                    |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
|    |                                                                                                                                                                                                                                                                                           | в классе                                                   | на дом                                                                             |                                                             |
|    | Научиться решать задачи на нахождение углов и оснований равнобокой трапеции                                                                                                                                                                                                               |                                                            |                                                                                    | боковой стороны на большее основание                        |
| 2. | Ввести определение средней линии трапеции; изучить свойство средней линии трапеции; научиться решать задачи алгебраическим и геометрическим методами:<br>— на нахождение средней линии по известным основаниям трапеции;<br>— на нахождение оснований трапеции по известной средней линии | 1. Примера на «да», «нет»<br>2. № 70<br>3. № 67<br>4. № 59 | 1. Выучить определение нового понятия; знать доказательство теоремы<br>2. № 69, 65 | 1. Работа на перфокартах<br>2. № 68                         |
| 3. | Повторить и проверить основные определения и утверждения темы; закрепить умение решать задачи на нахождение расстояния от середины отрезка до прямой; рассмотреть решение задачи на построение трапеции с использованием стандартных дополнительных построений                            | 1. Задача, аналогичная № 68<br>2. № 71                     | № 66, 72                                                                           | Самостоятельная работа по обязательным результатам обучения |

Приложение 17

### Методические требования к конспекту урока по математике

1. В конспекте указана **тема** урока.

2. **Цели** урока сформулированы достаточно конкретно (например, закрепить правило раскрытия скобок при умножении многочленов, когда число слагаемых в многочлене больше двух,

когда это правило надо применять вместе с правилом раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» или «-»).

3. В конспекте четко выделены **этапы** урока, причем на каждый этап сделан *переход* с предыдущего, перед учениками поставлена ясная *цель* очередного этапа, этап *мотивирован*, в конце каждого этапа подведен его итог.

4. Если составляется конспект **изучения нового**, то:

- выделенные этапы соответствуют *основным методикам* (методике изучения понятий, методике формирования умений, методике изучения теорем);
- все основные моменты урока *озвучены* (это касается и объяснения учителя, и ожидаемых ответов учеников), что помогает учителю оттачивать объяснение и добиваться четкой грамотной речи от учеников;
- если объяснение нового материала строится на выполнении некоторого задания, то в конспекте указаны вопросы ученикам, стимулирующие их на постановку и решение проблем задания, на формулировку выводов по рассмотренному заданию. Выводы желательно повторять на уроке неоднократно.

5. В конспекте урока:

- **решены** все запланированные **задания** с указанием (на полях или подчеркиванием) *особенностей* заданий, что помогает предвидеть возможные ошибки и трудности у учащихся;
- предусмотрены различные *способы* решений;
- в конспекте описана *организация* работы с заданием (желательно продумать различные формы работы);
- даны *образцы* оформления основных заданий;
- предусмотрен *контроль* и указаны его формы.

6. В конспекте описаны используемые **средства** (содержание карточек, кадры для кодоскопа, вид таблицы или ее название, модели и другое оборудование).

7. В конспекте отражен **вид доски** и указано, что на ней подготовлено *заранее* (что позволит сэкономить время на уроке), что и где заполняется *по ходу* урока (в таком случае не нарушится целостность восприятия). В конспекте выделено, что записывается в **тетрадах** учениками (это приучает обращать внимание учителя на ведение тетрадей и приучает учеников работе с нею).

8. В конце конспекта перечислены **итоговые** вопросы, согласованные с поставленными целями урока, даны ответы на эти вопросы, по домашнему заданию дан комментарий, что возможно только после решения всего домашнего задания.

### Технология составления конспекта урока

1. Выполнить анализ пункта; выяснить количество часов, отводимых на его изучение; разбить материал пункта на это количество часов; сформулировать цели урока.
2. Составить примерный план урока:
  - выделить последовательность этапов;
  - проверить соответствие этапов базовым методикам (методика формирования понятий, методика формирования умений, методика изучения теорем, методика обучения учащихся решению задач);
  - подобрать упражнения на каждый этап;
  - уточнить подготовительный этап с целью обеспечения успеха учеников при изучении нового, при выполнении упражнений урока;
  - продумать мотивацию каждого этапа урока;
  - продумать организацию работы учащихся на уроке, необходимые средства обучения;
  - составить итоговые вопросы урока.
3. Составить конспект урока в соответствии с методическими требованиями (Приложение 17).

### Конспекты первого урока по теме «Наибольший общий делитель»

#### **Конспект урока по теме «Наибольший общий делитель» (по учебнику [78])**

##### **Цели:**

- 1) ввести определение наибольшего общего делителя, определение взаимно простых чисел, показать запись: НОД ( $a$ ,  $b$ );
- 2) познакомиться с двумя способами нахождения наибольшего общего делителя: по определению и через разложение на простые множители.

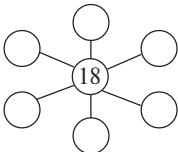
*Тип урока:* урок изучения нового материала.

*Методы:* объяснительно-иллюстративный, репродуктивный, частично-поисковый при введении взаимно простых чисел.

## План урока

1. Подготовка к изучению нового материала:
  - а) повторение понятия делителя данного числа;
  - б) разложение числа на простые множители;
  - в) нахождение делителя данного числа:
    - через перебор всех чисел, меньших данного;
    - через поиск делителей парами по правилу: если число  $a$  является делителем числа  $b$ , то и частное от деления  $b$  на  $a$  является делителем числа  $b$ ;
    - через разложение числа на простые множители.
2. Введение определения наибольшего общего делителя.
3. Усвоение определения через примеры на подведение под понятие.
4. Закрепление понятия НОД через его нахождение по определению.
5. Мотивация нахождения наибольшего общего делителя через разложение на простые множители.
6. Введение алгоритма нахождения наибольшего общего делителя через разложение.
7. Отработка шагов алгоритма: нахождение наибольшего общего делителя по готовым разложениям.
8. Закрепление алгоритма и подведение к понятию взаимно простых чисел.
9. Введение определения взаимно простых чисел.
10. Примеры взаимно простых чисел.
11. Подведение итогов урока.
12. Постановка домашнего задания.

## Ход урока

| Учитель                                                                                                                                                  | Ученики |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <b>1. Подготовка к изучению нового материала</b>                                                                                                         |         |
| Учитель сообщает учащимся: «На сегодняшнем уроке мы познакомимся с новым понятием “наибольший общий делитель”; подумайте, с каким понятием оно связано». |         |
| <b>Фронтальная беседа с классом:</b><br>Посмотрите на рисунок         |         |

*Продолжение табл.*

| Учитель                                                                                                                                              | Ученики                                                                                                            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| — Связана ли эта «ромашка» с выделенным вами понятием?                                                                                               | Да, этот рисунок связан с делителями числа 18, в новой теме есть слово «делитель».                                 |
| — Назовите делители числа 18 (учитель под диктовку учеников заполняет ромашку: 18 и 1, 2 и 9, 3 и 6).                                                |                                                                                                                    |
| — Что называется делителем данного числа?                                                                                                            | Любое натуральное число, на которое делится данное натуральное число, называется делителем данного числа.          |
| — Какие из чисел 4, 7, 9, 11, 14, 19, 12, 27 простые? Почему? (Ученики отвечают, а учитель вычеркивает названные.)                                   | 7, 11, 19 — простые числа, так как они имеют только два делителя.                                                  |
| — Как называются оставшиеся числа?                                                                                                                   | 4, 9, 14, 12, 27 — составные, так как они имеют более двух делителей.                                              |
| — Есть ли натуральное число, которое не является ни простым, ни составным?                                                                           | Число 1.                                                                                                           |
| — Названные составные числа разложите на простые множители.                                                                                          | $4 = 2 \cdot 2$ , $9 = 3 \cdot 3$ ,<br>$14 = 2 \cdot 7$ , $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ ,<br>$27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ . |
| — Клоун записал разложение числа на простые множители: $120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ . Публика смеялась. Почему? Назовите правильное разложение. | Число 4 не является простым.<br>$120 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$ .                                        |
| Используя правильное разложение числа 120 на простые множители, назовите все делители числа 120.                                                     | 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.                                                                 |
| — Как вы нашли все делители числа 120?                                                                                                               | Составили все возможные комбинации произведений простых множителей, входящих в разложение числа 120.               |
| <b>2. Введение определения наибольшего общего делителя</b>                                                                                           |                                                                                                                    |
| На доске сделана запись:<br>18:<br>24:                                                                                                               |                                                                                                                    |

Продолжение табл.

| Учитель                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Ученики                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Назовите и запишите в тетрадь делители данных чисел.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18<br>24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24                                                                 |
| 2. Подчеркните общие делители.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 18: <u>1</u> , <u>2</u> , <u>3</u> , <u>6</u> , 9, 18<br>24: <u>1</u> , <u>2</u> , <u>3</u> , 4, <u>6</u> , 8, 12, 24 |
| Почему число 3 можно назвать общим делителем чисел 18 и 24?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Потому что на 3 делится и число 18, и число 24.                                                                       |
| Попробуйте дать определение общему делителю двух чисел?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Общим делителем двух данных чисел называется такое число, на которое делится каждое из данных чисел.                  |
| Итак, у разных чисел делители в общем случае разные, но встречаются и общие. В данном случае это: 1, 2, 3, 6.<br>Среди общих делителей можно выделить <i>наибольший</i> . В данном примере назовите наибольший общий делитель чисел 18 и 24.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 6                                                                                                                     |
| Принято записывать: НОД (18, 24) = 6. Читается: наибольший общий делитель чисел 18 и 24 равен 6.<br>Итак, запишите в тетради тему сегодняшнего урока: «Наибольший общий делитель».<br>Итак, в данном примере 6 — наибольший общий делитель чисел 18 и 24, т. е. 6 — это самое большое натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел.<br>Попробуйте дать определение новому понятию? (Учитель подводит итог, выделяя голосом подчеркнутые слова, которые обычно опускают ученики). Внимание! Наибольшим общим делителем двух <b>натуральных чисел</b> называется самое большое <b>натуральное число</b> , на которое делится каждое из данных чисел. | (Ученики пытаются сформулировать.)                                                                                    |
| Повторите, пожалуйста, данное определение.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Ученики с места повторяют определение. Возможен вариант хорового ответа.                                              |

## Продолжение табл.

| Учитель                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Ученики                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>3. Усвоение определения</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p>Верно ли на доске сделаны записи:</p> <p>1) НОД <math>(15, 20) = 3</math>;<br/> 2) НОД <math>(30, 45) = 3</math>;<br/> 3) НОД <math>(4, 10) = 2</math>;<br/> 4) НОД <math>(23, 7) = 0,1</math>;<br/> 5) НОД <math>(12, 6) = 12</math>.</p>                                                                                                                                                                                         | <p>Первая запись не верна, так как 3 не является делителем числа 20. Вторая запись не верна, так как 3 не является наибольшим среди общих делителей чисел 30 и 45.</p> <p>Третья запись верна, так как 2 — общий делитель чисел 10 и 4, и он является наибольшим.</p> <p>Четвертая запись не верна, так как 0,1 не является натуральным числом.</p> <p>Пятая запись не верна, так как 12 не является делителем числа 6.</p> |
| <p>Итак, чтобы проверить, является ли число наибольшим общим делителем надо установить:</p> <p>1) является ли это число натуральным;<br/> 2) является ли это число общим делителем рассматриваемых чисел;<br/> 3) наибольшее ли оно из общих делителей.</p> <p>Клоун сказал, что сейчас решит очень трудную задачу: найдет <i>наименьший</i> общий делитель чисел. Не успел он досказать условие, как публика засмеялась. Почему?</p> | <p>Наименьшим общим делителем чисел является число 1, поэтому задача не может быть трудной.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <b>4. Закрепление понятия НОД через его нахождение по определению</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| <p>Итак, вы знаете, что такое НОД; можете определить, является ли данное число НОД или нет. Попробуем ответить на вопрос: «Как найти НОД двух данных чисел?» Вернитесь к примеру о числах 18 и 24 и попробуйте сформулировать этапы нахождения НОД.</p>                                                                                                                                                                               | <p>1) Найти все делители первого числа;<br/> 2) найти все делители второго числа;<br/> 3) найти общие делители данных чисел;<br/> 4) выбрать наибольший общий делитель.</p>                                                                                                                                                                                                                                                 |

Продолжение табл.

| Учитель                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Ученики                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Откройте № 97. Прочитайте текст задания и сравните свой ответ.<br>Итак, <i>подведем итог</i> : как можно найти наибольший общий делитель двух данных чисел?<br>Откройте № 99 (4): <i>Найти общие делители и наибольший общий делитель чисел 84 и 112</i> . Будем его выполнять письменно. | (Ученики повторяют алгоритм)<br>84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 14, 21, 28, 42, 84.<br>112: 1, 2, 4, 7, 14, 16, 28, 56, 112.<br>1, 2, 4, 7, 14, 28 – общие делители.<br>НОД (84, 112) = 28 |
| <b>5. Мотивация нахождения НОД через разложение на простые множители</b>                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                  |
| Вы видите, находить НОД, перебирая числа подряд, долго. А мы знаем, что разложение чисел на простые множители помогает находить его делители. Может быть, разложение чисел на простые множители поможет и для нахождения НОД?                                                             |                                                                                                                                                                                  |
| <b>6. Введение алгоритма нахождения НОД через разложение</b>                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                  |
| Найдем НОД (54, 90) = ?<br>1. Разложим данные числа на простые множители<br>54 <u>2</u> 90 <u>2</u><br>27 <u>3</u> 45 <u>3</u><br>9 <u>3</u> 15 <u>3</u><br>3 <u>3</u> 5<br>1            1                                                                                                |                                                                                                                                                                                  |
| 2. Подчеркнем общие простые множители в полученных разложениях. Является ли число 2 общим делителем чисел?                                                                                                                                                                                | Да, так как на 2 делятся оба числа.                                                                                                                                              |
| Является ли произведение 2·3 общим делителем?                                                                                                                                                                                                                                             | Да, так как в каждое разложение входят множители 2 и 3, значит, их произведение является делителем каждого из чисел.                                                             |
| 3. Как вы думаете, что надо сделать, чтобы получить НОД?                                                                                                                                                                                                                                  | Для этого следует перемножить 2, 3 и 3.                                                                                                                                          |
| Получается: НОД (54, 90) = 2·3·3 = 18.<br>Итак, сформулируйте, пожалуйста, этапы нахождения НОД.                                                                                                                                                                                          | (Выслушиваются ответы. Учитель может помогать вопросами:<br>Что сделали с каждым числом?<br>Что подчеркивали дальше?<br>Что находили дальше?)                                    |

## Продолжение табл.

| Учитель                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Ученики                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|----|------------------------------------|--|----------------------------------|--|---------------------------------|--|-------------------------------|--|---------------|--|
| <p>Внимание, попробую сформулировать правило: Для нахождения наибольшего общего делителя чисел необходимо:</p> <p>1) разложить данные числа на простые множители;</p> <p>2) найти (подчеркнуть) общие множители в полученных разложениях;</p> <p>3) найти произведение общих простых множителей.</p> <p>Откройте учебник на с. 18 и прочитайте правило нахождения наибольшего общего делителя чисел, не ошиблась ли я? Повторите, пожалуйста, данное правило.</p>                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>(Выслушиваются ответы; если есть ошибки, то ученики исправляют друг друга.)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 7. Отработка отдельных шагов алгоритма                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| <p>Проверим себя, насколько усвоен данный способ нахождения НОД. Устно выполните следующие упражнения (текст заранее записан на доске):</p> <p>Задание 1. Назовите общие простые множители чисел по их разложениям:</p> <p>а) <math>15 = 3 \cdot 5</math>,      б) <math>36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3</math>,      в) <math>54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3</math>,<br/><math>60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5</math>;      <math>78 = 2 \cdot 3 \cdot 13</math>;      <math>90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5</math>.</p> <p>Задание 2. Найдите: а) НОД (15, 60);<br/>                             б) НОД (36, 78);<br/>                             в) НОД (54, 90).</p> <p>Ученики с места дают комментированное объяснение.</p> | <p>а) 3, 5<br/>б) 2, 3<br/>в) 2, 3, 3.</p> <p>15<br/>6<br/>18</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 8. Закрепление алгоритма                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| <p>Задание 3. № 100(3, 4):</p> <p>Два человека вызываются к доске. Первый решает пример с полным объяснением, т. е. называет этапы алгоритма и их реализацию для данного примера. Второй решает самостоятельно, завершив решение, он садится на место, а другой ученик объясняет по выполненному решению порядок выполняемых операций. Все учащиеся выполняют данное задание у себя в тетрадях.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <table><tr><td>3)</td><td>4)</td></tr><tr><td>16   2   24   2   100   2   40   2</td><td></td></tr><tr><td>8   2   12   2   50   2   20   2</td><td></td></tr><tr><td>4   2   6   2   25   5   10   2</td><td></td></tr><tr><td>2   2   3   3   5   5   5   5</td><td></td></tr><tr><td>1   1   1   1  </td><td></td></tr></table> <p>НОД(16, 24) = <math>2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8</math>,<br/>НОД(100, 40) = <math>2 \cdot 2 \cdot 5 = 20</math>.</p> | 3) | 4) | 16   2   24   2   100   2   40   2 |  | 8   2   12   2   50   2   20   2 |  | 4   2   6   2   25   5   10   2 |  | 2   2   3   3   5   5   5   5 |  | 1   1   1   1 |  |
| 3)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 4)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 16   2   24   2   100   2   40   2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 8   2   12   2   50   2   20   2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 4   2   6   2   25   5   10   2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 2   2   3   3   5   5   5   5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 1   1   1   1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| 9. Введение определения взаимно обратных чисел                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| <p>Задание 4. Найдите: НОД(6, 7);<br/>                             НОД(19, 34);<br/>                             НОД(24, 25).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>1<br/>1<br/>1</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |
| <p>Какую закономерность вы подметили?</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | <p>НОД этих чисел равен 1</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |    |    |                                    |  |                                  |  |                                 |  |                               |  |               |  |

Продолжение табл.

| Учитель                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Ученики                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| Натуральные числа (показывает: 6 и 7, 19 и 34, 24 и 25), НОД (показывает на запись НОД) которых равен (указывается на знак «=») 1, называются взаимно простыми числами. Итак, 6 и 7, 19 и 34, 24 и 25 — взаимно простые числа. Обратите внимание на правописание.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | (Пишут в тетрадах)                                               |
| Повторите, какие числа называются взаимно простыми.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Ученики повторяют определение.                                   |
| <b>10. Примеры взаимно простых чисел</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |                                                                  |
| Назовите числа, взаимно простые с числом: 6, 21, 40.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Ученики по очереди называют несколько примеров по каждому числу. |
| <b>11. Подведение итогов</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                                                                  |
| Итак, подведем итог урока.<br>— С каким новым понятием вы сегодня познакомились? Что о НОД чисел узнали?<br>— Дайте определение НОД.<br>— Найдите НОД (16, 24)<br>— Какими способами можно найти НОД? Как найти НОД по определению? Как найти НОД через разложение?<br>— Как называются числа, наибольший общий делитель которых равен 1? Итак, какие числа называются взаимно простыми?<br>Приведите пример.<br>Известно, что $\text{НОД}(7, \dots) = 1$ . Найдите пропущенное число.<br>Известно, что $\text{НОД}(a, b) = 14$ . Найдите несколько возможных ситуаций для $a$ и $b$ . | Определение НОД; обозначение, алгоритмы нахождения.              |
| <b>12. Постановка домашнего задания</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                  |
| Домашнее задание:<br>П. 1.5 (выучить определения и алгоритм);<br>№ 100 (5—9), 103, 135 (1—3)<br>(все задания на вычисления НОД).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                  |

**Вид тетради учащегося:**

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ; делители 120: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.

**Наибольший общий делитель.**18: 1, 2, 3, 6, 9, 18.

6 — наибольший общий делитель:

24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

НОД (18, 24) = 6.

**№ 99(4)**

84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 14, 21, 28, 42, 84;

1, 2, 4, 7, 14, 28 — общие

112: 1, 2, 4, 7, 14, 16, 28, 56, 112;

делители; НОД (84, 112) = 28.

НОД (54, 90) = ?

$$\begin{array}{r}
 54 \overline{) 2} \quad 90 \overline{) 2} \\
 27 \overline{) 3} \quad 45 \overline{) 3} \\
 9 \overline{) 3} \quad 15 \overline{) 3} \\
 3 \overline{) 3} \quad 5 \overline{) 5} \\
 1 \quad 1
 \end{array}$$

НОД(54, 90) =  $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ .**№ 100 (3, 4).**

$$\begin{array}{r}
 3) 16 \overline{) 2} \quad 24 \overline{) 2} \\
 8 \overline{) 2} \quad 12 \overline{) 2} \\
 4 \overline{) 2} \quad 6 \overline{) 2} \\
 2 \overline{) 2} \quad 3 \overline{) 3} \\
 1 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4) 100 \overline{) 2} \quad 40 \overline{) 2} \\
 50 \overline{) 2} \quad 20 \overline{) 2} \\
 25 \overline{) 5} \quad 10 \overline{) 2} \\
 5 \overline{) 5} \quad 5 \overline{) 5} \\
 1 \quad 1
 \end{array}$$

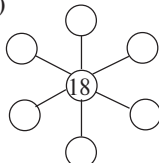
НОД (16, 24) =  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ . НОД (100, 40) =  $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$ .

НОД (6, 7) = 1

НОД (19, 34) = 1

НОД (24, 25) = 1

 6 и 7; 19 и 34; 24 и 25 —  
взаимно простые числа
**Вид доски**

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |               |               |               |               |              |               |       |       |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|---------------|-------|-------|---|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(Заранее)</p> <p>1)</p>  <p>2) 4, 7, 9, 11, 14, 19, 12, 27</p> <p>3) <math>120 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5</math></p> <p>4) НОД (15, 20) = 5</p> <p>НОД (30, 45) = 15</p> <p>НОД (4, 10) = 2</p> <p>НОД (23, 7) = 0,1</p> <p>НОД (12, 6) = 12</p> | <p>18: <u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, <u>6</u>, 9, 18</p> <p>24: <u>1</u>, <u>2</u>, <u>3</u>, 4, <u>6</u>, 12, 24</p> <p>6 — наибольший общий делитель</p> <p>НОД (18, 24) = 6</p> <p>№ 99 (4)</p> <p>84: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 14, 21, 28, 42, 84.</p> <p>112: 1, 2, 4, 7, 14, 16, 28, 56, 112.</p> <p>НОД (84, 112) = 28.</p> <p>НОД (54, 90) = ?</p> <table><tr><td>54   <u>2</u></td><td>90   <u>2</u></td></tr><tr><td>27   <u>3</u></td><td>45   <u>3</u></td></tr><tr><td>9   <u>3</u></td><td>15   <u>3</u></td></tr><tr><td>3   3</td><td>5   5</td></tr><tr><td>1  </td><td>1  </td></tr></table> <p>НОД (54, 90) = <math>2 \cdot 3 \cdot 3 = 18</math>.</p> <p>№100 (3, 4).</p> | 54   <u>2</u> | 90   <u>2</u> | 27   <u>3</u> | 45   <u>3</u> | 9   <u>3</u> | 15   <u>3</u> | 3   3 | 5   5 | 1 | 1 | <p>(Заранее)</p> <p>Задание 1. Назовите общие простые множители чисел.</p> <p>а) <math>15 = 3 \cdot 5</math><br/><math>60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5</math></p> <p>б) <math>36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3</math><br/><math>78 = 2 \cdot 3 \cdot 13</math></p> <p>в) <math>54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3</math><br/><math>90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5</math></p> <p>Задание 2. Найдите:</p> <p>НОД (15, 60)</p> <p>НОД (36, 78)</p> <p>НОД (54, 90)</p> <p>Задание 3.</p> <p>№ 100 (3, 4)</p> |
| 54   <u>2</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 90   <u>2</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |               |               |               |               |              |               |       |       |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 27   <u>3</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 45   <u>3</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |               |               |               |               |              |               |       |       |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 9   <u>3</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 15   <u>3</u>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |               |               |               |               |              |               |       |       |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 3   3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 5   5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |               |               |               |               |              |               |       |       |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |               |               |               |               |              |               |       |       |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p>Задание 4.</p> <p>НОД (6, 7) =</p> <p>НОД (19, 34) =</p> <p>НОД (24, 25) =</p>                                                                                                                                                                                                                                                      | <p>НОД (16, 24); НОД (7, ...) = 1;</p> <p>НОД (a, b) = 14.</p> <p>Домашнее задание: п. 1.5 (определения, правило); № 100 (5—9); 103; 135 (1—3).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |               |               |               |               |              |               |       |       |   |   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

**Дополнение к конспекту, если класс работает  
по учебнику Н.Я. Виленкина и др.**

**Основное отличие:** введение определения наибольшего общего делителя осуществляется с использованием задачи, что предполагает усиление умственной нагрузки учащихся.

**Задача:** *Какое наибольшее число одинаковых подарков можно составить из 48 конфет «Ласточка» и 36 конфет «Чебурашка», если надо использовать все конфеты?*

Задача может быть представлена по краткой записи:

|           |  |                        |
|-----------|--|------------------------|
| Л — 48 к. |  | Какое наибольшее число |
| Ч — 36 к. |  | одинаковых подарков?   |

Возможен следующий диалог с учениками:

— О чем идет речь в задаче? (О конфетах «Ласточка» и «Чебурашка».)

— Что известно о конфетах? (48 конфет «Ласточка» и 36 конфет «Чебурашка».)

— Что надо определить? (Какое наибольшее число одинаковых подарков можно составить.)

— Разберемся со словами «одинаковые подарки». Можно ли составить *два* одинаковых подарка из данных конфет? (Да.) Как это сделать? (Нужно конфеты «Ласточка» и конфеты «Чебурашка» разделить поровну. Получится в каждом подарке 24 одних и 18 других конфет.)

— Почему удалось создать два одинаковых подарка? (Потому что и 48, и 36 делятся на 2.)

— Давайте выпишем, сколько одинаковых подарков можно создать только из конфет «Ласточка». (Ученики диктуют учителю и пишут в своих тетрадях 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.)

— Сколько одинаковых подарков можно создать только из конфет «Чебурашка»? (Ученики диктуют учителю и пишут в своих тетрадях 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.)

— Можно ли теперь ответить на вопрос, сколько одинаковых подарков можно составить из двух сортов конфет? Ученики называют, а учитель подчеркивает:

48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18.)

— Можно ли теперь ответить на вопрос задачи? (Да, наибольшее число одинаковых подарков равно 12.)

— Давайте теперь переведем на математический язык то, что сделали. Как называются числа, которые мы выписали для чисел 48 и 36? (Это делители чисел 48 и 36.)

— Как бы вы назвали подчеркнутые делители? (Заслушивают варианты ответов. Если нет правильного, то учитель предлагает согласиться с термином: общие делители.)

— Как бы вы назвали общий делитель 12? (Наибольший общий делитель.)

— Итак, мы нашли наибольшее **натуральное** число, на которое делятся без остатка числа 48 и 36. Попробуйте дать определение наибольшего общего делителя чисел  $a$  и  $b$ . (Ученики формулируют определение и тему урока.)

### **Конспект урока по учебнику «Делимость чисел» серии «Математика, психология, интеллект» [30]**

Предполагается домашняя работа по учебнику, самостоятельное формулирование теоретических положений.

**Тема:** «Наибольший общий делитель».

**Цели урока:** ввести понятия общего и наибольшего общего делителя на практическом, образном, словесном и знаковом языках, ввести определение взаимно простых чисел, рассмотреть алгоритм нахождения НОД двух и нескольких чисел, отметить использование НОД для нахождения частного двух данных чисел.

**План урока:**

- 1) проверка домашнего задания;
- 2) формулирование определений общего делителя и наибольшего общего делителя;
- 3) выполнение заданий на «да» и «нет»;
- 4) составление алгоритма нахождения НОД, используя канонические разложения чисел;
- 5) нахождение НОД двух данных чисел;
- 6) изучение применения НОД для нахождения частного;
- 7) постановка домашнего задания.

### **Ход урока**

#### **1. Проверка домашнего задания.**

Сегодня на уроке мы вместе с нашими героями окунемся в «Дело о НОД или пропавшая курица». На дом было задано прочитать с. 131—135 и ответить на ряд вопросов. Проверим, что удалось сделать.

— Итак, о какой партии птиц идет речь? (О партии: 18 гусей, 24 утки и 25 куриц.)

— Какая задача у поставщика? (Весь товар разделить на одинаковые партии.)

— О каком экспериментальном делении идет речь? (Поставщик проверял, можно ли распределить птицу между двумя лавками, между тремя и т. д.)

— Как математически обработал Уотсон результаты экспериментального деления? (Он искал общие делители чисел 18, 24, 25. Для этого разложил числа на простые множители, составил таблицу со всеми натуральными делителями чисел 18, 24, 25.)

— Как работа Уотсона помогла поставщику увидеть решение своей задачи? (В таблице видны общие делители чисел 18 и 24; 18, 24 и 25.)

— К каким новым понятиям привели результаты Уотсона? (К понятиям общий делитель, наибольший общий делитель, взаимно простые числа.)

— Запишем тему урока и воспроизведем те записи, которые сделал Уотсон в материалах следствия.

Ученики пишут тему урока и делают основные записи:

$$ОД(18, 24) = \{1, 2, 3, 6\};$$

$$НОД(18, 24) = 6;$$

$$ОД(18, 25) = \{1\}, ОД(24, 25) = \{1\}, ОД(18, 24, 25) = \{1\}.$$

— Как называются числа, которые имеют только один общий делитель? (Числа, имеющие только один общий делитель, называются взаимно простыми.)

*2. Формулирование определений общего делителя и наибольшего общего делителя.*

— Итак, число 2 является общим делителем чисел 18 и 24. Попробуйте сформулировать определение, какое число называется общим делителем чисел  $a$  и  $b$ . (Ученики предлагают свои формулировки.)

— Число 6 является наибольшим общим делителем чисел 18 и 24. Попробуйте сформулировать определение, какое число называется наибольшим общим делителем чисел  $a$  и  $b$ . (Ученики предлагают свои формулировки.)

— Сравним свои ответы с ответами Уотсона. (Ученики читают «Заметки Уотсона» до алгоритма нахождения НОД ( $a$ ,  $b$ ) на с. 143, обращая внимание на то, что еще кроме определений решил выделить Уотсон.)

*3. Выполнение заданий на «да» и «нет».*

— Проверим себя, верно ли мы понимаем определение НОД. Для этого выполним задание 9: *Верно ли, что:*

$$а) НОД(33, 66) = 66, \quad б) НОД(36, 108) = 9,$$

$$в) НОД(36, 54) = 9, \quad г) НОД(123, 312) = 1.$$

Ученики дают ответы, желательно услышать ссылки на признаки делимости. Так, в примере б) ученики должны сказать, что числа делятся на 2 и на 9, значит, на  $(2 \cdot 9)$ , т. е. 18 также является общим делителем данных чисел, поэтому 9 не является НОД чисел 36 и 108.

4. *Составление алгоритма нахождения НОД, используя канонические разложения чисел.*

— Итак, мы знаем определение НОД двух чисел. Какие вопросы в связи с этим понятием вы бы хотели задать?

(Хотелось бы, чтобы ребята задали вопросы: «Как находить НОД?», «Зачем нужно уметь находить НОД?» Если ученики не зададут вопросов, то учитель формулирует эти вопросы со словами: «А вот меня интересует...»)

Ответ на первый вопрос можно найти в книге на с. 138—139. Попробуйте проанализировать рассуждения Уотсона. (Ученики самостоятельно читают текст и отвечают на вопрос: «Как найти НОД двух данных чисел?». А затем сравнивают свой ответ с ответом, указанным в «Заметках Уотсона».)

5. *Нахождение НОД двух данных чисел.*

Учитель предлагает ученикам по памяти восстановить в тетрадях нахождение НОД чисел 945 и 126. Ученики раскладывают числа на простые множители и записывают канонические разложения данных чисел; по каноническим разложениям составляют НОД и считают полученное произведение, делают вывод. Возможна взаимопроверка.

6. *Изучение применения НОД для нахождения частного.*

Для ответа на вопрос: «Зачем нужно уметь находить НОД?» проанализируем записи Холмса на с. 141. (Ученики просматривают, а затем учитель задает вопросы.)

— О каких числах идет речь? (О числах 1890 и 126.)

— Что сначала сделал Холмс? (Разложил числа на простые множители.)

— Какая задача стоит перед Холмсом? (Ему надо найти частное  $1890:126$ .)

— Как возникла следующая запись  $(2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7) : (2 \cdot 3^2 \cdot 7)$ ? (Каждое число было заменено своим каноническим разложением.)

— Что сделал Холмс дальше? (Он выделил множители, составляющие наибольший общий делитель данных чисел.)

— Что сделал Холмс дальше? (Он исключил наибольший общий делитель в каждом разложении и нашел легко частное 15.)

Учитель предлагает восстановить по памяти записи Холмса, а затем проверить себя по учебнику.

### 7. Постановка домашнего задания.

Учитель просит перечислить вопросы, на которые надо знать ответы (ученики перечисляют и поясняют, где на эти вопросы можно найти ответы). Учитель обращает внимание на фразу на с. 139: «Не могу не похвастаться, мой итог содержит еще гору информации» и задает на дом задание найти в тексте, о какой информации идет речь. Кроме того, ученикам предлагается из пяти первых заданий выбрать любые два и решить их в тетради, а для остальных знать план решения. Наконец, найти ответ на вопрос: «Почему дело о НОД носит еще и название “Пропавшая курица”?»

## Приложение 20

### Примерная схема комплексного анализа урока

1. **Определить место данного урока в системе уроков по теме; цели урока; и его структуру.** Оценить правильность выбранных целей. Выяснить, учтены ли развивающие задачи урока.

2. **Провести анализ каждой структурной части урока:**

- определить какая образовательная *цель* решается;
- определить, была ли *мотивирована* деятельность учащихся и как;
- проанализировать *содержание* отобранного учебного материала, установить соответствие его поставленной задаче;
- отметить *методы и приемы*, использованные учителем (рассказ, беседа, создание проблемной ситуации, постановка проблемных вопросов и т. д.);
- формы *организации* деятельности учащихся (коллективная и индивидуальная работа, устная и письменная работа);
- применяемые *средства*;
- виды, формы, способы и средства *контроля* деятельности учащихся;
- *результат* деятельности учителя на анализируемом этапе.

*Удобно эту часть анализа оформить в виде таблицы:*

| № этапа | Цели этапа | Мотивация | Содержание | Приемы, методы, организация, средства, контроль | Результат |
|---------|------------|-----------|------------|-------------------------------------------------|-----------|
|         |            |           |            |                                                 |           |

3. **Выполнить анализ содержания урока.** Для этого выяснить:

- соответствует ли содержание *целям* урока;
- соответствует ли содержание *базовым методикам* (методике формирования понятий, методике изучения теорем, методике формирования умений, методике обучения учащихся решению задач);
- какова *логика* выстраивания материала урока (есть ли обоснованные связи с прошлым материалом, внутри материала, с будущим материалом; как осуществлялись переходы от одного материала к другому; ясна ли логика учащимся);
- каков *характер материала* урока (проблемный или нет, требующий воспроизведения или поиска и т. п.).

4. **Выполнить анализ деятельности учителя.** Для чего выяснить:

- Соответствуют ли использованные учителем методы и приемы работы *цели и содержанию* учебного материала.
- Какие *формы организации* деятельности учащихся были предложены, какова их целесообразность, как учителю удалось сориентировать учащихся в той или иной форме деятельности и проконтролировать ее ход; как обеспечивалась дисциплина.
- Как был организован *диалог* с учащимися (каким образом осуществлялось стимулирование учащихся к задаванию вопросов, к высказываниям своего видения ситуации; каков характер задаваемых учителем вопросов; как учитель реагировал на ответы и предложения учеников; как учитель воздействовал различных учеников в диалоге; когда учитель держал обоснованную паузу).
- Как осуществлялась *индивидуализация обучения* (мотивирование деятельности учащихся; предоставление учащимся выбора материала, форм его изучения; использование различных способов кодирования информации; обсуждение различных способов решения задач; анализ допущенных ошибок; проектирование индивидуальных стратегий обучения; осуществление индивидуальных консультаций; организация самостоятельной работы учащихся; актуализация и развитие умственного опыта учащихся; создание условий для осуществления рефлексии своей деятельности: «Почему я так делаю, что я хочу получить, к чему это приведет? Чему я научился на уроке, какой опыт приобрел? Что мне необходимо еще сделать, чему научиться?»; разумность помощи ученикам).

- Как осуществлялись *контроль* формирования умственных и практических знаний и оценивание работы учащихся (выделена или нет проверка домашнего задания в отдельный этап урока; в какой форме был организован контроль: диалог, взаимоконтроль, самоконтроль, контроль без видимых проявлений, проверка тетрадей; содержательное или балловое оценивание было предложено; как осуществлялась коррекция знаний; контролировал ли учитель формирование умственных действий).

5. **Выполнить анализ деятельности учащихся.** Для чего выяснить:

- участие в постановке целей, планировании, анализе, коррекции своей деятельности;
- участие в диалоге (выслушивают, понимают другой взгляд на ситуацию, другой выбор, отстаивают свою точку зрения, умеют задавать проблемные вопросы, приводить примеры и контрпримеры, аргументы);
- степень самостоятельности в решении учебных задач;
- комфортность (чем обеспечивается);
- каковы достигнутые результаты?

6. **Сделать общие выводы по уроку:**

- достижение цели и задач урока;
- общая оценка деятельности учителя и учащихся на уроке;
- каким опытом можно (хотелось бы) воспользоваться.

### **Пример анализа урока в 6 классе**

**Тема:** «Нахождение процента от числа».

**Цели:** Повторить умножение обыкновенных дробей, нахождение дроби от числа, дать ученикам возможность сформулировать алгоритм нахождения процента от данного числа, самим проверить усвоение нового материала.

**Структура урока.** Для ребят учитель в начале урока выделил 3 этапа: «Знаешь ли ты?», «Умеешь ли ты?», «Объяснишь ли ты?», поэтому ученики имели возможность представлять себе рамки урока. Соответственно при переходе на каждый из этих этапов само название служило мотивом для учащихся. Вместе с тем каждый из этих этапов мы можем в свою очередь разделить на части, выяснить назначение этапа, его содержание, мотив, формы организации, приемы и методы работы учителя, полученные результаты.

Так, на этапе «Знаешь ли ты?» было предложено две формы работы:

1. Три ученика выполняли устную работу, которая была организована фронтально.

2. Одна ученица у доски выполняла письменное задание. Следует отметить, что мотивом вызова был вопрос: «Кто желает поработать у доски?» Ученикам была предоставлена возможность ознакомиться с заданием, с формой работы с ним, что не дало повода для стресса.

В устной работе можно выделить четыре части:

- знаешь ли ты законы умножения, поскольку предлагались задания на вычисление удобным способом;
- знаешь ли ты правило сокращения дробей;
- знаешь ли ты, как разделить число на 100;
- знаешь ли ты правило нахождения дроби от числа.

Все задания были записаны на доске, хотя, возможно, лучше иметь соответствующие карточки для устной работы, которые сэкономили бы время учителя на перемене, и ученикам комфортнее было бы работать. Если соотнести предложенный материал с темой урока, то можно сказать, что он носил подготовительный характер, поскольку новый материал опирается на него. Исключение составляет задание на законы. Но если учесть, что это задание было первым, к тому же вынуждало подумать, то оно было как зарядка для ума, подобно физической зарядке для тела. Удачным был прием актуализации нужного правила, когда учитель задал вопрос: «На какое правило это задание?» Следует отметить знание учащимися формулировок правил, что свидетельствует о предыдущей успешной работе учителя.

Далее следовала проверка выполнения задания девочкой у доски. Задание было связано с умножением чисел, что соответствует теме урока. Ученица имела возможность себя проверить, используя таблицу ответов, а остальные ученики потренироваться в проверке чужого решения. Хорошо бы, чтобы ученики сами давали оценку сделанному (что сделано? правильно – неправильно? что понравилось? и т. д.), а уж потом учитель мог дать и свой комментарий.

На этапе «Умеешь ли ты?» можно выделить две части: первая связана с решением задач на нахождение части от числа, вторая — с определением процента. Обе части соответствуют теме урока, поэтому целесообразны. На этом этапе осуществлялась письменная работа. Было предложено две задачи, причем условия задач были представлены по-разному: в одном случае словесный текст,

а в другом — краткая запись, что учитывает индивидуальность детей и способствует их развитию, так как требует перевода с одного языка на другой. Возможно, эти две формы следовало бы поменять местами, тогда первая задача про рожь служила бы образцом не только для решения второй задачи, но и для задач нового типа.

Работа по решению задач была организована следующим образом: один ученик брал на себя роль учителя (он комментировал решение для всех остальных), причем сначала было предложено сообщить план решения, а потом уже его реализацию. После решения задач удачен был и вопрос учителя: «Что же главного было в этих задачах?» и выделение главного цветным мелом. Предоставление возможности учащимся сначала составить план, сначала осмыслить задание, а по завершении работы подвести итог, приносит пользу не только в выполнении задач урока, но и позволяет сделать в уроке некоторую передышку, снимает некоторую напряженность.

Мотивом обращения к процентам была просьба учителя повторить дома эту тему. Ребята вспомнили определение и выполнили задание. Один ученик у доски, а остальные в тетрадях выполняли математический диктант, включающий задания на перевод процентов в обыкновенную или десятичную дробь и обратно. Поскольку это одно из главных умений для изучения нового материала, учитель задание продублировал. Если сначала ученик во время математического диктанта показал образец, то затем каждый по своей карточке выполнил похожее задание, по готовым ответам проверил сам себя, выяснил, какие ошибки допустил, чем ошибки были вызваны.

Представляется необходимым перед началом самостоятельной работы дать возможность ученикам ознакомиться с ее содержанием, формой предъявления (задание дано в таблице, надо понять, как она устроена, что нужно сделать), надо дать возможность ученикам задать вопросы по работе. Это будет служить и настроен на работу, и даст ученикам большую уверенность. Как прием можно предложить следующее: попросить какого-нибудь ученика рассказать план выполнения самостоятельной работы.

Удачен прием, предложенный учителем для передышки, когда каждый вытягивает карточку с одним единственным вопросом, ответ на который слушает только учитель. (Учитель назвал этот прием «Математические карты».)

Подведем итог этапу «Умеешь ли ты?». Ученики умеют решать задачи на нахождение дроби от числа, умеют связывать проценты с дробью, умеют выстраивать план решения, умеют комментировать свои действия, умеют анализировать свои ошибки.

Проанализируем этап «Объяснишь ли ты?». Что должны объяснить дети?

- Как решались задачи в 5 классе.
- Какая тема урока.
- Как новым способом решать задачи на проценты.
- Как находить процент от данного числа.

Итак, на этапе «Объяснишь ли ты?» можно выделить несколько частей:

1) *Введение алгоритма* нахождения процента от данного числа, что было осуществлено в следующей последовательности:

- решение задачи на проценты старым способом;
- установление связи между задачами на проценты с задачами на нахождение дроби от данного числа;
- формулирование темы урока, составление алгоритма, нахождение процента от данного числа.

На этом этапе урока использовался поисковый метод: ученики находят связи, находят алгоритм, определяют тему. При изучении нового материала использовались следующие вопросы, стимулирующие мысль: «Не показалась ли задача знакомой? На какую задачу похожа? Почему совпали ответы? Как вы рассуждали? Как проще?»

Было предложено сочетание различных форм организации работы (самостоятельная работа для актуализации прошлого, фронтальная работа для установления связей, для составления алгоритма решения задач новым способом, самостоятельная работа для решения задачи новым способом).

Учителю, который сталкивается с необходимостью перестраивать старый опыт детей, следует помнить, что это достаточно трудный психологический момент урока. Всегда надо дать возможность ученикам сравнить новое со старым, убедить ребят, что новый способ лучше, а может равноценен старому, ученик не должен по велению учителя отказываться от старого, к тому же всегда удобно иметь в запасе несколько способов решения, что дает лишнюю возможность себя контролировать. Поэтому и в новом материале надо было дать возможность решить задачу, используя перевод к десятичным дробям, тем более, что дальнейшее обращение к правилу вынуждает детей игнорировать одну из строчек правила.

2) *Самостоятельная работа с правилом* по учебнику. На этом этапе учитель предложил прочитать и постараться запомнить правило, изложенное в учебнике, затем каждый проговорил

правило для всех. Следует отметить, что учитель даже не назвал страницу, на которой есть рассматриваемое правило, что говорит о том, что ученики обучены этому умению работы с книгой.

Как показали ответы учеников, правило вызывает у них затруднения в запоминании, поэтому можно порекомендовать следующий прием работы: разбить текст на части (в правиле два шага), в каждой части выделить ключевое слово (на первом шаге — это слово «выразить», на втором — «умножить»), повторить несколько раз ключевое слово, а к дальнейшим словам каждой части поставить нужный вопрос (в данном случае: «Что выразить?», «Что умножить?»). Индивидуальной проверке запоминания может предшествовать хоровая проверка, которая более комфортна ученикам.

3) *Работа над заданием «Сравнить значения двух выражений»*, которая была организована по парам, причем каждая пара вносила свой вклад в общее задание. Удачен вопрос учителя перед выполнением задания: «Как вы понимаете задание?»

4) *Самостоятельная работа*, связанная с уравнением, которая была выполнена по плану, предложенному одним из учеников. Проверка была осуществлена фронтальным обсуждением результатов. К этому моменту урока ребята уже устали. Может, надо было снять это задание, переключиться на что-то принципиально иное (музыка, стихи, движения...).

5) В конце урока была предложена *самостоятельная работа*, которая включала не только задания, типичные разобранным, но и задания будущей темы. Представляется важным предупредить ребят об этом, с тем, чтобы они не огорчились, если что-то не получится, и, наверно, не только не снижать оценки, а вообще их не ставить. Проконтролировать себя каждый мог по готовым ответам, может быть есть смысл предоставить ученику возможность доработать по карточке дома. Во время самостоятельной работы учитель оказывал индивидуальную помощь слабому ученику. При беседе один на один нужно выделить проблемы ученика, на каждое его затруднение дать какую-нибудь опору (схему, рисунок, перечень вопросов, какие надо задать самому себе и т. п.).

6) *Подведение итогов урока*. На итоге урока было выделено главное в теме, домашнее задание предоставляло возможность ученикам сделать индивидуальный выбор, как по объему материала, так и по его характеру.

Еще один психологический аспект урока следует отметить: учитель старается не повторять свои слова, слова ребят, что лишний раз оберегает уши детей; свое согласие — не согласие

выражает мимикой, жестами, а не голосом. Кроме того, учитель старается подбодрить учеников, дает и им прием аутотренинга: похвали себя сам.

### **Общие выводы по уроку:**

Цели урока достигнуты: ученики знают правило нахождения процента от данного числа, умеют его применять в основных ситуациях.

Учитель грамотно построил урок, подобрал его содержание, разнообразил формы работы в соответствии с поставленными целями, учащиеся активно участвовали в уроке.

Можно воспользоваться следующими приемами:

- мотивация через название этапов;
- использование поискового метода при изучении нового материала;
- установление связей нового материала с прошлым через решение одной и той же задачи различными способами;
- парная работа, когда результат каждой пары учитывается всеми, оказание помощи друг другу, взаимопроверка;
- использование заданий для умственной разминки, использование индивидуальных вопросов;
- создание комфортного климата с помощью похвалы и поддержки учащихся;
- предоставление единых требований ко всем учащимся.

## *Приложение 21*

### **Урок изучения нового материала, где ведущими методами являются беседа (объяснительно-иллюстративная) и практические методы (репродуктивные и частично-поисковые)**

**Тема:** Квадратный корень из произведения [2].

#### **Цели:**

- повторить определение арифметического квадратного корня;
- ввести и доказать формулу квадратного корня из произведения;
- научиться применять формулу, если под корнем:
  - а) стоят два множителя;
  - б) стоят три множителя;
  - в) произведение задано не явно.
- проверить усвоение с помощью самостоятельной работы.

**План урока:**

1. Актуализация знаний.
2. Изучение нового материала (введение и усвоение).
3. Закрепление формулы на примерах.
4. Подведение итогов.
5. Самостоятельная работа.
6. Задание на дом.

**Ход урока**

Итак, мы продолжаем изучать большую тему «Арифметический квадратный корень». Сегодня мы познакомимся с одним из свойств арифметического квадратного корня.

Ознакомление учеников с целью урока, установление связей с изученным

**1. Актуализация знаний.**

Вопросы для повторения:

- Как называется выражение  $\sqrt{a}$ ?
- Что называется арифметическим квадратным корнем из числа  $a$ ? (Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ .)

Учитель делает запись:

$$\sqrt{a} \begin{cases} \nearrow \sqrt{a} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$$

- При каком значении  $a$  выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл?

**2. Изучение нового материала.**

*Введение теоремы.*

Рассмотрим арифметический корень

$$\sqrt{16 \cdot 25} =$$

Найдите значение выражения:

$$\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} =$$

Мы получили равные результаты (правые части), значит, и левые части будут равны:

$$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25}.$$

Итак, *корень из произведения двух чисел равен произведению корней из этих чисел.*

Оказывается, это верно не только для чисел 16 и 25, а для любых двух неотрицательных чисел.

Ученики считают:  
 $\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{400} = 20.$

Ученики считают:  
 $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$

Теорема: Если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

(Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.)

2—3 ученика повторяют формулировку теоремы

*Доказательство*

1. Ребята, а почему так важно, чтобы множители были неотрицательными, т. е.  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ ? (Только при таких условиях  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$  — имеют смысл.)

2. Посмотрите на равенство  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ . Как называется выражение, записанное в левой части? (Арифметический квадратный корень из числа  $ab$ .) Чтобы доказать равенство, мы должны показать, что значение выражения в правой части равно значению арифметического квадратного корня из числа  $ab$ . Итак, распишем левую часть равенства:

Учитель сообщает идею доказательства

$$\begin{array}{l} \nearrow (\sqrt{ab}) \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{ab})^2 = ab \end{array}$$

Таким образом, нам нужно доказать, что в правой части стоит число, удовлетворяющее этим двум условиям: это число должно быть неотрицательно; его квадрат дает число  $ab$ .

3. Расписываем компоненты правой части:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{a} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{a})^2 = a \end{array} & \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{b} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{b})^2 = b \end{array} \end{array}$$

4. Делаем выводы:  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ , так как произведение двух неотрицательных чисел неотрицательно.

Найдем квадрат произведения двух чисел  $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$ .

Чему равно это выражение?

Ученики считают:

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$$

Мы получили, что левая часть равна правой части:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

*Запись доказательства:*

1)  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ , значит,  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$  — имеют смысл.

2) Расписываем левую часть:

$$\begin{array}{l} \nearrow \sqrt{ab} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{ab})^2 = ab \end{array}$$

3) Распишем компоненты правой части:

$$\begin{array}{l} \nearrow \sqrt{a} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{a})^2 = a \end{array} \qquad \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{b} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{b})^2 = b \end{array}$$

4) Делаем выводы:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ , так как произведение двух неотрицательных чисел неотрицательно.

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Значит,  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

*Вопросы на усвоение:*

- Как звучит формулировка теоремы?
- Что делали на первом этапе доказательства? (Выясняли, что при данных условиях компоненты равенства имеют смысл.)
- Что делали на втором этапе доказательства? (Расписывали левую часть.)
- Что делали на третьем этапе доказательства? (Расписывали компоненты правой части равенства по частям.)
- Что делали на четвертом этапе доказательства? (Делали выводы.)
- Как можно на основе этой теоремы сформулировать правило извлечения квадратного корня из произведения? (Чтобы извлечь корень из произведения, нужно извлечь корень из каждого множителя.)

Итак, мы доказали теорему об извлечении квадратного корня из произведения двух множителей. Будет ли теорема верна, если

произведение будет содержать три множителя? Попробуйте доказать это утверждение самостоятельно, продолжив равенство:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \dots$$

### 3. Закрепление изученного.

- На доске записаны примеры:

1.  $\sqrt{25 \cdot 81} =$

2.  $\sqrt{4 \cdot 25 \cdot 100} =$

3.  $\sqrt{14400} =$

Первые два примера репродуктивного характера, а последний требует поиска.

Задаются *общие* вопросы!

**Можно ли сказать, что три примера связаны с доказанной теоремой?** (В первых двух примерах дан корень из произведения, а в третьем случае подкоренное выражение можно представить в виде произведения, значит, можно применить доказанную теорему.)

Учитель под диктовку учеников заканчивает равенства.

- Решение примеров из учебника:

— № 357 (под корнем дано произведение двух множителей), № 360 (а, б, в) (под корнем дано произведение трех множителей), № 370 (подкоренное выражение предварительно нужно представить в виде произведения удобных множителей, поскольку под корнем стоит или большое число, которого нет в таблице квадратов, или десятичная дробь. Предоставление учащимся примера с десятичной дробью требует применения частично-поискового метода).

— № 357. У доски работают два ученика: первый решает № 357 (а, в, ж), второй № 357 (б, г, е). Класс решает самостоятельно весь номер. По окончании работы с места по цепочке зачитываются ответы.

— № 360 (а, б, в). У доски работают два ученика, выполняя одинаковое задание. По окончании работы ученики меняются местами и проверяют друг друга. Класс читает свои варианты ответов по цепочке.

— № 370 (*первая строка*). Один ученик у доски работает самостоятельно, класс тоже работает самостоятельно. По окончании к доске вызывается ученик — консультант. Первый ученик комментирует свое решение, консультант внимательно следит за ответом и за записью у доски. Если консультант ошибается или пропускает ошибку, класс ее тут же исправляет.

**4. Подведение итогов:**

- С какой теоремой мы сегодня познакомились? (С теоремой об извлечении корня из произведения.)
- Как формулируется эта теорема?
- Как формулируется правило извлечения квадратного корня из произведения?
- Когда пользуемся этим правилом? (Когда нужно извлечь корень из произведения; когда извлечь корень из числа, которого нет в таблице квадратов.)
- Как поступаем, если число, стоящее под корнем, большое, оканчивающееся нулями? (Выделяем множитель 100, 1000 и т. д.)
- Как поступаем, если число дробное? (Выделяем множитель 0,01; 0,0001 и т. д.)

**5. Самостоятельная работа.** (Из дидактических материалов С-18, № 1, 5.)

**6. Задание на дом:** теорема, № 359 (а, б); 361 (а, б); 371.

*Приложение 22***Урок-лекция**

**Тема:** Квадратный корень из произведения [2].

**Цели:**

- повторить определение арифметического квадратного корня;
- ввести и доказать формулу квадратного корня из произведения и дроби;
- научиться применять формулы, если под корнем:
  - а) стоят два множителя;
  - б) стоят три множителя;
  - в) произведение задано не явно;
  - г) стоит дробь.

**План:**

1. Актуализация знаний.
2. Введение и усвоение теоремы об извлечении квадратного корня из произведения.
3. Закрепление формулы на примерах.
4. Введение и усвоение теоремы об извлечении квадратного корня из дроби.
5. Закрепление формулы на примерах.
6. Подведение итогов.
7. Задание на дом.

## Ход лекции:

Мы продолжаем изучать большую тему «Арифметический квадратный корень». Сегодня на уроке познакомимся с двумя свойствами арифметического квадратного корня.

Ознакомление учеников с целью урока, установление связей с изученным

**1. Актуализация знаний.**

Вопросы для повторения:

- Как называется выражение  $\sqrt{a}$ ?
- Что называется арифметическим квадратным корнем из числа  $a$ ? (Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  называется такое неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ .)

Учитель делает запись:

$$\sqrt{a} \begin{cases} \nearrow \sqrt{a} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$$

- При каком значении  $a$  выражение  $\sqrt{a}$  имеет смысл?

**2. Введение и усвоение теоремы об извлечении квадратного корня из произведения.**

Рассмотрим арифметический корень  $\sqrt{16 \cdot 25}$ .

$$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{400} = 20.$$

Найдем значение выражения:  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$ .  $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = 4 \cdot 5 = 20$ .

Мы получили равные результаты (правые части), значит, и левые части будут равны:

$$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25}.$$

Итак, *корень из произведения двух чисел равен произведению корней из этих чисел.*

Оказывается, это верно не только для чисел 16 и 25, а для любых двух неотрицательных чисел. Итак:

Теорема 1: Если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

(Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.)

**Доказательство**

1. В условии сказано, что  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ , значит, выражения  $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$  — имеют смысл.

2. Посмотрим на равенство  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ . В левой части стоит арифметический квадратный корень из числа  $ab$ .

Учитель сообщает идею доказательства

Чтобы доказать равенство, мы должны показать, что значение выражения в правой части равно значению арифметического квадратного корня из числа  $ab$ .

Итак, распишем левую часть равенства:

$$\begin{array}{l} \nearrow \sqrt{ab} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{ab})^2 = ab \end{array}$$

Таким образом, нам нужно доказать, что в правой части стоит число, удовлетворяющее этим двум условиям:

- это число должно быть неотрицательно;
- его квадрат дает число  $ab$ .

Распишем компоненты правой части:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{a} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{a})^2 = a \end{array} & \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{b} \geq 0 \\ \searrow (\sqrt{b})^2 = b \end{array} \end{array}$$

Делаем выводы:

- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ , так как произведение двух неотрицательных чисел неотрицательно.
- Найдем квадрат произведения двух чисел  $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2$ .

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab.$$

Мы получили, что левая часть равна правой части:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

*Учитель повторяет формулировку и основные этапы доказательства:*

- на первом этапе доказательства выясняли, что при данных условиях компоненты равенства имеют смысл;
- на втором этапе доказательства расписывали левую часть;
- на третьем этапе доказательства расписывали компоненты правой части равенства;
- на четвертом этапе доказательства делали выводы.

На основе этой теоремы можно сформулировать правило извлечения квадратного корня из произведения: *чтобы извлечь корень из произведения, нужно извлечь корень из каждого множителя.*

Ученики повторяют правило и основные этапы доказательства

Итак, мы доказали теорему об извлечении квадратного корня из произведения двух множителей. Будет ли теорема верна, если произведение будет содержать три множителя? Нетрудно предположить, что ответ положителен. Докажем это утверждение:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab)c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$$

### 3. Закрепление формулы на примерах.

Рассмотрим следующие примеры:

1.  $\sqrt{25 \cdot 81} =$

2.  $\sqrt{4 \cdot 25 \cdot 100} =$

3.  $\sqrt{14400} =$

4.  $\sqrt{313^2 - 312^2} =$

Все четыре примера связаны с доказанной теоремой, потому что в первых двух примерах дан корень из произведения, а в двух последних — подкоренное выражение можно представить в виде произведения:

1.  $\sqrt{25 \cdot 81} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{81} = 5 \cdot 9 = 45.$

2.  $\sqrt{4 \cdot 25 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 5 \cdot 10 = 100.$

3.  $\sqrt{14400} =$  (Представим подкоренное выражение в виде произведения удобных множителей. Число оканчивается двумя нулями, значит, удобно выделить множитель 100. Получится)  $= \sqrt{144 \cdot 100} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{100} = 12 \cdot 10 = 120.$

4.  $\sqrt{313^2 - 312^2} = \sqrt{(313 - 312) \cdot (313 + 312)} = \sqrt{1 \cdot 625} = 25.$

### 4. Введение и усвоение теоремы об извлечении квадратного корня из дроби.

Мы узнали, как можно извлечь корень из произведения. Второе свойство арифметического корня связано с извлечением квадратного корня из дроби.

Теорема 2: Если  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ , то  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  (Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.)

### Доказательство:

Воспользуемся той же схемой доказательства, что и при изучении первой теоремы.

1. В условии сказано, что  $a \geq 0$  и  $b > 0$ , значит, выражения

$\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$ ,  $\sqrt{\frac{a}{b}}$  — имеют смысл.

2. Распишем левую часть равенства:

$$\begin{array}{c} \sqrt{\frac{a}{b}} \geq 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sqrt{\frac{a}{b}} \end{array}$$

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$$

Ученики могут привлекаться как к формулированию этапов доказательства, так и к их реализации

Таким образом, нам нужно доказать, что в правой части стоит число, удовлетворяющее этим двум условиям:

- это число должно быть неотрицательно;

- его квадрат дает число  $\frac{a}{b}$ .

3. Распишем компоненты правой части:

$$\begin{array}{c} \sqrt{a} \geq 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sqrt{a} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{b} > 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ \sqrt{b} \end{array}$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

$$(\sqrt{b})^2 = b$$

4. Делаем выводы:

- $\sqrt{a} : \sqrt{b} \geq 0$ , так как частное от деления неотрицательного числа на положительное неотрицательно.

- Найдем квадрат частного этих чисел

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}.$$

Мы получили, что левая часть равна правой части:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ .

На основе этой теоремы можно сформулировать правило извлечения квадратного корня из дроби: *чтобы извлечь корень из дроби, нужно извлечь корень сначала из числителя, а потом из знаменателя.*

### 5. Закрепление формулы на примерах.

Рассмотрим примеры:

$$1. \sqrt{\frac{100}{49}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$$

$$2. \sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

$$3. \sqrt{5\frac{4}{9} \cdot 11\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{49}{9} \cdot \frac{289}{25}} = \sqrt{\frac{49}{9}} \cdot \sqrt{\frac{289}{25}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{17}{5} = \frac{119}{15} = 7\frac{14}{15}.$$

$$4. \sqrt{\frac{400}{a^2}} = \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{a^2}} = \frac{20}{|a|}.$$

Вид доски: *Свойства арифметического квадратного корня.*

Теорема 1: Если  $a \geq 0$ ,  
 $b \geq 0$ , то

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

**Доказательство:**

1.  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ , значит,  
 $\sqrt{ab}$ ,  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$  — имеют  
смысл.

Теорема 2: Если  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ , то

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

**Доказательство:**

1.  $a \geq 0$  и  $b > 0$ , значит,  $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ,  $\sqrt{a}$  и  $\sqrt{b}$  —

имеют смысл.

Продолжение табл.

2. Расписываем левую часть:

$$\sqrt{ab} \begin{cases} \rightarrow \sqrt{ab} \geq 0 \\ \rightarrow (\sqrt{ab})^2 = ab \end{cases}$$

3. Распишем компоненты правой части:

$$\sqrt{a} \begin{cases} \rightarrow \sqrt{a} \geq 0 \\ \rightarrow (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$$

$$\sqrt{b} \begin{cases} \rightarrow \sqrt{b} \geq 0 \\ \rightarrow (\sqrt{b})^2 = b \end{cases}$$

4. Делаем выводы:

а)  $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ , так как произведение двух неотрицательных чисел неотрицательно.

$$\begin{aligned} \text{б) } (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 &= \\ &= (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$$

2. Расписываем левую часть равенства:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} \begin{cases} \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} \geq 0 \\ \rightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 = \frac{a}{b} \end{cases}$$

3. Распишем компоненты правой части:

$$\sqrt{a} \begin{cases} \rightarrow \sqrt{a} \geq 0 \\ \rightarrow (\sqrt{a})^2 = a \end{cases}$$

$$\sqrt{b} \begin{cases} \rightarrow \sqrt{b} \geq 0 \\ \rightarrow (\sqrt{b})^2 = b \end{cases}$$

4. Делаем выводы:

а)  $\sqrt{a} : \sqrt{b} \geq 0$ , так как частное неотрицательного числа на положительное неотрицательно.

$$\text{б) } \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$$

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

**6. Подведение итогов.**

- С какими свойствами арифметического корня мы сегодня познакомились? (Со свойствами извлечения корня из произведения и дроби.)
- Как формулируется первая теорема?
- Как формулируется правило извлечения квадратного корня из произведения?
- Когда пользуемся этим правилом? (Когда нужно извлечь корень из произведения; когда извлечь корень из числа, которого нет в таблице квадратов, когда подкоренное выражение представлено в виде разности квадратов.)
- Как поступаем, если число, из которого надо извлечь корень, большое, оканчивающееся нулями? (Выделяем множитель 100, 1000 и т. д.)
- Как поступите, если число, стоящее под корнем, будет десятичной дробью, например, 20, 25? (В этом случае нужно выделить множитель 0,01; 0,0001 и т. д.)
- Как формулируется вторая теорема?
- Как формулируется правило извлечения корня из дроби?
- Когда пользуемся этим правилом? (Когда подкоренное выражение обыкновенная дробь или смешанное число.)
- Бывают ли случаи, когда пользуются двумя теоремами? Приведите пример.

**7. Задание на дом:** теоремы, № 359; 361; 365; 371.

*Приложение 23*

**Урок изучения нового материала, где ведущими методами являются беседа (проблемная) и учащиеся проводят исследование проблемы**

**Тема:** Извлечение арифметического корня из произведения, дроби, степени [34].

**Цели:** Провести поиск новых тождеств, связанных с радикалами, по схеме исследования: мостик в теорию; поиск гипотезы; доказательство гипотезы; поиск новых гипотез и их доказательство.

**План:**

1. Выполнение задания на нахождение стороны квадрата, если задана его площадь, старыми способами.

2. Поиск новых способов извлечения корня из произведения, формулирование гипотезы и мотивирование необходимости доказательства теоремы об извлечении корня из произведения.

3. Доказательство теоремы об извлечении корня из произведения.
4. Применение доказанной теоремы и поиск новых гипотез.
5. Групповая работа по доказательству теорем об извлечении корня из дроби и корня из степени.
6. Подведение итогов.
7. Задание на дом.

### Ход урока

#### 1. Выполнение задания на нахождение стороны квадрата, если задана его площадь, старыми способами.

Учащимся предлагается задание: *Найдите сторону квадрата, если его площадь равна:*

- площади прямоугольника со сторонами 25 см и 81 см;
- площади прямоугольника со сторонами 2,5 дм и 8,1 дм;
- $5\frac{4}{9}$  кв. единиц;
- $10^8$ ;
- $10^5$ .

Задание может быть предложено в форме математического диктанта, причем для контроля двое могут работать на закрытых досках. Важно, чтобы при выполнении задания были сделаны следующие записи:

$$1) \sqrt{25 \cdot 81}; \quad 2) \sqrt{2,5 \cdot 8,1}; \quad 3) \sqrt{5\frac{4}{9}}; \quad 4) \sqrt{10^8}; \quad 5) \sqrt{10^5}.$$

В случае, если выражения не были составлены, а сразу был найден ответ, то возможен вопрос: «Можно ли для решения задания составить указанные выражения?»

#### 2. Поиск новых способов извлечения корня из произведения, формулирование гипотезы и мотивирование необходимости доказательства теоремы об извлечении корня из произведения.

При обсуждении решения примера 1) ученики могут предложить:

- способ вычисления подкоренного выражения;
- способ использования известного тождества:

$$\sqrt{25 \cdot 81} = \sqrt{5^2 \cdot 9^2} = \sqrt{(5 \cdot 9)^2} = 5 \cdot 9 = 45;$$

- способ извлечения корня из каждого множителя.

#### Общие вопросы:

- 1) как находили значение выражения?
- 2) можно ли воспользоваться известными тождествами?
- 3) можно ли найти значение выражения как-нибудь иначе?

Когда возникнет способ извлечения корня из каждого множителя, ученикам предлагается *проверить, годится ли этот способ* для вычисления корней:  $\sqrt{4 \cdot 9}$ ,  $\sqrt{64 \cdot 36}$  и сформулировать соответствующую гипотезу о способе нахождения  $\sqrt{a \cdot b}$ . Мотивом доказательства теоремы может служить напоминание, приведенное в учебном тексте: *«Помните: опровергнуть гипотезу можно одним примером, для которого гипотеза несправедлива. И помните, что как бы много примеров, подкрепляющих гипотезу, вы бы ни обнаружили, для доказательства гипотезы этого мало! А вдруг где-то таится пример-разрушитель? Уверены ли вы, например, что ваша гипотеза верна для  $\sqrt{3 \cdot 37}$ ?»*

### 3. Доказательство теоремы об извлечении корня из произведения.

Ученикам предлагается сформулировать теорему, указав, при каких значениях  $a$  и  $b$  в ней идет речь. Проблемный метод доказательства предполагает ситуацию, когда ученики сами намечают план доказательства. Учитель руководствуется общими подходами: *при доказательстве равенства анализируется каждая его часть и показывается, что они имеют одинаковый смысл, равны их значения или равны их «посредники»*. Ученики находят способ доказательства, заполняя схему:

- 1) объяснить, зачем дано ограничение на значения  $a$  и  $b$ ;
- 2) проанализировать левую часть равенства;
- 3) проанализировать компоненты правой части равенства;
- 4) сделать выводы.

### 4. Применение доказанной теоремы и поиск новых гипотез.

Сначала ученикам предлагается применить теорему для примеров, предложенных в начале урока, и выбрать из них те, где удобно ею пользоваться:

- 1)  $\sqrt{25 \cdot 81} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{81} = 5 \cdot 9 = 45$ ;
- 2)  $\sqrt{2,5 \cdot 8,1} = \sqrt{25 \cdot 0,1 \cdot 81 \cdot 0,1} = \sqrt{25 \cdot 81 \cdot 0,01} =$   
 $= \sqrt{25} \cdot \sqrt{81} \cdot \sqrt{0,01} = 5 \cdot 9 \cdot 0,1 = 4,5$ ;
- 3)  $\sqrt{5 \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \sqrt{49 \cdot \frac{1}{9}} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{\frac{1}{9}} = 7 \cdot \frac{1}{3} = 2 \frac{1}{3}$ ;
- 4)  $\sqrt{10^8} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10^2} \cdot \sqrt{10^2} = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$ ;

$$5) \sqrt{10^5} = \sqrt{10^4 \cdot 10} = \sqrt{10^4} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{(10^2)^2} \cdot \sqrt{10} = 10^2 \cdot \sqrt{10} = 100\sqrt{10}.$$

На итоге подчеркивается, что в некоторых случаях пришлось выполнять некоторые дополнительные преобразования, например, пришлось преобразовывать частное, степень. Нельзя ли получить формулу для извлечения корня из частного? корня из степени?

### 5. Групповая работа по доказательству теорем об извлечении корня из дроби и корня из степени.

Класс делится на группы. Часть групп формулируют и доказывают теорему об извлечении корня из дроби, остальные группы формулируют и доказывают теорему об извлечении корня из степени, если показатель степени является четным числом.

По окончании работы группы представляют свои доказательства, сохраняя структуру доказательства, показанную на теореме об извлечении корня из произведения.

Образцы записи решения ученики показывают на примерах:

$$\sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3},$$

$$\sqrt{2,5 \cdot 8,1} = \sqrt{\frac{25}{10} \cdot \frac{81}{10}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 81}{100}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 81}}{\sqrt{100}} = \frac{5 \cdot 9}{10} = \frac{45}{10} = 4,5,$$

$$\sqrt{10^8} = \sqrt[2]{10^8} = 10^{8:2} = 10^4.$$

### 6. Подведение итогов:

- Что об извлечении корня узнали на уроке? (Из каких выражений можно извлекать корень; как доказывается теорема об извлечении корня, когда и как им удобно пользоваться.)
- Из каких рациональных выражений учились извлекать корень? (Из произведения, из дроби, из степени.)
- Как формулируется теорема об извлечении корня из произведения? Когда удобно пользоваться этой теоремой? (Если подкоренное выражение представлено в виде произведения; если в подкоренном выражении можно выделить «удобный» множитель.) Приведите примеры.
- Как формулируется теорема об извлечении корня из дроби? Когда удобно пользоваться этой теоремой? (Если подкоренное выражение обыкновенная дробь, десятичная дробь или смешанное число.) Приведите примеры.

- Как формулируется теорема об извлечении корня из степени? Когда удобно пользоваться этой теоремой? (Если подкоренное выражение представлено в виде степени или может быть представлено в виде степени.) Приведите примеры.
  - Можно ли сказать, что в примере  $\sqrt{10^5} = 100\sqrt{10}$  мы вынесли множитель из-под знака радикала?
  - Чем следует заняться дома и что предстоит сделать на следующем уроке? (Повторить теоремы и потренироваться в их применении.)
7. **Задание на дом:** теоремы (с доказательством), задания 1, 2, 3, 10.

В задании 1 нужно прочитать указанные формулы (это устно) и привести примеры выражений, которые могут быть преобразованы по этим формулам. В остальных заданиях указана формула и предложено выбрать те выражения, которые можно преобразовать по указанной формуле. Если есть уверенность в применении формулы, то можно выбрать более трудные задания из практикума.

Комментируем  
домашнее  
задание

## Приложение 24

### Урок изучения нового материала, когда ученики работают по учебной книге

**Тема:** Квадратный корень из произведения.

**Вариант 1. Учебник-справочник [2].**

**Цели:**

- повторить определение арифметического квадратного корня;
- ввести и доказать формулу квадратного корня из произведения;
- научить применять формулу, если под корнем:
  - а) стоят два множителя;
  - б) стоят три множителя;
  - в) произведение задано не явно.
- проверить усвоение с помощью самостоятельной работы.

**План:**

1. Актуализация знаний.
2. Изучение нового материала.
3. Закрепление формулы на примерах.
4. Подведение итогов.
5. Самостоятельная работа.
6. Задание на дом.

## Ход урока

Ход урока похож на первый урок, описанный в «Приложении 21», различие только на этапе изучения теоремы. Если раньше изучение нового материала осуществлялось во время объяснительно-иллюстративной беседы, то на этом уроке ученики работают с учебником.

С этой целью учитель дает ученикам следующее задание.

Изучите в п.15 *пример перед теоремой 1, теорему 1 и примеры 1 и 2* и ответьте на вопросы (вопросы заранее записаны на доске, что помогает ученикам целенаправленно работать с текстом учебника):

- как удобнее вычислить  $\sqrt{4 \cdot 81}$  ?
- как формулируется теорема?
- как кратко записать формулировку теоремы?
- зачем в условии теоремы даны ограничения на значения  $a$  и  $b$ ?
- о каких двух условиях идет речь в теореме?
- почему необходимо проверить выполнение этих двух условий?
- как осуществляется проверка этих двух условий?
- как доказывается случай, когда число множителей больше двух?
- чем отличаются примеры 1 и 2?
- как можно сформулировать правило работы с примерами, похожими на пример 1? (Приведите свои примеры.)
- как можно сформулировать правило работы с примерами, похожими на пример 2? (Приведите свои примеры.)

По окончании самостоятельной работы с учебником осуществляется проверка изученного материала по указанным вопросам. В роли учителя выступают отдельные ученики, и на доске и в тетрадях выполняются необходимые записи. Можно в учебнике выделить этапы доказательства, а на дом задать оформить доказательство в тетради.

**Вариант 2. Учебник-самоучитель [34].**

**Цели:** Провести поиск новых тождеств, связанных с радикалами по схеме исследования:

- мостик в теорию;
- поиск гипотезы;
- доказательство гипотезы;
- поиск новых гипотез и их доказательство.

**План:**

1. Выполнение задания на нахождение стороны квадрата, если задана его площадь, старыми способами.

2. Поиск новых способов извлечения корня из произведения, формулирование гипотезы и мотивирование необходимости доказательства теоремы об извлечении корня из произведения.

3. Доказательство теоремы об извлечении корня из произведения.

4. Применение доказанной теоремы и поиск новых гипотез.

5. Групповая работа по доказательству теорем об извлечении корня из дроби и корня из степени.

6. Подведение итогов.

7. Задание на дом.

### Ход урока

Ученики работают по учебнику, выполняя предлагаемые задания, отвечая на каждый поставленный вопрос либо на отдельном листочке, либо соседу по парте, если организована работа по парам. Укажем виды предлагаемых заданий и вопросы для размышления:

*Задание 1. Найдите площадь квадрата, если дана его площадь.*

*Как найти значения квадратных корней, составленных по заданию 1?*

*Можно ли найти  $\sqrt{25 \cdot 81}$  как-нибудь еще?*

*Проверьте, годится ли ваш способ для вычисления, например, корней:  $\sqrt{4 \cdot 9}$ ,  $\sqrt{64 \cdot 36}$ .*

*Если ваш способ «сработает», то, может быть, вы сумеете сформулировать соответствующую гипотезу о способе нахождения  $\sqrt{a \cdot b}$  при любых положительных значениях  $a$  и  $b$ ?*

*Уверены ли вы, например, что ваша гипотеза верна для  $\sqrt{3 \cdot 37}$ ?*

*Попытайтесь доказать свою гипотезу.*

*Изучите доказательство гипотезы, предложенное авторами.*

*Сформулируйте и докажите теорему, если в подкоренном выражении будет стоять любое число множителей.*

В этом месте полезно заслушать отчеты о проделанной работе, выяснить трудности, с которыми столкнулись ученики. Доказательство теоремы может быть оформлено по схеме:

- 1) показываем, зачем даны ограничения на значения  $a$  и  $b$ ;
- 2) расписываем левую часть равенства;
- 3) расписываем компоненты правой части равенства;
- 4) делаем выводы.

*На каких примерах показано применение теоремы, в чем их особенность?*

*Неужели всякий раз, извлекая корень из частного, мы будем преобразовывать его в произведение? Нельзя ли получить формулу для извлечения корня из частного? Какой будет ваша гипотеза?*

*Нельзя ли получить формулу для нахождения корня непосредственно из степени? Можно ли установить связь между показателем подкоренного выражения и показателем значения корня?*

Дальнейшую работу ученики осуществляют по группам, доказывая теоремы 2 и 3. Подведение итогов и задание на дом может быть тем, же, что и при изучении этого материала проблемным методом (см. выше описанный урок).

## Приложение 25

### Урок совершенствования умений

При построении урока совершенствования умений большую роль играет создание целостной картины урока, что достигается выделением стержневых вопросов (например, методы решения, виды задач, свойства и т. д.). Каждое задание, выносимое на урок совершенствования умений, должно иметь конкретную цель обучения.

**Тема:** Площадь параллелограмма. [11] Урок провела студентка И. Ефимова.

#### **Цели:**

- научиться применять формулы площади параллелограмма и площади ромба при решении задач различными методами;
- доказать формулу площади четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.

#### **План:**

1. Обсуждение схемы решения геометрических задач.
2. Решение задачи № 464 (а) учебника [11] двумя методами.
3. Решение задачи, в которой диагональ параллелограмма является его высотой.
4. Решение задач с использованием свойства прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$ .
5. Решение задач, связанных с площадью ромба.
6. Вывод формулы площади четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.
7. Подведение итогов.

## Ход урока

## 1. Обсуждение схемы решения геометрических задач.

Сегодня на уроке мы продолжим изучать тему «Площадь», повторим, как найти площади ромба и параллелограмма, улучшим умение решать задачи с использованием этих формул, а также выведем формулу площади одного четырехугольника, не являющегося параллелограммом. Как видим, основное внимание будет уделено решению задач, поэтому воспользуемся следующей схемой:

## Схема решения геометрических задач



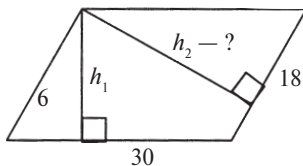
Сначала мы отвечаем на *вопросы*: Какая фигура? Что известно? Что надо найти? Какая формула? Затем мы выбираем *метод* решения, поэтому отвечаем на *вопрос*: Какой метод?

*Геометрический* метод используется тогда, когда в *формуле*, которую хотим применить, уже известны какие-то данные, а другие можем вычислить, важно только выделить, фигуры, из которых это можно сделать.

*Алгебраический* метод используем тогда, когда сразу из формулы не можем найти неизвестную величину, в этом случае вводят переменную.

## 2. Решение задачи № 464 (а) учебника [11] двумя методами.

Ученикам демонстрируется чертеж, по которому предлагается составить текст задачи:



Составленный текст сравнивается с текстом задачи № 464 (а) учебника:

*Пусть  $a$  и  $b$  — смежные стороны параллелограмма, а  $h_1$  и  $h_2$  — его высоты. Найдите  $h_2$ , если  $a = 18$  см,  $b = 30$  см,  $h_1 = 6$  см,  $h_2 > h_1$ .*

К доске вызывается ученик, который, пользуясь рассмотренной схемой отвечает на вопросы:

*В задаче речь идет о параллелограмме, известны стороны параллелограмма и высота, проведенная к одной из них. Требуется найти вторую высоту параллелограмма.*

*Формула, которая связывает основание параллелограмма с его высотой, — формула площади параллелограмма  $S_{\text{парал.}} = a \cdot h_a$ .*

*Попробуем решить задачу геометрическим методом. В этой формуле известно основание  $a$ , равное 18 см, неизвестна  $S_{\text{парал.}}$ .  $S_{\text{парал.}}$  можно найти по другим данным задачи: другому основанию и высоте, к ней проведенной.*

**Решение:**

$$S_{\text{парал.}} = a \cdot h_a$$

$$1) S_{\text{парал.}} = b \cdot h_1 = 30 \cdot 6 = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$2) S_{\text{парал.}} = a \cdot h_2 = 180 \text{ (см}^2\text{)}, h_2 = S_{\text{парал.}} : a = 180 : 18 = 10 \text{ (см)}.$$

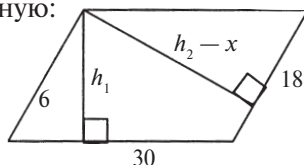
**Ответ:** 10 см.

Можно ли задачу решить алгебраическим методом? (Ученик, желающий показать этот метод, вызывается к доске.)

**Решение:**

Основание параллелограмма и его высоту связывает площадь параллелограмма, причем результат вычисления площади не зависит от способа вычисления, поэтому за условие для составления уравнения можно выбрать следующее:  $a \cdot h_2 = b \cdot h_1$ .

Вводим переменную:



Получаем уравнение:

$$\begin{aligned} 18x &= 30 \cdot 6, \\ 18x &= 180, \\ x &= 10. \end{aligned}$$

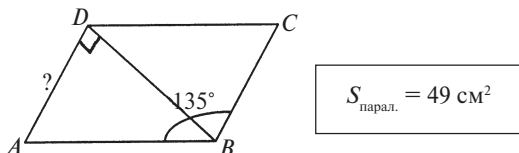
Ответ: 10 см.

Подведем итоги. Что в связи с решением этой задачи хорошо бы запомнить на будущее? (Выслушиваются варианты.) Итак:

- решать задачи помогает схема рассуждений;
- задачи можно решать двумя методами: геометрическим и алгебраическим;
- в задачах, где идет речь о высоте, может помочь площадь фигуры, даже если о ней в условии задачи не говорится.

### 3. Решение задачи, в которой диагональ параллелограмма является его высотой.

Ученикам предлагается сформулировать условие задачи по чертежу:

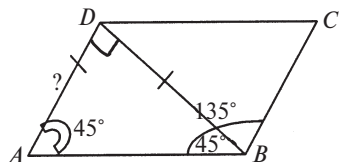


Получается следующая задача: *В параллелограмме  $ABCD$   $\angle B = 135^\circ$ , диагональ  $BD$  перпендикулярна стороне  $AD$ . Площадь параллелограмма равна  $49 \text{ см}^2$ . Найти  $AD$ .*

Учитель предлагает подумать, **что можно найти** по данным задачи?

Рассуждения учеников могут быть такими: зная один угол параллелограмма, можно найти все остальные углы, таким образом  $\angle A = 45^\circ$ , тогда в треугольнике  $ABD$  можно найти угол  $B$ , он равен  $45^\circ$ , поэтому треугольник  $ABD$  — равнобедренный.

Эти рассуждения отражаются на чертеже:



Итак, мы обозначили все, что дано, все, что можно найти. Можно ли теперь ответить на вопрос задачи? (Пауза.) Получается, что геометрическим способом решить задачу затрудняемся. Что надо делать в этом случае? (Пробовать алгебраический метод.)

С чего начнем? (Выберем условие для составления уравнения.) Какое? (Площадь параллелограмма равна  $49 \text{ см}^2$ .) Что дальше? (Обозначим  $AD$  за  $x$ .) Что дальше? (Тогда  $BD$  также равна  $x$ .) Как связаны эти данные с площадью параллелограмма? ( $AD$  можно выбрать за основание параллелограмма, тогда  $BD$  будет его высотой, а, значит, их произведение равно  $49 \text{ см}^2$ , поэтому сторона  $AD$  равна 7.)

К доске для оформления всего решения вызываются 1–2 ученика, а остальные оформляют решение в тетрадях самостоятельно, а затем сверяют полученные варианты. Оформить можно так:

$$1. \angle A = 180^\circ - \angle B = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ \text{ (свойство параллелограмма)}. \Rightarrow$$

$$\angle ADB = 90^\circ \text{ (по условию).}$$

$$\angle ABD = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABD \text{ — равнобедренный.}$$

$$2. \text{ Пусть } AD = x \text{ см, тогда } BD = x \text{ см,}$$

$$S_{\text{парал.}} = AD \cdot BD,$$

$$x \cdot x = 49,$$

$$x^2 = 49,$$

$$x = 7.$$

*Ответ: 7 см.*

Подведем итоги. Что в связи с решением этой задачи хорошо бы запомнить на будущее? (Выслушиваются варианты.)

Итак:

- приступать к решению удобно, задавая себе вопрос: «Что можно найти, зная...?» и отталкиваясь от условия;
- есть задачи, решение которых начинается геометрическим методом, потом подключается алгебраический;
- если в параллелограмме диагональ перпендикулярна стороне, и один из углов параллелограмма равен  $45^\circ$  ( $135^\circ$ ), то диагональ является высотой параллелограмма и отсекает от него равнобедренный треугольник.

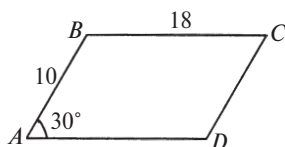
#### **4. Решение задач с использованием свойства прямоугольного треугольника с углом $30^\circ$ .**

В предыдущей задаче нам помог угол в  $45^\circ$ , другой угол-помощник — угол в  $30^\circ$ . Почему? (Вспоминается свойство прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$ .) Затем предлагается задача:

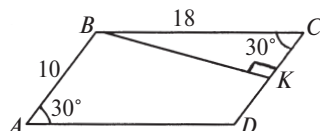
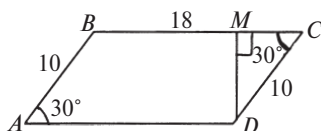
*Один из углов параллелограмма равен  $30^\circ$ , одна из сторон равна 10 см, периметр параллелограмма равен 56 см. Найти площадь параллелограмма.*

С чего начать после прочтения текста задачи? (Нужно построить параллелограмм и нанести данные на чертеж.) Ученики строят

параллелограмм, но отметить сразу, какая сторона равна 10 см не могут и приходят к выводу, что сначала надо найти длину другой стороны параллелограмма. Устный счет дает ответ: 18 см, значит, 10 см — длина меньшей стороны, а 18 — длина большей стороны:



Что требуется найти в задаче? (Площадь параллелограмма.) Что нужно знать, чтобы найти площадь параллелограмма? (Длину его высоты.) Мы знаем, что за основание параллелограмма можно выбрать любую его сторону и к ней провести высоту. Вызываются два ученика, одному предлагается выбрать за основание сторону  $BC$ , а другому — сторону  $CD$ . Остальные на местах работают со своим вариантом.



Решение:

1.  $P = 56 \text{ см}, AB = 10 \text{ см} \Rightarrow BC = 18 \text{ см}.$

2.  $\triangle MCD$  — прямоугольный,  $\angle C = 30^\circ \Rightarrow DM = 5 \text{ см}.$

$S_{\text{парал.}} = BC \cdot DM, S_{\text{парал.}} = 18 \cdot 5 = 90 (\text{см}^2)$

Ответ:  $90 \text{ см}^2$

1.  $P = 56 \text{ см}, AB = 10 \text{ см} \Rightarrow BC = 18 \text{ см}.$

2.  $\triangle BCK$  — прямоугольный,  $\angle C = 30^\circ \Rightarrow BK = 9 \text{ см}.$

3.  $S_{\text{парал.}} = CD \cdot BK, S_{\text{парал.}} = 18 \cdot 9 = 162 (\text{см}^2)$

Ответ:  $90 \text{ см}^2$

**Подведем итоги.** Что в связи с решением этой задачи хорошо бы запомнить на будущее? (Выслушиваются варианты.) Итак:

- перед тем, как нанести данные на чертеж, подумать о соответствии данных рисунку (большая длина — большая сторона),
- одни и те же данные можно отмечать на рисунке несколько раз (10 см,  $30^\circ$ ), тогда будет виднее ход поиска решения.

### 5. Решение задач, связанных с площадью ромба.

Ученикам предлагается на черновиках найти ответ к следующей задаче.

**Задача 1.** *Сторона ромба равна 6 см, один из углов равен  $150^\circ$ . Найдите площадь ромба.*

Выслушиваются ответы учеников, выясняется, кто из учеников испытывал затруднения, в чем причина затруднения. Справившиеся дают советы. (Возможно, что 6 см отметили только для основания, а в задаче удобно 6 см отметить на двух смежных сторонах. Если не знали, как использовать  $150^\circ$ , то следует посоветовать вопрос, уже звучавший на уроке: «Что можно найти, зная  $150^\circ$ ?»)

Аналогичная работа проводится с задачей 2.

**Задача 2.** *Площадь ромба равна  $27 \text{ см}^2$ , одна диагональ в 1,5 раза больше другой. Найдите диагонали ромба.*

Затруднения могут быть вызваны тем, что либо забыта формула нахождения площади ромба по его диагоналям, либо «забыто» обращение к алгебраическому методу. В первом случае помогает вопрос: «Как связаны диагонали ромба с его площадью?», а во втором: «Как мы поступаем, когда геометрическим способом решить задачу не удастся?».

Полезно ученикам задать вопрос: изменится ли решение задачи, если условие было бы задано так?

*Найти  $d_1$  и  $d_2$ , если  $S_{\text{ромба}} = 27 \text{ см}^2$ ,  $d_1 = \frac{3}{2} d_2$ .*

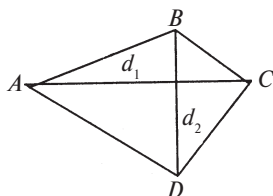
Ученики приходят к выводу, что это текст той же задачи, только условие записано алгебраически. Учитель просит текст задачи № 459 (в), которая будет задана на дом, перевести с алгебраического языка на словесный.

В итогах полезен вопрос, справедлива ли формула  $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$  для произвольного параллелограмма? Ученики указывают свойство перпендикулярности диагоналей ромба, как необходимое условие использования этой формулы.

### 6. Вывод формулы площади четырехугольника с перпендикулярными диагоналями.

Мотивом обращения к этой части урока, может служить обсуждение вопроса, можно ли найти площадь четырехугольника, с перпендикулярными диагоналями, который не является ромбом?

Оформляется чертеж и краткая запись условия задачи:

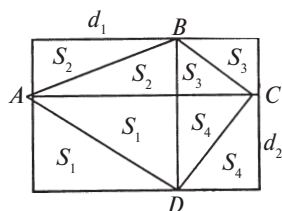


Дано:  
 $ABCD$  — четырехугольник,  
 $d_1$   $d_2$  — диагонали,  
 $d_1 \perp d_2$ .  
 Найти:  $S_{ABCD}$ .

Вспоминается, как поступали, когда нужно было найти площадь, а формулы для этого не было. В таком случае:

- достраивали фигуры до известной;
- находили площадь получившейся фигуры по формуле и по частям;
- сравнивали результаты;
- делали выводы.

Получается решение:



1. Достроим до прямоугольника.
2. а)  $S_{\text{прямоуг.}} = d_1 \cdot d_2$ .  
 б)  $S_{\text{прямоуг.}} = 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4 =$   
 $= 2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4) = 2S_{ABCD},$
3.  $2S_{ABCD} = d_1 \cdot d_2,$
4.  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$

Подведем итоги. Что в связи с решением этой задачи хорошо бы запомнить на будущее? (Выслушиваются варианты.) Итак:

- надо запомнить формулу;
- а еще лучше помнить этапы доказательства, потому что они повторяются при выводе многих формул, связанных с площадью.

## 7. Подведение итогов.

Урок подошел к концу. Попробуйте подвести его итог. (Выслушиваются ответы.)

Дома решите следующие задачи: № 459 (в), 460, 461, 464 (в).

Задачу № 459 мы уже комментировали, посмотрите № 460, скажите, какая особенность данного параллелограмма? (Диагональ перпендикулярна стороне параллелограмма, значит, является его высотой.)

В чем особенность параллелограмма, данного в задаче № 461? (В нем угол равен  $30^\circ$ , значит, можно будет воспользоваться свойством прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$ .)

Посмотрите текст задачи № 464 (в), вы видите, что условие записано с помощью буквенных обозначений. Скажите словами, какие данные известны и что требуется найти. (Известна площадь параллелограмма и его стороны. Надо найти высоты.) Не кажется ли вам эта задача легкой? Ее можно заменить на любую понравившуюся.

## Приложение 26

### Урок обобщения

Важная роль на обобщающих уроках отводится установлению связей между изученными вопросами, чему помогает математическая карта темы; привлечению учеников к созданию ключевых примеров, обсуждению выделенных видов задач, формулированию выводов по теме.

**Тема:** Арифметический квадратный корень и его свойства. [2]  
(Урок провела студентка О. Сыромотова.)

#### Цели:

1) обобщить знания учеников по разделам:

- извлечение квадратного корня из числа, произведения, степени, дроби;
- выполнение действий с арифметическими корнями;
- решение иррациональных и квадратных уравнений вида  $x^2 = a$ .

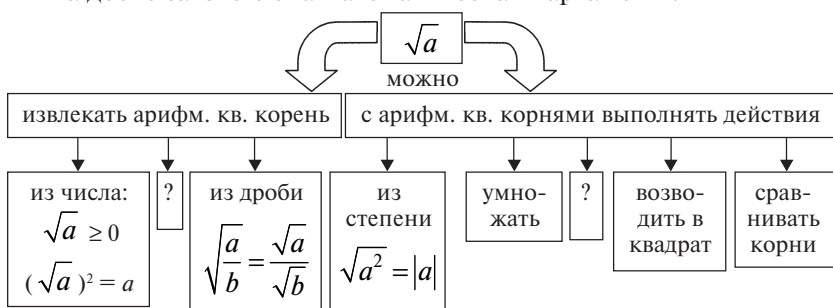
2) подготовиться к контрольной работе.

#### План:

1. Первый этап обобщения: случаи извлечения корня.
2. Второй этап обобщения: действия с арифметическими корнями.
3. Третий этап обобщения: решение уравнений.
4. Подведение итогов.

### Ход урока

На доске заготовлена математическая карта темы:



### 1. Первый этап обобщения: случаи извлечения корня.

Учитель по карте перечисляет три случая извлечения корня (из числа, из дроби, из степени), указывая их теоретические основы. Ученики «снимают» вопрос, отмеченный в карте, указывая еще один случай: извлечение корня из произведения и его обоснование:  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .

По просьбе учителя ученики на каждый случай предлагают свои примеры. Если примеры не очень интересные, то учитель помогает так: «Приведите примеры, когда под корнем стоит большое число, когда не натуральное число (десятичная дробь, обыкновенная дробь, смешанное число)».

Дальнейшая работа организуется следующим образом. Предлагается пример, указывается его особенность, затем обсуждается решение. В таблице показаны примеры, выделены их особенности, описана форма организации:

| №  | Пример                      | Особенность                                              | Организация работы                                                                                         |
|----|-----------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $0,5 \cdot \sqrt{1,21} - 2$ | Корень из числа включен в алгебраическое выражение       | Ученик у доски с комментарием                                                                              |
| 2. | № 468 (а, б)                | Извлечение корня из трех множителей                      | Ученик за закрытой доской, остальные самостоятельно, затем проверка                                        |
| 3. | $\sqrt{12 \cdot 3}$         | Нельзя сразу применить теорему о корне из произведения   | Учитель под комментирование учеников выделяет удобные множители в подкоренном выражении, далее устный счет |
| 4. | $\sqrt{8 \cdot 162}$        | Тот же случай                                            | Ученик у доски с комментарием                                                                              |
| 5. | $\sqrt{61^2 - 60^2}$        | Тот же случай, но под корнем разность квадратов          | Ученики комментируют, учитель записывает на доске                                                          |
| 6. | $\sqrt{(-2,5)^2}$           | Извлечение корня из квадрата, но в основании стоит число | Ученики комментируют, учитель записывает на доске: $\sqrt{(-2,5)^2} =  -2,5  = 2,5$                        |
| 7. | $\sqrt{b^2}, b \geq 0$      | Извлечение корня из квадрата, но в основании стоит буква | Ученики комментируют, учитель записывает на доске: $\sqrt{b^2} =  b  = b$                                  |

Окончание табл.

| №   | Пример                    | Особенность                                             | Организация работы                                                                                                                 |
|-----|---------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8.  | $\sqrt{5^4}$              | Извлечение корня из степени, но в основании стоит число | Ученики комментируют, учитель записывает на доске:<br>$\sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2} =  5^2  = 25$                                   |
| 9.  | $\sqrt{x^6}$ , $x \leq 0$ | Извлечение корня из степени, но в основании стоит буква | Ученики комментируют, учитель записывает на доске:<br>$\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} =  x^3  = -x^3$                                 |
| 10. | $10 \cdot \sqrt{a^8}$     | Тот же случай, но нет указания на значение буквы        | Ученики комментируют, учитель записывает на доске: $10 \cdot \sqrt{x^8} = 10 \cdot \sqrt{(x^4)^2} = 10 \cdot  x^4  = 10 \cdot a^4$ |

## 2. Второй этап обобщения: действия с арифметическими корнями.

Учитель по карте перечисляет три действия с арифметическими корнями (умножение, возведение в квадрат и сравнение), указывая их теоретические основы. Ученики «снимают» вопрос, отмеченный в карте, указывая еще одно действие: деление корней

и его обоснование:  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ . По просьбе учителя ученики на

каждый случай предлагают свои примеры.

Дальнейшая работа организуется следующим образом. Предлагается пример, указывается его особенность, затем обсуждается решение. В таблице показаны примеры, выделены их особенности, описана форма организации:

| №  | Пример                                                                 | Особенность                                                                       | Организация работы                                                                                     |
|----|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | а) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{3,6}$<br>б) $\sqrt{4,9} \cdot \sqrt{40}$    | После применения теоремы об умножении корней можно выделить разрядную единицу     | Два ученика у доски решают оба примера, остальные самостоятельно, затем следует взаимопроверка в парах |
| 2. | а) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{1280}}$ ; б) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{1,5}}$ | После применения теоремы о делении корней можно применить основное свойство дроби | Ученик комментирует с места, учитель пишет на доске решение                                            |

Окончание табл.

| №  | Пример                                                                                | Особенность                                                                                           | Организация работы                                                                   |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. | а) $(\sqrt{5})^2$ ; б) $(-\sqrt{5})^2$ ;<br>в) $(3\sqrt{5})^2$ ; г) $3(\sqrt{5})^2$ . | Разные случаи участия корня при возведении в квадрат                                                  | Математический диктант с последующей проверкой результатов                           |
| 4. | Сравнить:<br>а) 2,3 и $\sqrt{6,25}$ ,<br>б) $\frac{5}{4}$ и $\sqrt{\frac{7}{16}}$     | В одном случае корень заменяется рациональным числом, в другом — рациональное число заменяется корнем | Учитель делает записи на доске под диктовку учеников, обращая внимание на оформление |

**3. Третий этап обобщения: решение уравнений.**

Ученикам предлагается список уравнений:

- 1)  $\sqrt{x} - 0,6 = 0$ ,
- 2)  $6\sqrt{x} + 5 = 0$ ,
- 3)  $x^2 - 0,1 = 0,06$ ,
- 4)  $3x^2 + 4 = 0$ .

Дальнейшая работа осуществляется вокруг вопросов:

- какие из уравнений списка являются иррациональными? Квадратными?
- какие из уравнений не имеют корней?
- сколько корней может иметь иррациональное уравнение вида  $\sqrt{x} = a$ ?
- сколько корней может иметь квадратное уравнение вида  $x^2 = a$ ?

Ученики оформляют решения всех примеров, учитель записывает только ответы.

**4. Подведение итогов.**

Ученики на основе сделанных на уроке записей выделяют разделы темы, основные вопросы каждого раздела, особенности примеров, пути преодоления затруднений при их решении.

Приложение 27

**Урок устного контроля по системе В.Ф. Шаталова**

В.Ф. Шаталов использует следующие материалы для устного контроля знаний учащихся:

- первый лист контроля, в котором перечислены все теоретические вопросы темы;

- приложение, в котором даны ответы на все вопросы первого листа;
- второй лист контроля, в котором перечислены те теоретические вопросы темы, которые надо знать с доказательствами.

Ученики, готовясь к уроку контроля, проверяют друг друга по каждому листу, а на уроке ученики опрашиваются группами, поэтому В.Ф. Шаталов называет их «листами взаимоконтроля», «листами группового контроля».

Ниже приведены примеры материалов устного контроля по теме «Квадратные корни» в 8 классе.

### *Лист № 1*

1. Два способа записи рационального числа.
2. Запись иррационального числа.
3. Понятия: множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел и связь между ними.
4. Квадратный корень.
5. Арифметический квадратный корень.
6. Условие существования арифметического квадратного корня.
7. Тождество о возведении арифметического квадратного корня в квадрат (буквенная запись, правило, обоснование).
8. Решение уравнения  $x^2 = a$ .
9. Арифметический квадратный корень из произведения (теорема и правило).
10. Арифметический квадратный корень из дроби (теорема и правило).
11. Арифметический квадратный корень из степени.
12. Вынесение множителя из-под знака корня (правило).
13. Внесение множителя  $a$  под знак корня (правило).
14. Умножение арифметических корней (правило).
15. Деление арифметических корней (правило).
16. Представление выражения в виде степени (правило).
17. Освобождение от иррациональности в знаменателе, в случае, если знаменатель — арифметический квадратный корень (правило).
18. Освобождение от иррациональности в знаменателе, в случае, если знаменатель — сумма или разность, содержащая арифметический квадратный корень (правило).
19. Приведение «подобных» в выражении, содержащем арифметические квадратные корни (правило).

## Приложение к листу № 1

1. Любое рациональное число можно представить а) в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m — \dots, n — \dots$  ; б) в виде бесконечной десятичной периодической дроби и обратно.
2. Иррациональные числа записываются в виде бесконечной ...
3. Числа 1, 2, 3, ..., которые употребляются при счете предметов, образуют множество натуральных чисел. Натуральные числа, противоположные им числа и число нуль образуют множество ... чисел. Целые и дробные числа образуют множество рациональных чисел. Рациональные и ... образуют множество действительных чисел.  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .
4. Квадратным корнем из числа  $a$  называется число, квадрат которого равен  $a$ .
5. Арифметическим квадратным корнем из числа  $a$  называется неотрицательное число, квадрат которого равен  $a$ .
6. Арифметический квадратный корень имеет смысл, когда подкоренное выражение неотрицательно.
7.  $(\sqrt{a})^2 = a$ , если  $a \geq 0$ . При возведении арифметического квадратного корня, имеющего смысл, в квадрат получается подкоренное выражение. Определение арифметического квадратного корня.
8. Если  $a > 0$ , то уравнение имеет два корня:  $\sqrt{a} — \sqrt{a}$ . Если  $a = 0$ , то уравнение имеет один корень 0. Если  $a < 0$ , то уравнение корней не имеет.
9. Корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей. Чтобы извлечь корень из произведения, нужно извлечь корень из каждого множителя.
10. Корень из дроби, числитель которой неотрицателен, а знаменатель положителен, равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя. Чтобы извлечь корень из дроби, нужно извлечь корень из числителя и корень из знаменателя.
11. При любом значении  $a$  верно тождество  $\sqrt{a^2} = |a|$ . Чтобы извлечь корень из степени с четным показателем, нужно представить подкоренное выражение в виде квадрата, а затем воспользоваться указанным тождеством.
12. Чтобы вынести множитель из-под знака корня, нужно представить подкоренное выражение в виде произведения,

в котором хотя бы один множитель был квадратом некоторого числа, а затем применить теорему об извлечении корня из произведения.

13. Чтобы внести положительный множитель под знак корня, нужно представить его в виде корня по формуле  $a = \sqrt{a^2}$ , а затем применить правило умножения корней.

14. При умножении арифметических квадратных корней перемножаются их подкоренные выражения.

15. При делении арифметических квадратных корней делятся их подкоренные выражения.

16. Любое неотрицательное число можно представить в виде квадрата по формуле:

$$a = (\sqrt{a})^2.$$

17. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, в случае, если знаменатель — арифметический квадратный корень, нужно числитель и знаменатель умножить на этот корень.

18. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, в случае, если знаменатель — сумма (или разность), содержащая арифметический квадратный корень, нужно числитель и знаменатель умножить на соответствующую разность (сумму).

19. Чтобы привести «подобные» в выражении, содержащем арифметические квадратные корни, нужно упростить каждый корень, выделить в полученном выражении подобные корни, сложить их множители («коэффициенты»), а общий корень приписать.

### *Лист № 2*

1. Арифметический квадратный корень из произведения.
2. Арифметический квадратный корень из дроби.
3. Арифметический квадратный корень из степени.

Листы контроля и ответы на первый лист раздаются ученикам в начале изучения темы. Накануне урока устного контроля учитель отвечает на все вопросы первого листа, а сам урок начинается с ответов на те вопросы листа, которые вызвали у учащихся затруднение. Для опроса вызывается группа ребят. Количество отвечающих должно быть таким, чтобы каждый мог ответить на 3—4 вопроса листа (для листа из 19 вопросов можно составлять группу в 6 человек). Для экономии времени вопросы имеются у каждого отвечающего. Первый вопрос учитель задает выбранному им ученику, а далее вопросы следуют по порядку, что дает

возможность ученикам, ожидая своей очереди, отшлифовать свой ответ и снять элемент неожиданности, которая создает нервность и ведет к потере времени. Подробная технология проведения урока устного контроля описана в работе [112].

## Часть VI. Изучение содержательных линий математики в основной школе

Школьный курс математики группируется вокруг определенных содержательных линий. Особенности методики изучения каждой содержательной линии являются следующие:

- выделение основных вопросов содержания;
- анализ изучения одной и той же содержательной линии в разных классах;
- учет преемственности при изучении содержательных линий;
- реализация изучения содержательных линий в разных школьных учебниках.

В приложениях отражены эти особенности при изучении числовых систем и функций в основной школе.

### Приложение 28

#### Основные вопросы изучения числовых систем

Основными этапами изучения любой числовой системы являются:

- 1) введение «новых» чисел;
- 2) сравнение чисел;
- 3) изучение арифметических действий с числами;
- 4) изучение законов и свойств этих действий.

На этапе **введения** чисел рассматривают:

- арифметическую, геометрическую, измерительную или алгебраическую *мотивацию* введения «новых» чисел;
- чтение и запись «новых» чисел;
- изображение «новых» чисел на числовом луче или числовой оси;
- связь «новых» чисел с ранее изученными.

На этапе **сравнения** чисел рассматривают общие и частные способы сравнения, включая понятие равенства чисел.

При изучении **операций** выделяют следующие этапы:

**Этап введения алгоритма:**

- мотивация изучения операций через использование практической задачи (задача раскрывает смысл операции);

- решение этой задачи старыми способами (геометрически, сведением к известным числам и др.);
- составление алгоритма выполнения операции с «новыми» числами;
- математическое обоснование алгоритма.

**Этап усвоения алгоритма:**

- отработка отдельных шагов алгоритма на специально составленных упражнениях;
- рассмотрение всех частных случаев и частных ситуаций выполнения изучаемой операции.

**Этап закрепления операции:**

- решение заданий, связанных с классификацией;
- использование заданий по предотвращению ошибок;
- обучение контролю при выполнении той или иной операции;
- выполнение тренажных заданий (обычно в виде дидактических игр);
- применение рассматриваемой операции для решения задач, упражнений и т. д.;
- конструирование примеров и задач, связанных с рассматриваемой операцией.

При изучении **законов и свойств действий** выполняют следующую последовательность шагов:

- мотивация изучения законов операций с помощью поиска путей рационального счета;
- обобщение законов в словесной и буквенной форме;
- «проверка» законов для «новых» чисел;
- применение законов и свойств для упрощения выражений и рационального счета.

*Приложение 29*

**Сравнительный анализ изучения десятичных дробей  
в различных школьных учебниках**

При сравнительном анализе школьных учебников необходимо:

- Понять авторскую позицию (для этого надо проанализировать и озаглавить каждый абзац теоретического материала, объяснить их последовательность, поставить и ответить на каждое методическое «Почему?»).
- Сравнить авторские позиции (найти общие подходы и различия).
- Попытаться оценить положительные и отрицательные стороны каждого подхода.

Удобно обсуждение этого вопроса проводить в форме деловой игры, в которой встречаются «авторские коллективы».

Так, итогом деловой игры по введению десятичных дробей может быть следующее резюме. В школьных учебниках математики приняты несколько путей введения десятичных дробей:

1) Систематическое изучение десятичных дробей предшествует основному изучению обыкновенных дробей, однако изучение отдельных вопросов по теме «Обыкновенные дроби» включено в курс 5 класса и носит подготовительный характер к изучению десятичных дробей. Этот путь принят в учебниках [20], [77].

2) При введении десятичных дробей авторы опираются на десятичную систему мер и обыкновенные дроби (рассматривается задача перевода меньших единиц измерения в большие). При этом в учебнике [20] обыкновенные дроби используются только при изучении сравнения, сложения и вычитания десятичных дробей, в учебнике [77] только при введении соответственных разрядных единиц и при сравнении десятичных дробей.

3) Систематический курс обыкновенных дробей изучается раньше десятичных дробей. Эта позиция соответствует принципу историзма (обыкновенные дроби появились в истории человечества раньше десятичных). Такой путь принят в учебнике [64]. Однако все операции над десятичными дробями обосновываются позиционной записью числа (как и для натуральных чисел), а не действиями над обыкновенными дробями. А при данном построении материала между изучением натуральных чисел (5 класс) и изучением десятичных дробей (6 класс) — целый год.

4) Обыкновенные и десятичные дроби изучаются совместно [111].

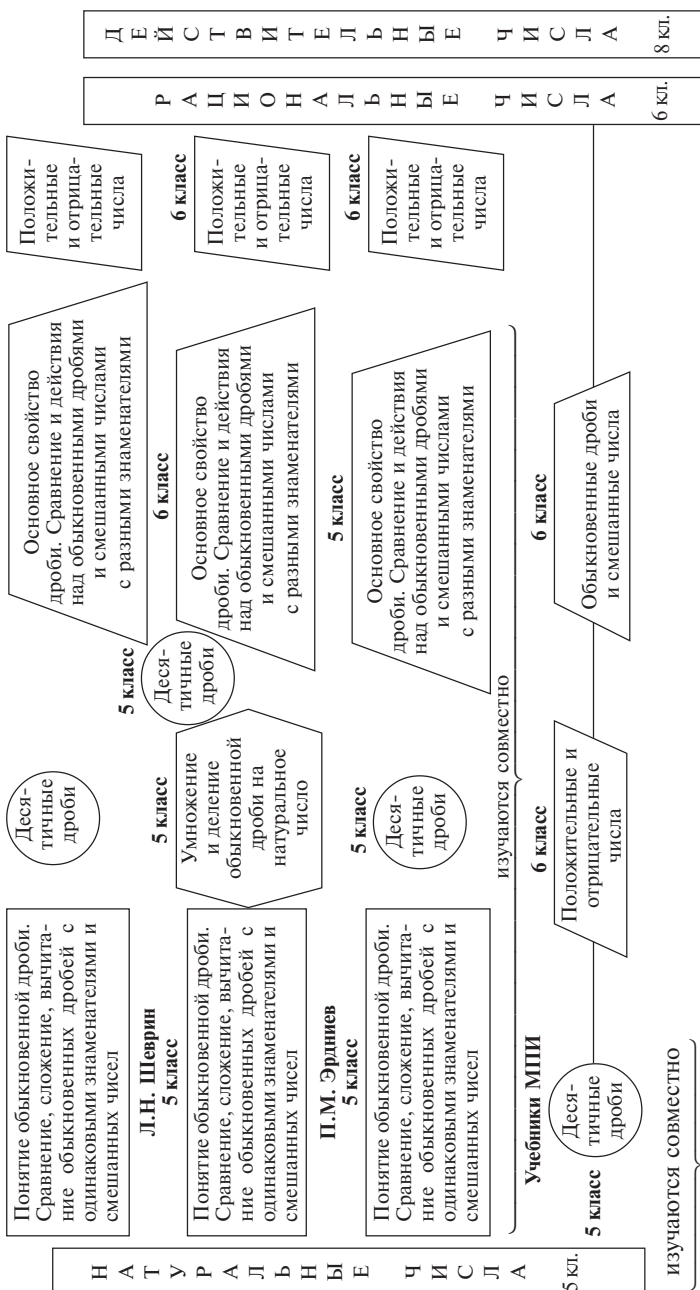
5) Изучение десятичных дробей строится на основе позиционного принципа записи чисел (разрядная таблица расширяется вправо). Такой подход принят в учебниках [26], [65]. Такой подход обеспечивает перенос на десятичные дроби всех алгоритмов, изученных для натуральных чисел. Отличительными чертами этих учебников являются:

- Различное отношение к обыкновенным дробям. Так, в учебнике [65] некоторые вопросы изучения обыкновенных дробей предшествуют изучению десятичных дробей, а в учебнике [26] обыкновенные дроби являются лишь фоном для изучения десятичных дробей.
- Различное отношение к натуральным числам. В учебнике [65] натуральные числа и десятичные дроби изучаются последовательно, а в учебнике [26] — параллельно.

# Математическая карта изучения числовых систем в современных школьных учебниках

Н.Я. Виленкин, Э.Р. Нурк

5 класс



### Методическая схема изучения функций в основной школе

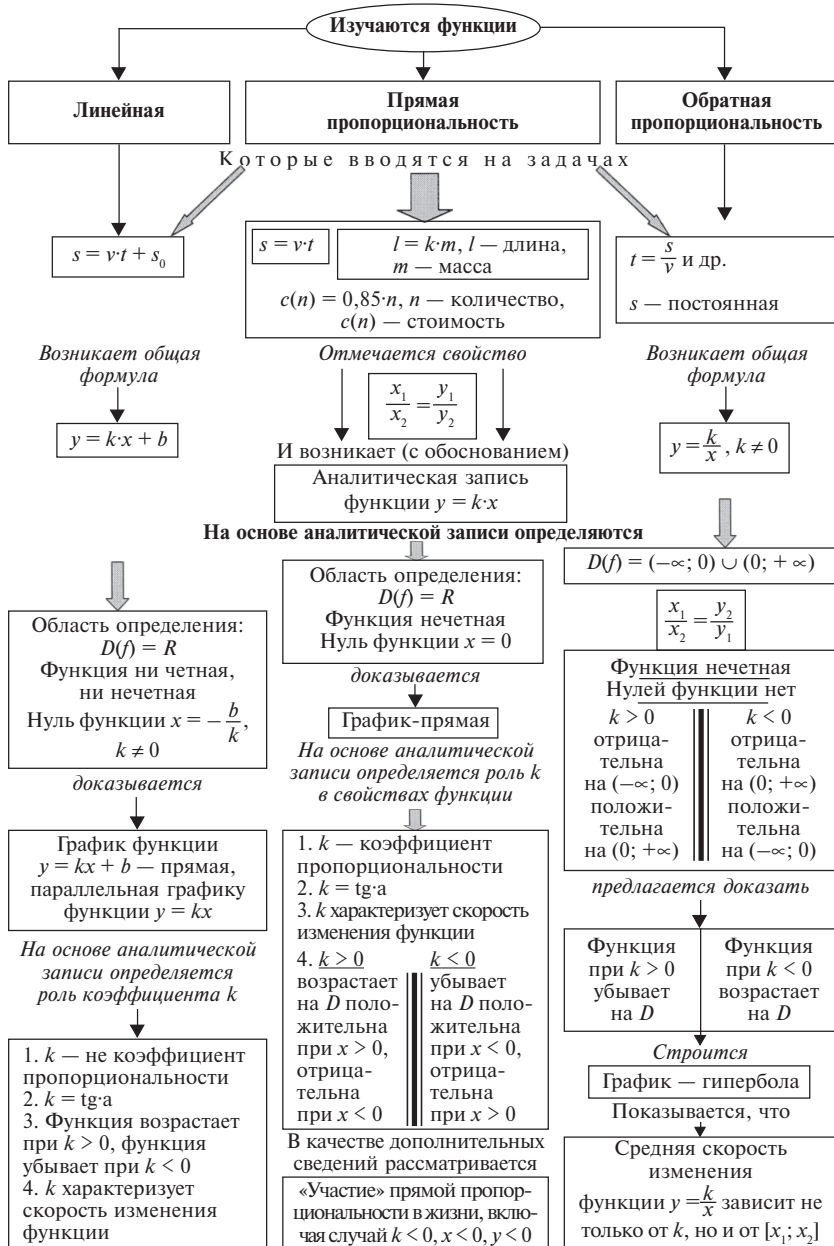
1. Анализ конкретных задач или примеров из реальной жизни, науки, техники, приводящих к данной функции.
2. Определение рассматриваемой функции, ее запись с помощью формулы, исследование параметров, входящих в эту формулу.
3. Построение графика функции. Установление влияния параметров на характер графического изображения функции.
4. Исследование свойств функции, сходя из ее графика или из формулы.
5. Обучение учащихся истолкованию свойств функции на трех языках: графическом, словесном, символическом.

### Сравнительный анализ изучения функций в учебниках алгебры основной школы

| <i>Традиционные учебники [1]—[6]</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <i>Учебники серии МПИ [36], [37]</i>                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Понятие функции вводится в 7 классе, хотя к этому времени еще не изучены действительные числа, поэтому полноценного обсуждения области определения, вопроса о сплошной линии графика не может быть. Не изучены неравенства и выражения, имеющие смысл не для всех действительных чисел, поэтому полноценного изучения свойств функций не может быть | 1. Понятие функции вводится в 9 классе, когда ученики готовы к его полноценному восприятию, и есть необходимость его широкого использования для решения уравнений и неравенств, для систематизации изученного материала за курс основной школы |
| 2. Функция определяется как зависимость одной переменной от другой, что сужает область ее применения                                                                                                                                                                                                                                                   | 2. Функция определяется как соответствие между множествами, а числовые функции являются хотя и важным, но лишь частным случаем                                                                                                                 |
| 3. Свойства функций вводятся постепенно в течение трех лет обучения, что не создает полной картины всех свойств для каждой из изучаемых функций                                                                                                                                                                                                        | 3. Свойства функции изучаются крупным блоком. Список свойств является более полным, чем в традиционных учебниках. Схема исследования функций используется для каждой из изучаемых функций                                                      |



# Карта № 2



# Математические карты изучения квадратичной функции в учебнике серии МПИ [37]

## Карта № 1



## Карта № 2



### Изучение функции $y = ax^2 + n$ (вид доски)

$$y = 2x + 3, \quad y = -x^2 + 5x, \quad y = 2x^2 + 2, \quad y = 7 - x^2 + 3x, \quad y = 2x^2, \\ y = x^3 + 2, \quad y = 2(x - 2)^2, \quad y = 2(x - 2)^2 + 2.$$

|                                    |                                        |                                               |
|------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $y = ax^2 + n$                     | $y = a(x - m)^2$                       | $y = a(x - m)^2 + n$                          |
| $y = 2x^2 + 2,$<br>$y = -x^2 - 3.$ | $y = 2(x - 2)^2,$<br>$y = -3(x + 1)^2$ | $y = 2(x - 2)^2 + 2,$<br>$y = -(x - 3)^2 - 2$ |

### Построение графика функции $y = ax^2 + n$

**Задание 1.** Построить график функции  $y = 2x^2 + 2$  (используя график функции  $y = 2x^2$ ).

|                |    |    |   |   |    |                                                                                   |               |
|----------------|----|----|---|---|----|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| $X$            | -2 | -1 | 0 | 1 | 2  |  | $x_1$         |
| $y = 2x^2$     | 8  | 2  | 0 | 2 | 8  |                                                                                   | $y_1$         |
| $y = 2x^2 + 2$ | 10 | 4  | 2 | 4 | 10 |                                                                                   | $y = y_1 + 2$ |

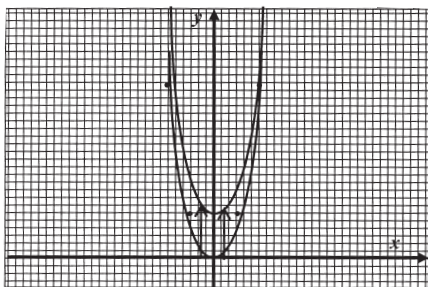


График функции  $y = 2x^2 + 2$  — **парабола**; получается из параболы  $y = 2x^2$  параллельным переносом на 2 единицы вверх. [Точка  $(0, 0)$  перемещается в точку  $(0, 2)$ ]

$$y = -2x^2 + 2 \text{ — ?}$$

- 1) из  $y = -2x^2$  (вверх на 2);
- 2) из  $y = 2x^2$  (симметрия относительно  $OX$  и параллельный перенос вверх на 2)

Алгоритм для  $y = ax^2 + n$ 

1. Построить график основной функции (выбрать нужный шаблон).

2. Определить координаты вершины параболы, которую надо построить ( $x = 0$ ,  $y = ?$ ). Сделать вывод о том, какое (какие) преобразование (преобразования) графика надо использовать.

3. Построить график.

4. Проверить построение по направлению ветвей параболы.

**Задание 2.** Заполните таблицу и постройте графики заданных функций

|                    | $y = -2x^2 + 2$            | $y = 2x^2 - 2$ | $y = x^2 + 2$ |
|--------------------|----------------------------|----------------|---------------|
| Основная функция   | $y = 2x^2$ или $y = -2x^2$ | $y = 2x^2$     | $y = x^2$     |
| Координаты вершины | (0, 2)                     | (0, -2)        | (0, 2)        |
| Направление ветвей | ↓                          | ↑              | ↑             |

Далее в тетрадях строятся три графика; на доске проверка осуществляется с помощью шаблонов.

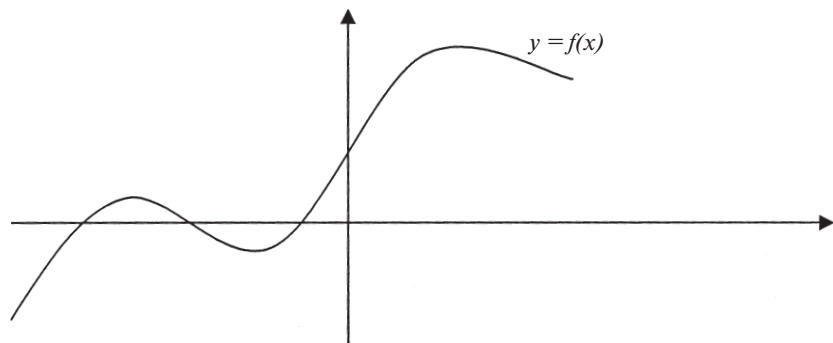
**Задание 3.** Приведите пример функции вида  $y = ax^2 + n$  и постройте в тетрадях ее график.

**Задание 4.**

1) Расскажите все о построении графика функции  $y = ax^2 + n$ .

2) Расскажите все о построении графика функции  $y = f(x) + n$ , если:

- а) имеется шаблон графика функции  $y = f(x)$ ;
- б) нет шаблона (см. рисунок).



# Методическая карта по книге «Квадратные уравнения»

Изучение темы начинается с двух задач

**Задача 1.** Найти площадь участка и его периметр, зная его стороны

**Задача 2.** Найти длину и ширину участка, зная его периметр и площадь

Выяснить определение квадратного уравнения:  $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ , называется квадратным

Возникает уравнение нового вида

При решении задачи

Обращение к справочнику позволяет  
Возникают вопросы

Узнать формулу для вычисления корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

1. Как применить определение и формулу?

2. Нельзя ли упростить вычисления по формуле корней квадратного уравнения?

3. Как была получена формула?

4. Всегда ли можно пользоваться формулой?

5. Формула отражает связь между корнями и коэффициентами квадратного уравнения. Нет ли других связей?

6. Зачем нужно уметь решать квадратные уравнения?

7. А для других уравнений есть формула корней?

**Примеры:**  
а) на выбор квадратных уравнений из списка;  
б) на вычисление корней квадратного уравнения

**Ситуация 1:** упрощение коэффициентов.  
**Ситуация 2:** сведение к уравнению а) с положительным первым коэффициентом, б) с первым коэффициентом, равным 1.  
**Ситуация 3:** если коэффициенты  $b$  и  $c$  равны 0, то можно не пользоваться формулой

**Способ 1:** метод разложения на множители;  
**способ 2:** метод извлечения квадратного корня

Исследование квадратных уравнений и усовершенствование алгоритма

Теорема Виета (прямая и обратная) и ее применение

1. Решение уравнений, приводимых к квадратным.  
2. Решение текстовых задач с помощью уравнений

Беседа математика «От частного к общему»

## Часть VII. Методика изучения тригонометрии

В курсе алгебры и начал анализа особое место занимает тригонометрия. Значимость тригонометрии объясняется двумя ее основными приложениями: *применением тригонометрии к решению геометрических задач и применением тригонометрии к изучению периодических процессов в природе и обществе*. Умение выполнять тригонометрические преобразования и решать тригонометрические уравнения и неравенства можно рассматривать как *средство для развития математической культуры учащихся*, поскольку при работе с ними совершенствуются:

- *представления о структуре математических выражений,*
- *владение общими методами решения уравнений и неравенств,*
- *умение выбирать и работать с математическими формулами.*

При изучении тригонометрии в старших классах учащиеся сталкиваются с рядом проблем (разбросанность тригонометрического материала по различным темам и курсам основной школы, большое количество тригонометрических тождеств, их сочетание с алгебраическими тождествами, запись свойств тригонометрических функций и решений уравнений и неравенств с учетом периодичности и др.). Можно предложить следующие пути их преодоления:

- *систематизация в 10 классе тригонометрического материала, изученного в основной школе,*
- *обучение анализу тригонометрических выражений, уравнений и неравенств с целью поиска способа решения,*
- *соблюдение этапов изучения тригонометрических формул, получаемых из тригонометрических тождеств,*
- *соблюдение базовых методик (методика формирования понятий, методика формирования умений, методика изучения теорем).*

Приложение 37

### Конспект урока «Косинус, синус и тангенс углов от $0^\circ$ до $180^\circ$ » в курсе геометрии 9 класса (по учебнику [11])

**Цели:** Повторить соотношения в прямоугольном треугольнике, ввести тригонометрические понятия для углов от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , доказать основное тригонометрическое тождество и некоторые формулы приведения.

## Ход урока

**I. Повторение теоретического материала, пройденного ранее (7—8 класс):**

- признаки равенства прямоугольных треугольников;
- синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника;
- соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника;
- значения синуса, косинуса и тангенса для углов  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ;
- основное тригонометрическое тождество.

1. Двоим учащимся предлагается по готовым чертежам сформулировать и доказать признаки равенства прямоугольных треугольников, заданные на дом для повторения к данному уроку.

(При доказательстве учащимся разрешается пользоваться признаками равенства треугольников, теоремой Пифагора, теоремой о сумме углов треугольника.)

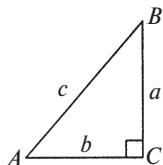
**Вместе с учениками делается вывод:** *Чтобы задать прямоугольный треугольник достаточно задать только два его элемента, перечисленных в признаках.*

Учащимся задается вопрос: «Можно ли однозначно задать прямоугольный треугольник двумя его острыми углами?» Ответ: «Такое задание треугольника невозможно, так как, зная только два острых угла прямоугольного треугольника, мы можем построить бесконечное множество треугольников с заданными углами и не равных между собой, а подобных друг другу».

На основании проведенного повторения делается еще один **важный вывод:**

Любой прямоугольный треугольник можно однозначно задать какой-то одной его стороной (либо гипотенузой, либо катетом) и одним острым углом, а все остальные неизвестные элементы прямоугольного треугольника можно найти, используя данные элементы, при помощи изученных в 8 классе понятий *синуса*, *косинуса* и *тангенса* острого угла прямоугольного треугольника, поскольку эти понятия как раз и показывают связь между сторонами и углами прямоугольного треугольника согласно их определениям. Вспомним их.

2. Рассмотрим прямоугольный треугольник, стороны которого равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :



Ученикам задаются вопросы:

- Какое понятие связывает катет, противолежащий ему острый угол и гипотенузу? (*Синус этого угла.*)
- Как математически можно записать эту связь? ( $\sin A = a : c$ ,  $a = c \cdot \sin A$ ,  $c = a : \sin A$ ).
- Какие другие соотношения есть между сторонами и углами прямоугольного треугольника?

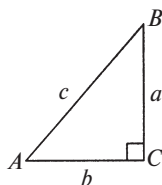
Так, вместе с учениками вспоминаются определения *синуса*; *косинуса*; *тангенса*, изученные в 8 классе (для прямоугольного треугольника) и соответствующие соотношения.

**Определение 1.** Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется ОТНОШЕНИЕ противолежащего катета к гипотенузе.

**Определение 2.** Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется ОТНОШЕНИЕ прилежащего катета к гипотенузе.

**Определение 3.** Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется ОТНОШЕНИЕ противолежащего катета к прилежащему (или отношение синуса к косинусу).

См. соответствующие записи на рисунке:

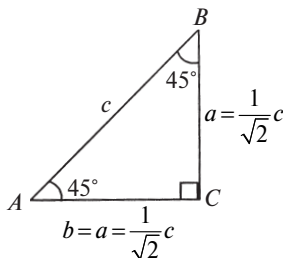
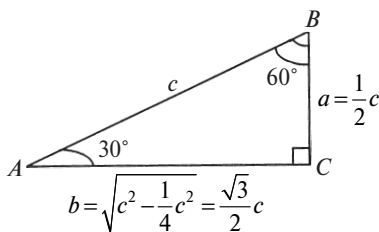


$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

3. Выведем значения синуса; косинуса; тангенса для углов  $30^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $60^\circ$ , которые часто встречаются в геометрических задачах.



Данные значения вписываются в таблицу:

| $\alpha$                   | Градусные меры углов |                      |                      |                      |            |             |
|----------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------|-------------|
|                            | $0^\circ$            | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$ | $180^\circ$ |
| $\sin \alpha$              | 0                    | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1          | 0           |
| $\cos \alpha$              | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0          | -1          |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | —          | 0           |

*Замечание.* Значения для углов  $0^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $180^\circ$  вносятся в таблицу позже (после их нахождения).

4. Вспоминается и доказывается на доске

**Основное тригонометрическое тождество:**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

*Доказательство:* По определению синуса и косинуса имеем следующее:  $\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$  (так как по теореме Пифагора:  $a^2 + b^2 = c^2$ ).

Мотивом или итогом этого этапа урока может быть иной способ нахождения значений синусов или косинусов. Раньше оба этих значения находились по определению, а теперь достаточно найти, например, по определению одно значение, а потом из основного тригонометрического тождества вычислить другое. Тангенс можно будет найти как отношение синуса к косинусу.

## II. Изучение нового материала.

1. Получим значения синуса; косинуса; тангенса для углов  $0^\circ$ ;  $90^\circ$ , исходя из здравого смысла.

- Если угол  $A$  уменьшать до  $0^\circ$ , пока точка  $B$  не совпадет с точкой  $C$ , то сторона  $BC$ , равная  $a$  треугольника  $ABC$ , уменьшится до 0, а гипотенуза  $AB$  станет равной  $AC \Rightarrow c = b$ .

$$\text{Тогда } \sin 0^\circ = \frac{a}{c} = \frac{0}{c} = 0; \cos 0^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{b} = 1.$$

- Если угол  $A$  увеличивать до  $90^\circ$ , пока точка  $A$  не совпадет с точкой  $C$ , то сторона  $AB$ , равная  $b$  треугольника  $ABC$ , уменьшится до 0, а гипотенуза  $AB$  станет равной  $CB \Rightarrow c = a$ .

$$\text{Тогда } \sin 90^\circ = \frac{a}{c} = \frac{c}{c} = 1; \cos 90^\circ = \frac{b}{c} = \frac{0}{b} = 0.$$

2. Итак, мы распространили правило нахождения синуса, косинуса и тангенса угла с острых углов прямоугольного треугольника на углы  $0^\circ$  и  $90^\circ$ . Возникает закономерное желание распространить такое правило нахождения синуса, косинуса и тангенса угла на тупые углы и даже на развернутый угол. Таким образом мы «отрываем» понятия синуса, косинуса и тангенса (одновременно расширяя эти понятия) от прямоугольного треугольника и делаем эти понятия также **характеристиками угла** (позже в курсе алгебры будет показано, что синус, косинус и тангенс являются функциями угла, т. е. угол является для них аргументом). Чем это поможет в геометрии? Мы сможем работать с тупоугольными треугольниками.

3. Мотивация использования единичной полуокружности.

Когда мы находили синус, косинус и тангенс для острых углов, то мы длины катетов  $a$  и  $b$  выражали через длину гипотенузы  $c$ . Другими словами мы измеряли катеты в гипотенузах (вернее в ее частях, так как любой катет всегда меньше по длине гипотенузы). Таким образом мы выбрали гипотенузу за единицу измерения (бывают единицы измерения: метры; сантиметры; вершки; аршины, у нас же будет единица измерения 1 (одна) гипотенуза для измерения длин катетов). Для удобства математики предложили вместо  $c$  (длины гипотенузы) сразу писать 1. Это обусловлено еще и тем, что на 1 удобнее всего делить, находя значения синуса и косинуса!!! В этом случае получаем, что:

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{a}{1} = a;$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{b}{1} = b.$$

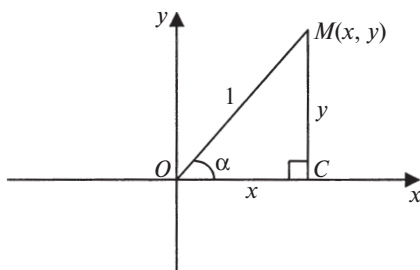
Кроме этого оказалось удобным использовать великое открытие Декарта: систему координат.

Сначала научимся правильно откладывать и измерять углы на декартовой плоскости. Для этого сформулируем правило, которым будем пользоваться мы (и которым пользуются все математики) при выполнении этих операций.

### Правило откладывания и измерения углов на декартовой плоскости:

На декартовой плоскости ( $xOy$ ) углы с вершиной в начале координат (в точке  $O$ ) откладываются и измеряются против часовой стрелки от положительной полуоси абсцисс (оси  $Ox$ ).

Поместим прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$  и гипотенузой, равной 1, в систему координат по этому правилу. Пусть точка  $M$  имеет координаты  $x$  и  $y$ :



Посмотрим, как можно объяснить определения синуса и косинуса острого угла, используя декартову систему координат.

$$\cos \alpha = \frac{x}{1} = x; \text{ следовательно, } \cos \alpha \text{ — это абсцисса точки } M.$$

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y; \text{ следовательно, } \sin \alpha \text{ — это ордината точки } M.$$

#### 4. Введение определений для углов от $0^\circ$ до $180^\circ$ .

Если изменять величину угла от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , то конец гипотенузы, двигаясь подобно Солнцу с Востока на Запад по небосводу в течение дня, опишет полуокружность. Эту полуокружность называют *единичной полуокружностью* (подумайте почему).

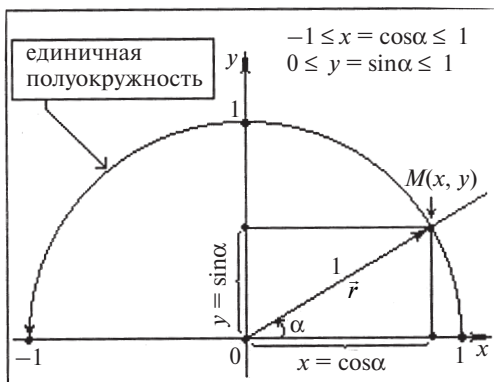
Распространим определение косинуса и синуса с острых углов на все углы из первой и второй четвертей, т. е.  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

#### Определение.

$\cos \alpha$  — это абсцисса точки  $M$ ,

$\sin \alpha$  — это ордината точки  $M$ ,

где  $M$  — точка пересечения единичной полуокружности с лучом, выходящим из начала координат под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ . Угол  $\alpha$  меняется от  $0^\circ$  до  $180^\circ$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ).



Найдем значения синуса, косинуса и тангенса для углов  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  (ученики убеждаются, что для  $0^\circ$  и  $90^\circ$  здравый смысл не подвод, для  $180^\circ$  заполняется соответствующий столбик таблицы).

Итак, следует запомнить, что *косинусу соответствует X*, а *синусу соответствует Y*.

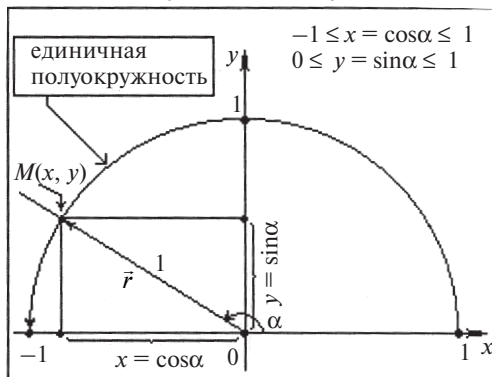
Чтобы это быстрее запомнить, можно использовать следующую аналогию:

При записи координат точки на плоскости ( $X$ ;  $Y$ ) принято первой писать координату  $X$  (**Абсциссу** точки), а второй координату  $Y$  (**Ординату** точки). В русском алфавите буква **А** ... стоит впереди буквы **О**, аналогично и в латинском (или английском) алфавите: буква **C** (**Cos**) идет раньше, чем буква **S** (**Sin**). По нашей «лирической» аналогии (не имеющей почти никакого отношения к математике) можно проще запомнить, что *косинус — это X*, а *синус — это Y*.

Поэтому математики называют:

ось  $Ox$  — **осью косинусов**;

ось  $Oy$  — **осью синусов**.



Заметим, что  $-1 \leq X \leq 1$ ;  $0 \leq Y \leq 1$ ; т. е.

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1; 0 \leq \sin \alpha \leq 1; \text{ для } 0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ.$$

Значит, для острых углов значения косинусов положительные ( $> 0$ ), а для тупых — значения косинусов будут отрицательными ( $< 0$ ), а значения синуса и для острых, и для тупых углов положительны.

Итак, с помощью единичной полуокружности мы дали определения тригонометрическим понятиям.

#### 5. Доказательство некоторых тождеств.

Покажем также, что основное тригонометрическое тождество выполняется и для углов  $\alpha$ , лежащих в 1-й и 2-й четвертях декартовой плоскости ( $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ).

#### Доказательство:

Для доказательства воспользуемся уравнением единичной полуокружности. Это уравнение нетрудно получить из уравнения окружности, центр которой находится в начале координат и радиус равен 1, а также учитывая, в каких пределах меняются  $X$  и  $Y$ . Уравнение единичной окружности:  $X^2 + Y^2 = 1$ .

Уравнение единичной полуокружности:

$$X^2 + Y^2 = 1; \quad -1 \leq X \leq 1; \quad 0 \leq Y \leq 1.$$

По новому определению косинуса и синуса имеем:  $X = \cos \alpha$ ;  $Y = \sin \alpha \Rightarrow X^2 + Y^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

#### Основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ)$$

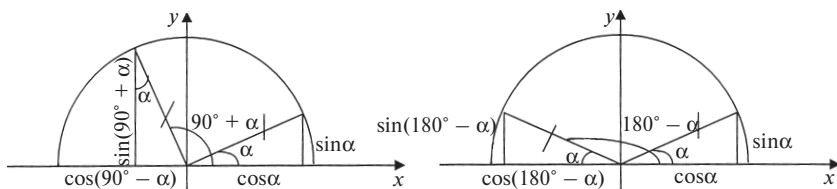
Итак, зная значение синуса или косинуса, можно найти все остальные значения. А как узнать хотя бы одно значение для тупого угла, например,  $\sin 150^\circ$ ? Для этого существуют специальные формулы.

### Формулы приведения

Формулы, которые позволяют привести (выразить) значения синуса и косинуса для тупых углов к значениям синуса или косинуса острых углов, называются формулами приведения.

Выведем и докажем некоторые из них:

|                                          |                                           |
|------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$  | $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  |
| $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ |



План доказательства отражен на рисунках:

- 1) найти точки, соответствующие заданным углам,
- 2) для них выделить соответствующие тригонометрические значения,
- 3) доказать равенство модулей этих значений из равенства треугольников,
- 4) определить знаки этих значений из расположения на координатной плоскости,
- 5) сделать вывод.

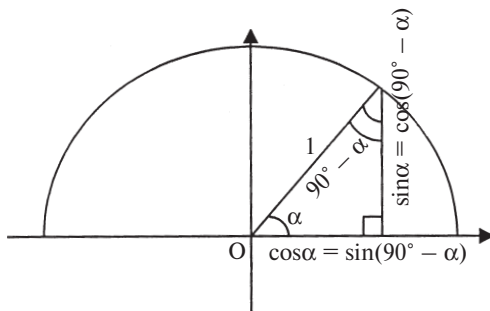
*Замечание.* Полезно доказать для случая  $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  тождества:

|                                          |                                           |
|------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ | $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ |
|------------------------------------------|-------------------------------------------|

Есть еще два тождества, которые позволяют уменьшить острый угол до  $45^\circ$ . Это тождества:

|                                         |                                         |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ | $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ |
|-----------------------------------------|-----------------------------------------|

Доказательство следует из соотношений в прямоугольном треугольнике и отражено на рисунке:



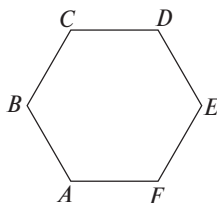
### III. Решение задач из учебника и подведение итогов урока.

**Проверка готовности учащихся к изучению темы  
«Тригонометрические функции»  
(Фрагмент учебника [16, С. 151])**

**Проверка готовности**

**Измерение углов**

1. Что такое градус?
2. Чему равна градусная мера углов  $BAF$ ,  $BAD$ ,  $BFD$ ,  $BFE$ ,  $BFC$ ? ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  — вершины правильного шестиугольника — рис.)
3. Что такое радиан?
4. Какова связь между градусной и радианной мерой угла?
5. К какому числу ближе радианная мера угла в  $100^\circ$ : 0,2; 0,7; 1,2; 1,7; 2,2?



**Соотношения в треугольнике**

6.  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $AC = 5$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  — углы треугольника. Вычислите  $\sin A$ ,  $\cos C$ ,  $\operatorname{tg} C$ ,  $\operatorname{ctg} C$ ,  $\cos B$ .

7.  $AB = 3$ ,  $BC = AC = 4$ . Вычислите  $\cos A$ ,  $\sin B$ ,  $\sin C$ ,  $\operatorname{tg} A$ ,  $\operatorname{tg} C$ .

8.  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ ,  $AC = 6$ . Вычислите  $\cos B$ .

9. В прямоугольном треугольнике синус одного из углов равен  $\frac{1}{2}$ .

Найдите углы треугольника.

10. В треугольнике  $ABC$  известно, что  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{tg} B = 1$ .

Найдите угол  $C$ .

**Вращательное движение**

*Точка равномерно движется по окружности радиуса  $R$ .*

11. Что такое ее угловая скорость?

12. Как направлена ее линейная скорость?

13. Как связаны между собой линейная скорость, угловая скорость и радиус окружности?

14. Точка начала двигаться по окружности из начального положения  $A$  с угловой скоростью  $3 \frac{1}{\text{сек}}$ . Сколько раз она побывает в точке  $A$  за минуту (не считая исходного момента)?

15. Сколько раз в сутки стрелки часов перпендикулярны друг другу?

### Техника вычислений

16.  $x = \frac{2}{3}$ . Вычислите  $\sqrt{1-x^2}$ ,  $1 + \frac{1}{x^2}$ ,  $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

17. Сколько разных чисел записано в следующем ряду:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{12}}{4}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{\sqrt{18}}{6}, \frac{\sqrt{27}}{6}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{1}{2}}?$$

18. Решите уравнение  $x^4 = \frac{1}{4}$ .

19.  $a^2 + b^2 = 1$ ;  $ab = x$ . Выразите через  $x$ :  $a^4 + b^4$ ,  $a^6 + b^6$  и  $a^8 + b^8$ .

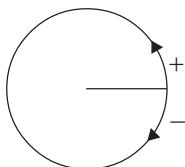
20. Какие значения принимает выражение  $x^2 - x + 1$ , если  $|x| \leq 1$ ?

*Приложение 39*

### Изучение измерения углов

С измерением углов связаны две меры: градусная и радианная, поэтому в школьном курсе рассматривается как введение соответствующих понятий (что означает единица соответствующего измерения, каковы свойства измерения углов), так и связь между разными мерами углов. В материалах В.Ф. Шаталова показан опорный конспект, создаваемый учителем во время объяснения радианной меры углов и ее связи с градусной мерой.

## ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ (опорный конспект)



$1^\circ$  дуговой =  $\frac{1}{180}$  части окружности

$1^\circ$  угловой — центральный угол

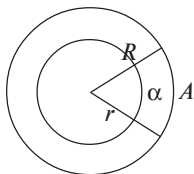
$$1^\circ = 60'$$

$$1' = 60''$$

Франция — 400

Артиллерия — 60 б.д.у.

6000 м.д.у.



$$\frac{\cup A}{\cup a} = \frac{R}{r}$$

$$\frac{\cup A}{R} = \frac{\cup a}{r} = \dots = \text{const} = \text{радианная мера угла}$$

$$\frac{\cup A}{R} = 1, \text{ если } \cup A = R.$$

$$\frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ радиан } 360^\circ = 2\pi \text{ рад}$$

$$1 \text{ радиан} \approx 57^\circ 17' 45''$$

$$180^\circ = \pi \text{ радиан } A^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}$$

$$A^\circ = \alpha \text{ радиан } \alpha = \frac{A^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

### Дешифровка опорного сигнала

С углами математики издавна связывают окружность. Принято считать один радиус началом отсчета (откладывания) углов, направление против часовой стрелки — положительным, по часовой стрелке — отрицательным.

Если дугу окружности разделить на 360 равных частей, то каждая такая часть называется *дуговым градусом*.

*Угловой градус* — это центральный угол, опирающийся на дуговой градус. Многие думают, что иных угловых мер просто не

существует. Однако, это не так. Во время французской буржуазной революции была перекроена вся система мер, и в результате этого окружность стали делить на 400 равных частей (каждую четверть окружности делили еще на 100 равных частей).

Артиллеристы же с давних времен делят окружность на 60 частей, и каждая часть называется *большим делением угломера*. А в нем, в свою очередь, 100 *малых делений угломера*. Так привыкли. Так ведут свои расчеты и градусы им просто не нужны.

Еще в 6 классе всем ученикам учителя предлагают проверить, что отношение длины к окружности к ее диаметру — величина постоянная, равная приблизительно 3,14. Это число  $\pi$ . Так же просто можно убедиться, что и отношение длины дуги одной и той же градусной меры к ее радиусу — величина постоянная. Значит, это отношение может служить мерой угла.

*Радианная мера угла* — это отношение длины дуги к радиусу этой дуги. Это отношение будет равно единице, если длина дуги будет равна ее радиусу. *Радиан* — это центральный угол, опирающийся на дугу, равную радиусу этой дуги.

Окружность содержит  $2\pi$  радиан.

Не следует загружать свою память формулами перехода от радианной меры к градусной и обратно. С одной стороны пользоваться ими приходится не столь уж часто, а с другой — вполне достаточно понимать связь  $360^\circ$  это  $2\pi$  радиан или  $180^\circ$  — это  $\pi$  радиан. Из нее в считанные секунды можно получить обе формулы.

## Приложение 40

### Конспект урока «Арксинус, арккосинус» в 10 классе

#### Цели:

1) вспомнить алгебраический и графический методы решения уравнений и три способа решения уравнений алгебраическим методом (по определению некоторых понятий, с использованием равносильных преобразований, по формуле корней),

2) вывести теорему о корне,

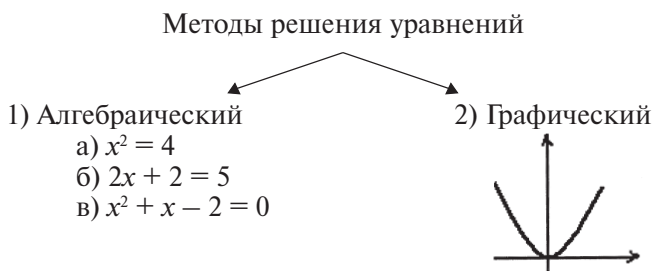
3) ввести определения арксинуса и арккосинуса некоторого числа и их свойства.

## Ход урока

**1. Мотивация темы.** (Без понятий арксинуса и аркосинуса некоторого числа решение тригонометрических уравнений и неравенств просто невозможно.)

**2. Актуализация знаний по методам решения уравнений.**

(Перспективные цели этого материала: *при решении тригонометрических уравнений пользуются различными способами решения уравнений алгебраическим методом, а при выводе формул решения простейших тригонометрических уравнений используют графический метод.*)



Устно решаются три перечисленных уравнения, и выделяются способы их решения:

а) Первое уравнение решается по определению квадратного корня.

б) Второе — с использованием равносильных преобразований: перенос слагаемых из одной части уравнения в другую, деление обеих частей уравнения на одно число.

в) Третье — по формуле корней квадратного уравнения или по теореме, обратной теореме Виета.

На примере уравнения  $x^2 = 4$  вспоминается графический метод.

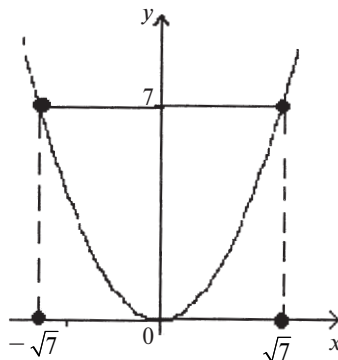
**3. Актуализация знаний по изучению понятия арифметического квадратного корня.**

На примере уравнения  $x^2 = 7$  вспоминается схема введения понятия арифметического квадратного корня:

- применение графического метода,
- обнаружение наличия у уравнения нескольких корней,
- выделение проблемы записи одного из корней,
- введение специального обозначения  $\sqrt{\quad}$ ,
- выражение других корней через найденный.

Этот опыт учащихся помогает ввести понятие арксинуса некоторого числа.

Графическое решение и алгебраическую запись корней можно показать так:



Итоговая запись на доске:

$\sqrt{a}$  — число из промежутка  $[0; +\infty)$ , квадрат которого равен  $a$

#### 4. Введение теоремы о корне.

На примере уравнения  $x^2 = 7$  увидели, что при его решении все свелось к нахождению одного его корня, другой же выразился через него.

В математике есть теорема, которая гарантирует один корень и указывает условие, когда он единственный. Она так и называется: *теорема о корне*.

#### Теорема о корне

*Пусть функция  $f(x)$  возрастает (убывает) на некотором промежутке, а — одно из значений этой функции на этом промежутке. Тогда уравнение  $f(x) = a$  имеет на этом промежутке ровно один корень.*

(Ученики записывают формулировку и выделяют условие, которое **гарантирует корень** — *а одно из значений функции*, и условие, которое обеспечивает **единственность** корня — *возрастание (убывание) функции на промежутке*.)

Теорема интерпретируется на уравнении  $x^2 = 7$ . Показывается, что из двух возможных промежутков  $(-\infty; 0]$  и  $[0; +\infty)$  математики

выбрали более удобный промежуток  $[0; +\infty)$  и корень на этом промежутке обозначили  $\sqrt{7}$ .

### 5. Введение определения $\arcsin a$ .

Ставится задача: найти *одно* решение уравнения  $\sin x = a$ , и выделяется условие, которое гарантирует хотя бы одно решение, т. е. такие значения  $a$ , при которых уравнение имеет решение:  $-1 \leq a \leq 1$ .

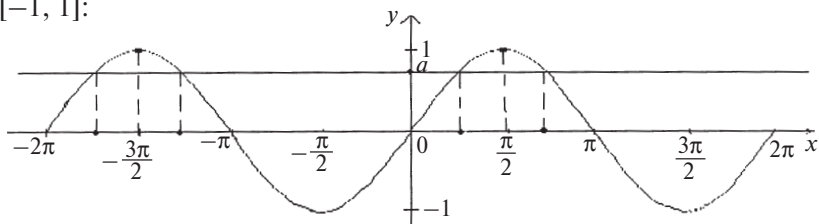
Поскольку пока это уравнение решить алгебраическим способом ученики не могут, предлагается разрешить поставленную задачу с использованием графического метода (используется готовый рисунок на доске).

Начинают с  $a = 1$ . Решая графически уравнение  $\sin x = 1$ ,

ученики получают корни:  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = -\frac{3\pi}{2}$ , ...

Таким образом, ученики выяснили, что, данное уравнение имеет бесконечно много корней, хотя задача и была найти только один корень.

Далее рассматривается произвольное число  $a$  из промежутка  $[-1, 1]$ :



Применяется графический метод, выясняется, что уравнение имеет бесконечное множество корней, напоминает задача урока о нахождении *одного* корня этого уравнения, возвращаются к подходу, примененному при решении уравнения  $x^2 = 7$ :

1) выбрали промежуток, на котором уравнение имеет один корень,

2) ввели новое обозначение ( $\sqrt{7}$ ),

3) другой корень выразили через первый ( $-\sqrt{7}$ ).

Тот же подход используется для уравнения  $\sin x = a$  (последний этап переносится на следующие уроки).

1) Выбирается промежуток, на котором уравнение  $\sin x = a$ , где  $-1 \leq a \leq 1$ , имеет ровно одно решение. Используя теорему о корне, ученики предлагают разные промежутки.

Сообщается, что математики выбрали  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , видимо, посчитали, что на этом участке график наиболее читаем.

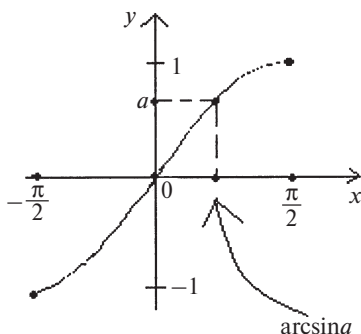
Проверяется для этого промежутка теорема о корне: функция

$y = \sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  возрастает, значит уравнение  $\sin x = a$ , где  $-1 \leq a \leq 1$ , на этом промежутке имеет ровно один корень.

2) Стирается ненужная часть графика, и описывается словами

корень на этом промежутке: *число из промежутка  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , синус которого равен  $a$ , если  $-1 \leq a \leq 1$ , затем вводится термин и запись:  $\arcsin a$ .*

**Определение.** Арксинусом числа  $a$ , где  $-1 \leq a \leq 1$ , называется число (угол) из промежутка  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , синус которого равен  $a$ .



Сравнивается это определение с определением  $\sqrt{a}$ :

$\frac{\sqrt{a}}{\arcsin a}$  — число из промежутка  $\frac{[0; +\infty)}{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ ,  $\frac{\text{квадрат}}{\text{синус}}$  которого равен  $a$ .

Сравниваются и условия, которым должно удовлетворять  $a$ : в первом случае:  $a \geq 0$ , во втором:  $-1 \leq a \leq 1$ .

**Пример:**

Вычислить  $\arcsin \frac{1}{2}$ .

Сначала выясняется, имеет ли это выражение смысл. Далее можно решать, используя график, единичную окружность или

таблицу основных значений:  $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ , так как

$$1) \frac{1}{2} \in [-1, 1],$$

$$2) \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$3) \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Далее ученикам предлагаются примеры, которые они подробно комментируют:

$$\arcsin 0 =$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

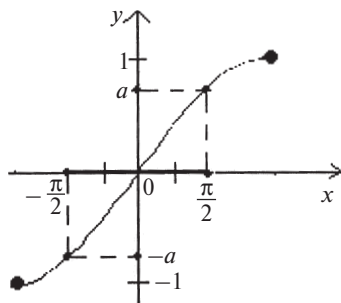
**6. Выделение свойств арксинуса.** Прежде чем решать следующие примеры, предлагается рассмотреть и доказать некоторые свойства арксинуса, которые могут облегчить вычисления и контролировать себя.

1-е свойство следует из определения арксинуса:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

2-е свойство выражено формулой:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



*Доказательство:*

Функция  $y = \sin x$  симметрична относительно 0. Отсюда очевидно равенство отрезков  $OA$  и  $OB$ . Значит,  $\arcsin(-a) = -\arcsin a$ .

Формулируется правило: *Знак «минус» можно выносить за знак арксинуса.*

С использованием этого правила вычисляются следующие значения:

$$\begin{aligned}\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) &= \\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \\ \arcsin(-1) &= \end{aligned}$$

Итак, поставленная в начале урока задача *найти один корень* уравнения

$\sin x = a$  решена:  $x = \arcsin a$ . Но уравнение имеет бесконечно много решений, какие они, и как они выражаются через  $\arcsin a$ , будет изучено через несколько уроков.

### **7. Формирование понятия $\arccos a$ .**

Еще раз выделяются этапы рассуждений про арксинус:

- 1) Начали с уравнения  $\sin x = a$ .
- 2) Решили использовать графический метод:  
построили  $y = \sin x$  и  $y = a$ , где  $-1 \leq a \leq 1$ .

3) Выделили промежуток  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ , где уравнение имеет один корень.

4) Дали определение арксинуса.

5) Вывели тождество, которое помогает находить арксинус отрицательного числа.

Вызывается один ученик к доске и вместе с ним 4 первых пункта этого плана реализуется для уравнения  $\cos x = a$ .

Вопрос по ходу ответа.

Почему в данном случае нельзя выбрать промежуток  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ?

**Пример:**

$$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ так как}$$

$$1) \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1, 1]; \quad 2) \frac{\pi}{4} \in [0, \pi]; \quad 3) \frac{\pi}{4} \in \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Далее ученики вычисляют:

$$\arccos 0 =$$

$$\arccos \frac{1}{2} =$$

$$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

Свойства арккосинуса изучаются вместе с учителем.

### Свойства арккосинуса.

1. Из определения:  $0 \leq \arccos a \leq \pi$ .

2.  $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ .

*Доказательство:*

*Из рисунка видно:*

$$OB = OC - BC$$

$$BC = OA \text{ (из симметрии}$$

относительно  $P$ )

$$OB = OC - OA$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

Для того, чтобы не путать арккосинус отрицательного числа с арксинусом отрицательного числа, отмечается, что:

1)  $\arccos a \geq 0$ ,

2) арккосинус отрицательного числа всегда тупой угол.

Арксинус же может быть отрицательным, а угол, ему соответствующий, тупым быть не может.

Решаются примеры:

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = ?; \arccos(-1) = ?; \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = ?$$

Итак, одно решение для уравнения  $\cos x = a$ , как и в случае с  $\sin x = a$ , найдено:  $x = \arccos a$ .

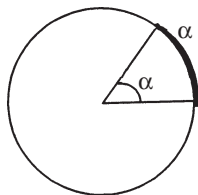
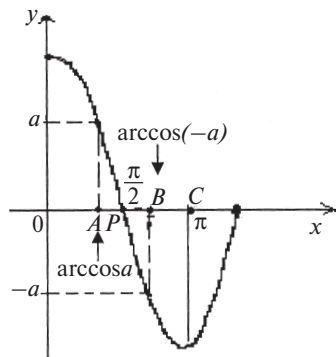
Остальные решения легко выражаются через найденное решение, но это — материал следующих уроков.

### 8. «История» обозначения.

Теперь, когда познакомились с арксинусом и арккосинусом, настало время подумать: почему в этих терминах пишется приставка *арг*.

Дело в том, что значением арксинуса (арккосинуса) является некоторый угол.

Углу (см. рис.) соответствует некоторая дуга, а по-латыни дуга — *арс*. Отсюда и название. (Пример арки из архитектуры.)



**9. Закрепление.**

Два ученика вызываются к доске, один решает № 121, другой — № 122 учебника [7].

Устно выполняется № 124.

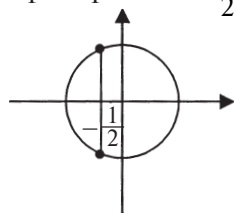
**10. Подведение итогов урока.**

**11. Задание на дом:** п. 8 (1—3) № 116 (а, б), 125, 126, 129 (а, г).

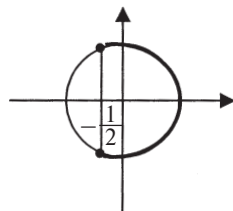
*Приложение 41***Схемы решения простейших тригонометрических неравенств****Схема № 1**

1. Заменить неравенство уравнением (устно), отметить на единичной окружности точки, соответствующие уравнению.

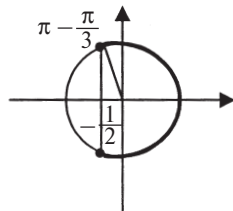
Пример  $\cos x \geq -\frac{1}{2}$



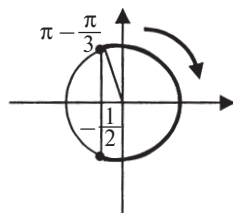
2. Отметить на единичной окружности точки, соответствующие неравенству (выделить соответствующую дугу).



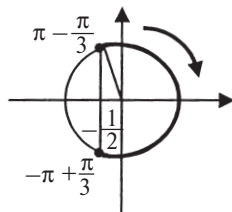
3. Определить, для какой точки соответствующий угол попадает в область значений аркфункции (основную точку), и найти угол, ей соответствующий (этот угол из промежутка  $[0; \pi]$  и равен  $\arccos a$ ).



4. Выбрать направление отсчета (от основной точки по отмеченной дуге). Если направление положительное, то угол, соответствующий второму концу дуги, будет положительным. Если направление отрицательное, то отрицательным.



5. Определить угол, соответствующий второму концу дуги.



6. Записать ответ в виде двойного неравенства с учетом периодичности функции (в двойном неравенстве слева пишется меньший угол).

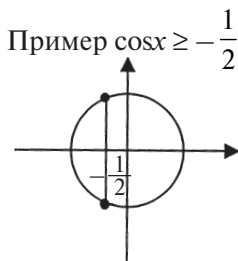
$$2\pi n - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

7. Записать ответ в виде промежутка.

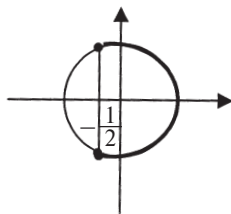
Ответ:  $\left[ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$

### Схема № 2

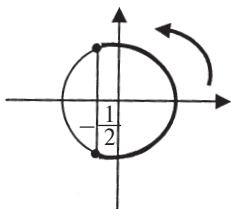
1. Заменить неравенство уравнением (устно) и отметить на единичной окружности точки, соответствующие уравнению.



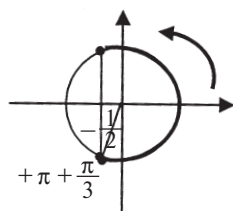
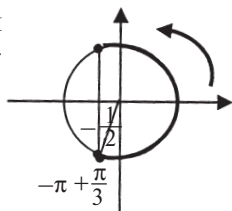
2. Отметить на единичной окружности точки, соответствующие неравенству (выделить соответствующую дугу).



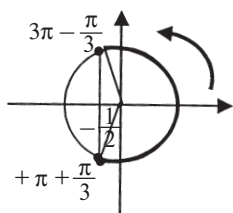
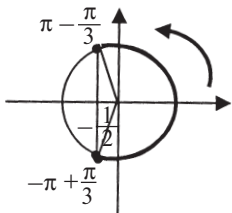
3. Указать направление отсчета (на выделенной дуге отмечается положительное направление, т. е. направление против часовой стрелки).



4. Найти начало дуги и угол, ему соответствующий.



5. Найти угол, соответствующий концу дуги.



6. Записать ответ в виде двойного неравенства с учетом периодичности функции (в двойном неравенстве слева пишется угол, соответствующий началу дуги).

$$2\pi n - \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

или

$$2\pi n + \frac{4\pi}{3} \leq x \leq \frac{8\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

7. Записать ответ в виде промежутка.

$$\text{Ответ: } \left[ -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in Z$$

или

$$\left[ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{8\pi}{3} + 2\pi n \right], n \in Z$$

## Часть VIII. Методика изучения функций в старших классах

В старших классах функциональная линия развивается в следующих направлениях:

- вводится определение функции через соответствие между множествами;
- рассматриваются новые виды функций (тригонометрические, показательная, логарифмическая, обратная функция,

сложная функция; функция как аргумент при нахождении производной и определенного интеграла);

- изучаются новые свойства функции (периодичность, непрерывность, дифференцируемость);
- рассматриваются новые методы исследования свойств функции (с использованием свойств обратной функции, с использованием производной).

## *Приложение 42*

### **Методическая схема изучения функций в старших классах**

1. Определение рассматриваемой функции, ее запись с помощью формулы, исследование параметров, входящих в эту формулу.
2. Примеры из реальной жизни, науки, техники, приводящие к данной функции.
3. Исследование свойств функции.
4. Построение графика функции. Установление влияния параметров на характер графического изображения функции.
5. Применение свойств функций для решения уравнений и неравенств.

### **Исследование свойств функций в старших классах**

В старших классах рассматриваются следующие способы исследования свойств функций:

- свойства могут быть получены из определения конкретной функции (так могут изучаться тригонометрические функции),
- свойства могут быть получены из графика (так может изучаться показательная функция),
- свойства могут быть получены из свойств обратной функции (так может изучаться логарифмическая функция),
- свойства могут быть получены с использованием производной (так могут изучаться степенная функция и произвольная функция).

## Учебный модуль по теме «Производная»

**Задание 1.** Изучите теоретический материал, изложенный ниже.

### Теория

**Определение производной функции.**

**Задача.** Пусть задан закон механического движения, например

$$S = \frac{gt^2}{2}.$$

Требуется найти скорость движения в момент времени  $t_0$

(мгновенную скорость). График движения представлен на рис. 1. «Растянем мгновение» и рассмотрим движение на малом промежутке времени  $[t_0; t]$  (рис. 2).

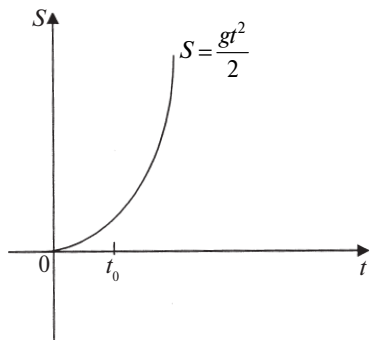


Рис. 1

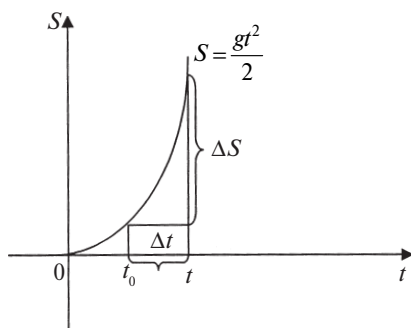


Рис. 2

На этом промежутке график движения «выглядит» почти как отрезок, а это означает, что движение на этом промежутке можно считать равномерным. Тогда скорость движения на этом участке с большой степенью достоверности характеризуется средней скоростью и находится как отношение пройденного пути  $\Delta S$  к затраченному времени  $\Delta t$ :

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Будем уменьшать промежуток времени. Тогда средняя скорость будет стремиться к мгновенной скорости:  $v_{\text{ср.}} \rightarrow v_{\text{мгн.}}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Таким образом:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow v_{\text{мгн.}}$$

Обобщим рассмотренную задачу и ее решение на случай, если задана функция  $f(x)$ , и требуется найти скорость изменения функции в точке  $x_0$  (мгновенную скорость изменения функции).

Рассмотрим изменение функции на промежутке  $[x_0; x]$  (рис. 3). Изменение функции на этом промежутке равно  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ .

Средняя скорость изменения функции на этом промежутке равна отношению приращения функции к приращению аргумента:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Пусть приращение аргумента стремится к нулю ( $\Delta x \rightarrow 0$ ), тогда средняя скорость изменения функции будет стремиться к мгновенной скорости:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow v(x_0) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

В математике часто рассматривается мгновенная скорость изменения функции в точке  $x_0$ , и поэтому этой скорости дали специальное имя — *производная* и обозначение  $f'(x_0)$ .

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется число, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \text{ при } x \rightarrow 0 \text{ или } \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \text{ при } x \rightarrow 0.$$

*Физический смысл производной:* производная — это скорость изменения функции в фиксированной точке.

Посмотрим на полученные результаты с точки зрения геометрии (рис. 4).

Отношение  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  есть тангенс угла  $A$ , а значит, и угла наклона секущей  $AB$ , т. е. это отношение есть угловой коэффициент прямой, проходящей через точку  $A(x_0, f(x_0))$  и точку  $B(x, f(x))$ . При  $\Delta x \rightarrow 0$  секущая стремится к касательной, проведенной к кривой в точке  $A$ . Отсюда угловой коэффициент секущей стремится к угловому коэффициенту касательной. Имеем:

$$\kappa_{\text{сек.}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow \kappa_{\text{кас.}} \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Но  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$  при  $x \rightarrow 0$ , значит,

угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания:

$$k = f'(x_0)$$

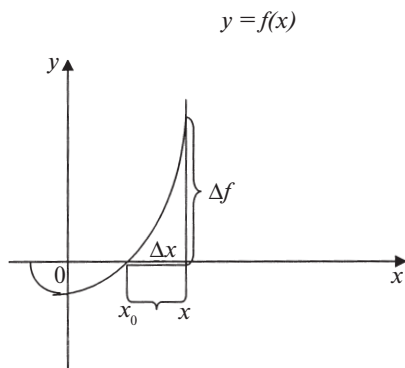


Рис. 3

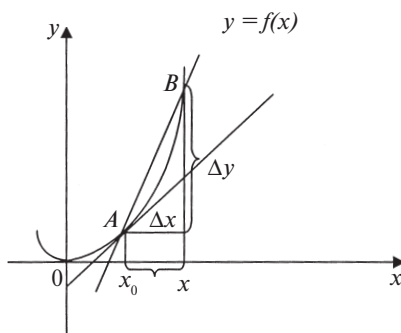


Рис. 4

**Геометрический смысл производной:** производная — это угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в заданной (фиксированной) точке.

**Задание 2.** Составьте конспект по изученной теории.

**Задание 3.** Сравните свой конспект со следующим:

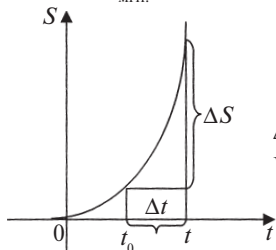
## Опорный конспект

### Производная функции

#### 1. Физическая задача

Дано:  $S = \frac{gt^2}{2}$ .

Найти:  $v_{\text{мгн.}}$ .



$$S = \frac{gt^2}{2}$$

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$\Delta t \rightarrow 0$$

$$v_{\text{ср.}} \rightarrow v_{\text{мгн.}}$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} \rightarrow v(t_0) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0$$

**Физический смысл производной:** производная — это скорость изменения функции в фиксированной точке

#### 2. Обобщение

$$y = f(x)$$

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Delta x \rightarrow 0$$

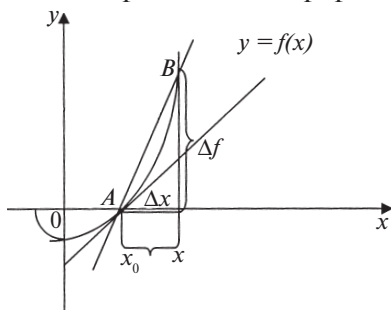
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow v(x_0)$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0)$$

при  $\Delta x \rightarrow 0$

**Определение.** Производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется число, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента стремится к нулю

#### 3. Геометрическая интерпретация.



$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{tg} A;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = k_{\text{сек.}}$$

$$k_{\text{сек.}} \rightarrow k_{\text{кас.}} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) = k_{\text{кас.}}$$

**Геометрический смысл производной:** производная — это угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в заданной (фиксированной) точке

**Задание 4.** Ответьте на вопросы:

- 1) Что называется производной функции в заданной точке?
- 2) Каков геометрический смысл производной? Покажите это на рисунке.

3) Каков физический смысл производной?

**Задание 5.** Ответьте на вопросы задания 4 консультанту.

**Задание 6.** Изучите разобранные ниже упражнения.

**Упражнение 1.** Дана функция  $y = 4 - 5x$ . Найдите  $y'$ .

Решение

1. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = 4 - 5(x + \Delta x) - (4 - 5x) = 4 - 5x - 5\Delta x - 4 + 5x = -5\Delta x.$$

2. Найдем разностное отношение (отношение приращения функции к приращению аргумента):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -5.$$

3. Найдем число, к которому стремится разностное отношение, если приращение аргумента стремится к нулю (найдем производную функции):

$$\text{Если } \Delta x, \text{ то } \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow -5.$$

$$\text{Значит, } y' = (4 - 5x)' = -5.$$

*Ответ:*  $-5$ .

**Упражнение 2.** Дана функция  $y = \sqrt{x}$ . Найдите  $y'$  в точке  $x = 4$ .

Решение

1. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

2. Найдем разностное отношение (отношение приращения функции к приращению аргумента):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - x) \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3. Найдем число, к которому стремится разностное отношение, если приращение аргумента стремится к нулю (найдем производную функции):

$$\text{Если } \Delta x \rightarrow 0, \text{ то } \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{Значит, } y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Найдем значение производной в точке  $x = 4$ .

$$y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4}.$$

**Упражнение 3.** Прямолинейное движение точки задано уравнением

$s = 3t^2 - 2t + 5$ , где  $t$  дано в секундах, а  $s$  — в метрах. Найти скорость движения точки в момент  $t = 5$  с.

### Решение

1. Найдем среднюю скорость:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta s &= s(t + \Delta t) - s(t) = 3(t + \Delta t)^2 - 2(t + \Delta t) + 5 - (3t^2 - 2t + 5) = \\ &= 3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2 - 2t - 2\Delta t + 5 - 3t^2 + 2t - 5 = 6t\Delta t + 3\Delta t^2 - 2\Delta t. \end{aligned}$$

$$\text{б) } v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 6t + 3\Delta t - 2.$$

2. Найдем мгновенную скорость.

$$\text{Если } \Delta x \rightarrow 0, \text{ то } \frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow 6t - 2.$$

$$v_{\text{мгн.}} = 6t - 2.$$

3. Найдем скорость движения точки в момент времени  $t = 5$  с.

$$v(5) = 6 \cdot 5 - 2 = 28 \text{ (м/с)}.$$

$$\text{Ответ: } 28 \text{ (м/с)}.$$

**Упражнение 4.** Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y = x^3$  в точке с абсциссой 1.

Решение

1. Найдем угловой коэффициент секущей:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta y &= (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \\ &= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2.$$

2. Найдем угловой коэффициент касательной.

Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 3x^2$ . Итак,  $k_{\text{кас.}} = 3x^2$ .

3. Найдем угловой коэффициент касательной в точке с абсциссой 1.

$$k_{\text{кас.}} = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

*Ответ:* 3.

**Задание 7.** Сформулируйте основные этапы выполненных выше задач:

- на вычисление производной,
- на нахождение мгновенной скорости,
- на нахождение углового коэффициента касательной.

**Задание 8.** Ответьте на вопросы задания 7 консультанту.

**Задание 9.** Выполните следующие упражнения и сравните свое решение с образцами, указанными в задании 6.

1. Дана функция  $y = 4 - 5x$ . Найдите  $y'$ .

2. Дана функция  $y = \sqrt{x}$ . Найдите  $y'$  в точке  $x = 4$ .

3. Прямолинейное движение точки задано уравнением  $s = 3t^2 - 2t + 5$ , где  $t$  дано в секундах, а  $s$  — в метрах. Найти скорость движения точки в момент  $t = 5$  с.

4. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой  $y = x^3$  в точке с абсциссой 1.

**Тренаж по нахождению производной функции по определению**

1. а) Пользуясь определением производной, найдите производные следующих функций (задание выполните в группах из

четырёх человек, где каждый индивидуально выполняет один из вариантов).

| №  | Вид функции<br>I вариант | Вид функции<br>II вариант | Вид функции<br>III вариант | Вид функции<br>IV вариант |
|----|--------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 1. | $y = \sqrt{5}$           | $y = \sin 2$              | $y = \frac{3}{2}$          | $y = 8$                   |
| 2. | $y = x$                  | $y = x$                   | $y = x$                    | $y = x$                   |
| 3. | $y = \sqrt{5}x$          | $y = \sin 2 \cdot x$      | $y = \frac{2}{3}x$         | $y = 8x$                  |
| 4. | $y = x^2$                | $y = x^3$                 | $y = 5x^2$                 | $y = 4x^3$                |
| 5. | $y = \frac{1}{x}$        | $y = \frac{2}{x}$         | $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$   | $y = \frac{8}{x}$         |
| 6. | $y = x + x^2$            | $y = x + x^3$             | $y = x + 5x^2$             | $y = x + 4x^3$            |

б) сравните производные функций  $x, x^2, x^3, \frac{1}{x}, \sqrt{x}$ . Наблюдаете ли вы какую-либо закономерность? Какую?

в) Сравните производные функций, записанных в первой строчке. Наблюдается ли какая-нибудь закономерность? Какая?

г) Сравните производные функций, записанные в первой, второй и третьей строках. Какую закономерность Вы наблюдаете?

д) Сравните производные функций, записанные во второй, четвертой и шестой строках. Какую закономерность Вы наблюдаете?

е) Заполните следующую таблицу:

| №  | Вид функции        | Вид производной |
|----|--------------------|-----------------|
| 1. | $y = C$            |                 |
| 2. | $y = x$            |                 |
| 3. | $y = C \cdot f(x)$ |                 |
| 4. | $y = x''$          |                 |
| 5. | $y = \frac{1}{x}$  |                 |
| 6. | $y = f(x) + g(x)$  |                 |

2. Найти значение производной в точке  $a$ :

а)  $y = 4x^2 + 3x + 1$ ,  $a = 5$ ;

б)  $y = \frac{x+2}{x+1}$ ,  $a = 2$  (проверить себя, сравнив свои решения

в группе).

3. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = 0,5x^2$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$  (проверить у консультанта).

4. Материальная точка массой 3 кг движется прямолинейно по закону  $x(t) = 3 - 2t + t^2$  (время измеряется в секундах, координаты в метрах). Найти ее кинетическую энергию в момент  $t = 4$  (проверить у консультанта).

5. Найдите производную функции  $y = |x|$  при  $x < 0$  и при  $x > 0$ .

Существует ли у функции  $y = |x|$  производная в точке  $x = 0$ ? (проверить у учителя).

#### Приложение 44

### Введение и усвоение определения криволинейной трапеции

**Цели:** (Фрагмент урока по теме: «Площадь криволинейной трапеции»)

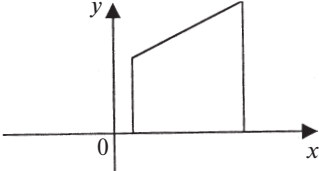
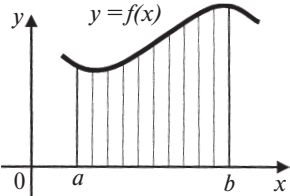
- *ввести определение криволинейной трапеции;*
- *изучить формулу площади криволинейной трапеции;*
- *познакомиться с решением задач на вычисление площади криволинейной трапеции.*

**Тип урока:** урок изучения нового материала.

**План:**

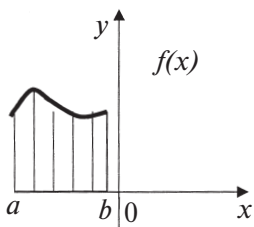
1. Введение и усвоение определения — 10—15 мин.
  2. Доказательство теоремы о площади криволинейной трапеции — 15 мин.
  3. Первичное закрепление изученного материала — 15 мин.
  4. Постановка домашнего задания
  5. Подведение итогов
- } 2—3 мин.

## Ход урока

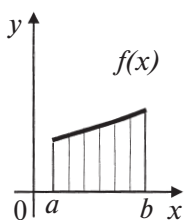
| Деятельность учителя                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Деятельность ученика                                                                                                                                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1. Организационный момент.</b><br/>Объявление темы урока учащимся: «Сегодня мы познакомимся с одним из применений первообразной». После этого объявляется тема, записывается на доске и в тетрадях учеников</p>                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                   |
| <p><b>2. Введение определения.</b><br/>(На доске заранее подготовлены системы координат.)<br/>В названии темы два знакомых термина: площадь и трапеция. Вспомним, какая фигура называется трапечией?</p>                                                                                                                                                                                                 | <p>Трапеция — это четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие нет</p>                                                       |
| <p>В алгебре мы рассматриваем трапеции, расположенные определенным образом относительно системы координат (выполняется рисунок):</p>  <p>Будет ли четырехугольник, у которого одна сторона лежит на оси <math>Ox</math>, две другие — ей перпендикулярны, а четвертая сторона — в верхней полуплоскости, трапечией?</p> | <p>Учащиеся обосновывают свой ответ</p>                                                                                                                           |
| <p>Как вы думаете, какую фигуру можно назвать криволинейной трапечией?</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | <p>Выслушиваются варианты</p>                                                                                                                                     |
| <p>Сначала построим такую фигуру, а потом дадим ей определение.<br/>а) Возьмем на оси <math>Ox</math> отрезок <math>[a, b]</math> (отмечаем на рисунке вместе с учениками).<br/>б) Пусть на этом отрезке задана непрерывная функция <math>f(x)</math>, не меняющая на нем знака.</p>                                                                                                                     |  <p><math>f(x)</math> — непрерывна<br/><math>f(x)</math> — не меняет знака</p> |

Окончание табл.

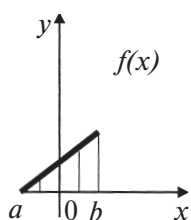
| Деятельность учителя                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Как располагается график функции, если она на заданном отрезке не меняет знака?</p> <p>в) Хорошо. Проведем прямые <math>x = a</math> и <math>x = b</math>.</p> <p>г) Заштрихуем фигуру, ограниченную этими линиями.</p> <p>Эта фигура называется криволинейной трапецией</p>                                                                                                                 | <p>Если функция на заданном отрезке не меняет знака, то она на этом отрезке не пересекает ось <math>Ox</math></p>                                                                                                                                               |
| <p>Перечислите, чем ограничена построенная фигура?</p> <p>1)</p> <p>2)</p> <p>3)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | <p>1) фигура ограничена отрезком <math>[a, b]</math> оси <math>Ox</math>,</p> <p>2) графиком функции <math>y = f(x)</math>,</p> <p>3) прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math>.</p>                                                                      |
| <p>Назовите условия, которым должна удовлетворять функция</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | <p>Функция должна быть:</p> <p>1) непрерывной, 2) не менять знака на отрезке <math>[a, b]</math></p>                                                                                                                                                            |
| <p>Сформулируем определение криволинейной трапеции [ученики помогают, запись делается на доске и в тетради].</p> <p><b>Опр.:</b> Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей знак на отрезке <math>[a, b]</math> функции <math>f</math>, отрезком <math>[a, b]</math> оси <math>Ox</math> и прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math>.</p> |                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <p><b>3. Усвоение определения.</b></p> <p>Наша цель: научиться определять по чертежу криволинейные трапеции.</p> <p>Скажите, по каким признакам будем определять, является ли фигура криволинейной трапецией или нет?</p>                                                                                                                                                                       | <p>1) Функция, ограничивающая фигуру, должна быть непрерывной и не меняющей знак на отрезке <math>[a, b]</math>.</p> <p>2) Фигура должна быть ограничена отрезком <math>[a, b]</math> оси <math>Ox</math> и прямыми <math>x = a</math> и <math>x = b</math></p> |



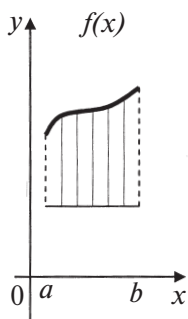
а



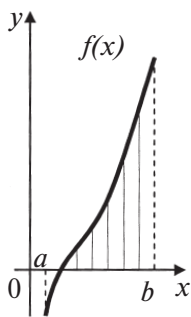
б



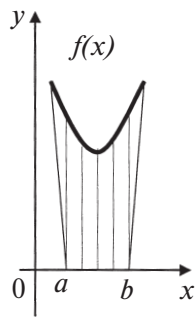
в



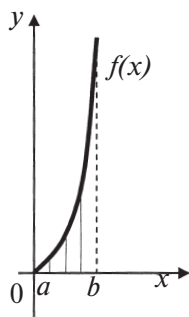
г



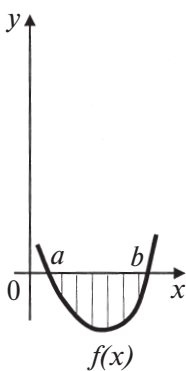
д



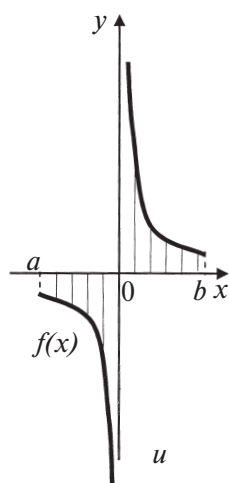
е



ж



з



и

Итак, с определением криволинейной трапеции мы разобрались. Надеюсь, каждый сможет его сформулировать и привести свои примеры и контрпримеры.

## Часть IX. Методика обучения учащихся решению стереометрических задач

Методика обучения учащихся решению стереометрических задач включает следующие вопросы:

- 1) этапы деятельности учителя и учащихся при решении стереометрических задач;
- 2) виды стереометрических задач и методика обучения их решению;
- 3) методы решения стереометрических задач;
- 4) преобразование стереометрических задач в комплексы;
- 5) анализ задачного материала учебной темы;
- 6) организация урока обучения учащихся решению стереометрических задач.

Особое место занимают задачи, решение которых основывается на применении аксиом и следствий из них.

### Приложение 45

#### Методика изучения теоремы существования плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку

Первые теоремы — следствия из аксиом представляют особую значимость для построения курса стереометрии. Дидактическое назначение этих теорем состоит в закреплении аксиом стереометрии на этапе их применения. Математическая роль — в дальнейшем дедуктивном построении учебного курса, выявлении способов задания плоскостей. При изучении доказательств первых теорем стереометрии учащиеся используют два метода (от противного и воображаемого построения) и два приема, помогающих в решении задач (как дополнительное построение используется построение плоскости по заданным данным; в случае построения новой фигуры рассматривается ее взаимное расположение с имеющимися).

Рассмотрим фрагмент конспекта урока, посвященный изучению теоремы *«Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну»*.

#### Подготовительный этап

— В стереометрии, которую мы начали с вами изучать, как и в планиметрии, принято все доказывать, опираясь на ранее

изученное. Мы с вами изучили только аксиомы стереометрии, значит, опираться пока можно только на них. В аксиомах стереометрии речь идет об основных фигурах и их взаимном расположении. Давайте вспомним, какие фигуры в пространстве являются основными?

— Точка, прямая, плоскость.

— Каким может быть взаимное расположение точки и прямой?

— Точка может принадлежать прямой, а также может не принадлежать прямой.

— Какая аксиома определяет это расположение?

— Аксиома  $I_1$ . Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

— Каким может быть взаимное расположение точки и плоскости?

— Точка может принадлежать плоскости, а также может не принадлежать плоскости.

— Сформулируйте аксиому, позволяющую нам говорить о взаимном расположении точки и плоскости.

— Аксиома  $C_1$ . Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.

— О взаимном расположении каких фигур идет речь в аксиоме  $C_2$ ?

— О взаимном расположении двух плоскостей.

— Сформулируйте эту аксиому.

— Аксиома  $C_2$ . Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

— Итак, какой вывод можно сделать о взаимном расположении двух плоскостей, если будет известно, что две различные плоскости имеют общую точку?

— Плоскости пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

— О каких фигурах идет речь в аксиоме  $C_3$ ?

— О двух прямых, имеющих общую точку, и плоскости, проходящей через эти прямые.

— Сформулируйте эту аксиому.

— Аксиома  $C_3$ . Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость и притом только одну.

— Известно, что прямые  $a$  и  $b$  — различные прямые. Можно ли через них провести плоскость?

— Неизвестно, имеют ли эти прямые общую точку.

— Известно, что прямые  $AB$  и  $AC$  различные прямые. Можно ли через них провести плоскость?

- Можно. Прямые  $AB$  и  $AC$  различны и имеют общую точку  $A$ .
- Итак, в аксиоме  $C_3$  есть слова «Через них можно провести плоскость». Каково в этом случае взаимное расположение прямых и плоскости?
- Прямые лежат в плоскости.

### Введение теоремы

— Итак, по аксиоме  $C_3$  плоскость определяется (или задается) двумя пересекающимися прямыми. Можно ли задать (определить) плоскость иначе? Можно ли провести плоскость, зная другие ее элементы?

— Ученики высказывают свое мнение. (*Хорошо, если будут предложены разные варианты, тем самым будет задел на будущее.*)

— Сегодня на уроке мы будем работать с прямой и точкой (демонстрируются модели). Можно ли провести плоскость через прямую и точку, например, не лежащую на этой прямой. (Используя модели, учащиеся находят ответ на этот вопрос.)

— Итак, с помощью моделей вы получили новый факт стереометрии. Но как принято в стереометрии, факты надо обосновывать. Попробуйте обосновать свой ответ.

— (*У учащихся появляются сложности.*)

— Итак, мы хотим обосновать, что через прямую и точку, не лежащую на ней, можно построить плоскость. В стереометрии при доказательстве утверждений или решении задач вида «Можно ли построить (провести) плоскость (прямую)...» поступают следующим образом. Подобные задачи относятся к задачам, решаемым методом «воображаемого» построения (на самом деле мы строить не будем, а будем указывать, что могли построить сначала, потом и т. д.), т. е. выделяется такая *цепочка логических рассуждений*, которые обосновывают возможность каждого шага построения.

— Итак, попробуем обосновать, можно ли через прямую  $a$  и точку  $A$ , не лежащую на ней, провести плоскость.

— Что дано в условии?

— Прямая  $a$  и точка  $A$ , не лежащая на ней.

— Что требуется доказать?

— Можно построить плоскость через прямую  $a$  и точку  $A$ .

— Запишем, что дано, что требуется доказать, сделаем чертеж.

— (*Делаются записи в тетрадях и на доске.*)

| Вид доски № 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>1) Можно ли через прямую <math>a</math> и точку <math>A</math>, не лежащую на ней, построить плоскость?</p>  <p>Дано:<br/> <math>a</math> — прямая,<br/> <math>A \notin a</math>.<br/>         Доказать:<br/>         Можно построить <math>\alpha</math>,<br/> <math>A \in \alpha</math>, <math>A \subset \alpha</math>.</p> <p>Доказательство:</p> |  |  |

— К чему сводится доказательство утверждения «Можно построить плоскость?»

— *Необходимо выделить цепочку шагов и обосновать каждый шаг построения.*

— Начнем рассуждать с последнего шага, где нам надо обосновать построение плоскости. Какие фигуры к этому моменту надо иметь, чтобы можно было построить плоскость согласно аксиомам?

— *Две пересекающиеся прямые.*

— Есть ли прямая, которую можем взять, исходя из условия?

— *Прямая  $a$ .*

— Каким условиям должна удовлетворять вторая прямая?

— *Вторая прямая должна проходить через точку  $A$  и пересекать прямую  $a$ .*

— Итак, нам нужно будет обосновать, что такую прямую можно провести. Какая аксиома говорит о том, что можно провести прямую?

— *Аксиома  $I_2$ .*

— Чего не хватает, чтобы можно было воспользоваться этой аксиомой?

— *Еще одной точки.*

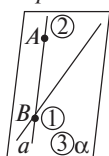
— Где возьмем другую точку?

— *На прямой  $a$ .*

— Почему и какая аксиома говорит о том, что это можно сделать?

— *Аксиома  $I_1$ , точку выбираем на прямой  $a$ , поскольку вторая прямая должна ее пересекать.*

- Можно ли теперь построить другую прямую и почему?
- Да. По аксиоме  $I_2$  через две различные точки можно провести прямую и притом только одну.
- Можно ли теперь построить плоскость и почему?
- Да. По аксиоме  $C_3$ .
- Какова цепочка логических рассуждений, позволяющих нам обосновать построение плоскости  $\alpha$ ?
- Возьмем точку  $B$ , принадлежащую прямой  $a$ . Построим прямую  $AB$ . Построим плоскость  $\alpha$ .

| Вид доски № 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |  |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|--|
| <p>1) Можно ли через прямую <math>a</math> и точку <math>A</math>, не лежащую на ней, построить плоскость?</p>  <p>Дано:<br/> <math>a</math> — прямая,<br/> <math>A \notin a</math>.<br/>         Доказать:<br/>         Можно построить <math>\alpha</math>,<br/> <math>A \in \alpha</math>, <math>A \subset \alpha</math>.</p> <p>Доказательство:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1) <math>B \in a</math> (<math>I_1</math>);</li> <li>2) <math>AB</math> (<math>I_2</math>);</li> <li>3) через <math>AB</math> и <math>a</math> проводим <math>\alpha</math> (<math>C_3</math>)</li> </ol> |  |  |

- Итак, плоскость  $\alpha$  мы построили. Удовлетворяет ли плоскость  $\alpha$  условиям?
- Да.
- Молодцы. Вспомним, каким методом мы проводили доказательство?
- Методом «воображаемого» построения.
- Что надо помнить при доказательстве этим методом?
- Главное — обосновать каждый шаг построения.
- В стереометрии провести (построить) плоскость, провести (построить) прямую означает доказать существование плоскости (прямой). Таким образом, мы с вами доказали существование плоскости  $\alpha$ , проходящей через прямую  $a$  и точку  $A$ , не лежащую на этой прямой (над словами «можно провести» другим цветом делается запись «существование»). Итак, мы показали, что можно построить плоскость по заданной прямой и точке, не лежащей на этой прямой. Но в подобных задачах полезно задавать вопрос:

«Сколько плоскостей можно построить по заданным элементам?» Как вы думаете, сколько плоскостей можно провести через прямую  $a$  и не лежащую на ней точку  $A$ ?

— *Можно провести единственную плоскость.*

— Ответ верен, но опять-таки он требует доказательства. Сначала давайте проанализируем каждый шаг построения и подумаем, единственным ли образом он выполняется, чтобы знать, нужно ли доказывать единственность или она вытекает из построения.

— *На первом шаге мы выбирали точку на прямой, но таких точек — бесчисленное множество.*

— Итак, из построения не следует единственность. Значит, требуется иное доказательство. Начнем разбираться. Что дано в условии?

— *Прямая  $a$ , точка  $A$ , не лежащая на прямой  $a$ , плоскость  $\alpha$ , проходящая через  $a$  и  $A$ .*

— Что надо доказать?

— *Плоскость  $\alpha$  — единственная.*

— Сделаем записи, что дано и что требуется доказать. Единственность в большинстве случаев доказывается методом от противного. Каков первый шаг этого метода?

— *Предполагаем противоположное тому, что требуется доказать.*

— Сформулируйте первый шаг метода от противного для нашего доказательства.

— *Пусть  $\alpha$  — не единственная.*

— Что это значит?

— *Существует еще некоторая плоскость  $\beta$ , которая проходит через прямую  $a$  и точку  $A$ .*

— Итак, у нас появилась новая фигура — плоскость  $\beta$ . Рассмотрим ее взаимное расположение с плоскостью  $\alpha$ . Что известно о плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ ?

— *Они имеют общую прямую  $a$ .*

— Какой вывод можно сделать об их взаимном расположении?

— *Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ .*

— Что еще известно о плоскостях  $\alpha$  и  $\beta$ ?

— *Они имеют общую точку  $A$ .*

— Какой вывод можно из этого сделать о расположении точки  $A$ ?

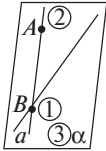
— *Точка  $A$  принадлежит прямой пересечения плоскостей, т. е. прямой  $a$ .*

— Какова цель второго шага доказательства от метода противного?

— *Получить противоречие.*

— Получили ли мы противоречие?

- Да, по условию  $A \notin a$ .
- Какой третий шаг доказательства?
- Сделать выводы.
- Пожалуйста, сделайте.
- Поскольку получили противоречие, значит, наше предположение было неверно, поэтому верно то, что требовалось доказать, т. е. через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость. (Делается запись на доске (см. Вид доски № 3) и в тетрадах.)

| Вид доски № 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Существование                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Единственность                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |  |
| <p>1) Можно ли через прямую <math>a</math> и точку <math>A</math>, не лежащую на ней, построить плоскость?</p>  <p>Дано:<br/> <math>a</math> — прямая,<br/> <math>A \notin a</math>.<br/>         Доказать:<br/>         Можно построить <math>\alpha</math>,<br/> <math>A \in \alpha</math>, <math>A \subset \alpha</math>.</p> <p>Доказательство:<br/>         1) <math>B \in a</math> (<math>I_1</math>);<br/>         2) <math>AB</math> (<math>I_2</math>);<br/>         3) через <math>AB</math> и <math>a</math> проводим <math>\alpha</math> (<math>C_3</math>)</p> | <p>2) Сколько плоскостей можно провести через прямую <math>a</math> и точку <math>A</math>, не лежащую на ней?</p> <p>Дано: <math>a</math> — прямая, <math>A \notin a</math>;<br/> <math>\alpha: A \in \alpha</math>, <math>A \subset \alpha</math>.<br/>         Доказать:<br/> <math>\alpha</math> — единственная.<br/>         Доказательство: (метод от противного)<br/>         1) Пусть <math>\beta \neq \alpha</math>, <math>A \in \beta</math>, <math>a \subset \beta</math>.<br/>         2) а) <math>\beta \neq \alpha</math> } <math>\Rightarrow \beta \cap \alpha = a</math><br/> <math>a</math> — общая<br/>         б) <math>\beta \neq \alpha</math> } <math>\Rightarrow A \in a</math><br/> <math>A</math> — общая<br/>         Получили противоречие с условием, так как <math>A \notin a</math>.<br/>         3) <math>\alpha</math> — единственная</p> |  |

— Итак, мы рассмотрели новый способ задания плоскости. Доказали, что через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и что такая плоскость единственная. В стереометрии эти две части объединены в одну теорему, поскольку имеют общее условие. Попробуйте ее сформулировать.

— Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

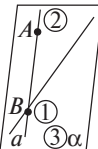
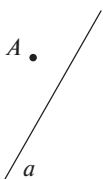
— Переформулируйте теорему на язык «если..., то...».

— Если дана прямая и не лежащая на ней точка, то через них можно провести плоскость и притом только одну.

— Что дано в теореме?

— Прямая и точка, на ней не лежащая.

- Что надо доказать?
- Можно провести плоскость и притом одну.
- Доказали мы существование такой плоскости?
- Да, в начале урока.
- Доказали ли мы единственность такой плоскости?
- Да, только что.
- Поэтому можно перенести все записи в доказательство теоремы (см. Вид доски № 4).

| Вид доски № 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Существование                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Единственность                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Общая теорема                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| <p>1) Можно ли через прямую <math>a</math> и точку <math>A</math>, не лежащую на ней, построить плоскость?</p>  <p>Дано:<br/> <math>a</math> — прямая,<br/> <math>A \notin a</math>.<br/>         Доказать:<br/>         Можно построить <math>\alpha</math>,<br/> <math>A \in \alpha</math>, <math>a \subset \alpha</math>.</p> <p>Доказательство:<br/>         1) <math>B \in a</math> (<math>I_1</math>);<br/>         2) <math>AB</math> (<math>I_2</math>);<br/>         3) через <math>AB</math> и <math>a</math> проводим <math>\alpha</math> (<math>C_3</math>)</p> | <p>2) Сколько плоскостей можно провести через прямую <math>a</math> и точку <math>A</math>, не лежащую на ней?</p> <p>Дано: <math>\alpha</math> — прямая, <math>A \notin \alpha</math>;<br/> <math>\alpha: A \in \alpha</math>, <math>a \subset \alpha</math>.<br/>         Доказать:<br/> <math>\alpha</math> — единственная.<br/>         Доказательство: (метод от противного)<br/>         1) Пусть <math>\beta \neq \alpha</math>, <math>A \in \beta</math>, <math>a \subset \beta</math>.<br/>         2) а) <math>\beta \neq \alpha</math><br/> <math>a</math> — общая <math>\} \Rightarrow \beta \cap \alpha = a</math><br/>         б) <math>\beta \neq \alpha</math><br/> <math>A</math> — общая <math>\} \Rightarrow A \in a</math><br/>         Получили противоречие с условием, так как <math>A \notin a</math>.<br/>         3) <math>\alpha</math> — единственная</p> | <p>Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость и притом только одну.</p>  <p>Дано:<br/> <math>a</math> — прямая, <math>A \notin a</math>.<br/>         Доказать:<br/>         1) существует <math>\alpha</math>, такая что <math>A \in \alpha</math>, <math>a \subset \alpha</math>;<br/>         2) <math>\alpha</math> — единственная</p> |

### Усвоение теоремы

- В стереометрии очень часто бывает полезно строить плоскость. По каким данным мы могли строить плоскость до изучения теоремы?
- По двум пересекающимся прямым.
- Какие данные можно использовать, исходя из доказанной теоремы?
- Можно использовать прямую и не лежащую на ней точку.
- Напомните методы, которые использовали при доказательстве.
- Метод «воображаемого» построения и метод от противного.
- В чем суть метода «воображаемого» построения?

— Необходимо выделить цепочку логических рассуждений, позволяющих обосновать каждый шаг построения.

— При доказательстве единственности мы предположили, что есть еще одна плоскость  $\beta$ . Какой вопрос мы рассматривали в связи с этой плоскостью?

— Каково взаимное расположение этой плоскости с плоскостью  $\alpha$ .

— Постарайтесь на будущее запомнить: как только в стереометрии появляется новая фигура, полезно сразу выяснить ее взаимное расположение с уже заданными фигурами.

— Существенно ли в условии теоремы, что точка не лежит на прямой?

— Да.

— Какое утверждение становится неверным, если точка лежит на прямой?

— Утверждение о единственности плоскости. Утверждение о существовании плоскости остается справедливым.

Для непосредственного усвоения теоремы можно предложить учащимся следующие упражнения:

**Задание 1.** Докажите, что через любую прямую можно провести плоскость.

**Задание 2.** Докажите, что через любую прямую можно провести, по крайней мере, две различные плоскости.

**Задание 3.** Четыре точки не лежат в одной плоскости. Могут ли какие-нибудь три из них лежать на одной прямой? Объясните ответ.

## Приложение 46

### Схемы нанесения на стереометрический чертеж данных об углах и расстояниях

#### Схемы построения линейного угла между плоскостями

|                                                                                                                                                 |                                                                                                                                            |                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Выделить линию пересечения плоскостей и определить, есть ли плоскость ей перпендикулярная.                                                   |                                                                                                                                            |                                                                                                      |
| <div style="text-align: center;"> <span style="margin-right: 100px;">да</span> <span>нет</span> </div> <div style="text-align: center;"> </div> |                                                                                                                                            |                                                                                                      |
| (использовать определение)                                                                                                                      | (использовать теорему о 3-х перпендикулярах)                                                                                               | (использовать определение линейного угла)                                                            |
| 2. Выделить или построить прямые пересечения этой плоскости с данными плоскостями.                                                              | 2. Выделить или построить 1-й (главный) перпендикуляр — перпендикуляр к одной из данных плоскостей, проведенный из точки другой плоскости. | 2. Выделить или построить в одной из данных плоскостей перпендикуляр к линии пересечения плоскостей. |

Окончание табл.

|                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. Сделать вывод, что угол между этими прямыми является линейным углом | 3. Определить 2-й перпендикуляр — перпендикуляр к линии пересечения плоскостей (наклонную или ее проекцию). Для этого проанализировать условие задачи и определить, какие условия позволяют его построить (или выделить).<br>4. Построить 3-й перпендикуляр.<br>5. Сделать вывод, что угол между построенными наклонной и ее проекцией является линейным углом | 3. Выделить или построить перпендикуляр к линии пересечения плоскостей, лежащий в другой плоскости и проходящий через основание перпендикуляра из п. 2.<br><br>4. Сделать вывод, что угол между построенными перпендикулярами является линейным углом между двумя плоскостями |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### **Схема построения угла между прямой и плоскостью**

1. Выделить или построить главный перпендикуляр — перпендикуляр к данной плоскости, проведенный из точки данной прямой.
2. Выделить или построить проекцию данной прямой на данную плоскость.
3. Сделать вывод, что угол между прямой и ее проекцией является углом между прямой и плоскостью.

### **Схема построения угла между скрещивающимися прямыми**

1. Выбрать, для какой из 2-х данных прямых удобнее строить параллельную ей прямую.
2. На другой прямой выбрать удобную точку и через нее построить прямую, параллельную второй прямой.
3. Сделать вывод, что угол между пересекающимися прямыми (построенной и данной) является углом между скрещивающимися прямыми.

### **Схема построения перпендикуляра из точки пространства на прямую для указания расстояния от точки до прямой**

1. Выделить или построить 1-й (главный) перпендикуляр — перпендикуляр из данной точки к плоскости, в которой лежит данная прямая.
2. Построить 2-й перпендикуляр — перпендикуляр к прямой (проекцию некоторой наклонной). Для этого проанализировать

3. Построить 3-й перпендикуляр — наклонную по построенной проекции.

4. Сделать вывод, что длина этой наклонной является расстоянием от данной точки до данной прямой.

**Схемы для указания расстояния  
между двумя скрещивающимися прямыми**

1. Определить, есть ли плоскость, перпендикулярная каждой из данных прямых, перпендикулярно другой.



2. Определить точку пересечения этой плоскости с данной прямой.

3. Из этой точки опустить перпендикуляр на другую данную прямую.

4. Сделать вывод, что длина этого перпендикуляра является расстоянием между скрещивающимися прямыми.

2. Определить, есть ли параллельные плоскости, в которых лежат данные прямые.



5. На одной из этих плоскостей выбрать точку и построить (или выделить) перпендикуляр из этой точки на другую плоскость.

6. Сделать вывод, что длина этого перпендикуляра является расстоянием между скрещивающимися прямыми.

3. Определить, есть ли плоскость, в которой лежит одна из данных прямых и которая параллельна другой данной прямой.



7. Построить (или выделить) перпендикуляр из точки заданной прямой на эту плоскость.

8. Сделать вывод, что длина этого перпендикуляра является расстоянием между скрещивающимися прямыми.

4. Построить такую плоскость. Для этого построить прямую, которая параллельна одной из данных прямых и пересекает другую данную прямую, и через две пересекающиеся прямые провести плоскость.

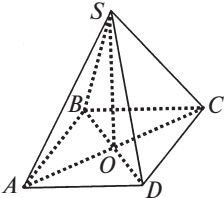
5. Построить (или выделить) перпендикуляр из точки заданной прямой на эту плоскость.

6. Сделать вывод, что длина этого перпендикуляра является расстоянием между скрещивающимися прямыми.

### Методика работы с вычислительной стереометрической задачей

**Задача.** Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна  $a$  и угол наклона боковой грани к плоскости основания равен  $60^\circ$ .

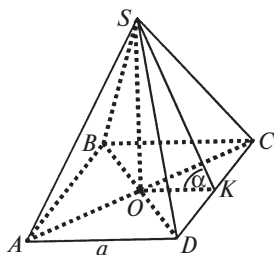
#### I этап. Анализ условия задачи и построение чертежа

| Деятельность учителя                                                                    | Деятельность ученика                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Какая геометрическая фигура рассматривается в задаче?<br>О какой пирамиде идет речь? | 1. Пирамида.<br><br>Пирамида правильная четырехугольная.                                                                                                          |
| 2. Как выполняем построение пирамиды?                                                   | 2. а) Строим основание; б) определяем проекцию вершины пирамиды; в) отмечаем вершину; г) соединяем ее с вершинами основания, т. е. строим боковые ребра пирамиды. |
| 3. Куда проектируется вершина данной пирамиды?                                          | 3. Вершина данной пирамиды проектируется в центр основания, так как пирамида правильная, центром квадрата является точка пересечения его диагоналей.              |
| 4. Выполните построение пирамиды.                                                       | 4.                                                                              |
| 5. Что известно о пирамиде? (Какие данные надо нанести на чертеж?)                      | 5. В основании — квадрат со стороной $a$ , боковая грань наклонена к плоскости основания под углом $60^\circ$ .                                                   |
| 6. Какую боковую грань выбираем?                                                        | 6. Так как пирамида правильная, можно выбрать любую боковую грань. Возьмем грань $SCD$ .                                                                          |
| 7. Как построить угол наклона этой грани к плоскости основания?                         | 7. Надо построить линейный угол, для этого надо выделить <i>линию пересечения</i> этой грани с плоскостью основания (это ребро                                    |

Окончание табл.

| Деятельность учителя                                                                                                                                               | Деятельность ученика                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                    | <p><math>CD</math>), выделить <i>главный перпендикуляр</i> (это <math>SO</math>), затем построить или наклонную, или ее проекцию, перпендикулярную линии пересечения боковой грани с плоскостью основания.</p> <p>В данном случае можно построить наклонную, перпендикулярную <math>CD</math>, так как <math>\triangle SCD</math> — равнобедренный. Пусть <math>K</math> — середина <math>CD</math>. Тогда <math>SK \perp CD</math>. Соединим точку <math>K</math> с центром основания <math>O</math>.</p> <p>Тогда по теореме о трех перпендикулярах можно утверждать, что <math>OK \perp CD</math>, значит, <math>\angle SKO</math> — линейный, по условию <math>\angle SK = 60^\circ</math>.</p> |
| 8. Было предложено построение линейного угла, когда строилась наклонная, перпендикулярная линии пересечения плоскостей. Можно ли было иначе строить линейный угол? | 8. Можно сначала построить проекцию некоторой наклонной, перпендикулярную линии пересечения плоскостей, для чего провести перпендикуляр из основания высоты пирамиды (точки $O$ ) на сторону $CD$ , этот перпендикуляр строится параллельно $AD$ , так как $ABCD$ — квадрат. Затем полученную точку $K$ соединить с вершиной $S$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 9. Что требуется найти?                                                                                                                                            | 9. Объем пирамиды                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |

### Схематическая запись условия задачи



Дано:  $SABCD$  — правильная четырехугольная пирамида.  $AD = a$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .  
Найти:  $V$ .

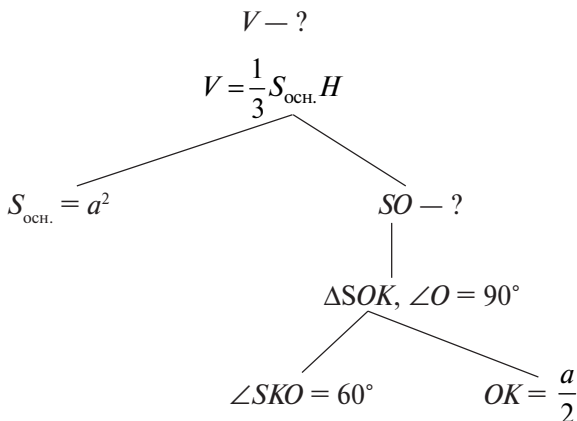
### II этап. Поиск способа решения задачи

| Деятельность учителя                          | Деятельность ученика                     |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. Что нужно найти в задаче?                  | 1. Объем пирамиды.                       |
| 2. По какой формуле находится объем пирамиды? | 2. $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H$ . |

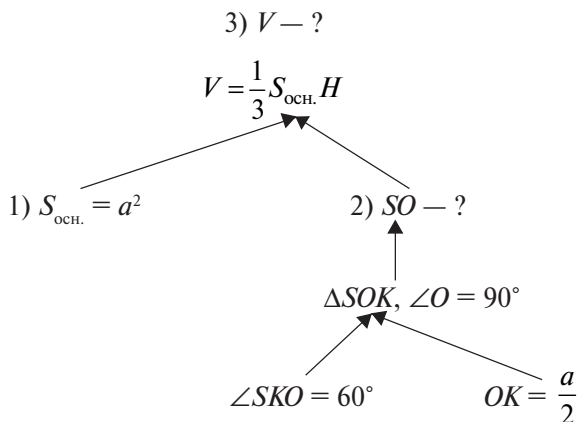
Окончание табл.

| Деятельность учителя                            | Деятельность ученика                                                                                          |
|-------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3. Что нужно знать, чтобы найти $V$ ?           | 3. Площадь основания и высоту. Основание — это квадрат, значит нужно найти площадь квадрата со стороной $a$ . |
| 4. Из какой фигуры можно найти высоту пирамиды? | 4. Высоту можно найти из треугольника $SOK$ .                                                                 |
| 5. Что известно об этом треугольнике?           | 5. Треугольник прямоугольный, $\angle SKO = 60^\circ$ .                                                       |
| 6. Что еще нужно знать, чтобы найти высоту?     | 6. Какой-нибудь линейный элемент треугольника.                                                                |
| 7. Сможем ли найти какой-нибудь элемент?        | 7. Сможем найти катет $OK$ .                                                                                  |
| 8. Чему он равен?                               | 8. Он равен половине стороны квадрата, т. е. $\frac{1}{2}a$ .                                                 |
| 9. Итак, наметим план решения                   | 9. 1) Найдем $S_{\text{осн.}}$ .<br>2) Вычислим высоту пирамиды $SO$ .<br>3) Вычислим объем пирамиды          |

### Оформление поиска способа решения задачи



План решения задачи может быть отражен в схеме поиска ее решения:



### III этап. Оформление решения задачи

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H$$

1.  $S_{\text{осн.}} = a^2$ , так как  $ABCD$  — квадрат со стороной  $a$ .
2. Рассмотрим  $\Delta SOK$ , где  $K$  — середина  $CD$ .  $\angle O = 90^\circ$ , так как  $SO$  — высота пирамиды.

$$AD = a, OK = \frac{1}{2} AD = \frac{a}{2}.$$

$$OS = OK \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

$$3. \text{ Вычислим объем пирамиды: } V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} H, V = \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}.$$

### IV этап. Проверка решения и запись ответа

Осуществим проверку задачи, решив ее другим способом.

Высоту пирамиды можно найти из  $\Delta SOK$  по теореме Пифагора. Если  $\angle SKO = 60^\circ$ , то  $\angle OSK = 30^\circ$ , тогда  $SK = 2 OK = a$ .

$$SO = \sqrt{SK^2 - OK^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Вычисления соответствуют первому способу, значит, задача решена верно.

Ответ:  $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ .

### **V этап. Исследование задачи**

Можно ли задачу решить другим способом?

В проверке был показан иной способ вычисления высоты. Кроме того, высоту пирамиды можно вычислить из  $\triangle SOD$ , предварительно вычислив  $SD$  из  $\triangle SDK$  и  $OD$  из квадрата  $ABCD$ .

**На будущее полезно запомнить:** 1) как отмечается угол наклона боковой грани в правильной четырехугольной пирамиде; 2) что поиску способа решения задачи помогают вопросы: «Что нужно знать, чтобы найти ...?», «По какой формуле вычисляется ...?», «Из какой фигуры можно найти ...?»; 3) что поиск способа решения задачи и план ее решения удобно демонстрировать в граф-схеме.

Приложение 48

### **Опорные задачи стереометрии**

Задача называется опорной, если на теоретический факт, в ней рассматриваемый, опирается решение других задач. В приложении рассмотрены некоторые опорные задачи и приведены примеры их использования. Список применений опорных задач может быть учителем самостоятельно продолжен. Полезно также составлять специальные методические тетради таких подборок задач.

#### **I. Задача о точке пересечения прямой и плоскости.**

**Задача 1.** Если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, пересекает другую плоскость, то она пересекает и их линию пересечения.

Задача доказывается в § 15 [90] и используется при доказательстве параллельности в стереометрии и при построении сечений.

#### **II. Задачи, связанные с параллельным проектированием.**

**Задача 2.** Если через три точки данного отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость, то точки их пересечения лежат на одной прямой.

Задача используется при решении следующих задач: § 16 № 5—7, § 17 № 33—39 [90].

**Задача 3.** *Если параллельные прямые пересекают параллельные плоскости, то точки их пересечения образуют в этих плоскостях равные между собой фигуры.*

Задача используется при решении задач § 16 № 29, 32 [90] и при решении задач, связанных с призмой и цилиндром.

### **III. Задача, связанная с центральным проектированием.**

**Задача 4.** *Если прямые, проходящие через одну точку пространства, пересекают параллельные плоскости, то точки их пересечения образуют в этих плоскостях подобные фигуры.*

Задача используется при решении задач § 16 № 30, 31, 33 [90] и при решении задач, связанных с пирамидой.

### **IV. Задачи, связанные с перпендикулярным проектированием.**

**Задача 5.** *Равные наклонные, проведенные из одной точки к одной и той же плоскости, имеют равные проекции.*

*Замечание.* Верно и обратное утверждение.

Задача используется при решении задач § 17 № 43, 44 [90] и при доказательстве некоторых опорных задач из ниже приведенного списка.

**Задача 6.** *Если точка равноудалена от вершин некоторого многоугольника, то она проектируется в центр описанной около этого многоугольника окружности.*

*Замечание.* Верно и обратное утверждение.

Задача используется при решении задач § 17 № 21, 45—47, 52 [90].

**Задача 7.** *Если точка равноудалена от сторон некоторого многоугольника, то она проектируется в центр вписанной в этот многоугольник окружности.*

*Замечание.* Верно и обратное утверждение.

Задача используется при решении задач § 17 № 17, 19—22 [90].

**Задача 8.** *Если в пирамиде все боковые ребра равны или наклонены к основанию под одним и тем же углом, то вершина пирамиды проектируется в центр описанной около основания окружности.*

*Замечание.* Верно и обратное утверждение.

**Задача 9.** *Если в пирамиде все боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом, или вершина равноудалена от сторон основания, то вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности.*

*Замечание.* Верно и обратное утверждение.

**Задача 10.** *Если в пирамиде одна грань перпендикулярна плоскости основания, то вершина пирамиды проектируется на сторону основания.*

**Задача 11.** Если точка пространства равноудалена от сторон угла, то она проектируется на биссектрису этого угла.

**Задача 12.** Если прямая, проведенная через вершину угла, составляет с его сторонами равные острые углы, то она проектируется на биссектрису этого угла.

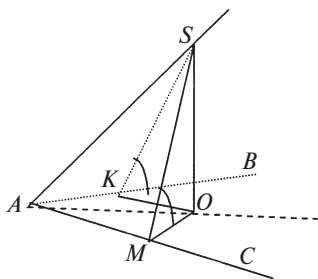
*Замечание.* Верно и обратное утверждение.

Задача используется при решении задач § 21 № 15, 16, 18 [90].

**Задача 13.** Если две пересекающиеся плоскости наклонены к третьей плоскости под одним и тем же углом, то линия их пересечения проектируется на биссектрису угла, образованного линиями пересечения этих плоскостей с третьей плоскостью.

Иная формулировка этой задачи: Если две грани трехгранного угла наклонены к третьей под одним и тем же углом, то линия их пересечения проектируется на биссектрису линейного угла третьей грани.

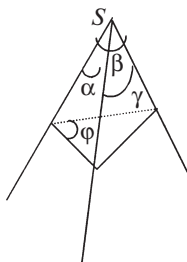
Задача используется при решении задачи § 19 № 43.



$\angle K = \angle M$ ,  $\angle K$  и  $\angle M$  — углы наклона двух граней к третьей.

$SO$  — перпендикуляр к третьей грани. В этом случае  $AO$  — биссектриса угла  $BAC$ .

## V. Задачи, связанные с трехгранным углом.

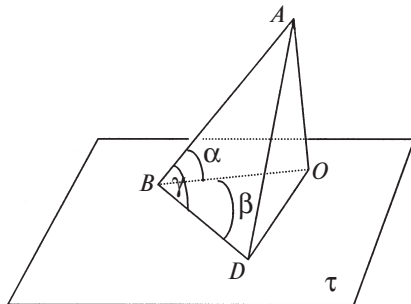


**Задача 14** (теорема косинусов для трехгранного угла). Для трехгранного угла, плоские углы которого равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и двугранный угол при ребре, противолежащем плоскому углу  $\gamma$ , равен  $\phi$ , имеет место следующая

$$\text{зависимость: } \cos \phi = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

**Задача 15.** Для трехгранного угла, плоские углы которого равны  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и двугранный угол при ребре, противолежащем плоскому углу  $\gamma$ , равен  $90^\circ$ , имеет место следующая зависимость:  $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ .

Иная формулировка этой задачи: Пусть  $\alpha$  — величина угла наклона прямой  $AB$  к плоскости  $\tau$ ,  $\beta$  — величина угла между проекцией  $BO$  — наклонной  $AB$  и прямой  $BD$ , проведенной через точку  $B$  — основание наклонной в плоскости проекции и  $\gamma$  — величина угла между наклонной  $AB$  и прямой  $BD$ . Тогда  $\cos \gamma = \cos \alpha \cdot \cos \beta$ .



Приложение 49

### Примерная схема анализа задачного материала по определенной теме

1. Выделить задачи, которые соответствуют обязательным результатам обучения.

2. Выделить задачи, в которых формулируется важное теоретическое утверждение (назовем такие задачи особыми).

3. Выделить задачи повышенной сложности.

4. Выделить группы взаимосвязанных задач. Такое выделение помогает устанавливать связи между задачами, что ведет не только к укреплению знаний, развитию умения решать математические задачи, но и экономии времени на уроке. Основой выделения групп задач может быть:

- единая геометрическая конструкция,
- общее требование задач,
- единая опорная задача,
- общий метод решения и др.

5. На базе выделенных групп задач создать укрупненные дидактические единицы (комплексы), используя различные способы преобразования задач ([ ]).!!!!

6. Подобрать или составить задачи, решаемые несколькими способами, поскольку в математике важна не только взаимосвязь задач, но и взаимосвязь методов их решения.

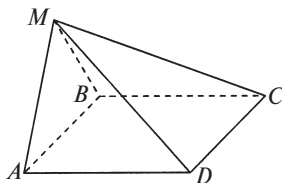
### Урок одной задачи

В практике школы встречается два вида уроков одной задачи. В одном случае на базе некоторой задачи рассматриваются другие задачи, полученные преобразованием первой. Основной целью урока в этом случае является установление связей между построенными задачами, что позволяет лучше освоить сущность математической ситуации, связанной с ними. В другом случае урок одной задачи имеет цель рассмотреть несколько способов ее решения, выделить общие подходы к решению задач, что расширяет математический потенциал школьников.

**Пример 1.** Урок одной задачи на базе геометрической конструкции. (Урок разработан З.В. Евсиковой — учителем г. Брянска.)

Рассматривается следующая геометрическая конструкция:

*Квадрат  $ABCD$  и равносторонний треугольник  $ABM$  имеют общую сторону  $AB$ , а их плоскости перпендикулярны. Сторона квадрата равна  $a$ .*



**Задание 1.** Определить вид  $\triangle ADM$ ,  $\triangle MBC$ ,  $\triangle DMC$ . (Ученики определяют, какие из них являются прямоугольными и почему; какие длины сторон в этих треугольниках и величины углов.)

**Задание 2.** Выяснить расположение прямых  $AM$  и  $BC$  и найти расстояние между ними. Выяснить расположение прямых  $MD$  и  $BC$  и найти расстояние между ними.

**Задание 3.** Найти линейный угол при ребре  $AD$ , при ребре  $BC$ , при ребре  $MD$ .

**Задание 4.** Познакомиться с теоремой косинусов для трехгранного угла и выяснить преимущества ее использования.

**Задание 5.** Применить теорему косинусов для вычисления угла при ребре  $MD$ .

**Задание на дом:** 1) найти двумя способами угол при ребре  $CD$ , 2) найти угол между  $DM$  и плоскостью  $ABCD$ , угол между  $DM$  и плоскостью  $BCM$ , 3) составить свою задачу на основе рассмотренной конструкции.

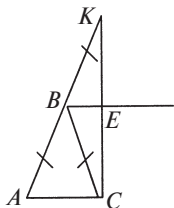
**Пример 2.** Урок одной задачи с использованием различных способов ее решения. (Урок предложен Н.И. Зильбербергом — учителем г. Пскова.)

Задача: Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию (А.В. Погорелов, § 4, № 37).

1-й способ. Применяются признаки параллельности прямых, связанные с пересечением двух прямых секущей.

2-й способ. Высота равнобедренного треугольника является его биссектрисой, угол между биссектрисами двух смежных углов является прямым, значит, биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника перпендикулярна высоте этого треугольника, проведенной к основанию, поэтому параллельна основанию.

3-й способ. На продолжении боковой стороны за вершину равнобедренного треугольника отложить отрезок, равный этой стороне (рис.)



1.  $BE \perp KC$ .
2.  $\angle BKE = \angle BCE$ ;  $\angle BAC = \angle ACB$ ,  
значит,  $\angle ACK = 90^\circ$ .  
Следовательно,  $BE \parallel AC$ .

4-й способ. На продолжении боковой стороны  $AB$  за вершину равнобедренного треугольника  $B$  отложить отрезок  $BK$ , равный этой стороне. Тогда точки  $A$ ,  $C$ ,  $K$  будут равноудалены от точки  $B$ , поэтому лежат на окружности с центром в точке  $B$  и радиусом  $AB$ .  $A$  вписанный угол  $ACK$ , опирающийся на диаметр, является прямым. Следовательно, прямая  $BE$  параллельна  $AC$  как два перпендикуляра к одной прямой  $KC$ .

Приложение 51

### Методика обучения учащихся решению задач на построение сечений

В школьном курсе геометрии выделяют несколько видов задач на построение сечений многогранников плоскостью в зависимости от данных задачи. В одном случае секущая плоскость задается тремя точками (прямой и не лежащей на ней точкой), в другом

известно, что секущая плоскость должна проходить через одну из данных прямых параллельно другой прямой (или плоскости).

Если секущая плоскость задается тремя точками, то возможно два случая:

- среди трех данных точек есть две, лежащие в одном грани многогранника (для этого случая предложена схема 1),
- среди трех данных точек нет двух, лежащих в одном грани многогранника (для этого случая предложена схема 2).

Основными теоретическими положениями при построении сечений являются следующие:

- 1) если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку,
- 2) если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости,
- 3) если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, пересекает другую плоскость, то она пересекает и линию пересечения плоскостей.

Покажем реализацию этих положений на фрагменте задачи на построение секущей плоскости. Пусть плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , в которых лежат грани параллелепипеда, пересекаются по прямой  $a$ . Известно, что секущая плоскость проходит через точки  $A$  и  $B$ , лежащие в плоскости  $\alpha$ , и через точку  $C$ , лежащую в плоскости  $\beta$ . Построить линии пересечения секущей плоскости с плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 1).

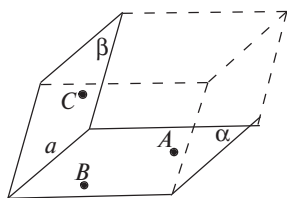


Рис. 1

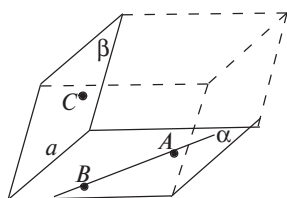


Рис. 1, а

Точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $\alpha$ , значит, прямая  $AB$  лежит в плоскости  $\alpha$  (положение 2), таким образом, секущая плоскость пересекает плоскость  $\alpha$  по прямой  $AB$  (рис. 1, а).

Прямая  $AB$ , лежащая в плоскости  $\alpha$ , пересекает плоскость  $\beta$  в точке, лежащей на линии пересечения плоскостей — прямой  $a$  (положение 3). Построим эту точку — точку  $M$  (рис. 1, б).

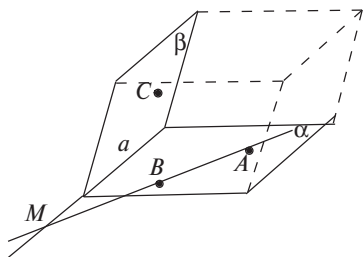


Рис. 1, б

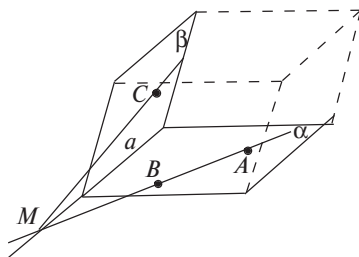


Рис. 1, в

Секущая плоскость и плоскость  $\beta$  имеют общие точки  $C$  и  $M$ , значит, они пересекаются по прямой, проходящей через них (положение 1). Строим прямую  $MC$ , лежащую (положение 2) в плоскости  $\beta$  (рис. 1, в).

**Схема 1. Построение сечений многогранников плоскостью, проходящей через три заданные точки, среди которых есть две, лежащие в одной грани.**

1. Провести прямую через точки секущей плоскости, лежащие в одной грани (плоскости) и выделить точки ее пересечения с ребрами многогранника. Если две данные точки сечения лежат на ребрах многогранника и в одной грани, то их соединяют отрезком.

2. Построить точки пересечения прямой секущей плоскости с плоскостями (с плоскостью) граней многогранника. Для этого:

а) выбрать прямую и точку секущей плоскости, причем выбранные точка и прямая должны лежать в плоскостях разных граней (плоскостях);

б) найти линию пересечения этих граней (плоскостей);

в) построить точку пересечения этой линии с выбранной прямой.

3. Вернуться к первому шагу.

**Схема 2. Построение сечений многогранников плоскостью, проходящей через три заданные точки, среди которых нет двух, лежащих в одной грани.**

1. Через две данные точки провести дополнительную плоскость. (Из трех данных точек оставляют ту, которая лежит на основании. Если задана призма, то дополнительная плоскость строится параллельно боковым ребрам. Если задана пирамида, то дополнительная плоскость строится через ее вершину.)

2. Выполнить схему 1.

**Задача.** Построить сечение пирамиды  $SABCD$  плоскостью, проходящей через точки  $M, P, K$ , где  $M \in SD$ ,  $P \in SC$ ,  $K \in ABCD$  (смотри рис. 2, а).

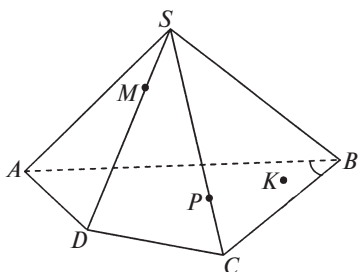


Рис. 2, а

### 1-й этап. Анализ условия и поиск решения.

1. Какого типа эта задача?

— Эта задача на построение сечений многогранника плоскостью, проходящей через три заданные точки.

2. Есть ли среди заданных точек две, лежащие в одной грани?

— Да, точки  $M$  и  $P$  лежат в передней грани.

3. Как поступаем в таком случае?

— Соединяем их и выясняем, будет ли прямая  $MP$  пересекать плоскость основания, в которой расположена точка  $K$ .

4. Каков ответ и что это дает для дальнейшего построения (поможет ли он в построении следа секущей плоскости на плоскость основания)?

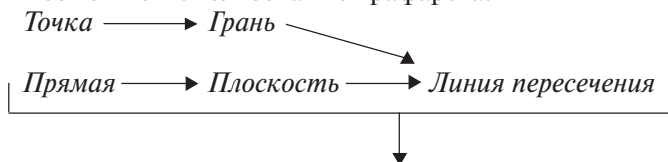
— Мы видим, что прямая  $MP$  пересекает плоскость основания пирамиды, значит, мы сможем найти их точку пересечения, тогда в плоскости основания сможем построить прямую, проходящую через эту точку и данную точку  $K$ .

5. Поможет ли эта прямая (след секущей плоскости на плоскости основания) дальнейшему построению?

— Мы сможем построить пересечение этой прямой с плоскостями других граней, поскольку плоскость основания их пересекает.

### 2-й этап. Осуществление построения с элементами рассуждений.

Возможно использование тафареата:



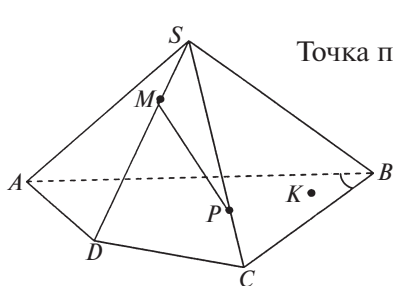


Рис. 2, б

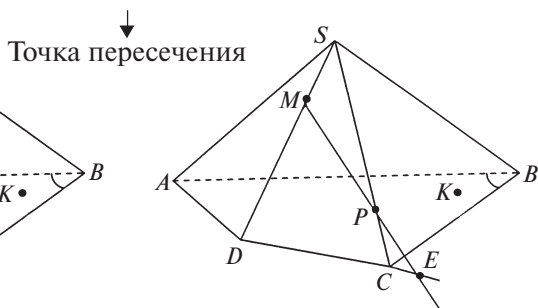


Рис. 2, в

### Построение

1. Строим  $MP$  (рис. 2, б).
2. Построим точку пересечения прямой  $MP$  с плоскостью, в которой лежит точка  $K$ . Рассуждаем:



Итак,  $E = MP \cap DC$  (рис. 2, в).

3. Строим прямую  $EK$  и выделяем точки ее пересечения с ребрами пирамиды:

$$F = EK \cap CB,$$

$$O = EK \cap AB \text{ (рис. 2, г).}$$

4. Строим  $PF$ , точки  $P$  и  $F$  лежат в правой грани (рис. 2, д).

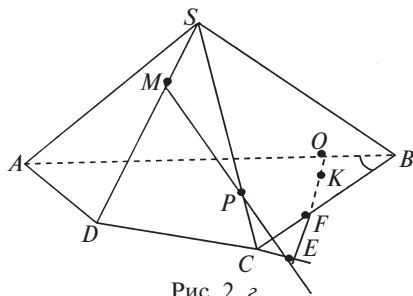


Рис. 2, г

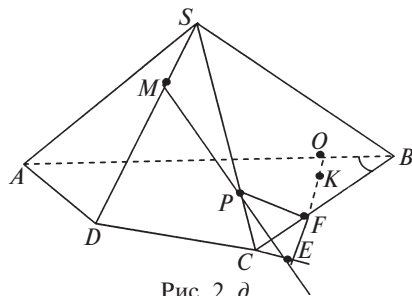


Рис. 2, д

5. Построим точку пересечения прямой  $EK$  с плоскостью левой грани, в которой лежит точка  $M$  сечения. Рассуждаем:



Итак,  $X = EK \cap AD$  (рис. 2, е).

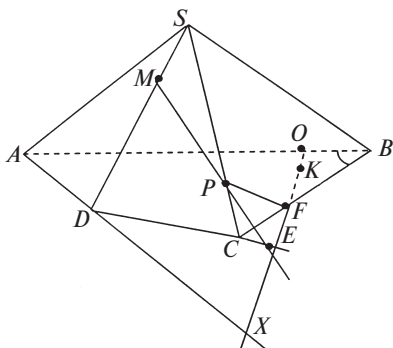


Рис. 2, е

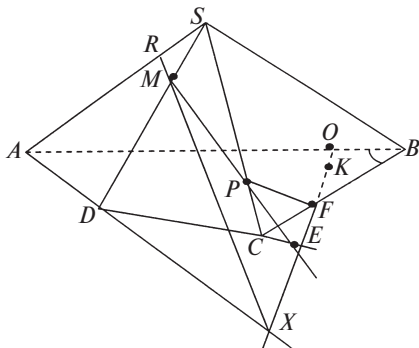


Рис. 2, ж

6. Строим прямую  $XM$ , поскольку эти точки лежат в плоскости левой грани, и выделяем точки ее пересечения с ребрами пирамиды:

$R = XM \cap AS$  (рис. 2, ж).

7. Строим  $RO$ , точки  $R$  и  $O$  лежат в задней грани (рис. 2, з).

8.  $OFPMR$  – искомое сечение (рис. 2, и).

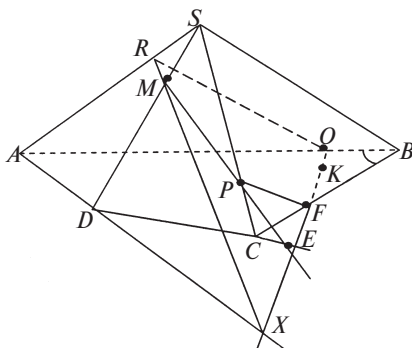


Рис. 2, з

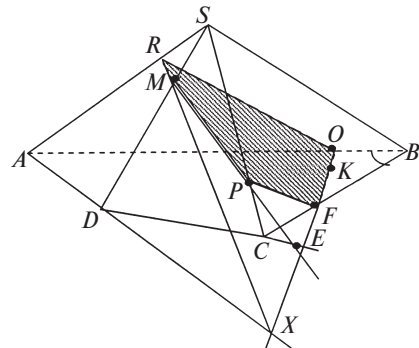


Рис. 2, и

### 3-й этап. Исследование решения.

1. Что полезного из решения задачи можно взять на будущее?

(Выслушиваются все ответы учащихся. Важно выделить, какие затруднения были у учащихся, и что помогло их преодолеть. Возможно, вопросы учителя, возможно, использование трафарета и т. д.)

2. На каком шаге построения можно было предложить иной способ?

— Четыре первых шага мы могли выполнить единственным способом, а вот пятый шаг можно было выполнить иначе.

3. Перечислите возможные варианты и наметьте пути дальнейшего построения.

— Сечение к этому моменту «оборвалось» на точках  $O$  и  $M$ , которые лежат соответственно в задней и левой гранях.

— Чтобы найти еще одну точку в плоскости задней грани, можно использовать либо прямую  $PF$ , либо прямую  $MP$ , принадлежащие секущей плоскости.

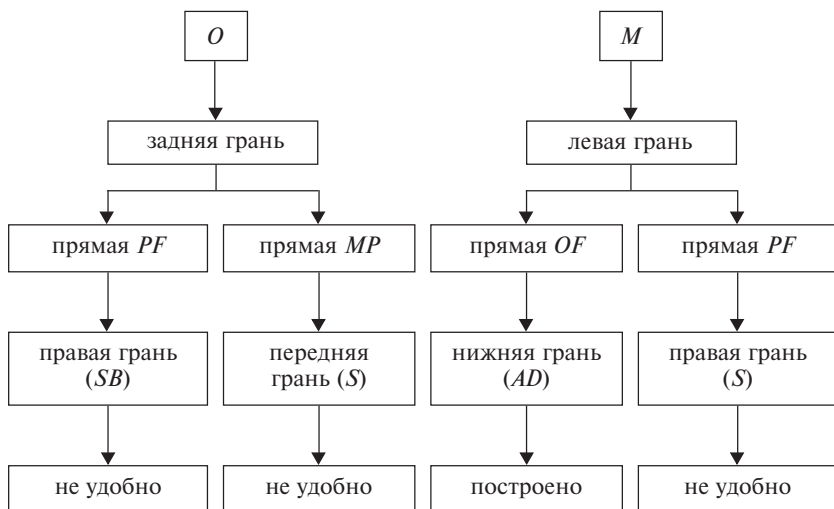
— Возьмем прямую  $PF$ . Она лежит в плоскости правой грани, которая пересекает заднюю по  $SB$ . Мы видим, что прямые  $PF$  и  $SB$  пересекаются далеко за пределами рисунка. Значит, этот способ построения не очень удобный.

— Возьмем прямую  $MP$ . Она лежит в плоскости передней грани, которая пересекает плоскость задней грани пока только в одной точке  $S$ . Значит, для дальнейшего построения еще необходимо построить линию пересечения плоскостей передней и задней граней, значит, этот путь построения не очень удобен.

— Чтобы найти еще одну точку в левой грани, можно использовать либо прямую  $OF$ , либо прямую  $PF$ . Прямая  $OF$  использовалась в выполненном уже построении.

— Возьмем прямую  $PF$ . Она лежит в плоскости правой грани, которая пересекает плоскость задней грани пока только в одной точке  $S$ . Значит, для дальнейшего построения еще необходимо построить линию пересечения плоскостей правой и левой граней, значит, этот путь построения не очень удобен.

Все представленные рассуждения учащихся можно сопровождать схемой:



4. Давайте последний случай попробуем выполнить, поскольку есть задачи, когда необходимо уметь строить линию пересечения двух плоскостей.

Ученики, имея построение, изображенное на рисунке 2,  $г$ , выполняют построение линии пересечения плоскостей правой и левой граней —  $SU$  (рис. 2,  $к$ ), затем находят точку пересечения прямой  $PF$  с плоскостью левой грани — точку  $Z$  (рис. 2,  $л$ ) и завершают построение (рис. 2,  $м$ ).

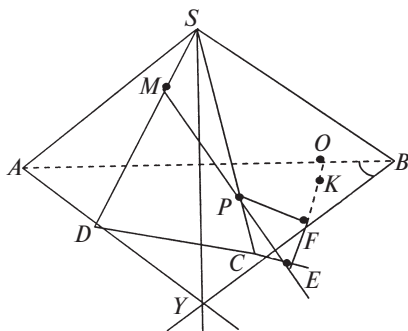


Рис. 2,  $к$

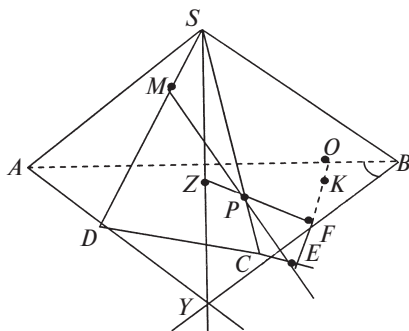


Рис. 2,  $л$

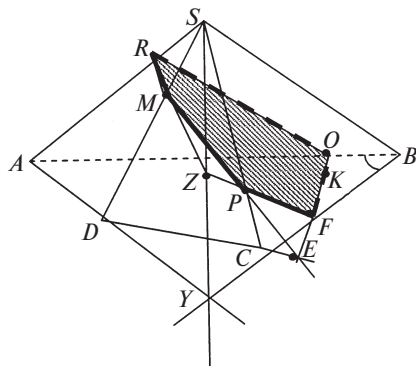


Рис. 2, м

## Приложение 52

### Урок коррекции по теме «Построение сечений многогранника плоскостью, параллельной заданной прямой»

#### Цели:

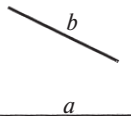
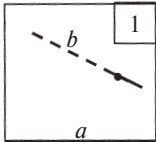
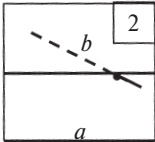
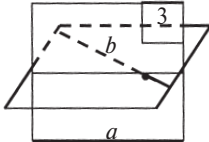
1. Выяснить, ясны ли учащимся *основные идеи* построения плоскости, параллельной данной прямой, и правило: *параллельные прямые в пространстве можно проводить либо в одной плоскости, либо в двух параллельных.*
2. Скорректировать умения построения сечений, проходящих через заданную прямую (точку) параллельно данной прямой.

#### Ход урока

##### 1. Разбор основных идей.

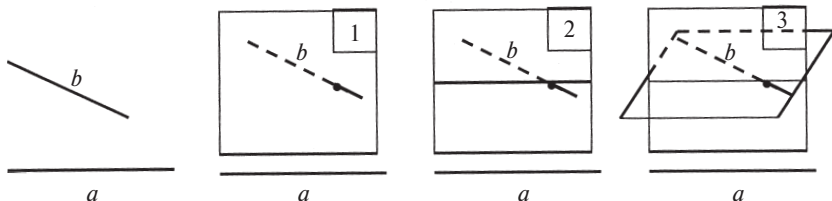
Напоминаются правило (параллельные прямые в пространстве можно проводить либо в одной плоскости, либо в двух параллельных) и основные идеи построения плоскости, проходящей через одну заданную прямую параллельно другой.

**Идея 1** (вспомогательная плоскость содержит одну из заданных прямых).

|                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                          |                                                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  <p>Даны две прямые.</p> |  <p>Через одну из них строится плоскость, пересекающая другую прямую (вспомогательная плоскость), и выделяется точка пересечения.</p> |  <p>Через точку пересечения строится прямая, параллельная данной.</p> |  <p>Через две пересекающиеся прямые строится плоскость.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Обоснованием правильности построения является признак параллельности прямой и плоскости.

**Идея 2** (вспомогательная плоскость параллельна одной из данных прямых).



Даны две прямые.

Выбирается плоскость, параллельная одной из них и пересекающая другую прямую (вспомогательная плоскость), и выделяется точка пересечения.

Через точку пересечения строится прямая, параллельная данной.

Через две пересекающиеся прямые строится плоскость.

## 2. Диагностика умения использовать основные идеи построения сечений, параллельных данной прямой, и коррекция знаний по построению сечений с использованием теорем о параллельности.

Предлагается задача № 1. Учащиеся диагностируют умение использовать основные идеи построения плоскости, параллельной данной прямой, следующим образом. Им предлагается начать с выбора вспомогательной плоскости и построения в ней прямой, параллельной заданной. Сравнивая свое построение с каждым шагом, выделенном на первом этапе урока, ученики отмечают, смогли ли они их выполнить. Затем они сверяют себя с готовыми рисунками (рис. 3, б или 4, б). Дальнейшее построение ученики пробуют выполнить самостоятельно.

### Задача № 1.

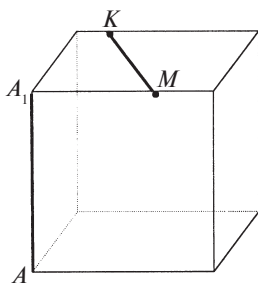


Рис. 3, а

Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через данную прямую  $KM$  параллельно прямой  $AA_1$ . (Здесь и в дальнейшем нижняя грань параллелепипеда —  $ABCD$ , верхняя —  $A_1 B_1 C_1 D_1$ , передняя —  $AA_1 B_1 B$ .)

### Способ 1

1. Выбирается вспомогательная плоскость. За вспомогательную плоскость, в которой лежит прямая  $AA_1$  и которая пересекает прямую  $KM$  можно взять плоскость передней грани, плоскость диагонального сечения и др.

Выбирается плоскость передней грани.

2. Во вспомогательной плоскости строится прямая, параллельная данной и принадлежащая секущей плоскости: прямая  $ME$  (рис. 3, б).

4. Через две пересекающиеся прямые  $KM$  и  $ME$  строится плоскость сечения.

Для этого используется свойство параллельных плоскостей: *если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны* (рис. 3, в).

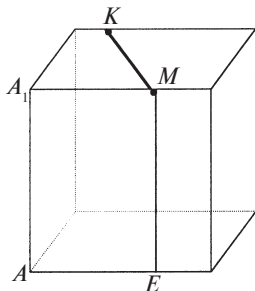


Рис. 3, б

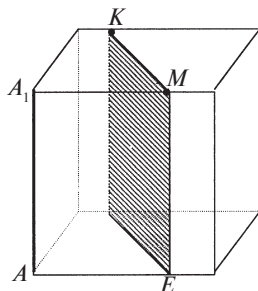


Рис. 3, в

### Способ 2

1. Выбирается вспомогательная плоскость, параллельная одной из данных прямых и пересекающая другую. За вспомогательную плоскость, параллельную прямой  $AA_1$  и которая пересекает прямую  $KM$ , можно взять плоскость задней грани, плоскость сечения параллельного ей.

Выбирается плоскость задней грани.

2. Во вспомогательной плоскости строится прямая, параллельная данной и принадлежащая секущей плоскости: прямая  $KP$  (рис. 4, а).

3. Через две пересекающиеся прямые  $KM$  и  $KP$  строится плоскость сечения.

Для этого используется свойство параллельных плоскостей: *если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения параллельны* (рис. 4, б).

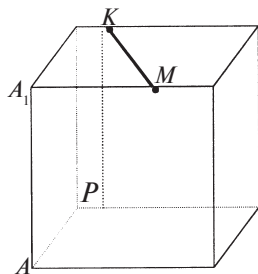


Рис. 4, а

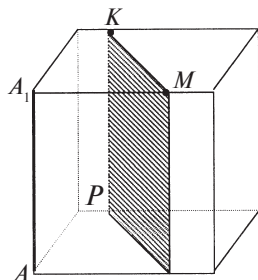
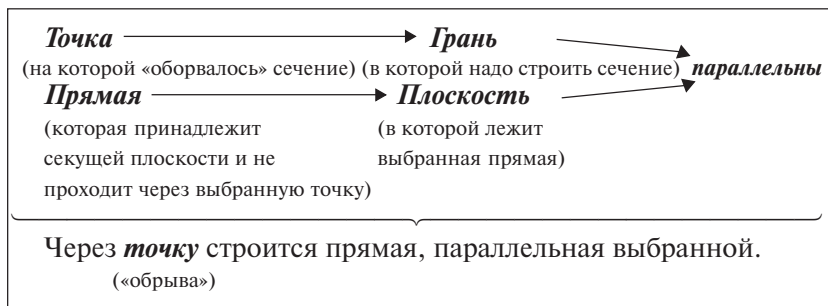


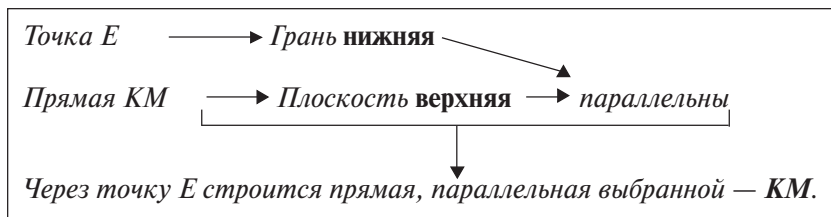
Рис. 4, б

*Замечание.* Если ученики успешно прошли диагностику, а дальнейшее построение вызвало проблемы, то им могут помочь вопросы: «В каких гранях уже построено сечение? В каких гранях нет? Как эти грани связаны?». Поскольку речь будет идти о параллельных гранях, вспоминается свойство параллельных плоскостей.

Возможно и использование трафарета:



Например, для построения рисунка 3, в трафарет может быть заполнен следующим образом:



При обсуждении вопроса «Что полезного возьмем на будущее из решения этой задачи?» хорошо бы отметить, что одновременное

использование двух вспомогательных плоскостей позволило бы сразу иметь сечение в двух гранях (передней и задней).

**3. Самопроверка решения задачи № 2 и обогащение собственного опыта за счет обсуждения различных вариантов решения.**

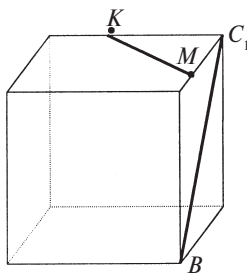


Рис. 5, а

### Задача № 2.

Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через прямую  $KM$  параллельно прямой  $C_1 B$ .

В решении этой задачи удобно использовать две вспомогательные плоскости. Первая плоскость — плоскость правой грани, содержащая прямую  $C_1 B$  и пересекающая прямую  $KM$ . Вторая плоскость — плоскость сечения, параллельная этой грани и пересекающая прямую  $KM$ . Первая вспомогательная плоскость позволяет построить прямую  $ME$  (рис. 5, б), вторая — прямую  $KP$  (рис. 5, в).  $KMEPXY$  — искомое сечение (рис. 5, г).

Задачу самостоятельно решает на доске один из учеников (желательно, не самый сильный в классе), предварительно рассказавший ход построения.

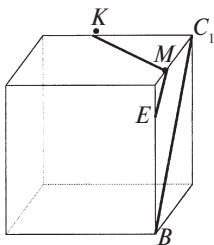


Рис. 5, б

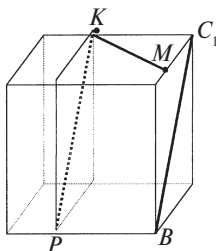


Рис. 5, в

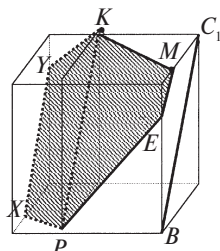
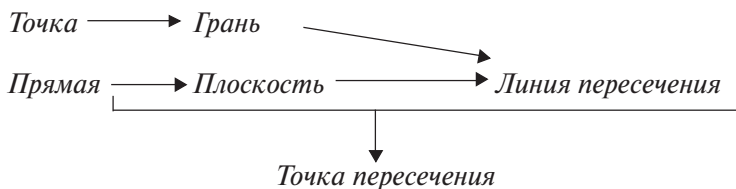


Рис. 5, г

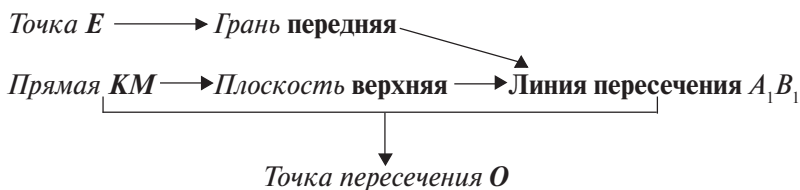
На этой задаче можно повторить и основной способ построения сечений, когда рассуждения ведутся по схеме:

- выбираются прямая и точка, принадлежащие секущей плоскости,
- выясняется, в каких гранях (плоскостях) они лежат,
- находится их линия пересечения,
- строится точка пересечения этой линии с выбранной прямой.

Возможно использование трафарета:



Так, построение, выполненное на рисунке 5, б, может быть продолжено следующими рассуждениями:



Дальнейшее построение показано на рисунках 5, д и 5, е.

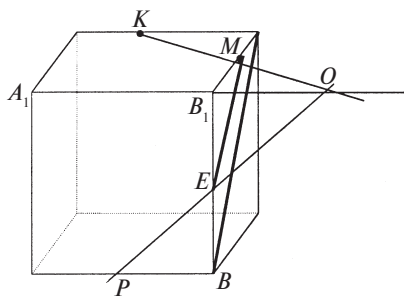


Рис. 5, д

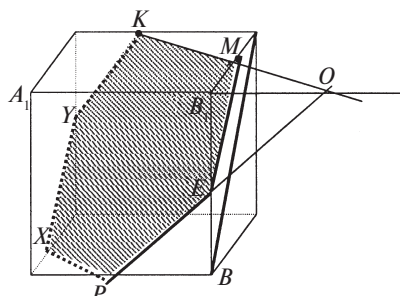
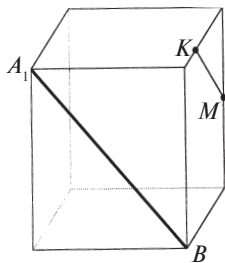


Рис. 5, е

Аналогично может быть продолжено построение, показанное на рисунке 5, в.

#### 4. Совершенствование умения выбора вспомогательной плоскости.

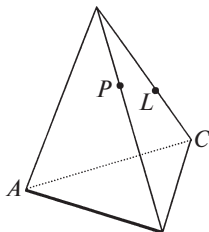
На следующих задачах выясняется только расположение вспомогательной плоскости. Рисунки удобно проецировать через кодоскоп (проектор) на доску, тогда удобно делать эскизы построений. Ученики могут использовать прозрачные папки-планшеты.



### Задача № 3.

Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через прямую  $KM$  параллельно прямой  $A_1 B$ .

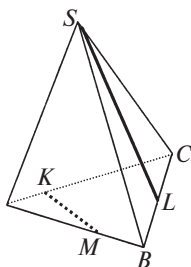
(Вспомогательная плоскость — плоскость задней грани, поскольку она параллельна прямой  $A_1 B$  и пересекает прямую  $KM$ . Можно взять любую плоскость, параллельную передней грани и пересекающую прямую  $KM$ .)



### Задача № 4.

Построить сечение тетраэдра  $SABC$  плоскостью, проходящей через точку  $P$  и  $L$  параллельно прямой  $AB$ .

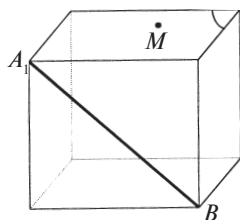
(Вспомогательная плоскость — плоскость левой грани, поскольку она содержит прямую  $AB$  и пересекает  $PL$ . Можно взять любую плоскость, проходящую через прямую  $AB$  и пересекающую прямую  $PL$ .)



### Задача № 5.

Построить сечение тетраэдра  $SABC$  плоскостью, проходящей через прямую  $KM$  параллельно прямой  $SL$ .

(Вспомогательная плоскость — плоскость  $ASL$ , поскольку она содержит прямую  $SL$  и пересекает  $KM$ . Можно взять любую плоскость, проходящую через прямую  $SL$  и пересекающую прямую  $KM$ .)

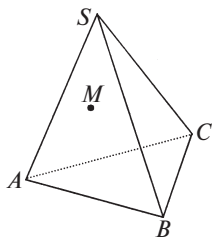


### Задача № 6.

Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через данную точку  $M$  в верхнем основании параллельно прямой  $A_1 B$ .

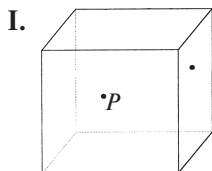
(Вспомогательная плоскость — плоскость передней грани или любая, ей параллельная.)

В отличие от предыдущих задач здесь не задана прямая, через которую должна проходить секущая плоскость. (Эта прямая строится произвольно во вспомогательной плоскости, поэтому задача имеет бесконечное множество решений.)

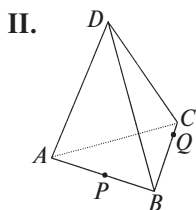
**Задача № 7.**

Построить сечение тетраэдра  $SABC$  плоскостью, проходящей через точку  $M$ , принадлежащую плоскости  $SAB$ , параллельно плоскости основания  $ABC$ .

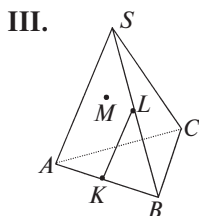
(Задача сводится к построению плоскости, параллельной двум пересекающимся прямым, например,  $AB$  и  $AC$ .)

**Задание на дом.**

Построить сечение параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $D_1$ ,  $P \in ABB_1 A_1$ ,  $Q \in BCC_1 B_1$ .



Построить сечение тетраэдра  $DABC$  плоскостью, проходящей через точки  $P$  и  $Q$  параллельно прямой  $BD$ .



Построить сечение тетраэдра  $SABC$  плоскостью, проходящей через прямую  $KL$  и точку  $M \in SAC$ , зная, что  $KL$  параллельно прямой  $AS$ .

*Приложение 53***Комбинации разных тел**

При решении задач на комбинации шара с другими телами рекомендуется строить только сечение шара, так как строгое выполнение чертежа занимает, как правило, много времени. Иногда достаточно указать только положение центра шара. Для этого приведем некоторые сведения.

## **I. Геометрические места точек в пространстве:**

1. Г.М.Т., равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпендикулярная к отрезку с концами в данных точках и проходящая через его середину.

2. Г.М.Т., равноудаленных от двух параллельных между собой плоскостей, есть плоскость, параллельная данным и проходящая через середину расстояния между ними.

3. Г.М.Т., равноудаленных от граней двугранного угла, есть плоскость, делящая этот двугранный угол пополам и называемая биссекторной.

4. Г.М.Т., равноудаленных от всех точек окружности, есть прямая, перпендикулярная плоскости этой окружности и проходящая через ее центр.

5. Г.М.Т., равноудаленных от вершин многоугольника, вписанного в окружность, есть прямая, перпендикулярная плоскости многоугольника и проходящая через центр окружности.

## **II. Положение центра шара, вписанного в многогранник и описанного около многогранника:**

1. Центр шара, вписанного в многогранник, лежит в точке пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника.

2. Центр шара, описанного около многогранника, лежит в точке пересечения плоскостей, перпендикулярных ко всем ребрам многогранника и проходящих через их середины. Он может быть расположен внутри, на поверхности и вне многогранника.

## **III. Положение центра шара, вписанного в пирамиду и описанного около пирамиды:**

1. Если боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, то в такую пирамиду можно вписать шар (условие достаточно, но не является необходимым).

Центр шара лежит в точке пересечения высоты с биссектрисой линейного угла любого двугранного угла при основании пирамиды, одной из сторон которого служит высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды.

В правильную пирамиду всегда можно вписать шар.

2. Около пирамиды можно описать шар тогда и только тогда, когда около ее основания можно описать окружность. В частности,

шар можно описать около четырехугольной пирамиды, у которой сумма противоположных углов основания  $180^\circ$ .

3. Центр шара, описанного около пирамиды, лежит в точке пересечения прямой, перпендикулярной основанию пирамиды и проходящей через центр окружности, описанной около этого основания, и плоскости, перпендикулярной любому боковому ребру и проведенной через середину этого ребра.

4. Если боковые ребра пирамиды равны между собой (или равнонаклонены к плоскости основания), то около такой пирамиды можно описать шар.

Центр шара в этом случае лежит в точке пересечения высоты (или ее продолжения) с осью симметрии бокового ребра, лежащей в плоскости бокового ребра и высоты.

*Замечание.* Шар, вписанный в призму, должен касаться всех ее граней. В призму можно вписать шар тогда и только тогда, когда в перпендикулярное сечение этой призмы можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в это перпендикулярное сечение. Если при этом призма прямая, то ортогональная проекция шара на плоскость основания призмы является кругом, вписанным в многоугольник основания. Для наклонной призмы проекция шара на плоскость основания является кругом, выходящим за пределы основания.

## Приложение 54

### Схема решения задач координатным и координатно-векторным методами

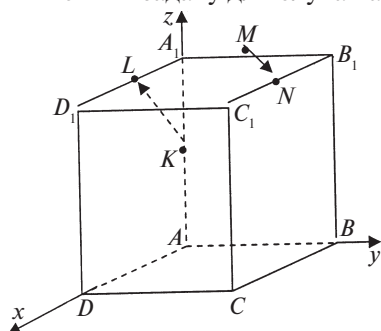
| Координатный метод                                                                                  | Координатно-векторный метод                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1. Выбрать систему координат                                                                        |                                             |
| 2. Найти координаты нужных точек и (или) составить уравнения нужных фигур                           | 2. Найти координаты нужных точек и векторов |
| 3. Сформулировать задачу с помощью координат, решить ее и сделать вывод без использования координат |                                             |

### Пример решения задачи координатно-векторным методом.

**Задача.** Пусть  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — куб. Точка  $K$  — середина ребра  $AA_1$ , точка  $L$  — середина ребра  $A_1 D_1$ , точка  $M$  — середина ребра  $A_1 B_1$ , точка  $N$  — середина ребра  $B_1 C_1$ , точка  $P$  — середина ребра  $BB_1$ ,

точка  $Q$  — середина ребра  $BC$ , точка  $R$  — середина ребра  $C_1D_1$ , точка  $S$  — середина ребра  $DD_1$ . Вычислите углы между прямыми: а)  $KL$  и  $MN$ , б)  $KL$  и  $PQ$ , в)  $MP$  и  $NQ$ , г)  $KL$  и  $RS$ , д)  $RS$  и  $PQ$ . Возьмите сами любую пару прямых, определенную этими точками, и попытайтесь вычислить угол между ними. (А.Д. Александров и др. § 34, № 28.)

Решим задачу для случая а).



Решение:

1. Введем систему координат.

Поскольку дан куб, то систему координат удобно выбрать, взяв за начало одну из вершин куба, а оси направив по ребрам, выходящим из этой вершины. Изобразим на рисунке выбранную систему координат. За единичный отрезок возьмем половину ребра куба.

2. Найдем координаты нужных точек и векторов.

$K(0, 0, 1)$ ;  $L(1, 0, 2)$ ;  $M(0, 1, 2)$ ;  $N(1, 2, 2)$ ;

$\vec{KL}(1, 0, 1)$ ;  $\vec{MN}(1, 1, 0)$ .

3. Найдем угол между векторами  $\vec{KL}$  и  $\vec{MN}$ .

Пусть угол между векторами  $\vec{KL}$  и  $\vec{MN}$  равен  $\alpha$ .

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{KL} \cdot \vec{MN})}{\left( \left| \vec{KL} \right| \left| \vec{MN} \right| \right)}.$$

$$\vec{KL} \cdot \vec{MN} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

$$\left| \vec{KL} \right|^2 = 2, \text{ значит, } \left| \vec{KL} \right| = \sqrt{2},$$

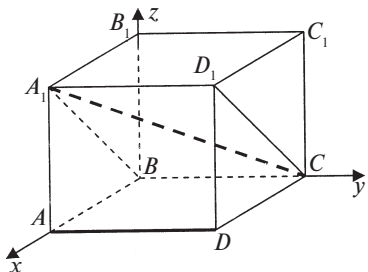
$$\left| \vec{MN} \right|^2 = 2, \text{ значит, } \left| \vec{MN} \right| = \sqrt{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} > 0, \text{ значит, } \alpha = 60^\circ.$$

**Замечание.** Если косинус угла между векторами оказывается отрицательным числом, т. е. угол между векторами является тупым, то следует рассматривать модуль косинуса, поскольку угол между прямыми не может быть тупым по определению.

**Пример решения задачи координатным методом.**

**Задача.** Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до не пересекающей ее диагонали призмы. (А.В. Погорелов. § 19, № 19.)



Решение:

1. Выбираем систему координат. За единичный отрезок возьмем единицу измерения ребер призмы.

2. Расстоянием между скрещивающимися прямыми является расстояние между одной из них и параллельной ей плоскостью, в которой лежит вторая прямая. Значит, нужны координаты любой точки, лежащей на прямой  $AD$ , и уравнение плоскости, проходящей через точки  $B, C, A_1$ :  $A(15, 0, 0)$ ;  $B(0, 0, 0)$ ,  $C(0, 15, 0)$ ,  $A_1(15, 0, 20)$ .

Составим уравнение плоскости проходящей через точки  $B, C, A_1$ :

а) запишем общий вид уравнения плоскости:  $Ax + By + Cz + D = 0$ ,

б) точки  $B, C, A_1$  лежат на этой плоскости, значит, их координаты удовлетворяют уравнению плоскости. Составляем и решаем систему:

$$\begin{cases} D = 0, \\ 15B + D = 0, \\ 15A + 20C + D = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} D = 0, \\ B = 0, \\ A = -\frac{4}{3}C, \end{cases}$$

в) найденные коэффициенты подставляем в уравнение плоскости и упрощаем его:

$$-\frac{4}{3}Cx + Cz = 0; \quad -4x + 3z = 0; \quad 4x - 3z = 0.$$

3. Найдём расстояние от точки  $A(15, 0, 0)$  до плоскости  $4x - 3z = 0$  по формуле:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$$\rho = \frac{|4 \cdot 15 + 0 + 0 + 0|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{60}{5} = 12.$$

## Схема решения задач векторным методом

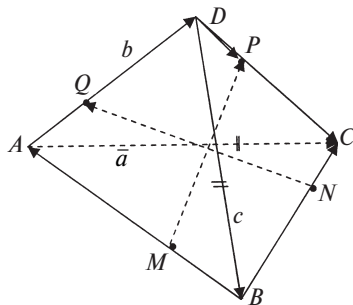
1. *Ввести основные векторы.* Если задача планиметрическая, то выбирают два неколлинеарных вектора, а если задача стереометрическая, то — три некомпланарных вектора, поскольку в этом случае любой вектор можно будет выразить через них, кроме этого стараются так выбрать основные векторы, чтобы о них по условию задачи было что-то известно. Иногда берут один дополнительный вектор.

2. *Нужные векторы выразить через основные.* Для этого выбирают «обходной путь» из начала вектора в его конец, а затем каждый участок пути стараются выразить через основные, пользуясь следующими правилами:

- вектор, противоположный вектору  $\vec{a}$  — это вектор  $-\vec{a}$ ,
- вектор, коллинеарный вектору  $\vec{a}$  — вектор  $\lambda \vec{a}$ ,
- любой ненулевой вектор можно представить в виде суммы неколлинеарных (некомпланарных) векторов.

3. *Сформулировать задачу с помощью векторов, решить ее, сделать вывод без использования векторов.*

**Пример.** Дана ломаная  $ABCD A$ , у которой  $AC = BD$ ,  $AC \perp BD$ . Точки  $M, N, P, Q$  делят звенья  $AB, BC, CD, DA$  по обходу ломаной в одном и том же отношении 2:1. Докажите, что  $MP = NQ$  и  $MP \perp NQ$ .



Решение.

1. Выбираем основные векторы. Больше всего данных о  $AC$  и  $BD$ , значит, их можно выбрать за основные векторы. Третий вектор не должен быть компланарным с ними. Выберем вектор по звену ломаной  $AD$ .

2. Пусть  $\vec{AC} = \vec{a}$ ,  $\vec{DB} = \vec{b}$ ,  $\vec{AD} = \vec{c}$ . Выразим векторы  $\vec{MP}$  и  $\vec{NQ}$  через основные.

$$\begin{aligned}
 \vec{MP} &= \vec{MA} + \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{DP} = \frac{2}{3}\vec{BA} + \vec{b} + \frac{1}{3}\vec{DC} = \\
 &= \frac{2}{3}\left(\vec{BD} + \vec{DA}\right) + \vec{b} + \frac{1}{3}\left(\vec{DA} + \vec{AC}\right) = \frac{2}{3}\left(-\vec{c} - \vec{b}\right) + \vec{b} + \frac{1}{3}\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) = \\
 &= -\frac{2}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{NQ} &= \vec{NC} + \vec{CA} + \vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{BC} - \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \\
 &= \frac{1}{3}\left(\vec{BD} + \vec{DC}\right) - \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{1}{3}\left(-\vec{c} - \vec{b} + \vec{a}\right) - \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \\
 &= -\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = -\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}.
 \end{aligned}$$

3. а) Докажем, что  $|\vec{MP}| = |\vec{NQ}|$ .

$$\left|\vec{MP}\right|^2 = \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}\right)^2 = \frac{1}{9}\vec{a}^2 - \frac{4}{9}\vec{ac} + \frac{4}{9}\vec{c}^2 = \text{(по условию } AC = BD,$$

$$AC \perp BD, \text{ значит, } |\vec{a}| = |\vec{c}| \text{ и } \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 = \frac{1}{9}\vec{a}^2 - 0 + \frac{4}{9}\vec{a}^2 = \frac{5}{9}\vec{a}^2 = \frac{5}{9}AC^2;$$

$$\left|\vec{NQ}\right|^2 = \left(-\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\right)^2 = \frac{1}{9}\vec{c}^2 - \frac{4}{9}\vec{ac} + \frac{4}{9}\vec{a}^2 =$$

$$= \frac{1}{9}\vec{a}^2 + 0 + \frac{4}{9}\vec{a}^2 = \frac{5}{9}\vec{a}^2 = \frac{5}{9}AC^2.$$

Значит,  $MP = NQ$ .

б) Докажем, что  $MP \perp NQ$ , т. е.  $\vec{MP} \cdot \vec{NQ} = 0$ .

$$\left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{c}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) = -\frac{1}{9}\vec{ac} + \frac{2}{9}\vec{c}^2 - \frac{2}{9}\vec{a}^2 + \frac{4}{9}\vec{ac} =$$

$$= 0 + \frac{2}{9}\vec{a}^2 - \frac{2}{9}\vec{a}^2 + 0 = 0.$$

Значит,  $MP \perp NQ$ .

**Тест по методике обучения учащихся решению задач**

Тест связан с методикой обучения учащихся решению математических задач. Вы знаете, что это одна из базовых методик, вместе с тем наиболее сложная по сравнению с другими базовыми методиками: методикой формирования понятий, методикой формирования умений и методикой изучения теорем. Тест состоит из трех частей, в каждой — серия вопросов. После каждого вопроса Вам рекомендуется записать ответ, а затем осуществить проверку и оценить свой ответ в баллах, после чего переходить к следующему вопросу.

Итак, начинаем!

1. Овладение методикой обучения учащихся решению математических задач осуществляется на задачах определенных типов. *Укажите, с какими задачами был связан первый этап овладения методикой обучения учащихся решению математических задач (\_\_\_\_\_)? Второй этап (\_\_\_\_\_)? Третий этап (\_\_\_\_\_)?*

Проверка. 1 этап — методика обучения учащихся решению текстовых задач.

2 этап — методика обучения учащихся решению планиметрических задач.

3 этап — методика обучения учащихся решению стереометрических задач.

Каждый правильный ответ — 1 балл. Максимум — 3 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

**Переходим к методике обучения учащихся  
решению текстовых задач**

2. *Укажите ключевыми словами, что является главным для учителя в связи с методикой обучения учащихся решению текстовых задач.*

---

---

---

---

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие ключевые слова: этапы работы над конкретной задачей (да, нет), методы решения текстовых задач (да, нет), виды текстовых задач (да, нет). (На доске под текстовой задачей записать эти ключевые слова.) Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 3 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

*3. Перечислите этапы работы над задачей.*

---

---

---

Проверка. Анализ условия, краткая запись условия, поиск решения, оформление решения, проверка решения, исследование.

Каждый правильный ответ — 1 балл, пропуск этапа — 0 баллов. Максимум — 6 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

*4. Сформулируйте основные вопросы, которые задаются на этапе анализа условия текстовой задачи.*

---

---

---

Проверка. 1. О чем идет речь в задаче (или о каком процессе, или какого вида задача)? 2. Какие объекты участвуют в задаче (или на какие части можно разбить условие задачи, или что происходит по условию задачи)? 3. Какие величины участвуют в задаче (или какими словами можно описать происходящее в задаче)? 4. Что известно? 5. Что требуется найти?

Каждый правильный ответ — 1 балл, пропуск вопроса — 0 баллов. Максимум — 5 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

5. Перечислите способы краткой записи условия задачи.

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие способы: схема условия (да, нет), таблица (да, нет), рисунок (да, нет), чертеж (да, нет).

Каждый правильный ответ — 1 балл, пропуск способа — 0 баллов. Максимум — 4 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

6. Укажите основные методы решения текстовых задач.

Проверка. Арифметический, алгебраический.

Каждый правильный ответ — 1 балл, пропуск метода — 0 баллов. Максимум — 2 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

7. Укажите методы осуществления поиска решения задач.

Проверка. Синтетический, аналитический.

Каждый правильный ответ — 1 балл, пропуск метода — 0 баллов. Максимум — 2 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

8. Укажите, какой вопрос учителя является ключевым при проведении поиска синтетическим методом.

Проверка. Что можно найти, зная..?

Правильный ответ — 1 балл.

Баллы: \_\_\_\_\_

9. Укажите, какой вопрос учителя является ключевым при проведении поиска аналитическим методом.

---

Проверка. Что нужно знать, чтобы найти..?  
Правильный ответ — 1 балл.

Баллы: \_\_\_\_\_

10. Перечислите способы оформления решения текстовых задач арифметическим методом.

---

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие способы: с помощью действий с пояснениями (да, нет), с помощью выражения (да, нет), с помощью вопросов с последующими действиями (да, нет).

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 3 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

11. Перечислите способы оформления решения текстовых задач алгебраическим методом.

---

Баллы: \_\_\_\_\_

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие способы: подробное описание, начинающееся со слова «пусть» (да, нет), краткое, например, с помощью таблицы с обоснованием уравнения (да, нет).

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 2 балла.

12. *Сформулируйте схему решения текстовых задач алгебраическим методом.*

---

---

---

---

Проверка. 1. Выбрать условие для составления уравнения. 2. Одну из неизвестных обозначить за переменную. 3. Выразить остальные неизвестные через эту переменную. 4. Составить уравнение. 5. Решить уравнение. 6. Сделать проверку задачи. 7. Ответить на вопросы задачи.

Наличие указанного этапа — 1 балл, отсутствие — 0 баллов. В случае, если выбор условия для составления уравнения стоит не на первом месте, снимается 1 балл. Максимум — 7 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

13. *Какие вопросы задает учитель на этапе исследования задачи?*

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие вопросы: есть ли другие способы решения (да, нет), что полезного из работы над задачей можно учесть в будущем (да, нет)?

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 2 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

14. *Перечислите, какие виды текстовых задач требуют специальной обработки.*

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие виды: задачи на движение (да, нет), задачи на работу (да, нет), задачи на части (да, нет), задачи на проценты (да, нет)?

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 4 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

За текстовые задачи \_\_\_\_\_ баллов  
Максимум 45 баллов

**Переходим к методике обучения учащихся  
решению планиметрических задач**

1. Укажите ключевыми словами, что является главным для учителя в связи с методикой обучения учащихся решению планиметрических задач.

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие ключевые слова: этапы работы над конкретной задачей (да, нет), методы решения планиметрических задач (да, нет), виды планиметрических задач (да, нет), анализ задачного материала (да, нет), создание комплексов задач, организация деятельности учащихся (да, нет).

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 6 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

2. Совпадают ли этапы работы над текстовой задачей и над планиметрической (да, нет)?

Проверка. «Да» — 1 балл, «нет» — 0 баллов.

Каждый правильный ответ — 1 балл, пропуск способа — 0 баллов. Максимум — 4 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

3. Сформулируйте основные вопросы, которые задаются на этапе анализа условия планиметрической задачи.

Проверка. 1. О какой фигуре (фигурах) идет речь в задаче? 2. Что известно об этой фигуре (фигурах)? 3. Что требуется? Каждый правильный ответ — 1 балл, пропуск вопроса — 0 баллов. Максимум — 3 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

4. Укажите методы решения планиметрических задач.

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие методы: метод от противного (да, нет), алгебраический метод (да, нет), метод доказательства равенства фигур с использованием признаков равенства треугольников (да, нет), метод введения вспомогательной величины (да, нет), векторный метод (да, нет), координатный метод (да, нет), метод подобия (да, нет), метод геометрических преобразований (да, нет), метод площадей (да, нет).

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 9 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

5. Какой вид планиметрических задач требует особого внимания, так как вызывает большие трудности у учащихся?

Проверка. Задачи на построение.  
Правильный ответ — 1 балл.

Баллы: \_\_\_\_\_

6. Перечислите методы задач на построение.

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие методы: метод геометрических мест (да, нет), метод вспомогательного треугольника (да, нет), метод геометрических преобразований (да, нет), метод подобия (да, нет).

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 4 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

7. *Сформулируйте схему проведения этапа анализа задачи на построение.*

---

---

---

Проверка. 0. Предполагаем задачу решенной, делаем чертеж и наносим на него все данные задачи. 1. Выясняем, какую точку можно выбрать за искомую. 2. Выясняем, каким условиям должна удовлетворять искомая точка. 3. По этим условиям выбираем фигуры, на которых должна лежать искомая точка. 4. Делаем вывод, что искомая точка является пересечением выбранных фигур. 5. Формулируем план построения. Наличие указанного этапа — 1 балл, отсутствие — 0 баллов. Максимум — 6 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

8. *Укажите основную цель анализа задачного материала темы в школьном учебнике.*

---

Проверка. Выяснить связи между задачами для их группировки в комплексы. Правильный ответ — 1 балл.

Баллы: \_\_\_\_\_

9. *Перечислите основы создания комплексов задач.*

---

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие основы: единая геометрическая конструкция (да, нет), единое требование (да, нет), единый метод решения (да, нет), опорная задача (да, нет). Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 4 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

За планиметрические задачи \_\_\_\_\_ баллов  
Максимум 35 баллов

**Переходим к методике обучения учащихся  
решению стереометрических задач**

1. *Укажите ключевыми словами, что является главным для учителя в связи с методикой обучения учащихся решению стереометрических задач.*

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие ключевые слова: этапы работы над конкретной задачей (да, нет), методы решения стереометрических задач (да, нет), виды стереометрических задач (да, нет), анализ задачного материала (да, нет), создание комплексов задач (да, нет), организация деятельности учащихся (да, нет).

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 6 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

2. *Совпадают ли этапы работы над планиметрической задачей и над стереометрической (да, нет).*

Проверка. «Да» — 1 балл, «нет» — 0 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

3. *Какой этап работы над стереометрической задачей требует специального обучения, поскольку у учащихся отсутствует соответствующий опыт?*

\_\_\_\_\_

Проверка. Этап выполнения чертежа и нанесения на него данных задачи.

Правильный ответ — 1 балл.

Баллы: \_\_\_\_\_

4. *Какие виды стереометрических задач вызывают особую сложность?*

---

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие виды: задачи на построение сечений (да, нет), задачи на комбинации фигур (да, нет)?

Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 2 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

5. *Совпадают ли цели анализа задачного материала к параграфу школьного учебника по планиметрии и по стереометрии (да, нет)?*

Проверка. «Да» — 1 балл, «нет» — 0 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

6. *Укажите эту цель.*

---

Проверка. Выяснить связи между задачами для их группировки в комплексы.

Правильный ответ — 1 балл.

Баллы: \_\_\_\_\_

7. *Совпадают ли основы для создания комплексов планиметрических и стереометрических задач (да, нет).*

Проверка. «Да» — 1 балл, «нет» — 0 баллов.

Баллы: \_\_\_\_\_

## 8. Перечислите эти основы.

Проверка. Есть ли в вашем списке следующие основы: единая геометрическая конструкция (да, нет), единое требование (да, нет), единый метод решения (да, нет), опорная задача (да, нет)? Каждое «да» — 1 балл, каждое «нет» — 0 баллов. Максимум — 4 балла.

Баллы: \_\_\_\_\_

За стереометрические задачи \_\_\_\_\_ баллов  
Максимум 17 баллов

## Итоговая таблица

|          | За тексто-<br>вые задачи | За планимет-<br>рические<br>задачи | За стереомет-<br>рические<br>задачи | Всего<br>баллов |
|----------|--------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|-----------------|
| Набрано  |                          |                                    |                                     |                 |
| Максимум | 45                       | 35                                 | 17                                  | 97              |

## Часть X. Технологии обучения

Приложение 57

## Группы технологий

**Технологией обучения** будем считать такую **систему деятельности** учителя и учащихся, которая построена на конкретной идее (исходном положении) и может быть описана через *процедуры* ее реализации для достижения наперед заданного *результата*.

Примерами технологий обучения являются **базовые методики обучения** (методика формирования понятий, методика формирования умений, методика изучения теорем, методика обучения

учащихся решению задач). *Исходное положение*: основными структурными элементами математики являются понятия, умения, теоремы, задачи, поэтому, разработав соответствующие методики на основе психологических требований к формированию понятийного мышления и деятельности учащихся, можно улучшить обучение математике.

Все известные технологии обучения можно разделить на четыре группы в зависимости от положения учащихся в образовательном процессе: информационные, адаптивные, развивающие, личностно ориентированные.

В *информационных технологиях* учащиеся — объекты обучения («сосуды», в которые «вкладывается» информация). Информационные технологии обучения не следует путать с информационными технологиями, обеспечивающими техническую доступность информации. Примером информационной технологии является методика В.Ф. Шаталова. Обучение, при котором ученик является объектом «вложения» информации, принято называть традиционным, поскольку так обучалось не одно поколение учащихся.

В *адаптивных технологиях* учащиеся — объекты обучения, но они разные, поэтому обучение надо адаптировать к ним. Примерами адаптивных технологий являются технология полного усвоения, технология модульного обучения, технология разноуровневого обучения, технология коллективного взаимообучения.

В *развивающих технологиях* учащиеся — субъекты обучения, т. е. деятели в *постижении* знаний (ученик — «цветок», который выращивает «садовник» с помощью специальной организации работы). Примерами развивающих технологий являются технология развивающего обучения, построенная на системе Д.Б. Эльконина — В.В. Давыдова, технология, построенная на системе Л.В. Занкова, технология использования проблемных учебных задач.

В *личностно ориентированных технологиях* учащиеся — субъекты обучения и собственного развития, и они разные (ученик — «цветок, имеющий право голоса», и «сам себе садовник»). Примером личностно ориентированной технологии является технология МПИ-проекта.

Существенным условием реализации развивающих и личностно ориентированных технологий является **организация диалога**, выводящего учащихся на ведущие позиции в обучении. Для того, чтобы ученик стал субъектом собственного развития, необходимо сформировать у него **открытую познавательную позицию**.

На одной и той же идее (исходном положении) могут быть построены технологии, относящиеся к различным группам технологий. Ниже приведены примеры таких технологий и указаны их исходные положения.

| Название технологии              | Исходное положение                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Структурно-логические технологии | Любой предмет имеет внутренние (скрытые) логические связи (связи соподчинения, взаимно обратные связи, связи общего и частного и др.). Связь можно сделать внешней (открытой), если изменить структуру содержания предмета |
| Задачные технологии              | На основе анализа одной задачи может быть получен <b>блок</b> теоретического материала                                                                                                                                     |
| Игровые технологии               | Изучение учебного предмета может осуществляться через реализацию определенного сюжета (игры, сказки, спектакля, делового общения и др.)                                                                                    |
| Компьютерные технологии          | В обучении между учителем и учеником можно поставить компьютер для реализации различных программ (информационных, тренинговых, контролирующих, развивающих и др.)                                                          |
| Диалоговые технологии            | Постановку и решение учебно-познавательных задач можно осуществить через диалог на уровнях «учитель — ученик», «ученик — ученик», «ученик — автор учебника»                                                                |
| Тренинговые технологии           | Для отработки определенных алгоритмов учебно-познавательных действий необходима специальная система тренинга                                                                                                               |

В одном и том же учебнике авторами могут быть использованы различные технологии обучения. В одном и том же классе, одним и тем же учителем могут применяться различные технологии обучения, однако, учителю надо стремиться к тому, чтобы они относились к группе личностно ориентированных технологий.

## Приложение 58

### Сравнение традиционного, развивающего и личностно ориентированного обучения

| <i>Система обучения</i><br><i>Компо-<br/>ненты</i> | <i>Традицион-<br/>ное обучение</i>             | <i>Развиваю-<br/>щее<br/>обучение</i>   | <i>Личностно<br/>ориентированное<br/>обучение</i>                                                         |
|----------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Различительный признак (позиция учащихся)</b>   | Объект обучения                                | Субъект обучения                        | Субъект обучения и собственного развития                                                                  |
| <b>Ключевое понятие</b>                            | Предметная информация                          | Познавательная деятельность             | Субъектный опыт                                                                                           |
| <b>Основной образовательный источник</b>           | Учитель                                        | Учебный предмет                         | Учебный предмет и процесс его освоения                                                                    |
| <b>Ключевая задача учителя</b>                     | Передача предметной информации                 | Активизация познавательной деятельности | Организация деятельности учащихся с содержанием учебного предмета с целью обогащения их субъектного опыта |
| <b>Результат, который может быть обеспечен</b>     | Личность, которая умеет работать с информацией | Личность, которая умеет познавать       | Личность, которая умеет познавать, делать, жить вместе                                                    |

## Приложение 59

### Сравнение информационного и личностно ориентированного обучения учащихся решению задач

| <b>Информационное обучение</b>                                                                                                                                                                   | <b>Личностно ориентированное обучение</b>                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Цели решения задачи:</i>                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>получить ответ,</li> <li>развитие учащихся — побочный результат (может быть, а может и не быть, но специальной работы для этого не проводится)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>самоизменение личности («сегодня у меня получается больше и лучше, чем вчера»),</li> <li>самореализация личности («я смог!»)</li> </ul> |

Продолжение табл.

| Информационное обучение                                                                                                                                                                                                                        | Личностно ориентированное обучение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Позиция ученика при решении задачи в классе</i>                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Послушный исполнитель указаний и предписаний учителя (вопросы учителя носят подсказывающий характер). В роли учителя может выступать ученик, который рассказывает готовое решение задачи                                                       | Ученик — субъект обучения и собственного развития, значит, он ставит свои цели при работе с задачей, хочет научиться справляться со своими трудностями и проблемами в связи с задачей («помогите мне решить задачу самому»)                                                                                                                                                                               |
| <i>Позиция учителя:</i>                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• учитель командует учениками (пишите, решайте, слушайте и т. д.),</li> <li>• соотносит свои действия со своими целями (решить запланированную им задачу и побыстрее)</li> </ul>                        | <ul style="list-style-type: none"> <li>• учитель — организатор поисковой деятельности учащихся (на первых порах по овладению деятельностью по решению задач),</li> <li>• организатор самостоятельной деятельности учащихся (на последующих этапах),</li> <li>• учитель следует за учащимися, пропуская их впереди себя (предоставляет выбор как самих задач, так и форм работы с ними и т. д.)</li> </ul> |
| <i>Содержание задачи</i>                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| Задача рассматривается как нагромождение частных                                                                                                                                                                                               | Частности задачи (ее данные) рассматриваются с общих позиций <b>процесса</b> решения задачи (в том числе позиций «открытия» решения, что связано с процессом познания)                                                                                                                                                                                                                                    |
| <i>Методы работы с задачей:</i>                                                                                                                                                                                                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• показ готового действия (самим учителем или учеником),</li> <li>• «навязывание» своего решения (учитель задает классу конкретные вопросы, связанные с тем решением, которое учитель знает)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• совместная (или самостоятельная) поисковая деятельность по общей схеме деятельности по решению задач,</li> <li>• вариативное повторение и закрепление,</li> <li>• оценка своей деятельности в процессе решения задачи (рефлексия)</li> </ul>                                                                                                                     |

Окончание табл.

| Информационное обучение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Личностно ориентированное обучение                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Формы работы с задачей</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• фронтальная работа под руководством учителя, когда учитель ведет к цели, только ему известной (учитель задает, например, вопросы, цель которых не ясна ученикам),</li> <li>• общеклассная работа над задачей (один ученик у доски),</li> <li>• самостоятельная работа тогда, когда ученики не могут ее выполнить самостоятельно (отсюда и списывание)</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• чаще всего работа в микрогруппах,</li> <li>• если же используется фронтальная работа, то учитель ведет учебный диалог с учениками, пропуская их впереди себя (задает общие вопросы, организывает обсуждение вариантов ответов, следует за тем вариантом, которые выбрали ученики),</li> <li>• самостоятельная работа тогда, когда ученики знакомы с тем, на каких этапах решения задач они испытывают затруднения, и как их преодолевать</li> </ul> |
| <i>Контроль деятельности учащихся</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| Контроль осуществляется по факту (решил задачу — не решил задачу)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Контроль осуществляется с учетом осознания учеником себя в процессе решения задачи («я знаю, что надо выполнить такой-то шаг, его я пытался сделать так-то, но не получилось то-то»). Поэтому важно приучать учеников при выполнении контрольных заданий описывать свои проблемы                                                                                                                                                                                                             |

Приложение 60

### Адаптивные технологии обучения

(При создании приложения использовались материалы учебно-методического пособия Г.Ю. Ксензовой «Перспективные школьные технологии».)

Адаптивные технологии позволяют приспособить учебный процесс к индивидуальным особенностям школьников.

*Технология полного усвоения*  
(авторы Дж. Кэрролл, Б. Блюм)

*Исходное положение.* В традиционном обучении всегда фиксированы его условия (одинаковое для всех время, способ предъявления информации и пр.), не фиксированным остается результат обучения. Необходимо сделать постоянным параметром результат обучения, а условия обучения — переменными, подстраиваемыми под достижение каждым обучаемым заданного результата.

Для реализации технологии полного усвоения в первую очередь необходимо определить тот результат, который должен быть достигнут каждым. При этом руководствуются следующими категориями целей познавательной деятельности:

- **знание:** ученик запоминает и производит конкретную учебную единицу (термин, факт, понятие, принцип, процедуру);
- **понимание:** ученик преобразует учебный материал из одной формы выражения в другую (интерпретирует, объясняет, кратко излагает, прогнозирует дальнейшее развитие явлений, событий);
- **применение:** ученик демонстрирует применение изученного материала в конкретных условиях и в новой ситуации (по образцу в сходной или измененной ситуации);
- **анализ:** ученик вычленяет части целого, выявляет взаимосвязи между ними, осознает принципы построения целого;
- **синтез:** ученик проявляет умение комбинировать элементы для получения целого, обладающего новизной (пишет творческое сочинение, предлагает план эксперимента, решения проблемы);
- **оценка:** ученик оценивает значение учебного материала для данной конкретной цели.

Перечисленные категории целей формулируются через конкретные действия и операции, которые должен выполнить обучающийся, чтобы подтвердить достижения эталона по той или иной изучаемой теме. Чаще всего фиксируется результат, связанный со знанием, пониманием темы и применением по образцу в сходных ситуациях.

*Технология разноуровневого обучения*

*Исходное положение.* Ученики имеют разный уровень возможностей и потребностей, поэтому ученикам необходимо предоставлять материал разного уровня сложности.

Чаще всего выделяется три уровня, которые называют соответственно *минимальным* (задается государственным стандартом), *основным* и *продвинутым*. Основной разделения могут быть те же категории целей, которые описаны выше. Так, *первому* (минимальному) уровню соответствуют категории знания, понимания и применения в сходной ситуации, на *втором* (основном) уровне требуется еще применение в измененной ситуации, на *третьем* (продвинутом) уровне требуются анализ, синтез и оценка значения учебного материала.

*Технология коллективного взаимообучения  
(КСО — коллективный способ обучения)  
(разработана А.Г. Ривинем)*

*Исходное положение.* Каждому ученику для усвоения учебного материала необходимо его проговорить. Кто и когда его выслушает, если в классе много учеников, а учитель — один? Надо ученикам передать соответствующие функции учителя.

Чаще всего используется работа в парах. Парную работу можно осуществлять в трех видах:

- *статическая пара*, которая объединяет по желанию двух учеников, меняющихся ролями учитель — ученик,
- *динамическая пара*, которая возникает в составе группы из четырех учащихся всевозможными комбинациями пар; учащиеся готовят одно задание, но имеющее четыре части; после подготовки своей части задания и самоконтроля школьник обсуждает задание трижды с каждым из партнеров, причем каждый раз ему необходимо адаптировать свой ответ к индивидуальным особенностям товарищей (менять логику изложения, темп и т. п.),
- *вариационная пара*, в которой каждый член группы получает свое задание, выполняет его, анализирует вместе с учителем, проводит взаимообучение по схеме с остальными тремя товарищами, в результате каждый усваивает четыре порции учебного содержания.

Современная психология утверждает, что эффективность произвольной памяти старшего школьника может быть оценена такими критериями: 10% — читает глазами, 26% — слышит, 30% — видит, 50% — видит и слышит, 70% — обсуждает, 0% — опирается на опыт, 90% — говорит и делает совместно, 95% — обучает других.

*Технология модульного обучения*  
(автор П.Ю. Цявичене)

*Исходное положение.* Поскольку у различных учеников различная скорость овладения материалом, ему необходимо предоставить определенный блок материала (модуль), в котором учебное содержание будет объединено с технологией овладения им.

В Приложении 7 приведен пример подачи материала в соответствии с модульной технологией.

*Приложение 61*

**Памятка для участников групповой работы**

*Помните: цель групповой работы* — помочь (обогащить знаниями) друг друга и успешно решить поставленные задачи в отведенное на это время.

1. Сядьте так, чтобы видеть лицо друг друга (удобно сесть крестом).

2. Помните о **правах и обязанностях участников группы**:

- заранее готовиться к работе в группе (выделить в своих записях главное, чтобы быстро осуществить проверку или выступление; отметить в своих записях возникшие вопросы, чтобы ни одна личная проблема не осталась нерешенной),
- бережно относиться к каждому высказыванию другого, чтобы не пропустить разумное предложение или индивидуальную проблему участника группы,
- любые предложения выслушиваются без осуждения, чтобы участник группы не стеснялся высказаться из-за боязни ошибочного предложения,
- участвовать в обсуждении проблем группы, ощущая при этом личную ответственность за итоги ее работы,
- подстраховывать ведущего, внося предложения по организации работы, по направлениям обсуждений и т. д.,
- никогда не перебивать другого (только ведущий может прервать другого в целях соблюдения регламента),
- каждый член группы может в следующий раз стать ведущим.

3. Помните о **правах и обязанностях ведущего** (руководителя группы):

- по очереди включает каждого в обсуждение поставленных задач,

- организует обсуждение высказанных предложений,
- организует поиск новых решений,
- подводит итоги обсуждения,
- выносит на обсуждение вопрос о кандидатурах, которые будут представлять результаты работы для других групп,
- организует подготовку этих кандидатур для успешного выступления,
- следит за экономией времени, отведенном на работу группы,
- ведет протокол проблем, с которыми столкнулась группа при решении поставленных задач, для последующего обсуждения с другими группами.

## Приложение 62

### Способы составления УДЕ-заданий

(Приложение разработала О.В. Кваша — аспирантка БГУ)

1. Включение в УДЕ различных способов решения одной и той же задачи.

Например. *При разложении многочлена на множители получены результаты:*

$$1) n(3n - 4)^2 + (3n - 4)^2 = (3n - 4)^2(n - 1);$$

$$2) 14a^2c + 25b^2d - 10abd - 35abc = (2a - 5b)(7ac - 5bd).$$

*Проверьте правильность рассуждений двумя способами.*

2. Включение в УДЕ различных заданий, решаемых одним и тем же методом.

Например. *Вычислите рациональным способом:*

$$1) 93 \cdot 52 - 38 \cdot 43 + 93 \cdot 38 - 43 \cdot 52;$$

$$2) 12,7 \cdot 3,4 + 8,2 \cdot 1,4 - 1,4 \cdot 12,7 - 3,4 \cdot 8,2.$$

3. Превращение задачи в задание с открытым условием или заключением, используя вопросы: «Что должно быть известно, чтобы...?», «Как изменить условие, чтобы...?», «Что можно найти, зная ....?»

Например. *Из вершины A прямоугольника ABCD проведен перпендикуляр AK к плоскости прямоугольника. Что нужно знать, чтобы найти длину AK?*

4. Введение прямых и обратных заданий на одной и той же ситуации.

Например. *Составьте уравнение для решения задачи.... Придумайте свою задачу, решаемую при помощи этого же уравнения.*

5. Включение в УДЕ процесса составления задания.

Например. *Докажите, что равенство  $4(x - 1) + 7 - x = 3x + 2$  не может быть верным ни при каком значении  $x$ . Как бы вы сформулировали это задание на языке уравнений?*

6. Включение в задание элементов обобщения и систематизации предыдущих заданий или этапов задания.

Например. *Раскройте скобки, используя правило прибавления (вычитания) к числу суммы (разности) и правило прибавления (вычитания) к сумме (разности) числа:*

1)  $(a + n) + (b - n)$ ; 3)  $(a + n) - (n - b)$ ;

2)  $(a - n) + (b + n)$ ; 4)  $(b + n) - (n - a)$ .

*Если вы справились с заданием, то во всех случаях у вас получилось одно и то же выражение.*

*Сформулируйте правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак:*

*а) плюс; б) минус.*

## Часть XI. Личностно ориентированный урок

**Урок является личностно ориентированным**, если на нем учащиеся являются субъектами обучения и собственного развития, и учитываются их индивидуальные особенности. **Основная цель** личностно ориентированного урока помимо достижения учащимися определенного учебного результата состоит в обогащении опыта учащихся, связанного с постижением знаний, организацией процесса обучения и самообучения, с рефлексией, т. е. опыта «быть субъектами обучения и собственного развития».

**Личностно ориентированный урок характеризуется личностно ориентированным содержанием и личностно ориентированной организацией деятельности учащихся с ним.**

**Личностно ориентированное содержание** характеризуется особенностями трех его составляющих: предметного содержания, технологического содержания, индивидуального содержания. **Предметное содержание** должно быть *мотивировано*, в нем установлены *связи*, как с прошлым опытом учащихся, так и внутри изучаемой темы. **Технологическое содержание** должно обеспечивать *успешность* учащихся в овладении предметным содержанием, поэтому в нем предусмотрены *общие подходы* к решению учебных

проблем, учитываются возможные *трудности* учащихся и *пути* их преодоления. **Индивидуальное содержание** отражает индивидуальное отношение учащихся к предметному и технологическому содержанию. В соответствии с индивидуальными особенностями ученики по-разному воспринимают, перерабатывают предметное содержание, создают свои примеры, опорные конспекты (свое содержание предмета); вырабатывают свои приемы деятельности с предметным содержанием, пишут свои памятки («технологии»). Поэтому в обучении предусматриваются различные варианты решения учебных задач, формы их предъявления; продумывается организация достижения поставленных целей с учетом индивидуальных предпочтений учащихся; предоставляется учащимся возможность создать свое содержание и свои технологии. Такое содержание связано с конкретными личностями (это могут быть как исторические личности, так и учащиеся — авторы рассматриваемого предметного или технологического содержания).

**Личностно ориентированная организация урока** — это такая организация деятельности учащихся с содержанием урока, при которой учащиеся поставлены в позицию субъектов обучения и собственного развития. Личностно ориентированная организация проявляется как на протяжении всего урока, так и на отдельных его этапах. **На всем протяжении урока** деятельность учащихся *мотивирована*, они *осознают цель и задачи* своей деятельности, *планируют* ее, осуществляют *контроль* и *подводят итоги по процессу* достижения цели.

**Организация отдельных этапов урока** зависит от их учебных целей (изучение нового, усвоение нового, тренаж, диагностика, углубление, работа над ошибками, систематизация, подготовка к контрольной работе и др.). В соответствии с поставленными целями выстраивается *учебный диалог* с учащимися, выводящий их на ведущие позиции в достижении этих целей. Организация отдельных этапов предусматривает использование различных *приемов работы с учебным содержанием* (отложенной помощи, затребованной помощи, персонального консультанта, общих подходов к решению проблем, использования личного опыта, рассуждений вслух, выбора формы работы, осознания собственных проблем, обобщения работы групп, постановки личных целей, подведение итогов глаголами, письменных итогов, вертушки, предвосхищения проблем, личных заметок, отложенного обращения к образцу, анализа собственных черновики, индивидуальных вопросов для обсуждения и др.).

## Введение определений при личностно ориентированном обучении

При введении определений «старые» знания учащихся приводят к «рождению» новых объектов; анализ этих объектов на предмет наличия существенных свойств, позволяющих отличать образовавшиеся объекты от ранее известных, приводит к термину понятия и к его определению.

Анализ процессов введения различных определений школьного курса математики позволил выделить три ситуации:

1) у учащихся имеется опыт, на который можно опереться, значит, этот опыт должен быть актуализирован;

2) у учащихся имеется опыт, но он противоречит новому, значит, требуется перестройка имеющегося опыта,

3) требуется формирование принципиально нового опыта, так как нет «зацепок» в имеющемся опыте учащихся.

Приведем примеры таких понятий и пути учета и обогащения субъектного опыта учащихся, которые были разработаны слушателями ШКОЛЫ совершенствования методического мастерства учителя, функционирующей на базе Брянского ИПКРО.

Опыт изучения различных геометрических фигур позволяет учащимся намечать план работы с новыми понятиями: как назвать новую фигуру, как сформулировать ее определение, как ее построить, как измерить, какими свойствами обладает. При формировании понятия «**двугранный угол**» В.А. Волкова (г. Карачев) предлагает учащимся сконструировать углы с помощью моделей двух фигур (двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей) и выделить из них знакомые и незнакомые углы (это углы, которые образовались при пересечении двух плоскостей). Конструирование определения новому виду углов и его элементов осуществляется с использованием аналогии с углами в планиметрии, которая продемонстрирована в следующей таблице:

| Основные элементы | Угол на плоскости   | Угол в пространстве     | Основные элементы |
|-------------------|---------------------|-------------------------|-------------------|
| Стороны           | <b>2 луча,</b>      | <b>2 полуплоскости,</b> | ?                 |
|                   | <b>выходящих из</b> | <b>имеющих общую</b>    |                   |
| Вершина угла      | <b>одной точки</b>  | <b>прямую (границу)</b> | ?                 |

Необходимость формирования нового опыта учащихся в связи с двугранным углом диктуется тем, что для его измерения нельзя «пристроить» транспортир. Интуиция позволяет учащимся создать конструкцию, когда величина двугранного угла равна  $90^\circ$ ,  $30^\circ$ . Проверка с помощью чертежного угольника с углом  $30^\circ$  результатов конструирования и анализ выполненных действий приводят к определению **линейного угла**.

При введении определения **центроида** (точки пересечения медиан треугольника) И.В. Макевит (г. Карачев) использует представления учащихся о физическом понятии центра масс и организует поиск этой точки для различных моделей геометрических фигур. Анализ успехов учащихся для определения центра масс у четырехугольников и круга позволяет выйти на необходимость рассмотрения точки пересечения определенных элементов этих фигур (диагоналей, диаметров). Этот опыт приводит к перебору различных элементов треугольника (высот, биссектрис, медиан, серединных перпендикуляров к сторонам) и поиск тех, которые позволяют определить центр масс для произвольного треугольника.

«Рождение» определения **биссектрисы угла** Г.С. Ключкова (г. Навля) демонстрирует через выделение объектов (рисунков, на которых задан угол и некоторый луч) по их общему свойству. Сначала таким свойством является особое расположение начала луча относительно угла, потом — особое расположение луча относительно сторон угла.

Формирование нового опыта учащихся осуществляется при изучении свойств четности (нечетности) функции, поскольку до сих пор учащимся никогда не приходилось определять симметричность области определения функции, сравнивать значения  $f(-x)$  с  $f(x)$ . Поэтому Е.В. Иванишко (г. Злынка) термины **четной—нечетной функции** вводит с использованием четных—нечетных чисел, а определения новым понятиям дает в готовом виде, организуя после этого с помощью специальных упражнений тщательную работу с каждым словом определения.

Т.В. Дашунина (г. Брянск) при введении определений синуса и косинуса угла прямоугольного треугольника предварительно собирает известную учащимся информацию, связанную со сторонами прямоугольного треугольника (теорема Пифагора, позволяющая определять сторону треугольника, зная две другие; неравенство треугольника, позволяющее сравнивать одни стороны с другими), с углами треугольника (свойство острых углов, позволяющее находить один острый угол, зная другой) и мотивирует

поиск новых соотношений, позволяющих находить стороны треугольника, зная его углы. Исследование влияния величины острого угла на стороны прямоугольного треугольника приводит к следующим ситуациям, отраженным в таблице:

| №  | Соотношения между соответствующими острыми углами двух прямоугольных треугольников | Соотношения между соответствующими сторонами двух прямоугольных треугольников | Отношения соответствующих сторон двух прямоугольных треугольников |
|----|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1. | Соответствующие острые углы равны                                                  | Соответствующие стороны не равны                                              | Отношения соответствующих сторон равны                            |
| 2. | Не равны                                                                           | Не равны                                                                      | Не равны                                                          |

Дальнейшее введение определений синуса и косинуса угла требует перестройки опыта учащихся, когда отношения соответствующих сторон двух прямоугольных треугольников требуется учитывать в одном треугольнике.

При введении термина «**касательная к окружности**», как прямой, которая чуть задевает окружность, Л.В. Макласова (г. Дятьково) предлагает учащимся чуть задеть плечом друг друга и попытаться подобрать слово-синоним для «чуть задеть» (это — коснуться).

Обращение к терминам русского языка помогает учесть субъектный опыт учащихся. Так, при введении определения понятия «тождество» В.А. Семякина (г. Сельцо) обращается к словарю С.И. Ожегова, где сказано, что «тождество — это полное сходство». А при знакомстве с **внешними углами треугольника** на этапе поиска имени для построенных углов Н.С. Танькова (г. Сельцо) с помощью словаря подбирает замену словам «наружный, находящийся вне, за пределами чего-либо», которые являются значениями слова «внешний».

Продемонстрированные пути учета и обогащения субъектного опыта учащихся можно отразить следующим перечнем:

- 1) использование одного и того же плана работы с различными понятиями,
- 2) конструирование знакомых и новых объектов по единому принципу,

- 3) использование аналогий между известными и новыми понятиями,
- 4) привлечение интуиции и здравого смысла,
- 5) перенос успешного опыта учащихся в новую ситуацию,
- 6) анализ объектов на предмет поиска единого свойства,
- 7) тщательная работа с каждым словом определения с помощью специальных упражнений, позволяющих сформировать новый опыт учащихся,
- 8) сопоставление нескольких возможных ситуаций,
- 9) обращение к терминам русского языка.

### Приложение 64

#### Урок-лекция при личностно ориентированном обучении Тема: «Площадь криволинейной трапеции»

Мы познакомились с новой фигурой — криволинейной трапецией. Установили, почему ее назвали трапецией и почему — криволинейной. А теперь любопытно, как же вычислить площадь криволинейной трапеции. Ясно, что не так, как площадь обычной трапеции. Очевидно, что нельзя разбить криволинейную трапецию на конечное число известных многоугольников по той причине, что одна из сторон этой трапеции — «кривая» линия. И вот в этой непростой ситуации нам поможет такая теорема:

**Если  $f$  — непрерывная и неотрицательная на отрезке  $[a, b]$  функция, а  $F$  — ее первообразная на этом промежутке, то площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке  $[a, b]$ , то есть  $S = F(b) - F(a)$ .**

Итак, о чем идет речь в теореме:

- 1) функция  $f$  непрерывная и неотрицательная на  $[a, b]$ ;
- 2)  $F$  — первообразная ее на этом же промежутке;
- 3)  $S$  — площадь соответствующей функция;
- 4)  $S = F(b) - F(a)$ ,  $F(b) - F(a)$  — приращение первообразной.

Запишем условие и заключение теоремы.

**Дано:**  $f(x)$  — непрерывная функция;  
 $f(x) \geq 0$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

**Доказать:**  $S = F(b) - F(a)$ .

**Доказательство:**

Рассмотрим функцию  $S(x)$ , определенную на отрезке  $[a, b]$ .

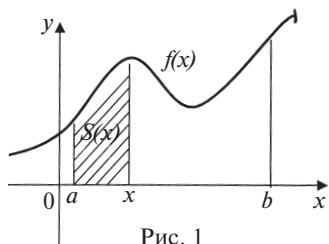


Рис. 1

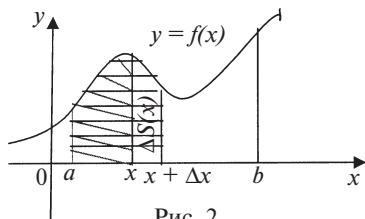
Каждому  $x \in (a, b)$  соответствует единственное значение  $S(x)$ .

Если  $x = a$ , то  $S(a) = 0$ , если  $x = b$ , то  $S(b) = S$ .

**Комментарий при построении рисунка 1 и выполнении записей на доске.** Доказательство теоремы связано с площадью криволинейной трапеции, значит, надо как-то увязать доказательство с площадью. С этой целью мы рассмотрим новую функцию  $S(x)$ , определенную на отрезке  $[a, b]$ . Поскольку функцию можно задать не только формулой, но и таблицей, и словесно, то мы попробуем задать функцию  $S(x)$  словесно. Возьмем любое  $x \in (a, b)$  и проведем через точку  $(x, 0)$  прямую, параллельную оси  $Oy$ . Она разобьет трапецию на две криволинейных трапеции: одна расположена слева от этой прямой, а другая — справа. Будем считать, что каждому  $x \in (a, b)$  соответствует площадь той криволинейной трапеции, которая расположена слева от прямой, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через точку  $(x, 0)$ . Ясно, что каждому такому  $x \rightarrow$  единственное значение  $S(x)$ .

Остается выяснить, что будет, если  $x = a$  или  $x = b$ ?

Если точка  $(x, 0)$  совпадет с точкой  $(a, 0)$ , то слева не будет никакой площади, т. е.  $S(a) = 0$ , а если  $x = b$ , то слева от прямой окажется вся наша криволинейная трапеция, т. е.  $S(b) = S$ . Вот мы и ввели новую **функцию**  $S(x)$ : аргумент —  $x \in [a, b]$ , значение функции (зависимая переменная) — площадь соответствующей криволинейной трапеции.



Докажем, что  $S(x)$  есть первообразная функции  $f(x)$ , т. е.  $S'(x) = f(x)$

$$\text{или при } \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x). \quad \Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x).$$

Рассмотрим прямоугольник:  $S_{\text{пр.}} = \Delta S(x)$ .

**Комментарий при построении рисунка 2 и выполнении записей на доске.** Теперь докажем, что функция  $S(x)$  есть первообразная функции  $f(x)$ , т. е.

$$S'(x) = f(x).$$

Вспомним определение производной: это число, к которому стремится отношение приращения функции к приращению аргумента при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

$$\text{В нашем случае надо доказать, что при } \Delta x \rightarrow 0 \quad \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x).$$

Поскольку  $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ , то выясним геометрический смысл  $\Delta S(x)$

(пусть  $\Delta x > 0$ ).

$S(x)$  — площадь, заштрихованная наклонными линиями,  $S(x + \Delta x)$  — площадь, заштрихованная горизонтальными линиями, тогда  $\Delta S(x)$  — это площадь, только с горизонтальной штриховкой, эта фигура тоже является криволинейной трапецией.

Рассмотрим прямоугольник:  $S_{\text{пр.}} = \Delta S(x)$ .

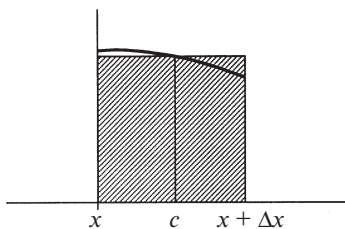


Рис. 3

$$c \in [x, x + \Delta x], \Delta S = f(c) \cdot \Delta x, \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c).$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow x$ ,  $f(c) \rightarrow f(x)$ , так как

$f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow S'(x)$ , т. е.  $S'(x) = f(x)$ ,  $S(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ .

**Комментарий при построении рисунка 3 и выполнении записей на доске.** Возьмем теперь прямоугольник той же площади  $\Delta S(x)$ , опирающейся на отрезок  $[x, x + \Delta x]$ .

Пересечет ли верхняя сторона прямоугольника график функции  $f(x)$ ? Да, потому что:

- 1) функция  $f(x)$  непрерывна;
- 2) прямоугольник имеет ту же площадь, что и криволинейная трапеция, а если он содержится в криволинейной трапеции, то его площадь будет меньше  $\Delta S(x)$ , а если содержит криволинейную трапецию, то его площадь будет больше  $\Delta S(x)$ .

Итак, верхняя сторона прямоугольника пересечет график функции в некоторой точке с абсциссой  $c \in [x, x + \Delta x]$ . Как известно,  $S$  прямоугольника равна произведению смежных сторон, но одна сторона прямоугольника  $\Delta x$ , а другая —  $f(c)$ , тогда  $f(c) \cdot \Delta x$  — площадь прямоугольника и  $\Delta S = f(c) \cdot \Delta x$ .

Разделив обе части равенства на  $\Delta x$ , мы и получим  $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$ .

При  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $c \rightarrow x$ ,  $f(c) \rightarrow f(x)$ , так как  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ ,

а  $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow S'(x)$ , т. е.  $S'(x) = f(x)$ , значит,  $S(x)$  — первообразная функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ .

**Комментарий к последнему выводу.** Главное дело сделано. Теперь осталось совсем чуть-чуть.

Учитывая основное свойство первообразных, мы любую первообразную функции  $f$  можем записать в виде

$$S(x) = F(x) + C.$$

Как найти  $C$ ? Вспомним, что  $S(a) = 0$  и  $S(b) = S$ . Тогда:  $S(a) = F(a) + C = 0$ , отсюда  $C = -F(a)$ .

$$S = S(b) = F(b) + C; \text{ но } C = -F(a), \text{ тогда } S = F(b) - F(a).$$

**Запись на доске:**

$$S(x) = F(x) + C.$$

$$S(a) = 0. \text{ Тогда: } S(a) = F(a) + C = 0, C = -F(a).$$

$$S = S(b) = F(b) + C; \text{ но } C = -F(a), \text{ тогда}$$

$$S = F(b) - F(a).$$

**Подведение итогов.**

Вот мы и доказали теорему. Оказалось, что для вычисления площади криволинейной трапеции, надо найти первообразную для функции  $f(x)$ , ограничивающей эту трапецию на отрезке  $[a, b]$ , и вычислить ее приращение  $F(b) - F(a)$ .

Давайте еще раз внимательно посмотрим на доказательство этой теоремы и проанализируем его, выделив основные этапы.

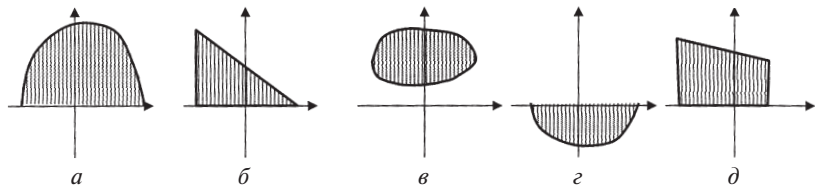
1) Ввели новую функцию  $S(x)$  на  $[a, b]$ .

2) Доказали, что,  $S'(x) = f(x)$ , используя определение производной и заменив криволинейную трапецию прямоугольником той же площади.

3) Записали  $S(x)$  через  $F(x) + C$ , используя основное свойство первообразной, и нашли  $C$  из того, что  $S(a) = 0$ .

4) Нашли  $S$ , из того, что  $S = S(b)$ .

На доске изображены геометрические фигуры в системе координат. Все ли изображенные фигуры являются криволинейными трапециями? (Учащиеся исключают случай в.) Для всяких ли



криволинейных трапеций можно использовать доказанную теорему? (Учащиеся исключают случай *г*.) Совпадет ли в случае *д* результат вычисления площади трапеции по старой и по новой формуле? (Учащиеся запрашивают данные и предлагают способ проверки.) Совпадет ли в случае *б* результат вычисления площади треугольника по старой и по новой формуле? (Учащиеся запрашивают данные и предлагают способ проверки.)

Вот теперь мы можем поставить точку.

## Приложение 65

### Прием затребованной помощи

Прием затребованной помощи предназначен для преодоления учащимися затруднений на этапах: анализа условия задания, поиска способа его выполнения, составления плана решения, оформления решения. По запросу учащегося учитель предоставляет ему в письменном виде рекомендации для осуществления соответствующего этапа деятельности, а затем карточку для самопроверки выполнения данных ему рекомендаций.

#### Пример осуществления приема затребованной помощи

(на основе материалов В.А. Волковой — учителя  
г. Карачева Брянской области)

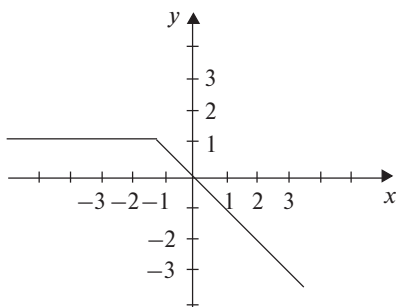
Учащимся сообщается, что по предложенному заданию можно запросить помощь:

- а) по проведению (проверке) анализа условия задачи,
- б) по проведению (проверке) поиска решения задачи,
- в) по проверке плана решения,
- г) по проверке решения.

В соответствии с запросом им будет дана карточка, на лицевой стороне которой представлены рекомендации (левая сторона публикуемых карточек), а на обратной — материалы для самопроверки (или иной вариант решения) (правая сторона публикуемых карточек).

**Задание.** Решите задачу несколькими способами ([75], № 1041).

Вычислите  $\int_{-2}^3 f(x)dx$ , если график функции  $y = f(x)$  изображен на рисунке.



| Проанализируем условие задачи                                      | Результат анализа (карточка № 1)                                                                                                                                                  |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Перечислите все, что можно определить по предложенному рисунку. | 1. По рисунку можно определить:<br>а) функция является кусочной,<br>б) координаты точек, через которые проходит график, в) уравнения каждой части графика ( $y = 1$ , $y = -x$ ). |
| 2. Что известно об искомом интеграле?                              | 2. В искомом интеграле известны границы интегрирования.                                                                                                                           |
| 3. Как связаны обнаруженные по рисунку данные и искомый интеграл?  | 3. а) данный график является графиком подынтегральной функции, б) связаны понятием площади.                                                                                       |
| 4. Что требуется в задании?                                        | 4. Вычислить значение определенного интеграла.                                                                                                                                    |

| Проведем поиск решения                                                                                                                                                                                                                                                  | Результат поиска (карточка № 2)                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Как обычно находим значение определенного интеграла? (Перечислите известные вам способы.)                                                                                                                                                                            | 1. Вычислить определенный интеграл можно аналитически, зная уравнение подынтегральной функции. Можно вычислить, опираясь на понятие площади фигуры.                                                                                                         |
| 2. Что необходимо знать, чтобы произвести вычисления первым способом (вторым способом, ...)? При каких условиях можно пользоваться этим способом? Все ли условия выполняются для данного примера? Какие теоретические сведения могут помочь учесть особенности примера? | 2. Для аналитического способа надо знать уравнение подынтегральной функции, это уравнение должно быть одно, а у нас два. Можно воспользоваться свойством аддитивности определенного интеграла:<br>$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ Для |

Окончание табл.

| Проведем поиск решения                                        | Результат поиска (карточка № 2)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                               | <p>графического способа надо иметь криволинейную трапецию, ограниченную функцией, которая не меняет знака на рассматриваемом промежутке, в данном случае фигура ограничена графиком функции, которая меняет знак на <math>[-2, 3]</math>. Можно воспользоваться свойством, что в случае, если функция принимает отрицательные значения на <math>[a, b]</math>,</p> <p>то <math>\int_a^b f(x)dx = -S</math>.</p> |
| 3. Составьте план выполнения задания обнаруженными способами. | 3. План решения (смотри карточку № 3).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

| План решения аналитическим способом                         | План решения геометрическим способом (карточка № 3)                                   |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1) Найдем уравнения частей графика,                         | 1) Построим фигуры, площади которых требуется вычислить (это трапеция и треугольник), |
| 2) искомый интеграл заменим суммой интегралов,              | 2) найдем площадь каждой фигуры,                                                      |
| 3) вычислим значения полученных интегралов, затем их сумму. | 3) из площади трапеции вычтем площадь треугольника.                                   |

| Решение аналитическим способом                                                                                                                                               | Решение геометрическим способом (карточка № 4)                                                                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\int_{-2}^3 f(x)dx = \int_{-2}^{-1} 1dx + \int_{-1}^3 (-x)dx =$ $= x \Big _{-2}^{-1} - \frac{x^2}{2} \Big _{-1}^3 = (-1+2) - \left( \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = -3$ | $\int_{-2}^3 f(x)dx = S_{\text{трап.}} - S_{\text{треуг.}} =$ $= \frac{1+2}{2} \cdot 1 - \frac{3 \cdot 3}{2} = -3$ |

**Конспекты двух последовательных уроков****Нахождение числа по его дроби****Урок № 1**

***Цели:** Продолжить работу с дробями. Научиться решать задачи на нахождение числа по его дроби. Установить связи с прошлым опытом учащихся. Привлечь учащихся к активному поиску решения задачи.*

**Ход урока**

Чтобы продолжить нашу работу на уроках, вернемся к прошлому уроку, подведем итоги самостоятельной работы.

I. Анализ самостоятельной работы.

**Задание.** В чем заключается допущенная вами ошибка?

Учащиеся называют ошибку и либо сами ставят перед собой задачу с ней справиться, либо учащиеся дают свои рекомендации, как это сделать.

II. Повторение. «Копилка знаний и умений».

Ученики называют, а учитель находит карточку и укладывает в «копилку». В «копилке» на доске полоски-карточки:

«Сложение и вычитание дробей».

«Умножение и деление дробей (чисел)».

«Применение законов сложения и умножения».

«Нахождение дроби от числа».

«Нахождение процентов от числа».

III. Изучение нового. «Нахождение числа по его дроби».

1. Учащиеся читают тему урока и задают вопросы:

Появится ли **новое правило**?

Будем **решать конкретную задачу** и самостоятельно?

**Вести поиск новых знаний, совершать открытие?**

Будем ли **читать учебник и сопоставлять** наши **выводы** с предложениями авторами учебника?

Какую **пользу** принесут нам **новые знания**? И др.

(Эти вопросы записываются на дополнительную доску, чтобы в них увидеть мотив для деятельности.)

## 2. Итак, задача.

Сейчас чудесное время года — зима. Но снег хорош не на катке.

Ребятам нашей школы нужно расчистить для катка  $\frac{2}{5}$  школьного двора, что составляет  $800 \text{ м}^2$ . Какова площадь школьного двора?

Как мы с вами поступим? Мы не пойдем на школьный двор, заснеженный и заметенный, выполнять практическую работу. Как быть?

1. Мы запишем краткое условие.
2. Попробуем воспользоваться прежними знаниями.
3. Попытаемся поискать правило.

На доске:

|                                    |                                                                                   |                                     |                                              |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------|
| Школьный двор — ?                  |  | $x \text{ (м}^2\text{)}$            |                                              |
| Расчистили — $\frac{2}{5}$ ,       |  | $\frac{2}{5}x \text{ (м}^2\text{)}$ | ← записи после<br>черты возни-<br>кают позже |
| что составляет $800 \text{ м}^2$ . |                                                                                   | или $800 \text{ (м}^2\text{)}$ .    |                                              |

Предлагается детям подумать и высказать свои соображения и предложения.

$C_1$ . Мы такие задачи уже решали в 3 классе.

$П_1$ . Воспользуемся правилом третьего класса.

Один ученик формулирует *правило*: Чтобы найти число по значению его дроби, надо это значение разделить на числитель дроби и результат умножить на знаменатель.

Другой объясняет, почему так, ссылаясь на понятие числителя и знаменателя дроби.

$C_2$ . Я вижу, что мне нужно найти по стрелке дробь от числа. Есть правило.

$П_2$ . Но число мне не известно, значит, это число я обозначу за  $x$  и, воспользовавшись правилом, составлю уравнение, используя еще одно данное задачи.

Предложения принимаются. На доске (все выделения и стрелки возникнут позже):

$$\boxed{800 : 2 \cdot 5 = 2000 \text{ (м}^2\text{)}} \quad \frac{2}{5}x = 800, x = \boxed{800 : \frac{2}{5}}, x = 800 \cdot \frac{5}{2}, x = 2000.$$

Ответ:  $2000 \text{ м}^2$ .

Сравнив полученные ответы, делаем вывод, что задача решена верно.

**Звучит вопрос:** Почему, умея решать задачу так, она выделяется в отдельной теме в 6 классе?

**Задание.** Отметить на доске цветным мелом ту часть записи, с помощью которой можно сформулировать новое правило.

**Вывод.** Чтобы найти число по данному значению его дроби, надо это значение разделить на дробь.

3. Предлагается составить свою задачу и записать кратко ее условие в тетрадь. Тот, кто выполнил эту работу, пишет условие на доске, указывая свою фамилию, затем читаем все, решаем устно.

4. Как же пополнить нашу копилку? Зашифровать все такие задачи. Не важно, говорится ли о катке, бананах, пошивочной мастерской, озеленении, певчих птицах и т. д., не важно, какая дробь задана в условии (обыкновенная или десятичная), не важно, какое именно число соответствует указанной дроби. На доске:

|                                                                                                                                     |                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| Число — ?<br>$\frac{a}{b}$ ,  что составляет $C$ . | Число находим<br>$C : \frac{a}{b}$ . |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|

#### IV. Закрепление.

1. Работаем с учебником, анализируем текст п. 18. Учащиеся высказывают свои соображения (им нравится самим совершать открытия).

2. Читаем предложенные задачи № 631, 632, 633. Отвечаем на вопрос: что общего в этих задачах?

3. Переходим к № 634, 635. Выясняем, что с этими задачами легко справиться, применив свои знания о том, что число процентов можно записать дробью, а затем применить найденное правило.

4. Как иначе можно выполнить № 634, 635? (Решаются задачи на проценты.)

5. После обзора опорных задач учащимся предлагается оформить в тетради решение одной из них несколькими способами.

6. Подводятся итоги решению, и что полезного для себя каждый получил на уроке.

7. Домашнее задание:

1) п. 18 (правило),

2) составить свою задачу (с решением в кармашке),

3) попробовать объяснить решение задачи: 40% от 40% некоторого числа  $m$  равны 6,4. Найти число  $m$ .

## Урок № 2

**Цели:** Учиться решать задачи на основе опорной. Искать способы решения одной задачи. Показать применение новых знаний на примерах из жизни.

## Ход урока

I. а) Итоги прошлого урока (чему научились?).

б) На прошлом уроке одной из задач, стоящих перед нами, была такая: Какую пользу принесут нам новые знания? Как вы думаете, как можно ответить на этот вопрос?

На доске записываются предложения учащихся:

- сможет решать более сложные задачи,
- составлять свои задачи,
- распознавать среди других.

II. Закрепление. Сегодня я предлагаю применить свои знания.

На доске написаны краткие условия задач и даны схемы действий. Укажите, какие из них являются верными.

**Задача 1.** Заказ — ?

I завод —  $\frac{8}{25}$

II завод — 0,4

III завод — ост. 280 т

Какие вопросы возникли? (Не указана зависимость, после этого появляются стрелки, показывающие, что части даны от всего заказа.)

| I    | II   | III  | IV   |
|------|------|------|------|
| 1) + | 1) + | 1) − | 1) · |
| 2) − | 2) : | 2) − | 2) + |
| 3) : |      | 3) : | 3) − |
|      |      |      | 4) : |

**Задача 2.** Весь путь — ? (км)

Прошли

— 12%

Осталось — 440 км

| I    | II   | III  |
|------|------|------|
| 1) : | 1) − | 1) − |
|      | 2) · | 2) : |

**Задача 3.**

Площадь сад. уч-ка — ? (м<sup>2</sup>)

Капуста

—  $\frac{2}{7}$

Картофель —  $\frac{1}{4}$  ост. пл.

Помидоры — 42 (м<sup>2</sup>).

| I    | II   | III  |
|------|------|------|
| 1) + | 1) − | 1) − |
| 2) − | 2) · | 2) − |
| 3) : | 3) − | 3) : |
|      | 4) : |      |

**Задача 4.**

Игрушки на елке — ? (шт.)

Шары —  $\frac{5}{24}$ 

Сказочные фигурки — 0,8

Гирлянды

| I    | II   | III  |
|------|------|------|
| 1) + | 1) + | 1) · |
| 2) : | 2) – | 2) + |
|      | 3) : | 3) – |
|      |      | 4) : |

Учащиеся своим «вставанием» сигнализируют о готовности указать верный ход решения.

Проговариваем свое объяснение. Лишние схемы стираются с доски.

III. Работа в группах (по сборнику дидактических материалов оформляют решение задач № 151 и 152).

В это время учитель проверяет выполнение домашнего задания, ищет задачи с интересным содержанием. Листочки вывешивает на доску.

Учащиеся той группы, которая справилась с самостоятельной работой, могут познакомиться с задачами, появившимися на доске.

IV. Итоги работы с высказыванием личного отношения к уроку, степени личного участия («Раньше..., теперь...»)

V. Домашнее задание: 1) Записать решение задачи (с. 101), которую можно назвать «контрольной» задачей по данной теме. 2) Один банк предлагает вкладчикам 12% годовых, другой – 75% того, что предлагает первый банк. А в третьем банке годовые составляют 101% годовых второго банка. В какой банк вы посоветуете внести деньги?

*Приложение 67*

## Урок открытой контрольной работы

### **Разложение многочленов на множители (фрагмент)**

***Цели:** Организовать консультации по возникшим во время изучения темы вопросам, обобщить изученные способы разложения многочленов на множители, выявить типичные ошибки учащихся, определить готовность учащихся к контрольной работе.*

## Ход урока

**Инструктаж-мотивация.** Мы изучили различные способы разложения на множители, рассмотрели применение их в различных ситуациях, пришло время готовиться к контрольной работе. Перед вами карточки-задания, похожие на те, которые будут в контрольной работе. Сегодня вы постарайтесь их выполнить. Вы можете пользоваться тетрадями, учебниками, задавать мне любые вопросы по решению задач, можете консультироваться друг у друга. Ваша задача — разобраться с решением каждого задания. На выполнение всех заданий отводится ... мин.

**Содержание карточек:**

1. Решите уравнение:

а)  $b^3 + 6b^2 + 9b = 0$ ,

б)  $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ .

2. Вычислите

$$\frac{1}{3}(0,87^3 + 2,13^3) + 3 \cdot 0,87 \cdot 2,13.$$

3. Разложите на множители

$$1 - x^2 - 8xy - 16y^2.$$

**Затруднения учащихся и пути их преодоления.** В ходе выполнения заданий возникли следующие ситуации.

1) Запись в тетради ученика:

$$\dots$$

$$b(b + 3)^2 = 0?$$

$$b = 0 \text{ или } (b + 3)^2 = 0.$$

Вопросы у учащихся: «Что делать дальше?» или «Может ли такое быть?»

Вариант диалога:

— Что означает вторая степень?

— Произведение  $(b + 3) \cdot (b + 3)$ .

— Может ли это произведение быть равным нулю?

— Может.

— При каком условии?

— Если хотя бы один из множителей равен нулю ...

2) Запись в тетради ученика:

$$\dots$$

$$(b + 3)^2 = 0,$$

$$b^2 + 6b + 9 = 0.$$

Вопрос учащегося: «Что делать дальше?»

Вариант диалога:

— Зачем выполнено возведение суммы во вторую степень?

— ...?

— Можно ли было поступить по-другому?

— ...?

— Можно ли было воспользоваться условием равенства произведения нулю?

— Да,  $(b + 3) \cdot (b + 3) = 0$  ...

3) Запись в тетради ученика:

....

$$x^2 - 4 = 0,$$

$$x^2 = 4.$$

Вопрос учащегося: «Что с этим делать?»

Вариант диалога:

— Можно решить уравнение, не перенося 4 в правую часть.

— ...?

— Можно ли преобразовать выражение в левой части?

$$-(x - 2) \cdot (x + 2) = 0.$$

— Можно ли решить такое уравнение?

— Можно.

**Разбор заданий.** За несколько минут до окончания отведенного на работу с карточками времени выясняются заявки на необходимость оформления на доске решений. Отдельно на доске заранее выписаны ответы ко всем заданиям.

Когда оформлены заявленные примеры, учитель обращает внимание класса на написанные ответы и решения. Учащимся дается время, чтобы сверить ответы, решения и исправить оставшиеся ошибки.

**Подведение итогов.** С учащимися выясняется необходим или нет дальнейший тренаж по определенным заданиям контрольной работы. В случае необходимости, вывешивается список примеров, из которого можно самим составить домашнее задание.

На итог можно вынести фрагменты записей в тетрадях (не называя фамилий) и заслушать советы учащихся по преодолению возникших затруднений.

## Использование диагностических заданий на уроках математики

(приложение разработала О.В. Кваша — аспирантка БГУ)

**Учебная диагностика** — совокупность действий учителя и учащихся, направленных на выявление каждым учащимся особенностей осуществления своей учебной деятельности, причин этих особенностей с целью обогащения учебного опыта учащегося.

*Объектом* учебной диагностики являются особенности осуществления учебной деятельности. Учебная деятельность осуществляется в ходе выполнения определенной последовательности действий, которые в учебном процессе связаны с умениями. Поэтому в качестве особенностей осуществления учебной деятельности выступают, с одной стороны, успешные достижения учащихся, с другой стороны — ошибки, трудности, возникающие в ходе изучения материала.

*Целью учебной диагностики* является обогащение учебного опыта учащегося, которое достигается с помощью:

- 1) ликвидации ошибок, выявления и устранения их причин в ходе учебной деятельности;
- 2) устранения проблем в знаниях и умениях учащихся, формируемых в ходе учебной деятельности;
- 3) формирования полных и правильных когнитивных структур;
- 4) включения учащегося в диагностическую деятельность, в ходе которой он учится управлять своим обучением, выясняя для себя свои трудности и проблемы, их причины и самостоятельно ликвидируя их.

*Субъектами* диагностической деятельности выступают и учитель, и учащиеся. Учащиеся в процессе диагностики выявляют для себя свои успехи, трудностей, причины возникших трудностей и в случае необходимости их корректируют. Задача учителя — организовать диагностику. Эта работа проходит в *несколько этапов*:

- 1) определить место осуществления диагностики при изучении учебного предмета;
- 2) разработать содержание диагностики (или воспользоваться готовыми диагностическими методиками, если они есть);
- 3) организовать и провести диагностическую работу с учащимися в рамках урока или домашнего задания;
- 4) проанализировать вместе с учащимися результаты выполненной работы.

Мы выделяем следующие *виды учебной диагностики*:

- **Входная диагностика.** Направлена на предотвращение трудностей, связанных с *прошлым опытом учащегося*, которые могут оказать негативное влияние на изучение нового материала. Ее объектом будут те составляющие учебного опыта учащихся, которые сформированы при изучении иных тем (разделов, курсов) и которые будут востребованы при изучении нового материала.
- **Текущая диагностика.** Направлена на оказание своевременной помощи учащимся в усвоении *ключевого* материала темы. Объектом текущей диагностики являются особенности учебной деятельности учащихся, связанной с владением материалом изучаемого фрагмента школьного курса предмета (темы), с усвоением его наиболее важных моментов.
- **Итоговая диагностика.** Направлена на оказание помощи учащемуся установить *взаимосвязь* между только что изученным материалом и имеющимся у него на данный момент учебным опытом, выявить *связи* как в теоретическом материале темы, так и в комплексном его использовании. Объектом итоговой диагностики являются особенности учебной деятельности учащихся по установлению этих связей.

Включаются учащиеся в диагностическую деятельность в ходе выполнения диагностических заданий, которые являются основным компонентом содержания учебной диагностики.

**Диагностическое задание** — комплексное задание, помогающее учащимся выявить особенности осуществления собственной учебной деятельности, причины этих особенностей и провести, в случае необходимости, коррекцию.

В соответствии с перечисленными видами учебной диагностики можно выделить *виды диагностических заданий*: задания входной диагностики, задания текущей диагностики и задания итоговой диагностики.

Перечислим *требования* к составлению диагностических заданий. Эти задания составляются таким образом, чтобы:

- обеспечить успешность выполнения учащимися самого задания;
- дать возможность учащимся выявить свои успехи, ошибки и трудности;
- дать возможность каждому учащемуся провести коррекцию своих ошибок и проблем, возникших в ходе учебной деятельности;
- включить учащихся в рефлексивную деятельность;
- не требовать больших временных затрат по выполнению и по проверке результатов.

Диагностическое задание, как правило, имеет следующую структуру:

1) *организационная часть* (она содержит обращение к учащимся и инструкцию по выполнению задания);

2) *основная часть* (она содержит блоки заданий на основные группы умений; каждый блок имеет заглавие, отражающее цель его выполнения);

3) *коррекционная часть* (она может представлять собой как отдельный блок, так и «раствориться» в заданиях основного блока).

Конструирование диагностических заданий является одним из самых важных и трудоемких этапов в диагностической деятельности учителя. Оказать помощь в этой работе может использование *технологии конструирования диагностического задания*. Для разработки диагностического задания необходимо выполнить следующую работу:

1. Проанализировать изучаемый материал и выделить общие и специфические умения, с которыми связаны особенности осуществления учебной деятельности на данном этапе.

2. Разбить общие умения на группы и озаглавить каждую группу (название должно носить рефлексивный для учащихся характер).

3. С учетом специфических умений разработать задания, связанные с каждой выделенной группой умений (или воспользоваться подходящими заданиями из учебника).

4. Добавить коррекционную часть для каждого задания или изменить одни из составленных заданий таким образом, чтобы они обеспечивали коррекцию для других.

5. Написать обращение к учащимся, учитывая необходимость мотивации, и добавить четкую инструкцию по выполнению каждого задания.

6. Продумать организацию проводимой работы, способ проверки результатов и внести, если необходимо, изменения в основную и коррекционную часть задания.

### **Пример задания входной диагностики по теме «Тождества сокращенного умножения»**

**Технология составления.** Анализ учебной деятельности учащихся по *содержательной линии тождеств* позволил выделить следующие общие умения, связанные с применением тождеств:

- умение подставлять различные значения буквы в буквенное выражение;

- умение определять, подходит ли данное выражение под заданную структуру алгебраического выражения;
- умение выделять общую структуру нескольких буквенных выражений и составлять различные выражения по данной структуре.

Анализ учебной деятельности учащихся *по теме «Тождества сокращенного умножения»* позволил выделить следующие **специфические умения**, связанные с применением тождеств сокращенного умножения:

- умение выполнять операции с одночленами (возводить в степень, находить удвоенное произведение одночленов, представлять одночлен в виде степени, произведения нескольких одночленов);
- умение работать с многочленами (раскрывать скобки, приводить подобные).

*Анализ прошлого учебного опыта учащихся* показал, что к началу изучения темы «Тождества сокращенного умножения» выделенные общие умения ни на одной ранее изученной теме специально не формировались, поэтому для обогащения учебного опыта учащихся по умению подставлять различные значения буквы в буквенное выражение было составлено задание 1, по умению определять, подходит ли данное выражение под заданную структуру алгебраического выражения — задания 2 и 3, по умению выделять общую структуру нескольких буквенных выражений и составлять различные выражения по данной структуре — задания 4 и 5.

### Задание

Уважаемый семиклассник!

Скоро тебе предстоит изучить новую, очень важную и интересную тему, которая поможет тебе проще и быстрее преобразовывать всевозможные буквенные выражения и пригодится на уроках математики и физики во всех следующих классах, даже в 11-м! Проверь свой уровень готовности к предстоящей новой теме, выполнив предложенные задания. В задании 2 нужно выбрать несколько вариантов (обвести соответствующую букву), в остальных заданиях вписать требуемые выражения или схемы в указанные вот таким образом \_\_\_\_\_ места.

Желаем удачи!

1. Проверь, умеешь ли ты подставлять в буквенное выражение значения букв. Запиши, чему равно выражение  $a^2 + 2ab + b^2$ , если

- а)  $a = m, b = n$ ; \_\_\_\_\_  
 б)  $a = 2x^2, b = 3y$ ; \_\_\_\_\_  
 в)  $a = 3, b = x^2$ ; \_\_\_\_\_  
 г)  $a = m - 2, b = 1$ ; \_\_\_\_\_  
 д)  $a = -4x, b = 5$ ; \_\_\_\_\_  
 е)  $a = -3, b = \frac{m}{2}$ ; \_\_\_\_\_

2. Проверь, умеешь ли ты определять, нужную ли структуру (схему) имеют выражения? Выбери среди предложенных те выражения, которые могут быть представлены в виде

$$\Delta^2 - \square^2.$$

- а)  $25 - y^2$ ;      в)  $m^2 - n^2$ ;      д)  $(3 + c)^2 - 9d^2$ ;  
 б)  $3 + y - x^2$ ;      г)  $4 + 9a^2$ ;      е)  $1 - 16x^4$ .

3. Проверь, можешь ли ты увидеть, что стоит за каждой буквой выражения предложенного вида. В выражение  $a^2 + 2ab + b^2$  вместо  $a$  и  $b$  подставляли различные значения и получили 6 выражений. Запиши, чему в каждом случае равны  $a$  и  $b$ .

- а)  $4x^4 + 12x^2y + 9y^2$ ;       $a =$  \_\_\_\_\_;       $b =$  \_\_\_\_\_;  
 б)  $9 + 6x^2 + x^4$ ;       $a =$  \_\_\_\_\_;       $b =$  \_\_\_\_\_;  
 в)  $9 - 3m + \frac{m^2}{4}$ ;       $a =$  \_\_\_\_\_;       $b =$  \_\_\_\_\_;  
 г)  $m^2 + 2mn + n^2$ ;       $a =$  \_\_\_\_\_;       $b =$  \_\_\_\_\_;  
 д)  $16x^2 - 40x + 25$ ;       $a =$  \_\_\_\_\_;       $b =$  \_\_\_\_\_;  
 е)  $(m - 2)^2 + 2(m - 2) + 1$ ;       $a =$  \_\_\_\_\_;       $b =$  \_\_\_\_\_.

4. А теперь попробуй самостоятельно определить общие признаки у нескольких выражений и записать их схему. Итак, даны 4 выражения. Выдели общие признаки выражений в каждом случае. Запиши схематично общий вид выражений в каждом случае, например:

$$\left. \begin{array}{l} 2x^2 + 4 \\ 18m^2 + n^2 \\ 2 + 9y^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2\Delta^2 + \square^2.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } a^2 - 3 \\ 4x^2 - 3y \\ 1 - 3k^2 \\ m^2 - 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{б) } 8 + 2x^2 \\ a^3 + 2 \\ 8m^3 + 2n^4 \\ -x^3 + 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{в) } 5 + x^2 \\ 25 + 4m^2 \\ 5a + 1 \\ 5m^3 + 25 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{г) } 8 + x^3 \\ 27a^3 - 1 \\ m^3 + 8n^3 \\ 64x^3 + y^6 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

5. Придумай сам какую-нибудь схему и запиши ее. Составь и запиши несколько выражений по своей схеме.

**Пример задания текущей диагностики  
по теме «Тождества сокращенного умножения»**

**Технология составления.** Анализ учебной деятельности учащихся по *содержательной линии тождеств* позволил считать, что общие умения, которые должны быть сформированы в теме, связаны с умением работать по формуле:

- умение записать вид и схему формулы;
- умение читать формулу;
- умение работать с признаками формулы;
- умение работать по алгоритму применения формулы;
- умение применять формулу в стандартных ситуациях;
- умение применять формулу в иных ситуациях.

Специфические умения, которые должны быть сформированы в теме, связаны с конкретизацией выделенных общих умений.

Выделенные умения можно объединить в разделы — туры.

**Тур I. Знаю ли я формулу?**

1. Запишите общую схему (вид) формулы квадрата суммы: \_\_\_\_\_

Запишите правую часть равенства  $(\Delta + \square)^2 =$  \_\_\_\_\_

Эта формула называется: \_\_\_\_\_

2. Вставьте пропущенные слова в словесную формулировку данной формулы:

Квадрат \_\_\_\_\_ двух \_\_\_\_\_ равен \_\_\_\_\_  
первого выражения, плюс \_\_\_\_\_ произведение  
\_\_\_\_\_ и \_\_\_\_\_ выражений, \_\_\_\_\_ квад-  
рат \_\_\_\_\_ выражения.

3. Выберите, в каких случаях можно применить формулу квадрата суммы:

- а)  $(x^2 + 1)^2$ ;    в)  $(3a + 2b)^2$ ;    д)  $(\frac{m}{2} + 3)^2$ ;    ж)  $(1 - a)^4$ ;  
б)  $a^2 + b^2$ ;    г)  $(-x + y)^2$ ;    е)  $(-x - 4)^2$ ;    з)  $(x - 3)(x - 3)$ .

**Тур II. Умею ли я выполнять каждый шаг применения формулы?**

1. Выберите случаи, в которых формула квадрата суммы применена верно.

а)  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ;

б)  $(c + d)^2 = c^2 + cd + d^2$ ;

в)  $a^2 + b^2 = a^2 + ab + b^2$ ;

г)  $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ ;

д)  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ ;

е)  $(m + n)^2 = m^2 + 2m^2n^2 + n^2$ .

Исправьте красной ручкой неверные решения.

2. Заполните пропуски в предложенном решении задания:

*Представьте в виде многочлена выражение  $(-2x - 0,5y^3)^2$ .*

| Решение                                                                                                                                            | Алгоритм                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(-2x - 0,5y^3)^2 = (-2x + (-0,5y^3))^2 =$                                                                                                         | Устанавливаем, что выражение является квадратом двучлена, а именно, квадратом суммы $(a + b)^2$ , где $a = -2x$ , $b = -0,5y^3$ |
| <div style="text-align: center;"> <math>\dots</math><br/>  </div> | Применяем формулу квадрата суммы<br>$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$<br>и записываем правую часть формулы                          |
| $= 4x^2 + 2xy^3 + 0,25y^6$                                                                                                                         | $\dots$                                                                                                                         |

3. Для применения формулы квадрата суммы к выражению  $(4a^2b + 0,1b)^2$ , выясните, чему равен

• квадрат первого выражения:

а)  $16a^2b^2$ ;    б)  $16a^4b^2$ ;    в)  $4a^4b^2$ ;    другое \_\_\_\_\_;

• удвоенное произведение:

а)  $8a^2b^2$ ;    б)  $0,4a^2b$ ;    в)  $0,8a^2b^2$ ;    другое \_\_\_\_\_;

• квадрат второго выражения:

а)  $0,1b^2$ ;    б)  $0,1b$ ;    в)  $0,01b^2$ ;    другое \_\_\_\_\_.

**Тур III. Знаю ли я, для каких выражений можно применить формулу? Умею ли я ее применять?**

1. Примените формулу квадрата суммы для каждого из выражений:

а)  $(u + v)^2 =$  \_\_\_\_\_;

б)  $(-m + 1)^2 =$  \_\_\_\_\_;

- в)  $(2 - n)^2 =$  \_\_\_\_\_;  
г)  $(-u - v)^2 =$  \_\_\_\_\_;  
д)  $(x^2 + y)^2 =$  \_\_\_\_\_;  
е)  $(5x^3 + 2y)^2 =$  \_\_\_\_\_;  
ж)  $(5x - 2y)^2 =$  \_\_\_\_\_;  
з)  $(1 + \frac{a}{3})^2 =$  \_\_\_\_\_.

2. Выберите среди перечисленных все необходимые признаки выражения, к которому можно применить формулу квадрата суммы:

- а) это степень с показателем 2;  
б) основание степени — сумма двух выражений (или может быть представлено в виде суммы);  
в) каждое выражение в основании степени должно быть буквенным;  
г) это сумма двух выражений;  
д) каждое выражение является степенью с показателем 2.

3. Составьте и запишите как можно больше разнообразных выражений, на примере которых вы смогли бы научить другого человека применять формулу квадрата суммы.

### Пример задания итоговой диагностики по теме «Призма»

**Технология составления.** Анализ учебной деятельности учащихся по содержательной линии геометрических фигур и по умению решать задачи темы «Призма» позволил выделить умения учащихся по установлению следующих связей:

- умение соотносить словесное описание тела в тексте задачи с его графическим изображением;
- связи между понятиями темы (призма — различные виды призм);
- связи между видами призм и их элементами;
- умение соотносить словесное описание элементов призмы в тексте задачи с их графическим изображением и при необходимости строить их.

Перечисленные связи относятся к теоретическим основам темы, поэтому соответствующие задания можно отнести к теоретическому блоку.

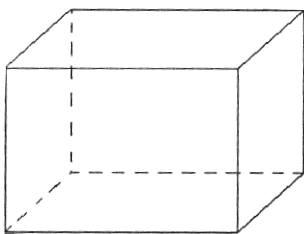
Анализ учебной деятельности учащихся по особенностям темы по отношению к другим темам, относящимся к содержательной линии геометрических фигур, позволил сделать вывод, что в теме формируются умения строить сечения многогранников плоскостью, поэтому в итоговую диагностику должно быть включено задание на построение сечений.

Комплексное применение знаний по теме «Призма» можно диагностировать на составлении заключений задачи с данным условием, на анализе данных задачи при изменении вида призмы.

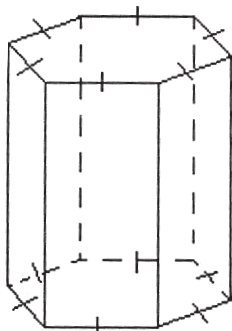
**Первый блок. Знаю ли я виды призмы и ее элементы?**

**Задание 1.** Даны начала условий задач и рисунки призм. Впишите в скобки номера тех рисунков, которые соответствуют каждой задаче.

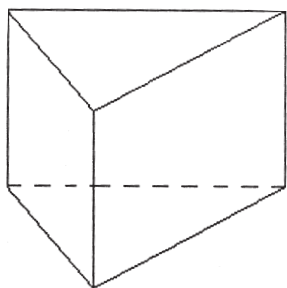
- а) Через точку на ребре треугольной призмы... ( ).
- б) Ребра прямоугольного параллелепипеда... ( ).
- в) Дана наклонная четырехугольная призма, у... ( ).
- г) Основанием прямой призмы служит треугольник... ( ).
- д) В призме... ( ).
- е) Боковое ребро наклонной призмы... ( ).
- ж) Через сторону нижнего основания правильной призмы... ( ).
- з) У параллелепипеда три грани... ( ).
- и) У призмы одно боковое ребро перпендикулярно плоскости основания... ( ).
- к) В прямом параллелепипеде... ( ).



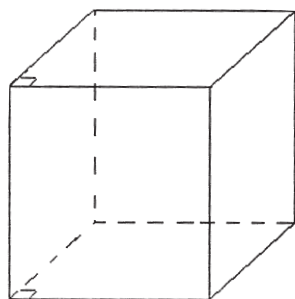
1



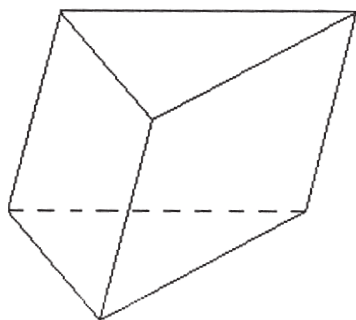
2



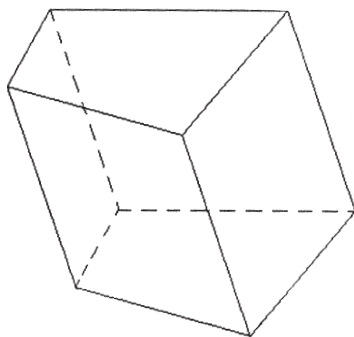
3



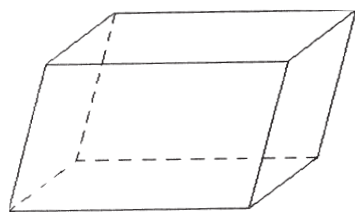
4



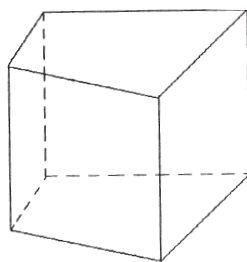
5



6



7



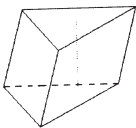
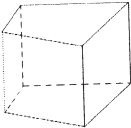
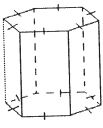
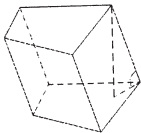
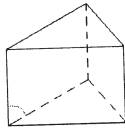
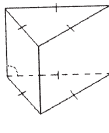
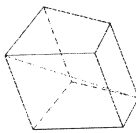
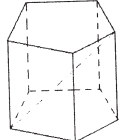
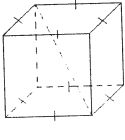
8

**Задание 2.** Даны начала условий задач. Выделите на рисунках задания 1 те данные, которые указаны в каждой задаче:

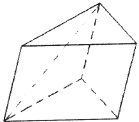
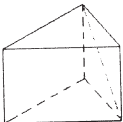
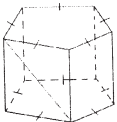
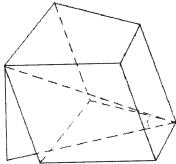
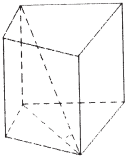
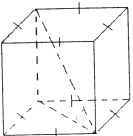
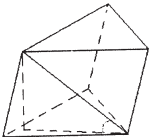
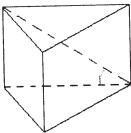
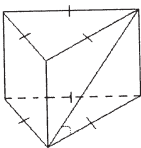
- а) В наклонной треугольной призме высота 45 см.....
- б) В прямой четырехугольной призме стороны основания равны 10 см, 21 см, 25 см.....
- в) Боковое ребро  $m$  наклонной четырехугольной призмы наклонено к плоскости основания под углом  $\alpha$  .....
- г) Через сторону нижнего основания  $n$  правильной призмы .....
- д) В прямоугольном параллелепипеде линейные измерения  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .....
- е) У параллелепипеда меньшая диагональ  $d$  образует с плоскостью основания угол  $60^\circ$  .....
- ж) Диагональ  $l$  большей грани прямой треугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом  $\beta$ .....

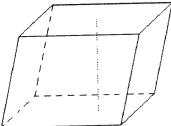
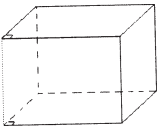
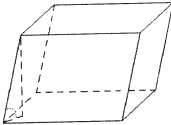
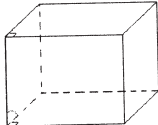
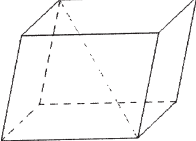
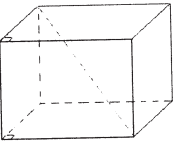
**Задание 3.** Проверить правильность заданий 1 и 2, используя предложенную справочную таблицу изображений призм и их элементов. При необходимости исправить допущенные тобой ошибки.

**Справочная таблица изображений призм и их элементов**

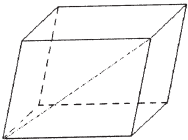
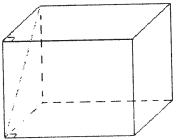
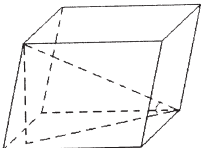
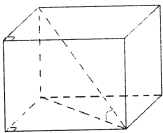
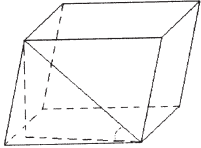
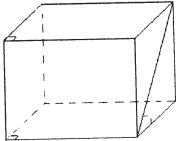
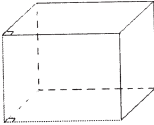
| Элементы                                          | Наклонная призма                                                                    | Прямая призма                                                                       | Правильная призма                                                                   |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Высота                                            |    |    |    |
| Угол наклона бокового ребра к плоскости основания |  |  |  |
| Диагональ призмы                                  |  |  |  |

Окончание табл.

| Элементы                                                          | Наклонная призма                                                                  | Прямая призма                                                                     | Правильная призма                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Диагональ боковой грани                                           |  |  |  |
| Угол наклона диагонали призмы к плоскости основания               |  |  |  |
| Угол наклона диагонали боковой грани призмы к плоскости основания |  |  |  |
| Линейные измерения                                                | —                                                                                 | —                                                                                 | —                                                                                 |

| Элементы                                          | Параллелепипед                                                                      | Прямоугольный параллелепипед                                                        |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Высота                                            |   |   |
| Угол наклона бокового ребра к плоскости основания |  |  |
| Диагональ призмы                                  |  |  |

Окончание табл.

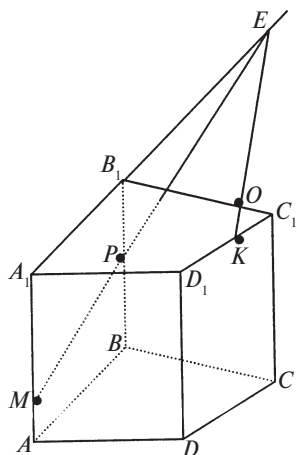
| Элементы                                                          | Параллелепипед                                                                    | Прямоугольный параллелепипед                                                      |
|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Диагональ боковой грани                                           |  |  |
| Угол наклона диагонали призмы к плоскости основания               |  |  |
| Угол наклона диагонали боковой грани призмы к плоскости основания |  |  |
| Линейные измерения                                                | —                                                                                 |  |

### Второй блок. Умею ли я строить сечение призмы плоскостью?

**Задание 1.** На рисунке показано начало построения сечения четырехугольной призмы плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $P$ ,  $K$ . Опишите каждый шаг выполненного построения.

Из списка возможных обоснований выберите то, которое соответствует выполненному шагу, и проставьте номер выбранного обоснования в таблицу.

Из списка возможных результатов построения выберите тот, который соответствует выполненному шагу, и проставьте номер выбранного результата в таблицу.



| Шаги | Обоснование | Результат |
|------|-------------|-----------|
| 1.   |             |           |
| 2.   |             |           |
| 3.   |             |           |
| 4.   |             |           |

### Список обоснований.

1. Если прямая, лежащая в одной из пересекающихся плоскостей, пересекает другую плоскость, то она пересекает и линию пересечения плоскостей.

2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.

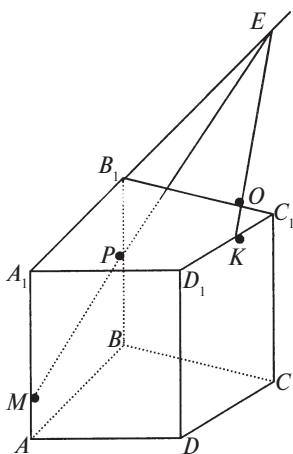
3. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии пересечения плоскостей параллельны.

4. Вершины сечения многогранника плоскостью лежат на ребрах многогранника.

**Список результатов.**

1. Сторона сечения.
2. Вершина сечения.
3. Точка пересечения прямой, лежащей в секущей плоскости, с плоскостью грани.
4. Прямая пересечения секущей плоскости с плоскостью грани.

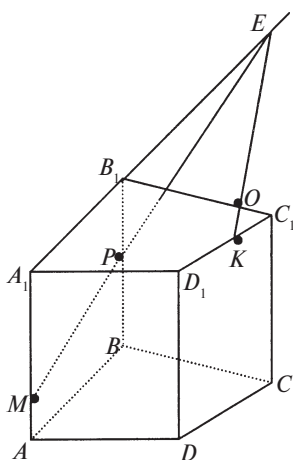
**Задание 2.** Продолжите начатое построение. Предложите два возможных варианта.

**Вариант 1.**

Построение:

5. \_\_\_\_\_.
6. \_\_\_\_\_.
7. \_\_\_\_\_.
8. \_\_\_\_\_.
9. \_\_\_\_\_.

искомое сечение

**Вариант 2.**

Построение:

5. \_\_\_\_\_.
6. \_\_\_\_\_.
7. \_\_\_\_\_.
8. \_\_\_\_\_.
9. \_\_\_\_\_.

искомое сечение

Проверьте, одинаковые ли сечения получились в двух вариантах.

**Третий блок. Умею ли я определять, какие элементы призмы можно вычислить по данным задачи, достаточно ли данных, есть ли лишние данные.**

**Задание 1.** Известно, что в прямом параллелепипеде стороны основания равны  $a$  и  $b$ , угол между ними содержит  $60^\circ$ . Большая диагональ основания равна меньшей диагонали параллелепипеда.

Сделайте чертеж и составьте список тех сведений о призме, которые можно вычислить по указанным данным. В составленном списке отметьте знаком «+» те сведения, способ вычисления которых вы знаете, знаком «—» те сведения, для вычисления которых вам требуется консультация.

| Чертеж | По данным задачи<br>можно найти: | Отметка<br>(+ или —) |
|--------|----------------------------------|----------------------|
|        | 1.                               |                      |
|        | 2.                               |                      |
|        | 3.                               |                      |
|        | 4.                               |                      |
|        | 5.                               |                      |
|        | 6.                               |                      |
|        | 7.                               |                      |
|        | ...                              |                      |

**Задание 2.** Пусть вместо прямого параллелепипеда в задании 1 будет дан наклонный. Определите, достаточно ли указанных данных для вычисления высоты наклонного параллелепипеда (да, нет). Если данных недостаточно, то дополните условие задачи достаточными, на ваш взгляд, дополнительными данными.

**Задание 3.** Пусть вместо прямого параллелепипеда в задании 1 будет дан прямоугольный. Определите, будет ли в таком случае условие задачи содержать противоречивые данные (да, нет). Если условие будет иметь противоречивые данные, то исключите их и сформулируйте условие задачи и ее вопрос.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Под ред. С.А. Теляковского. М., 1989.
2. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под ред. С.А. Теляковского. М., 1989.
3. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / Под ред. С.А. Теляковского. М., 1990.
4. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. М., 1995.
5. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. М., 1995.
6. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин и др. М., 1995.
7. Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для 10—11 классов средней школы / Под ред. А.Н. Колмогорова. М., 1990.
8. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия для 7—9 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. М., 1992.
9. *Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И.* Геометрия для 10—11 классов: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. М., 1992.
10. Аннотационный справочник статей журнала «Математика в школе» / Сост. И.Е. Малова и др. Брянск, 1996.
11. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф.* и др. Геометрия 7—9: Учебник для 7—9 классов средней школы. М., 1990.
12. *Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф.* и др. Геометрия 10—11: Учебник для 7—9 классов средней школы. М., 1992.

13. *Бабанский Ю.К.* Оптимизация учебно-воспитательного процесса (Методические основы). М., 1982.
14. *Барыбин С.К.* Методика преподавания алгебры. М., 1965.
15. *Башмаков М.И.* Алгебра и начала анализа: Учебник для 10—11 классов средней школы. М., 1991.
16. *Башмаков М.И.* Алгебра и начала анализа: Учебник для 10—11 классов средней школы. 4-е изд. испр. и доп. СПб., 1998.
17. *Березин В.Н.* и др. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике: Кн. для учителя. М., 1985.
18. *Бородуля И.Т.* Тригонометрические уравнения и неравенства. М., 1989.
19. *Бохан К.А.* и др. Курс математического анализа. Т. 1. М., 1965.
20. *Виленкин Н.Я., Чесноков А.С.* и др. Математика: Учебник для 5 класса ср. шк. М., 1992.
21. *Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбург С.И.* Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и классов с углубл. изуч. математики. М., 1992.
22. Внеклассная работа по математике / Под ред. С.И. Шварцбурда: Кн. для учителя. М., 1984.
23. *Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Завич Л.И.* Сборник задач по алгебре для 8—9 классов. М., 2005; Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа: Методич. рекомендации и дидакт. материалы: Пособие для учителя / М.Л. Галицкий, М.М. Мошкович, С.И. Шварцбург. М., 1986.
24. Геометрия: Учеб. пособие для 9 и 10 классов / В.М. Клопский, З.А. Скопец, М.И. Ягодовский. М., 1983.
25. *Гельфман Э.Г.* и др. Десятичные дроби в Муми-доме: Учеб. пособие по математике для 5 класса. Томск, 1994.
26. *Гельфман Э.Г.* и др. Десятичные дроби в Муми-доме: Практикум. Учеб. пособие по математике для 5 класса. Томск, 1993.
27. *Гельфман Э.Г.* и др. Положительные и отрицательные числа в театре Буратино. Учеб. пособие по математике для 6 класса. Томск, 1993.
28. *Гельфман Э.Г.* и др. Задачник про рациональные числа да про Ивана с Еленой. Учеб. пособие по математике для 6 класса. Томск, 1994.

29. Гельфман Э.Г. и др. Про Елену Прекрасную, Ивана-царевича и обыкновенные дроби. Учеб. пособие по математике для 6 класса. Томск, 1995.
30. Гельфман Э.Г. и др. Дело о делимости и другие рассказы. Учеб. пособие по математике для 6 класса. Томск, 1994.
31. Гельфман Э.Г. и др. Знакомство с алгеброй. Томск.
32. Гельфман Э.Г. и др. Тождества сокращенного умножения. 7 класса. Томск, 1995.
33. Гельфман Э.Г. и др. Алгебраические дроби. Учебник для 7 класса. Томск, 1995.
34. Гельфман Э.Г. и др. Действительные числа. Иррациональные выражения. Учебник для 8 класса. Томск, 1997.
35. Гельфман Э.Г. и др. Квадратные уравнения. Учебник для 8 класса. Томск, 1996.
36. Гельфман Э.Г. и др. Сказка о спящей красавице или функция. Учебник для 9 класса. Томск, 1996.
37. Гельфман Э.Г. Квадратичная функция. Томск, 1998.
38. Геометрия: Учеб. пособие для 6—8 классов средней школы // А.Н. Колмогоров, А.Ф. Семенович, Р.С. Черкасов. М., 1980.
39. Глейзер Г.И. История математики в школе (4—6 классы). М., 1981.
40. Глейзер Г.И. История математики в школе (7—8 классы). М., 1982.
41. Глейзер Г.И. История математики в школе (9—10 классы). М., 1983.
42. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики: Кн. для учителя. М., 1990.
43. Гусев В.А., Литвиненко В.Н. и др. Практикум по решению математических задач. Геометрия. М., 1985.
44. Гусев В.А. Геометрия в 6, 7, 8, 9 классах.
45. Далингер В.А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя. М., 1991.
46. Демидова Т.Е., Тонких А.П. Текстовые задачи и методы их решения. М., 1999.
47. Денищева Л.О., Дудницын Ю.П. и др. Алгебра и начала анализа в 9—10 классах. М., 1988.

48. *Епишева О.Б., Крупич В.И.* Учить школьников учиться математике: Формирование приемов учебной деятельности: Кн. для учителя. М., 1990.

49. Журнал «Математика в школе».

50. *Земляков А.Н.* Геометрия в 9 классе: Метод. рекомендации к преподаванию курса геометрии по учеб. пособию А.В.Погорелова: Пособие для учителя. М., 1988.

51. *Земляков А.Н.* Геометрия в 10 классе: Метод. рекомендации к преподаванию курса геометрии по учеб. пособию А.В.Погорелова: Пособие для учителя. М., 1989.

52. *Зильберберг Н.И.* Урок математики: Подготовка и проведение: Кн. для учителя. М., 1995.

53. *Зотов Ю.Б.* Организация современного урока: Кн. для учителя. М., 1984.

54. *Карнацевич Л.С.* Изучение геометрии в 6 классе, в 7 классе, в 8 классе. М., 1983—1985.

55. *Клименченко Д.В.* Задачи по математике для любознательных: Кн. для учащихся 5—6 классов сред. шк. М., 1992.

56. *Коваленко В.Г.* Дидактические игры на уроках математики: Кн. для учителя. М., 1990.

57. *Кордемский Б.А., Ахадов А.А.* Удивительный мир чисел: Кн. для учащихся. М., 1986.

58. *Кострикина Н.П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 4—5 классов: Кн. для учителя. М., 1986; в курсе алгебры 7—9 классов: Кн. для учителя. М., 1991.

59. *Крамор В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. М., 1990.

60. *Крамор В.С.* Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. М., 1992.

61. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е.И. Ляшенко и др. М., 1988.

62. *Ляпин С.Е.* и др. Методика преподавания математики в восьмилетней школе. М., 1965.

63. *Малова И.Е.* и др. Базовые методики обучения математике: Учеб. пособие для студентов физико-математических факультетов пединститутов и педуниверситетов. Брянск, 2001.

64. Математика: Учебник для 5 класса общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев и др. М., 1994.
65. Математика: Учебник-собеседник для 5—6 классов сред. шк. / Л.Н. Шеврин, А.Г. Гейн, И.О. Коряков, М.В. Волков. М., 1989.
66. Математика в школе: Сб. нормат. документов / Сост. М.Р. Леонтьева и др. М., 1991.
67. Математические диктанты для 5—9 классов: Кн. для учителя/ Е.Б. Арутюнян и др. М., 1991.
68. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Ю.М. Колягин и др. М., 1980.
69. Методика преподавания математики в средней школе: Частные методики / Ю.М. Колягин и др. М., 1977.
70. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика / Сост. А.А. Столяр, Л.С. Черкасов. М., 1985.
71. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика / Сост. В.И. Мишин. М., 1987.
72. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчишина, Н.С. Подходова, И.М. Смирнова, О.В. Холодная, И.С. Якиманская. М., 2003.
73. Методика преподавания математики (Рекомендации к государственному экзамену) / Сост. И.Е. Малова, Г.Е. Пуличева, М.А. Скоробогатая. Брянск, 1990.
74. Методические рекомендации по обучению учащихся решению задач на построение в школьном курсе геометрии / И.Е. Малова. Брянск, 1989.
75. *Мордкович А.Г.* Алгебра для 7, 8, 9 классов. М.; Алгебра и начала анализа. 10—11 классы: Учебник для общеобразоват. учреждений. М., 2000.
76. *Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С.* Математическая шкатулка: Пособие для учащихся. М., 1984.
77. *Новик И.А.* Практикум по методике преподавания математики. Минск, 1984.
78. *Нурк Э.Р., Тельмаа А.Э.* Математика: Учеб. для 5 класса ср. шк. Учеб. для 6 классов ср. шк. М., 1989.
79. Оборудование кабинета математики: Пособие для учителей / В.Г. Болтянский, М.Б. Волович и др. М., 1981.

80. *Окунев А.А.* Спасибо за урок, дети! О развитии творческих способностей учащихся: Кн. для учителя: Из опыта работы. М., 1988.

81. Основные вопросы методики преподавания математики: Рекомендации для студентов и учителей / Сост. З.И. Воронкова и др. Брянск, 1995.

82. *Панчищина В.А.* и др. Геометрия для младших школьников. Часть I. Томск, 1995.

83. *Панчищина В.А.* и др. Геометрия для младших школьников. Часть II. Томск, 1995.

84. *Панчищина В.А.* и др. Геометрия для младших школьников. Часть III. Томск, 1998.

85. *Петраков И.С.* Математические кружки в 8—10 классах: Кн. для учителя. М., 1992.

86. *Петрушкин С.Ф., Сидорина М.С.* Педагогика: курс лекций для студентов пед. вузов и слушателей курсов повышения квалификации работников образования по разделу «Педагогические теории, системы, технологии». Брянск, 1996.

87. *Пичурин Л.Ф.* За страницами учебника алгебры: Кн. для учащихся 7—9 классов ср. шк. М., 1990.

88. Планирование обязательных результатов обучения математике / Л.О. Денищева, Л.В. Кузнецова и др.; Сост. В.В. Фирсов. М., 1989.

89. Повышение эффективности обучения математике в школе: Кн. для учителя: Из опыта работы / Сост. Г.Д. Глейзер. М., 1989.

90. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учебник для 7—11 классов средней школы. М., 1991.

91. *Пойя Дж.* Как решать задачу. М., 1959.

92. Практикум по методике преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Т.В. Автономова, С.Б. Верченко, В.А. Гусев и др.; Под ред. В.И. Мишина. М., 1993.

93. Программы средней общеобразовательной школы: Математика. М., 1988.

94. *Росошек С.К.* и др. Системы уравнений. Учебник для 9 класса. Томск, 1996.

95. Самостоятельная деятельность учащихся при обучении математике (формирование умений самостоятельной работы): Сб. статей / Сост. С.И. Демидова, Л.О. Денищева. М., 1991.

96. *Саранцев Г.И.* Методика обучения математике в средней школе: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М., 2002.

97. *Совайленко В.К.* Система обучения математике в 5—6 классах: Кн. для учителя: Из опыта работы. М., 1991.

98. *Столяр А.А.* Педагогика математики. Минск, 1986.

99. Теоретические основы обучения математике в средней школе: Учеб. пособие / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Т.П. Григорьева, Л.И. Кузнецова; Под ред. Т.А. Ивановой. Н. Новгород, 2003.

100. Факультативный курс по математике: учебное пособие для 7—9 классов ср. шк. / Сост. И.Л. Никольская. М., 1991.

101. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. II том. М., 1962.

102. *Фридман Л.М., Турецкий Е.Н.* Как научиться решать задачи: Пособие для учащихся. М., 1984.

103. *Холодная М.А.* Психология интеллекта: парадоксы исследования. М.; Томск, 1997.

104. *Чистяков В.Д.* Старинные задачи по элементарной математике. Минск, 1978.

105. *Шарыгин И.Ф.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. ср. шк. М., 1989.

106. *Шарыгин И.Ф., Голубев В.И.* Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 11 кл. ср. шк. М., 1991.

107. *Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.И.* Наглядная геометрия. 1992.

108. *Шаталов В.Ф.* Куда и как исчезли тройки. М., 1979.

109. Школьный кабинет математики / Рекомендации студентам физико-математического факультета. Брянск, 1978.

110. *Шуба Н.Ю.* Занимательные задания в обучении математике: Кн. для учителя. М., 1995.

111. *Эрдниев П.М.* Преподавание математики в школе (Из опыта обучения методом укрупненных единиц). М., 1978.

112. *Эрдниев П.М.* Математика: Учеб. для 5—6 кл. сред. шк. М., 1993.

113. *Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П.* Укрупнение дидактических единиц в обучении математике. М., 1986.

## ВИДЕОФИЛЬМЫ

1. Групповая работа на уроках математики.
2. Действия со степенями.
3. Изучение параллельности.
4. Методика обучения решению задач алгебраическим методом.
5. Методика обучения решению текстовых задач на движение.
6. Методика обучения учащихся решению задач на части.
7. Решение квадратных неравенств.
8. Решение уравнений в 6 классе.
9. Сложение целых чисел.
10. Умножение рациональных чисел.
11. Умножение целых чисел.
12. Урок-зачет по математике.
13. Урок геометрии в начальной школе.
14. Урок одной задачи.
15. Урок по теме «Решение тригонометрических неравенств», на котором учитель является ведомым учениками.
16. Урок повторения на новом материале по теме «Делимость чисел».
17. Урок-семинар.
18. Числовой луч.

## Содержание

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие .....                                      | 3   |
| Словарь терминов .....                                 | 10  |
| Программа по теории и методике обучения математике     |     |
| в основной школе .....                                 | 12  |
| I семестр .....                                        | 12  |
| Планы лекций .....                                     | 12  |
| Планы практических занятий .....                       | 16  |
| Планы лабораторных работ .....                         | 26  |
| Вопросы к зачету по общей методике и методике обучения |     |
| математике в 5—6 классах .....                         | 36  |
| II семестр .....                                       | 38  |
| Планы лекций .....                                     | 38  |
| Планы практических занятий .....                       | 40  |
| Планы лабораторных работ .....                         | 55  |
| Вопросы к зачету по общей методике и методике обучения |     |
| математике в основной школе (5—9 классы) .....         | 69  |
| Задания для творческого саморазвития .....             | 71  |
| Программа обучения математике в старших классах .....  | 74  |
| III семестр .....                                      | 74  |
| Планы лекций .....                                     | 74  |
| Планы практических занятий .....                       | 75  |
| Планы лабораторных работ .....                         | 86  |
| Вопросы к зачету по методике преподавания алгебры      |     |
| и начала анализа .....                                 | 99  |
| IV семестр .....                                       | 100 |

[illegible]

|           |                                                                                                                                                                                              |     |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|           | <i>Приложение 14.</i> Схематический граф поиска решения задачи .....                                                                                                                         | 213 |
|           | <i>Приложение 15.</i> Преобразование задач .....                                                                                                                                             | 215 |
| Часть V.  | Урок математики .....                                                                                                                                                                        | 217 |
|           | <i>Приложение 16.</i> Анализ пункта школьного учебника .....                                                                                                                                 | 222 |
|           | <i>Приложение 17.</i> Методические требования к конспекту урока по математике .....                                                                                                          | 231 |
|           | <i>Приложение 18.</i> Технология составления конспекта урока .....                                                                                                                           | 233 |
|           | <i>Приложение 19.</i> Конспекты первого урока по теме «Наибольший общий делитель» .....                                                                                                      | 233 |
|           | <i>Приложение 20.</i> Примерная схема комплексного анализа урока .....                                                                                                                       | 246 |
|           | <i>Приложение 21.</i> Урок изучения нового материала, где ведущими методами являются беседа (объяснительно-иллюстративная) и практические методы (репродуктивные и частично-поисковые) ..... | 253 |
|           | <i>Приложение 22.</i> Урок-лекция .....                                                                                                                                                      | 258 |
|           | <i>Приложение 23.</i> Урок изучения нового материала, где ведущими методами являются беседа (проблемная) и учащиеся проводят исследование проблемы .....                                     | 265 |
|           | <i>Приложение 24.</i> Урок изучения нового материала, когда ученики работают по учебной книге .....                                                                                          | 269 |
|           | <i>Приложение 25.</i> Урок совершенствования умений .....                                                                                                                                    | 272 |
|           | <i>Приложение 26.</i> Урок обобщения .....                                                                                                                                                   | 280 |
|           | <i>Приложение 27.</i> Урок устного контроля по системе В.Ф. Шаталова .....                                                                                                                   | 283 |
| Часть VI. | Изучение содержательных линий математики в основной школе .....                                                                                                                              | 287 |
|           | <i>Приложение 28.</i> Основные вопросы изучения числовых систем .....                                                                                                                        | 287 |
|           | <i>Приложение 29.</i> Сравнительный анализ изучения десятичных дробей в различных школьных учебниках .....                                                                                   | 288 |

|                                                  |                                                                                                                     |     |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Приложение 30.</i>                            | Математическая карта изучения<br>числовых систем в современных<br>школьных учебниках .....                          | 290 |
| <i>Приложение 31.</i>                            | Методическая схема изучения функций<br>в основной школе .....                                                       | 291 |
| <i>Приложение 32.</i>                            | Сравнительный анализ изучения функций<br>в учебниках алгебры основной школы .....                                   | 291 |
| <i>Приложение 33.</i>                            | Математическая карта изучения<br>числовых функций в учебнике<br>серии МПИ .....                                     | 292 |
| <i>Приложение 34.</i>                            | Математические карты изучения<br>квадратичной функции в учебнике<br>серии МПИ .....                                 | 294 |
| <i>Приложение 35.</i>                            | Изучение функции $y = ax^2 + n$ .....                                                                               | 296 |
| <i>Приложение 36.</i>                            | Методическая карта по книге<br>«Квадратные уравнения» .....                                                         | 298 |
| Часть VII. Методика изучения тригонометрии ..... |                                                                                                                     | 299 |
| <i>Приложение 37.</i>                            | Конспект урока «Косинус, синус<br>и тангенс углов от $0^\circ$ до $180^\circ$ »<br>в курсе геометрии 9 класса ..... | 299 |
| <i>Приложение 38.</i>                            | Проверка готовности учащихся<br>к изучению темы «Тригонометрические<br>функции» .....                               | 308 |
| <i>Приложение 39.</i>                            | Изучение измерения углов .....                                                                                      | 309 |
| <i>Приложение 40.</i>                            | Конспект урока «Арксинус, арккосинус»<br>в 10 классе .....                                                          | 311 |
| <i>Приложение 41.</i>                            | Схемы решения простейших<br>тригонометрических неравенств .....                                                     | 319 |
| Часть VIII. Методика изучения функций            |                                                                                                                     |     |
|                                                  | в старших классах .....                                                                                             | 321 |
| <i>Приложение 42.</i>                            | Методическая схема изучения функций<br>в старших классах .....                                                      | 322 |
| <i>Приложение 43.</i>                            | Учебный модуль по теме<br>«Производная» .....                                                                       | 323 |
| <i>Приложение 44.</i>                            | Введение и усвоение определения<br>криволинейной трапеции .....                                                     | 331 |

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| Часть IX. Методика обучения учащихся решению               |     |
| стереометрических задач .....                              | 335 |
| <i>Приложение 45.</i> Методика изучения теоремы            |     |
| существования плоскости, проходящей                        |     |
| через данную прямую и данную точку .....                   | 335 |
| <i>Приложение 46.</i> Схемы нанесения на стереометрический |     |
| чертеж данных об углах и расстояниях .....                 | 343 |
| <i>Приложение 47.</i> Методика работы с вычислительной     |     |
| стереометрической задачей .....                            | 346 |
| <i>Приложение 48.</i> Опорные задачи стереометрии .....    | 350 |
| <i>Приложение 49.</i> Примерная схема анализа задачного    |     |
| материала по определенной теме .....                       | 353 |
| <i>Приложение 50.</i> Урок одной задачи .....              | 354 |
| <i>Приложение 51.</i> Методика обучения учащихся решению   |     |
| задач на построение сечений .....                          | 355 |
| <i>Приложение 52.</i> Урок коррекции по теме «Построение   |     |
| сечений многогранника плоскостью,                          |     |
| параллельной заданной прямой» .....                        | 363 |
| <i>Приложение 53.</i> Комбинации разных тел .....          | 370 |
| <i>Приложение 54.</i> Схема решения задач координатным     |     |
| и координатно-векторным методами .....                     | 372 |
| <i>Приложение 55.</i> Схема решения задач векторным        |     |
| методом .....                                              | 375 |
| <i>Приложение 56.</i> Тест по методике обучения учащихся   |     |
| решению задач .....                                        | 377 |
| Часть X. Технологии обучения .....                         | 387 |
| <i>Приложение 57.</i> Группы технологий .....              | 387 |
| <i>Приложение 58.</i> Сравнение традиционного,             |     |
| развивающего и личностно                                   |     |
| ориентированного обучения .....                            | 390 |
| <i>Приложение 59.</i> Сравнение информационного            |     |
| и личностно ориентированного                               |     |
| обучения учащихся решению задач .....                      | 390 |
| <i>Приложение 60.</i> Адаптивные технологии обучения ..... | 392 |

---

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Приложение 61.</i> Памятка для участников групповой работы .....                     | 395 |
| <i>Приложение 62.</i> Способы составления УДЕ-заданий .....                             | 396 |
| Часть XI. Личностно ориентированный урок .....                                          | 397 |
| <i>Приложение 63.</i> Введение определений при личностно ориентированном обучении ..... | 399 |
| <i>Приложение 64.</i> Урок-лекция при личностно ориентированном обучении .....          | 402 |
| <i>Приложение 65.</i> Прием затребованной помощи .....                                  | 406 |
| <i>Приложение 66.</i> Конспекты двух последовательных уроков .....                      | 409 |
| <i>Приложение 67.</i> Урок открытой контрольной работы .....                            | 413 |
| <i>Приложение 68.</i> Использование диагностических заданий на уроках математики .....  | 416 |
| Литература .....                                                                        | 432 |
| Видеофильмы .....                                                                       | 439 |

*Учебное издание*

**Малова Ирина Евгеньевна, Горохова Светлана Константиновна,  
Малинникова Наталья Алексеевна, Яцковская Галина Анатольевна**

## **ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ**

*Учебное пособие для студентов высших учебных заведений*

**Редактор В.В. Бердников**  
**Зав. художественной редакцией И.А. Пшеничников**  
**Художник обложки М.Б. Патрушева**  
**Компьютерная верстка А.И. Попов**  
**Корректор Т.Я. Кокорева**

Лицензия ИД № 03115 от 10.11.2000.  
Санитарно-эпидемиологическое заключение  
№ 77.99.60.953.Д.010192.08.09 от 28.08.2009 г.  
Сдано в набор 28.07.05. Подписано в печать 12.12.05.  
Формат 60×90/16. Печать офсетная. Бумага газетная. Усл. печ. л. 28,0.  
Тираж 10 000 экз. (1-й завод 1—500 экз.). Заказ №

Гуманитарный издательский центр ВЛАДОС.  
119571, Москва, просп. Вернадского, 88,  
Московский педагогический государственный университет.  
Тел. 437-11-11, 430-04-92, 437-99-98; тел./факс 735-66-25.  
E-mail: [vlados@dol.ru](mailto:vlados@dol.ru)  
<http://www.vlados.ru>

---

Отпечатано в ОАО «Ивановская областная типография»  
153008, г. Иваново, ул. Типографская, д. 6  
E-mail: [091-018@rambler.ru](mailto:091-018@rambler.ru)

**Уважаемые коллеги!**

**«ГУМАНИТАРНЫЙ ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ВЛАДОС»**

предлагает вашему вниманию следующие книги:

Фарков А.В.

**Математические олимпиады: Методическое пособие**

В пособии содержатся тексты задач по математике для проведения районных или городских олимпиад и методика их составления.

Адресовано методистам отделов образования, преподавателям вузов, учителям математики общеобразовательных учреждений.

---

Байбородова Л.В., Елифанова Н.М.

**Обучение математике в средней школе: Методическое пособие**

В пособии рассматриваются актуальные проблемы обучения математике в теоретическом и практическом аспектах, предлагаются конкретные методические материалы по решению этих проблем. Особое внимание уделяется обучению детей в разновозрастных группах, развитию математической речи, межпредметным связям, организации проектной деятельности учащихся, профильной подготовке школьников, способам привлечения учащихся к целеполаганию и анализу учебной деятельности.

Пособие адресовано учителям математики, работникам органов управления образованием, студентам, аспирантам и преподавателям педагогических учебных заведений.

---

Босова Л.Л.

**Методические рекомендации по курсу информатики: 5—6 кл.**

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с изучением начального курса информатики. Книга содержит большое количество примеров и заданий различной сложности, иллюстрирующих теоретический материал.

Пособие предназначено для учителей информатики.

---

**Заказать и приобрести книги вы можете по адресу:**

119571, Москва, просп. Вернадского, 88,

Московский педагогический государственный университет, а/я 19.

Тел. 437-99-98, 437-11-11, 437-25-52; тел./факс 735-66-25.

E-mail: [vlados@dol.ru](mailto:vlados@dol.ru) <http://www.vlados.ru>

*Проезд: ст. м. Юго-Западная.*

# ПРОИГЛАШАЕМ К СОТРУДНИЧЕСТВУ

учреждения  
образования

авторов

учебные  
заведения

книготорговые  
организации

оптовых  
покупателей



Широкий выбор  
учебников,  
учебных  
и методических  
пособий,  
справочной  
литературы  
для вузов, школ,  
лицеев, гимназий,  
колледжей,  
детских садов  
и учреждений  
дополнительного  
образования.

У НАС ВСЕГДА можно подобрать ассортимент новейшей учебной литературы нашего и других издательств.

НАШИ МЕНЕДЖЕРЫ оперативно обработают ваш заказ, помогут подобрать ассортимент учебной литературы, необходимой для вашего региона, ознакомят с перспективами издательства на ближайший квартал.

ХОРОШЕЕ ОБСЛУЖИВАНИЕ, гибкая система скидок, советы профессионалов по подбору литературы – все это в нашем издательстве!

ПОЗНАКОМИТЬСЯ с новинками издательства вы сможете на web-сайте: **[www.vlados.ru](http://www.vlados.ru)**

**Телефоны:** 437-99-98, 437-11-11, 437-25-52.

**Телефон/факс:** 735-66-25.

**E-mail:** [vlados@dol.ru](mailto:vlados@dol.ru)

**Все книги вы сможете заказать и приобрести по адресу:**

119571, Москва, просп. Вернадского, 88,  
Московский педагогический  
государственный университет, а/я 19.