

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

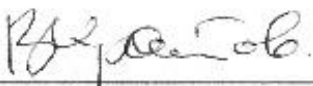
Механико-математический факультет

Кафедра геометрии, топологии и методики преподавания математики

СОГЛАСОВАНО

Председатель методической комиссии
механико-математического факультета

Кротов В.Г.

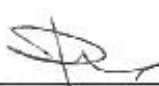


15 мая 2012 г.

СОГЛАСОВАНО

Декан
механико-математического
факультета

Медведев Д.Г.



17 мая 2012 г.

Регистрационный № УД 9012

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

Методика преподавания математики

для специальности

1-31 03 01 – Математика (по направлениям)

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доцент Ю.Д. Чурбанов

Рассмотрен и утвержден

На заседании Совета ММФ БГУ

Протокол № 7

17 мая 2012 года

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА.....	3
КУРС ЛЕКЦИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ	5
ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ	154
КОНТРОЛЬ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ	155
ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ	156
ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ	158
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	160
Типовая учебная программа.....	161
ВОСПИТАТЕЛЬНО-ИДЕОЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ УЧЕБНО- МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА	169

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методика преподавания математики является одним из основных курсов цикла общепрофессиональных и специальных дисциплин, читаемых студентам-математикам педагогического потока в университете. Основными целями дисциплины «Методика преподавания математики» являются:

- 1) обеспечение глубокого понимания студентами научных и психолого-педагогических основ структуры и содержания курса математики в средних учебных заведениях, методических идей, заложенных в данном курсе;
- 2) выработка у студентов практических навыков проведения учебной работы на уровне требований, предъявляемых реформой средней школы;
- 3) формирование у будущих учителей умения решать проблемы преподавания математики, а также навыков самостоятельного анализа процесса обучения.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи**:

- раскрывается значение и роль математики в системе современных знаний и в системе образования на разных ее ступенях;
- формируются знания об основных понятиях методики преподавания математики, о формах и методах обучения математике;
- студенты знакомятся с содержанием программы по математике на уровне общего среднего образования, с учебниками и учебными пособиями по предмету, УМК(учебно-методическими комплексами);
- закладываются основы практических умений, необходимых для преподавания математики, ведения внеклассной работы, стимулируется стремление к самообразованию.

Для этого вначале рассматриваются вопросы, относящиеся к общей методике: главные проблемы дидактики математики, ее предмет и связь с другими науками; понятие, его содержание и объем, определение понятия; математические задачи, их роль в обучении математике, основные методы решения задач; теоремы школьного курса математики, способы их доказательства и методика их изучения; основные принципы дидактики математики; организация процесса обучения в школе; внеклассная работа по математике. Заканчивается изучения общей методики рассмотрением программы по математике, учебников и учебных пособий.

Затем рассматриваются вопросы частных методик, которые включают в себя линию уравнений и неравенств, функций и элементов математического анализа, геометрические преобразования, координаты и теорию измерений.

При изложении материала используются лекционные, лабораторные, практические и семинарские занятия.

Во время чтения лекций дается характеристика изучаемых проблем, возможные подходы к их решению, а также закладываются основы профессионального отношения к указанным в программе вопросам.

Практические занятия направлены на закрепление лекционного материала и на формирование навыков практического использования полученных знаний.

Основными методами обучения, отвечающими целям изучения дисциплины, являются:

- элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;
- элементы учебно-исследовательской деятельности, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе;
- коммуникативные технологии (дискуссии, учебные дебаты), реализуемые на семинарских занятиях.

В каждом семестре по дисциплине рекомендуется проведение не менее одной контрольной работы. В ходе реализации программы дисциплины предусмотрена учебно-исследовательская работа студентов, результаты которой представляются в виде курсовых или дипломных работ. Учебно-исследовательская работа студентов предусмотрена также во время прохождения педагогической практики.

Для изучения дисциплины необходимо опираться на знание таких дисциплин как «Педагогика», «Психология», дисциплины вузовского компонента («Практикум по решению задач»).

В соответствии с образовательным стандартом по специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направлению специальности 1-31 03 01 -02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» в результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и принципы дидактики математики;
- структурные элементы урока и основные требования к ним;
- виды планирования деятельности учителя;
- методы обучения школьной математике;
- структуру и содержание учебников по математике;

уметь:

- разрабатывать и составлять план-конспект урока, факультатива, кружка;
- составлять планирование работы учителя;
- проводить анализ плана-конспекта урока;
- проводить анализ проведения урока, факультатива.

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ»

ЛЕКЦИЯ №1

ТЕМА: «ПРЕДМЕТ И ГЛАВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИДАКТИКИ МАТЕМАТИКИ»

ВОПРОСЫ:

- 1. ПРЕДМЕТ И ГЛАВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДМ**
- 2. ПРОБЛЕМЫ СОДЕРЖАНИЯ И СТРУКТУРЫ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ**
- 3. ПРОБЛЕМЫ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ**
- 4. МЕТОДОЛОГИЯ ДИДАКТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ И ВЛИЯНИЕ СМЕЖНЫХ НАУК.**

1.

Математика в системе школьного образования занимает одно из ведущих мест, как в силу своей специфики, так и в силу той роли, которую математика играет в современной науке. По этой причине на математику в современной школе отводится около 15 % всех школьных уроков (хотя сейчас количество уроков, отводимых на математику, постоянно уменьшается).

Школьное математическое образование – это организованный процесс и результат усвоения предусмотренных учебной программой математических знаний, умений и навыков, а также приемов мышления и способов познания.

Из этого определения видно, что ШМО представляет собой с одной стороны – процесс обучения, с другой – набор тех знаний, умений и навыков которые ученик приобретает за время обучения в школе. Обучение как процесс представляет собой двусторонний процесс: процесс обучения, т.е. передачи знаний и умений и процесс усвоения этих знаний. Это накладывает на деятельность учителя определенные требования как по организации процесса передачи знаний, так и на получения обратной информации о том, как ученик усвоил требуемые знания. Все вышесказанное приводит к следующей структуре ШМО:

- 1) *содержание* (т.е. та математическая информация, которая подлежит изучению);

- 2) *структура* (т.е. система построения и последовательность изучения информации);
- 3) *методы и средства подачи и усвоения информации;*
- 4) *деятельность учителя на уроке;*
- 5) *интерес учащихся к изучению математики.*

С этими компонентами ШМО связаны проблемы, которые ДМ приходится постоянно решать. Поэтому эти проблемы называют *главными проблемами ДМ*. Перечислим эти проблемы:

- 1) *модернизация содержания ШМО;*
- 2) *совершенствование структуры школьного курса математики;*
- 3) *совершенствование методов и средств обучения математике;*
- 4) *оптимизация деятельности учителя*
- 5) *формирование у школьников устойчивого активного интереса к изучению математики.*

Теперь мы уже можем дать основное

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предметом ДМ является ШМО, включая обучение и связанное с ним воспитание, как в общеобразовательной школе, так и в учебных заведениях нового типа, а также его проблемы и перспективы развития.*

2

За многовековую историю школы содержание ШМО постоянно изменялось и сложилось приблизительно в том виде, которое мы имеем сейчас в середине прошлого века, хотя первые попытки такой модернизации предпринимались еще в конце 19 века. Развитие содержания ШМО происходило неравномерно и в некоторой степени соответствовало развитию производительных сил общества и науки, вызывалось этим развитием. И хотя развитие науки происходит непрерывно и постоянно ускоряется, специфика школы не позволяет также непрерывно производить изменение школьных программ по математике. Это изменение происходит периодически, в виде последовательных реформ. Кроме того, возникновение в последнее время учебных заведений нового типа также ставит проблемы по содержанию математического образования в этих учебных заведениях, причем наиболее остро в тех учебных заведениях нового типа, в которых математика является профилирующим предметом.

Вторая причина, по которой постоянно приходится решать данную проблему – это наметившийся разрыв между требованиями высшей школы на вступительных

экзаменах и теми знаниями, которые получают школьники по окончании средней общеобразовательной школы.

Кроме того, все время ускоряющийся процесс увеличения научной информации с одной стороны и ограниченность срока обучения в школе, и невозможность существенного сокращения объема изучаемого материала основ других наук усложняют процесс модернизации содержания ШМО, а потому требуют более тщательного своего рассмотрения на основе новейших научных знаний различных наук: педагогики, психологии, ДМ и др.

Все это говорит о том, что одна из главных проблем – *модернизация содержания ШМО* – является как бы непрерывно решаемой проблемой.

Первая проблема естественно порождает и вторую - *совершенствование структуры школьного курса математики*, поскольку достаточно важно при рассмотрении какой-либо информации и последовательность ее рассмотрения. Актуальность рассмотрения этой проблемы возникает еще и в связи с последними исследованиями в области психологии, педагогики, где было установлена способность детей младшего школьного возраста к интенсивному развитию абстрактного мышления и первоначальному усвоению некоторых понятий современной алгебры, теории множеств. Это говорит о том, что при правильной организации школьного обучения в младших классах уже возможно изучение основ теории множеств, которое позволяет по иному строить последовательность обучения в средних и старших классах школы.

Модернизация структуры математического образования важна и для учебных заведений нового типа, поскольку, как правило, в таких заведениях учатся более способные ребята, что позволяет более продуктивно организовать процесс обучения. В этой связи возникает также проблема «сделать сложное – простым», т.е. «построить новую систематизацию учебного материала в целом, с тем, чтобы одновременно внести туда большой фактический материал и изложить его разумным и доходчивым образом...»[Ляпунов А.А. О реформе математических программ //МШ. 1973,№2.]

3

В истории развития школы сложились определенные методы преподавания этого курса. Они проверены временем и оправдали себя. Тем не менее, в ДМ

существует проблема *отыскания новых более совершенных форм обучения*. Это связано как и с тем, что совершенствуются содержание и структура ШМО, так и с появлением новых технических средств обучения.

Традиционные методы обучения давно подвергались справедливой критике и творчески работающие учителя постоянно ищут новые, передовые методы обучения, а также пытаются усовершенствовать традиционные. В последнее время все более широко распространяются методы обучения направленные на активизацию познавательной активности учащихся, более широкое использование их самостоятельной работы на уроке под руководством учителя. Разрабатываются новые формы обучения: *программированное обучение, дистанционное обучение*. Это связано с развитием компьютеров, интернета. Причем, поскольку процесс совершенствования как самого ШМО, так и техники бесконечен, то и проблема совершенствования форм обучения практически становится «вечной». Эта проблема будет также существовать постоянно и в связи с постоянно накапливанием опыта работы учителей, которые также совершенствуют различные методы обучения.

Оптимизация деятельности учителя позволяет ему постоянно совершенствовать свое педагогическое мастерство, к которому в последнее время предъявляются все большие требования. В традиционной методике оно сводилось в основном к умению доходчиво и понятно объяснять материал, а в настоящее время этого явно недостаточно, ибо учитель обязан также целесообразно организовать процесс обучения на различных стадиях и эффективно управлять этим процессом. И в последнее время появляется все большее количество публикаций на это счет, и появился новый термин – «технология образования». Облегчить труд учителя и помочь овладеть ему педагогическим мастерством – такую цель преследует оптимизация деятельности учителя.

В условиях всеобщего неполного среднего образования старая трудная проблема *мотивации обучения* приобретает особое значение. Это значение усиливается и новыми реалиями сегодняшнего дня, когда интеллектуальный труд не совсем высоко ценится в нашем обществе. Для побуждения школьников к учебе, и в частности, к изучению математики следует использовать и индивидуальные устремления школьников, даже если они имеют к математике лишь косвенное отношение. Не следует мотивацию сводить лишь к постоянному напоминанию о необходимости получения среднего образования для того, чтобы продолжить его в ВУЗе. Для того чтобы мотивация хорошо работала необходимо также, чтобы сам учитель был увлечен математикой, постоянно искал что-то новое, необычное как для себя, так и для ребят.

По-новому встает также задача поддержания интереса у тех ребят, которые изучают математику по углубленной программе. Как правило, интерес к изучению математики у таких ребят повышен, однако если учитель будет замыкаться только рамками школьной программы, этот интерес будет падать. При этом следует различать увлечение математикой и развлечение. Конечно, такой прием как развлечение во время проведения урока, особенно если тема достаточно сложная, следует использовать, однако не следует слишком увлекаться. Для повышения интереса или для его поддержания следует активно использовать как старые, так и новые формы внеклассной работы: олимпиады, дни и недели математики в школе, математические бои, научные конференции школьников и др.

4

Каждая наука в процессе своего развития кроме рассматриваемых проблем разрабатывает и методы их решения. Совокупность таких методов и составляет *методологию науки*. Конечно, есть своя методология и в ДМ. Основными методами решения проблем ДМ являются следующие:

- 1) *эмпирический метод*;
- 2) *теоретический анализ*;
- 3) *дидактический эксперимент*.

Эмпирический метод представляет собой совокупный опыт обучения математике, накопленный предыдущими поколениями и передающийся от старших поколений учителей к младшим. До конца 19 в. этот метод исследований в дидактике математики был основным. В настоящее время опыт обучения математике, содержащийся в исторической и современной литературе, является богатым и важным материалом для исследования и построения гипотез.

Теоретический анализ и творческое обобщение опыта и результатов наблюдений – второй способ решения проблем ДМ. Успеху этого метода способствует непосредственное знакомство с практикой обучения в школе и личный опыт работы. Хотя стоит отметить, что этот метод не совсем полно используется в ДМ.

Дидактический эксперимент, получивший признание на рубеже 19 и 20 веков, в настоящее время также неполно применяется на практике. Но в период своего зарождения на этот метод возлагались большие надежды. Однако ввиду ряда недостатков, которыми обладает этот метод, он не получил столь широкого

распространения. Его недостатками являются: 1) сложность условий эксперимента; 2) слабая разработанность его теории и практики; 3) необходимость достаточно большого времени для проведения эксперимента; 4) очень часто необходимы достаточно большие средства без гарантии положительного исхода. Сложность условий эксперимента выражается в том, чтобы создать такие условия, при которых эксперимент максимально бы приближался к реалиям жизни. Очень часто, для того, чтобы подтвердить определенные идеи и проводится эксперимент, а экспериментатор стремится создать для этого самые благоприятные условия, в которых практически исключено получение отрицательного результата. Именно поэтому очень часто результаты таких «экспериментов» не внедряются в практику школы и не оправдывают себя в их условиях. Не разработанность теории и практики эксперимента выражается еще и в том, что еще не совершенна обработка экспериментальных данных, а получаемые выводы нередко оказываются необоснованными и носят субъективный характер.

При решении своих проблем методика математики опирается на выводы и положения смежных наук: педагогики, психологии, истории и математики.

Поскольку дидактика математики относится к группе педагогических наук, то она находится в тесной связи с *педагогикой*, использует ее понятия, положения, принципы, правила. Особенно широко применяется дидактика – раздел педагогики, содержащий теорию образования и обучения. Успехи общей дидактики влияют на развитие ДМ, а достижения в развитии ДМ уточняют и совершенствуют педагогическую теорию.

Влияние на ДМ оказывает и *математика*, способствующая развитию школьного курса математики, модернизации его содержания. Так работы Л.Эйлера привели к тому, что со второй половины 18 в. элементарная алгебра становится отдельным предметом школьной математики. Работы Л.Эйлера и его учеников способствовали выделению тригонометрии в самостоятельную школьную дисциплину (сейчас это раздел школьной алгебры). Строгое обоснование в 19 в. математического анализа, начало которому положил французский математик О.Коши, и хорошая дидактическая обработка этой теории позволила поставить и решить вопрос о введении элементов математического анализа в курс математики средней школы. Аналогичные примеры касаются и векторного исчисления, и элементов комбинаторики и начал теории вероятности.

Дидактика математики в своих выводах широко опирается на законы *психологии и физиологии высшей нервной деятельности*, разрабатывая принципы ДМ. Это особенно касается теории познания, мышления, воображения.

Наука *логика* исключительно важна для выработки у учащихся основных правил научного мышления в процессе преподавания математики, поэтому ДМ уделяет большое внимание вопросам традиционной логики.

История математики показывает учителю, какие трудности могут встретиться при изучении отдельных вопросов школьного курса, подсказывает возможные и наиболее естественные пути их преодоления, дает убедительные исторические примеры связи математики с жизнью, вскрывает зависимость возникновения и развития математических знаний от запросов жизненной практики и потребностей самой науки. Это полезно сообщать учащимся, поскольку краткие исторические экскурсы на уроках математики, связанные с изучаемыми вопросами, повышают интерес учащихся, подчеркивают жизненную значимость математики.

Плодотворное влияние на ДМ оказывает ее связь с *историей*, где накоплен огромный педагогический и методический опыт (недаром говорят, что в методике ново то, что хорошо забыто), содержится много прогрессивных и перспективных идей, способствующих творческим поискам в обучении математике.

Лекция № 2

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Прежде чем приступить к изучению частных методик, рассмотрим общую характеристику школьного курса математики.

Роль математической подготовки в общем образовании современного человека ставит следующие цели обучения математике в школе:

овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;

интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых для полноценной жизни в обществе;

формирования представлений об идеях и методах математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;

формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимания значимости математики для общественного прогресса.

Структура курса математики.

В курсе математики 5 – 11 классов с учетом возрастных особенностей учащихся и сложившихся традиций выделяются две ступени обучения: базовая школа (5 – 9 классы) и старшая школа (10 – 11 классы).

В базовой школе изучается один предмет математического цикла «Математика».

Целью изучения курса математики в 5 – 6 классах является систематическое развитие понятия числа, выработка умений выполнять устно и письменно арифметические действия над числами, переводить практические задачи на язык математики, подготовка учащихся к изучению систематических курсов алгебры и геометрии.

Курс математики строится на индуктивной основе с привлечением элементов дедуктивных рассуждений. Теоретический материал курса излагается на наглядно-интуитивном уровне, математические методы и законы формулируются в виде правил.

В ходе изучения курса, учащиеся развивают навыки вычислений с натуральными числами, овладевают навыками действий с обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами; получают первоначальные представления об использовании букв для записи выражений и свойств, учатся составлять по условию текстовой задачи несложные линейные уравнения и решать их, продолжают знакомство с геометрическими понятиями, приобретают навыки построения геометрических фигур и измерения геометрических величин.

В 7 – 9 классах математика представлена двумя предметами - «Алгебра» и «Геометрия».

Целью изучения курса алгебры в 7 – 9 классах является развитие вычислительных и формально-оперативных алгебраических умений до уровня, позволяющего уверенно использовать их при решении задач математики и смежных предметов (физика, химия, информатика и др.), усвоение аппарата уравнений и неравенств как основного средства математического моделирования математических задач, осуществление функциональной подготовки школьников. В ходе изучения курса учащиеся овладевают приемами вычислений на калькуляторе.

Курс характеризуется повышением теоретического уровня обучения, постепенным усилением роли теоретических обобщений и дедуктивных заключений.

Прикладная направленность курса обеспечивается систематическим обращением к примерам, раскрывающим возможности применения математики к изучению действительности и решению практических задач.

Целью изучения курса геометрии в 7 – 9 классах является систематическое изучение свойств геометрических фигур на плоскости, формирование пространственных представлений, развитие логического мышления и подготовка аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин (физика, черчения и др.) и курса стереометрии в старших классах.

Курс характеризуется рациональным сочетанием логической строгости и геометрической наглядности. Увеличивается теоретическая значимость изучаемого материала, расширяются внутренние логические связи курса, повышается роль дедукции, степень абстрактности изучаемого материала. Учащиеся овладевают приемами аналитико-синтетической деятельности при доказательстве теорем и решении задач. Систематическое изложение курса позволяет начать работу по формированию представлений учащихся о строении математической теории, обеспечивает развитие логического мышления школьников. Изложение материала характеризуется постоянным обращением к наглядности, использованием рисунков и чертежей на всех этапах обучения и развитием геометрической интуиции на этой основе. Целенаправленное обращение к примерам из практики развивает умения учащихся вычленять геометрические факты, формы и отношения в предметах и явлениях действительности, использовать язык геометрии для их описания.

Для старшей школы предлагаются два подхода к структурированию курса математики.

К у р с А ориентирован на тех учащихся, которые рассматривают математику как элемент общего образования и не предполагают использовать ее непосредственно в своей будущей профессиональной деятельности, в частности сдавать после школы конкурсные экзамены по математике. Этот курс представлен одним предметом – математикой, в котором в разумной последовательности чередуются сведения из алгебры и начал анализа с геометрическим материалом.

Цель изучения курса А в 10-11 классах – дать учащимся представления о роли математики в современном мире, о способах применения математики как в технических, так и в гуманитарных сферах. При изучении в этом курсе элементов анализа опора делается на наглядно-интуитивные представления учащихся. Роль формальных рассуждений и доказательств здесь невелика. Изучение геометрического материала также широко опирается на наглядность. Существенно снижается внимание к идее аксиоматического построения геометрии. Основной акцент делается на формирование умений применять изученные факты в простейших случаях.

К у р с В предназначен для тех учащихся, которые выбрали для себя те области деятельности, в которых математика играет роль аппарата, специфического средства для изучения закономерностей окружающего мира, или их деятельность будет связана с математикой, как наукой. В рамках этого курса сохраняется традиционное деление на два предмета – алгебру и начала анализа и геометрию.

Изучение алгебры и начал анализа и геометрии как составляющих курса В предполагает реализацию тех же целей, что и в общеобразовательном курсе, но на более высоком и усложненном уровне. Здесь уже возрастает роль формальных рассуждений и доказательств, а при изучении геометрии аксиоматическому методу уделяется большее внимание. При формировании умений применять полученные знания акцент делается на прикладное применение математических фактов, но также на более высоком уровне.

Идея дифференциации обучения предоставляет возможность учащимся изучать математику на углубленном уровне. Изучение математики на этом уровне предполагает кроме углубленного изучения математики формирование также у учащихся устойчивого интереса к предмету, выявление и развитие их математических способностей, ориентацию на профессии, существенным образом связанные с математикой, подготовку к обучению в вузе.

В углубленном изучении математики выделяются два этапа – 8-9 классы и 10-11 классы, - отвечающие возрастным возможностям и потребностям школьников и, соответственно, различающиеся по целям.

Учащийся может начать углубленно заниматься математикой как с 8-го, так и с 10-го класса.

Первый этап углубленного изучения математики является в значительной мере ориентационным. На этом этапе ученику надо помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им, с тем, чтобы к окончанию 9-го класса он смог сделать сознательный выбор в пользу дальнейшего углубленного либо обычного изучения математики. Интерес и склонность учащегося к математике должны всемерно подкрепляться и развиваться. В случае же потери интереса, изменения его в другом направлении ученику должна быть обеспечена возможность перейти от углубленного изучения математики к обычному.

Углубленное изучение математики на втором этапе предполагает наличие у учащихся более или менее устойчивого интереса к этому предмету и намерение выбрать после окончания школы связанную с математикой профессию. Обучение на этом этапе должно обеспечить подготовку к поступлению в вуз и продолжению образования, а также к профессиональной деятельности, требующей достаточно высокой математической культуры.

Успешность решения задач углубленного изучения математики во многом зависит от организации учебного процесса. Учителю предоставляется возможность свободного выбора методических путей и организационных форм обучения, проявления творческой инициативы.

Учебно-воспитательный процесс должен строиться с учетом возрастных потребностей и возможностей учащихся.

Углубленное изучение математики предполагает, прежде всего, наполнение курса разнообразными, интересными и сложными задачами, овладение основным программным материалом на более высоком уровне.

Для поддержания и развития интереса к предмету следует включать в процесс обучения занимательные задачи, сведения из истории. Это особенно важно на первом этапе, когда интерес школьников к предмету еще недостаточно устойчив.

На втором этапе возрастает роль теоретических знаний, становятся весьма значимыми такие их качества как системность и обобщенность. Значительное место на этом этапе должно быть уделено решению задач повышенной сложности, которые предлагаются на тестировании. В связи с тем, что в классы с углубленным изучением математики приходят учащиеся с разным уровнем подготовки, в процессе обучения на каждом этапе должны быть включены повторение и систематизация опорных знаний.

Учебный процесс должен быть ориентирован на усвоение учащимися, прежде всего, основного материала; при проведении текущего и итогового контроля знаний и умений учащихся, качество усвоения этого материала проверяется в обязательном порядке. Итоговому контролю не подлежит материал, который отнесен к необязательному изучению и отмечен либо квадратными скобками, либо звездочкой.

Значительное место в учебном процессе должно быть отведено самостоятельной математической деятельности учащихся – решению задач, проработке теоретического материала, подготовке докладов, рефератов и т.д.

Очень важно организовать дифференцированный подход к учащимся, позволяющий избежать перегрузки и способствующий реализации возможностей каждого из них.

ЛЕКЦИЯ №3

ТЕМА: «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И МЕТОДИКА ИХ ИЗУЧЕНИЯ»

ВОПРОСЫ:

- 1. ПОНЯТИЕ, ЕГО СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ.**
- 2. РОДОВИДОВЫЕ И ДРУГИЕ ОТНОШЕНИЯ ПОНЯТИЙ.**
- 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ.**
- 4. УСВОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ**
- 5. ОШИБКИ В ОПРЕДЕЛЕНИЯХ. КОНТПРИМЕРЫ.**
- 6. КЛАССИФИКАЦИЯ И РОДОСЛОВНАЯ ПОНЯТИЙ.**

Понятие – форма научного познания, отражающая существенное в изучаемых объектах и закрепляемая специальными терминами. В математике

понятие обозначается не только термином (слово или группа слов), но и символом – знаком.

Признаком называют все то, в чем объекты сходны друг с другом или в чем они отличаются. Существенные признаки необходимо принадлежат элементам данного множества и отличают их от элементов других множеств. Несущественные признаки не дают возможности познать эти элементы, отличить их от элементов других множеств. В понятии находят отражение лишь существенные в каком-либо отношении его признаки, называемые *признаками понятия*. С помощью анализа выделяют признаки объектов, а с помощью синтеза соединяют существенные признаки, отвлекаясь от остальных, несущественных, в единое целое – понятие. Кроме абстрагирования здесь имеет место еще процесс обобщения, когда в рассматриваемом множестве предметов находят признаки, присущие всем элементам данного множества.

Каждое понятие имеет свои существенные признаки, составляющие *содержание* понятия. Множество всех тех и только тех объектов, которые обладают этими признаками, составляют *объем* понятия. Между содержанием и объемом понятия существует обратно пропорциональная зависимость, а, именно, чем шире объем понятия, тем беднее его содержание и наоборот. Например, объем понятия «ромб» шире, чем объем понятия квадрат, зато содержание первого, (все стороны равны) меньше чем содержание второго (все стороны равны и углы прямые).

Если объем понятия состоит из одного предмета, то оно называется *единичным*. Примерами единичных понятий являются пустое множество, трехмерное евклидово пространство, производная функции $f(x) = \sin 2x$ в точке $x=1$ и т.д. Если объем понятия включает в себя более одного предмета, а признаки понятия являются общими для всех этих предметов, то понятие называется *общим*. Например, такие понятия как, точка, уравнение, задача – общие понятия. Единичные понятия не следует путать с *конкретными* (отражающими конкретные вещи) и общие с *абстрактными* (взятые как самостоятельный объект мысли). Например, модель куба – понятие общее и конкретное, а куб – понятие общее и абстрактное.

Между понятиями существуют отношения, отражающие связи соответствующих понятиям множеств объектов. Важнейшей формой связи понятий является их *родовидовое подчинение*, которое складывается при формировании понятий и обнаруживается там и тогда, где и когда имеет место непосредственная преемственность в переходах от одних понятий к другим. Например, объединение понятий «сложение», «вычитание», «умножение», «деление» приводит к понятию «арифметическая операция». Оно будет подчинять четыре предыдущих понятия как видовые и станет для них родовым. На базе понятий (видовых) «арифметические операции», «возведение в степень» и «извлечение корня» образуется новое (родовое) понятие «алгебраическая операция», с которыми связаны такие понятия, как «алгебраическое выражение», «алгебраическое уравнение» и др.

Символизируя понятия в виде кругов Эйлера, каждое родовидовое отношение понятий изображается двумя кругами (рис.1), из которых один (В – вид) содержится внутри другого (Р – род).

В родовидовых отношениях следует различать ближайший род и последующие родовые ступени. Так для вида V_1 ближайшим родом будет род P_1 , а не P_2 . Род P_2 будет ближайшим для вида V_2 , а не для V_1 (рис.1). $V_1, P_1=V_2$ и P_2 можно проиллюстрировать, например, такими понятиями: пусть V_1 – «целое число», $P_1=V_2$ – «рациональное число», P_2 – «действительное число». С помощью знаков включения это можно представить так: $V_1 \subset P_1, V_2 \subset P_2$.

Не всегда легко и однозначно можно определить ближайший род. Если между зависимыми понятиями нельзя поставить еще одно понятие, будем иметь отношение ближайшего рода и вида. Так между понятиями «прямоугольник» (ПК) и «четырёхугольник» (ЧК) можно поставить понятие «параллелограмм» (ПМ), поэтому ближайшим родом для понятия ПК является понятие ПМ, хотя прямоугольник – такой же четырёхугольник, как и параллелограмм.

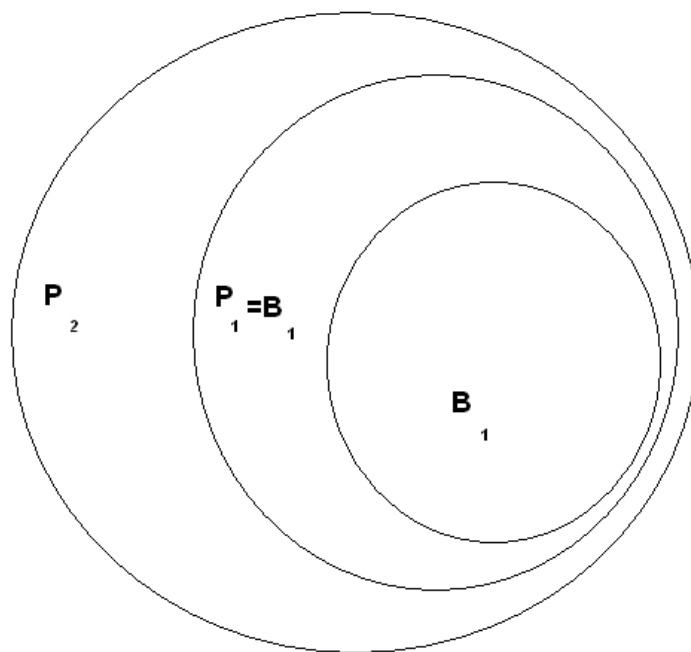


Рис.1.

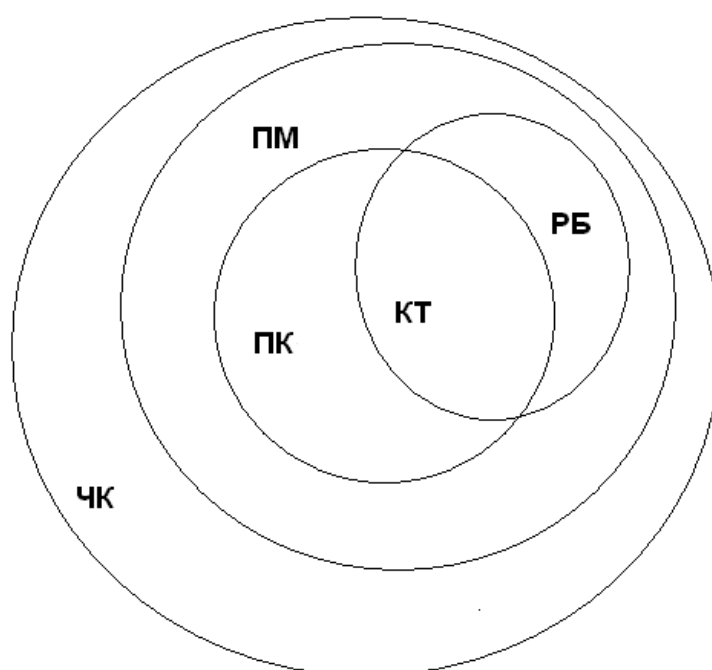


Рис.2

Для понятия «квадрат» (КТ) имеется несколько ближайших понятий : «прямоугольник» (ПК) и «ромб» (РБ), а ПМ не является ближайшим понятием (рис.2). Если символами КТ, ПК,и РБ обозначить соответствующие множества фигур (объемы понятий), то с помощью символа пересечения множеств запишем

$$КТ=ПК\cap РБ,$$

т.е. все квадраты являются одновременно и прямоугольниками и ромбами. Последовательная подчиненность понятий отражается в следующих записях:

$$КТ\subset ПК\subset ПМ\subset ЧК, КТ\subset РБ\subset ПМ\subset ЧК.$$

Перемещение по ступенькам лестницы родовидовых отношений понятий в направлении от вида к роду ведет к расширению, обобщению понятий, а обратный переход – к их ограничению.

Существуют и другие отношения понятий, которые дают возможность характеризовать понятия как *сравнимые*, когда у них есть общие признаки (например, треугольник и квадрат), и *несравнимые*, когда таких признаков нет (например, треугольник и процент). Сравнимые понятия могут быть *совместимыми* и *несовместимыми* в зависимости от того, совпадают их объемы (полностью или частично) или не совпадают. Совместимые понятия могут быть *равнозначными* (совпадающими, например полупрямая и луч), *перекрещивающимися* (пересекающимися, например целое число и положительное число) *подчиненными* и *подчиняющими* (квадрат числа и степень числа), *соподчиненными* (ромб и прямоугольник по отношению к параллелограмму). Несовместимые понятия могут быть *противоположными* (например, равносторонний и неравнобедренный треугольники), *противоречащими* (например, равнобедренный и неравнобедренный треугольники) *соподчиненными* (например, логарифмическое и тригонометрическое уравнения по отношению к трансцендентному уравнению).

Определение понятия (или дефиниция, сокращено *Df*) есть раскрытие содержания этого понятия, перечисление его существенных, отличительных признаков с помощью которых выделяются все обладающие этими признаками объекты, и только такие объекты и объединяются в единое целое с помощью данного понятия.

Понятия находятся в родовидовом отношении, и наиболее удобный общий способ определения понятия – *определение через ближайший род и видовое отличие*. К отысканию ближайшего рода следует стремиться потому, что в таком случае мы подходим ближе к определяемому понятию, его объему и благодаря этому уменьшается совокупность видовых признаков в определении. Например, для квадрата ближайшими родовыми понятиями будут «прямоугольник» и «ромб» и в каждом случае определение содержит по одному видовому признаку квадрата: «Квадрат есть прямоугольник, у которого все стороны равны»; «Квадратом называется ромб, у которого все углы прямые». Если же взять не ближайший род – параллелограмм, то видовых признаков квадрата будет два: «Квадратом называется параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые».

Определение через ближайший род и видовое отличие является самым распространенным в математике. Однако наряду с ним используются и другие разновидности определений, многие из которых можно свести к родовидовой форме определения.

Генетическое определение показывает, как возникает , образуется данный предмет или явление. Например: «Линейным углом двугранного угла называется плоский угол, получающийся в пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру этого двугранного угла». В генетическом определении часто заложен также способ построения этого объекта. Например в определении линейного угла содержится алгоритм его построения: нужно выбрать точку на ребре двугранного угла и в этой точке восстановить лучи, перпендикулярные ребру в каждой из граней двугранного угла. Генетическое определение можно дать также окружности, кругу, сфере, шару, цилиндру, конусу и ряду других понятий.

Существуют *рекуррентные* или *индуктивные* определения (арифметическая и геометрическая прогрессии), когда указывается способ

получения нового, кроме первого, члена через предыдущий. Аналогичным образом задаются и возвратные последовательности второго ряда, когда каждый следующий член последовательности, кроме первых двух, задается с помощью двух предыдущих. Например: $a_{n+2} + \alpha a_{n+1} + \beta a_n = 0$, $a_1 = a$, $a_2 = b$.

Встречаются иногда определения, раскрывающие значение термина путем такого перечисления объектов, которое создает представление об объеме и содержании понятия. Например: «Натуральный ряд чисел – это 1,2,3, и т.д.».

В математике некоторые определения удобно выражать *символическим* языком в виде равенств:

$$1) (-a)(-b) = +ab;$$

$$2) a^0 = 1 (a \neq 0);$$

$$3) f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x};$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Существуют логические формы, которые не являются определениями, но близки к определению, иногда заменяют или дополняют его. Приведем примеры.

Описание понятия обычно применяется в тех случаях, если невозможно или нецелесообразно вводить определение. Таким образом вводятся первичные понятия – число, точка, прямая плоскость, множество и др. В определении определяемое понятие вводится через уже известное понятие, но самое первое понятие каждой науки еще не к чему сводить, поэтому ввести его через определение невозможно.

Описательно приходится вводить несколько *первичных* понятий, Иногда заменяют описанием логически возможное, но слишком сложное, громоздкое и неудобное понятие. Иногда описание понятия может не только заменить его определение, но и дополнять ее такой информацией, которая конкретизирует понятие, расширяет связи с другими понятиями, полнее раскрывает его содержание, помогает учащимся глубже понять и прочнее усвоить новое понятие. Особенно часто этот прием введения новых понятий используется в младших и средних классах, когда определению понятия

предшествует его описание, рассмотрение различных примеров и задач где используется это понятие.

В средней школе встречается еще так называемое *косвенное* определение понятия с помощью аксиом. Так в геометрии аксиомы раскрывают свойства и отношения первичных понятий «точка», «прямая» и др. В математике применяется *аксиоматическое* определение, которое дается с помощью совокупности аксиом, включаемых в определение понятия без дополнительного описания его. Например, определения натуральных чисел с помощью системы аксиом Пеано, понятие группы, поля, кольца и др.

Отметим еще правила построения определения:

- 1) оно должно быть полным и точным, четким и ясным;
- 2) нельзя определять понятие через неизвестное понятие или неизвестный признак;
- 3) нельзя допускать логического круга: А определять через В, а В – через А;
- 4) избегать отрицательных определений, т.е. указаний на то, чем определяемый объект не обладает (например, определение «нечетная функция есть функция не являющаяся четной» не будет верным определением, поскольку существуют функции которые не являются ни четными, ни нечетными).

4

Каждое понятие должно быть правильно понято, сознательно и четко усвоено всеми учащимися еще на уроке. Эта цель должна достигаться уже в процессе введения понятия, но понятие должно закрепляться на данном и повторяться на последующих уроках путем воспроизведения учащимися определения (или описания), приведения иллюстрирующих и конкретизирующих его примеров, проведения логического анализа определения и другой творческой работы, использования понятия в суждениях и умозаклучениях. Контроль за усвоением понятия осуществляется обычно в виде опроса учащихся, при котором нужно, как правило, требовать подтверждение определения примерами, причем не

только готовыми, взятыми из учебника, но и придуманными самостоятельно. Это требование должно стать правилом, причем ученики должны знать о нем, и дома, готовясь к занятиям, подыскивать свои примеры.

Вторым хорошим приемом при усвоении и запоминании определения понятия, является работа с самим определением, когда требуется среди несколько приведенных определений выбрать правильное и объяснить почему остальные определения являются неверными или неточными. Следует также проводить работу (особенно среди слабых учеников) требующую в текст определения вставить одно или несколько слов, словосочетаний. Все это приводит к неформальной работе над понятием и способствует активному запоминанию определений.

Эта творческая мыслительная работа развивает мышление школьников и способствует сознательному, глубокому и прочному усвоению сущности, содержания и объема понятия, исключает его формальное изучение, механическое заучивание определения. Формальное, поверхностное усвоение понятий ведет к их смешению, неточному пониманию и неправильному использованию, а в конечном счете – к формальному прохождению всего курса, плохому, поверхностному его усвоению. Другие понятия, введенные через недостаточные осмысленные понятия, будут еще более туманными, и правильное самостоятельное использование их в умозаключениях становится для некоторых учащихся невозможным. Такие понятия не могут «работать», и в результате не будет работать вся совокупность формальных математических знаний, обреченная на скорое забывание. Умственное развитие от такого обучения также незначительно.

Каждый ученик должен знать определения изученных понятий, однако требовать заучивания формулировок понятий без их осознания не стоит, так как это может привести к формализму. Надо ориентировать школьников на смысловое, логическое запоминание, которое должно стать результатом осмысливания определения, его структуры в процессе изучения и применения. Выделение родового понятия и видовых признаков, подыскание нескольких своих по возможности разнообразных примеров и проверка их на предмет полного удовлетворения всем требованиям определения – эффективное средство достижения сознательного усвоения понятия и его определения. Необходимо постепенно раскрывать перед учащимися общую *логическую структуру* определения, учить самостоятельно конструировать его для новых понятий.

Ученики должны знать, что дословное соблюдение формулировки, данной в учебнике, весьма желательно, хотя от ее формы можно отступить, передать частично «своими словами», но все содержание книжной формулировки обязательно сохранить точно. Когда ученик формулирует определение «своими словами», здесь скорее всего возможны ошибки, которые помогают выявить значение некоторых необходимых элементов определения и пробелы в усвоении понятия, с тем чтобы неотложно устранить их. Заученная формулировка может скрывать подобные пробелы. Учитель должен учить школьников выражать мысли «своими словами», поощрять их к этому, терпеливо подводить к самостоятельному исправлению ошибки. При дословных книжных формулировках особенно необходимо проверять сознательность их усвоения учащимися. На примерах таких формулировок, в которых нельзя пропустить ни одного слова, учитель прививает ученикам вкус к высокой логической культуре мышления и речи, учит их выражаться лаконично и точно.

Нельзя допускать поспешности при введении новых понятий, особенно если они сложны, трудны для учащихся и обладают высокой степенью абстракции (например, «функция», «предел», «производная», «интеграл» и др.). Практика показывает, что время, дополнительно затраченное при введении нового понятия на всестороннее, глубокое его изучение и сознательное усвоение, окупается в дальнейшем благодаря более легкому и результативному усвоению последующих связанных с этим понятием вопросов. И наоборот, результатом чрезмерной поспешности при изучении нового сложного понятия являются дальнейшие затруднения и не всегда восполнимые потери в достигаемом уровне знаний. В этом и заключается одна из причин того, что одна и та же тема или раздел учебного материала у одних учителей считается трудным для учащихся, а у других никаких затруднений не вызывает.

Например, при введении достаточно сложного понятия «призма», можно поступить следующим образом.

Вначале разбирается наглядный пример какой-то призмы, хотя до этого школьники уже не раз сталкивались с этим многогранником при решении задач, отмечают ее наиболее характерные свойства: равенство и параллельность оснований, равенство и параллельность боковых ребер и др. Затем вводится точное определение понятия призмы.

Призмой называется многогранник, у которого две грани – n -угольники, а все остальные n граней – параллелограммы.

После этого следует еще поработать с этим определением, предлагая учащимся найти ошибки в следующих «определениях».

1) Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы.

2) Призмой называется многогранник, у которого две грани – равные n -угольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные n граней – параллелограммы.

3) Призмой называется многогранник, у которого две грани – n -угольники лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней – параллелограммы.

4) Призмой называется многогранник, у которого две грани – плоские n -угольники, а все остальные n граней – параллелограммы.

Такая неформальная работа с определением призмы позволит школьникам яснее осознать это понятие и лучше его усвоить.

При всех видах *повторения* продолжается работа по дальнейшему усвоению математических понятий. Главное внимание при этом уделяется не воспроизведению определений, а различным видам творческой работы учащихся с понятиями, их применениями при решении разного рода задач, различным видам связей и отношений между понятиями.

5

Отметим некоторые ошибки, допускаемые учащимися в определениях.

Иногда учащиеся допускают «*порочный круг*» в определении. Например, прямой угол определяют как угол со взаимно перпендикулярными сторонами, а взаимно перпендикулярные прямые – через понятие прямого угла. Но определить прямой угол через понятие перпендикулярности прямых имеем право лишь в том случае, если перпендикулярность прямых была уже

определена ранее, причем не через понятие прямого угла, а через другое известное понятие.

Другим примером «порочного круга» может служить определение иррациональных чисел через вещественные («вещественные, не являющиеся рациональными») и вещественных через иррациональные («числа рациональные и иррациональные называются вещественными»). Иногда ученики действие сложения определяют через сумму, а сумму через сложение. Чтобы избежать таких логических ошибок, учащимся следует разъяснять необходимость придерживаться определенной последовательности введения понятий, принятой в том учебнике, по которому изучается курс математики в данном классе.

Недопустима в определениях *тавтология*, когда объект определяют через самого себя, хотя и в других выражениях, например: «Делением называется действие, при котором одно число делят на другое»; «Многоугольники называются подобными, если они подобны между собой» и т.п.

Логически *несовершенное определение* получают тогда, когда в него включают логически зависимые друг от друга свойства. Например, в одном из школьных учебников содержалось такое определение: «Треугольники называются подобными, если 1) углы одного соответственно равны углам другого; 2) стороны одного пропорциональны сходственным сторонам другого». Каждое из этих двух свойств может служить признаком определяемого понятия, а другое можно выбросить из определения и доказать как теорему (это фактически есть первый и третий признаки подобия треугольников).

Иногда учащиеся дают такое определение: «Параллелограммом называется такой четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны и параллельны», т.е. включают свойство равенства противоположных сторон, которое является логическим следствием признака понятия (попарной параллельности противоположных сторон) и составляет содержание следствия из теоремы. Хотя включение в определение логически зависимых друг от друга свойств и не ведет к фактическому изменению содержания и объема понятия, однако оно является свидетельством невысокого логического уровня математических знаний ученика. В такой ситуации следует предложить ученику привести пример такого параллелограмма, в котором противоположные стороны были бы попарно параллельны, но не равны. Такой фигуры ученик не придумает, а

соответствующая теорема подскажет, что ее и быть не может. Следовательно, нет основания включать в определение параллелограмма требование равенства противоположных сторон, ибо оно и без того выполняется.

В определении параллелограмма встречаются ошибки, изменяющие содержание понятия и искажающие сущность определения: «Параллелограммом называется четырехугольник с параллельными сторонами» (или: «у которого имеются параллельные стороны»). Выражение «с параллельными сторонами» неопределенно: все четыре стороны четырехугольника параллельными между собой быть не могут, поэтому оно означает параллельность двух сторон, т.е. признаки вида указаны не полностью, содержание понятия сузилось, а объем его расширился (охватывает параллелограммы и трапеции). Это результат пропуска в определении только одного слова («попарно»). Здесь как правило, необходимо привести ученика к исправлению своей ошибки, что можно сделать, например, так: «Нарисуйте параллелограмм ABCD; сколько параллельных сторон? (четыре); следовательно $AB \parallel AD$? (нет, не параллельны); можно здесь говорить о четырех параллельных сторонах? (нельзя); значит в вашем определении говорилось только о двух параллельных сторонах и вот такую фигуру (учитель рисует трапецию) придется называть параллелограммом». Полученное противоречие отвергает определение, данное учеником, и в этом заключается один из основных методов опровержения ошибочных суждений и определений – *приведение к противоречию*.

Другим аналогичным средством являются *контрпримеры*. Например, к определению, данному учеником: «Квадратным уравнением называется такое уравнение, которое содержит переменную во второй степени» учитель предлагает контрпример: $x^3 + x^2 - 1 = 0$, из которого выясняется, что квадратное уравнение не должно содержать более высоких степеней переменной, чем x^2 . Затем учитель последовательно предлагает следующие контрпримеры: $x^2 + \frac{1}{x} = 0$, $x^2 + y = 2$, из которых выясняются два других упущенных в определении признака понятия «квадратное уравнение».

Часто ученики дают следующее определение: «Угол, больший прямого, называется тупым» (по аналогии с определением острого угла). В качестве контрпримера учитель предлагает угол в 300° , с помощью которого выясняется, случайно ли упущено ограничение «меньше $2d$ ».

Для устранения ошибки в определении «Два уравнения равносильны, если все корни одного являются корнями второго» можно использовать такой контрпример: $2x - 6 = 0$, $x^2 - 3x = 0$. После уточнения «и наоборот», нужно рассмотреть такой пример: $x^2 + 1 = 0$, $1/x = 0$.

Учащиеся допускают ошибки в использовании родового понятия, когда они либо совсем опускают это понятие и заменяют его другими словами, либо берут не ближайший род. Например, медиану определяют не через понятие отрезок, а как «прямую, соединяющую вершину треугольника с серединой противоположной стороны». Но медиана отрезок, а не прямая.

Требую от учащихся содержательной точности определений, учитель добивается точности в усвоении математических понятий, знаний и оттачивает логическое мышление. Как правило, ошибки следует разбирать, привлекая всех учащихся к их выявлению и устранению, пользуясь при этом контрпримерами или приведением к противоречию.

6

Классификацией понятия называется деление (разбиение) объема этого понятия на подмножества (классы), удовлетворяющие следующим требованиям:

- 1) деление производится по одному и тому же существенному признаку – основанию деления;
- 2) все подмножества не пересекаются;
- 3) Объединение всех подмножеств должно давать объем понятия;
- 4) для подмножеств (видов) множество должно быть ближайшим родовым понятием, а виды соподчиненными.

Отметим, что данное определение классификации относится к разновидности аксиоматических определений: четыре включенных в него требования выступают в роли аксиом – априорно присвоенных определяемому понятию свойств.

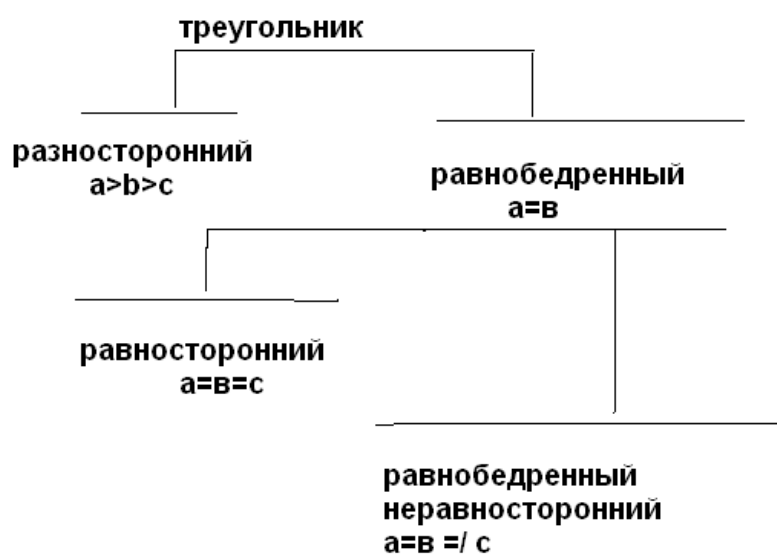
Наиболее простой классификацией является разбиение объема понятия на два класса – дихотомия, что в общем виде выглядит так. Пусть множество M состоит из элементов, каждый из которых обладает некоторым существенным свойством s (обозначение $x(s)$), или не обладает им (обозначение $\overline{x(s)}$). Разобьем множество M на два подмножества

$$M_1 = \{x : x \in M, x(s)\}, \quad M_2 = \{x : x \in M, \overline{x(s)}\}.$$

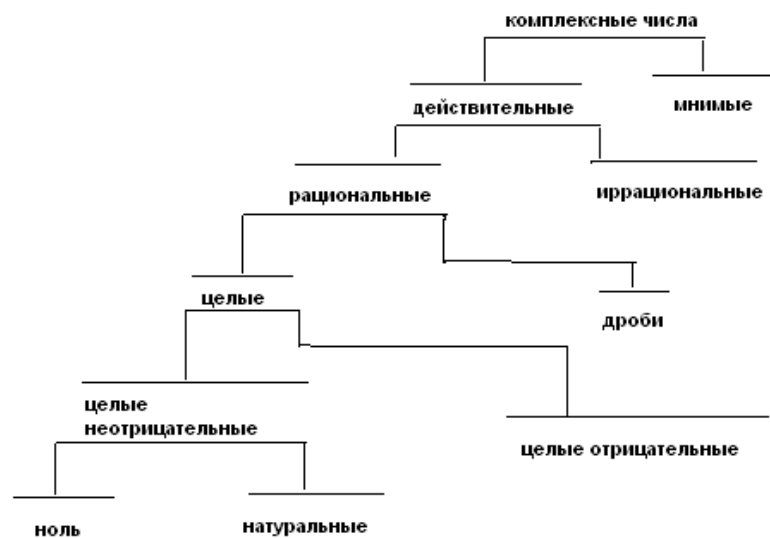
Очевидно, что условия 1) – 4) выполняются.

Приведем примеры такой классификации.

1. Классификация понятия «треугольник» по соотношению между сторонами.



2. Классификация понятия «число».



Упражнение. Привести классификацию понятия «отображение плоскости на себя».

Приведем пример классификации понятия «треугольник» по соотношению между углами, которая уже не будет дихотомией.



Классификация помогает правильно понять сущность понятий через выяснение их соотношений, разграничение объемов. Так первый пример классификации позволяет выявить часто встречающуюся у учащихся ошибку, когда они считают, что равносторонний треугольник не является равнобедренным.

Родословная понятия – это построение логического «дерева» возникновения понятия.

Например, родословная понятия «треугольник» отражает этапы формирования этого понятия, начиная от первичных понятий. Напомним определение. «Треугольником называется фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки.»

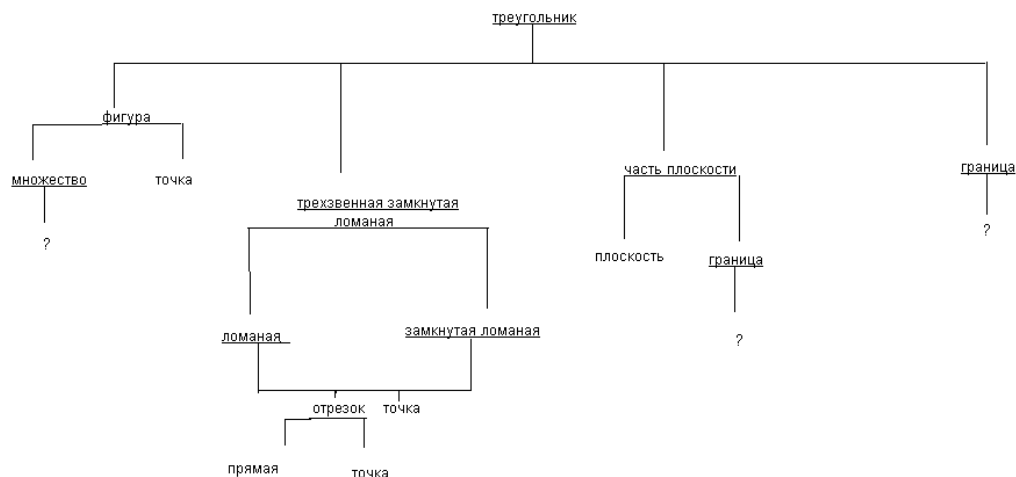
Чтобы построить родословную некоторого понятия, необходимо знать основные неопределяемые понятия, которые приведены в данном учебнике, а также основные отношения между ними и определения тех понятий, на которых базируется понятие, родословную которого мы строим.

Например, в учебнике В.В.Шлыкова «Геометрия 8» 2005 года издания основными неопределяемыми понятиями являются: точка, прямая, плоскость, множество. Затем вводятся понятия фигуры, отрезка, ломаной, простой ломаной, замкнутой ломаной.

Наконец дается следующее определение треугольника.

«Треугольником называется фигура, образованная трехзвенной замкнутой ломаной и ограниченной частью плоскости, для которой эта ломаная служит границей.»

Исходя из этого, мы можем построить следующую родословную понятия треугольник.



На этой диаграмме знаком вопрос отмечены те понятия, которые не содержатся в учебнике.

Уже этот пример показывает, что умение составлять родословную понятия необходимый навык учителя. Он позволяет выделить неточные определения, а также помогает выделить те определения, которые необходимы для введения новых понятий.

ЛЕКЦИЯ №4

ТЕМА: «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И МЕТОДИКА ИХ ИЗУЧЕНИЯ»

ВОПРОСЫ:

1. СУЖДЕНИЯ.
2. ОПЕРАЦИИ НАД ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ.
3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ.
4. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЯ.
5. АКСИОМЫ. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД.
6. ИЗУЧЕНИЕ И УСВОЕНИЕ ТЕОРЕМ. ГЕНЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД.

1

Напомним определение *суждения*.

Определение. *Суждение* – это логическая форма выражения мысли, представляющая собой утверждение или отрицание наличия в предметах или явлениях некоторых свойств или отношений между ними.

Таким образом, в суждении всегда выражается мысль о предметах или явлениях действительности, об объектах данной науки, и каждое суждение обладает следующими двумя свойствами: 1) что-то утверждает или отрицает; 2) является истинным или ложным.

Суждение выражается в словесной или символической форме и отражает связь понятий. В состав суждения входят три элемента: 1) логическое подлежащее или субъект мысли (S), – то, о чем что-то высказывается в суждении; 2) логическое сказуемое, или предикат мысли (P), – то, что высказывается о субъекте; 3) логическая связка. Получаем формулу простого категорического суждения: S есть (не есть) P , где S и P – переменные, а связка – постоянная.

Субъект и предикат, называемые *терминами* суждения, обычно представляют собой понятия, и каждый из этих терминов имеет, подобно понятию, свой объем и свое содержание. Объем субъекта V_s включается в объем предиката V_p , если в суждении что-либо утверждается о субъекте, и исключается V_s из V_p , если отрицается

$$S \text{ есть } P \Rightarrow V_s \subset V_p; \quad S \text{ не есть } P \Rightarrow V_s \not\subset V_p.$$

Содержание предиката (N_p) включается в содержание субъекта (N_s), если в суждении что-то утверждается о субъекте, и исключается – если отрицается:

$$S \text{ есть } P \Rightarrow N_s \supset N_p; \quad S \text{ не есть } P \Rightarrow N_s \supseteq N_p.$$

Соединяя обе формулы связи субъекта и предиката (по объему и содержанию), получаем

$$V_s \subset V_p \Rightarrow N_s \supset N_p; \quad V_s \subseteq V_p \Rightarrow N_s \supseteq N_p,$$

т.е. имеем обратную связь между объемами и содержаниями терминов суждения. В одних суждениях по их смыслу на первый план выдвигается связь по объему, а в других – связь по содержанию.

Приведем примеры суждений. 1. « $\log_a x$ » есть функция. 2. Число 27 делится на 3. В первом примере связь между субъектом и предикатом по объему, а во втором – по содержанию. В первом примере объем субъекта включен в объем предиката (логарифмические функции – лишь составная часть всех функций) и содержание предиката включено в содержание субъекта (все, что свойственно функциям вообще, свойственно и логарифмической функции). Во втором примере числу 27 приписывается свойство делимости на 3 (подчеркивается свойство) и число 27 включено во множество чисел кратных 3.

Математические суждения часто явно отражают включение одного класса объектов в другой класс. Например, суждение «Уравнение $ax=b$ есть линейное уравнение» включает класс уравнений вида $ax=b$ в класс линейных уравнений.

Суждения разделяют на *общие* и *частные* в зависимости от того, всем объектам данного класса или только некоторым из них приписывается (или отрицается) какой-нибудь признак. Суждения разделяются еще на утвердительные и отрицательные в зависимости от того, приписывается или отрицается какой-то признак всем (или некоторым) объектам данного класса, т.е. данный класс целиком или частично включается в другой класс или исключается из него.

Комбинируя эти два деления, получаем следующие четыре вида суждений, которые можно записать с помощью квантора общности $\forall$ и квантора существования $\exists$, а также знаков логических операций – конъюнкции и импликации.

1. *Общеутвердительное суждение.* Обозначается буквой А и выражается формулой «Все S суть P», что можно изобразить графически кругами Эйлера (рис.1) или записать символически : $\forall x(S(x) \Rightarrow P(x))$, т.е. «для всех объектов x , если x присуще свойство S, то x присуще свойство P».

2. *Частноутвердительное суждение.* Обозначается буквой I, выражается формулой «Некоторые S суть P» (рис.2) и записывается символически $\exists x(S(x) \wedge P(x))$, т.е. «существует такой объект x, которому присуще свойство S и присуще свойство P».

3. *Общеотрицательное суждение.* Обозначается буквой E, выражается формулой «Никакое S не есть P» (рис.3) и записывается символически $\forall x(S(x) \wedge \bar{P}(x))$, т.е. «ни одному x, которому присуще свойство S не присуще свойство P».

4. *Частноотрицательное суждение.* Обозначается буквой O, выражается формулой «Некоторые S не суть P» (рис.2) и записывается символически $\exists x(S(x) \wedge \bar{P}(x))$, т.е. «существует такой объект x, которому присуще свойство S и не присуще свойство P».

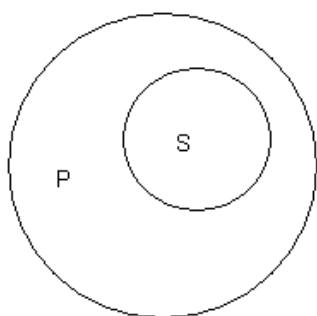


Рис. 1

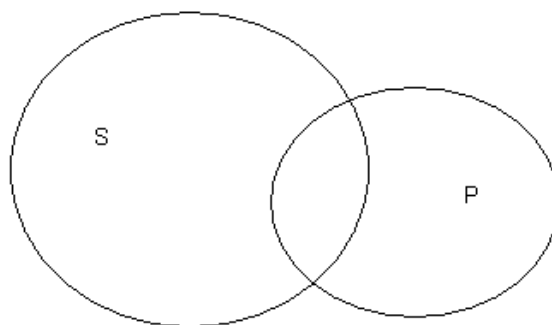


Рис. 2

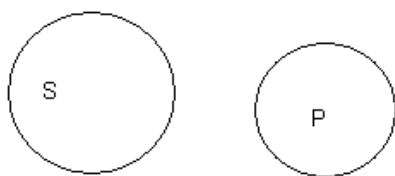


Рис. 3

В математической логике пользуются термином «высказывание», имеющим смысл, близкий к понятию «суждение», однако не тождественного ему.

Под *высказыванием* понимают всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно *истинно* или *ложно*.

Хотя высказывание обладает свойством выражать либо истину, либо ложь, однако оно считается как нерасчлененное целое, в то время как суждение всегда является конкретным единством двух терминов.

Над высказываниями проводятся следующие основные операции: 1) отрицание высказывания, 2) конъюнкция, 3) дизъюнкция, 4) импликация. Этими терминами называют как сами операции, так и их результаты. В последних трех операциях получаются сложные высказывания, состоящие из нескольких простых.

Отрицанием высказывания B называется такое высказывание $\bar{B}$, которое истинно тогда и только тогда, когда B ложно, и ложно, когда B истинно. Например, отрицанием высказывания «143 делится на 11» будет высказывание «243 не делится на 11», причем первое истинно, а второе ложно. Из двух суждений B и $\bar{B}$ одно и только одно всегда будет истинно, а другое ложно.

Конъюнкцией $B \wedge C$ (читают: « B и C ») высказываний B и C называют высказывание, составленное из высказываний B , C с помощью союза «и». Конъюнкция $B \wedge C$ есть истинное высказывание тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания, и ложны, когда одно или оба высказывания ложны. Например, конъюнкция «Квадрат есть прямоугольник и ромб» истинна, так как истинны оба высказывания «Квадрат есть прямоугольник» и «Квадрат есть ромб». Но конъюнкция «Функция $y = x^2$ является четной и возрастающей» ложна, поскольку второе высказывание ложно.

Дизъюнкцией $B \vee C$ (B или C) высказываний B и C называют высказывание, составленное из высказываний B и C с помощью союза «или». Дизъюнкция $B \vee C$ есть ложное высказывание тогда и только тогда, когда ложны оба высказывания B и C и истинно, если хотя бы одно из высказываний истинно. Например, высказывание « $\sqrt{3} \geq 1$ » истинно, поскольку из двух высказываний « $\sqrt{3} > 1$ » и « $\sqrt{3} = 1$ », первое истинно, а второе ложно.

Импликацией высказываний В и С называется высказывание «Если истинно В, то истинно и С», которое записывается так $\langle B \Rightarrow C \rangle$. Оно является ложным тогда и только тогда, когда В истинно, а С ложно, а в противном случае является истинным. Например, из высказываний 1) «Если $2 + (-2) = 0$, то $2^2 + (-2)^2 = 0$ », 2) «Если $2 = -2$, то $2^2 = (-2)^2$ » первое ложно, а второе истинно.

Для приведенных операций можно привести таблицы истинности.

1)

В	$\bar{B}$
и	л
л	и

2)

В	С	$B \wedge C$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

3)

В	С	$B \vee C$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

4)

В		С	$B \Rightarrow C$
и	и		и
и	л		л
л	и		и
л	л		и

Существует связь между операциями над множествами и над высказываниями.

Пусть E – универсальное множество, M и N – его подмножества, высказывание B есть « $x \in M$ », высказывание C есть « $x \in N$ ». Тогда для операций над высказываниями имеем: $\overline{B}(x \notin M)$, $B \wedge C(x \in M \cap N)$, $B \vee C(x \in M \cup N)$.

Импликация высказываний связана с понятием подмножества. Пусть M есть подмножество N и имеется два высказывания $B(x \in M)$ и $C(x \in N)$. Тогда импликация $B \Rightarrow C$ означает «если $x \in M$, то $x \in N$ » будет истинной, так как $M \subset N$.

3

В грамматике *предложением* называют слово или сочетание слов, выражающих законченную мысль.

В логике по поводу этого термина не все так однозначно.

Американский логик А. Черч под *предложением* понимает соединение слов, имеющее самостоятельный смысл, который можно описать и усвоить. Предложение в логике может выразить либо истину, либо ложь. *Суждение*, по

мнению А. Черча, – это то, что определяет истинное значение предложения. Поэтому предложение, это средство для выражения суждения. Однако суждение и предложение – не тождественные понятия. Повествовательное предложение что-либо сообщает, или что-либо утверждает или отрицает, поэтому оно всегда выражает суждение. Вопросительное и побудительное предложения не несут в себе подобной информации, а потому никаких суждений не выражают.

Под *логическим* предложением будем понимать такое грамматическое предложение, которое выражает определенное суждение. Структура логического предложения совпадает со структурой суждения. Так, в логическом предложении имеются субъект и предикат, в качестве которых выступают соответственно грамматическое подлежащее и сказуемое. Различие же между грамматическим и логическим предложениями выражается в их строении. Если грамматический строй предложений различен в разных языках, то логический одинаков.

Логическое предложение, выражающее суждение о математических объектах, называют *математическим предложением*. Субъект и предикат предложения называют соответственно его *условием* (основанием, посылкой) и *заключением* (следствием, выводом).

Теоремой называется математическое предложение, истинность которого установлена с помощью доказательства. Например, «Показательная функция всегда положительна» – теорема, выражающее свойство показательной функции и доказываемая в курсе математического анализа.

Объектами математики являются математические понятия, их свойства, отношения между понятиями. Понятия вводятся в теории в виде определения (или описания), которое включает не все, а лишь логически независимые существенные свойства понятия, составляющие в совокупности его признак (содержание понятия). Остальные же свойства понятия логически зависят от его содержания и выводятся из него. Так происходит исследование, изучение понятий, в результате которого появляются математические суждения (предложения). В зависимости от метода, с помощью которого получено суждение, оно может быть истинным – доказанной теоремой, либо правдоподобным суждением (гипотезой), которое надо доказать (и тогда оно станет теоремой) или опровергнуть как ложное. Аналогично получают теоремы, выражающие отношения математических понятий.

Каждая теорема содержит в себе *условие* и *заключение*. «Вертикальные углы равны». Здесь «вертикальные углы» – условие, а «равны» – заключение теоремы.

Формулировке этой теоремы можно придать и *условную* форму, для которой характерно использование слов «если..., то...»: «Если углы вертикальны, то они равны». Эта формулировка теоремы обладает тем преимуществом, что в ней четко разграничивается условие теоремы (оно начинается словом «если») и заключение (начинается словом «то»). Формулировку теоремы, не использующую слов «если..., то...», называют *категорической*.

В любой теореме из условия следует ее заключение, т.е. между условием и заключением существует связь типа импликация. Пусть B – условие теоремы, а C – ее заключение. Тогда теорему можно символически записать так: $B \Rightarrow C$.

Предложение $C \Rightarrow B$ называется обратной к теореме $B \Rightarrow C$. Предложения $B \Rightarrow C$ и $C \Rightarrow B$ называют *взаимно обратными* (любое из них можно считать прямым предложением, а другое – ему обратным).

Рассмотрим примеры обратных предложений к теоремам.

1) Прямая теорема: «Вертикальные углы равны».
Обратное предложение: «Равные углы вертикальны»

2) Прямая теорема: «Простые числа взаимно просты»
Обратное предложение: «Взаимно простые числа просты»

3) Прямая теорема: «Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам»
Обратное предложение: «Диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен ей».

Как видно из приведенных примеров, обратные предложения могут быть как верными (пример 3), так и ложными (примеры 1) и 2)). В первом случае углы при основании равнобедренного треугольника равны, но не вертикальны. Во втором, числа 8 и 15 взаимно просты, но не являются простыми.

К условию и заключению предложения применим операцию отрицания. Предложение $\bar{B} \Rightarrow \bar{C}$ называется *противоположным* к прямому $B \Rightarrow C$. Предложение $\bar{C} \Rightarrow \bar{B}$ называется *противоположным обратному* ($C \Rightarrow B$) или *обратным противоположному* ($\bar{B} \Rightarrow \bar{C}$). Среди четырех видов этих предложений обратное прямому и противоположное прямому эквивалентны, т.е. либо оба истинны, либо оба ложны, т.е.

$$(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\bar{C} \Rightarrow \bar{B}); (C \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{C}).$$

Докажем первую эквивалентность.

1) Дано: $B \Rightarrow C$. Доказать: $\bar{C} \Rightarrow \bar{B}$.

Доказательство. «Метод от противного». Допустим, что $\bar{C} \Rightarrow B$ истинно. Но по условию истинно $B \Rightarrow C$. По правилу силлогизма $(\bar{C} \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (\bar{C} \Rightarrow C)$, т.е. $\bar{C} \Rightarrow C$ истинно, но это не возможно, поскольку высказывание и его отрицание

одновременно истинными быть не могут. Полученное противоречие означает, что допущение ложно, а потому истинно $\bar{C} \Rightarrow \bar{B}$.

2) Дано: $\bar{C} \Rightarrow \bar{B}$. Доказать: $B \Rightarrow C$.

Доказательство. Опять, пусть истинно $B \Rightarrow \bar{C}$. Но по условию $\bar{C} \Rightarrow \bar{B}$. Отсюда $(B \Rightarrow \bar{C}) \wedge (\bar{C} \Rightarrow \bar{B}) \Rightarrow (B \Rightarrow \bar{B})$. Допущение ложно, следовательно, $B \Rightarrow C$ истинно.

Итак эквивалентность $(B \Rightarrow C) \Leftrightarrow (\bar{C} \Rightarrow \bar{B})$ доказана.

Аналогично доказывается эквивалентность для другой пары предложений.

При преобразовании $B \Rightarrow C$ в три других вида предложений условие B полностью переносили в заключение, а заключение C – в условие, чтобы получить обратное предложение, а также применяли операцию отрицания к B и C в целом, чтобы получить противоположное предложение. Именно для таких предложений верны доказанные соотношения эквивалентности.

Однако существуют сложные предложения $B \Rightarrow C$, где B или C (или B и C одновременно) состоят из нескольких суждений. Для таких предложений можно построить несколько различных обратных предложений, по-разному сочетая суждения, входящие в состав B и C при построении условия и заключения обратного предложения. Некоторые из полученных предложений могут оказаться истинными.

Рассмотрим пример теоремы: «Сумма величин смежных углов равна 180° ». Если заменить в этой теореме понятие «смежные углы» его содержанием, то получим теорему со сложным условием: «Если два угла имеют общую сторону и две другие их стороны образуют одну прямую, то величины таких углов в сумме дают 180° ». Обратные предложения можно сформулировать так.

1) Если величины двух углов, имеющих общую сторону и расположенные в разных полуплоскостях, составляют 180° , то две другие их стороны – противоположные лучи.

2) Если сторона одного угла и сторона другого угла являются противоположными лучами с общим началом, углы расположены в одной полуплоскости относительно этой прямой и сумма их величин равна 180° , то две другие стороны этих углов совпадают.

Эти два предложения верны.

Рассмотрим теорему. «Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то 1) соответственные углы равны; 2) внутренние (внешние) накрест лежащие углы равны; 3) величины внутренних (внешних) односторонних углов

в сумме дают 180°). Это пример теоремы со сложным заключением, состоящим из 5 простых. Поэтому эту теорему можно разбить на 5 простых и для каждой из них сформулировать обратные предложения, которые будут давать признаки параллельности прямых.

4

Понятия «необходимое условие» и «достаточное условие» тесно связаны с понятием «теорема», а понятие «необходимое и достаточное условие» – с прямой и обратной теоремами.

Необходимым условием некоторого суждения называется такое условие, без выполнения которого это суждение не может быть истинным. При выполнении же необходимого условия суждение может быть истинным, а может и не быть истинным. Например, условие «число четно» является необходимым для суждения «число делится на 6». Другим необходимым условием для данного суждения будет условие «число кратно 3».

Достаточным условием некоторого суждения называется такое условие, при выполнении которого суждения обязательно истинно. Например, условие «число кратно 9» будет достаточным для суждения «число делится на 3». Но это условие не будет необходимым, так как 12 делится на 3, но не делится на 9.

Необходимым и достаточным условием некоторого суждения называется такое условие, без выполнения которого суждение не может быть истинным, а при его выполнении – обязательно истинно. Например, условие «число четно и кратно 3» является необходимым и достаточным для суждения «число кратно 6».

Если рассмотреть теорему $B \Rightarrow C$, то B будет достаточным для C (т.к. C истинно при выполнении B), а C будет необходимым для B (т.к. обратная теорема не всегда верна). Так в теореме «Если функция дифференцируема в точке x , то она непрерывна в этой точке», условие дифференцируемости является достаточным для непрерывности, а непрерывность является необходимым условием для дифференцируемости ($y = |x|$ непрерывна в точке $x=0$, но не дифференцируема в этой точке).

Если верна и обратная теорема $C \Rightarrow B$, то C является достаточным для B , а B – необходимым для C . Значит, если верны прямая и обратная теоремы, то условие и заключение теоремы являются необходимым и достаточным условиями друг для друга. В этом случае пишут $B \Leftrightarrow C$. Так пусть B есть суждение «Точка плоскости принадлежит биссектрисе угла α » и C – «Точка P равноудалена от сторон угла α ». Верны обе теоремы $B \Rightarrow C$ и $C \Rightarrow B$, а потому $B \Leftrightarrow C$.

Условие, которое является только *необходимым* для данного суждения, имеет слишком узкое содержание, т.е. включает в себе слишком мало требований для выполнения суждения. Так условие для четырехугольника $ABCD$: $AB \parallel CD$, является лишь необходимым для того, чтобы этот четырехугольник был параллелограммом (этому условию удовлетворяет и трапеция). Если же к этому условию добавить еще одно, например, такое: $AB=CD$, то мы уже получим необходимое и достаточное условие, для четырехугольника $ABCD$ быть параллелограммом

Условие, которое является только *достаточным* для некоторого суждения, но не является для него необходимым, содержит слишком сильные требования для выполнения данного суждения, в результате чего объем отображаемых в суждении объектов сужается. Например, для того чтобы треугольники имели равные площади, достаточно, чтобы у них были равны основания $a = a_1$ и высоты, проведенные к основаниям $h = h_1$. Но это чрезмерное требование для равновеликости треугольников, и его можно ослабить, потребовав лишь равенства произведений $ah = a_1h_1$, которое является необходимым и достаточным условием равновеликости треугольников.

В любом *определении понятия* должно содержаться необходимое и достаточное условие этого понятия, – в противном случае это определение будет построено неверно.

Необходимое и достаточное условие параллелограмма $ABCD$ можно получить разными способами, комбинируя необходимые условия. Например:

- 1) $AO=OC, BO=OD$ ($O=AC \cap BD$);
- 2) $AB \parallel CD, AB=CD$;
- 3) $AD \parallel BC, AD=BC$;
- 4) $AB=CD, BC=AD$.

Каждое из этих четырех условий является необходимым и достаточным условием параллелограмма, а потому каждое из них можно взять в качестве определения, а тогда остальные доказываются как теоремы. Из этого примера видно, что для одного и того же суждения возможны несколько вариантов

необходимого и достаточного условия, причем все варианты эквивалентны друг другу (логически зависимы, каждый следует из другого).

Важным примером использования необходимого и достаточного условия, является понятие *геометрического места точек*. Например, серединный перпендикуляр к отрезку, есть геометрическое место точек (ГМТ), равноудаленных от концов этого отрезка. Это ГМТ включает в себя точки и только те точки, которые обладают указанным свойством (равноудаленность), а потому содержит необходимое и достаточное условие. Значит, при определении этого ГМТ должны быть доказаны как прямая, так и обратная теоремы.

Применение терминов «необходимо» и «достаточно» требует развитого логического мышления школьников и в свою очередь эффективно способствует развитию такого мышления.

В курсе математики для общеобразовательной школы программой не предусмотрено изучение этой темы. Однако учителю по возможности следует ознакомить учащихся с основными понятиями на факультативных занятиях, а затем, при проведении других факультативных занятий, активно использовать этот материал. При этом полезными будут упражнения такого типа.

Вставить вместо пробела «_» одно из следующих трех условия: «необходимо и достаточно», «необходимо», «достаточно» так, чтобы высказывание стало истинным:

- 1) Чтобы закончить школу, «_», усвоить школьный курс математики.
- 2) Чтобы сумма двух натуральных чисел была четной, «_», чтобы каждое слагаемое было четным.
- 3) Чтобы $\log_2 x > 2$, «_», чтобы $x > 4$.
- 4) Чтобы число делилось на 4, «_», чтобы это число делилось на 2.

Современное среднее образование без знания вопросов необходимости и достаточности нельзя считать полноценным.

Аксиомой называется математическое предложение, принимаемое за истинное без доказательства.

Подобно тому как невозможно дать определение нескольким первичным понятиям данной науки, невозможно также доказать и несколько из ее первых логически независимых предложений, так как при этом не существует еще доказанных предложений, на основании которых можно было бы доказать другие предложения, в частности, принимаемые за аксиомы. Школьники

склонны считать, что аксиомы не доказываются потому, что они очевидны и их истинность подтверждается наглядностью или опытом. Следует указать школьникам на ошибочность подобного взгляда. Хотя многие аксиомы действительно отражают крупницы опыта жизни поколений людей и этим подтверждают связь математики с реальной действительностью, однако этот опыт не является критерием истинности математических предложений. Истинно то, что логически следует из истинного (теоремы) и то, что мы по соглашению (не обязательно основанному на опыте) первоначально примем за истинное (аксиомы). Примером такого плодотворного для науки соглашения может служить аксиома параллельных Н.И.Лобачевского, приведшая к открытию неевклидовых геометрий, хотя эта аксиома противоречит соответствующей аксиоме Евклида, согласующейся с жизненным опытом людей.

О научном значении аксиом, их важности говорят следующие факты. Аксиомы применяются в наиболее строгих и точных науках, называемых дедуктивными. Такими являются прежде всего математические науки, широко использующие аксиомы наряду с дедуктивными методами. Аксиомы (постулаты), зародившиеся в геометрии Евклида за 300 лет до н.э., получили свое дальнейшее развитие в трудах Д.Гильберта именно на современном этапе развития математики в связи со строгим обоснованием геометрии и других математических наук.

Геометрия Евклида, построенная на базе 14 аксиом, явилась венцом трехвекового периода развития геометрии в Древней Греции и долго казалась образцом строгого логического построения науки. В основных чертах геометрическая система Евклида сохранилась в школьных учебниках геометрии и до наших дней. Однако оказалось, что аксиом Евклида далеко недостаточно для построения геометрии чисто логическим путем, поэтому в дальнейших доказательствах, наряду с подлинно логическими умозаключениями, Евклид постоянно прибегал к наглядному представлению, к геометрической интуиции.

Д.Гильберт в своем классическом труде [Гильберт Д. Основания геометрии. Пер. с нем. – М., 1948.] стремился разработать «полную и возможно более простую систему аксиом» геометрии. В геометрической системе Гильберта рассматриваются три первичных понятия: «точка», «прямая», «плоскость» и три первичных отношения: «принадлежит», «между», «конгруэнтен», относительно которых известно лишь то, что они удовлетворяют аксиомам. (Такое введение первичных понятий и отношений называют *косвенным* определением через аксиомы).

Аксиомы у Д.Гильберта разбиты на пять следующих групп:

I группа (из восьми аксиом) – аксиомы соединения (принадлежности) описывающие отношение «принадлежит» (или «лежит на», «проходит через») и устанавливающие соединение между точками, прямыми и плоскостями;

II группа (из четырех аксиом) – аксиомы порядка, описывающие отношение «между» и дающие возможность установить порядок точек на прямой;

III группа (из пяти аксиом) – аксиомы конгруэнтности, описывающие отношение «конгруэнтен» (а через него – понятие движения);

IV группа (из одной аксиомы) – аксиома о параллельных, описывающая отношение «параллельный»;

V группа (из двух аксиом) – аксиомы непрерывности, описывающие отношение «непрерывный».

В аксиомах одновременно с указанными отношениями описываются первичные понятия точки, прямой, плоскости.

Система аксиом позволяет дать чисто логическое, совершенно строгое построение данной науки, обоснование всех ее предложений лишь в том случае, если эта система обладает:

а) *непротиворечивостью*: не должны противоречить друг другу не только сами аксиомы данной системы, но и все логические следствия, которые могут быть получены из аксиом;

б) *полнотой*: всякие две интерпретации системы аксиом должны быть изоморфны между собой;

в) *независимостью*: все аксиомы должны быть взаимно независимы, т.е. ни одну из аксиом нельзя доказать как теорему на основании остальных аксиом.

Попытка доказать аксиому параллельности и исключить ее (как зависимую от остальных аксиом этой системы) привела к открытию новой, неевклидовой геометрии Лобачевского. Из аксиоматики евклидовой геометрии путем замены аксиомы IV соответствующей аксиомой Лобачевского получим аксиоматику геометрии Лобачевского.

Метод научного построения теории, когда из конечного числа аксиом логически выводятся остальные положения этой теории, называют аксиоматическим методом, а такую теорию – аксиоматической теорией. В

математических дисциплинах стремятся к аксиоматическому построению, и это уже удалось осуществить в ряде ее разделов: геометрии, арифметике, теории вероятностей и др.

Рассмотрим, как в современных учебниках геометрии вводятся и используются первоначальные понятия и аксиомы. Сделаем это на примере учебников В.В. Шлыкова «Геометрия 8» и «Геометрия 10»..

Вначале без определения, а с помощью описания, вводятся понятия точки, прямой, плоскости. Фигура определяется как произвольное множество точек. Затем формулируется следующая аксиома:

«Через любые две различные точки плоскости можно провести единственную прямую, и эта прямая лежит в плоскости.»

После этого дается определение отрезка, и приводятся аксиомы измерения длины:

- 1) Каждый отрезок имеет длину, которая выражается некоторым положительным числом. Равные отрезки имеют равные длины.
- 2) Отрезки, имеющие равные длины равны.
- 3) Длина отрезка равна сумме длин двух отрезков, на которые он делится любой своей точкой.

В следующем параграфе дается определение угла, равных углов, и вводятся аксиомы измерения углов:

- 1) Каждый угол имеет градусную меру, большую нуля.
- 2) Равные углы имеют равные градусные меры.
- 3) Углы, имеющие равные градусные меры, равны.
- 4) Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он делится некоторым лучом.

И, наконец, формулируется аксиома параллельных прямых: «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.»

В начале изучения стереометрии в 10-м классе, как и в планиметрии, основными неопределяемыми фигурами являются точка, прямая и плоскость и даются три аксиомы:

- 1) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.
- 2) Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки данной прямой лежат в этой плоскости.

- 3) Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

6

При изучении математических предложений возможны два противоположных подхода: догматический и генетический.

При *догматическом* подходе ученикам сразу сообщается готовое предложение, которое тут же доказывается или каким-то образом обосновывается. Если такой метод удобен при строгом изложении математической теории на основе аксиоматического и дедуктивного методов, то для целей обучения он мало пригоден: не вызывает у учащихся интереса к изучаемой информации, не показывает необходимости изучения данного предложения, не раскрывает внутренней логики развития учебного предмета, не способствует активизации познавательной деятельности. В преподавании такой подход допустим в тех случаях, когда изучаемый материал или слишком сложен, или слишком велик, а разбивка его на отдельные компоненты нецелесообразна, либо когда мотивация к обучению у школьников большая. В учебниках по математике он встречается довольно часто потому, что авторы оставляют задачу восполнения педагогических пробелов догматического метода учителям и методистам.

Перечисленные недостатки устраняются при применении *генетического* метода. При таком подходе к новому изучаемому предложению учитель должен по возможности открыть для учащихся происхождение этого предложения. Еще лучше, если учащиеся самостоятельно откроют для себя это предложение. Здесь иногда лабораторный метод может сочетаться с генетическим. Например, изучение теоремы о сумме внутренних углов треугольника целесообразно начать с практической работы. Каждый ученик в тетради чертит несколько разных треугольников, измеряет величины их внутренних углов и находит их суммы. Затем на доске выписываются результаты, рассмотрение которых приводит к гипотезе, что сумма внутренних углов любого треугольника равна 180° , а наблюдающиеся небольшие отклонения объясняются приближенностью измерений. Последнее обстоятельство, а также то, что конкретных треугольников бесконечно много, приводят к пониманию отыскания доказательства полученной гипотезы.

Генетический метод может применяться и в алгебре. Вместо того чтобы дать учащимся готовую формулировку теоремы Виета, учитель приводит их к самостоятельному обнаружению выраженного в ней свойства. Для этого при решении сначала приведенных квадратных уравнений, а затем произвольных, учитель предлагает вычислять сумму, а затем произведение полученных корней и сопоставлять результаты с коэффициентами данного уравнения. После нескольких таких примеров ученики самостоятельно сформулируют гипотезу, которая в результате доказательства обратится в теорему Виета.

Если нет возможности подвести учащихся к самостоятельному формулированию новой темы, то генетический метод может выразиться в постановке проблемы теоретического или практического плана, отчетом на которую явится новая теорема или раскрытие истории ее возникновения, значения в науке или практике. Приведем примеры.

Приступая к изучению основных свойств уравнений, связанных с понятием равносильности, учитель может указать на те проблемы, которые возникают при решении уравнений: как надо решать уравнение, чтобы не потерять корни и не получить посторонние. При этом можно рассмотреть примеры $21(x-1)(x-3)=7(x-1)$, $6x:2x=3$, и др.

Начиная изучение свойств прямоугольника, учитель отметит, что на практике часто приходится проверять, является ли данных четырехугольник прямоугольником, и что для этой цели определение прямоугольника бывает неудобно. В таких случаях лучше использовать свойство диагоналей прямоугольника. Какое же это свойство? Учащиеся сами должны попытаться ответить на вопрос, а учитель укажет, что это только догадка, которая после доказательства станет истинным предложением, т.е. теоремой.

Генетический метод должен использоваться и при введении новых понятий и правил, где он хорошо сочетается с методом целесообразных задач. Это стимулирует учение школьников, способствует более широкому и глубокому пониманию, качественному усвоению предмета

Учитель должен хорошо знать историю математики и прежде всего тех вопросов, которые включены в школьный курс, что поможет ему широко и систематически применять генетический подход в преподавании и будет способствовать повышению эффективности учебного процесса.

ЛЕКЦИЯ №5

«МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ»

ВОПРОСЫ:

- 1. ПРОГРАММИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ.**
- 2. ПРОБЛЕМНОЕ ОБУЧЕНИЕ.**
- 3. ЭВРИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОБУЧЕНИЯ.**
- 4. ТРАДИЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ. ЛЕКЦИЯ.**
- 5. ВЫБОР И СОЧЕТАНИЕ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ.**

Обучение – это двусторонний процесс, состоящий из преподавания, осуществляемого учителем, и учения школьников. Постоянная задача оптимизации учебного процесса, повышения его эффективности с целью обеспечения более качественного усвоения учебной информации в условиях сокращения времени на его изучение, требует выявления и использования резервов учебного процесса. В решении этой проблемы помогает выбор оптимальных методов преподавания и организации учебного процесса, а также правильное сочетание методов обучения.

1

Учение и усвоение учебной информации – индивидуальный процесс, протекающий у каждого школьника по-своему, поэтому управление им со стороны учителя требует регулярного поступления от ученика к учителю информации о ходе усвоения. Только с учетом этой информации учитель может своевременно и эффективно вмешиваться в учение каждого школьника на уроке. Это привело к идее программированного обучения, в соответствии с которой каждый ученик работает по специально составленной обучающей программе. В программе содержатся и ответы на поставленные в ней вопросы, с помощью которых учащийся сам контролирует свою работу, осуществляя внутреннюю обратную связь, что обеспечивает возможность каждому ученику работать на уроке в своем оптимальном темпе. Некоторые обучающие программы предусматривают и контроль со стороны учителя за

работой ученика и возможность корректировки выполнения обучающих заданий.

Программированное обучение зародилось в 50-х годах прошлого века в США. Там же были разработаны две системы построения обучающих программ: линейная система Б.Скинера, в которой для всех учащихся предусматривается одна линия усвоения, и разветвленная система Н.Краудера, в которой ответ выбирается из системы готовых, где лишь один правильный.

Обучающая программа, как правило, состоит из шагов, каждый из которых содержит информационный кадр (основные сведения из теории), операционный кадр (упражнения) и кадр обратной связи (указания, ответы). После нескольких шагов следует контрольный кадр, который позволяет в случае успешного выполнения заданий перейти к следующей порции теории и задач, в случае же неверных решений, рекомендует (или отправляет) ученика обратно к тем моментам теории, по которым были допущены ошибки.

Однозначное предписание последовательности действий, которые приводят к решению определенного класса задач, называют алгоритмом. Обучающая программа представляет собой алгоритм обучения, следовательно, программированное обучение тесно связано с проблемой алгоритмизации обучающего процесса.

Сейчас уже есть достаточное количество обучающих программ по разным разделам школьной математики, однако процесс их внедрения в школу недостаточен по ряду причин, и главными из них являются большая затратность и необходимость иметь несколько классов, оснащенных компьютерами. Кроме того, не оправдались те надежды, которые возлагались на этот метод на заре его возникновения, т.к. этот метод эффективен вначале изучения темы. Если же речь идет об обучении школьников решать нестандартные задачи, или задачи более высокой степени трудности, где на первый план выходит умение анализировать, искать неалгоритмические пути решения задачи, этот метод малоэффективен, а роль учителя многократно возрастает. Однако стоит отметить, что еще не достаточно разработана теория этого метода и не выявлены все положительные и отрицательные его стороны.

Традиционные методы обучения сложились давно и постепенно улучшались. Они соответствуют уровню развития педагогики и смежных наук, характерному для XIX в., хотя уже со второй его половины эти методы подвергаются резкой критике. Наряду с серьезными недостатками традиционные методы имеют и рациональное начало, позволившее им сохраниться до наших дней.

К традиционным методам относится, прежде всего, метод догматического словесного изложения и объяснения готовых знаний. При этом методе вся активность приходится на преподавание и полная пассивность на учение, т.е. полностью игнорируются, прежде всего, основные идеи современной дидактики о развивающем обучении и активном учении. Все учение фактически сводится к пассивному запоминанию, заучиванию и воспроизведению заученного. Развивается только память и тесно связанное с ней репродуктивное (воспроизводящее) мышление. Это – прямая противоположность трем рассмотренным здесь современным методам, носящим преимущественно творческий характер.

В наше время традиционный метод перестал быть универсальным. Попытки преобразовать его в соответствии с требованиями современной дидактики не могут, однако, изменить его основную суть – подачу готовых знаний, которая в наше время может быть допущена скорее как исключение, чем, как правило. Отсюда следует ограниченность применения традиционного метода в современной школе, его вспомогательная роль. Он применяется главным образом для преподавания отдельных фрагментов темы урока, основной материал которой подается современным методом.

Несколько обновленный, современный метод словесного изложения и объяснения готовых знаний (сообщающе-объяснительный метод) называют иногда школьной лекцией. Она находит некоторое применение в старших классах. Школьная лекция от вузовской отличается меньшей продолжительностью, а также тем, что ее можно прервать в удобном месте, чтобы ответить на вопросы учащихся, если они возникли, и предложить одному из них воспроизвести изложенную часть темы. Затем учитель

объясняет остальную часть темы и закрепляет ее. Так поступают при изложении большой темы, если ее не удастся изучить другим, более совершенным методом. Следует иметь в виду, что никакое самое хорошее изложение и объяснение («разжевывание») готовых знаний, как правило, не компенсирует отсутствия активного учения, самостоятельного поискового мышления учащихся.

Существенным улучшением традиционного обучения явилось сочетание сообщающее-объяснительного метода с методом наглядного обучения. Слово – незаменимое средство в обучении, однако в силу психологических закономерностей на первых этапах обучения оно не может быть единственным средством познания и развития. Это нашло отражение в дидактическом принципе наглядности, прочно утвердившемся в современном обучении. Наглядность играет важную роль и в столь абстрактной науке, как математика, помогает формированию абстрактных математических понятий, развитию абстрактного мышления. Само понятие наглядного пособия постепенно расширялось и теперь включает наряду с реальными предметами и моделями также различные таблицы, чертежи, графики, графсхемы и т.д.

Рассказ как метод обучения в математике играет вспомогательную роль. Он представляет собой повествовательное изложение, например, исторической справки о происхождении десятичной системы счисления, зарождения геометрии, об истории V постулата Евклида, истории тригонометрических функций, логарифмов, производной и т.п. С помощью рассказа желательно сообщать информацию о значении изучаемого вопроса в науке или жизни. Программный материал по математике в виде рассказа не подается.

5

Проблему выбора методов обучения учителю приходится решать при подготовке к каждому уроку. При этом следует иметь в виду, что ни один из рассмотренных методов обучения, несмотря на все его преимущества, не может стать универсальным, единственным и всеобъемлющим. Тем более не могут быть универсальными традиционные методы, основанные на подаче готовых знаний, хотя в практике отдельных учителей они все еще остаются почти универсальными.

Педагогический процесс уже по своей природе требует разнообразия методов обучения. Каждый метод имеет некоторое преимущество перед другими методами, и соответственно этому определяется его место в современной системе обучения. Разнообразить методы следует по возможности не только от урока к уроку, но и на одном и том же уроке. Намечая применять на уроке несколько методов, необходимо определить, какой же из них должен быть главным и почему этот, а не другой.

При выборе главного метода для оптимального решения основной дидактической задачи данного урока учитывают характер, содержание и объем учебного материала планируемого урока, возрастные особенности учащихся, уровень их математической подготовки и самостоятельности мышления, отношение к учебе, владение навыками учения, работоспособность на уроке и др. Эти же факторы наряду с выбранным главным методом определяют также вспомогательные методы и их функции на данном уроке.

Решающим, окончательным критерием при выборе основного метода должна служить возможность обеспечить оптимальную степень активности и самостоятельности мышления. В соответствии с этим надо использовать на уроке обучающую программу, если она имеется, или создать проблемную ситуацию и применить один из видов проблемного обучения, или разработать систему вопросов для эвристической беседы, или найти возможность применить самостоятельную работу учащихся.

Почти всегда один из этих случаев окажется возможным и целесообразным, а в качестве вспомогательных средств при этом могут выступать эпизодические приложения других методов, в том числе и традиционных. Если же не удастся найти приемлемого применения ни одного из методов, основанных на активной, творческой работе учащихся, то можно использовать одну из форм проблемного изложения или метод школьной лекции (в старших классах).

Учителю необходимо следить за разработкой современных методов обучения в общей дидактике и проверять их, творчески применять на уроках.

Еще нет вполне удовлетворительной и общепризнанной классификации методов обучения. Не безупречно и наше деление методов, однако оно отражает современное состояние проблемы, перспективу ее развития. Среди различных классификаций неправомерно преобладают такие, в которых за

основание принимается какой-нибудь внешний, а не внутренний признак. В распространенном в педагогике делении методов обучения на словесные, наглядные и практические отражено лишь ее прошлое, когда наглядные и практические методы добивались своего признания наряду со словесными, а обучение отождествлялось с преподаванием и не вникало в сущность процесса учения. Современная же классификация должна быть ориентирована на будущее и способствовать решению проблемы активизации процесса учения, познания, мышления школьников.

Методы обучения целесообразно подразделить прежде всего на творческие и репродуктивные, а в первых выделить важнейшую современную группу проблемно-эвристических методов и перспективную группу программировано-алгоритмических методов. В репродуктивных методах можно выделить традиционно-репродуктивные и проблемно-репродуктивные – подача и усвоение знаний соответственно в готовом виде и при проблемном изложении их учителем. Во всех этих методах присутствуют слово, наглядность и практическое действие в их целесообразном сочетании, причем они выступают не как методы (способы), а как средства обучения, реализации методов. Классификация методов обучения должна отражать тот факт, что роль учителя в педагогическом процессе – ведущая, но она не ограничивается преподаванием (в традиционном понимании) и направлена на организацию и управление решающим звеном этого процесса – учебной деятельностью школьников.

ЛЕКЦИЯ №6

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

ВОПРОСЫ:

- 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ+**
- 2. РОЛЬ ЗАДАЧ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ.+**
- 3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**
- 4. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ**
- 5. ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ**

Задача – понятие неопределяемое и в самом широком смысле означает то, что требует исполнения, решения. Иногда под задачей понимают упражнение, которое нужно выполнить или решить посредством умозаключения, вычисления, построения и т.п.

Каждая задача задает совокупность данных – *условие задачи* и вопрос, указывающий искомое, – *требование задачи*.

Существуют различные классификации задач.

По соотношению между условием и заключением задачи подразделяются на : 1) определенные; 2) неопределенные; 3) переопределенные.

Если данных в условии задачи недостаточно чтобы ответить на вопрос задачи, то задачу называют *неопределенной*. Если же в условии задачи данных достаточно, а после отбрасывания одного из условий задача становится неопределенной, то такая задача называется *определенной*. Если же в условии задачи кроме достаточных данных, содержатся и еще какие либо данные, то задача называется *переопределенной*.

По уровню сложности задачи подразделяют на *простые* и *сложные*. Если из задачи нельзя выделить какую-либо подзадачу, то задача называется *простой*, а если можно, то – *сложной*. Например, задача : «Решите уравнение: $2x=4$ », будет простой, а задача: «Решите уравнение: $2x+4=8$ », будет сложной, поскольку в последнем случае можно выделить подзадачу – найти первое слагаемое.

По отношению к различным разделам математики задачи подразделяют на арифметические, алгебраические, геометрические, тригонометрические и др.

По дидактическим целям задачи делятся на познавательные, тренировочные, развивающие. Познавательные задачи служат в основном для получения новых знаний и особо широко применяются в младших классах для введения новых понятий, знаний. Тренировочные задачи предназначены для выработки прочных навыков и умений в решении задач, примеров, в применении знаний. Развивающие задачи служат для развития творческого мышления.

По типу мышления задачи делятся на алгоритмические, полуалгоритмические и эвристические.

2

При обучении математике задачи имеют большое и многостороннее значение.

Образовательное значение математических задач. Решая математическую задачу, человек познает много нового: знакомится с новой ситуацией, описанной в задаче, с применением математической теории к ее решению, познает новый метод решения или новые теоретические разделы математики, необходимые для решения задачи, и т. д. Иными словами, при решении математических задач человек приобретает математические знания, повышает свое математическое образование. При овладении методом решения некоторого класса задач у человека формируется умение решать такие задачи, а при достаточной тренировке - и навык, что тоже повышает уровень математического образования.

Следует выделить несколько видов задач по их обучающей роли.

1) Задачи для усвоения математических понятий. Известно, что формирование математических понятий хорошо проходит при условии тщательной и кропотливой работы над понятиями, их определениями и свойствами. Чтобы овладеть понятием, недостаточно выучить его определение, необходимо разобраться в смысле каждого слова в определении, четко знать свойства изучаемого понятия. Такое знание достигается, прежде всего, при решении задач и выполнении упражнений.

2) Задачи для овладения математической символикой. Одной из целей обучения математике является овладение математическим языком и, следовательно, математической символикой. Простейшая символика вводится еще в начальной школе и в IV-V классах (знаки действий, равенства и неравенства, скобки, знаки угла и его величины, параллельности и т. д.). Правильному употреблению изучаемых символов надо обучать, раскрывая при решении задач их роль и назначение.

3) Задачи для обучения доказательствам. Обучение доказательствам - одна из важнейших целей обучения математике.

Простейшими задачами, с решения которых практически начинается обучение доказательствам, являются задачи-вопросы и элементарные задачи на исследование. Решение таких задач заключается в отыскании ответа на вопрос и доказательстве его истинности.

4) Задачи для формирования математических умений и навыков.

5) Обучающую роль играют и задачи, предваряющие изучение новых математических фактов, концентрирующие внимание учащихся на вновь изучаемых идеях, понятиях и методах математики, задачи, с помощью которых вводятся новые понятия и методы, задачи, создающие проблемную ситуацию с целью приобретения учащимися новых знаний. Здесь же следует рассмотреть и задачи, с помощью которых подготавливается сложное для учащихся доказательство теоремы.

Практическое значение математических задач. При решении математических задач ученик обучается применять математические знания к практическим нуждам, готовится к практической деятельности в будущем, к решению задач, выдвигаемых практикой, повседневной жизнью. Почти во всех конструкторских расчетах приходится решать математические задачи, исходя из запросов практики. Исследование и описание процессов и их свойств невозможно без привлечения математического аппарата, т. е. без решения математических задач. Математические задачи решаются в физике, химии, биологии, сопротивлении материалов, электро- и радиотехнике, особенно в их теоретических основах, и др.

Это означает, что при обучении математике учащимся следует предлагать задачи, связанные со смежными дисциплинами (физикой, химией, географией и др.), а также задачи с техническим и практическим, жизненным содержанием.

Значение математических задач в развитии мышления. Решение математических задач приучает выделять посылки и заключения, данные и искомые, находить общее, и особенно в данных, сопоставлять и противопоставлять факты. При решении математических задач, , воспитывается мышление, и, прежде всего учащиеся приучаются к полноценной аргументации. Решение задачи должно быть полностью аргументированным, т. е. не допускаются незаконные обобщения, необоснованные аналогии, предъявляется требование полноты дизъюнкции (рассмотрение всех случаев данной в задаче ситуации), соблюдаются полнота и выдержанность классификации. При решении математических задач у

учащихся формируется 1) стиль мышления; 2) умение лаконично выражать свои мысли; 3) умение четко расчленять ход мышления; 4) точность символики.

Воспитательное значение математических задач. Прежде всего, задача воспитывает своей фабулой, текстовым содержанием.

Воспитывает не только фабула задачи, воспитывает весь процесс обучения решению математических задач. Правильно поставленное обучение решению математических задач воспитывает у учеников честность и правдивость, настойчивость в преодолении трудностей.

3

Рассмотрим основные методы решения задач в школьном курсе математики.

Синтетический метод решения

Необходимое условие решения сложной задачи – умение решать простые задачи, к которым сводится любая сложная задача. При наличии такого умения вся проблема состоит в том, чтобы найти ту совокупность простых задач, решение которых приведет к выполнению требования основной задачи. Здесь возможны два основных пути поиска решения: синтетический и аналитический.

Как ученики обычно решают сложную задачу? Они берут любое данное в условии задачи и к нему присоединяют какое-либо из остальных данных. Если эти данные образуют простую задачу, то ее решают; если простой задачи не получилось, образуют другую пару данных и в результате решения первой простой задачи получают первое вспомогательное данное.

Используя вспомогательное данное и какое-либо из остальных данных основной задачи, решают вторую простую задачу и получают второе вспомогательное данное и т.д. до тех пор, пока не получат такой простой задачи, результат которой является искомым основной задачи.

Это и есть *синтетический* метод решения задач.

Если основную задачу условно записать: $A \Rightarrow Y$, а первую и последнюю из конечной совокупности простых задач, из которых состоит решение основной задачи, обозначить соответственно через a_1 и a_n , то процесс решения задачи синтетическим методом можно записать в виде:

$$A \Rightarrow a_1, \dots, a_n \Rightarrow Y.$$

Рассмотрим этот метод на примере.

Задача. Две машины убирают снег за 6 часов. Однажды, после 3 ч совместной работы, первую машину отправили в другой район города, а оставшаяся машина закончила уборку за 5 ч. За сколько часов каждая машина отдельно может выполнить всю работу?

Р е ш е н и е.

1) Какую часть всей работы выполнили две машины, работая вместе?

$$3 : 6 = 0,5$$

2) Какую часть всей работы выполнила вторая машина, после ухода первой?

$$1 - 0,5 = 0,5$$

3) За сколько часов могла бы выполнить всю работу вторая машина, работая отдельно?

$$5 : 0,5 = 10$$

4) Какую часть всей работы выполнила вторая машина за 3ч?

$$3 : 10 = 0,3$$

5) Какую часть работы выполнила первая машина за 3 ч?

$$0,5 - 0,3 = 0,2$$

б) За сколько часов могла бы выполнить всю работу первая машина отдельно?

$$3 : 0,2 = 15$$

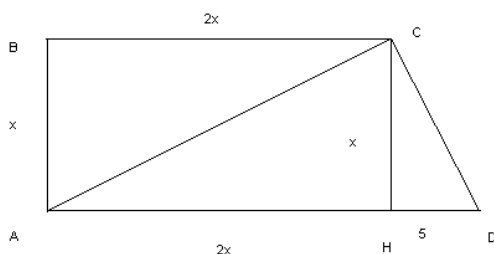
О т в е т : 15ч и 10ч.

Если решение задачи записывается кратко, то необходимо требовать от учеников уметь осознано и правильно формулировать вопросы к каждому действию или пояснять результат полученных вычислений, чтобы исключить случайное совпадение отвлеченных чисел.

Синтетический метод широко применяется не только при решении задач арифметическим способом, но и при решении геометрических задач на вычисление и построение (см. след. пункт).

Рассмотрим краткое решение задачи по геометрии на вычисление.

Задача. В трапеции ABCD диагональ AC перпендикулярна CD и длина проекции CD на основание AD равна 5. Найти длины сторон трапеции, если боковая сторона AB перпендикулярна основаниям и $BC = 2AB$.



Р е ш е н и е.

1) Пусть $AB = x$. Тогда $BC = AH = 2x$, $CH = x$.

2) В прямоугольном треугольнике ACD $CH^2 =$

$AH \cdot HD$, или $x^2 = 2x \cdot 5$. Значит $x = 10$.

3) $AB = 10$, $BC = 20$, $AD = 25$.

4) Из прямоугольного треугольника CHD по теореме Пифагора:
 $CD = \sqrt{5^2 + 10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

О т в е т : $AB = 10$, $BC = 20$, $CD = 5\sqrt{5}$, $DA = 25$.

Основной недостаток синтетического метода – отсутствие какого бы ни было критерия в вопросе, с чего, с каких данных начинать решение и какие вспомогательные величины определять, какие простые задачи решать в дальнейшем, чтобы решить основную задачу. Этот метод мало пригоден для

отыскания новых решений и слабо способствует научению школьников самостоятельно решать задачи, логически рассуждать, продуктивно мыслить. Пользуясь синтетическим методом, учащиеся нередко выполняют лишнюю работу, а иногда слабый ученик может предложить бессмысленное действие.

Единственное, на что можно в некоторой степени можно опереться, применяя синтетический метод, – это прошлый опыт ученика в решении задач, аналогия, ассоциации, которые может вызвать решаемая задача.

Достоинством синтетического метода является компактность, достигаемая при изложении готовых решений, полученных в процессе синтетического или аналитического поиска.

Несмотря на низкую поисковую и дидактическую эффективность синтетического метода, он пользуется популярностью у школьников и даже учителей, поскольку весьма прост и не требует большого мыслительного напряжения.

Аналитический метод решения

При аналитическом методе решения отправляются не от условия задачи, как это делают при синтетическом методе, а от ее требования, вопроса. Это характерно для всех разновидностей аналитического метода, применяемых при решении задач.

Решение задач *аналитическим* методом начинается с постановки следующего вопроса, связанного с требованием решаемой задачи: «*Что нужно знать, чтобы ответить на вопрос данной задачи (выполнить требование)?*» Для правильного ответа на поставленный вопрос необходимо знать данные задачи и учитывать те зависимости, которые связывают их с искомым числом.

Пусть для вычисления искомого Y основной задачи требуется знать, например, числа p_1 и q_1 , из которых при помощи некоторого математического действия можно получить Y , т.е. решить основную задачу.

Итак, основная задача с требованием Y преобразовалась в первую серию вспомогательных задач с искомыми p_1 и q_1 . Обозначим первую серию вспомогательных задач через B_1 . Ставим тот же вопрос к каждой из вспомогательных задач: «Что нужно знать, чтобы найти p_1 (q_1)?» и опять при ответе на этот вопрос используем условие A основной задачи, а также арсенал математической теории.

Пусть для вычисления p_1 нужно знать p_2 и q_2 , а для вычисления q_1 – знать p_2 и q_2 . Теперь основная задача преобразовалась во вторую серию (B_2) вспомогательных задач, включающих задачи по нахождению p_2, q_2, p_2 и q_2 .

Продолжая процесс преобразования, получаем, наконец, такую серию (B_n) вспомогательных задач, искомые которых содержатся во множестве данных основной задачи.

Итак основная задача решена аналитическим методом, поскольку этим методом проведен поиск и найден путь решения задачи; главное здесь именно в этом, а не в оформлении записи уже известного решения.

Найденное аналитическое решение можно изложить различными способами, в том числе и синтетическим. В последнем случае пришлось бы следовать от конца аналитического рассуждения к его началу, не производя при этом никаких поисков.

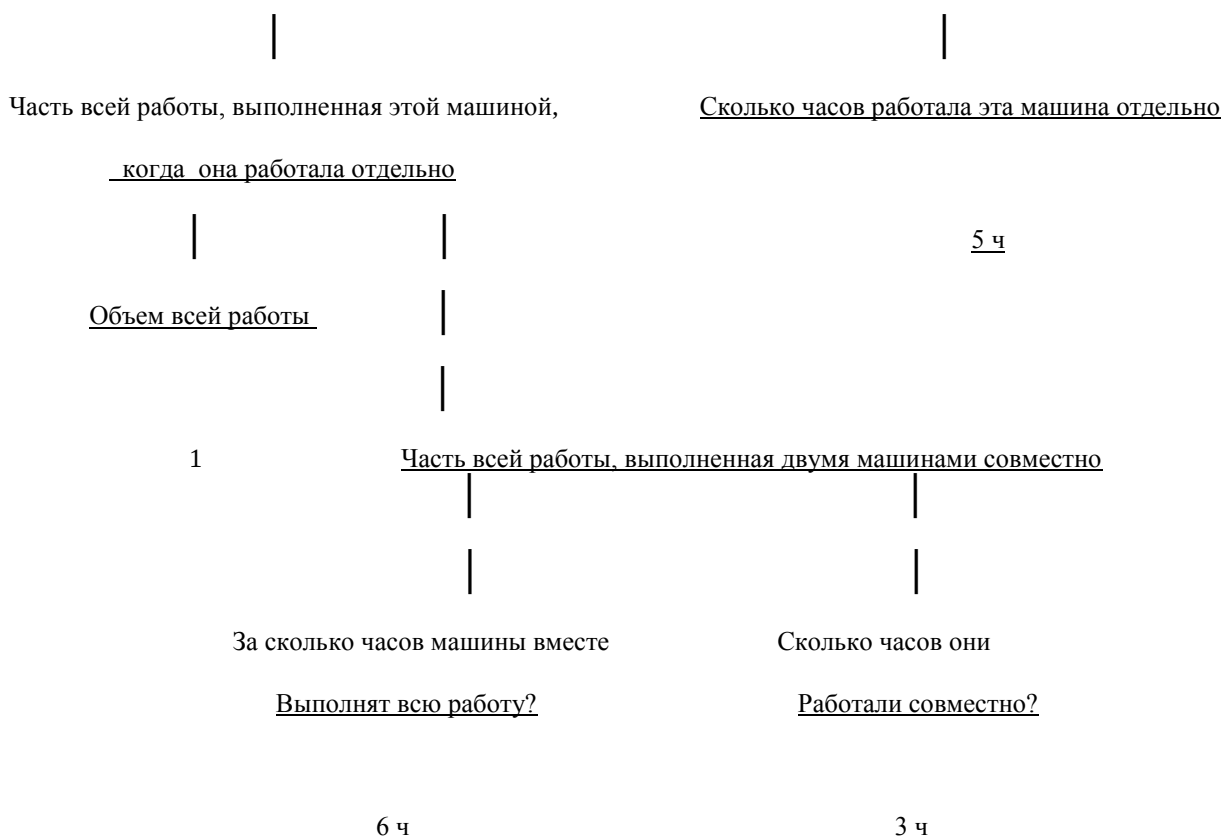
Если основную задачу условно записать формулой $A \Rightarrow Y$, описанный выше аналитический путь преобразования задачи изобразится схемой:

$$Y \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_n,$$

Где $A \Rightarrow B_n, B_n \Rightarrow B_{n-1}, \dots, B_1 \Rightarrow Y$, откуда $A \Rightarrow Y$.

К рассмотренной в предыдущем пункте текстовой задаче применим аналитический метод решения. Наличие двух искомых в задаче несколько осложняет построение рассуждений, поэтому можно ограничиться сначала одним искомым, найти его и затем воспользоваться им как уже известным числом при отыскании пути получения второго искомого. Рассмотрим схему:

За сколько часов может выполнить всю работу, работая отдельно, та машина, которая продолжила работу?



Такой поиск обычно проводится устно и завершается составлением *плана решения*. Аналогично теперь можно построить схему аналитического поиска второго числа основной задачи (сделайте самостоятельно!).

В практике решения задач методы анализа и синтеза полностью разделить, изолировать друг от друга невозможно. Они полезно сочетаются. При аналитическом методе имеют место скрытые элементы синтеза. Например, преобразуя требование основной задачи в требования первой серии вспомогательных задач, мы неявно проверяем правильность этого преобразования, возможность синтеза из искомым чисел задач первой серии искомого основной задачи.

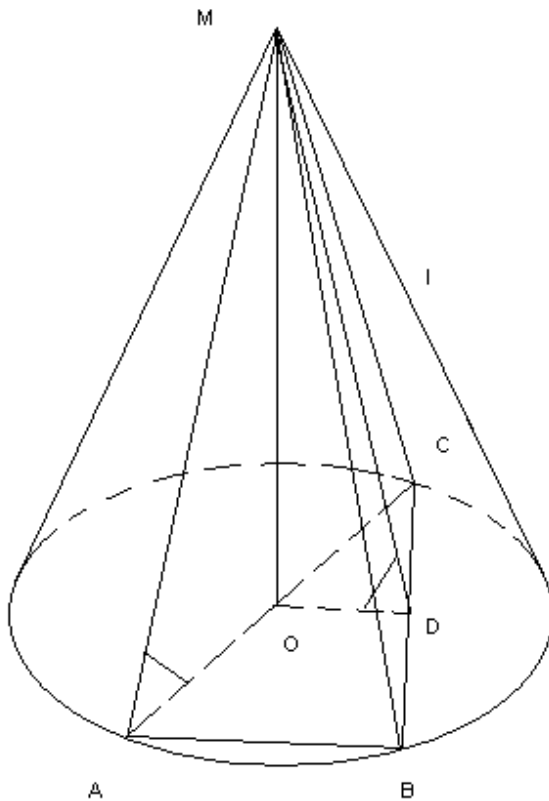
Широкое применение находит аналитический метод при решении геометрических задач на вычисление. Здесь удобно начинать решение с соответствующей формулы, которая и показывает, какой будет первая серия вспомогательных задач и т.д. Кратко продемонстрируем это на примере следующей геометрической задачи.

Задача. В конус вписана пирамида, основанием которой служит прямоугольный треугольник и боковая грань которой, проходящая через

один из катетов основания, образует с плоскостью основания двугранный угол α . Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом β .

Решение. Начертим конус с вписанной в него пирамидой $MAVC$, в которой длины боковых ребер $MA = MB = MC = l$, AC – гипотенуза треугольника ABC , центр основания конуса – точка O , $AO = OC$, $\angle MAO = \beta$, $\angle MDO = \alpha$.

Формула объема пирамиды $V = \frac{1}{3}SH$. Задача сводится к нахождению площади основания S и высоты $H = MO$. (Первая серия из двух вспомогательных задач; последнюю из этих задач можно решить по имеющимся данным.).



Из прямоу­гольного треуголь­ника OMA нахо­дим $H = OM = l \sin \beta$.

Для нахо­жде­ния пло­ща­ди ос­но­ва­ния на­до на­йти дли­ны ка­те­тов AB и BC . (По­лу­ча­ем вто­рую се­рию из двух вспо­мо­га­тель­ных за­дач.)

Для оп­ре­де­ле­ния AB дос­та­точ­но на­йти OD – дли­ну сре­дней ли­нии тре­уголь­ни­ка ABC , а для вы­чис­ле­ния BC на­до на­йти AC (тре­тья се­рия из двух вспо­мо­га­тель­ных за­дач; ре­ше­ние пер­вой за­да­чи уже из­вест­но):

$$OD = MO \operatorname{ctg} \alpha = l \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha.$$

Для по­лу­че­ния AC дос­та­точ­но з­нать AO (чет­вер­тая се­рия – од­на за­да­ча, ко­то­рую мож­но ре­шить):

$$AO = MA \cos \beta = l \cos \beta; \quad AC = 2AO = 2l \cos \beta; \quad AB = 2OD = 2l \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{1}{2l} \sqrt{\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta)};$$

$$S = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2l^2 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha - \beta \sin(\alpha + \beta))};$$

$$V = \frac{2l^3 \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \alpha}{3 \sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha - \beta \sin(\alpha + \beta))}.$$

Приведенное решение является очень кратким (отсутствуют выкладки, обоснования), чтобы выделить метод решения. Учащиеся, чтобы научиться решать задачи, должны делать полные математические выкладки и уметь обосновывать каждый свой шаг в процессе решения ссылкой на условие задачи или изученную математическую теорию.

Хотя путь поиска на основе аналитического метода решения не всегда однозначен, однако он все же менее многозначен и более определен, чем путь поиска при синтетическом методе решения. Аналитический метод удобен для поиска пути решения новой для учащихся задачи, он опирается на определенное умение школьника рассуждать и эффективно способствует развитию его продуктивного, логического и функционального мышления. В результате систематического применения аналитического метода решения задач у учащихся быстрее формируется умение Самостоятельно решать новые для них задачи, чем при пользовании синтетическим методом.

Алгебраический анализ

Под *алгебраическим анализом* мы будем понимать метод решения задач с помощью уравнений, систем уравнений или неравенств.

Этот метод имеет явно выраженные общие черты аналитического метода. Так, решая задачу с помощью уравнений, отправляются от неизвестного (или неизвестных, если составляют систему уравнений). В качестве неизвестного (неизвестных), как правило, выступает искомое (искомые) основной задачи. Но иногда, для получения более простого решения целесообразно отправляться при составлении уравнения от вспомогательного неизвестного. В последнем случае имеет место преобразование основной задачи в серию из двух вспомогательных задач,

первая из которых решается методом алгебраического анализа, а вторая – арифметически.

Второй основной этап применения алгебраического анализа – решение полученного уравнения (системы уравнений) и получение корней. На этом этапе важно следить за равносильностью преобразований, чтобы в итоге получить множество всех решений основной задачи и только его.

На третьем этапе предстоит выяснить *достоверность* полученных решений, отбросив те, которые не подходят по смыслу задачи. Например, если речь идет о длине отрезка, а в процессе решения появились отрицательные корни, то они, очевидно, не подходят. Иногда достоверность решения проверяется с помощью каких-то известных фактов (равенств, неравенств и т.д.). Если речь в задаче шла о длинах сторон треугольника, то ответ следует проверить на выполнение неравенства треугольника.

Приведем пример задачи, для решения которой введение новых промежуточных неизвестных позволяет упростить решение.

Задача. Из пункта А в пункт В вышел пассажирский поезд, и в тоже время из В в А вышел товарный поезд. Пассажирский поезд прибыл к месту назначения через 9 часов, а товарный – через 16 часов после встречи. Определить, какое время находился в пути каждый поезд.

Р е ш е н и е. Обозначим через x и y скорости соответственно пассажирского и товарного поездов, а через t – их время движения до встречи. Тогда по условию задачи можно составить систему

$$\begin{cases} \frac{yt}{x} = 9 \\ \frac{xt}{y} = 16 \end{cases}$$

Перемножая эти уравнения, получим $t^2 = 9 \cdot 16$, или $t = 12$. Значит до встречи поезда двигались 12 часов. Но тогда пассажирский поезд на весь путь затратил $12+9=21$ час, а товарный – $12+16=28$ часов.

Ответ. Пассажирский поезд на весь путь затратил 21 час, а товарный – 28 часов.

Задачи на построение традиционно занимают важное место в школьном курсе математики, поскольку они являются существенным фактором математического образования и представляют собой мощное средство геометрических исследований.

История возникновения задач на построения уходит своими корнями в далекую древность, и необходимость решения таких задач вытекает из практики. До нас дошли знаменитые сооружения старины (пирамиды, тоннели, храмы, здания и т.п.) строительство которых требовало развития навыков и теории измерений на местности. Кроме этого имеются сведения о попытке еще во времена Аристотеля измерить длину земного меридиана (IV – III в. до н.э.). Все это привело к созданию теории решения задач на построение.

Решение задач на построение осуществляется, как правило, с помощью циркуля и линейки, причем с помощью циркуля мы можем проводить окружности любого ненулевого радиуса, а с помощью линейки можем строить прямые.

Давно было замечено, что циркуль является более точным, более совершенным инструментом, чем линейка, что некоторые построения можно выполнить только с помощью одного циркуля, например разделить окружность на шесть равных частей, построить точку, симметричную данной и т.д. Все это послужило толчком к исследованию геометрических построений, выполняемых одним лишь циркулем. И в 1672 году Г.Мор доказал, что все геометрические построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью одного только циркуля. А в 1833 г. Я. Штейнер доказал, что всякая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена и одной линейкой, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность и ее центр.

Решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки - значит, свести ее к выполнению определенного числа операций: провести прямую через две точки; найти точку пересечения прямых;

провести окружность с известным центром и данным радиусом; определить точки пересечения прямой и окружности, двух окружностей. Будем называть такие операции элементарными.

Решение задачи на построение состоит из четырех этапов.

1. Анализ. Предполагается, что задача решена и требуемая фигура построена. Используя различные теоремы геометрии, свойства фигур, выясняем соотношения между элементами требуемой фигуры, которые помогут решить задачу. (Таким образом, первая часть решения задачи на построение проводится аналитическим методом).

Когда при помощи анализа зависимость между данными и искомыми величинами определена, переходят ко второй части решения – построению.

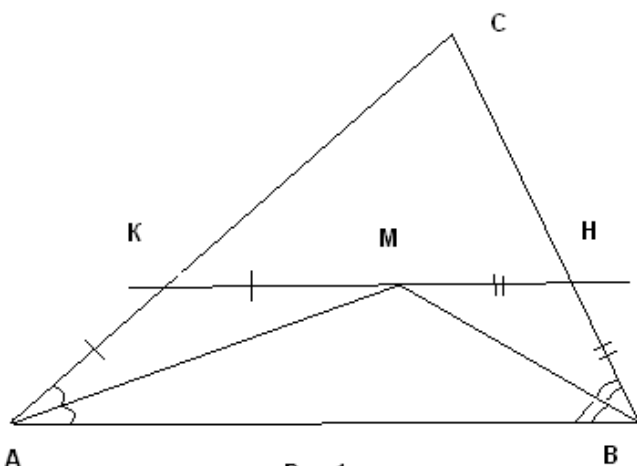
2. Построение. Этот этап представляет собой выполнение тех операций, которые были выведены из плана решения задачи, т.е. из анализа. Т.е. построение проходит с помощью синтетического метода решения задач.

3. Доказательство. Когда построение выполнено и искомая фигура построена, необходимо доказать, что она действительно удовлетворяет всем требованиям задачи.

4. Исследование. На этом этапе следует выяснить, при каких условиях на данные в условии задачи решение существует и количество возможных решений.

ПРИМЕР 1. Пересечь треугольник прямой, параллельной основанию так, чтобы отрезок, заключенный между боковыми сторонами, был равен сумме отрезков боковых сторон,

считая от основания (рис 1).



Анализ. Допустим, что задача решена. Через точку М

проходит прямая, отрезок КН которой удовлетворяет данным в условиях задачи, т.е. $КН \parallel АВ$ и $КН = АК + НВ$ или $АК = КМ$, $НВ = МН$. Соединим точку М с точками А и В. Полученные треугольники АКМ и ВНМ будут равнобедренными, т.к. $АК = КМ$, $ВН = МН$.

Значит, $\angle КАМ = \angle КМА$ и $\angle МВН = \angle НМВ$. Но, $\angle КМА = \angle МАС$ и $\angle НМВ = \angle МВА$ (как накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей).

Тогда $\angle КАМ = \angle МАС$ и $\angle НВМ = \angle МВА$, т.е. АМ и ВМ - биссектрисы углов А и С.

Построение. Проведем биссектрисы углов А и В и через их точку пересечения М проведем $КН \parallel АВ$.

Доказательство. Треугольники АКМ и ВНМ равнобедренные, т.к. $\angle КАМ = \angle МАВ = \angle КМА$, $\angle МВН = \angle МВА = \angle ВМН$. Значит, $АК = КМ$, $ВН = НМ$ и $КН = КМ + МН = АК + НВ$.

Исследование. Задача всегда определена и имеет единственное решение, т.к. биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

При изучении планиметрии в школе рассматриваются следующие основные задачи на построение:

1. Построить треугольник по трем сторонам;
2. Построить угол равный данному;
3. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними;
4. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам;
5. Построить прямую, перпендикулярную данной прямой и проходящей через данную точку;

6. Построить прямую, перпендикулярную к данному отрезку и проходящую через его середину;
7. Построить биссектрису данного угла;
8. Построить касательную к данной окружности в данной ее точке;
9. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу;
10. Построить прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету;
11. Построить касательную к данной окружности, проходящую через данную точку;
12. Построить треугольник по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

Ниже мы еще рассмотрим ряд основных задач.

Эти задачи считаются известными и их решение приводить не стоит (хотя следует иметь в виду, что решение этих задач должно быть известно учащимся и они должны быть готовы рассказать их решение по требованию учителя).

Поэтому, решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки - значит, составить алгоритм с помощью которого можно осуществить построение данной фигуры; в качестве команд алгоритма выступают либо элементарные, либо основные задачи.

Геометрические места точек.

Определение. Геометрическим местом точек (в дальнейшем ГМТ), называется фигура плоскости, состоящая из точек обладающих некоторым свойством, и не содержащая ни одной точки, не обладающей этим свойством.

Мы будем рассматривать только те ГМТ, которые можно построить с помощью циркуля и линейки.

Рассмотрим ГМТ на плоскости, обладающие простейшими и наиболее часто выражающимися свойствами.

1). ГМТ, отстоящих на данном расстоянии r от данной точки O , есть окружность с центром в точке O радиуса r .

2). ГМТ равноудаленных от двух данных точек A и B , есть прямая, перпендикулярная к отрезку AB и проходящая через его середину.

3). ГМТ равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых, есть пара взаимно перпендикулярных прямых, проходящих через точку пересечения и делящих углы между данными прямыми пополам.

4). ГМТ, отстоящих на одинаковом расстоянии h от прямой, есть две прямые, параллельные этой прямой и находящиеся по разные стороны от нее на данном расстоянии h .

5). Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной прямой m в данной на ней точке M , есть перпендикуляр к AB в точке M (кроме точки M).

6). Геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке M , есть прямая, проходящая через точку M и центр данной окружности (кроме точек M и O).

7). ГМТ, из которых данный отрезок виден под данным углом, составляет две дуги окружностей, описанных на данном отрезке и вмещающих данный угол.

8). ГМТ, расстояния от которых до двух данных точек A и B находятся в отношении $m : n$, есть окружность (называемая окружностью Аполлония).

9). Геометрическое место середин хорд, проведенных из одной точки окружности, есть окружность, построенная на отрезке, соединяющем данную точку с центром данной окружности, как на диаметре.

10). Геометрическое место вершин треугольников равновеликих данному и имеющих общее основание, составляет две прямые, параллельные основанию и проходящие через вершину данного

треугольника и ему симметричного относительно прямой, содержащей основание.

Приведем примеры отыскания ГМТ.

ПРИМЕР 2. Найти ГМТ, являющихся серединами хорд, проведенных из одной точки данной окружности (ГМТ № 9).

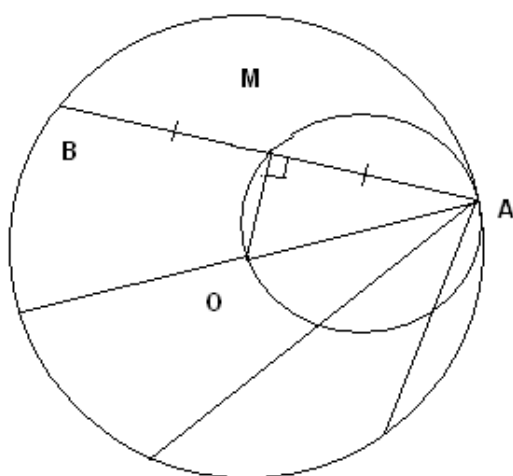


Рис. 3

Решение. Пусть дана окружность с центром O и на этой окружности выбрана точка A из которой проводятся хорды. Покажем, что искомое ГМТ есть окружность, построенная на AO как на диаметре (кроме точки A) (рис.3).

Пусть AB - некоторая хорда и M – ее середина. Соединим M и O . Тогда $MO \perp AB$ (радиус, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде). Но, тогда $\angle AMO = 90^\circ$. Значит M принадлежит окружности с диаметром AO (ГМТ № 7). Т.к. эта окружность проходит через точку O , то O принадлежит нашему ГМТ.

Обратно, пусть M принадлежит нашему ГМТ. Тогда, проведя через M хорду AB и соединив M и O , получим, что $\angle AMO = 90^\circ$, т.е. $MO \perp AB$, а, значит, M – середина хорды AB . Если же M совпадает с O , то O - середина AC .

Часто метод координат позволяет находить ГМТ.

ПРИМЕР 3. Найти ГМТ, расстояние от которых до двух данных точек A и B находятся в данном отношении $m : n$ ($m \neq n$).

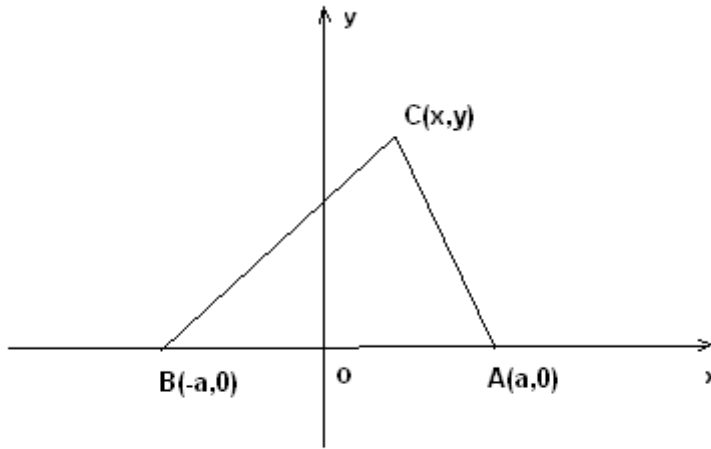


Рис.4

Решение. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы точки A и B располагались на оси Ox симметрично относительно начала координат, а ось Oy проходила через середину AB (рис.4).

Положим $AB = 2a$. Тогда точка A имеет координаты $A(a, 0)$, точка B - координаты $B(-a, 0)$. Пусть C принадлежит нашему ГМТ, координаты $C(x, y)$ и $CB/CA = m/n$. Но $CB = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $CA = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$. Значит

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{m}{n}. \quad (*)$$

Преобразуем наше равенство. Имеем

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow n\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = m\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \Leftrightarrow$$

$$n^2(x+a)^2 + n^2y^2 = m^2(x-a)^2 + m^2y^2.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых, получаем $x^2(n^2 - m^2) + 2ax(n^2 + m^2) + y^2(n^2 - m^2) = (m^2 - n^2)a^2$. Разделим левую и правую части последнего неравенства на $n^2 - m^2$ (это можно сделать, так как по условию $m \neq n$), затем выделим полный квадрат относительно x . Получаем

$$x^2 + 2a \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} x + y^2 = -a^2, \quad x^2 + 2a \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2} x + \left(a \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}\right)^2 + y^2 = -a^2 + \left(a \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}\right)^2, \text{ или}$$

$$\left(x + a \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}\right)^2 + y^2 = a^2 \frac{4m^2 n^2}{(n^2 - m^2)^2}. \quad (**)$$

Но последнее уравнение задает окружность с центром в точке $O\left(-a \frac{n^2 + m^2}{n^2 - m^2}, 0\right)$ и радиусом $R = \frac{2anm}{|n^2 - m^2|}$. Таким образом, если точка удовлетворяет условиям задачи, то она принадлежит (**).

Обратно, пусть координаты точки $C(x,y)$ удовлетворяют уравнению (**). Прodelывая все выкладки в обратную сторону, приходим к равенству (*), что и доказывает принадлежность точки C нашему ГМТ.

Метод геометрических мест точек при решении задач на построение.

Решение задач методом ГМТ заключается в следующем:

А) задача формулируется так, чтобы ее решение сводилось к нахождению фигуры, удовлетворяющей одному или нескольким условиям.

Б) Если условие одно, то решением задачи будет соответствующее ГМТ. Если же условий несколько, то, отбросив одно из них, мы получим новую задачу, решением которой будет одно или несколько ГМТ. Это ГМТ обыкновенно является известным и легко строится.

В) После этого, приняв во внимание отброшенное условие и отбросив какое-либо другое условие, получим новое ГМТ.

Г) Точки, являющиеся решением задачи (т.е. удовлетворяющие всем ее условиям), должны принадлежать как первому, так и второму ГМТ. Значит, они должны принадлежать их пересечению.

Задача будет иметь решение или нет в зависимости от того, будут или нет ГМТ иметь общие точки. Она будет иметь столько решений, сколько имеется точек пересечения.

Приведем примеры.

ПРИМЕР 4. Построить окружность, касающуюся данной окружности в данной точке B и данной прямой MN . (рис. 5).

Анализ. Предположим задача решена, т.е. окружность с центром в точке O_1 удовлетворяет условиям задачи, т.е. касается окружности с центром O в точке B и касается прямой MN . Тогда центры искомых окружностей лежат на прямой OB (ГМТ № 6). Проведя через B касательную к обеим окружностям до пересечения с MN в точке K , получаем, что искомая окружность вписана в угол NKB . Значит, ее

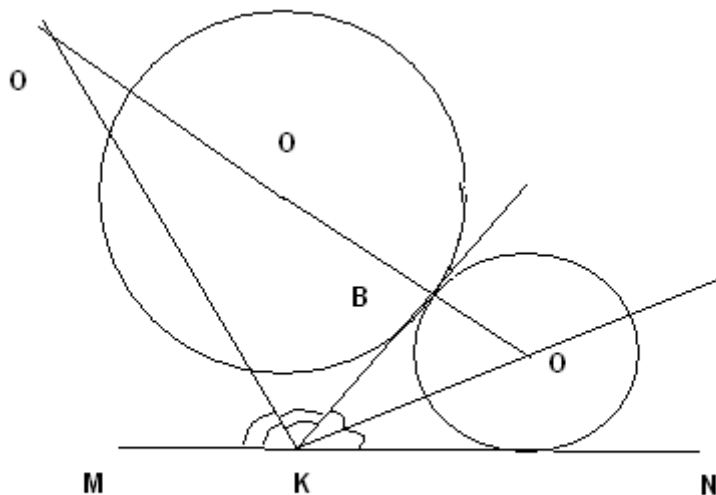


Рис. 5

центр лежит на биссектрисе этого угла (ГМТ № 11); проводя биссектрису смежного угла, получим второе решение.

Построение. Через точки B и O проводим прямую. Затем через B проводим касательную к заданной окружности.

Получаем углы MKB и BKN . Строим биссектрисы этих углов. Их пересечения с прямой OB дадут центры искомых окружностей - O_1 и O_2 . Строим окружности с центром в точке O_1 радиуса O_1B и окружность с центром в точке O_2 радиуса O_2B .

Доказательство следует из построения.

Исследование. Число решений зависит от взаимного расположения окружности O и прямой MN . Возможны 3 случая.

1) Прямая MN не имеет с окружностью общих точек. В этом случае задача имеет, как мы уже разобрали, два решения. (Разберите самостоятельно случай, когда $MN \parallel BO$).

2) Прямая MN касается окружности. Если касание происходит в точке B , то задача имеет бесконечно много решений (рис. 6). Все центры искомых окружностей находятся на прямой OB .

Если точка B не совпадает с точкой касания. Тогда задача имеет одно решение (рис. 7).

3) Прямая MN пересекает данную окружность. Если одна из точек пересечения совпадает с точкой B , то решений нет. Если же MN не проходит через точку B , то решений 2 (рис. 8).

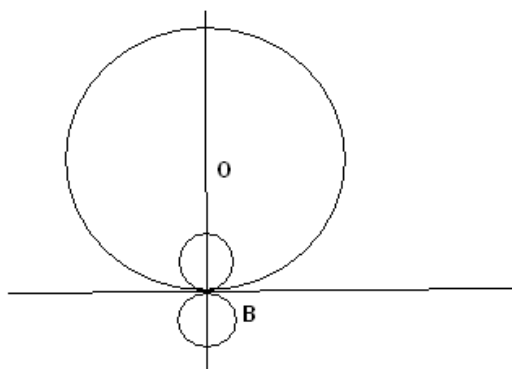


Рис. 6

ПРИМЕР 5. Построить треугольник по основанию a , высоте h_a и боковой стороне b .

Анализ. Предположим, что треугольник ABC построен и у него $BC = a$, $CA = b$ и высота, опущенная из вершины A , равна h_a . Тогда множество всех

вершин треугольников с данным

основанием a и высотой h_a будут лежать на двух прямых, параллельных BC и отстоящих от нее на расстоянии h_a (ГМТ № 10).

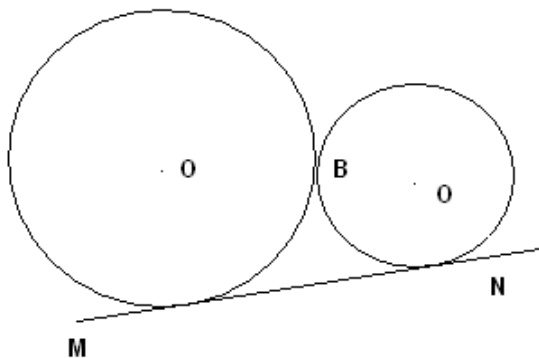


Рис. 7

Далее, т.к. $CA = b$, то точка A находится на данном расстоянии от точки C , а, значит, лежит на окружности радиуса b с центром в точке C (ГМТ № 1). Значит, точка A является пересечением двух ГМТ и, следовательно, определяется.

Построение. На произвольной прямой MN от произвольной точки V откладываем отрезок $VC = a$. Из любой точки K прямой MN проводим перпендикуляр $FK \perp MN$ и на FK от K в обе стороны откладываем отрезки KT и KE равные h_a . Через T и E проводим прямые p и m , перпендикулярные TE . Из точки C проводим окружность радиуса b .

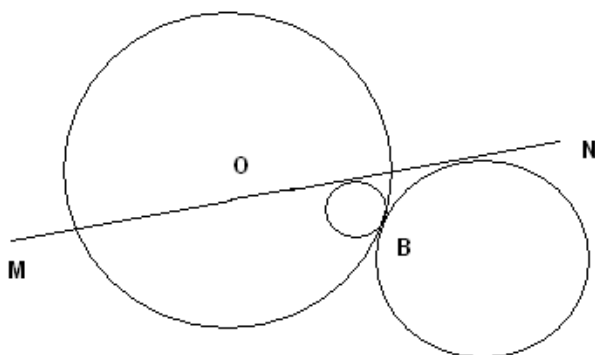


Рис. 8

Точка пересечения этой окружности с прямыми m и p является искомой точкой A . Соединяем ее с точками B и C . Треугольник ABC - искомый.

Доказательство. В треугольнике ABC основание $BC = a$ по построению, вершина A удалена от основания на расстояние h_a , а боковая сторона $AC = b$.

Исследование. Если $b > h_a$, то имеем четыре решения. Т.к. окружность радиуса a пересечет прямые m и p в четырех точках.

Если $b = h_a$, то получаем два решения, т.к. прямые m и p будут касаться окружности.

Если $b < h_a$, то решений нет. (Сделайте рисунки самостоятельно!)

Применение симметрии относительно прямой при решении задач на построение.

Определение. Пусть на плоскости задана прямая a и две точки A и B . Эти точки называются симметричными, если:

- 1) $a \perp AB$;

2) прямая a делит отрезок пополам (рис. 9).

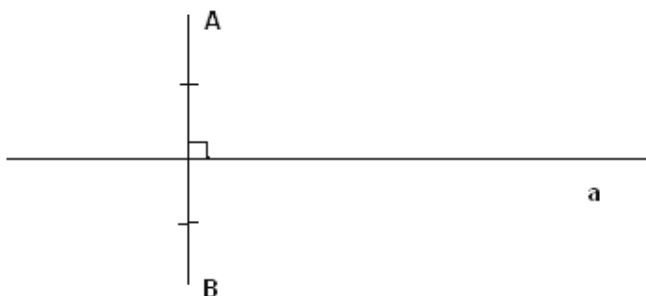


Рис. 9

Прямая a при этом называется осью симметрии.

Определение. Отображение плоскости в себя называется симметрией относительно оси a или осевой

симметрией, если каждой точке A плоскости ставится в соответствие симметричная ей точка A_1 относительно оси a .

Свойства осевой симметрии:

- 1). При осевой симметрии прямая переходит в прямую;
- 2). При осевой симметрии отрезок переходит в равный ему отрезок;
- 3). При осевой симметрии угол переходит в равный ему угол;
- 4). Осевая симметрия является движением.

Рассмотрим примеры применения симметрии.

ПРИМЕР 6. Дана прямая k и две точки A и B , не лежащие на этой прямой. На k найти такую точку X , чтобы сумма $AH + HB$ была минимальной.

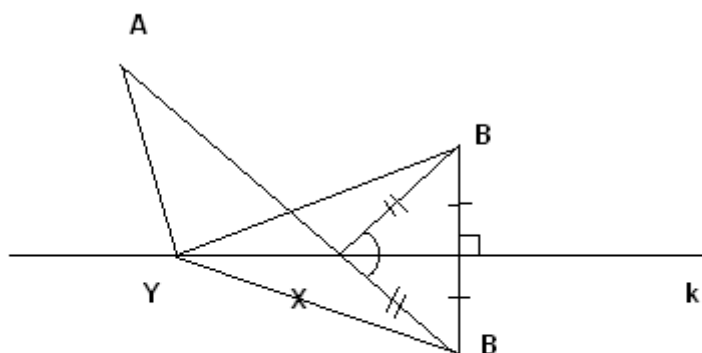


Рис. 10

Анализ. Предположим, что задача решена. Если точки А и В расположены по разные стороны от k , то очевидно, что X – это точка пересечения отрезка АВ и прямой k . Если же точки А и В по одну сторону от k , то отобразив В

симметрично относительно k , получим точку B_1 такую, что $XB = XB_1$ и значит точка X должна лежать на отрезке AB_1 (рис. 10).

Построение. Если точки А и В по разные стороны от k , то проведем отрезок АВ и его пересечение с k есть искомая точка X .

Если А и В по одну сторону от k , то отобразив В симметрично относительно k , получим точку B_1 . Проведя отрезок AB_1 , получим искомую точку X .

Доказательство. В первом случае доказательство очевидно. Во втором случае, когда А и В по одну сторону от k : пусть Y – любая другая точка прямой k , отличная от X . Тогда из свойств симметрии получаем, что $BY = B_1Y$, а из неравенства треугольника имеем $AY + YB = AY + YB_1 > AB = AX + XB_1$ (рис.10).

Исследование. Задача имеет решение всегда и причем одно.

ПРИМЕР 7. Построить четырехугольник $ABCD$, если заданы отрезки, являющиеся его сторонами $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ и известно, что диагональ AC делит угол A пополам (рис. 11).

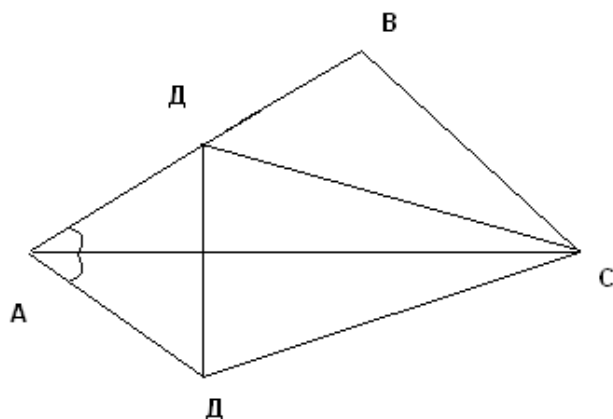


Рис.11

Анализ. Предположим задача решена и четырехугольник $ABCD$ - искомый. Тогда из двух сторон AB и AD одна больше. Пусть для определенности $a > d$. Отобразив симметрично точку D относительно прямой AC получим на стороне AB точку D_1 . В треугольнике BCD_1 известны все его стороны: $BC = b$, $CD = c$, $D_1B = a - d$. Значит треугольник D_1BC строится, а затем строится и весь четырехугольник.

Построение. Строим треугольник D_1BC по трем сторонам $BC = b$, $CD = c$, $D_1B = a - d$. Затем сторону BD_1 продолжаем за точку D_1 и от B откладываем отрезок $AB = a$, получаем точку A . Построим точку D , симметричную точке D_1 относительно AC . Соединим точки A и D , D и C . Четырехугольник $ABCD$ - искомый.

Доказательство. Очевидно из построения.

Анализ. Построение возможно, если возможно построить треугольник D_1BC , т.е. выполняются неравенства треугольника $b < c + a - d$, $c < b + a - d$, $a - d < b + c$. В этом случае задача имеет одно решение.

Применение параллельного переноса при решении задач на построение.

Определение. Пусть на плоскости задан вектор $\vec{a}$. Параллельным переносом называется такое преобразование плоскости, при котором каждой точке A этой плоскости ставится в соответствие такая точка B , что $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Вектор $\vec{a}$ при этом называется вектором смещения.

Свойства параллельного переноса:

- 1). При параллельном переносе прямая переходит в прямую;
- 2). При параллельном переносе отрезок переходит в равный ему отрезок;
- 3). При параллельном переносе угол переходит в равный ему угол;

4). Параллельный перенос является движением.

Рассмотрим примеры применения параллельного переноса.

ПРИМЕР 8. Построить трапецию по данным четырем сторонам.

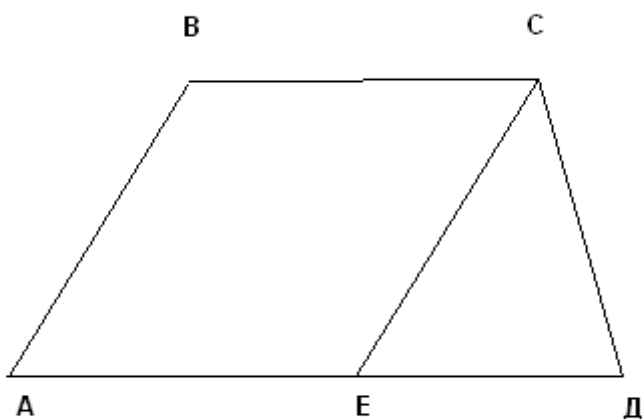


Рис. 13

Анализ. Допустим, что трапеция ABCD искомая. Перенесем AB параллельно на вектор $\overrightarrow{BC}$, получим отрезок CE (рис. 13) и треугольник ECD, в котором известны все три стороны. К треугольнику ECD достаточно достроить параллелограмм ABCE.

Для этого известны две его стороны CE и AE и $\angle BAE$.

Построение. Строим треугольник CED по трем сторонам, две из которых CE и CD являются сторонами трапеции, а третья – разностью оснований трапеции. Продолжим DE за точку E и на продолжении от точки E отложим отрезок AE, равный меньшему основанию трапеции BC. Построим угол с вершиной в точке A и равный $\angle CED$ и на второй стороне отложим $AB=CE$. Соединим B и C и получим трапецию.

Доказательство непосредственно следует из построения.

Исследование. Задача имеет решение или нет в зависимости от того, можно ли построить треугольник CED. Если решение есть, то оно одно.

ПРИМЕР 9. Даны две непересекающиеся окружности разных радиусов. Провести к ним общую внешнюю касательную.

Чтобы выполнить поворот прямой АВ на заданный угол α вокруг заданной точки О, нужно (рис. 16):

- 1) из точки О опустить перпендикуляр ОН на АВ;
- 2) построить угол $\angle НОС = \alpha$;
- 3) на стороне ОС отложить отрезок $ОМ = ОН$;
- 4) через М провести прямую k, перпендикулярную ОС. Прямая k и будет образом прямой АВ.

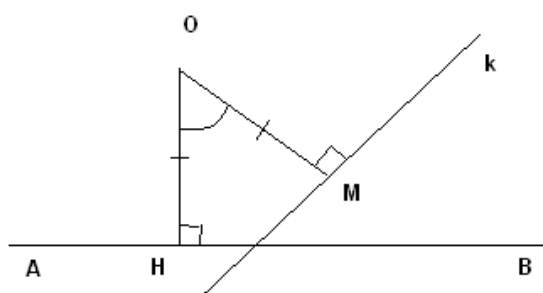


Рис. 16

центром в точке O_1
Она и будет искомой.

Чтобы выполнить поворот окружности с центром в точке А и радиуса r на заданный угол α вокруг заданной точки О, нужно (рис.17):

- 1) построить отрезок ОА, где А – центр заданной окружности;
- 2) построить угол $\angle ОАО_1 = \alpha$, где $ОА = ОА_1$;
- 3) построить окружность с радиуса r.

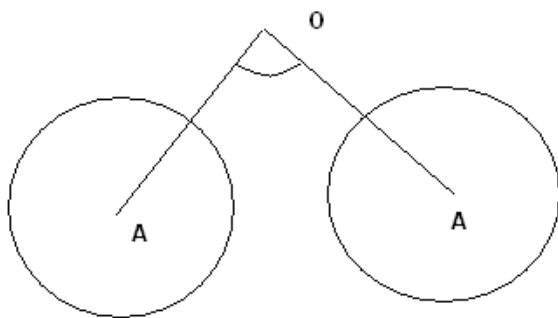


Рис. 17

Свойства поворота:

- 1). При повороте прямая переходит в прямую;
- 2). При повороте отрезок переходит в равный ему отрезок;
- 3). При повороте угол переходит в равный ему угол;
- 4). Поворот перенос является движением.

Рассмотрим примеры применения поворота.

ПРИМЕР 10. Построить равносторонний треугольник так, чтобы его вершины находились на трех данных параллельных прямых.

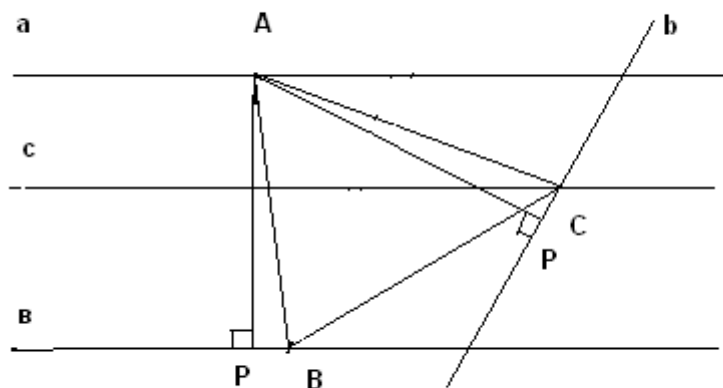


Рис. 18

Анализ. Предположим, что задача решена (рис.18), треугольник ABC равносторонний и его вершины A, B и C лежат на соответствующих параллельных прямых a, b, c. Если повернуть треугольник ABC на угол 60° вокруг точки A, то

вершина B перейдет в вершину C, а прямая b перейдет в некоторую прямую b_1 , причем эта прямая b_1 тоже будет проходить через точку C. Тем самым положение точки C определяется, а, значит, определяется и сторона искомого треугольника.

Построение. Из точки A опустим перпендикуляр к прямой b, затем повернем этот перпендикуляр на угол 60° и через его конец проведем прямую b_1 , перпендикулярную к нему. Пересекаясь, прямые b_1 и c определяют положение точки C.

Доказательство. Повернем наш треугольник ABC вместе с b_1 и перпендикуляром AP_1 к ней на угол 60° , тогда AP_1 совпадет с AP, прямая b_1 с прямой b, а вершина C с вершиной B, т.е. треугольник ABC равносторонний и его вершины лежат на заданных параллельных прямых.

Исследование. Задача всегда имеет два решения (поворачивать можно в обе стороны).

Метод спрямления при решении задач на построение.

В задачах на построение встречаются задачи, в условии которых заданы не сами отрезки, а их сумма или разность. В этом случае применяют метод спрямления, который заключается в том, что на чертеже изображают данный отрезок так, чтобы он включал в себя один из неизвестных отрезков, который участвует в сумме или разности. Проиллюстрируем сказанное на примерах.

ПРИМЕР 11. Построить треугольник по данной стороне, углу, к ней прилежащему, и сумме двух других сторон ($a, b+c, B$).

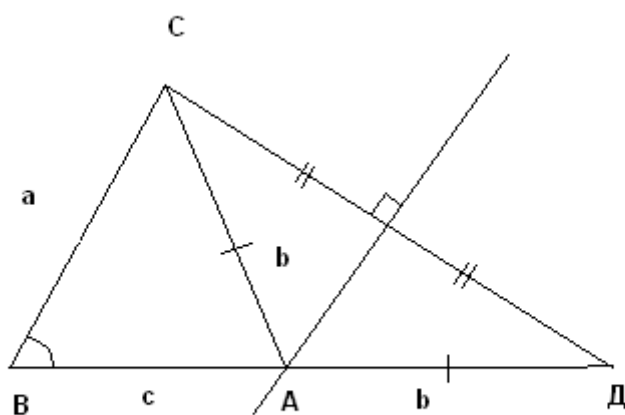


Рис. 20

Анализ. Предположим, задача решена и треугольник ABC искомым (рис. 20). Поскольку задан отрезок, равный сумме двух сторон, то изобразим его так, чтобы он включал в себя одну из сторон этого треугольника, т.е.

построим отрезок ВД, который равен $b+c$ и он содержит отрезок ВА. Тогда в треугольнике ДВС известны две стороны и угол между ними. Значит его можно построить. Кроме того, отметим, что треугольник ДАС является равнобедренным.

Построение. По данным в условии строим треугольник ДВС и проведем перпендикуляр к ДС через его середину; он пересечет ВД в точке А.

Доказательство. Поскольку в треугольнике ВДС $ВД=b+c$, то серединный перпендикуляр к СД пересечет ВД в такой точке А, что $АД=АС$, а, значит, $АС=АД=b$. Тогда треугольник обладает всеми свойствами, требуемыми в задаче.

Исследование. Для того чтобы задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $b+c>a$. В этом случае задача имеет одно решение.

Подобие при решении задач на построение.

Во многих случаях бывает удобно строить не искомую фигуру, а начать с построения фигуры, ей подобной, после чего нетрудно перейти к требуемой. В этом случае данные для построения фигуры разделяются на два класса: одни дают возможность построить фигуру, подобную искомой, а другие служат для того, чтобы от этой фигуры перейти к требуемой. Этот прием особенно удобен в тех случаях, когда только одна из данных величин определяет какой-нибудь линейный элемент искомой фигуры, а все другие представляют собой углы или отношения сторон. Например, если для построения треугольника даны два угла или угол и отношение сторон, заключающих этот угол, или отношение трех сторон и, кроме того, один линейный элемент: сторона, высота, медиана, биссектриса, радиус вписанной или описанной окружности и т.д., то вначале, не обращая внимания на данный линейный элемент, строят фигуру, подобную искомой, а потом, вводя требуемую линию, переходят к искомой фигуре. Метод подобия успешно применяется при решении задач на вписывание одних фигур в другие.

Рассмотрим примеры.

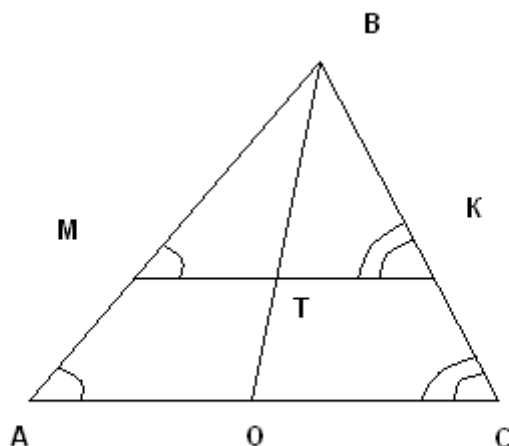


Рис. 22

ПРИМЕР 12.
Построить треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Анализ. Пусть треугольник ABC искомый (рис.22). Треугольники подобны, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, в подобных треугольниках сходственные медианы пропорциональны. Построим произвольный треугольник MBK, два угла которого равны данным; он будет подобен искомому. В этом треугольнике проведем медиану из вершины третьего угла. Пусть BT – медиана. Тогда коэффициент подобия – отношение данной медианы к получившейся при построении треугольника MBK, подобного искомому.

Построение. Построим произвольный треугольник MBK, два угла которого равны данным; он будет подобен искомому. В этом треугольнике проведем медиану из вершины третьего угла. Пусть BT – медиана. На BT от точки B отложим отрезок, равный длине данной медианы – получим точку O. Через O проведем прямую параллельную l прямой МК. Пусть А – точка пересечения продолжения ВМ за точку М с прямой l , а С – точка пересечения продолжения ВК за точку К с прямой l . Треугольник ABC искомый.

Доказательство. Из построения следует, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC. Значит, два угла А и В последнего равны заданным. Кроме того, медиана ВО имеет заданную длину, т.е. треугольник обладает всем заданным условиям.

Исследование. Задача всегда имеет решение и притом одно, если сумма заданных углов меньше 180° .

ПРИМЕР 13 . *В данный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины лежали на основании треугольника, а две другие – на сторонах треугольника.*

Решение. Строим прямой угол с вершиной О (рис.25). На его сторонах откладываем отрезки $OA=a$ и $OB=b$. Тогда отрезок АВ является искомым.

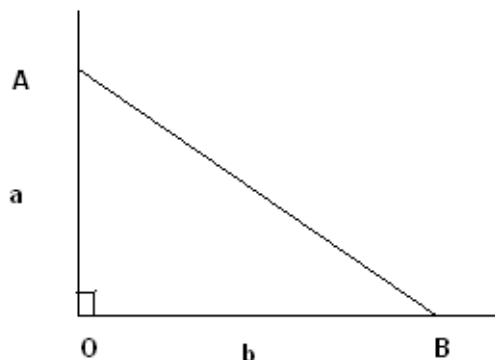


Рис. 25

Задача 14. Даны отрезки a и b . Построить отрезок $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Решение. Строим прямой угол с вершиной в точке О (рис.26). На одной из его сторон откладываем отрезок $OB=b$. Проводим окружность с центром в

точке В и радиуса a . Она пересечет вторую сторону угла в точке А. Отрезок ОА является искомым.

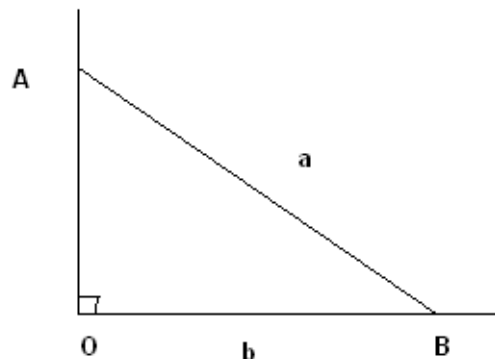


Рис. 26

Задача 15. Даны отрезки a и b . Построить отрезок $\sqrt{ab}$.

Решение. На отрезке $AB=a+b$, как на диаметре строим окружность. Пусть С такая точка на АВ, что $AC=a$. В точке С восстанавливаем перпендикуляр к АВ. Он

пересечет окружность в точке Д. Отрезок СД искомый (рис.27). Он называется средним геометрическим отрезков a и b .

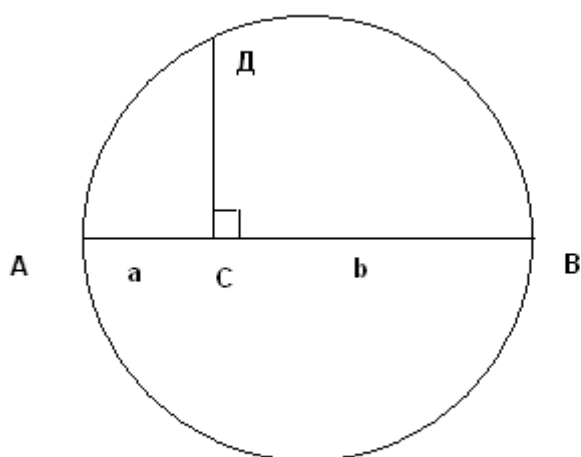


Рис. 27

проводим прямую, параллельную АВ. Она пересечет вторую сторону угла в точке Д. Отрезок ВД искомый. Его называют четвертым пропорциональным отрезком.

Задача 16. Даны отрезки a , b и c . Построить отрезок $\frac{ab}{c}$.

Решение. Строим произвольный угол с вершиной в точке О (рис.28). На одной из его сторон откладываем последовательно отрезки $OA=a$ и $AC=c$, а на второй $OB=b$. Через точку С

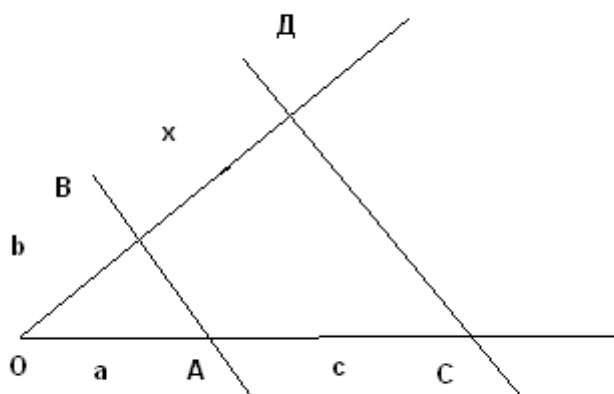


Рис. 28

ПРИМЕР 20. Даны отрезки a, b и c . Построить отрезок $\sqrt{a^2 + bc}$.

Построение.

1) строим отрезок $x = \sqrt{bc}$;

2) строим отрезок $y = a^2$, как четвертый пропорциональный отрезков $a, a, 1$;

3) строим отрезок $\sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР 14. Даны отрезки a и b . Построить отрезок $\sqrt{a^2 + 3b^2}$.

Построение.

- 1) строим отрезок $x = \sqrt{3b}$, как катет прямоугольного треугольника с гипотенузой $2b$ и вторым катетом b ;
- 2) строим отрезок $y = a^2$, как четвертый пропорциональный отрезков $a, a, 1$;
- 3) строим отрезок $\sqrt{x^2 + y^2}$.

ПРИМЕР 24. Даны окружность и точка A вне ее. Из этой точки провести секущую так, чтобы она делилась окружностью пополам.

Анализ. Зная положение точки относительно круга, можно построить касательную, длина которой известна и пусть она равна a . Пусть AC – секущая и B – ее середина, $AB=BC=x$. По формуле зависимости секущей и касательной, проведенной из одной точки, имеем $a^2 = 2x^2$. Отсюда $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Полученный отрезок представляет собой половину гипотенузы

равнобедренного
прямоугольного
треугольника с катетом a
(рис.29).

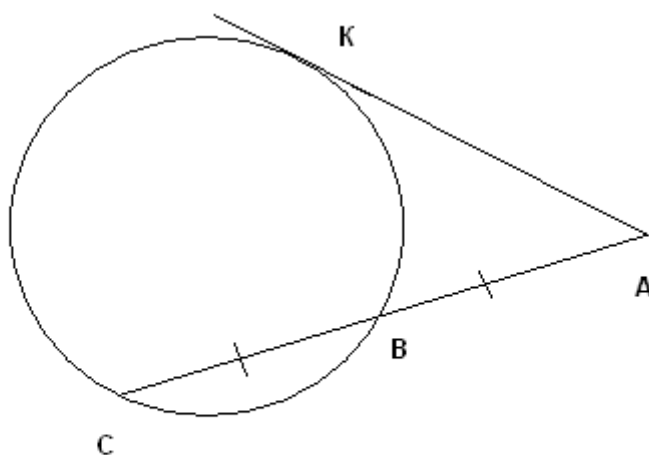


Рис. 29

Построение.

Найдем длину касательной, проведенной из точки A к данной окружности. Затем

построим равнобедренный
прямоугольный

треугольник с катетом a и его гипотенузу разделим пополам. Получим отрезок x . Построим окружность с центром в точке A и радиусом, равным x .

Она пересечет данную окружность в точке В. Построим луч АВ, он и даст нам искомую секущую.

Доказательство следует из построения.

Анализ. Количество решений задачи зависит от длины отрезка АО, где О – центр данной окружности. Пусть АО пересечет данную окружность в точке С и R – радиус данной окружности.

- 1) Если $x+R < AO$, то задача имеет два решения;
- 2) Если $x+R = AO$, то задача имеет одно решение;
- 3) Если $x+R > AO$, то задача не имеет решения.

5

Одна из основных целей при обучении математике – научить школьников правильно и хорошо решать задачи.

Учитель математики должен в совершенстве владеть рассмотренными нами основными общими методами решения математических задач и постепенно вооружать ими своих учеников. Без этого невозможен успех в обучении математике.

Известный американский математик Дж. Пойа, посвятил проблеме поиска решения задачи специальное исследование (Дж. Пойа Как решать задачу. Учпедгиз, 1961). Особое внимание в этом труде он уделяет анализу и синтезу при поиске решения.

В конце книги он приводит таблицу, которой следует придерживаться при отыскании решения задачи. Приведем ее краткий вариант.

1. Понять предложенную задачу.

Что гласит задача? Что дано? Что нужно найти? Определено ли неизвестное данными задачи? Или они недостаточны, или же чрезмерны?

2. Найти путь от неизвестного к данным, если нужно, рассмотреть промежуточные задачи («анализ»). Составить план решения.

Сформулировать отношения между неизвестным и данными. Преобразовать (или ввести новое) неизвестное, сближая его с данными. Преобразовать данные, получив новые элементы, более близкие к искомому. Вспомнить решение аналогичной задачи. Все ли данные использованы? Нельзя ли сформулировать задачу иначе? Обобщить. Рассмотреть частные случаи.

3. Реализовать найденную идею решения («синтез»).

Обосновать правильность каждого шага.

4. Решение проверить и оценить критически.

Правдоподобен ли результат? Почему? При возможности сделать проверку. Нельзя ли решить иначе, более прямым путем?

При *изучении и восприятии* задачи, каждый ученик должен знать и постоянно соблюдать разумное и обязательное *правило*: не приступать к решению задачи или поиску пути ее решения до тех пор, пока не убедился, что текст задачи полностью изучен и ясно понят, что осмыслены все данные и требования задачи, осознан характер функциональных зависимостей между входящими в задачу величинами, искомой и известными. Подобные методические правила постигаются учащимися в процессе практического их применения. Задачу со сложным текстом рекомендуется внимательно читать несколько раз. При фронтальной работе с классом учитель с помощью вопросов проверяет детальность и точность, полноту и сознательность восприятия задачи каждым учеником.

Главным этапом процесса решения задачи является *поиск пути решения*. Здесь наиболее эффективны различные аналитические методы и приемы, которыми школьники должны постепенно овладевать. Для этой цели потребуются постоянное внимание и усилия со стороны учителя, поскольку учащиеся обычно склонны сразу применять синтетический метод, мало пригодный для отыскания неизвестного пути решения задачи. Если же трудности встретятся и при аналитическом поиске, то ученик может попытаться вести свой поиск и по встречному, синтетическому направлению с целью сближения тех и других результатов.

Облегчению поиска пути служит *наглядное*, предметно реальное представление условия задачи, описанных в ней процессов, различное использование графических средств, схем с умело расставленными данными, применение вспомогательных и частных эвристических приемов.

Одной из важнейших целей, стоящих перед решением задач в курсе математики, является обучение школьников решать задачи самостоятельно. Для достижения этой цели необходимо учить поискам пути решения задачи. Опытный учитель не спешит сообщить ученикам решение задачи, а попытается вместе с учениками отыскать путь ее решения. При этом школьники приобретут определенный опыт как в решении, так и в его поиске.

Чертеж геометрической фигуры к решаемой задаче должен быть правильным, полностью соответствовать как условию задачи, так и следствиям из него. Можно рекомендовать следующее правило: чертеж делать после того, как имеется уже четкое представление о заданной фигуре, о связях между ее элементами, вытекающими из условия задачи. Конечно, сразу нарисовать правильный и точный чертеж не всегда удастся, поэтому нужно учить учеников делать хорошие чертежи, постепенно используя условия задачи, отражая их на чертеже и переделывать чертеж, если данные задачи не точно на нем отражены. Также следует приучать школьников переделывать чертеж, если в процессе решения открылись новые данные, которые отсутствуют на чертеже

Учащиеся должны знать, что во избежание ошибок чертеж должен быть правильным, однако все, что используется в решении, кроме того, что известно по условию задачи, должно быть доказано логически с использованием теории предмета.

Еще одним из требований к учителю, является то, что нужно обучать учащихся поиску *нескольких различных* способов решения задачи (если они существуют). Это позволит развить в большем объеме логику мышления, позволят школьнику увидеть связь различных разделов математики, ее единство, научит поиску рациональных способов решения.

Учителю также необходимо постоянно совершенствоваться в плане решения задач. Не стоит останавливаться на задачах из учебника. Необходимо постоянно читать методическую литературу, статьи в методических журналах, посвященные методам решения задач. Учителю также нужно стремиться к созданию своего «банка задач», где будут собраны

интересные с его точки зрения задачи, которые позволят разнообразить процесс обучения, развить интерес к предмету, а также помогут занять тех учащихся на уроке, которые уже научились решать типовые задачи.

ЛЕКЦИЯ №7

МЕТОДЫ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ. МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ

Вопросы:

- 1) Доказательство. Виды доказательств.
- 2) Дедуктивный метод доказательства. Силлогизмы.
- 3) Математическая индукция.
- 4) Синтетический метод доказательства.
- 5) Восходящий анализ.
- 6) Нисходящий анализ.
- 7) Доказательство противоречием. Обращение по разделению.
- 8) Обучение доказательству.

1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Под доказательством мы будем понимать логическое действие, в процессе которого истинность суждения обосновывается с помощью других суждений, которые считаются истинными.

Многовековой опыт убедил людей в том, что доказательство является одним из важнейших свойств правильного мышления, которое приводит к истинному знанию. Доказывать приходится не только в математике. Поэтому возникла целая наука, которая занимается доказательством. Эта наука – логика. В ней доказательство рассматривается отвлеченно, абстрагируясь от конкретного содержания той или иной теоремы, и дает некоторые общие рекомендации, которые используются при любом доказательстве. Однако нет универсального метода доказательства, которое бы годилось во всех случаях.

Во всяком доказательстве логика выделяет три составляющие:

- 1) тезис – суждение, истинность которого требуется установить;
- 2) довод – суждение, истинность которого известна и которое может быть приведено в качестве обоснования истинности или ложности тезиса;
- 3) демонстрация – логическое рассуждение, в процессе которого из доводов выводится истинность или ложность тезиса, а также совокупность логических правил, используемых в доказательстве.

По способу ведения доказательства подразделяются на прямые и косвенные.

Доказательство называется прямым, если истинность тезиса выводится непосредственно из истинного довода.

Доказательство называется косвенным (непрямым), если истинность тезиса обосновывается путем опровержения истинности противоречащего тезису суждения. К косвенным доказательствам относятся:

- 1) доказательства методом «от противного»;
- 2) разделительные доказательства.

Доказательство называется разделительным, если тезис этого доказательства является разделительным суждением вида «Т есть или P_1 , или P_2 , ..., или P_n », где число различных случаев n конечно и не менее двух. Последовательно исключая все суждения P_i , кроме одного, который нужно доказать, получаем доказательство теоремы. Приведем пример теоремы школьного курса математики, где используется как прямое, так и разделительное доказательства.

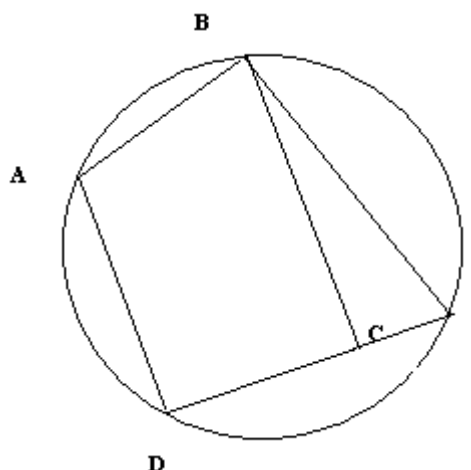
ТЕОРЕМА. Выпуклый четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма противоположных углов этого четырехугольника равна 180° .

Доказательство. Пусть четырехугольник вписан в окружность. Тогда сумма противоположных углов этого четырехугольника равна 180° .

Обратно, пусть сумма противоположных углов четырехугольника ABCD, например, $\angle A + \angle C = 180^\circ$. Опишем около треугольника ABD окружность. Тогда для точки C возможны три случая:

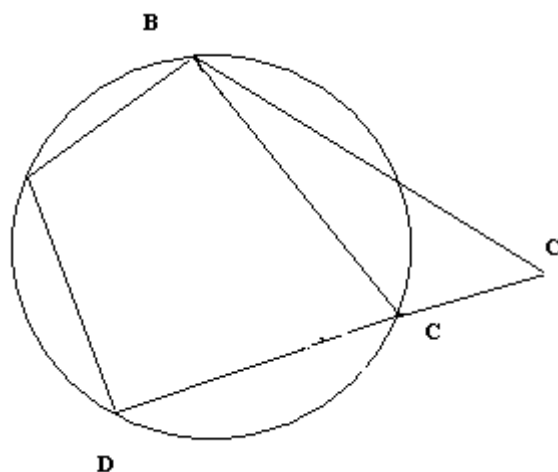
- а) точка C – внутри круга;
- б) точка C – на окружности;
- с) точка C – вне круга.

Покажем, что случаи а) и с) невозможны.



Пусть выполняется случай а). Пусть C_1 – точка пересечения стороны DC с описанной окружностью. Тогда четырехугольник ABC_1D является вписанным, а, значит $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$. Отсюда $\angle BCD = \angle BC_1D$. Получаем противоречие, ибо $\angle BCD$ является внутренним для треугольника BC_1C , а $\angle BC_1D$ – внешним.

Пусть выполняется случай с). Пусть C_1 – точка пересечения продолжения стороны DC с описанной окружностью. Тогда четырехугольник ABC_1D является вписанным, а, значит $\angle A + \angle C_1 = 180^\circ$. Отсюда $\angle BCD = \angle BC_1D$. Получаем противоречие, ибо $\angle BC_1D$ является внутренним для треугольника BC_1C , а $\angle BCD$ – внешним. Теорема доказана.



По форме умозаключения, в которой совершаются доказательства, различают индуктивные и дедуктивные доказательства. Индуктивные доказательства получаются в

результате применения полной индукции или математической индукции. Математическая индукция будет рассмотрена в дальнейшем, а сейчас остановимся подробнее на полной индукции.

Умозаключением называют мыслительную операцию, в результате которой из одного или нескольких известных нам суждений, находящихся в определенной смысловой зависимости, получают новое суждение, содержащее новое по отношению к исходным суждениям знание.

Умозаключение, в результате которого получается общий вывод обо всех элементах множества на основании знания обо всех без исключения элементах данного множества, называется полной индукцией.

Общую схему полной индукции во множестве M можно записать так:

$$K_1 \text{ есть } P$$

K_2 есть P

....

K_n есть P

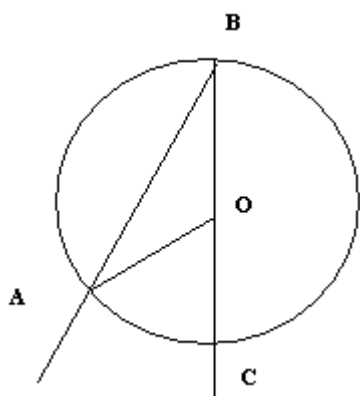
$\{K_1, K_2, \dots, K_n\} = M$

Все K есть P .

Приведем пример.

ТЕОРЕМА. Величина вписанного угла равна половине дуги, на которую она опирается.

Доказательство. Пусть угол $\angle ABC$ вписан в окружность. Рассмотрим три возможных случая:



1) центр окружности – точка O – на стороне BC ;

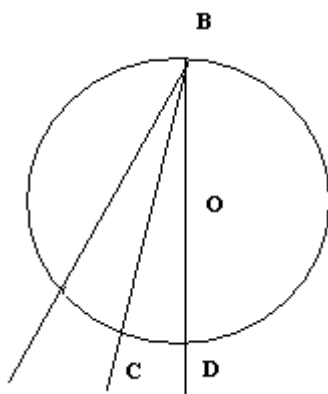
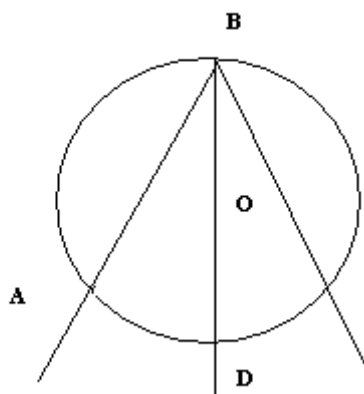
2) O внутри угла ABC ;

3) O вне угла ABC .

В первом случае проведем AO . Тогда $\angle AOC$ – внешний для треугольника ABO . Кроме того, $\triangle ABO$ является равнобедренным. Отсюда $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \text{AC}$.

Во втором случае проведем луч BO , который пересечет окружность в точке D . Тогда $\angle ABC$

$$= \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2}(\text{AD} + \text{DC}) = \frac{1}{2} \text{AC}.$$



В третьем случае аналогично проведем луч BD . Тогда $\angle ABC = \angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2}(\text{AD} - \text{DC}) =$

$$\frac{1}{2} \text{AC}.$$

Видно, что при доказательстве этой теоремы рассматриваются все три возможных случая расположения центра окружности относительно данного вписанного угла, и каждый случай строго обосновывается.

2

Доказательство называется дедуктивным, если оно представляет собой цепочки дедуктивных силлогизмов, каждый из которых представляет собой вывод частного из общего, т.е. проводится по схеме

$$\begin{array}{l} \text{М есть Р} \\ \text{К есть М} \end{array}$$

К есть Р.

«М есть Р» называется большей посылкой, «К есть М» называется меньшей посылкой, а «К есть Р» называется выводом.

Встречаются также условные силлогизмы, т.е. силлогизмы которые строятся по схеме

$$\begin{array}{l} \text{Если А есть В, то С есть К} \\ \text{А есть В} \end{array}$$

С есть К.

Покажем на примерах как в доказательствах можно явно выделять силлогизмы.

ТЕОРЕМА. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то такой четырехугольник является параллелограммом.

Доказательство. Проведем диагональ АС.

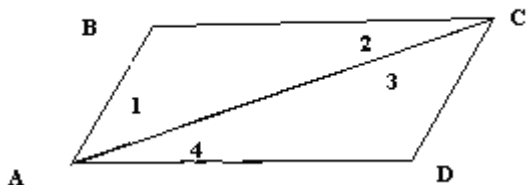
1-й силлогизм.

(Большая посылка) Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам второго треугольника, то такие треугольники равны.

(Меньшая посылка) AC – общая сторона треугольников ABC и CDA ; $AB=CD$, $BC=DA$ (по условию).

(Вывод) $\triangle ABC = \triangle CDA$.

2-й силлогизм.



(Б.п.) В равных треугольниках равны соответствующие углы.

(М.п.) $\angle 1$ и $\angle 3$ – соответствующие; $\angle 2$ и $\angle 4$ – соответствующие в равных

треугольниках ABC и CDA .

(Вывод) $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

3-й силлогизм.

(Б.п.) Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы равны, то эти две прямые параллельны.

(М.п.) $\angle 1$ и $\angle 3$ – равные и накрест лежащие при прямых AB и CD , пересеченных прямой AC ; $\angle 2$ и $\angle 4$ равные и накрест лежащие при прямых CB и AD , пересеченных прямой AC .

(Вывод) $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

4-й силлогизм.

(Б.п.) Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом.

(М.п.) В четырехугольнике $ABCD$ $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

(Вывод) $ABCD$ – параллелограмм.

Упражнение. Проведите доказательство следующей теоремы с использованием силлогизмов. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

В качестве большей посылки силлогизма могут выступать ранее доказанные теоремы их следствия, аксиомы, а также определения. Меньшая посылка может включать в себя часть условия доказываемой теоремы или следствие, полученное из условия в предшествующих силлогизмах этого же доказательства.

В школьных учебниках по математике доказательства теорем не разбиты на силлогизмы. Учителю по возможности необходимо проводить работу со школьниками, направленную на преобразование книжных доказательств. Такая работа будет способствовать эффективному повторению, глубокому и прочному усвоению учебного материала, а также развитию творческого мышления.

3

В основе метода математической индукции лежит аксиома индукции – одна из аксиом натуральных чисел.

Данный метод формулируется следующим образом:

Если некоторое предложение $P(k)$, зависящее от натурального переменного числа k ,

- 1) верно при $k = 1$,
 - 2) из того, что оно верно при $k = n$, следует, что оно верно и при следующем $k = n + 1$,
- то предложение $P(k)$ верно для любого натурального числа k .

Доказательство методом математической индукции обязательно должно содержать две части:

- а) проверку истинности предложения $P(1)$;
- б) доказательство импликации $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

По ныне действующей программе метод математической индукции изучается в классах с углубленным изучением математики (либо в 8-м, либо в 10-м). Этот метод является трудным и непривычным даже для старшеклассников, а потому его усвоению необходимо уделить достаточно внимания путем разбора и решения большого количества разнообразных задач и разъяснением необходимости именно одновременного выполнения пунктов а) и б).

Для этого необходимо рассмотреть ряд примеров, когда индукция является неполной. Например, формула $f(k) = 2k^2 + 29$ дает 28 простых чисел при

первых 28 значениях k . Здесь пункт а) выполнен, а вот пункт б) не справедлив, так как уже при $k = 29$ получаем составное число $29 \cdot 59$.

Метод математической индукции широко применяется как в алгебре, так и в геометрии. В алгебре он используется для доказательства

- 1) равенств;
- 2) неравенств;
- 3) делимости чисел;
- 4) различных формул.

Рассмотрим примеры для каждого из этих случаев.

ПРИМЕР 1. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x} \quad (1)$$

Доказательство. Проверим наше равенство при $n=1$. Имеем

$$\frac{\sin 2x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin x} = \cos x.$$

Получаем, что при $n=1$ равенство (1) верно.

Предположим, что (1) верно при $n=k$ и докажем его при $n = k + 1$.

Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k+1} \cos(2n-1)x &= \sum_{n=1}^k \cos(2n-1)x + \cos(2k+1)x = \frac{\sin 2kx}{2 \sin x} + \cos(2k+1)x = \\ &= \frac{\sin 2kx + 2 \cos(2k+1)x \sin x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2kx + \sin(2k+2)x - \sin 2kx}{2 \sin x} = \frac{\sin(2k+2)x}{2 \sin x} \end{aligned}$$

Используя метод математической индукции, получаем, что равенство (1) верно для всех натуральных n .

ПРИМЕР 2. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – произвольные положительные числа, причем $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Доказать, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

Доказательство. Если $n=1$, то по условию $x_1=1$ и, следовательно, можно написать $x_1 \geq 1$, т.е. для $n=1$ неравенство верно.

Предположим, что для $n=k$ утверждение верно. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ – произвольные положительные числа и $x_1 x_2 \dots x_k x_{k+1} = 1$. Могут представиться два случая: либо все эти числа равны 1, и тогда их сумма равна $k+1$, либо

среди этих чисел есть хотя бы одно число, не равное 1, и тогда обязательно есть, по крайней мере, еще одно число, не равное 1, причем, если одно из них меньше 1, то второе обязательно больше 1. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_k > 1$, а $x_{k+1} < 1$. Рассмотрим теперь к чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, (x_k x_{k+1}).$$

Их произведение равно 1, а, следовательно, по предположению индукции

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_k x_{k+1} \geq k.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства $x_k + x_{k+1}$, перенесем $x_k x_{k+1}$ направо и преобразуем правую часть неравенства:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \geq k - x_k x_{k+1} + x_k + x_{k+1} = k + 1 + x_k(1 - x_{k+1}) + x_{k+1} - 1 = k + 1 + (1 - x_{k+1})(x_k - 1) \geq k + 1.$$

Таким образом, из истинности утверждения при $n=k$ вытекает его истинность при $n=k+1$.

ПРИМЕР 3. Докажите, что число $A_n = 10^n + 18n - 28$ кратно 27 для всех натуральных n .

Доказательство. 1. При $n=1$, $A_1=0$, очевидно, кратно 27.

1. Пусть A_n кратно 27 при $n = k$, и докажем делимость A_n при $n = k+1$. Имеем $A_{k+1} = 10^{k+1} + 18(k+1) - 28 = 10A_k - 162k + 270 = 10A_k + 27(10 - 6k)$, что доказывает делимость на 27. На основании метода математической индукции, заключаем, что A_n кратно 27 при любом натуральном n .

Рассмотрим некоторые обобщения принципа математической индукции.

Пусть p – некоторое целое число.

Предложение $A(k)$, где k целое, истинно для всех целых значений $k \geq p$, если выполнены следующие два условия:

- 1) Предложение $A(k)$ истинно для $k=p$.
- 2) Из предположения, что $A(k)$ истинно для $k=p$ (p – целое, $p \geq p$), следует, что оно верно для следующего значения $k=p+1$.

ПРИМЕР 4. Доказать, что любую сумму денег, большую 7 копеек, можно разменять трехкопеечными и пятикопеечными монетами.

Доказательство. Пусть сумма равна n копеек. Если $n = 8$, то утверждение верно. Пусть утверждение верно для $n=k$. Могут представиться только два случая для размена суммы в k копеек.

- а) потребовались только трехкопеечные монеты,
- б) потребовалась хотя бы одна пятикопеечная монета.

В случае а) удаляем три трехкопеечные монеты и добавляем две пятикопеечные и тем самым размениваем сумму в $k+1$ копеек. В случае б) удаляем одну пятикопеечную монету и добавляем две трехкопеечные и тем самым размениваем сумму в $k+1$ копеек.

Приведем пример применения метода математической индукции в геометрии.

ПРИМЕР 5. Докажите, что количество диагоналей выпуклого k -угольника подсчитывается по формуле $\frac{k(k-3)}{2}$, где $k \geq 4$.

Доказательство. Очевидно, формула верна при $n=4$. Предположим, что она верна и в случае n -угольника и докажем ее для $(n+1)$ -угольника. Рассмотрим $(n+1)$ -угольник $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1}$. Проведем отрезок A_nA_1 . Он разобьет наш $(n+1)$ -угольник на n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$ и треугольник $A_nA_1A_{n+1}$. Тогда количество диагоналей n -угольника $A_1A_2 \dots A_n$ равно $\frac{n(n-3)}{2}$ и к ним еще прибавятся диагонали, которые получаются соединением вершины A_{n+1} с вершинами $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ и диагональ A_nA_1 , т.е. добавится $n-1$ диагональ. Но тогда их общее количество будет равно $\frac{n(n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$. На основании метода неполной математической индукции заключаем, что формула верна для любого выпуклого n -угольника.

4

Доказательство теоремы $A \Rightarrow B$ называется синтетическим, если оно проводится по следующей логической схеме

$$(A \wedge T) \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n \Rightarrow B,$$

где T – определенная совокупность утверждений той математической теории в рамках которой и происходит доказательство данного предложения и

которой принадлежит конечная последовательность предложений $C_1, C_2, \dots, C_n$, составляющих доказательство, а также суждения A и B .

Значит, доказательство теоремы $A \Rightarrow B$ синтетическим методом начинается с получения некоторого следствия C_1 из условия теоремы A , или части условия теоремы и положений теории T , истинность которых известна. Затем аналогично получают следующее следствие C_2 и т.д. до тех пор, пока из последнего полученного следствия C_n легко получаем вывод заключения теоремы B .

Данный способ доказательства обладает как недостатками, так и достоинствами. К недостаткам следует отнести большую степень неопределенности в процессе проведения доказательства, что порождает у школьников чувство искусственности при проведении такого доказательства. Даже если школьники и слушают излагаемое учителем синтетическое доказательство, то для них мотивы предпринимаемых шагов остаются, как правило, скрытыми до завершения доказательства. Это обстоятельство и затрудняет обучение доказательству теорем школьников синтетическим методом. Им непонятно, почему берется именно эта, а не какая-то другая часть условия теоремы; почему вводятся в доказательство именно эти дополнительные предложения и понятия; почему выводится именно это следствие на данном этапе, а не другое. И только в конце доказательства все становится на свои места.

К достоинствам следует отнести лаконичность изложения доказательства, поэтому этот метод доказательства теорем и преобладает в учебниках при изложении доказательств.

Рассмотрим пример доказательства синтетическим методом и снабдим их комментариями.

ПРИМЕР 1. Известно, что $a^2 + b^2 = 1$. Докажите, что $|a + b| \leq \sqrt{2}$.

Доказательство. Рассмотрим очевидное неравенство $(a - b)^2 \geq 0$. (Почему именно это неравенство, а не другое?)

Перепишем это неравенство следующим образом: $a^2 + b^2 \geq 2ab$. (Почему именно так, а не иначе?)

Добавим к обеим частям последнего неравенства $a^2 + b^2$. Получим $2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2$. (Зачем?)

Заменим в левой части (Почему не в правой?) $a^2 + b^2$ на 1, получим, $2 \geq (a+b)^2$. Извлекая квадратный корень из обеих частей, получим $|a+b| \leq \sqrt{2}$.

Неравенство доказано.

5

Доказательство теоремы $A \Rightarrow C$ методом восходящего анализа происходит по следующей схеме. Отправляясь от заключения, подбирают для него достаточное условие, т.е. такое суждение B_1 , что $B_1 \Rightarrow C$, затем подбирают достаточное условие B_2 для B_1 , т.е. $B_2 \Rightarrow B_1$ - истинно, и т.д. до тех пор, пока не получат такое достаточное условие B_n для B_{n-1} , что B_n истинно и легко следует из условий теоремы и некоторой совокупности T связанных с A и C предложений данной теории. Символически процесс рассуждения по методу восходящего анализа может быть изображен так:

$$B_1 \Rightarrow C, B_2 \Rightarrow B_1, \dots, B_n \Rightarrow B_{n-1}, (A \wedge T) \Rightarrow B_n.$$

Такое доказательство является строгим и логичным, однако оформление такого доказательства лучше обратить и записать в синтетическом виде:

$$(A \wedge T) \Rightarrow B_n \Rightarrow B_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow B_1 \Rightarrow C,$$

хотя в этом нет большой необходимости. Рассмотрим пример доказательства неравенства предыдущего пункта методом восходящего анализа.

Наше неравенство легко следует из неравенства $(a+b)^2 \leq 2$, которое в свою очередь легко получается из неравенства $a^2 + 2ab + b^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, или $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$, которое очевидно.

Нисходящим анализом называют такую разновидность доказательства, при котором, отправляясь от заключения C доказываемого предложения ($A \Rightarrow C$), рассуждения ведут путем последовательного получения логических следствий

$$C \Rightarrow B_1 \Rightarrow B_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow B_n,$$

где B_n такое предложение, истинность которого уже доказана. При этом рассуждении предполагается, что утверждение C истинно.

Однако, при применении нисходящего анализа следует иметь в виду, что возможны следующие два принципиально различные случая:

1. Полученное следствие B_n ложно. В этом случае получаем, что и утверждение C ложно.
2. Полученное следствие B_n истинно. В этом случае ничего нельзя сказать об истинности доказываемого предложения C . Это объясняется тем, что из ложного суждения можно получить и истинное утверждение. Пример: $2 = -2$ – ложно, однако $4 = 4$ – истинно. Поэтому в таком случае следует попытаться обратить этот процесс доказательства в синтетическое:

$$(B_n \wedge T) \Rightarrow B_{n-1} \Rightarrow \dots \Rightarrow B_1 \Rightarrow C.$$

Если это удалось осуществить, то требуемое утверждение доказано синтетическим методом, а нисходящий анализ подсказал только путь нахождения такого доказательства. Если же обращение не удалось, то утверждение остается недоказанным и нужно искать другой способ доказательства. На последнее обстоятельство нужно особо обращать внимание учащихся, ибо именно на этом месте очень много совершается ошибок. Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР. Доказать неравенство

$$\frac{x^3 + y^3}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^3, \quad (*)$$

где x и y – положительные числа.

Очень часто приходится слышать от школьников такое «доказательство».

Из неравенства (*) следует, что

$$\frac{x^3 + y^3}{2} - \left(\frac{x + y}{2}\right)^3 \geq 0,$$

или

$$\frac{4x^3 + 4y^3 - x^3 - 3x^2y - 3xy^2 - y^3}{8} \geq 0,$$

откуда

$$3x^3 + 3y^3 - 3x^2y - 3xy^2 \geq 0,$$

т.е.

$$(x + y)(x - y)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство, очевидно, выполняется, а значит требуемое неравенство доказано.

В такой ситуации следует разъяснять учащимся ошибочность их рассуждений, причем делать это надо на конкретных примерах.

7

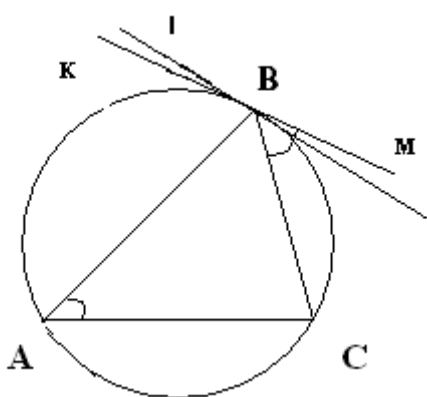
Доказательство противоречием школьникам хорошо известно под названием «доказательство от противного». Этот метод достаточно широко распространен в школьном курсе, особенно при доказательстве обратных теорем.

Общая схема доказательства противоречием описывается так. Пусть доказывается теорема $A \Rightarrow C$. Предположим, что C ложно. Тогда по закону исключения третьего, получаем, что будет истинным противоположное суждение $\bar{C}$. Получаем теорему $A \Rightarrow \bar{C}$. Путем нисходящего анализа приходим от $\bar{C}$ к B_n . Пусть последнее утверждение противоречит ранее

установленным фактам. Отсюда делаем вывод, что суждение $\bar{C}$ так же ложно, а значит истинно противоположное C .

Отдельным пунктом поговорим об обратных теоремах. Как известно, если верна теорема $A \Rightarrow B$, то обратная $B \Rightarrow A$ верна не всегда, а потому требует отдельного доказательства. Как правило, такие теоремы доказываются методом от противного. Приведем пример одной из таких теорем.

ТЕОРЕМА. Если через вершину треугольника ABC проходит прямая KM так, что она образует угол со стороной BC равный углу CAB и не пересекает сторону AC треугольника, то эта прямая является касательной к окружности, описанной около треугольника ABC .



Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность и предположим противное, т.е. что данная прямая KM не является касательной к этой окружности. Но тогда существует прямая l , отличная от KM и проходящая через точку B , которая является касательной к этой окружности. По теореме об угле между касательной и хордой, получаем, что угол между прямой l и стороной BC равен углу BAC , т.е. он равен углу MBC . Но тогда прямая l должна совпадать с прямой KM , что приводит к противоречию. Теорема доказана.

Данная теорема не рассматривается в школьном курсе математики, однако встречается ряд задач, где ее применение позволяет проще изложить решение.

Однако не всегда можно доказывать обратные теоремы. Это позволяет избежать следующая логическая теорема.

ТЕОРЕМА. Если верна совокупность предложений

$$\left[\begin{array}{l} A_1 \Rightarrow B_1 \\ A_2 \Rightarrow B_2 \\ \dots \\ A_n \Rightarrow B_n \end{array} \right. (1)$$

где $A_1, \dots, A_n$ единственно возможны, полностью исчерпывают все возможные случаи условия, разделены по определенному признаку, а

$B_1, \dots, B_n$ различны и несовместимы одно с другим, то верна совокупность соответствующих обратных предложений

$$\begin{cases} B_1 \Rightarrow A_1 \\ B_2 \Rightarrow A_2 \\ \dots \\ B_n \Rightarrow A_n \end{cases} (2)$$

Доказательство. Допустим, что одно из утверждений (2) имеет вид $B_1 \Rightarrow A_k$, где $k \neq 1$, хотя совокупность (1) удовлетворяет всем перечисленным условиям. Но тогда т.к. $A_k \Rightarrow B_k$, получим $B_1 \Rightarrow B_k$, что противоречит несовместимости B_1 и B_k . Теорема доказана.

Как следствие этой теоремы получаем три геометрические теоремы для квадрата стороны треугольника, лежащей соответственно против прямого, острого или тупого угла. Эти теоремы удовлетворяют всем требованиям совокупности (1), а потому верны и обратные к ним теоремы, т.е. если в треугольнике:

- 1) $a^2 + b^2 = c^2$, то угол С прямой;
- 2) $a^2 + b^2 > c^2$, то угол С острый;
- 3) $a^2 + b^2 < c^2$, то угол С тупой.

Хотя обращение по разделению в общем виде на уроках не рассматривается, однако учитель в приведенном здесь и подобных конкретных случаях должен говорить о существовании обратных теорем и вводить их в обиход. Это позволит избежать логической ошибки, когда, например, при определении вида треугольника ссылаются на прямые теоремы, и, в частности, на теорему Пифагора.

8

При изучении доказательств теорем в школьном курсе математики преследуются две цели. Первая из них состоит в том, чтобы учащиеся хорошо усвоили изучаемые теоремы, а вторая – научить учащихся самостоятельно доказывать различные теоремы. Отсюда вытекает важное требование к изучению теорем, которое состоит в том, чтобы учитель не преподносил все

доказательства теорем в готовом виде и не требовал от школьников только заучиванию готовых доказательств.

При обучении школьников доказательству теорем учителю рекомендуется придерживаться следующих правил:

- 1) Перед доказательством теоремы следует восстановить в памяти учащихся тот ранее изученный материал, который будет использоваться при доказательстве.
 - 2) Перед тем как приступить к доказательству новой теоремы учитель обязан убедиться, что каждый ученик понял ее содержание, четко определил ее условие и заключение.
 - 3) При доказательстве теорем всегда подчеркивать вспомогательную роль чертежа, но требовать от ученика делать чертеж аккуратно и как можно более близко к данным теоремы.
 - 4) При доказательстве теорем требовать от учеников применение только тех фактов и теорем, истинность которых либо хорошо известна, либо была установлена ранее. Интуиция и всевозможные догадки здесь должны играть лишь вспомогательную роль при поиске хода доказательства.
 - 5) Перед тем как приступить к доказательству теоремы учитель обязан хорошо мотивировать изучение этой теоремы, чтобы возникла «потребность» в изучении теоремы.
 - 6) При обучении доказательству теорем учителю следует ознакомить учащихся со следующими *правилами доказательства*.
 - А) Условие теоремы преобразуется с целью сближения с заключением.
 - В) Заключение теоремы преобразуется с целью сближения с условием.
 - Г) Определяемое понятие в условии или заключении теоремы или появляющееся в доказательстве, заменяется его определением.
 - Д) При наличии нескольких определений понятия используется то, которое сокращает путь доказательства.
 - Е) Вместо определения понятия используется его признак.
 - Ж) Условие теоремы используется полностью.
- Остановимся кратко на этих требованиях.

Повторение ранее изученного материала, необходимого на данном уроке, может проходить по разному. Можно просто задать повторить тот или иной материал, можно дать задачу на применение именно такого материала. Однако проверка того как учащиеся повторили этот материал необходима перед доказательством теоремы и проводить это можно так же в различной форме: начиная от устного опроса до проведения краткой самостоятельной работы по этому материалу. В процессе же доказательства можно просто

ограничиться ссылками на этот материал, однако ссылки должны быть полными и обоснованными.

При доказательстве теоремы чертеж играет вспомогательную роль, однако правильно выполненный чертеж иногда подсказывает путь доказательства теоремы. Кроме этого роль чертежа как наглядного пособия оказывает большую роль при изучении доказательства. Если чертеж сделан красиво, на нем выделены основные элементы, играющие роль при доказательстве, то при воспроизведении доказательства ученик будет лучше ориентироваться. В этом отношении замечателен опыт работы Шаталова по своим так называемым «опорным конспектам».

Мы с вами уже отмечали роль мотивации в обучении. Она состоит в том, чтобы вызвать осознанную потребность и интерес в изучении материала. Этого можно достичь разными методами и в этом отношении наработан большой запас различных приемов. Хорошо известен метод занимательных и целесообразных задач. Можно рассмотреть исторические факты, связанные с данным материалом. Однако одно из основных требований в изучении новой теоремы состоит в том, чтобы ее изучение довести до рассмотрения конкретных примеров, на которых видно применение данной теоремы или утверждения.

В отношении правил доказательства следует отметить необходимость как можно раньше ознакомить учащихся с данными правилами, чтобы учащиеся записали их и затем применяли. Можно вывесить плакат с этими правилами на тех уроках, где будут доказываться теоремы.

В заключение отметим, что, как правило, после доказательства теорем при решении задач используются лишь формулировки теорем. Это приводит учащихся к мысли, что самое важное в теореме – ее формулировка, а все остальное можно не учить. К сожалению, программа по математике в базовом классе приучает учеников к такой мысли более активно. Поэтому следует иногда повторять доказательство той или иной теоремы, а при решении задач в математическом классе, когда ученики пытаются использовать материал выходящий за рамки школьного курса (особенно при решении нестандартных задач), следует требовать от них осознанного применения этих теорем, т.е. чтобы школьники приводили и доказательство этих теорем. Это особенно важно в старших классах, когда идет подготовка к поступлению в вуз, где на вступительных экзаменах требуется доказательство всех фактов выходящих за рамки школьной программы.

Поэтому теоремы, рассмотренные на факультативах и занятиях кружка, следует также доказывать.

ЛЕКЦИЯ №8

ПРИНЦИПЫ ДИДАКТИКИ МАТЕМАТИКИ

ВОПРОСЫ:

1. Принципы обучения, как категории дидактики
2. Принцип научности
3. Принцип сознательности, активности и самостоятельности
4. Принцип систематичности и последовательности
5. Принцип доступности
6. Принцип наглядности
7. Принцип индивидуального подхода к учащимся
8. Принцип прочности знаний

1

Обобщенный опыт обучения математике показывает, что для обеспечения оптимальности процесса обучения учитель должен придерживаться определенных правил или положений, которые носят в некотором смысле универсальный характер.

В связи с этим в дидактике математики разработаны *принципы*, которые рассматриваются как важные требования к организации процесса обучения, его содержанию, формам и методам. Эти единые требования получили название *дидактических принципов* или *принципов обучения*. Организация учебного процесса в соответствии с дидактическими принципами, как показывает опыт, позволяет построить обучение наиболее рационально и достигнуть при этом лучших результатов.

Вместе с тем следует иметь в виду, что дидактические принципы, выражая определенные закономерности обучения и накопленный опыт, не являются раз и навсегда установленными. Они также изменяются в зависимости от тех целей и задач, которые поставлены перед школой на данном этапе.

Дидактические принципы – это основные положения, которые возникают из результатов анализа научно-педагогических закономерностей и практического опыта в соответствии с которыми определяются содержание, организационные формы и методы обучения, а также отражаются общие цели и закономерности процесса обучения, раскрываемые педагогикой, психологией и другими смежными науками.

В методической литературе [1] признаны основными следующие принципы:

1. Принцип научности.
2. Принцип сознательности, активности и самостоятельности.
3. Принцип систематичности и последовательности.
4. Принцип доступности.
5. Принцип наглядности.
6. Принцип индивидуального подхода к учащимся.
7. Принцип прочности знаний.

2

Принцип научности был введен в дидактику в 50-х годах прошлого столетия и обоснован М.Н.Скаткиным. В дальнейшем Л.Я. Зорина показала, что под научностью содержания образования следует понимать такую его качественную характеристику, которая удовлетворяет следующим трем признакам:

- 1) соответствие содержания образования уровню современной науки;
- 2) создание у учащихся верных представлений об общих методах научного познания;
- 3) показ важнейших закономерностей процесса познания.

Первый признак требует, чтобы материал, который составляет содержание школьного математического образования, в должной мере соответствовал уровню современной науки. Это требование реализуется в процессе создания программ по математике, подготовке учебников и учебных пособий.

Второй признак говорит о том, что учителю необходимо показывать и обучать школьников методам научного познания. Такими методами в математике являются – метод сравнения, аналогии, моделирования и др.

Третье условие указывает на то, что принцип научности требует от учителя формирования у учащихся представлений о процессе познания и его закономерностях. Именно поэтому в школе шире должны внедряться проблемное обучение и разнообразные исследовательские приемы. При этом надо учитывать принцип доступности, чтобы содержание, формы и методы обучения учитывали реальные возможности учащихся.

3

Реализация принципа сознательности, активности и самостоятельности в обучении предполагает выполнение следующих условий:

- а) соответствие познавательной деятельности учащихся закономерностям процесса учения;
- б) познавательная активность учащихся в процессе обучения;
- в) осознание школьниками процесса учения;
- г) владение учащимися методами умственной работы в процессе познания нового.

Остановимся кратко на сущности этой совокупности условий.

Дидактика выделяет в процессе усвоения следующие взаимосвязанные этапы познавательной деятельности учащихся: 1) восприятие 2) осмысление 3) закрепление 4) применение.

Если в процессе познания нового материала учащиеся будут совершать умственные и практические действия в соответствии с выделенными этапами процесса обучения, то можно утверждать, что в обучении созданы условия для активизации познавательной деятельности учащихся и осознания ими процесса учения. При этом отметим следующие три момента:

- 1) процесс познавательной деятельности в каждом отдельном случае не обязательно проходит по всем указанным четырем этапам;
- 2) выделенные выше 4 этапа не являются независимыми;
- 3) для того чтобы познавательная деятельность учащихся соответствовала закономерностям процесса учения, со стороны учителя необходима целенаправленная деятельность по формированию у учащихся ответственного отношения к приобретению знаний, их усвоению, осмысливанию и практическому применению.

Сознательность в дидактике понимается как такое овладение учащимися учебным материалом, при котором возможно его глубокое осмысление, умение пользоваться этими знаниями на практике в новых условиях.

Признаками осознанности знаний являются:

- а) понимание учащимися характера связей между знаниями;
- б) умение обосновывать знания;
- в) понимание способов получения знаний и сферы их применения.

Сознательное обучение обязательно предполагает активную деятельность учащихся в этом процессе.

Активность – это деятельное состояние учащегося, которое характеризуется стремлением к учению, умственным напряжением и проявлением волевых усилий в процессе овладения знаниями. Такую активность учащихся в обучении еще называют *познавательной активностью*.

Познавательная самостоятельность учащихся является высшей формой активности и сознательности учащихся в процессе учения. Выделяют следующие признаки познавательной самостоятельности учащихся:

- 1) стремление и умение самостоятельно мыслить;
- 2) способность ориентироваться в новой ситуации, найти свой подход к решению новой задачи;
- 3) желание понять не только усваиваемые знания, но и способы их добывания;
- 4) критический подход к суждениям других;
- 5) независимость собственных суждений.

Большое значение в плане формирования познавательной активности и самостоятельности учащихся имеют самостоятельные работы учащихся.

Систематичность в обучении математике предполагает соблюдение определенной последовательности в изучении учебного материала и постепенное овладение основными понятиями школьного курса математики. Принцип систематичности и последовательности в обучении лежит в основе построения учебных программ, разработке и создании школьных учебников и учебных пособий, а также определяет систему работы учителя и деятельность учащихся в процессе обучения.

Систематичность имеет место и в организационных приемах работы учителя – в системе его требований к учащимся, в системе учета и контроля знаний и умений учащихся.

Последовательность в обучении математики означает, что обучение осуществляется в соответствии с правилами обучения: а) от простого к сложному; б) от легкого к трудному; в) от известного к неизвестному; г) от представлений к понятиям; д) от знания к умению, а от него к навыку.

Учитель реализует этот принцип, если обучение математике представляет собой цепочку последовательных шагов, каждый из которых дополняет известные учащимся знания, умения и навыки разумной дозой новых знаний, умений и навыков.

Отметим, что принцип систематичности и последовательности в обучении включает в себя также и учет межпредметных связей, координацию требований к учащимся между преподавателями различных предметов, а также преемственность обучения в младших, средних и старших классах.

Принцип доступности в обучении вытекает из требований учета возрастных особенностей учащихся. Этот принцип требует, чтобы объем и содержание учебного материала были по силам учащимся, соответствовали уровню их умственного развития и имеющемуся запасу знаний, умений и навыков.

Реализация данного принципа предполагает выполнение в обучении следующих условий:

- следовать от простого к сложному;
- от легкого к трудному;
- от известного к неизвестному.

Т.е. этот принцип очень тесно связан с принципом систематичности и последовательности.

Однако данный принцип доступности не исключает приучения учащихся к преодолению трудностей в учебной деятельности, т.е. нужно строить учебный процесс так, чтобы трудности не подрывали, а развивали силы и способности учащихся.

6

Принцип наглядности впервые теоретически был обоснован Каменским, который выдвинул требование учить детей познавать сами вещи, а не только чужие сведения о них.

Этот принцип вытекает из сущности процесса восприятия и осмысления учащимися изучаемого материала. Он означает, что при обучении новому явлению нужно найти его исходное начало в фактах и наблюдениях, затем определить закономерный переход от восприятия единичного или конкретного предмета (явления) к общему, абстрактному. При этом в дидактике принято, что этот принцип является определяющим моментом обучения главным образом в младших классах.

По характеру отражения окружающей действительности различают следующие виды наглядности:

- натуральная (естественная) наглядность, представляющая собой реальные предметы или процессы;
- изобразительная наглядность (фотографии, картины, и т.д.). Эта наглядность применяется, когда показ натурального предмета затруднен, а созерцание конкретного образа необходимо;

- символическая наглядность (чертежи, графики, схемы, таблицы и др.). Эта наглядность является своеобразным языком, а потому должна специально изучаться, чтобы стать понятной. Например, при изучении функций целесообразно привлекать графики, а потому нужно учить учащихся умению их читать.

Наглядность применяется и как средство познания нового, и для иллюстрации мысли, и для развития наблюдательности, и для лучшего запоминания. Средства наглядности должны использоваться на всех этапах процесса обучения – и при изучении нового материала, и при его закреплении и формировании умений и навыков, и при выполнении домашних заданий, и при контроле усвоения учебного материала.

Применение данного принципа подчинено ряду правил:

- 1) ориентировать учащихся на всестороннее восприятие предмета с помощью разных органов чувств;
- 2) обращать внимание учащихся на существенные признаки;
- 3) наглядные пособия должны быть доступны всем учащимся;
- 4) использовать средства наглядности ровно столько, сколько это нужно, не допускать перегрузки обучения наглядными пособиями, которые даже иногда тормозят развитие учащихся.

7

Повышение эффективности обучения непосредственно связано с тем, насколько полно учитываются особенности каждого учащегося. Важной особенностью учащегося является его способность к усвоению знаний, т.е. *обучаемость*.

Как показали многочисленные исследования, если уровнять многие факторы, влияющие на обучаемость учащихся, а именно:

- обеспеченность исходным уровнем знаний;
- вызвать у всех положительное отношение к уроку;
- обеспечить желание как можно лучше усвоить новый материал,

то все равно, новые знания будут усвоены по-разному. Одни школьники усвоят материал достаточно полно и смогут применить его в новых, но сходных с учебной обстановкой условиях, требующих самостоятельного развития новых знаний (*высший уровень усвоения*). Другие учащиеся усвоят существенные стороны новых понятий или закономерностей и сумеют применить их к решению задач, близких к тем, которые решались на уроке (*средний уровень*). Будут и такие, кто усвоил несущественные стороны новых понятий и не может применить их к решению даже простых задач (*низкий уровень усвоения*). При этом потребуется различное количество упражнений и времени со стороны учителя тем учащимся, которых предстоит довести до высшего уровня усвоения нового материала.

В психологии обучения выявлены следующие характеристики индивидуальных различий учащихся, связанные с понятием обучаемости:

- а) темп усвоения материала;
- б) полнота и точность анализа и синтеза, обобщения и абстрагирования;
- в) предрасположенность учащегося к анализу, особенно при первичной работе над материалом;
- г) уровень формируемых у школьника обобщений;
- д) уровень выделения и обобщения школьником способов оперирования знаниями.

Все эти признаки позволили сделать вывод о том, что не всякое усвоение знаний означает сдвиг в умственном развитии учащегося. Это происходит, если только обучение обеспечивает овладение не только содержанием знаний, но и методами, способами их приобретения, благодаря чему учащиеся сами могут приобретать новые знания.

Из всего сказанного выше вытекает важный вывод:

принцип индивидуального подхода состоит в адаптации обучения либо к содержанию и уровню знаний, умений и навыков каждого учащегося, либо также характерным для него особенностям процесса усвоения, либо к некоторым особенностям его личности.

Этот принцип реализуется учителем как в процессе подготовки учителя к уроку, так и в процессе проведения занятий с помощью специальных приемов, методов и применения индивидуальных самостоятельных работ.

Принцип прочности знаний обусловлен как задачами школы, так и закономерностями процесса обучения.

Прочные знания, умения и навыки необходимы как для успешного продолжения образования, подготовки к практической деятельности, так и для развития у школьников их способностей.

В дидактике математики выделяют следующие условия прочности знаний:

- активное приобретение знаний с целью их сознательного усвоения;
- научность обучения;
- создание при обучении условий для запоминания учебного материала.

Первые два условия обсуждались выше. Остановимся на третьем.

Основными условиями запоминания материала при обучении считаются такие условия, когда этот материал запоминается прочнее и быстрее. Учебный материал запоминается учащимися лучше, если:

- он входит в содержание основной цели деятельности;
- он вызывает активную умственную работу над ним;
- он вызывает у учащихся интерес и эмоции.

Последнее условие означает, что перед изучением какого-либо материала необходима его мотивация, которая предполагает либо разъяснение учащимся его научной и прикладной ценности, либо рассказ истории его открытия, либо рассказ других интересных исторических сведений, связанных с этим материалом.

Лучшему запоминанию учащимися учебного материала способствует его разбиение на небольшие порции по смысловому содержанию, с выделением главного, основного в каждой такой части.

Лучшему запоминанию учащимися учебного материала способствует также

- повторение ранее изученного материала, который необходим для изложения нового,

- своевременный контроль знаний, умений и навыков учащихся,
- своевременное предупреждение и устранение пробелов в знаниях учащихся.
- регулярное проведение самостоятельных работ в различной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Сост. Е.С.Черкасов, А.А.Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

ЛЕКЦИЯ №9

ТЕМА: «ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ. УРОК ПО МАТЕМАТИКЕ. СОВРЕМЕННЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К УРОКУ.»

ВОПРОСЫ:

- 1. СТРУКТУРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ УРОКА.**
- 2. ТИПЫ (ВИДЫ) УРОКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ**
- 3. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА ШКОЛЬНИКОВ**
- 4. ТРЕБОВАНИЯ К СОВРЕМЕННОМУ УРОКУ МАТЕМАТИКИ**
- 5. ОЦЕНКА ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ УЧАЩИХСЯ**
- 6. ФАКУЛЬТАТИВНЫЕ ЗАНЯТИЯ**
- 7. ВНЕКЛАССНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ**
- 8. ПЛАНИРОВАНИЕ РАБОТЫ И ПОДГОТОВКА УЧИТЕЛЯ К УРОКУ**

В основе организации учебного процесса лежит классно-урочная система, которая сложилась более 300 лет назад. В этой системе урок является основным звеном, а к вспомогательным звеньям относят домашнюю работу школьника, факультативные занятия, внеклассную работу, индивидуальную и групповую работу с отстающими школьниками.

Дидактика выделяет следующие структурные элементы урока:

- 1) изучение нового материала;
- 2) закрепление нового материала;
- 3) решение задач или упражнений;
- 4) повторение ранее изученного материала;
- 5) проверка выполнения домашней работы учащимися;
- 6) постановка нового домашнего задания;
- 7) контроль и учет знаний, навыков и умений учащихся.

Все эти элементы одновременно редко встречаются на уроке, однако, используя их, можно составить любой урок.

Остановимся на некоторых структурных элементах урока.

Познание материала новой темы на уроке должно осуществляться в процессе активного учения школьников при интенсивном использовании их самостоятельного мышления. Сообщение готовых знаний нужно ограничить необходимым минимумом, а функцию преподавания свести в основном к организации и управлению активным, развивающим учением. К этому нужно стремиться постоянно, начиная с первого дня работы в школе, стремясь к поиску или разработке материалов, позволяющих высокоэффективным современным преподавание математики.

Необходимость *закрепления* основана на психологической закономерности процесса усвоения нового знания или способа действия. В ходе урока познание нового материала часто естественно переходит в его закрепление, а иногда и чередуется с ним. При программированном обучении закрепление обычно включается в саму программу. При проблемном обучении

закрепление осуществляется в процессе проверки и обсуждения самостоятельного решения проблемы и его результата. Аналогично происходит и в процессе самостоятельного познания нового материала. При лекционном изложении закреплению воспроизведением подвергаются лишь более трудные части темы.

К закреплению материала на данном уроке относят также и первое применение его к *решению задач*. Уже здесь надо практиковать самостоятельное решение, которое является основным методом обучения на тренировочных уроках, полностью отводимых для решения задач с целью выработки прочных навыков, умения применять теорию.

Естественное свойство человеческой психики постепенно забывать то, что было известно, требует регулярного и периодического *повторения ранее изученного*. В каждом классе параллельно с изучением нового материала проводится систематическое повторение основного материала. Этому уделяется особое внимание в выпускных классах, где в конце учебного года на повторение и подготовку к экзаменам отводится еще дополнительное учебное время. В конце большой темы (раздела) рекомендуется проводить урок обобщенного повторения. При этом повторяют не только главное из теории, но и решение основных видов упражнений или задач. При большом объеме нового материала не рекомендуется включать в домашнее задание повторение ранее изученного. Повторение должно быть творческим и разнообразным и вызывать интерес у школьников. Оно должно обобщать, систематизировать и углублять изученные ранее знания, открывать их новые качества, обеспечивать прочность усвоения.

2

На каждом уроке преследуется несколько дидактических целей, т.е. целей, которые формируют математические знания, умения и навыки. Однако среди этих целей одна является главной. В зависимости от главной дидактической цели выделяют основные *типы уроков* по математике:

- 1) урок первоначального усвоения новых знаний;
- 2) урок формирования умений и навыков в применении знаний;

- 3) урок итогового закрепления знаний через обобщающее повторение;
- 4) урок итогового контроля и учета знаний и навыков.

По математике примерно половину всех уроков составляют *уроки первоначального усвоения знаний*. Эти уроки делятся на два вида, которые условно можно назвать «урок новых знаний» и «комбинированный урок».

Комбинированный урок по математике обязательно содержит проверку правильности и сознательности выполнения домашнего задания и обычно с этого начинается. Учитель проверяет решение домашних задач (упражнений), а также усвоение материала прошлого урока и повторяемой темы путем индивидуальных заданий отдельным ученикам и фронтального опроса. Затем переходят к изучению нового материала, его закреплению и, наконец, к постановке домашнего задания по новой теме и по повторению ранее изученного. Достаточно полная структура комбинированного урока является его достоинством, но с ней связан и основной, весьма серьезный его недостаток: на таком уроке часто не хватает времени, причем от этого страдает, как правило, основная цель урока – первоначальное усвоение нового материала. Затянувшиеся проверка домашнего задания и опрос учащихся нередко вынуждают учителя воспользоваться традиционным методом сообщения готовых знаний, закрепление провести в спешке, в результате чего многие учащиеся не усвоят или слабо усвоят новый материал и окажутся, не готовы к самостоятельному решению домашних упражнений. К комбинированному уроку нужно прибегать лишь тогда, когда материал новой темы (теоретическая часть и упражнения, которые следует решить на этом же уроке) мал по объему и не вызовет затруднений в данном классе.

Поэтому большинство уроков по первоначальному усвоению новой темы строится по схеме *урока новых знаний*, отличной от схемы комбинированного урока. Урок новых знаний сразу нацелен на изучение и закрепление материала новой темы и начинается с краткого опроса, направленного лишь на подготовку учащихся к работе над новым материалом и к его усвоению на данном уроке. После того как учащиеся вспомнили необходимые формулировки и факты, сразу приступают к изучению нового материала, стремясь применять при этом современные методы обучения. Даже если при этом потребуется несколько больше времени, чем при сообщении готовых знаний, то такая дополнительная затрата окупается достигаемыми результатами. В активном, развивающем учении проходит как познание нового материала, так и закрепление его с применением, в частности,

самостоятельного решения упражнений учащимися. В итоге все учащиеся класса будут достаточно подготовлены к выполнению домашнего задания.

Уроки формирования умений и навыков в применении знаний, которые еще называют *тренировочными* уроками, имеют столь же широкое распространение в обучении математике, как и уроки новых знаний. На каждом тренировочном уроке большинство работ должно выполняться каждым учеником самостоятельно, и с этой целью задания для самостоятельной работы составляются в нескольких вариантах. Теоретический материал на этих уроках также должен «работать» при обосновании всех шагов решения и обеспечивать выработку сознательных умений и навыков, углубляя при этом понимание учащимися теоретических вопросов математики. Тренировочный урок, который полностью посвящен самостоятельному решению задач учащимися, называют уроком *самостоятельной работы*. Важность таких уроков следует из того, что умение решать задачи формируется в основном на тренировочных уроках, а без такого умения нет знания математики.

К урокам *итогового контроля и учета знаний и умений* по математике относят, прежде всего, уроки письменных контрольных работ. Задания такой работы даются в классе не менее чем в четырех вариантах. Эти задания содержатся в «Дидактических материалах». Там же имеются и наборы самостоятельных работ. По каждой теме (разделу) курса проводится итоговая контрольная работа, а по отдельным частям темы проводятся контрольные работы, рассчитанные либо на один урок, либо примерно на 20 минут. Эти краткосрочные контрольные работы рассчитаны на своевременное выявление и устранение пробелов по части темы, что позволяет подготовить учащихся класса к успешному выполнению итоговой контрольной работы. На следующем уроке после проведения контрольной работы нужно провести краткий анализ контрольной работы, отметить основные ошибки и недочеты, дать отдельным ученикам задания по работе над ошибками дома.

Иногда проводятся уроки *устного контроля и учета знаний и умений* в конце четверти или зачетные уроки по определенной теме. Однако основу устного контроля и учета знаний и умений составляет текущий учет, осуществляемый по возможности на каждом уроке и завершающийся выставлением оценок. Каждую оценку нужно объявить перед классом и мотивировать, надо использовать ее воспитательное значение. Для накопления текущих оценок следует стремиться опросить возможно большее число учащихся на каждом уроке.

Самостоятельная работа школьников – важнейший элемент в обучении математике, позволяющий систематично и прочно усваивать изучаемый материал, развивать творческую составляющую обучения, а также воспитывать у учащихся волевые качества, стремление к достижению цели и др.

В дидактике существуют различные классификации самостоятельных работ, но наиболее известным являются:

- 1) По степени самостоятельности учащихся.
- 2) По степени индивидуализации.
- 3) По дидактическим целям.
- 4) По источнику знаний.

По степени самостоятельности П.И. Пикадистый различает следующие виды самостоятельных работ:

- 1) Воспроизводящие самостоятельные работы по образцу.
- 2) Реконструктивно-вариативные.
- 3) Эвристические.
- 4) Творческие (исследовательские).

Самостоятельные работы первого вида позволяют овладеть основными умениями и знаниями и выполняются по жесткой схеме путем последовательных выполнений строго определенных действий. Эти работы направлены на овладение учебным материалом, но не обучают школьников творческой деятельности. Как правило, эти самостоятельные работы состоят из упражнений по образцам и алгоритмам.

Реконструктивно-вариативные самостоятельные работы состояются в нескольких вариантах и наряду со стандартными заданиями, или заданиями, выполняемыми по образцу, содержат задания более высокого уровня

самостоятельности и задания, выполнение которых требует нестандартного подхода, сообразительности.

Творческие самостоятельные работы – это такие работы, при выполнении которых, ученик открывает для себя новое. [1] Они позволяют формировать у учащихся интерес к математике, а также развивают математическое мышление.

К творческим работам относят [1]:

- 1) решение задачи или доказательство теоремы нестандартным, новым для ученика способом;
- 2) решение задачи несколькими способами;
- 3) составление задач самими учениками;
- 4) написание математических сочинений;
- 5) составление и выступление с докладом.

По дидактическим целям различают следующие виды самостоятельных работ:

- 1) работы, способствующие формированию математических понятий;
- 2) работы, направленные на закрепление нового материала;
- 3) работы, позволяющие формировать умения применять полученные знания при решении задач.

По источнику знаний самостоятельные работы делятся на следующие виды [1]:

- 1) работа с учебником;
- 2) работа со справочной или дополнительной литературой;
- 3) решение и составление задач;
- 4) сочинения и доклады.

Самообразование невозможно без самостоятельной работы и без умения работать с книгой. Поэтому, начиная с младших классов, необходимо систематически и целенаправленно учить школьников различным приемам получения информации с помощью книги, учебника.

Если тема урока в значительной степени знакома учащимся и не может вызвать у них больших затруднений, то учитель дает задание самостоятельно проработать ее на уроке по учебнику без предварительного изложения и объяснения. В средних классах новый материал урока разбивается на несколько частей, и каждая часть проверяется отдельно путем опроса после проработки ее по учебнику. В старших классах можно дать для проработки сразу всю тему урока, но при проверке результатов последовательно вызвать несколько учеников. Остальные учащиеся следят за ответом, подмечая неточности, пропущенные места или ошибки и делают свои замечания и дополнения. Во время выполнения самостоятельной работы с тестом, учитель наблюдает, как учащиеся пользуются рациональными способами работы, с которыми необходимо знакомить учащихся, начиная с младших классов и которые включают в себя такие моменты:

- 1) работа с определением;
- 2) чтение текста и выделение главного;
- 3) чтение текста и составление плана ответа;
- 4) пересказ прочитанного по плану;
- 5) ответы на вопросы в конце параграфа или раздела.

Во время проведения самостоятельного решения задач учитель оказывает индивидуальную помощь слабым ученикам, а также дает задания сильным. При необходимости кратко обсуждает с классом результат, отдельные этапы решения, его идею, план.

Самостоятельная работа школьников – основной метод их работы над учебным материалом при выполнении домашней работы. От успеха этой работы в значительной степени зависит успех всего обучения. Поэтому очень важно учителю обращать внимание на объем и структуру домашнего задания, чтобы оно с одной стороны было посильно каждому ученику и в тоже время способствовало повторению и закреплению приобретенных на уроке знаний и навыков. В этой связи учителю следует стремиться к дифференциации домашнего задания в зависимости от успехов и способностей ученика.

Эти требования реализуются студентом, прежде всего, при разработке модели современного урока в виде плана-конспекта урока, который подобно сценарию определяет деятельность учителя и учащихся в любой момент урока. При разработке такого плана-конспекта (для краткости его будем называть в дальнейшем "план") необходимо:

1. В соответствии с календарным (тематическим) планом и программой по математике определить тему урока и количество уроков, отводимых на изучение материала соответствующего пункта учебника.
2. Внимательно прочитать весь материал пункта учебника, ознакомиться с упражнениями (задачами, вопросами), продумать их решения.
3. Прочитать соответствующий пункт методического пособия для учителя, творчески использовать содержащиеся там рекомендации, дополнительные упражнения и варианты самостоятельной работы (если она предусмотрена на данном уроке) из книги “Дидактические материалы по ...”.
4. Распределить материал данного пункта учебника по отводимым на данный пункт урокам. Продумать и учесть связи данного урока с предыдущими и последующими уроками.
5. Сформулировать цели урока: главную дидактическую, а также – развивающую и воспитательную (конкретно).
6. Определить оборудование урока: наглядные пособия, технические средства обучения, дидактические материалы, измерительные и чертежные инструменты. При изложении хода урока указать, где и как это оборудование будет использовано.
7. Целесообразно выбрать тип, вид урока. Если изучается новый материал, то с учетом его объема и характера выбрать урок новых знаний или комбинированный урок.
8. В соответствии с типом, видом урока наметить его структуру, этапы урока, их последовательность, ориентировочно указать время, отводимое на каждый структурный элемент урока.
9. Определить методы обучения, которые целесообразно применить на данном уроке, выделив среди них главный. Этап урока, посвященный изучению (познанию) нового материала, рекомендуется спланировать с применением преимущественно проблемно-эвристических методов, обеспечивающих поисковое познание, активное учение.
10. В плане урока новых знаний формулируют вопросы (или небольшое практическое задание, устный счет), которые должны подготовить учащихся к изучению новой темы, и сразу переходят к этому изучению. Актуализация опорных знаний осуществляется и на других уроках.
11. На первом этапе комбинированного (и тренировочного) урока планируют проверку выполнения письменного домашнего задания и опрос учащихся по материалу предыдущего урока и по повторению. В плане

необходимо указать, что конкретно из домашнего задания и как будет проверено на уроке. Наметить в плане, сколько учащихся будет опрошено на оценку, сформулировать для каждого из них группу вопросов-заданий (или карточки-задания).

12. В плане должны быть вопросы по повторению, включаемые в группы вопросов для отдельных учащихся или во фронтальный опрос класса. Как можно чаще ставить вопрос “Почему?”, отражая его в плане урока.

13. При введении на уроке нового понятия или правила необходимо разработать в плане урока применение конкретно-индуктивного подхода, метода целесообразный задач, а при закреплении нового понятия практиковать составление его родословной, при повторении давать задания на классификацию понятий и другую творческую работу с ними, отражая это в плане.

14. При введении теоремы разработать в плане урока генетический подход к ней, применение лабораторного и других методов, позволяющих учащимся открыть для себя нужную закономерность, отраженную в формулировке теоремы.

15. Применяя проблемный подход, необходимо показать, как будет создана проблемная ситуация и выделена из нее проблема, какое конкретно участие в формулировке и решении проблемы примут учащиеся.

16. При изучении нового материала, доказательстве теоремы, фронтальном решении задачи для активизации процесса познания и учения эффективен метод эвристической беседы. В плане необходимо записать продуманную систему логически последовательных вопросов к классу и ожидаемые ответы учащихся. Сочетать эвристическую беседу с применением аналитических методов (анализа-поиска) при доказательстве или решении.

17. Конкретно указать, какие вопросы по новому материалу при его закреплении на уроке поставит перед классом учитель, какие другие формы закрепления, проверки понимания и усвоения материала учащимися будут применены.

18. Необходимо указать, какие упражнения (задачи) будут решены на уроке фронтально, коллективно и какие самостоятельно по вариантам (их рекомендуется дифференцировать по сложности). Планируя обучение решению задачи нового типа или нестандартной задачи, разработать в плане образец возможного совместного с учащимися аналитического поиска решения. Тренировочные упражнения также даются с решениями.

19. В плане урока новых знаний необходимо указать, что из прошлого домашнего задания и как будет при возможности проверено в заключительной части урока или тетради учащихся будут собраны для проверки.

20. В плане указывается, что задается на дом по новой теме и по повторению. Домашние упражнения (задачи) в плане решаются (полностью

или сокращенно), записываются при необходимости замечания по ним для учащихся.

21. Наряду с обязательным домашним заданием, к выполнению которого должны быть подготовлены на уроке все учащиеся класса, включается задача повышенной трудности для любителей математики.

22. В плане указывается, в какой форме будут подведены итоги урока.

23. В целях стимулирования домашней подготовки каждого ученика к каждому уроку систематически проводить на уроках 10-минутные фронтальные письменные опросы класса в двух вариантах и включать их задания в план урока. Целесообразно дифференцировать эти опросы по видам знаний: по формулировкам определений и предложений, по доказательствам, по решению задач (упражнений). Оценки по ним накапливаются в рабочей тетради учителя и в обобщенном виде выставляются в классный журнал.

24. Урок математики должен соответствовать принципам развивающего обучения, идеям педагогики сотрудничества, в нем необходимо творчески использовать опыт передовых педагогов.

25. В плане урока в виде примечания указываются:

- а) тип, вид урока, мотивируются возможные отступления от типовой структуры;
- б) главный метод данного урока;
- в) использованная литература.

5

Оценка знаний и умений учащихся – одна из главных составляющих учебного процесса в школе.. Однако в этой части учебного процесса с конца 80-х, начала 90-х годов начали накапливаться проблемы, вызванные как объективностью выставления оценки, так и небольшой шкалой отметок. Стало понятно, что действующая пятибалльная система оценки знаний не совсем отвечает требованиям школы. Уже тогда возникла более широкая шкала, когда учителя ставили в «свои» журналы и в дневники оценки 1, 2, 3–, 3, 3+, 4–, 4, 4+, 5–, 5. Такая же ситуация наблюдалась и на вступительных экзаменах в вузы, хотя конечная оценка ставилась по пятибалльной системе. Т.е. десятибалльная система возникла приблизительно еще в те годы.

Еще более эта проблема обострилась в начале 90–х годов, когда начали возникать учебные заведения нового типа, и одна и та же оценка означала совершенно разные уровни знаний в различных средних учебных учреждениях.

Все это привело к тому, что в 2002 году Министерством образования Республики Беларусь была введена десятибалльная система оценки знаний учащихся в учреждениях, обеспечивающих общее среднее и профессионально-техническое образование. Целями этой реформы были:

- 1) повышение объективности оценки и качества учебной деятельности учащихся через введение абсолютной шкалы оценки знаний и умений;
- 2) обеспечение социальной защищенности личности ученика;
- 3) реализация комплексного подхода в оценке учебных достижений учащихся через единство знаний, умений и навыков школьников с учетом индивидуальных свойств личности;
- 4) создание условий для стимулирования учебной деятельности учащихся;
- 5) формирование у учащихся объективной самооценки успехов в учебно-познавательной деятельности.

Как известно, учебный процесс является двусторонним и для учителя важно иметь обратную связь, чтобы оценить уровень усвоения знаний и умений учащихся на каждом этапе обучения.

Эта процедура получения прямой и обратной связи о ходе и результатах учебного процесса с использованием разнообразных педагогических приемов, методов измерений и оценки учебных достижений учащихся носит название *проверки или контроля знаний и умений учащихся*.

Оценка – это процесс оценивания степени соответствия реально достигнутых результатов с планируемыми целями, которые задаются образовательными стандартами и программой по математике.

Отметка – это результат процесса оценивания, выраженный в числах.

Оценка, как неотъемлемая часть учебного процесса, несет в себе определенные функции:

- 1) она должна способствовать формированию мотивации учебного процесса;
- 2) она должна развивать ценностное отношение к знаниям;
- 3) она должна способствовать формированию самостоятельности, самоконтроля, воспитывать положительные моральные качества личности (объективность, честность, настойчивость и др.)

Значение оценки проявляется в необходимости регулярно устанавливать степень достижения целей обучения, уровень усвоения знаний, сформированность навыков и умений, а также уровень развития индивидуальных и личностных свойств ученика.

В процессе оценивания необходимо придерживаться комплексного подхода, а потому оценке подлежат:

- 1) объем усвоенных знаний, их системность и обобщенность;
- 2) уровень развития умений и навыков, предусмотренных программой;
- 3) уровень развития индивидуальных свойств личности учащегося, которые отражают и характеризуют достижения учащегося в учебной деятельности.

Десятибалльная система оценки знаний и умений учащихся включает в себя определенные функции, которые помогают достичь поставленных перед этой системой целей.

Контролирующая функция позволяет на каждом этапе обучения объективно оценить уровень обучения как ученика в отдельности, так и класса в целом, а учителю помогает оптимально определить приемы, методы и средства обучения с учетом индивидуальных особенностей учеников.

Образовательная функция ориентирует учителя на использование разнообразных приемов и методов оценивания, которые активизируют учебную и познавательную деятельность учащихся, и позволяют подчеркнуть положительные достижения каждого ученика в соответствии с его возможностями.

Стимулирующая функция предполагает положительное оценивание результата усвоения материала и процесса его достижения, с учетом индивидуальных качеств и свойств личности, что снимает тревогу за полученную оценку и стимулирует учащегося к достижению более высоких результатов.

Диагностическая функция заключается в анализе учебных достижений каждого ученика, его успехов, недочетов, пробелов в знаниях с последующим исправлением выявленных недостатков. Эта же функция связана с индивидуальным подходом к каждому ученику через использование заданий, соответствующих определенным требованиям к знаниям и умениям и учебной деятельности.

Социальная функция предполагает объективную оценку знаний и умений учащегося с использованием шкалы отметок, что способствует достижению определенного уровня образования.

Как уже отмечалось, в процессе разработки новой системы оценки знаний и умений, была внедрена абсолютная шкала оценки учебных достижений

учащихся и соответствующая шкала отметок и уровней. Приведем ее в виде таблицы.

Уровни	Баллы	Показатели оценки
1.Низкий	1	Узнавание отдельных объектов изучения программного учебного материала, предъявленных в готовом виде (узнавание математических объектов, их свойств, признаков, математических формул, действий, правил, утверждений, моделей, составленных по условию задачи, других элементов математического знания, а также узнавание отдельных математических объектов в окружающей действительности)
	2	Различение объектов изучения программного учебного материала, предъявленных в готовом виде, и осуществление соответствующих практических действий (различение математических объектов, их свойств, признаков, математических формул, действий, правил, утверждений, моделей, составленных по условию задачи, других элементов математического знания и выделение заданных объектов изучения среди предъявленных и в окружающей действительности).
	3	Воспроизведение части программного учебного материала по памяти (описание математических объектов, перечисление их свойств и признаков; использование инструментов для измерения геометрических величин; выполнение заданий по образцу в

2.Удовлетворительный		одно-два действия)
	4	Воспроизведение большей части учебного материала по памяти (формулирование в устной или письменной форме свойств и признаков математических объектов, правил, утверждений, выделение при сравнении математических объектов общих и отличительных признаков без их объяснения; использование инструментов для проведения основных геометрических построений; выполнение заданий по образцу)
3.Средний	5	Осознанное воспроизведение значительной части программного учебного материала (описание математических объектов и связей между ними без их обоснования или доказательства, иллюстрация примерами окружающей действительности; решение типовых задач по заданному образцу)
	6	Осознанное воспроизведение в полном объёме программного учебного материала (описание математических объектов и связей между ними с элементами обоснования или доказательства; решение типовых задач по известному алгоритму, проверка результатов решения задач с использованием изученных методов)
4.Достаточный	7	Владение программным учебным материалом в знакомой ситуации (обоснование и доказательство математических утверждений при описании математических объектов с учётом внутрипредметных связей; решение типовых задач с использованием нескольких алгоритмов)
	8	Владение и оперирование программным учебным материалом в знакомой ситуации (развёрнутое описание математических

		объектов, раскрытие сущности математических понятий, правил, утверждений, доказательство математических утверждений, формулирование выводов, подтверждение примерами использования учебного материала в практической деятельности человека; самостоятельное решение типовых задач с полным их обоснованием)
5.Высокий	9	Оперирование программным учебным материалом в частично изменённой ситуации (уверенное владение и оперирование учебным материалом для выполнения учебных заданий с использованием различных способов, приёмов, методов и учётом внутрипредметных и межпредметных связей)
	10	Свободное оперирование программным учебным материалом, применение знаний и умений в незнакомой ситуации (владение приёмами математического моделирования; самостоятельные действия по описанию, объяснению и преобразованию математических объектов; нахождение рациональных способов решения задач, решение творческих задач)

Для оценки знаний и умений учащихся применяют следующие *основные виды контроля* результатов учебной деятельности учащихся: *поурочный, тематический, промежуточный, итоговый*.

Выбор *формы контроля* (устная, письменная и их сочетание) зависит от содержания и специфики изучаемого материала, продолжительности учебного времени, отводимого на изучение темы, этапа и планируемых результатов обучения, возрастных и индивидуальных особенностей учащихся.

Поурочный контроль осуществляется в устной и письменной формах или в их сочетании посредством проведения опроса (индивидуального, группового, фронтального) с использованием контрольных вопросов и заданий,

содержащихся в учебниках, учебных, учебно-методических пособиях и дидактических материалах, математических диктантов, собеседования, самостоятельных работ и других методов и средств контроля, которые определяются педагогом с учётом возрастных особенностей учащихся в целях получения объективной информации о качестве учебно-познавательной деятельности учащихся и их учебных достижениях.

Тематический контроль осуществляется посредством проведения самостоятельных и контрольных работ, других методов и средств контроля, которые определяются педагогом с учётом возрастных особенностей учащихся в целях получения объективной информации о качестве учебно-познавательной деятельности учащихся и их учебных достижениях.

При оценке результатов учебной деятельности учащихся учитывается характер допущенных ошибок: существенных и несущественных

К категории существенных относятся ошибки, свидетельствующие о том, что учащийся не знает формул, не усвоил математические понятия, правила, утверждения, не умеет оперировать ими и применять к выполнению заданий и решению задач.

К категории несущественных относятся отдельные ошибки вычислительного характера, погрешности в формулировке вопросов, определений, математических утверждений, небрежное выполнение записей, рисунков, графиков, схем, диаграмм, таблиц, а также грамматические ошибки в написании математических терминов.

Контрольная работа, самостоятельная работа, которые проводятся в рамках тематического контроля, должны включать по одному или по два задания в соответствии с показателями оценки результатов учебной деятельности учащихся при осуществлении контроля с использованием десятибалльной шкалы, установленными настоящими Нормами оценки результатов учебной деятельности.

Отметка за выполнение самостоятельных работ, которые проводятся в рамках тематического контроля, контрольных работ выставляется с применением следующих шкал: шкалы, определяющей максимальное количество баллов за каждое задание и шкалы перевода суммарного количества баллов, полученных учащимся за выполнение соответствующей работы, в отметки по десятибалльной системе.

Шкала 1, определяющая
максимальное количество
баллов за каждое задание,
если самостоятельная или
контрольная работа
содержит 5 заданий

Шкала 2 перевода суммарного
количества баллов, полученных
учащимся за выполнение
самостоятельной или контрольной
работы, которая содержит 5
заданий

Шкала 1

Номер задания	Максимальное количество баллов за выполнение задания
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
	Суммарный максимальный балл за выполнение всех заданий: 30

Шкала 2

Количество баллов, полученных учащимся	Отметка по десятибалльной шкале оценки результатов учебной деятельности учащихся
1	1
2	2
3—5	3
6—8	4
9—11	5
12—14	6
15—18	7
19—23	8
24—28	9
29—30	10

6

Кроме обязательных организационных звеньев процесса обучения, определяемых программой по математике, есть еще дополнительные звенья этого процесса, выбираемые учащимися по желанию. Это – *факультативные занятия и внеклассная работа*, предназначенные для любителей математики и находящиеся в определенной взаимосвязи с обязательным учебным процессом. Именно эффективная работа на уроке создает достаточное количество любителей математики, позволяющих отбирать наиболее способных в математике учащихся, которые являются основой для проведения успешной работы на факультативных и внеклассных занятиях.

Последние расширяют и углубляют знания, полученные на уроках математики, повышают интерес к предмету, способствуют развитию математических способностей, помогают учащимся правильно решить вопрос профориентации.

Введение факультативов тесно связано с идеей дифференцированного обучения, учитывающего индивидуальные склонности и способности учащихся и относится к концу 60-х годов прошлого века, когда при переходе на новые программы по математике, было выделено учебное время для факультативных занятий в 7 – 10-х классах, а также были созданы специальные физико-математические школы и математические классы (9 – 10-е) в отдельных школах. Впоследствии эта идея нашла широкое применение, и были созданы школы и классы с углубленным изучением других предметов. В 90-х годах прошлого столетия начали создаваться школы нового типа – лицеи, гимназии, колледжи. В них идея профильного обучения нашла свое дальнейшее развитие, как в плане углубления изучения отдельных предметов, так и их расширения по списку и по классам, когда углубленное изучение отдельных предметов начинается еще в начальной или базовой школах.

Однако, как показывает практика, углубленное изучение математики целесообразно начинать самое раннее с 8-го класса, а до этого проблему углубленного изучения математики и проблему развития интереса к предмету следует вести через систему факультативов и внеклассной работы.

Но даже если учащиеся и не выбрали изучение математики на более высоком уровне, не следует ограничиваться проведением только уроков. Среди этих учащихся также следует проводить работу по развитию интереса к математике и не только на уроках. Для этого и предусмотрена система факультативов.

Сейчас в республике проведена работа по разработке примерных планов и программ для факультативных занятий, начиная с 5-го класса. В национальном институте образования разработаны такие программы с расчета 1 час в неделю. Приведем пример такой программы.

Авторы называли этот факультатив «МАТЕМАТИКА ПОСЛЕ УРОКОВ» и он рассчитан для 5-7 классов общеобразовательных учреждений. Как сказано в преамбуле и пояснительной записке: «Дополнительный курс по математике направлен на развитие математических способностей. В ходе его

изучения учащиеся смогут не только познакомиться с логикой высказываний, теорией множеств, научиться решать сюжетно–логические и стратегические задачи, но поработать с головоломками и числовыми ребусами. Данный курс дополняет программу основного курса математики.»

«Предложенные программы факультативных занятий должны рассматриваться как ориентировочные. Учитель может по своему усмотрению менять содержание факультативных занятий, порядок изучения тем, исключать из рассмотрения отдельные темы или сокращать объем материала внутри тем. Распределение часов по темам не дается, что обеспечивает учителю возможность выбора тех тем, которые по каким-либо причинам для него более предпочтительны.»

Приведем содержание данного курса для 5 – 6 классов.

1. В мире чисел

Метрическая система мер. Римские цифры. Мир больших чисел. Старинные меры длины, площади, объема.

2. Восстановление чисел

Задачи на восстановление цифр и чисел в примерах на сложение и вычитание, умножение и деление. Головоломки с цифрами. Числовые ребусы. Магические квадраты.

3. Сюжетные логические задачи

Задачи, решаемые методом исключения с применением таблиц. Истинные и ложные высказывания. Рыцари, лжецы, хитрецы.

4. Стратегические задачи

Взвешивание монет и предметов. Переливание.

Математика в познавательных и развивающих играх. Выигрышные позиции. Симметрия. Анализ с конца. Возможность выбора правильной стратегии игр.

5. Задачи с геометрическим содержанием

Занимательные свойства геометрических фигур. Геометрические иллюзии. Рисование фигур на клетчатой бумаге. Разрезание фигур на равные части. Игры с пентамино. Вымащивание плоскости различными видами многоугольников. Задачи на построение замкнутых самопересекающихся ломаных (уникурсальные кривые). Лабиринты. Неравенство треугольника. Пифагор и теорема Пифагора. Из истории числа π . Длина окружности. Площадь круга. Геометрия в пространстве.

6. Элементы теории множеств

Множества. Элемент множества. Пустое множество. Подмножество. Равенство множеств. Операции над множествами. Решение некоторых задач с помощью теории множеств. Круги Эйлера.

7. Знакомство с теорией чисел

Множество натуральных чисел. Простые и составные числа. Решето Эратосфена. Взаимно простые числа. Признаки делимости на: 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11. Четность и нечетность. Последняя цифра. Простейшие диофантовы уравнения.

8. Комбинаторика.

Перечислительная комбинаторика.

Комбинация предметов. Правило умножения. Перестановки. Факториал. Размещения. Сочетания.

Комбинаторные задачи.

Принцип Дирихле. Обобщенный принцип Дирихле. Следствие из принципа Дирихле. Наверняка (или в худшем случае). Принцип Дирихле и делимость. Принцип Дирихле в геометрии. Окраска плоскости и ее частей. Таблицы.

Графы.

Понятие графа. Язык теории графов. Степень вершин. Подсчет числа ребер. Лемма о рукопожатиях. Деревья. Эйлеровы графы.

9. Текстовые задачи.

Натуральные числа.

Задачи для проверки сообразительности и внимательности. Задачи на движение. Задачи на движение по реке. Задачи на части. Задачи на нахождение двух чисел по их сумме и разности.

Дроби.

Вводные задачи. Нахождение части числа и числа по его части. Сложение и вычитание обыкновенных дробей. Умножение и деление обыкновенных дробей. Задачи на бассейны и совместную работу. Задачи, решаемые с конца.

Пропорции.

Задачи на прямую и обратную пропорциональность. Задачи на прямую и обратную пропорциональность трех величин.

Затем приводятся ожидаемые результаты и обширный список литературы.

Аналогично разработана программа факультатива для 7-го класса.

1. Элементы комбинаторики

Основные понятия комбинаторики: множество, подмножество, упорядоченное множество, пустое множество. Факториал числа. Перестановки, размещения, сочетания (с повторением, без повторения). Правила комбинаторного сложения и умножения. Алгоритмы решения комбинаторных задач. Принцип Дирихле. Инвариант. Элементы теории вероятности.

2. Делимость

Делимость с остатком. Инвариант (остаток от деления). Принцип Дирихле и делимость. Метод математической индукции и делимость.

3. Системы счисления

Перевод чисел из десятичной системы счисления в n -ю. Перевод чисел из n -й системы счисления в десятичную. Действия сложения, вычитания, умножения и деления. Приложение записи чисел в различных системах счисления.

4. Теория многочленов.

Разложения на множители, треугольник Паскаля. Деление многочленов, теория Ньютона. Деление многочлена на двучлен по схеме Горнера. Приводимые и неприводимые многочлены. Теорема Безу. Делимость многочлена $P(x)$ на $x - c$. Делимость $x^m - c^m$ на $x - c$, m – натуральное. Делимость $x^m - c^m$ на $x + c$, при $m = 2k$, k – натуральное. Делимость $x^m + c^m$ на $x + c$, при $m = 2k + 1$. Метод неопределенных коэффициентов в разложении на множители. Применение следствий из теоремы Безу и метода неопределенных коэффициентов при нахождении корней многочленов.

5. Текстовые задачи

Текстовые задачи: на числовые зависимости; на проценты; концентрацию смесей и сплавов; на совместную работу, производительность; на движение; с числом неизвестных большим числа уравнений; на исследование решений.

6. Решение геометрических задач.

Дополнительные сведения о равенстве фигур, третья группа аксиом. Сравнение отрезков и углов. Треугольники, свойства треугольников. Геометрическая арифметика, Рене Декарт. Золотые сечения, Леонардо да Винчи. Площади фигур. Неевклидова геометрия, Лобачевский.

7. Движение на плоскости.

Некоторые виды движений. Движения и положения. Группы симметрии (треугольника, четырехугольника, круга). Магические треугольники и квадраты.

8. Длина окружности и площадь круга.

Длина окружности. Радианная мера дуги и угла. Площадь круга и его частей.

Как видно из программы, данный факультативный курс тесно примыкает к изучаемому материалу на уроках, существенно дополняет этот материал и позволяет учителю достаточно успешно организовать занятия на

факультативе с разными целями: образовательной, развивающей, мотивационной, и др.

В заключение отметим, что недопустимо превращение факультативных занятий в практикум по подготовке к сдаче вступительных экзаменов в вуз. Конечно, эта цель также может преследоваться при занятиях на факультативе в старших классах, поскольку разнообразие задач вступительных экзаменов и по количеству и по идеям решений огромно. Но эта цель не должна быть преобладающей. Необходимо показывать применимость математических идей и способов решения задач не только в процессе решения конкурсных заданий, но и их разнообразное применение в других областях математики, решении задач из других наук и т.д. Тогда факультативные занятия будут способствовать успешной сдаче вступительных экзаменов благодаря повышению общей математической культуры учащихся, а не путем прямого «натаскивания» в решении задач вступительных экзаменов.

7

К дополнительным звеньям процесса обучения относится наряду с факультативными занятиями и внеклассная работа. В данной области накопился богатый опыт учителей, который частично отражен в литературе. Укажем основные формы внеклассной работы по математике:

- 1) олимпиады;
- 2) научно-практические конференции школьников (НПКШ);
- 3) турниры юных математиков (ТЮМ);
- 4) вечера, дни, недели математики в школе.

Олимпиада, НПКШ, ТЮМ, как формы внеклассной работы, являются итогом этой работы, а результаты выступления школьников – показателем качества этой работы. Олимпиада, НПКШ, ТЮМ – соревнования, которые стимулируют рост учащихся в смысле их математического образования, воспитывают у них математическое мышление, интерес к математике, настойчивость – желание не отстать от тех, кто успешно участвует в этих соревнованиях. Часто именно участие в этих мероприятиях и подготовка к ним побуждает учащихся к самостоятельной работе, вырабатывает умение работать с литературой.

Первые олимпиады для школьников были проведены в 1894 году в Венгрии. В СССР первая олимпиада по математике была проведена в 1934 году в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург), а в 1935 – в Москве. В 1967 году была проведена первая Всесоюзная олимпиада по математике в СССР. Первая международная олимпиада была проведена в 1959 году.

История Белорусских олимпиад начинается с 1950/51 года. С 1991 года, после распада СССР, начинается история национальных олимпиад. В 1992 году наша команда принимала участие в международной математической олимпиаде в качестве наблюдателя, а с 1993 года участвует в международных олимпиадах на общих основаниях.

Белорусская математическая олимпиада проходит в 4 этапа:

1 этап – школьные олимпиады, 2 этап – районные олимпиады, 3 этап – областные и Минская городская олимпиады, 4 этап – Республиканская олимпиада, по результатам которой формируется команда для участия в международной математической олимпиаде.

Учителю, который занимается подготовкой школьников к олимпиадам, следует иметь в виду, что в такой работе важна регулярность и знание тем и задач, предлагаемых школьникам на разных этапах.

НПКШ предполагает выступления учащихся с докладами по различным темам, связанных с математикой. Как правило, темы для исследований предлагаются школьникам учителем. Темы для исследований могут подбираться как из разных разделов математики, так и из разных источников. Это может быть обобщение какой-то задачи, либо решение проблемы, поставленной в математической статье и др.

НПКШ проходит в четыре этапа. Первый этап проводится в школе, если работ для проведения конференции достаточно. Лучшие из таких работ рекомендуются для участия на втором (районном) этапе. Затем проходит областной (Минский) этап, на котором лучшие работы рекомендуются для участия на заключительной Республиканской НПКШ. Лучшие работы на каждом этапе награждаются жюри.

ТЮМ проводится по следующей схеме. В сентябре месяце в периодической печати публикуются задачи, рекомендуемые организаторами турнира для решения в данном году. В школах, лицеях, гимназиях формируются команды, состоящие из 4-5 человек, которые начинают решать

предложенные задачи. Затем в декабре месяце проводится первый тур. Этот и другие туры проводятся по следующей схеме (на примере трех команд).

№ задачи № команды	1	2	3
1	Д	О	Р
2	Р	Д	О
3	О	Р	Д

Здесь обозначения Д – докладчик, О – оппонент, Р – рецензент.

В задачу докладчика входит изложение решения задачи. В задачу рецензента входит рецензия предложенного решения задачи, а в задачу оппонента входит оппонирование, как докладчику, так и рецензенту.

За каждое действие жюри начисляет каждой команде определенное количество баллов и по сумме набранных баллов определяется победитель, который выходит в следующий тур.

Вечера, дни, недели математики в школе проводится по определенному сценарию, который разрабатывается учителями школы и утверждается администрацией. Эти мероприятия включаются в план работы школы, который принимается на педсовете в августе месяце. Существуют различные сценарии таких мероприятий и отражены в литературе или их можно найти в библиотеке.

Однако, как показывает опыт, внеклассную работу по математике по-настоящему, творчески ведут лишь отдельные учителя, а поэтому в целом эта работа не обеспечивает решения стоящих перед ней задач. Именно поэтому сейчас школы начинают привлекать к ведению внеклассной работы преподавателей ВУЗов. Введение факультативных занятий по математике не отменяет внеклассной работы по этому предмету, и долг каждого учителя систематически и увлечено проводить ее.

8

К началу каждого учебного года учитель составляет календарный тематический план преподавания отдельно по каждой математической дисциплине в тех классах, в которых ему предстоит работать. Нет единой схемы составления такого планирования, но на наш взгляд, в нем должны быть следующие графы: темы и подтемы программного материала, количество учебных часов, даты исполнения, темы для повторения.

Приступая к работе, учитель внимательно изучает объяснительную записку к программе и программу по математике в данном классе. Надо хорошо знать и соответствующий учебник, объем и характер теоретического и задачного материала по каждому программному вопросу. В методических руководствах для учителя математики по каждому предмету и классу дается тематическое и поурочное планирование, содержащее примерную разбивку часов по темам. Учитель может внести небольшие изменения в эту разбивку, учитывая особенности данного класса. Наиболее удобно сначала составить календарный тематический план на первое полугодие, а затем (во время зимних каникул) – и на второе. К началу учебного года учитель получает подробную программу по своему предмету, разработанную методистами

Министерства образования РБ, которая после простановки в ней сроков исполнения будет служить календарным тематическим планом.

Подготовка учителя к уроку начинается с формулировки темы предстоящего урока и его цели. Если тема урока сформулирована таким образом, что она вполне определяет и цель урока, то в плане цель отдельно можно не записывать.

Отметим, что в плане должны быть сформулированы три цели урока: дидактическая (обучающая), развивающая, воспитательная.

Дидактическая цель может предусматривать:

- 1) Обеспечение и контроль понятий, фактов, правил, теорем, входящих в содержание темы урока;
- 2) Введение и формулировка каких-то понятий (если понятия достаточно сложные и для их введения и определения требуется много времени);
- 3) Закрепление умений и навыков учебной работы;
- 4) Формирование представлений, умений и навыков;
- 5) Закрепление и углубление знаний и умений учащихся;

Развивающая цель может предусматривать:

- 1) Развитие интеллекта, воли и познавательных интересов;
- 2) Развитие умения выделять в изучаемом главное, существенное (составление конспекта, плана, формирование умения сравнивать, обобщать);
- 3) Развитие у учащихся самостоятельности в учении;
- 4) Развитие у учащихся речи, памяти, интересов, умений преодолевать трудности.

Воспитывающая цель может предусматривать трудовое, профориентационное, нравственное, эстетическое воспитание.

Внимательно прочитав соответствующий текст учебника и ознакомившись с относящимися к нему упражнениями, продумав их решения, учитель обращается к соответствующей методической литературе.

Работая над задачным материалом учебника, учитель составляет примерную схему распределения задач по урокам, отводимым на данный пункт учебника. При этом рекомендуется придерживаться следующей примерной таблицы распределения задачного материала.

Вид материала Номер урока		1	2	3
Теоретический материал				
Задачи для решения в классе	На закрепление нового материала			
	На повторение			
	Для любителей математики			
Задачи для решения дома	На закрепление нового материала			
	На повторение			
	Для любителей математики			

Выяснив тип урока и его возможную структуру, учитель приступает к выбору методов обучения. При этом учитель должен выбрать такие методы, которые обеспечивают активное, развивающее учение школьников на уроке.

План урока следует писать подробно, придерживаясь при этом требований к современному уроку по математике (см. вопрос 4).

Рекомендуется разрабатывать планы нескольких последовательных уроков, что позволит обеспечить лучшую согласованность, преемственность, перспективность как в самих планах, так и в ходе процесса обучения. Так, например, составляя план только одного очередного урока, учитель не всегда может достаточно учесть потребности даже непосредственно следующего за ним урока, не говоря уже о дальнейших уроках. Потом обнаружится, что что-то нужно было задать для повторения, что-то решить, но момент уже упущен.

Отметим, что учитель в начале урока должен обратить внимание на готовность класса к началу урока, а в конце урока в нескольких словах подведет итог урока, сказав, чему же научились на данном уроке.

**ПЛАНЫ ПРАКТИЧЕСКИХ И СЕМИНАРСКИХ
занятий по учебной дисциплине
«Методика преподавания математики»**

Занятие 1. Предмет методики преподавания математики. История развития.

Занятие 2. Обучение учащихся математическим понятиям.

Занятие 3. Обучение учащихся решению задач.

Занятие 4, 5,6. Обучение учащихся решению текстовых задач.

Занятие 7. Контрольная работа 1.

Занятие 8,9,10. Обучение учащихся решению задач на построение на плоскости.

Занятие 11. Контрольная работа 2.

Занятие 12, 13. Математические предложения и теоремы в школьном курсе математики. Обучение учащихся доказательству теорем.

Занятие 14,15. Урок математики – основная форма организации обучения. План-конспект урока математики.

Занятие 16. Внеклассная работа учащихся по математике и методика ее проведения.

Занятие 17,18. Обучение учащихся решению задач на построение на проекционном чертеже.

Занятие 19. Контрольная работа 3.

Занятие 20. Развитие понятия числа в школьном курсе математики.

Занятие 21. Учение о функции в школьном курсе математики.

Занятие 22. Векторы и координаты в школьном курсе математики.

Занятие 23,24. Начала анализа в школьном курсе математики.

Занятие 25. Изучение геометрических величин в школьном курсе математики.

**КОНТРОЛЬ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО
УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ»**

Темы предлагаемых докладов:

1. Квадратные уравнения и уравнения к ним сводящиеся.
2. Изучение тригонометрических функций в школьном курсе математики.
3. Изучение показательной и логарифмической функций в школьном курсе математики.
4. Задачи повышенной сложности в школьном курсе математики.
5. Линия уравнений и неравенств в школьном курсе математики.
6. Развитие понятия числа в школьном курсе математики.
7. Функциональный подход к решению уравнений и неравенств.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа №1

ВАРИАНТ 1

1. Сумма двух трехзначных чисел, записанных одинаковыми цифрами, но в обратном порядке равна 1252. Найти эти числа, если сумма цифр каждого числа равна 14, а сумма квадратов цифр равна 84.
2. Имеются три слитка. Масса первого 5 кг, второго – 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 50% меди. Если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найти массу третьего слитка и процентное содержание в нем меди.
3. Группа студентов решила купить магнитофон ценой от 170 до 195 руб. Однако в последний момент двое отказались участвовать в покупке, и поэтому каждому из оставшихся пришлось внести на 1 руб больше. Сколько стоил магнитофон?

ВАРИАНТ 2

1. Из пункта А в пункт В вышел пешеход. Одновременно из В в А навстречу ему выехал мотоциклист. Встретив пешехода, мотоциклист подвез его до В и снова поехал а А. В итоге пешеход добрался до В в 4 раза быстрее, чем планировал. Во сколько раз быстрее прибыл бы мотоциклист в пункт А, если бы ему не пришлось подвозить пешехода?
2. Сплав меди с серебром содержит меди на 2 кг больше, чем серебра. Если к сплаву прибавить $\frac{9}{16}$ того количества серебра, которое в нем содержится, то процентное содержание серебра в новом сплаве будет равно процентному содержанию меди в первоначальном сплаве. Найти массу первоначального сплава.
3. При покупке нескольких одинаковых книг и одинаковых тетрадей за книги уплатили 10 р 56 коп, а за тетради – 56 коп. Книг купили на 6 штук больше, чем тетрадей. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1 руб превосходит цену одной тетради?

Контрольная работа №2

Вариант 1

1. Построить треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.
2. Дана прямая КТ и две точки А и В, не лежащие на ней. Найти на прямой такую точку Х, что $\angle AXK = \angle BXT$.

3. Даны отрезки a и b . Построить отрезок $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} + \sqrt{ab}$.

Вариант 2

1. Построить треугольник по периметру и двум углам.
2. Внутри угла ABC дана точка O . На сторонах угла найти такие точки X и Y , чтобы периметр треугольника OXY был минимальным.
3. Даны отрезки a , c и b . Построить отрезок $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{c} + \sqrt{ac}$.

Контрольная работа №3

Вариант 1

1. Построить сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , BC и DD_1 .
2. Построить сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB , CC_1 и $A_1 D_1$. Найти площадь сечения, если ребро куба равно a .

Вариант 2

1. Построить сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер $A_1 B_1$, CC_1 и $A_1 D_1$.
2. Построить сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через вершину B перпендикулярно диагонали $A_1 C$. Найти площадь сечения, если ребро куба равно a .

**ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ»**

1. Предмет и главные проблемы ДМ.
2. Проблемы содержания и структуры школьного курса математики.
3. Проблемы процесса обучения математике в школе.
4. Методология дидактических исследований и влияние смежных наук.
5. Понятие, его содержание и объем.
6. Родовидовые и другие отношения понятий.
7. Определение понятия.
8. Усвоение математических понятий.
9. Ошибки в определениях. Контрпримеры.
10. Классификация и родословная понятий.
11. Математические задачи и их классификация.
12. Роль задач в обучении математике.
13. Методы решения задач.
14. Задачи на построение на плоскости.
15. Геометрические методы решения задач на построение на плоскости.
16. Алгебраический метод решения задач на построение на плоскости.
17. Задачи на построение в пространстве.
18. Обучение решению задач.
19. Доказательство. Виды доказательств.
20. Дедуктивный метод доказательства. Силлогизмы.
21. Математическая индукция.
22. Синтетический метод доказательства.
23. Восходящий анализ.
24. Нисходящий анализ.
25. Доказательство противоречием. Обращение по разделению.
26. Обучение доказательству.
27. Геометрические места точек. Метод геометрических мест точек в задачах на построение.
28. Принципы обучения, как категории дидактики.
29. Принцип научности.
30. Принцип сознательности, активности и самостоятельности.
31. Принцип систематичности и последовательности.
32. Принцип доступности.
33. Принцип наглядности.
34. Принцип индивидуального подхода к учащимся.
35. Принцип прочности знаний.
36. Структурные элементы урока.
37. Типы (виды) уроков по математике.
38. Самостоятельная работа школьников.
39. Требования к современному уроку математики.
40. Оценка знаний и умений учащихся.

41. Факультативные занятия.
42. Внеклассная работа по математике.
43. Планирование работы и подготовка учителя к уроку.
44. Программированное обучение.
45. Проблемное обучение.
46. Эвристический метод обучения.
47. Традиционные методы обучения. Лекция.
48. Методика изучения уравнений и неравенств в школьном курсе математики.
49. Задачи на составление уравнений
50. Изучение функций в средней школе. Пропедевтика понятия функции в 5-6 классах. Понятие функции
51. Изучение основных элементарных функций: линейной, квадратичной, степенной, показательной и логарифмической, тригонометрических
52. Элементы математического анализа и его приложений в школьном курсе математики. Понятие производной функции, ее геометрический и механический смысл
53. Использование производной для исследования свойств функций
54. Применение производной для решения задач
55. Применение геометрических преобразований к решению задач.
56. Метод координат в курсе геометрии
57. Приложение векторов к решению задач
58. Изучение величин в школьном курсе математики. Теория измерений.

**СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ
«МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ»**

1. Ананчанка К.А. Агульная методыка выкладання матэматыкі ў школе: вучэб. дапаможнік. – Мн.: Універсітэцкае, 1997. – 94 с.
2. Дидактика средней школы /Под ред. М.Н.Скаткина.- М.: Просвещение, 1982. – 324 с.
3. Действующие учебники и учебные пособия для средней школы.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: учеб. пособие /А.Я.Блох [и др.]; сост. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
5. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие /А.Я.Блох [и др.]; сост. В.Л.Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
6. Метельский Н.В. Дидактика математики. –Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 255 с.
7. Новік І.А. Практыкум па методыцы выкладання матэматыкі. Мн.,: Адукацыя і выхаванне, 1997. – 244 с.
8. Оконь В. Введение в общую дидактику. - М.: «Высшая школа», 1990. – 382с.
9. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 267 с.
10. Столяр А.А. Педагогика математики: учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 414 с.
11. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е.И.Ляшенко [и др.]; под ред. Е.И.Ляшенко. – М.: Просвещение, 1988. – 224 с.
12. Глейзер Г.И. История математики в школе: VII–VIII классы: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
13. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX – X классы: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.
14. Василевский А.Б. Обучение решению задач. – Мн.: Вышэйшая школа, 1981. – 256 с.
15. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М.: Просвещение, 1990. – 224 с.
16. Зачеты в системе дифференцированного обучения математике. /А.О.Денищева [и др.] – М.: Просвещение, 1993.
17. Методические журналы: «Матэматыка: праблемы выкладання», «Математика в школе», «Математика для школьников», «Квант», «Репетитор» и др.
18. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
19. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.
20. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

**Министерство образования Республики Беларусь
Учебно-методическое объединение
по естественнонаучному образованию**

УТВЕРЖДАЮ

Первый заместитель Министра образования
Республики Беларусь

_____ А.И. Жук

«__» _____ 2011 г.

Регистрационный № ТД-_____/тип.

**МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ
Типовая учебная программа
для высших учебных заведений по специальности
1-31 03 01 «Математика (по направлениям)»,
направлению специальности 1-31 03 01-02
«Математика (научно-педагогическая деятельность)»**

СОГЛАСОВАНО

Председатель
учебно-методического
объединения
по естественнонаучному
образованию

_____ В.В.Самохвал

«__» _____ 2011 г.

СОГЛАСОВАНО

Начальник Управления высшего и
среднего специального образования

_____ Ю.И.Миксюк
«__» _____ 2011 г.

Проректор по учебной и
воспитательной работе
Государственного учреждения
образования «Республиканский
институт высшей школы»

_____ В.И.Шупляк
«__» _____ 2011 г.

Эксперт-нормоконтролер

_____ 2011 г.

Минск 2011

СОСТАВИТЕЛЬ:

Ю.Д.Чурбанов, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физ.-мат. наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Кафедра алгебры и геометрии учреждения образования “Белорусский государственный педагогический университет имени М. Танка”;

Л.А. Латотин, доцент кафедры методики преподавания математики учреждения образования “Могилевский государственный университет имени А.А.Кулешова», кандидат педагогических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ В КАЧЕСТВЕ ТИПОВОЙ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета (протокол № 2 от 02 сентября 2010г.);

Научно-методическим советом Белорусского государственного университета (протокол № 1 от 03 ноября 2010г.);

Научно-методическим советом по математике и механике Учебно-методического объединения по естественному образованию

(протокол № 6 от 14 сентября 2010г.).

Ответственный за выпуск: Ю.Д. Чурбанов.

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методика преподавания математики является одним из основных курсов цикла общепрофессиональных и специальных дисциплин, читаемых студентам-математикам педагогического потока в университете. Основными целями дисциплины «Методика преподавания математики» являются:

- 4) обеспечение глубокого понимания студентами научных и психолого-педагогических основ структуры и содержания курса математики в средних учебных заведениях, методических идей, заложенных в данном курсе;
- 5) выработка у студентов практических навыков проведения учебной работы на уровне требований, предъявляемых реформой средней школы;
- 6) формирование у будущих учителей умения решать проблемы преподавания математики, а также навыков самостоятельного анализа процесса обучения.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи**:

- раскрывается значение и роль математики в системе современных знаний и в системе образования на разных ее ступенях;
- формируются знания об основных понятиях методики преподавания математики, о формах и методах обучения математике;
- студенты знакомятся с содержанием программы по математике на уровне общего среднего образования, с учебниками и учебными пособиями по предмету, УМК(учебно-методическими комплексами);
- закладываются основы практических умений, необходимых для преподавания математики, ведения внеклассной работы, стимулируется стремление к самообразованию.

Для этого вначале рассматриваются вопросы, относящиеся к общей методике: главные проблемы дидактики математики, ее предмет и связь с другими науками; понятие, его содержание и объем, определение понятия; математические задачи, их роль в обучении математике, основные методы решения задач; теоремы школьного курса математики, способы их доказательства и методика их изучения; основные принципы дидактики математики; организация процесса обучения в школе; внеклассная работа по математике. Заканчивается изучения общей методики рассмотрением программы по математике, учебников и учебных пособий.

Затем рассматриваются вопросы частных методик, которые включают в себя линию уравнений и неравенств, функций и элементов математического анализа, геометрические преобразования, координаты и теорию измерений.

При изложении материала используются лекционные, лабораторные, практические и семинарские занятия.

Во время чтения лекций дается характеристика изучаемых проблем, возможные подходы к их решению, а также закладываются основы профессионального отношения к указанным в программе вопросам.

Практические занятия направлены на закрепление лекционного материала и на формирование навыков практического использования полученных знаний.

Основными методами обучения, отвечающими целям изучения дисциплины, являются:

- элементы проблемного обучения (проблемное изложение, вариативное изложение, частично-поисковый метод), реализуемые на лекционных занятиях;
- элементы учебно-исследовательской деятельности, реализуемые на практических занятиях и при самостоятельной работе;
- коммуникативные технологии (дискуссии, учебные дебаты), реализуемые на семинарских занятиях.

В каждом семестре по дисциплине рекомендуется проведение не менее одной контрольной работы. В ходе реализации программы дисциплины предусмотрена учебно-исследовательская работа студентов, результаты которой представляются в виде курсовых или дипломных работ. Учебно-исследовательская работа студентов предусмотрена также во время прохождения педагогической практики.

Для изучения дисциплины необходимо опираться на знание таких дисциплин как «Педагогика», «Психология», дисциплины вузовского компонента («Практикум по решению задач»).

В соответствии с образовательным стандартом по специальности 1-31 03 01 «Математика (по направлениям)», направлению специальности 1-31 03 01 -02 «Математика (научно-педагогическая деятельность)» в результате изучения дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и принципы дидактики математики;
- структурные элементы урока и основные требования к ним;
- виды планирования деятельности учителя;
- методы обучения школьной математике;
- структуру и содержание учебников по математике;

уметь:

- разрабатывать и составлять план-конспект урока, факультатива, кружка;
- составлять планирование работы учителя;
- проводить анализ плана-конспекта урока;
- проводить анализ проведения урока, факультатива.

Всего, согласно типовому учебному плану, на изучение методики преподавания математики отводится 240 часов, в том числе 102 аудиторных: лекции – 52 часа, практические занятия – 28 часов, семинарские занятия – 22 часа.

Примерный тематический план

№ п/п	Наименование темы	Количество часов		
		Лекц ии	Практиче ские занятия	Семинар ские занятия
1.	Введение.	4		
	Раздел I. Общая методика			
2.	Методика введения и изучения математических понятий.	4	2	2
3.	Задачи в школьном курсе математики.	2		2
4.	Математические предложения и методика их изучения.	4	4	2
5.	Принципы дидактики математики	2		2
6.	Организация обучения математике.	6	4	2
7.	Методы обучения математике.	4	2	2
8.	Факультативные занятия по математике.	2		2
9.	Программа по математике. Учебники математики средней школы.	4	2	2
	Раздел II. Методика преподавания основных тем курса математики			
1.	Методика изучения уравнений и неравенств в школьном курсе математики.	4	4	
2.	Изучение функций в средней школе.	4	4	2
3.	Элементы математического анализа и его приложений в школьном курсе математики.	4	2	2
4.	Применение геометрических преобразований к решению задач.	4	4	
5.	Изучение величин в школьном курсе математики. Теория измерений.	4		2
Всего аудиторных часов		52	28	22
ИТОГО:		102		

Содержание дисциплины «МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ»

1. Введение

Предмет методики математики. История развития. Связь с другими науками. Цели обучения математике в средней школе.

Раздел I. Общая методика

2. **Методика введения и изучения математических понятий.** Структура понятий: содержание и объём, связь между ними. Классификация понятий. Введение и развитие понятий при обучении математике в средней школе.
3. **Задачи в школьном курсе математики.** Классификация задач. Роль задач в обучении математике. Обучение общим методам решения задач.
4. **Математические предложения и методика их изучения.** Теоремы. Методы доказательства теорем. Аксиомы. Аксиоматический метод. Изучение и усвоение теорем в процессе обучения математике.
5. **Принципы дидактики математики.** Принципы как категории дидактики. Принципы научности, наглядности, доступности, систематичности, индивидуального подхода к учащимся, прочности знаний и др.
6. **Организация обучения математике.** Урок математики, его основные элементы. Виды (типы) уроков по математике. Современные требования к уроку. Подготовка учителя к уроку. Схемы анализа урока математики. Формы и методы проверки знаний учащихся. Организация самостоятельной работы учащихся. Обучение работе с учебником. Дифференцированный и индивидуальный подход при обучении математике.
7. **Методы обучения математике.** Наблюдение и опыт, сравнение и аналогия, обобщение, абстрагирование и конкретизация в процессе обучения математике. Применение в преподавании математики индукции и дедукции, анализа и синтеза, проблемного обучения, элементов программированного обучения.
8. **Факультативные занятия по математике.** Внеклассная и внешкольная работа по математике (виды, цели и задачи).
9. **Программа по математике. Учебники математики средней школы.** Анализ программы по математике на уровне общего среднего образования. Характеристика учебников и учебных пособий по математике.

Раздел II. Методика преподавания основных тем курса математики

1. **Методика изучения уравнений и неравенств в школьном курсе математики.** Различные трактовки понятия «уравнение». Виды уравнений с одним неизвестным и способы их решения. Методика введения понятий «больше», «меньше», «числовое неравенство», «неравенство с одной переменной». Способы доказательств и решений неравенств. Функциональный метод решения уравнений и неравенств. Решение текстовых задач с помощью уравнений и неравенств.
2. **Изучение функций в средней школе.** Пропедевтика понятия функции. Понятие функции. Изучение основных элементарных функций: линейной, квадратичной, степенной, показательной и логарифмической, тригонометрических.
3. **Элементы математического анализа и его приложений в школьном курсе математики.** Понятие производной функции, ее геометрический и механический смысл. Использование производной для исследования свойств функций. Применение производной для решения задач на оптимизацию.
4. **Применение геометрических преобразований к решению задач.** Виды преобразований плоскости и их приложения к решению задач планиметрии и алгебры. Применение геометрических преобразований к решению задач на построение на плоскости. Метод координат в курсе геометрии. Приложение векторов к решению задач.
5. **Изучение величин в школьном курсе математики. Теория измерений.** Методика формирования понятия геометрических величин (длина, мера угла, мера дуги, площадь, объем). Обоснование формул площади прямоугольника и объема прямоугольного параллелепипеда. Формулы площадей плоских фигур. Формулы объемов многогранников и фигур вращения.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Ананчанка К.А. Агульня методика выкладання математики ў школе: вучэб. дапаможнік. – Мн.: Універсітэцкае, 1997. – 94 с.
2. Дидактика средней школы /Под ред. М.Н.Скаткина.- М.: Просвещение, 1982. – 324 с.
3. Действующие учебники и учебные пособия для средней школы.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: учеб. пособие /А.Я.Блох [и др.]; сост. Р.С.Черкасов, А.А.Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.
5. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб. пособие /А.Я.Блох [и др.]; сост. В.Л.Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.

6. Метельский Н.В. Дидактика математики. –Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 255 с.
7. Новік І.А. Практыкум па методыцы выкладання матэматыкі. Мн.,: Адукацыя і выхаванне, 1997. – 244 с.
8. Оконь В. Введение в общую дидактику. - М.: «Высшая школа», 1990. – 382с.
9. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе: учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 267 с.
10. Столяр А.А. Педагогика математики: учеб. пособие. – Мн.: Выш. шк., 1986. – 414 с.
11. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е.И.Ляшенко [и др.]; под ред. Е.И.Ляшенко. – М.: Просвещение, 1988. – 224 с.

Дополнительная

1. Глейзер Г.И. История математики в школе: VII–VIII классы: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
2. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX – X классы: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1983. – 351 с.
3. Василевский А.Б. Обучение решению задач. – Мн.: Вышэйшая школа, 1981. – 256 с.
4. Груденов Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики.– М: Просвещение, 1990. – 224 с.
5. Зачеты в системе дифференцированного обучения математике. /А.О.Денищева [и др.] – М.: Просвещение, 1993.
6. Методические журналы: «Матэматыка: праблемы выкладання», «Математика в школе», «Математика для школьников», «Квант», «Репетитор» и др.
7. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Учпедгиз, 1961. – 207 с.
8. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. 464 с.
9. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

ВОСПИТАТЕЛЬНО-ИДЕОЛОГИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА «МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ»

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Методика преподавания математики» составлен в соответствии с основными направлениями государственной молодежной политики, отраженными в Концепции непрерывного воспитания детей и учащейся молодежи в Республике Беларусь, в Плане идеологической и воспитательной работы БГУ на 2012-2013 годы и других государственных программах, нормативно-правовых и инструктивно-методических документах, определяющих приоритетные направления идеологии белорусского государства.

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Методика преподавания математики» способствует созданию условий для формирования нравственно зрелой, интеллектуально развитой личности обучающегося, которой присущи социальная активность, гражданская ответственность и патриотизм, приверженность к университетским ценностям и традициям, стремление к профессиональному самосовершенствованию, активному участию в экономической и социально-культурной жизни страны.

Основными **задачами** идеологической и воспитательной составляющей Учебно-методического комплекса по дисциплине «Методика преподавания математики» являются:

1. Максимальное использование потенциальных возможностей кафедры по формированию гражданско-правовой устойчивости профессорско-преподавательского состава и студентов.
2. Содействие становлению личности, духовно-нравственное и интеллектуальное развитие студентов.
3. Совершенствование информационного сопровождения организации жизнедеятельности студентов, содействие социальной адаптации, оказание им помощи в усвоении и выполнении учебного материала, установленных норм и правил внутреннего распорядка, прав и обязанностей.