

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

А. ГАЗИЕВ, И. ИСРАИЛОВ, М. ЯХШИБОВЕВ

**МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН
МИСОЛ ВА МАСАЛАЛАР**

2 - ҚИСМ

(ўқув қўлланма)

ТОШКЕНТ – 2012

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 1 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

А. Газиёв, И. Исраилов, М. Яхшибоев. «**Математик анализдан мисол ва масалалар**», 2-қисм (ўқув қўлланма). Тошкент. "Фан ва технологиялар" нашриёти 2012 й.

Ушбу қўлланма математик анализнинг аниқмас интеграллар, аниқ интеграллар ва уларнинг тадбиқлари ҳамда кўп ўзгарувчили функциялар мавзулари бўйича талабаларда мисол ва масалаларни мустақил ечиш кўникмасини ҳосил қилишга мўлжалланган.

Қўлланманинг ҳар бир параграфида, аввало мавзунинг назарий қисмидан қисқача ахборот берилган, сўнгра мавзуга мос типик мисол ва масалалар батафсил ечиб кўрсатилган ҳамда мустақил ишлаш учун етарли миқдорда мисол ва масалалар жавоблари билан берилган.

Ўқув қўлланма бакалавриятнинг «математика», «механика», «амалий математика ва информатика», «физика» йўналишлари ва техника йўналишларининг «Олий математика» чуқурлаштирилган дастур асосида ўқитиладиган талабалари ҳамда ўқитувчилар учун мўлжалланган.

Тақризчилар:

Физика-математика фанлари доктори, проф.

Физика - математика фанлари доктори

Физика - математика фанлари номзоди, доц.

А. Солеев

А.Жалилов

У. Нарзуллаев

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 2 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мундарижа

Сўз боши

I-боб. Аниқмас интеграллар

1-§. Бошланғич функция, аниқмас интеграл тушунчалари. Аниқмас интегралнинг содда хоссалари. Аниқмас интеграллар жадвали

1.1. Бошланғич функция тушунчаси. Аниқмас интеграл

1.2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари. Элементар функцияларнинг аниқмас интеграллари жадвали

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

2- §. Интеграллаш усуллари

2.1. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули

2.2. Бўлаклаб интеграллаш усули

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

3-§. Рационал функцияларни интеграллаш

3.1. Номаълум коэффициентлар усули

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 3 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3.2. Интегралнинг рационал қисмини ажратишда Остроградский усули

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

4-§. Баъзи иррационал ифодаларни интеграллаш

4.1. $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots, x^\nu) dx$ кўринишдаги ифодаларни интеграллаш

4.2. $\int R[x, (ax+b)^\alpha, (ax+b)^\beta, \dots, (ax+b)^\nu] dx, \int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\nu\right] dx$

$(a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - cb \neq 0)$ кўринишдаги ифодаларни интеграллаш

4.3. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ кўринишдаги ифодаларни интеграллаш

4.4. $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ ($a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0$) кўринишдаги ифодаларни интеграллаш

4.5. Биномиал дифференциалларни интеграллаш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

5-§. Таркибида тригонометрик функциялар қатнашган ифодаларни интеграллаш

5.1. $\int R(\sin x; \cos x) dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 4 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5.2. $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш

5.3. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

II-боб. Аниқ интеграл

6-§. Аниқ интегралнинг таърифлари

6.1. Риман интеграли

6.2. Дарбу йиғиндилари

6.3. Аниқ интеграл ёрдамида лимитларни ҳисоблаш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

7-§. Аниқ интегралнинг мавжудлиги. Интегралланувчи функцияларнинг синфлари. Аниқ интегралнинг хоссалари

7.1. Аниқ интегралнинг мавжудлиги

7.2. Интегралланувчи функцияларнинг синфлари

7.3. Аниқ интегралнинг хоссалари

Мустақил ечиш учун мисоллар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 5 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

8-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш

- 8.1. Ньютон-Лейбниц формуласи
- 8.2. Аниқ интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш усули
- 8.3. Бўлаклаб интеграллаш усули

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

III-боб. Аниқ интегралнинг тадбиқлари

9-§. Аниқ интеграл ёрдамида текис шаклнинг юзини ҳисоблаш

- 9.1. Декарт координаталар системасида берилган текис шаклнинг юзини ҳисоблаш
- 9.2. Тенгламаси параметрик шаклда берилган эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисоблаш
- 9.3. Тенгламаси қутб координаталар системасида берилган эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисоблаш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 6 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

10-§. Аниқ интеграл ёрдамида чизиқнинг ёйи узунлигини ҳисоблаш

10.1. Декарт координаталар системасида берилган чизиқнинг ёйи узунлигини ҳисоблаш

10.2. Қутб координаталар системасида берилган чизиқнинг ёйнинг узунлигини ҳисоблаш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

11-§. Аниқ интеграл ёрдамида айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш

11.1. Декарт координаталар системасида берилган айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш

11.2. Қутб координаталар системасида берилган айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

12-§. Аниқ интеграл ёрдамида айланма жисм сиртининг юзини ҳисоблаш

12.1. Декарт координаталар системасида берилган айланма сирт юзини ҳисоблаш

12.2. Қутб координаталар системасида берилган айланма сиртнинг юзини ҳисоблаш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 7 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

13-§. Аниқ интегралнинг механика масалаларига тадбиғи

13.1 Силлиқ эгри чизиқнинг статик моменти ва оғирлик маркази

13.2. Текис фигуранинг статик моментлари ва оғирлик маркази

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

14-§. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

14.1. Тўғри тўртбурчаклар усули

14.2. Трапециялар усули

14.3. Параболалар усули

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

15-§. Аниқ интегралнинг физика масалаларига тадбиқлари

15.1. Жисмнинг босиб ўтган йўли

15.2. Куч бажаргич иш

15.3. Иқтисодий ҳисоб-китобларга тадбиқлар бўйича мисоллар

15.4. Электр энергиясининг сарфланишини башорат қилиш (олдиндан айтиш)

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 8 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

IV-боб. Кўп ўзгарувчили функциялар

16-§. Евклид текислиги ва Евклид фазоси. Евклид фазосидаги муҳим тўпламлар

16.1 Евклид текислиги ва Евклид фазоси

16.2. Евклид фазосидаги муҳим тўпламлар

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

17-§. Кўп ўзгарувчили функция тушунчаси ва унинг аниқланиш соҳаси

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

18-§. R^m фазода сонлар кетма – кетлиги ва унинг лимити

Мустақил ечиш учун мисоллар

19-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг лимити

19.1. Кўп ўзгарувчили функциянинг лимитининг таърифлари

19.2. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар

19.3. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари

19.4. Такрорий лимитлар

Мустақил ечиш учун мисоллар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 9 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

20-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги

- 20.1. Узлуксиз функциянинг таърифлари
- 20.2. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги
- 20.3. Нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг локал хоссалари
- 20.4. Узлуксиз бўлган функцияларнинг глобал хоссалари
- 20.5. Кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

21 -§. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари

- 21.1. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари
- 21.2. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциалланувчанлиги шарти
- 21.3. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали
- 21.4. Кўп ўзгарувчили мураккаб функциянинг ҳосиласи
- 21.5. Дифференциал шакли инвариантлигининг сақланиши
- 21.6. Йўналиш бўйича ҳосила. Градиент

Мустақил ечиш учун мисоллар

Т и т у л в а р а к
М у н д а р и ж а
1 - б о б
2 - б о б
3 - б о б
4 - б о б
И л о в а л а р





О р к а г а

С а х и ф а 10 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

22-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари

22.1. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар

22.2. Юқори тартибли дифференциаллар

22.3. Мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари

22.4. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема

22.5. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

23-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумлари

23.1. Функциянинг максимум ва минимум қийматлари

23.2. Функция экстремумининг зарурий шарти

23.3. Функция экстремумининг етарли шарти

23.4. Кўп ўзгарувчили функциянинг шартли экстремуми

23.5. Кўп ўзгарувчили функциянинг энг кичик ва энг катта қийматлари

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 11 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24-§. Ошкормас функциялар

24.1. Ошкормас функция ҳақида тушунча

24.2. Ошкормас функциянинг мавжудлиги

24.3. Ошкормас функциянинг ҳосиласи

24.4. Кўп ўзгарувчили ошкормас функциялар

24.5. Тенгламалар системаси билан аниқланадиган ошкормас функциялар

Мустақил ечиш учун мисоллар

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

Иловалар

Предмет кўрсаткич

Адабиётлар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 12 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Сўз боши

Мазкур қўлланма «Математик анализ» фани бўйича ўқув-услубий мажмуанинг таркибий қисмларидан бири бўлиб, унда математик анализнинг аниқмас интеграллар, аниқ интеграллар ва уларнинг тадбиқлари ҳамда кўп ўзгарувчи функциялар бўлимлари бўйича асосий тушунчалар келтирилган.

Ўқув қўлланма тўрт бобдан иборат. Биринчи бобда бошланғич функция ва аниқмас интеграл қаралган ҳамда интеграллаш усулларининг барчаси очиқ берилган. Қўлланманинг иккинчи боби аниқ интеграл, уни ҳисоблаш усуллари бўйича мавзуларни ўз ичига олган. Учинчи бобда аниқ интегралнинг физика, механика, иқтисодиёт каби соҳаларда учрайдиган масалаларнинг ечилишига тадбиқлари қаралган. Охирги, тўртинчи бобда R^n фазо, кўп ўзгарувчи функциялар, уларнинг лимити, узлуксизлиги, хусусий ҳосилалари, дифференциаллари, юқори тартибли хусусий ҳосилалари, экстремумлари қаралган.

Ўз навбатида, ҳар бир боб тегишли параграфларга бўлинган бўлиб, ҳар бир параграф мавзуга таъаллуқли асосий таърифлар, тасдиқлар, теоремаларни ўз ичига олади, шунингдек, уларнинг ҳар бири анъанавий мисолларни батафсил таҳлил ёрдамида ечиш орқали намоиш қилинган. Қўлланмада жами 198 та мисол ва масалалар ечилган, 1566 та мустақил ечиш учун мисол ва масалалар тавсия

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 13 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

қилинган ҳамда уларнинг жавоблари берилган. Ҳозирги вақтда амалиётда бир неча яхши ривожланган математик дастурлар (Mathcad, Maple, Mathematica, Matlab ва ҳ.к.) математик масалаларни компьютер имкониятларидан фойдаланиб ечишда самарали натижалар бермокда. Шу анъанадан четда қолмаслик учун, қўлланмада баъзи бўлимлар бўйича мисол ва масалалар ечишда «Maple» тизимининг қўлланилиши ва унинг қулайликлари намоёиш этилган.

Ушбу қўлланмани ёзишга муаллифларни ундаган нарсa, уларнинг кўп йиллар мобайнида Самарқанд давлат университетида математик анализ курсидан олиб борган маъруза ва амалий машғулотларида орттирган тажрибаси натижасидир. Ўйлаймизки, қўлланма ўз ўқувчиларини топади ва бошқа мавжуд ўқув адабиётлари қаторида математик анализ курсининг айтиб ўтилган бўлимлари бўйича уларга билимларини оширишга кўмак беради.

Ўқув қўлланма ҳақидаги фикр мулоҳазалар, ундаги мавжуд камчиликлар бўйича таклифларни муаллифлар мамнуният билан қабул қиладилар.

Муаллифлар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 14 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

I-бoб. АНИҚМАС ИНТЕГРАЛЛАР

1-§. Бошланғич функция, аниқмас интеграл тушунчалари. Аниқмас интегралнинг содда хоссалари. Аниқмас интеграллар жадвали.

1.1. Бошланғич функция тушунчаси. Аниқмас интеграл.

Ҳаракат бошлангандан ўтган t вақт ичида моддий нуқта $s(t)$ йўл ўтган бўлсин, у ҳолда, $v(t)$ оний тезлик, $s(t)$ функциянинг ҳосиласига тенг, яъни $v(t) = s'(t)$. Амалиётда тескари масала ҳам учрайди: моддий нуқтанинг $v(t)$ ҳаракат тезлиги берилганда, унинг босиб ўтган $s(t)$ йўлини топинг. Амалиётдаги бундай масала, $f(x)$ функциянинг *бошланғич функцияси* тушунчасига олиб келади.

$f(x)$ ва $F(x)$ функциялар бирор X (очик ёки ёпиқ: чекли ёки чексиз) ораликда аниқланган бўлиб, улар

$$F'(x) = f(x) \quad (1.1)$$

муносабатда бўлсин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 15 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

1.1–таъриф. Агар $F(x)$ функция бирор X ораликда дифференциалланувчи бўлиб, $\forall x \in X$ лар учун (1.1) тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функцияда X ораликда $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади¹.

1.2-таъриф. Агар $f(x)$ ва $F(x)$ функциялар $X = [a; b]$ кесмада аниқланган ва $\forall x \in (a, b)$ учун $F'(x) = f(x)$ ёки $dF(x) = f(x)dx$ бўлиб, a ва b нуқталарда $F'(a+0) = f(a)$, $F'(b-0) = f(b)$ тенгликлар ўринли бўлса, у ҳолда $F(x)$ функцияга $X = [a; b]$ кесмада $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси дейилади.

1.1-теорема. Агар $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар X ораликда дифференциалланувчи бўлиб, уларнинг ҳар бири $f(x)$ функциянинг X ораликдаги бошланғия функциялари бўлса, у ҳолда $F(x)$ ва $\Phi(x)$ функциялар X да бир-биридан ўзгармас сонга фарқ қилади, яъни

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in X.$$

Агар $f(x)$ функциянинг X ораликда бирор $F(x)$ бошланғич функцияси

1. «Бошланғич» функция термини, биринчи бўлиб, XVIII асрнинг охири XIX асрнинг бошларида Лагранж томонидан киритилган.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 16 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

маълум бўлса, унинг бошқа исталган бошланғич функция $F(x)+C$ формула орқали топилади.

1.3-таъриф. $f(x)$ функциянинг X ораликдаги барча бошланғич функциялар тўпламига, $f(x)$ функциянинг *аниқмас интеграл* дейилади ва у

$$\int f(x) dx$$

каби белгиланади, бунда $\int$ - интеграл белгиси, $f(x)$ - интеграл остидаги функция, $f(x)dx$ эса, - *интеграл остидаги ифода дейилади.*

Агар $F(x)$ функция X ораликда $f(x)$ функциянинг бирор бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда $f(x)$ функциянинг аниқмас интеграл

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C - \text{ихтиёрий ўзгармас сон})$$

ёки

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C\}$$

каби ёзилади.

1.1– мисол. Берилган ораликда берилган $F(x)$ функция берилган $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси эканлигини кўрсатинг ва аниқмас интегрални ёзинг:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 17 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1), F(x) = \frac{x^4}{4}, f(x) = x^3, X = (-\infty, \infty) = R;$$

$$2) F(x) = \frac{\sin ax}{a}, f(x) = \cos ax (a = \text{const}), X = (-\infty, \infty) = R;$$

$$3) F(x) = \sqrt{1-x^2}, f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, X = (-1; 1);$$

$$4) F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}, f(x) = \sqrt{x}, X = (0; \infty);$$

$$5) F(x) = \sqrt{x} - \cos(x+1), f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x+1), X \in (0; +\infty).$$

Ечилиши. 1) $f(x) = x^3$ функциянинг $X = (-\infty, \infty) = R$ оралиқдаги

бошланғич функцияси $F(x) = \frac{x^4}{4}$ бўлади, чунки $F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$.

Демак, $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

2) $f(x) = \cos ax (a = \text{const})$ функциянинг R даги бошланғич функцияси

$F(x) = \frac{\sin ax}{a}$ бўлади, чунки $F'(x) = \left(\frac{\sin ax}{a}\right)' = \cos ax = f(x)$.

Демак, $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 18 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3) $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ функциянинг $X = (-1; 1)$ ораликдаги бошланғич

функцияси $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ бўлади, чунки $F'(x) = (\sqrt{1-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$.

Демак, $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$.

4) $f(x) = \sqrt{x}$ функциянинг $X = (0; \infty)$ ораликдаги бошланғич функцияси

$F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ бўлади, чунки $F'(x) = \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right)' = \sqrt{x} = f(x)$. Демак, $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$.

5) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x+1)$ функциянинг $X \in (0; +\infty)$ ораликдаги бошланғич

функцияси $F(x) = \sqrt{x} - \cos(x+1)$ дан иборат бўлади, чунки

$F'(x) = (\sqrt{x} - \cos(x+1))' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x+1) = f(x)$.

Демак, $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(x+1)\right) dx = \sqrt{x} - \cos(x+1) + C$.

1.2– мисол. $f(x)$ функциянинг, графиги берилган $A(x_0, y_0)$ нуқта орқали ўтадиган, бошланғич функциясини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 19 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1) f(x) = x^3, A(2; 2);$$

$$2) f(x) = \sin x + \frac{8}{\pi^2} x, A\left(\frac{\pi}{2}; 3\right).$$

Ечилиши. 1) $f(x) = x^3$ функциянинг $X = (-\infty, \infty) = R$ ораликдаги

бошланғич функцияси $F(x) = \frac{x^4}{4} + C$ дан иборат бўлади, чунки

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3 = f(x). \text{ Энди } C \text{ ўзгармас сонни топамиз. } F(x) = \frac{x^4}{4} + C$$

функциянинг графиги $A(2; 2)$ нуқтадан ўтсин. $x = 2, y = 2$ ларни $F(x)$ ва x

ларнинг ўрнига қўйиб, $2 = \frac{2^4}{4} + C$ тенгликни ҳосил қиламиз, бунда $C = -2$.

$$\text{Демак, } F(x) = \frac{x^4}{4} - 2.$$

2) $f(x) = \sin x + \frac{8}{\pi^2} x$ функциянинг $X = (-\infty, \infty) = R$ ораликдаги бошланғич

функцияси $F(x) = -\cos x + \frac{4}{\pi^2} x^2 + C$ дан иборат бўлади, чунки

$$F'(x) = (-\cos x + \frac{4}{\pi^2} x^2 + C)' = \sin x + \frac{8}{\pi^2} x = f(x).$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{4}{\pi^2} x^2 + C$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 20 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функциянинг графиги $A\left(\frac{\pi}{2}; 3\right)$ нуқтадан ўтсин. $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 3$ ларни $F(x)$ нинг

ифодасига қўйиб, $3 = -\cos \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + C$ ни ҳосил қиламиз, бунда $C = 2$.

$$\text{Демак, } F(x) = -\cos x + \frac{4}{\pi^2} x^2 + 2.$$

1.2. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари. Элементар функцияларнинг аниқмас интеграллари жадвали.

1⁰. $f(x)$ функция X оралиқда бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда, $\forall x \in X$ учун

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx \quad (1.2)$$

тенглик ўринли бўлади, яъни дифференциал белгиси d , интеграл белгиси $\int$ дан олдин келганда d ва $\int$ белгилар ўзаро қисқариб интеграл остидаги ифодага тенг бўлади;

2⁰. Функция дифференциалининг аниқмас интеграли, шу функция билан ўзгармас соннинг йигиндисига тенг, яъни

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{ёки} \quad \int F'(x)dx = F(x) + C \quad (C = \text{const}) \quad (1.3)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 21 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тенглик ўринли бўлади, яъни $\int$ интеграл белгиси, d дифференциал белгиси дан олдин келганда, $\int$ ва d белгилар ўзаро қисқаради, лекин бу ҳолда, $F(x)$ функцияга ихтиёрий ўзгармас сон C ни қўшиш керак.

3⁰ Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X оралиқда бошланғич функцияларга эга бўлиб, λ ва μ лар ҳақиқий ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда $\lambda f(x) + \mu g(x)$ функция ҳам шу оралиқда бошланғич функцияга эга бўлади, ҳамда

$$\int [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int f(x) dx + \mu \int g(x) dx \quad (1.4)$$

тенглик ўринли.

1.2–эслатма. (1.4) формуладаги тенглик, шартли равишда, яъни тенгликнинг ўнг ва чап томонлари ўзаро ихтиёрий ўзгармас сон аниқлигида тенг, деб қаралади.

Содда элементар функцияларнинг аниқмас интеграллари жадвали қўйидагичадир:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 22 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1. \int 0 \cdot dx = C.$$

$$2. \int 1 \cdot dx = x + C.$$

$$3. \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$$

$$4. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$$

$$5. \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1, \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots \right).$$

$$9. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \dots).$$

$$10. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$11. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$12. \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + C.$$

$$13. \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx = -\operatorname{cth} x + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 23 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$14. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$15. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, |x| < a.$$

$$17. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, |x| > |a|.$$

Аниқмас интегралнинг таърифи ва хоссаларидан фойдаланиб, қуйида берилган баъзи аниқмас интегралларни ҳисоблаймиз.

1.3– мисол. $\int x^2(x+2)(x-3)dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Аниқмас интегралнинг 3 – хоссаси, ҳамда жадвалдаги 3 – формулага асосан:

$$\int x^2(x+2)(x-3)dx = \int (x^4 - x^3 - 6x^2)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^3 + C \text{ бўлади}$$

Текшириш. Топилган бошланғич функция ҳосиласининг интеграл остидаги функцияга тенг ёки тенг эмаслигини текшириб кўрамиз:

$$\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^3 + C \right)' = x^4 - x^3 - 6x^2 + 0 = x^2(x^2 - x - 6) = x^2(x+2)(x-3), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 24 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Демак, берилган функциянинг аниқмас интегрални тўғри топилган экан.

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> Int((x)^2*(x+2)*(x-3), x) = int((x)^2*(x+2)*(x-3), x);

$$\int x^2(x+2)(x-3)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 2x^3.$$

1.4– мисол. $\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги функциянинг аниқланиш соҳасида, аниқмас интегралларнинг 3 – хоссаси, ҳамда 3-, 4- формулаларига асосан,

$$\int \left(\frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx = 4 \int x^{-3} dx - 2 \int x^{-2} dx + 3 \int \frac{1}{x} dx = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + 3 \ln|x| + C, \quad x \neq 0$$

эканлигини топамиз.

Текшириш. Топилган бошланғич функция ҳосиласининг интеграл остидаги функцияга тенг ёки тенг эмаслигини текшириб кўрамиз:

$$\left(-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + 3 \ln|x| + C \right)' = \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x}. \text{ Демак, аниқмас интеграл тўғри топилган.}$$

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> Int(4*(x)^(-3)-2*(x)^(-2)+3/x, x) = int(4*(x)^(-3) -

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 25 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2 * (x)^{-2} + 3/x, x);$$

$$\int \frac{4}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} dx = -\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + 3 \ln(x).$$

1.5 – мисол. $\int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги функциянинг аниқланиш соҳасида, аниқмас интегралнинг 3 – хоссаси, ҳамда интеграллар жадвалидаги 16 ва 17 формулаларидан фойдаланиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4+x^2} + 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}} dx &= \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx + 2 \int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{2} + \ln |x + \sqrt{x^2 + 4}| + C, \quad x \neq \pm 4 \end{aligned}$$

эканлигини топамиз.

Текшириш. Топилган бошланғич функция ҳосиласининг интеграл остидаги функцияга тенг ёки тенг эмаслигини текшириб кўрамиз:

$$\left(\arcsin \frac{x}{2} + 2 \ln |x + \sqrt{x^2 + 4}| + C \right)' = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{2(\sqrt{4+x^2} + x)}{(x + \sqrt{4+x^2}) \cdot \sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}.$$

Шундай қилиб, интеграл остидаги функцияни ҳосил қилдик, демак аниқмас интеграл тўғри топилган.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 26 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

1.6–мисол. $\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx$ интегрални ҳисобланг

Ечилиши. Интеграл остидаги функциянинг аниқланиш соҳасида, аниқмас интегралнинг 3–хоссаси ва интеграллар жадвалининг 9–формуласига асосан:

$$\int \operatorname{ctg}^2 x \, dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C, \quad x \in R \text{ бўлишини топамиз.}$$

Текшириш. Топилган бошланғич функция ҳосиласининг интеграл остидаги функцияга тенг ёки тенг эмаслигини текшириб кўрамиз:

$$(-\operatorname{ctg} x - x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x$$

Демак, аниқмас интеграл тўғри топилган.

1.7–мисол. $\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx$ интегралларни ҳисобланг

Ечилиши. Аниқмас интегралнинг 3–хоссаси ва интеграллар жадвалнинг 5- формуласидан фойдаланиб,

$$\int \frac{2^x + 5^x}{10^x} dx = \int \frac{1}{5^x} dx + \int \frac{1}{2^x} dx = \int 5^{-x} dx + \int 2^{-x} dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{5^{-x}}{\ln 5} + C, \quad x \in R,$$

бўлишини топамиз.

Текшириш. Топилган бошланғич функция ҳосиласининг интеграл

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 27 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

остидаги функцияга тенг ёки тенг эмаслигини текшириб кўрамиз:

$$\left(-\frac{2^{-x}}{\ln 2} - \frac{5^{-x}}{\ln 5} + C \right)' = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{5^x} = \frac{2^x + 5^x}{10^x}$$

Демак, топилган бошланғич функциянинг ҳосиласи интеграл остидаги функцияга тенг экан.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функцияларнинг битта бошланғич функциясини топинг.

1.1. $f(x) = 5x^4$.

1.2. $f(x) = \cos 2x$.

1.3. $f(x) = e^{1-3x}$.

1.4. $f(x) = \operatorname{ctg} 3x$.

1.5. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 3x} + 2^{3x}$.

1.6. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$.

Берилган ораликда $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси эканлигини кўрсатинг ва аниқмас интегралини ёзинг:

1.7.1) $f(x) = 2 - \frac{3}{\cos^2 3x}$.

1.8.2) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 5x$.

1.9. 3) $f(x) = 3(3x+5)^4$.

1.10.4) $f(x) = \sin 2x \cdot \cos x$.

1.11.5) $f(x) = \left(\frac{\sin 2x - 2\sin^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} \right)^2$.

1.12.6) $f(x) = \ln^{-1} x - \ln^{-2} x$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 28 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$f(x)$ функциянинг, графиги берилган $A(x_0, y_0)$ нукта орқали ўтадиган бошланғич функциясини топинг.

$$1.13.1) f(x) = x^2, \quad A(3;2). \quad 1.14.2) f(x) = \cos x + 2x, \quad A\left(\frac{\pi}{2};3\right).$$

$$1.15.3) f(x) = e^x + \sin 2x, \quad A\left(0; \frac{7}{2}\right). \quad 1.16.4) f(x) = \frac{1}{x} + 2x, \quad A(e,1).$$

$$1.17.5) f(x) = 2\cos^2 \frac{x}{2}, \quad A(0;3).$$

$$1.18.6) f(x) = e^{3+2x} - 4\sin(2x+3), \quad A\left(\frac{-3}{2}, 0\right).$$

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, берилган функциянинг бошланғич функцияларини топинг.

$$1.19.1) 5f(5x). \quad 1.20.2) 3f\left(\frac{x}{2}\right). \quad 1.21.3) -4f(-4x+3).$$

$$1.22.4) 3f(-3x+2). \quad 1.23.5) \frac{4}{5}f\left(\frac{2}{3}x+7\right). \quad 1.24.6) cf(ax+b).$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.25. \int 4x^7 dx. \quad 1.26. \int \frac{dx}{x^5}.$$

$$1.27. \int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8) dx. \quad 1.28. \int \frac{3x^4 + 5x^3 - 6x\sqrt[4]{x} + 4}{x} dx.$$

$$1.29. \int \frac{2x^4 - 5x\sqrt[3]{x} + 7\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx. \quad 1.30. \int \left(x^{3/2} - \frac{2}{x^{3/2}}\right)^2 dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 29 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.31. \int (x-1)(x+2) dx.$$

$$1.32. \int x^2(x+1)(5x-3) dx.$$

$$1.33. \int \sqrt[3]{x^2} (8\sqrt[3]{x} - 1) dx.$$

$$1.34. \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x\sqrt{x}} dx.$$

$$1.35. \int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} dx.$$

$$1.36. \int \frac{125-x}{\sqrt[3]{x}-5} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.37. \int 8^x dx.$$

$$1.38. \int 5^{3x} \cdot e^x dx.$$

$$1.39. \int 5^{x-2} dx.$$

$$1.40. \int \frac{32^x - 2^x}{4^x} dx.$$

$$1.41. \int 6^x (6^x + 4) dx.$$

$$1.42. \int (3^x - 1)(3^{-x} + 1) dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.43. \int 8 \cos x dx.$$

$$1.44. \int \frac{\sin x}{9} dx.$$

$$1.45. \int \frac{1}{5 \sin^2 x} dx.$$

$$1.46. \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x} \right) dx.$$

$$1.47. \int \frac{5 - 4 \cos^3 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$1.48. \int \frac{7 + 2x \sin^2 x}{\sin^2 x} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.49. \int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}.$$

$$1.50. \int \frac{1 - \cos 2x}{6 \sin x} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 30 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1.51. \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos 2x}.$$

$$1.52. \int \frac{1 - 4\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

$$1.53. \int (\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x)^2 dx.$$

$$1.54. \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.55. \int \frac{1 + \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{4 - x^2}} dx.$$

$$1.56. \int \sqrt{\frac{4 + x^2}{16 - x^4}} dx.$$

$$1.57. \int \frac{\sqrt{4 + x^2} - \sqrt{4 - x^2}}{\sqrt{16 - x^4}} dx.$$

$$1.58. \int \sqrt{\frac{3 + x^2}{x^4 - 9}} dx.$$

$$1.59. \int \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 6}{x^2 + 9} dx.$$

$$1.60. \int \frac{4 - x^2}{16 - x^4} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.61. \int \frac{3 + x^2}{1 + x^2} dx.$$

$$1.62. \int \frac{1 - 2x^2}{x^2(1 - x^2)} dx.$$

$$1.63. \int \frac{(2x^2 + 5) dx}{x^2(x^2 + 5)}.$$

$$1.64. \int \frac{x^2 - 7}{9 - x^2} dx.$$

$$1.65. \int \frac{dx}{16 - x^2} dx.$$

$$1.66. \int \frac{dx}{x^4 + 4x^2}.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.67. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}.$$

$$1.68. 2) \int \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}.$$

$$1.69. \int \operatorname{sh}^2 x dx.$$

$$1.70. \int \operatorname{ch}^2 x dx.$$

$$1.71. \int \operatorname{th}^2 x dx.$$

$$1.72. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 31 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг ($a \neq 0$)

$$1.73. \int e^{ax} dx.$$

$$1.76. \int b^{ax} dx, \quad b \neq 1, \quad b > 0.$$

$$1.79. \int \frac{dx}{b+ax}.$$

$$1.82. \int \frac{dx}{a^2 - b^2 x^2}.$$

$$1.85. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$$

$$1.88. \int sh ax dx.$$

$$1.91. \int ch^2 ax dx.$$

$$1.74. \int \sin(ax+b) dx.$$

$$1.77. \int \frac{dx}{\cos^2 ax}.$$

$$1.80. \int (ax+b)^a dx.$$

$$1.83. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}.$$

$$1.86. \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx.$$

$$1.89. \int sh^2 ax dx.$$

$$1.92. \int \frac{dx}{ch^2 ax}.$$

$$1.75. \int \cos(ax+b) dx.$$

$$1.78. \int \frac{dx}{\sin^2 ax}.$$

$$1.81. \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}.$$

$$1.84. \int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx.$$

$$1.87. \int \frac{dx}{\sqrt{b^2 x^2 - a^2}}.$$

$$1.90. \int ch ax dx.$$

$$1.93. \int \frac{dx}{sh^2 ax}.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1.94. \int e^{3x+4} dx.$$

$$1.97. \int \cos 5x dx.$$

$$1.100. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{9x-7}}.$$

$$1.103. \int 6^{3x+2} dx.$$

$$1.106. \int \frac{dx}{4x^2 - 9}.$$

$$1.95. \int (12x-5)^7 dx.$$

$$1.98. \int \sin\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) dx.$$

$$1.101. \int \frac{dx}{6x+5}.$$

$$1.104. \int \frac{dx}{9+25x^2}.$$

$$1.107. \int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}.$$

$$1.96. \int \sqrt{9x+7} dx.$$

$$1.99. \int \frac{dx}{(6-5x)^4}.$$

$$1.102. \int \frac{dx}{7-5x}.$$

$$1.105. \int \frac{dx}{25-16x^2}.$$

$$1.108. \int \frac{dx}{\sqrt{16+25x^2}}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 32 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$1.1. F(x) = x^5.$$

$$1.2. F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

$$1.3. F(x) = -\frac{1}{3} e^{1-3x}.$$

$$1.4. F(x) = \frac{1}{3} \ln |\sin 3x|.$$

$$1.5. F(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x + \frac{1}{3 \ln 2} 8^x.$$

$$1.6. F(x) = \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{3}{4} x^3 \sqrt{x}.$$

$$1.7. 2x - \operatorname{tg} 3x + C.$$

$$1.8. -\frac{1}{5} \operatorname{ctg} 5x - x + C.$$

$$1.9. \frac{1}{5} (3x+5)^5 + C.$$

$$1.10. -\frac{2}{3} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x + C.$$

$$1.11. \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

$$1.12. \frac{x}{\ln x} + C.$$

$$1.13. \frac{x^3}{3} - 7.$$

$$1.14. \sin x + x^2 + 2 - \frac{\pi^2}{4}.$$

$$1.15. e^x - \frac{1}{2} \cos 2x + 3.$$

$$1.16. \ln |x| + x^2 - e^2.$$

$$1.17. x + \sin x + 3.$$

$$1.18. \frac{1}{2} e^{3+2x} + 2 \sin(2x+3) - 2,5.$$

$$1.19. F(5x).$$

$$1.20. 6F\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$1.21. F(-4x+3).$$

$$1.22. -F(-3x+2).$$

$$1.23. \frac{6}{5} F\left(\frac{2}{3} x + 7\right).$$

$$1.24. \frac{c}{a} F(ax+b).$$

$$1.25. \frac{1}{2} x^8 + C.$$

$$1.26. -\frac{1}{4x^4} + C.$$

$$1.27. \frac{5}{4} x^3 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 8x + C.$$

$$1.28. \frac{3}{4} x^4 + \frac{5}{3} x^3 - \frac{24}{5} x^{\frac{5}{4}} + 4 \ln |x| + C.$$

$$1.29. \frac{4}{7} x^{7/2} - 6x^{\frac{5}{6}} + 7 \ln |x| + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 33 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1.30. \frac{x^4}{4} - 4x - \frac{2}{x^2} + C.$$

$$1.31. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C.$$

$$1.32. x^5 + \frac{x^4}{2} - x^3 + C.$$

$$1.33. 4x^2 - \frac{3}{5}x^{5/3} + C.$$

$$1.34. x - 6\sqrt{x} + 3\ln|x| + \frac{2}{\sqrt{x}} + C.$$

$$1.35. \frac{2}{3}x^{3/2} - 3x + C.$$

$$1.36. -\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{15}{4}x^{4/3} - 25x + C.$$

$$1.37. \frac{8^x}{\ln 8} + C.$$

$$1.38. \frac{125^x \cdot e^x}{3\ln 5 + 1} + C.$$

$$1.39. \frac{5^{x-2}}{\ln 5} + C.$$

$$1.40. \frac{16^x + 3}{2^x \cdot \ln 2} + C.$$

$$1.41. \frac{6^x(6^x + 8)}{2\ln 6} + C.$$

$$1.42. \frac{3^x + 3^{-x}}{\ln 5} + C.$$

$$1.43. 8\sin x + C.$$

$$1.44. -\frac{1}{9}\cos x + C.$$

$$1.45. -\frac{1}{5}\operatorname{ctgx} + C.$$

$$1.46. 2\operatorname{tgx} + 5\operatorname{tgx} + C.$$

$$1.47. 5\operatorname{tgx} - 4\sin x + C.$$

$$1.48. -7\operatorname{tgx} + x^2 + C.$$

$$1.49. \operatorname{tgx} - \operatorname{ctgx} + C.$$

$$1.50. -\frac{1}{3}\cos x + C.$$

$$1.51. \operatorname{tgx} + C.$$

$$1.52. \operatorname{tgx} + 4\operatorname{ctgx} + C.$$

$$1.53. \operatorname{tgx} - \operatorname{ctgx} - 4x + C.$$

$$1.54. \frac{1}{2}(x + \operatorname{tgx}) + C.$$

$$1.55. \arcsin \frac{x}{2} + x + C.$$

$$1.56. \arcsin \frac{x}{4} + C.$$

$$1.57. \arcsin \frac{x}{2} - \ln|x + \sqrt{x^2 + 4}| + C.$$

$$1.58. \ln|x + \sqrt{x^2 - 3}| + C.$$

$$1.59. \ln|x + \sqrt{x^2 + 9}| - 2\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

$$160. \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$1.61. x + 2\operatorname{arctg} x + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 34 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1.62. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| - \frac{1}{x} + C. \quad 1.63. \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{1}{x} + C. \quad 1.64. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3+x}{3-x} \right| - x + C$$

$$1.65. \frac{1}{32} \left[2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right] + C. \quad 1.66. -\frac{1}{4x} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C, \quad x \neq 0.$$

$$1.67. -\operatorname{cthx} - \operatorname{thx} + C. \quad 1.68. \operatorname{thx} - \operatorname{cthx} + C. \quad 1.69. \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \frac{1}{2} x + C.$$

$$1.70. \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2} x + C. \quad 1.71. x - \operatorname{thx} + C. \quad 1.72. x - \operatorname{cthx} + C. \quad 1.73. \frac{1}{a} e^{ax} + C.$$

$$1.74. -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C. \quad 1.75. \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C. \quad 1.76. \frac{1}{a \ln b} b^{ax} + C, \quad b \neq 1, \quad b > 0.$$

$$1.77. \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C. \quad 1.78. -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C. \quad 1.79. \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C.$$

$$1.80. \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{a(\alpha+1)} + C. \quad 1.81. \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx}{a} + C = -\frac{1}{ab} \operatorname{arcctg} \frac{bx}{a} + C.$$

$$1.82. \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a+bx}{a-bx} \right| + C. \quad 1.83. \frac{1}{b} \ln \left| bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \right| + C.$$

$$1.84. \frac{x\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b} \ln \left| bx + \sqrt{a^2 + b^2 x^2} \right| + C. \quad 1.85. \frac{1}{b} \arcsin \frac{bx}{a} + c = -\frac{1}{b} \arccos \frac{bx}{a} + C.$$

$$1.86. \frac{x\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b} \arcsin \frac{bx}{a} + C. \quad 1.87. \frac{1}{b} \ln \left| bx + \sqrt{b^2 x^2 - a^2} \right| + C. \quad 1.88. \frac{1}{a} \operatorname{ch} ax + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 35 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1.89. \frac{sh2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C.$$

$$1.90. \frac{1}{a} shax + C.$$

$$1.91. \frac{sh2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C.$$

$$1.92. \frac{1}{a} thax + C.$$

$$1.93. -\frac{1}{a} cthax + C.$$

$$1.94. \frac{1}{3} e^{3x+4} + C.$$

$$1.95. \frac{1}{96} (12x-5)^8 + C.$$

$$1.96. \frac{2}{27} \sqrt{(9x+7)^3} + C.$$

$$1.97. \frac{1}{5} \sin 5x + C.$$

$$1.98. \frac{1}{3} \cos \left(\frac{\pi}{4} - 3x \right) + C.$$

$$1.99. \frac{1}{15} \frac{1}{(6-5x)^3} + C.$$

$$1.100. \frac{1}{6} \sqrt[3]{(9x-7)^2} + C.$$

$$1.101. \frac{1}{6} \ln |6x+5| + C.$$

$$1.102. -\frac{1}{5} \ln (7-5x) + C.$$

$$1.103. \frac{6^{3x+2}}{3 \ln 6} + C.$$

$$1.104. \frac{1}{15} \operatorname{arctg} \frac{5x}{3} + C.$$

$$1.05. \frac{1}{40} \ln \left| \frac{5+4x}{5-4x} \right| + C.$$

$$1.106. \frac{1}{12} \ln \left| \frac{3-2x}{3+2x} \right| + C.$$

$$1.107. \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{5} + C.$$

$$1.108. \frac{1}{5} \ln \left| 5x + \sqrt{16 + 25x^2} \right| + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 36 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

2- §. Интеграллаш усуллари

2.1. Ўзгарувчиларни алмаштириш усули.

Ўзгарувчиларни алмаштириш усули аниқмас интегрални ҳисоблашнинг энг муҳим усулларида бири бўлиб, унда ҳисоблаш талаб қилинган интеграл, ҳисоблаш учун қулай (осон) бўлган интегралга алмаштирилади, у эса, қуйидаги тасдиққа асосланади:

$t = \varphi(x)$ функция бирор X (интервал ёки сегмент, ярим ўқ ёки сон ўқи) оралиқда аниқланган ва дифференциалланувчи бўлиб, унинг қийматлар тўплами $T = \{t\}$ бўлсин. T тўпланда $g(t)$ функция аниқланган бўлиб, унинг учун $G(t)$ функция бошланғич функция бўлсин, яъни

$$\int g(t) dt = G(t) + C. \quad (2.1)$$

У ҳолда X тўпламнинг ҳамма нуқталарида $G[g(x)]$ функция $g[\varphi(x)]\varphi'(x)$ функция учун бошланғич функция бўлади, яъни

$$\int g[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = G[\varphi(x)] + C \quad (2.2)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 37 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int f(x) dx \quad (2.3)$$

интегрални ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. Кўп ҳолларда, янги ўзгарувчи сифатида шундай дифференциалланувчи $t = \varphi(x)$ функцияни танлаш мумкин бўладики, бунда

$$f(x) dx = g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx \quad (2.4)$$

тенглик ўринли бўлиб, $g(t)$ функция, $f(x)$ функцияга нисбатан осон интегралланади, яъни

$$\int g(t) dt = G(t) + C$$

бундан $t = \varphi(x)$ алмаштириш натижасида ҳисоблаш талаб қилинган интегрални ҳосил қиламиз:

$$\int f(x) dx = G[\varphi(x)] + C \quad (2.5)$$

(2.3) интегрални ҳисоблашнинг бу усул, ўзгарувчиларни *алмаштириш* усули дейилади.

Албатта, интеграллашнинг бу усули ҳамма интегралларни ҳисоблаш учун ҳам қўлланилавермайди. Интегралларни ҳисоблаганда, ўзгарувчиларни алмаштириш усулини қўллашда, алмаштиришни тўғри танлаш

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 38 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳисобловчининг маҳоратига боғлиқ.

Мисол учун, $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблашда, албатта,

$t = \varphi(x)$ алмаштириш, олиш керак:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \int \frac{dt}{t} = (\ln|t| + C) \Big|_{t=\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C \quad (2.6)$$

Шу типдаги интеграллар турига $\int \operatorname{ctg} x dx$ ҳам киради:

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C.$$

Баъзи ҳолларда, интегрални ҳисоблашда, ўзгарувчиларни алмаштириш усулини қўллаш учун, аввало, интеграл остида функциянинг шаклини ўзгартириш мақсадга мувофиқ бўлади. Масалан, $\int \frac{1}{\sin x} dx$ интегрални

ҳисоблашда, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ тенгликни эътиборга олиб, интеграл остидаги

ифоданинг шаклини ўзгартириб, (2.6) формулани эътиборга олсак, натижада

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 39 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} dx = \\ &= \int \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)'}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = \left(\ln |t| + C \right) \Big|_{t=\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned} \quad (2.7)$$

бўлишини топамиз.

2.1 – мисол. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1) \int \frac{x^2 dx}{3-x^6}; \quad 2) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+3\sin x}}; \quad 3) \int \operatorname{tg}^3 \varphi d\varphi; \quad 3) \int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}, \quad x > 0;$$

$$5) \int x\sqrt{a-x} dx; \quad 6) \int \frac{dt}{t^2 \sqrt{a+t^2}}; \quad 7) \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}} dx.$$

Ечилиши. 1) $\int \frac{x^2 dx}{3-x^6}$ интегрални ҳисоблашда $t = x^3$ алмаштиришни

олиш қулай. Бу алмаштиришни бажариб, интеграллар жадвалининг

15–формуласига асосан, қуйидагига эга бўламиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 40 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$dt = 3x^2 dx, \quad x^2 dx = \frac{1}{3} dt,$$

$$\int \frac{x^2 dx}{3-x^6} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{3-t^2} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 - (\sqrt{3})^2} = \left(-\frac{1}{6\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| + C \right) \Big|_{t=x^3} = -\frac{1}{6\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x^3-\sqrt{3}}{x^3+\sqrt{3}} \right| + C.$$

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб, ечиш:

> **f := (x^2) / (3-x^6) ;**

$$f := \frac{x^2}{3-x^6}$$

> **Int(f, x) ;**

$$\int \frac{x^2}{3-x^6} dx$$

> **int(f, x) ;**

$$\frac{1}{9} \sqrt{3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x^3 \sqrt{3}}{3} \right)$$

> **Int(f, x)=int(f, x) ;**

$$\int \frac{x^2}{3-x^6} dx = \frac{1}{9} \sqrt{3} \operatorname{arctanh} \left(\frac{x^3 \sqrt{3}}{3} \right)$$

2) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+3\sin x}}$ интегрални ҳисоблашда $t=1+3\sin x$ алмаштиришни олиш

мақсадга мувофиқ бўлади. Бундан

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 41 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$dt = 3 \cos x dx, \quad \cos x dx = \frac{1}{3} dt,$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+3\sin x}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{3} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \left(2t^{\frac{1}{2}} + C \right) \Big|_{t=1+3\sin x} = \frac{2}{3} \sqrt{1+3\sin x} + C.$$

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> **f:=cos(x)/sqrt(1+3*sin(x));**

$$f := \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin(x)}}$$

> **Int(f,x);**

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin(x)}} dx$$

> **int(f,x);**

$$\frac{2}{3} \sqrt{1+3\sin(x)}$$

> **Int(f,x)=int(f,x);**

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+3\sin(x)}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{1+3\sin(x)}.$$

3) $\int tg^3 \varphi d\varphi$ интегрални ҳисоблаш учун $\varphi = \arctgt$, $t = tg \varphi$ алмаштириш ва

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 42 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$d\varphi = \frac{1}{1+t^2} dt, \quad \int \operatorname{tg}^3 \varphi d\varphi = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \left(t - \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} =$$

$$= \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C \right)_{t=\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2} - \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg}^2 \varphi| + C = \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2} + \ln|\cos \varphi| + C.$$

бўлади.

4) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$ интегрални ҳисоблашда $t=1+\ln x$ алмаштириш оламиз.

Натижада

$$dt = \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt = \left(\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C \right) \Big|_{t=1+\ln x} = \frac{2}{3} \sqrt{(1+\ln x)^3} + C.$$

бўлади.

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> **f:=sqrt(2+ln(x))/x;**

$$f := \frac{\sqrt{2 + \ln(x)}}{x}$$

> **Int(f,x);**

$$\int \frac{\sqrt{2 + \ln(x)}}{x} dx$$

> **int(f,x);**

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 43 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{2}{3} (2 + \ln(x))^{(3/2)}$$

> **Int(f,x)=int(f,x);**

$$\int \frac{\sqrt{2 + \ln(x)}}{x} dx = \frac{2}{3} (2 + \ln(x))^{(3/2)}$$

5) $\int x \sqrt{a-x} dx$ - интегрални ҳисоблашда $t = \sqrt{a-x}$ алмаштиришни олиш

кулай бўлади. Бундан, $t^2 = a-x$, $dt = -\frac{1}{2\sqrt{a-x}} dx$, $x = a-t^2$, $dx = -2t dt$,

$$\int x \sqrt{a-x} dx = -2 \int (a-t^2) t^2 dt = -2 \int (at^2 - t^4) dt =$$

$$= \left(-2a \frac{t^3}{3} + 2 \frac{t^5}{5} + C \right) \Big|_{t=\sqrt{a-x}} = \frac{2}{15} (3x^2 - ax - 2a^2) + C$$

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> **Int(x*sqrt(a-x),x)=int(x*sqrt(a-x),x);**

$$\int x \sqrt{a-x} dx = -\frac{2(2a+3x)(a-x)^{(3/2)}}{15}$$

6) $\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{a+t^2}}$ интегралда $x = \frac{1}{t}$ алмаштириш олиб, уни қуйидагича

ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 44 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{dt}{t^2 \sqrt{a+t^2}} = -\int \frac{x dx}{\sqrt{a+x^2}} = -\frac{1}{2} \int (a+x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a+x^2) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{a+x^2} + C \right) \Big|_{x=\frac{1}{t^2}} = -\sqrt{a+\frac{1}{t^2}} + C$$

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> **Int(1/(t^2*sqrt(a+t^2)),t)=int(1/(t^2*sqrt(a+t^2)),t);**

$$\int \frac{1}{t^2 \sqrt{a+t^2}} dt = -\frac{\sqrt{a+t^2}}{t a}$$

7) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}} dx$ интегралда аввало, интеграл остидаги ифоданинг

шаклини ўзгартирамиз:

$$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^6-7x^4+x^2}} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2-7+\frac{1}{x^2}}} dx =$$

$$= \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}},$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 45 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бунда $t = x - \frac{1}{x}$. Энди интеграллар жадвалининг 17-формуласига асосан,

интегрални ҳисоблаймиз. Натижада,

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^6 - 7x^4 + x^2}} dx = \left(\ln \left| t + \sqrt{t^2 - 5} \right| + C \right) \Bigg|_{t=x-\frac{1}{x}} = \ln \left| x - \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 7 + \frac{1}{x^2}} \right| + C.$$

бўлади.

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> `Int((x^2+1)/sqrt(x^6-7*x^4+x^2),x)=int((x^2+1)/sqrt(x^6-7*x^4+x^2),x);`

$$\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^6 - 7x^4 + x^2}} dx = \frac{1}{2} \frac{x \sqrt{x^4 - 7x^2 + 1} \left(\ln \left(-\frac{7}{2} + x^2 + \sqrt{x^4 - 7x^2 + 1} \right) + \operatorname{arctanh} \left(\frac{-2 + 7x^2}{2\sqrt{x^4 - 7x^2 + 1}} \right) \right)}{\sqrt{x^6 - 7x^4 + x^2}}$$

2.2. Бўлаклар интеграллаш усули.

Интегралларни ҳисоблашда бўлаклар интеграллаш усули муҳим усуллардан бири ҳисобланади. Бу усул қуйидаги тасдиққа асосланган:

$u(x)$ ва $v(x)$ функциялар бирор X оралиқда аниқланган ва

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 46 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

дифференциалланувчи бўлсин. Агар шу оралиқда $v(x)u'(x)$ функциянинг бошланғич функцияси мавжуд бўлса, у ҳолда $u(x)v'(x)$ функциянинг ҳам бошланғич функцияси мавжуд бўлади ва

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \quad (2.8)$$

ёки

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2.8')$$

формула ўринли. (2.8) ёки (2.8') формула бўлаклаб интеграллаш формуласи дейилади. (2.8) формула $\int u(x)v'(x)dx$ интегрални ҳисоблаш масаласини, $\int v(x)u'(x)dx$ интегрални ҳисоблаш масаласига олиб келади. Кўп ҳолларда, охирги интеграл, олдинги интегралга қараганда осонроқ ҳисобланади.

2.3 - мисол. Ушбу

$$\int x^\alpha \ln x dx, \quad \alpha \in R$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. 1) Аввало, интегрални $\alpha \neq -1$ бўлганда ҳисоблаймиз.

$u = \ln x$, $dv = x^\alpha dx$ деб белгилаб, $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ формулаларга асосан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 47 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$J = \int x^{\alpha} \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} + C = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left(\ln x - \frac{1}{\alpha+1} \right) + C$$

эканлигини топамиз.

2) $\alpha = -1$ бўлсин. Бу ҳолда

$$\int x^{-1} \ln x dx = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$$

2.4 - мисол. Ушбу

$$\int x^2 3^x dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $u = x^2, dv = 3^x dx$ деб белгилаб, (2.8) формулага асосан,

топамиз:

$$\begin{aligned} du &= 2x dx, v = \frac{3^x}{\ln 3}, \\ \int x^2 \cdot 3^x dx &= \frac{x^2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \int x \cdot 3^x dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Охирги интегралга яна (2.8) формулани куллаймиз: $u = x, dv = 3^x dx$ деб белгилаб, (2.8) формулага асосан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 48 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$du = dx, v = \frac{3^x}{\ln 3}$$

$$\int x \cdot 3^x dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3} \int 3^x dx = \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{(\ln 3)^2}.$$

эканлигини оламиз. Охирги натижани (2.9) га келтириб қуйсак, натижада

$$\int x^2 \cdot 3^x = \frac{1}{\ln 3} \cdot x^2 3^x - \frac{2x 3^x}{(\ln 3)^2} + \frac{2 \cdot 3^x}{(\ln 3)^3} = \frac{3^x}{\ln 3} \left(x^2 - \frac{2x}{\ln 3} + \frac{2}{(\ln 3)^2} \right) + C.$$

бўлишини топамиз.

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш:

> restart:with(student):J:=Int((x)^2*(3)^x,x);

$$J = \int x^2 3^x dx$$

> J:=intparts(Int((x)^2*(3)^x,x),x^2);

$$J = \frac{x^2 \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{2}{\ln 3} \int x \cdot 3^x dx$$

> intparts(%,x);

$$J = \frac{x^2 3^x}{\ln(3)} - \frac{2x 3^x}{(\ln 3)^2} + \int \frac{2 \cdot 3^x}{(\ln 3)^2} dx$$

> value(%) ;

$$J = \frac{x^2 3^x}{\ln(3)} - \frac{2x 3^x}{\ln(3)^2} + \frac{2 3^x}{\ln(3)^3}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 49 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

2.5 - мисол. Ушбу

$$\int x^2 \arctg x \, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $u = \arctg x$, $dv = x^2 dx$ деб белгилайлик. У ҳолда,

$du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = \frac{x^3}{3}$, формулаларга асосан, интегралнинг қиймати

$$\begin{aligned} \int x^2 \arctg x \, dx &= \frac{1}{3} x^3 \arctg x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctg x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{3} x^3 \arctg x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arctg x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

бўлади.

2.6 – мисол. Ушбу

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Берилган интегрални ҳисоблаш учун $u = x^2$, $dv = \sin x \, dx$ деб

олиб, (2.8) формулага асосан, $du = 2x dx$, $v = -\cos x$, бўлишини топамиз

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 50 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Унда

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx. \quad (2.10)$$

бўлади. Охирги муносабатнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаш учун унга яна бир марта (2.8) формулани қўллаймиз:

$$u = x, dv = \cos x, du = dx, v = \sin x$$

Бундан

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x - \int \sin x dx = x \cdot \sin x + \cos x.$$

эканлигини топамиз. Олинган натижани (2.10) га келтириб қўямиз.

Натижада, $\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C.$

2.7 – мисол. $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $u = \sqrt{x^2 + a^2} \quad dv = dx$ деб белгилаб, (2.8) формуладан фойдаланиб, берилган интегрални қуйидаги ҳолга келтирамиз:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x \cdot \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \quad (2.11)$$

(2.11) нинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблашда, интеграллар жадвалининг 17 - формуласидан фойдаланамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 51 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = I - a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = I - a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|. \quad (2.12)$$

(2.12) ни (2.11) га олиб бориб қўйиш натижасида,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x\sqrt{x^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c \quad (2.13)$$

эканлигини топамиз. 2-бандда ечилган мисолларни таҳлил қилиш натижасида, бўлак-бўлак интеграллаш усули билан ҳисобланадиган интегралларнинг кўпроқ қисмини, шартли равишда, қуйидаги уч гуруҳга ажратиш мумкин.

1. Биринчи гуруҳга интеграл остидаги функция таркибида кўпайтувчи сифатида

$$\ln x, \arcsin x, \arccos x, \operatorname{arctg} x, (\arcsin x)^2, (\arccos x)^2, (\operatorname{arctg} x)^2, \ln \varphi(x), \dots$$

функциялардан бири қатнашган интеграллар киради (2.3, 2.5 – мисолларга қаранг).

1-эслатма. Интеграл остидаги функция таркибида кўпайтувчи сифатида $(\operatorname{arctg} x)^2, (\arccos x)^2, \dots$ функциялар қатнашса, интегрални ҳисоблашда (2.8) формула икки марта қўлланилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 52 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

2. Иккинчи гуруҳга $\int p(x)\cos(kx)dx$, $\int p(x)\sin(kx)dx$, $\int p(x)a^{kx}dx$

кўринишдаги интеграллар киради, бунда $p(x)$ – ўзгармас коэффициентли n – даражали кўпхад, k - ўзгармас сон.

2–эслатма. Иккинчи гуруҳдаги интегралларни ҳисоблашда $p(x)$ кўпхаднинг даражаси қанча бўлса, шунча марта (2.8) формула қўлланилади, бунда $u(x)$ сифатида $p(x)$ ни олиш мақсадга мувофиқ бўлади. (2.8) формула ҳар бир қўлланганда, $p(x)$ кўпхаднинг даражаси биттага камаяди. (2.4, 2.7 – мисолларга қаранг).

3. Учинчи гуруҳга, қуйидаги

$$\int e^{ax} \sin bx dx, \int e^{ax} \cos bx dx, \int \sin(\ln x) dx, \int \cos(\ln x) dx, \dots$$

интеграллар киради (2.6 – мисолга қаранг).

Энди, юқорида келтирилган учта гуруҳнинг бирортасига ҳам қўрмайдиган, лекин (2.8) бўлаклаб интеграллаш формуласи ёрдамида ҳисобланадиган интегралларнинг баъзиларини қараймиз.

2.8 - мисол. Қуйидаги

$$J = \int e^{ax} \sin bx dx, J_1 = \int e^{ax} \cos bx dx \quad (a, b = \text{const})$$

интегралларни ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 53 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. $u = e^{ax}$, $dv = \sin bx dx$ деб белгилаб, (2.8) формулага асосан,

$$\begin{aligned} du &= ae^{ax} dx, \quad v = -\frac{\cos bx}{b} \\ J &= -\frac{e^{ax} \cdot \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \end{aligned} \quad (2.14)$$

бўлишини оламиз. Охирги (2.14) муносабатнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаш учун, унга яна бир марта (2.8) формулани қўлаймиз: Бунда $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx dx$ деб белгилаймиз. У ҳолда,

$$du = ae^{ax} dx, \quad v = \frac{\sin bx}{b}$$

ва

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{b} \cdot e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I. \quad (2.15)$$

(2.15) ни (2.14) га олиб бориб қўйсак, натижада,

$$I = -\frac{e^{ax} \cdot \cos bx}{b} + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} I,$$

I га нисбатан биринчи тартибли чизиқли тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламадан,

$$I = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{b^2 + a^2} e^{ax}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 54 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб,

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{b^2 + a^2} \cdot e^{ax} + C. \quad (2.16)$$

Худди шундай усул билан,

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C \quad (2.17)$$

эканлигига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

2.9 – мисол. Ушбу

$$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Бу интеграл юқоридаги уч гуруҳ интегралларнинг бирортасига ҳам қирмайди, лекин у, (2.8) бўлаклаб интеграллаш формуласи

ёрдамида, осонгина ҳисобланади. Бунда $u = x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$ деб белгилаб,

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sin^2 x} &= -x \operatorname{ctgx} + \int \operatorname{ctgx} \, dx = -x \operatorname{ctgx} + \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \\ &= -x \operatorname{ctgx} + \int \frac{du}{u} = -x \operatorname{ctgx} + \ln|u|_{u=\sin x} + C = -x \operatorname{ctgx} + \ln|\sin x| + C \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 55 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўлишини топамиз.

2.10 – мисол. Ушбу

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} \quad (a = \text{const}, \quad n = 1, 2, \dots)$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Бу интеграл ҳам юқорида келтирилган уч гуруҳ интегралларнинг бирортасига ҳам кирмайди. Бу кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш учун *рекуррент* формула келтириб чиқарамиз: бунинг учун

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx \quad \text{деб белгиласак,}$$

$$du = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1} dx, \quad v = x.$$

бўлади.

У ҳолда, (2.8) бўлаклаб интеграллаш формуласига асосан,

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n I_n - 2na^2 I_{n+1}. \end{aligned}$$

бўлади. Бундан I_{n+1} ни топамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 56 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n. \quad (2.18)$$

Бу рекуррент формула, I_{n+1} интегрални ҳисоблашни I_n интегрални ҳисоблашга, яъни индекси битта кам бўлган интегрални ҳисоблашга келтиради. (2.18) рекуррент формула, I_1 интеграл ҳисобланганда, I_2 интегрални ҳисоблашда ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди. Ўз навбатида, I_2 берилганда, (2.18) формулада $n = 2$ деб, I_3 интеграл топилади, ва ҳоказо n нинг қолган бошқа исталган қийматига тўғри келган интегрални ҳисоблаш ҳеч қандай қийинчилик туғдирмайди. I_1 интеграл эса, интеграллар жадвалнинг 14-формуласига асосан, ҳисобланади.

2.11 -мисол. Ушбу

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad a \neq 0.$$

интеграл ҳисоблансин.

Ечилиши. Берилган интеграл юқоридаги уч гуруҳ интегралларнинг бирортасига ҳам қирмайди, лекин у бўлаклаб интеграллаш усули билан ҳисобланади. Ҳақиқатан ҳам, $u = \sqrt{a^2 - x^2}$, $dv = dx$ деб олинса, у ҳолда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 57 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$du = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad v = x, \text{ бўлади ва (2.8) формулага асосан,}$$

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Охирги муносабатнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаш учун, интеграл остидаги функцияни қуйидагича шакл алмаштирамиз:

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2},$$

ва ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} - I.$$

Шундай қилиб, берилган интегрални ҳисоблаш учун,

$$I = x(a^2 - x^2) + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{|a|} - I$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бундан,

$$I = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{4} \arcsin \frac{x}{|a|} + c. \quad (2.19)$$

2.12– мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 58 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1) I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}, \quad n > 2; \quad 2) I_n = \int \sin^n x \, dx, \quad n > 2$$

кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш учун рекуррент формулалар келтириб чиқаринг.

Ечилиши. 1) $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ интегрални бўлаклаб интеграллаш усули

ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x \cdot \sin^2 x} = \left[u = \frac{1}{\sin^{n-2} x}, \quad dv = \frac{dx}{\sin^2 x}, \right. \\ &du = (2-n) \sin^{1-n} x \cdot \cos x \, dx, \quad v = -\operatorname{ctg} x \left. \right] = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \\ &+ (2-n) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} dx = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (2-n) \int \frac{dx}{\sin^n x} - \\ &-(2-n) \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (2-n) I_n - (2-n) I_{n-2}. \end{aligned}$$

Бундан,

$$I_n = -\frac{\cos x}{(n-1) \sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}. \quad (2.20)$$

(2.20) рекуррент формулани қўллашда, аввало $n=3$ ёки $m=3$ деб,

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x}, \quad I_1 = \int \frac{dx}{\cos x} \text{ интеграллар ҳисобланади. } \int \frac{dx}{\sin x} \text{ интегрални ҳисоблаш}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 59 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

юқорида кўрсатилди (2.7 формулага қ.).

2) $I_n = \int \sin^n x dx$ интегрални ҳисоблашнинг рекуррент формуласини

чиқариш учун, уни қуйидагича бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^n x dx = -\int \sin^{n-1} x d \cos x = \left[u = \sin^{n-1} x, dv = d \cos x, \right. \\ du &= (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx, v = \cos x \left. \right] = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \\ &+ (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = - \\ &= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Бундан

$$I_n = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

кўринишдаги рекуррент формулани топамиз.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

2.1. $\int x \sqrt{x^2 - 7} dx.$

2.2. $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{3-x^3}} dx.$

2.3. $\int \frac{e^{3x} dx}{(e^{3x} - 4)^3}.$

2.4. $\int \frac{xdx}{x^2 + 8}.$

2.5. $\int \frac{2x+1}{x^2 + x - 5} dx.$

2.6. $\int \frac{2x-3}{8+3x-x^2} dx.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 60 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.7. \int \frac{6x-5}{\sqrt{3x^2-5x+4}} dx.$$

$$2.8. \int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} dx.$$

$$2.9. \int \frac{10x-3x^2}{x^3-5x^2} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.10. \int \frac{e^x dx}{2e^x + 7}.$$

$$2.11. \int \frac{e^{\frac{5}{x}} dx}{x^2}.$$

$$2.12. \int \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$2.13. \int \frac{\sqrt[7]{\ln^5 x}}{x} dx.$$

$$2.14. \int x^2 e^{1-x^3} dx.$$

$$2.15. \int \frac{5^x dx}{9+5^x}.$$

$$2.16. \int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}} dx.$$

$$2.17. \int \frac{9^x dx}{\sqrt{81^x + 1}}.$$

$$2.18. \int \frac{1}{x \lg x} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.19. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$2.20. \int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$2.21. \int \sin x \cos^5 x dx.$$

$$2.22. \int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin x}} dx.$$

$$2.23. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x \sqrt{\cos x}} dx.$$

$$2.24. \int \frac{\sqrt[7]{128 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$2.25. \int \frac{dx}{\sqrt[7]{\operatorname{ctg}^4 x \sin^2 x}}.$$

$$2.26. \int \frac{e^{-1/x^4}}{x^5} dx.$$

$$2.27. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \sqrt{\sin x}} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.28. \int \frac{1-4 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$2.29. \int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$$

$$2.30. \int \frac{dx}{(x^2+1) \operatorname{arctg} x}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 61 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.31. \int e^{5\cos x - 1} \sin x dx. \quad 2.32. \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x - 5}. \quad 2.33. \int \frac{\cos \frac{2}{x^3}}{x^4} dx.$$

$$2.34. \int \frac{\cos x dx}{2 + \sin^2 x}. \quad 2.35. \int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x - 5}}. \quad 2.36. \int \frac{x^4 dx}{\sin^2 x^5}.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.37. \int ch^3 x shx dx. \quad 2.38. \int \frac{shx}{ch^2 x} dx. \quad 2.39. \int sh^7 x chx dx.$$

$$2.40. \int \frac{chx}{sh^2 x} dx. \quad 2.41. \int \frac{cthx}{sh^2 x} dx. \quad 2.42. \int \frac{thx}{ch^2 x} dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.43. \int x \sin x dx \quad 2.44. \int (x + 3) \cos x dx.$$

$$2.45. \int (1 - 4x) \sin x dx. \quad 2.46. \int (2x + 4) e^x dx.$$

$$2.47. \int (x + 5) 6^x dx. \quad 2.48. \int x^2 \cos x dx.$$

$$2.49. \int (x^2 + 3) \sin x dx. \quad 2.50. \int (2x - x^2) e^{-x} dx.$$

$$2.51. \int \frac{x}{\cos^2 x} dx. \quad 2.52. \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 62 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Интегралларни ҳисобланг:

$$2.53. \int \ln x \, dx.$$

$$2.55. \int x^2 \ln(x+4) \, dx.$$

$$2.57. \int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx.$$

$$2.59. \int \frac{\arccos x}{x^3} \, dx.$$

$$2.61. \int x \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx.$$

$$2.54. \int \ln(1+x^2) \, dx.$$

$$2.56. \int \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$2.58. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx.$$

$$2.60. \int x^3 \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$2.62. \int \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} \, dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.63. \int e^x \cos x \, dx.$$

$$2.65. \int 2^x \cos x \, dx.$$

$$2.67. \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

$$2.69. \int x e^x \sin^2 x \, dx.$$

$$2.71. \int \cos(\ln x) \, dx.$$

$$2.64. \int e^x \sin x \, dx.$$

$$2.66. \int e^{ax} \sin bx \, dx, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

$$2.68. \int x^2 e^x \cos x \, dx.$$

$$2.70. \int \sin(\ln x) \, dx.$$

$$2.72. \int x^2 \sin(\ln x) \, dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 63 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.73. \int \left(\frac{\cos x}{e^x} \right)^2 dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.74. \int x^5 \sin x dx.$$

$$2.75. \int x^6 e^{-x} dx.$$

$$2.76. \int x^4 \cos 3x dx.$$

$$2.77. \int x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$2.78. \int e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$2.79. \int \cos^5 x dx.$$

$$2.80. \int \sin^6 x dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.81. \int \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$$

$$2.82. \int \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$2.83. \int \cos^2 \ln x dx.$$

$$2.84. \int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$$

$$2.85. \int x \operatorname{arctg} x^2 dx.$$

$$2.86. \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx.$$

$$2.87. \int \arcsin \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right) dx.$$

Қуйидаги тенгликларни исботланг $\left(P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n-k} x^k, a_0 \neq 0 \right)$:

$$2.88. \int P_n(x) e^{ax} dx = \left(P_n(x) - \frac{P_n'(x)}{a} + \dots (-1)^n \frac{P_n^{(n)}(x)}{a^n} \right) \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 64 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.89. \int P_n(x) \sin ax \, dx = - \left(P_n(x) - \frac{P_n^{(2)}(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) \frac{\cos ax}{a} + \\ + \left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{a} - \frac{P_n^{(3)}(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - \dots \right) \frac{\sin ax}{a} + C.$$

$$2.90. \int P_n(x) \cos ax \, dx = \left(P_n(x) - \frac{P_n^{(2)}(x)}{a^2} + \frac{P_n^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) \frac{\sin ax}{a} + \\ + \left(\frac{P_n^{(1)}(x)}{a} - \frac{P_n^{(3)}(x)}{a^3} + \frac{P_n^{(5)}(x)}{a^5} - \dots \right) \frac{\cos ax}{a} + C.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.91. \int x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| dx.$$

$$2.92. \int \sin x \ln \operatorname{tg} x \, dx.$$

$$2.93. \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx.$$

$$2.94. \int \frac{\ln^2 x}{x^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$2.95. \int \cos x \ln(1 + \sin^2 x) dx.$$

$$2.96. \int x \sin(6x - 11) dx.$$

$$2.97. \int x \cos^2 x \, dx.$$

$$2.98. \int x \operatorname{tg}^2 4x \, dx.$$

$$2.99. \int x \ln^3 x \, dx.$$

$$2.100. \int x \operatorname{sh} x \, dx.$$

$$2.101. \int x \operatorname{ch} x \, dx.$$

$$2.102. \int x^3 e^{2x} dx.$$

$$2.203. \int x^2 \cos 3x \, dx.$$

$$2.104. \int (x^2 - 5x + 7) e^{4x} dx.$$

$$2.105. \int x^3 \operatorname{arctg} 2x \, dx.$$

$$2.106. \int x \sqrt{1 - x^2} \operatorname{arcsin} x \, dx.$$

$$2.107. \int (x^2 + 2)^2 \cos 3x \, dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 65 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.108. \int x e^x \sin^2 x dx.$$

$$2.109. \int x e^{3x} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$2.110. \int x^4 \cos px dx.$$

$$2.111. \int x^4 \sin px dx.$$

$$2.112. \int x^4 e^{ax} dx.$$

$$2.113. \int x^n e^{ax} dx, a \neq 0.$$

$$2.114. \int x^n \cos pxdx, p \neq 0.$$

$$2.115. \int x^n \sin pxdx, p \neq 0.$$

J_n ($n \in \mathbb{N}$) интеграл учун рекуррент формула келтириб чиқарилсин:

$$2.116. J_n = \int \cos^n x dx, n > 2.$$

$$2.117. J_n = \int \ln^n x dx.$$

$$2.118. J_n = \int \operatorname{sh}^n x dx, n > 2.$$

$$2.119. J_n = \int \operatorname{ch}^n x dx, n > 2.$$

$$2.120. J_n = \int \frac{1}{\cos^n x} dx, n > 2.$$

$$2.121. J_n = \int \frac{1}{\operatorname{ch}^n x} dx, n > 2.$$

$$2.122. J_n = \int x^\alpha \ln^n x dx, \alpha \neq -1.$$

$$2.123. J_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + a}} dx, n > 2.$$

$$2.124. \text{Ушбу } f'(x^2) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ шартни қаноатлантирувчи } f(x), x \in (0; \infty)$$

функцияни топинг.

$$2.125. \text{Ушбу}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 66 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & x \in (0;1], \\ x, & x \in (1;+\infty), \end{cases}$$

шартни каноатлантирувчи $f(x)$, $x \in R$ функцияни топинг.

2.126. Куйидаги

$$x f'(x^2) + g'(x) = \cos x - 3x^2, \quad f(x^2) + g(x) = \sin x - x^4$$

шартларни каноатлантирувчи $f(x)$, $x \in (0;+\infty)$ ва $g(x)$, $x \in R$

функцияларни топинг.

2.127. $x > 0$ учун куйидаги

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) + g(x) &= x + 1, & b) \quad f(x) + g(x) &= \frac{x^4}{6}, \\ f'(x) - g'(x) &= 0, & f'(x) + g'(x) &= \sin x, \\ f'(2x) + g'(-2x) &= 1 - 2x^2. & f'(2x) + g'(-2x) &= 0. \end{aligned}$$

шартларни каноатлантирувчи $f(x)$, $x \in (0;+\infty)$ ва $g(x)$, $x \in R$ функцияларни

топинг.

Мустакил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$2.1. \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 - 7)^3} + C.$$

$$2.2. -\frac{5}{12} \sqrt[5]{(3 - 3^3)^4} + C.$$

$$2.3. -\frac{1}{6} \frac{1}{(e^{3x} - 4)^2} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 67 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.4. \frac{1}{2} \ln |x^2 + 8| + C.$$

$$2.7. 2\sqrt{3x^2 - 5x + 4} + C.$$

$$2.10. \frac{1}{2} \ln |2e^x + 7| + C.$$

$$2.13. \frac{7}{12} (\ln x)^{12/7} + C.$$

$$2.16. \frac{1}{20} \ln \left| \frac{e^{5x} - 2}{e^{5x} + 2} \right| + C.$$

$$2.19. -\ln |\cos x| + C.$$

$$2.22. \frac{5}{6} \sqrt[5]{\sin^6 x} + C.$$

$$2.25. -\frac{7}{3} \sqrt[7]{\operatorname{ctg}^3 x} + C.$$

$$2.28. \arcsin x - 2 \arcsin^2 x + C.$$

$$2.31. -\frac{1}{5} e^{5 \cos x - 1} + C.$$

$$2.5. \ln |x^2 + x - 5| + C.$$

$$2.8. -\sqrt{2x - x^2} + C.$$

$$2.11. -\frac{1}{5} e^{5/x} + C.$$

$$2.14. -\frac{1}{3} e^{1-x^3} + C.$$

$$2.17. \frac{1}{\ln 9} \ln |9^x + \sqrt{81^x + 1}| + C.$$

$$2.20. \ln |\sin x| + C.$$

$$2.23. \frac{2}{3 \cos x \sqrt{\cos x}} + C.$$

$$2.26. 0,25 e^{-1/x^4} + C.$$

$$2.29. \frac{4}{5} \sqrt[4]{\arctg^5 x} + C.$$

$$2.32. \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\cos x + \sqrt{5}}{\cos x - \sqrt{5}} \right| + C.$$

$$2.6. -\ln |8 + 3x - x^2| + C.$$

$$2.9. -\ln |x^3 - 5x^2| + C.$$

$$2.12. \ln |\ln x| + C.$$

$$2.15. \frac{\ln |9 + 5^x|}{\ln 5} + C.$$

$$2.18. \frac{\ln(\ln x)}{\lg e} + C.$$

$$2.21. -\frac{\cos^6 x}{6} + C.$$

$$2.24. \frac{7}{4} \operatorname{tg} x \sqrt[7]{\operatorname{tg} x} + C.$$

$$2.27. -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

$$2.30. \ln |\arctg x| + C.$$

$$2.33. -\frac{1}{6} \sin \frac{2}{x^3} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 68 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.34. \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$2.35. \ln \left| \ln x + \sqrt{\ln^2 x - 9} \right| + C.$$

$$2.36. -\frac{1}{5} \operatorname{ctgx}^5 + C.$$

$$2.37. \frac{1}{4} ch^4 x + C.$$

$$2.38. -\frac{1}{chx} + C.$$

$$2.39. \frac{sh^8 x}{8} + C.$$

$$2.40. -\frac{1}{shx} + C.$$

$$2.41. -0,5cgh^2 x + C.$$

$$2.42. 0,5th^2 x + C.$$

$$2.43. -x \cos x + \sin x + C.$$

$$2.44. \sin x - (x+3) \cos x + C.$$

$$2.45. (4x-1) \cos x - 4 \sin x + C.$$

$$2.46. 2e^x(1+x) + C.$$

$$2.47. \frac{x \ln 6 + 5 \ln 6 - 1}{\ln^2 6} 6^x + C.$$

$$2.48. x^2 \sin x - 2 \sin x + 2x \cos x + C.$$

$$2.49. 2x \sin x - (x^2 + 1) \cos x + C.$$

$$2.50. e^{-x} x^2 + C.$$

$$2.51. x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + C.$$

$$2.52. \ln(\sin x) - x \operatorname{ctg} x + C.$$

$$2.53. x \ln x - x + C.$$

$$2.54. x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctg x + C.$$

$$2.55. \frac{1}{3}(4+x)^3 \ln(x+4) - \frac{352}{9} - \frac{16}{3}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^3 - 4 \ln(x+4)(x+4)^2 + 16(4+x) +$$

$$16(4+x) \ln(x+4) + C.$$

$$2.56. \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

$$2.57. -\frac{\arcsin x}{x} - \arctg \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

$$2.58. x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$2.59. -\frac{\arccos x}{2x^2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x} + C.$$

$$2.60. \frac{1}{4}x^4 \arctg x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{4} \arctg x + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 69 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.61. -x - \sqrt{1-x^2} \arccos x + C.$$

$$2.62. -2\sqrt{2-x} \arccos \frac{x}{2} - 4\sqrt{2+x} + C.$$

$$2.63. \frac{1}{2}e^x \cos x + \frac{1}{2}e^x \sin x + C.$$

$$2.64. \frac{1}{2}e^x \sin x - \frac{1}{2}e^x \cos x + C.$$

$$2.65. \left(2^{1+x} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2^x \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \ln 2 + 2^x \ln 2 \right) \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{1 + \ln^2 2} + C. \quad 2.66. \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

$$2.67. \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

$$2.68. \frac{1}{2}(x^2 - 1)e^x \cos x - \left(-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \right) e^x \sin x + C.$$

$$2.69. \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{25} \right) e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{5}x + \frac{4}{25} \right) e^x \sin 2x + C.$$

$$2.70. -\frac{x}{2} \cos(\ln x) + \frac{1}{2}x \sin(\ln x) + C.$$

$$2.71. \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

$$2.72. \frac{-\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{5}x^3 \operatorname{tg} \left(\frac{\ln x}{2} \right) + \frac{x^3}{10} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\ln x}{2} \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\ln x}{2} \right)} + C. \quad 2.73. \frac{1}{8} [(-2 \cos x + 2 \sin x) \cos x - 1] e^{-2x} + C.$$

$$2.74. -x^5 \cos x + 5x^4 \sin x + 20x^3 - 60x^2 \sin x + 120 \sin x - 120x \cos x + C.$$

$$2.75. -(x^6 + 6x^5 + 30x^4 + 120x^3 + 360x^2 + 720x + 720)e^{-x} + C.$$

$$2.76. \frac{1}{3}x^4 \sin 3x + \frac{4}{9}x^3 \cos 3x - \frac{4}{9}x^2 \sin 3x + \frac{8}{81} \sin 3x - \frac{8}{27}x \cos 3x + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 70 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.77. -\frac{1}{2}(1+x^2)e^{-x^2} + C.$$

$$2.78. 2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

$$2.79. \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + C.$$

$$2.80. -\frac{1}{6}\sin^5 x \cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x \cos x - \frac{5}{16}\sin x \cos x + \frac{5}{16}x + C.$$

$$2.81. -2x \cos \sqrt{x} + 4 \cos \sqrt{x} + 4\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + C. \quad 2.82. \left(-\frac{4}{9}\sqrt{1+x} + \frac{2}{3}\ln x \sqrt{1+x}\right)x -$$

$$-\frac{20}{9} + \frac{20}{9}\sqrt{1+x} + \frac{1}{2}\ln x \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{1+x}\right) - \frac{8}{3}\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+x}\right) + C.$$

$$2.83. \frac{3}{5}x \operatorname{tg}^4\left(\frac{\ln x}{2}\right) - \frac{4}{5}x \operatorname{tg}^3\left(\frac{\ln x}{2}\right) + \frac{2}{5}x \operatorname{tg}^2\left(\frac{\ln x}{2}\right) + \frac{4}{5}x \operatorname{tg}\left(\frac{\ln x}{2}\right) + \frac{3}{5}x + C.$$

$$2.84. \operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

$$2.85. \frac{1}{2}x^2 \arctg x^2 - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C.$$

$$2.86. 2\sqrt{1+x} \arctg \sqrt{1+x} - \ln(2+x) + C.$$

$$2.87. -2\operatorname{sign}(1-x)\sqrt{x} + (1+x)\arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} + C.$$

$$2.91. \frac{x^2}{2}\ln\left|1+\frac{1}{x}\right| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{x}{2} + C.$$

$$2.92. \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + C.$$

$$2.93. -\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x + \frac{3}{2}\ln^2 x + \frac{3}{2}\ln x + \frac{3}{4}\right) + C. \quad 2.94. -\frac{8}{27}x^{-3/2}\left(\frac{9}{4}\ln^2 x + 3\ln x + 2\right) + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 71 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.95. \sin x \ln(1 + \sin^2 x) - 2 \sin x + 2 \operatorname{arctg} \sin x + C.$$

$$2.96. \frac{1}{36} \sin(6x - 11) - \frac{1}{36} [6x + 22] \cos(6x - 11) + C.$$

$$2.97. x \left(-\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x \right) + \frac{1}{4} \sin^2 x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$$2.98. \frac{1}{4} x \operatorname{tg} 4x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{32} \ln(1 + \operatorname{tg}^2 4x) + C.$$

$$2.99. \frac{1}{2} x^2 \ln^3 x - \frac{3}{4} x^2 \ln^2 x + \frac{3}{4} x^2 \ln x - \frac{3}{2} x^2 + C.$$

$$2.100. x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x + C. \quad 2.101. x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + C. \quad 2.102. \frac{1}{8} (4x^3 - 6x^2 + 6x - 3) e^{2x} + C.$$

$$2.103. \frac{1}{27} (9x^2 - 2) \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x + C. \quad 2.104. \frac{1}{32} (8x^2 - 44x - 67) e^{4x} + C.$$

$$2.105. \frac{1}{64} (16x^4 - 1) \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{24} x^3 + \frac{1}{24} x + C. \quad 2.106. -\frac{1}{3} \sqrt{(1 - x^2)^3} \operatorname{arcsin} x + C.$$

$$2.107. \frac{1}{81} (27x^4 + 72x^2 + 92) \sin 3x + (12x^3 + 16x) \cos 3x + C.$$

$$2.108. \frac{1}{2} (x - 1) e^x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} x + \frac{3}{25} \right) e^x \cos 2x + \frac{1}{2} \left(-\frac{2}{5} x + \frac{4}{25} \right) \cdot e^x \sin 2x + C.$$

$$2.109. -\frac{3}{13} e^{3x} \left(\cos 2x + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{2}{13} e^{3x} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 72 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2.110. \frac{1}{p^4}(4p^2x^3 - 24x)\cos px + \frac{1}{p^5}(p^4x^4 - 12p^2x^2 - 24)\sin px + C.$$

$$2.111. \frac{1}{p^4}(4p^2x^2 - 24x)\sin px - \frac{1}{p^5}(p^4x^4 - 12p^2x^2 + 24)\cos px + C.$$

$$2.112. \frac{a^4x^4 - 4a^3x^3 + 12a^2x^2 - 24ax + 24}{a^5}e^{ax} + C.$$

$$2.113. e^{ax} \left[\frac{x^n}{a} - \frac{nx^{n-1}}{a^2} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n!x}{a^n} + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \right]$$

$$2.114. \frac{x^n}{p} \sin px + \frac{nx^{n-1}}{p^2} \cos px - \frac{n(n-1)}{p^2} \int x^{n-2} \cos px dx.$$

$$2.115. -\frac{x^n}{p} \cos px + \frac{nx^{n-1}}{p^2} \sin px - \frac{n(n-1)}{p^2} \int x^{n-2} \sin px dx.$$

$$2.116. J_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}. \quad 2.117. J_n = x \ln^n x - n J_{n-1}.$$

$$2.118. J_n = \frac{chx \, sh^{n-1} x}{n} - \frac{n-1}{n} J_{n-2}. \quad 2.119. J_n = \frac{shx \, ch^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} J_{n-2}.$$

$$2.120. J_n = -\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}. \quad 2.121. J_n = \frac{shx}{(n-1)ch^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} J_{n-2}.$$

$$2.122. J_n = \frac{x^{\alpha+1} \ln^n x}{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+1} J_{n-1}. \quad 2.123. J_n = \frac{x^{n-1} \sqrt{x^2 + a}}{n} - \frac{n-1}{n} a J_{n-2}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 73 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

2.124. $f(x) = 2\sqrt{x} + C.$

2.125. $f(x) = \begin{cases} x+1+C, & x \leq 0, \\ e^x + C, & x > 0. \end{cases}$

2.126. $f(x) = C - \frac{x^2}{2}, \quad g(x) = \sin x - \frac{x^4}{4} + C.$

2.127. a) $f(x) = \frac{x}{2} + x - C, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + C, & x > 0 \\ \frac{x}{2} - x^3 + C, & x \leq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{\cos x}{2} + x + C, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{12} + \frac{\cos x}{2} - C, & x > 0, \\ \frac{x^4}{12} - \frac{\cos x}{2} + 1 - C, & x \leq 0. \end{cases}$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 74 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3-§. РАЦИОНАЛ ФУНКЦИЯЛАРНИ ИНТЕГРАЛЛАШ

3.1. Номаълум коэффициентлар усули.

Иккита алгебраик кўпхаднинг нисбатига, яъни

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \quad (3.1)$$

ифодали *рационал функция* ёки *рационал каср* дейилади. Бунда, $P_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ ва $Q_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ($b_m, a_n \neq 0, m \geq 0, n \geq 1$) ҳақиқий коэффициентли кўпхадлар, деб фараз қилинади.

Агар $m < n$ бўлса, у ҳолда $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *тўғри каср рационал функция*, $m \geq n$

бўлганда эса, *нотўғри каср рационал функция* дейилади. Агар (3.1) рационал каср, нотўғри каср бўлса, у, касрнинг суратини махражига бўлиш йўли билан,

$$f(x) = w(x) + \frac{P_k(x)}{Q_n(x)} \quad (k < n) \quad (3.2)$$

кўринишга келтирилади, бунда $w(x)$ – бирор кўпхад.

Олий алгебра курсидан маълумки, ҳар қандай $Q_n(x)$ кўпхадни, ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 75 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$Q_n(x) = a_n(x - \alpha)(x - \beta) \dots (x - \nu) \quad (3.3)$$

(бунда $a_n - Q_n(x)$ кўпхадда x нинг юқори даражаси олдидаги коэффицент, $\alpha, \beta, \dots, \nu$ лар - $Q_n(x) = 0$ тенгламанинг илдизлари) кўринишда тасвирлаш мумкин.

Агар кўпхаднинг илдизлари ичида ўзаро тенглари бўлса, у ҳолда, кўпхад,

$$Q_n(x) = a_n(x - \alpha)^r(x - \beta)^s \dots (x - \nu)^t \quad (3.4)$$

кўринишга келтирилади, бунда $r, s, \dots, t$ - бутун сонлар, $\alpha, \beta, \dots, \nu$ сонлар эса, мос равишда, $Q_n(x)$ кўпхаднинг $r, s, \dots, t$ каррали илдизлари дейилади ва $r + s + \dots + t = n$ бўлади.

Кўпхаднинг (3.3) даги илдизлари ичида комплекс илдизлар ҳам бўлиши мумкин. Алгебра курсидан маълумки, агар $\alpha = a + ib$ ҳақиқий коэффицентли кўпхаднинг r - каррали илдизи бўлса, у ҳолда унга қўшма $\bar{\alpha} = a - ib$ сон ҳам кўпхаднинг r - каррали илдизи бўлади. Бошқача айтганда, агар (3.4) нинг таркибида $(x - \alpha)^r (\alpha = a + ib)$ бўлса, у ҳолда, (3.4) нинг таркибидаги $(x - \alpha)^r$ ва $(x - \bar{\alpha})^r$ ларнинг кўпайтмаси, қуйидагича бўлади:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 76 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned}(x - \alpha)^r (x - \bar{\alpha})^r &= \{[x - (a + bi)] \cdot [x - (a - bi)]\}^r = \\&= [x^2 - x(a + bi) - x(a - bi) + a^2 + b^2]^r = [x^2 - 2ax + a^2 + b^2]^r = \\&= (x^2 + 2px + q)^r,\end{aligned}$$

бунда $p = -a$, $q = a^2 + b^2$, $p^2 - q < 0$, p ва q – ҳақиқий сонлар.

Худди шундай юқоридаги мулоҳазаларни бошқа комплекс илдизлар учун ҳам юритсак, у ҳолда, (3.4) куйидаги кўринишни олади:

$$Q_n(x) = A_n (x - \alpha)^r \cdot (x - \beta)^s \dots (x^2 + 2px + q)^t (x^2 + 2ux + v)^k, \dots, \quad (3.5)$$

бунда $\alpha, \beta, \dots, p, q, u, v$ – ҳақиқий сонлар, $r, s, \dots, t, k$ – натурал сонлар.

Алгебра курсида куйидаги теорема исбот қилинади.

3.1–теорема: Агар $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ тўғри рационал каср таркибидаги $Q_n(x)$ кўпхад

(3.5) шаклда тасвирланган бўлса, у ҳолда, рационал каср, ягона равишда,

$$\begin{aligned}\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x - \alpha)^r} + \dots + \\&+ \dots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \dots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} + \dots\end{aligned} \quad (3.6)$$

(бунда $A_1, A_2, \dots, A_r, \dots, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_t, N_t, \dots$ – номаълум ҳақиқий сонлар) кўринишда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 77 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

таъсирланади. (3.6) тенглик, x нинг $Q_n(x)$ кўпхаднинг ҳақиқий илдизларига тенг бўлмаган ҳамма қийматларида ўринли.

(3.6) даги номаълум коэффициентларни топиш учун (3.6) ни умумий маҳражга келтириб (умумий маҳраж $Q_n(x)$) икки кўпхаднинг тенглиги ҳақидаги теоремага асосан, ўнг томонидаги суратдаги ҳосил бўлган кўпхад билан $P_m(x)$ кўпхаддаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштириш натижасида, номаълум коэффициентларга нисбатан чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системадан номаълум коэффициентларни топиб, топилган қийматларни (3.6) тенгликка келтириб кўямиз. Касрнинг ёйилмасидаги номаълум коэффициентларни топишнинг бу усули, *номаълум коэффициентлар усули* дейилади.

Шундай қилиб, $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ рационал касрнинг интегралини ҳисоблаш,

$w(x) = c_0x^k + c_1x^{k-1} + \dots + a_k$ шаклдаги кўпхадни интеграллашга ва қуйидаги

$$I. \frac{A}{x-\alpha}, \quad II. \frac{A}{(x-\alpha)^r}, \quad III. \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad IV. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^r} \quad (3.7)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 78 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$(r > 1)$ (бунда A, M, N, α, p, q – хакикий сонлар, $q - \frac{p^2}{4} > 0$) кўринишдаги

содда касрларни интеграллашга келтирилади. Бу содда касрларнинг интеграллари қуйидагича ҳисобланади.

$$\text{Қуйидаги, } \frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k} \quad (A, B, C, a, p, q \in R, k, m \in N)$$

кўринишдаги *содда касрлар*ни қараймиз. У ҳолда:

$$1) \ m=1 \text{ бўлганда, } \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$2) \ m>1 \text{ бўлганда, } \int \frac{A}{(x-a)^m} dx = A \int (x-a)^{-m} dx = \frac{A}{1-m} \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C.$$

$$3) \ k=1 \text{ бўлганда, } a^2 = q - \frac{p^2}{4}, \ x + \frac{p}{2} = t \text{ алмаштириш олиб, квадрат}$$

учҳадни, $x^2 + px + q = a^2 + t^2$ кўринишга келтирамиз, ва берилган касрнинг аниқмас интегралини топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+D}{x^2+px+q} dx &= B \int \frac{tdt}{a^2+t^2} + \frac{(2D-Bp)}{2} \int \frac{dt}{a^2+t^2} = \\ &= \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2D-Bp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 79 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

4) $k > 1$ бўлганда, $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$, $x + \frac{p}{2} = t$ алмаштириш олиб, квадрат

учҳадни $x^2 + px + q = a^2 + t^2$ кўринишга келтирамиз ва берилган касрнинг аниқмас интегралини топамиз:

$$\int \frac{Bx + D}{(x^2 + px + q)^k} dx = \frac{B}{2} \frac{1}{1-k} \frac{1}{(a^2 + t^2)^{k-1}} - \frac{(2D - Bp)}{2} \int \frac{dt}{(a^2 + t^2)^k}.$$

Охирги ифодадаги интеграл эса, қуйидаги

$$\int \frac{dt}{(a^2 + t^2)^k} = \frac{1}{2(k-1)a^2} \left(\frac{t}{(a^2 + t^2)^{k-1}} - (2k-3) \int \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{k-1}} \right)$$

рекуррент формула орқали топилади.

I ва **II** типдаги касрларнинг интеграллари, $t = x - \alpha$ алмаштириш ёрдамида ҳисобланади:

$$\int \frac{A}{x - \alpha} dx = A \int \frac{dt}{t} = A \ln|t|_{t=x-\alpha} + c = A \ln|x - \alpha| + c.$$

$$\int \frac{A}{(x - \alpha)^r} dx = A \int \frac{dt}{t^r} = \left(\frac{A}{r-1} \cdot \frac{1}{t^{r-1}} + C \right) \Big|_{t=x-\alpha} = -\frac{A}{(r-1)} \cdot \frac{1}{(x - \alpha)^{r-1}} + C.$$

III типдаги касрнинг интегралини ҳисоблаш учун, квадрат учҳадни қуйидагича шакл алмаштирамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 80 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

$$a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

$t = x + \frac{p}{2}$ деб белгилаб олиб, интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{t^2 + a^2} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{M}{2} = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{t^2 + a^2} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{1}{a} \int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} = \\ &= \left(\frac{M}{2}\right) \ln\left(t^2 + a^2 + \frac{2N - Mp}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C\right) = \\ &= \frac{M}{2} \ln\left(x^2 + px + q\right) + \frac{2N - Mp}{2\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C. \end{aligned} \quad (3.8)$$

IV типдаги қасрнинг интеграллини ҳисоблашда юқоридаги

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 81 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$t = x + \frac{p}{2}, \quad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \text{ белгилашлардан фойдаланамиз:}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^r} dx &= \int \frac{Mt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^r} dt = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^r} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r} = \frac{M}{2(r-1)} \cdot \\ &\cdot \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r} = \frac{M}{2(r-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{r-1}} + \\ &+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r} = -\frac{M}{2(r-1)} \frac{1}{(x^2 + px + q)^{r-1}} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^r} \end{aligned}$$

кейинги интеграл (2.18) рекуррент формула орқали ҳисобланади.

Шундай қилиб, ҳар қандай ҳақиқий коэффициентли ҳақиқий ўзгарувчили рационал (рационал каср) функциянинг бошланғич функцияси — логарифм, арктангенс ва рационал функция орқали ифодалар экан.

3.1 – мисол. Ушбу

$$\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx$$

интегрални ҳисобланг

Ечилиши. Интеграл остидаги каср — нотўғри каср бўлганлиги

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 82 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

учун, (3.2) га асосан, $P_6(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4$ кўпхадни $Q_5(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ кўпхадга бўлиб, $w(x) = x$ бўлинма ва $P_4(x) = 3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 4$ қолдиқни топамиз, яъни

$$\frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} = x + \frac{3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x}.$$

Равшанки, $Q_5(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ кўпхад $x = 1$ ҳақиқий илдизга эга,

$Q_5(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$ кўпхадни $x - 1$ га бўлиб,

$$Q_5(x) = x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

кўринишга келтирамыз.

3.1–теоремага асосан, $\frac{P_4(x)}{Q_5(x)}$ каср (3.6) кўринишдаги содда касрлар

йиғиндиси сифатида тасвирланади, яъни

$$\frac{3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 4}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+2}. \quad (3.9)$$

Охирги тенгликни умумий махражга келтириб, ушбу

$$3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 4 = A(x^2 - 1)(x^2 - 4) + Bx \cdot (x+1)(x^2 - 4) + C \cdot x(x-1)(x^2 - 4) + D \cdot x(x^2 - 1)(x+2) + E \cdot x(x^2 - 1)(x-2)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Тенгликнинг ўнг томонидаги қавсларни очиб,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 83 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

кўпхадларнинг ўзаро тенглиги ҳақидаги хоссадан фойдаланиб, x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз:

$$\left. \begin{array}{l} x^4 | 3 = A + B + C + D + E \\ x^3 | 3 = B + C + 2D - 2E \\ x^2 | -13 = -5A - 4B - 4C - D - E \\ x | 0 = -4B + 4C - 2D + 2E \\ x^0 | 4 = 4A \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

Натижада, A, B, C, D, E номаълумларга нисбатан бешта чизиқли алгебраик тенгламалар системаси ҳосил қилинди. Бу системани ечиб, номаълум номаълум коэффициентларни топамиз: бунда, $A=1$, (3.10) системанинг иккинчиси ва тўртинчисини бирга ечиб, $B=C-1$ эканлигини, биринчи ва учинчисини бирга ечиб, $D=-E$ эканлигини топамиз. Буларни эътиборга олиб, тўртинчи тенгламадан, $C=\frac{3}{2}$, $B=\frac{1}{2}$ эканлигини топамиз. Шундай қилиб, номаълум коэффициентларнинг ҳаммаси топилди:

$$A=1, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=\frac{3}{2}, \quad D=1, \quad E=-1.$$

Демак,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 84 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned} \int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx &= \int \left(x + \frac{3x^4 + 3x^3 - 13x^3 + 4}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)} \right) dx = \\ &= \int x dx + \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2} = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + \\ &+ \frac{1}{2} \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x+1| + \ln|x-2| - \ln|x+2| + C = \frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{x(x-2)(x+1)\sqrt{x^2-1}}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

Тўғри рационал касрларни номаълум коэффициентли (3.6) кўринишдаги содда касрлар йиғиндиси шаклида тасвирлаганда, ундаги номаълум коэффициентларни юқорида кўрсатилган (3.1–мисолга қ.), номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланиб топишда, чизиқли алгебраик тенгламаларни ечишга тўғри келади, лекин чизиқли тенгламалар системасини ечиш, ҳар доим ҳам енгил бўлавермайди. Хусусий ҳолларда, номаълум коэффициентлар усулига қараганда, қулайроқ бўлган, яъни номаълум коэффициентларни топишда осонроқ бўлган, усуллар мавжуд. Масалан, *Хевисайд усули*, *Горнер схемаси*, *дифференциаллашдан* фойдаланиш усуллари, шулар жумласига киради.

3.1.1.Хевисайд усули. Агар $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} (m < n)$ тўғри касрнинг махражи

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 85 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$Q_n(x)$, ушбу

$$Q_n(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n), a_n = 1, \quad (3.11)$$

кўринишда тасвирланса, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — ҳақиқий сонлар бўлиб,

$Q_n(\alpha_i) = 0$, ($i = \overline{1, n}$), унинг (3.6) шаклдаги содда касрларга ёйилмасидаги коэффицентларни, Хевисайд усулидан фойдаланиб, топиш мақсадга мувофиқ бўлади. Бу усулни, қисқача, қуйидаги тартибда амалга оширамиз:

1-қадам. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} (m < n)$ тўғри касрнинг махражи $Q_n(x)$ нинг (3.11)

ифодадаги кўпайтувчилари орқали ёзиш, яъни

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)}.$$

2-қадам. $Q_n(x)$ нинг $(x - \alpha_i) (i = \overline{1, n})$ кўпайтувчисини вақтинча ёпиб, i нинг ҳар бир қийматида ёпилмаган кўпайтувчиларда x ни α_i сон билан алмаштирамиз. Бу эса, ҳар бир α_i илдиз учун A_i сонни беради:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 86 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$A_1 = \frac{P_m(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2) \dots (\alpha_1 - \alpha_n)},$$

$$A_2 = \frac{P_m(\alpha_2)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3) \dots (\alpha_2 - \alpha_n)},$$

.....

$$A_n = \frac{P_m(\alpha_n)}{(\alpha_n - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_2) \dots (\alpha_n - \alpha_{n-1})}.$$

3-қadam. $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ($m < n$) рационал касрни

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{A_n}{x - \alpha_n}$$

кўринишда ёзиш.

Мисол учун, бу усулни **3.1** - мисолга татбиқ қилсак, A, B, C, D, E коэффициентларни осонгина топиш мумкин:

1 - қadam.

$$\frac{P_4(x)}{Q_5(x)} = \frac{3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 4}{x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1, \quad \alpha_4 = 2, \quad \alpha_5 = -2.$$

2 - қadam. $A = \frac{4}{(-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2} = 1$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 87 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$B = \frac{-3}{1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 3} = \frac{1}{2};$$

$$C = \frac{3 - 3 - 13 + 4}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot 1} = \frac{3}{2},$$

$$D = \frac{3 \cdot 16 + 3 \cdot 8 - 13 \cdot 4 + 4}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4} = 1,$$

$$E = \frac{3 \cdot 16 - 3 \cdot 8 - 13 \cdot 4 + 4}{(-2) \cdot (-3) \cdot (-1) \cdot (-4)} = -1.$$

3 - қадам. Берилган $\frac{P_4(x)}{Q_5(x)}$ туғри касрни,

$$\frac{P_4(x)}{Q_5(x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-2} + \frac{E}{x+2} =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

кўринишда ёзамиз.

Кўп ҳолларда x нинг қийматларини, масалан, $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ кабиларни, танлаш ёрдамида ҳам номаълум коэффициентларни топиш қулай бўлади.

3.2-мисол. x нинг сонли қийматлари ёрдамида

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 88 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ифодадаги A, B, C коэффициентлар топилсин.

Ечилиши. Дастлаб тенгламада касрдан кутиламиз:

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2). \quad (3.12)$$

Энди A, B, C коэффициентларни топиш учун, мос равишда, (3.12) тенгликда

$x=1, x=2, x=3$, қийматларни кетма-кет қўямиз:

$$1+1 = A(-1)(-2), 2 = 2A, A=1$$

$$2^2 + 1 = -B, B = -5,$$

$$3^2 + 1 = 2C, C = 5.$$

Натижада,

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

бўлади.

3.3 - мисол. Ушбу

$$\frac{x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

касрнинг номаълум коэффициентли содда касрлар йиғиндиси шаклидаги ифодасидаги номаълум коэффициентларни топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 89 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. 1 - қадам. Берилган касрнинг махражини кўпайтувчиларга ажратамиз:

$$Q_3(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x^2 + 5x + 6) = (x+1)(x+2)(x+3).$$

Демак, $Q_3(x)$ махраж, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -3$ содда хақиқий илдизларга эга. Шунга асосан, берилган касрни,

$$\frac{x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

2 - қадам.

$$\alpha = -1: A_1 = \frac{-1}{1 \cdot 2} = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_2 = -2: A_2 = \frac{-2}{-1 \cdot 1} = 2,$$

$$\alpha_3 = -3: A_3 = \frac{-3}{2 \cdot (-1)} = -\frac{3}{2}.$$

3 - қадам. Берилган касрни, ушбу

$$\frac{x}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{2}{x+2} - \frac{3}{2(x+3)}$$

кўринишда ёзамиз.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 90 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3.1.2. Дифференциаллашдан фойдаланиш усули. Бу усулни, $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$

($m < n$) тўғри касрнинг $Q_n(x)$ махражи, ҳақиқий каррали илдизларга эга бўлганда қўллаш қулай бўлади.

3.4 - мисол. Ушбу

$$\frac{x-1}{(x+2)^3} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

тенгламада A, B, C номаълум коэффициентларни дифференциаллашдан фойдаланиш усули бўйича топиш жараёнини батафсил қараб чиқамиз.

Ечилиши. 1-қадам. Дастлаб касрдан қутиламиз:

$$x-1 = A(x+2)^2 + B(x+2) + C \quad (3.13)$$

Бу тенгламада, $x = -2$ деб олсак, $C = -3$ бўлишини топамиз.

2-қадам. (3.13) тенгликнинг иккала томонини x га нисбатан дифференциаллаб,

$$1 = 2A(x+2) + B \quad (3.14)$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Бунда $x = -2$ деб олсак, $B = 1$ бўлади.

3-қадам. Энди (3.14) тенгликнинг иккала томонини x га нисбатан дифференциалласак, натижада

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 91 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$0 = 2A, A = 0$$

бўлади.

Демак,

$$\frac{x-1}{(x+2)^3} = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{3}{(x+2)^3}$$

3.1.3 Горнер схемаси. Ҳар қандай n – даражали

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

кўпхадни $x - \alpha$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйиш мумкин:

$$\tilde{P}_n(x) = A_n(x - \alpha)^n + A_{n-1}(x - \alpha)^{n-1} + \dots + A_2(x - \alpha)^2 + A_1(x - \alpha) + A_0,$$

бунда $A_i (i = \overline{0, n})$ номаълум коэффициентлар. Горнер схемасини кетма-кет қўллаш ёрдамида, $A_i (i = \overline{0, n})$ номаълум коэффициентларни топиш жадвалини келтирамиз:

		x^n	x^{n-1}	x^{n-2}	...	x	x^0
		a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
x^0	α	a_n	$\alpha a_n + a_{n-1} = b_{n-1}$	$\alpha b_{n-1} + a_{n-2} = b_{n-2}$	...	$\alpha b_2 + a_1 = b_1$	$\alpha b_1 + a_0 = A_0$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 92 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

x^1	α	a_n	$\alpha a_n + b_{n-1} = c_{n-1}$	$\alpha c_{n-1} + b_{n-2} = c_{n-2}$	...	$\alpha c_2 + b_1 = A_1$	
x^2	α	a_n	$\alpha a_n + c_{n-1} = d_{n-1}$	$\alpha d_{n-1} + c_{n-2} = d_{n-2}$	...		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x^n	α	a_n	$\alpha a_n + \ell_{n-1} = h_{n-1}$	$\alpha h_{n-1} + \ell_{n-2} = A_{n-2}$			
x^n	α	a_n	$\alpha a_n + h_{n-1} = A_{n-1}$				
x^n	α	$a_n = A_n$					

$$P_n(x) = A_n(x - \alpha)^n + A_{n-1}(x - \alpha)^{n-1} + \dots + A_2(x - \alpha)^2 + A_1(x - \alpha) + A_0,$$

кўпхадни $(x - \alpha)^{n+1}$ га бўламиз, натижада, $\frac{P_n(x)}{(x - \alpha)^{n+1}}$ тўғри рационал касрни

содда касрларга ёйган бўламиз:

$$\frac{P_n(x)}{(x - \alpha)^{n+1}} = \frac{A_n}{x - \alpha} + \frac{A_{n-1}}{(x - \alpha)^2} + \dots + \frac{A_2}{(x - \alpha)^{n-2}} + \frac{A_1}{(x - \alpha)^{n-1}} + \frac{A_0}{(x - \alpha)^{n+1}}$$

3.5- мисол. Ушбу $\frac{x^4 - 2x^2 + 3}{(x + 1)^5}$ тўғри рационал касрни содда касрларга

ёйинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 93 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Горнер схемасидан фойдаланиб, $P_4(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

кўпхадни $x+1$ иккихаднинг даражалари бўйича ёямиз. Дастлаб қуйидаги жадвални тузамиз:

		x^4	x^3	x^2	x	x^0
		1	0	-2	0	3
x^0	-1	1	-1	-1	1	$2=A_0$
x^1	-1	1	-2	1	$0=A_1$	
x^2	-1	1	-3	$4=A_2$		
x^3	-1	1	$-4=A_3$			
x^4	-1	$1=A_4$				

Бу жадвалга асосан, $P_4(x) = (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 4(x+1)^2 + 0(x+1) + 2$ кўпхадни тузамиз. Энди $P_4(x)$ кўпхадни $(x+1)^5$ га бўлиб, берилган тўғри рационал касрни содда касрлар орқали ёйилмасига эга бўламиз:

$$\frac{P_4(x)}{(x+1)^5} = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} + \frac{2}{(x+1)^5}.$$

3.6 - мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 94 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x+1)^2(x^2+1)^2} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. 1 - қадам. Берилган интегралда $P_2(x) = 4x^2 - 8x$,

$Q_6(x) = (x+1)^2(x^2+1)^2$, интеграл остидаги функция тўғри касрдан иборат бўлгани учун, 3.1- теоремага асосан, интеграл остидаги тўғри касрни қуйидаги содда касрлар йиғиндиси шаклида тасвирлаймиз:

$$\frac{4x^2 - 8x}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)},$$

бунда A, B, C, D, E, M, N - номаълум коэффициентлар.

2 - қадам. Охирги касрни умумий махражга келтириш натижасида,

$$4x^2 - 8x = A(x^2+1)^2 + B(x+1)(x^2+1)^2 + (Dx+E)(x+1)^2 + (Mx+N)(x+1)^2(x^2+1) \quad (3.15)$$

муносабатга эга бўламиз. (3.15) нинг икки томонидаги кўпхадларнинг мос коэффициентларини тенглаштириш натижасида, номаълум A, B, C, D, E, M, N коэффициентларга нисбатан чизиқли тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Лекин, бу системани ечишга нисбатан қулайроқ

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 95 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

(осонрок) усул мавжуд бўлиб, у қуйидагича амалга оширилади: (3.15)

тенгликда $x = -1$ деб олиб, $A = 3$ эканлигини топамиз. Сўнгра, $x = i$ деб олсак,

$$-4 - 8i = (Di + E)(i + 1)^2 = -2D + i2E,$$

бунда ҳақиқий ва мавхум қийматларни тенглаштириб,

$$-4 = -2D, \quad -8 = 2E, \quad D = 2, \quad E = -4$$

ларни топамиз.

3 - қадам. (3.15) тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаб, сўнгра $x = -1$ да нолга айланмайдиган ҳадларини ёзиб оламиз:

$$8x - 8 = 4A(x^2 + 1) \cdot x + B(x^2 + 1)^2 + \dots$$

бундан, $x = -1$ деб олсак, $-16 = -8A + 4B = -24 + 4B$ $8 = 4B$; $B = 2$ бўлади.

4 - қадам. (3.15) нинг иккала томонини дифференциаллаб, фақат $x = i$ да нолга айланмайдиган ҳадларни ёзиб оламиз:

$$8x - 8 = D(x + 1)^2 + 2(Dx + E)(x + 1) + (Mx + N)(x + 1)^2 \cdot 2x + \dots$$

Бу тенгликнинг иккала томонига $x = i$ ни қўйиб, қолган иккита коэффицентларни топамиз:

$$8i - 8 = 2(i + 1)^2 + 2(2i - 4)(i + 1) + (Mi + N)(i + 1)^2 \cdot 2i$$

$$8i - 8 = -12 - 4Mi - 4N, \quad 4 - 8i = -4N - 4Mi,$$

$$4 = -4N, \quad -8 = -4M, \quad N = -1, \quad M = 2.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 96 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5 - қадам. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2 - 8x}{(x+1)^2(x^2+1)^2} &= \int \left(\frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \right) dx = \\ &= 3 \int \frac{dx}{(x+1)^2} + 2 \int \frac{dx}{x+1} + 2 \int \frac{x-2}{(x^2+1)^2} + \int \frac{2x-1}{x^2+1} dx = \\ &= -\frac{3}{x+1} + 2 \ln|x+1| - \frac{1}{x^2+1} - 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} + \ln|x^2+1| - \arctg x.\end{aligned}$$

кейинги интеграл (2.18) рекуррент формула орқали топилади:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \arctg x + C.$$

Демак,

$$\int \frac{4x^2 - 8x}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{3}{x+1} - \frac{2x+1}{x^2+1} + \ln(x+1)^2(x^2+1) - 3 \arctg x + C.$$

Рационал касрларни содда касрларга ёйиб интеграллашда кўп ҳолларда, мураккаб ҳисоблашлар бажаришга тўғри келади. Баъзи ҳолларда, интеграл остидаги рационал касрнинг шаклини алмаштириб, ўзгарувчиларни алмаштириш, бўлаклаб интеграллаш усулларида фойдаланиш, берилган интегрални ҳисоблашни енгиллаштиради.

3.7 - мисол. Қуйидаги:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 97 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$1) \int \frac{dx}{x^2(3+x^2)^2}; \quad 2) \int \frac{dx}{x^3(x^2+2)}; \quad 3) \int \frac{dx}{x(2-x^3)^2};$$

$$4) \int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1}; \quad 5) \int \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^3};$$

$$6) \frac{1}{x^4(1+x^2)}; \quad 7) \frac{2x^9+3x^4}{(x^{10}+1)^2}$$

интегралларни ҳисобланг.

Ечилиши.

$$1) \int \frac{dx}{x^2(3+x^2)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{3-x^2+x^2}{x^2(3+x^2)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2(3+x^2)} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(3+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{9} \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3+x^2} \right) dx - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(3+x^2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{9x} - \frac{1}{9\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x}{18(x^2+3)} - \frac{1}{18\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\frac{1}{9x} - \frac{x}{18(x^2+3)} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$2) \int \frac{dx}{x^3(x^2+2)} = \int \frac{x dx}{x^4(x^2+2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^4(x^2+2)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2(u+2)} \Big|_{u=x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{u+2-u}{u^2(u+2)} du = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u(u+2)} =$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 98 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$= -\frac{1}{2u} - \frac{1}{4} \ln|u| + \frac{1}{4} \ln|u+2| + C = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+2}{x^2} + C.$$

$$3) \int \frac{dx}{x(2-x^3)^2} = \int \frac{x^2 dx}{x^3(2-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{x^3(2-x^3)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u(2-u)^2} \Bigg|_{u=x^3} =$$

$$= \frac{1}{6} \int \frac{1}{2-u} \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{2-u} \right) du = -\frac{1}{6} \int \frac{du}{(2-u)^2} - \frac{1}{12} \int \frac{du}{2-u} + \frac{1}{12} \int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{6(2-u)} - \frac{1}{12} \ln|2-u| + \frac{1}{12} \ln|u| + C = \frac{1}{6(2-x^3)} + \frac{1}{12} \ln \left| \frac{x^3}{2-x^3} \right| + C$$

$$4) \int \frac{x^2+1}{x^4+3x^2+1} dx = \int \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(x^2 + 3 + \frac{1}{x^2} \right)} dx = \int \frac{d \left(x - \frac{1}{x} \right)}{\left(x - \frac{1}{x} \right)^2 + 5} =$$

$$= \int \frac{du}{u^2+5} \Bigg|_{u=x-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{5}} + C \right) \Bigg|_{u=\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{5}} + C.$$

$$5) \int \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^3} = \int \frac{x \cdot x dx}{(x^2+3)^3} = \frac{1}{3} \int \frac{x d(x^2+3)}{(x^2+3)^3} =$$

$$\left[u = x, \quad dv = \frac{d(x^2+3)}{(x^2+3)^3}, \quad du = dx, \quad v = -\frac{1}{2(x^2+3)^2} \right]$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 99 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$= \frac{1}{3} \left(-\frac{x}{2(x^2+3)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x^2+3)^2} \right) = -\frac{x}{6(x^2+3)} + \frac{1}{36} \frac{x}{x^2+3} +$$

$$+ \frac{1}{36\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$5) \int \frac{x^2 dx}{(x^2+3)^3} = \int \frac{x^2+3-3}{(x^2+3)^3} dx = \int \frac{dx}{(x^2+3)^2} - 3 \int \frac{dx}{(x^2+3)^3} =$$

$$= \frac{x}{6(x^2+3)} + \frac{1}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{x}{4(x^2+3)^2} -$$

$$- \frac{1}{8} \frac{x}{(x^2+3)} - \frac{1}{8\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{24} \cdot \frac{x}{x^2+3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{(x^2+3)^2} + \frac{1}{24\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C$$

$$6) \int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx = \int \frac{1-x^4+x^4}{x^4(1+x^2)} dx = \int \frac{(1-x^2)(1+x^2)+x^4}{x^4(1+x^2)} dx =$$

$$= \int \frac{1-x^2}{x^4} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$$

$$7) \int \frac{2x^9+3x^4}{(x^{10}+1)^2} dx = \frac{1}{5} \int \frac{d(x^{10}+1)}{(x^{10}+1)^2} + \frac{3}{5} \int \frac{dx^5}{((x^5)^2+1)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{u^2} \Big|_{u=x^{10}+1} + \frac{3}{5} \int \frac{du}{(u^2+1)^2} \Big|_{u=x^5} =$$

$$= -\frac{1}{x(x^{10}+1)} + \frac{x^5}{2(x^5+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^5 + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 100 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3.2. Интегралнинг рационал қисмини ажратишда Остроградский усули.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри касрнинг махражи қаррали комплекс илдизларга эга

бўлганда, уни интеграллашда, мураккаб ҳисоблашлар бажаришга тўғри келади.

Бундай ҳолларда, ушбу

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (3.16)$$

Остроградский формуласидан фойдаланиш қулай бўлади, бунда $Q_2(x)$ – илдизлари $Q(x)$ кўпхаднинг ҳамма содда (бир қаррали) илдизларидан иборат бўлган кўпхад, $Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$, $P_1(x)$ ва $P_2(x)$ лар ноъмалум коэффициентли кўпхадлар бўлиб, $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ ва $\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ тўғри касрлардан иборат.

$P_1(x)$ ва $P_2(x)$ кўпхадларни топиш учун, уларни ноъмалум коэффициентлар ёрдамида ёзиб олиб, сўнгра, (3.16) нинг иккала томонини дифференциаллаймиз, натижада, (3.16) тенгликка тенг қилиш,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 101 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \left(\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right)' + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad (3.17)$$

тенгликга эга бўламиз. Бу тенгликдан номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланиб, $P_1(x)$ ва $P_2(x)$ ларнинг таркибидаги номаълум коэффициентларни топамиз. Остроградский формуласи, интегралнинг рационал қисмини (интегралламасдан) ажратишга имкон беради, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ тўғри

касрни интеграллаш масаласи, унга нисбатан осонроқ интегралланадиган

$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ тўғри касрни интеграллашга келтирилади.

3.8-мисол. Ушбу $\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Бу ҳолда, $P(x) = x-1$, $Q(x) = (x^2+x+1)^2$, $Q_1(x) = x^2+x+1$,

$Q_2(x) = x^2+x+1$. (1) формулага асосан,

$$\int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} dx = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1} dx$$

деб ёзиб оламиз. A, B, C, D номаълум коэффициентларни топиш учун, юқоридаги тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 102 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} = \left(\frac{Ax+B}{x^2+x+1} \right)' + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$$

$$\frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{A(x^2+x+1) - (Ax+B)(2x+1) + Cx+D}{(x^2+x+1)^2},$$

бундан

$$x-1 = A(x^2+x+1) - (Ax+B)(2x+1) + (Cx+D)(x^2+x+1).$$

Тенгликнинг иккала томонидаги x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаштирамиз:

$$\begin{aligned} x^3 | \quad 0 &= C, \\ x^2 | \quad 0 &= A - 2A + C + D, \\ x | \quad 1 &= A - A - 2B + C + D, \\ x^0 | \quad -1 &= A - B + D, \end{aligned}$$

бундан, $C = 0$, $A = D = B = -1$.

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{(x^2+x+1)^2} dx &= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \\ &= -\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 103 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Интегралларни ҳисобланг:

$$3.1. \int \frac{dx}{x(2+x)}.$$

$$3.2. \int \frac{dx}{x(5+2x)}.$$

$$3.3. \int \frac{dx}{x\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{7}x\right)}.$$

$$3.4. \int \frac{dx}{x(a+bx)}.$$

$$3.5. \int \frac{dx}{(x+1)(x-3)}.$$

$$3.6. \int \frac{dx}{(2x+3)(x+4)}.$$

$$3.7. \int \frac{dx}{(3x+5)(4x+9)}.$$

$$3.8. \int \frac{dx}{(a+bx)(c+fx)}.$$

$$3.9. \int \frac{xdx}{(x+3)(x-4)}.$$

$$3.10. \int \frac{xdx}{(2x+5)(3x-4)}.$$

$$3.11. \int \frac{xdx}{(a+bx)(c+fx)}.$$

Интегралларни ҳисобланг:

$$3.12. \int \frac{dx}{x(4+x^2)}.$$

$$3.13. \int \frac{dx}{x(3+4x)^2}.$$

$$3.14. \int \frac{dx}{x(a+bx)^2}.$$

$$3.15. \int \frac{dx}{(2+x)(x-3)^2}.$$

$$3.16. \int \frac{dx}{(3-4x)(5-2x)^2}.$$

$$3.17. \int \frac{dx}{(a+bx)(c+fx)^2}.$$

$$3.18. \int \frac{xdx}{(x-3)(2x+5)^2}.$$

$$3.19. \int \frac{xdx}{(a+bx)(c+fx)^2}.$$

$$3.20. \int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 104 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3.3. Интегралларни ҳисобланг:

$$3.21. \int \frac{dx}{x(a+bx)(c+fx)}.$$

$$3.22. \int \frac{dx}{x(x^2+3x+5)}.$$

$$3.23. \int \frac{dx}{(x-3)(3x^2+4x+2)}.$$

$$3.24. \int \frac{dx}{(2x+5)(x^2-4x+7)}.$$

$$3.25. \int \frac{4x+8}{4x^2+6x-13} dx.$$

$$3.26. \int \frac{x+2}{3x^2-x+5} dx.$$

$$3.27. \int \frac{\alpha x + \beta}{ax^2+bx+c} dx.$$

$$3.28. \int \frac{(x^2+x+1)dx}{(x-3)(x^2+4)}.$$

$$3.29. \int \frac{3x^3-16x^2-x+51}{3x^2-7x-20} dx.$$

$$3.30. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$$

Интегралларни ҳисобланг:

$$3.31. \int \frac{x^6-2x^4-3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x} dx.$$

$$3.32. \int \frac{x^5-2x^2+3}{x^2-4x+4} dx.$$

$$3.33. \int \frac{2x^4-3x^3+4x^2-5x+6}{x^2-3x+1} dx.$$

$$3.34. \int \frac{x^3-x+1}{(x-2)^5} dx.$$

$$3.35. \int \frac{x^4-2x^2+3}{(x-1)^5} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 105 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Интегралларни ҳисобланг:

$$3.36. \int \frac{x^2 + 1}{x(x-1)^3} dx.$$

$$3.38. \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

$$3.40. \int \frac{x^2}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx.$$

$$3.42. \int \frac{x^2}{x^4 - 16} dx.$$

$$3.37. \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}.$$

$$3.39. \int \frac{x^2}{(1-x^2)^3} dx.$$

$$3.41. \int \frac{1+x}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

$$3.43. \int \frac{5x^2 + 6x - 23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} dx.$$

3.6. Интегралларни ҳисобланг:

$$3.44. \int \frac{x^3 + x + 1}{x^4 - 1} dx.$$

$$3.46. \int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx.$$

$$3.48. \int \frac{(3x^2 - 2)x dx}{(x+2)^2(3x^2 - 2x + 4)}.$$

$$3.45. \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 4x + 3)}.$$

$$3.47. \int \frac{(3x^2 - 2)dx}{9x^4 - 13x^2 + 4}.$$

$$3.49. \int \frac{18 - 11x}{(x^2 - 9x + 20)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 106 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$3.1. -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2}{x} + 1 \right| + C. \quad 3.2. -\frac{1}{5} \ln \left| \frac{5}{x} + 2 \right| + C. \quad 3.3. -\frac{2}{3} \ln \left| \frac{3}{2x} + \frac{5}{7} \right| + C. \quad 3.4. -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| + C.$$

$$3.5. -\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+1}{x-3} \right| + C. \quad 3.6. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{2x+3}{x+4} \right| + C. \quad 3.7. \frac{1}{7} \ln \left| \frac{3x+5}{4x+9} \right| + C. \quad 3.8. \frac{1}{bc-af} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right| + C.$$

$$3.9. \frac{1}{7} [3 \ln |x+3| + 4 \ln |x-4|] + C. \quad 3.10. \frac{1}{23} \left[\frac{5}{2} \ln |2x+5| + \frac{4}{3} \ln |3x-4| \right] + C.$$

$$3.11. \frac{1}{af-bc} \left[\frac{a}{b} \ln |a+bx| - \frac{c}{f} \ln |c+fx| \right] + C. \quad 3.12. \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4+x} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{4}{x} + 1 \right| \right) + C.$$

$$3.13. \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3+4x} - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3}{x} + 4 \right| \right] + C. \quad 3.14. \frac{1}{a} \left[\frac{1}{a+bx} - \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a}{x} + b \right| \right] + C.$$

$$3.15. \frac{-1}{5(x-3)} + \frac{1}{25} \ln \left| \frac{x+2}{x-3} \right| + C. \quad 3.16. \frac{1}{14(2x-5)} - \frac{1}{49} \ln \left| \frac{3-4x}{5-2x} \right| + C.$$

$$3.17. \frac{1}{(bc-af)(c+fx)} + \frac{b}{(af-bc)^2} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right| + C. \quad 3.18. -\frac{5}{22(2x+5)} + \frac{6}{121} \ln \left| \frac{x-3}{2x+5} \right| + C.$$

$$3.19. \frac{c}{f(af-bc)(c+fx)} - \frac{af}{b(af-bc)^2} \ln \left| \frac{a+bx}{c+fx} \right| + C.$$

$$3.20. \frac{1}{2} \ln |4x^2 - 4x + 5| + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{2} + C.$$

$$3.21. \frac{1}{ac} \ln |x| + \frac{b}{a(af-bc)} \ln |a+bx| - \frac{c}{c(af-bc)} \ln |c+fx| + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 107 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$3.22. \frac{1}{10} \ln \frac{x^2}{x^2 + 3x + 5} - \frac{3}{5\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{11}} + C.$$

$$3.23. \frac{1}{82} \ln \left| \frac{(x-3)^2}{3x^2 + 4x + 2} \right| - \frac{11}{41\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x+2}{\sqrt{2}} + C.$$

$$3.24. \frac{1}{93} \ln \left| \frac{(2x+5)^2}{x^2 - 4x + 7} \right| + \frac{\sqrt{3}}{31} \operatorname{arctg} \frac{2x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

$$3.25. \frac{1}{2} \ln |4x^2 + 6x - 13| + \frac{5}{2\sqrt{61}} \ln \left| \frac{4x+3-\sqrt{61}}{4x+3+\sqrt{61}} \right| + C.$$

$$3.26. \frac{1}{6} \ln |3x^2 - x + 5| + \frac{13}{3\sqrt{59}} \operatorname{arctg} \frac{6x-1}{\sqrt{59}} + C.$$

$$3.27. \begin{cases} \frac{\alpha}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2a\beta - b\alpha}{a\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}, & 4ac - b^2 > 0 \\ \frac{\alpha}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2a\beta - b\alpha}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right|, & b^2 - 4ac > 0 \end{cases} + C.$$

$$3.28. \ln |x-3| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$3.29. \frac{(x-3)^2}{2} + \frac{1}{3} \ln |3x+5| - \ln |x-4| + C.$$

$$3.30. \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln \left| \frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} \right| + C. \quad 3.31. \frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{x(x-2)(x+1)\sqrt{x^2-1}}{x+2} \right| + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 108 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$3.32. \frac{x^4}{4} + \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 30x - \frac{27}{x-2} + 72\ln|x-2| + C.$$

$$3.33. \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 11x + \frac{5}{2}\ln|x^2 - 3x + 1| + \frac{13}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + C.$$

$$3.34. -\frac{1}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{11}{3(x-2)^3} - \frac{7}{4(x-2)^4} + C.$$

$$3.35. \ln|x+1| + \frac{4}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{2(x+1)^4} + C.$$

$$3.36. -\frac{1}{(x-2)^2} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

$$3.37. \frac{16-21x-6x^2}{250(x-2)(x+3)^2} - \frac{3}{625}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C.$$

$$3.38. \frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right| + C. \quad 3.39. \frac{x^3+x}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

$$3.40. \frac{1}{12}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\ln|x+2| + \frac{9}{4}\ln|x+3| + C. \quad 3.41. \frac{1}{2}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + C.$$

$$3.42. \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C. \quad 3.43. \ln\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{x-1} + \frac{1}{x+1} + C.$$

$$3.44. \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

$$3.45. \frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 109 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\mathbf{3.46.} \ln \frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad \mathbf{3.47.} \frac{1}{10} \ln \frac{3x^2-5x+2}{3x^2+5x+2} + C.$$

$$\mathbf{3.48.} \frac{1}{x+2} + \ln|x+2| - \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{\sqrt{11}} + C. \quad \mathbf{3.49.} \ln \left| \frac{x-4}{x-5} \right| + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 110 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

4-§. Баъзи иррационал ифодаларни интеграллаш

Агар интеграл остидаги функция иррационал функция бўлса, баъзи ҳолларда унинг интегралини ҳисоблаш масаласи, рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга олиб келинади. Бу усулга интеграл остидаги ифодани рационаллаштириш усули дейилади. Биз бу параграфда иррационал ифодалар қатнашган интегралларнинг баъзи турларини рационаллаштириш усуллари келтирамиз. $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчиларга нисбатан рационал бўлган функцияни $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ деб белгилаймиз.

4.1. $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots, x^\nu) dx$ кўринишдаги ифодаларни интеграллаш.

Бунда $R(x, x^\alpha, x^\beta, \dots, x^\nu)$ - ўз аргументларининг рационал функцияси, $\alpha = \frac{m_1}{n_1}, \beta = \frac{m_2}{n_2}, \dots, \nu = \frac{m_s}{n_s}$ - рационал сонлар. Бу интегрални ҳисоблаш, $x = t^k (k - n_1, n_2, \dots$ ларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси) алмаштириш ёрдамида рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келтирилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 111 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

4.1-мисол. Ушбу $\int \frac{x + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги функция, $x_1 = x, x_2 = x^{\frac{1}{3}}, x_3 = x^{\frac{1}{6}}$

ўзгарувчиларга нисбатан рационал функция. Берилган интеграл 4.1- банддаги

интеграл кўринишида бўлиб, $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = \frac{1}{6}, n_1 = 3, n_2 = 6, k = 6$. Уни ҳисоблаш,

4.1- бандга асосан, $x = t^6$ алмаштириш ёрдамида рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келтирилади: $dx = 6t^5 dt$,

$$\int \frac{x + \sqrt[6]{x}}{x(1 + \sqrt[3]{x})} dx = \int \frac{t^6 + t}{t^6(1 + t^2)} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^5 + 1}{1 + t^2} dt = 6 \int (t^3 + 1) dt + 6 \int \frac{t + 1}{1 + t^2} dt =$$

$$= \frac{3}{2} t^4 + 3t^3 + 6 \arctgt + 3 \ln(1 + t) + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt{x} + 6 \arctg \sqrt[6]{x} + 3 \ln(1 + \sqrt[3]{x}) + C.$$

4.2.

$$\int R[x, (ax + b)^\alpha, (ax + b)^\beta, \dots, (ax + b)^\nu] dx, \quad (4.1)$$

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^\beta, \dots, \left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^\nu\right] dx \quad (a, b, c, d \in R, ad - cb \neq 0) \quad (4.2)$$

кўринишдаги ифодаларни интеграллаш.

(4.1) ёки (4.2) кўринишидаги интеграллар, мос равишда, $ax + b = t^k$ ёки

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 112 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ алмаштириш ёрдамида рационаллаштирилади, бунда $k - \alpha, \beta, \dots, \nu$

рационал сонларнинг энг кичик умумий бўлинувчиси.

4.2-мисол. Ушбу $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Берилган интеграл (4.2) кўринишдаги интеграл бўлиб,

$\frac{x-2}{x} = t^2$ алмаштириш ёрдамида рационаллаштирилиб, ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-2}{x}} dx &= \left| x = \frac{2}{1-t^2}, dx = \frac{4t}{(1-t^2)^2} dt \right| = 2 \int \frac{t^2(1-t^2)}{(1-t^2)^2} dt = -2 \int dt + 2 \int \frac{1}{1-t^2} dt = \\ &= -2t - \ln \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C = -2 \sqrt{\frac{x-2}{x}} - \ln \left[|x| \left(1 - \sqrt{\frac{x-2}{x}} \right)^2 \right] + C. \end{aligned}$$

4.3. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ кўринишдаги
ифодаларни интеграллаш.

Қуйидаги

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \quad (4.3)$$

кўринишдаги интеграллар, мос равишда $x = a \sin t, x = at \operatorname{tg} t, x = a \operatorname{sect} t, a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 113 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

алмаштиришлар натижасида рационаллаштирилиб, ҳисобланади.

4.3 -мисол. Ушбу $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Берилган интеграл (4.3) кўринишдаги ифодаларнинг биринчи интегрални кўринишида бўлганлиги учун, $x = 2 \sin t$ алмаштиришни бажариб, ҳисоблаймиз:

$$\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx = \left| x = 2 \sin t, \quad dx = 2 \cos t dt, \quad \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2 \cos t \right| =$$

$$= 16 \int \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int \sin^2 2t dt = 2 \int (1 - \cos 4t) dt = 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C.$$

$$\sin 4t = 2\sqrt{1-\sin^2 t} \sin t (1-2\sin^2 t), -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \sin\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}, -2 \leq x \leq 2$$

формулаларни эътиборга олган ҳолда, эски ўзгарувчига қайтиб, интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx = 2t - \frac{1}{2} \sin 4t + C = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{4} (x^2 - 2) \sqrt{4-x^2} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 114 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

4.4. $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ ($a \neq 0$, $b^2 - 4ac \neq 0$) кўринишдаги ифодаларни интеграллаш.

Қуйидаги

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \quad (4.3')$$

интегрални ҳисоблаш, ундаги a, b, c коэффициентларга боғлиқ, учта алмаштириш ёрдамида рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келтирилади:

1-ҳол. $a > 0$ бўлганда, (4.3') интегралда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$

алмаштириш бажарилади.

2-ҳол. $c > 0$ бўлганда, (4.3') интегралда $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$

алмаштириш бажарилади.

3-ҳол. $a \neq 0$, $b^2 - 4ac > 0$ бўлганда эса, (4.3') интегралда

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$ ёки $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_2)$ алмаштириш бажарилади.

Одатда, юқорида келтирилган учта алмаштиришлар - *Эйлер алмаштиришлари* деб айтилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 115 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

4.4 -мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $1+x-x^2$ квадрат учҳад комплекс илдизга эга ва $a < 0, c > 0$

бўлгани учун 2-ҳол асосан $\sqrt{1+x-x^2} = tx - 1$ алмаштиришни бажарамиз:

$$1+x-x^2 = t^2x^2 - 2tx + 1; 1-x = t^2x - 2t; x = \frac{1+2t}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2(1-t-t^2)}{(1+t^2)^2} dt, \quad \sqrt{1+x-x^2} = \frac{t^2+t-1}{t^2+1}$$

Шундай қилиб

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} &= \int \frac{2(1-t-t^2)}{(1+t^2)^2 \left(1 + \frac{1+2t}{t^2+1}\right) \cdot \left(\frac{t^2+t-1}{t^2+1}\right)} dt = \\ &= -2 \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} = -2 \operatorname{arctg}(t+1) + C = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x-x^2} + x + 1}{x} + C \end{aligned}$$

4.5 -мисол. Ушбу $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги $x^2 + 3x + 2$ квадрат учҳад $x_1 = -1, x_2 = -2$ ҳақиқий илдизлага эга бўлгани учун, 4.4- банддаги 3-ҳолга асосан, $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = t(x+1)$ алмаштириш бажариб, берилган интегрални ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 116 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$(x+1)(x+2)=t^2(x+1)^2; \quad x+2=t^2(x+1); \quad x=\frac{t^2-2}{1-t^2};$$

$$dx = \frac{2t(1-t^2) + 2t(t^2-2)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{2t-4t}{(1-t^2)^2} dx = -\frac{2t}{(1-t^2)^2} dt;$$

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx = \int \frac{x^2 + x^2 - 3x - 2}{\left(x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}\right)^2} dt = -\int \frac{3x + 2}{\left(x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}\right)^2} dx =$$

$$= 2 \int \frac{\left(\frac{3t^2-6}{1-t^2} + 2\right)t dt}{(1-t^2)^2 \left[\frac{t^2-2}{1-t^2} + t\left(\frac{t^2-2}{1-t^2} + 1\right)\right]^2} = 2 \int \frac{\frac{t(t^2-4)}{1-t^2}}{(1-t^2)^2 \left[\frac{t^2-t-2}{1-t^2}\right]^2} dt =$$

$$= 2 \int \frac{t(t^2-4)dt}{(1-t^2)(t+1)^2(t-2)^2} = 2 \int \frac{t(t+2)}{(1-t^2)(t+1)^2(t-2)} dt = 2 \int \frac{t(t+2)}{(1-t)(1+t)^3(t-2)} dt$$

Охирги интегралда, интеграл остидаги ифода тўғри каср бўлганлиги учун,

1.3.1 – теоремага асосан, уни, содда касрлар йиғиндиси шаклида,

$$\frac{2t(t+2)}{(1-t)(1+t)^3(t-2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{t-2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{(1+t)^2} + \frac{E}{(1+t)^3}$$

кўринишда тасвирлаб, A, B, C, D, E номаълум коэффициентларни топамиз.

Юқоридаги тенгликдан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 117 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2t(t+2) = A(t-2)(1+t)^3 + B(1-t)(1+t)^3 + c(1-t)(2-t)(1+t)^2 + \\ + D(1-t)(1+t)(t-2) + E(1-t)(t-2)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Охирги тенгликда $t=1, t=-1, t=2$ қийматларни

кетма – кет қўйиб, $A = -\frac{3}{4}, E = \frac{1}{3}, B = -\frac{16}{27}$ эканлигини топамиз. D коэффици-

ентни топиш учун,

$$2t(t+2) = A(t-2)(1+t)^3 + B(1-t)(1+t)^3 + c(1-t)(2-t)(1+t)^2 + \\ + D(1-t)(1+t)(t-2) + E(1-t)(t-2)$$

тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаб, сўнгра унга $t=-1$ ни келтириб қўямиз. Дифференциалланганда тенгликнинг ўнг томонида $t=-1$ да нолга айланмайдиган ҳадларни ёзиб оламиз:

$$4t + 4 = D[-2t(t-2)] + E[-(t-2) + (1-t)]$$

Бундан $t=-1$ деб, $0 = -6D + 5E = -6D + \frac{5}{3}, D = \frac{5}{18}$ эканлигини топамиз. Худди

шундай, C коэффициентни топишда ҳам,

$$2t(t+2) = A(t-2)(1+t)^3 + B(1-t)(1+t)^3 + c(1-t)(2-t)(1+t)^2 + \\ + D(1-t)(1+t)(t-2) + E(1-t)(t-2)$$

тенгликнинг иккала томонини дифференциаллаб, тенгликнинг ўнг томонида $t=1$ да нолга айланмайдиган ҳадларни ёзиб оламиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 118 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4t + 4 = A[(1+t)^3 + 3(t-2)(1+t)^2] + B[-(1+t)^3] + C[-(t-2)(1+t)^2] + D[-(1+t)(t-2)] - E(t-2)$$

Бундан, $t=1$ деб олиб,

$$8 = -4A - 8B + 4C + 2D + E = 3 + \frac{128}{27} + 4C + \frac{5}{9} + \frac{1}{3}, C = -\frac{17}{108} \text{ бўлишини топамиз.}$$

Демак,

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx = \frac{3}{4} \ln|t-1| - \frac{16}{27} \ln|t-2| - \frac{17}{108} \ln|1+t| - \frac{5}{18(t+1)} - \frac{1}{6(t+1)^2} + C,$$

$$\text{бунда } t = \frac{\sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x+1}.$$

4.5. Биномиал дифференциалларни интеграллаш.

4.1-таъриф. Ушбу $x^m(a+bx^n)^p dx$ -кўринишдаги ифодага, *биномиал дифференциал* дейилади, бунда a, b - хақиқий сонлар, m, n, p - лар эса, рационал сонлар.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx \quad (4.4)$$

кўринишдаги интегрални ҳисоблаш, қуйидаги учта ҳолда, рационал функцияни интеграллашга келтирилади:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 119 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

1-ҳол. p - бутун сон. Бу ҳолда m, n каср сонлар махражининг энг кичик умумий бўлинувчисини λ орқали белгилаб, (4.4) интегралда $x = t^\lambda$ алмаштириш бажарилса, интеграл остидаги ифода рационал ифодага айланиб, (4.4) интеграл рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

2-ҳол. $\frac{m+1}{n}$ - бутун сон. Бу ҳолда (4.4) интегралда $a + bx^n = t^s$, (s сон - p касрнинг махражи) алмаштириш бажарилса, интеграл остидаги ифода рационал ифодага айланиб, (4.4) интегрални ҳисоблаш рационал функцияни интеграллашга келтирилади.

3-ҳол. $\frac{m+1}{n} + p$ - бутун сон бўлсин. Бу ҳолда (4.4) интегралда, $t^s = ax^{-n} + b$ (s сон - p касрнинг махражи) алмаштириш бажарилиши натижасида рационал функция интегрални ҳисоблашга келтирилади.

4.6 – мисол. $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^4 dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги ифода биномиал дифференциал шаклидаги ифода бўлиб, бунда $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = 4$. p - бутун бўлганлиги учун,

4.5 - банддаги 1-ҳолга асосан, $t = \sqrt[6]{x}$, $x = t^6$ алмаштириш олинса, интеграл

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 120 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

остидаги ифода рационал кўринишга келади:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})^4 dx &= \int t^3(1+t^2)^4 6t^5 dt = 6 \int t^8(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8) dt = \\ &= 6 \left(\frac{t^9}{9} + \frac{4 \cdot t^{11}}{11} + 6 \cdot \frac{t^{13}}{13} + 4 \cdot \frac{t^{15}}{15} + \frac{t^{17}}{17} \right) + C = \\ &= \frac{2}{3} t^9 + \frac{24}{11} t^{11} + \frac{36}{13} t^{13} + \frac{8}{5} t^{15} + 6 \cdot \frac{t^{17}}{17} + C = \\ &= \frac{2}{3} x \sqrt{x} + \frac{24}{11} x^6 \sqrt{x^5} + \frac{36}{13} x^2 \sqrt[6]{x} + \frac{8}{5} x^2 \sqrt{x} + \frac{6}{17} x^2 \sqrt[6]{x^5} + C.\end{aligned}$$

4.7 – мисол. $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Бу ҳолда, $m = -5$, $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$ бўлиб, $\frac{m+1}{n} = \frac{-5+1}{4} = -1$ бутун

бўлгани учун, 4.5- банддаги 2-ҳолга асосан, $1-x^4 = t^2$ алмаштириш олиниб, интеграл остидаги ифода рационаллаштирилади:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx &= \int x^{-5}(1-x^4)^{\frac{1}{4}} dx = [x = (1+t^2)^{\frac{1}{4}}, dx = -\frac{1}{2}(1-t^2)^{-\frac{3}{4}} t dt] = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{t^2 dt}{(1-t^2)^{5/4} (1-t^2)^{3/4}} = -\frac{1}{2} \int \frac{t^2}{(1-t^2)^2} dt =\end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 121 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2-1}{(1-t^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \\
&= -\frac{1}{4} \ln|1-t| + \frac{1}{4} \ln|1+t| + \frac{1}{8} \ln|1-t| - \frac{1}{8(1-t)} - \frac{1}{8} \ln|1+t| + C = \\
&= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \frac{1}{8(1+t)} = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{8} \cdot \frac{t}{1-t^2} + C
\end{aligned}$$

бунда $t = \sqrt{1-x^4}$

4.8 – мисол. $\int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Берилган интегралда $m = \frac{1}{3}, n = 2, p = \frac{1}{3}, \frac{m+1}{n} + p = 1$ бутун

бўлгани учун, 4.5– банддаги 3- ҳолга асосан, $\frac{1}{x^2} - 1 = t^3$ алмаштириш бажариб,

ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx &= \int x^{\frac{1}{3}} (1-x^2)^{\frac{1}{3}} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = \frac{1}{1+t^3}, x = \sqrt{\frac{1}{1+t^3}}, \\ dx = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{t^3+1} \right)^{-\frac{3}{2}} t^2 dt \end{array} \right| = \\
&= -\int (1+t^3)^{-\frac{1}{6}} \cdot \frac{t}{(1+t^3)^{1/3}} \cdot \frac{3}{2} \left(\frac{1}{t^3+1} \right)^{-\frac{3}{2}} dt =
\end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 122 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$= -\frac{3}{2} \int \frac{t^3}{(1+t^3)^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2}}} dt = -\frac{3}{2} \int \frac{t^3}{(1+t^3)^2} \cdot dt =$$

$$= -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{1+t^3} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{(1+t^3)^2} = -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{(1+t)(t^2-t+1)} + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{(1+t)^2(t^2-t+1)^2}$$

Охирги интегралларда, интеграл остидаги ифодалар тўғри каср бўлгани учун, уларни номаълум коэффициентли содда касрлар йиғиндиси шаклида тасвирлаб, сўнгра номаълум коэффициентларни топиб, содда касрни интеграллаш усулидан фойдаланиб, интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\frac{1}{(1+t)(t^2-t+1)} = \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$$

бунда $1 = A(t^2 - t + 1) + (Bt + C) \cdot (1 + t)$, $1 = A(t^2 - t + 1) + (Bt + C) \cdot (1 + t)$ тенгликда $t = -1$

деб, $A = \frac{1}{3}$ эканлигини топамиз. t нинг бир хил даражалари олдидаги

коэффициентларни тенглаштириб, қуйидаги

$$\begin{aligned} t^2 \quad 0 &= A + B \\ t \quad 0 &= -A + B + C \\ t^0 \quad 1 &= A + C \end{aligned}$$

системани ҳосил қиламиз. Бундан, $C = \frac{2}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ бўлиши келиб чиқади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 123 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Худди шундай,

$$\frac{1}{(1+t)^2(t^2-t+1)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{Ct+D}{t^2-t+1} + \frac{Mt-N}{(t^2-t+1)^2}$$

ва

$$1 = A(1+t)(t^2-t+1)^2 + B(t^2-t+1)^2 + (Ct+D)(1+t)^2(t^2-t+1) + (Mt+N)(1+t)^2$$

тенгликни ҳосил қиламиз.

Охирги тенгликда $t = -1$ деб, $B = \frac{1}{3}$ эканлигини топамиз.

$$1 = A(1+t)(t^2-t+1)^2 + B(t^2-t+1)^2 + (Ct+D)(1+t)^2(t^2-t+1) + (Mt+N)(1+t)^2$$

тенгликнинг икки томонини дифференциаллаб, $t = -1$ да нулга айланмайдиган ҳадларни ёзиб оламиз:

$$0 = A(t^2-t+1)^2 + B2(2t-1)(t^2-t+1) + \dots$$

Бундан, $t = -1$ деб олсак, $0 = 9A - 18B$, $A = \frac{2}{3}$ бўлиши келиб чиқади.

$$1 = A(1+t)(t^2-t+1)^2 + B(t^2-t+1)^2 + (Ct+D)(1+t)^2(t^2-t+1) + (Mt+N)(1+t)^2$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 124 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тенгликнинг иккала томонидаги t нинг бир хил даражалари олдидаги

коэффициентларни тенглаштирамиз ва

$$t^5: 0 = A + C$$

$$t^4: 0 = -A + B + C + L$$

$$t^3: 0 = A - 2B + D + M$$

$$t^2: 0 = A + 3B + D + 2M + N$$

$$t: 0 = -A - 2B + C + D + M + 2N$$

$$t^0: 1 = A + B + D + N$$

системани ҳосил қиламиз. Бу системадан , $C = -\frac{2}{3}$, $D = 1$, $M = -1$, $N = -1$

қийматларни топамиз.

Демак,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 125 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{(1+t)^2(t^2-t+1)^2} &= \frac{2}{3} \ln|1+t| - \frac{1}{3(1+t)} - \frac{1}{3} \int \frac{d(t^2-1)}{(t^2-t+1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2+t+1} - \\
&- \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-t+1)}{(t^2-t+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(t^2-t+1)^2} = \frac{2}{3} \ln|1+t| - \frac{1}{3(1+t)} - \\
&- \frac{1}{3} \ln|t^2-t+1| + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(t - \frac{1}{2} \right)}{\left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}} + \\
&+ \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Шундай қилиб, берилган интеграл қуйидагича ҳисобланади, яъни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 126 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt[3]{x(1-x^2)} dx &= -\frac{1}{2} \ln|1+t| + \frac{1}{4} \ln|t^2-t+1| - \frac{3}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right) + \\
 &+ \ln|1+t| - \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2} \ln|t^2-t+1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right) + \\
 &+ \frac{3}{4\sqrt{3}} \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right) + C = \\
 &= \frac{1}{2} \ln|1+t| + \frac{3}{4} \ln|t^2-t+1| - \frac{1}{2(1+t)} + \frac{5}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{2}\right) + \\
 &+ \frac{3}{4\sqrt{3}} \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + C,
 \end{aligned}$$

бунда $t = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2}} - 1$.

4.9- мисол. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ интегрални ҳисобланг

Ечилиши. Бу ҳолда $m=0, n=4, p=-\frac{1}{4}$ $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ бўлганиучун

4.5- банднинг 3- ҳолига асосан, $t = \sqrt[4]{x^{-4}+1} = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$ алмаштиришни бажариб,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 127 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= [x = (t^4 - 1)^{\frac{1}{4}}, dx = -t^3(t^4 - 1)^{\frac{5}{4}} dx] = \\ &= -\int \frac{t^2 dt}{t^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1} \right) dt - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C,\end{aligned}$$

бунда $t = \sqrt[4]{x^{-4} + 1}$.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

4.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}.$

4.2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$

4.3. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}.$

4.4. $\int \frac{1 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}} dx.$

4.5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}.$

4.6. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx..$

4.7. $\int \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1} dx.$

4.8. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$

4.9. $\int \frac{\sqrt{x} - 2}{x(\sqrt[3]{x} + 1)} dx.$

4.10. $\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} \frac{dx}{x}.$

4.11. $\int \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}} dx.$

4.12. $\int (x-2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 128 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4.13. \int \sqrt{\frac{x}{x+5}} \frac{dx}{x^2}.$$

$$4.14. \int \frac{\sqrt[3]{x} + 2}{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}} dx.$$

$$4.15. \int \frac{x^2}{(4x-3)\sqrt{4x-3}} dx.$$

Қуйидаги интегралларни (Эйлер алмаштиришларидан фойдаланиб) ҳисобланг.

$$4.16. \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

$$4.17. \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}.$$

$$4.18. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}.$$

$$4.19. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

$$4.20. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - x - 5}}.$$

$$4.21. \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 4}}.$$

$$4.22. \int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$$

$$4.23. \int \frac{x dx}{\sqrt{(6x-8-x^2)^3}}.$$

$$4.24. \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}.$$

$$4.25. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$4.26. \int \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} dx.$$

$$4.27. \int \frac{3x^2 - 5x}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$$

Қуйидаги интегралларни, биномиал дифференциалларни интеграллаш усулидан фойдаланиб, ҳисобланг.

$$4.28. \int \sqrt[3]{x}(1 + \sqrt{x})^2 dx.$$

$$4.29. \int \frac{1}{\sqrt[6]{x}} (\sqrt[3]{x} - 1)^2 dx.$$

$$4.30. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} (\sqrt[8]{x} - 1)^5}.$$

$$4.31. \int \frac{dx}{x(1 + \sqrt[3]{x})^2}.$$

$$4.32. \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$4.33. \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2} dx.$$

$$4.34. \int \sqrt{x} \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$4.35. \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}.$$

$$4.36. \int x^3 \sqrt[3]{7-3x^2} dx.$$

$$4.37. \int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{2 + \sqrt[4]{x^3}}}.$$

$$4.38. \int \frac{dx}{x \sqrt[4]{1+x^3}}.$$

$$4.39. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 129 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4.40. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}}.$$

$$4.41. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2 (\sqrt[3]{x} + 1)^3}}.$$

$$4.42. \int \frac{x^7}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$$4.43. \int x^{-11} (1 + x^4)^{-1/2} dx.$$

Қуйидаги интегралларни, $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$
ифодаларни интеграллаш усулидан фойдаланиб, ҳисобланг.

$$4.44. \int \sqrt{9 - x^2} dx.$$

$$4.45. \int \sqrt{9 - 16x^2} dx.$$

$$4.46. \int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx.$$

$$4.47. \int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}.$$

$$4.48. \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^3}}.$$

$$4.49. \int \frac{dx}{x \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}.$$

$$4.50. \int x \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx.$$

$$4.51. \int x^2 \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx.$$

$$4.52. \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$4.53. \int x^3 \sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^m} dx.$$

$$4.54. \int \sqrt{4 + x^2} dx.$$

$$4.55. \int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx.$$

$$4.56. \int \sqrt{(9 + x^2)^3} dx.$$

$$4.57. \int \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^3} dx.$$

$$4.58. \int x \sqrt{(a^2 + b^2 x^2)^m} dx.$$

$$4.59. \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x} dx.$$

$$4.60. \int \frac{\sqrt{16 + x^2}}{x} dx.$$

$$4.61. \int \frac{\sqrt{25 + x^2}}{x^2} dx.$$

$$4.62. \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 x^2}}{x^2} dx.$$

$$4.63. \int \frac{\sqrt{4 + x^2}}{x^3} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 130 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

$$4.64. \int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}.$$

$$4.65. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$4.66. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}.$$

$$4.67. \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$4.68. \int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} dx.$$

$$4.69. \int \frac{x^4}{\sqrt{a^2-b^2x^2}} dx.$$

$$4.70. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2-b^2x^2}}.$$

$$4.71. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{a^2-b^2x^2}}.$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$4.1. 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x}+1| + C. \quad 4.2. 6\left[\frac{1}{3}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - \ln|1+\sqrt[6]{x}|\right] + C.$$

$$4.3. 2\sqrt{x+1} - 2\ln|\sqrt{x+1}+1| + C. \quad 4.4. x+1 - 2\sqrt{x+1} + 2\ln|\sqrt{x+1}+2| + C.$$

$$4.5. 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 8\sqrt[4]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 48\sqrt[12]{x} + 3\ln(1+\sqrt[12]{x}) + \frac{33}{2}\ln(\sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 2) -$$

$$-\frac{171}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[12]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$4.6. 6t - 3t^2 + \frac{3}{2}t^4 + \frac{6}{5}t^5 - \frac{6}{7}t^7 + 3\ln(1+t^2) - 6\operatorname{arctg}t + C, \quad t = \sqrt[6]{x+1}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 131 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4.7. x + 4\sqrt{x+1} + 4\ln|\sqrt{x+1}-1| + C. \quad 4.8. \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C.$$

$$4.9. 6[\sqrt[6]{x} - 2\ln\sqrt[6]{x} + \ln(\sqrt[3]{x}+1) - \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}] + C \quad 4.10. \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\operatorname{arctg}t + C, \quad t = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

$$4.11. \frac{9}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| - \frac{9t}{t^2-4} + C, \quad t = \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}}. \quad 4.12. \left(1 - \frac{x}{2}\right)\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C.$$

$$4.13. -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x+5}{x}} + C. \quad 4.14. 4\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 12\sqrt[12]{x} + 2\ln|x| - 36\ln(\sqrt[12]{x}+1) + C.$$

$$4.15. \frac{-1}{96}\sqrt{(4x-3)^3} + \frac{3}{16}\sqrt{4x-3} - \frac{9}{32\sqrt{4x-3}} + C.$$

$$4.16. \ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}) + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C.$$

$$4.17. \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}} + C. \quad 4.18. -2\operatorname{arctg}\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C.$$

$$4.19. 2\ln|t| - \frac{1}{2}\ln|t-1| + \frac{3}{t+1} - \frac{3}{2}\ln|t+1| + C, \quad \text{бунда} \quad t = \frac{\sqrt{x^2-x+1}+1}{x}.$$

$$4.20. \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-x+5}+x-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2x+5}+x+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 132 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4.21. 8\ln|2t+1| - \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{15}{2}\ln|t+1| + \frac{5}{t+1} + C, \text{ бунда } t = \frac{\sqrt{x^2 - x + 4} + 2}{x}.$$

$$4.22. -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2+x-x^2} + \sqrt{2}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right| + C. \quad 4.23. \frac{2(x-2)}{\sqrt{6x-8-x^2}} - \frac{\sqrt{6x-8-x^2}}{x-2} + C.$$

$$4.24. \frac{2}{27}\left(\frac{1}{t} - 2t - \frac{t^3}{3}\right) + C, \text{ бунда } t = \frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2}.$$

$$4.25. \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

$$4.26. x\sqrt{x^2-2x+5} - 5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}) + C.$$

$$4.27. 14\arcsin\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}(3x-19)\sqrt{3-2x-x^2} + C. \quad 4.28. \frac{3}{7}x^{7/3} + \frac{24}{11}x^{11/6} + 3x^{4/3} + C.$$

$$4.29. 6\sqrt[6]{x} + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| - \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} + C. \quad 4.30. \frac{-8}{3(\sqrt[8]{x}-1)^3} - \frac{2}{(\sqrt[8]{x}-1)^4} + C.$$

$$4.31. 3\left(\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right| + \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\right) + C. \quad 4.32. 2(1+\sqrt[3]{x})^{3/2} + C.$$

$$4.33. \frac{1}{6}\ln\left(\frac{\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctg\frac{2\sqrt[3]{1+x^3}+x}{\sqrt{3}x} - \frac{1}{3}\ln\left|1 - \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}\right| - \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 133 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4.34. \frac{4}{7} \left(1 + \sqrt[4]{x^3} \right)^{7/3} - \left(1 + \sqrt[4]{x^3} \right)^{4/3} + C. \quad 4.35. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^3}-1}{\sqrt{1+x^3}+1} \right| + C.$$

$$4.36. \frac{t^7}{42} + \frac{7t^4}{24} + C, \quad t = \sqrt[3]{7-3x^2}. \quad 4.37. \sqrt[3]{(2x^{-3/4}+1)^2} + C.$$

$$4.38. \frac{1}{3} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} t + C, \quad \text{бунда } t = \sqrt[4]{1+x^3}.$$

$$4.39. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C, \quad \text{бунда } t = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

$$4.40. \frac{5}{4} t^4 - \frac{5}{9} t^9 + C, \quad \text{бунда } t = \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}. \quad 4.41. -\frac{3}{2(\sqrt[3]{x}+1)^2} + C.$$

$$4.42. \frac{t^7}{7} + \frac{3}{5} t^5 + t + C, \quad \text{бунда } t = \sqrt{x^2-1}. \quad 4.43. 16) -\frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} + C, \quad \text{бунда } t = \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2}.$$

$$4.44. \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} + C. \quad 4.45. x \frac{\sqrt{9-16x^2}}{2} + \frac{9}{8} \arcsin \frac{3x}{4} + C.$$

$$4.46. \frac{x\sqrt{a^2-b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2^b} \arcsin \frac{bx}{a} + C. \quad 4.47. \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C. \quad 4.48. \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-b^2x^2}} + C.$$

$$4.49. -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{bx} \right| + C. \quad 4.50. -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2 x^2)^{m+2}}}{(m+2)b^2} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 134 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4.51. \frac{2b^2x^3 - a^2x}{8b^2} \sqrt{a^2 - b^2x^2} + \frac{a^4}{8b^3} \arcsin \frac{bx}{a} + C.$$

$$4.52. 2 \arcsin \frac{x}{2} (2 - x^2) \sqrt{4 - x^2} + C.$$

$$4.53. \frac{\sqrt{(a^2 - b^2x^2)^{m+4}}}{(m+4)b^4} - \frac{a^2 \sqrt{(a^2 - b^2x^2)^{m+2}}}{(m+2)b^4} + C.$$

$$4.54. \frac{x\sqrt{4+x^2}}{2} + 2 \ln |x + \sqrt{4+x^2}| + C.$$

$$4.55. \frac{x\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{2} + \frac{a^2}{2b} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2}| + C.$$

$$4.56. \frac{45x + 2x^3}{8} \sqrt{9 + x^2} + \frac{3 \cdot 9^4}{8} \ln |x + \sqrt{9 + x^2}| + C.$$

$$4.57. \frac{5a^2x + 2b^2x^3}{8} \sqrt{a^2 + b^2x^2} + \frac{3a^4}{8b} \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2}| + C.$$

$$4.58. \frac{\sqrt{(a^2 + b^2x^2)^{m+2}}}{(m+2)b} + C.$$

$$4.59. \sqrt{a^2 + b^2x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2x^2}}{bx} \right| + C.$$

$$4.60. \sqrt{16 + x^2} - 4 \ln \left| \frac{4 + \sqrt{16 + x^2}}{x} \right| + C.$$

$$4.61. -\frac{\sqrt{25 + x^2}}{x} + \ln |x + \sqrt{25 + x^2}| + C.$$

$$4.62. -\frac{\sqrt{a^2 + b^2x^2}}{x} + b \ln |bx + \sqrt{a^2 + b^2x^2}| + C. \quad 4.63. -\frac{\sqrt{4 + x^2}}{2x^2} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sqrt{4 + x^2}}{x} \right| + C.$$

$$4.64. \frac{x}{9\sqrt{9 - x^2}} + C.$$

$$4.65. -\frac{x\sqrt{25 - x^2}}{2} + \frac{25}{2} \arcsin \frac{x}{5} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 135 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4.66. -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^3} \arcsin \frac{bx}{a} + C. \quad 4.67. -\frac{8+x^2}{3} \sqrt{4-x^2} + C.$$

$$4.68. -\frac{2a^2 + b^2 x^2}{3b^4} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} + C. \quad 4.69. -\frac{2b^2 x^3 + 3a^2 x}{8b^4} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} + \frac{3a^4}{8b^5} \arcsin \frac{bx}{a} + C.$$

$$4.70. -\frac{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}}{a^2 x} + C. \quad 4.71. -\frac{a^2 + 2b^2 x^2}{3a^4 x^3} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 136 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5-§. Таркибида тригонометрик функциялар қатнашган ифодаларни интеграллаш

5.1. $\int R(\sin x; \cos x) dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблаш.

Ушбу

$$\int R(\sin x; \cos x) dx \quad (5.1)$$

интегрални қараймиз.

1) $R(\sin x; \cos x)$ - $\sin x$ ва $\cos x$ ларнинг рационал функцияси бўлсин. Бу ҳолда

(5.1) интегралда $t = \tan \frac{x}{2}$ ($-\pi < x < \pi$) универсал алмаштириш олиниб, уни

ҳисоблаш, t га нисбатан рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келтирилади. Ҳақиқатан ҳам, қуйидаги

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \quad (5.2)$$

муносабатларни эътиборга олсак, (5.1) интеграл,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

кўринишга келади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 137 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2) R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x) \text{ бўлса, у ҳолда, } z = \cos x, x \in (0; \pi)$$

алмаштириш бажарилса, (5.1) интеграл остидаги ифода, z нинг рационал функциясига келтирилади.

$$3) R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x) \text{ бўлса, у ҳолда, } z = \sin x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

алмаштириш бажарилса, (5.1) интеграл остидаги ифода, z нинг рационал функциясига келтирилади.

$$4) R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x) \text{ бўлса, у ҳолда, } z = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ ёки}$$

$z = \cos 2x$ алмаштиришлардан бири бажарилса, (5.1) интеграл остидаги ифода, z нинг рационал функциясига келтирилади.

5.1-мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 6}$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $t = \tan \frac{x}{2}$ универсал алмаштириш олиб ва (5.2) формулаларга

асосан, уни t га нисбатан рационал функциянинг интегралини ҳисоблашга келтирамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 138 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x + 6} = 2 \int \frac{dt}{4t^2 + 2t + 8} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{31}{16}} = \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{31}} \left(t + \frac{1}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{31}} \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{31}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) + C.$$

5.2-мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Агар $\frac{1}{\sin^4 x \cos x}$ ифодада $\cos x$ ни $-\cos x$ га алмаштирсак, у

ҳолда, унинг ишораси, қарама - қарши ишорага ўзгаради. Шунинг учун,

$t = \sin x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ алмаштиришни олиш қулай бўлади. Бунда,

$$x = \arcsin t, \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2},$$

ва

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos x} = \int \frac{1}{t^4 \sqrt{1-t^2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{dt}{t^4 (1-t^2)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} + \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C.$$

5.3-мисол. Ушбу $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$ интегрални ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 139 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Интеграл остидаги ифодада $\sin x$ ни $-\sin x$ га алмаштирган-
да, у ўз ишорасини тескарисига алмаштиради. Бу ҳолда 2) алмаштиришни,
яъни $t = \cos x$, $x \in (0; \pi)$ деб олиш қулай бўлади. Бунда,

$$x = \arccos t, \quad dx = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad \sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}, \quad \sin^3 x = \sqrt{(1-\cos^2 x)^3} = \sqrt{(1-t^2)^3}$$

ва

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} &= \int \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)^3}} \frac{1}{t^2 \sqrt{1-t^2}} dt = \int \frac{1}{t^2 (1-t^2)} dt = \int \frac{1}{t^2} dt + \int \frac{1}{1-t^2} dt = \\ &= -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C = -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C. \end{aligned}$$

5.4-мисол. Ушбу $\int \frac{\sin x dx}{2 \sin x + 3 \cos x}$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги ифода, $\sin x$ ва $\cos x$ ларни ,мос равишда,
 $-\sin x$ ва $-\cos x$ ларга алмаштирганда, ўз ишорасини ўзгартирмайди. Бу ҳолда
 $t = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ алмаштириш бажарилиб, берилган интеграл остидаги

ифода t нинг рационал функциясига келтирилади: $x = \arctg t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ ва

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 140 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{\sin x dx}{2 \sin x + 3 \cos x} = \int \frac{tg x dx}{2 tg x + 3} = \int \frac{t dt}{(2t + 3)(1 + t^2)}.$$

$$\frac{t}{(2t + 3)(1 + t^2)} \quad \text{тўғри рационал касрни, номаълум коэффициентли} \quad (3.6)$$

кўринишдаги содда касрлар йиғиндиси шаклида тасвирлаймиз:

$$\frac{t}{(2t + 3)(1 + t^2)} = \frac{A}{2t + 3} + \frac{Bt + C}{1 + t^2}$$

Ундаги номаълум коэффициентларни топиш учун, юқорида кўрсатилган номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланиб, чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ечамиз:

$$t = A(1 + t^2) + (Bt + C)(2t + 3) \Rightarrow \begin{cases} t^2 & A + 2B = 0, \\ t & 3B + 2C = 1, \\ t^0 & A + 3C = 0, \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{6}{13}, B = \frac{3}{13}, C = \frac{2}{13},$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x dx}{2 \sin x + 3 \cos x} &= \int \left[\frac{A}{2t + 3} + \frac{Bt + C}{1 + t^2} \right] dt = -\frac{6}{13} \int \frac{dt}{2t + 3} + \frac{1}{13} \int \frac{3t + 2}{1 + t^2} dt = \\ &= -\frac{3}{13} \ln|2t + 3| + \frac{3}{26} \ln|1 + t^2| + \frac{2}{13} \arctgt + C = -\frac{3}{13} \ln|2 \sin x + 3 \cos x| + \frac{2}{13} x + C. \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 141 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5.2. $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx, \quad \int \sin \alpha x \sin \beta x dx, \quad \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.

Бу интеграллар остидаги ифодаларда, қуйидаги

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x], \quad (*)$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x],$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x]$$

формулалардан фойдаланиб, уларни интеграллаш мумкин.

5.5-мисол. Ушбу $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $(*)$ формуладан фойдаланиб интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int \sin 8x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 6x) dx = -\frac{1}{20} \cos 10x - \frac{1}{12} \cos 6x + C.$$

5.3. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ ($n, m \in \mathbb{Z}$) кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.

I. n, m - лар манфий бўлмаган жуфт сонлар бўлган ҳол. Бу ҳолда, даражани пасайтириш, яъни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 142 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

формулалар қўлланилади.

II. n, m - лар натурал сонлар бўлиб, ҳеч бўлмаганда уларнинг бирортаси тоқ бўлган ҳол. Бу ҳолда, мисол учун, m тоқ бўлганда, $\sin x = t$; n тоқ бўлганда эса, $\cos x = t$ алмаштириш олинади ва $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ ёки $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ формулаларнинг биридан фойдаланишга тўғри келади.

III. n, m - ларнинг иккаласи ҳам бутун манфий бўлиб, $|n|$ ва $|m|$ сонлар жуфт ёки тоқ бўлган ҳол. Бу ҳолда $\tan x = t$ ёки $\cot x = t$ алмаштириш олиниб,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

формулаларнинг биридан фойдаланилади.

Ушбу

$$\int \frac{dx}{\sin^n x}, n > 0 \text{ ва } \int \frac{dx}{\cos^m x}, m > 0$$

интеграллар ҳам III - ҳолга келтирилиб, ҳисобланади.

Ҳақиқатан ҳам,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 143 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^n \frac{x}{2} \cdot \cos^n \frac{x}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \int \frac{du}{\sin^n u \cos^n u} \Big|_{u=\frac{x}{2}},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^m x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^m \left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \int \frac{du}{\sin^m u} \Big|_{u=x+\frac{\pi}{2}}.$$

IV. n, m - бутун манфий сонлар бўлиб, $|n|$ ва $|m|$ сонларнинг бири тоқ бўлган ҳол. У ҳолда, агар $|m|$ - тоқ бўлганда эса, $\sin x = t$, $|n|$ - тоқ бўлса эса, $\cos x = t$ алмаштириш олиш мақсадга мувофиқ бўлади. Баъзи ҳолларда $|n|$ ва $|m|$ ларнинг даражалари катта бўлганда интеграл остидаги функциянинг суратида 1 ни $\sin^2 x + \cos^2 x$ йиғинди билан алмаштириш қулай бўлади.

V. n - жуфт сон, m - эса бутун манфий сон бўлган ҳол. Бу ҳолда $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ формуладан фойдаланиб, интеграл

$$\int \frac{dx}{\cos^\alpha x}, \quad \alpha \in N$$

қўринишдаги интегралга келтирилади.

m - жуфт сон, n - эса, бутун манфий бўлганда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ формуладан фойдаланиб, ҳисобланиши керак бўлган интеграл,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 144 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{dx}{\sin^{\alpha} x}, \alpha \in N$$

кўринишдаги интегралга келтирилади.

VI. n - тоқ, сон m - эса, бутун манфий сон бўлса, бу ҳолда $\cos x = t$ алмаштириш олиб, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ формуладан фойдаланиш керак.

m - тоқ, n - эса, бутун манфий сон бўлганда алмаштириш олиб, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ формуладан фойдаланиш керак.

Баъзи ҳолларда, яъни $|n|$ ва $|m|$ даражалар етарли катта бўлган интеграл остидаги функциянинг суратидаги 1 ни $\sin^2 x + \cos^2 x$ га алмаштириш қулай бўлади.

5.6 - мисол. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

$$1) \int \sin^4 x \cos^2 x dx; \quad 2) \int \sin^3 x \cos^2 x dx; \quad 3) \int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx;$$

$$4) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx; \quad 5) \int \frac{1}{\sin^5 x} dx; \quad 6) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx; \quad 7) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^3 x} dx.$$

Ечилиши. 1) Бу ерда $n = 4$, $m = 2$ бўлгани учун, **I**- ҳолга асосан, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ формуладан фойдаланиб, интегрални ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 145 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 x \cdot \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 - \cos 4x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x - \cos 2x + \cos 2x \cos 4x) dx =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{32} \sin 2x + \frac{1}{16} \int (\cos 2x + \cos 6x) dx =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{32} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 2x + \frac{1}{162} \sin 6x + C =$$

$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{192} \sin 6x + C.$$

2) $\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx$ интегрални ҳисоблашда **II**- ҳолдаги алмаштиришдан фойдаланамиз: бунда $n = 3$, яъни у тоқ бўлгани учун, $\cos x = t$ алмаштиришни бажариб, куйидагига эга бўламиз:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx = - \int \sin^2 x \cos^2 x d \cos x = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d \cos x =$$

$$= - \int (\cos^2 x - \cos^4 x) dx = - \frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

3) интегралда $n = -3$, $m = -5$ бўлиб, $|n|$ ва $|m|$ ларнинг иккаласи ҳам тоқ бўлгани учун, **III** - ҳолга асосан, $\operatorname{ctg} x = t$ алмаштиришни бажариб,

$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ формуладан фойдаланган ҳолда, ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 146 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\sin^3 x \cos^5 x} dx &= \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \frac{\cos^5 x}{\sin^5 x} \cdot \sin^6 x} = - \frac{dctgx}{ctg^5 x \cdot \frac{1}{(1+ctg^2 x)^3}} = \\
 &= - \int \frac{(1+ctg^2 x)^3 dctgx}{ctg^5 x} = - \frac{(1+u^2)^3 du}{u^5} \Bigg|_{u=ctgx} = \\
 &= - \int \left(\frac{1}{u^5} + \frac{3}{u^3} + \frac{3}{u} + u \right) du \Bigg|_{u=ctgx} = \left(+ \frac{u^{-4}}{4} + \frac{3}{2} u^{-2} - 3 \ln|u| - \frac{u^2}{2} + C \right) \Bigg|_{u=ctgx} = \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{ctg^4 x} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{ctg^2 x} - 3 \ln|ctgx| + \frac{ctg^2 x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

4) интегралда $n=5, m=-2$, яъни n - тоқ, m - бутун манфий бўлгани учун, VI ҳолга асосан, $\cos x = t$ алмаштириш оламиз ва $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ формулани қўллаб, интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx &= - \int \frac{\sin^4 x d \cos x}{\cos^2 x} = - \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2 d \cos x}{\cos^2 x} = \int \frac{1 - 2u^2 + u^4}{u^2} du \Bigg|_{u=\cos x} = \\
 &= \left(\frac{1}{u} + 2u - \frac{u^3}{3} + C \right) \Bigg|_{u=\cos x} = \frac{1}{\cos x} + 2 \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} + C.
 \end{aligned}$$

5) $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ интегрални ҳисоблашда, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ формуладан фойдаланиб, уни қуйидаги

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 147 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} - \frac{1}{2^4} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^5 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}} = \frac{1}{24} \int \frac{du}{\sin^5 u \cos^5 u} \Big|_{u=\frac{x}{2}}.$$

кўринишга келтирамиз. Кейинги интегралда $n = -5, m = -5$ бўлиб, n ва m ларнинг иккаласи ҳам тоқ бўлгани учун, III - ҳолга асосан, $\operatorname{ctg} x = t$ алмаштиришни олиш қулай бўлади:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^5 x} &= \frac{1}{24} \int \frac{dctgu}{\operatorname{ctg}^5 u \cdot \sin^8 u} = \left[1 + \operatorname{ctg}^2 u = \frac{1}{\sin^2 u} \right] = \frac{1}{16} \int \frac{(1+z^2)^4}{z^5} dz \Big|_{z=\operatorname{ctg} u} = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{1+4z^2+6z^4+4z^6+z^8}{z^5} dz = \\ &= \left(-\frac{1}{64} z^{-4} - \frac{1}{8} z^{-2} + \frac{3}{8} \ln|z| + \frac{1}{8} z^2 + \frac{1}{64} z^4 + C \right) \Big|_{z=\operatorname{ctg} u} \end{aligned}$$

б) интегралда $n = -2, m = 3$, яъни n - бутун манфий, m - тоқ бўлгани учун, V - ҳолга асосан, $\sin x = t$ алмаштириш оламиз ва $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ формуладан фойдаланиб, интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d \sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{(1-u^2) du}{u^2} \Big|_{u=\sin x} =$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 148 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$= \int u^{-2} du - \int du = \left(-\frac{1}{u} - u + C \right) \Big|_{u=\sin x} = -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C.$$

7) интегралда $n = -2$, $m = -3$ яъни n ва m манфий сонлар бўлиб, $|m|$ тоқ бўлгани учун, **IV**- ҳолга асосан, $\sin x = u$ алмаштиришни олиб, интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^3 x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2} = \int \frac{du}{u^2 (1 - u^2)^2} \Big|_{u=\sin x} = \\ &= \int \frac{du}{u^2 (1 - u)^2 (1 + u)^2}. \end{aligned}$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Интегралларни ҳисобланг.

5.1. $\int \cos^2 x dx.$

5.2. $\int \cos^3 px dx.$

5.3. $\int \sin^3 px dx.$

5.4. $\int \cos^4 px dx.$

5.5. $\int \sin^5 x dx.$

5.6. $\int tg^3 dx.$

5.7. $\int ct^3 x dx.$

5.8. $\int \cos^5 x dx.$

5.9. $\int \sin^4 px dx.$

5.10. $\int \cos^7 x dx.$

5.11. $\int ctg^4 x dx.$

5.12. $\int sh^2 x dx.$

5.13. $\int sh^3 x dx.$

5.14. $\int ch^3 x sh x dx.$

5.15. $\int ch^2 x dx.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 149 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5.16. $\int sh^4 x dx.$

5.17. $\int ch^3 x dx.$

5.18. $\int ch^4 x dx.$

$\int \sin px \cos qx dx$, $\int \sin px \sin qx dx$, $\int \cos px \cos qx dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

5.19. $\int \cos 5x \cos 9x dx.$

5.20. $\int \sin 5x \sin 3x dx.$

5.21. $\int \cos 4x \cos x dx.$

5.22. $\int \sin 7x \cos 3x dx.$

5.23. $\int \sin 3x \cos 5x dx.$

5.24. $\int \cos px \cos qx dx.$

5.25. $\int \sin px \sin qx dx.$

5.26. $\int \sin px \cos qx dx.$

5.27. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$

5.28. $\int \cos x \cos \cos 5x dx.$

5.29. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} dx.$

5.30. $\int \cos^2 ax \cos^2 bx dx.$

5.31. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx.$

5.32. $\int \cos x \cos 2x \cos 5x dx.$

5.33. $\int sh 2x sh 5x dx.$

5.34. $\int ch 3x ch 7x dx.$

5.35. $\int sh 3x ch 5x dx.$

5.36. $\int sh(2x+3)sh(2x+5)dx.$

$\int \frac{dx}{\sin^m x}$, $\int \frac{dx}{\cos^m x}$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 150 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5.37. $\int \frac{dx}{\sin x}.$

5.38. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

5.39. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

5.40. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

5.41. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$

5.42. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

5.43. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}.$

5.44. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

5.45. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}.$

5.46. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

5.47. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

5.48. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

5.49. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

5.50. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

5.51. $\int \frac{\sin^3 x}{\sin x} dx.$

$\int \frac{\cos^p x}{\sin^q x} dx, \int \frac{\sin^p x}{\cos^q x} dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

5.52. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx.$

5.53. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx.$

5.54. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx.$

5.55. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$

5.56. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx.$

5.57. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

5.58. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx.$

5.59. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx.$

5.60. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$

5.61. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx.$

5.62. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$

5.63. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx.$

5.64. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx.$

5.65. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$

5.66. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx.$

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Илова лар



Оркага

Саҳифа 151 / 708

Тулик экран

Чикиш

$$5.67. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dx.$$

$$5.68. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx.$$

$$5.69. \int \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x} dx.$$

$\int \frac{ch^p x}{sh^q x} dx, \int \frac{sh^p x}{ch^q x} dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

$$5.70. \int \frac{sh^2 x}{chx} dx.$$

$$5.71. \int \frac{ch^3 x}{chx} dx.$$

$$5.72. \int \frac{sh^4 x}{chx} dx.$$

$$5.73. \int \frac{sh^2 x}{ch^2 x} dx.$$

$$5.74. \int \frac{sh^3 x}{ch^2 x} dx.$$

$$5.75. \int \frac{sh^2 x}{ch^3 x} dx.$$

$$5.76. \int \frac{sh^3 x}{ch^4 x} dx$$

$$5.77. \int \frac{sh^4 x}{ch^4 x} dx.$$

$$5.78. \int \frac{sh^2 x}{ch^4 x} dx.$$

$$5.79. \int \frac{ch^2 x}{shx} dx.$$

$$5.80. \int \frac{ch^3 x}{shx} dx.$$

$$5.81. \int \frac{ch^4 x}{shx} dx.$$

$$5.82. \int \frac{ch^3 x}{shx} dx.$$

$$5.83. \int \frac{ch^2 x}{sh^2 x} dx.$$

$$5.84. \int \frac{ch^3 x}{sh^2 x} dx.$$

$$5.85. \int \frac{ch^4 x}{sh^2 x} dx.$$

$$5.86. \int \frac{ch^3 x}{sh^3 x} dx.$$

$$5.87. \int \frac{ch^4 x}{sh^3 x} dx.$$

$$5.88. \int \frac{ch^4 x}{sh^4 x} dx.$$

$$5.89. \int \frac{ch^2 x}{sh^4 x} dx.$$

$\int \sin^p x \cos^q x dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

$$5.90. \int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

$$5.91. \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

$$5.92. \int \sin^2 x \cos^4 x dx.$$

$$5.93. \int \sin^3 x \cos x dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 152 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.94. \int \sin^3 x \cos^2 x dx.$$

$$5.96. \int \sin^4 x \cos x dx.$$

$$5.98. \int \sin^4 x \cos^3 x dx.$$

$$5.95. \int \sin^3 x \cos x dx.$$

$$5.97. \int \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

$$5.99. \int \sin^4 x \cos^4 x dx.$$

$\int sh^p x ch^q x dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

$$5.100. \int shx chx dx.$$

$$5.102. \int sh^2 x ch^4 x dx.$$

$$5.104. \int sh^3 x ch^3 x dx.$$

$$5.106. \int sh^3 x ch^4 x dx.$$

$$5.101. \int sh^2 x ch^2 x dx.$$

$$5.103. \int sh^3 x ch^2 x dx.$$

$$5.105. \int sh^3 x ch^2 x dx.$$

$$5.107. \int sh^4 x ch^4 x dx$$

$\int \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

$$5.108. \int \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

$$5.110. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

$$5.112. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$$

$$5.109. \int \frac{dx}{\sin \cos^2 x}.$$

$$5.111. \int \frac{dx}{\sin \cos^4 x}.$$

$$5.113. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 153 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.114. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$$

$$5.116. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}.$$

$$5.118. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$$

$$5.120. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}.$$

$$5.122. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x}.$$

$$5.115. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$$

$$5.117. \int \frac{dx}{\sin^3 \cos^2 x}.$$

$$5.119. \int \frac{dx}{\sin 4x \cos x}.$$

$$5.121. \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$$

$\int \frac{dx}{sh^p x ch^q x}$ кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

$$5.123. \int \frac{dx}{shx chx}.$$

$$5.126. \int \frac{dx}{shx ch^4 x}.$$

$$5.129. \int \frac{dx}{sh^3 x chx}.$$

$$5.132. \int \frac{dx}{sh^4 chx}.$$

$$5.124. \int \frac{dx}{shx ch^2 x}.$$

$$5.127. \int \frac{dx}{sh^2 x chx}.$$

$$5.130. \int \frac{dx}{sh^3 x ch^2 x}.$$

$$5.133. \int \frac{dx}{sh^4 x ch^3 x}.$$

$$5.125. \int \frac{dx}{shx ch^3 x}.$$

$$5.128. \int \frac{dx}{sh^2 x ch^2 x}.$$

$$5.131. \int \frac{dx}{sh^2 x ch^3 x}.$$

$$5.134. \int \frac{dx}{sh^4 x ch^4 x}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 154 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\int R(\sin x, \cos x) dx$, (бунда R – рационал функция) кўринишдаги интегралларни ҳисобланг.

$$5.135. \int \frac{dx}{3+5\cos x}.$$

$$5.137. \int \frac{dx}{5+4\cos x}.$$

$$5.139. \int \frac{dx}{3+5\sin x}.$$

$$5.141. \int \frac{dx}{a+b\cos x}.$$

$$5.143. \int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}.$$

$$5.145. \int \frac{dx}{5-4\sin x + 2\cos x}.$$

$$5.147. \int \frac{dx}{2\sin x + 3\cos x + 3}.$$

$$5.149. \int \frac{dx}{a+b\cos x + c\sin x}.$$

$$5.150. \text{ Ушбу } J_n = \int \frac{dx}{(a\cos x + b\sin x)^n} (a^2 + b^2 \neq 0, n \in \mathbb{N}) \text{ интеграл учун}$$

$$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2 + b^2)} \left(\frac{a\sin x - b\cos x}{(a\cos x + b\sin x)^{n-1}} + (n-2)J_{n-2} \right), n > 1$$

рекуррент формулани исботланг, унинг ёрдамида

$$5.136. \int \frac{dx}{10+8\cos x}.$$

$$5.138. \int \frac{dx}{13+5\sin x}.$$

$$5.140. \int \frac{dx}{5+3\sin x}.$$

$$5.142. \int \frac{dx}{a+b\sin x}.$$

$$5.144. \int \frac{dx}{\sin x + 3\cos x + 5}.$$

$$5.146. \int \frac{3\sin x - 2\cos x}{1 + \cos x} dx.$$

$$5.148. \int \frac{dx}{3\sin x - 4\cos x}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 155 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$J_n = \int \frac{dx}{(2 \cos x + \sin x)^3} \text{ интегрални ҳисобланг.}$$

5.151. Ушбу $J_n = \int \frac{dx}{(a \cos x + b)^n}$ ($|a| \neq |b|$, $n \in N$) интеграл учун

$$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2 - b^2)} \left(\frac{a \sin x}{(a \cos x + b)^{n-1}} - (2n-3)bJ_{n-1} + (n-2)J_{n-2} \right), n > 1$$

рекуррент формулани исботланг, унинг ёрдамида

$$a) \int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}, (0 < \varepsilon < 1). \quad b) \int \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^3}, \varepsilon > 1$$

интегралларни ҳисобланг.

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$5.1. \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C. \quad 5.2. \frac{1}{p}\sin px - \frac{1}{3p}\sin^3 px + C. \quad 5.3. \frac{1}{3p}\cos^3 px - \frac{1}{p}\cos px + C.$$

$$5.4. \frac{3}{8}x + \frac{1}{4p}\sin 4px + C. \quad 5.5. -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C. \quad 5.6. 6) \frac{1}{2}tg^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

$$5.7. -\frac{1}{2}ctg^2 x - \ln|\sin x| + C. \quad 5.8. \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$$

$$5.9. \frac{3x}{8} - \frac{1}{np}\sin 2px + \frac{1}{32p}\sin 4px + C. \quad 5.10. \sin x - \sin^3 x + \frac{3}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

$$5.11. ctgx - \frac{1}{3}ctg^3 x + x + C. \quad 5.12. \frac{1}{4}sh2x - \frac{x}{2} + C. \quad 5.13. -chx + \frac{1}{3}ch^3 x + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 156 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.14. \frac{1}{4} ch^4 x + C. \quad 5.15. \frac{1}{4} sh 2x + \frac{x}{2} + C. \quad 5.16. \frac{3}{8} x - \frac{3}{8} sh x ch x + \frac{1}{4} sh^3 x ch x + C.$$

$$5.17. sh x + \frac{1}{3} sh^3 x + C.$$

$$5.18. \frac{3}{8} x + \frac{3}{8} sh x ch x + \frac{1}{4} sh x ch^3 x + C.$$

$$5.19. \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{28} \sin 4x + C.$$

$$5.20. \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$$

$$5.21. \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{10} \sin 5x + C.$$

$$5.22. -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{20} \cos 10x + C.$$

$$5.23. -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.$$

$$5.24. \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} + C, \quad (p^2 \neq q^2)$$

$$5.25. -\frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\sin(q-p)x}{2(q-p)} + C, \quad (p^2 \neq q^2)$$

$$5.26. -\frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} - \frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} + C, \quad (p^2 \neq q^2)$$

$$5.27. \frac{\cos 6x}{24} - \frac{\cos 4x}{16} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

$$5.28. \frac{\sin 9x}{36} + \frac{\sin 7x}{28} + \frac{\sin 3x}{12} + \frac{\sin x}{4} + C.$$

$$5.29. \frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C.$$

$$5.30. \frac{x}{4} + \frac{\sin 2ax}{8a} + \frac{\sin 2bx}{8b} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + C.$$

$$5.31. -\frac{3}{16} \cos 2x + \frac{3}{64} \cos 4x + \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{192} \cos 2x + C.$$

$$5.32. \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{32} \sin 8x + C.$$

$$5.33. \frac{1}{14} sh 7x - \frac{1}{6} sh 3x + C.$$

$$5.34. \frac{1}{20} sh 10x + \frac{1}{8} sh 4x + C.$$

$$5.35. \frac{1}{16} ch 8x - \frac{1}{4} ch 2x + C. \quad 5.36. -\frac{x}{2} ch 2 + \frac{1}{8} sh(4x+8) + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 157 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.37. \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.39. -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{3}{2} \operatorname{ctg} x + C = -\frac{1}{3 \operatorname{ctg}^3 x} - \operatorname{ctg} x + C. \quad 5.40. -\frac{\cos x}{4 \sin^4 x} - \frac{3 \cos x}{8 \sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.41. -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x + C.$$

$$5.38. -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.42. \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$5.43. \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$5.44. \frac{\sin x}{3 \cos^3 x} + \frac{2}{3} \operatorname{tg} x + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

$$5.45. \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$5.46. \frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{4}{5} \operatorname{tg}^3 x + \frac{4}{5} \operatorname{tg} x = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C.$$

$$5.47. -\frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.48. -\frac{1}{3} \operatorname{cth}^3 x + \operatorname{cth} x + C.$$

$$5.49. \frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C.$$

$$5.50. -\frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x + C.$$

$$5.51. \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 x - \ln \operatorname{ch} x + C.$$

$$5.52. -\sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$5.53. \frac{1}{2} \cos^2 x - \ln |\cos x| + C.$$

$$5.54. \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$5.55. \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$5.56. \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$5.57. \cos x + \frac{1}{\cos x} + C.$$

$$5.58. \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{3}{2} x + C. \quad 5.59. \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\cos x| + C. \quad 5.60. -\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 158 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.61. \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.63. \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.66. -\operatorname{ctgx} - 0,5 \sin x \cos x - 1,5x + C.$$

$$5.68. \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3 \sin^3 x} + C.$$

$$5.70. \operatorname{sh} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C. \quad 5.71. \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 x - \ln \operatorname{ch} x + C.$$

$$5.72. \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x - \operatorname{sh} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C.$$

$$5.75. -\frac{\operatorname{sh} x}{2 \operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + C.$$

$$5.77. -\frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x - \operatorname{th} x + x + C.$$

$$5.80. \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 x + \ln |\operatorname{sh} x| + C.$$

$$5.82. \frac{1}{2} \operatorname{ch}^2 x + \ln |\operatorname{sh} x| + C.$$

$$5.85. \frac{3}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x - \operatorname{cth} x + C.$$

$$5.87. \operatorname{ch} x - \frac{\operatorname{ch} x}{2 \operatorname{sh}^2 x} - \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + x + C.$$

$$5.89. -\frac{1}{3} \operatorname{cth}^3 x + C.$$

$$5.62. \frac{\cos^2 x}{2} + \ln |\sin x| + C.$$

$$5.64. -\operatorname{ctgx} + x + C.$$

$$5.67. -\frac{1}{2 \sin^2 x} - \ln |\sin x| + C.$$

$$5.69. -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C.$$

$$5.73. x - \operatorname{th} x + C.$$

$$5.76. -\frac{1}{\operatorname{ch} x} + \frac{1}{3 \operatorname{ch}^3 x} + C.$$

$$5.78. \frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x + C.$$

$$5.81. \frac{1}{3} \operatorname{ch}^3 x + \operatorname{ch} x + \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.83. x - \operatorname{cth} x + C.$$

$$5.86. -\frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 x + \ln |\operatorname{sh} x| + C.$$

$$5.88. -\frac{1}{3} \operatorname{cth}^3 x - \operatorname{cth} x + x + C.$$

$$5.90. \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C. \quad 5.91. \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

$$5.65. -\sin x - \frac{1}{\sin x} + C.$$

$$5.74. -\frac{3}{2} x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \operatorname{th} x + C.$$

$$5.79. \operatorname{ch} x + \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.84. \operatorname{sh} x - \frac{1}{\operatorname{sh} x} + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 159 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.92. \frac{x}{16} + \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{192} \sin 6x + C.$$

$$5.93. \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

$$5.94. \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

$$5.95. \frac{1}{64} \left(\frac{1}{3} \cos 5x - 3 \cos 2x \right) + C.$$

$$5.96. \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

$$5.97. \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{192} \sin 6x + C.$$

$$5.98. \frac{1}{7} \sin^3 x \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cos^2 x - \cos^4 x \right) + C. \quad 5.99. \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} \sin 4x + \frac{1}{1024} \sin 8x + C.$$

$$5.100. \frac{sh^2 x}{2} + C.$$

$$5.101. -\frac{x}{8} + \frac{1}{32} sh 4x + C.$$

$$5.102. \frac{1}{5} sh^3 x ch^2 x + \frac{2}{15} sh^3 x + C.$$

$$5.103. -\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} sh 2x + \frac{1}{64} sh 4x + \frac{1}{192} sh 6x + C.$$

$$5.104. \frac{1}{5} sh^2 x ch^3 x - \frac{2}{15} ch^3 x + C.$$

$$5.105. \frac{1}{6} sh^6 x + \frac{1}{4} sh^2 x = \frac{1}{6} ch^6 x - \frac{1}{4} ch^4 x + C.$$

$$5.106. \frac{1}{7} sh^2 x - \frac{2}{35} sh^2 x ch^5 x + C.$$

$$5.107. \frac{3x}{128} - \frac{1}{128} sh 4x + \frac{1}{1024} sh 8x + C.$$

$$5.108. \ln |tg x| + C.$$

$$5.109. \frac{1}{\cos x} + \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.110. \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |tg x| + C.$$

$$5.111. \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C.$$

$$5.112. \ln \left| tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| - \frac{1}{\sin x} + C.$$

$$5.113. -2ctg 2x + C.$$

$$5.114. \left(\frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{\sin x} + \frac{3}{2} \ln \left| tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

$$5.115. \frac{1}{3 \sin x \cos^3 x} - \frac{8}{3} ctg 2x + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 160 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.116. -\frac{1}{2\sin^2 x} + \ln|tgx| + C.$$

$$5.118. -\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x} + 2\ln|tgx| + C.$$

$$5.120. -\frac{1}{3\cos x \sin^3 x} - \frac{8}{3}ctg 2x + C.$$

$$5.122. -\frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{5}{2}\ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

$$5.124. \frac{1}{chx} + \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$5.126. \frac{1}{chx} + \frac{1}{3ch^3 x} + \ln\left|th \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$5.128. -2cth2x + C.$$

$$5.130. -\frac{1}{chx} - \frac{chx}{2sh^2 x} - \frac{3}{2}\ln\left|th \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$5.132. \frac{1}{shx} - \frac{1}{3sh^3 x} + arctg(shx) + C.$$

$$5.134. 8cth2x - \frac{8}{3}cth^3 2x + C.$$

$$5.136. \frac{1}{3}arctg\left(\frac{tg \frac{x}{2}}{3}\right) + C.$$

$$5.117. -\frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{2\sin^2 x} - \frac{3}{2} \right) + \frac{3}{2}\ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C.$$

$$5.119. -\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + C.$$

$$5.121. -8ctg 2x - \frac{8}{3}ctg^3 2x + C.$$

$$5.123. \ln|thx| + C.$$

$$5.125. -\frac{1}{2}th^2 x + \ln|thx| + C.$$

$$5.127. -\frac{1}{shx} - arctg(shx) + C.$$

$$5.129. -\frac{1}{2}cth^2 x + \ln|cth x| + C.$$

$$5.131. \frac{1}{2}th^2 x - \frac{1}{2}cth^2 x - 2\ln|thx| + C.$$

$$5.133. \frac{2}{shx} - \frac{1}{3sh^3 x} + \frac{shx}{2ch^2 x} + \frac{5}{2}arctg(shx) + C.$$

$$5.135. \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tg \frac{x}{2} + 2}{tg \frac{x}{2} - 2}\right| + C.$$

$$5.137. \frac{2}{3}arctg\left(\frac{tg \frac{x}{2}}{3}\right) + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 161 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.138. \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{13 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 5}{12} \right) + C.$$

$$5.139. \frac{1}{4} \ln \left| \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 9} \right| + C.$$

$$5.140. \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{5 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3}{4} \right) + C.$$

$$5.141. \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{a + b} + C, a^2 > b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + a + b}{\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - a - b} \right| + C, a^2 < b^2 \end{cases}.$$

$$5.142. \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C, a^2 > b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a \operatorname{tg} \frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} \right| + C, a^2 > b^2. \end{cases}$$

$$5.143. -\frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3} + C.$$

$$5.144. \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{15}} \right) + C.$$

$$5.145. \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{\sqrt{5}} \right) + C.$$

$$5.146. 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \ln \left| \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 \right| - 4 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$5.147. \frac{1}{2} \ln \left| 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 162 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$5.148. \frac{1}{5} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}} \right| + C.$$

$$5.149. \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}, & a^2 > b^2 + c^2 \\ \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2} + c - \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{(a-b) \frac{x}{2} + c + \sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \right|, & a^2 < b^2 + c^2 \\ \frac{1}{c} \ln \left| a + \operatorname{ctg} \frac{x}{a} \right|, & a = b \\ \frac{-2}{c + (a-b) \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, & a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 163 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

II-боб. Аниқ интеграл

6-§. Аниқ интегралнинг таърифлари

6.1. Риман интеграли.

$f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган бўлсин. $[a, b]$ кесманинг $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ шартни қаноатлантирадиган чекли сондаги $\{x_k\}_{k=1}^n$ нуқталар системасига $[a, b]$ кесманинг *бўлиниши* дейилади ва у $P = \{x_k\}_{k=1}^n$ каби белгиланади. $x_k (k = \overline{1, n})$ нуқта P бўлинишнинг бўлувчи нуқтаси $[x_k, x_{k+1}]$ кесма эса, *қисм оралиғи* дейилади. Агар $[a, b]$ кесманинг ихтиёрий P бўлинишидаги қисм оралиғининг узунликлари бир хил бўлса, у ҳолда, бундай бўлиниш, $[a, b]$ кесманинг *регуляр бўлиниши* дейилади.

$d = d(P) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$ ($\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$), P бўлинишнинг *диаметри*, деб аталади. Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ кесмадан $(k = \overline{0, n-1}) \forall \xi_k$ нуқтани оламиз: $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 164 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

6.1 – таъриф. Ушбу

$$\sigma_P(f) = \sigma_P(f, \{\xi_k\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \quad (6.1)$$

йиғиндига, $f(x)$ функциянинг, P бўлинишга ва ξ_k нуқтани танлашга мос келган, *интеграл йиғиндис* (*Риман йиғиндис*) деб аталади.

6.2– таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ мавжуд бўлиб, диаметри $d(P) < \sigma$ бўлган $[a, b]$ кесманинг ҳар қандай P бўлинишида, ҳамда $\forall \xi_k$ ($x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$) нуқтани танлашга боғлиқ бўлмаган ҳолда,

$$\left| J - \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_P(f, \{\xi_k\}) \right| < \varepsilon \quad (6.2)$$

тенгсизлик бажарилса, у ҳолда, шу J сон, *интеграл йиғиндининг limiti* дейилади ва у $J = \lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma_P(f)$ каби ёзилади.

6.3– таъриф. Агар $f(x)$ функция учун, (6.1) интеграл йиғиндининг $d(P) \rightarrow 0$ да J limiti мавжуд бўлса, у ҳолда, $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада *Риман маъносида интегралланувчи* дейилади.

Интеграл йиғиндининг J лимитига $f(x)$ функциядан $[a, b]$ кесма бўйича олинган *аниқ интеграл* (*Риман маъносида*) дейилади ва у

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 165 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int_a^b f(x)dx = J \quad (6.3)$$

символ орқали белгиланади (6.3) да, f - интеграл остидаги функция, a сон-интегралнинг қуйи чегараси, b сон эса, - интегралнинг юқори чегараси, деб аталади. Интеграл остидаги x ўзгарувчини бошқа ўзгарувчига алмаштириш ҳам мумкин, яъни

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$

ва ҳ.к.

Таъриф бўйича, $\int_a^a f(x)dx = 0$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ($a < b$ деб оламиз).

6.1– мисол. $f(x) = x$ функция ихтиёрий $[a, b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. $[a, b]$ кесманинг $\forall P = \{x_k\}_{k=1}^n$ бўлинишини оламиз. Натижада $[a, b]$ кесма $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ бўлакларга бўлинади ва $\xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$ ($\xi_k \in [x_{i-1}, x_i]$), $i = \overline{1, n}$ деб белгилаймиз. P бўлинишга мос келган

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 166 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\begin{aligned}\sigma_P(f) &= \sigma_P(f, \{\xi_i\}) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i + x_{i-1}}{2} (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2 - x_{i-1}^2}{2} = \\ &= \frac{1}{2} [(x_1^2 - x_0^2) + (x_2^2 - x_1^2) + \dots + (x_n^2 - x_{n-1}^2)] = \frac{1}{2} (x_n^2 - x_0^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)\end{aligned}$$

кўринишда бўлади. Бундан $\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma_P(f) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x dx$.

Демак, $f(x) = x$ функция ихтиёрий $[a, b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи экан.

Аниқ интегралнинг таърифидан, ҳар қандай Риман маъносида интегралланувчи функция чегараланган бўлишига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас, лекин ҳар қандай чегараланган функция ҳар доим ҳам интегралланувчи бўлавермайди.

6.2– мисол. Ушбу

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ratsional son bo'lganda,} \\ 0, & x \text{ irratsonal son bo'lganda} \end{cases}$$

Дирихле функцияси $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($a < b$) кесмада Риман маъносида интегралланувчи эмаслигини кўрсатинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 167 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. $[a, b]$ кесманинг $\forall P$ бўлинишини олиб, қуйидаги

$$\sigma_P(D; \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n D(\xi_k) \cdot \Delta x_k,$$

$$\sigma_P(D; \{\eta_k\}) = \sum_{k=1}^n D(\eta_k) \Delta x_k$$

йиғиндиларни тузамиз. $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ нукта сифатида $[x_{k-1}, x_k]$ кесмадаги ихтиёрий рационал нуктани, η_k сифатида эса ($\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$), шу кесмадаги ихтиёрий иррационал нуктани оламиз. У ҳолда, $D(\xi_k) = 1, D(\eta_k) = 0$ бўлади. Шунинг учун,

$$\sigma_P(D; \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a, \quad \sigma_P(D; \{\eta_k\}) = 0$$

Демак, $b - a \neq 0$ учун Дирихле функциясининг интеграл йиғиндиси,

6.2– таърифга биноан, лимитга эга эмас. Шунинг учун, Дирихле функцияси $[a, b]$ кесмада интегралланувчи эмас.

6.3 – мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \text{ rational son bo'lganda,} \\ -x, & x \text{ irrational son bo'lganda} \end{cases}$$

функциянинг $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($a < b$) кесмада Риман маъносида интегралланувчи

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 168 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. $P J = [a, b]$ кесманинг ихтиёрий бўлиниши бўлсин. Унда $J = [a, b]$ кесма $J_1, J_2, \dots, J_n$ кесмаларга бўлинади. $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] = J_k$ нукта сифатида, $[x_{k-1}, x_k]$ кесмадаги ихтиёрий рационал нуктани, $\eta_k (\eta_k \in [x_{k-1}, x_k])$ сифатида эса, шу кесмадаги ихтиёрий иррационал нуктани оламиз. У ҳолда,

$$\sigma_P(f; \{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot \Delta x_k,$$

$$\sigma_P(f; \{\eta_k\}) = \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (-\eta_k) \cdot \Delta x_k$$

йиғиндиларни тузамиз. Бунда $\sigma_P(f; \{\xi_k\})$ йиғинди $f_1(x) = x$ функция учун интеграл йиғинди бўлади ва у 6.1-мисолга асосан,

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma_P(f; \{\xi_k\}) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x dx.$$

бўлади. $\sigma_P(f; \{\eta_k\})$ йиғинди эса, $f_2(x) = -x$ функция учун интеграл йиғинди бўлиб,

$$\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma_P(f; \{\eta_k\}) = -\frac{b^2 - a^2}{2} = -\int_a^b x dx.$$

бўлади. Шундай қилиб, берилган интеграл йиғинди ягона лимитга эга эмас.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 169 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Демак, берилган функция $[a,b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи эмас.

6.4– мисол. $[a,b]$ кесмада чегараланмаган функциянинг Риман маъносида интегралланувчи эмаслигини исботланг.

Ечилиши. $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чегараланмаган бўлсин. $[a,b]$ кесмани чекли $P = \{x_k\}_{k=1}^n$ нуқталар системаси ёрдамида чекли сондаги $[x_{k-1}, x_k]$ кесмаларга бўламиз, у ҳолда, $f(x)$ функция шу кесмаларнинг, ҳеч бўлмаганда, бирида чегараланмаган бўлади. Умумийликни бузмаслик учун, $f(x)$ функция $[x_0, x_1]$ кесмада чегараланмаган бўлсин, деб фараз қиламиз. Қолган $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ кесмалардан $\forall \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ нуқталарни олиб, уларни белгилаймиз ва ушбу

$$\sigma_P(f) = \sigma_P(f, \{\xi_k\}) = f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

йиғиндини тузамиз. Энди $f(x)$ функцияни $[x_0, x_1]$ кесмада қараймиз. $f(x)$ функция $[x_0, x_1]$ кесмада чегараланмаганлиги учун, ихтиёрий олдиндан берилган $M > 0$ сон учун, бу кесмадан шундай ξ_1 нуқта топиладики, бу нуқтада $|f(\xi_1)| \geq \frac{(\tilde{\sigma}_P + M)}{\Delta x_1}$ бўлади. Бундан, $|f(\xi_1)| \cdot \Delta x_1 \geq |\tilde{\sigma}_P| + M$ бўлади. Шунинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 170 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

учун, $\forall P = \{x_k\}_{k=1}^n$ бўлинишга мос келган интеграл йиғинди,

$$\left| \sigma_p(f, \{\xi_k\}) \right| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| = \left| f(\xi_1) \Delta x_1 + \bar{\sigma}_p(f) \right| \geq \left| f(\xi_1) \Delta x_1 \right| - \left| \bar{\sigma}_p(f) \right| \geq M$$

тенгсизликни қаноатлантиради.

$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = +\infty$ бўлган $\{M_n\}$ сонлар кетма–кетлигини, ҳамда $[a, b]$ кесманинг

диаметрлари $d_n(p) \rightarrow 0$ бўлган $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ бўлинишлари кетма – кетлигини

қарайлик. Бу бўлинишларга мос ва $\left| \sigma_p^n(f) \right| \geq M_n$ шартни қаноатлантирувчи

$\{\sigma_p^n(f)\}$ интеграл йиғиндилар кетма –кетлигини ҳам қараймиз. Бу интеграл

йиғиндилар кетма – кетлиги узоқлашувчи бўлади, яъни $f(x)$ функция $[a, b]$

кесмада интегралланувчи бўлмайди. Шундай қилиб, юқоридаги таъриф ва

6.2-6.4- мисоллардан, қуйидаги хулосани чиқариш мумкин.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда, у шу

кесмада чегараланган бўлади. Бу тасдиқнинг тескарисы ўринли эмас

(6.2 - мисолга қаранг), яъни $f(x)$ функциянинг интегралланувчи бўлиши учун,

унинг чегараланганлиги *зарурий шарт* бўлиб, лекин *етарли шарт* бўла олмас

экан.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 171 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Аниқ интегрални, таъриф бўйича, яъни интегрални интеграл йиғиндининг лимити сифатида қараб, ҳисоблашга доир мисоллар келтираимиз:

6.5 – мисол. Ушбу $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ интегрални таъриф бўйича ҳисобланг.

Ечилиши. $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесманинг регуляр P бўлинишини, яъни

$$P = \left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2n}, \dots, x_n = \frac{\pi}{2} \right\} \text{ бўлинишни қараймиз. У ҳолда, } \Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{2n}$$

бўлади. ξ_k нуқта сифатида, $[x_k, x_{k+1}]$ кесманинг ўнг четки нуқтасини оламиз,

яъни $\xi_k = x_{k+1}$, Функциянинг ξ_k нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f(\xi_0) = \cos \xi_0 = \cos \frac{\pi}{2n}, \dots, f(\xi_k) = \cos \xi_k = \frac{(k+1)\pi}{2n}, \dots, f(\xi_{n-1}) = \cos \xi_{n-1} = 0$$

Энди $\cos x$ функциянинг $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесма учун интеграл йиғиндисини тузиб,

унинг $n \rightarrow \infty$ да лимитини ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 172 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\sigma_p(f) = \sigma_p(\cos x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cos \xi_k \cdot \frac{\pi}{2n} =$$

$$= \frac{\pi}{2n} \left[\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right] = \frac{\pi \cdot \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{(n-1)\pi}{4n}}{2n \cdot \sin \frac{\pi}{4n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{(n-1)\pi}{4n}}{2n \cdot \sin \frac{\pi}{4n}},$$

Бунда, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \cdot \sin \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ нинг узлуксизлигини эътиборга олсак, у ҳолда,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(\cos x) = \frac{\pi \cdot \sin^2 \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

6.6. – мисол. Ушбу

$$\int_a^b x^m \, dx \quad (0 < a < b), \quad m \neq -1$$

интегрални таъриф бўйича ҳисобланг.

Ечилиши. $[a, b]$ кесманинг регуляр бўлмаган бўлинишини, яъни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 173 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$P = \left\{ x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \text{ бунда } x_k = aq^k, q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right\}$ бўлинишни қараймиз. ξ_k

нуқта сифатида, $[x_k, x_{k+1}]$ кесманинг чап четки нуқтасини оламыз, яъни $\xi_k = x_k$.

У ҳолда, интеграл йиғиндининг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} \sigma_P(f) &= \sigma_P(x^m) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^m (x_{k+1} - x_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (aq^k)^m a(q^{k+1} - q^k) = a^{m+1} (q-1) \sum_{k=0}^{n-1} q^{k(m+1)} \end{aligned}$$

Бундан, геометрик прогрессия хадлари йиғиндиси формуласини ҳисобга олган ҳолда,

$$\sigma_P(x^m) = \frac{a^{m+1} (q-1) \left[\left(\frac{b}{a} \right)^{m+1} - 1 \right]}{q^{m+1} - 1} = \frac{(b^{m+1} - a^{m+1})(q-1)}{q^{m+1} - 1}$$

муносабатни ҳосил қиламиз, бунда $n \rightarrow \infty$ да $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \rightarrow 1$ ва $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(1+\lambda)^\mu - 1}{\lambda} = \mu$

формулани эътиборга олсак,

$$\int_a^b \frac{dx}{x^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x^m) = (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q-1}{q^{m+1} - 1} = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

$m = -1$ бўлган ҳолда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 174 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\sigma_p(x^{-1}) = n(q-1) = n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right)$$

бўлади. Буерда $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{a^\lambda - 1}{\lambda} = \ln a$ формулани эътиборга олсак, у ҳолда,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right) = \ln b - \ln a$$

эканлиги келиб чиқади.

6.7– мисол. Ушбу $\int_0^1 e^x dx$ аниқ интегрални таъриф бўйича ҳисобланг.

Ечилиши. $f(x) = e^x$ функция $[0,1]$ кесмада аниқланган. $[0,1]$ кесманинг

$P = \{x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < \dots < x_k = \frac{k}{n} < \dots < x_n = \frac{n}{n} = 1\}$ регуляр бўлинишини қараймиз.

Равшанки, $[x_k; x_{k+1}]$ кесманинг узунлиги, $\Delta x_k = \frac{1}{n}$. ξ_k нукта сифатида,

кесманинг чап четки нуктасини оламиз, яъни $\xi_k = x_k = \frac{k}{n} (k = 0, 1, \dots, n-1)$.

Энди шу P бўлинишга мос келган интеграл йиғиндини тузамиз:

$$\sigma_p(e^x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} = \left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right) \cdot \frac{1}{n}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 175 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$1 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}$ йиғинди, биринчи ҳади $b_0 = 1$, махражи $q = e^{\frac{1}{n}}$ бўлган геометрик прогрессия n та ҳадининг йиғиндисидан иборат бўлгани учун,

$$1 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}.$$

Шундай қилиб,

$$\sigma_p(e^x) = \sigma_p\left(e^x, \left\{\frac{k}{n}\right\}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Бундан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p\left(e^x, \left\{\frac{k}{n}\right\}\right) = (e - 1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}} - 1} = e - 1$$

Демак,

$$J = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 176 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

6.2. Дарбу йиғиндилари.

Биз бундан кейин, ҳамма вақт чегараланган функцияларни қараймиз, чунки чегараланмаган функция Риман маъносида интегралланувчи эмас (6.4 – мисолга қаранг).

$f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чегараланган бўлсин. $[a, b]$ кесманинг ихтиёрий $P = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ бўлинишини қараймиз. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чегараланган бўлгани учун, $\forall [x_{k-1}, x_k]$ кесмада ҳам чегараланган бўлади. $f(x)$ функциянинг $[x_{k-1}, x_k]$ кесмадаги m_k аниқ қуйи, M_k аниқ юқори чегаралари, яъни $m_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$, $M_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$ мавжуд бўлади ва $\forall \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ учун $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$ тенгсизликлар ўринли.

6.4 – таъриф. Ушбу

$$S_P(f) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k \quad (6.4)$$

$$s_P(f) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad (6.5)$$

йиғиндилар, мос равишда, $f(x)$ функциянинг, берилган $P = \{x_k\}_{k=1}^n$ бўлинишга

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 177 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

мос келган, қуйи ва юқори Дарбу йиғиндилари дейилади.

Дарбу йиғиндилари қуйидаги хоссаларга эга:

1-хосса. Дарбунинг ҳар қандай (6.5) қуйи йиғиндиси, Дарбунинг (6.4) юқори йиғиндисидан ошмайди: $s_p(f) \leq S_p(f)$.

2-хосса. $\forall \xi_k (x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1})$ нуқтани танлашга боғлиқ бўлмаган ҳолда, Дарбу йиғиндилари учун, $s_p(f) \leq \sigma_p(f) \leq S_p(f)$ тенгсизликлар ўринли.

3-хосса. Ҳар қандай P бўлиниш учун,

$$S_p(f) = \sup_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} \sigma_p(f; \{\xi_k\}), \quad s_p(f) = \inf_{\eta_k \in [x_{k-1}, x_k]} \sigma_p(f; \{\eta_k\})$$

муносабатлар ўринли.

4-хосса. Дарбунинг (6.5) қуйи йиғиндилари тўплами юқоридан чегараланган, (6.4) юқори йиғиндилари тўплами эса, қуйидан чегараланган.

5-хосса. Агар $P - [a, b]$ кесманинг ихтиёрий бўлиниши бўлиб, P^* эса, P бўлинишнинг нуқталарига чекли сондаги янги бўлиниш нуқталари қўшишдан ҳосил бўлган бўлиниш бўлса, у ҳолда,

$$s_p(f) \leq s_{p^*}(f), \quad S_{p^*}(f) \leq S_p(f) \quad (6.6)$$

муносабатлар ўринли бўлади.

6.4 – таъриф. $\{s_p(f)\}$ тўпламнинг аниқ юқори чегараси, $f(x)$ функциядан

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 178 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$[a, b]$ кесма бўйича олинган Дарбунинг қуйи интегралли деб аталади ва у,

$$\sup_P \{S_P(f)\} = \underline{J} = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

6.4' – таъриф. $\{S_P(f)\}$ тўпламнинг аниқ қуйи чегараси, $f(x)$ функциядан

$[a, b]$ кесма бўйича олинган Дарбунинг юқори интегралли деб аталади ва у,

$$\inf_P \{S_P(f)\} = \overline{J} = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

6-хосса. Дарбунинг қуйи интегралли, унинг юқори интеграллидан катта бўла олмайди, яъни

$$\underline{J} \leq \overline{J}.$$

6.5 – таъриф. Агар $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги қуйи ва юқори Дарбу интеграллари бир – бирига тенг бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада *Дарбу маъносида интегралланувчи* дейилади ва уларнинг умумий қиймати

$$\underline{J} = \overline{J} = J$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 179 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги аниқ интеграл (Дарбу маъносида) дейилади ва у

$$J = \int_a^b f(x) dx$$

каби белгиланади.

Агар $\underline{J} \neq \bar{J}$ бўлса, у ҳолда, $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада *интегралланувчи эмас* дейилади.

6.3 – ва 6.5 – таърифлар, ўзаро тенг кучли таърифлардир.

6.8– мисол. $f(x) = x^3$ функция учун, $[-2; 3]$ кесмада, ихтиёрий регуляризилаш P бўлинишга мос келган, қуйи ва юқори Дарбу йиғиндилари тузилсин.

Ечилиши. $[-2; 3]$ кесманинг ушбу

$$P = \{x_0 = -2 < x_1 = -2 + \frac{5}{n} < x_2 = -2 + \frac{10}{n} < \dots < x_k = -2 + \frac{5k}{n} < \dots < x_n = 3\}$$

регуляризилаш

бўлинишини қараймиз, бунда $[x_{k-1}, x_k]$ кесманинг узунлиги

$$\Delta x_k = \frac{5}{n} \quad (k = \overline{1, n}), \quad x_k = -2 + \frac{5k}{n}. \quad (6.3) \quad \text{ва} \quad (6.4)$$

формулаларга асосан, Дарбу

йиғиндиларини тузамиз.

Берилган функция $[-2; 3]$ кесмада ўсувчи бўлганлиги учун, у ўзининг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 180 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

аниқ қуйи ва аниқ юқори чегарасига, мос равишда, кесманинг чап ва ўнг четки нуқталарида эришади, яъни

$$m_k = \left(-2 + \frac{5}{n}(k-1)\right)^3, \quad M_k = \left(-2 + \frac{5}{n}k\right)^3.$$

Шундай қилиб,

$$s_p(x^3) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-2 + \frac{5}{n}k\right)^3 \cdot \frac{5}{n}, \quad S_p(x^3) = \sum_{k=1}^n \left(-2 + \frac{5k}{n}\right)^3 \cdot \frac{5}{n}$$

Энди, Дарбу йиғиндиларини ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} S_p(x^3) &= \frac{5}{n} \sum_{k=1}^n \left(-2 + \frac{5}{n}k\right)^3 = \frac{5}{n} \sum_{k=1}^n \left[\frac{125}{n^3} k^3 - 3 \cdot \frac{25}{n^2} \cdot k^2 \cdot 2 + \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \frac{5}{n} \cdot 4 \cdot 8 \right] = \frac{625}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 - \frac{150 \cdot 5}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{300}{n^2} \sum_{k=1}^n k - 40. \end{aligned}$$

Маълумки,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Бу формулаларни эътиборга олиб, охирги тенгликдан,

$$S_p(x^3) = 16 \frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{n^2}.$$

бўлишини оламиз.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 181 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Худди шундай,

$$s_p(x^3) = 16\frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{n^2}$$

ифода топилади.

6.9-мисол. $f(x) = 2x, x \in [0,1], P = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{6}{4}, 1\right\}$ ва $\xi_1 = \frac{1}{16}, \xi_2 = \frac{3}{16}, \xi_3 = \frac{3}{8},$

$\xi_4 = \frac{5}{8}, \xi_5 = \frac{3}{4}$ бўлсин. У ҳолда:

a) $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5$ қийматлар;

b) $\|\lambda_p\| = \max_{1 \leq i \leq 5} |\Delta x_i|;$

c) m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 қийматлар;

d) $f(\xi_1), f(\xi_2), f(\xi_3), f(\xi_4), f(\xi_5)$, қийматлар;

e) M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 , қийматлар

f) $s_p(f)$ қуйи Дарбу йиғиндиси;

g) $S^*(f)$ Риман йиғиндиси;

n) $S_p(f)$ юқори Дарбу йиғиндиси топилсин ва

(i) $s_p(f) \leq S^*(f) \leq S_p(f)$ муносабатнинг бажарилиши кўрсатилсин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 182 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Берилган $f(x)=2x$ функция, $[0; 1]$ кесмада узлуксиз, ўсувчи функциядан иборат. $[0; 1]$ кесма P бўлиниш ёрдамида, 5 та,

$$\left[0, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

қисм кесмаларга бўлинган.

а) қисм кесмаларнинг узунликларини ҳисоблаймиз:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{8}; \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8};$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \quad \Delta x_4 = x_4 - x_3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}; \quad \Delta x_5 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Демак,

$$\Delta x_1 = \frac{1}{8}, \quad \Delta x_2 = \frac{1}{8}; \quad \Delta x_3 = \Delta x_4 = \Delta x_5 = \frac{1}{4} \quad \text{экан.}$$

$$b) \|\lambda_P\| = \max\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4};$$

$$c) m_1 = f(0) = 0; \quad m_2 = f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}; \quad m_3 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2};$$

$$m_4 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1; \quad m_5 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2};$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 183 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$d) f(\xi_1) = 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}; f(\xi_2) = 2 \cdot \frac{3}{16} = \frac{3}{8}; f(\xi_3) = 2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{4};$$

$$f(\xi_4) = 2 \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{4}; f(\xi_5) = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$e) M_1 = f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}; M_2 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}; M_3 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1;$$

$$M_4 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2}; M_5 = f(1) = 2.$$

$$f) s_p(f) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + m_4 \Delta x_4 + m_5 \Delta x_5 =$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} =$$

$$= \frac{1}{32} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1+8+16}{32} = \frac{25}{32}.$$

$$g) S^*(f) = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + f(\xi_3) \Delta x_3 + f(\xi_4) \Delta x_4 + f(\xi_5) \Delta x_5 =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{16} + \frac{5}{16} + \frac{3}{8} = \frac{9}{16} + \frac{3}{8} = \frac{15}{16}$$

$$h) S_p(f) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 + M_4 \Delta x_4 + M_5 \Delta x_5 =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \frac{1+2+8+12+16}{32} = \frac{39}{32}.$$

$$i) s_p(f) = \frac{25}{32} < S^*(f) = \frac{15}{16} < S_p(f) = \frac{39}{32}, \text{ яъни } \frac{25}{32} < \frac{15}{16} < \frac{39}{32}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 184 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

6.10 – мисол. $f(x) = 2x$ функция учун, $[0;1]$ кесмада, $P_1 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ ва

$P_2 = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ бўлинишларга мос келган, Дарбу йиғиндиларини тузинг ва уларни солиштиринг.

Ечилиши.1) P_1 бўлиниш, $[0;1]$ кесмани, $\left[0; \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ ($x_0 = 0; x_4 = 1$) қисм кесмаларга бўлади. $f(x) = 2x$ функция, $[0;1]$ кесмада узлуксиз ва ўсувчи бўлгани учун, кесмаларнинг чап четки нуқталарида $m_i (i=1,2,3)$ минимал қийматларига, ўнг четки нуқталарида $M_i (i=1,2,3)$ максимал қийматларига эришади, яъни

$$M_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}; M_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1; M_3 = f(1) = 2 \cdot 1 = 2;$$

$$m_1 = f(0) = 2 \cdot 0 = 0; m_2 = f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; m_3 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

$\Delta x_i (i=1;2;3)$ – қисм кесмаларнинг узунликларини топамиз:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}; \Delta x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}; \Delta x_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

У ҳолда, (6.3) ва (6.4) формулаларга асосан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 185 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$S_{P_1}(f) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{8},$$

$$s_{P_1}(f) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 = 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

2) $P_2 = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$ бўлиниш, $[0;1]$ кесмани,

$$\left[0; \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right], \left[\frac{2}{3}; 1\right]$$

қисм кесмаларга бўлади. $f(x) = 2x$ функция, кесмаларнинг ўнг четки нукталарида, $M_i (i = \overline{1,5})$ максимал қийматларни, чап четки нукталарида эса, $m_i (i = \overline{1,5})$ минимал қийматларни қабул қилади, яъни

$$M_1 = f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}; \quad M_2 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad M_3 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1; \quad M_4 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}; \quad M_5 = f(1) = 2;$$

$$m_1 = f(0) = 0; \quad m_2 = f\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}; \quad m_3 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad m_4 = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1; \quad m_5 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

$\Delta x_i (i = \overline{1,5})$, қисм кесмаларнинг узунликлари:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{8}; \quad \Delta x_2 = \frac{1}{8}; \quad \Delta x_3 = \frac{1}{4}; \quad \Delta x_4 = \frac{1}{6}; \quad \Delta x_5 = \frac{1}{3}.$$

У ҳолда, (6.3) ва (6.4) формулаларга асосан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 186 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$S_{P_2}(f) = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + M_3\Delta x_3 + M_4\Delta x_4 + M_5\Delta x_5 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{355}{288};$$

$$s_{P_2} = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + m_3\Delta x_3 + m_4\Delta x_4 + m_5\Delta x_5 = 0 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{221}{288}$$

Энди, Дарбунинг, P_1 ва P_2 бўлинишларга мос келган, қуйи ва юқори йиғиндиларини солиштирамиз:

$$S_{P_1}(f) = \frac{11}{8} = 1,375, \quad s_{P_1}(f) = \frac{5}{8} = 0,625,$$

$$S_{P_2}(f) = \frac{355}{288} = 1,233, \quad s_{P_2}(f) = \frac{221}{288} = 0,767.$$

Демак, $s_{P_1}(f) < s_{P_2}(f) (S_{P_1}(f) > S_{P_2}(f))$, яъни P бўлинишга янги нуқталар қўшилганда, $s_P(f)$ қуйи йиғиндининг камаймаслигини, $S_P(f)$ юқори йиғиндининг ортмаслигини кўрамыз.

6.11 – мисол. $f(x) = 1 - x$ функция учун, $[0; 2]$ кесмада, $P_1 = \{0; \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, 1, 2\}$ ва

$P_2 = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2\}$ бўлинишларга мос келган, Дарбу йиғиндиларини тузинг ва уларни солиштиринг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 187 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. 1) P_1 бўлиниш, $[0; 2]$ кесмани, $[0; \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}]$, $[\frac{3}{4}, 1]$, $[1; 2]$ қисм кесмаларга ажратади. $f(x) = 1 - x$ функция қаралаётган кесмаларда камаювчи бўлганлиги учун, ўзининг $M_i (i = \overline{1,4})$ максимал қийматларини, қисм кесмаларнинг чап четки нуқталарида, $m_i (i = \overline{1,4})$ минимал қийматларини эса, кесмаларнинг ўнг четки нуқталарида қабул қилади.

Демак,

$$M_1 = f(x_0) = 1 - 0 = 1; M_2 = f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}; M_3 = f\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}; M_4 = f(1) = 1 - 1 = 0,$$

$$m_1 = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}; m_2 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}; m_3 = f(1) = 1 - 1 = 0; m_4 = f(2) = -1.$$

$\Delta x_i (i = \overline{1,4})$ қисм кесмаларининг узунлигини ҳисоблаймиз;

$$\Delta x_1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}; \Delta x_2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}; \Delta x_3 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}; \Delta x_4 = 2 - 1 = 1$$

Шундай қилиб, Дарбу йиғиндилари:

$$S_{P_1}(f) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 + M_4 \Delta x_4 = 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot 1 = \frac{87}{144};$$

$$s_{P_1}(f) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + m_4 \Delta x_4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot 1 = -\frac{97}{144}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 188 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Бунда, $s_{P_1}(f) < S_{P_1}(f)$.

2) P_2 бўлиниш, $[0, 2]$ кесмани,

$$[0; \frac{1}{6}], [\frac{1}{6}; \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}; \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}; 1], [1; \frac{3}{2}], [\frac{3}{2}; 2]$$

қисм кесмаларга ажратади.

Берилган функция қаралаётган кесмада узлуксиз, камаювчи бўлганлиги учун, у ўзининг $M_i (i = \overline{1,7})$ максимал қийматларини, кесмаларнинг чап четки нуқталарида, $m_i (i = \overline{1,7})$ минимал қийматларини кесмаларнинг ўнг четки нуқталарида қабул қилади, яъни

$$M_1 = f(0) = 1 - 0 = 1, \quad M_2 = f\left(\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}, \quad M_3 = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad M_4 = f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

$$M_5 = f\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}, \quad M_6 = f(1) = 1 - 1 = 0, \quad M_7 = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$m_1 = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}, \quad m_2 = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}, \quad m_3 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}, \quad m_4 = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4},$$

$$m_5 = f(1) = 1 - 1 = 0, \quad m_6 = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \quad m_7 = f(2) = -1.$$

$\Delta x_i (i = \overline{1,7})$ қисм кесмаларнинг узунликларини ҳисоблаймиз:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{6}; \Delta x_2 = \frac{1}{6}; \Delta x_3 = \frac{1}{3}; \Delta x_4 = \frac{1}{12}; \Delta x_5 = \frac{1}{4}; \Delta x_6 = \frac{1}{2}; \Delta x_7 = \frac{1}{2}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 189 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

У ҳолда,

$$s_{P_2}(f) = \sum_{i=1}^7 m_i \Delta x_i = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} + 0 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{45}{144};$$

$$S_{P_2}(f) = \sum_{i=1}^7 M_i \Delta x_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{65}{144}.$$

Демак, $s_{P_2}(f) < S_{P_2}(f)$.

Энди, P_1 ва P_2 бўлинишларга мос келган, Дарбу йиғиндиларини таққослаймиз:

$$s_{P_1}(f) = -0,673; \quad S_{P_1}(f) = \frac{87}{144} \approx 0,6042,$$

$$s_{P_2}(f) = -\frac{45}{144} = -0,312, \quad S_{P_2}(f) = \frac{65}{144} = 0,451;$$

$$s_{P_1}(f) < s_{P_2}(f), \quad S_{P_1}(f) > S_{P_2}(f),$$

яъни, бу ҳолда ҳам, P бўлинишга янги бўлиниш нуқталарини қўшиш билан, Дарбунинг қуйи йиғиндиси камаймаслиги, юқори йиғиндисининг ортмаслигига ишонч ҳосил қиламиз.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 190 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

6.3. Аниқ интеграл ёрдамида лимитларни ҳисоблаш.

6.12 – мисол. Ушбу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right)$$

лимитни ҳисобланг.

Ечилиши. $S_n = \frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2}$ деб белгилаймиз. Бу

йиғиндини қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}.$$

бунда $\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}, \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{n}\right)^2}, \dots, \frac{1}{1 + \left(\frac{n}{n}\right)^2}$ қўшилувчилар, $\frac{1}{1 + x^2}$ функциянинг

$x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_n = \frac{n}{n} = 1$ нукталардаги қийматларини ифода қилади. $[0; 1]$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 191 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

кесманинг регуляр $P = \{x_0 = 0 < x_1 < x_2, \dots, < x_{n-1} < x_n = 1\}$ бўлинишини оламиз:

$[0;1] = [0; x_1] \cup [x_1; x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}; x_n]$, бунда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$. Маълумки, таърифга

асосан, интеграл йиғиндининг лимити, қисм кесмалардан олинган ξ_i

нуқталарни танлашга боғлиқ эмас. Шунинг учун, $\xi_i = x_i$ деб олсак, у ҳолда,

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

йиғинди, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ функциянинг, $[0;1]$ кесмадаги Риман интеграл

йиғиндиси бўлиб ҳисобланади.

Демак, таърифга асосан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 1^2} + \frac{n}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n^2} \right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

6.13 – мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 192 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right)$$

лимитни ҳисобланг.

Ечилиши. Равшанки, $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{i}{n}}$ йиғинди, $f(x) = \sqrt{1+x}$ функциянинг,

$[0;1]$ кесмани тенг n та бўлакка бўлгандаги, интеграл йиғиндисини ифодалайди. Шунинг учун,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{(1+x)^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

6.1. $f(x) = x+1$ функция учун $[-1; 2]$ кесмани тенг n та бўлакка бўлиб, ҳамда ξ_i ($i = \overline{1, n}$) нуқтани $[x_{i-1}; x_i]$ кесманинг ўртаси деб олиб, $\sigma_p(f)$ интеграл йиғиндини тузинг.

Қуйидаги берилган $f(x)$ функция учун кўрсатилган кесмани тенг n та бўлакка бўлиб, Дарбунинг $s_p(f)$ ва $S_p(f)$ йиғиндиларини тузинг:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 193 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

6.2. $f(x) = x^3, x \in [-2, 3]$. **6.3.** $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0; 1]$. **6.4.** $f(x) = 2^x, x \in [0, 10]$.

6.5. $f(x) = x^4$ функция учун, $[1; 2]$ кесмани, узунликлари геометрик прогрессия ташкил этадиган n та бўлакларга бўлиб, Дарбунинг қуйи йиғиндисини тузинг ва унинг $n \rightarrow \infty$ даги лимитини топинг.

Қуйидаги берилган $f(x)$ функция учун, берилган кесманинг берилган P бўлинишига мос, Дарбунинг қуйи ва юқори йиғиндиларини тузинг.

6.6. $f(x) = 2x, x \in [0; 1], P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

6.7. $f(x) = x^2, x \in [-1; 0], P = \left\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0\right\}$.

6.8. $f(x) = x^3 + 1, x \in [0; 1], P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

6.9. $f(x) = x^2, x \in [-1; 1], P = \left\{-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

6.10. $f(x) = \sin x, x \in [0; \pi], P = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$.

Қуйидаги берилган $f(x)$ функция учун, кўрсатилган кесманинг P бўлиниши ва қисм кесмаларда танланган ξ_i ($i = \overline{1, n}$) нуқталарга мос келган

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 194 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\sigma_P(f)$ Риман интеграл йиғиндисини тузинг ва унинг қандай фигуранинг юзини ифодалашини чизмада кўрсатинг.

$$6.11. f(x) = x^2, x \in [0;1], P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}, \xi_1 = \frac{1}{8}, \xi_2 = \frac{3}{8}, \xi_3 = \frac{5}{8}, \xi_4 = \frac{7}{8}.$$

$$6.12. f(x) = \frac{3}{2}x + 1, x \in [0;2], P = \{0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2\}, \xi_1 = \frac{1}{8}, \xi_2 = \frac{1}{2},$$

$$\xi_3 = \frac{7}{8}, \xi_4 = \frac{5}{4}, \xi_5 = \frac{7}{4}.$$

$$6.13. f(x) = 2x, x \in [0;1], P = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}, \xi_1 = \frac{1}{16}, \xi_2 = \frac{3}{16},$$

$$\xi_3 = \frac{3}{8}, \xi_4 = \frac{1}{8}, \xi_5 = \frac{7}{8}.$$

Қуйидаги интегралларни, Риман интеграл йиғиндисининг лимити сифатида қараб, ҳисобланг:

$$6.14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$$

$$6.15. \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

$$6.16. \int_0^{10} 3^x dx.$$

$$6.17. \int_a^b e^{kx} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 195 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$6.18. \int_0^1 x^2 dx.$$

$$6.19. \int_0^1 x(1-x^2) dx.$$

$$6.20. \int_a^b \frac{1}{x^2} dx \quad (0 < a < b) \quad (\xi_i = \sqrt{x_i x_{i-1}}, \quad (i = \overline{0, n}) \text{ деб олинг}).$$

$$6.21. \int_1^e \ln x dx \quad ([1; e] \text{ кесмани геометрик прогрессияни ташкил қилади ган}$$

нуқталар ёрдамида қисм кесмаларга бўлинг).

$$6.22. \text{ Ушбу } \int_1^4 x^3 dx \text{ интегрални қуйидаги шартларда:}$$

1) $[1; 4]$ кесмани тенг бўлақларга бўлиб, ξ_i нуқта сифатида қисм кесмаларнинг чап четки нуқталарини олиб;

2) $[1; 4]$ кесмани тенг бўлақларга бўлиб, ξ_i нуқта сифатида қисм кесмаларнинг ўнг четки нуқталарини олиб;

3) $[1; 4]$ кесмани тенг бўлақларга бўлиб, ξ_i нуқта сифатида қисм кесмаларнинг ўрта нуқталарини олиб;

4) $[1; 4]$ кесмани $x_0, x_2, x_3, \dots, x_n$ (бунда $x_k = q^k, q = \sqrt[n]{4}$) нуқталар ёрдамида бўлиб, ξ_i нуқта сифатида, қисм кесмаларнинг чап четки нуқталарини олиб;

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 196 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5) $[1; 4]$ кесмани $x_0, x_2, x_3, \dots, x_n$ (бунда $x_k = q^k, q = \sqrt[n]{4}$) нуқталар ёрдамида бўлиб, ξ_i нуқта сифатида, қисм кесмаларнинг ўнг четки нуқталарини олиб, ҳисобланг.

6.23. Ушбу $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \frac{\pi}{x})$, узилишга эга, функциянинг $[0; 1]$ кесмада интегралланувчилигини исботланг.

6.24. Ушбу

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{irrational son bo'lganda}, \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

(бунда m ва $n (n > 1)$ лар ўзаро туб бутун сонлар) Риман функциясининг ихтиёрий чекли кесмада интегралланувчилигини исботланг.

6.25. Аниқ интегралнинг тарифига кўра, агар $f(x)$ функция бирор кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда унинг шу кесмада чегараланган бўлишини исботланг.

6.26. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s_p(f) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_p(f) = \int_a^b f(x) dx$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 197 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

эканлигини исботланг ($\lambda = \max |\Delta x_k|$).

Аниқ интеграл ёрдамида, қуйидаги йиғиндиларнинг лимитини ҳисобланг.

$$6.27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$6.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} \right).$$

$$6.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}} \right).$$

$$6.30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

$$6.31. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4}{n^2} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right) \frac{1}{n}.$$

$$6.32. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^4} + \frac{8}{n^4} + \dots + \frac{(4n-1)^3}{n^2} \right) \frac{1}{n}.$$

$$6.33. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[1 + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4n}} + \dots + \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi n}{4n}} \right].$$

$$6.34. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0).$$

$$6.35. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

$$6.36. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

$$6.37. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^n}} \right).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 198 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$6.38. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

$$6.39. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right).$$

$$6.40. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left[1 + \sqrt{\frac{n}{n+3}} + \sqrt{\frac{n}{n+6}} + \dots + \sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}} \right].$$

$$6.41. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{2n} + \cos \frac{3\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} \right].$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$6.1. \sigma_p(f) = 4,5$$

$$6.2. s_p(f) = 16 \frac{1}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}, \quad S_p(f) = 16 \frac{1}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

$$6.3. s_p(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \sqrt{\frac{i}{n}}; \quad S_p(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}} \quad 6.4. s_p(f) = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}; \quad S_p(f) = \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}.$$

$$6.5. s_p(f) = 31 \cdot \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{32} - 1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_p(f) = \frac{31}{5}. \quad 6.6. s_p(f) = \frac{5}{8}, \quad S_p(f) = \frac{11}{8}.$$

$$6.7. s_p(f) = \frac{9}{64}, \quad S_p(f) = \frac{37}{64}.$$

$$6.8. s_p(f) = \frac{17}{16}, \quad S_p(f) = \frac{25}{16}.$$

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Илова лар



Орка га

Са хифа 199 / 708

Тулик экран

Чи ки ш

$$6.9. s_p(f) = \frac{3}{16}; \quad S_p(f) = \frac{43}{32}.$$

$$6.11. \sigma_p(f) = \frac{21}{64}, \text{ 6.1-чизма.}$$

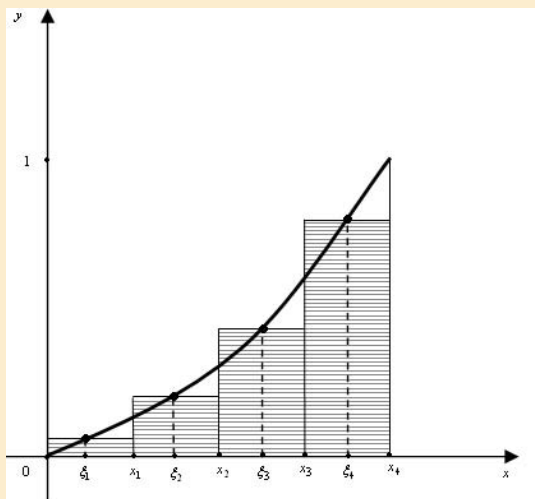
$$6.13. \sigma_p(f) = \frac{27}{32}, \text{ 6.3-чизма.}$$

$$6.17. \frac{e^{kb} - e^{ka}}{k}.$$

$$6.18. \frac{1}{3}.$$

$$6.20. \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

$$6.21.1.$$



6.1-чизма.

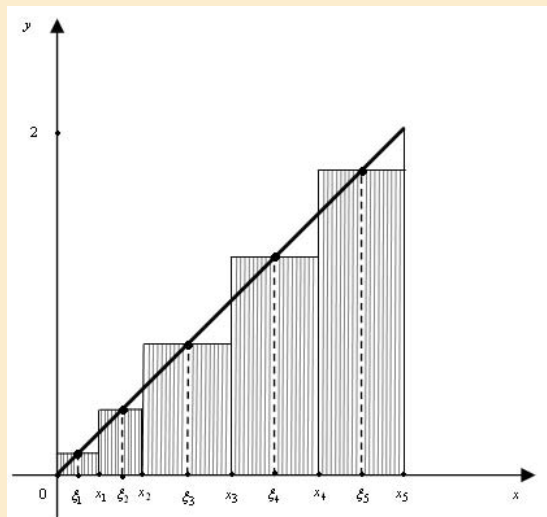
$$6.10. s_p(f) = \frac{\pi}{6}, \quad S_p(f) = \frac{11\pi}{12}.$$

$$6.12. \sigma_p(f) = \frac{39}{8}, \text{ 6.2-чизма.}$$

$$6.14.1. \quad 6.15. \ln 2. \quad 6.16. \frac{3^{10} - 1}{\ln 3}.$$

$$6.19. \frac{1}{4}.$$

$$6.22. \frac{255}{4}.$$



6.2-чизма

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

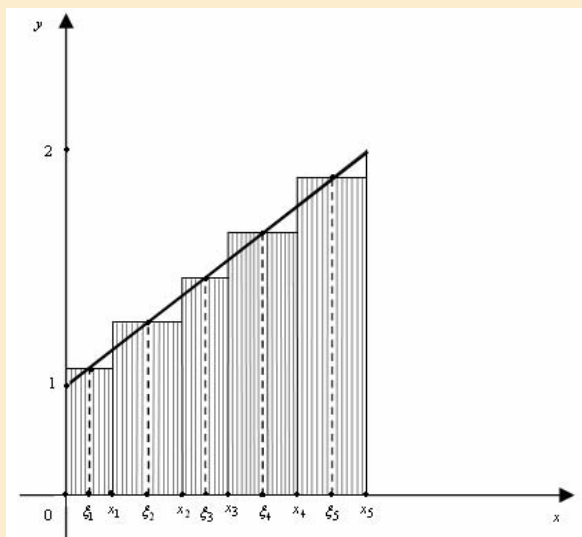


О р к а г а

С а х и ф а 200 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



6.3-чизма

6.27. $\ln 2$. 6.28. 4. 6.29. $e - 1$. 6.30. 2. 6.31. $\frac{1}{3}$. 6.32. 16.

6.32. $\frac{4}{\pi}$. 6.33. $\frac{1}{\alpha + 1}$. 6.34. $\frac{1}{e}$. 6.35. $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. 6.36. $\frac{\pi}{6}$.

6.37. $\frac{2}{\pi}$. 6.38. $\frac{1}{2}$. 6.39. 2. 6.40. 1.

Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар



Оркага

Сахифа / 708

Тулик экран

Чикиш

7-§. Аниқ интегралнинг мавжудлиги. Интегралланувчи функцияларнинг синфлари. Аниқ интегралнинг хоссалари

7.1. Аниқ интегралнинг мавжудлиги.

7.1– теорема. $[a, b]$ кесмада чегараланган $f(x)$ функция, шу кесмада Дарбу маъносида интегралланувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ кесманинг диаметри $d(P) < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлинишига нисбатан, Дарбу йиғиндиларининг,

$$S_P(f) - s_P(f) < \varepsilon \quad (7.1)$$

тенгсизликни қаноатлантириши зарур ва етарлидир.

Агар $f(x)$ функциянинг $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{0, n-1}$) кесмадаги тебранишини ω_k деб белгиласак, у ҳолда (7.1) тенгсизлик, қуйидаги,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$$

тенгсизликка тенг кучли бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

7.2– теорема. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлиши учун, унинг Дарбу маъносида интегралланувчи бўлиши, зарур ва етарлидир.

Бу ҳолда, Риман интеграли, Дарбу маъносидаги интегралга тенг бўлади. Биз бундан кейин, «Дарбу маъносидаги интеграл» деган терминни ишлатмасдан, ўша интегрални «Риман маъносидаги» интеграл деб атаимиз.

7.2. Интегралланувчи функцияларнинг синфлари.

7.3 – теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда, $f(x)$ функция шу кесмада интегралланувчи бўлади.

7.4 – теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чегараланган ва монотон бўлса, у ҳолда, $f(x)$ функция шу кесмада интегралланувчи бўлади.

7.5– теорема. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада чегараланган ва кесманинг чекли сондаги нуқталарида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз бўлса, у ҳолда, $f(x)$ функция шу кесмада интегралланувчи бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Аниқ интегралнинг таърифи бўйича, яъни уни, интеграл йиғиндининг лимити сифатида қараб, баъзи бир содда функцияларнинг интегралларини ҳисоблаш мумкин. Лекин, кўпинча, ҳар қандай узлуксиз функциянинг аниқ интегралини, интеграл йиғиндининг лимити сифатида қараб, ҳисоблаш анча ноқулайликларга ва қийинчиликларга олиб келади.

7.1 – мисол. Ушбу $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $f(x) = \sin x$ функция $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун,

7.3– теоремага кўра, у қаралаётган кесмада интегралланувчи бўлади.

Демак, берилган функциянинг $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесма бўйича интегралини таърифга кўра ҳисоблашда, $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесманинг P бўлинишини, ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ қисм кесмадан ξ_k нукталарни олиб, интеграл йиғиндини тузиш ва унинг лимитини ҳисоблашга қулай қилиб олиш имкониятига эга бўламиз. Шуларни эътиборга олган ҳолда, $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесмани n та тенг бўлакка бўлиб, $\xi_k (k = \overline{0, n-1})$ нукталар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

сифатида $[x_k, x_{k+1}]$ кесманинг чап четки нуқталарни олиб, $\sigma_p(f)$ интеграл

йиғиндини тузамиз:

$$\sigma_p(f) = \sigma_p(\sin x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

$$\sum_{k=1}^n \sin k\alpha = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \quad \text{формулага асосан, } \sigma_p(\sin x) \text{ йиғиндини,}$$

$$\sigma_p(f) = \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin \frac{\pi}{4n}}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Энди интеграл йиғиндининг $n \rightarrow \infty$ даги лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} \cdot \pi}{4n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin \frac{\pi}{4n}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right) \cdot \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}}.$$

Бундан, $f(x) = \sin x$ функциянинг қаралаётган кесмада узлуксизлигини, ҳамда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{4n}}{\sin \frac{\pi}{4n}} = 1 \text{ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_p(\sin x) = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 1$$

бўлади.

Демак, $f(x) = \sin x$ функция $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун, у интегралланувчи бўлар экан.

Агар $g(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва кесманинг чекли сондаги нуқталарида, $f(x)$ функциянинг қийматларидан фарқли (бошқа) қийматлар қабул қилса, у ҳолда, $g(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx$$

тенглик ўринли.

7.2-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 5, & x = 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функцияни $[0; 1]$ кесмада интегралланувчи эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. Берилган функция, $[0; 1]$ кесмада чегараланган ва кесманинг $x = 0$ нуктасида узилишга эга бўлиб, қолган барча нукталарида узлуксиз.

Демак, 7.5- теоремага асосан, берилган функция, $[0; 1]$ кесмада интегралланувчи бўлади.

$$\mathbf{7.3-мисол.} \quad g(x) = \begin{cases} 2, & x \in [0, 3) \cup (3, 4] \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

функциянинг $[0, 4]$ кесмада интегралланувчи эканлигини кўрсатинг ва интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Берилган функция, ўзгармас $f(x) = 2, \quad x \in [0, 4]$ функциядан, фақат $x = 3$ нуктада фарқ қилади.

Равшанки,

$$\int_0^4 f(x) dx = 8.$$

Энди $[0, 4]$ кесманинг ихтиёрий P (регуляр ёки регуляр бўлмаган) бўлинишида, 8 сони $s_p(g) \leq I \leq S_p(g)$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган ягона I сондан иборатлигини кўрсатсак,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int_0^4 g(x) dx = 8$$

бўлиши кўрсатилган (исботланган) бўлади.

$P - [0,4]$ кесманинг ихтиёрий бўлиниши бўлсин. Бу бўлинишдан ҳосил бўлган $[x_{i-1}, x_i]$ қисм кесмаларнинг ҳар бирида $m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) = 2, i = 1, 2, \dots, n,$

$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \geq 2, i = 1, 2, \dots, n.$ У ҳолда, куйи Дарбу йиғиндиси,

$$s_p(g) = 2 \cdot \Delta x_1 + 2 \cdot \Delta x_2 + \dots + 2 \cdot \Delta x_n = 2(\Delta x_1 + \dots + \Delta x_n) = 2 \cdot \Delta x = 2 \cdot 4 = 8,$$

ва юқори Дарбу йиғиндиси,

$$S_p(g) \geq 2 \cdot \Delta x_1 + 2 \cdot \Delta x_2 + \dots + 2 \cdot \Delta x_n = 2(\Delta x_1 + \dots + \Delta x_n) = 2 \cdot \Delta x = 2 \cdot 4 = 8$$

бўлади.

Шундай қилиб, $[0,4]$ кесманинг барча P бўлинишларида, $s_p(g) \leq 8 \leq S_p(g)$ тенгсизликлар ўринли.

Энди ягоналикни исботлаймиз. $[0,4]$ кесманинг барча P бўлинишларида,

$$s_p(g) \leq I \leq S_p(g) \quad (7.2)$$

бўлсин, деб фараз қиламиз. $s_p(g) = 8$ муносабат, барча P бўлинишлар учун бажарилганлигидан, I , ҳеч бўлмаганда, 8 га тенг бўлади. Энди, фараз

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

қилайликки, $I > 8$ бўлсин ва $[0,4]$ кесманинг P бўлинишини шундай

ўзгартирамизки, $\lambda_P = \max |\Delta x_i| < \frac{1}{5}(I - 8)$ ва $0 = x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < 3 < x_i < \dots < x_n = 4$

бўлсин. У ҳолда,

$$\begin{aligned} S_P(g) &= 2\Delta x + \dots + 2\Delta x_{i-1} + 7\Delta x_i + 2\Delta x_{i+1} + \dots + 2\Delta x_n = \\ &= 2(\Delta x + \Delta x_2 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) + 5\Delta x_i = 8 + 5\Delta x_i < 8 + \frac{5}{5}(I - 8) = I \end{aligned}$$

бўлиши келиб чиқади, бундан, I соннинг (7.2) муносабатни қаноатлантормаслиги келиб чиқади. Бу қарама-қаршилик, I соннинг 8 дан катта бўлмаслигини, яъни $I = 8$ бўлишини исботлайди.

7.3. Аниқ интегралнинг хоссалари.

Аниқ интегралнинг, таъриф-дан бевосита келиб чиқадиган, қуйидаги хоссаларини келтирамиз:

$$1^0. \int_a^b dx = b - a.$$

2⁰. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у исталган $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ кесмада ҳам интегралланувчи бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3⁰. Агар $f(x)$ функция $[a, c]$ ва $[c, b]$ кесмаларда интегралланувчи бўлса, у ҳолда, $f(x)$ функция $[a, b]$ да ҳам интегралланувчи бўлади ва ушбу

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad a \leq c \leq b, \quad (7.3)$$

тенглик ўринли.

4⁰. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда, $\forall \lambda, \mu \in R$ лар учун $\lambda f(x) + \mu g(x)$ функция ҳам $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx \quad (7.4)$$

тенглик ўринли.

7.1 – натижа. Агар $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда, $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \dots + C_n f_n(x)$ ($C_k = \text{const}, k = \overline{1, n}$) функция ҳам шу кесмада интегралланувчи бўлади ва

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + \dots + C_n f_n(x)]dx = C_1 \int_a^b f_1(x)dx + \dots + C_n \int_a^b f_n(x)dx \quad (7.5)$$

тенглик ўринли.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

5⁰. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда, уларнинг $f(x)g(x)$ кўпайтмаси ҳам шу кесмада интегралланувчи бўлади.

7.2 – натижа. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, $\forall n \in N$ учун, $[f(x)]^n$ функция ҳам шу кесмада интегралланувчи бўлади.

6⁰. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ учун, $f(x) \geq 0$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (a > b)$$

тенгсизлик ўринли.

7.3– натижа. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ учун, $f(x) \leq g(x)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда,

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)dx \quad (7.6)$$

тенгсизлик ўринли.

7⁰. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, $|f(x)|$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функция ҳам шу кесмада интегралланувчи бўлади ва

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (7.7)$$

тенгсизлик ўринли.

Бу хоссанинг тескараси ҳар доим ҳам ўринли эмас, яъни $|f(x)|$ функциянинг шу кесмада интегралланувчи эканлигидан, $f(x)$ функциянинг интегралланувчи эканлиги келиб чиқмайди.

8⁰. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда, шундай μ ўзгармас сон ($m \leq \mu \leq M$) мавжуд бўлади ва

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a) \quad (7.8)$$

тенглик ўринли, бунда $m = \inf_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$, $M = \sup_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$.

9⁰ (**ўрта қиймат ҳақидаги теорема**). Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция шу кесмада ўз ишорасини сақласа, у ҳолда, шундай μ ўзгармас сон ($m \leq \mu \leq M$) мавжуд бўлади ва

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx \quad (7.9)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тенглик ўринли.

7.4 – натижа. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда, $[a, b]$ кесмада шундай ξ ($\xi \in [a, b]$) мавжуд бўлади ва

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)(b-a) \quad (7.10)$$

тенглик ўринли.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлса ($a \leq b$), у ҳолда у аниқ интегралнинг 2^0 -хоссасига асосан, $[a, x]$ ($a \leq x \leq b$) кесмада ҳам интегралланувчи бўлади. Аниқ интегралнинг юқори чегараси b ни x га, интеграл остидаги ифодада x ўзгарувчини t га алмаштирсак, у ҳолда,

$$\int_a^x f(t)dt$$

x га боғлиқ ифода ҳосил бўлади, уни $\Phi(x)$ орқали белгилаймиз:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (7.11)$$

Бу функция қуйидаги хоссаларга эга:

10^0 . Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ ва } F(x) = \int_x^b f(t)dt$$

функциялар ҳам шу кесмада узлуксиз бўлади.

11⁰. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлиб, бирор $x_0 \in [a, b]$ нуктада узлуксиз бўлса, у ҳолда, $\Phi(x)$ ва $F(x)$ функциялар ҳам x_0 нуктада дифференциалланувчи бўлади ва

$$\Phi'(x_0) = f(x_0), \quad F'(x_0) = -f(x_0) \quad (7.12)$$

тенгликлар ўринли.

7.1-эслатма. Агар x_0 нукта, $[a, b]$ кесманинг четки нукталари билан устма-уст тушса, у ҳолда, $\Phi(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги ҳосиласи, ўнг ёки чап ҳосила деб тушунилади.

7.5– натижа. $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлган ҳар қандай $f(x)$ функция, шу кесмада бошланғич функцияга эга бўлади. Шу бошланғич функциялардан бири

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C \quad (7.13)$$

бўлади. Бу формула аниқмас интеграл билан аниқ интеграл орасидаги

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бошланишни ифода қилади.

7.4-мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1/2 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & 1/2 \leq x \leq 1 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

функциянинг $[0; 1]$ кесмада интегралланувчи эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. Берилган функция $[0; 1]$ кесмада чегараланган ва кесманинг

$x = \frac{1}{2}$ нуқтасида узилишга эга бўлиб, қолган барча нуқталарида узлуксиз.

Демак, 7.5-теорема ва 3⁰ - хоссага асосан, берилган функция, $[0; 1]$ кесмада интегралланувчи бўлади, яъни

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^{1/2} x dx + \int_{1/2}^1 1 dx = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}.$$

7.5 – мисол. $P(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи ва манфий эмас, $f(x)$ функция эса, $[a, b]$ кесмада $m \leq f(x) \leq M$ муносабатларни қаноатлантирсин. Агар $f(x)P(x)$ функция шу кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда,

$$m \int_a^b P(x) dx \leq \int_a^b P(x) f(x) dx \leq M \int_a^b P(x) dx \quad (7.14)$$

тенгсизликлар бажарилишини исботланг.

Ечилиши. Шартга кўра, $\forall a \leq x \leq b$ учун, $m \leq f(x) \leq M$ бўлганлигидан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$mP(x) \leq f(x)P(x) \leq MP(x)$ тенгсизликлар ўринли. Бу тенгсизликларни, a дан b гача, ҳадма – ҳад интеграллаш натижасида, (7.14) тенгсизликларни ҳосил қиламиз.

7.6 – мисол. $P(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада берилган бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

a) $P(x)$ – манфий эмас;

b) $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$;

c) $f(x)P(x)$, $\varphi(x)P(x)$, $\psi(x)P(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлсин. У ҳолда,

$$\int_a^b \varphi(x)P(x)dx \leq \int_a^b f(x)P(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)P(x)dx \quad (7.15)$$

тенгсизлик бажарилишини исботланг.

Ечилиши. Шартга кўра, $P(x) \geq 0$, $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ бўлганлиги учун, $\varphi(x)P(x) \leq f(x)P(x) \leq \psi(x)P(x)$ тенгсизликлар ҳам ўринли бўлади. Бундан (7.15) тенгсизликлар келиб чиқади.

7.7 – мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$0 < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2 + 2}} dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$$

тенгсизликларни исботланг.

Ечилиши. $P(x) = \sin x$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{x^2 + 2}}$ деб белгилайлик. $[0; \pi]$ кесмада

$0 < \frac{1}{\sqrt[5]{x^2 + 2}} < \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$, $\sin x \geq 0$. **7.5**– мисолдаги (7.14) тенгсизликларга кўра,

$$0 < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2 + 1}} dx < \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \int_0^{\pi} \sin x dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$$

эканлиги исботланади.

7.8 – мисол. Ушбу

$$\frac{1}{10\sqrt{3}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{2 + x^2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{210}}$$

тенгсизликларни исботланг.

Ечилиши. $P(x) = x^9$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 + x^2}}$ деб белгиласак, u ҳолда, $[0; 1]$

кесмада $P(x) \geq 0$ ва интегралланувчи, $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, ҳамда $f(x) \cdot P(x)$ функция интегралланувчи.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Демак, 7.5 – мисолдаги (7.14) тенгсизликларга кўра,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^1 x^9 dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{2+x^2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx.$$

Бундан, $\frac{1}{10\sqrt{3}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{2+x^2}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 10}$ тенгсизликларнинг ўринли эканлигини

оламиз.

7.9 – мисол . $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad x \geq 0$ тенгсизликлардан фойдаланиб, ушбу

$$\frac{20\sqrt{2}}{21} \leq \int_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

тенгсизликларни исботланг.

Ечилиши. $[0;2]$ кесмада $\sqrt{x} \geq 0$ бўлганлиги учун, 7.6-мисолдаги (7.15)

тенгсизликларга асосан,

$$\int_0^2 \frac{x - \frac{x^3}{6}}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x}} dx.$$

Бундан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int_0^2 \frac{x - \frac{x^3}{6}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} x^{\frac{5}{2}} \right) dx = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{21},$$

$$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

бўлганлигидан,

$$\frac{20\sqrt{2}}{21} \leq \int_0^2 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

тенгсизликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

7.10- мисол. Ушбу

$$\frac{4}{25}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)(3-x)} dx < \frac{1}{6}(e-1)$$

тенгсизликларни исботланг.

Ечилиши. $f(x) = \frac{1}{(x+2)(3-x)}$ функциянинг $[0;1]$ кесмадаги

$f'(x) = \frac{2x-1}{(x+2)^2(3-x)^2}$ ҳосиласи, $x = \frac{1}{2}$ нуқтада нолга тенг бўлади.

Функциянинг ҳосиласи, $x = \frac{1}{2}$ нуқтадан ўтишда, ўз ишорасини, манфийдан

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

мусбатга ўзгартиради. Шунинг учун, $f(x)$ функция бу нуктада минимумга эришади, яъни $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{25}$. Функция максимум қийматига $[0;1]$ кесманинг

четки нукталарида эришади, яъни $f_{\max}(0) = f_{\max}(1) = \frac{1}{6}$. Шундай қилиб,

$$\frac{4}{25} \leq \frac{1}{(x+2)(3-x)} \leq \frac{1}{6}, \quad x \neq 0, \quad x \neq \frac{1}{2} \quad \text{ва} \quad x \neq 1 \quad \text{бўлганда эса,}$$

$$\frac{4}{25} \int_0^1 e^x dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)(3-x)} < \frac{1}{6} \int_0^1 e^x dx,$$

$$\frac{4}{25}(e-1) < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)(3-x)} dx < \frac{1}{6}(e-1).$$

Демак, 7.5 – мисолдаги (7.14) тенгсизликларга асосан,

$$\frac{4}{25} \int_0^1 e^x dx < \int_0^1 \frac{e^x}{(x+2)(3-x)} < \frac{1}{6} \int_0^1 e^x dx.$$

Бундан талаб қилинган тенгсизлик келиб чиқади.

7.11 – мисол. Қуйидаги

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{ва} \quad \int_0^1 x dx$$

интегралларнинг қайси бири катта?

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. $\sqrt{1+x^2}$ ва x функциялар $[0;1]$ кесмада узлуксиз (интегралланувчи). $[0;1]$ кесмада $x < \sqrt{1+x^2}$ тенгсизлик ўринли. У ҳолда (аниқ интегралнинг 6^0 - хоссасига асосан),

$$\int_0^1 x dx < \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

7.12– мисол. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда,

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x)dx} \quad (7.16)$$

тенгсизлик ўринли бўлишини исботланг. Одатда, бу тенгсизлик, Коши – Буняковский тенгсизлиги деб аталади.

Ечилиши. $[f(x) - \lambda\varphi(x)]^2$ функцияни қараймиз. Бунда λ - ихтиёрий ҳақиқий сон. Бу функция $[a,b]$ кесмада интегралланувчи. Аниқ интегралнинг 6^0 - хоссасига асосан,

$$\int_a^b [f(x) - \lambda\varphi(x)]^2 dx \geq 0$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ёки

$$\lambda^2 \int_a^b \varphi^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b f(x)\varphi(x) dx + \int_a^b f^2(x) dx \geq 0.$$

Бу тенгсизликнинг чап томони λ га нисбатан квадрат учхаддан иборат бўлиб, у λ нинг барча қийматларида номанфий, демак, квадрат учхаднинг дискриминанти манфий эмас:

$$\int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b \varphi^2(x) dx - \left\{ \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \right\}^2 \geq 0,$$

бундан (7.16) тенгсизликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

7.13 – мисол. Ушбу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sqrt{\cos x} dx \leq \frac{\pi^3}{24}$$

тенгсизликни исботланг.

Ечилиши. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{\cos x}$ деб олсак, (7.16) формулага асосан,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \sqrt{\cos x} dx \leq \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx} \cdot \sqrt{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx} = \frac{\pi^3}{24}$$

бўлиши келиб чиқади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Агар $\varphi(x), \psi(x)$ функциялар, $[a, b]$ кесмада дифференциалланувчи бўлиб, $x \in [a, b]$ учун, $A \leq \varphi(x) \leq B$ бўлса, $f(x)$ эса, $[A, B]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt; \quad a \leq x \leq b$$

функция $[a, b]$ кесмада дифференциалланувчи бўлади ва

$$\frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t) dt = f(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad (7.17)$$

формула ўринли.

7.14- мисол. Ушбу

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{1+t^4}$$

ҳосилани ҳисобланг.

Ечилиши. (7.17) формулага асосан,

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^{12}}} \cdot 3x^2 - \frac{1}{\sqrt{1+x^8}} 2x = \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}}.$$

7.15– мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$g_c(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a; b], x \neq c, \\ A, & x = c \end{cases}$$

функция учун,

$$\int_a^b g_c(x) dx = 0$$

эканлигини исботланг.

Исботи. $[a, b]$ кесманинг, $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ бўлинишини оламиз. Фараз қилайлик, c нуқта, қисм кесмаларнинг бирида ётсин, мисол учун, $c \in [x_m, x_{m+1}]$ бўлсин. Берилган $g_c(x)$ функциянинг P бўлинишга мос келган интеграл йиғиндисини тузамиз: ξ_k деб, қисм кесмаларнинг чап четки нуқталарини оламиз:

$$\sigma_P(g_c) = \sum_{k=0}^{n-1} g_c(x_k) \Delta x_k = g_c(\xi_{m-1}) \Delta x_{m-1} + g_c(\xi_m) \Delta x_m,$$

қолган йиғиндилар нолга тенг. Шартга кўра,

$$|g_c(x)| \leq |A|$$

бўлгани учун,

$$|\sigma_P(g_c)| \leq |A|(\Delta x_{m-1} + \Delta x_m).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Бундан, $\lim_{d(P) \rightarrow 0} \sigma_P(g_c) = 0$ яъни $\int_a^b g_c(x) dx = 0$ эканлиги келиб чиқади.

7.16- мисол. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлиб, унинг қийматини бирор $c \in [a; b]$ нуктада ўзгартирсак, натижада, янги ҳосил бўлган $f_1(x)$ функция ҳам, $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлишини ва

$$\int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

тенгликнинг ўринли эканлигини исботланг.

Ечилиши. Шартга кўра,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a; b], x \neq c \text{ bo'lg anda,} \\ f_1(x) \neq f(x), & x = c \text{ bo'lg anda.} \end{cases}$$

Демак, $f_1(x) = f(x) + g_c(x)$, бунда,

$$g_c(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a; b], x \neq c \text{ bo'lg anda,} \\ A, & x = c \text{ bo'lg anda.} \end{cases}$$

Аниқ интегралнинг 4⁰ - хоссасига, ҳамда 7.15 - мисолга асосан,

$$\int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g_c(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

7.2 - эслатма. 7.15- ва 7.16- мисолларга асосан, қуйидаги хулосани чиқариш мумкин: $f(x)$ функциянинг интегралланувчилиги, унинг баъзи берилган нуқталардаги қийматларига боғлиқ бўлмайди.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функцияларнинг берилган кесмада интегралланувчи эканлигини кўрсатинг.

$$7.1. f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & 0 < x < 1 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x = 0 \text{ bo'lganda,} \\ -1, & x = 1 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$7.2. f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & 1 \leq x < 2 \text{ bo'lganda,} \\ 3, & 2 \leq x \leq 3 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$7.3. f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \text{ bo'lganda,} \\ 2, & x = 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$7.4. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2 \text{ bo'lganda,} \\ x, & 2 \leq x \leq 3 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

7.5. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлса, унинг шу кесмада чегараланган эканлигини исботланг.

7.6. $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилиб, $[a, b]$ кесманинг, диаметрлари δ дан кичик бўлган, ҳар қандай P_1 ва P_2 бўлинишларида

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$|\sigma_{P_1}(f) - \sigma_{P_2}(f)| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

7.7. $[a, b]$ кесмада ҳар қандай чегараланган монотон функциянинг шу кесмада интегралланувчи эканлигини исботланг.

7.8. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада узлуксиз, $P = \{x_k\}_{k=0}^{k_p}$ бу кесманинг бўлиниши, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k_p$ бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{k_p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k_p} f(\xi_i) g(\eta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг.

7.9. Агар $f(x)$ функция $[0; 1]$ кесмада монотон бўлса, $[0; 1]$ кесмада

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)_i = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty$$

эканлигини исботланг.

7.10. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада чегараланган ва қавариклиги юқорига қараган (ботик) бўлса, у ҳолда унинг шу кесмада интегралланувчи бўлиши ва

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$(b-a) \frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

тенгсизлик ўринли эканлигини исботланг.

7.11. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада Риман маъносида интегралланувчи бўлса, у ҳолда,

$$\lim_{\lambda_P \rightarrow 0} S_P(f) = \lim_{\lambda_P \rightarrow 0} S_P(f) = \int_a^b f(x)dx$$

тенглик ўринли эканлигини исботланг.

7.12. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада интегралланувчи, $\forall x \in [a, b]$ лар учун $c \leq f(x) \leq d$ бўлиб, $g(x)$ функция $[c, d]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда, $g(f(x))$ функциянинг $[a, b]$ кесмада интегралланувчи эканлигини исботланг.

7.13. Квадрати интегралланувчи бўлиб, ўзи интегралланмайдиган функцияга мисол тузинг.

7.14. Йиғиндиси интегралланувчи бўлиб, қўшилувчиларнинг ҳар бири интегралланмайдиган функцияларга мисол тузинг.

7.15. $f(x)g(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмада интегралланувчи бўлишидан, $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг $[a, b]$ кесмада ҳар доим интегралланувчи бўлиши

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

келиб чиқадими?

7.16. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган (a, b) кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада интегралланмайдиган функцияга мисол тузинг.

Қуйидаги интегралларни баҳоланг.

$$7.17. J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2} \sin^2 x} dx.$$

$$7.18. J = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3 \cos x}.$$

$$7.19. J = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}.$$

$$7.20. J = \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$7.21. J = \int_0^1 \frac{x^6}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$7.22. J = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} x \arctg x dx.$$

Қуйидаги тенгсизликларни исботланг.

$$7.23. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin x} dx > \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}) \quad (R > 0). \quad 7.24. 0,5 < \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{2n}}} \leq \frac{\pi}{6} \quad (n \geq 1).$$

$$7.25. \frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2 - x^3}} < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

$$7.26. \frac{2}{\sqrt[4]{e}} < \int_0^2 e^{x^2 - x} dx < 2e.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$7.27. \frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} < \frac{1}{2}.$$

$$7.28. 9 < \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2} dx < 9,5.$$

$$7.29. \frac{1}{k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{k} \quad \text{ва} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$$7.30. \frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2 + 8}} dx < \frac{3}{2}.$$

$$7.31. \frac{\sqrt{2}}{3} < \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{2+x^2} dx < 1.$$

Қуйидаги интегралларнинг қайси бири катта (интегрални ҳисобламасдан хулоса қилинг)?

$$7.32. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 x dx.$$

$$7.33. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

$$7.34. \int_0^1 e^{-x} dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x^2} dx.$$

$$7.35. \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx.$$

$$7.36. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$7.37. \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad \text{ёки} \quad \int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$7.38. \int_0^1 e^{-x} \sin x dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 e^{-x^2} \sin x dx.$$

$$7.39. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{ёки} \quad \int_1^2 \frac{dx}{x}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$7.40. \int_0^1 x^2 \sin^2 x dx \quad \text{ёки} \quad \int_0^1 x \sin^2 x dx \quad 7.41. \int_1^2 \ln x dx \quad \text{ёки} \quad \int_1^2 (\ln x)^2 dx$$

$$7.42. \int_3^4 \ln x dx \quad \text{ёки} \quad \int_3^4 (\ln x^2) dx \quad 7.43. \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \quad \text{ёки} \quad \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$$

7.44. Агар $f(x)$ функция $(p-a, p+a)$ кесмада узлуксиз ва ўсувчи бўлса, у

ҳолда,

$$2af(q-p^2) \leq \int_{p-a}^{p+a} f(x^2 - 2px + q) dx \leq 2af(a^2 + q - p^2)$$

тенгсизликларни исботланг.

Ушбу

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, \quad m \neq -1, \quad \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

муносабатлар ва 7.6 – мисолдаги (7.15) тенгсизликлардан фойдаланиб,

қуйидаги интегралларни баҳоланг:

$$7.45. \int_0^1 \frac{x^7}{\sqrt{1+x^3}} dx.$$

$$7.46. \int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{x^2} dx.$$

$$7.47. \int_0^{\pi} \sqrt{12+x} \cdot \sin x dx.$$

$$7.48. \int_1^e \sqrt[3]{1+\ln^2 x} \cdot x^2 dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

7.6-мисолдаги (7.15) формула ва $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6 + \frac{x^5}{120}} (x > 0)$

тенгсизликдан фойдаланиб қуйидаги интегрални баҳоланг.

7.49. $J = \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx$. 7.50. $J = \int_0^{0,64} \sqrt{x} \sin x dx$. 7.51. $\int_0^{0,512} \sqrt[3]{x} \sin x dx$.

7.6- мисолдаги (7.15) формула ва $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} (x > 0)$

тенгсизликлардан фойдаланиб, қуйидаги интегралларни баҳоланг.

7.52. $\int_{0,5}^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. 7.53. $\int_0^1 \sqrt{x} \ln(1+x) dx$.

Коши -Буняковский тенгсизлигидан фойдаланиб, қуйидаги тенгсизликларни исботланг.

7.54. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} \sqrt{x^3+1} dx \leq \frac{5}{3}$. 7.55. $\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx < \sqrt{1,2}$.

7.56. $\int_0^{\pi} x^2 \sqrt{\sin x} dx \leq \frac{2\pi^5}{5}$. 7.57. $\int_0^{\pi} \sqrt{(1+x^2) \sin x} dx \leq 2\pi + \frac{\pi^4}{2}$.

Қуйидаги ҳосилаларни ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$7.58. \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt.$$

$$7.59. \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos \pi t^3 dt.$$

$$7.60. \frac{d}{dx} \int_2^{\sqrt{x}} \frac{2 \sin t}{t} dt.$$

$$7.61. \frac{d}{dx} \int_1^x \ln t dt \quad (x > 0).$$

$$7.62. \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt \quad (x > 0).$$

$$7.63. \frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx.$$

$$7.64. \text{Агар } x = \int_1^{t^2} t \ln t dt, \quad y = \int_{t^2}^1 t^2 \ln t dt \quad (t > 0) \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда, } \frac{dy}{dx} \text{ ни топинг.}$$

$$7.65. \text{Агар } x = \int_2^t \frac{\ln z}{z} dz, \quad y = \int_5^{\ln t} e^z dz \text{ бўлса, } y \text{ ҳолда, } \frac{dy}{dx} \text{ ни топинг.}$$

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг.

$$7.66. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}.$$

$$7.67. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{tgx} dx}{\int_0^{tgx} \sqrt{\sin x} dx}.$$

Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги функцияларнинг берилган кесмалардаги ўрта қийматини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$7.68. f(x) = \frac{1}{x + x^2}, [1; 15].$$

$$7.69. f(x) = \cos^3 x, [0; \pi].$$

$$7.70. f(x) = \sin^4 x, [0; \pi].$$

$$7.71. f(x) = \frac{1}{e^x + 1}, [0; 2].$$

$$7.72. f(x) = \sin^2 x, [0; \pi].$$

$$7.73. f(x) = 20 + 4\sin x + 3\cos x, [0; 2\pi].$$

$$7.74. f(x) = \sqrt{x}, [0; 100].$$

$$7.75. f(x) = \sin x \cdot \sin(x + \alpha), [0; 2\pi].$$

$$7.76. \text{Эллипс фокал} \quad r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \left(0 < \varepsilon < 1, p = \frac{b^2}{a} \right) \text{ радиус вектор}$$

узунлигининг ўрта қийматини топинг.

$$7.77. [0; \frac{T}{4}] \text{ кесмада } f(t) = \sin \frac{2\pi\alpha}{T} t \text{ функциянинг ўрта қийматини}$$

топинг, бунда α -параметр.

$$7.78. \varphi \text{ нинг қандай қийматида } f(t) = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \text{ функциянинг } [0; \frac{T}{4}]$$

кесмадаги ўрта қиймати $\frac{2}{\pi}$ га тенг бўлади?

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Қуйидаги мисолларда, ξ нинг қандай қийматида, $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$,

$a \leq \xi \leq b$,тенглик ўринли бўлади? Бунда

7.79. $f(x) = 2x - \frac{3}{4}x^2$, $a = 0$, $b = 2$. **7.80.** $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$, $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = 0$.

7.81. $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $b = e^2$.

Қуйидаги мисолларда, ξ нинг қандай қийматида, $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$

тенглик ўринли бўлади? Бунда

7.82. $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $a = 0$, $b = 1$.

7.83. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$.

7.84. $f(x) = x+1$, $g(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $a = 0$, $b = 1$.

7.85. $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, $g(x) = x+1$, $a = 0$, $b = 1$.

7.86. $f(x) = x$, $g(x) = \cos x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

7.87. $f(x) = \cos x$, $g(x) = x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

7.10. Кўрсатма. $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \leq f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$

тенгсизликдан фойдаланг.

$$\mathbf{7.13.} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ratsionalson bo'lganda,} \\ -1, & x \text{ irratsionalson bo'lganda.} \end{cases}$$

$$\mathbf{7.14.} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ratsionalson bo'lganda,} \\ 0, & x \text{ irratsionalson bo'lganda.} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -1, & x \text{ ratsionalson bo'lganda,} \\ 0, & x \text{ irratsionalson bo'lganda.} \end{cases}$$

$$\mathbf{7.15.} \quad f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ ratsionalson bo'lganda,} \\ -1, & x \text{ irratsionalson bo'lganda.} \end{cases}$$

$$\mathbf{7.16.} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)(x-b)}, & x \in (a, b), \\ 0, & x = a, x = b. \end{cases}$$

$$\mathbf{7.17.} \quad \frac{\pi}{2} < J < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\mathbf{7.18.} \quad \frac{2}{13} \pi < J < \frac{2}{7} \pi.$$

$$\mathbf{7.19.} \quad \frac{2}{3} < J < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\mathbf{7.20.} \quad \frac{1}{e} < J < 1.$$

$$\mathbf{7.21.} \quad \frac{\sqrt{2}}{20} < J < \frac{1}{10}.$$

$$\mathbf{7.22.} \quad \frac{2\pi}{9} < J < \frac{4\pi}{9}.$$

7.32. Биринчиси.

7.33. Иккинчиси.

7.34. Иккинчиси.

7.35. Биринчиси.

7.36. Иккинчиси.

7.37. Биринчиси.

7.38. Биринчиси.

7.39. Иккинчиси.

7.40. Иккинчиси.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

7.41. Биринчиси.

7.32. Иккинчиси.

7.43. Биринчиси.

7.45. $\frac{\sqrt{2}}{16} < J < \frac{1}{8}.$

7.46. $\frac{3}{4} < J < \frac{3\sqrt{2}}{4}.$

7.47. $2 \sqrt[3]{12} < J < 2 \sqrt[3]{12+\pi}.$

7.48. $\frac{e^3-1}{3} < J < \frac{\sqrt[3]{2}}{3}(e^3-1)$

7.49. $0,5-0,125/18 < J < 0,5-0,125/18+0,03125/600.$

7.50. $0,8[0,4(0,64)^2 - \frac{1}{21}(0,64)^4] < J < 0,8[(0,64)^2 - \frac{1}{21}(0,64)^4 + \frac{1}{600}(0,64)^6].$

7.51. $0,8[\frac{3}{7}(0,512)^2 - \frac{1}{26}(0,512)^4] < J < 0,8[\frac{3}{7}(0,512)^2 - \frac{1}{26}(0,512)^4 + \frac{1}{760}(0,512)^6].$

7.52. $\frac{5}{16} < J < \frac{3}{8}.$

7.53. $\frac{9}{35} < J < \frac{313}{945}.$

7.58. $2x\sqrt{1+x^4}.$

7.59. $-\sin x \cos(\pi \cos^3 x) - \cos x \cos(\pi \sin^3 x).$

7.60. $\frac{\sin \sqrt{x}}{x}.$

7.61. $\ln x.$

7.62. $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x^2}.$

7.63. $-\sin a^2.$

7.64. $-t^2.$

7.65. $\frac{t^2}{\ln t}.$

7.66. 1.

7.67. 1.

7.68. 0,3648.

7.69. 0.

7.70. $\frac{3}{8}.$

7.71. 0,283.

7.72. 0,5.

7.73. 20.

7.74. $6\frac{2}{3}.$

7.75. $\frac{1}{2} \cos \alpha.$

7.76. $\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b$ – эллипсинг кичик ўқи узунлиги.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$7.77. \frac{1 - \cos \pi \alpha}{\pi \alpha}. \quad 7.78. \quad \varphi = 2k\pi, \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$7.79. \quad 0 \leq \xi_1 = \frac{1}{3}, \quad \xi_2 = 2.$$

$$7.80. \quad \xi = -\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4 - \pi}{\pi}}.$$

$$7.81. \quad \ln \xi = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}.$$

$$7.82. \quad \frac{4}{3\pi}.$$

$$7.83. \quad \sqrt{\frac{5}{9}}.$$

$$7.84. \quad \frac{2}{\pi}.$$

$$7.85. \quad \sqrt{\frac{\pi - 1}{\pi + 2}}.$$

$$7.86. \quad \frac{\pi - 2}{2}.$$

$$7.87. \quad \arccos \frac{4\pi - 8}{2}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

8-§. Аниқ интегрални ҳисоблаш

Ҳар доим, ҳар қандай интегралланувчи функциянинг аниқ интегралини, интеграл йиғиндининг лимити сифатида қараб, ҳисоблаш осон бўлавермайди, яъни интеграл йиғиндини тузиб, унинг лимитини ҳисоблашда анча ноқулайликлар ва қийинчиликларга дуч келинади. Шунинг учун, аниқ интегрални юқоридаги таъриф бўйича ҳисоблаш усулидан бошқа соддароқ усулини топиш зарурияти туғилади. Бу усулларни қуйида келтириб ўтамыз.

8.1. Ньютон-Лейбниц формуласи.

Юқорида кўрдикки, агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда у шу кесмада бошланғич функцияларга эга бўлади. Аниқ интегралнинг 11^0 - хоссасига асосан,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Функция, $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияларидан биридир.

$F(x) - f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги ихтиёрий бошланғич функцияси

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўлсин. Маълумки, $\Phi(x)$ ва $F(x)$ бошланғич функцияларнинг бири, иккинчисидан ўзгармас сонга фарқ қилади, яъни

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad a \leq x \leq b.$$

Бундан, $x = a$ деб олиб,

$$0 = F(a) + C, \quad C = -F(a)$$

эканлигини топамиз, яъни $\forall x \in [a, b]$ учун,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (8.1)$$

Ньютон – Лейбниц формуласига эга бўламиз. Одатда, (8.1) формула, *интеграл ҳисобнинг асосий формуласи*, деб ҳам юритилади.

8.1-эслатма. Одатдагидек,

$$F(x) \Big|_a^b = F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)$$

белгилашни олсак, у ҳолда, (8.1) Ньютон – Лейбниц формуласини,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

8.1– мисол. Ушбу $\int_a^b x^m dx, m \neq -1$ интегрални Ньютон – Лейбниц

формуласи орқали ҳисобланг.

Ечилиши. Маълумки, интеграл остидаги $f(x) = x^m$ функциянинг бошланғич функцияси, $F(x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ дан иборат. Ньютон – Лейбниц формуласига асосан,

$$\int_a^b x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \Big|_a^b = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}, m \neq -1$$

бўлади. Хусусий ҳолда, $m = -1$ бўлганда,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_a^b = \ln|b| - \ln|a|.$$

Шундай қилиб, аниқ интегрални ҳисоблаш масаласи, интеграл остидаги интегралланувчи функциянинг бошланғич функциясини топиш масаласига келтирилар экан. Лекин, ҳар қандай интегралланувчи функциянинг ҳам бошланғич функциясини топиш осон бўлавермайди. Шунинг учун, аниқ интегрални ҳисоблашда, бошқа усуллардан ҳам фойдаланишга тўғри келади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

8.2. Аниқ интегралларда ўзгарувчиларни алмаштириш усули.

8.1– теорема. $x = g(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ кесмада аниқланган узлуксиз дифференциаланувчи ва унинг қийматлари тўплами $[a, b]$ кесмадан иборат бўлиб, $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)] g'(t) dt \quad (8.2)$$

формула ўринли.

Бу формулага, *аниқ интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш* формуласи дейилади.

8.2 – мисол. (8.2) формулани исботланг.

Ечилиши. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлгани учун,

7.5 - натижага асосан, $f(x)$ функция, $[a, b]$ кесмада, $\Phi(x)$ бошланғич функцияга эга бўлади. Бу ҳолда, $F(t) = \Phi[g(t)]$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ мураккаб функция ҳосилага эга:

$$F'(t) = \Phi'[g(t)] \cdot g'(t) = f[g(t)] \cdot g'(t).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Бундан, Ньютон – Лейбниц формуласига асосан,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[g(t)]g'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} F'(t)dt = F(\beta) - F(\alpha) = \Phi[g(\beta)] - \Phi[g(\alpha)] = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

8.3 – мисол. Ушбу

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dt$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $x = \cos t$ алмаштиришни оламиз. Бу алмаштиришнинг тўғрилигини кўрсатиш учун, **8.1**– теореманинг шартларини текшириб

кўрамиз: $x = g(t) = \cos t$ функция R да узлуксиз, янги t ўзгарувчи, $t \in [\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$

кесмада ўзгарганда, эски $x = g(t)$ ўзгарувчи, $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ кесмада ўзгаради, яъни

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0; \quad g'(t) = -\sin t, \quad \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ кесмада узлуксиз. Демак,}$$

8.1– теореманинг ҳамма шартлари бажарилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Шундай қилиб, $x = \cos t$, $dx = -\sin t dt$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, яъни

$$\beta = \frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\cos t}{1+\cos t} = \operatorname{tg}^2 \frac{t}{2}$$

Буларни эътиборга олган ҳолда,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \cdot (-\sin t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos t) dt = \\ &= [t - \sin t]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

8.4 – мисол. Ушбу

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x \sqrt{e^x + 1}}{e^x + 5} dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $\sqrt{e^x + 1} = t$ алмаштиришни бажарамиз: $x_1 = 0$ бўлганда, $t_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \ln 3$ бўлганда, $t_2 = 2$. Демак, x ўзгарувчи, $[0; \ln 3]$ кесмада ўзгарганда, янги t ўзгарувчи $[\sqrt{2}; 2]$ кесмада ўзгаради. $x = \ln(t^2 - 1)$ функция, $t = \sqrt{e^x + 1}$ функцияга тескари, $[\sqrt{2}; 2]$ кесмада монотон, узлуксиз ва $x'_t = \frac{2t}{t^2 - 1}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Шундай қилиб, 8.1– теореманинг ҳамма шартлари ўринли, шунинг учун, (8.2) формулага асосан,

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln} \frac{e^x \sqrt{e^x + 1}}{e^x + 5} dx &= \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{(t^2 - 1) \cdot t \cdot 2tdt}{(t^2 + 4)(t^2 - 1)} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 4} = \\ &= 2 \int_{\sqrt{2}}^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = 2 \left[t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right]_{\sqrt{2}}^2 = 2 \left[2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} - \sqrt{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \\ &= 4 - \sqrt{\pi} - 2\sqrt{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

8.3. Бўлаклаб интеграллаш усули.

8.2 – теорема. Агар $u = u(x)$ ва $v = v(x)$ функциялар, $[a, b]$ кесмада узлуксиз ва узлуксиз ҳосилаларга эга бўлиб, уларнинг ҳосилалари, шу кесмада интегралланувчи бўлса, у ҳолда,

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad (8.3)$$

ёки

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

формула ўринли.

8.5 – мисол. Ушбу

$$\int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x \, dx$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. Интеграл остидаги функциялар, 8.2– теореманинг барча шартларини қаноатлантиришига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

$u = \arctg x$, $dv = x dx$ деб олиб, (8.3) формулага асосан,

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x \, dx &= [du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \frac{x^2}{2}] = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб, ечиш:

> int(x*arctan(x), x=0..sqrt(3));

$$\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

8.6 – мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$J_{n,\alpha} = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx, \quad \alpha > 0, n \in N, \quad (8.4)$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши. $f(x) = x^\alpha \ln^n x$ функция $(0;1]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз, ҳамда $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$. $f(x)$ функцияни қайта аниқлаймиз, яъни $x=0$ да $f(x)=0$ деб олсак, у ҳолда $f(x)$ функция $[0;1]$ кесмада узлуксиз бўлади, яъни у $[0;1]$ кесмада интегралланувчи бўлади.

Берилган (8.4) интегрални бўлаклаб интеграллаймиз:

$$\begin{aligned} J_{n,\alpha} &= \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx = [u = \ln^n x, dv = x^\alpha dx, du = n \frac{\ln^{n-1} x}{x} dx, \\ v &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}] = \frac{1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} \ln^n x \Big|_0^1 - \frac{n}{\alpha+1} \int_0^1 x^\alpha \ln^{n-1} x dx = \\ &= -\frac{n}{\alpha+1} J_{n-1,\alpha}. \end{aligned}$$

Бундан, кетма – кет бўлаклаб интеграллаш натижасида,

$$\begin{aligned} J_{n,\alpha} &= (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} J_{0,\alpha} = (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^n} \int_0^1 x^\alpha dx = \\ &= (-1)^n \frac{n}{(\alpha+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

рекуррент формулани ҳосил қиламиз.

8.7 – мисол. Ушбу

$$\int_1^e x^2 \ln x dx ,$$

интегрални ҳисобланг.

Ечилиши.

$$\int_1^e x \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x; du = (\ln^2 x)' dx = \frac{2 \ln x}{x} dx; \\ dv = x dx; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{2 \ln x}{x} dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e x \ln x dx \left| \begin{array}{l} u = \ln x; du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx; \\ dv = x dx; v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e + \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}.$$

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб, ечиш:

> int(x*(ln(x))^2, x=1..exp(1));

$$\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

8.8 – мисол. Ушбу

$$\int_{-1}^1 Q_m(x) P_n(x) dx = 0 \quad (8.5)$$

тенгликни исботланг, бунда, $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$ – Лежандр кўпҳади

($n = 0, 1, 2, \dots$), $Q_m(x)$ эса, даражаси $m < n$ бўлган ихтиёрий кўпҳад.

Ечилиши. Равшанки, $\frac{d^k [(x^2 - 1)^n]}{dx^k}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) функция $x = -1$ ва $x = 1$

нуқталарда нулга айланади. Берилган интегрални кетма – кет бўлаклаб интеграллаш натижасида,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2^n n!} \right) \int_{-1}^1 Q_m(x) P_n(x) dx &= \left[u = Q_m(x), dv = \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^{n-1}} = d \left[\frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \right] = \right. \\ &= Q_m(x) \frac{d^{n-1} [(x^2 - 1)^n]}{dx^{n-1}} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q_m'(x) \frac{d^{n-1} [(x^2 - 1)^n]}{dx^{n-1}} dx = \dots = (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1} [(x^2 - 1)^n]}{dx^{n-1}} = \\ &= (-1)^m Q_m^{(m)}(x) \frac{d^{n-m-1} [(x^2 - 1)^n]}{dx^{n-m-1}} \Big|_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

эканлигини келтириб чиқарамиз, чунки $Q_m^{(m+1)}(x) = 0$. Бундан (8.5) тенгликнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги интегралларни, Ньютон – Лейбниц формуласига асосан, ҳисобланг.

$$8.1. \int_0^1 (2x-3)dx.$$

$$8.2. \int_1^0 5x^4 dx.$$

$$8.3. \int_1^4 2\sqrt{x} dx.$$

$$8.4. \int_1^5 2\sqrt{x-1} dx.$$

$$8.5. \int_{-2}^0 (x+1)(x-2) dx.$$

$$8.6. \int_1^2 \left(3t + \frac{4}{t^2}\right) dt.$$

$$8.7. \int_0^{\pi} (1 + \cos) dx.$$

$$8.8. \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx.$$

$$8.9. \int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) dx$$

$$8.10. \int_0^1 (1+x)^{17} dx$$

$$8.11. \int_0^a (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 dx.$$

$$8.12. \int_1^2 \frac{6-t}{t^3} dt.$$

Қуйидаги интегралларни, Ньютон – Лейбниц формуласига асосан, ҳисобланг.

$$8.13. \int_{-1}^1 (3x^2 - 4x + 7) dx.$$

$$8.14. \int_1^2 \frac{4}{x^2} dx.$$

$$8.15. \int_1^4 \frac{dt}{t\sqrt{t}}.$$

$$8.16. \int_0^1 \frac{36}{(2x+1)^3} dx.$$

$$8.17. \int_{1/8}^1 x^{-1/3} (1-x^{2/3})^{3/2} dx.$$

$$8.18. \int_0^{\pi} \sin^2 5x dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$8.19. \int_0^{\pi/3} \sec^2 t dt.$$

$$8.20. \int_{\pi}^{3\pi} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$8.21. \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 \sec x \operatorname{tg} x dx.$$

$$8.22. \int_0^{\pi/2} 5(\sin x)^{3/2} \cos x dx.$$

$$8.23. \int_0^{\pi/2} \frac{3 \sin x \cos x}{\sqrt{1+3 \sin^2 x}} dx.$$

$$8.24. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{2 \sec t}} dt.$$

$$8.25. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$8.26. \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}.$$

$$8.27. \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos ex \operatorname{ctg} x dx.$$

$$8.28. \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x^5} \right) dx.$$

Қуйидаги интегралларга, Ньютон–Лейбниц формуласини формал равишда қўлаганда, нотўғри натижага келинишини изоҳланг.

$$8.29. \int_0^{\frac{dx}{2+\operatorname{tg}^2 x}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$8.30. \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

$$8.31. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

$$8.32. \int_{-2}^0 (2x+5) dx.$$

$$8.33. \int_0^1 (x^2 + \sqrt{x}) dx.$$

$$8.34. \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx.$$

$$8.35. \int_{-1}^2 \sqrt[3]{x} dx.$$

$$8.36. \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$8.37. \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$8.38. \int_0^{\pi} (1 + \cos x) dx.$$

$$8.39. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \operatorname{cosec} x \, dx.$$

$$8.40. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8y^2 + \sin y) dy.$$

$$8.41. \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{1}{4^5} \right) du.$$

$$8.42. \int_{-4}^4 |x| dx.$$

$$8.43. \int_{-6}^6 x|x| dx.$$

Қуйидаги интегралларни ҳисобланг.

$$8.44. \int_0^2 3^x dx.$$

$$8.45. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$$

$$8.46. \int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$8.47. \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx.$$

$$8.48. \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}.$$

$$8.49. \int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}.$$

$$8.50. \int_1^e \frac{\cos(\ln x) dx}{x}.$$

$$8.51. \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

$$8.52. \int_0^1 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$8.53. \int_0^1 \frac{z^3}{z^8 + 1} dz.$$

Қуйидаги аниқ интегралларни, ўзгартирувчиларни алмаштириш ёрдамида, ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$8.54. \int_0^3 \sqrt{y+1} dy.$$

$$8.55. \int_{-1}^0 \sqrt{y+1} dx.$$

$$8.56. \int_0^{\pi} 3 \cos^2 x \sin x dx.$$

$$8.57. \int_{2\pi}^{3\pi} \cos^2 x \sin x dx.$$

$$8.58. \int_{-1}^1 \frac{5x}{(4+x^2)^2} dx.$$

$$8.59. \int_0^1 \frac{5x}{(4+x^2)^2} dx.$$

$$8.60. \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 3t) \sin 3t dt.$$

$$8.61. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/3} (1 - \cos 3t) \sin 3t dt .$$

$$8.62. \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{\sqrt{4+3\sin t}} dt.$$

$$8.63. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos t}{\sqrt{4+3\sin t}} dt.$$

$$8.64. \int_0^1 \sqrt{x^5 + 2x(5x^4 + 2)} dx.$$

$$8.65. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-3} 2x \sin 2x dx.$$

$$8.66. \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2t)^{3/2} \cos 2t dt.$$

$$8.67. \int_0^1 \sin \pi x dx.$$

$$8.68. \int_{\pi/6}^{\pi/3} ctg x dx. .$$

$$8.69. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$8.70. \int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2} dx.$$

$$8.71. \int_0^c \frac{dx}{x^2 + c^2}.$$

$$8.72. \int_1^e \frac{\ln x^3}{x} dx.$$

$$8.73. \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$8.74. \int_0^1 (1 - 2x)^3 dx.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$8.75. \int_0^{\pi} \sin^2 \left(1 + \frac{t}{2} \right) dt.$$

Қуйидаги интегралларни, ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланиб, ҳисобланг.

$$8.76. \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

$$8.77. \int_0^1 \frac{\sqrt{e^x} dx}{\sqrt{e^x + e^{-x}}}.$$

$$8.78. \int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx.$$

$$8.79. \int_0^a \frac{dx}{x + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$8.80. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}.$$

$$8.81. \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

$$8.82. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$$

$$8.83. \int_{-1}^1 (e^x + e^{-x}) t g x dx.$$

$$8.84. \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

$$8.85. \text{Ушбу } \int_1^7 (x^2 - 6x + 13) dx \text{ интегралда, } x^2 - 6x + 13 = t \text{ алмаштиришни}$$

олиш мумкинми? Жавобингизни шарҳланг.

$$8.86. \text{Ушбу } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ интегралда, } x = \sin t \text{ алмаштиришни олиш}$$

мумкинми? Жавобингизни шарҳланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

8.87. Ушбу $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ интегралда, $\operatorname{tg} x = t$ алмаштиришни олиш

мумкинми? Жавобингизни шарҳланг.

Бўлаклаб интеграллаш формуласи ёрдамида, аниқ интегралларни ҳисобланг.

8.88. $\int_0^4 x e^{-x} dx.$

8.89. $\int_1^2 x \ln x dx.$

8.90. $\int_0^{\pi/2} t^2 \sin 2t dt.$

8.91. $\int_0^1 x \arctg(x^2) dx.$

8.92. $\int_0^{\pi/3} x \operatorname{tg}^2 x dx.$

8.93. $\int_1^2 x^3 \ln x dx.$

8.94. $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$

8.95. $\int_1^{e^2} x \ln \sqrt{x} dx.$

8.96. $\int_1^{e^2} \ln x dx.$

8.97. $\int_0^{1/2} x \cdot \cos \pi x dx.$

8.98. $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx.$

8.99. $\int_0^{1/4} \arcsin 2x dx.$

Қуйидаги интегралларни, бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб, ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$8.100. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx.$$

$$8.101. \int_1^2 (3x + 2) \ln x dx. .$$

$$8.102. \int_0^{\pi} e^x \sin 2x dx.$$

$$8.103. \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx.$$

$$8.104. \int_0^{\sqrt{3}} x \arctg x dx.$$

$$8.105. \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx.$$

$$8.106. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx.$$

$$8.107. \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x dx.$$

$$8.108. \int_{-a}^a \frac{\ln(2a-x)}{\ln(4a^2-x^2)} dx \left(a > \frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$8.109. \int_0^{\pi/2} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$$

$$8.110. \int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$$

$$8.111. \int_0^1 \arccos x dx.$$

Қуйидаги, узилишга эга бўлган чегараланган, функцияларнинг аниқмас интегралларини топинг.

$$8.112. \int \operatorname{sign} x dx.$$

$$8.113. \int \operatorname{sign}(\sin x) dx.$$

$$8.114. \int [x] dx.$$

$$8.115. \int x[x] dx.$$

$$8.116. \int (-1)^{[x]} dx.$$

$$8.117. \int_0^x f(t) dt, \text{ бунда } f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < l \text{ bo'lganda,} \\ 0, & |t| > l, \text{ bo'lganda, } l \geq 0. \end{cases}$$

Қуйидаги, узилишга эга бўлган чегараланган, функцияларнинг аниқ

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

интегралларини ҳисобланг.

$$8.118. \int_0^3 \operatorname{sign}(x - x^3) dx.$$

$$8.119. \int_0^2 [e^x] dx.$$

$$8.120. \int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx.$$

$$8.121. \int_0^{\pi} x \operatorname{sign}(\cos x) dx.$$

$$8.122. \int_0^{n+1} \ln[x] dx, n \in \mathbb{N}.$$

$$8.123. \int_0^1 \operatorname{sign}(\sin \ln x) dx.$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$8.1. -2. \quad 8.2. 1. \quad 8.3. 28/3. \quad 8.4. 32/3. \quad 8.5. \frac{2}{3}.$$

$$8.6. 13/2. \quad 8.7. \pi. \quad 8.8. 1. \quad 8.9. -\frac{4}{15}. \quad 8.10. \frac{1}{18}(2^{18} - 1).$$

$$8.11. \frac{1}{6}a^2. \quad 8.12. \frac{7}{4}. \quad 8.13. 16. \quad 8.14. 2. \quad 8.15. 2.$$

$$8.16. 8. \quad 8.17. \frac{27\sqrt{3}}{160}. \quad 8.18. \frac{\pi}{2}. \quad 8.19. \sqrt{3}. \quad 8.20. 6\sqrt{3} - 2\pi.$$

$$8.21. -1. \quad 8.22. 2. \quad 8.23. 1. \quad 8.24. \sqrt{2} - 1. \quad 8.25. \frac{80\sqrt{3}}{27}.$$

$$8.26. \frac{\pi}{2}. \quad 8.27. 0. \quad 8.28. \frac{16\sqrt{2} - 19}{48}. \quad 8.29. \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) \text{ функция,}$$

интеграл остидаги функция учун бошланғич функция бўлиб, у, $0 \leq x \leq 2\pi$ да

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

узилишга эга. **8.30.** $\arctg \frac{1}{x}$ функция, $x=0$ нуктада узилишга эга.

8.31. Интеграл остидаги $\frac{1}{x}$ функция ва унинг $\ln|x|$ бошлангич функцияси,

$[-1;1]$ кесмада узилишга эга. **8.32.** 6. **8.33.** 1. **8.34.** 0.

8.35 $\frac{3}{4}(2\sqrt[3]{2}-1)$ **8.36.** $\pi/6$. **8.37.** $\frac{45}{7}$. **8.38.** π . **8.39.** 0. **8.40.** $\frac{2\pi^3}{3}$.

8.41. $\frac{16\sqrt{2}-19}{48}$. **8.42** 16. **8.43** 0. **8.44.** $\frac{8}{\ln 3}$. **8.45.** $\frac{\pi}{12}$. **8.46.** $\ln 1,5$.

8.47. π . **8.48.** $\frac{1}{4}\arctg(4/7)$. **8.49.** $\frac{1}{6}\ln(2/5)$. **8.50.** $\sin 1$.

8.51. $\frac{\pi}{4}$. **8.52.** $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **8.53.** $\frac{\pi}{6}$. **8.54.** $14/3$.

8.55. $2/3$. **8.56.** 3) 2. **8.57.** 2. **8.58.** 0.

8.59. $1/8$. **8.60.** $1/6$. **8.61.** $1/2$. **8.62.** 0.

8.63. 0. **8.64.** $2\sqrt{3}$. **8.65.** $\frac{3}{4}$. **8.66.** $\frac{1}{5}$.

8.67. $2/\pi$. **8.68.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **8.69.** 0. **8.70.** $e - \sqrt{e}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

8.71. $\frac{\pi}{4c}$.

8.72. $3/2$.

8.73. $\sqrt{2}$.

8.74. 0 . 8.75. $\frac{\pi}{2} + \sin 2$.

8.76. $\ln \frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{5}}$.

8.77. $\ln \frac{e+\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{2}}$.

8.78. $\frac{\sqrt{3}}{72}$.

8.79. $\frac{\pi}{4}$.

8.80. $\ln 2$.

8.81. $\frac{\pi}{12}$.

8.82. $2(\sqrt{2}-1)$.

8.83. 0 .

8.84. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

8.85. Йўқ.

8.86. Мумкин.

8.87. Йўқ.

8.88. $1-5e^{-4}$.

8.89. $\ln 4 - \frac{3}{4}$.

8.90. $\frac{\pi^2-4}{8}$.

8.91. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$.

8.92. $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln 2 - \frac{\pi^2}{18}$.

8.93. $4 \ln 2 - \frac{15}{16}$.

8.94. $2-5e^{-1}$.

8.95. $\frac{3}{8}e^4 + \frac{1}{8}$.

8.96. e^2+1 .

8.97. $\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{\pi^2}$.

8.98. $\ln 2 + \frac{\pi}{2} - 2$.

8.99. $\frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}-2}{4}$.

8.100. $\frac{\pi}{2} - 1$.

8.101. $10 \ln 2 - \frac{17}{4}$.

8.102. 0 .

8.103. $\pi^3 - 6\pi$.

8.104. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8.105. $\frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$.

8.106. $\frac{\pi}{32}$.

8.107. $\frac{3}{5}(e^\pi - 1)$.

8.108. a .

8.109. $\frac{1}{6}$.

8.110. $\frac{29}{270}$.

8.111. 1 .

8.112. $|x| + C$.

8.113. $\arccos(\cos x) + C$.

8.114. $x[x] - \frac{[x]([x]+1)}{2} + C$.

8.115. $\frac{x^2}{2}[x] - \frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12} + C$.

Титул ва рақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Илова лар



Орқа га

Сахифа / 708

Тулик экран

Чикиш

8.116. $\frac{1}{\pi} \arccos x (\cos \pi x) + C.$

8.119. $14 - \ln(7!).$

8.122. $\ln(n!).$

8.117. $\frac{1}{2} \left(|x+l| - |x-l| \right).$ 8.118. $-1.$

8.120. $\frac{30}{\pi}.$ 8.121. $-\frac{\pi^2}{4}.$

8.123. $-th \frac{\pi}{2}.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

III-боб. Аниқ интегралнинг тадбиқлари

9-§. Аниқ интеграл ёрдамида текис шаклнинг юзини ҳисоблаш

9.1. Декарт координаталар системасида берилган текис шаклнинг юзини ҳисоблаш.

Текисликда xOy Декарт координаталар системаси берилган бўлсин.

9.1-таъриф. Текисликнинг L оддий (каррали нуқталарга эга бўлмаган) ёпиқ эгри чизиқ билан чегараланган қисми- *текис шакл (фигура)* дейилади.

Бунда L - текис шаклнинг *чегараси* дейилади.

Ўқларга нисбатан стандарт соҳалар.

9.2-таъриф. Координаталари, $[a, b]$ кесмада узлуксиз $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар учун, $a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ муносабатларни қаноатлантирадиган $M(x, y)$ нуқталар тўплами $D - Oх$ ўққа нисбатан *стандарт соҳа* дейилади.

Таърифнинг *геометрик маъноси* шундан иборатки, D соҳа чапдан ва ўнгдан, мос равишда, $x = a$, $y = b$ тўғри чизиқлар кесмалари билан (бу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

кесмалар нуқталарга айланиш ҳам мумкин) чегараланган; $f_2(x)$ функциянинг графиги D соҳа нинг юқори чегарасидан, $f_1(x)$ функциянинг графиги эса, унинг қўйи чегарасидан иборат (9.1-чизма).

9.3- таъриф. Координаталари, $[c, d]$ кесмада узлуксиз $g_1(y)$ ва $g_2(y)$ функциялар учун, $c \leq y \leq d$, $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$ муносабатларни қаноатлантирадиган $M(x, y)$ нуқталар тўплами $D_1 - O_y$ ўққа нисбатан *стандарт соҳа* дейилади.

Таърифнинг *геометрик маъноси* шундан иборатки, D_1 соҳа юқоридан ва пастдан, мос равишда, $y = c$, $y = d$ тўғри чизиклар кесмалари (бу кесмалар нуқталарга айланиш ҳам мумкин) билан, чапдан ва ўнгдан мос равишда $g_1(x)$ ва $g_2(x)$ функцияларнинг графиклари билан чегаралангандир (9.2-чизма).

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

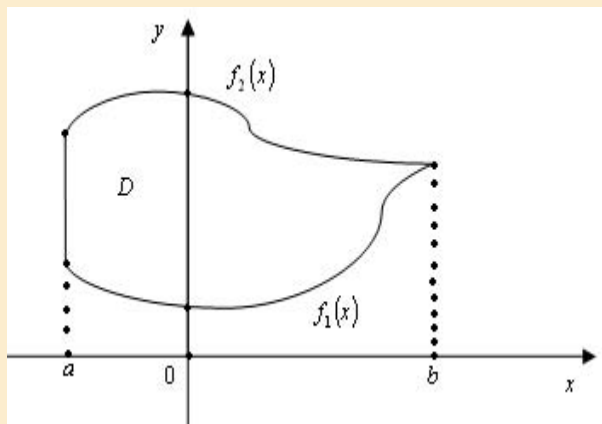


О р к а г а

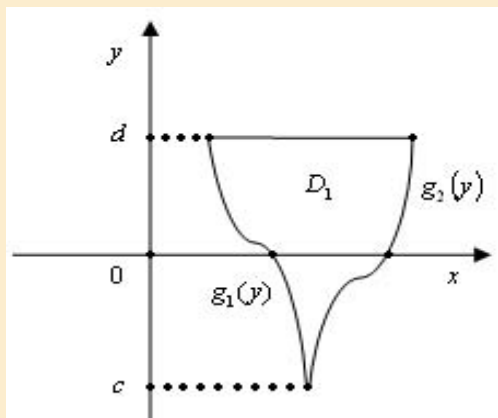
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



9.1-чизма.



9.2-чизма.

Ўқларга нисбатан стандарт соҳаларнинг юзаларини ҳисоблаш формулалари:

1. Ох ўққа нисбатан *стандарт* $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ соҳанинг S_D юзи

$$S_D = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

2. Оу ўққа нисбатан *стандарт* $D_1 = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$ соҳанинг S_{D_1} юзи

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$S_{D_1} = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)] dy$$

формула бўйича ҳисобланади.

Хусусий ҳолда

3. $f(x)$ функция $[a;b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a;b]$ да $f(x) \geq 0$ бўлсин.

Юқоридан $f(x)$ функциянинг графиги, ён томонлардан $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиқлар, пастдан эса Ox ўқ билан чегараланган шаклнинг (одатда бундай шакл, *эгри чизиқли трапеция*, деб юритилади) юзи,

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (9.1)$$

формула бўйича ҳисобланади (9.3 – чизма).

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

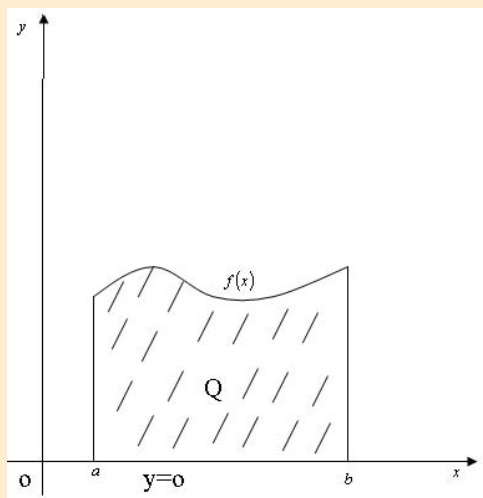


О р к а г а

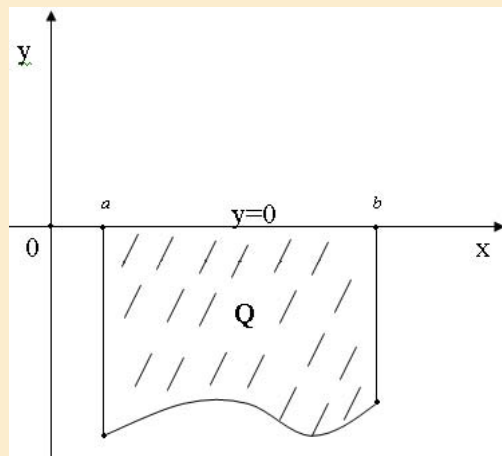
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



9.3 – чизма.



9.4 – чизма.

4. Агар $[a;b]$ кесмада аниқланган, узлуксиз $f(x)$ функция манфий, яъни $f(x) < 0$ бўлса, у ҳолда, асоси $[a;b]$ кесмадан иборат бўлиб, қуйидан $y = f(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган (9.4 - чизма) трапециянинг юзи манфий бўлади.

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$$

5. Агар $[a;b]$ кесма, чекли сондаги қисм ораликларга бўлинган бўлиб, уларнинг ҳар бирида функциянинг қиймати манфий эмас ($f(x) \geq 0$) ёки

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

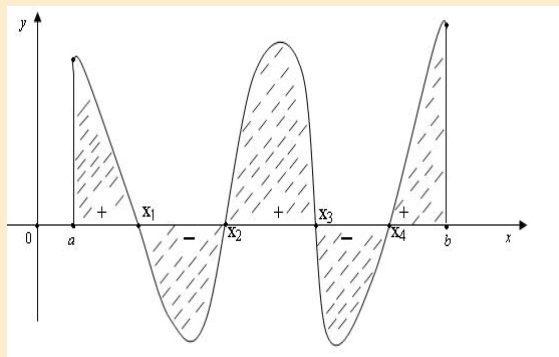
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

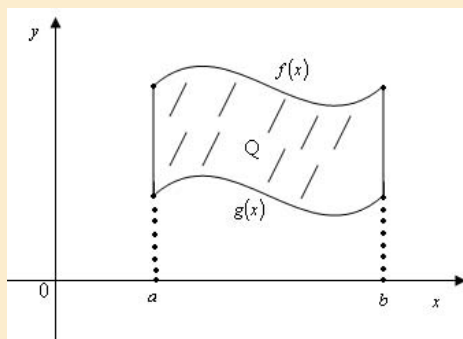
Ч и к и ш

мусбат эмас ($f(x) \leq 0$) бўлса, у ҳолда, (9.1) интеграл, чекли сондаги, Ox ўқдан юқорида ва ундан пастда жойлашган (юзи манфий), эгри чизикли соҳалар юзларининг йиғиндисига тенг бўлади (9.5 - чизма), яъни

$$S = \int_a^{x_1} f(x)dx + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \left| \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx \right| + \int_{x_4}^b f(x)dx.$$



9.5 – чизма.



9.6 - чизма

6. $f(x)$, $g(x)$ функциялар $[a; b]$ кесмада аниқланган узлуксиз, $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ ва $\forall x \in [a; b]$ учун, $f(x) \geq g(x)$ бўлсин. У ҳолда, $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ чизиклар билан чегараланган соҳанинг юзи,

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad (9.2)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

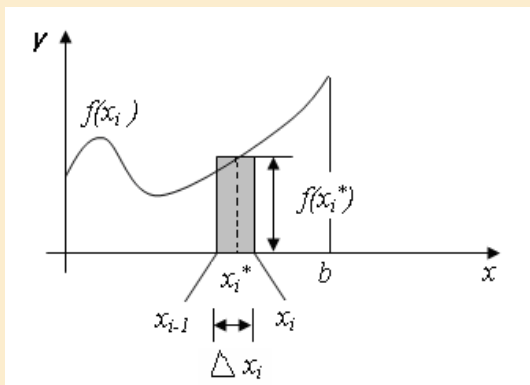
формула орқали топилади (9.6 - чизма)

Тасаввур қилинадиган (ифодаловчи) тўғри тўртбурчаклар.

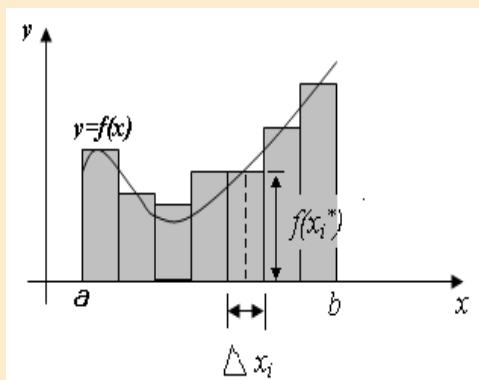
Биз юқорида кўрдикки, аниқ интеграл, Риман йиғиндисининг лимити шаклида, куйидагича ифодаланади:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} [f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n] \quad (9.3)$$

Бунда ξ_i , $[x_{i-1}, x_i]$ ораликдаги ихтиёрий танланган нуқта, $f(\xi_i)$ эса, $f(x)$ функциянинг шу ораликда тасаввур қилинадиган қийматидир. Агар $f(x)$ функция мусбат бўлса, $f(\xi_i)\Delta x_i$ кўпайтма, 9.7 – чизмада кўрсатилган тасаввур қилинадиган тўғри тўртбурчакнинг юзини беради.



9.7-чизма.



9.8-чизма.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

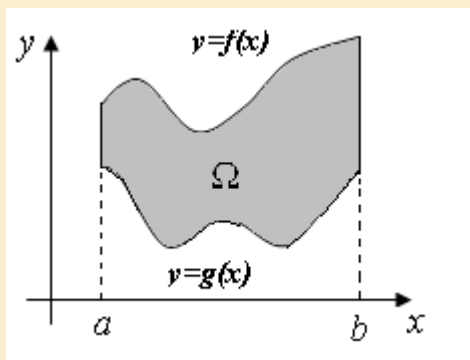
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

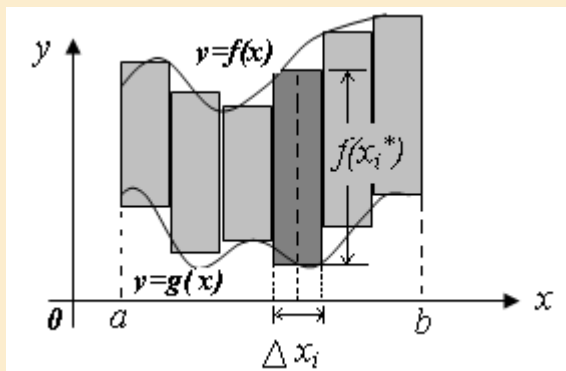
Ч и к и ш

(9.3) формула бизга, берилган эгри чизикдан пастда жойлашган юзани, тасаввур қилинадиган тўғри тўртбурчаклар юзалари йиғиндиси сифатида, тасвирлаш мумкинлигини кўрсатади (9.8-чизма).

Энди Ω соҳа, юқоридан $f(x)$ функциянинг графиги, пастдан эса, $g(x)$ функциянинг графиги билан чегараланган бўлсин (9.9 - чизма).



9.9-чизма.



9.10-чизма.

Унда Ω соҳанинг юзи, $f(x)-g(x)$ функцияни, $x=a$ дан $x=b$ гача, x бўйича интеграллаш ёрдамида топилади (ҳисобланади), яъни

$$S_{\Omega} = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Бу ҳолда Риман йиғиндиси,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

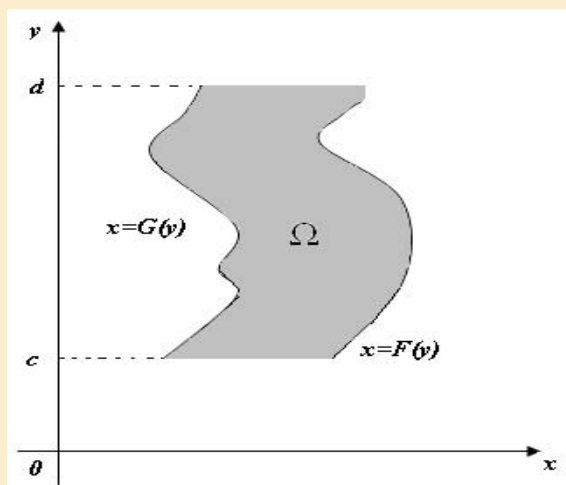
Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

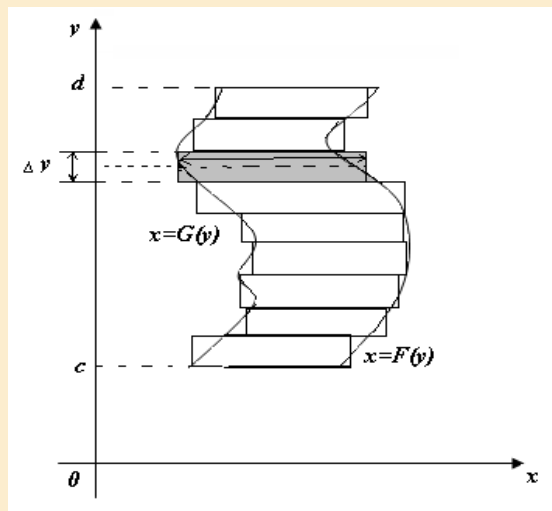
$$[f(\xi_1) - g(\xi_1)]\Delta x_1 + [f(\xi_2) - g(\xi_2)]\Delta x_2 + \dots + [f(\xi_n) - g(\xi_n)]\Delta x_n$$

шаклида бўлади ва тасаввур қилинадиган тўғри тўртбурчакларнинг ўлчамлари қуйидагича: $f(\xi_i) - g(\xi_i)$ - «баландлиги» ва Δx_i - «асоси» (9.11-чизма) бўлади.

Энди y га нисбатан интеграллаш ёрдамида юзаларни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. 9.11 – чизмада кўрсатилган Ω соҳанинг чегаралари, x нинг функциялари бўлмасдан, улар y нинг функцияларидан иборат бўлган ҳолни қараймиз.



9.11-чизма.



9.12-чизма.

Бу ҳолда тасаввур қилинадиган тўғри тўртбурчакларни горизонтал кўри-

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

нишда оламиз ва юзани,

$$[F(\eta_1) - G(\eta_1)]\Delta y_1 + [F(\eta_2) - G(\eta_2)]\Delta y_2 + \dots + [F(\eta_n) - G(\eta_n)]\Delta y_n$$

Риман йиғиндисининг лимити сифатида, тасвирлаймиз (9.12-чизма).

Демак, берилган соҳанинг юзи,

$$\int_c^d [F(y) - G(y)] dy$$

интеграл орқали ифодаланади. Бу ерда интеграллаш,

$$F(y) - G(y)$$

«горизонтал бўлиниш» ни y га нисбатан бажаради.

9.1-мисол. $x = y^2$ ва $x - y = 2$ чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзини: а) x га нисбатан; б) y га нисбатан интеграллаш ёрдамида ҳисобланг.

Ечилиши. Аввало, берилган чизиқларнинг $(1; -1)$, $(4; 2)$ нуқталарда кесишишига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

а) x бўйича интеграллаш учун, тасаввур қилинадиган тўғри тўртбурчакларни вертикал жойлаштирамиз ва тенгламаларни y га нисбатан

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



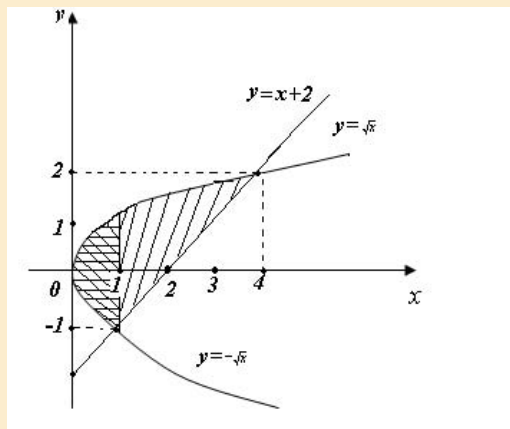
О р к а г а

С а х и ф а / 708

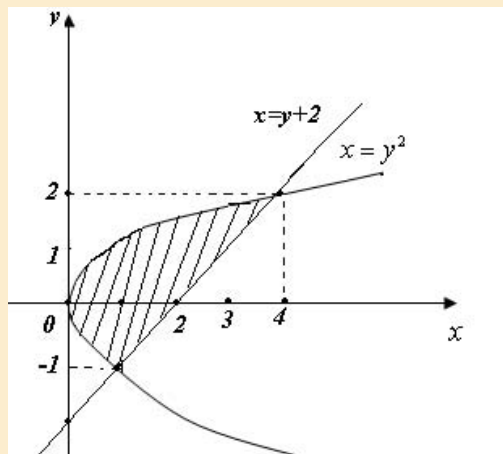
Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ечамиз: $x = y^2$ тенгламани уга нисбатан ечиб, $y = \pm\sqrt{x}$ бўлишини оламиз, бунда $y = \sqrt{x}$ - параболанинг юқори ярмидан, $y = -\sqrt{x}$ эса, параболанинг қуйи ярмидан иборат. $x - y = 2$ тўғри чизик тенгламасини, $y = x - 2$ шаклида ёзамиз (9.13- чизма). Қаралаётган соҳанинг юқори чегараси, $y = \sqrt{x}$ эгри чизикдан иборат. Унинг қуйи чегараси эса, иккита, ҳар хил тенгламалар орқали ифодаланади: $x = 0$ дан $x = 1$ гача ўзгарганда, $y = -\sqrt{x}$ эгри чизик, $x = 1$ дан $x = 4$ гача ўзгарганда эса, $y = x - 2$ тўғри чизик. Шундай қилиб, соҳанинг юзи,



9.13-чизма.



9.14-чизма.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$S = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})]dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x-2)]dx = 2\int_0^1 \sqrt{x}dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - x + 2]dx =$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^{3/2} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^4 = \frac{9}{2}.$$

б) y бўйича интеграллаш учун, биз тасаввур қилинадиган тўғри тўртбурчакларни горизонтал жойлаштирамиз (9.14-чизма). Бунда, ўнгдан чегараловчи тўғри чизик $x = y + 2$ ва чапдан чегараловчи эгри чизик эса, $x = y^2$. Модомики, y , -1 дан 2 гача ўзгарар экан,

$$S = \int_{-1}^2 [y+2-y^2]dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 2y - \frac{1}{3}y^3 \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

9.2– мисол. Ушбу $y = 2x$ тўғри чизик ва $y = 3 - x^2$ парабола билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Ечилиши. Берилган тўғри чизик билан параболанинг кесишиш нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3 - x^2 \end{cases}, \quad 3 - x^2 = 2x, \quad x^2 + 2x - 3 = 0; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -3.$$

Демак, тўғри чизик билан парабола $(1; 2)$ ва $(-3; -6)$ нуқталарда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

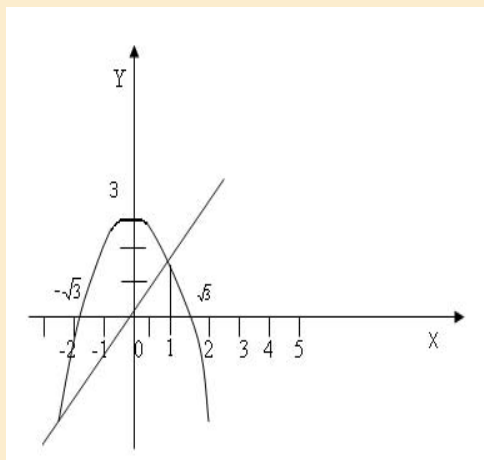
Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

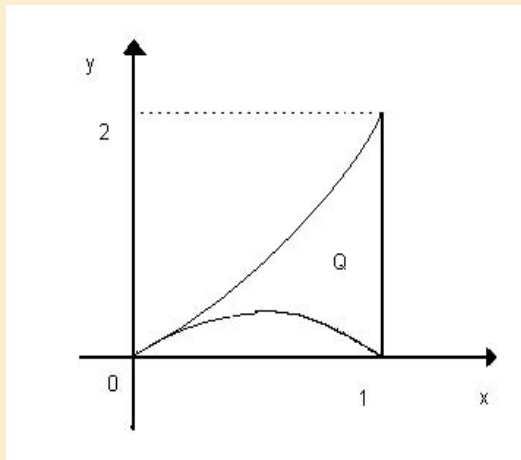
кесишади.

Шундай қилиб, изланаётган соҳанинг юзи (9.15 чизма),

$$S = \int_{-3}^1 [3 - x^2 - 2x] dx = \left(3x - \frac{x^3}{3} - x^2 \right) \Big|_{-3}^1 = \frac{5}{3} - (-9 + 9 - 9) = \frac{5}{3} + 9 = \frac{32}{3} \quad (\text{кв. бир}).$$



9.15 чизма.



9.16- чизма.

9.3 – мисол. Ушбу $(y - x)^2 = x^3$ эгри чизик ва $x = 1$ тўғри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Ечилиши. Равшанки, y , x нинг ошкормас функцияси сифатида, $x \geq 0$ учун аниқланган. $y - x = \pm x\sqrt{x}$ эгри чизикнинг $y_1 = x + x\sqrt{x}$, $y_2 = x - x\sqrt{x}$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

шаҳобчаларидан биринчиси ҳар доим мусбат бўлиб, $x \geq 0$ да, $y_1(x) \geq y_2(x)$

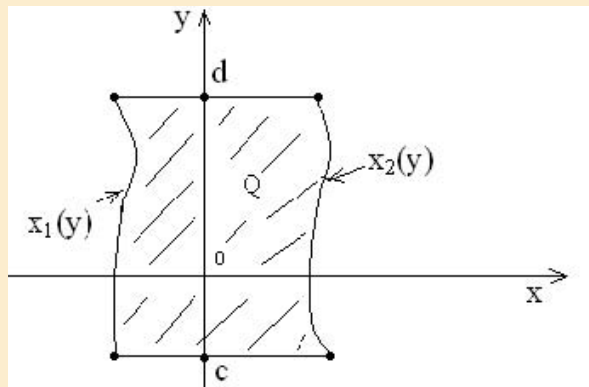
тенгсизликни қаноатлантиради (9.16 - чизма). (9.2) формулага асосан,

$$S = \int_0^1 [y_1(x) - y_2(x)] dx = \int_0^1 (x + x\sqrt{x} - x + x\sqrt{x}) dx = 2 \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{4}{5} \sqrt{x^5} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} \text{ (кв. бир.)}$$

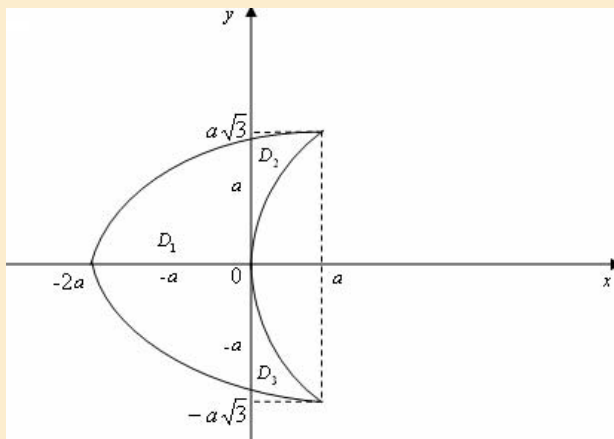
Агар (S) – соҳа, ушбу $(S) = \{(x, y) : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$ кўринишда бўлса (9.17- чизма), у ҳолда унинг S юзи, қуйидаги ,

$$S = \int_c^d [x_2(y) - x_1(y)] dy \quad (9.3')$$

формула орқали топилади.



9.17- чизма.



9.18-чизма

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

9.4– мисол. Ушбу $x^2 + 2ax - y^2 = 0$, $ax - y^2 + 2a^2 = 0$, ($a > 0$) эгри чизиклар

билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Ечилиши. Қаралаётган D соҳа, Ox ўққа нисбатан стандарт бўлмаганлиги учун, уни, Ox ўққа нисбатан стандарт бўлган учта соҳаларга ажратамиз (9.18-чизма) :

$$D_1 = \{(x, y) : -2a \leq x < 0; -\sqrt{2a^2 + ax} \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, \sqrt{x^2 + 2ax} \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\},$$

$$D_3 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, -\sqrt{2a^2 + ax} \leq y \leq -\sqrt{x^2 + 2ax}\}.$$

D – соҳа Ox ўққа нисбатан симметрик бўлганлиги учун, унинг S юзи Ox ўққа нисбатан стандарт бўлган $\overline{D_1} = \{(x, y) : -2a \leq x < 0; 0 \leq y \leq \sqrt{2a^2 + ax}\}$ ва D_2 соҳалар юзларининг иккиланганига тенг:

$$\begin{aligned} S &= 2 \left[\int_{-2a}^0 \sqrt{2a^2 + ax} \, dx + \int_0^a (\sqrt{2a^2 + ax} - \sqrt{x^2 + 2ax}) \, dx \right] = \\ &= 2 \left[\int_{-2a}^a \sqrt{2a^2 + ax} \, dx - \int_0^a \sqrt{x^2 + 2ax} \, dx \right] = 2 \left[\int_{-2a}^a \sqrt{2a^2 + ax} \, dx - \int_0^a \sqrt{(x+a)^2 - a^2} \, dx \right] = \\ &= 2 \left[\frac{2}{3a} \sqrt{(ax + 2a^2)^3} \Big|_{-2a}^a - \frac{(x+a)}{2} \sqrt{x^2 + 2ax} \Big|_0^a + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax} \right) \Big|_0^a \right] = \\ &= 2a^2 \sqrt{3} + a^2 \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Берилган соҳа Оу ўққа нисбатан стандарт соҳадан иборат:

$$D = \{(x, y) : -a\sqrt{3} \leq y \leq a\sqrt{3}, \frac{y^2 - 2a^2}{a} \leq x \leq -a + \sqrt{y^2 + a^2}\}$$

Бу D соҳанинг симметриклигидан яна фойдалансак, қуйидагига эга бўламиз

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{a\sqrt{3}} \left(\sqrt{y^2 + a^2} - a - \frac{y^2}{a} + 2a \right) dy = \\ &= 2a^2\sqrt{3} + \left(y\sqrt{y^2 + a^2} + a^2 \ln \left| y + \sqrt{y^2 + a^2} \right| - \frac{2y^3}{3a} \right) \bigg|_0^{a\sqrt{3}} = \\ &= 2a^2\sqrt{3} + a^2 \ln(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

9.2. Тенгламаси параметрик шаклда берилган эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисоблаш.

Фараз қилайлик, текисликдаги шаклни ўраб турувчи чизик,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

параметрик тенгламаси билан берилган бўлсин.

1) Агар $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ ва $x(t)$ функция узлуксиз манфий бўлмаган $x'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда изланаётган соҳанинг юзи

$$S = \int_{\lambda}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt \quad (9.4)$$

формула бўйича топилади.

2) $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да

$x(t) \geq 0$, $y(t) \geq 0$ ва $y(t)$ функция, узлуксиз, манфий бўлмаган $y'(t)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда, изланаётган соҳанинг юзи,

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \cdot y'(t) dt \quad (9.5)$$

формула орқали топилади.

9.5 – мисол. Ушбу $\left. \begin{array}{l} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{array} \right\} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ эгри чизик ва Ox ўқ

билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Ечилиши. Циклоиданинг бир аркаси, t нинг, 0 дан 2π гача ўзгариши натижасида чизилади, чунки $y(0) = y(2\pi) = 0$, t нинг қолган қийматларида, $y > 0$, $x(0) = 0$ ва $x(2\pi) = 2\pi a$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

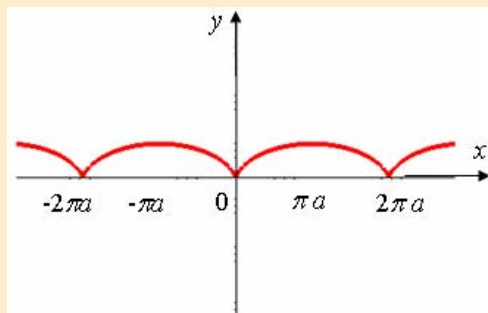
Шундай қилиб, изланаётган соҳанинг юзи,

$$S = \int_0^{2\pi a} y dx$$

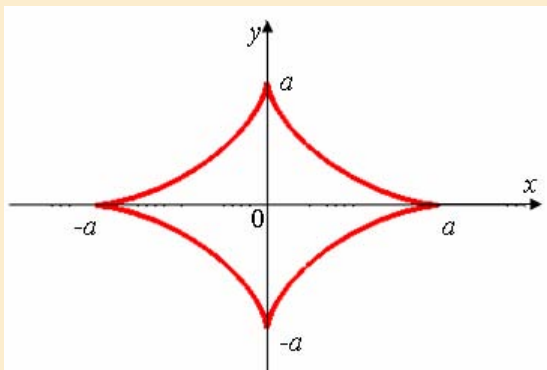
формула орқали топилади. Бунда, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $dx = a(1 - \cos t)dt$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда (x , $[0; 2\pi a]$ ораликда ўзгарганда, t , $[0; 2\pi]$ ораликда ўзгаради),

$$S = a \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = 3\pi a^2 \text{ (кв. бир.)}.$$

Демак, изланаётган юза, радиуси a га тенг бўлган доира юзининг учланганига тенг экан (9.19 - чизма).



9.19 – чизма.



9.20 - чизма

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

9.6– мисол. Ушбу $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ эгри чизик билан чегараланган

соҳанинг юзини топинг.

Ечилиши. Равшанки, эгри чизик Ox ва Oy ўқларга нисбатан симметрик (9.20 - чизма) бўлади. Шунинг учун, эгри чизикли OAB учбурчакнинг юзини топиб, уни 4 га кўпайтурсак, изланаётган соҳанинг юзи топилган бўлади.

Эгри чизикнинг тенгламасини, параметрик, $x = a \sin^3 t$, $y = b \cos^3 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) шаклда тасвирлаймиз. Бунда, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$. $[0; \frac{\pi}{2}]$ ораликқа эгри чизикнинг $\overset{\cup}{AB}$ ёйи тўғри келади. Эгри чизикли S_{OAB} учбурчакнинг юзини, (9.4) формула орқали, ҳисоблаймиз:

$$S_{OAB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t) x'(t) dt. \quad (*)$$

Бу юзани ҳисоблашни соддалаштириш мақсадида, охирги интегрални бўлак-лаб интеграллаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$S_{OAB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(t)x'(t)dt = y(t)x(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y'(t)dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y'(t)dt \quad (**)$$

(*) билан (**) ни қўшамиз:

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [y(t)x'(t) - x(t)y'(t)]dt \quad (***)$$

Унда, (***) формулага асосан,

$$\begin{aligned} S_{OAB} &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t]dt = \frac{3ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{3ab}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{3ab}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{3\pi ab}{32} \end{aligned}$$

Шундай қилиб, изланаётган соҳанинг юзи,

$$S = 4 \cdot S_{OAB} = 4 \cdot \frac{3\pi ab}{32} = \frac{3\pi ab}{8}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

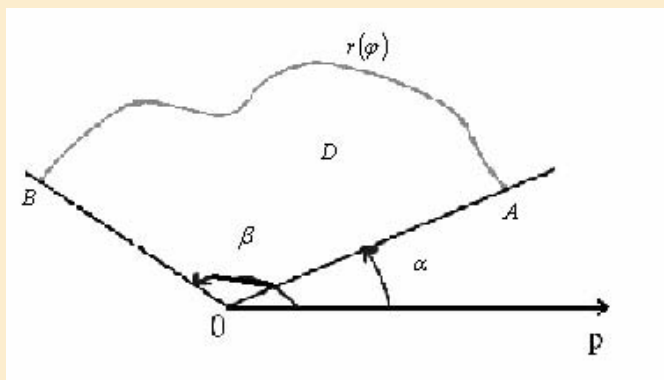
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

9.3. Тенгламаси қутб координаталар системасида берилган эгри чизиқ билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисоблаш.

Фараз қилайлик, $r=r(\varphi)$ функция $[\alpha;\beta]$ оралиқда аниқланган ($0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$), узлуксиз ва $\forall \varphi \in [\alpha;\beta]$ да $r(\varphi) \geq 0$ бўлсин. У ҳолда, $r=r(\varphi)$ функциянинг графиги ҳамда $\vec{OA}$ ва $\vec{OB}$ радиус векторлар билан чегараланган соҳа – эгри чизиқли секторни қараймиз (9.21- чизма).



9.21 - чизма

Қаралаётган секторнинг юзи,

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \quad (9.6)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

формула бўйича ҳисобланади.

9.7– мисол. Ушбу $r = a \sin 3\varphi$, $a > 0$, эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Ечилиши. Берилган эгри чизик, ҳар бири эгри чизикли сектордан иборат бўлган соҳани (9.22-чизма) чегаралайди. Улардан биринчисини, яъни

$(S_1) = \left\{ (r; \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq r \leq a \sin 3\varphi \right\}$ секторни қараймиз, унинг юзи,

(9.6) формула ёрдамида ҳисобланади:

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{\pi a^2}{12}.$$

Шундай қилиб, изланаётган соҳанинг юзи, $S = \frac{3}{12} \cdot \pi a^2 = \frac{\pi a^2}{4}$ (қв. бир.)

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

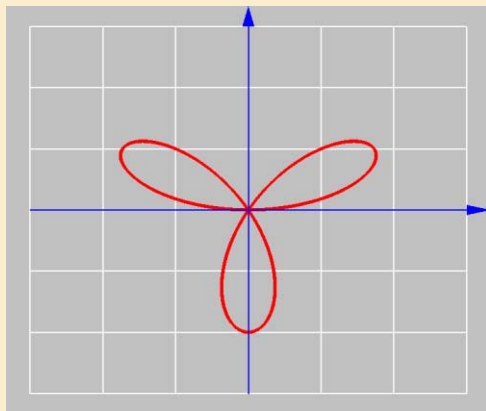


О р к а г а

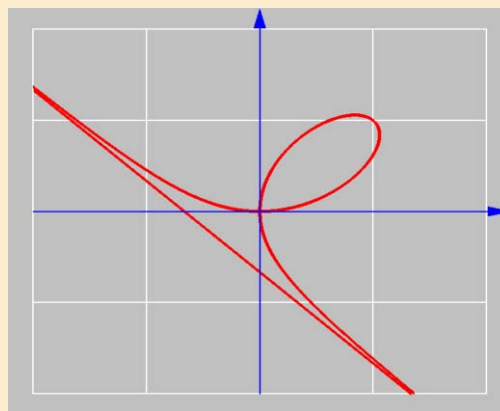
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



9.22-чизма. $\rho = a \sin 3\varphi$, $a > 0$.



9.23-чизма. $\rho = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$.

9.8 –мисол. Ушбу $x^3 + y^3 = 3axy$ эгри чизик билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисобланг.

Ечилиши. Берилган эгри чизикнинг қутб координаталар системасидаги тенгламаси қуйидагича бўлади: $\rho(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi) = 3a \cos \varphi \sin \varphi$. Бундан,

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$$

$[0; \frac{\pi}{2}]$ оралиқнинг ичида, тенгликнинг ўнг томони мусбат, оралиқнинг

четки нуқталарида, яъни $\varphi = 0$ ва $\varphi = \frac{\pi}{2}$ да $\rho = 0$ бўлади. У ҳолда, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

сегмент ҳалқага акслантирилади (9.23- чизма). Ҳалқанинг юзини, ушбу

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi$$

формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 d\varphi = \frac{9a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi.$$

$\int \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi$ аниқмас интегралда, $z = \operatorname{tg} \varphi$ алмаштиришни олиб, унинг

бошланғич функциясини топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \\ &= \int \frac{z^2 dz}{(1 + z^3)^2} = -\frac{1}{3(1 + z^3)} + C = \frac{-\cos^3 \varphi}{3(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)} + C. \end{aligned}$$

Бундан,

$$S = \frac{9a^2}{2} \left[-\frac{\cos^3 \varphi}{3(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a^2}{2}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

9.1. $y = x, y = 2 - x^2$.

9.2. $(y - x)^2 = x^3, x = 1$. 9.3. $y^2 = ax, x^2 = ay$.

9.4. $y = 6x - x^2 - 7, y = x - 3$.

9.5. $y = \sin x, y = 0, 0 \leq x \leq \pi$.

9.6. $y = x^2 + 1, x + y = 3$.

9.7. $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0$.

9.8. $y = 2 - x^2, y^2 = x^3$.

9.9. $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = a, x = b, a > b > 0$.

9.10. $y = e^{-x}, x = 0, y = 0, x = a$.

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

9.11. $y = x - \frac{\pi}{2}, y = \cos x, x = 0$.

9.12. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

9.13. $y = 2^x, y = 2, x = 0$.

9.14. $y = (x + 1)^2, x = \sin \pi y, y = 0 (0 \leq y \leq 1)$.

9.15. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

9.16. $y = a^x, y = a, x = 0, a > 1$.

9.17. $y = |\log_a x|, y = 0, x = 1/a, x = a, a > 1$.

9.18. $y = \operatorname{tg} x, y = \frac{2}{3} \cos x, x = 0$.

9.19. $y = -x^2, y = x^2 - 2x - 4$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

9.20-9.26 мисоллардаги чизиклар орқали берилган соҳани чизинг.

Сўнгра соҳанинг юзини: *a)* x бўйича ; *b)* y бўйича интеграл сифатида

тасвирланг

9.20 $y = x^2$, $y = x + 2$ ($x = \sqrt{y}$, $x = y - 2$). **9.21.** $y = x^3$, $y = 2x^2$ ($x = \sqrt[3]{y}$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{y}$).

9.22. $y = -\sqrt{x}$; $y = x - 6$ ($x = y^2$, $x = y + 6$).

9.23. $y = |x|$, $3y - x = 8$ ($x = y$, $y \geq 0$, $x = 3y - 8$).

9.24. $x + 4 = y^2$, $x = 5$. **9.25.** $y = 2x$, $x + y = 9$, $y = x - 1$ ($x = \frac{y}{2}$, $x = 9 - y$, $x = y + 1$)

9.26. $y = x^{1/3}$, $y = x^2 + x - 17$.

9.27- 9.32 мисолларда берилган чизиклар билан чегараланган соҳани чизинг ва унинг юзини ҳисобланг.

9.27. $4x = 4y - y^2$, $4x - y = 0$.

9.28. $x = y^2$, $x = 3 - 2y^2$

9.29. $x + y - y^3 = 0$, $x - y + y^2 = 0$.

9.30. $y = \cos x$, $y = \sec^2 x$, $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

9.31. $y = \cos x$, $y = \sin 2x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

9.32. $y = \sin^4 x \cos x$, $x \in [0, \pi/2]$.

9.33. Берилган $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ нуқталардан ўтувчи учбурчакнинг юзини, интеграллаш амалини бажариб, ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

9.34. Учлари, $(-2, 2)$, $(1, 1)$, $(5, 1)$, $(7, 2)$ нуқталарда ётган трапециянинг юзини, интеграллаш амалини бажариб, ҳисобланг.

9.35. $y = 6 - x^2$, $y = x (x < 0)$ ва $y = -x (x > 0)$ чизиклар билан чегараланган соҳани чизинг ва унинг юзини ҳисобланг.

9.36. $y = x^2$ ва $y = 4$ чизиклар билан чегараланган соҳани чизинг. Бу соҳа, $y = c$ чизик орқали, иккита, тенг юзали, қисм соҳаларга бўлинган бўлса, c ни топинг.

Қуйидаги мисолларда, қиймати берилган соҳанинг юзига тенг бўлган, интегрални ёзинг.

9.37 Соҳа, Ox ўқ, $y = \sqrt{3}x$ тўғри чизик ва $x^2 + y^2 = 4$ айлана билан чегараланган бўлиб, биринчи чоракда ётади.

9.38. Соҳа, $x^2 + y^2 = 4$ ва $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ айланаларнинг кесишиши натижасида ҳосил қилинган.

9.39. Тўғри тўртбурчакнинг бир учи, координаталар бошида, қарама – қарши учи эса, $y = bx^n$ чизикнинг $x = a$ бўлган ($a > 0, b > 0, n > 0$) нуқтасида, унинг томонлари эса, координаталар ўқларига параллел. У ҳолда, тўғри

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тўртбурчакнинг $y = bx^n$ чизикдан пастда жойлашган қисми юзининг, тўғри тўртбурчакнинг тўла юзига нисбати, фақат n га боғлиқ бўлишини, яъни нисбат a ва b ларга боғлиқ бўлмаслигини кўрсатинг.

9.40- 9.49 мисолларда берилган чизиклар билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисобланг.

9.40. $y = 6x^2 - 5x + 1$, $y = \cos \pi x$, $0 \leq x \leq 0,5$.

9.41. $y = \sin 2x$, $y = \sin x$.

9.42. $y = \arctg \sqrt{x}$, $y + x^2 = 0$, $x = 1$.

9.43. $y = 2x^2 e^x$, $y = -x^3 e^x$.

9.44. $2y = x^2$, $x^2 + y^2 = 4y$, $2y \geq x^2$.

9.45. $y^2 + x = 4$, $y^2 - 3x = 12$.

9.46. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 2$, $x = 0$.

9.47. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = 0$.

9.48. $y = x^2$, $y = x^2 + x - 1$, $y = \frac{5x}{2}$, $y \leq x^2$. **9.49.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y = \frac{9}{32}x^2$, $y \leq \frac{9}{32}x^2$.

9.50. $y^2 = 2x$ парабола $x^2 + y^2 = 8$ айлана билан чегараланган доиранинг юзини қандай нисбатта бўлади?

9.51. $x^2 + y^2 = a^2$ айлана, $x^2 - 2y^2 = \frac{a^2}{4}$ гипербола ёрдамида учта қисмга

бўлинган. Шу қисмларнинг юзларини топинг.

9.52. $y = x^2 - 2x + 2$ парабола, унга $M(3; 5)$ нуқтада ўтказилган уринма ва ординаталар ўқи билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

9.53 $y = -x^2 + 4x - 3$ парабола ва унга $M_1(0; -3)$, $M_2(3; 0)$ нуқталарда

ўтказилган уринмалар билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

9.54. $y = x^2 + 4x + 9$ парабола ва унга абсциссалари $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ бўлган

нуқталарда ўтказилган уринмалар билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Қуйидаги, тенгламаси параметрик шаклда берилган, чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

9.55. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y = 0$. **9.56.** $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

9.57. $x = at - t^2$, $x = at^2 - t^3$, $a > 0$.

9.58. $x = 1 + t - t^3$, $y = 1 - 15t^2$.

9.59. $x = at - b \sin t$, $y = a - b \cos t$ ($0 < b < a$) трохоиданинг бир тармоғи.

9.60. $x = a \cos t(1 - \cos t)$, $y = a \sin t(1 - \cos t)$ кардоиданинг ичида ётган соҳанинг юзини топинг.

9.61. $x = a \sin 2t$, $y = a \sin t$, $a > 0$. **9.62.** $x = a\left(\frac{2}{\pi}t - \sin t\right)$, $y = a(1 - \cos t)$, $a > 0$.

9.63. $x = a(1 + 2 \cos t)$, $y = a(\operatorname{tg} t + 2 \sin t)$, $a > 0$.

Қуйидаги, тенгламалари кутб координаталар системасида берилган, чизиқлар билан чегараланган соҳанинг юзини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$9.64. r^2 = a^2 \cos 4\varphi \quad (\text{лемниската}). \quad 9.65. r = a(1 + \cos \varphi) \quad (\text{кардоида}).$$

$$9.66. r\varphi = a \quad (\text{гиперболик спирал}) \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \quad \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi.$$

$$9.67. r = \frac{a}{2\pi} \varphi \quad (\text{Архимед спирали}) \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \quad \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi.$$

$$9.68. r = \operatorname{Re}^{k\varphi}, \quad k > 0 \quad (\text{логарифмик спирал}) \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \quad \varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi.$$

$$9.69. r = 2\sqrt{3}a \cos \varphi, \quad \rho = 2a \sin \varphi. \quad 9.70. r = 2 - \cos \varphi, \quad \rho = \cos \varphi.$$

$$9.71. r = \frac{p}{1 - \cos \varphi} \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \quad (\text{парабола}). \quad 9.72. r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$9.73. r = a \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi} \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right). \quad 9.74. r = a(1 - \cos \varphi), \quad r = a.$$

$$9.75. r^2 = a^2(1 - 2 \cos \varphi), \quad r = a, \quad r \leq a.$$

$$9.76. r = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \text{чизик билан чегараланган ва} \quad r = \frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{доиранинг}$$

ичида ётган соҳанинг юзини топинг.

9.77. $r = a(1 + \cos \varphi)$ чизик билан чегараланган ва $r = 3a \cos \varphi$ чизикнинг ташқарисида жойлашган соҳанинг юзини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$9.1. \frac{9}{2}. \quad 9.2. \frac{4}{5}. \quad 9.3. \frac{a^2}{3}. \quad 9.4. \frac{9}{2}. \quad 9.5. 2. \quad 9.6. 4\frac{1}{2}. \quad 9.7. 5\frac{1}{3}.$$

$$9.8. 2\frac{2}{15}. \quad 9.9. \ln\left(\frac{a}{b}\right). \quad 9.10. 1 - e^a. \quad 9.11. 1 + \frac{\pi^2}{8}. \quad 9.12. \sqrt{2} - 1.$$

$$9.13. 2 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0,56. \quad 9.14. \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \approx 0,97. \quad 9.15. \pi ab. \quad 9.16. a + \frac{(1-a)}{\ln a}.$$

$$9.17. \frac{a^2 - 1}{a} - \frac{(a-1)^2}{a \ln a}. \quad 9.18. \frac{1}{3} + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad 9.19. 9.$$

$$9.20. a) \int_{-1}^2 [(x+2) - x^2] dx, \quad b) \int_0^1 [\sqrt{y} - (\sqrt{y})] dy + \int_1^4 [\sqrt{y} - (y-2)] dx.$$

$$9.21. a) \int_0^2 [2x^2 - x^3] dx, \quad b) \int_0^8 [y^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{2}y\right)^{1/2}] dy.$$

$$9.22. a) \int_0^4 [0 - (-\sqrt{x})] dx + \int_4^6 [0 - (x-6)] dx, \quad b) \int_{-2}^0 [(y+6) - y^2] dx.$$

$$9.23. a) \int_{-2}^0 \left[\frac{8+x}{3} - (-x)\right] dx + \int_0^4 \left[\frac{8+x}{3} - x\right] dx, \quad b) \int_0^2 [y - (-y)] dy + \int_2^4 [y - (3y-8)] dy.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

9.24. a) $\int_{-4}^5 [\sqrt{4+x} - (-\sqrt{4+x})] dx$, b) $\int_{-3}^3 [5 - (y^2 - 4)] dy$

9.25. a) $\int_{-1}^3 [2x - (x-1)] dx + \int_3^5 [(9-x) - (x-1)] dx$, b) $\int_{-2}^4 [(y+1) - \frac{1}{2}y] dy + \int_4^6 [(9-y) - \frac{1}{2}y] dy$.

9.26. a) $\int_{-1}^1 [x^{1/3} - (x^2 + x - 1)] dx$,

b) $\int_{-5/4}^{-1} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4y+5} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4y+5} \right) \right] dy + \int_{-1}^1 \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4y+5} - y^3 \right] dy$.

9.27. $9/8$. **9.28.** 4. **9.29.** $\frac{5}{12}$. **9.30.** $2 - \sqrt{2}$. **9.31.** 8. **9.32.** $\frac{1}{5}$.

9.33. 4. **9.34.** $\frac{39}{2}$. **9.35.** 27. **9.36.** $4^{\frac{2}{3}}$. **9.37.** $\int_0^{\sqrt{3}} [\sqrt{y-y^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}y] dy$

9.38. $A = \int_0^2 [\sqrt{4-x^2} - (2 - \sqrt{4x-x^2})] dx$. **9.39.** $\frac{1}{n+1}$. **9.40.** $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{8}$. **9.41.** $\frac{9}{4}$.

9.42. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$. **9.43.** $18e^{-2} - 2$. **9.44.** $\frac{16}{3} + 2\pi$. **9.45.** $\frac{32\sqrt{6}}{3}$. **9.46.** $\frac{16}{3}$.

9.47. $\sqrt{2} - 1$. **9.48.** $\frac{37}{48}$. **9.49.** $6\pi - 6\arcsin \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{9}$. **9.50.** $\frac{3\pi+2}{9\pi-2}$.

9.51. $a^2[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})]$, $a^2[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})]$, $a^2[\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{3} + \sqrt{2})]$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{array}{llll}
 \text{9.52. } 9. & \text{9.53. } 2\frac{1}{4}. & \text{9.54. } \frac{9}{4}. & \text{9.55. } 3\pi a^2. \quad \text{9.56. } \frac{3}{8}\pi a^2. \quad \text{9.57. } \frac{a^5}{60}. \\
 \text{9.58. } 8. & \text{9.59. } \pi(b^2 + 2ab) & \text{9.60. } \frac{3\pi}{2}a^2. & \text{9.61. } \frac{4a^2}{3}. \quad \text{9.62. } a^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\right). \\
 \text{9.63. } a^2\left(\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} - 4\ln(2 + \sqrt{3})\right). & \text{9.64. } a^2. & \text{9.65. } \frac{3}{2}\pi a^2. & \text{9.66. } \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right). \\
 \text{9.67. } \frac{a^2}{24\pi^2}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3). & \text{9.68. } \frac{R^2}{4k}(e^{2k\varphi_2} - e^{2k\varphi_1}). & \text{9.69. } a^2\left(\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}\right). & \text{9.70. } \frac{17\pi}{4}. \\
 \text{9.71. } \frac{p^2}{6}(3 + 4\sqrt{2}). & \text{9.72. } \frac{\pi p^2}{\sqrt{(1 - \varepsilon^2)^3}}. & \text{9.73. } \frac{1}{6}a^2. & \text{9.74. } 2a^2\left(\frac{5\pi}{8} - 1\right). \\
 \text{9.75. } a^2(2\pi + 3\sqrt{3} - 6)/3. & \text{9.76. } \frac{a^2}{6}(\pi + 6 - 3\sqrt{3}). & \text{9.77. } \frac{a^2\pi}{4}.
 \end{array}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

10-§. Аниқ интеграл ёрдамида чизиқнинг ёйи узунлигини ҳисоблаш

10.1. Декарт координаталар системасида берилган чизиқнинг ёйи узунлигини ҳисоблаш.

Фараз қилайлик, $\overset{\cup}{AB}$ ёй, фазода $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, тенгламалар системаси орқали аниқланган бўлсин. Бунда, $x(t), y(t), z(t)$ функциялар, $[\alpha; \beta]$ кесмада узлуксиз дифференциалланувчи функциялардир. Бу ҳолда, $\overset{\cup}{AB}$ ёйнинг узунлиги ,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt \quad (10.1)$$

формула бўйича ҳисобланади.

$\overset{\cup}{AB}$ ёй текисликда берилганда, унинг узунлиги,

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \quad (10.2)$$

формула орқали ҳисобланади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Агар эгри чизиқнинг ($\overset{\cup}{AB}$ -ёйнинг) тенгламаси ошкор, яъни $y = f(x), x \in [a, b]$ кўринишда берилса, ($f(x)$ – узлуксиз дифференциалланувчи), унинг ёй узунлиги,

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (10.3)$$

формула орқали топилади.

10.1 – мисол. Ушбу $y = \frac{4}{5}x^{5/4}, 0 \leq x \leq 9$ эгри чизиқнинг ёй узунлигини

топинг.

Ечилиши. Берилган эгри чизиқнинг ёй узунлигини, (10.3) формуладан фойдаланиб, топамиз:

$$y'_x = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}}; S = \int_0^9 \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx = \int_0^9 \sqrt{1 + x^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Охирги интегралда, $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = t$ алмаштиришни бажариб,

$$l = 4 \int_1^2 t^2 (t^2 - 1) dt = \frac{232}{15}$$

эканлигини топамиз.

10.2- мисол. Ушбу $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, эгри чизиқнинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ёй узунлигини топинг.

Ечилиши. Берилган эгри чизикнинг ёй узунлигини, (10.2) формула орқали топамиз:

$$x_t' = a(1 - \cos t), y_t' = a \sin t, \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} = 2a \sin \frac{t}{2} dt,$$

$$l = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

10.3- мисол. Ушбу $x = a(1 - \sin t), y = a(t - \cos t), z = 4a \sin \frac{t}{2}, 0 \leq t \leq t_0$, эгри чизикнинг ёй узунлигини топинг.

Ечилиши. Берилган эгри чизикнинг ёй узунлигини, (10.1) формула орқали топамиз:

$$x_t' = -a \sin t, y_t' = a(1 - \cos t), z_t' = 2a \cos \frac{t}{2}, (x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2 =$$
$$= (-a \sin t)^2 + (a(1 - \cos t))^2 + (2a \cos \frac{t}{2})^2 = 2a^2(1 - \cos t + 2 \cos^2 \frac{t}{2}) = 4a^2.$$

Демак, $l = \int_0^{t_0} 2adt = 2at_0.$

10.4 – мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x = \int_1^t \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi; y = \int_1^t \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad 1 \leq t \leq t_0$$

тенглама билан берилган эгри чизикнинг узунлигини топинг.

Ечилиши. Равшанки, $t = 1$ бўлганда, эгри чизик координаталар бошидан ўтади.

$$x'_t = \left[\int_1^t \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi \right]'_t = \frac{\sin t}{t}, \quad y'_t = \left[\int_1^t \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi \right]'_t = \frac{\cos t}{t},$$

$$\sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} = \sqrt{\frac{\sin^2 t}{t^2} + \frac{\cos^2 t}{t^2}} = \frac{1}{t}.$$

Шундай қилиб, изланаётган чизикнинг узунлиги, (10.2) формулага асосан,

$$S = \int_1^{t_0} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_1^{t_0} \frac{dt}{t} = \ln t_0.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

10.2. Қутб координаталар системасида берилган чизиқнинг ёйи узунлигини ҳисоблаш.

Агар $\overset{\cup}{AB}$ эгри чизиқ ёйи қутб координаталар системасида $r = r(\varphi)$ ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$) тенглама билан берилган бўлиб, $r(\varphi)$ функция $[\varphi_1, \varphi_2]$ да узлуксиз ва узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда, эгри чизиқнинг *ёй узунлиги*,

$$l = \overset{\cup}{AB} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{[r(\varphi)]^2 + [r'(\varphi)]^2} d\varphi \quad (10.4)$$

формула бўйича ҳисобланади.

10.5 – мисол. Ушбу $r = a(1 - \sin \varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$ тенглама билан берилган чизиқ ёйининг узунлигини топинг.

Ечилиши. Берилган чизиқнинг, $r = a(1 - \sin \varphi)$ тенгламасидан,

$$\begin{aligned} r'_{\varphi} &= -a \cos \varphi, \quad \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} = \sqrt{a^2(1 - \sin \varphi)^2 + a^2 \cos^2 \varphi} = \\ &= a\sqrt{1 - 2\sin \varphi + \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = a\sqrt{2 - 2\sin \varphi} \end{aligned}$$

эканлигини топамиз. Энди, изланаётган чизиқ ёйининг узунлиги, (10.4) формула ёрдамида топилади:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$l = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} a\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \sin \varphi} d\varphi = a\sqrt{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1 - \sin \varphi} d\varphi = 2a.$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги берилган чизикларнинг кўрсатилган кесмалардаги ёй узунликларини топинг.

10.1. $y = \ln x, \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{12}{5}.$

10.2. $y = 1 - \ln \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}.$

10.3. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, 0 \leq x \leq \frac{7}{9}.$

10.4. $y = e^x (0 \leq x \leq x_0).$

10.5. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y (1 \leq y \leq e).$

10.6. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x} \left(0 \leq x \leq \frac{5}{3}a\right).$

10.7. $y = \sqrt{\frac{x}{3}}(1 - x), (0 \leq x_0 \leq x \leq 1).$

10.8. $x = \frac{2}{3}\sqrt{(y-1)^3} (0 \leq x \leq 2\sqrt{3}).$

10.9. $y = \ln(x^2 - 1), 2 \leq x \leq 5.$

10.10. $y = ach \frac{x}{a}$ чизикнинг, $A(0; a)$ нуқтадан, $B(b; h)$ нуқтагача бўлган

қисми.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

10.11. $y = \ln \sin x$ чизикнинг, абсциссалари, $\frac{\pi}{2}$ ва $\frac{\pi}{3}$ бўлган нуқталар

орасидаги қисми.

10.12. $y^2 = x^3$ чизикнинг $x = \frac{4}{3}$ тўғри чизик билан кесилган қисми.

10.13. $y = \frac{x^2}{2} - 1$ чизикнинг Ox ўқ билан кесилган қисми.

10.14. $y^2 = (x+1)^3$ чизикнинг $x = 4$ тўғри чизик билан кесилган қисми.

10.15. $y = \arcsin e^{-x}$ чизикнинг, $x = 0$ дан $x = 1$ гача бўлган қисми.

Қуйидаги берилган чизикларнинг кўрсатилган кесмалардаги ёй
узунликларини топинг.

10.16. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

10.17. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, ($0 \leq t \leq 2\pi$).

10.18. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

10.19. $x = e^t(\cos t + \sin t)$, $y = e^t(\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 1$.

10.20. $x = a \cos^5 t$, $y = a \sin^5 t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

10.21. $x = a(sht - t)$, $y = a(cht - 1)$ ($0 \leq t \leq T$).

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$10.22. \quad x = \sin^4 t, \quad y = \cos^2 t, \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

$$10.23. \quad x = \int_1^t \frac{\sin \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad y = \int_1^t \frac{\cos \varphi}{\varphi} d\varphi, \quad 1 \leq t \leq t_0.$$

$$10.24. \quad x = 2a \cos t, \quad y = 2a \sin t, \quad z = at, \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

$$10.25. \quad x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \quad y = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2, \quad z = \frac{1}{3}t^3 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

$$10.26. \quad x = e^t (\cos t + \sin t), \quad y = e^t (\cos t - \sin t), \quad z = ht, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$10.27. \quad x = a(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}), \quad y = a \sin t, \quad 0 < t_0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

Қуйида берилган чизикларнинг кўрсатилган кесмалардаги ёй

узунликларини топинг.

$$10.28. \quad r = \cos^3 \frac{\varphi}{3}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$10.29. \quad r = \varphi^2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

10.30. $r = a\varphi$ Архимед спиралининг радиуси $2a\pi$ бўлган доиранинг ичидаги қисми.

$$10.31. \quad r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0, \quad 0 < r < a).$$

$$10.32. \quad r = \frac{p}{1 + \cos \varphi}, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$10.33. \quad r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$10.34. \quad r = a(1 - \cos \varphi) \quad \text{кардиоида.}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$10.35. r = a\varphi^3, 0 \leq \varphi \leq 4.$$

$$10.36. r = a\varphi^4, 0 \leq \varphi \leq 3.$$

$$10.37. r = a(1 - \sin \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}.$$

$$10.38. r = a(1 + \cos \varphi) \text{ кардоиданинг узунлиги.}$$

$$10.39. \varphi = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), 1 \leq r \leq 3.$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$10.1. \frac{27}{20} + \ln 2. \quad 10.2. \ln(2 + \sqrt{3}) \quad 10.3. \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$10.4. x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \ln \frac{1 + \sqrt{1 + e^{2x_0}}}{1 + \sqrt{2}}. \quad 10.5. \frac{e^2 + 1}{4}.$$

$$10.6. 4a \left(1 + \sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right). \quad 10.7. 10,8. \quad 10.8. 14/3. \quad 10.9. 3 + \ln 2.$$

$$10.10. \sqrt{h^2 - a^2}. \quad 10.11. \frac{1}{2} \ln 3. \quad 10.12. \frac{112}{27}. \quad 10.13. \sqrt{6} \ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$10.14. \frac{670}{27}. \quad 10.15. \ln(e + \sqrt{e^2 - 1}). \quad 10.16. 8a. \quad 10.17. 2\pi a^2. \quad 10.18. 6a.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$10.19. 2(e-1). \quad 10.20. 2a\left(5 + \frac{5}{2\sqrt{3}} \ln(2 + \sqrt{3})\right).$$

$$10.21. 2\left(ch\frac{T}{2}\sqrt{chT} - 1\right) - \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}ch\frac{T}{2} + \sqrt{chT}}{1 + \sqrt{2}}.$$

$$10.22. 0,5\sqrt{5} + 0,25\ln(2 + \sqrt{5}). \quad 10.23. \ln t_0. \quad 10.24. 2a\sqrt{5}\pi.$$

$$10.25. \frac{1}{21}(27\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$$

$$10.26. \sqrt{h^2 + 4e^{4\pi}} - \sqrt{h^2 + 4} + h \ln \left(\frac{\sqrt{4e^{4\pi} + 1} \cdot 2 - h}{\sqrt{h^2 + 4} - h} \right) - 2\pi.$$

$$10.27. -a \ln \sin t_0. \quad 10.28. \frac{9}{8}(2\pi + 3\sqrt{3}). \quad 10.29. \frac{1}{3}[\sqrt{(\pi^2 + 4)^3} - 8].$$

$$10.30. a\left(\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})\right). \quad 10.31. \frac{\sqrt{1+m^2}}{m}a.$$

$$10.32. p[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]. \quad 10.33. a(2\pi - th\pi). \quad 10.34. 8a. \quad 10.35. \frac{a}{2}\left(205 - \frac{81}{4}\ln 3\right).$$

$$10.36. \frac{1423a}{15}. \quad 10.37. 2a. \quad 10.38. 16a. \quad 10.39. 2 + \frac{1}{2}\ln 3.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

11-§. Аниқ интеграл ёрдамида айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш

11.1. Декарт координаталар системасида берилган айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш.

Фараз қилайлик, бизга бирор T жисм берилган бўлиб, унинг Oy ўққа параллел бўлган кесимларининг юзаси маълум бўлсин. Бу юза, x ўзгарувчининг функцияси бўлади, уни $S = S(x)$ орқали белгилаймиз (11.1-чизма).

Агар $S = S(x)$ функция $[a; b]$ кесмада узлуксиз бўлса, T жисмнинг V ҳажми, ушбу

$$V = \int_a^b S(x) dx \quad (11.1)$$

формула бўйича ҳисобланади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

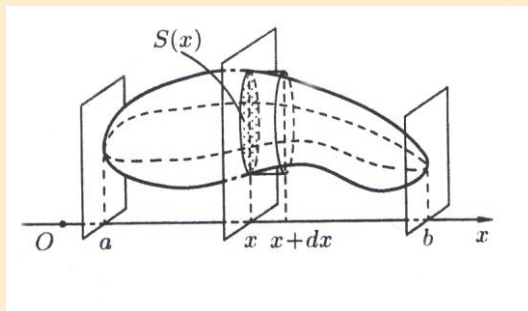


О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



11.1-чизма.

11.1-мисол. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоид сирт билан чегараланган

жисмнинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Дастлаб берилган тенглама бўйича эллипсоидни ясаймиз.

Эллипсоидни Oxz текисликка параллел бўлган, $y \in [-b; b]$ кесмада ўзгарувчи,

$y = p$ текисликлар билан кесамиз. Кесимда эллипс ҳосил бўлади:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{p^2}{b^2}, 1 - \frac{p^2}{b^2} > 0, \quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1$$

Бунда эллипснинг ярим ўқлари,

$a_1 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - p^2}$, $c_1 = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - p^2}$. Бу кесимларнинг юзлари, p га боғлиқ бўлган,

эллипс билан чегараланган юзага тенг бўлади:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$S(p) = \pi a_1 b_1 = \frac{\pi ac}{b^2} (b^2 - p^2).$$

$S(p)$ кесимларнинг юзасини (11.1) формулага келтириб қуйиб, V жисмнинг ҳажмини топамиз:

$$V = \int_{-b}^b \frac{\pi ac}{b^2} (b^2 - p^2) dp = 2 \frac{\pi ac}{b^2} \int_0^b (b^2 - p^2) dp = 2 \frac{\pi ac}{b^2} \left(b^2 p - \frac{p^3}{3} \right) \Big|_0^b = \frac{4}{3} \pi acb.$$

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a, b]$ учун $f(x) \geq 0$ бўлсин. Юқоридан $y = f(x)$ функция графиги, ён томонлардан $x = a$, $x = b$ вертикал тўғри чизиқлар, пастдан Ox ўқдаги $[a, b]$ кесма билан чегараланган шаклни Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма T жисмнинг ҳажми (11.2-чизма),

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (11.2)$$

формула бўйича топилади.

Агар D эгри чизиқли трапеция, юқоридан $f(x)$, пастдан $g(x)$ узлуксиз эгри чизиқлар билан, ён томонлардан эса, $x = a$ ва $x = b$ тўғри чизиқлар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

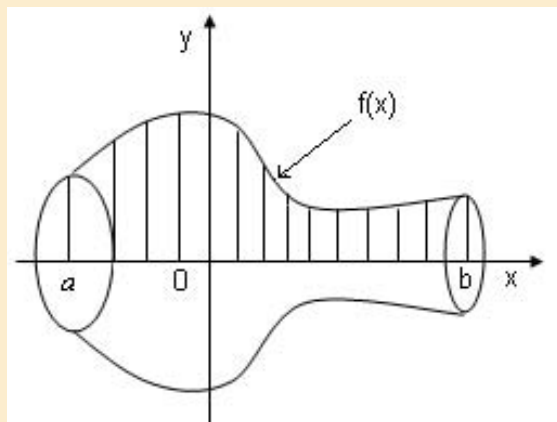
Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

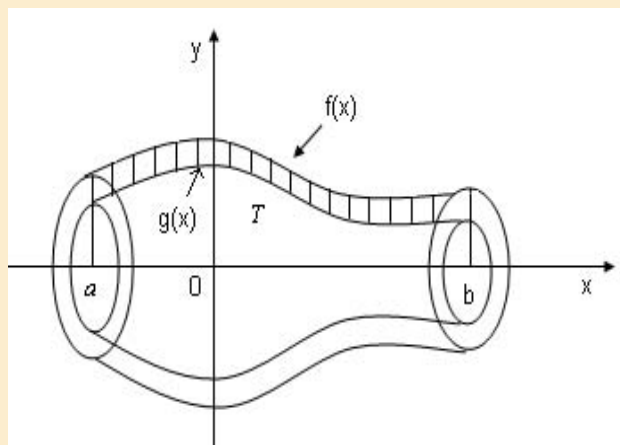
билан чегараланган бўлса, унинг Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган айланма T жисмнинг ҳажми (11.3-чизма),

$$V_x = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)] dx \quad (11.3)$$

формула бўйича топилади.



11.2- чизма.



11.3- чизма.

$y = y(x)$ функция, $[\alpha, \beta]$ кесмада $x = x(t)$, $y = y(t)$ параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин. Бу функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ кесмада $y(t) \geq 0$ ва $x(t)$ функция, узлуксиз, манфий бўлмаган $x'(t)$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳосилага эга, ҳамда $a = x(\alpha)$, $b = y(\beta)$ бўлса, u ҳолда, T айланма жисмнинг ҳажми,

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) \cdot x'(t) dt \quad (11.4)$$

формула бўйича топилади.

Агар $x(t)$ функция $[\alpha, \beta]$ кесмада камаювчи ва $a = x(\alpha)$, $b = y(\beta)$ бўлса, u ҳолда, юқоридаги шартлар бажарилганда, T айланма жисмнинг ҳажми,

$$V = -\pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(t) \cdot x'(t) dt$$

формула бўйича топилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

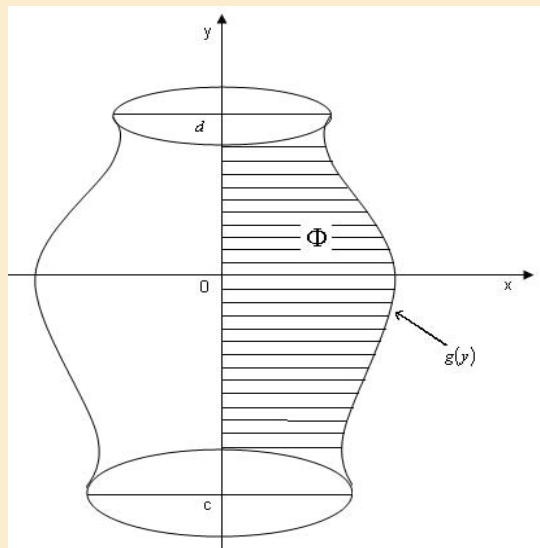


О р к а г а

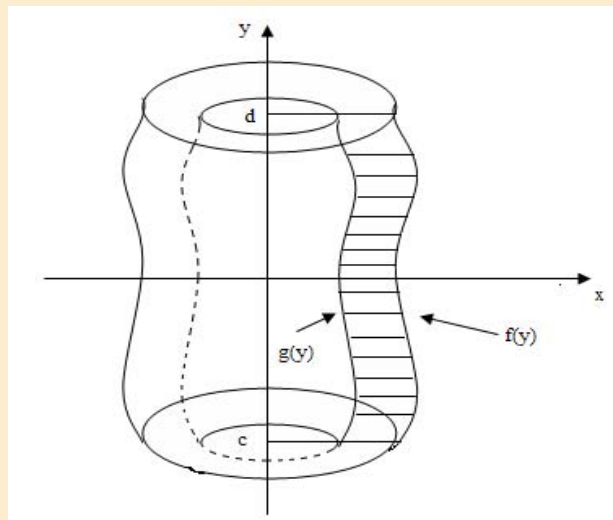
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



11.4- чизма.



11.5- чизма.

Оу $(x=0)$ ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган Φ айланма жисмнинг ҳажми (11.4-, 11.5- чизма), юқоридаги (11.2), (11.3), (11.4) формулаларга ўхшаш қуйидаги

$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y) dy,$$

$$V_y = \pi \int_c^d [f^2(y) - g^2(y)] dy,$$

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Илова лар



Орқа га

Саҳифа / 708

Тулик экран

Чи ки ш

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} x^2(t) \cdot y'(t) dt$$

формулалар бўйича топилади.

11.2-мисол. Қуйидаги, $y^2 = 2px$, $y = 0$, $x = a$ чизиклар билан чегараланган шаклни, Ox ($y = 0$) ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. D соҳа, юқоридан $y^2 = 2px$ узлуксиз функция билан, ён томонлардан, $x = a$ ва $x = 0$ тўғри чизиклар, пастдан эса, Ox ($y = 0$) ўқ билан чегараланган. Энди, D эгри чизикли соҳани Ox ($y = 0$) ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини, (11.2) формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$V_x = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a 2px dx = 2p\pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = \pi pa^2.$$

11.3-мисол. Қуйидаги, $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $(1 \leq t \leq 2\pi)$, $y = 0$ чизиклар билан чегараланган шаклни Ox ($y = 0$) ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Айланма жисмнинг ҳажмини (11.4) формула бўйича

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ТОПАМИЗ:

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 \frac{t}{2} \right)^3 dt = 5\pi a^3.$$

11.2. Қутб координаталар системасида берилган айланма жисмнинг

ҳажмини ҳисоблаш. Агар $\overset{\cup}{AB}$ эгри чизикнинг тенгламаси қутб координаталар системасида $r = r(\varphi)$, $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq 2\pi$, кўринишда берилган бўлиб, $[\alpha, \beta]$ кесмада $r(\varphi)$ - узлуксиз бўлса, у ҳолда, қутб нури атрофида $T = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$ айланма секторнинг ҳажми,

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi \quad (11.5)$$

формула бўйича топилади.

Агар $\overset{\cup}{AB}$ эгри чизик тенгламаси қутб координаталар системасида $r = r(\varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, кўринишда берилган бўлиб, $[\alpha, \beta]$ кесмада $r(\varphi)$ узлуксиз бўлса, у ҳолда, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ қутб нури атрофида $T = \{(r, \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq r \leq r(\varphi)\}$ айланма секторнинг ҳажми,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi$$

формула бўйича топилади.

11.4-мисол. Ушбу $r = a(1 + \cos \varphi)$ кардиоданинг кутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. $r = a(1 + \cos \varphi)$ кардиоданинг кутб ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмнинг ҳажмини, (11.5) формулага кўра, топамиз:

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} a^3 (1 - \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{\pi}{6} a^3 (1 - \cos \varphi)^4 = \frac{8\pi}{3} a^3. \end{aligned}$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигураларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмларнинг ҳажмларини топинг.

11.1. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$: а) Ох ўқ атрофида. б) Оу ўқ атрофида.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

11.2. $y = 2x - x^2$, $y = 0$: а) Ox ўқ атрофида. б) Oy ўқ атрофида.

11.3. $y = \sin 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y = 0$: Ox ўқ атрофида.

11.4. $y = b \sqrt[3]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, $0 \leq x \leq a$ Ox ўқ атрофида.

11.5. $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ Ox ўқ атрофида.

11.6. $y = \sqrt{x}e^{-x}$, $y = 0$, $x = a$ Ox ўқ атрофида.

11.7. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ Ox ўқ ва $x = \pm a$ тўғри чизик атрофида.

11.8. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$: а) Ox ўқ атрофида. б) Oy ўқ атрофида.

11.9. $y^2 = 4x$, $y = x$ Ox ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигураларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмларнинг ҳажмларини топинг.

11.10. $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ ($0 < a \leq b$), Ox ўқ атрофида.

11.11. $xy = k^2$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, $0 < a < b$, Oy ўқ атрофида.

11.12. $2py = a^2 - (x - b)^2$, $y = 0$, $0 < a < b$, Oy ўқ атрофида.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

11.13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a < x < m, Ox$ ўқ атрофида.

11.14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b, Ox$ ўқ атрофида.

11.15. $y^2 = 2px, y = 0, x = a, Ox$ ўқ атрофида.

11.16. $y^2(x - 4a) = ax(x - 3a), 0 \leq x \leq 3a, Ox$ ўқ атрофида.

11.17. $y^2 = (x + 4)^3, x = 0, Oy$ ўқ атрофида.

11.18. $2py = (x - a)^2, 2py = a^2 : a) Ox$ ўқ атрофида. $b) Oy$ ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигураларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмларнинг ҳажмларини топинг.

11.19. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi): a) Oy$ ўқ атрофида; $b) y = 2a$ тўғри чизик атрофида.

11.20 $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi): a) Ox$ ўқ атрофида; $b) Oy$ ўқ атрофида.

11.21. $x = 2t - t^2, y = 4t - t^3 : a) Ox$ ўқ атрофида; $b) Oy$ ўқ атрофида.

Қуйидаги чизиклар билан чегараланган фигураларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма жисмларнинг ҳажмларини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

11.22. $r = a \sin^2 \varphi$, қутб ўқи атрофида.

11.23. $r = a \sin \varphi$, қутб ўқи атрофида.

11.24. $r = a \varphi$ ($a > 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$) (Архимед спирали), қутб ўқи атрофида.

11.26. $a \leq r \leq a\sqrt{2 \sin 2\varphi}$, қутб ўқи атрофида.

11.27. $0 \leq r \leq a\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, қутб ўқи атрофида.

11.28. $0 \leq r \leq a \cos^2 \varphi$, қутб ўқи атрофида.

11.29. $0 \leq r \leq a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{6}$, қутб ўқи атрофида.

11.30. $0 \leq r \leq 2a \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$, қутб ўқи атрофида.

11.31. $a \leq r \leq a\sqrt{\sin \varphi}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ нур атрофида.

11.32. $a \leq r \leq a\sqrt[3]{\cos 3\varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ нур атрофида.

11.33. $0 \leq r \leq a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{3}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$ нур атрофида.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажмини топинг:

11.34. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $|z| = H$, $H > 0$. 11.35. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = \frac{c}{a}x$, $z = 0$, $z = 0$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$11.36. \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c.$$

$$11.37. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = c + H.$$

$$11.38. x + y + z^2 = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0. \quad 11.39. \frac{y^2}{a^2} + \frac{x+z}{a} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

$$11.40. x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2. \quad 11.41. x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2.$$

$$11.42. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0, \quad \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \quad (z \geq 0).$$

Қуйидаги эгри чизиклар билан чегараланган фигурани Ох ўқ атрофида айлантеришидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

$$11.43. x^4 + y^4 = a^2 x^2.$$

$$11.44. x^4 + y^4 = 2axy^2$$

$$11.45. (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^4.$$

$$11.46. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

Қуйидаги эгри чизиклар билан чегараланган фигурани Оу ўқ атрофида айлантеришидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини топинг.

$$11.47. x^4 + y^4 = ay^3.$$

$$11.48. x^4 + y^4 = 2axy^2.$$

$$11.49. (x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^2 - y^2)^2.$$

$$11.50. (x^2 + y^2)^3 = a^2 (x^2 - y^2)^2.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

11.1. a) $0,5\pi^2$. b) $2\pi^2$. 11.2. a) $\frac{16}{15}\pi$. b) $\frac{8}{3}\pi$. 11.3. $0,25\pi^2$. 11.4. $\frac{3}{7}\pi ab^2$.

11.5. 12π . 11.7. $0,25\pi[1 - e^{-2a}(1 + 2a)]$. 11.8. $0,25\pi a^3(e^2 + 4 - e^{-2})$.

11.9. a) $0,25\pi(\pi^2 - 8)$. b) $0,25\pi^2$. 11.10. $\frac{128}{15}\pi$. 11.11. $2\pi^2 a^2 b$.

11.12. $2\pi k^2(b - a)$. 11.13. $\frac{4}{3p}\pi a^3 b$. 11.14. $\frac{1}{3a^2}\pi b^2(m - a)^2(m + 2a)$.

11.15. $\frac{4}{3}\pi ab^2$. 11.16. $\pi p a^2$. 11.17. $0,5\pi a^3(15 - 16\ln 2)$. 11.18. $58,5\pi$.

11.19. a) $\frac{32}{15}\pi p^3$. b) $\frac{4}{3}\pi p^3$. 11.20. a) $6\pi^3 a^3$. b) $7\pi^2 a^3$.

11.21. a) $\frac{32}{105}\pi ab^2$. b) $\frac{32}{105}\pi a^2 b$. 11.22. a) $\frac{64}{35}\pi$. b) $\frac{64}{105}\pi$. 11.23. $\frac{64}{105}\pi a^3$.

11.24. $\frac{\pi^2 a^3}{4}$. 11.25. $\frac{2}{3}(\pi^4 - 6\pi^2)a^3$. 11.26. $\frac{2}{3}\pi$. 11.27. $2(\pi^4 - 6\pi^2)a^3/3$.

11.28. $4\pi a^3/21$. 11.29. $\pi a^3/24$. 11.30. $\pi a^3(51 - 64\ln 2)/4$. 11.31. $\frac{4\pi a^3}{15}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$11.32. \frac{\sqrt{3}\pi a^3}{4}.$$

$$11.33. \pi a^3(3\pi - 8)/3.$$

$$11.34. 2\pi abH.$$

$$11.35. \frac{2}{3}abc.$$

$$11.36. \frac{8\pi abc}{3}.$$

$$11.37. \frac{\pi ab}{3c^2}H^2(H + 3c).$$

$$11.38. \frac{4}{15}.$$

$$11.39. \frac{4a^3}{15}.$$

$$11.40. \frac{4\sqrt{2}\pi a^3}{3}.$$

$$11.41. \frac{16a^3}{3}.$$

$$11.42. \frac{4abc}{3}.$$

$$11.43. \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$$11.44. \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$$11.45. \frac{4\pi a^3}{21}.$$

$$11.46. \frac{\pi a^3}{2\sqrt{2}} \left(\ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{3} \right).$$

$$11.47. \frac{\pi^2 a^3}{16}.$$

$$11.48. \frac{4\pi a^3}{3}.$$

$$11.49. \frac{8\pi a^3}{15}.$$

$$11.50. 4\pi a^3(16\sqrt{2} - 9)/105.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

12-§. Аниқ интеграл ёрдамида айланма жисм сиртининг юзини ҳисоблаш

12.1. Декарт координаталар системасида берилган айланма сирт юзини ҳисоблаш.

$y = f(x)$ функция $[a; b]$ кесмада аниқланган узлуксиз ва узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in [a; b]$ учун, $f(x) \geq 0$ бўлсин. Бу функция графигининг $A(a; f(a))$ ва $B(b; f(b))$ нукталар орасидаги $\overset{\cup}{AB}$ ёйини Ox ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзи,

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \quad (12.1)$$

формула орқали ҳисобланади.

Агар $\overset{\cup}{AB}$ эгри чизик, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, тенглама билан берилган бўлиб, $\psi(t) \geq 0$, $\varphi(t)$ функция, t α дан β гача ўзгарганда, a дан b гача ўзгариб, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ бўлса, у ҳолда, (12.1) формулада, $x = \varphi(t)$ алмаштириш

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

натижасида,

$$Q_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt \quad (12.2)$$

формулани ҳосил қиламиз, яъни $\overset{\cup}{AB}$ эгри чизиқнинг тенгламаси параметрик шаклда берилганда, унинг Ox ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзини топиш формуласини ҳосил қиламиз.

12.1 – мисол. Ушбу $y^2 = 2px$ ($0 \leq x \leq x_0$) чизиқнинг: а) Ox ўқ ; б) Oy ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзини топинг.

Ечилиши. а) Берилган чизиқнинг Ox ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзи, (12.1) формулага асосан топилади,

$$\text{бунда, } f(x) = \sqrt{2px}, \quad f'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}.$$

Шундай қилиб, берилган чизиқнинг Ox ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзи:

$$\begin{aligned} Q_x &= 2\pi \int_0^{x_0} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 2\pi \sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{p + 2x} dx = \\ &= \frac{2\pi \sqrt{p}}{3} [\sqrt{(p + 2x_0)^3} - \sqrt{p^3}] = \frac{2\pi}{3} [(p + 2x_0) \sqrt{p^2 + 2px_0} - p^2]. \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

б) Берилган чизикнинг Ox ўққа нисбатан симметриклигини эътиборга олиб, изланаётган сиртнинг юзини,

$$Q_y = 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} x(y) \sqrt{1 + [x'(y)]^2} dy$$

формула орқали топамиз:

$$\begin{aligned} Q_y &= \frac{2\pi}{p} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy = \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{p^2 + y^2} dy = \\ &= [u = y, dv = y\sqrt{p^2 + y^2} dy; du = dy; v = \frac{1}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}] = \\ &= \frac{2\pi}{p^2} \left\{ \frac{y(p^2 + y^2)^{3/2}}{4} - \frac{p^2}{8} [y\sqrt{p^2 + y^2} + p^2 \ln(y + \sqrt{p^2 + y^2})] \right\} \Big|_0^{\sqrt{2px_0}} = \\ &= \frac{\pi}{4} [(p + 4x_0)\sqrt{2x_0(p + 2x_0)} - p^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p + 2x_0}}{\sqrt{p}}] \end{aligned}$$

12.2– мисол. Ушбу $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), чизикнинг Ox ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзини топинг.

Ечилиши. Изланаётган сиртнинг юзи, (12.2) формула орқали ҳисобланади:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x_t' = a(1 - \cos t), \quad y_t' = a \sin t, \quad ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2} dt = \\ = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t} \cdot dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt,$$

$$Q = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2} dt = \\ = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 v dv = \frac{64}{3} \pi a^2$$

12.2. Қутб координаталар системасида берилган айланма сиртнинг юзини ҳисоблаш.

Агар $\overset{\cup}{AB}$ эгри чизиқнинг тенгламаси, қутб координаталар системасида, $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, кўринишда берилган бўлиб, $r(\varphi)$ - $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз, узлуксиз ҳосилага эга бўлса, у ҳолда, (12.2) формула,

$$Q = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi \quad (12.3)$$

кўринишда бўлади.

12.3 – мисол. Ушбу $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ чизиқнинг: а) қутб ўқи; б) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ўқ

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган сиртларнинг юзларини топинг.

Ечилиши. а) Маълумки, $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ - Бернулли лемнискатаси бўлиб, координаталар ўқларига нисбатан симметрик жойлашган, координаталар боши - қутб билан, мусбат ярим ўқ - қутб ўқи билан мос тушади. Шунинг учун, изланаётган сиртнинг юзи, (12.3) формулага асосан топилади:

$$Q = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r(\varphi) \sin \varphi \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi, \quad r \sin \varphi = a\sqrt{\cos 2\varphi} \cdot \sin \varphi,$$

$$r'_\varphi = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad \sqrt{r^2 + (r'_\varphi)^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad Q_p = 4\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$$

б) Худди, юқоридаги а) банддагидек,

$$Q_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \varphi d\varphi = 2\sqrt{2}\pi a^2.$$

б) Бу ҳолда, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ нурни, r_1, θ системадаги қутб ўқи, деб қабул қила-

миз, у ҳолда, $r_1(\theta) = r(\varphi)$, $\theta = \varphi - \frac{\pi}{4}$. Шундай қилиб, изланаётган сиртнинг юзи:

$Q = Q_1 + Q_2$ бўлиб, Q_1 ва Q_2 , мос равишда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$Q_1 = 4\pi \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{4}} r_1(\theta) |\sin \theta| \cdot \sqrt{r_1^2(\theta) + (r_1'(\theta))^2} d\theta, \quad (*)$$

$$Q_2 = 4\pi \int_{\theta=-\frac{\pi}{4}}^{\theta=0} r_1(\theta) |\sin \theta| \cdot \sqrt{r_1^2(\theta) + (r_1'(\theta))^2} d\theta$$

формулалар орқали топилади (r_1, θ системасида, θ , $-\frac{\pi}{2}$ дан 0 гача ўзгарганда, $\sin \theta$ функция манфий қийматлар қабул қилади). (*) формулаларда r_1, θ дан, r ва φ ларга ўтсак, у ҳолда,

$$Q_1 = 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sqrt{\cos 2\varphi} \left| \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right| \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 4\pi a^2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \left| \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi = -4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi a^2 \sqrt{2},$$

$$Q_2 = 4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\varphi = -4\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) d\varphi =$$

$$= 4\pi a^2 \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги чизикларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришда ҳосил бўлган айланма сиртларининг юзларини ҳисобланг.

12.1. $y = \frac{x^2}{2}$ параболанинг $y = 1,5$ тўғри чизик билан кесилган қисмини,

$x = 2$ ўқ атрофида.

12.2. $y^2 = 4 + x$ параболанинг $x = 2$ тўғри чизик билан кесилган қисмини Ox ўқ атрофида.

12.3. $y = \cos \frac{\pi x}{2a}$ чизикнинг, $x_1 = -a$ дан $x_2 = a$ гача бўлган қисмининг Ox ўқ атрофида.

12.4. $3x^2 + 4y^2 = 12$ эллипснинг Oy ўқ атрофида.

12.5. $y = \operatorname{tg} x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$, Ox ўқ атрофида.

12.6. $y = e^{-x} (0 \leq x \leq a)$, Ox ўқ атрофида.

12.7. $2ay = a^2 + x^2 (0 \leq x \leq a)$, Ox ўқ атрофида.

12.8. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y (1 \leq y \leq e)$, Oy ўқ атрофида.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

12.9. $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) \left(\frac{5}{4} \leq y \leq \frac{5}{3}\right)$, Оу ўқ атрофида.

12.10. $y^2 + 4x = 2 \ln y \ (1 \leq y \leq 2)$, Оу ўқ атрофида.

12.11. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \ (|x| \leq b)$, Оу ўқ атрофида..

12.12. $y = \frac{1}{x} \ (1 \leq x \leq a)$, Ох ўқ атрофида.

Қуйидаги чизикларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришда ҳосил бўлган сиртларнинг юзларини ҳисобланг.

12.13. $x = a(3 \cos t - \cos 3t), y = a(3 \sin t - \sin 3t), \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \ a)$ Ох ўқ атрофида;

b) Оу ўқ атрофида.

12.14. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \ Ox$ ўқ атрофида .

12.215. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \ (0 \leq t \leq 2\pi), \ a)$ Ох ўқ атрофида; $b)$ Оу ўқ атрофида; $c)$ $y = 2a$ тўғри чизик атрофида.

12.16. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, y = x$ тўғри чизик атрофида.

12.17. $x = \frac{t^3}{3}, y = 4 - \frac{t^2}{2}, |t| \leq 2\sqrt{2}, \ Ox$ ўқ атрофида.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

12.18. $x = 2\sqrt{3} \cos t$, $y = \sin 2t$ Ох ўқ атрофида.

12.19. $x = a(1+t^2)$, $y = \frac{at}{3}(3-t^2)$ Ох ўқ атрофида.

12.20. $x = \frac{a}{t^2+1}$, $y = \frac{a(t^3-t)}{t^2+1}$ Ох ўқ атрофида.

12.21. $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $(0 \leq t \leq \pi)$ Ох ўқ атрофида.

Қуйидаги чизикларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришда ҳосил бўлган сиртларнинг юзларини ҳисобланг.

12.22. $r = 2a \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, кутб ўқи атрофида.

12.23. $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, кутб ўқи атрофида.

12.24. $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$, кутб ўқи атрофида.

12.25. $r = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, кутб ўқи атрофида.

12.26. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$, а) кутб ўқи атрофида; б) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ нур атрофида;

с) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ нур атрофида.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

12.27. $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемниската), $y = x$ тўғри чизик атрофида.

Қуйидаги цилиндрик чизикларни кўрсатилган ўқ атрофида айлантиришда ҳосил бўлган сиртларнинг юзларини ҳисобланг.

12.28 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$, Ox ўқ атрофида.

12.29 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$, Oy ўқ атрофида.

12.30. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, -h < y < h$, Oy ўқ атрофида.

12.31. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a < x < m = \lambda a$, Ox ўқ атрофида.

12.32. $y^2 = 2px, 0 < x < a$, Ox ўқ атрофида.

12.33. $y^3 = px^2, 0 < y < a$, Ox ўқ атрофида.

Қуйидаги цилиндрик сиртларнинг белгиланган қисмидаги сиртлари юзларини ҳисобланг.

12.34. $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq \frac{h}{a}x, x \geq 0$.

12.35 $y = b - \frac{b}{a^2}x^2, 0 \leq z \leq \frac{h}{a}x, x \geq 0, y \geq 0$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$12.36. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, 0 \leq z \leq \frac{h}{a}x, x \geq 0, y \geq 0, a > b.$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$12.1. \frac{14\pi}{3}. \quad 12.2. \frac{62\pi}{3}. \quad 12.3. 2\sqrt{\pi^2 + 4a^2} + \frac{8a^2}{\pi} \ln \frac{\pi + \sqrt{\pi^2 + 4a^2}}{2a}.$$

$$12.4. 2\pi(4 + 3\ln 2). \quad 12.5. \pi[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2}].$$

$$12.6. \pi \left(\sqrt{2} - e^{-a} \sqrt{1 + e^{2a}} - \ln \frac{e^{-a} + \sqrt{1 + e^{2a}}}{1 + \sqrt{2}} \right). \quad 12.7. \frac{\pi a^2}{8} \cdot (3 \ln(\sqrt{2} + 1) + 7\sqrt{2}).$$

$$12.8. \frac{\pi}{3}(e - 1)(e^2 + e + 4). \quad 12.9. \pi(-5 - 9\ln 2 + 16\ln 3)/6. \quad 12.10. \frac{10}{3}\pi.$$

$$12.11. 98\pi/3. \quad 12.12. \pi \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{a^4 + 1}}{a^2} + \ln \frac{\sqrt{a^4 + 1} + a^2}{\sqrt{2} + 1} \right).$$

$$12.13. a) 9\pi^2 a^2. b) 24\pi a^2. \quad 12.14. \frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi - 2).$$

$$12.15. a) \frac{64}{3}\pi a^2. b) 16\pi^2 a^2. c) \frac{32}{3}\pi a^2. \quad 12.16. \frac{3\pi}{5}a^2(4\sqrt{2} - 1)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{array}{lll}
 \text{12.17. } 59,2\pi. & \text{12.18. } \frac{15\pi}{8}(4 + \ln 5). & \text{12.19. } 7)3\pi a^2. \\
 \text{12.20. } \pi a^3(6\ln 2 - 4)/3. & \text{12.21. } 6\pi^2 a^2. & \text{12.22. } 4\pi^2 a^2. \\
 \text{12.23. } 2\pi(2 - \sqrt{2}). & \text{12.24. } 4\pi a^2. & \text{12.25. } \frac{8}{3}\pi a^2(2\sqrt{2} - 1) \\
 \text{12.26. } a) 4\pi a^2(2 - \sqrt{2}). b) 4\sqrt{2}\pi a^2. c) 8\pi a^2. & \text{12.27. } 4\pi a^2. & \\
 \text{12.28. } 2\pi [b^2 + ab \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}], \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. & \text{12.29. } 2\pi [a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon} \ln \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}], \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. & \\
 \text{12.30. } 2\pi ah[\sqrt{1+u^2} + \frac{\ln(u + \sqrt{1+u^2})}{u}], u = \frac{h\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}. & \text{12.31. } \pi ab[\lambda\sqrt{\lambda^2 u^2 - 1} - \frac{b}{a} - & \\
 - \frac{1}{e} \ln \frac{e + \sqrt{\lambda^2 e^2 - 1}}{e + \sqrt{e^2 - 1}}], e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b^2}. & \text{12.32. } \frac{2}{3}\pi [(2a + p)\sqrt{2ap + p^2} - p^2]. & \\
 \text{12.33. } \frac{\pi}{15} \left(\frac{8}{9}p\right)^2 \left[\sqrt{\left(1 + \frac{9a}{4p}\right)^3 \left(\frac{27a}{4p} - 2\right)} + 2 \right]. & \text{12.34. } 2ah. & \\
 \text{12.35. } \frac{h}{2b^2} [\sqrt{(a^2 + 4b^2)^3} - a^3]. & \text{12.36. } \frac{ah}{2} \left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right), \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. &
 \end{array}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

13-§. Аниқ интегралнинг механика масалаларига тадбири

13.1 Силлиқ эгри чизиқнинг статик моменти ва оғирлик маркази.

Бирор m - массага эга бўлган моддий нуқтанинг бирор p ўққа нисбатан статик моменти деб, унинг m массаси билан ундан p ўққача бўлган d масофанинг кўпайтмасига, яъни $M_p = md$ сонга айтилади. Текисликда ётган массалари мос равишда $m_1, m_2, \dots, m_n$, p ўққа нисбатан масофалари $d_1, d_2, \dots, d_n$ бўлган n та моддий нуқталар системасининг статик моменти,

$$M_p = \sum_{i=1}^n m_i d_i$$

бўлади, бунда ўқнинг бир томонида ётган нуқталарнинг масофалари мусбат ишора билан, иккинчи томонида ётганларининг масофалари эса, манфий ишора билан олинади.

Агар масса, айрим олинган нуқталарда тарқалмасдан, бирор силлиқ чизиқ ёки текис фигура бўйлаб текис тарқалган бўлса, у ҳолда, статик моментдаги йиғинди ўрнига интеграл олинади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

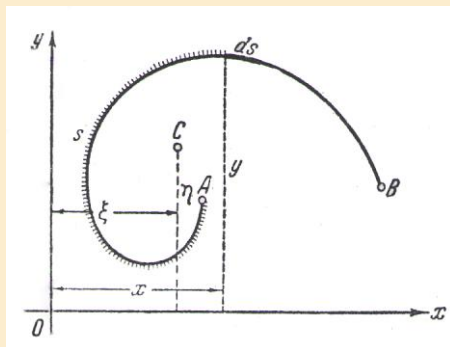


О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



13.1-чизма.

(13.1- чизма). У ҳолда, (AB) силлиқ эгри чизиқнинг массаси қуйидаги формула бўйича топилади:

$$m = \int_0^l \rho(s) ds,$$

бунда $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ - ёй дифференциали, l эса, берилган чизиқнинг узунлиги.

Эслатма. Агар (AB) силлиқ эгри чизиқни *биржинсли* деб фараз қилсак, у ҳолда, унинг ρ чизиқли зичлиги (бир бирлик узунликдаги масса, унинг узунлиги билан ўлчанади), ўзгармас, деб қараймиз. Соддалик учун, $\rho=1$ деб оламиз.

(AB) чизиқнинг элементар ds бўлагини ажратамиз. Юқоридаги

Фараз қилайлик, Оху текисликда m

массали бирор (AB) силлиқ эгри чизиқ берилган бўлиб, унинг узунлиги l бўлсин.

(AB) силлиқ эгри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидаги чизиқли зичлик $\rho = \rho(s)$ - s

ўзгарувчининг узлуксиз функцияси бўлсин

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

фаразимиз бўйича, ds элементар бўлакдаги масса, m сон орқали ифодаланади. Чизикнинг элементар ds ёйини, тақрибий моддий нукта, деб қабул қилсак, у ҳолда, унинг Ox ўққа нисбатан элементар статик моменти,

$$dM_x = yds$$

бўлади. Эркин ўзгарувчи сифатида, A нуктадан бошлаб ҳисобланадиган, ds ёйини олиб, элементар статик моментларни йиғсак, натижада

$$M_x = \int_0^l y(s)\rho(s)ds$$

бўлади. Худди шундай, Oy ўққа нисбатан статик момент,

$$M_y = \int_0^l x(s)\rho(s)ds$$

бўлади.

m массали, чизикли зичлиги $\rho = \rho(s)$ бўлган (AB) эгри чизикнинг

$M(x_M; y_M)$ оғирлик маркази координаталари эса, ушбу

$$x_M = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_0^l x(s)\rho(s)ds}{\int_0^l \rho(s)ds}, \quad y_M = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_0^l y(s)\rho(s)ds}{\int_0^l \rho(s)ds}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

m массали, чизиқли зичлиги $\rho = \rho(s)$ бўлган (AB) эгри чизиқнинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан инерция моментлари,

$$I_x = \int_0^l y^2(s) \rho(s) ds, \quad I_y = \int_0^l x^2(s) \rho(s) ds$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

Хусусий ҳолда, биржинсли ($\rho(s)=1$) бўлган (AB) эгри чизиқнинг m массаси, Ox ва Oy ўқларга нисбатан, M_x, M_y статик ва I_x, I_y инерция моментлари, ҳамда $M(x_M; y_M)$ оғирлик марказининг координаталари, мос равишда,

$$m = \int_0^l ds = l, \quad M_x = \int_0^l y(s) ds, \quad M_y = \int_0^l x(s) ds$$

$$I_x = \int_0^l y^2(s) ds, \quad I_y = \int_0^l x^2(s) ds \quad (13.1)$$

$$x_M = \frac{M_y}{l}, \quad y_M = \frac{M_x}{l}$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

Теорема (Гульдиннинг биринчи теоремаси). (AB) эгри чизиқни, уни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

кесиб ўтмайдиган, ўқ атрофида айлантриш натижасида ҳосил бўлган айланиш сиртининг юзи, унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигининг шу эгри чизикнинг l ёй узунлигига кўпайтмасига тенг:

$$2\pi y_M l = 2\pi \int_0^l y dl \quad (13.2)$$

13.1– мисол. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс юқори қисмининг Ox ўққа

нисбатан статик моментини топинг.

Ечилиши. Эллипс юқори қисмининг Ox ўққа нисбатан статик momenti

$$M_x = \int_{-a}^a y dl$$

формула бўйича топилади, бунда dl – элементар ёй узунлиги. Шартга кўра,

$y \geq 0$, y ҳолда,

$$y dl = y \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \sqrt{y^2 + (yy_x')^2} dx, \quad y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2, \quad yy_x' = -\frac{b^2}{a^2} x,$$

$$y dl = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{b^4}{a^4} x^2} dx = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx, \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

ε – эллипснинг эксцентриситети.

Шундай қилиб,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$M_x = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 x^2} dx = b \left(b - \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

13.2 – мисол. Ушбу $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), эгри чизикнинг оғирлик марказини топинг.

Ечилиш. Берилган биржинсли эгри чизик, $x = \pi a$ тўғри чизикқа нисбатан симметрик бўлгани учун, унинг оғирлик маркази шу тўғри чизикда ётади, яъни $x_M = \pi a$. 10.2 - ва 12.2 - мисолларни эътиборга олган ҳолда, Гульдиннинг биринчи теоремасига асосан, яъни (13.2) формуладан,

$$2\pi y_M \cdot 8a = \frac{64}{3} \cdot \pi a^2, \quad \eta = \frac{4}{3} a$$

эканлигини оламин. Демак, циклоиданинг оғирлик маркази, $M\left(\pi a; \frac{4}{3} a\right)$.

13.2. Текис фигуранинг статик моментлари ва оғирлик маркази.

Текис фигура, юқоридан $y_2 = f(x)$, пастдан $y_1 = g(x)$ функциялар, ён томонларидан эса, $x = a$ ва $x = b$ вертикал чизиклар билан чегараланган бўлсин. m массали текис фигуранинг ҳар бир нуктасида чизикли зичлиги

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



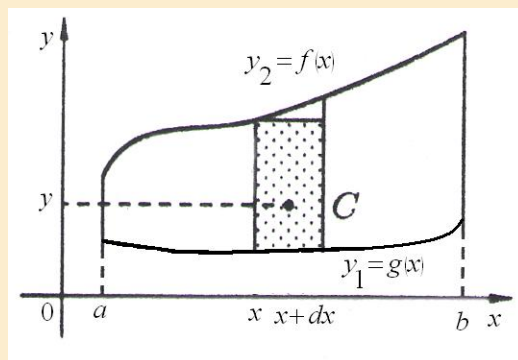
О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\rho = \rho(x)$ x ўзгарувчининг узлуксиз функцияси бўлсин (13.2-чизма).



13.2-чизма.

Текис фигуранинг m массаси, Ox ва Oy ўқларга нисбатан, M_x, M_y статик ва I_x, I_y инерция моментлари, ҳамда $M(x_M; y_M)$ оғирлик марказининг координаталари, мос равишда, қуйидаги,

$$m = \int_a^b (f(x) - g(x))\rho(x)dx,$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\rho(x)dx, \quad M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)]\rho(x)dx, \quad (13.3)$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_a^b [f^3(x) - g^3(x)]\rho(x)dx, \quad I_y = \int_a^b x^2[f(x) - g(x)]\rho(x)dx,$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x_M = \frac{M_y}{m}, \quad y_M = \frac{M_x}{m}$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади.

13.1-эслатма. Текис фигура бўйлаб масса текис тарқалган, яъни унинг сирт зичлиги ρ ўзгармас бўлсин. Умумийликни бузмасдан, $\rho = 1$ деб оламиз. У ҳолда, текис фигуранинг m массаси, Ox ва Oy ўқларга нисбатан M_x, M_y статик ва I_x, I_y инерция моментлари, ҳамда $M(x_M; y_M)$ оғирлик марказининг координаталари, мос равишда,

$$m = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = S,$$

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx, \quad M_y = \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx,$$

$$I_x = \frac{1}{3} \int_0^l [f^3(x) - g^3(x)] dx, \quad I_y = \int_a^b x^2 [f(x) - g(x)] dx,$$

$$x_M = \frac{M_y}{S}, \quad y_M = \frac{M_x}{S}$$

формулалар ёрдамида ҳисобланади, бу ерда $S = \int_a^b y(x) dx$ – текис фигуранинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ЮЗИ.

Оғирлик марказининг ординатаси формуласидан, $2\pi y_M \cdot S = \pi \int_a^b y^2 dx$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу формуланинг ўнг томони, $ABCD$ фигурани Ox ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ифодалайди, чап томони эса, оғирлик маркази ва u чизган айлана узунлигини, фигуранинг юзига кўпайтмасига тенг бўлар экан. Шундай қилиб, қуйидаги Гульдиннинг иккинчи теоремасига келамиз.

Теорема (Гульдиннинг иккинчи теоремаси). Текис фигурани, уни кесмайдиган ўқ атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми, унинг оғирлик маркази чизган айлана узунлигини текис фигуранинг юзига кўпайтмасига тенг, яъни $V = 2\pi \eta \cdot S$.

Қутб координаталар системасида сектор, $0 \leq r \leq r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, тенгсизликлар орқали берилган бўлсин, бунда $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, $r(\varphi)$ функция $[\alpha, \beta]$ кесмада узлуксиз. Масса секторда текис тарқалган бўлсин, яъни унинг ρ зичлиги ўзгармас бўлсин. Бу ерда ҳам, умумийликни бузмаслик учун, $\rho = 1$ деб оламиз. U ҳолда, Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлар ва оғирлик

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

марказининг координаталари, қуйидаги

$$M_x = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi, \quad M_y = \frac{1}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \cos \varphi d\varphi,$$

$$x_M = \frac{M_y}{S}, \quad y_M = \frac{M_x}{S},$$

формулалар орқали топилади, бунда S - секторнинг юзи, яъни

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

13.3 – мисол. Ушбу $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x=0$, $y=0$, $a>0$, $b>0$ чизиқлар билан

чегараланган текис фигуранинг Ox ва Oy ўқларга нисбатан статик моментлари ва оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Ечилиши. (13.3) формулаларга асосан,

$$M_x = \frac{1}{2} \int_b^a \frac{b^2}{a^2} (a-x)^2 dx = -\frac{b^2}{2a^2} \frac{(a-x)^3}{3} = \frac{ab^2}{6},$$

$$M_y = \int_0^a x \cdot \frac{b}{a} (a-x) dx = \frac{b}{a} \int_0^a (ax - x^2) dx = \frac{b}{a} \left(a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2 b}{6},$$

$$S = \int_0^a \frac{b}{a} (a-x) dx = \frac{b}{a} \int_0^a (a-x) dx = \frac{b}{a} \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a = \frac{b}{a} \cdot a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{ab}{2},$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x_M = \frac{M_y}{S} = \frac{\frac{a^2 b}{6}}{\frac{ab}{2}} = \frac{a}{3}; \quad y_M = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{ab^2}{6}}{\frac{ab}{2}} = \frac{b}{3}.$$

$$\text{Демак, } M(x_M; y_M) = M\left(\frac{a}{3}; \frac{b}{3}\right).$$

13.4 – мисол. Ушбу $x = a \sin t, y = b \cos t, |t| \leq \frac{\pi}{2}, y = 0$ чизиклар билан чегараланган соҳанинг Ох ва Оу ўқларга нисбатан статик моментлари ва оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Ечилиши. (13.3) формулаларга асосан,

$$M_x = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b^2 \cos^2 t \cdot a \cos t dt = \frac{ab^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = \frac{ab^2}{2} \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2ab^2}{3},$$

$$M_y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a \sin t \cdot b \cos t a \cdot \cos t dt = -a^2 b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d \cos t = -\frac{a^2 b}{3} \cos^3 t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b \cos t \cdot a \cos t dt = ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = ab \left(\frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{4} \right) = \frac{ab\pi}{2}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x_M = \frac{M_y}{S} = \frac{0}{S} = 0; \quad y_M = \frac{M_x}{S} = \frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{ab \cdot \pi}{2}} = \frac{4b}{3\pi}.$$

13.5– мисол. Гульдиннинг иккинчи теоремасидан фойдаланиб, $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, $a < b$, доиранинг Ox ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган торнинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Маълумки, берилган доиранинг юзи $S = \pi a^2$, доиранинг оғирлик маркази, унинг марказида бўлади. Демак, доиранинг Ox ўқ атрофида айланиши натижасида, унинг оғирлик маркази чизган айлананинг узунлиги, $2\pi b$ га тенг. У ҳолда, Гульдиннинг иккинчи теоремасига асосан, изланаётган ҳажм,

$$V = \pi a^2 \cdot 2\pi b = 2\pi^2 a^2 b.$$

13.6 – мисол. Ушбу $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) циклоида тармоғи билан чегараланган соҳа оғирлик марказининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Юқоридаги 9.5 - ва 11.3 – мисоллар, ҳамда Гульдиннинг иккинчи теоремасига асосан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2\pi y_M \cdot S = 5a^3\pi^2; \quad 2\pi y_M \cdot 3\pi a^2 = 5a^3\pi^2, \quad y_M = \frac{5}{6}a,$$

соҳанинг симметриклигидан, $x_M = \pi a$.

Шундай қилиб,

$$M_x = \frac{a^3\pi}{3}(\pi^2 - 6), \quad M_y = \frac{1}{3}\int_0^\pi a^3\varphi \cos d\varphi = a^3(4 - \pi^2),$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\pi a^2\varphi^2 dy = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{a^2\pi^3}{6}$$

бўлади ва

$$x_M = \frac{M_y}{S} = \frac{6a(4 - \pi^2)}{\pi^3} = 6(4 - \pi^2)a/\pi^3, \quad y_M = \frac{M_x}{S} = 2(\pi^2 - 6)a/\pi^2.$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйида берилган чизикларнинг M_x ва M_y статик моментларини топинг.

13.1. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, x \geq 0, y \geq 0.$

13.2. $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0.$

13.3. $y = chx, 0 \leq x \leq 1.$

13.4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0, a > b.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

13.5. Биринчи чоракда жойлашган $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{2}{3}}$ астроида ёйининг

координаталар ўқларига нисбатан статик моментларини топинг.

13.6. $y = \cos x$, $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, косинусоиданинг Ox ўққа нисбатан статик

моментини топинг.

13.7. $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, синусоиданинг Ox ўққа нисбатан статик

моментини топинг.

13.8. Ушбу $y^2 = 2px$ $\left(0 \leq x \leq \frac{p}{2}\right)$ парабола ёйининг $x = \frac{p}{2}$ тўғри чизиққа

нисбатан статик моментини топинг.

Тенгламалари параметрик шаклда берилган қуйидаги чизиқнинг M_x ва M_y статик моментларини топинг.

13.9. $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, $a > b$ ($\rho = 1$).

13.10. $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ($\rho = 1$).

Қутб координаталар системасида берилган чизиқнинг M_x ва M_y статик моментларини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$13.11. \quad r = 2a \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \quad (\rho = 1). \quad 13.12. \quad \eta = a(1 + \cos \varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi \quad (\rho = 1).$$

$$13.13. \quad r = ae^{\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (\rho = 1).$$

Қуйидаги берилган чизиклар оғирлик марказининг x_M ва y_M координаталарини топинг.

$$13.14. \quad x^2 + y^2 = 4, \quad y \geq 0.$$

$$13.15. \quad x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$13.16. \quad y = ach(x/a), \quad |x| \leq b.$$

$$13.17. \quad x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \quad 1 \leq y \leq 2.$$

$$13.18. \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$13.19. \quad r = a(1 + \cos \varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

$$13.20. \quad r = ae^{\varphi}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi.$$

13.21. Радиуси a га тенг бўлган ярим айлана оғирлик марказининг координаталарини Гульдин теоремаси ёрдамида топинг.

Қуйидаги берилган чизикларнинг, Ox ўққа нисбатан, I_x инерция моментини топинг.

$$13.22. \quad y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \leq x \leq r.$$

$$13.23. \quad y = e^x, \quad 0 \leq x \leq 0,5.$$

$$13.24. \quad y = 0,5a(e^{x/a} + e - e^{-x/a}), \quad 0 \leq x \leq a.$$

$$13.25. \quad x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Қуйидаги берилган чизикнинг, координаталар ўқларига нисбатан,

I_x ва I_y инерция моментларини топинг.

13.26. $y = chx, 0 \leq x \leq 1.$

13.27. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$

13.28. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi.$

Қуйида берилган чизиклар билан чегараланган текис шаклларнинг M_x

ва M_y статик моментларини топинг.

13.29. $x + y = 1, x = 0, y = 0.$

13.30. $y = \cos x, |x| \leq \frac{\pi}{2}, y = 0.$

13.31. $y = x^2, y = \sqrt{x}.$

13.32. $y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2, x = 0, x \geq 0.$

13.33. $x = a \cos t, y = b \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, y = 0.$

13.34. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi, y = 0.$

Қуйидаги мисолларда берилган эгри чизиклар билан чегараланган

соҳанинг графигини чизинг ва оғирлик марказини топинг.

13.35. $y = 6x - x^2, y = x.$

13.36. $x^2 = 4y, x - 2y + 4 = 0.$

13.37. $y^3 = x^2, 2y = x.$

13.38. $y = x^2 - 2x, y = 6x - x^2.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

13.39 $x+1=0, x+y^2=0.$

13.40. $y=2x^2$ ва $y=3-x^2$ параболалар билан чегараланган соҳани қопловчи юпқа текис пластинканинг оғирлик марказини топинг

13.41. Биринчи чоракда, Oy ўқ, $y=\frac{x^2}{4}$ парабола ва $y=4$ тўғри чизик билан чегараланган «учбурчакли» соҳани қопловчи юпқа текис пластинканинг оғирлик марказини топинг.

13.42. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, циклоиданинг бир арки ва унинг асоси билан чегараланган пластинканинг Ox ўққа нисбатан статик моментини топинг.

Қуйидаги мисолларда берилган эгри чизиклар билан чегараланган соҳанинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

13.43. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b).$

13.44. $x^2 + 4y - 16 = 0$ ва Ox ўқ билан чегараланган.

13.45. $y = \frac{2}{\pi}x$ тўғри чизик ва $y = \sin x \quad (x \geq 0)$.

13.46. $x^2 + 4y^2 = 4$ ва $x^2 + y^2 = 4$ (биринчи чоракдаги қисми) .

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$13.47. \quad y = h \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right), \quad y = 0, \quad h > 0, a > 0. \quad 13.48. \quad y = \frac{2}{\pi} x, \quad y = \sin x, \quad y = 0.$$

$$13.49. \quad y^2 = 2px, \quad x^2 = 2py. \quad 13.50. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

$$13.51. \quad y^2 = 2x, \quad x + y = 4. \quad 13.52. \quad y = x^3, \quad x + y = 2, \quad x = 0.$$

$$13.53. \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad y = 0.$$

Қуйидаги қутб координаталар системасида берилган эгри чизиклар билан чегараланган соҳанинг оғирлик маркази координаталарини топинг.

$$13.54. \quad r = a \sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

13.55. $r = a\varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) Архимед спирали ва $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ нурлар билан чегараланган.

$$13.56. \quad r = a(1 + \cos \varphi) \text{ кардоида.}$$

$$13.57. \quad r^2 = a^2 \cos 2\varphi - \text{Бернулли лемнискатасининг ўнг қисми.}$$

13.58. Учбурчакнинг асосига нисбатан инерция моментини топинг.

13.59. Томонлари a га тенг бўлган квадратнинг, унинг диагонаliga нисбатан, инерция моментини топинг.

13.60. Асоси b , баландлиги h бўлган ($\rho = 1$) учбурчакнинг, асосига нисбатан, статик ва инерция моментларини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

13.61. Ярим ўқлари a ва b бўлган, биржинсли эллипссимон пластинканинг, унинг бош ўқларига нисбатан инерция моментларини топинг ($\rho = 1$).

13.62. Гульден теоремасидан фойдаланиб, R радиусли ярим айлананинг оғирлик маркази координаталарини аниқланг.

13.63. Гульден теоремасидан фойдаланиб, шар сиртнинг юзини ҳисобланг.

13.64. Гульден теоремасидан фойдаланиб, доиравий конуснинг ҳажми ва ён сиртининг юзини ҳисобланг.

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$\mathbf{13.1.} \quad M_x = \frac{b\sqrt{a^2 + b^2}}{2}, \quad M_y = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

$$\mathbf{13.2.} \quad M_x = 4, \quad M_y = 0.$$

$$\mathbf{13.3.} \quad M_x = 0,25(2 + sh2), \quad M_y = sh1 - ch1 + 1.$$

$$\mathbf{13.4.} \quad M_x = b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right),$$

$$M_y = 0, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$\mathbf{13.5.} \quad M_x = M_y = \frac{3}{5} a^2.$$

$$\mathbf{13.6.} \quad M_x = \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$13.7. \sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}). \quad 13.8. M_x = \frac{p^2}{8} (\sqrt{2} + 5 \ln(1 + \sqrt{2})).$$

$$13.9. M_x = \frac{ab}{2\varepsilon} (\varepsilon \sqrt{1 - \varepsilon^2} + \arcsin \varepsilon), \quad M_y = \frac{a^2}{2} \left(1 + \frac{1 - \varepsilon^2}{2\varepsilon} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \right), \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

$$13.10. M_x = M_y = \frac{3}{5} a^2. \quad 13.11. M_x = 2a^2, M_y = \pi a^2.$$

$$13.12. M_x = 0, M_y = \frac{32a^2}{5}. \quad 13.13. M_x = \frac{\sqrt{2}}{5} (1 - e^{4\pi}) a^2, M_y = \frac{2\sqrt{2}}{6} (e^{4\pi} - 1) a^2.$$

$$13.14. x_M = 0, y_M = \frac{4}{\pi}. \quad 13.15. x_M = y_M = 2a/5.$$

$$13.16. x_M = 0; y_M = \frac{a \operatorname{sh}(2b/a) + 2b}{4 \operatorname{sh}(b/a)}.$$

$$13.17. x_M = \frac{27 - 16 \ln 2 - 4 \ln^2 2}{8(3 + \ln 4)}, y_M = \frac{20}{3(3 + \ln 4)}. \quad 13.18. x_M = \pi a; y_M = 4a/3.$$

$$13.19. x_M = y_M = 4a/5. \quad 13.20. x_M = -\frac{a}{5} \frac{2e^{2\pi} + e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\pi/2}}; y_M = \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{2\pi} - 2e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\pi/2}}.$$

$$13.21. x_M = 0, y_M = \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{\pi}. \quad 13.22. \frac{\pi r^3}{2}. \quad 13.23. \frac{1}{3} [\sqrt{(1+e)^3} - 2\sqrt{2}].$$

$$13.24. a^3 (e - e^{-1}) (e^2 + e^{-2} + 10) / 24. \quad 13.25. \frac{1}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha) R^3.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$13.26. I_x = sh1 + \frac{1}{3}sh^3 1, I_y = 3sh1 - 2ch1.$$

$$13.28. I_x = \frac{256}{15}a^3, I_y = 16\left(\pi^2 - \frac{128}{45}\right)a^3.$$

$$13.30. M_x = \frac{\pi}{4}, M_y = 0.$$

$$13.32. M_x = \frac{2}{5} + \frac{\pi}{4}, M_y = \ln 2 - 0,25.$$

$$13.34. M_x = 2,5\pi a^3, M_y = 3\pi^2 a^3.$$

$$13.36. x_M = 1, y_M = \frac{8}{5}. \quad 13.37. x_M = \frac{10}{3}, y_M = \frac{40}{21}.$$

$$13.39. x_M = -\frac{3}{5}, y_M = 0. \quad 13.40. x_M = 0, y_M = \frac{8}{5}.$$

$$13.42. M_x = \frac{5}{2}\pi a^3. \quad 13.43. x_M = \frac{4a}{3\pi}, y_M = \frac{4b}{3\pi}.$$

$$13.45. x_M = \frac{\pi}{6(4-\pi)}, y_M = \frac{12-\pi^2}{12-3\pi}.$$

$$13.47. x_M = \frac{59}{7}; y_M = \frac{5a}{16}.$$

$$13.49. x_M = y_M = \frac{9p}{10}.$$

$$13.27. I_x = I_y = \frac{3}{8}a^3.$$

$$13.29. M_x = \frac{1}{6}, M_y = \frac{1}{6}.$$

$$13.31. M_x = M_y = \frac{3}{20}.$$

$$13.33. M_x = \frac{2}{3}ab^2, M_y = 0.$$

$$13.35. x_M = \frac{5}{2}; y_M = 5.$$

$$13.38. x_M = 2, y_M = 4.$$

$$13.41. x_M = \frac{3}{2}, y_M = \frac{12}{5}.$$

$$13.44. x_M = 0, y_M = \frac{8}{5}.$$

$$13.46. x_M = \frac{8}{3\pi}, y_M = \frac{4}{\pi}.$$

$$13.48. x_M = \frac{\pi^2 + 12\pi - 12}{3(\pi + 4)}, y_M = \frac{5\pi}{6}(\pi + 4).$$

$$13.50. x_M = y_M = \frac{a}{5}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$13.51. x_M = \frac{16}{5}; y_M = -1.$$

$$13.52. x_M = \frac{28}{75}, y_M = \frac{92}{105}.$$

$$13.53. x_M = \pi a; y_M = \frac{5a}{6}.$$

$$13.54. \xi_M = \eta_M = \frac{128a}{105\pi}.$$

$$13.55. \xi_M = \frac{6(4-\pi^2)a}{\pi^3}; \eta_M = \frac{2(\pi^2-6)a}{\pi^2}.$$

$$13.56. \xi_M = \frac{5a}{6}; \eta_M = 0.$$

$$13.57. \xi_M = \frac{\pi a \sqrt{2}}{8}; \eta_M = 0.$$

$$13.58. I_x = \frac{1}{12} \pi h^3.$$

$$13.59. I_x = \frac{a^4}{12}.$$

$$13.60. M_x = \frac{bh^2}{6}; I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

$$13.61. I_a = \frac{\pi ab^3}{4}, I_b = \frac{\pi a^3b}{4}.$$

$$13.62. x_M = 0, y_M = \frac{4R}{3\pi}.$$

$$13.63. S = 4\pi R^2.$$

$$13.64. V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, S = \pi RL.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

14-§. Аниқ интегралларни тақрибий ҳисоблаш

Ушбу

$$\int_a^b f(x)dx \quad (14.1)$$

интегрални ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин, бунда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, деб фараз қилинади. Биз, юқорида, аниқ интегрални ҳисоблаш усулларини кўриб ўтдик, лекин баъзи физик, механик масалаларни ечишда, интеграл остидаги функциянинг бошланғич функциясини элементар функциялар орқали ифодалаб бўлмайдиган интеграллар учрайди. Бундай интегралларни тақрибий ҳисоблашга тўғри келади. Интегралларни тақрибий ҳисоблаш учун бир нечта формулалар мавжуд бўлиб, биз қуйида уларнинг баъзилари билан танишамиз.

14.1. Тўғри тўртбурчаклар усули.

$[a, b]$ кесманинг, ихтиёрий $P = \{a = x_0 < x_2 < \dots < x_{2n} = b\}$ регуляр бўлинишини қараймиз. $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ кесманинг ўртасидаги нуқтани x_{2k-1} орқали

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

белгилаймиз(14.1-чизма). Тўғри тўртбурчак усули, (14.1) интегрални, мос равишда, баландликлари $f(x_{2k-1})$, асослари эса, $x_{2k} - x_{2k-2} = \frac{b-a}{n}$ га тенг бўлган, тўғри тўртбурчаклар юзларининг,

$$\frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})]$$

йиғиндисига тақрибий алмаштиришдан иборат, яъни

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})]. \quad (14.2)$$

(14.2) формулага, *тўғри тўртбурчак формуласи* дейилади. Бу формулани, «қўшимча» ҳад ёрдамида, ушбу

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{2n-1})] + R \quad (14.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда R – қолдиқ ҳад.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

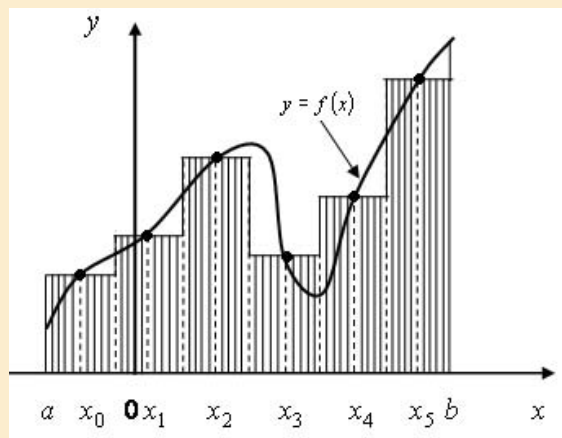


О р к а г а

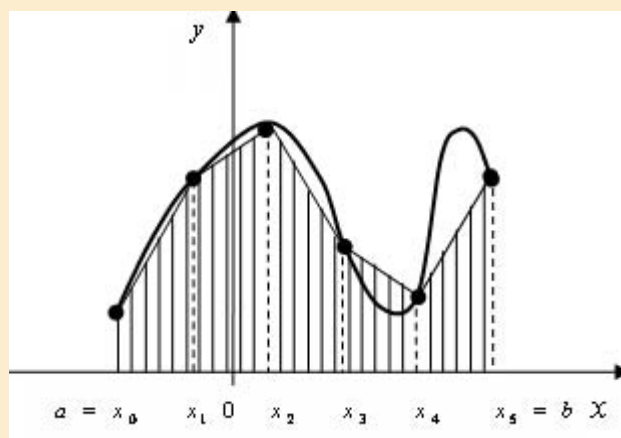
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



14.1-чизма.



14.2-чизма.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда шу кесмада шундай η нукта топиладики, (14.3) формуладаги қолдиқ ҳад учун,

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta)$$

тенлик ўринли бўлади

14.2. Трапециялар усули. (14.1) интегрални ҳисоблаш талаб қилинган бўлсин. $[a, b]$ кесманинг ихтиёрий $P = \{a = x_0 < x_2 < \dots < x_n = b\}$ регуляр бўлинишини оламиз ва $y = f(x)$ функциянинг

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Илова лар



Орқа га

Са хифа / 708

Тулик экран

Чи ки ш

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$$

қийматларини ҳисоблаймиз. Трапециялар усули, (14.1) интегрални,

$$\begin{aligned} & \frac{b-a}{2n} \{ [f(x_0) + f(x_1)] + [f(x_1) + f(x_2)] + \dots + [f(x_{n-1}) + f(x_n)] \} = \\ & = \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \right\} \end{aligned}$$

йиғиндига, ёки асослари, мос равишда, $f(x_{k-1})$ ва $f(x_k)$ ларга, баландликлари

$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ га тенг бўлган, трапециялар юзларининг йиғиндисига

(14.2-чизма) тақрибий алмаштиришдан иборат, яъни

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^n f(x_k) \right\}. \quad (14.4)$$

(14.4) формулани, қолдиқ ҳад ёрдамида,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} \left\{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^n f(x_k) \right\} + R_r$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда R_r - қолдиқ ҳад. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда, $[a, b]$ кесмада шундай η нуқта топиладики, R_r учун,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$R_r = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\eta), \quad a \leq \eta \leq b,$$

тенглик ўринли бўлади.

14.3. Параболалар усули.

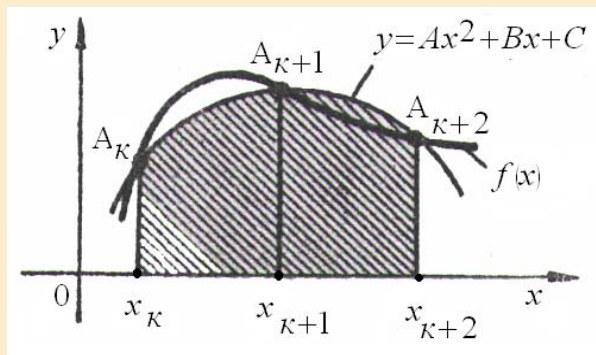
(14.1) интегрални ҳисоблаш учун, $[a, b]$ кесманинг ихтиёрий

$P = \{a = x_0 < x_2 < \dots < x_{2n} = b\}$ регуляр бўлинишини оламиз. $[x_{2k-2}, x_{2k}]$

кесманинг ўртасидаги нуқтани x_{2k-1} орқали белгилаймиз:

$x_{2k-1} = \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2}$, $k = \overline{1, n}$. Параболалар усулида берилган (14.1) интеграл, $f(x)$

функция графигининг, абсциссалари x_{2k-2} , x_{2k-1} ва x_{2k} бўлган нуқталардан



14.3-чизма.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ўтувчи парабодалар остида жойлашган трапециялар юзларининг

$$\frac{b-a}{6n} \{ [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots + [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \} = \frac{b-a}{6n} \{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) \}$$

йиғиндисига тақрибий алмаштирилади, яъни

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \{ [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \dots + [f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})] \} = \frac{b-a}{6n} \{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) \}$$

ёки

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \{ f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k}) \} + 4 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{2k+1}) + R_{pa}, \quad (14.5)$$

бунда R_{pa} - қолдиқ ҳад.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз тўртинчи тартибли ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $[a, b]$ кесмада шундай нуқта топиладики, (14.5) формулалардаги ҳад R_{pa} - учун,

$$R_{pa} = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b,$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тенглик ўринли бўлади. (14.4) формулага, *параболалар (Симпсон) формуласи* дейилади (14.3-чизма).

14.1- мисол. Ушбу

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4} dx$$

интегрални, интеграллаш оралиғини, 8 та ўзаро тенг бўлакка бўлиб: 1) Ньютон – Лейбниц; 2) тўғри тўртбурчаклар; 3) трапециялар ва 4) параболалар формулалари ёрдамида ҳисобланг, сўнгра тақрибий ҳисоблаш формуласида қўйилган абсолют ва нисбий хатоларни фоизларда топинг.

Ечилиши. 1) Берилган интегрални, Ньютон – Лейбниц формуласига асосан, ҳисоблаймиз:

$$J = \int_1^9 \sqrt{5x+4} dx = \frac{1}{5} \int_1^9 (5x+4)^{1/2} d(5x+4) = \frac{2}{15} (5x+4)^{3/2} \Big|_1^9 = \frac{2}{15} (343 - 27) = \frac{632}{15} = 42 \frac{2}{15}.$$

2) Тўғри тўртбурчаклар формуласи бўйича ҳисоблаймиз: [1; 9]

кесманинг, $P = \{1 = x_0 < x_2 < \dots < x_8 = 9\}$ регуляр бўлинишини қараймиз.

$y = f(x) = \sqrt{5x+4}$ функциянинг, бу кесмаларнинг ўрталаридаги қийматларини

ҳисоблаймиз: $x_{2k-1} = \frac{x_{2k-2} + x_{2k}}{2} \quad (k = \overline{1,8});$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad f(x_1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{23}{2}} = 3,3911,$$

$$x_3 = \frac{5}{2}, \quad f(x_3) = f\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{33}{2}} = 4,0620,$$

$$x_5 = \frac{7}{2}, \quad f(x_5) = f\left(\frac{7}{2}\right) = \sqrt{\frac{43}{2}} = 4,6368,$$

$$x_7 = \frac{9}{2}, \quad f(x_7) = f\left(\frac{9}{2}\right) = \sqrt{\frac{53}{2}} = 5,1478,$$

$$x_9 = \frac{11}{2}, \quad f(x_9) = f\left(\frac{11}{2}\right) = \sqrt{\frac{63}{2}} = 5,6124$$

$$x_{11} = \frac{13}{2}, \quad f(x_{11}) = f\left(\frac{13}{2}\right) = \sqrt{\frac{73}{2}} = 6,0415,$$

$$x_{13} = \frac{15}{2}, \quad f(x_{13}) = f\left(\frac{15}{2}\right) = \sqrt{\frac{83}{2}} = 6,4420,$$

$$x_{15} = \frac{17}{2}, \quad f(x_{15}) = f\left(\frac{17}{2}\right) = \sqrt{\frac{93}{2}} = 6,8190.$$

Ҳар бир кесманинг узунлиги $h = \frac{9-1}{8} = 1$. Функциянинг топилган

қийматларини (14.2) тўғри туртбурчаклар формуласига келтириб қўйиб, ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$J_1 = \int_1^9 \sqrt{5x+4} dx = \frac{632}{15} \approx \sqrt{\frac{23}{2}} + \sqrt{\frac{33}{2}} + \sqrt{\frac{43}{2}} + \sqrt{\frac{53}{2}} + \sqrt{\frac{63}{2}} + \sqrt{\frac{73}{2}} + \sqrt{\frac{83}{2}} + \sqrt{\frac{93}{2}} = 42,1526.$$

Такрибий ҳисоблашлардаги абсолют хато:

$$\Delta = |J - J_1| = \left| \frac{632}{15} - 42,1526 \right| = |42,1333 - 42,1526| = 0,0193.$$

Нисбий хато (фоизларда): $\delta = \frac{\Delta}{J} 100\% = \frac{15 \cdot 0,0193 \cdot 100}{632} \approx 0,0458\%.$

3) Трапециялар формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$a = x_0 = 1, \quad b = x_8 = 9.$$

$$\left. \begin{array}{ll} a = x_0 = 1 & f(a) = f(1) = 3, \\ x_1 = 2 & f(x_1) = f(2) = \sqrt{14} = 3,7416 \\ x_2 = 3 & f(x_2) = f(3) = \sqrt{19} = 4,3588 \\ x_3 = 4 & f(x_3) = f(4) = \sqrt{24} = 4,8989 \\ x_4 = 5 & f(x_4) = f(5) = \sqrt{29} = 5,3851 \\ x_5 = 6 & f(x_5) = f(6) = \sqrt{34} = 5,8309 \\ x_6 = 7 & f(x_6) = f(7) = \sqrt{39} = 6,2449 \\ x_7 = 8 & f(x_7) = f(8) = \sqrt{44} = 6,6332 \\ b = x_8 = 9 & f(x_8) = f(9) = 7 \end{array} \right\} 37,0934$$

Функциянинг топилган қийматларини (14.4) формулага келтириб қўйиб,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳисоблаймиз:

$$J_2 = \frac{632}{15} \approx \frac{1}{2}[3 + 7 + 2(\sqrt{14} + \sqrt{19} + \sqrt{24} + \sqrt{29} + \sqrt{34} + \sqrt{39} + \sqrt{44})] = 5 + 37,0924 = 42,0934.$$

$$\text{Абсолют хато: } \Delta = |J - J_2| = \left| \frac{632}{15} - 42,0934 \right| = 42,1333 - 42,0934 = 0,0399.$$

$$\text{Нисбий хато (фоизларда): } \delta = \frac{\Delta}{J} 100\% = \frac{15 \cdot 0,399 \cdot 100\%}{632} \approx 0,0946\%.$$

4) Параболалар формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$x_2 = 2, \quad f(x_2) = f(2) = \sqrt{14},$$

$$x_4 = 3, \quad f(x_4) = f(3) = \sqrt{19},$$

$$x_6 = 4, \quad f(x_6) = f(4) = \sqrt{24},$$

$$x_8 = 5, \quad f(x_8) = f(5) = \sqrt{29},$$

$$x_{10} = 6, \quad f(x_{10}) = f(6) = \sqrt{34},$$

$$x_{12} = 7, \quad f(x_{12}) = f(7) = \sqrt{39},$$

$$x_{14} = 8, \quad f(x_{14}) = f(8) = \sqrt{44},$$

Топилган қийматларни (14.5) формулага келтириб қўйиб, ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$J_3 = \frac{632}{15} \approx \frac{1}{2} [3 + 7 + 2(\sqrt{14} + \sqrt{19} + \sqrt{24} + \sqrt{29} + \sqrt{34} + \sqrt{39} + \sqrt{44}) + \\ + 4 \left(\sqrt{\frac{23}{2}} + \sqrt{\frac{33}{2}} + \sqrt{\frac{43}{2}} + \sqrt{\frac{53}{2}} + \sqrt{\frac{63}{2}} + \sqrt{\frac{73}{2}} + \sqrt{\frac{83}{2}} + \sqrt{\frac{93}{2}} \right)] = \frac{1}{6} [10 + 2 \cdot 37,0934 + 4 \cdot 42,1526] = \\ = \frac{10 + 74,1868 + 168,6104}{6} = 42,1328.$$

Абсолют хато: $\Delta = |J - J_3| = 42,1333 - 42,1328 = 0,0005.$

Нисбий хато (фоизларда): $\delta = \frac{\Delta}{J} 100\% = \frac{15 \cdot 0,0005 \cdot 100}{632} \approx 0,0111\%.$

14.2- мисол. Ушбу $\int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx$ интегралнинг қийматини: 1) трапециялар

усули ($n=4$); 2) Симпсон усули ($n=4$), бўйича яқинлашишлар бажариб, ҳисобланг.

Ечилиши. 1). Трапециялар усулидан фойдаланиш:

а) $f(x) = x^2 - 1, [a, b] = [-2, 0], n = 4$ бўлгани учун, $[-2, 0]$ кесманинг

$P = \left\{ -2, -\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}, 0 \right\}$ регуляр бўлинишини қараймиз, ҳамда бўлиниш нукта-

ларида функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$f(-2)=3; \quad f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{4}; \quad f(-1)=0; \quad f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}, \quad f(0)=-1$$

Унда

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx &\cong \frac{2}{2 \cdot 4} \left\{ f(-2) + f(0) + 2 \left[f\left(-\frac{3}{2}\right) + f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 3 - 1 + 2 \cdot \left[\frac{5}{4} + 0 - \frac{3}{4} \right] \right\} = \frac{1}{4} \{ 2 + 1 \} = \frac{3}{4} = 0,75. \end{aligned}$$

Энди $f''(\eta) = 2$, $h = \frac{1}{2}$ эканлигидан фойдалансак,

$$|R_{tr}| \leq \frac{2}{12} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{12} \approx 0,08$$

бўлади.

б) Интегрални бевосита ҳисоблаймиз:

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx = \int_{-2}^0 x^2 dx - \int_{-2}^0 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 - x \Big|_{-2}^0 = 0 - \left(\frac{-8}{3} \right) - (0 - (-2)) = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \cong 0,67.$$

Демак, $|R_{tr}| = |0,67 - 0,75| = 0,08$.

с) Тақрибий ҳисоблашдаги абсолют хато ва нисбий хатоларни (фоизларда) топамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\Delta = \left| \frac{2}{3} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{8-9}{12} \right| = \left| -\frac{1}{12} \right| = \frac{1}{12}, \quad \delta = \frac{3 \cdot \frac{1}{12}}{2} 100\% = \frac{1}{8} 100\% = 0,125\%.$$

Демак, I. a) 0,75; 0,08, b) $\frac{2}{3}$; 0,08, c) 0,125%.

2). Симпсон усулидан фойдаланиш. a) $\int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx$ интегралнинг тақрибий

қийматини, Симпсон усули бўйича ҳисоблаш учун, бизга, функциянинг, бўлинишда ҳосил бўлган нукталардаги қийматларидан ташқари, $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, 4$ қисм кесмалар,

$$[-2, -\frac{3}{2}], [-\frac{3}{2}, -1], [1, -\frac{1}{2}], [-\frac{1}{2}, 0]$$

нинг ўрта нукталари бўлган, $\xi_1 = -\frac{7}{4}$; $\xi_2 = -\frac{5}{4}$; $\xi_3 = -\frac{3}{4}$; $\xi_4 = -\frac{1}{4}$ нукталарда

функциянинг $f(\xi_1) = \frac{33}{16}$; $f(\xi_2) = \frac{9}{16}$; $f(\xi_3) = -\frac{7}{16}$; $f(\xi_4) = -\frac{15}{16}$ қийматлари керак

бўлади. Унда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx \cong \frac{2}{6 \cdot 4} \{ f(-2) + f(0) + 2[f(\frac{3}{2}) + f(-1) + f(-\frac{1}{2})] + 4[f(-\frac{7}{4}) + f(-\frac{5}{4}) + f(-\frac{3}{4}) + f(-\frac{1}{4})] \} =$$

$$= \frac{1}{12} \{ 3 - 1 + 2[\frac{5}{4} + 0 - \frac{3}{4}] + 4[\frac{33}{16} + \frac{9}{16} - \frac{7}{16} - \frac{15}{16}] \} = \frac{1}{12} \{ 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{33 + 9 - 7 - 15}{16} \} = \frac{2}{3}.$$

$$|R_c| \leq \frac{2}{180} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot f^{(IV)}(\eta) = 0 \Rightarrow R_c = 0.$$

б) Интегрални бевосита ҳисоблаймиз: $\int_{-2}^0 (x^2 - 1) dx = \frac{2}{3}.$

$$\text{Демак, } |R_c| = \left| \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = 0.$$

с) Тақрибий ҳисоблашдаги абсолют хато ва нисбий хатоларни (фоизларда) топамиз: 0%. Демак, 2) а) $\frac{2}{3}$; 0, б) $\frac{2}{3}$; 0, с) 0%.

Яна биз ушбу $\int_a^b f(x) dx$ интегрални қараймиз, бунда f функцияни $[a, b]$

да узлуксиз ва чизмада қулай бўлиши учун, уни мусбат функция, деб фараз қиламиз. $[a, b]$ кесмада регуляр $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ бўлиниш оламиз, у

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

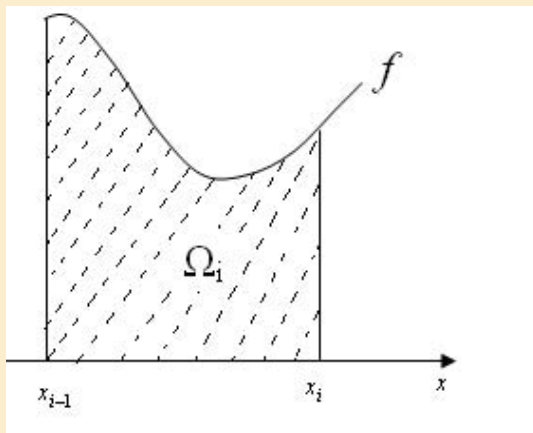
Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

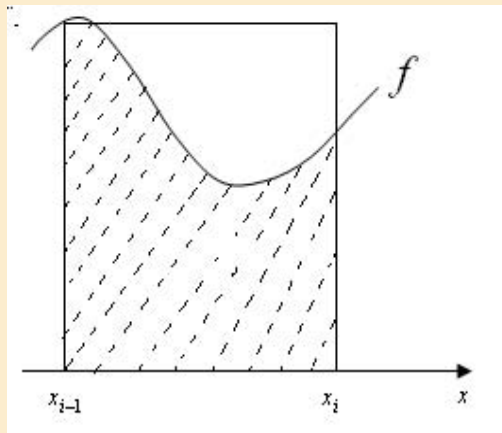
берилган кесмани бир хил $\frac{b-a}{n}$ узунликдаги n та қисм кесмаларга бўлади:

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup \dots \cup [x_{i-1}, x_i] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n], \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

14.3-чизмадаги Ω_i соҳа бир неча усуллар билан яқинлаштирилиши мумкин:



14.4-chizma



14.5-chizma.

1. $[x_{i-1}, x_i]$ кесманинг чап четки нуқтасида функциянинг қиймати бўйича ясалган тўғри тўртбурчак орқали, унда бу тўғри тўртбурчакнинг юзи (14.4- чизма),

$$\text{юза} = f(x_{i-1})\Delta x_i = f(x_{i-1})\frac{b-a}{n}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

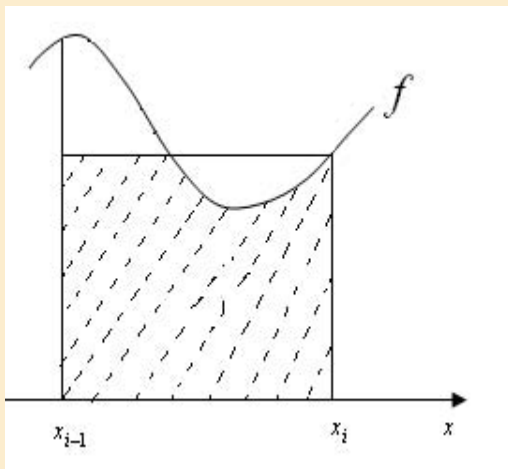
Ч и к и ш

бўлади.

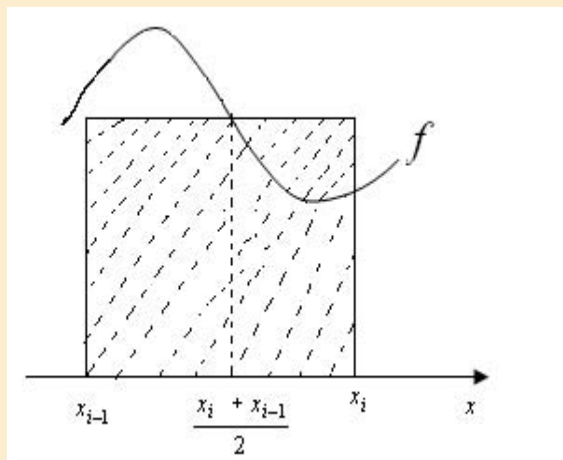
2. $[x_{i-1}, x_i]$ кесманинг ўнг четки нуқтасида функциянинг қиймати бўйича ясалган тўғри тўртбурчак орқали (14.6-чизма), унда бу тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$\text{юза} = f(x_i) \Delta x_i = f(x_i) \frac{b-a}{n}$$

бўлади.



14.6-chizma.



14.7-chizma

3. $[x_{i-1}, x_i]$ кесманинг ўрта нуқтасида функциянинг қиймати бўйича

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ясалган тўғри тўртбурчак орқали (14.7- чизма), бу тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$\text{юза} = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\Delta x_i = f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)\Delta x_i$$

бўлади.

4. Асосларини $[x_{i-1}, x_i]$ кесманинг чап ва ўнг четларида функциянинг қийматлари ташкил этувчи трапеция орқали, унинг юзи (14.8-чизма)

$$\text{юза} = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\Delta x_i = \frac{1}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]\frac{b-a}{n}$$

бўлади.

5. Параболик соҳа орқали (14.9-чизма), бунда юқорида тилга олинган учта нуқталарга мос келган нуқталардан ўтувчи $y = Ax^2 + Bx + C$ парабола қаралади, унинг юзи

$$\text{юза} = \frac{1}{6}[f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)]\Delta x_i = [f(x_{i-1}) + 4f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right) + f(x_i)]\frac{b-a}{6n}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

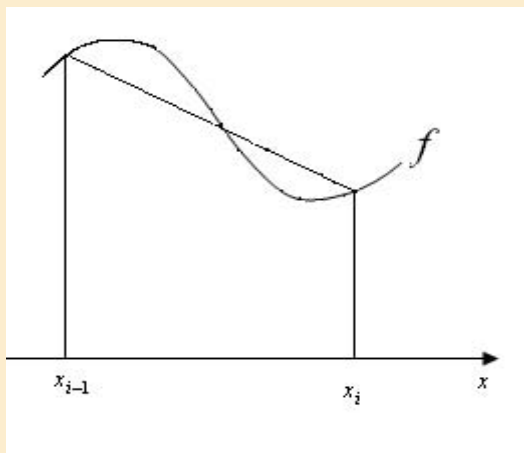


О р к а г а

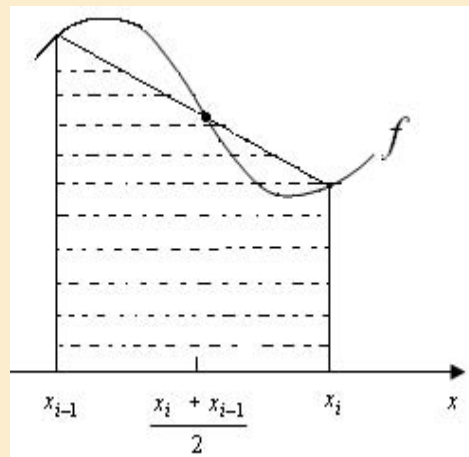
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



14.8-chizma.



14.9-chizma

Равшанки, агар бу учта нуқталар бир тўғри чизикда ётса, парабола ёйи тўғри чизикқа айланади ва параболик соҳа трапецияли соҳа (4-ҳол) га келтирилади.

Шундай қилиб, Ω_i соҳани биз юқорида кўриб ўтган яқинлаштиришлар

$\int_a^b f(x)dx$ интеграл қийматининг қуйидаги яқинлашишларига олиб келади.

1) Чап четки нуқта орқали яқинлашиш:

$$Z_n = \frac{b-a}{n} [f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})]. \quad (14.6)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

2) Ўнг четки нукта орқали яқинлашиш:

$$R_n = \frac{b-a}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]. \quad (14.7)$$

3) Ўрта нукта бўйича яқинлашиш:

$$M_n = \frac{b-a}{n} \left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right]. \quad (14.8)$$

4) Трапеция бўйича яқинлашиш (трапециялар қоидаси):

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{b-a}{n} \left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \dots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \right] = \\ &= \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned} \quad (14.9)$$

5) Парабола бўйича яқинлашиш (Симпсон қоидаси):

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{b-a}{6n} \left\{ [f(x_0) + f(x_n) + 2[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})] + \right. \\ &\quad \left. + 4[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)] \right\}. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Бу яқинлашишларнинг дастлабки учтаси, яъни Z_n , R_n ва M_n лар Риман йиғиндилари бўлиб, T_n ва S_n лар эса, Риман йиғиндилари сифатида ёзилиши мумкин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

14.3-мисол. Ушбу $\int_0^3 \sqrt{4+x^3} dx$ интегралнинг тақрибий қийматларини,

$n=6$ деб олиб: а) чап четки нукта орқали яқинлашиш; б) ўнг четки нукта бўйича; в) ўрта нукта бўйича; д) трапеция бўйича (трапеция қоидаси); е) парабола (Симпсон қоидаси) бўйича яқинлашишларини топинг.

Ечилиши. $n=6$ бўлганда ҳар бир $[x_{i-1}, x_i]$ қисм кесманинг узунлиги,

$\frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$ га тенг бўлади. Бўлиниш нукталари

$$x_0 = 0; x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1, x_3 = \frac{3}{2}, x_4 = 2, x_5 = \frac{5}{2}, x_6 = 3$$

$f(x) = \sqrt{4+x^3}$ функциянинг бу бўлиниш нукталаридаги қийматларини

ҳисоблаймиз: $f(0)=2$; $f\left(\frac{1}{2}\right) \cong 2,031$; $f(1) \cong 2,236$; $f\left(\frac{3}{2}\right) \cong 2,716$; $f(2) \cong 3,464$;

$f\left(\frac{5}{2}\right) \cong 4,430$, $f(3) \cong 5,568$ (бу ерда ҳисоблашлар учта ўнликлар хонасигача

яхлитланган). Унда

$$а) Z_6 = \frac{1}{2} [f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right)] \cong$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\cong \frac{1}{2}[2,000 + 2,031 + 2,236 + 2,716 + 3,464 + 4,430] = \frac{1}{2} \cdot 16,877 = 8,4385.$$

$$b) R_6 = \frac{1}{2}[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3)] \cong$$

$$\cong \frac{1}{2}[2,031 + 2,236 + 2,716 + 3,464 + 4,430 + 5,568] = \frac{1}{2} \cdot 20,445 = 10,2225.$$

c) $[x_{i-1}, x_i]$ қисм кесмаларнинг ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ўрта нукталарини

топамиз:

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{0 + 0,5}{2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0,5 + 1}{2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{1 + 1,5}{2} = \frac{5}{4},$$

$$\frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{1,5 + 2}{2} = \frac{7}{4}, \quad \frac{x_4 + x_5}{2} = \frac{2 + 2,5}{2} = \frac{9}{4}, \quad \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{2,5 + 3}{2} = \frac{11}{4}.$$

Топилган нукталарда $f(x) = \sqrt{4 + x^3}$ функциянинг қийматларини ҳисоблаймиз (бу ерда ҳам ҳисоблашларни урта ўнликлар хонасигача яхлитлаймиз):

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2,004; \quad f\left(\frac{3}{4}\right) = 2,103; \quad f\left(\frac{5}{4}\right) = 2,439; \quad f\left(\frac{7}{4}\right) = 3,059; \quad f\left(\frac{9}{4}\right) = 3,923; \quad f\left(\frac{11}{4}\right) = 4,980$$

У ҳолда, (14.8) формуладан

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$M_6 \cong \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [2,004 + 2,103 + 2,439 + 3,059 + 3,923 + 4,980] = \frac{1}{2} \cdot 18,508 = 9,254$$

d) (14.9) формуладан, $n = 6$ бўлганда қуйидагини ҳосил қиламиз.

$$T_6 = \frac{1}{2 \cdot 2} \left[f(0) + 2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + 2 \cdot f(1) + 2 \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) + 2 \cdot f(2) + 2 \cdot f\left(\frac{5}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + f(3) \right] \cong \frac{1}{4} [2,000 + 2 \cdot 2,031 + 2 \cdot 2,236 + 2 \cdot 2,716 + 2 \cdot 3,464 + 2 \cdot 4,430 + 5,568] =$$

$$= \frac{1}{4} [2,000 + 4,062 + 4,472 + 5,472 + 5,432 + 6,928 + 8,860 + 5,568] = \frac{1}{4} \cdot 37,322 = 9,3305$$

e) (14.10) формулада $n = 6$ бўлганда

$$S_6 = \frac{1}{6 \cdot 2} \{ f(0) + f(3) + 2 \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) \right] +$$

$$+ 4 \left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right) \right] \} \cong$$

$$\cong \frac{1}{12} \{ 2,000 + 5,568 + 2[2,031 + 2,236 + 2,716 + 3,464 +$$

$$+ 4,430] + 4[2,004 + 2,103 + 2,439 + 3,059 + 3,923 + 4,980] \} =$$

$$= \frac{1}{12} (7,568 + 2 \cdot 14,877 + 4 \cdot 18,508) =$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{1}{12}(7,568 + 29,754 + 74,032) = \frac{1}{12} \cdot 111,354 = 9,2795$$

14.5- мисол. $\int_4^1 \sqrt{x} dx$ интегралнинг қийматини: 1) трапециялар қоида

бўйича; 2) Симпсон қоида бўйича яқинлаштиришлар бажариб ҳисоблаганда, n нинг, абсолют хато берилган $\varepsilon = 0,001$ дан кичик бўлишини қафолатлайдиган қийматини топинг.

Ечилиши. I. Трапециялар қоида бўйича яқинлашиш бажарилганда η нинг қолдиқ $|R_{tp}| < \varepsilon$ бўлишини таъминлайдиган қийматини топамиз. Бунинг

учун, формулада $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$, $\eta = 2$ бўлсин. Унда $f''(\eta) = -0,0884$.

Демак,

$$|R_{tp}| \leq \frac{b-a}{12} \cdot \left(\frac{b-a}{n} \right)^2 \cdot |f''(\eta)| = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^2}{n^2} 0,0884 < \varepsilon$$

ёки

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot 0,0884 < 0,001$$

бўлиши талаб қилинади. Бу ердан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{0,1989}{n^2} < 0,001$$

тенгсизлик ёки

$$n^2 > \frac{0,199}{0,001} = 199$$

бўлиши, яъни $n > 14$; $n \geq 15$ бўлишини оламиз.

Демак, трапециялар қоидаси бўйича яқинлашиш бажарилганда, абсолют хато $\varepsilon = 0,001$ дан кичик бўлишини кафолатлаш учун, $[1, 4]$ кесмани, камида 15 та қисм бўлакларга бўлиш лозим бўлади.

2) Симпсон қоидаси бўйича яқинлашиш бажарилганда, n нинг, қолдиқ

$$|R_c| < \varepsilon = 0,001$$

бўлишини таъминлайдиган қийматини топамиз. $h = \frac{3}{4}$; $\eta = 2$ бўлсин. У ҳолда,

$$f^{(IV)}(\eta) = f^{(IV)}(2) = -0,0828.$$

Демак,

$$|R_c| \leq \frac{3}{12} \cdot \left(\frac{3}{n}\right)^4 \cdot 0,0828 = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{n}\right)^4 \cdot 0,0838 < \varepsilon$$

ёки

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{81}{4} \cdot \frac{1}{n^4} 0,0838 < 0,001$$

бўлиши талаб қилинади. Бу ердан,

$$\frac{1,68}{n^4} < 0,001, \quad n^4 > \frac{1,681}{0,001} = 1681 \Rightarrow n > 6$$

бўлишини оламиз. Демак, $n \geq 7$.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги интегрални берилган қадамда тўрт бурчак формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

$$14.1. \int_0^2 x^4 dx, \quad h = 0,2.$$

$$14.2. \int_1^5 \frac{dx}{1+x^4}, \quad h = 0,5.$$

$$14.3. \int_0^{x^2} e^{x^2} dx, \quad h = 0,2.$$

$$14.4. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \quad h = 0,2.$$

Қуйидаги интегрални берилган қадамда трапециялар формуласи ёрдамида ҳисобланг.

$$14.5. \int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}, \quad h = 1.$$

$$14.6. \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx, \quad h = 0,1.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$14.7. \int_0^2 \sqrt{1+x^4} dx, h = \frac{1}{8}.$$

$$14.8. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, h = 0,1.$$

Қуйидаги интегрални берилган қадамда Симпсон формуласи ёрдамида тақрибий ҳисобланг.

$$14.9. \int_1^3 \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx, h = 0,5.$$

$$14.10. \int_0^2 e^{x^2} dx, h = 0,2.$$

$$14.11. \int_0^2 e^{-x^2} dx, h = 0,5.$$

$$14.12. \int_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x} dx, h = \pi/6.$$

Қуйидаги интеграл учун берилган қадамда тўрт бурчак формуласи ёрдамида абсолют хатони ҳисобланг.

$$14.13. \int_0^2 x^4 dx, h = 0,2.$$

$$14.14. \int_0^{\pi} \sin dx, h = \pi/6.$$

$$14.15. \int_1^5 \frac{dx}{x}, h = 0,4.$$

$$14.16. \int_1^5 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx, h = 0,25.$$

Қуйидаги интеграл учун берилган қадамда трапеция формуласи ёрдамида абсолют хатони ҳисобланг:

$$14.17. \int_2^9 \frac{dx}{x-1}, h = 1.$$

$$14.18. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}, h = \frac{1}{3}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$14.19. \int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}, h=1.$$

$$14.20. \int_2^5 \ln^2 x dx, h=0,5.$$

Қуйидаги интеграл учун берилган қадамда Симпсон формуласи ёрдамида абсолют хатони ҳисобланг

$$14.21. \int_0^{\pi/2} \cos \frac{x}{2} dx, h = \frac{\pi}{8}.$$

$$14.22. \int_1^3 \ln 2x dx, h = \frac{1}{3}.$$

$$14.23. \int_0^6 x \ln(4+x) dx, h = \frac{1}{4}.$$

$$14.24. \int_2^5 \frac{dx}{\ln x}, h=0,5.$$

Қуйидаги интегрални тўғри тўрт бурчак формуласи ёрдамида ҳисоблаганда, қуйидаги хатонинг берилган ε дан ошмаслиги учун h қадам қандай бўлиши керак?

$$14.25. \int_0^2 x^4 dx, \varepsilon = 10^{-2}.$$

$$14.26. \int_0^{\pi/3} \cos 2x dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$14.27. \int_0^3 \ln(1+x^2) dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$14.28. \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

Қуйидаги интегрални трапеция формуласи ёрдамида ҳисоблаганда қўйилган хатонинг берилган ε дан ошмаслиги учун h қадам қандай бўлиши керак?

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$14.29. \int_0^3 \frac{dx}{x+2}, \varepsilon = 10^{-1}.$$

$$14.30. \int_0^{1,2} e^x dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$14.31. \int_1^3 \sin x dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$14.32. \int_0^{0,5} \arcsin x dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

Қуйидаги интегрални Симпсон формуласи ёрдамида ҳисобланганда, қўйилган хатонинг берилган ε дан ошмаслиги учун h кадам қандай бўлиши керак.

$$14.33. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$14.34. \int_1^3 \ln 2x dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$14.35. \int_1^2 \frac{dx}{x^2}, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$14.36. \int_0^2 \arctg x dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

14.37 -14.41 мисоллардаги талаблар икки қисмдан иборат бўлиб, улардан бири трапеция қоидаси, иккинчиси эса, Симпсон қоидасини қўллаб, интегрални тақрибий ҳисоблаш сўралади.

I. Трапеция қоидаси (усули)дан фойдаланиш: а) интегрални $n = 4$ кадам учун яқинлаштиринг ва

$$|R_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad \left(|R_T| \leq \frac{b-a}{12} |f''(\eta)| \cdot h^2 \right), \quad \eta \in [a, b]$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

муносабатдан фойдаланиб, $|R_{tp}|$ учун юқори чегарани топинг; б) интегрални бевосита ҳисобланг ва $|R_{tp}|$ ни топинг; с) тақрибий ҳисоблашдаги нисбий хатони (% ларда) топинг.

I I. Симпсон (парабола) қондаси (усули) дан фойдаланиш. а) интегрални $n = 4$ кадам учун яқинлаштиринг ва

$$|R_p| \leq \frac{b-a}{12} h^4 M, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad \left(|R_p| \leq \frac{b-a}{12} |h^4 \cdot f^{(4)}(\eta)| \right), \quad \eta \in [a, b]$$

муносабатдан фойдаланиб, $|R_c|$ учун юқори чегарани топинг; б) интегрални бевосита ҳисобланг ва $|R_c|$ ни топинг; с) тақрибий ҳисоблашдаги нисбий хатони (% ларда) топинг.

$$14.37. \int_1^2 x dx.$$

$$14.38. \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx.$$

$$14.39. \int_0^2 (x^3 + x) dx.$$

$$14.40. \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

$$14.41. \int_0^{\pi} \sin x dx.$$

Қуйидаги мисолларда жавобларни тўртти ўнликлар хонасигача

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

яхлитлаб ёзинг.

14.42. Ушбу $\int_0^{12} x^2 dx$ интегралнинг қиймати: а) чап четки нукта бўйича

($n=12$ деб олиб); б) ўнг четки нукта бўйича ($n=12$ деб олиб); с) ўрта нукта бўйича ($n=6$ деб олиб); д) трапециялар қоидаси бўйича ($n=12$ деб олиб); е) Симпсон қоидаси бўйича ($n=6$ деб олиб) яқинлашишлар бажариб, ҳисобланг. Натижаларни, интеграллашни бажариб, текширинг (солиштиринг).

14.43. Ушбу $\int_0^1 \sin^2 \pi x dx$ интегралнинг қийматини: а) чап чекти нукта

бўйича ($n=3$ деб олиб); б) ўнг четки нукта бўйича ($n=3$ деб олиб); с) трапециялар қоидаси бўйича ($n=6$ деб олиб); д) Симпсон қоидаси бўйича ($n=3$ деб олиб) яқинлашишлар бажариб, ҳисобланг. Натижаларни интеграллашни бажариб, текширинг (солиштиринг).

14.44. Ушбу $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ интегралнинг қийматини: а) трапециялар қоидаси

($n=4$ деб олиб); б) Симпсон қоидаси ($n=4$ деб олиб) бўйича яқинлашишлар бажариб, ҳисобланг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

14.45. Ушбу $\int_{-1}^1 \cos x^2 dx$ интегралнинг қийматини: а) ўрта нукта бўйича

($n = 4$ деб олиб); б) трапециялар қоидаси бўйича ($n = 8$ деб олиб); в) Симпсон қоидаси бўйича ($n = 4$ деб олиб) яқинлашишлар бажариб, ҳисобланг.

14.46. Ушбу $\int_0^2 e^{-x^2} dx$ интегралнинг қийматини: а) трапециялар қоидаси

($n = 10$ деб олиб); б) Симпсон қоидаси ($n = 5$ деб олиб) бўйича яқинлашишлар бажариб, ҳисобланг.

Қуйидаги мисолларда, интегралнинг қийматини: а) трапециялар қоидаси бўйича; б) Симпсон қоидаси бўйича яқинлаштиришлар бажариб ҳисоблаганда n нинг абсолют хато берилган ε дан кичик бўлишини кафолатлайдиган қийматини топинг.

14.47. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$, $\varepsilon = 0,01$.

14.48. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$ $\varepsilon = 0,00001$.

14.49. $\int_0^{\pi} \sin x dx$; $\varepsilon = 0,001$.

14.50. $\int_1^3 e^x dx$, $\varepsilon = 0,01$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$14.51.5) \int_0^2 e^{-x^2} dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

14.1. 6,37. **14.2.** 0,23. **14.3.** 16,1. **14.4.** 0,822. **14.5.** 2,002. **14.6.** 0,3296.

14.7. 3,482. **14.8.** 0,8350. **14.9.** 2,4859. **14.10.** 16,5. **14.11.** 0,8821.

14.12. 5,4024. **14.13.** $0 < R < 0,16$. **14.14.** $-3,59 \cdot 10^{-2} < R < 0$.

14.15. $0 < R < 0,053$. **14.16.** $9,12 \cdot 10^{-5} < R < 8,06 \cdot 10^{-3}$.

14.17. $-1,67 < R < -2,28 \cdot 10^{-3}$. **14.18.** $-6,95 < R < 1,61 \cdot 10^{-5}$.

14.19. $-9,77 \cdot 10^{-3} < R < -1,29 \cdot 10^{-3}$. **14.20.** $-9,59 \cdot 10^{-3} < R < 3,12 \cdot 10^{-3}$.

14.21. $-1,3 \cdot 10^{-5} < R < -0,91 \cdot 10^{-5}$. **14.22.** $1,01 \cdot 10^{-5} < R < 8,23 \cdot 10^{-4}$.

14.23. $-1,042 < R < -1,08 \cdot 10^{-6}$. **14.24.** $1,02 \cdot 10^{-2} < R < -3,26 \cdot 10^{-5}$.

14.25. $1/20$. **14.26.** $\frac{\pi}{42}$. **14.27.** $1/50$. **14.28.** 4) $1/8$.

14.29. 1. **14.30.** $\frac{3}{55}$. **14.31.** $1/13$. **14.32.** $1/18$. **14.33.** $\frac{\pi}{4}$.

14.34. $1/6$. **14.35.** 0,1. **14.36.** $1/5$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

14.37. I. a) 1,5; 0. b) 1,5; 0. c) 0% II. a) 1,5; 0. b) 1,5; 0. c) 0%.

4.38. I. a) 275; 0,08. b) 2,67; 0,08. c) $0,0312 \approx 3\%$. II. a) 2,67; 0. b) 2,67; 0. c) 0%

14.39. I. a) 6,25; 0,5. b) 6; 0,25. c) $0,0417 \approx 4\%$. II. a) 6; 0. b) 6; 0. c) 0%.

14.40. I. a) 0,509; 0,03125. b) 0,5; 0,009. c) $0,018 \approx 2\%$.

II. a) 0,5004; 0,002604. b) 0,5; 0,0004. c) 0,08%.

14.41 I. a) 1,8961; 0,161. b) 2; 0,1039. c) $0,052 \approx 5\%$. II. a) 2,00456; 0,0066. b) 2; 0,00457. c) $0,23\%$.

14.42. $Z_{12} = 506$; $R_{12} = 650$; $M_6 = 572$; $T_{12} = 578$; $S_6 = 576$.

14.43. $Z_6 \cong 1,394$; $R_6 \cong 0,9122$; $M_3 \cong 1,1852$; $T_6 \cong 1,1533$; $S_3 \cong 1,1614$.

14.44. $T_4 \cong 0,7828$; $S_4 \cong 0,7854$. **14.45.** $M_4 \cong 1,8440$; $T_8 \cong 1,7915$; $S_4 \cong 1,8090$.

14.46. $T_{10} \cong 0,8818$; $S_5 \cong 0,8821$. **14.47.** a) $n \geq 8$; b) $n \geq 2$.

14.48. a) $n \geq 238$; b) $n \geq 10$. **14.49.** a) $n \geq 51$; b) $n \geq 4$. **14.50.** a) $n \geq 37$; b) $n \geq 3$.

14.51. a) 78; b) 7.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

15-§. Аниқ интегралнинг физика масалаларига тадбиқлари

15.1. Жисмнинг босиб ўтган йўли.

Жисм тўғри чизиqli ҳаракат қилганда, унинг t вақт давомида ўзгармас v тезликда босиб ўтган йўли s , ушбу

$$s = vt \quad (15.1)$$

формула бўйича аниқланади.

Агар жисм текис ҳаракат қилмаса, унинг v тезлиги t вақтга боғлиқ равишда ўзгаради, яъни

$$v = f(t).$$

Бу ҳолда жисмнинг $t=t_1$ дан $t=t_2$ гача бўлган вақт давомида босиб ўтган йўлини топиш учун, $t_2 - t_1$ вақт оралиғини n та тенг ва жуда кичик Δt бўлакларга бўламиз. Фараз қилайлик, Δt вақт оралиқларининг ҳар бирида жисмнинг тезлиги ҳар бир қисм вақт оралиғининг охирида, сакрашга эга бўлган ҳолда, ўзгармас бўлиб, қолсин, $t_2 - t_1$ вақт оралиғи $\Delta t = 1$ сек оралиқларга бўлинган бўлсин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Фаразимишга кўра, вақт оралиғининг биринчи секундида жисм текис ҳаракат қилиб, унинг охирида ўз тезлигини ўзгартиради, иккинчи секундда эса, олинган тезлик бўйича текис ҳаракат қилади ва иккинчи секунднинг охирида янги тезликка эга бўлади ва учинчи секунд давомида текис ҳаракат қилади ва ҳ.к.

Шунинг учун, жисмнинг Δt вақтда босиб ўтган йўли (15.1) формула орқали топилади ва тақрибан $f(t)\Delta t$ га тенг бўлади, қаралаётган $t_2 - t_1$ вақт оралиғида босиб ўтилган йўл эса,

$$S \approx \sum_{t=t_1}^{t_2} f(t)\Delta t$$

ифодага тенг бўлади.

Энди n бўлинишлар сонини кўпайтирамиз, у ҳолда Δt ҳамда ҳар бир Δt оралиқнинг охирида тезликнинг ўзгаришидаги сакрашлар, борган сари кичрайиб боради.

Агар $n \rightarrow \infty$ бўлса, $\Delta t \rightarrow 0$, демак, $f(t)\Delta t \rightarrow 0$. Бу шартда жисмнинг тезлиги, сакрашларсиз, яъни узлуксиз ўзгаради ва унинг босиб ўтган йўли,

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t=t_1}^{t_2} f(t)\Delta t$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ифодага тенг бўлади, бундан, аниқ интегралнинг таърифига кўра,

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{t=t_1}^{t_2} f(t) \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt, s = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt. \quad (15.2)$$

15.1 - мисол. Жисмнинг ҳаракат тезлиги

$$v = (2t^2 + t) \text{ см/сек}$$

тенглама орқали берилган. Жисмнинг ҳаракат бошлангандан сўнг 6 секунд вақт давомида ўтган йўлини аниқланг.

Ечилиши. (15.2) формулага асосан,

$$s = \int_0^6 (2t^2 + t) dt = \left(\frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_0^6 = \frac{2}{3} 6^3 + \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 162 \text{ см}.$$

15.2. Куч бажаргич иш.

Фараз қилайлик, жисм ўзгармас F куч таъсири остида тўғри чизик бўйлаб ҳаракат қилсин. У ҳолда босиб ўтилган x йўлда бу F куч томонидан бажарилган P иш,

$$P = Fx \quad (15.3)$$

формула бўйича топилади, бунда x – метрларда, F - килограммларда, P эса

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

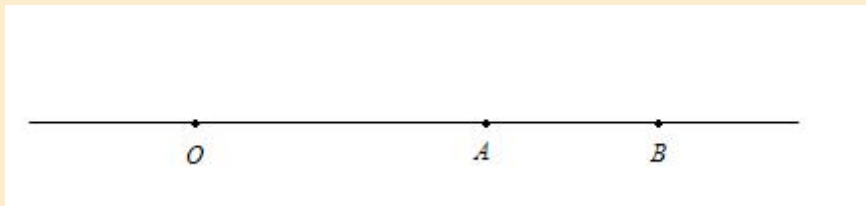
килограммометрларда ифодаланади.

Агар жисм ўзгарувчан куч таъсири остида ҳаракат қилса, унинг бажарган иши анча қийин аниқланади. Бу ҳол учун формулани келтириб чиқарамиз.

Фараз қилайлик, O нуқтада тинч ҳолатда турган жисм, ўтилган йўл x га боғлиқ равишда ўзгарадиган F куч таъсири остида ҳаракат қилаётган бўлсин, яъни

$$F = f(x)$$

Шунингдек, вақтнинг баъзи моментларида жисм A ва B нуқталарда бўлсин (15.1- чизма), бунда $OA=a$ ва $OB=b$ бўлсин.



15.1-чизма.

Энди йўлнинг $AB=b-a$ бўлагида берилган куч бажарган ишни қандай аниқлаш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун, йўлнинг кўрсатган AB бўлагини n та, ўзаро тенг ва жуда кичик Δx кесмаларга бўламиз. Бу ерда ҳам

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

юқоридаги йўлни топиш масаласидаги каби, ҳар Δx кесмада куч, ўзгармас қолиб, унинг охирида, сакрашга эга бўлиб, ўзгаради, деб фараз қилинади. У ҳолда, (15.1) формулага асосан, йўлнинг Δx бўлагида кучнинг бажарган иши, тақрибан

$$f(x)\Delta x$$

ифодага тенг бўлади, кучнинг бутун $AB = b - a$ йўл давомида бажарган иши эса, тақрибан,

$$P \approx \sum_{x=a}^b f(x)\Delta x$$

бўлади.

Энди бўлинишлар сони n ни чексиз ортирсак, Δx миқдор, ва демак, $f(x)\Delta x$ миқдор ҳам чексиз кичик миқдорлар бўлади. Бунда куч, сакрашларга эга бўлмасдан, узлуксиз ўзгаради ва изланаётган иш,

$$P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b f(x)\Delta x$$

ифодага, бундан аниқ интегралнинг таърифига кўра,

$$P = \int_a^b f(x)dx \quad (15.4)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўлади.

15.2-мисол. 1 кг микдордаги куч пружинани 3 см га чўзганда, у қандай иш бажаришини аниқланг.

Ечилиши. Гук қонунига асосан, куч пружинанинг чўзилиши ёки қисилишига тўғри пропорционал, яъни

$$F = kx,$$

бунда x – пружинанинг чўзилиш ёки қисилиш микдори, k – пропорционаллик коэффициент. Қаралаётган масалада k нинг қийматини топиш учун, берилганларни, Гук қонунини ифодаловчи, $F = kx$ тенгламага келтириб қўямиз: $1 = k \cdot 0,03$, бу ердан $k = \frac{1}{0,03}$ эканлиги келиб чиқади.

Демак, пружинани чўзувчи куч

$$F = \frac{1}{0,03} x$$

кўринишда ифодаланади.

Куч тинч ҳолатда бўлган пружинага таъсир қилгани учун, (15.4) формуладаги интегралнинг қуйи чегараси $a = 0$ бўлади, юқори чегараси эса, $b = 0,03$ бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Демак, изланаётган иш:

$$P = \int_0^{0,03} \frac{1}{0,03} x dx = \frac{1}{0,03} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,03} = \frac{1}{0,03} \cdot \frac{(0,03)^2}{2} = 0,015 \text{ кГм.}$$

15.3– мисол. Массаси m бўлган жисмнинг Ер сиртидан вертикал h масофага кўтаришда бажариладиган ишни топинг.

Ечилиши. Ернинг тортиш кучини F , Ернинг массасини m_e орқали белгиласак, у ҳолда, Ньютоннинг қонунига асосан, $F = G \frac{m_e m}{x^2}$ бўлади, бунда, x – жисмдан Ернинг марказигача бўлган масофа. У ҳолда $m_e m \cdot G = K$ деб

белгиласак, $F = \frac{K}{x^2}$, $R \leq x \leq h + R$, R – Ернинг радиуси. $x = R$ бўлганда,

$F(R)$ – куч, жисмнинг массаси $P = mg$ га тенг бўлади, яъни

$$\frac{K}{R^2} = P, \quad K = P \cdot R^2, \quad F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Шундай қилиб, (13.3) формуласига асосан, топамиз:

$$A = \int_R^{R+h} \frac{PR^2}{x^2} dx = PR^2 \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -PR^2 \cdot \frac{1}{x} \Big|_R^{R+h} = \frac{PRh}{R+h}.$$

15.4 – мисол. Оғирлиги $P = 1,5m$ бўлган ракетани Ер сиртидан $H = 2000$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

км баландликка кўтариш учун бажарилиши зарур бўлган ишни топинг.

Ечилиши. Ернинг жисмни тортиш кучи F ва жисмнинг оғирлиги, унинг Ернинг марказидан қандай x узоқликда жойлашганлигига боғлиқ бўлади:

$$F(x) = \frac{\lambda}{x^2}, \text{ бу ерда } \lambda - \text{ ўзгармас сон.}$$

Агар P – жисмнинг, у Ер сиртида, яъни Ернинг марказидан R радиусга тенг масофада жойлашгандаги оғирлиги бўлса, у ҳолда $P = \frac{\lambda}{R^2}$, $\lambda = PR^2$ ва кўтарилаётган двигателнинг, ракета Ернинг марказидан x масофада бўлган моментдаги, бартараф қиладиган F кучи, x нинг маълум функциясидан иборат бўлади: $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$. Энди ракетани x баландликка кўтаришда унинг двигатели ишини қандайдир $q(x)$ функция деб, ҳамда ракетани яна dx кичик баландликка кўтаришда, F функция ўзгармайди деб, бажарилган иш орртимаси учун,

$$\Delta q \approx F(x)dx = \frac{PR^2}{x^2} dx = dq$$

тақрибий қийматни топамиз.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ракетани Ер сиртидан H баландликка кўтаришда x ўзгарувчи R дан $R + H$ гача ўзгаради. Шу сабабли, изланаётган A иш,

$$A = \int_R^{R+H} F(x) dx = pR^2 \int_R^{R+H} \frac{dx}{x^2} = pR^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_R^{R+H} = \frac{pRH}{R+H}$$

интеграл орқали ифодаланади.

$P = 1,5t$, $H = 2000 km$, $R = 6400 km$ бўлганлигидан, $Q = 2\,285\,714\,000 kГm \approx 2\,242\,285\,4340 dj$ бўлади. Энди двигателнинг, ракетани Ернинг тортилишидан тўла озод қилиш учун бажариш керак бўлган ишини, H чексиз ортиб борганда, $A(H)$ ишнинг лимити сифатида аниқлаш мумкин:

$$\lim_{H \rightarrow \infty} A(H) = \lim_{H \rightarrow \infty} \frac{pRH}{R+H} = pR.$$

P ва H нинг юқорида берилган қийматларида бу иш $9600\,000\,000 kГm \approx 94176000\,000 dj$ бўлади.

15.5 – мисол. Баландлиги $H = 1,5m$ ва радиуси $R = 0,4m$ бўлган цилиндр (10330 кг/м^2) атмосфера босими остида газ билан тўлдирилган бўлиб, поршень билан ёпилган. Поршенни цилиндр ичида $h = 1,2m$ масофага кўчириш учун газни изотермик кесишда сарфланадиган иш (миқдори) топилсин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Газ ҳолатининг изотермик, яъни температура ўзгармаган ҳолда, ўзгаришида v ҳажм ва газнинг p босими орасидаги боғланиш,

Бойль – Мариотт қонунига асосан, $p v = c = \text{const}$ формула орқали ифодаланади.

Шунинг учун, агар поршень цилиндрнинг ичида x масофага итарилса, поршеннинг юза бирлигига газнинг $p(x)$ босими,

$$p(x) = \frac{c}{v(x)} = \frac{c}{S(H - x)},$$

поршеннинг тўла S юзасига бўлган босим эса, $P(x) = Sp(x) = \frac{c}{H - x}$ бўлади.

Энди поршенни x м га итаришда сарфланадиган ишни қандайдир $q(x)$ функция деб олиб, ва поршенни кичик dx масофага итаришда унга таъсир қиладиган $P(x)$ босимни ўзгармас, деб ҳисоблаб, $q(x)$ функция ортормаси дифференциалининг тақрибий миқдорини топамиз:

$$\Delta q \approx P(x) dx = \frac{c}{H - x} dx = dq$$

Изланаётган умумий A ишга x нинг 0 дан h гача ўзгариши мос келади, шунинг учун,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$A = c \int_0^h \frac{dx}{H-x} = -c \ln (H-x) \Big|_0^h = c \ln \frac{H}{H-h}.$$

$H = 1,5m$, $R = 0,4m$, $h = 1,2m$, $p_0 = 10330 \text{ kГ} / m^2$ бўлганда,

$v_0 = \pi R^2 H = 0,24 \pi m^3$; $c = p_0 v_0 = 2479,2\pi$; $Q \approx 12533,3 \text{ kГ} m \approx 122951,7 \text{ ж}.$

15.3. Иқтисодий ҳисоб-китобларга тадбиқлар бўйича мисоллар.

15.6 – мисол. Агар корхонадаги ишчининг меҳнат маҳсулдорлиги

$$f(t) = \frac{3}{3t+1} + 4$$

функция орқали ифодаланса, ишчи иш кунининг учинчи соати давомида қанча ҳажмдаги маҳсулот ишлаб чиқаришини аниқланг.

Ечилиши. Агар ишчининг t вақт давомидаги меҳнат маҳсулдорлиги узлуксиз $f(t)$ функция орқали ифодаланса, ишчи t_1 дан t_2 гача ўтган вақт оралиғида, ҳажми

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \quad (15.5)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

формула бўйича аниқланадиган, маҳсулот ишлаб чиқаради. Қаралаётган мисолда,

$$f(t) = \frac{3}{3t+1} + 4; \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 3$$

бўлганлигидан, изланаётган ҳажм,

$$\begin{aligned} V &= \int_2^3 \left(\frac{3}{3t+1} + 4 \right) dt = \left(\ln(3t+1) + 4t \right) \Big|_2^3 = \\ &= \ln 10 + 12 - \ln 7 - 8 = \ln \frac{10}{7} + 4 \end{aligned}$$

бўлади.

15.7– мисол. Агар магазинга янги товар олиб келиниши $f(t) = 2t + 5$ функция орқали ифодаланса, магазинда уч кун мобайнида қанча ҳажмда товар тўпланишини аниқланг.

Ечилиши. Қаралаётган мисолда

$$f(t) = 2t + 5, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 3$$

бўлганлигидан, изланаётган ҳажм учун, (15.5) формуладан фойдаланган ҳолда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$V = \int_0^3 (2t + 5) dt = \left(\frac{2t^2}{2} + 5t \right) \Big|_0^3 = 9 + 15 = 24$$

бўлишини оламин.

15.4. Электр энергиясининг сарфланишини башорат қилиш (олдиндан айтиш).

Маълумки, электр энергиясининг ҳар бир чироқ ёки фонар томонидан сарфланиши, қуёш ботгандан то у чиққунча давом этади. Кеча қанча қисқа бўлса, шунча кам электр энергияси сарфланади. Йилда энг қисқа тун 22 июнга тўғри келганлигини, энг узун тун эса, 22 декабрга тўғри келганлигини ҳисобга олсак, улардан биринчисидан, иккинчисидан кам энергия сарфланишини оламин.

Шундай қилиб, энергиянинг сарфланиши ω – тебранишли жараёндан иборат экан. Бу жараён,

$$w = b + c \cos(2\pi(t + 0,025)) \quad (15.6)$$

функция орқали ифодаланиши мумкин. Бунда 0,025 қўшилувчи, максимумнинг, $t = -0,025$ қийматга тўғри келишини, яъни ҳар бир йил

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бошланишидан $0 \cdot 0,25 \cdot 365 = 9$ кун олдинга, 22 декабрга тўғри келишини кўрсатади; 2π кўпайтувчи эса, узунлиги 1 га (йилга) тенг бўлган даврни аниқлайди.

15.8- мисол. Тармоқ томонидан, $x=0$ дан $x=1$ гача, бир йилда энергия сарфланиши, (15.6) функция орқали ифодалансин, бу ерда b ва c қандайдир сонлар. У ҳолда, тармоқ $t=0$ дан $t=1$ гача ўтган бир йилда қанча энергия сарфлашини аниқланг.

Ечилиши. Юқоридаги бандларда бажарилган ишларни ҳисобга олган ҳолда, dt вақт давомида сарфланган энергия $w dt$, йил давомида сарфланган энергия эса,

$$\int_0^1 w dt$$

интегралга тенг бўлишини кўрамыз. У ҳолда,

$$\begin{aligned} \int_0^1 w dt &= \int_0^1 [b + c \cos(2\pi(t + 0,025))] dt = \\ &= b + c \int_0^1 \cos(2\pi(t + 0,025)) dt. \end{aligned}$$

Охирги интегрални ҳисоблаш учун, $2\pi(t + 0,025) = z$ алмаштириш оламиз.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Натижада,

$$\int_0^1 \cos(2\pi(t + 0,025))dt = \left. t = \frac{z}{2\pi} - 0,025, dt = \frac{dz}{2\pi}; \right|_{\substack{t=0 \Rightarrow z=0,05\pi; \\ t=1 \Rightarrow z=2,05\pi}} =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0,05}^{2,05\pi} \cos z dz = \frac{1}{2\pi} (\sin z) \Big|_{0,05\pi}^{2,05\pi} = 0$$

бўлади.

Бу ердан, бир йилда энергиянинг сарфланиши, b бирлик қувватни ташкил этишини оламиз.

15.9 – мисол. Ҳар бир лампа ва фонарнинг $x=0$ дан $x=1$ гача энергия сарфлаши (15.6) функция орқали ифодаланган бўлсин, бунда b ва c – қандайдир сонлар. Туманнинг ёритиш тармоғи $u = u_0 + at$ чизиқли қонун бўйича ўссин (ортсин), бу ерда t – йиллар билан ўлчанади. У ҳолда, тармоқнинг $t=0$ дан $t=1$ гача ўтган 1 йилда сарфлаган энергиясини ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Бу мисолда dt вақт бирлиги давомида сарфланган энергия $u w dt$ миқдорга, бир йил давомида сарфланган энергия эса,

$$\int_0^1 u w dt$$

интегралга тенг бўлишини кўрамиз.

Демак,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u w dt &= \int_0^1 (u_0 + at) [b + c \cos(2\pi(t + 0,025))] dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{bo'laklab integrallash usuli,} \\ \text{o'zgaruvchilarni almashtirish usuli} \end{array} \right| \approx \\ &\approx bu_0 + 0,5ab + 0,025ac. \end{aligned}$$

Бу ердан, тармоқ томонидан 1 йилда сарфланган энергия миқдори $bu_0 + 0,5ab + 0,025ac$ бирлик қувватдан иборат бўлиши келиб чиқади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисоллар

15.1. Бўшлиқда пастга тушаётган жисмнинг тезлиги $v = 9,8t$ м/сек формула бўйича аниқланади. Жисм тушиш бошлангандан 10 секунд вақт ўтганда қанча йўл босиб ўтишини аниқланг.

15.2. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (3t^2 - 2t)$ см/сек формула бўйича аниқланади. Жисм ҳаракат бошлангандан 4 секунд вақт ўтганда қанча йўл босиб ўтади?

15.3. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = \sqrt{5t + 4}$ м/сек формула бўйича аниқланади. Жисм ҳаракат бошлангандан 9 сек вақт ўтганда қанча йўл босиб ўтади?

15.4. Жисмнинг ҳаракат тезлиги $v = (4t - \frac{6}{t^2})$ см/сек. Унинг учинчи секундда босиб ўтган йўлини аниқланг.

15.5. 6 кГ миқдордаги куч пружинани 8 см га чўзганда, у қандай иш бажаришини аниқланг.

15.6. Пружинани 4 см га чўзганда 10 кГм миқдордаги иш бажарилиши

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

маълум. Пружинани 10 см га чўзиш учун қандай бажарилишини топинг.

15.7. Радиуси R га тенг бўлган ярим шар шаклидаги қоғоздан сувни чиқаришда сарф бўладиган иш миқдорини аниқланг.

15.8. Цилиндрда диаметри 20 см ва узунлиги 80 см бўлган поршень ҳаракат қилади. Бу цилиндр $P_0 = 10 \text{ кг/см}^2$ босим остида буғ билан тўлдирилган бўлса, температурани ўзгартирмасдан қандай иш бажарилганда, буғнинг ҳажми икки барабар камаяди?

15.9. Агар 5 кг куч пружинани 25 см га чўзса, у ҳолда пружинани 6 см га чўзиш учун қандай иш бажариш керак?

15.10. Агар 1 кг куч эластик пружинани 1 см га чўзса, у ҳолда, пружинани 10 см га чўзиш учун қандай иш бажариш керак (Гук қондасидан фойдаланиш керак)?

15.11. Агар корхонадаги ишчининг меҳнат маҳсулдорлиги $f(t) = \frac{4}{4t+1} + 1$ функция орқали ифодаланса, ишчи иш кунининг тўртинчи соати давомида қанча ҳажмдаги маҳсулот ишлаб чиқаришини аниқланг.

15.12. Агар магазинга янги товарлар олиб келиниши $f(t) = 2t + 5$ функция орқали ифодаланса, магазинда 6 кун мобайнида қанча ҳажмда товар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тўпланишини аниқланг.

15.13.Тармоқ томонидан $x=0$ дан $x=1$ гача ўтган, бир йилда энергия сарфланиши $w=3+2\cos(2\pi(t+0,025))$ функция орқали ифодалансин. 2 йилда, яъни $t=0$ дан $t=2$ гача ўтган даврда сарфланган энергия миқдорини аниқланг.

15.14. Ҳар бир лампа ва фонарнинг $x=0$ дан $x=1$ гача ўтган вақтда энергия сарфлаши $w=3+2\cos(2\pi(t+0,025))$ функция орқали ифодаланган бўлсин. бунда b ва c – қандайдир сонлар. Туманнинг ёритиш тармоғи $u=2+5t$ чизиқли қонун бўйича ўссин (ортсин), бу ерда t – йиллар билан ўлчанади. У ҳолда тармоқнинг $t=0$ дан $t=1$ гача ўтган 1 йилда сарфлаган энергиясини ҳисобланг.

15.15. Ҳар бир лампа ва фонарнинг $x=0$ дан $x=1$ гача энергия сарфлаши $w=3+2\cos(2\pi(t+0,025))$ функция орқали ифодаланган бўлсин,бунда b ва c – қандайдир сонлар тўпламининг ёрилиши тармоғи $u=1+2t^2$ квадратик қонун бўйича ўссин (ортсин), бу ерда t – йиллар билан ўлчанади. У ҳолда, тармоқнинг $t=0$ дан $t=1$ гача ўтган 1 йилда сарфлаган энергиясини ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

- 15.1. 490 м. 15.2. 48 м. 15.3. $\frac{134}{3}\text{ м.}$ 15.4. 9 см
- 15.5. $0,24\text{ кГм.}$ 15.6. $62,5\text{ кГм.}$ 15.7. $\frac{\pi R^4}{4}\text{ кГм.}$ 13.8. 1740 кГ см.
- 13.9. $A = 3,6\text{ кГм.}$ 13.10. $A = 0,5\text{ кДж.}$ 15.11. $\ln\frac{17}{13} + 1.$ 15.12. $66.$
- 15.13. 4 бирлик қувват. 15.14. $9,25\text{ бирлик қувват.}$ 15.15. $5,26\text{ бирлик қувват.}$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

IV-бoб. КЎП ЎЗГАРУВЧИЛИ ФУНКЦИЯЛАР

16-§. Евклид текислиги ва Евклид фазоси. Евклид фазосидаги муҳим тўпламлар

16.1. Евклид текислиги ва Евклид фазоси.

x ва y ҳақиқий сонларнинг мумкин бўлган ҳар қандай тартибланган (x, y) жуфтлари - тўпламига *координаталар текислиги* дейилади. Бунда ҳар бир (x, y) - жуфтлик координатлар текислигининг *нуқтаси* дейилади ва қисқача, M ҳарфи орқали белгиланади. x ва y сонлар- M нуқтанинг *координаталари* дейилади. $M(x, y)$ ёзувда, x ва y - M нуқтанинг координаталарини англатади.

16.1– таъриф. Агар координаталар текислигининг ихтиёрий $M_1(x_1; y_1)$ ва $M_2(x_2; y_2)$ нуқталари орасидаги $\rho(M_1, M_2)$ масофа тушунчаси киритилган бўлиб, y

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

формула бўйича аниқланса, у ҳолда координаталар текислиги *Евклид текислиги* дейилади ва R^2 орқали белгиланади.

m – ўлчовли координаталар фазоси ва Евклид фазоси тушунчалари ҳам шунга ўхшаш киритилади. $x_1, x_2, \dots, x_m$ ҳақиқий сонларнинг мумкин бўлган ҳар қандай тартибланган $x_1, x_2, \dots, x_m$ қийматлар тўпламига *координатлар фазоси* дейилади. Бунда ҳар бир координаталар фазосининг $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтаси M ёки $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ орқали белгиланади, $x_1, x_2, \dots, x_m$ сонлар эса, M нуқтанинг *координаталари* дейилади.

Агар координаталар фазосининг $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ ва $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$ нуқталари орасидаги $\rho(M', M'')$ масофа тушунчаси киритилган бўлиб, у

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2 + \dots + (x''_m - x'_m)^2}$$

формула бўйича аниқланса, у ҳолда координаталар фазоси, *Евклид фазоси* дейилади ва R^m каби белгиланади.

R^m фазода x ва y нуқталар орасидаги $\rho(x, y)$ масофа қуйидаги хоссаларга эга:

1⁰. $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0$ фақат ва фақат $x = y$ бўлганда;

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2^0. \rho(x, y) = \rho(y, x);$$

$$3^0. \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

16.2. Евклид фазосидаги муҳим тўплamlар.

Евклид фазосидаги $\{M\}$ тўплamlга доир мисоллар келтирамиз.

1) $\{M\} = \{(x, y): x \in R, y \in R, (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2\}$ тўплamlга, R^2 фазода, маркази $M_0(a; b)$ нуқтада, радиуси r га тенг бўлган ёпиқ доира $((x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ га очик доира) дейилади. Мос равишда, (x_1, x_2) , (x_1, x_2, x_3) ва $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ тартибланган жуфтлик, учлик ва ҳоказоларни икки ўлчовли, уч ўлчовли ва m ўлчовли векторларнинг координаталари деб ҳам қараш мумкин:

$$x = (x_1, x_2), \quad x = (x_1, x_2, x_3), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Кўп ҳолларда, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ символга, координаталари $x_1, x_2, \dots, x_m$ бўлган M нуқта ёки $\overrightarrow{OM}$ вектор, деб қаралади.

16.1-эслатма. Агар R^m координаталар фазосини координаталари $x_1, x_2, \dots, x_m$ бўлган x векторлар фазоси деб қаралса, у ҳолда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ векторларнинг *йиғиндиси* деб, координаталари $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_m + y_m$ бўлган векторга айтилади; $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ векторнинг бирор λ – ҳақиқий сонга λx *кўпайтмаси* деб, координаталари $\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m$ бўлган векторга айтилади.

Агар R^m - *векторлар фазоси* деб қаралиб, унинг элементларини қўшиш ва бирор ҳақиқий сонга кўпайтириш амаллари аниқланган бўлиб, бу амаллар, қуйидаги: 1) $x + y = y + x$; 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$; 3) шундай 0 ноль элемент мавжуд бўлиб, $\forall x$ элемент учун $x + 0 = x$; 4) $\forall x$ учун унга қарама – қарши x' вектор мавжуд бўлиб, $x + x' = 0$; 5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; 7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; 8) $1 \cdot x = x$ аксиомаларни қаноатлантирса, у ҳолда, R^m - *чизикли вектор фазо* дейилади.

R^m чизикли вектор фазода иккита $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ векторга $(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$ сонни мос қўйиш орқали, икки векторнинг (x, y) *скаляр кўпайтмаси* аниқланади. $\sqrt{(x, x)}$ сон x векторнинг *узунлиги* дейилади ва у $|x|$ каби белгиланади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Агарда $(x, y) = 0$ бўлса, у ҳолда, x ва y векторлар ўзаро ортогонал дейилади.

Агар x ва y векторлар нулдан фарқли векторлар бўлса, у ҳолда, улар орасидаги φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) бурчак

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x||y|}$$

формула орқали топилади.

$$2) \{M\} = \{(x, y, z): x \in R, y \in R, z \in R, (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq r^2\}$$

тўплам R^3 фазода маркази $M_0(a, b, c)$ нуқтада, радиуси r га тенг бўлган ёпиқ шар $((x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < r^2$ — очик шар) дейилади ва у қисқача, $\rho(M, M_0) < r$, $(\rho(M, M_0) < y)$ каби ёзилади.

$$3) \{M\} = \{(x, y): x \in R, y \in R, |x-a| \leq d_1, |y-b| \leq d_2\}$$
 тўплам маркази $M_0(a; b)$

нуқтада бўлган координаталар тўғри тўртбурчаги,

$$\{M\} = \{(x, y, y): x \in R, y \in R, z \in R, |x-a| \leq d_1, |y-b| \leq d_2, |z-c| \leq d_3\}$$

тўплам эса, маркази $M_0(a, b, c)$ нуқтада бўлган координаталар параллелепипеди дейилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$4) \{M\} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in R, i = \overline{1, m}, (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 \leq r^2 \right\}$$

тўплам, R^m фазода, маркази $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада, радиуси r га тенг бўлган *ёпиқ шар* дейилади ва қисқача, $\rho(M, M_0) \leq r$ шаклида ёзилади ($\rho(M, M_0) < r$ – *очиқ шар*).

$$5) \{M\} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in R, i = \overline{1, m}, (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2 = r^2 \right\}$$

тўплам, R^m фазода, маркази $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада, радиуси r тенг бўлган *сфера* дейилади.

16.2-эслатма. Маркази $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада, радиуси r га тенг бўлган *очиқ шарга*, маркази $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада радиуси r га тенг бўлган сферани қўшсак, натижада маркази M_0 нуқтада радиуси r га тенг бўлган *ёпиқ шар* ҳосил бўлади.

16.2 – таъриф. Маркази $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтада радиуси $\varepsilon > 0$ бўлган *очиқ* $\rho(M, M_0) < \varepsilon$ шарга M_0 нуқтанинг *атрофи* дейилади.

$$\{M\} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_m) : x_i \in R, i = \overline{1, m}, |x_1 - x_1^0| < d_1, |x_2 - x_2^0| < d_2, \dots, |x_m - x_m^0| < d_m \right\}$$

тўплам ($d_1, d_2, \dots, d_m$ – лар бирор ўзгармас сонлар), m – ўлчовли *очиқ*

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

координаталар параллелепипеди ёки M_0 нуктанинг *тўғри бурчакли атрофи* дейилади.

Қуйидаги элементар тасдиқлар ўринли: M_0 нуктанинг ихтиёрий ε - атрофи, M_0 нуктанинг бирор тўғри бурчакли атрофида жойлашади; M_0 нуктанинг ихтиёрий тўғри бўрчакли атрофи, унинг бирор ε - атрофида жойлашади.

Ҳақиқатан ҳам, белгиланган $\varepsilon > 0$ да $d_1 = d_2 = \dots = d_m = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$ деб олинса, у ҳолда кўрсатилган $d_1, d_2, \dots, d_m$ - ларда M_0 нуктанинг тўғри бурчакли атрофи унинг ε - атрофида жойлашади.

Агар $d_1 > 0, d_2 > 0, \dots, d_m > 0$ лар белгиланиб, $\varepsilon = \min\{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ деб олинса, у ҳолда, M_0 нуктанинг (кўрсатилган $d_1, d_2, \dots, d_m$ - ларда) тўғри бурчакли атрофида, унинг ε - атрофи ётади.

16.3 – таъриф. Агар $M \in \{M\} \subset R^m$ нуктанинг шундай ε - атрофи мавжуд бўлиб, бу атрофнинг барча нукталари $\{M\}$ тўпламга қарашли бўлса, у ҳолда, M нукта, $\{M\}$ тўпламнинг *ички нуқтаси* дейилади.

Агар $M \in R^m$ нуктанинг шундай ε - атрофи мавжуд бўлиб, бу атрофнинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

барча нукталари $\{M\}$ тўпламга қарашли бўлмаса, M нукта, $\{M\}$ тўпламнинг *ташқи нуқтаси* дейилади.

16.4–таъриф. Агар $M \in \{M\} \subset R^m$ нукта, $\{M\}$ тўпламнинг ички нуқтаси ҳам, ташқи нуқтаси ҳам бўлмаса, у ҳолда, M нукта, $\{M\}$ тўпламнинг *чегара нуқтаси* дейилади.

16.5–таъриф. Агар $\{M\} \subset R^m$ тўпламнинг ҳамма элементлари унинг ички нукталари, яъни унинг ихтиёрий M нуқтаси, ўзининг ихтиёрий ε – атрофи билан $\{M\}$ га қарашли, бўлса, у ҳолда, $\{M\}$ тўплам, *очиқ тўплам* дейилади.

16.6 – таъриф. M_0 нуқтани ўзида сақловчи ихтиёрий очиқ тўпламга M_0 нуқтанинг *атрофи* дейилади.

16.7– таъриф. Агар ихтиёрий $\{M\} \subset R^m$ тўплам ўзининг ҳамма чегара нукталарини ўзида сақласа, у ҳолда, $\{M\}$ тўплам, *ёпиқ тўплам* дейилади.

16.8 – таъриф. Агар $A \in R^m$ нуқтанинг ихтиёрий ε – атрофида $\{M\} \subset R^m$ тўпламнинг, ҳеч бўлмаганда, A дан фарқли битта нуқтаси мавжуд бўлса, у ҳолда, A нукта, $\{M\}$ тўпламнинг *лимит нуқтаси* дейилади.

$\{M\}$ тўплам ёпиқ бўлиши учун, унинг ҳамма лимит нуқталари унга

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

қарашли бўлиши зарур ва етарлидир.

16.9 – таъриф. Агар шундай m - ўлчовли шар мавжуд бўлиб, $\{M\}$ тўпламнинг барча элементлари шу шарга қарашли бўлса, у ҳолда, $\{M\}$ тўплам, *чегараланган* дейилади.

16.10– таъриф. Ушбу

$$L = \{M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_m = \varphi_m(t), \alpha \leq t \leq \beta\},$$

тўплам, бунда $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ функциялар $[\alpha; \beta]$ сегментда узлуксиз функциялар, *узлуксиз чизик* дейилади. $A(\varphi_1(\alpha), \dots, \varphi_m(\alpha))$ ва $B(\varphi_1(\beta), \dots, \varphi_m(\beta))$ нуқталар L чизикнинг *учлари* дейилади.

Ушбу

$$\{M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1 = x_1^0 + \alpha_1 t, x_2 = x_2^0 + \alpha_2 t, \dots, x_m = x_m^0 + \alpha_m t; -\infty < t < \infty\}$$

(бунда $x_1^0, \dots, x_m^0; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ – қандайдир сонлар) тўплам, R^m фазода *тўғри чизик* дейилади. Маълумки, бу тўғри чизик $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадан ўтади (M_0 нуқта $t = 0$ га мос келади).

16.11 – таъриф. Агар $\{M\}$ тўпламнинг ихтиёрий иккита нуқтасини, шу тўпламда тўлиқ ётувчи узлуксиз чизик билан туташтириш мумкин бўлса, у

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳолда, $\{M\}$ тўпламга *боғламли тўплам* дейилади.

16.12– таъриф. Агар $E \subset R^m$ тўплам очик боғламли тўплам бўлса, у ҳолда, E тўплам, R^m фазода *соҳа* дейилади.

Соҳа ва унинг чегарасининг бирлашмаси – *ёпиқ соҳа* дейилади.

16.1 – мисол. Текисликда координаталари, ушбу

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 < 25 \quad (16.1)$$

тенгсизликни қаноатлантирадиган нуқталар тўпламининг геометрик ўрнини аниқланг.

Ечилиши. Маълумки, $\{M\} = \{(x, y) : x \in R, y \in R : (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2\}$ тўплам, R^2 фазода, маркази $M(a, b)$ нуқтада, радиуси r га тенг бўлган очик доирани ифодалайди. Шунинг учун, координаталари (16.1) тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўплами - маркази $M_0(2; -3)$ нуқтада, радиуси $r = 5$ бўлган очик доирани ифодалайди (16.1-чизма).

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

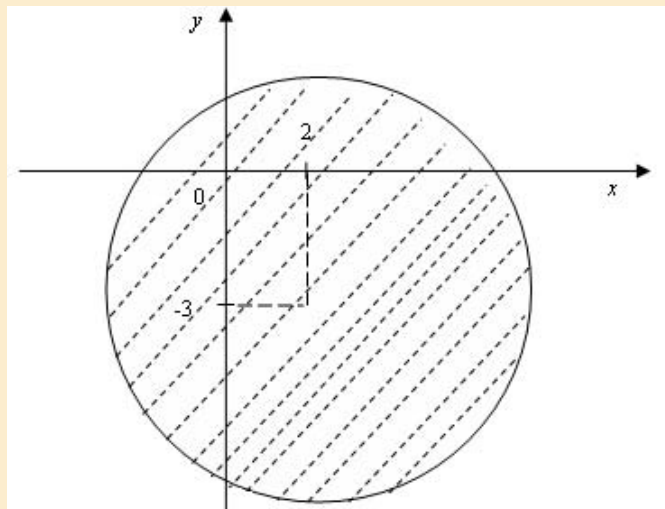


О р к а г а

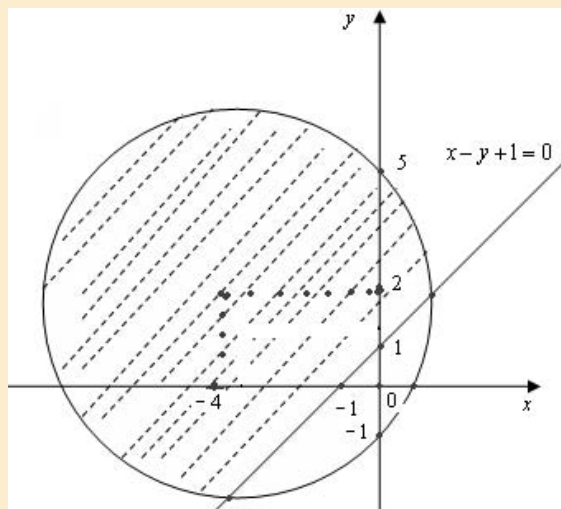
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



16.1-чизма.



16.2-чизма.

16.2 – мисол. Текисликда координаталари

$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-2)^2 \leq 25, \\ x - y + 1 \leq 0 \end{cases} \quad (16.2)$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламининг геометрик ўрнини аниқланг.

Ечилиши. Маркази $M_0(-4;2)$ нуқтада, радиуси 5 га тенг бўлган ёпик доирада ётган барча нуқталарнинг координаталари $(x+4)^2 + (y-2)^2 \leq 25$ тенгсизлиқни қаноатлантиради.

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Илова лар



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$x - y + 1 \leq 0$ тенгсизликни $y \geq x + 1$ кўринишда ёзиб оламиз. $y = x + 1$ тўғри чизикда ва ундан юқорида жойлашган нуқталарнинг координаталари $x - y + 1 \leq 0$ тенгсизликни қаноатлантиради (16.2-чизма).

$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 25$ айлана билан $y = x + 1$ тўғри чизикнинг кесишиш нуқтасини топиш учун
$$\begin{cases} (x+4)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$$
 системани биргаликда ечиб,

$A(1;2)$, $B(-4;-3)$ эканлигини топамиз. (16.2) тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўплами, $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 5^2$ айлана ва унинг ичида жойлашган, ҳамда $y = x + 1$ тўғри чизик ва ундан юқорида жойлашган нуқталарнинг кесишмасидир.

16.3 – мисол. Фазода координаталари,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \geq 36, \\ 2x - 3y + z - 2 \geq 0 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантирувчи нуқталар тўпламининг геометрик ўрнини аниқланг.

Ечилиши. $x^2 + y^2 + z^2 \geq 36$ тенгсизликни, $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ сферада ва ундан ташқарида ётган, $2x - 3y + z - 2 \geq 0$ тенгсизликни эса, $z = 2 - 2x + 3y$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

текислик ва ундан юқорида жойлашган нуқталар тўпламининг координаталари қаноатлантиради. Демак, системани, $z \geq 2 - 2x + 3y$ фазо билан $x^2 + y^2 + z^2 \geq 36$ шарнинг кесишган қисмини олиб ташлаш натижасида ҳосил бўлган қисмидаги нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради.

16.4 – мисол. Маркази $M_0(1;2)$ нуқтада, радиуси 4 га тенг бўлган доирадаги нуқталар тўпламини, $\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{cases}$ тенгсизликлар системаси кўринишида тасвирланг.

Ечилиши. Равшанки, берилган доирадаги нуқталарнинг абсциссаси – 3 дан 5 гача ўзгаради. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$ айлана тенгламасини, $y = 2 \pm \sqrt{15 - x^2 + 2x}$ кўринишда ёзамиз.

Бунда, $y = 2 + \sqrt{15 - x^2 + 2x}$ айлананинг юқори қисмини, $y = 2 - \sqrt{15 - x^2 + 2x}$ эса, айлананинг пастки қисмини ифодалайди. Демак, $x \in [-3; 5]$ сегментда ўзгарганда, y нинг қийматлари $2 - \sqrt{15 - x^2 + 2x}$ дан $2 + \sqrt{15 - x^2 + 2x}$ гача ўзгаради. Шундай қилиб, берилган доиранинг нуқталари тўплами,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 5, \\ 2 - \sqrt{12 + 2x - x^2} \leq y \leq 2 + \sqrt{15 + 2x - x^2} \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси ёрдамида берилган экан.

16.5 – мисол. Ушбу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$ эллипсоид билан чегараланган

тўпламни, куйидаги, $\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \\ \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y) \end{cases}$ тенгсизликлар системаси кўринишида

тасвирланг.

Ечилиши. Берилган эллипсоид тенгламасидан $z = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16}}$

эканлигини топамиз. Демак, z нинг ўзгариш соҳаси, $1 - \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} \geq 0$ дан иборат.

Бу соҳа, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипс билан чегараланган. Эллипс тенгламасидан,

$y = \pm 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$ бўлишини топамиз. Бундан x нинг - 5 дан 5 гача ўзгариши келиб

чиқади. $x \in [-5; 5]$ сегментда ўзгарганда y ўзгарувчи, $-4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$ дан $4\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

гача ўзгаради.

Агар M нукта эллипснинг ичида ётса, учлари $-\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}}$ ва

$\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}}$ бўлган қисми эллипсоиднинг ичида ётади. Демак, эллипсоид,

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5, \\ -4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} \leq y \leq \sqrt{1-\frac{x^2}{25}}, \\ -\sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}} \leq z \leq \sqrt{1-\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}} \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси ёрдамида берилади.

16.6-мисол. $\{M\}$ - текисликда координаталари $x^2 + y^2 < 25$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нукталар тўплами бўлсин. У ҳолда, $A(3;4)$ нукта, $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуктаси эканлигини исботланг.

Ечилиши. $A(3;4)$ нуктанинг, $|x-3| < \delta$, $|y-4| < \delta$ ($0 < \delta < 1$) тенгсизликлар орқали берилган ихтиёрий атрофини оламыз. $B\left(3-\frac{\delta}{2}, 4-\frac{\delta}{2}\right)$ нукта бу атрофда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ётади ва $\left(3 - \frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{\delta}{2}\right)^2 < 3^2 + 4^2 = 25$ тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, B нукта $\{M\}$ тўпламга қарашли экан. Шундай қилиб, 16.8- таърифга кўра, $A(3;4)$ нукта - $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуктаси бўлади.

16.7 – мисол. Текисликда $y \geq x^2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нукталар тўплами $\{M\}$ нинг ёпиқ тўплам эканлигини исботланг.

Ечилиши. Маълумки, $\{M\}$ тўплам ёпиқ бўлиши учун, унинг барча лимит нукталари ўзига қарашли бўлиши керак. Шунинг учун, ихтиёрий $A(a;b) \in \{M\}$ нукта $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуктаси бўлмаслигини кўрсатиш етарли. $A(a;b) \in \{M\}$ бўлсин. У ҳолда, $b < a^2$ тенгсизликка эга бўламиз.

$\varepsilon = a^2 - b > 0$ деб оламиз. Шундай $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ топиладики, $|x - a| < \delta$ тенгсизликдан

$|x^2 - a^2| < \frac{\varepsilon}{2}$ бўлиши келиб чиқади. У ҳолда, $|x - a| < \delta, |y - b| < \delta$

тенгсизликлардан

$$x^2 - y = (a^2 - b) + (b - y) + (x^2 - a^2) \geq (a^2 - b) - |b - y| - |x^2 - a^2| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 0.$$

Демак, A нуктанинг δ атрофи $\{M\}$ тўпламга қарашли эмас. Шунинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

учун, A нукта- тўпламнинг лимит нуктаси бўла олмайди. Шундай қилиб, $\{M\}$ тўплам ёпиқ экан.

16.8 – мисол. Ушбу $x^2 + y^2 < 100$ тенгсизлик орқали берилган $\{M\}$ тўпламнинг чегара нукталарини топинг.

Ечилиши. Берилган тенгсизликни қаноатлантирувчи нукталар тўплами – маркази координаталар бошида, радиуси 10 га тенг бўлган айлананинг ичидаги нукталар тўпамидан иборат (айланадаги нукталар $\{M\}$ тўпамга қарашли эмас).

Геометрик нуктаи назаридан, равшанки, $\{M\}$ тўпламнинг чегараси $x^2 + y^2 = 100$ айланадан иборат, $x^2 + y^2 < 100$ ва $x^2 + y^2 > 100$ тенгсизликлар билан берилган тўпламлар очик тўпламлардан иборат. Шунинг учун, $x^2 + y^2 < 100$ тўпламнинг нукталари ҳам $\{M\}$ тўпламнинг чегара нукталари бўла олмайди.

Энди $x^2 + y^2 = 100$ айлананинг нукталарини қараймиз. $\forall A(a; b)$ нукта шу айланада ётсин. A нуктанинг ихтиёрий атрофини қараймиз. Бу атрофда координаталари $|x| < |a|, |y| < |b|$ тенгсизликларни ва $|x| > |a|, |y| > |b|$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тенгсизликларни қаноатлантирувчи $B(x, y)$ нуқталар мавжуд. Биринчи тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар учун, $x^2 + y^2 < a^2 + b^2 = 100$, иккинчи тенгсизликларни қаноатлантирувчи нуқталар учун $x^2 + y^2 > 100$.

Демак $A(a; b)$ нуқта $\{M\}$ тўплам учун, 16.4-таърифга кўра, чегара нуқта бўлади. Маълумки, берилган тўпламнинг ҳамма чегара нуқталари, унинг чегараси бўлади.

16.9 – мисол. $\{M\}$ - текисликда иккала координаталари ҳам рационал бўлган нуқталар тўплами бўлсин. У ҳолда текисликдаги ихтиёрий $A(a; b)$ нуқта $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлишини исботланг.

Ечилиши. $A(a; b)$ нуқтанинг ихтиёрий $|x - a| < \delta$, $|y - b| < \delta$ атрофини қараймиз. a дан фаркли шундай r_1 рационал сон топиладики, $|r_1 - a| < \delta$ худди шундай, b дан фаркли r_2 шундай рационал сон топиладики, $|r_2 - b| < \delta$ бўлади.

У ҳолда, $B(r_1; r_2)$ нуқта $\{M\}$ тўпламга қарашли бўлиб, у $A(a; b)$ нуқтанинг белгиланган атрофида ётади ($B(r_1; r_2) \neq A(a, b)$). Демак, A нинг ихтиёрий атрофида $\{M\}$ тўпламнинг A дан фаркли нуқтаси мавжуд экан. Шунинг учун, 16.8- таърифга кўра, $A(a; b)$ нуқта, $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги тенгсизликлар билан берилган нукталар тўпламининг геометрик ўрнини аниқланг.

16.1. $y \leq 2x + 4$

16.2. $y^2 \geq 6x.$

16.3. $(x-4)^2 + (y+6)^2 \leq 25.$

16.4. $x^2 + 6x + y^2 - 26 > 0.$

16.5.
$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 9, \\ x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$

16.6.
$$\begin{cases} 0 < x^2 + y^2 < 25, \\ y > 2x^2. \end{cases}$$

16.7. А тўплам, $x^2 + y^2 \geq 1$ тенгсизлик, $B - x^2 + y^2 \leq 4$ тенгсизлик, $D - y \leq 8 - x^2$ тенгсизлик, $C - y \geq x^2$ тенгсизлик билан аниқланганда,

a) $(A \cup B) \cap (C \cup D);$

b) $(A \cap B) \cup (C \cap D);$

тўпламларнинг геометрик ўрнини аниқланг.

16.8. $x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$ айлана ва $x + 2y + 1 = 0$ тўғри чизиқ билан чегараланган айланма сегментнинг нукталари тўпламини тенгсизликлар системаси ёрдамида ифодаланг.

16.9. Учлари, $A(-1;2), B(3;7), C(6;4), D(0;-2)$ нукталарда бўлган тўртбурчакнинг нукталари тўпламини тенгсизликлар системаси ёрдамида

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ифодаланг.

16.10. Учлари $A(-3;1)$, $B(2;4)$, $C(6;2)$, $D(1;-1)$ нукталарда бўлган $ABCD$ параллелограммнинг нукталари тўпламини тенгсизликлар системаси ёрдамида ифодаланг.

16.11. $y = x^2 - 6$ параболадан $y = 2x + 1$ тўғри чизиқ ёрдамида кесиб олинган сегментнинг нукталари тўпламини тенгсизликлар системаси ёрдамида ифодаланг.

16.12. Текисликда $x - 3y + 4 = 0$ тўғри чизиқдан юқорида, маркази $M_0(2;-1)$ нуктада, радиуси 10 га тенг бўлган доирадан ташқарида жойлашган нукталар тўпламини тенгсизликлар системаси ёрдамида ифодаланг.

16.13. Ушбу $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ эллипсда ва унинг ичида ётган нукталар, учлари $A(0;5)$, $B(-3;6)$, $C(3;0)$ нукталарда бўлган учбурчакнинг нукталари ҳамда $y = x^2$ параболадан юқорида ётган нукталар тўпламининг умумий қисмидан иборат бўлган, учта тўпламнинг нукталари тўпламини тенгсизликлар системаси ёрдамида ифодаланг.

Қуйидаги берилган тўпламларни битта ёки бир нечта,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \end{cases}$ кўринишдаги тенгсизликлар системаси ёрдамида ифодаланг:

16.14. Томонлари: $x = 3$, $x = 5$, $3x - 2y + 4 = 0$, $6x - 4y + 2 = 0$ бўлган параллелограми.

16.15. $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$ тенгсизликлар билан берилган соҳа.

16.16. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1$ – эллипснинг ички қисми.

16.17. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ параболалар билан чегараланган соҳа.

16.18. $y^2 = 6x$ парабола ва $x = 2$ тўғри чизиқ билан чегараланган соҳа.

16.19. $x = 2$, $y = x$ тўғри чизиқлар ва $xy = 1$ гипербола билан чегараланган соҳа.

Фазода тенгсизлик ёки тенгсизликлар системаси ёрдамида берилган нуқталар тўпламининг геометрик ўрнини аниқланг:

16.20. $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0, \\ z > 0. \end{cases}$

16.21. $xyz > 0$.

16.22. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

16.23. $4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$16.24. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 25, \\ x^2 + y^2 < 3. \end{cases}$$

16.25. Фазодаги $A(4;1;5)$ нуқтадан $2x + 6y + 3z - 12 = 0$ текисликка параллел текислик ўтказилган айланма параболоидни шу текислик билан кесганда ҳосил бўлган соҳани тенгсизликлар системаси орқали ифодаланг.

Қуйидаги берилган тўпламларни,

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), \\ \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y) \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси кўринишида ифодаланг:

$$16.26. \frac{x^4}{25} + \frac{y^4}{16} + \frac{z^4}{9} = 1 \text{ сирт билан чегараланган соҳа.}$$

$$16.27. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ сирт билан чегараланган соҳа.}$$

16.28. $x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 4, x + y + z = 8$ текисликлар билан чегараланган соҳа.

16.29. $2az = x^2 + y^2$ параболоид ва $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ шар билан чегараланган соҳа.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

16.30. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ шар ва $x^2 = y^2 + z^2 (y > 0)$ конус билан чегараланган соҳа.

16.31. $\{M\}$ - текисликдаги иккала координатаси ҳам иррационал бўлган нуқталар тўплами бўлсин. У ҳолда, текисликнинг ихтиёрий $A(a;b)$ нуқтаси, $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси эканлигини исботланг.

16.32. $\{M\}$ - текисликда абсциссаси рационал, ординатаси эса, иррационал бўлган барча нуқталар тўплами бўлсин. У ҳолда, текисликнинг ихтиёрий $A(a;b)$ нуқтаси $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси эканлигини исботланг.

16.33. Текисликнинг $A\left(\frac{1}{m}; \frac{1}{n}\right) (m, n = 1, 2, \dots)$ кўринишдаги барча нуқталаридан иборат бўлган $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқталарини топинг. Координаталар боши $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўладими?

16.34. $A(3;4)$ ва $B(-1;2)$ нуқталар ва фақат шу нуқталар лимит нуқталари бўлган, ҳеч бўлмаганда, битта тўплам тузинг.

16.35. Ҳамма лимит нуқталари фақат $A(0;n)$ (n – бутун сон) кўринишда бўлган тўпламни тузинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

16.36. Иккита очик тўпламларнинг йиғиндиси очик тўплам эканлигини исботланг.

16.37. Иккита ёпиқ тўпламларнинг йиғиндиси ёпиқ тўплам эканлигини исботланг.

16.38. Координаталари қуйидаги $x + y > 5$, $x^2 + y^2 < 100$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган нуқталар тўпламининг очик тўплам эканлигини исботланг.

16.39. Координаталар ушбу $x + y \geq 5$, $x^2 + y^2 \leq 100$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган нуқталар тўпламининг ёпиқ тўплам эканлигини исботланг.

Қуйидаги тенгсизликлар орқали аниқланган тўпламларнинг қайси бири соҳа бўлади?

16.40. $4 < x^2 + y^2 < 25$.

16.41.
$$\begin{cases} 4 < x^2 + y^2 < 10, \\ -1 < y < 1. \end{cases}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

16.1. $y = 2x + 4$ тўғри чизик ва ундан пастдаги нуқталар.

16.2. $y^2 = 6x$ парабола устида ётувчи ва ундан ташқаридаги нуқталар тўплами.

16.3. Маркази $M_0(4; -6)$ нуқтада, радиуси 5 га тенг бўлган айланада ва унинг ичида ётган нуқталар тўплами. **16.4.** Маркази $M_0(-3; 1)$ нуқтада, радиуси 6 га тенг бўлган айланадан ташқарида жойлашган нуқталар тўплами.

16.5. Маркази $M_0(0; 0)$ нуқтада, радиуслари 3 ва 4 бўлган концентрик айланалар орасидаги нуқталар тўплами.

16.6. Маркази $M_0(0; 0)$ нуқтада, радиуси 5 га тенг бўлган айлананинг ичидаги ҳамда $y = 2x^2$ параболадан юқорида жойлашган нуқталар тўплами.

$$\begin{aligned} 16.8. \quad & \begin{cases} (x-2)^2 + (y+3)^2 \leq 13, \\ x \leq -2y-1. \end{cases} & 16.9. \quad & \begin{cases} y \leq \frac{5}{4}x + \frac{13}{4}, \\ y \leq -x + 10, \\ y \geq x - 2, \\ y \geq -4x - 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$16.16. \begin{cases} \frac{1}{9}x + 1\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{9}x + 3\frac{7}{9}, \\ \frac{3}{5}x - 1\frac{3}{5} \leq y \leq \frac{3}{5}x + 2\frac{4}{5}. \end{cases}$$

$$16.12. \begin{cases} y > \frac{1}{3}(x+4), \\ (x-2)^2 + (y+1)^2 > 100. \end{cases}$$

$$16.14. \begin{cases} 3 \leq x \leq 5, \\ \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}x + 2. \end{cases}$$

$$16.16. \begin{cases} -5 \leq x \leq 5, \\ -\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2} < y < \frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}. \end{cases}$$

$$16.18. \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ -\sqrt{6x} \leq y \leq \sqrt{6x}. \end{cases}$$

16.20. Биринчи октантдаги нуқталар (координаталар текисликларидан

$$16.11. \begin{cases} y \geq x^2 - 6x - 4, \\ y \leq 2x + 1. \end{cases}$$

$$16.13. \begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \leq 1, \\ y > x^2, \\ y \leq -\frac{1}{3}x + 5, \\ y \leq -\frac{5}{3}x + 5, \\ y \geq -x + 3. \end{cases}$$

$$16.15. \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}. \end{cases}$$

$$16.17. \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}. \end{cases}$$

$$16.19. \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq x, \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}. \end{cases}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ташқари). **16.21.** Биринчи, учинчи, олтинчи ва саккизинчи октантдаги нуқталар (координаталар текисликларидан ташқари) . **16.22.** Маркази

координаталар бошида, радиуси 3 га тенг бўлган шарнинг нуқталари.

16.23. Радиуслари 2 ва 4 га тенг бўлган концентрик сфералар билан чегараланган соҳа (бу сфералар ҳам киради).

16.24. Маркази координаталар бошида, радиуси 5 га тенг бўлган сфера ҳамда ўқи Oz ва радиуси 3 га тенг бўлган доиравий цилиндр билан чегараланган соҳа (соҳа чегараларидан ташқари).

$$\text{16.25. } x^2 + y^2 \leq z \leq 2x + 6y + 3z - 29. \quad \text{16.26. } \begin{cases} -5 \leq x \leq 5, \\ -\sqrt[4]{16\left(1 - \frac{x^4}{25}\right)} \leq y \leq \sqrt[4]{16\left(1 - \frac{x^4}{25}\right)}, \\ -\sqrt[4]{9\left(1 - \frac{x^4}{25} - \frac{y^4}{16}\right)} \leq z \leq \sqrt[4]{9\left(1 - \frac{x^4}{25} - \frac{y^4}{16}\right)}. \end{cases}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$16.27. \begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \\ -c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2} \leq z \leq c\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2} \end{cases}$$

$$16.28. \begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ 0 \leq z \leq 8 - x - y. \end{cases}$$

$$16.29. \begin{cases} -a \leq x \leq a, \\ -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}, \\ \frac{1}{2a}(x^2 + y^2) \leq z \leq \sqrt{3a^2 - x^2 - y^2}. \end{cases}$$

$$16.30. \begin{cases} 0 \leq x \leq R\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ -x \leq y \leq x, \\ -\sqrt{x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 - y^2}. \end{cases}$$

$$16.34. A_n\left(3 + \frac{1}{n}; 4\right) \text{ ва } B_n\left(-1 + \frac{1}{n}; 2\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$16.35. \text{ Мисол учун, } A_m\left(\frac{1}{m}; n\right).$$

16.40. Соҳа.

16.41. Соҳа эмас.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

17-§. Кўп ўзгарувчили функция тушунчаси ва унинг аниқланиш соҳаси

$\{M\} (\{M\} \subset R^2)$ тўплам берилган бўлсин.

17.1 – таъриф. $\{M\}$ тўпламнинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтасига бирор қонун ёки қоида ёрдамида u сон ($u \in R$) мос қўйилган бўлса, $\{M\}$ тўпламда икки ўзгарувчили $u = u(M)$ ёки $u = f(M) = f(x, y)$ *функция аниқланган* дейилади. Бунда $\{M\}$ тўплам- функциянинг аниқланиш соҳаси, $\{u\}$ тўплам эса, функциянинг *қийматлар тўплами* ёки *ўзгариш соҳаси* дейилади.

$\{M\} \subset R^m$ тўплам берилган бўлсин.

17.2 – таъриф. $\{M\}$ тўпламнинг ҳар бир $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтасига бирор қонун ёки қоида ёрдамида бирор u сон ($u \in R$) мос қўйилган бўлса, $\{M\}$ тўпламда t ўзгарувчили *функция аниқланган* дейилади ва у $u = u(M)$ ёки $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ каби белгиланади. Бунда $\{M\}$ тўплам функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади. $\{u\}$ тўплам эса, унинг *қийматлар тўплами* ёки *ўзгариш соҳаси* дейилади. Бундан буён, функциянинг аниқланиш соҳасини

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$D(f)$, ўзгариш соҳасини эса, $E(f)$ орқали белгилаймиз.

17.3–таъриф. $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = C (C \in R)$ шартни қаноатлантирувчи $M \in E (E \subset R^m)$ нукталар тўпламига, $f(M)$ функциянинг C – *сатҳи* дейилади. Кўп ҳолларда, икки ўзгарувчили $f(x, y)$ функциянинг C – сатҳи, *сатҳ чизиги*, уч ўзгарувчили $f(x, y, z)$ функциянинг C – сатҳи эса, *сатҳ сирти* деб юритилади.

$u = f(M)$ функция E соҳада ($M \in E \subset R^m$) берилган бўлсин.

17.4–таъриф. Агар $\forall M \in E, \lambda M \in E, \lambda \in R$ учун

$$f(\lambda M) = f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

тенглик ўринли бўлса, у ҳолда $f(M)$ – α даражали *бир жинсли функция* дейилади.

Агар юқоридаги шартларда $f(\lambda M) = |\lambda|^m f(M)$ тенглик ўринли бўлса, $f(M)$ m – даражали *мусбат биржинсли функция* дейилади.

Масалан, $f(x) = x, x \in R$, 1- даражали биржинсли функция, $f(x) = |x|, x \in R$, 1- даражали *мусбат биржинсли* фуцнкциядир.

17.1 – мисол . Қуйида берилган функцияларнинг аниқланиш соҳаси ва

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ўзгариш соҳасини топинг:

1) $u = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$; 2) $u = \ln xy$; 3) $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$.

Ечилиши. 1) Берилган функция текисликнинг координаталари $16 - x^2 - y^2 \geq 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $M(x, y)$ нукталар тўпламида аниқланган. Бу тенгсизлик, $x^2 + y^2 \leq 16$ тенгсизликка тенг кучли. Охирги тенгсизлик, маркази $M_0(0,0)$ нуктада, радиуси 4 га тенг бўлган доирани ифода қилади. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси $D(u)$: текисликдаги маркази координаталар бошида, радиуси эса, 4 га тенг бўлган ёпиқ доирадан, қийматлар тўплами ёки ўзгариш соҳаси $E(u)$: $[0;4]$ – сегментдан иборат экан.

2) $u = \ln xy$ функция, текисликнинг координаталари $xy > 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган $M(x, y)$ нукталар тўпламидан иборат. Охирги тенгсизлик, а) $x > 0, y > 0$; б) $x < 0, y < 0$ тенгсизликлар системасига тенг кучли.

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси, координатлар текислигининг биринчи ва учинчи чоракларидан иборат (координаталар ўқлари кирмайди), ўзгариш соҳаси $E(u)$ эса, $-\infty < u < \infty$ сон ўқидан иборат.

3) $u = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2$ функция R^m фазода аниқланган бўлиб, унинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ўзгариш соҳаси, $[0, \infty)$ дан иборат.

17.2 – мисол. Қуйида берилган функцияларнинг аниқланиш соҳаси топинг ва уни чизмада кўрсатинг.

$$1) u = \frac{x+y}{3x-y}; \quad 2) u = \sqrt{(x-2)(y+3)}; \quad 3) u = \ln x - \ln y;$$

$$4) u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}; \quad 5) u = \frac{x^2 + y - z}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Ечилиши. 1) $u = \frac{x+y}{3x-y}$ функция, x ва y ўзгарувчиларнинг, касрнинг махражини нолга айлантирмайдиган қийматлари тўпламида аниқланган, яъни $D(u)$ бутун текисликнинг $y = 3x$ тўғри чизикдан ташқари қисмидан иборат экан (17.1-чизма).

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

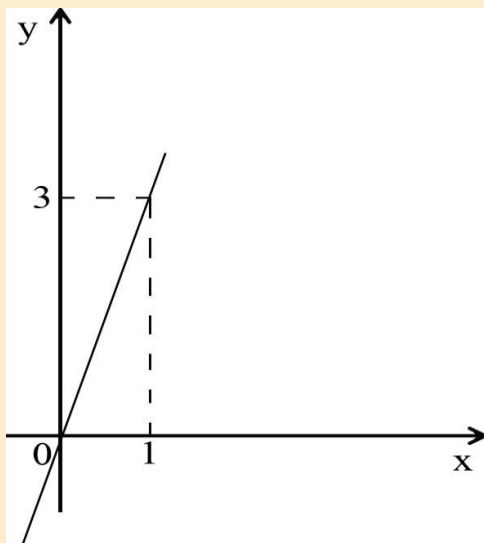


О р к а г а

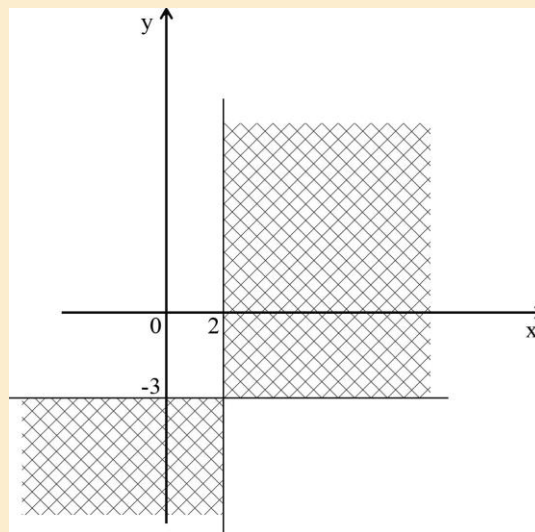
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



17.1-чизма.



17.2-чизма.

2) $u = \sqrt{(x-2)(y+3)}$ функциянинг маънога эга бўлиши учун,

$(x-2)(y+3) \geq 0$ тенгсизлик ўринли бўлиши керак. Бу тенгсизлик, $\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ y+3 \geq 0 \end{cases}$

ёки $\begin{cases} x-2 \leq 0 \\ y+3 \leq 0 \end{cases}$ тенгсизликлар системасига тенг кучли.

Биринчи системанинг ечими, $x \geq 2, y \geq -3$ дан иборат; иккинчи системанинг ечими эса, $x \leq 2, y \leq -3$ дан иборат. Изланаётган соҳани, яъни

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар



Оркага

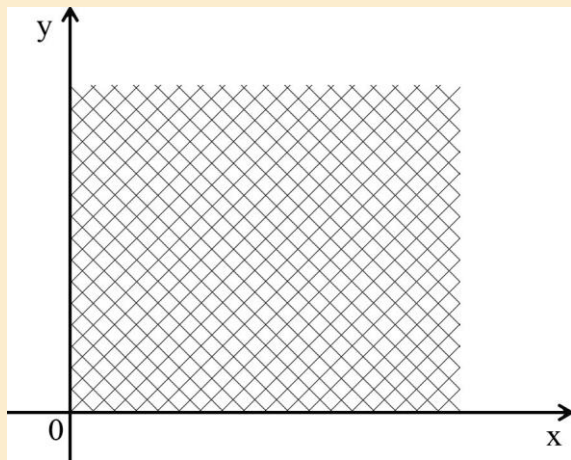
Саҳифа / 708

Тулик экран

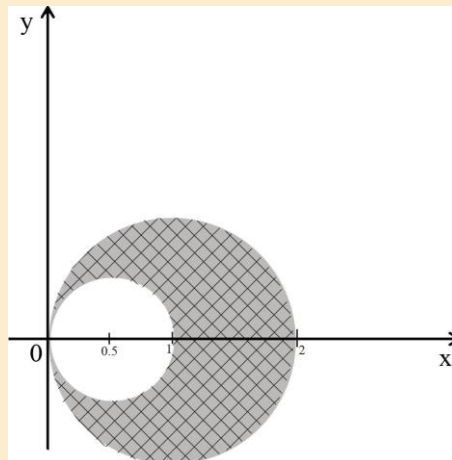
Чикиш

берилган функциянинг аниқланиш соҳасини, топиш учун координаталар текислигида $x=2$ ва $y=-3$ тўғри чизикларни чизиш етарли (17.2- чизма).

3) $u = \ln x - \ln y$ функциянинг маънога эга бўлиши учун, $x > 0, y > 0$ тенгсизликлар ўринли бўлиши керак. Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси, координаталар текислигининг биринчи чорагидан иборат (координаталар ўқлари кирмайди) (17.3-чизма)



17.3-чизма.



17.4-чизма.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

4) $u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$ – функциянинг аниқланиш соҳаси, текисликда

координаталари, $\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2} \geq 0$ тенгсизликни қаноатлантирадиган (x, y)

нуқталар тўпламидан иборат. Бу тенгсизлик қуйидаги

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x \geq 0, \\ 2x - x^2 - y^2 > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + y^2 - x \leq 0, \\ 2x - x^2 - y^2 < 0 \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4}, \\ (x-1)^2 + y^2 < 1; \end{cases} \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}, \\ 1 < (x-1)^2 + y^2; \end{cases}$$

иккита тенгсизликлар системасига тенг кучли.

Биринчи тенгсизликлар системасини маркази $M_0\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ нуқтада, радиуси

$\frac{1}{2}$ га тенг бўлган ёпиқ доиранинг ташқарисидagi нуқталарнинг, ва маркази

$M_1(1; 0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган очик доиранинг ичкарисидagi нуқталарнинг, координаталари қаноатлантиради; иккинчи тенгсизликлар

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

системасини эса, маркази $M_0\left(\frac{1}{2};0\right)$ нуқтада, радиуси $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган ёпик доиранинг ичидаги нуқталарнинг ва маркази $M_1(1;0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган очик доиранинг ташқарисидаги нуқталарнинг координаталари қаноатлантиради (17.4-чизма).

Шундай қилиб, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси: координаталари $x \leq x^2 + y^2 < 2x$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталар тўпламидан иборат экан.

$$5) \quad u = \frac{x^2 + y - z}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}} \quad \text{функция маънога эга бўлиши учун, } x, y, z$$

ўзгарувчилар $9 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$ ёки $x^2 + y^2 + z^2 < 9$ тенгсизликни қаноатлантириши керак. Бу тенгсизлик, фазода маркази координаталар бошида, радиуси эса, 3 га тенг бўлган очик шарни ифодалайди (17.5-чизма).

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

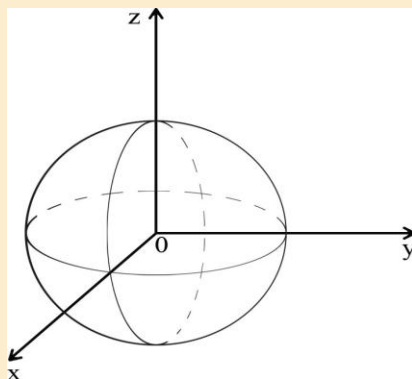


О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



17.5-чизма.

17.3 – мисол $u = \sqrt{1-x^2-y^2}(\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечилиши. $\sqrt{1-x^2-y^2}$ – ифода x ва y нинг ихтиёрий ҳақиқий қийматларида мавҳум сонни ифодалайди. Шунинг учун берилган функция-нинг аниқланиш соҳаси x ва y нинг

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0 \quad (*)$$

тенгламани қаноатлантирадиган қийматлар тўпламидан иборат бўлади. $(*)$ дан $\sin \pi x = 0$, $\sin \pi y = 0$. Бу тенгламаларни, x ва y нинг бутун қийматлари

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

қаноатлантиради, яъни $A(n; m)$ нукталар тўплами (n ва m бутун сонлар), берилган функциянинг аниқланиш соҳасини ифодалайди.

17.4 – мисол. Қуйидаги берилган функцияларнинг C – сатҳ чизиқлари топилсин:

$$1) u = xy,$$

$$2) u = \sqrt{y - x},$$

$$3) u = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2};$$

$$4) u = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0).$$

Ечилиши. 1) $u = xy$ функциянинг сатҳ чизиқлари оиласи - x ва y ларнинг, $xy = C$ тенгламани қаноатлантирадиган (x, y) қийматлари тўпамидан иборат бўлади, бунда $C \in \mathbb{R}$. C га ҳар хил қийматлар бериш натижасида, ҳар хил сатҳ чизиқларини ҳосил қиламиз. Масалан, $C = 1, 2, \dots, n$ қийматларда $xy = 1, xy = 2, \dots, xy = n$, биринчи ва учинчи чоракларда жойлашган гиперболоидлар оиласини; $C = -1, -2, \dots, -n$ қийматларда эса, $xy = -1, xy = -2, \dots, xy = -n$ иккинчи ва тўртинчи чоракларда жойлашган гиперболоидлар оиласини ҳосил қиламиз. $C = 0$ да $xy = 0$, яъни сатҳ чизиқлари $x = 0$ ва $y = 0$ тўғри чизиқлардан иборат бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

2) $u = \sqrt{y-x}, \sqrt{y-x} = C$, бундан $y = x + C^2$. Демак, берилган $u = \sqrt{y-x}$ функциянинг сатҳ чизиғи, $C \geq 0$ бўлганда, $(0; C^2)$ ва $(1; 1 + C^2)$ нукталардан ўтувчи тўғри чизикдан, $C < 0$ бўлганда эса, $\emptyset$ - бўш тўпламдан иборат.

3) $\sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2} = C$, $36 - 4x^2 - 9y^2 = C^2$, $4x^2 + 9y^2 = 36 - C^2$. Агар $C \in [0; 6]$ бўлса, берилган функциянинг сатҳ чизиғи- маркази $(0;0)$ нуктада, фокуси Ox ўқда, ярим ўқлари эса, мос равишда, $\frac{\sqrt{36 - C^2}}{2}$, $\frac{\sqrt{36 - C^2}}{3}$ бўлган эллипсдан; $C = 6$ бўлганда, $(0;0)$ нуктадан; $C \notin [0; 6]$ бўлганда, $\emptyset$ - бўш тўпламдан иборат бўлади.

$$4) \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2} = C, x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{C}\right)^2 = \frac{1}{C^2}$$

Агар $C \neq 0$ бўлса, у ҳолда, берилган функциянинг сатҳ сирти – радиуси $\frac{1}{|C|}$, маркази $\left(0;0;\frac{1}{C}\right)$ нуктада бўлган сферадан $((0;0;0)$ нуктадан ташқари) иборат; агар $C = 0$ бўлса, $(0;0;0)$ нуктадан ташқари $z = 0$ текисликдан иборат бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

17.5 – мисол. Ушбу $u = x^{\sqrt{2}} \sin \frac{y}{x} + y^{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{y}$ функциянинг биржинсли

эканлигини исботланг ва унинг биржинслилик даражасини топинг.

Ечилиши. x ни λx га, y ни λy га алмаштириб, топамиз:

$$\begin{aligned} u &= (\lambda x)^{\sqrt{2}} \sin \frac{(\lambda y)}{(\lambda x)} + (\lambda y)^{\sqrt{2}} \cos \frac{(\lambda x)}{(\lambda y)} = \lambda^{\sqrt{2}} \cdot x^{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{y}{x} + \lambda^{\sqrt{2}} \cdot y^{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{y} = \\ &= \lambda^{\sqrt{2}} \left(x^{\sqrt{2}} \cdot \sin \frac{y}{x} + y^{\sqrt{2}} \cdot \cos \frac{x}{y} \right) = \lambda^{\sqrt{2}} \cdot u. \end{aligned}$$

Демак, **17.4** – таърифга кўра, берилган функция биржинсли ва унинг биржинслилик даражаси $\lambda = \sqrt{2}$.

17.5 – мисол. Ушбу $u = \frac{xy + zt}{xyz + yzt}$ функциянинг биржинсли эканлиги

исботланг ва унинг биржинслилик даражасини топинг.

Ечилиши. x ни λx га, y ни λy га, z ни λz га, t ни λt га алмаштириб, топамиз:

$$u = \frac{\lambda x \cdot \lambda y + \lambda z \cdot \lambda t}{\lambda x \cdot \lambda y \cdot \lambda z + \lambda y \cdot \lambda z \cdot \lambda t} = \frac{\lambda^2 xy + \lambda^2 zt}{\lambda^3 xyz + \lambda^3 yzt} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{xy + zt}{xyz + yzt} = \lambda^{-1} u.$$

Демак, берилган функция биржинсли ва унинг бир жинслилик даражаси

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\lambda = -1.$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функциянинг аниқланиш соҳасини топинг ва чизмасини чизинг.

$$17.1. \quad u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$$17.2. \quad u = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}.$$

$$17.3. \quad u = \frac{1}{x + y}.$$

$$17.4. \quad u = \frac{x}{\sqrt{x - y}} + \frac{y}{\sqrt{x + y}}.$$

$$17.5. \quad u = \arccos \frac{x^2 + y^2}{9}.$$

$$17.6. \quad u = \ln(y^2 - 4x + 8).$$

$$17.7. \quad u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}.$$

$$17.8. \quad u = \frac{\sqrt{4x - y^2}}{\ln(1 - x^2 - y^2)}.$$

$$17.9. \quad u = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}.$$

$$17.10. \quad u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

Қуйидаги функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

$$17.17. \quad u = \ln(1 - x - y - z).$$

$$17.12. \quad u = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$17.13. \quad u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$17.14. \quad u = \sqrt{8 - x^2 - 2y^2 - 4z^2}.$$

$$17.15. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

$$17.16. \quad u = \arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b} + \arcsin \frac{z}{c}.$$

$$17.17. \quad u = xy + \sqrt{\ln \frac{9}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} - 9}. \quad 17.18. \quad u = \frac{1}{\sqrt{z - x^2 - y^2}}.$$

$$17.19. \quad u = \sqrt{2(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2 + z^2)^2} - 1.$$

$$17.20. \quad u = \frac{\ln x + \ln z}{\sqrt{y} - 1} + \ln(5 - x - y - z).$$

Қуйидаги $u = f(x, y)$ функциянинг $(x, y) \in E$ тўпламдаги қийматлари тўпламини (ўзгариш соҳаси) топинг $((x, y) \in E \subset R^2)$:

$$17.21. \quad u = x - 2y - 3; E = \{(x, y); x + y = 1, x \geq 0, y > 0\}.$$

$$17.22. \quad u = x^2 - xy + y^2, E = \{(x, y); |x| + |y| = 1\}.$$

$$17.23. \quad u = x^2 + y^2 - 12x + 16y + 25, E = \{(x, y); x^2 + y^2 = 25\}.$$

$$17.24. \quad u = \ln(2x^2 + 3y^2), E = \{(x, y); x + y = 2, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Қуйидаги функциянинг сатҳ чизиқларини топинг.

$$17.25. \quad u = y - x.$$

$$17.26. \quad u = \sqrt{y - x}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$17.27. \quad u = x^2 + y^2.$$

$$17.28. \quad u = x^2 - y^2.$$

$$17.29. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

$$17.30. \quad z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}.$$

$$17.31. \quad u = \sqrt{y - \sin x}.$$

Қуйидаги мисолларда берилган функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини топинг ҳамда унинг сатҳ чизикларини аниқланг. Сатҳ чизикларидан бирини чизинг.

$$17.32. \quad f(x, y) = 9x^2 + y^2.$$

$$17.33. \quad f(x, y) = \frac{1}{xy}.$$

Қуйидаги функциянинг сатҳ сиртларини топинг.

$$17.34. \quad u = x + y + z.$$

$$17.35. \quad u = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$17.36. \quad u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 2x}.$$

$$17.37. \quad u = \ln(x^2 + y^2 + z^2).$$

$$17.38. \quad u = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$17.39. \quad u = \sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2} + \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}.$$

Қуйидаги мисолларда берилган функциянинг аниқланиш ва ўзгариш соҳаларини топинг ҳамда унинг сатҳ сиртларини аниқланг. Сатҳ сиртларидан бирини чизинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$17.40. f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z.$$

$$17.41. g(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Қуйидаги функцияни бир жинслиikka текширинг ва унинг биржинслилик даражасини топинг.

$$17.42. u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x}, \quad x > 0.$$

$$17.43. u = \frac{x^2 - 3xy + y^2}{\sqrt{x^2 + 2xy - y^2}}.$$

$$17.44. u = \sqrt[6]{x^6 z^2 + 2x^3 y^4 z + xy^2 \cdot z^5}. \quad 17.45. 4) u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - t^2}.$$

$$17.46. u = \frac{xy + zt}{xyz + yzt}.$$

$$17.47. u = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^\pi (\ln x_{i+1} - \ln x_i).$$

$$17.48. u = x^2 y + z^2 + yz.$$

17.49. x, y ўзгарувчиларнинг ҳар қандай λ жуфт даражали биржинсли функциясини, $f(x; y) = |x|^\lambda \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ кўринишда тасвирлаш мумкинлигини кўрсатинг.

17.50. x, y ўзгарувчиларнинг ҳар қандай λ тоқ даражали бир жинсли функциясини, $f(x; y) = |x|^{\lambda-1} x \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ кўринишда тасвирлаш мумкинлигини кўрсатинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

17.51. Ушбу $f(x; y, z) = |x|^\lambda \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ функциянинг λ жуфт даражали

биржинсли эканлигини исботланг.

17.52. x, y, z ўзгарувчиларнинг ҳар қандай тоқ даражали биржинсли

функциясини $f(x; y, z) = |x|^{\lambda-1} x \cdot f\left(\frac{y}{x}; \frac{z}{x}\right)$ кўринишда тасвирлаш мумкинлигини исботланг.

Мустақил ечиш мисолларнинг жавоблари

17.1. Маркази $(0;0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган ёпиқ доира.

17.2. $|x| \leq 1, |y| \geq 1.$ **17.3.** $y = -x$ тўғри чизик нуқталаридан ташқари

текисликнинг ҳамма нуқталари. **17.4.** Бурчак биссектрисалари билан

чегараланган ўнг вертикал бурчакнинг ички қисми.

17.5. Маркази координаталар бошида, радиуси 3 га тенг бўлган доира.

17.6. Учи $(2;0)$ нуқтада ва фокуси $(3;0)$ нуқтада бўлган параболанинг ташқи қисми.

17.7. Текисликнинг $x^2 + y^2 = R^2$ ва $x^2 + y^2 = r^2$ айланалар орасидаги қисми.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

17.8. Текисликнинг $y^2 = 4x$ параболанинг ичи билан $x^2 + y^2 = 1$ айлана

орасидаги қисми (парабола ёйи киради, айлана ёйи кирмайди).

17.9. $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ - ҳалқа.

17.10. $x \leq x^2 + y^2 < 2x$ - ойча.

17.11. $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$ нуқталардан ўтувчи текисликлар билан чегараланган ва $(0;0;0)$ нуқтани ўзида сақловчи очик ярим фазо.

17.12. Маркази $(0;0;0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган очик шар.

17.13. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ конуснинг ташқи томони (чегараси киради, учи

кирмайди).

17.14. Фазонинг $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{2} = 1$ - эллипсоид билан

чегараланган қисми (эллипсоиднинг нуқталари киради).

17.15. Биринчи октантда.

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| \leq a, \\ |y| \leq b, \\ |z| \leq c \end{array} \right.$$

17.17. Фақат $x^2 + y^2 = 9$ айлананинг нуқталари.

17.18. $z = x^2$, $y = 0$ параболанинг Oz ўқ атрофида айланиши натижасида ҳосил бўлган айланма параболоиднинг ички қисми.

17.19. Маркази $(0;0;0)$ нуқтада, радиуси 1 га тенг бўлган сфера.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

17.20. Учлари $(4;1;0)$, $(0;1;0)$, $(0;5;0)$, $(0;1;4)$ нуқталарда бўлган очик

пирамида. **17.21.** $[-5;-2]$. **17.22.** $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. **17.23.** $[-50;150]$.

17.24. $\left[\ln \frac{24}{5}; \ln 12\right]$. **17.25.** $(0;C)$ ва $(1;1+C)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик.

17.26. Агар $C \geq 0$ бўлса, $(0;C^2)$ ва $(1;1+C^2)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизик; агар $C < 0$ бўлса ϕ - бўш тўплам.

17.27. Концентрик айланалар.

17.28. $y = \pm x$ умумий асимптотага эга бўлган тенг томонли гиперболалар оиласи. **17.29.** $C > 0$ бўлганда, маркази $(0,0)$ нуқтада, фокуси Ox ўқда, ярим ўқи $\frac{1}{C}$ бўлган гипербола; $C \leq 0$ бўлганда, ϕ - бўш тўплам.

17.30. Эллипсга ўхшаш фигуралар оиласи.

17.31. Агар $C \geq 0$ бўлса, $y = C^2 + \sin x$ – синусоида, агар $C < 0$ бўлса, ϕ - бўш тўплам. **17.32.** $D(f) = R^2$, $E(f) = [0, \infty)$, эллипслар.

17.33. $D(f) = \{(x, y) : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$, $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0, \infty)$, гиперболалар.

17.34. Параллел текисликлар оиласи.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

17.35. Маркази координата бошида бўлган сфералар оиласи.

17.36. Агар $C < -1$ ёки $C > 0$ бўлса маркази $(-1, 0, 0)$, радиуси $\sqrt{\frac{C+1}{C}}$ бўлан сфера; $C = -1$ бўлса, $(-1, 0, 0)$ нукта, $-1 < C \leq 0$ бўлса, ϕ - бўш тўплам.

17.37. Маркази $(0; 0; 0)$ нуктада, радиуси $e^{C/2}$ га тенг бўлган сфера.

17.38. $C \neq 0$ бўлганда, маркази $\left(0; 0; \frac{1}{C}\right)$ нуктада, радиуси $\frac{1}{|C|}$ га тенг бўлган

сфера $((0; 0; 0)$ нукта кирмайди), $C = 0$ бўлганда, $(0; 0; 0)$ нуктадан ташқари

$z = 0$ текислик. **17.39.** Агар $C > 2$ бўлса, $\frac{x^2}{(C/2)^2} + \frac{y^2 + z^2}{(C/2)^2 - 1} = 1$ эллипсоид;

$C = 2$ бўлса, $[-1; 1]$ кесма; $C < 2$ бўлса, ϕ - бўш тўплам.

17. 40. $D(f)$: Охуз фазонинг барча нукталари, $E(f)$: барча ҳақиқий сонлар,

эллиптик параболоид $z = x^2 + y^2 + 1$. **17.41.** $D(f) = R^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, $E(f)$: мусбат

ҳақиқий сонлар, сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

17.42. $\lambda = 0$. **17.43.** $\lambda = 1$. **17.44.** $\lambda = 4/3$. **17.45.** $\lambda = 1$.

17.46. $\lambda = -1$. **17.47.** π . **17.48.** Биржинсли эмас.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

18-§. R^m фазода сонлар кетма – кетлиги ва унинг лимити

R^m фазо ва N - натурал сонлар тўплами берилган бўлсин. Ҳар бир n ($n \in N$) натурал сонга, бирор қонун ёки қоида ёрдамида, R^m фазонинг бирор муайян $M_n = M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ ($M_n \subset R^m$) нуқтаси мос қўйилган, яъни

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow M_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_m^{(1)}), \\ 2 &\rightarrow M_2(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_m^{(2)}), \\ &\dots\dots\dots \\ n &\rightarrow M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)}) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

бўлса, R^m фазода $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ сонлар кетма – кетлиги аниқланган дейилади ва қисқача $\{M_n\}$ ($M_n \subset R^m$) каби белгиланади.

$$\text{Мисоллар: } 1) M_n = M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right): M_1(1,1), M_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \dots, M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), \dots$$

$$2) M_n = M_n\left(0, \frac{1}{n}\right): M_1(0,1), M_2\left(0, \frac{1}{2}\right), \dots, M_n\left(0, \frac{1}{n}\right), \dots,$$

$$3) M_n = M_n\left(\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right): M_1(1,0,1), M_2\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \dots, M_n\left(\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}\right), \dots$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Бу кетма-кетликларнинг биринчи ва иккинчиси, R^2 фазонинг нуқталаридан, учинчиси эса, R^3 фазонинг нуқталаридан ташкил топган сонлар кетма-кетликларидир.

R^m фазода

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots \quad (18.1)$$

соҳалар кетма-кетлиги ва $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ нуқта берилган бўлсин.

18.1-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилсаки, барча $n > n_0$ лар учун

$$\rho(M_n, A) < \varepsilon \quad (18.2)$$

тенгсизлик бажарилса, A нуқта $\{M_n\}$ кетма-кетликнинг лимити дейилади ва $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$ ёки $n \rightarrow \infty$ да $M_n \rightarrow A$ каби белгиланади.

Агар (18.1) кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у, *яқинлашувчи кетма-кетлик* дейилади. Лимит таърифидаги шартни қаноатлантирувчи A нуқта мавжуд бўлмаса, $\{M_n\}$ кетма-кетлик *лимитга эга эмас* дейилади, кетма-кетликнинг ўзи эса, *узоқлашувчи* деб аталади. Кетма-кетликнинг лимити таърифидаги ε ихтиёрий мусбат сон бўлиб, изланаётган n_0 ($n_0 \in N$) эса, шу ε га боғлиқ

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

равишда топилади, шунинг учун, баъзи ҳолларда, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ каби ёзилади.

18.1- мисол. R^2 фазода берилган $\{M_n\} = \left\{M_n\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right\}$ кетма-кетликнинг

лимита $A = A(0; 0)$ эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. $\forall \varepsilon > 0$ сонни олайлик. Берилган ε га кўра, $n_0 = \left[\frac{\sqrt{10}}{\varepsilon}\right] + 1$

десак, унда $\forall n > n_0$ лар учун,

$$\begin{aligned}\rho(M_n; A) &= \rho\left(M_n\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n^2}\right); A(0,0)\right) = \sqrt{\left(\frac{3}{n} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{n^2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{n^2} + \frac{1}{n^4}} < \sqrt{\frac{10}{n^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{n} < \frac{\sqrt{10}}{n_0} = \frac{\sqrt{10}}{\left[\frac{\sqrt{10}}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon\end{aligned}$$

тенгсизлик бажарилади. Демак, $\rho(M_n; A) < \varepsilon$. 18.1- таърифга кўра,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = A(0, 0)$$

бўлади.

18.2 - мисол. R^2 фазода, берилган $\{M_n\} = \{M_n((-1)^{n+1}, (-1)^{n+1})\}$ кетма-

кетликнинг лимита мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Тескарисидан фараз қилайлик, яъни берилган кетма-кетлик лимитга эга ва унинг лимити $A = A(a_1, a_2)$ бўлсин. Лимитнинг таърифига кўра, $\forall \varepsilon > 0$, жумладан $\varepsilon = 1$ учун шундай $n_0 \in N$ номер топиладики, $\forall n > n_0$ дан бошлаб,

$$\rho((1; 1), (a_1; a_2)) < \varepsilon, \quad \rho((-1; -1), (a_1; a_2)) < \varepsilon$$

тенгсизликлар бажарилади. Бу тенгсизликлар ёрдамида

$$2\sqrt{2} = \rho((1; 1), (-1; -1)) \leq \rho((1; 1), (a_1; a_2)) + \rho((-1; -1), (a_1; a_2)) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2 \quad (\varepsilon = 1)$$

зиддиятни ҳосил қиламиз.

Бу зиддиятга сабаб, қаралаётган кетма-кетлик лимитга эга, деган фаразимиздир. Демак, берилган кетма-кетлик лимитга эга эмас.

18.1 – теорема. R^m фазода $\{M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})\}$ кетма-кетликнинг $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m) \in R^m$ лимитга эга бўлиши, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A$ учун, бир вақтда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} &= a_1 \\ \dots\dots\dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} &= a_m \end{aligned}$$

бўлиши зарур ва етарли. Бундан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = A \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = a_1 \\ \dots\dots\dots, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^{(n)} = a_m \end{cases}$$

эканлиги келиб чиқади.

18.2-таъриф. $M_n \subset R^m$ бўлсин. Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам, шундай $n_0 \in N$ топилиб, барча $n > n_0, p > n_0$ ($p \in N$)лар учун $\rho(M_n, M_{p+n}) < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, $\{M_n\}$ кетма-кетлик R^m фазода *фундаментал кетма-кетлик* деб аталади.

Равшанки, агар $\{M_n\} (M_n \subset R^m)$ кетма-кетлик R^m фазода фундаментал кетма-кетлик бўлса, M_n нинг координаталари ҳосил қилган $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал кетма-кетлик бўлади ва аксинча, $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал кетма-кетлик бўлса, $\{M_n\} (M_n \subset R^m)$ кетма-кетлик R^m фазода фундаментал кетма-кетлик бўлади, яъни қуйидаги теорема ўринли.

18.2– теорема. R^m фазода $M_n = M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ кетма – кетликнинг фундаментал бўлиши учун, унинг координаталаридан ҳосил бўлган

Чикиш



$\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал кетма – кетлик бўлиши зарур ва етарли.

18.3-теорема(Коши принципи). $\{M_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши учун, унинг фундаментал кетма-кетлик бўлиши зарур ва етарли.

18.4-теорема. Агар $\{M_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, унинг лимити ягонадир.

18.3-таъриф. Агар $\{M_n\}$ кетма-кетликнинг барча ҳадларидан тузилган тўплам чегараланган бўлса, $\{M_n\}$ кетма-кетлик *чегараланган кетма-кетлик* деб аталади.

18.4-таъриф. Агар $\exists R > 0$ мавжуд бўлиб, $\forall n$ лар учун $\rho(M_n, O) \leq R$ тенгсизлик бажарилса, $\{M_n\}$ кетма-кетлик *чегараланган кетма-кетлик* дейилади, бунда $O(0, 0, \dots, 0)$.

18.5-теорема. R^m фазода $\{M_n\}$ кетма-кетликнинг чегараланган бўлиш учун, бу кетма-кетликнинг координаталаридан иборат $\{x_1^{(n)}\}, \{x_2^{(n)}\}, \dots, \{x_m^{(n)}\}, \dots$ сонлар кетма-кетликлари ҳар бирининг чегараланган бўлиши зарур ва етарлидир.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

18.6-теорема. Агар $\{M_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлса, у чегараланган бўлади.

18.7-теорема. Агар $\{M_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг limiti A бўлса, у ҳолда $\{kM_n\}$ ($k \in R$) кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлиб, унинг limiti kA га тенг бўлади, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} kM_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = kA$

18.8-теорема. Агар $\{M_n\}$ ва $\{N_n\}$ кетма-кетликлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг limitлари, мос равишда, A ва B бўлса, у ҳолда $\{M_n \pm N_n\}$ кетма-кетлик ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг limiti $A \pm B$ га тенг бўлади, яъни

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n \pm N_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} N_n = A \pm B$$

R^m фазода $M_n = M_n(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Бу кетма-кетликнинг $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ ($n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ $n_k \in N$, $k=1,2,\dots$) номерли ҳадларидан ташкил топган, ушбу $M_{n_1}, M_{n_2}, \dots, M_{n_k}, \dots$ ($M_{n_k} \in R^m$, $k=1,2,\dots$) кетма-кетлик, берилган кетма-кетликнинг қисмий кетма-кетлиги дейилади ва у $\{M_{n_k}\}$ каби белгиланади.

Масалан, R^2 фазода

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$(1;1), \left(\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right), \left(\frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^2}\right), \dots, \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}\right), \dots$$

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right), \dots, \left(\frac{1}{2n}; \frac{1}{2n}\right), \dots$$

кетма–кетликлар, $(1;1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right), \dots, \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) \dots$ кетма–кетликнинг қисмий

кетма–кетликлари бўлади.

18.9-теорема. Агар $\{M_n\}$ кетма–кетлик яқинлашувчи бўлиб, унинг лимити A ($A \in R^m$) бўлса, у ҳолда, бу кетма–кетликнинг ҳар бир $\{M_{n_k}\}$ қисмий кетма–кетлиги ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг лимити ҳам A га тенг бўлади.

18.1-эслатма. Кетма–кетлик қисмий кетма–кетликларининг лимити мавжуд бўлишидан, берилган кетма–кетликнинг лимити мавжуд бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди. Масалан, ушбу $(1;1), (-1;-1), (1;1), (-1;-1), \dots, ((-1)^{n+1}; (-1)^{n+1})$ кетма–кетлик лимитга эга эмас, лекин унинг қисмий кетма – кетликлари, мос равишда, $(1;1)$ ва $(-1;-1)$ лимитларга эга. Шундай қилиб, $\{M_n\}$ кетма–кетлик лимитга эга бўлмаса ҳам, унинг қисмий кетма – кетликлари лимитга эга бўлиши мумкин экан.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

18.9-теорема (Больцано-Вейерштрасс). Ҳар қандай чегараланган

кетма-кетликдан яқинлашувчи қисмий кетма-кетлик ажратиш мумкин.

18.3- мисол. R^2 фазода $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}, \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n} \right) \right\}$ кетма-

кетликнинг лимитини топинг.

Ечилиши. Берилган кетма-кетликнинг координаталаридан ташкил топган кетма-кетликлар, сонлар кетма-кетликлари бўлиб, улар қуйидаги кўринишда бўлади:

$$x_1^{(n)} = \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}, \quad x_2^{(n)} = \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}.$$

Равшанки,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot (2/3)^n + 27}{(2/3)^n + 1} = 27,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot (2/5)^n - 15}{100 \cdot (2/5)^n + 2} = -\frac{15}{2}.$$

Демак, 18.1-теоремага кўра, берилган кетма-кетликнинг лимити

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^{n+2} + 3^{n+3}}{2^n + 3^n}, \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n} \right) = A \left(27; -\frac{15}{2} \right).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

18.4- мисол. R^4 фазода $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \frac{n-1}{n}; \frac{2n^2-1}{n^2}; \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \right) \right\}$

кетма-кетликнинг лимитини топинг.

Ечилиши. Берилган кетма-кетликнинг координаталаридан ташкил топган кетма-кетликлар сонлар кетма-кетлиги бўлиб, улар

$$x_1^{(n)} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; x_2^{(n)} = \frac{n-1}{n}; x_3^{(n)} = \frac{2n^2-1}{n^2}; x_4^{(n)} = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$$

кўринишда бўлади. Булар учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_3^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{n^2} = 2; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_4^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2.$$

Демак, 18.1-теоремага кўра, берилган кетма-кетликнинг лимити- $A(0; 1; 2; e^2)$ бўлади.

18.5- мисол. R^2 фазода $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n} \right) \right\}$ кетма-кетликнинг

фундаментал бўлишини кўрсатинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Берилган $\forall \varepsilon > 0$ га кўра, $n_0 = \left\lceil \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ деб олинса, у ҳолда

$\forall n > n_0, \forall p \ (p \in N)$ лар учун.

$$\begin{aligned} \rho(M_n; M_p) &= \rho\left(M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right); M_p\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right)\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{2} \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right| < \\ &< \sqrt{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \right) \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} \right) = 2\sqrt{2} \frac{1}{n_0} < 2\sqrt{2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Демак, 18.2- таърифга кўра, берилган кетма-кетлик фундаментал бўлар экан.

18.6 - мисол. R^2 фазода $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{n}; 0 \right) \right\}$ кетма-кетликнинг

фундаментал эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. $\forall n_0$ лар учун, берилган $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{4}$ га кўра, $n > p \ (p \in N)$, деб

олинса, у ҳолда,

$$\begin{aligned} \rho(M_{n+p}(x_{n+p}, 0); M_n(x_n, 0)) &= \sqrt{(x_{n+p} - x_n)^2} = |x_{n+p} - x_n| = \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}, \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Бундан, $n = 2p$ бўлганда,

$$\rho(M_{n+p}(x_{n+p}, 0); M_n(x_n, 0)) > \frac{2}{3} > \frac{1}{4} = \varepsilon_0$$

эканлиги келиб чиқади. Бу эса, берилган кетма-кетликнинг фундаментал эмаслигини кўрсатади.

18.7- мисол. R^2 фазода

$$\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{4} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}; \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right) \right\}$$

кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканлигини исботланг.

Ечилиши. Берилган кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканлигини кўрсатиш учун, унинг фундаментал кетма-кетлик эканлигини кўрсатиш етарли. Бунинг учун $\{M_n(x_n, y_n)\}$ кетма-кетликнинг координаталари ҳосил қилган $\{x_n\}, \{y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳар бири фундаментал эканлигини кўрсатамиз. Берилган $\forall \varepsilon > 0$ га кўра, $n_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ деб олинса, у ҳолда,

$\forall n > n_0$ ва $\forall p$ ($p \in \mathbb{N}$) лар учун,

$$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} <$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} + \dots = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Демак, $\{x_n\}$ кетма-кетлик фундаментал бўлар экан.

Энди $\{y_n\} = \left\{ \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos n!}{n(n+1)} \right\}$ кетма-кетликнинг фундаментал

кетма-кетлик эканлигини кўрсатамиз. Берилган $\forall \varepsilon > 0$ га кўра, $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ деб

олинса, у ҳолда $\forall n > n_0$ ва $\forall p$ ($p \in \mathbb{N}$) лар учун,

$$\begin{aligned} |y_{n+p} - y_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{1}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+p) \cdot (n+p+1)} = \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \dots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

Шундай қилиб, 18.2- теоремага кўра, берилган кетма-кетлик фундаментал кетма-кетлик бўлади, бундан эса, 18.4- теоремага асосан,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

берилган кетма-кетликнинг яқинлашувчи эканлиги келиб чиқади.

Мустақил ечиш учун мисоллар

R^2 фазода қуйидаги кетма – кетликнинг лимити $A (A \in R^2)$ эканлигини исботланг.

18.1. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{1}{n}; \frac{10}{n} \right) \right\}, A = (0; 0).$

18.2. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{4n^2}{n^2 - 1}; \frac{2 - n}{3 + n} \right) \right\}, A = (4; -1).$

18.3. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{5}{n}; \frac{2}{n^2} \right) \right\}, A = (0; 0).$

18.4. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{1}{n^2}; \frac{\sin n}{n} \right) \right\}, A = (0; 0).$ 18.5. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{n}{5^n}; \frac{3}{n} \right) \right\}, A(0; 0).$

18.6. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\sqrt[n]{3}; \frac{\log_3 n}{n} \right) \right\}, A(1; 0).$ 18.7. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\sqrt[n]{n}; \frac{n^3}{3^n} \right) \right\}, A(1; 0).$

R^2 фазода қуйидаги кетма – кетликнинг лимити $A (A \in R^2)$ эканлигини исботланг:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$18.9. \{M_n\} = \{M_n(\sqrt[3n]{9}; \sqrt[2n]{0,25})\}, A(1;1).$$

$$18.10. \{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{\sqrt[n]{8}-1}{\sqrt[n]{2}-1}; 3^{\frac{n^2+2}{n^2+1}} \right) \right\}, A(3;3).$$

$$18.11. \{M_n\} = \left\{ M_n(\sqrt[n]{n}; \frac{a^n}{n!}) \right\}, (a > 0), A(1;0).$$

$$18.18. \{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{n+1}{n^2-1}; \frac{n^2-3n+4}{n^3+4n^2-5n+6} \right) \right\}, A(0;0).$$

$$18.15. \{M_n\} = \{M_n(\sqrt[n]{n^2}; \sqrt[n^2]{n})\}, A(1;1).$$

$$18.16. \{M_n\} = \{M_n(\sqrt[n]{3n-2}; \sqrt[n]{n^3+3n})\}, A(1;1).$$

$$18.17. \{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{\log_5(n^2+1)}{n}; \frac{n-\lg n}{\log_2(4^n+1)} \right) \right\}, A\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

$$18.18. \{M_n\} = \left\{ M_n \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}; \frac{\log_a n}{n} \right) \right\} (a > 1), A(0;0).$$

$$18.19. \{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{(-2)^n}{(n+2)!}; \frac{1}{(0,3)^n \cdot n!} \right) \right\}, A(0;0).$$

$$18.20. \{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}; \frac{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sin n!}{n+1} \right) \right\}, A(3;0).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

18.21. $\{M_n\} = \left\{ M_n \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}; \frac{n}{2^n} \right) \right\}, \quad A\left(\frac{4}{3}; 0\right).$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

19-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг лимити

19.1. Кўп ўзгарувчили функциянинг лимитининг таърифлари.

$u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

19.1- таъриф (Гейне таърифи). Агар $\{M\}$ тўпламнинг нуқталаридан тузилган ва A га интилувчи ҳар қандай $\{M_n\}$ ($M_n \neq A, n=1,2,\dots$) кетма-кетлик олинганда ҳам, функциянинг унга мос келган $\{f(M_n)\}$ қийматлари кетма-кетлиги ҳамма вақт, ягона B (чекли ёки чексиз) лимитга интилса, шу B га $f(M)$ функциянинг A нуқтадаги (ёки $M \rightarrow A$ даги) лимити дейилади ва у

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = B \text{ ёки } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = B \text{ ёки } M \rightarrow A \text{ да } f(M) \rightarrow B$$

каби белгиланади.

19.2.-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, $\exists \delta > 0$ бўлиб, $0 < \rho(M; A) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $M \in \{M\}$ нуқталарда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$|f(M) - B| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, шу B сонга $f(x)$ функциянинг A нуқтадаги ($M \rightarrow A$ даги) *лимита* дейилади.

$u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпламда аниқланган бўлиб, ∞ эса, $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

19.3- таъриф (Гейне таърифи). Агар $\{M\}$ тўпламнинг нуқталаридан тузилган ҳар қандай $\{M_n\}$ кетма-кетлик учун $M \rightarrow \infty$ да функциянинг унга мос келган $\{f(M_n)\}$ қийматлари кетма-кетлиги ҳамма вақт ягона B сонга интилса, шу B сонга $f(M)$ функциянинг $M \rightarrow \infty$ даги *лимита* дейилади ва $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = B$ каби белгиланади.

19.4-таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\exists E > 0$ бўлиб, $\rho(M, O) > E$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $M \in \{M\}$ нуқталарда $|f(M) - B| < \varepsilon$ тенгсизлик бажарилса, B сон $f(M)$ функциянинг $M \rightarrow \infty$ даги *лимита* дейилади ва $\lim_{M \rightarrow \infty} f(M) = B$ ёки $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow \infty \\ x_2 \rightarrow \infty \\ \dots \\ x_m \rightarrow \infty}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = B$ каби белгиланади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

19.5-таъриф (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун $\exists \delta > 0$ бўлиб, $0 < \rho(M, A) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $M \in \{M\}$ нуқталарда $|f(M)| > \varepsilon$ ($f(M) > \varepsilon$; $f(M) < -\varepsilon$) бўлса, $f(M)$ функциянинг A нуқтадаги ($M \rightarrow A$ даги) *лимити* $+\infty$ ($-\infty$) дейилади.

19.1- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x, y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 > 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

функциянинг $M(x, y) \rightarrow A(0; 0)$ ($x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$) даги *лимити* нолга тенг эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. $f(x, y)$ функция R^2 да берилган бўлиб, $A(0; 0)$ нуқта шу тўпламнинг *лимит нуқтасидан* иборат.

1) *Гейне таърифи буйича:* R^2 тўпламдан $A(0; 0)$ нуқтага интилувчи ихтиёрий $\{M_n\} = \{M_n(x^{(n)}; y^{(n)})\}$ ($M_n \neq A(0; 0), n = 1, 2, \dots$) кетма-кетликни оламин. Функциянинг унга мос келган $\{f(M_n)\}$ қийматлари кетма-кетлиги учун,

$$f(M_n) = f(x^{(n)}, y^{(n)}) = \frac{x^{(n)} \cdot y^{(n)}}{\sqrt{(x^{(n)})^2 + (y^{(n)})^2}} = \frac{x^{(n)} y^{(n)}}{\sqrt{(x^{(n)})^2 + (y^{(n)})^2}} \cdot \sqrt{x^{(n)} y^{(n)}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^{(n)} \cdot y^{(n)}}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўлади. Бундан $x^{(n)} \rightarrow 0, y^{(n)} \rightarrow 0$ да $\sqrt{x^{(n)} \cdot y^{(n)}} \rightarrow 0$.

$$\text{Демак, } \lim_{M \rightarrow A} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

2) Коши таърифи бўйича: $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра, $\delta = 2\varepsilon$ дейилса, у ҳолда, $0 < \rho(M; A(0,0)) < \delta$ тенгсизликларни каноатлантирувчи барча $M(x; y)$ нуқталарда

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \rho(M; A) < \frac{1}{2} \delta = \varepsilon$$

тенгсизлик ўринли бўлади.

19.2-мисол. Ушбу $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ функциянинг $M(x, y) \rightarrow A(0; 0)$

$(x \rightarrow 0, y \rightarrow 0)$ даги лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. Бу функция $R^2 \setminus \{(0; 0)\}$ тўпламда аниқланган бўлиб, $A(0; 0)$ нуқта- шу тўпламнинг лимит нуқтасидир. Равшанки,

$$M_n(x^{(n)}; y^{(n)}) = M_n\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right), \quad \overline{M_n}\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right) = \overline{M_n}\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n^2}\right)$$

кетма-кетликлар $n \rightarrow \infty$ да $M_n \rightarrow A(0; 0), \overline{M_n} \rightarrow A(0; 0)$. Функциянинг бу кетма-

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

кетликларга мос келган $\{f(x^{(n)}, y^{(n)})\}$, $\{f(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)})\}$ қийматлари кетма-кетлиги учун, мос равишда,

$$f(x^{(n)}, y^{(n)}) = \frac{2 \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \quad f(\bar{x}^{(n)}, \bar{y}^{(n)}) = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \rightarrow 0$$

бўлади. Бу эса, $M(x; y) \rightarrow A(0; 0)$ да берилган функциянинг лимити мавжуд эмаслигини англатади.

19.3 – мисол. Ушбу $\lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}$ лимитни ҳисобланг.

Ечилиши. Равшанки, $x^2 + xy + y^2 \geq xy$ тенгсизлик доимо ўринли. Бундан, $x \neq 0, y \neq 0$ бўлганда,

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \left| \frac{x+y}{xy} \right| \leq \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|}$$

тенгсизликни оламир. Буердан,

$$0 \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) = 0.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Шундай қилиб, $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$.

19.4-мисол. Ушбу $f(x, y) = \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^4}$ функция $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ да лимитга эга

бўлмаслигини исботланг.

Ечилиши. $x=t, y=t^4$ деб олинса, $t \rightarrow \infty$ да $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ ва

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, t^4) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4 + t^8}{t^2 + t^{16}} = 0.$$

Иккинчи томондан $x=t^2, y=t$ дейилса, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t^2; t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^8 + t^2}{t^4 + t^4} = \infty$.

Демак, $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^4 + y^2}{x^2 + y^4}$ - мавжуд эмас.

19.5.-мисол. Ушбу $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} f(x, y)$ бунда $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2}, & x \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 3, & x = 0 \text{ bo'lganda,} \end{cases}$

лимитни ҳисобланг.

Ечилиши. $x=0, y=3$ бўлса, берилган касрнинг сурати ҳам, махражи ҳам нолга айланади. Шунинг учун, $x^2 y = \alpha$ деб олинса, y ҳолда, $x \rightarrow 0$ ва $y=3$ бўлганда $\alpha \rightarrow 0$ ва

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 \cdot y} \cdot y = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot y = 1 \cdot 3 = 3.$$

Агар $x=0$ бўлса, $f(x,y)=3$ ва $\lim_{y \rightarrow 3} f(x,y)=3$.

19.5-мисол. Ушбу

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}; \quad b) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$$

лимитларни ҳисобланг:

Ечилиши. а) Равшанки, $x^2 + y^2 \geq 2xy$ тенгсизлик ўринли. Бундан

$\frac{xy}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2}$ ўринлидир. Буларни эътиборга олган ҳолда,

$$0 < \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

эканлигини оламир.

Демак, бу тенгсизликдан, $\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0$ эканлиги келиб чиқади.

б) $0 < x^2 + y^2 < 1$ бўлганда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$x^2 y^2 \leq \frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2, \quad 1 \geq (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} \geq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2}$$

тенгсизликлар ўринли. Бу тенгсизликларни эътиборга олиб,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{\frac{1}{4} (x^2 + y^2)^2} = \lim_{t \rightarrow 0+0} t^{\frac{1}{4} t^2} = \lim_{t \rightarrow 0+0} e^{\frac{1}{4} t^2 \ln t} = 1$$

эканлигини топамиз.

Демак, (*) тенгсизликка асосан, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = 1$ эканлиги келиб чиқади.

$u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$

нуқта $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

19.2. Чексиз кичик ва чексиз катта функциялар.

$\alpha(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпламда аниқланган бўлиб, $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуқта $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

19.6-таъриф. Агар $M \rightarrow A$ да $\alpha(M)$ функциянинг лимити нол, яъни

$\lim_{M \rightarrow A} \alpha(M) = 0$ бўлса, у ҳолда, $\alpha(M)$ функция, $M \rightarrow A$ да *чексиз кичик функция*

дейилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

19.1-эслатма. Берилган $f(M)$ функция $M \rightarrow A$ да B лимитга эга бўлиши учун, $\alpha(M) = f(M) - B$ нинг чексиз кичик функция бўлиши зарур ва етарли.

Демак, $M \rightarrow A$ да $f(M)$ функция B лимитга эга бўлса, бу функцияни, ҳар доим,

$$f(M) = B + \alpha(M) \quad (19.1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин, бунда $\alpha(M)$ чексиз кичик функция.

Чексиз кичик функциялар қуйидаги хоссаларга эга:

1- хосса. Агар $M \rightarrow A$ да $\alpha(M)$ ва $\beta(M)$ чексиз кичик функциялар бўлса, у ҳолда, $\alpha(M) \pm \beta(M)$ ҳам чексиз кичик функция бўлади.

2- хосса. Агар $M \rightarrow A$ да $\alpha(M)$ - чексиз кичик функция, $\beta(M)$ функция эса, чегараланган бўлса, у ҳолда, $\alpha(M) \cdot \beta(M)$ (уларнинг кўпайтмаси) ҳам чексиз кичик бўлади.

19.7-таъриф. Агар $\{M\} \subset R^m$ тўпламда аниқланган $F(M)$ функция учун $\lim_{M \rightarrow A} F(M) = \infty$ бўлса, $F(M)$ функция $M \rightarrow A$ да *чексиз катта функция* дейилади.

3- хосса. Агар $M \rightarrow A$ да $\alpha(M)$ чексиз кичик ($\alpha(M) \neq 0$) функция бўлса, у

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳолда $\frac{1}{\alpha(M)}$ - $M \rightarrow A$ да чексиз катта функция бўлади.

4- хосса. Агар $M \rightarrow A$ да $F(M)$ чексиз катта функция бўлса, $\frac{1}{F(M)}$

функция $M \rightarrow A$ да чексиз кичик функция бўлади.

19.3. Лимитга эга бўлган функцияларнинг хоссалари.

$\{M\} \subset R^m$ тўпламда $f(M)$ функция аниқланган бўлиб, $A(A \in R^m)$ нукта $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин

1- хосса. Агар $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = B$ мавжуд бўлиб, $B > p$ ($B < q$) бўлса, у ҳолда A нуктанинг етарли кичик атрофидаги $M \in \{M\}$ ($M \neq A$) нукталарда $f(M) > p$ ($f(M) < q$) бўлади.

Хусусан, $B \neq 0$ бўлса, у ҳолда, A нуктанинг етарли кичик атрофида $f(M) \neq 0$ бўлади.

2- хосса. Агар $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = B$ мавжуд бўлса, A нуктанинг етарли кичик атрофидаги $M \in \{M\}$ ($M \neq A$) нукталарда $f(M)$ функция чегараланган бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\{M\} \subset R^m$ тўпламда $f(M)$ ва $g(M)$ функциялар берилган бўлсин.

3- хосса. Агар $f(M)$ ва $g(M)$ функциялар, $M \rightarrow A$ да, мос равишда, B ва C лимитларга эга бўлса, у ҳолда $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ ва $\frac{f(M)}{g(M)}$ ($C \neq 0$) функциялар ҳам, мос равишда, $B \pm C$, $B \cdot C$, $\frac{B}{C}$ лимитларга эга бўлади.

19.2- эслатма $f(M)$ ва $g(M)$ функцияларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва нисбати лимитга эга бўлишидан, бу функциялардан ҳар бирининг лимитга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

19.3- эслатма. Агар:

1) $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = 0$, $\lim_{M \rightarrow A} g(M) = 0$ бўлса, $\frac{f(M)}{g(M)}$ ифода;

2) $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = \infty$, $\lim_{M \rightarrow A} g(M) = \infty$ бўлса, $\frac{f(M)}{g(M)}$ ифода;

3) $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = 0$, $\lim_{M \rightarrow A} g(M) = \infty$ бўлса, $f(M) \cdot g(M)$ ифода;

4) $f(M)$ ва $g(M)$ функциялар $M \rightarrow A$ да турли хил ишорали чексиз лимитга эга бўлса, $f(M) + g(M)$ ифода; мос равишда, $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$ кўринишидаги аниқмасликларни ифодалайди.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

19.4- эслатма. Агар:

$$1) \lim_{M \rightarrow A} f(M) = 0, \lim_{M \rightarrow A} g(M) = 0 \text{ бўлса;}$$

$$2) \lim_{M \rightarrow A} f(M) = 1, \lim_{M \rightarrow \infty} g(M) = \infty \text{ бўлса;}$$

$$3) \lim_{M \rightarrow A} f(M) = \infty, \lim_{M \rightarrow A} g(M) = 0 \text{ бўлса,}$$

у ҳолда, $[f(M)]^{g(M)}$ – ифода, мос равишда, $0^0, 1^\infty, \infty^0$ кўринишдаги аниқмасликларни ифодалайди.

19.1-теорема(Коши критерийси). $u = f(M)$ функциянинг чекли лимитга эга бўлиши учун, $\forall \varepsilon > 0$ сон олинганда ҳам, шундай $\delta > 0$ бўлиб, $0 < \rho(M', A) < \delta$, $0 < \rho(M'', A) < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $M', M'' \in \{M\}$ нукталарда $|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$ тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

19.4. Такрорий лимитлар.

Биз юкорида $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нуктадаги лимити $\lim_{M \rightarrow A} f(M) = B$ ёки $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = B$ билан танишдик.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Демак, функциянинг лимити, унинг аргументлари $x_1, x_2, \dots, x_m$ ларнинг бир йўла, мос равишда, $a_1, a_2, \dots, a_m$ сонларга интилгандаги лимитидан иборат экан. Биз бундан буён, бу лимитни, *каррали лимит* деб атаймиз.

Кўп ўзгарувчили функцияларгагина хос бўлган, бошқа кўринишдаги, лимит тушунчасини киритамиз. $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ нукта- $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуктаси бўлсин. Берилган функциянинг $x_1 \rightarrow a_1$ (қолган барча аргументларини тайинлаб) даги лимити $\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ни қарайлик, бу лимит $x_2, x_3, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади:

$$\lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m).$$

Энди $\varphi_1(x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_2 \rightarrow a_2$ (қолган барча аргументларни белгилаб) даги лимитини қараймиз, бу $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m)$ лимит $x_3, x_4, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлади: $\lim_{x_2 \rightarrow a_2} \varphi_1(x_2, x_3, \dots, x_m) = \varphi_2(x_3, x_4, \dots, x_m).$

Худди шундай, бирин кетин, $x_3 \rightarrow a_3, x_4 \rightarrow a_4, \dots, x_m \rightarrow a_m$ да лимитга ўтиб, $\lim_{x_m \rightarrow a_m} \lim_{x_{m-1} \rightarrow a_{m-1}} \dots \lim_{x_1 \rightarrow a_1} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ни ҳосил қиламиз. Бу лимитга $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функциянинг *такрорий* *лимити* дейилади.

Худди шундай, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ аргументлари, мос равишда, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ ларга интилгандаги $\lim_{x_{i_k} \rightarrow a_{i_k}} \dots \lim_{x_{i_1} \rightarrow a_{i_1}} f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ такрорий лимитни ҳам қараш мумкин.

Равшанки, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументлари, мос равишда, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ сонларга, турли тартибда интилганда, функциянинг турли такрорий лимитлари ҳосил бўлади.

19.6-мисол. $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ функциянинг $M(x, y) \rightarrow O(0; 0)$ да чексиз кичик функция эканлигини исботланг.

Ечилиши. Чексиз кичик функциянинг таърифига кўра, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$ тенгликнинг ўринли эканлигини кўрсатиш етарли. Равшанки, берилган $f(x, y)$ функция координаталар ўқларида аниқланмаган, лекин $O(0; 0)$ нуқта функция аниқланиш соҳасининг лимит нуқтасидан иборат. Шунинг учун, берилган функциянинг $O(0; 0)$ нуқтадаги лимитини қараш мумкин. Бу лимитни, лимитнинг Коши таърифи бўйича қараймиз. $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра, $\delta = \varepsilon / 2$ деб

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

олинса, у ҳолда, $\rho(M(x, y); O(0; 0)) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ дан $|x| < \delta$ ва $|y| < \delta$ бўлиши келиб чиқади. Демак, $|f(x, y) - 0| = \left| (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \right| \leq |x| + |y| < 2\delta = \varepsilon$. Бундан, таърифга

кўра, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$ эканлиги келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган функциянинг $M \rightarrow 0$ да чексиз кичик функция эканлиги исботланади.

19.7- мисол. Ушбу $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$ функциянинг $O(0; 0)$ нуктада

такрорий лимитлари мавжудми?

Ечилиши. $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) =$ такрорий лимитнинг $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \neq 0, \text{ белгиланган}}} f(x, y) =$ ички

лимитини караймиз. Аввало, берилган $f(x, y)$ функцияни қуйидагича

тасвирлаймиз: $f(x, y) = x \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$. Бунда, белгиланган $y \neq 0$ учун,

биринчи қўшилувчининг $x \rightarrow 0$ даги лимити, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} = 0$; иккинчи

қўшилувчидаги $y \cdot \sin \frac{1}{y}$ кўпайтувчи, $y \neq \frac{1}{m} (m \in \mathbb{Z})$ бўлганда, нолдан фарқли

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ўзгармас сон, $\sin \frac{1}{x}$ кўпайтувчи эса, $x \rightarrow 0$ да лимитга эга эмас, демак, иккинчи

кўшилувчи лимитга эга бўлмайди. У ҳолда, $f(x, y) = x \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$

функция, белгиланган y ($y \neq 0, y \neq n\pi$) учун, $x \rightarrow 0$ да лимитга эга бўлмайди.

Шундай қилиб, ички лимит мавжуд эмас, шунга кўра, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ такрорий

лимитнинг мавжуд эмаслиги келиб чиқади. Худди шундай,

$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ такрорий лимитнинг ҳам мавжуд эмаслигини кўрсатиш мумкин.

19.5- эслатма. **19.6-** мисолда $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{y}$ функциянинг

$O(0;0)$ нуқтадаги каррали лимити мавжуд ва унинг нолга тенг эканлиги исботланган эди. **19.7-**мисолда эса, унинг такрорий лимитларининг мавжуд эмаслиги кўрсатилди. Демак, функциянинг нуқтада каррали лимити ҳар доим мавжудлигидан, унинг шу нуқтада такрорий лимитлари мавжудлиги келиб чиқмаслиги тўғрисида хулоса чиқариш мумкин экан.

19.8- мисол. $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ функциянинг $O(0;0)$ нуқтадаги такрорий

лимитларини ҳисобланг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Такрорий лимитларни топамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \text{ белги} \\ x \neq 0}} \frac{2xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{0}{x^2} \right) = 0.$$

Худди шундай, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ эканлигини кўрсатиш мумкин.

19.6-эслатма. 19.2- мисолда $f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ функциянинг $O(0;0)$

нуқтада каррали лимити мавжуд эмаслиги кўрсатилган эди. Демак, 19.2- ва 19.8- мисолларга асосан, берилган нуқтада такрорий лимитларнинг мавжудлиги ва уларнинг тенглигидан, бу нуқтада функциянинг каррали лимити мавжудлиги ҳар доим келиб чиқавермас экан, деган хулоса чиқариш мумкин.

19.9- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, & y \neq -x \text{ bo'lganda,} \\ 0, & y = -x \text{ bo'lganda,} \end{cases}$$

функциянинг $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ даги такрорий лимитларини ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. y белгиланган ва $y \neq 0$ бўлсин. U ҳолда,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \frac{-y + y^2}{y} = -1 + y,$$

бундан, $\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] = \lim_{y \rightarrow 0} (-1 + y) = -1$ бўлиши келиб чиқади. Энди x

белгиланган ва $x \neq 0$ бўлсин. U ҳолда,

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \frac{x + x^2}{x} = 1 + x,$$

бунда $\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) = 1$ бўлиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, берилган функциянинг такрорий лимитлари мавжуд, лекин улар ўзаро тенг эмас, яъни $\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] \neq \lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)]$.

19.7-эслатма. 19.9- мисолдан кўринадики, функциянинг каррали ва такрорий лимитларининг тенг бўлиши учун, маълум шартларнинг бажарилиши керак бўлар экан.

19.2- теорема. $u = f(M)$ функция $\{M\} = \{(x, y) \in R^2 : |x - x^0| < d_1, |y - y^0| < d_2\}$

тўпланда берилган бўлиб, u қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $(x, y) \rightarrow (x^0, y^0)$ да $f(x, y)$ функциянинг $\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ y \rightarrow y^0}} f(x, y) = B$ каррали лимити

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

мавжуд;

2) ҳар бир тайинланган x да $\lim_{y \rightarrow y^0} f(x, y) = \varphi(x)$ мавжуд, ҳар бир тайинланган y да $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x, y) = \varphi(y)$ мавжуд бўлсин. У ҳолда $\lim_{x \rightarrow x^0} \lim_{y \rightarrow y^0} f(x, y)$ ва $\lim_{x \rightarrow x^0} \lim_{y \rightarrow y^0} f(x, y)$ такрорий лимитлар ҳам мавжуд ва улар B га тенг бўлади.

Натижа. 19.2- теореманинг шартлари бажарилганда,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x^0 \\ y \rightarrow y^0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x^0} \lim_{y \rightarrow y^0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y^0} \lim_{x \rightarrow x^0} f(x, y)$$

муносабат ўринли.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги лимитларни ҳисобланг:

19.1. $\lim_{\substack{x \rightarrow \pi \\ y \rightarrow \ln 2}} e^y \cos x.$

19.2. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{x - y}{x^2 - y^2}.$

19.3. $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1 \\ z \rightarrow e}} \ln|x + y + z|.$

19.4. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$19.5. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg} 2xy}{x^2 y}.$$

$$19.6. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 3}} (1 + xy^2)^{-\frac{y}{x^2 y + xy^2}}.$$

$$19.7. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{ax + by}{x^2 + xy + y^2}.$$

$$19.8. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

$$19.9. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{|x^3| + |y^3|}.$$

$$19.10. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x + y)^{-(x^2 + y^2)}.$$

$$19.11. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{|x|}.$$

19.12. Ушбу $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y)$ ни ҳисобланг, бунда

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{\sqrt{1 + x^2 y} - 1}, & x^2 y \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 2, & x^2 y = 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Қуйидаги қаррали лимитларни ҳисобланг.

$$19.19. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{1 + x^2 y^2} - 1}{x^2 + y^2}.$$

$$19.14. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$19.15. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)}{1 - \cos(x^2 + y^2)}.$$

$$19.16. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{e^{\frac{1}{x^4 + y^4}}}{x^4 + y^4}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$19.17. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1 + x^2 y^2)^{\frac{1}{x^2 + y^2}}.$$

$$19.18. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{(x + y)^2}{(x^2 + y^4)^2}.$$

$$19.19. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$19.20. \text{Ушбу } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} f(x, y) \text{ лимитни ҳисобланг, бунда}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{x^3 - y^3}, & x \neq y \text{ bo'lganda,} \\ 4/3, & x = y \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

Қуйидаги қаррали лимитларнинг мавжуд эмаслигини исботланг.

$$19.21. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x + y}.$$

$$19.22. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - y}{x + y}.$$

$$19.23. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

$$19.24. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + y)}{y}.$$

$$19.25. \text{Ушбу } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ bo'lganda,} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

функциянинг $(0, 0)$ нуқтада қаррали лимити мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

$$19.26. \text{Ушбу}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right)^{x+y}, & x+y \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x+y = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функциянинг $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ даги каррали лимити мавжуд эмаслигини исботланг.

Қуйидаги $\lim_{x \rightarrow x^0} \lim_{y \rightarrow y^0} f(x, y)$ ва $\lim_{y \rightarrow y^0} \lim_{x \rightarrow x^0} f(x, y)$ такрорий лимитларни

ҳисобланг.

19.27. $f(x, y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - xy + y^2}, \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0.$

19.28. $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{2x+3y}, \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0.$

19.29. $f(x, y) = \frac{\cos x - \cos y}{x^2 + y^2}, \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0.$

19.30. $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad x^0 = \infty, \quad y^0 = \infty.$

19.31. $f(x, y) = \frac{x^y}{1+x^y}, \quad x^0 = \infty, \quad y^0 = 0.$

19.32. $f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x+y}, \quad x^0 = \infty, \quad y^0 = \infty.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$19.33. f(x, y) = \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}, \quad x^0 = 0, \quad y^0 = \infty.$$

$$19.34. f(x, y) = \log_x(x+y), \quad x^0 = 1, \quad y^0 = 0.$$

$$19.35. f(x, y) = \frac{\sin 3x + \operatorname{tg} 2y}{6x + 3y} \operatorname{tg} \frac{xy}{1+xy}, \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0.$$

Қуйидаги берилган функцияларнинг (x^0, y^0) нуқтада қаррали ва тақрибий лимитлари мавжудми?

$$19.36. f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0.$$

$$19.37. f(x, y) = \log_x(x+y), \quad x^0 = 1, \quad y^0 = 0.$$

$$19.38. f(x, y) = \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, \quad x^0 = 0, \quad y^0 = 0.$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

19.1. -2. 19.2. 0,5. 19.3. 1. 19.4. a . 19.5. 2. 19.6. e^3 . 19.7. 0.

19.8. 0. 19.9. 0. 19.10. 0. 19.11. 0. 19.12. 2. 19.19. 0. 19.14. 0.

19.15. 0. 19.16. 0. 19.17. 1. 19.18. 0. 19.19. 1. 19.20. $\frac{4}{3}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

19.27. 1, 1. **19.28.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. **19.29.** $\frac{1}{2}$ ва $\frac{1}{2}$. **19.30.** 0 ва 1. **19.31.** $\frac{1}{2}$ ва 1.

19.32. 0 ва 1. **19.33.** 0 ва 1. **19.34.** 1 ва ∞ . **19.35.** $\frac{1}{2}$ ва $-\frac{2}{3}$.

19.36. Каррали лимит мавжуд эмас, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = -1$ ва $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$.

19.37. Каррали лимит мавжуд эмас, $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$ ва $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 1} f(x, y) = \infty$.

19.38. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 1$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

20-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг узлуксизлиги

20.1. Узлуксиз функциянинг таърифлари.

$u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпламда берилган бўлиб, $A = A(a_1, a_2, \dots, a_m)$

нуқта $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуқтаси ва $A \in \{M\}$ бўлсин.

20.1-таъриф. Агар $M \rightarrow A$ да $u = f(M)$ функциянинг лимити мавжуд бўлиб,

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A) \text{ ёки } \lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ x_2 \rightarrow a_2 \\ \dots \\ x_m \rightarrow a_m}} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

бўлса, у ҳолда $f(M)$ функция A нуқтада узлуксиз деб аталади, $A = \lim_{M \rightarrow A} M$

бўлгани учун, функциянинг узлуксизлик шартини,

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f\left(\lim_{M \rightarrow A} M\right) \quad (20.1)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

$\{M\}$ тўпламнинг функция узлуксизлиги шартини қаноатлантирмайдиган нуқталари функциянинг *узилиш нуқталари* дейилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

20.2-таъриф (Гейне таърифи). Агар $\{M\} \subset R^m$ тўпламнинг нуқталаридан

тузилган, $A \in \{M\}$ га интилувчи ҳар қандай $\{M_n\}$ кетма-кетлик олинганда ҳам, унга мос келган $\{f(M_n)\}$ кетма-кетлик, ҳамма вақт $f(A)$ га тенг бўлса, $f(M)$ функция A нуқтада узлуксиз деб аталади.

20.3-таъриф. (Коши таърифи). Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ топилсаки, $\rho(M, A) < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $M \in \{M\}$ нуқталарда,

$$|f(M) - f(A)| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(M)$ функция A нуқтада узлуксиз деб аталади.

Агар $f(M)$ функция $\{M\}$ тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, у ҳолда $f(M)$ функция $\{M\}$ тўпламда узлуксиз дейилади.

Ушбу $\Delta u = f(M) - f(A)$ айирмага $f(M)$ функциянинг A нуқтадаги орттирмаси ёки тўлиқ орттирмаси дейилади.

A ва M нуқталар, мос равишда, $a_1, a_2, \dots, a_m$ ва $x_1, x_2, \dots, x_m$ координаталарга эга бўлсин. Ушбу

$$x_1 - a_1 = \Delta x_1, \quad x_2 - a_2 = \Delta x_2, \dots, x_m - a_m = \Delta x_m$$

белгилашлардан фойдаланиб, функция аргументларининг $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ орттирмаларига мос келувчи орттирмаси учун,

$$\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \dots, a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

ифодани ҳосил қиламиз. Равшанки, $u = f(M)$ функциянинг A нуктада узлуксиз бўлиши учун, унинг орттирмаси A нуктада чексиз кичик бўлиши зарур ва етарли, яъни

$$\lim_{M \rightarrow A} \Delta u = \lim_{M \rightarrow A} \Delta f = \lim_{M \rightarrow A} (f(M) - f(A)) = 0 \quad \text{ёки} \quad \begin{matrix} \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0 \end{matrix} \Delta u = 0 \quad (20.2)$$

бўлиши зарур ва етарли. (20.2) шартга $u = f(M)$ функциянинг A нуктада узлуксизлигининг *айирма шакли дейилади*.

Кўп ўзгарувчили функциянинг битта аргументи бўйича (қолганлари белгиланган деб) узлуксизлик тушунчасини ҳам киритиш мумкин. Бу тушунчани киритиш учун, $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг, унинг аниқланиш соҳасига тегишли $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктадаги, *хусусий орттирмалари* деб аталувчи тушунчаларини киритамиз. Бошқа аргументлари белгиланган деб қараб, функциянинг биринчи аргументига Δx_1 орттирма берамиз. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

координаталарга эга бўлган нуқта функциянинг аниқланиш соҳасида ётсин.

Бу орттирма, функциянинг $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктадаги, x аргументнинг Δx_1 орттирмасига мос келувчи, *хусусий орттирмаси* дейилади ва $\Delta_{x_1} u$ каби белгиланади:

$$\Delta_{x_1} u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Функциянинг қолган аргументлари орттирмаларига мос келувчи хусусий орттирмалари ҳам, шунга ўхшаш аниқланади:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{x_2} u &= f(x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m) \\ &\vdots \\ \Delta_{x_m} u &= f(x_1, x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned} \right\}$$

Агар $\Delta x_k \rightarrow 0$ да функциянинг $\Delta x_k f$ хусусий ортирмаси ҳам нолга интилса, яъни $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \Delta x_k f = 0$ бўлса, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктада x_k ўзгарувчи бўйича узлуксиз дейилади.

20.1-эслатма. Агар $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \{M\}$ нуктада

И л о в а л а р



Чикиш

(бир йўла) узлуксиз бўлса, функция шу нуқтада ҳар бир ўзгарувчи бўйича ҳам узлуксиз бўлади, лекин функциянинг бирор нуқтада ҳар бир ўзгарувчи бўйича хусусий узлуксиз бўлишидан, унинг шу нуқтада (бир йўла) узлуксиз бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

20.1- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2 y^2 + y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \text{ bo'lganda,} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функциянинг R^2 да узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. $\forall (a, b) \in R^2 ((a, b) \neq (0, 0))$ нуқтани оламир:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} \frac{x^4 + x^2 y^2 + y^4}{x^2 + y^2} = \frac{a^4 + a^2 b^2 + b^4}{a^2 + b^2} = f(a, b)$$

тенглик ўринли бўлади. Бу эса, берилган функциянинг 20.1-таърифга кўра, (a, b) нуқтада узлуксизлигини билдиради.

Энди берилган функциянинг $(0; 0)$ нуқтада узлуксиз эканлигини кўрсатамиз. Бунинг учун қуйидаги алмаштиришни оламир: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 0$$

Демак, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = f(0; 0) = 0$. Бундан $f(x, y)$ функциянинг $(0; 0)$ нуктада

узлуксиз эканлиги келиб чиқади.

20.2- мисол. Ушбу $f(x, y) = 2x - 3y + z$ функциянинг R^2 да узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши $\forall \varepsilon > 0$ сонга кўра, $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ деб олинса, у ҳолда,

$$\rho(M(x, y, z), M_0(x_0, y_0, z_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall M(x, y, z) \in R^m$ нукталарда,

$$\begin{aligned} |f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)| &= |(2x - 3y + z) - (2x_0 - 3y_0 + z_0)| \leq |2(x - x_0)| + \\ &+ 3|y - y_0| + |z - z_0| \leq 6\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < 6\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бундан, **20.3-** таърифга кўра, $f(x, y) = 2x - 3y + z$ функциянинг $\forall M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада узлуксизлиги келиб чиқади.

20.3-мисол. Ушбу $f(x, y) = \frac{x - 2y + 4}{x^2 + y^2 + 3}$ функциянинг $\forall M_0(x_0, y_0) \in R^2$

нуктада узлуксиз эканлигини кўрсатинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. $M_0(x_0; y_0)$ нуктага Δx , Δy ортималар бериб, берилган

функциянинг тўлиқ орттирмасини топамиз:

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - 2(y_0 + \Delta y) + 4}{(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 3} - \frac{x_0^2 - 2y_0 + 4}{x_0^2 + y_0^2 + 3} = \\ &= \frac{(x_0^2 + y_0^2 + 3)[(x_0 + \Delta x)^2 - 2(y_0 + \Delta y) + 4] - (x_0^2 - 2y_0 + 4)[(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 3]}{(x_0^2 + y_0^2 + 3)[(x_0 + \Delta x)^2 + (y_0 + \Delta y)^2 + 3]}\end{aligned}$$

Бу тенгликдан $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0$ эканлиги келиб чиқади. (20.2) шартга кўра,

берилган функциянинг $\forall M_0(x_0, y_0)$ нуктада узлуксиз эканлиги келиб чиқади.

20.4- мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функциянинг $O(0,0)$ нуктада ҳар бир ўзгарувчиси бўйича узлуксиз, иккала ўзгарувчиси бўйича бир йўла узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. $f(x, y)$ функциянинг $O(0,0)$ нуктадаги хусусий

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

орттирмаларини қараймиз: x бўйича хусусий ортирмаси

$$\Delta_x u = f(\Delta x, 0) - f(0, 0) = 0 - 0 = 0$$

Равшанки, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x u = 0$. Бундан $f(x, y)$ функциянинг $O(0, 0)$ нуқтада x аргумент бўйича узлуксизлиги келиб чиқади.

Худи шундай, $f(x, y)$ функциянинг $O(0, 0)$ нуқтада y аргумент бўйича ҳам узлуксизлиги кўрсатилади.

Энди $f(x, y)$ функциянинг $O(0, 0)$ нуқтада иккала ўзгарувчи бўйича бир йўла узлуксиз эмаслигини кўрсатамиз. $M(x, y)$ нуқта $O(0, 0)$ нуқтага, $O(0, 0)$ нуқтадан ўтувчи $y = kx$ тўғри чизиклар бўйлаб интилсин. У ҳолда,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^4}{x^4 + k^4 x^4} = \frac{k^2}{1 + k^4}.$$

Демак, $M(x, y)$ нуқта, турли тўғри чизиклар (k нинг ҳар хил қийматида) бўйича, $O(0, 0)$ нуқтага интилганда лимитнинг қиймати турлича бўлади. Бу ҳол, қаралаётган лимитнинг мавжуд эмаслигини билдиради. Шундай қилиб, берилган функциянинг $O(0, 0)$ нуқтадаги қаррали лимити мавжуд эмас экан.

20.5- мисол Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$u = f(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos x - \cos y}{x - y}, & x - y \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x - y = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функцияни $O(0;0)$, $A(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$ нуқталарда ҳар бир аргументи ва иккала аргументи бўйича бир йўла узлуксизликка текширинг.

Ечилиши. Косинуслар айирмаси формуласидан фойдаланиб, берилган функцияни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{x-y}, & x-y \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x-y = 0 \text{ bo'lganda}, \end{cases}$$

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{x+y}{2} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = - \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sin \frac{x+y}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = 0 \cdot 1 = 0 = f(0, 0).$$

Демак, $f(x, y)$ функция $O(0;0)$ нуқтада иккала аргументи бўйича бир йўла узлуксиз. У ҳолда, [20.1](#)-эслатмага асосан, ҳар бир аргументи бўйича ҳам узлуксиз бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ y \rightarrow \frac{\pi}{4}}} f(x, y) = - \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ y \rightarrow \frac{\pi}{4}}} \sin(x + y) \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{4} \\ y \rightarrow \frac{\pi}{4}}} \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\frac{x-y}{2}} = -1,$$

лекин $f\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{-4}\right) = 0$ бўлгани учун, $f(x, y)$ функция $A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{-4}\right)$ нуқтада иккала

аргументи бўйича бир йўла узлуксиз эмас.

$$\text{Ушбу } f\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} \frac{-2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}, & x \neq \frac{\pi}{4} \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x = \frac{\pi}{4} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функцияни қараймиз. Функциянинг берилишига кўра, $\forall x$ учун $f\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = 0$,

жумладан, $y = x = \frac{\pi}{4}$ да ҳам нолга тенг бўлади.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \sin \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \sin \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}}{x - \frac{\pi}{4}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin \frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \frac{x - \frac{\pi}{4}}{2}}{(x - \frac{\pi}{4})/2} =$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Демак, $f\left(x, \frac{\pi}{4}\right)$ функция $x = \frac{\pi}{4}$ да узлуксиз эмас.

Энди

$$f\left(\frac{\pi}{4}, y\right) = \begin{cases} \frac{-2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} + y}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - y}{2}}{\frac{\pi}{4} - y}, & y \neq \frac{\pi}{4} \text{ bo'lganda,} \\ 0, & y = \frac{\pi}{4} \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функцияни караймиз. Функциянинг берилишига кўра, $\forall y$ учун,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4}, y\right) &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \sin \frac{\frac{\pi}{4} + y}{2} \sin \frac{\frac{\pi}{4} - y}{2}}{\frac{\pi}{4} - y} = - \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin \frac{\frac{\pi}{4} + y}{2} \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin \frac{\frac{\pi}{4} - y}{2}}{(\frac{\pi}{4} - y)/2} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \neq f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

Демак, $f\left(\frac{\pi}{4}, y\right)$ функция $y = \frac{\pi}{4}$ нуктада узлуксиз эмас экан.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

20.6- мисол Ушбу

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3}$$

функциянинг узилиш нуқталарини топинг.

Ечилиши. Берилган функция, каср рационал функция бўлиб, унинг сурати ҳам, махражи ҳам узлуксиз функциялардан иборат. Шунинг учун, функциянинг узилиш нуқталари, $x^3 + y^3 = 0$ шартни қаноатлантирувчи нуқталардан иборат бўлади. Бу тенгламани y га нисбатан ечамиз: $y = -x$. Шундай қилиб, берилган функциянинг узилиш нуқталари, $y = -x$ тўғри чизиқнинг нуқталаридан иборат экан.

$x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ ва $x_0 + y_0 = 0$ бўлсин. У ҳолда,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x + y}{x^3 + y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = \frac{1}{x_0^2 - x_0 y_0 + y_0^2}.$$

Демак, $y = -x$ ($x \neq 0$) тўғри чизиқнинг нуқталари, $f(x, y) = \frac{x + y}{x^3 + y^3}$

функциянинг йўқотилиши мумкин бўлган (биринчи тур) узилиш нуқталари бўлар экан.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x^2 - xy + y^2} = +\infty$$

муносабатдан эса, $O(0,0)$ нукта берилган функциянинг чексиз (иккинчи тур) узилиш нуктаси эканлиги келиб чиқади.

20.2. Узлуксиз функциялар устида арифметик амаллар. Мураккаб функциянинг узлуксизлиги.

$u = f(M)$ ва $v = g(M)$ функциялар $\{M\} \subset R^m$ тўпламда берилган, $A \in R^m$ нукта эса, $\{M\}$ тўпламнинг лимит нуктаси ва $A \in \{M\}$ бўлсин.

20.1-теорема. Агар $f(M)$ ва $g(M)$ функциялар A нуктада узлуксиз бўлса, $f(M) \pm g(M)$, $f(M) \cdot g(M)$ ҳамда $\frac{f(M)}{g(M)} (g(A) \neq 0)$ функциялар ҳам шу нуктада узлуксиз бўлади.

20.2-эслатма. Иккита функциянинг йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва нисбати узлуксизлигидан, улардан ҳар бирининг узлуксизлиги ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

20.7-мисол. Ушбу $\{M\} = \{(x, y) \in R^2 : |x| \leq 1, y \leq 1\} \subset R^2$ тўпламнинг рационал

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

нуқталари (ҳар иккала координатаси ҳам рационал сон) тўпламини $\{M_p\}$ деб

белгилаймиз. $\{M\}$ тўпланда

$$f_1(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \{M_p\}, \\ 0, & (x, y) \in \{M\} \setminus \{M_p\} \end{cases}$$

ва

$$f_2(x, y) = \begin{cases} -1, & (x, y) \in \{M_p\} \\ 0, & (x, y) \in \{M\} \setminus \{M_p\} \end{cases}$$

функцияларни қараймиз. Бу функцияларнинг йиғиндиси

$$f_1(x, y) + f_2(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in \{M\})$$

бўлиб, у шу тўпланда узлуксиз, лекин $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ функцияларнинг ҳар бири $\{M\}$ тўпланда узлуксиз эмас.

20.3-эслатма. Юқоридаги 20.1-теорема қўшилувчилар сони ихтиёрий чекли бўлган ҳолда ҳам ўринли.

$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпланда берилган бўлиб, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ҳар бири, ўз навбатида, $\{N\}$ ($\{N\} \subset R^k$ ($k = 1, 2, \dots$)) тўпланда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

(20.3)

$$M = M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{M\} \subset R^m \quad \text{деб} \quad \text{қараймиз.} \quad \text{Натижада,} \quad \text{ҳар} \quad \text{бир}$$

$M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{M\}$ нуктага, (20.3) формула ёрдамида,

$$u = f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k)) = F(t_1, t_2, \dots, t_k) = F(t)$$

нуқта мос қўйилади, яъни мураккаб функция ҳосил бўлади.

20.2-теорема. Агар $\varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i=1, 2, \dots, m$) функцияларнинг ҳар бири

$t_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуктада узлуксиз бўлиб, $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса,

$$t_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \text{ нуктага мос,}$$

$$M_0(x_0) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \left(x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, \dots, t_k^0), \dots, x_m^0 = \varphi_n(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \right)$$

нуқтада узлуксиз бўлса, $u = F(t_1, t_2, \dots, t_k)$ мураккаб функция $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$

нуқтада узлуксиз бўлади.

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Тулик экран

Чикиш

20.3. Нуқтада узлуксиз бўлган функцияларнинг локал хоссалари.

$u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпланда берилган бўлсин. Бу тўпламдан $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0) \in \{M\}$ нуқтани олиб, унинг етарли кичик атрофини қараймиз.

1-хосса. Агар $f(M)$ функция M_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда, функция M_0 нуқтанинг етарли кичик атрофида чегараланган бўлади.

2-хосса. Агар $f(M)$ функция M_0 нуқтада узлуксиз бўлиб, $f(M_0) > 0$ ($f(M) < 0$) бўлса, M_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги M нуқталарда ҳам $f(M) > 0$ ($f(M) < 0$) бўлади.

3-хосса. Агар $f(M)$ функция M_0 нуқтада узлуксиз бўлса, M_0 нуқтанинг етарли кичик атрофидаги ихтиёрий $M_1 \in \{M\}$, $M_2 \in \{M\}$ нуқталар учун, $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$ тенгсизлик ўринли бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

20.4. Узлуксиз бўлган функцияларнинг глобал хоссалари.

20.4-таъриф. Агар шундай c ва C сонлар мавжуд бўлиб, $\forall M \in \{M\}$ учун $c \leq f(M) \leq C$ тенгсизлик ўринли бўласа, $u = f(M)$ функция шу $\{M\}$ тўпламда *чегараланган* дейилади.

20.3-теорема (Больцано-Кошининг биринчи теоремаси). $u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ боғламли тўпламда берилган ва узлуксиз бўлсин. Агар бу функция тўпламнинг иккита $A(a_1, a_2, \dots, a_m) \in \{M\}$, $B(b_1, b_2, \dots, b_m) \in \{M\}$ нуктасида ҳар хил ишорали қийматларга эга бўлса, у ҳолда, шундай $C(c_1, c_2, \dots, c_m) \in \{M\}$ нукта топиладики, шу нуктада функция нолга айланади, яъни $f(C) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = 0$.

20.4-теорема (Больцано-Кошининг иккинчи теоремаси). $u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ боғламли тўпламда берилган ва узлуксиз бўлиб, $\{M\}$ тўпламнинг иккита $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$, $B(b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуктасида $f(A) \neq f(B)$ бўлса, у ҳолда, $f(A)$ ва $f(B)$ қийматлар орасида ҳар қандай C сон олинса ҳам, $\{M\}$ тўпламда шундай $C(c_1, c_2, \dots, c_m)$ нукта топиладики, $f(C) = f(c_1, c_2, \dots, c_m) = C$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўлади.

20.5– теорема (Вейерштрасснинг биринчи теоремаси). Агар $u = f(M)$ функция, $\{M\} \subset R^m$ –чегараланган ёпиқ тўпламда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу $\{M\}$ тўпламда чегараланган бўлади.

20.6– теорема(Вейерштрасснинг иккинчи теоремаси). Агар $f(M)$ функция чегараланган ёпиқ $\{M\} \subset R^m$ тўпламда узлуксиз бўлса, у шу тўпламда ўзининг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегарасига эришади.

20.5. Кўп ўзгарувчили функциянинг текис узлуксизлиги.

$f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпламда берилган бўлсин.

20.4– таъриф. Агар $\forall \varepsilon > 0$ сон учун, шундай $\delta > 0$ топилсаки, $\{M\}$ тўпламнинг $\rho(M', M'') < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи $\forall M', M'' \in \{M\}$ нукталарида

$$|f(M') - f(M'')| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(M)$ функция $\{M\}$ тўпламда *текис узлуксиз* дейилади.

20.4-эслатма. Функциянинг текис узлуксизлиги таърифидаги $\delta > 0$ сон

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

фақат $\varepsilon > 0$ га боғлиқ бўлади.

20.7–теорема (Кантор теоремаси). Агар $f(M)$ функция чегараланган ёпиқ тўпдамда берилган ва узлуксиз бўлса, функция шу тўпдамда текис узлуксиз бўлади.

20.5-эслатма. Чегараланган $\{M\}$ тўпдамнинг $\forall M', M'' \in \{M\}$ нуқталари орасидаги $\rho(M', M'')$ масофанинг аниқ юқори чегарасига $\{M\}$ тўпдамнинг *диаметри* дейилади.

Натижа. Агар $f(M)$ функция чегараланган ёпиқ тўпдамда берилган ва узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall \varepsilon > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ топилиб, $\{M\}$ тўпдамини, *диаметри* δ дан кичик бўлган, $\{M_i\} \subset \{M\} (i = 1, 2, \dots, k)$ бўлакларга бўлганимизда бу бўлакларнинг ҳар бирида ҳам, $f(M)$ функциянинг тебраниши ε дан кичик бўлади.

20.8-мисол. Ушбу $u = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ функцияни $\{M\} = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ тўпдамда текис узлуксизликка текширинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг сурати $x^3 + y^3$ ва махражи $x^2 + y^2$ $\{M\}$ тўпдамда узлуксиз. Демак, функция $\{M\}$ да узлуксиз ($O(0,0) \notin \{M\}$). $\{M\}$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тўплам ёпиқ тўплам эмас. Шунинг учун, бу ҳолда Кантор теоремасини қўллаб бўлмайди, лекин $u(x, y)$ функцияни $O(0;0)$ нуқтада қайта аниқласак, яъни $u(0;0)=0$ десак, у ҳолда $u(x, y)$ функция $O(0;0)$ нуқтада узлуксиз бўлади.

Ҳақиқатан ҳам, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ алмаштиришни олсак, $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$ да $\rho \rightarrow 0$, яъни $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} u(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho = 0$ Шундай қилиб, $u(x, y)$

функцияни $O(0;0)$ нуқтада қайта аниқласак, яъни $u(0;0)=0$ десак, у ҳолда берилган функция $\{\overline{M}\} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ ёпиқ тўпламда узлуксиз бўлади. Демак, Кантор теоремасига асосан, берилган функция, маркази $O(0;0)$ олиб ташланган $\{\overline{M}\}$ – доирада, яъни $\{M\}$ тўпламда текис узлуксиз бўлади.

20.9- мисол Ушбу $u = f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ функцияни аниқланиш соҳасида

текис узлуксизликка текширинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси:

$$\{M\} = \{(x, y): |x| \leq |y|, y \neq 0\}.$$

Бу соҳада $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ функция узлуксиз функцияларнинг суперпозицияси

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

сифатида, узлуксиз. Энди бу функцияни $\{M\}$ соҳада текис узлуксизликка

текширамиз: $M_n\left(\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right), M_n'\left(\frac{1}{n}; -\frac{1}{n}\right) \quad (n=1,2,\dots)$ нукталар учун

$$\rho(M_n; M_n') = \sqrt{\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Функциянинг бу нукталардаги кийматлари,

$$|u(M_n) - u(M_n')| = |\arcsin 1 - \arcsin(-1)| = 2\arcsin 1 = \pi > 1 = \varepsilon$$

муносабатни каноатлантиради, яъни 20.4- таърифнинг шарти бажарилмайди.

Демак, берилган функция $\{M\}$ тўпламда текис узлуксиз эмас.

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функцияларнинг узилиш нукталарини топинг.

20.1. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

20.2. $u = \frac{1}{x^2 + y^2}.$

20.3. $u = \ln(9 - x^2 - y^2)$

20.4. $u = \frac{xy}{x + y}.$

20.5. $u = \sin \frac{x}{y}.$

20.6. $u = \sin \frac{1}{xy}.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Қуйидаги функцияларнинг ҳамма узилиш нуқталарини топинг ва улар ичида иккала аргумент бўйича йўқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқталарини кўрсатинг.

$$20.7. \quad u = \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

$$20.8. \quad u = \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

$$20.9. \quad u = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x + y}, & x + y \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 3, & x + y = 0 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

$$20.10. \quad u = \frac{1}{\sin^2 x + \sin^2 y}.$$

$$20.11. \quad u = x \sin \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

$$20.12. \quad u = \frac{\sin^2 x \cdot \sin y}{\sin^4 x + \sin^2 y}.$$

$$20.13. \quad u = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1) \sin \frac{1}{1 - x^2 - y^2}, & x^2 + y^2 \neq 1 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x^2 + y^2 = 1 \text{ bo'lganda}. \end{cases}$$

Қуйидаги функцияларни кўрсатилган нуқталарда ҳар бир аргументи ва ҳамма аргументлари бўйича бир йўл узлуксизликка текширинг.

$$20.14. \quad u = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \text{ bo'lganda}, \end{cases} \quad 0(0;0) \text{ va } A(1;2) .$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$20.15. u = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \text{ bo'lganda,} \end{cases} \quad O(0;0) \text{ va } A(10^{-4}, 10^{-5}).$$

$$20.16. u = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y}, & x^4 + y^4 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \text{ bo'lganda,} \end{cases} \quad O(0;0) \text{ va } A(1; -1).$$

$$20.17. u = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda,} \end{cases} \quad O(0;0) \text{ va } A(0;1).$$

$$20.18. u = \begin{cases} \frac{\sin x + \sin y}{x + y}, & x + y \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 1, & x + y = 0 \text{ bo'lganda,} \end{cases} \quad O(0;0) \text{ va } A\left(\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}\right)$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган соҳада чегараланган ёки чегараланмаган эканлигини аниқланг.

$$20.19. u = x^2 - y^2, \{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

$$20.20. u = x^2 - y^2, \{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 > 25\}.$$

$$20.21. u = \frac{ax^2 + by^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \neq 0, (a \text{ va } b \text{ ҳақиқий сонлар}).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$20.22. \quad u = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{xy}, \quad xy \neq 0.$$

20.23. Ушбу

$$u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функция $O(0,0)$ нуктада: 1) x бўйича узлуксиз; 2) y бўйича узлуксиз; 3) иккала аргументи бўйича бир йўл узлуксиз бўладими?

20.24. a нинг қандай қийматида ушбу

$$u = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ a, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функция $O(0,0)$ нуктада: 1) x бўйича узлуксиз; 2) y бўйича узлуксиз; 3) $y = k\sqrt{x}$, ($k \neq 0$) чизик бўйича узлуксиз; 4) иккала аргументи бўйича бир йўла узлуксиз бўладими?

20.25. a нинг қандай қийматида ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$u = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ a, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функция $O(0,0)$ нуктада: 1) $x = \alpha t, y = \beta t$ ($\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$) чизик бўйича узлуксиз; 2) иккала аргументи бўйича бир йўлла узлуксиз бўлади?

20.26. Ушбу

$$u = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^4}, & x^4 + y^4 \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ 0, & x^4 + y^4 = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функциянинг $O(0,0)$ нуктада: $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha$ ($0 \leq t < \infty$) чизик бўйича узлуксизлигини; иккала аргументи бўйича бир йўла узилишга эга эканлигини кўрсатинг.

20.27. a нинг қандай қийматида ушбу

$$u = \begin{cases} \frac{1}{x+y} e^{-\frac{1}{|x+y|}}, & x+y \neq 0 \text{ bo'lganda}, \\ a, & x+y = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функция R^2 да узлуксиз бўлади.

20.28. a ва b нинг қандай қийматларида ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$u = \begin{cases} a, & x^2 + y^2 \leq 4 \text{ bo'lg anda,} \\ \sqrt{9 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2 - 4}, & 4 < x^2 + y^2 \leq 9 \text{ bo'lg anda,} \\ b, & x^2 + y^2 > 9 \text{ bo'lg anda} \end{cases}$$

функция R^2 да узлуксиз бўлади.

Қуйидаги функциянинг кўрсатилган соҳада чегараланганлигини исботланг, унинг аниқ чегараларини топинг ҳамда функциянинг аниқ чегараларига эришиши ёки эришмаслигини аниқланг.

20.29. $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0 \quad .$

20.30. $u = \frac{x^6 - y^6}{x^2 + y^2}, \quad \{M\} = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 \leq 9\} \quad .$

20.31. $u = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4}, \quad x^4 + y^4 \neq 0 \quad .$

20.32. $u = xye^{-xy}, \quad \{M\} = \{(x, y): x \geq 0, y \geq 0\} \quad .$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тўпдамда текис узлуксиз эканлигини таърифга асосан исботланг.

20.33. $u = ax + by + c, \quad (a \neq 0, b \neq 0), \quad R^2 \quad .$

20.34. $u = x^2 + y^2, \quad \{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\} \quad .$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$20.35. u = \sqrt{x^2 + y^2}, \{M\} = \{(x, y): |x| < \infty, |y| < \infty\}.$$

$$20.36. u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, R^3.$$

$$20.37. u = x^3 - y^3, \{M\} = \{(x, y): 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

$$20.38. u = \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, \{M\} = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

$$20.39. u = xy \sin \frac{1}{y}, \{M\} = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

$$20.40. u = \ln(x^2 + y^2), \{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 \geq 1\} \text{ т.}$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тўпланда текис узлуксиз эмаслигини кўрсатинг.

$$20.41. u = \frac{\sqrt{x^4 + y^4}}{x^2 + y^2}, \{M\} = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

$$20.42. u = x \sin \frac{1}{y}, \{M\} = \{(x, y): 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

$$20.43. u = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}, \{M\} = \{(x, y): 0 < x^2 + y^2 < 1\}.$$

$$20.44. u = \sin \frac{\pi}{1 - x^2 - y^2}, \{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$20.45. u = \sin \frac{\pi}{x^2 + y^2 - 1}, \quad \{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 < 1\}.$$

Қуйидаги функцияларни кўрсатилган тўпдамда текис узлуксизликка текширинг.

$$20.46. u = 2x - 3y + 5, \quad \{M\} = \{(x, y): |x| < \infty, |y| < \infty\}.$$

$$20.47. u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \{M\} = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

$$20.48. u = \arcsin \frac{y}{x}, \quad \{M\} = \{(x, y): |y| < x\}.$$

20.49. $u = f(x, y)$ функция R^2 да узлуксиз бўлса, $u = f(x, y)$ R^2 да текис узлуксиз бўладими?

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

20.1. $O(0;0)$. 20.2. $O(0;0)$. 20.3. $x^2 + y^2 = 9$ — айлананинг ҳамма

нуқталари. 20.4. $x + y = 0$ чизиқнинг ҳамма нуқталари.

20.5. $y = 0$ тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари.

20.6. Координата ўқларининг ҳамма нуқталари.

20.7. $O(0;0)$ йўқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқта.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

20.8. $0(0;0)$. **20.9.** $x + y = 0$ чизикнинг $(1;-1)$ ва $(-1;1)$ нуқталардан бошқа ҳамма нуқталари узилиш нуқталари бўлади, $(1;-1)$ ва $(-1;1)$ нуқталар эса, йўқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқталари бўлади. **20.10.** $(\pi k; \pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

20.11. $0(0;0)$ йўқотилиши мумкин бўлган узилиш нуқтаси.

20.12. $(\pi k; \pi n)$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **20.13.** Узилиш нуқталари йўқ.

20.14. O ва A нуқталарида функция ҳар бир аргументи бўйича узлуксиз.

20.15. O ва A нуқталарда функция ҳар бир аргументи ва ҳамма аргументлари бўйича бир йўла узлуксиз. **20.16.** O нуқтада функция ҳар бир аргументи ва ҳамма аргументи бўйича бир йўла узлуксиз, A нуқтада эса, ҳар бир аргументи ва ҳамма аргументи бўйича бир йўла узилишга эга.

20.17. O нуқтада функция x аргументи бўйича узлуксиз, y аргументи ва ҳамма аргументлари бўйича бир йўла узилишга эга. A нуқтада ҳар бир аргументи ва ҳамма аргументи бўйича бир йўла узлуксиз.

20.18. O нуқтада функция ҳар бир аргументлари ва ҳамма аргументлари бўйича бир йўла узлуксиз; A нуқтада ҳар бир аргументи ва ҳамма аргументлари бўйича бир йўла узилишга эга.

20.19. Чегараланган. **20.20.** Чегараланмаган. **20.21.** Чегараланган.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

20.22. Чегараланмаган. **20.23.** 1) Ҳа. 2) Ҳа. 3) Йўқ.

20.24. 1) 1. 2) -1 . 3) -1 . 4) Мавжуд эмас. **20.25.** 1) 0. 2) 0. **20.27.** 0.

20.28. $a = \sqrt{5}$, $b = -\sqrt{5}$. **20.29.** $\sup u = 1$, бунга эришади, масалан, $(1, 0)$ нуктада, $\inf u = -1$, бунга эришади, масалан, $(0, 1)$ нуктада.

20.30. $\sup u = 81$, бунга эришади, масалан, $(0; 3)$ нуктада, $\inf u = 0$, бунга эришмайди. **20.31.** $\sup u = 0,5$, бунга эришади, масалан, $(1, 1)$ нуктада,

$\inf u = 0$, бунга эришади, масалан, $(0, 1)$ нуктада.

20.32. $\sup u = \frac{1}{e}$, бунга эришади, масалан, $(1; 1)$ нуктада, $\inf u = 0$, бунга

эришади, масалан, $(0, 0)$ нуктада.

20.46. Текис узлуксиз.

20.47. Текис узлуксиз.

20.48. Текис узлуксиз эмас.

20.49. Йўқ.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21 -§. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари

21.1. Кўп ўзгарувчили функциянинг хусусий ҳосилалари.

$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция очик $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпланда аниқланган бўлсин. Бу тўпламдан $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтани оламиз ва функциянинг x_k аргументига Δx_k орттирма берамиз (қолган аргументларини ўзгармас, деб ҳисоблаймиз). Натижада, функция ҳам $\Delta_{x_k} u$ орттирма олади.

Ушбу

$$\frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\Delta x_k} \quad (21.1)$$

нисбатни қараймиз, бунда $M(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k + \Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) \in \{M\}$.

21.1–таъриф. Агар $\Delta x_k \rightarrow 0$ да (21.1) нисбатнинг лимити мавжуд ва чекли бўлса, бу лимит $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтадаги x_k аргументи бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}, \quad U'_{x_k}, \quad f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad f'_{x_k}$$

каби белгиларнинг бири орқали ёзилади. Таърифга кўра,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

21.1-мисол. 21.1-таърифдан фойдаланиб, ушбу

$$f(x, y) = 3^{2x+y}$$

функциянинг $O(0,0)$ нуктадаги f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

Ечилиши. 21.1-таърифга кўра, f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3^{2\Delta x} - 1}{\Delta x} = 2 \ln 3 = \ln 9,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{3^{\Delta y} - 1}{\Delta y} = \ln 3.$$

Демак, $f'_x(0,0) = \ln 9$ $f'_y(0,0) = \ln 3$.

21.2-мисол. Ушбу

$$f(x, y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функциянинг $A(1, 1)$ нуктадаги f'_x, f'_y хусусий ҳосилалари мавжуд эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, $(x, y) \neq (1; 1)$ бўлсин, у ҳолда, f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$f'_x(x, y) = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}, \quad f'_y(x, y) = \frac{y-1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}.$$

Демак, $(x, y) \neq (1; 1)$ да берилган функциянинг хусусий ҳосилалари мавжуд.

21.1-таърифга кўра, берилган функциянинг $f'_x(1; 1), f'_y(1; 1)$ хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x, 1) - f(1, 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(1, 1 + \Delta y) - f(1, 1)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}.$$

Бунда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}, \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y}$ лимитлар ҳар хил қийматларга эга бўлганлиги учун, лимитлар мавжуд эмас.

Демак, берилган функциянинг $A(1, 1)$ нуктада хусусий ҳосилалари мавжуд эмас.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.3-мисол. Қуйидаги:

$$1) f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}; \quad 2) f(x, y, z) = e^{xyz}$$

функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Ечилиши. 1) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ формулага асосан, $f'_x(x, y)$ ва $f'_y(x, y)$

хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{yx}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

2) $(e^u)' = e^u u'$ формулага асосан, берилган функциянинг хусусий

ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xyz} \cdot yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xyz} \cdot xz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = e^{xyz} \cdot xy.$$

21.4-мисол. Ушбу $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ функция $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = x + y$

тенгламани қаноатлантирадими?

Ечилиши. Дастлаб, берилган функциянинг $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ хусусий

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + \varphi'(x - y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = y - \varphi'(x - y).$$

Энди бу хусусий ҳосилаларни тенгламага олиб бориб қўямиз:

$$x + \varphi'(x - y) + y - \varphi'(x - y) = x + y \Rightarrow x + y \equiv x + y.$$

Демак, $u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \varphi(x - y)$ функция биринчи тартибли хусусий

ҳосилали дифференциал тенгламанинг ечими экан.

21.1-эслатма. Берилган нуқтада функциянинг ҳамма хусусий ҳосилаларининг мавжудлигидан, унинг шу нуқтада узлуксизлиги келиб чиқавермайди. Масалан,

$$u = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda} \end{cases}.$$

функция $M_0(0,0)$ нуқтада узлуксиз эмас, лекин бу функция кўрсатилган нуқтада x ва y аргументлари бўйича хусусий ҳосилаларга эга:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(0,0)} = 0; \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0,$$

чунки $f(x,0)=0$, $f(0,y)=0$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.2. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциалланувчанлиги шarti.

$u = f(M)$ функция $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпلامда берилган бўлсин. Маълумки,
 $u = f(M)$ функциянинг $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтадаги тўлиқ орттирмаси:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (21.1)$$

ифодадан иборат (20-§ га қаранг).

21.2–таъриф. Агар $u = f(M)$ функциянинг M нуқтадаги тўлиқ орттирмасини

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (21.2)$$

бунда $A_1, A_2, \dots, A_m$ лар, $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ бўлмаган ўзгармаслар, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ лар эса, $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга боғлиқ ва $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ да $\alpha_1 \rightarrow 0, \alpha_2 \rightarrow 0, \dots, \alpha_m \rightarrow 0$ ($\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_m = 0$ бўлганда эса, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ деб олинади), кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(M)$ функция $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтада дифференциалланувчи дейилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.1-теорема. Агар $u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, бу функциянинг $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктада барча аргументлари бўйича хусусий ҳосилалари мавжуд ва $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = A_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) бўлади, бунда A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) лар (21.2) шартдан топилади.

21.1-натижа. (21.2) дифференциалланувчанлик шартини,

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m + o(\rho) \quad (21.3)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $\rho = M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ва $M_1(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_m + \Delta x_m) \in \{M\}$ нукталар орасидаги масофа, яъни $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$.

21.2–натижа. Агар $u = f(M)$ функция $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, унинг тўлиқ орттирмаси (21.2) шаклида тасвирланиши ягонадир. Агар $u = f(M)$ функция $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуктада узлуксиз бўлади.

21.2-теорема. Агар $u = f(M)$ функция $M_0(x_1^0, \dots, x_m^0)$ нуктанинг бирор атрофида барча аргументлари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳосилалар M_0 нуктада узлуксиз бўлса, у ҳолда, берилган функция M_0 нуктада дифференциалланувчи бўлади.

21.6-мисол. Ушбу $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ функциянинг $O(0, 0)$ нуктада хусусий ҳосилаларга эгаллигини ва у шу нуктада дифференциалланувчи эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. Таърифдан фойдаланиб, берилган функциянинг $O(0, 0)$ нуктадаги хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \cdot 0}}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 \cdot \Delta y}}{\Delta y} = 0.$$

$O(0, 0)$ нуктада берилган функциянинг тўла орттирмасини топамиз:

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y} \quad (*)$$

Фараз қилайлик, берилган функция $O(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда, $(*)$ орттирма ушбу

$$\Delta f(0, 0) = f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + o(\rho)$$

кўринишда ифодаланади, бунда $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Қуйидаги лимитларни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

қараймиз:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta f(0,0) - f'_x(0,0)\Delta x + f'_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \neq 0.$$

Агар $\Delta x = \Delta y \rightarrow 0$ да $\frac{\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2}}{|\Delta x|\sqrt{2}} \rightarrow +\infty.$

Демак, берилган функция $O(0, 0)$ нуктада дифференциалланувчи эмас.

21.3. Кўп ўзгарувчили функциянинг дифференциали.

$u = f(M)$ функция $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, бу функция $M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{M\}$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $u = f(M)$ функциянинг Δu тўлиқ орттирмаси учун (21.2) формула ўринли:

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m.$$

21.3–таъриф. $u = f(M)$ функция Δu орттирмасининг $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ ларга нисбатан чизикли бош қисми, $u = f(M)$ функциянинг M нуктадаги *дифференциали* (тўлиқ *дифференциали*) деб аталади ва u , du , df ёки $df(x_1, x_2, \dots, x_m)$ каби белгиланади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Демак,

$$du = df = df(x_1, x_2, \dots, x_m) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_m \Delta x_m \quad (21.4)$$

21.1-теоремани эътиборга олсак, у ҳолда, (21.4) функция дифференциали ни қуйидаги,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m \quad (21.5)$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин. x_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ўзгарувчининг дифференциалини dx_i ($i = 1, 2, \dots, m$) деб, ихтиёрий $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ларга боғлиқ бўлмаган сон тушунилади. Бу сонни, бундан кейин, Δx_i ($i = 1, 2, \dots, m$) га тенг деб олишга келишиб оламиз, яъни $dx_i = \Delta x_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Бу келишувни эътиборга олсак, (21.5) ни қуйидаги,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m \quad (21.6)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

5.6-мисол. Ушбу $z = e^{x^2 y^2}$ функциянинг dz биринчи тартибли тўлиқ дифференциалини топинг

Ечилиши. Берилган функциядан x ва y ўзгарувчилар бўйича хусусий

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(e^{x^2 y^2} \right)_x = e^{x^2 y^2} 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \left(e^{x^2 y^2} \right)_y = e^{x^2 y^2} 2x^2 y.$$

Топилган биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни $dz = z'_x dx + z'_y dy$ формулага келтириб қўямиз

$$dz = e^{x^2 y^2} 2xy^2 dx + e^{x^2 y^2} 2x^2 y dy = e^{x^2 y^2} 2xy(ydx + xdy).$$

21.7- мисол. Функциянинг орттирмасини унинг дифференциалига алмаштириб, ушбу $(0,98)^{2,01}$ сонни тақрибий ҳисобланг.

Ечилиши. Қуйидаги $u = x^y$ функцияни қараймиз. Бу функциянинг $(1; 2)$ нуқтадаги қиймати $u(1; 2) = 1$ бўлади. $u = x^y$ функциянинг $(0,98; 2,01)$ нуқтадаги қийматини ҳисоблаймиз.

Дастлаб $u = x^y$ функциянинг $(1; 2)$ нуқтадаги u'_x, u'_y хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$u'_x = yx^{y-1}, \quad u'_x(1; 2) = 2; \quad u'_y = x^y \ln x, \quad u'_y(1; 2) = 0.$$

Берилган сонни $u(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx u(x, y) + u'_x(x, y)\Delta x + u'_y(x, y)\Delta y$ формула бўйича ҳисоблаймиз, бунда $\Delta x = -0,02, \Delta y = 0,01,$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Титулварак

Мундарижа

1 - 6 0 6

2 - 6 0 6

3 - 6 0 6

4 - 6 o 6

И л о в а л а р

О р к а г а

С а х и ф а / 708

Тулик экран

Чикиш

21.3-теорема. Агар (21.7) фнкцияларнинг ҳар бири $N_0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in \{N\}$

$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_k^0) \in \{M\} \quad (x_1^0 = \varphi_1(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), x_2^0 = \varphi_2(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0), \dots, x_m^0 = \varphi_m(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0))$
 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у холда, $f(\varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, t_2, \dots, t_k))$
 мураккаб функция ҳам $N_0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўлади ва
 унинг хусусий ҳосилалари

формулалар орқали топилади.

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{du}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{du}{dx_m} \cdot \frac{dx_m}{dt}$$

Чикиш

формула бўйича топилади.

Икки ўзгарувчили функция учун занжир қондаси: Агар $W = f(x, y)$ дифференциалланувчи функция, x ва y лар эса, t эркин ўзгарувчининг дифференциалланувчи функциялари бўлса, W функция ҳам t эркин ўзгарувчининг дифференциалланувчи функцияси бўлади ва

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

формула ўринли.

Бу тасдиқнинг «дарахт диаграммаси» куйидагича: $\frac{dW}{dt}$ ни топиш учун,

W дан бошлаб, ҳар бир йўл бўйича пастга қараб ҳаракат қилиниб, йўлда учраган ҳосилалар кўпайтирилиб, сўнггра улар қўшилади:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

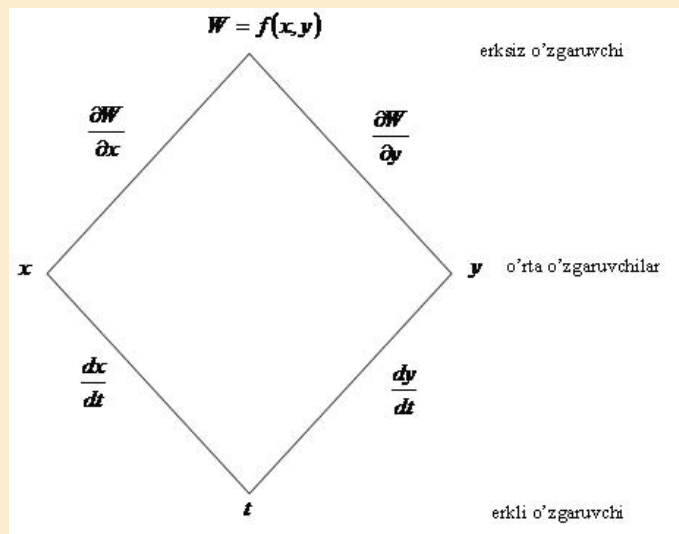


О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

Уч ўзгарувчили мураккаб функция учун занжир қондаси: Агар $W = f(x, y, z)$ дифференциалланувчи функция, x , y ва z лар эса, t эркли ўзгарувчининг дифференциалланувчи функциялари бўлса, у ҳолда, W функция ҳам t эркли ўзгарувчининг дифференциалланувчи функцияси бўлади ва

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

формула ўринли.

Бу тасдиқнинг «дарахт диаграммаси» қуйидагича: $\frac{dW}{dt}$ ни топиш учун,



О р к а г а

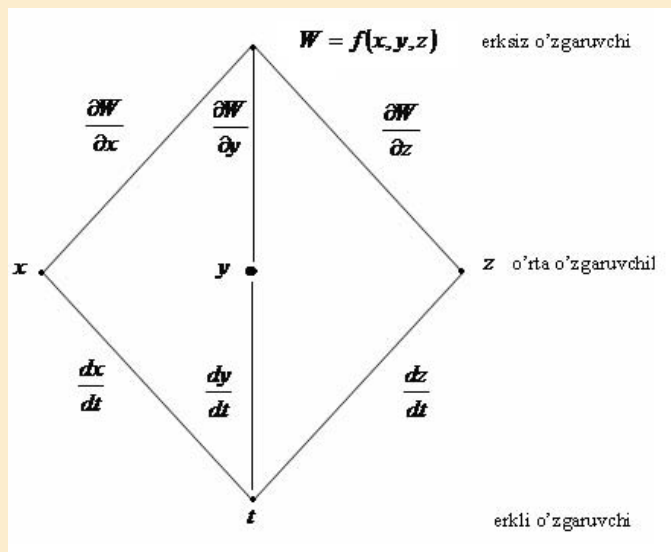
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

W дан бошлаб ҳар бир йўл бўйича пастга қараб ҳаракат қилиниб, йўлда учраган ҳосилалар кўпайтирилиб, сўнгра улар қўшилади:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$



Иккита эркин ўзгарувчи ва учта ўрта ўзгарувчилар учун занжир қондаси: Агар $W = f(x, y, z)$ $x = g(r, s)$, $y = h(r, s)$ ва $z = k(r, s)$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, у ҳолда, W функция ҳам r ва s эркин ўзгарувчиларга нисбатан хусусий ҳосилаларга эга бўлади ва улар учун,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

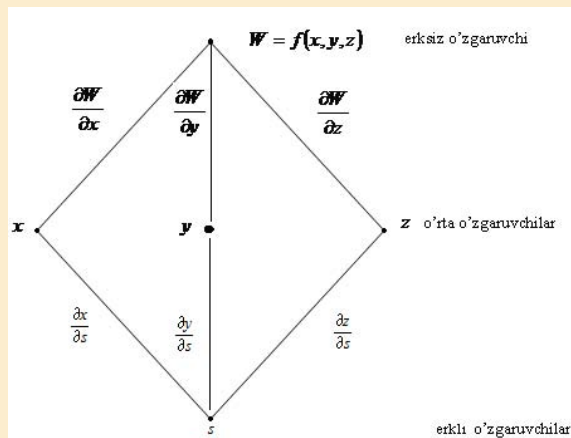
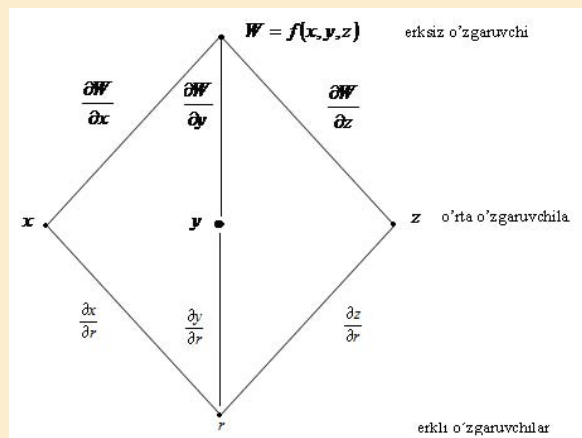
$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}, \quad \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

формулалар ўринли.

Бу тасдиқнинг «дарахт диаграммаси» қуйидагича: $\frac{\partial W}{\partial r}$, $\frac{\partial W}{\partial s}$ ни топиш

учун, W дан бошлаб ҳар бир йўл бўйича пастга қараб ҳаракат қилиниб, йўлда

учраган ҳосилалар кўпайтирилиб, сўнггра улар қўшилади:



$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r},$$

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}.$$

Агар $W = f(x)$, $x = g(r, s)$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, у

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

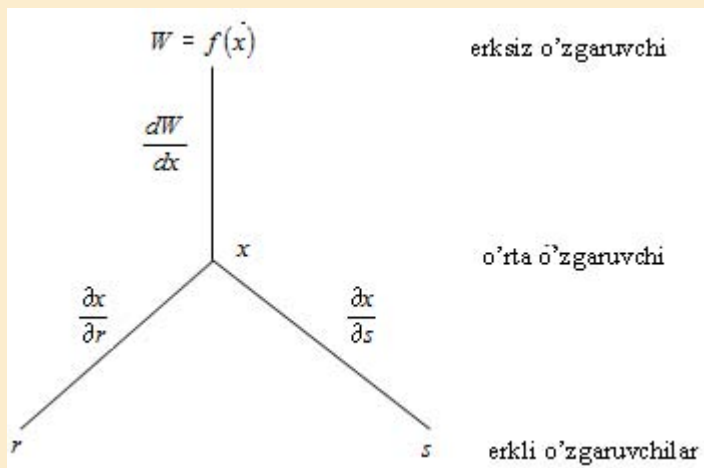
Ч и к и ш

холда, W функция ҳам r ва s эрки ўзгарувчиларга нисбатан хусусий ҳосилаларга эга бўлади ва улар учун,

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dW}{dx} \frac{\partial x}{\partial r}, \quad \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{dW}{dx} \frac{\partial x}{\partial s}$$

формулалар ўринли.

Бу тасдиқнинг “дарахт диаграммаси” куйидагича: $\frac{\partial W}{\partial r}$, $\frac{\partial W}{\partial s}$ ларни топиш учун, W дан бошлаб ҳаракат қилиниб, $\frac{dW}{dx}$ ҳосила x ўрта ўзгарувчининг r ва s эрки ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларига кўпайтирилади:



$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dW}{dx} \frac{\partial x}{\partial r}, \quad \frac{\partial W}{\partial s} = \frac{dW}{dx} \frac{\partial x}{\partial s}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

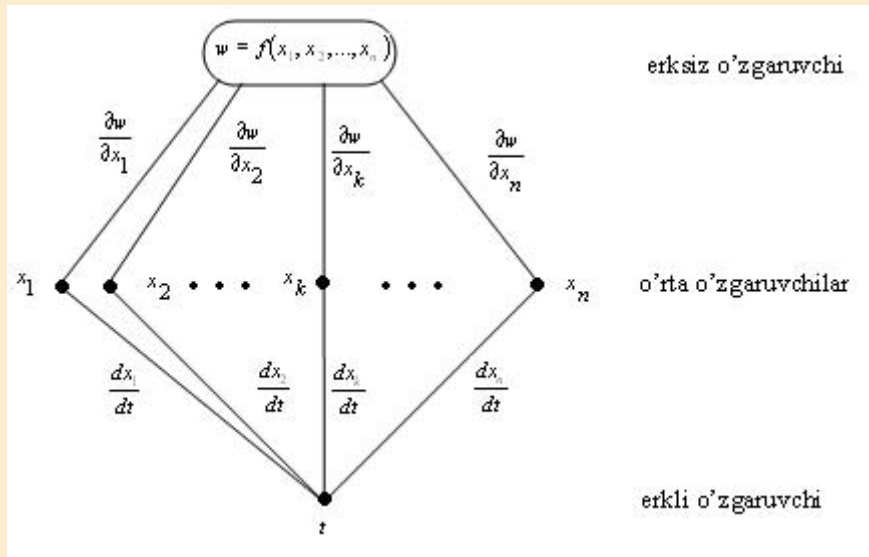
С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ (n та ўрта ўзгарувчилар,

битта эрки ўзгарувчи ҳоли) бўлса, дарахт диаграммаси



кўринишни олади ва w функциянинг t эрки ўзгарувчи бўйича тўлиқ ҳосиласи,

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}$$

формула бўйича ҳисобланади.

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_1 = \varphi_1(t_1, t_2, \dots, t_m), x_2 = \varphi_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n = \varphi_n(t_1, t_2, \dots, t_m)$$

функция учун “дарахт диаграммаси”

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

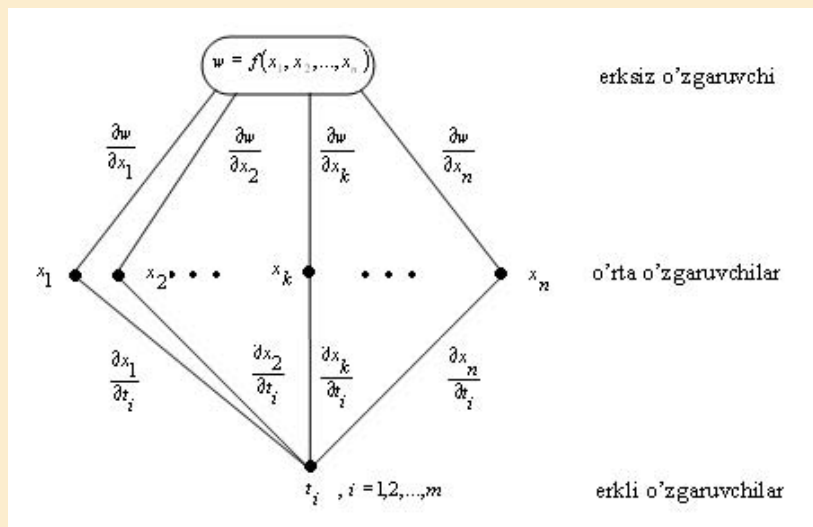


О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



кўринишни олади ва w функциянинг $t_i, i = 1, 2, \dots, m$, эркин ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалари,

$$\frac{\partial w}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial w}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2},$$

.....

$$\frac{\partial w}{\partial t_m} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m}$$

Формулалар ёрдамида ҳисобланади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.8-мисол. Ушбу $W = x^3 - xy$, $x = 1 - t^2$, $y = t^4$ мураккаб функциянинг

a) занжир қоидадан фойдаланиб; b) бевосита t бўйича дифференциалаб,

$\frac{dW}{dt}$ ни t нинг функцияси сифатида ифодаланг, сўнгра $\frac{dW}{dt}$ нинг берилган

$t = 1$ нуқтадаги қийматини топинг.

Ечилиши. a) $\frac{dW}{dt}$ ни топиш учун, «дарахт диаграммаси»га асосан, W

дан бошлаб, ҳар бир йўл бўйича пастга қараб ҳаракат қилиб, йўлда учраган ҳосилаларни кўпайтирамиз, сўнгра уларни қўшамиз:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (3 - 6t^2 + 2t^4)(-2t) + (t^2 - 1)4t^3 = 2t(4t^2 - 3).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

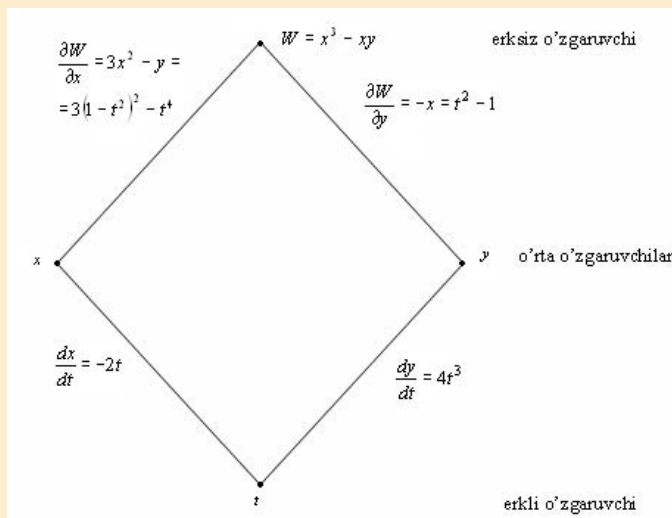


О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

б) Мураккаб функциянинг $\frac{dW}{dt}$ ҳосиласини $\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt}$ формула

бўйича топамиз:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 3x^2 - y = 3(1-t^2)^2 - t^4 = 3 - 6t^2 + 2t^4, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = -x = t^2 - 1, \quad \frac{dx}{dt} = -2t, \quad \frac{dy}{dt} = 4t^3,$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (3 - 6t^2 + 2t^4)(-2t) + (t^2 - 1)4t^3 = 2t(4t^2 - 3).$$

Энди $\frac{dW}{dt}$ нинг берилган $t = 1$ нуқтадаги қийматини топамиз:

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{t=1} = 2t(4t^2 - 3) \Big|_{t=1} = 2.$$



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.9-мисол. Ушбу $z = e^x y^2$, $x = u^2 - v^2$, $y = u \cdot v$ мураккаб функциянинг

хусусий ҳосиласини топинг.

Ечилиши. $z(x(u,v), y(u,v))$ мураккаб функциянинг хусусий ҳосиласини топиш формуласидан фойдаланамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x y^2, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = 2u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -2v, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 2ye^x, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = e^x y^2 \cdot 2u + 2ye^x \cdot v = 2e^{u^2-v^2} \cdot u^3 v^2 + 2uv^2 e^{u^2-v^2} = 2uv^2(u^2 + 1)e^{u^2-v^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = e^x y^2 \cdot (-2v) + 2ye^x \cdot u = 2e^x y(u - vy) = 2e^{u^2-v^2} \cdot uv(u - v^2 u) = \\ &= 2e^{u^2-v^2} u^2 v(1 - v^2). \end{aligned}$$

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпланда берилган бўлсин.

21.4- таъриф. Агар $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпламнинг ҳар бир нуқтасида ва ҳар бир t лар учун

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^p f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (21.9)$$

тенглик бажарилса, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпланда p - даражали биржинсли функция дейилади.

21.4-теорема(Биржинсли функциялар ҳақида Эйлер теоремаси).

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Агар $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\}$ тўпланда дифференциалланувчи p -даражали биржинсли функция бўлса, у ҳолда $\{M\}$ тўпламнинг ҳар бир $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтасида $\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} x_m = pu$ тенглик ўринли.

21.10- мисол. Агар $f(x, y, z)$ функция $\{M\}$ тўпланда дифференциалланувчи p -даражали биржинсли функция бўлса, $f'_x(x, y, z)$, $f'_y(x, y, z)$, $f'_z(x, y, z)$ хусусий ҳосилалари $p-1$ -даражали биржинсли функциялар эканлигини исботланг.

Ечилиши. Шартга кўра,

$$f(tx, ty, tz) = t^p f(x, y, z)$$

бўлиб, тенгликнинг чап томони дифференциалланувчи. Тенгликни x бўйича дифференциаллаймиз:

$$f'_x(tx, ty, tz)t = t^p f'_x(x, y, z) \text{ ёки } f'_x(tx, ty, tz) = t^{p-1} f'_x(x, y, z).$$

Бундан $f'_x(x, y, z)$ функция $p-1$ -даражали биржинсли функция эканлиги келиб чиқади. $f'_y(x, y, z)$ ва $f'_z(x, y, z)$ функцияларнинг ҳам $p-1$ -даражали биржинсли функция эканлиги худди юқоридагидек кўрсатилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.5. Дифференциал шакли инвариантлигининг сақланиши.

$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпламда берилган бўлсин. Биз юкорида кўрган эдикки, агар $x_1, \dots, x_m$ аргументлар эркли ўзгарувчилар бўлса, функциянинг дифференциали (тўлиқ дифференциали)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m \quad (21.10)$$

кўринишда тасвирланади. Энди $x_1, x_2, \dots, x_m$ аргументлар эрксиз ўзгарувчили, яъни бирор $N_0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in \{N\}$ нуктада, дифференциалланувчи $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функциялар, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуктада дифференциалланувчи бўлсин, деб фараз қилайлик. Бу ҳолда, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функцияни, $t_1, t_2, \dots, t_k$ ўзгарувчиларнинг мураккаб функцияси деб қараймиз. 21.3-теоремага асосан, бу мураккаб функция N_0 нуктада дифференциалланувчи бўлади ва унинг дифференциали,

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_m} dt_m \quad (21.11)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

кўринишда тасвирланади, бунда $\frac{\partial u}{\partial t_i}$ лар (21.8) формулалар орқали топилади.

$\frac{\partial u}{\partial t_i}$ ларнинг ифодаларини (21.8) дан (21.11) га келтириб қўйиб ва $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ларнинг

коэффициентларини жамлаб, натижада

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k \right) + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right) \quad (21.12)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Маълумки, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i=1,2,\dots,m$) нинг коэффициенти,

$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ($i=1,2,\dots,m$) функциянинг dx_i ($i=1,2,\dots,m$) дифференциалини ифодалайди. Шунинг учун, (21.12) нинг кўринишини, (21.11) кўринишда ёзиш

мумкин. Демак, $x_1, x_2, \dots, x_m$ лар эрксиз ўзгарувчилар бўлганда ҳам,

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг дифференциали (21.11) кўринишда бўлар экан,

яъни кўп ўзгарувчили мураккаб функциянинг биринчи тартибли дифференциали шакли инвариантлиги (кўриниши) сақланар экан.

$u = f(M)$ ва $v = g(M)$ функциялар очик $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $\{M\}$ тўпламда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда, $u \pm v, uv, \frac{u}{v}$ ($v \neq 0$)

функциялар ҳам шу M нуктада дифференциалланувчи ва уларнинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

дифференциали учун, қуйидаги,

$$d(cu) = cdu \quad (c = \text{const})$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = u dv + v du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

формулалар ўринли бўлади.

21.6. Йўналиш бўйича ҳосила. Градиент.

Маълумки, бир ўзгарувчи $y = f(x)$ ($x \in R, y \in R$) функциянинг $\frac{df}{dx}$

ҳосиласи, берилган функциянинг ўзгариш тезлигини билдиради. Кўп

ўзгарувчи $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ ($(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m, u \in R$) функциянинг

хусусий ҳосилалари ҳам бир ўзгарувчи функциянинг ҳосиласи каби

эканлигини эътиборга олиб, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}$ функциялар ҳам, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

функциянинг, мос равишда, $Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_m$ ўқлар бўйича R^m да ўзгариш

тезлигини ифодалайди, деб қараш мумкин.

Энди кўп ўзгарувчи функциянинг ихтиёрий йўналиш бўйича ўзгариш тезлигини ифодаловчи тушунча билан танишамиз. Соддалик учун, уч

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ўзгарувчили функцияни қараймиз. $u = f(x, y, z) = f(M)$ функция очик $\{M\} \subset R^3$ тўпланда берилган бўлсин. $\vec{r} = \vec{r}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ бирлик вектор билан аниқланадиган бирор $\vec{l}$ йўналишни қарайлик. $\{M\}$ тўпланда ихтиёрий $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтани олиб, бу нуқта орқали ўтувчи, йўналиши, $\vec{r} = \vec{r}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ вектор йўналишига мос келган $\vec{l}$ йўналишни қарайлик. $\vec{l}$ йўналишда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтага яқин ётган ихтиёрий ўзгарувчи $M(x, y, z)$ нуқтани оламиз ($M \in \{M\}$). $M_0 \vec{M}$ йўналган кесма $\{M\} \subset R^3$ тўпламга тегишли, у ҳолда,

$$\frac{x - x_0}{\rho(M_0, M)} = \cos \alpha, \quad \frac{y - y_0}{\rho(M_0, M)} = \cos \beta, \quad \frac{z - z_0}{\rho(M_0, M)} = \cos \gamma \quad (21.13)$$

бўлади.

21.5-таъриф. Агар $M(x, y, z)$ нуқта $\vec{l}$ йўналган тўғри чизик бўйлаб $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтага интилганда ($M \rightarrow M_0$), ушбу

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0, M)} = \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho((x_0, y_0, z_0), (x, y, z))}$$

нисбатнинг лимити мавжуд бўлса, бу лимитга $f(x, y, z) = f(M)$ функциянинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосиласи деб аталади ва у $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \vec{l}}$ ёки

$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{l}}$ каби белгиланади.

21.5-таърифга кўра, уни

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0, M)}.$$

кўринишда ёзиш мумкин.

21.6-теорема. Агар $u = f(x, y, z) = f(M)$ функция очик $\{M\} \subset R^3$ тўпламда берилган бўлиб, у $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \{M\}$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда, $u = f(x, y, z) = f(M)$ функция шу нуктада ҳар қандай $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосиллага эга бўлади ва бу ҳосила,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial \vec{l}} &= \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \cos \beta + \\ &+ \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} \cos \gamma \end{aligned} \quad (21.14)$$

формула орқали топилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р қ а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.11- мисол. Ушбу $f(x, y) = \arctg \frac{x}{y}$ функциянинг $O(0,0)$ нуқтадан $M_0(1,1)$

нуқтага қараб йўналган $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

Ечилиши. $\vec{l}$ биринчи квадратнинг $M_0(1,1)$ нуқтасидан ўтувчи ва $O(0,0)$ нуқтадан $M_0(1,1)$ нуқтага қараб йўналган биссектрисадан иборат бўлади.

(21.13) формулага асосан, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Берилган функция $M_0(1,1)$ нуқтада

дифференциалланувчи бўлгани учун, унинг йўналиш бўйича ҳосиласини (21.14) формула бўйича топамиз:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cos \frac{\pi}{4} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cos \frac{\pi}{4} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Демак, } \frac{\partial f(1,1)}{\partial \vec{l}} = 0.$$

21.12- мисол. Ушбу $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциянинг $M_0(0,0)$ нуқтада

ихтиёрий $\vec{l}$ йўналиш бўйича ҳосиласи $\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{l}} = 1$ эканлигини кўрсатинг.

Ечилиши. Қуйидаги нисбатни тузамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0, M)} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho} = \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

бундан,

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial \vec{l}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M_0)}{\rho(M_0, M)} = 1.$$

21.13- мисол. Ушбу $f(x, y) = x + |y|$ функциянинг $M_0(0,0)$ нуктада Ox ва Oy координаталар ўқлари бўйича ҳосиласи мавжудми?

Ечилиши. Берилган $f(x, y) = x + |y|$ функциянинг $M_0(0,0)$ нуктада Ox координаталар ўқи бўйича ҳосиласи 1 га тенг бўлиб, Oy координата ўқи бўйича ҳосиласи мавжуд эмас.

21.4- эслатма. Функция бирор нуктада дифференциалланувчи бўлмаса ҳам, у шу нуктада бирор йўналиш бўйича ва ҳатто ҳар қандай йўналиш бўйича ҳосиллага эга бўлиши ҳам мумкин. Масалан, ушбу $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ функция $M_0(0,0)$ нуктада дифференциалланувчи эмас, лекин биз юқорида кўрдикки, бу функция $M_0(0,0)$ нуктада ихтиёрий йўналиш бўйича ҳосиллага эга.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.7- таъриф. Компоненталари (координаталари) $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ бўлган

вектор, $u = f(x, y, z)$ функциянинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадаги градиенти, деб аталади ва у

$$\text{gradu}(M_0) = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \vec{k} \quad (21.15)$$

каби белгиланади, бунда $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ хусусий ҳосилалар $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада

ҳисобланган. $\vec{r} = \vec{r}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ эканлигини эътиборга олсак, у ҳолда

(21.14) ни, ушбу $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \left(\vec{r}, \text{gradu} \right)$ (21.14) кўринишда ёзиш мумкин.

$$|\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2} \quad (21.16)$$

эканлигини ҳисобга олиб, (21.15) формулани,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = |\vec{r}| \cdot |\text{gradu}| \cdot \cos \varphi$$

кўринишда ҳам ёзиш мумкин, бунда $\varphi - \vec{r}$ билан градиентнинг орасидаги бурчак. $|\vec{r}| = 1$ бўлгани учун,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = |\operatorname{gradu}| \cdot \cos \varphi.$$

Бу формуладан кўринадики, йўналиш бўйича ҳосила ўзининг максимум

$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)_{\max}$ қийматига $\cos \varphi = 1$ бўлганда яъни $\vec{r}$ векторнинг йўналиши

градиентнинг йўналишига мос тушганда эришади, $\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right)_{\max} = |\operatorname{gradu}|$. Агар $\vec{r}$

нинг йўналиши градиентга перпендикуляр йўналган бўлса, $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 0$ бўлади,

чунки $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

21.14- мисол. Ушбу $u = x^2 + y^2 + z^2$ скаляр функциянинг $P(1, 1, 1)$ ва $Q(1, -1, 1)$ нуқталардаги градиентлари орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. Дастлаб, берилган функциянинг $P(1, 1, 1)$ ва $Q(1, -1, 1)$ нуқталардаги хусусий ҳосилаларини топамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_P = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_Q = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_P = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_Q = -2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_P = 2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_Q = 2.$$

(21.15), (21.16) формулаларга асосан, $u = x^2 + y^2 + z^2$ скаляр функция учун $\text{gradu}(P)$, $\text{gradu}(Q)$ ҳамда $|\text{gradu}(P)|$, $|\text{gradu}(Q)|$ ларни ҳисоблаймиз:

$$\text{gradu}(P) = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \text{gradu}(Q) = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

$$|\text{gradu}(P)| = 2\sqrt{3}, \quad |\text{gradu}(Q)| = 2\sqrt{3}.$$

Энди градиентлар орасидаги бурчакни топамиз:

$$\cos \varphi = \frac{\text{gradu}(P)\text{gradu}(Q)}{|\text{gradu}(P)||\text{gradu}(Q)|} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2}{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Демак, берилган u скаляр функциянинг $P(1, 1, 1)$ ва $Q(1, -1, 1)$ нукталардаги градиентлари орасидаги бурчак $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Муствақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг.

$$21.1. u = x^2 + y^2 + 3x^2 y^3.$$

$$21.2. u = \frac{x(x-y)}{y^2}.$$

$$21.3. u = xyz + \frac{x}{yz}.$$

$$21.4. u = \sin(xy + yz).$$

$$21.5. u = \operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x/y}.$$

$$21.6. u = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}.$$

$$21.7. u = e^x (\cos y + x \sin y).$$

$$21.8. u = x^y.$$

$$21.9. u = \left(\frac{y}{x}\right)^z.$$

$$21.10. u = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}.$$

$$21.11. u = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}.$$

$$21.12. u = (1 + \sin^2 x)^{\ln y}.$$

$$21.13. u = x^y y^z z^x.$$

$$21.14. g(r, \theta) = r \cos \theta + r \sin \theta.$$

$$21.21. f(R_1, R_2, R_3) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

$$21.16. P(n, R, T, V) = \frac{nRT}{V}.$$

Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқтадаги хусусий ҳосилаларини

ТОПИНГ.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$21.17. u = \frac{x}{y^2}, (1;1) .$$

$$21.18. u = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right), (1;2) .$$

$$21.19. u = xye^{\sin xy}, (1;1) .$$

$$21.20. u = (2x + y)^{2x+y}, (1;-1) .$$

21.21. Ушбу $u = \sqrt[3]{xy}$ функциянинг $O(0; 0)$ нуқтадаги хусусий ҳосилаларини топинг. Бу функция $O(0; 0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

Қуйидаги берилган $u(x, y)$ функциялар $O(0; 0)$ нуқтада хусусий ҳосилаларга эгами; $O(0; 0)$ нуқтада дифференциалланувчи бўладими?

$$21.22. u = \sqrt{x^2 + y^4} .$$

$$21.23. u = \sqrt{x^4 + y^4} .$$

$$21.24. u = \sqrt[5]{xy}$$

$$21.25. u = \sqrt[3]{x^2 y^2} .$$

$$21.26. u = \begin{cases} \frac{-1}{e^{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

$$21.27. u = \begin{cases} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \text{ bo'lganda,} \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \text{ bo'lganda.} \end{cases}$$

21.28. $u(x, y)$ функция:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$a) u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$b) u = \ln(x^2 + xy + y^2)$$

кўринишларда бўлганда, $\frac{x\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ ифодани ҳисобланг.

21.29. $u(x, y, z)$ функция:

$$a) u = (x - y)(y - z)(z - x);$$

$$b) u = x + \frac{x - y}{y - z}$$

кўринишларда бўлганда, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}$ ифодани ҳисобланг.

21.30-21.35- мисолларда $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция учун қуйидаги

тасдиқларнинг қайси бири тўғри, қайси бири нотўғри?

21.30. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция бирор нуқтада ҳамма аргументлари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у шу нуқтада узлуксиз бўлади.

21.31. Агар функция R^m фазонинг ҳар бир нуқтасида ҳамма аргументлари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у R^m да узлуксиз бўлади.

21.32. Агар функция бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у шу нуқтада ҳамма аргументлари бўйича хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.33. Агар функциянинг бирор нуқтада ҳамма аргументлари бўйича хусусий ҳосилалари мавжуд бўлса, у шу нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

21.34. Агар функция бирор нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда, шу нуқтада функциянинг ҳамма аргументлари бўйича узлуксиз хусусий ҳосилалари мавжуд бўлади.

21.35. Агар функциянинг бирор нуқтада узлуксиз хусусий ҳосилалари мавжуд бўлса, у ҳолда, функция шу нуқтада дифференциалланувчи бўлади.

21.36. Агар $f(x, y) - Oxy$ текисликдаги G очик соҳада аниқланган, унинг f_x ва f_y хусусий ҳосилалари G да чегараланган бўлса, у ҳолда, $f(x, y)$ G да узлуксизлигини исботланг.

Қуйидаги берилган функцияларнинг дифференциалини топинг.

21.37. $u = 2x^4 - 3x^2y^2 + x^3y.$

21.38. $u = (y^3 + 2x^2 + 3)^4.$

21.39. $u = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}.$

21.40. $u = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

21.41. $u = a^{\frac{y}{x}}.$

21.42. $u = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$21.43. \quad u = \ln \sin \frac{x+1}{\sqrt{y}}.$$

$$21.44. \quad u = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{x-y}.$$

$$21.45. \quad u = (1+xy)^y.$$

Қуйидаги функцияларнинг берилган нуқталардаги дифференциалини топинг.

$$21.46. \quad u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}. \quad a) (1;1): \quad b) (0;1).$$

$$21.47. \quad u = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}, \quad (2;1).$$

$$21.48. \quad u = \cos(xy + xz), \quad M(x, y, z) \quad \text{ва} \quad N\left(1; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{нуқталарда.}$$

$$21.49. \quad u = e^{xy} \cdot M(x, y) \quad \text{ва} \quad O(0;0) \quad \text{нуқтада.}$$

$$21.50. \quad u = x^y, \quad M(x, y) \quad \text{ва} \quad M_0(2; 3) \quad \text{нуқталарда.}$$

$$21.51. \quad u = x \ln(xy), \quad M(x, y) \quad \text{ва} \quad M_0(-1; -1) \quad \text{нуқталарда.}$$

$$21.52. \quad u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad M(1, 0, 1).$$

$$21.53. \quad u = \operatorname{arctg} \frac{xy}{z^2}, \quad M(3, 2, 1).$$

$$21.54. \quad u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z, \quad M(1, 1, 1).$$

Қуйидаги берилган $f(u)$ функцияни дифференциалланувчи ва унинг f_u ҳосилалани аниқ деб фараз қилиб, $f(u)$ функция функция учун f_x, f_y топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.55. $u = x^2 + e^y$. **21.56.** $u = \sqrt[3]{x^3 + xy^2}$. **21.57.** $u = \operatorname{arctg}(x + \ln y)$.

Қуйидаги берилган $f(u)$, $f(u, v)$, $f(u, v, w)$ функцияларни дифференциалланувчи ва уларнинг f_u , f_v , f_w ҳосилалари аниқ деб фараз қилиб, қуйидаги φ функциянинг дифференциалини топинг.

21.58. $\varphi = f(u)$, $u = xy + \frac{y^2}{x}$.

21.59.2) $\varphi = f(u, v)$, $u = \frac{y}{x+y}$, $v = x^2 - y^3$.

21.60. $\varphi = f(u, v, w)$, $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x + y + z$, $w = xyz$.

21.61. Агар $W = \sin(xy + \pi)$, $x = e^t$ ва $y = \ln(t+1)$ бўлса, $t = 0$ да $\frac{dw}{dt}$ ҳосилани ҳисобланг.

21.66. Агар $W = \sin(2x - y)$, $x = r + \sin s$, $y = rs$ бўлса, $r = \pi$ ва $s = 0$ бўлганда, мос равишда, $\frac{\partial w}{\partial t}$ ва $\frac{\partial w}{\partial s}$ хусусий ҳосилаларни топинг.

21.67. Ушбу $W(x, y, z) = xy + yz + xz$ функциянинг $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos 2t$ эгри чизикдаги t бўйича ҳосиласининг $t = 1$ даги қийматини топинг.

21.68. $w = f(z, \sigma)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sigma = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ бўлсин. У ҳолда,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\frac{\partial w}{\partial x}$ ва $\frac{\partial w}{\partial y}$ ларни топинг ва жавобингизни r ва σ орқали ифодаланг.

Қуйидаги мисолларда: а) занжир қоидасидан фойдаланиб; б) бевосита t бўйича дифференциалаб, $\frac{dW}{dt}$ ни t нинг функцияси сифатида ифодаланг, сўнгра $\frac{dW}{dt}$ нинг берилган $t=t_0$ нуқтадаги қийматини топинг.

21.69. $W = x^2 + y^2$, $x = \cos t$, $y = \sin t$; $t_0 = \pi$.

21.70. $W = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}$, $x = \cos^2 t$, $y = \sin^2 t$, $z = \frac{1}{t}$; $t_0 = 3$.

21.71. $W = 2ye^x - \ln z$, $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = \arctgtt$, $z = e^t$; $t_0 = 1$.

21.72. Агар $W = (x + y + z)^2$, $x = r - s$, $y = \cos(r + s)$, $z = \sin(r + s)$ бўлса,

$\left. \frac{\partial W}{\partial r} \right|_{(r,s)=(1;-1)}$ топинг.

21.73. Агар $W = x^2 + \frac{y}{x}$, $x = u - 2v + 1$, $y = 2u + v - 2$ бўлса, $\left. \frac{\partial W}{\partial u} \right|_{(u,v)=(0;0)}$ ни

топинг.

21.74. Агар $W = \arctgx$ ва $x = e^u + \ln v$ бўлса, $\left. \frac{\partial W}{\partial u} \right|_{(u,v)=(\ln 2;1)}$, $\left. \frac{\partial W}{\partial v} \right|_{(u,v)=(\ln 2;1)}$ ларни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ТОПИНГ.

21.75. Агар a ва b - ўзгармас сонлар, $w = u^3 + thu + \cos u$ ва $u = ax + by$

бўлса, $a \frac{\partial w}{\partial y} = b \frac{\partial w}{\partial x}$ муносабат ўринли эканлигини кўсатинг.

21.76. Агар $f(u)$ ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, u

ҳолда, $\varphi(x, y) = yf(x^2 - y^2)$ функция, $y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + xy \frac{\partial \varphi}{\partial y} = x\varphi$ тенгламани

қаноатлантиришини исботланг.

21.77. Агар $f(u)$ ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, u

ҳолда, $\varphi(x, y) = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$ функция, $x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xy + \varphi$ тенгламани

қаноатлантиришини исботланг.

21.78. Агар $f(u)$ ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, u

ҳолда, $\varphi(x, y) = \sin x + f(\sin y - \sin x)$ функция, $\cos y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \cos x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xy + \varphi$

тенгламани қаноатлантиришини исботланг.

21.79. Агар $f(u, v)$ ихтиёрий дифференциалланувчи функция бўлса, u

ҳолда, $\varphi(x, y, z) = f\left(\frac{x}{y}, x^2 + y - z^2\right)$ функция, $2xz \frac{\partial \varphi}{\partial x} + 2yz \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (2x^2 + y) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

тенгламани қаноатлантиришини исботланг.

21.80. Агар $w = f(s) - s$ нинг дифференциалланувчи функцияси, $s = y + 5x$

бўлса, у ҳолда $\frac{\partial w}{\partial x} - 5 \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ мусбат бажарилишини кўрсатинг.

21.81. Агар a ва b - ўзгармас сонлар, $w = u^3 + thu + \cos u$ ва $u = ax + by$

бўлса, $a \frac{\partial w}{\partial y} = b \frac{\partial w}{\partial x}$ мусбат ўринли эканлигини кўсатинг.

21.82. Агар $f(u, v, w)$ дифференциалланувчи функция ва $u = x - y$, $v = y - z$

ҳамда $w = z - x$ бўлса, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$ эканлигини кўрсатинг.

21.83. Фараз қилайлик, $W = f(x, y)$ дифференциалланувчи функцияда

$x = r \cos \theta$ ва $y = r \sin \theta$ қутб координаталарига ўтиш амалга оширилган (қутб алмаштиришлари бажарилган) бўлсин. У ҳолда

$$a) \frac{\partial W}{\partial r} = f'_x \cos \theta + f'_y \sin \theta, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} = -f'_x \sin \theta + f'_y \cos \theta,$$

эканлигини кўрсатинг;

б) а) банддаги тенгламаларни f'_x ва f'_y ларга нисбатан ечиб, уларни

$\frac{\partial W}{\partial r}$ ва $\frac{\partial W}{\partial \theta}$ лар орқали ифодаланг;

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$c) (f'_x)^2 + (f'_y)^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2$$

эканлигини кўрсатинг.

21.84. f ва g — x ва y нинг шундай функциялардан иборатки, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$

ва $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ муносабат ўринли бўлсин. Фараз қилайлик, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $f(1,2) = g(1,2) = 5$

ва $f(0,0) = 4$ бўлсин. U ҳолда, $f(x,y)$ ва $g(x,y)$ ларни топинг.

21.85. Биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан $\frac{\partial w}{\partial x} = 1 + e^x \cos y$ ва

$\frac{\partial w}{\partial y} = 2y - e^x \sin y$ ҳамда $(\ln 2, 0)$ нуктадаги қийматини $2 + \ln 2$ га тенг бўлган

$(f(\ln 2, 0) = 2 + \ln 2)$, $w = f(x, y)$ функцияни топинг.

21.86. Агар $u = f(x, y, z)$ функция бирор E соҳада дифференциалланувчи

бўлиб, $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = pu$ тенгламани қаноатлантирса, U ҳолда, унинг p -

даражали бир жинсли функция бўлишини исботланг.

21.87. Агар $u = f(x, y, z)$ функция бирор E соҳада икки марта

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда, $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = p(p-1)u$

тенгликнинг ўринли эканлигини исботланг.

21.88. Ушбу $u = x^y y^x$ функция $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y + \ln u)u$ тенгламани

қаноатлантиришини исботланг.

21.89. Ушбу $u = \frac{x-y}{z-t} + \frac{t-x}{y-z}$ функция $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ тенгламани

қаноатлантиришни исботланг.

Қуйидаги функциянинг M_0 нуқтада $\vec{M_0 M}$ йўналиш бўйича ҳосиласини топинг.

21.90. $f(x, y) = 5x + 10x^2y + y^5$, $M_0(1, 2)$, $M(5, -1)$.

21.91. $f(x, y) = xy^2z^3$, $M_0(3, 2, 1)$, $M(7, 5, 1)$.

21.92. $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $M_0(1, 1, 1)$, $M(1, 5, 4)$.

21.93. Ушбу $f(x, y) = 3x^4 + y^3 + xy$ функциянинг $M_0(1, 2)$ нуқтада, Ox ўқ билан 135° бурчак ташкил қилган нурнинг йўналиши бўйича ҳосиласини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.94. Ушбу $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$ функциянинг $x^2 + y^2 = 2x$ айлананинг

$M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ нуктасига ўтказилган ташқи нормалнинг йўналиши бўйича ҳосиласини топинг.

21.95. Қуйидаги $f(x, y, z) = \ln(e^x + e^y + e^z)$ функциянинг $M_0(0, 0, 0)$ нуктада, Ox, Oy, Oz координаталар ўқлари билан, мос равишда, $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ ва $\frac{\pi}{3}$ бурчакларни ташкил қилган нурнинг йўналиши бўйича ҳосиласини топинг.

21.96-21.97- мисолларда берилган $f(x, y)$ функциянинг P_0 нуктада камайиш ва ўсиш йўналишларини топинг ва ҳар бир йўналиш бўйича ҳосиласини топинг. Шунингдек, $f(x, y)$ функциянинг P_0 нуктада $\vec{v}$ вектор йўналишидаги ҳосиласини топинг.

21.96. $f(x, y) = \cos x \cos y, P_0\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}.$

21.97. $f(x, y, z) = \ln(2x + 3y + 6z), P_0(-1, -1, 1), \vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}.$

Қуйидаги скаляр майдоннинг берилган нуктадаги градиентини топинг.

21.98. $u(x, y) = x^2 - 2xy + 3y - 1, \quad \text{gradu} \big|_{M(x, y)} = ?.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

21.99. $u(x, y) = 5x^2y - 3xy^3 + y^4$, $\text{gradu} \big|_{M(x,y)} = ?$

21.100. $u = x^2 + y^2$, $\text{gradu} \big|_{(3;2)} = ?$

21.101. $u = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$, $\text{gradu} \big|_{(2;1)} = ?$

21.102. $u = \arctg \frac{y}{x}$, $\text{gradu} \big|_{(1;1)} = ?$

21.103. $u = \arctg \frac{x}{y}$ скаляр майдоннинг $(1; 1)$ ва $(-1; -1)$ нуқталардаги

градиентлари орасидаги бурчакни топинг.

21.104. $z_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy}$ функцияларнинг $(3, 4)$ нуқтадаги

градиентлари орасидаги бурчакни топинг.

21.105. $\text{grad}(\varphi\psi) = \varphi \text{grad} \psi + \psi \text{grad} \varphi$ тенгликни исботланг.

21.106. $z = \varphi(u, v)$, $u = \psi(x, y)$, $v = \zeta(x, y)$ функциялар берилганда,

$\text{grad} z = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \text{gradu} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \text{grad} v$ тенгликнинг тўғрилигини кўрсатинг.

21.107-21.111 мисолларда функциянинг орттирмасини унинг дифференциалига алмаштириб, қуйида берилган ифодаларни тақрибий ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$21.107. (1,02)^{4,05}.$$

$$21.108. \sqrt{8,04^2 + 6,03^2}.$$

$$21.109. (1,02)^3 \cdot (0,97)^2.$$

$$21.110. \sin 32^0 \cos 59^0.$$

$$21.111. \ln(0,9^3 + 0,99^3).$$

$$21.112. \sqrt{2,03^2 + 5e^{0,02}}.$$

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$21.1. u'_x = 2x + 6xy^3, u'_y = 3y^2 + 9x^2 + y^2. \quad 21.2. u'_x = \frac{2x - y}{y^2}, u'_y = \frac{xy - 2x^2}{y^3}.$$

$$21.3. u'_x = yz + \frac{1}{yz}, u'_y = xz - \frac{x}{y^2z}, u'_z = xy - \frac{x}{yz^2}.$$

$$21.4. u'_x = y \cdot \cos(xy + yz), u'_y = (x + z) \cos(xy + yz), u'_z = y \cdot \cos(xy + yz).$$

$$21.5. u'_x = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}, u'_y = \frac{e^{x/y}}{\cos^2(x+y)} + \operatorname{tg}(x+y) e^{x/y} \left(-\frac{x}{y^2} \right).$$

$$21.6. u'_x = \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} + \frac{y}{x^2} \sin \frac{x}{y} \cdot \sin \frac{y}{x}, u'_y = -\frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x} - \frac{1}{x} \sin \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}.$$

$$21.7. u'_x = e^x (x \sin y + \sin y + \cos y), u'_y = e^x (x \cos y - \sin y).$$

$$21.8. u'_x = yx^{y-1}, u'_y = x^y \cdot \ln x.$$

$$21.9. u'_x = z \left(\frac{y}{x} \right)^{z-1} \cdot \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{z}{x} \left(\frac{y}{x} \right)^z, u'_y = \frac{z}{y} \left(\frac{y}{x} \right)^z, u'_z = \left(\frac{y}{x} \right)^z \cdot \ln \frac{y}{x}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$21.10. u'_x = -\frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, u'_y = \frac{2x}{y\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$21.11. u'_x = \frac{xy^2\sqrt{2x^2 - 2y^2}}{|y|(x^4 - y^4)}, u'_y = \frac{yx^2\sqrt{2x^2 + 2y^2}}{|y|(y^4 - x^4)}.$$

$$21.12. u'_x = \sin 2x \ln g(1 + \sin^2 x)^{\ln y - 1}, u'_y = \frac{1}{y}(1 + \sin^2 x)^{\ln y} \cdot \ln(1 + \sin^2 x).$$

$$21.13. u'_x = x^{y-1}y^{z+1}z^x + x^y y^z z^x \cdot \ln z, u'_y = x^y y^z z^x \ln x + x^y y^{z-1}z^{x+1},$$

$$u'_z = x^y y^z z^x \ln y + x^{y+1}y^z z^{x-1}.$$

$$21.14. \frac{\partial g}{\partial r} = \cos \theta + \sin \theta, \frac{\partial g}{\partial \theta} = -r \sin \theta + r \cos \theta.$$

$$21.21. \frac{\partial f}{\partial R_1} = -\frac{1}{R_1^2}; \frac{\partial f}{\partial R_2} = -\frac{1}{R_2^2}; \frac{\partial f}{\partial R_3} = -\frac{1}{R_3^2}.$$

$$21.16. \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{RT}{V}; \frac{\partial p}{\partial R} = \frac{nT}{V}; \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{nR}{V}; \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{nRT}{V^2}.$$

$$21.17. u'_x(1;1) = 1, u'_y(1;1) = -2. \quad 21.18. u'_x(1;2) = \frac{1}{3}, u'_y(1;2) = -\frac{1}{6}.$$

$$21.19. u'_x(1;1) = 1 - \pi, u'_y(1;1) = 1 - \pi. \quad 21.20. u'_x(1;-1) = 2, u'_y(1;-1) = 1.$$

$$21.21. u'_x(0;0) = 0, u'_y(0;0) = 0. \text{ Функция } O(0;0) \text{ нуктада дифференциалланувчи эмас.}$$

$$21.22. u'_x(0;0), u'_y(0;0) \text{ лар мавжуд эмас, } u(x,y) \text{ функция } O(0;0)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

нуқтада дифференциалланувчи. **21.23.** $u'_x(0;0)=u'_y(0;0)=0$; $u(x,y)$ функция

$O(0;0)$ нуқтада дифференциалланувчи.

21.24. $u'_x(0,0)=u'_y(0,0)=0$; $u(x,y)$ функция $O(0;0)$ нуқтада дифференциалланувчи эмас. **21.25.** $u'_x(0,0)=u'_y(0,0)=0$; $u(x,y)$ функция $O(0;0)$ нуқтада

дифференциалланувчи. **21.26.** $u'_x(0,0)=u'_y(0,0)$; $u(x,y)$ функция $O(0;0)$

нуқтада дифференциалланувчи. **21.27.** $u'_x(0,0)=u'_y(0,0)$; $u(x,y)$ функция $O(0;0)$ нуқтада дифференциалланувчи.

21.28. а) 0; б) 2. **21.29.** а) 0, б) 1. **21.30.** Нотўғри.

21.31. Нотўғри ($n > 1$ бўлганда). **21.32.** Тўғри.

21.33. Нотўғри ($n > 1$ бўлганда). **21.34.** Нотўғри. **21.35.** Тўғри.

21.37. $(8x^3 - 6xy^2 + 3x^2y)dx + (x^3 - 6x^2y)dy$.

21.38. $4(y^3 + 2x^2y + 3) \cdot (4xydx + (3y^2 + 2x^2)dy)$. **21.39.** $\frac{x^2 - y^2}{xy} \left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \right)$.

21.40. $y(x^2 + y^2)^{-3/2} (ydx - xdy)$. **21.41.** $2^{-y/x} \frac{\ln a}{x^2} (ydx - xdy)$.

21.42. $\frac{1}{\sqrt{y}} \left(dx + \frac{ydy}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$. **21.43.** $\frac{1}{\sqrt{y}} \operatorname{ctg} \frac{x+1}{\sqrt{y}} \left(dx - \frac{x+1}{2y} \right) dy$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$21.44. \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}. \quad 21.45. (1 + xy)^{y-1} (y^2 dx + (xy + (1 + xy) \ln(1 + xy)) dy).$$

$$21.46. a) dx - dy, b) 0. \quad 21.47. \frac{1}{2} dx$$

$$21.48. du|_N = -\sin x(y+z) \cdot [(y+z)dx + xdy + xdz], \quad du|_N = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\pi}{3} dx + dy + dz \right).$$

$$21.49. du|_M = e^{xy} (ydx + xdy), \quad du|_O = 0.$$

$$21.50. du|_M = x^y \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right), \quad du|_{M_0} = 12dx + 8 \ln 2 dy.$$

$$21.51. du|_M = (1 + \ln xy) dx + \frac{x}{y} dy, \quad du|_{M_0} = dx + dy. \quad 21.52. du|_M = -\frac{1}{2} dz.$$

$$21.53. du|_M = \frac{1}{37} (2dx + 3dy - 12dz).$$

$$21.54. du|_M = (2dx + \ln 4 dz).$$

$$21.55. f'_x = 2xf'_u, \quad f'_y = e^y f'_u. \quad 21.56. f'_x = \frac{3x^2 + y^2}{3 \sqrt[3]{(x^3 + xy^2)^2}} f'_u, \quad f'_y = \frac{2xy}{3 \sqrt[3]{(x^3 + xy^2)^2}} f'_u.$$

$$21.57. f'_x = \frac{1}{1 + (x + \ln y)^2} f'_u, \quad f'_y = \frac{1}{y(1 + (x + \ln y)^2)} f'_u.$$

$$21.58. d\varphi = \left(y - \frac{y^2}{x^2} \right) f'_u dx + \left(x + \frac{2y}{x} \right) f'_u dy.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$21.59. \quad d\varphi = \left(2x f'_v - \frac{y}{(x+y)^2} f'_u \right) dx + \left(\frac{x}{(x+y)^2} f'_u - 3y^2 f'_v \right) dy.$$

$$21.60. \quad d\varphi = (2x f'_u + f'_v + yz f'_w) dx + (2y f'_u + f'_v + xz f'_w) dy + (2z f'_u + f'_v + yx f'_w) dz.$$

$$21.61. \quad \frac{dw}{dt} \Big|_{t=0} = -1. \quad 21.66. \quad \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2; \quad \frac{\partial w}{\partial s} \Big|_{(r,s)=(\pi,0)} = 2 - \pi.$$

$$21.67. \quad \frac{dw}{dt} \Big|_{t=1} = -(\sin 1 + \cos 2) \sin 1 + (\cos 1 + \cos 2) \cos 1 + 2(\sin 1 + \cos 1) \sin 2.$$

$$21.68. \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \cos \sigma \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{\sin \sigma}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \sin \sigma \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \sigma}{r} \frac{\partial w}{\partial \sigma}.$$

$$21.69. \quad \frac{dW}{dt} = 0, \quad \frac{dW}{dt} \Big|_{t_0=\pi} = 0. \quad 21.70. \quad \frac{dW}{dt} = 1, \quad \frac{dW}{dt} \Big|_{t_0=3} = 1.$$

$$21.71. \quad \frac{dW}{dt} = \arctgt + 1, \quad \frac{dW}{dt} \Big|_{t_0=1} = \pi + 1. \quad 21.72. \quad \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{(r,s)=(1;-1)} = 12.$$

$$21.73. \quad \frac{\partial W}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(0;0)} = -7. \quad 21.74. \quad \frac{\partial W}{\partial u} \Big|_{(u,v)=(\ln 2;1)} = 2, \quad \frac{\partial W}{\partial v} \Big|_{(u,v)=(\ln 2;1)} = 1.$$

$$21.84. \quad f(x,y) = \frac{y}{2} + 4; \quad g(x,y) = \frac{x}{2} + \frac{9}{2}. \quad 21.85. \quad w = f(x,y) = x + y^2 + e^x \cos y.$$

$$21.90. \quad -18. \quad 21.91. \quad \frac{52}{5}. \quad 21.92. \quad \frac{1}{5}. \quad 21.93. \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$21.94. \quad \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 21.95. \quad \frac{2+\sqrt{2}}{6}. \quad 21.96. \quad \vec{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{j} \text{ йўналишда ўсади,}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$-\vec{u} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \text{ йўналишда камаяди. } f'(P_0; \vec{u}) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad f'(P_0; -\vec{u}) = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f'(P_0; \vec{u}_1) = -\frac{7}{10}, \vec{u}_1 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad \mathbf{21.97.} \quad \vec{u} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k} \text{ йўналишда ўсади;}$$

$$-\vec{u} = -\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k} \text{ йўналишда камаяди; } f'(P_0; \vec{u}) = 7; \quad f'(P_0; -\vec{u}) = -7;$$

$$f'(P_0; \vec{u}_1) = 7; \quad \vec{u}_1 = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad \mathbf{21.98.} \quad \text{gradu}|_{M(x,y)} = 2(x-y)\vec{i} + (3-2x)\vec{j}$$

$$\mathbf{21.99.} \quad \text{gradu}|_{M(x,y)} = (10xy - 3y^3)\vec{i} + (4y^3 - 9xy^2)\vec{j} \quad \mathbf{21.100.} \quad \text{gradu}|_{(3;2)} = 6\vec{i} + 4\vec{j}.$$

$$\mathbf{21.101.} \quad \text{gradu}|_{(2;1)} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}. \quad \mathbf{21.102.} \quad \text{gradu}|_{(1;1)} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}.$$

$$\mathbf{21.102.} \quad \varphi = \pi. \quad \mathbf{21.107.} \quad 1,08. \quad \mathbf{21.108.} \quad 10,05. \quad \mathbf{21.109.} \quad 1,00.$$

$$\mathbf{21.110.} \quad -0,03. \quad \mathbf{21.111.} \quad 0,273. \quad \mathbf{21.112.} \quad 3,037.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

22-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли хусусий ҳосилалари ва дифференциаллари

22.1. Юқори тартибли хусусий ҳосилалар.

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ очик тўпламда берилган бўлиб, унинг ҳар бир $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтасида $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу хусусий ҳосилалар, ўз навбатида, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида, $\{M\}$ тўпламда аниқланган бўлсин.

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) функция ҳам, бирор $M \in \{M\}$ нуқтада x_k аргумент бўйича хусусий ҳосилага эга бўлиши мумкин. Бу x_k аргумент бўйича хусусий ҳосила- берилган $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг *иккинчи тартибли хусусий хусусий ҳосиласи* дейилади ва у $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}, f_{x_i x_k}^{(2)}, u_{x_i x_k}^{(2)}$ ($i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, m$) каби

белгиланади, бунда $i \neq k$ бўлса, у ҳолда $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}$ хусусий ҳосилага, *аралаш*

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

хусусий ҳосила дейилади, $k = i$ бўлганда $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} = f''$ деб ёзиш ўрнига, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = f''_{x_k^2}$

каби ёзилади. Худди шундай, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг учинчи, тўртинчи, ва хоказо, тартибли хусусий ҳосилаларининг таърифи берилади. $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$

функция $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ аргументлари бўйича $(n-1)$ - тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Бу $(n-1)$ тартибли хусусий ҳосилалар ҳам,

$M(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \{M\}$ нуқтада x_{i_n} аргументи бўйича хусусий ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳосила, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ аргументлар

бўйича M нуқтадаги n -тартибли хусусий ҳосиласи дейилади. Шундай қилиб,

$x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{m-1}, x_m$ аргументлар бўйича n -тартибли хусусий ҳосилани,

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_m \partial x_{m-1} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x_{m-1} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \right)$$

каби ёзиш мумкин. Агар $i_1, i_2, \dots, i_n$ индексларнинг ҳаммаси бирданига бир-

бирига тенг бўлмаса, у ҳолда $\frac{\partial^n u}{\partial x_m \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}}$ хусусий ҳосила n -тартибли аралаш

хусусий ҳосила дейилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

22.1-мисол. Ушбу $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ функция $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ тенгламани

қаноатлантиришини кўрсатинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг x ва y бўйича иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ тенгламага иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни келтириб

кўямиз:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Демак, берилган функция тенгламани қаноатлантирар экан.

22.1-теорема. $u = f(x, y)$ функция $\{M\} \subset R^2$ очик тўпланда аниқланган бўлиб, шу тўпланда $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар аралаш ҳосилалар $M_0(x_0, y_0) \in \{M\}$ нуктада узлуксиз бўлса, у ҳолда, шу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

нуктада,

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

бўлади.

22.2-мисол. Ушбу $f(x, y) = x^2 - 2xy^2$ функциянинг иккинчи тартибли

хусусий ҳосилаларини топинг ҳамда $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ва $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ аралаш хусусий

ҳосилаларнинг ўзаро тенглигини кўрсатинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли

хусусий ҳосилаларини топамз:

$$f'_x(x, y) = 2x - 2y^2, \quad f'_y = -4xy,$$

$$f''_{x^2}(x, y) = 2, \quad f''_{y^2} = -4x, \quad f''_{xy}(x, y) = -4y, \quad f''_{yx} = -4y.$$

Энди аралаш хусусий ҳосилаларни $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ тенгликка келтириб қўямиз:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4y.$$

22.3-мисол. Ушбу $u = \arctg \frac{x}{y}$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий

ҳосилаларини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Ечилиши. Биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Бу мисолда $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ аралаш хусусий ҳосилалар бир-бирига тенг. Умумий

ҳолда, бу аралаш хусусий ҳосилалар бир-бирига тенг бўлмаслиги ҳам мумкин.

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш

> z:=arctan(x/y):diff(z,x,y);diff(z,y,x);

$$-\frac{1}{y^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} + \frac{2x^2}{y^4 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{y^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)} + \frac{2x^2}{y^4 \left(1 + \frac{x^2}{y^2}\right)^2}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

22.4-мисол. Ушбу

$$u = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

функциянинг $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ва $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ аралаш хусусий ҳосилаларининг $M_0(0,0)$ нуқтада

мавжудлиги ва уларнинг бир-бирига тенг эмаслигини кўрсатинг.

Ечилиши. Биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

бўлгани учун,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Big|_{x=0, y=0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, y \neq 0} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, y=0}}{y} = -1.$$

Худди шундай, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, y=0} = 1$ эканлигини топамиз. Шундай қилиб, $M_0(0,0)$

нуқтада $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ экан.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

22.2-теорема. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\} \subset R^m$ очик тўпланда аниқланган, бу тўпланда мумкин бўлган ҳамма $(n-1)$ - тартибгача хусусий ҳосилаларга ва n -тартибли аралаш ҳосилаларга эга бўлиб, бу ҳосилалар $\{M\}$ тўпланда узлуксиз бўлса, у ҳолда ихтиёрий n -тартибли аралаш ҳосиланинг ифодаси, ҳосилани топиш тартибига боғлиқ бўлмайди.

22.2. Юқори тартибли дифференциаллар.

Кўп ўзгарувчили функциянинг юқори тартибли дифференциали тушунчасини киритишдан аввал, функциянинг n марта дифференциалланувчанлиги тушунчасини киритамиз.

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ очик тўпланда берилган бўлиб, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \{M\}$ бўлсин. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция $\{M\}$ тўпланда $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Агар $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ функциялар M_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(M)$ функция M_0 нуқтада *икки марта дифференциалланувчи* дейилади.

Агар $f(M)$ функция $\{M\}$ тўпланда $(n-1)$ -тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, бу хусусий ҳосилалар M_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлса, $f(M)$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функция n марта дифференциалланувчи деб аталади.

22.3-теорема. Агар $\{M\} \subset R^m$ очик тўпلامда $f(M)$ функциянинг n -тартиблигача барча хусусий ҳосилалари мавжуд ва $M_0 \in \{M\}$ нуқтада узлуксиз бўлса, $f(M)$ функция M_0 нуқтада n -морта дифференциалланувчи бўлади. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ очик тўпلامда берилган бўлиб, $M \in \{M\}$ нуқтада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда, унинг M нуқтадаги дифференциали

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m \quad (22.1)$$

кўринишда бўлади, бунда $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ лар $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг ихтиёрий орттирмаларидир.

Фараз килайлик, $f(M)$ функция $M \in \{M\}$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин. $f(M)$ функциянинг M нуқтадаги дифференциали $df(M)$ нинг дифференциали, берилган $f(M)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциали деб аталади ва у $d^2 f = d(df)$ каби белгиланади. (22.1) формулани эътиборга олиб, дифференциаллаш формулаларидан фойдалансак, қуйидагини топамиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{aligned}
 d^2u &= d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_2 + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_m = \\
 &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} dx_m\right) dx_1 + \dots + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m \partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} dx_m\right) dx_m = \\
 &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \dots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_{m-1} \partial x_m} dx_{m-1} dx_m
 \end{aligned} \tag{22.2}$$

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функциянинг учинчи, тўртинчи ва ҳоказо тартибли дифференциаллари ҳам худди юқоридагидек таърифланади. Шундай қилиб, $f(M)$ функциянинг M нуқтадаги $(n-1)$ - тартибли дифференциали $d^{n-1}u$ нинг дифференциалига берилган $f(M)$ функциянинг n -тартибли дифференциали дейилади ва $d^n u = d(d^{n-1}u)$ каби белгиланади. (22.2) формуладан кўринадики, юқори тартибли дифференциалнинг тартиби ошган сари унинг хусусий ҳосилалар орқали ифодаси мураккаблашиб боради. Шу сабабли, юқори тартибли дифференциалларни соддароқ формада ифодалаш учун, $f(M)$ функциянинг

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

дифференциалини, символик равишда (u ни формал равишда қавсдан ташкарига чиқариб), қуйидагича

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$du = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right) u$$

ёзамиз. Унда функциянинг иккинчи тартибли дифференциал,

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^2 u$$

каби ёзилиши мумкин. Бунда, символик равишда. қавс ичидаги йиғинди квадратга кўтарилиб, сўнггра u га «кўпайтирилади», бунда даража кўрсаткичлари хусусий ҳосилаларнинг тартиби, деб қаралади. Худди шундай символик равишда функциянинг n -тартибли дифференциали

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m \right)^n u$$

каби ёзилади.

Хусусий ҳолда, x ва y эркли ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган $u = f(x, y)$ функциянинг иккинчи ва учинчи тартибли тўлиқ дифференциалларини, қуйидаги

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 =$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$= u''_{x^2} dx^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{y^2} dy^2, \quad (22.3)$$

$$\begin{aligned} d^2 u &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3 = \\ &= u'''_{x^3} dx^3 + 3u'''_{xxy} dx^2 dy + 3u'''_{xyy} dx dy^2 + u'''_{y^3} dy^3. \end{aligned}$$

кўринишларда ёзиш мумкин.

22.9-мисол. Ушбу $u = x^2 - y^2 - \ln \frac{x}{y}$ функциянинг иккинчи тартибли

тўлиқ дифференциалини топинг.

Ечилиши. Дастлаб берилган функциянинг биринчи тартибли хусусий

ҳосилаларини топамиз: $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - \frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y - \frac{1}{y}$. Иккинчи тартибли

хусусий ҳосилаларини топиб, (22.3) формулага келтириб қўямиз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 + \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

$$d^2 u = u''_{x^2} dx^2 + 2u''_{xy} dx dy + u''_{y^2} dy^2 = \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) \cdot dx^2 + \left(\frac{1}{y^2} - 2\right) \cdot dy^2.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

22.3. Мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари.

Биз юқорида караган, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($x_i = \varphi(t_1, t_2, \dots, t_k), i = 1, 2, \dots, m$) мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциалини топамиз.

Маълумки, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k), (i = 1, 2, \dots, m)$ функцияларнинг ҳар бири $N_0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in \{N\} \subset R^k$ нуктада дифференциалланувчи бўлиб, $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса, мос равишда, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \{N\} \subset R^m$ нуктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда, 21.3-теоремага асосан, мураккаб функция $N_0 \in \{N\} \subset R^k$ нуктада дифференциалланувчи бўлади ва дифференциал шаклининг инвариантлик хоссасига асосан, мураккаб функциянинг дифференциали,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

кўринишда бўлади. Фараз қилайлик, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k), (i = 1, 2, \dots, m)$ функцияларнинг ҳар бири $N_0(t_1^0, t_2^0, \dots, t_k^0) \in \{N\} \subset R^k$ нуктада икки марта дифференциалланувчи, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функция эса, унга мос, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \{N\} \subset R^m$ нуктада, икки марта дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда мураккаб

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Дифференциаллаш қоидаларидан фойдаланиб, функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топамиз:

$$\begin{aligned}
 d^2u &= d(du) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m\right) = d\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} d(dx_1) + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) dx_2 + \\
 &+ \frac{\partial u}{\partial x_2} d(dx_2) + \dots + d\left(\frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_m + \frac{\partial u}{\partial x_m} d(dx_m) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} dx_m\right)^2 u + \\
 &+ \frac{\partial u}{\partial x_1} d^2x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} d^2x_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} d^2x_m
 \end{aligned} \tag{22.3'}$$

Худди шундай усулда мураккаб функциянинг, кейинги, юқори тартибли дифференциаллари ҳам топилади.

(22.1) ва (22.3) формулаларни солиштириш натижасида, иккинчи тартибли дифференциалларда дифференциал шакли инвариантлигининг сақланмаслигини кўрамиз.

22.5-эслатма. Агар $x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \dots, t_k), (i=1, 2, \dots, m)$ функцияларнинг ҳар бири, $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ ўзгарувчиларнинг

[illegible]

Титулварак

Мундарижа

1 - 6 0 6

2 - 6 0 6

3 - 6 0 6

4 - 6 0 6

И л о в а л а р



О р к а г а

Саҳифа / 708

Тулик экран

Чикиш

чизикли функциялари бўлса, у ҳолда, $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ мураккаб функциянинг юқори тартибли дифференциаллари шакли инвариантлиги сакланишини кўриш қийин эмас.

22.10-мисол. Ушбу $W = f(u, v)$, $u(x, y) = x \sin y$, $v(x, y) = y \cos x$ мураккаб функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Ечилиши. Маълумки, $W = f(u, v)$ функциянинг биринчи тартибли дифференциали $dW = f'_u du + f'_v dv$, мураккаб функциянинг иккинчи тартибли дифференциали эса,

$$d^2W = d(dW) = d(f'_u du + f'_v dv) = (f''_{uu} du + f''_{uv} dv) du + f'_u \cdot d^2u + (f''_{uv} du + f''_{vv} dv) dv + f'_v \cdot d^2v,$$

кўринишда бўлади, бунда $du = \sin y \, dx + x \cos y \, dy$, $dv = -y \sin x \, dx + \cos x \, dy$,

$d^2u = 2 \cos y \cdot dx dy - x \sin y \, d^2y$, $d^2v = -\cos x \, d^2x - 2 \sin x \, dx dy$. Энди бу ифодаларни мураккаб функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топиш формуласига келтириб қўямиз:

$$\begin{aligned} d^2W = & [f''_{uu}(\sin y \, dx + x \cos y \, dy) + f''_{uv}(-y \sin x \, dx + \cos x \, dy)](\sin y \, dx + x \cos y \, dy) + \\ & + f'_u \cdot (2 \cos y \cdot dx dy - x \sin y \, d^2y) + [f''_{uv}(\sin y \, dx + x \cos y \, dy) + \\ & + f''_{vv}(-y \sin x \, dx + \cos x \, dy)](-y \sin x \, dx + \cos x \, dy) + f'_v \cdot (-\cos x \, d^2x - 2 \sin x \, dx dy) = \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$= [\sin^2 y \cdot f''_{uu} - 2y \sin x \sin y \cdot f''_{uv} + y^2 \sin^2 x \cdot f''_{vv} - y \cos x \cdot f'_v] dx^2 + \\ + [x \sin 2y \cdot f''_{uu} + 2(\sin y \cos x - xy \sin x \cos y) \cdot f''_{uv} - y \sin 2x \cdot f''_{vv} + 2(\cos y \cdot f'_u - \sin x \cdot f'_v)] dx dy + \\ + [x^2 \cos^2 y \cdot f''_{uu} + 2x \cos x \cos y \cdot f''_{uv} + \cos^2 x \cdot f''_{vv} - x \sin y \cdot f'_u] dy^2.$$

22.4. Ўрта қиймат ҳақидаги теорема.

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функция $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпلامда берилган бўлсин. Бу тўпلامда шундай $A(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ва $B(b_1, b_2, \dots, b_m)$ нуқталарни олайликки, бу нуқталарни бирлаштирувчи,

$$E = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : a_1 + t(b_1 - a_1), x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2), \dots, x_m = a_m + t(b_m - a_m); 0 \leq t \leq 1\}$$

тўғри чизик кесмаси, шу $\{M\}$ тўпلامга қарашли, яъни $E \subset M$ бўлсин.

22.4-теорема. Агар $f(M)$ функция E кесманинг A ва B нуқталарида узлуксиз бўлиб, кесманинг қолган нуқталарида дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда, E кесмада шундай C нуқта топиладики ($C = c(c_1, c_2, \dots, c_m)$),

$$f(B) - f(A) = f'_{x_1}(C)(b_1 - a_1) + f'_{x_2}(C)(b_2 - a_2) + \dots + f'_{x_m}(C)(b_m - a_m)$$

бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

22.5. Кўп ўзгарувчили функциянинг Тейлор формуласи.

$u = f(M)$ функция $\{M\} \subset R^m$ тўпلامда берилган бўлсин. $f(M)$ функциянинг $M \in \{M\}$ нуқтадаги k -тартибли дифференциалини $d^k u|_M$ деб белгилаймиз.

22.5-теорема. $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функция $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтанинг $(M_0 \in \{M\})$ бирор $U_\delta(M_0)$ атрофида $n+1$ марта дифференциаланувчи бўлсин. У ҳолда, берилган функциянинг $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтадаги $\Delta u = f(M) - f(M_0)$ тўлиқ ортирмаси қуйидаги

$$\Delta u = du|_{M_0} + \frac{1}{2!} d^2 u|_{M_0} + \dots + \frac{1}{n!} d^n u|_{M_0} + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u|_N \quad (22.4)$$

кўринишда тасвирланади, бунда $N = U_\delta(M_0)$ атрофдаги $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтага боғлиқ бўлган бирор нуқта, $d^k u|_{M_0}$ ва $d^{n+1} u|_N$ ифодаларда қатнашувчи dx_i лар $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ га тенг. (22.4) формулага $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ функциянинг Тейлор формуласи деб аталади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Агар $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) деб белгилаб, $d^k u \Big|_{M_0}$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) тўлик

дифференциал ифодани очиб ёзсак, у ҳолда, (22.4) формулани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) = & f(M_0) + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} (x_1 - x_1^0) + \dots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_m} (x_m - x_m^0) + \\ & \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} (x_1 - x_1^0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(M_0)}{\partial x_m^n} (x_m - x_m^0)^n + R_{n+1} \equiv P_n(x_1, x_2, \dots, x_m) + R_{n+1}, \end{aligned} \quad (22.5)$$

бунда $P_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга боғлиқ бўлган n даражали кўпхад, $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} u \Big|_N$ қолдиқ кўпхад. $P_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - кўпхадга *Тейлор кўпҳади* дейилади.

$n = 0$ бўлганда, (22.5) формула кўп ўзгарувчили функция учун чекли орттирмалар ҳақидаги *Лагранж формуласи* дейилади, у қуйидаги

$$f(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0 + \Delta x_2, \dots, x_m^0 + \Delta x_m) - f(M_0) = \frac{\partial f(N)}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f(N)}{\partial x_m} \Delta x_m$$

кўринишга эга.

Ушбу $\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_m^2}$ белгилашни киритсак, у ҳолда

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

(22.5) формуладаги қолдик ҳад $R_{n+1} = o(\rho^n)$ Пеано кўринишдаги қолдик ҳадга эга бўлади.

22.6-мисол. Ушбу $f(x, y) = x^3 - 2xy^2 + y^3 + 4x$ функцияни $A(1; -1)$ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

Ечилиши. Дастлаб берилган функциянинг $A(1; -1)$ нуктадаги қийматини ҳисоблаймиз: $f(1; -1) = 1 - 2 - 1 + 4 = 2$. Энди берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топиб, уларнинг $A(1; -1)$ нуктадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 2y^2 + 4, \quad f'_x(1; -1) = 5;$$

$$f'_y(x, y) = -4xy + 3y^2, \quad f'_y(1; -1) = 7;$$

$$f''_{x^2}(x, y) = 6x, \quad f''_{x^2}(1, -1) = 6;$$

$$f''_{y^2}(x, y) = -4x + 6y, \quad f''_{y^2}(1, -1) = -10;$$

$$f''_{xy}(x, y) = -4y, \quad f''_{xy}(1, -1) = 4;$$

$$f''_{x^3}(x, y) = 6, \quad f''_{x^3}(1, -1) = 6;$$

$$f''_{y^3}(x, y) = 6, \quad f''_{y^3}(1, -1) = 6;$$

$$f''_{xyy}(x, y) = -4, \quad f''_{xyy}(1, -1) = -4.$$

Берилган функциянинг қолган хусусий ҳосилалари нолга тенг. Тейлор формуласи бўйича қуйидаги изланаётган ёйилмага эга бўламиз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$f(x, y) = 2 + 5(x-1) + 7(y+1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y+1) - 5(y+1)^2 + \\ + (x-1)^3 - 2(x-1)(y+1)^2 + (y+1)^3.$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги хусусий ҳосилаларини топинг.

$$22.1. \quad u = \sin xy, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = ?, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = ?.$$

$$22.2. \quad u = x^4 \cos y + y^4 \cos x, \quad \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} = ?$$

$$22.3. \quad u = \sin x \cos 2y, \quad \frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6} = ?.$$

$$22.4. \quad u = x^m y^n, \quad \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = ?.$$

$$22.5. \quad u = (x^2 + y)^{10} \operatorname{tg} x, \quad \frac{\partial^{10} u}{\partial x \partial y^9} = ?.$$

$$22.6. \quad u = \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = ?, \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = ?.$$

$$22.7. \quad u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} = ?$$

$$22.8. \quad u = (x^2 + y^2) e^{x+y}, \quad \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} = ?$$

$$22.9. \quad u = f(x, y) = e^x \cdot \sin y, \quad f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0) = ?.$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқталардаги иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$22.10. \quad u = \frac{x}{x+y}, \quad (1;0).$$

$$22.11. \quad u = y^2(1-e^x), \quad (0;1).$$

$$22.12. \quad u \ln(x^2 + y), \quad (0;1).$$

$$22.13. \quad u = y \sin \frac{y}{x}, \quad (2;\pi).$$

$$22.14. \quad u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1;-1).$$

$$22.15. \quad u = y + \frac{x}{y}, \quad (1;1).$$

$$22.22. \quad u = x + xy - 5x^3 + \ln(x^2 + 1), \quad (1;1).$$

$$22.17. \quad f(x,y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \text{ bo'lganda,} \\ 0, & (x,y) = (0,0) \text{ bo'lganda} \end{cases}$$

функция $(0,0)$ нукта узлуксиз эканлиги маълум (кўрсатинг!). У ҳолда, унинг

$f_{xy}(0,0)$ ва $f_{yx}(0,0)$ хусусий ҳосилаларини топинг.

Қуйида берилган $f(x,y)$ функциянинг кўрсатилган нуктада иккинчи тартибли дифференциалини топинг:

$$22.18. \quad u = f(x,y) = e^{xy}, \quad (1;-1).$$

$$22.19. \quad u = f(x,y) = \frac{x}{y} e^{x^2}, \quad (0;1).$$

$$22.20. \quad u = f(x,y) = x \cos xy, \quad \left(\frac{\pi}{2}; -1\right). \quad 22.21. \quad u = f(x,y) = \arctg(x^2 - 2y), \quad (1;0).$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$22.22. \quad u = (\sin x)^{\cos y}, \quad \left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right).$$

$$22.23. \quad u = e^{xyz}, \quad (1, 1, 1).$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган тартибдаги дифференциалларини топинг.

$$22.24. \quad u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y), \quad d^3u = ?$$

$$22.25. \quad u = \sin(x^2 + y^2), \quad d^3u = ?$$

$$22.26. \quad u = \ln(x^x y^y z^z), \quad d^4u = ?$$

$$22.27. \quad u = e^{ax+by}, \quad d^n u = ?$$

$$22.28. \quad u = X(y) \cdot Y(y), \quad d^n u = ?.$$

$$22.29. \quad u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - ?$$

Қуйидаги мураккаб функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли дифференциалларини топинг (x, y ва z лар – эркин ўзгарувчилар):

$$22.30. \quad u = f(t), \quad t = x + y.$$

$$22.31. \quad u = f(t), \quad t = \frac{y}{x}.$$

$$22.32. \quad u = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$22.33. \quad u = f(t), \quad t = x^2 + y^2 + z^2.$$

$$22.34. \quad u = f(\xi; \eta), \quad \xi = ax, \eta = by.$$

$$22.35. \quad W = f(u, v), \quad u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2), \quad v = xy.$$

$$22.36. \quad \text{Ушбу } u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}} \text{ функциянинг қуйидаги } \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

иссиқлик ўтказувчанлик тенгламасини қаноатлантиришини кўрсатинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

22.37. Ушбу $u = \frac{1}{r}$, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ функциянинг, $r \neq 0$

бўлганда, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ Лаплас тенгламасини қаноатлантиришини исботланг.

22.38. Ушбу $u = \frac{c_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r}$ функция, бунда $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, c_1, c_2

ўзгармас сонлар, қуйидаги $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = Cu$ Гельмгольц тенгламасини қаноатлантиришини исботланг.

22.39. Ушбу $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{ix^2/(4t)}$ функциянинг $i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ Шрёдингер

тенгламасини қаноатлантиришини исботланг.

22.40. $f - r$ аргументнинг икки марта дифференциалланувчи функцияси,

бунда $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, бўлсин ва $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$ муносабат ўринли бўлсин. У холда, қандайдир a ва b ўзгармаслар учун, $f(r) = \frac{a}{r} + b$ эканлигини кўрсатинг.

Қуйидаги ихтиёрий φ, ψ ва ҳоказо функцияларни исталган марта дифференциалланувчи, деб фараз қилиб, қуйида берилган тенгликларни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

текширинг.

$$22.41. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = \varphi(x^2 + y^2).$$

$$22.42. \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \quad z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy).$$

$$22.43. \quad \frac{x \partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu, \quad u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right).$$

$$22.44. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u = \varphi(x - at + \varphi(x + at)).$$

$$22.45. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u, \quad u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Берилган $f(x, y)$ функцияни берилган нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

$$22.46. \quad f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 5y, \quad A(1; 1).$$

$$22.47. \quad f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4, \quad A(-2; 1).$$

$$22.48. \quad f(x, y) = x^3 + 3xy - 2y^3, \quad A(1; 2).$$

$$22.49. \quad f(x, y) = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y, \quad A(2; -1).$$

Берилган $f(x, y)$ функцияни берилган нукта атрофида Тейлор

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

формуласининг учинчи ($n = 3$) ҳадигача ёйинг.

22.50. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $O(0, 0)$.

22.51. $f(x, y) = x^y$, $A(1; 1)$.

Қуйида берилган функцияларни Тейлор формуласи бўйича иккинчи ҳадигача ($n = 2$) ёйинг.

22.52. $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$. **22.53.** $f(x, y) = \sqrt{x + y}$. **22.54.** $f(x, y) = e^{x+y}$.

22.55. $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$ функция берилган. $f(x+h, y+k)$ функцияни h ва k нинг даражалари бўйича иккинчи ҳадгача Тейлор формуласига ёйинг.

22.56. 2) $f(x, y) = e^x \sin y$ функция берилган. $f(x+h, y+k)$ функцияни h ва k нинг даражалари бўйича учинчи ҳадгача Тейлор формуласига ёйинг. Бу натижадан фойдаланиб $e^{0,1} \sin 0,49\pi$ нинг қийматини ҳисобланг.

Берилган $f(x, y, z)$ функцияни берилган нукта атрофида Тейлор формуласига ёйинг.

22.57. $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, $(1; 1; -2)$.

22.58. $f(x, y, z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z$, $(0; 1; 2)$.

22.59. $f(x, y, z) = xyz$, $(1; 2; 3)$.

22.60. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$, $(1; 0; 1)$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$22.61. \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz), \quad (1; -1; 2).$$

Қуйида берилган функцияларни Маклорен формуласи бўйича учинчи ҳадгача ($n = 3$) ёйинг.

$$22.62. \quad f(x, y) = e^y \cos x.$$

$$22.63. \quad f(x, y) = \sin x \cdot \sin y.$$

22.64. $f(x, y)$ – n даражали биржинсли функция, яъни барча t, x ва y лар ҳамда n – номанфий бутун сон учун:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

муносабат ўринли, бўлсин. Бундай функция учун,

$$a) \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = n f(x, y); \quad b) \quad x^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + 2xy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) + y^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = n(n-1) f(x, y)$$

муносабатлар бажарилишини исботланг.

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

$$22.1. \quad u'''_{yxx} = -2y \sin xy - xy^2 \cos xy, \quad u'''_{yyx} = -2x \sin xy - x^2 y \cos xy.$$

$$22.2. \quad \frac{\partial^8 u}{\partial x^4 \partial y^4} = 24(\cos y + \cos x).$$

$$22.3. \quad \frac{\partial^{10} u}{\partial x^4 \partial y^6} = -2^6 \sin x \cdot \cos 2y.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$22.4. \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} = m!n!.$$

$$22.5. \frac{\partial^{10}u}{\partial x \partial y^9} = 10! \left(2xtgx + \frac{c^2 + y}{\cos^2 x} \right).$$

$$22.6. \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} = \frac{2(-1)^m (n+m-1)! (nx+my)}{(x-y)^{m+n+1}}, \quad \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{2x n!}{(x-y)^{n+1}}.$$

$$22.7. \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} = -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2 (y-\eta)^2}{r^8}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

$$22.8. \frac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m \partial y^n} = e^{x+y} [x^2 + y^2 + 2(mx+ny) + m(m-1) + n(n-1)]. \quad 22.9. \sin \frac{n\pi}{2}.$$

$$22.10. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

$$22.11. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$22.12. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1.$$

$$22.13. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\pi^3}{16}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$22.14. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$22.15. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -1.$$

$$22.22. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -30, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 1. \quad 22.17. f_{xy}(0,0) = -1; \quad f_{yx}(0,0) = 1.$$

$$22.18. d^2 u = e^{-1} (dx^2 + dy^2).$$

$$22.19. 2dx \, d^2 u = -2dx dy.$$

$$22.20. u = -2(dx^2 - \pi dx dy).$$

$$22.21. d^2 u = -dx^2 + 4dx dy - 2dy^2.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$22.22. d^2u = -2\sqrt{3}dxdy + \ln^2 2 dy^2.$$

$$22.23. d^2u = e[dx + dy + dz]^2 + 2[dxdy + dydz + dzdx].$$

$$22.24. d^3u = 6(dx^3 - 3dx^2dy + 3dxdy^2 + dy^3).$$

$$22.25. d^3u = -8(xdx + ydy)^3 \cos(x^2 + y^2) - 12(xdx + ydy)(dx^2 + dy^2) \sin(x^2 + y^2)$$

$$22.26. d^4u = 2\left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3}\right). \quad 22.27. d^nu = e^{ax+by}(adx + bdy)^n.$$

$$22.28. d^nu = \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k. \quad 22.29. \Delta u = 0.$$

$$22.30. du = f'(t)(dx + dy), d^2u = f''(t)(dx + dy)^2.$$

$$22.31. du = f'(t) \frac{xdy - ydx}{x^2}, \quad d^2u = f''(t) \frac{(xdy - ydx)^2}{x^4} - 2f'(t) \frac{dx(xdy - ydx)}{x^3}.$$

$$22.32. du = f' \cdot \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad d^2u = f'' \frac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f' \frac{(ydx - xdy)^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

$$22.33. du = 2f'(t)[xdx + ydy + zdz], \quad d^2u = 4f''(t)[xdx + ydy + zdz] + 2f'(t)[dx^2 + dy^2 + dz^2].$$

$$22.34. du = df_{\xi}^{\prime} dx + bf_{\eta}^{\prime} dy, \quad d^2u = a^2 f_{\xi\xi}^{\prime\prime} dx^2 + 2abf_{\xi\eta}^{\prime\prime} dx^2 + b^2 f_{\eta\eta}^{\prime\prime} dy^2.$$

$$22.35. dW = (xf_u^{\prime} + yf_v^{\prime})dx + (xf_v^{\prime} - yf_u^{\prime})dy,$$

$$d^2W = [x^2 \cdot f_{uu}^{\prime\prime} + 2xy \cdot f_{uv}^{\prime\prime} + y^2 \cdot f_{vv}^{\prime\prime} + f_v^{\prime}] dx^2 + + 2[xy \cdot f_{vv}^{\prime\prime} + (x^2 - y^2) \cdot f_{uv}^{\prime\prime} - xy \cdot f_{uu}^{\prime\prime} + f_v^{\prime}] dxdy +$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$[y^2 \cdot f''_{uu} - 2xy \cdot f''_{uv} + x^2 \cdot f''_{vv} - f'_u] dy^2.$$

$$22.46. f(x, y) = -5(x-1) + 4(y-1) + (x-1)^2 - 3(x-1)(y-1) + (y-1)^2.$$

$$22.47. f(x, y) = 1 - (x+2)^2 - 2(x+2)(y-1) + 3(y-1)^2.$$

$$22.48. f(x, y) = -9 + 9(x-1) - 21(y-2) + 3(x-1)^2 + 3(x-1)(y-2) - 12(y-1)^2 + (x-1)^3 - 2(y-2)^3.$$

$$22.49. f(x, y) = 6 + 3(x-2) + (y+1) + (x-2)^2 - (x-2)(y+1) + (y+1)^2 + (x-2)^3.$$

$$22.50. f(x, y) \approx 1 - \frac{1}{2}(\Delta x^2 + \Delta y^2) + R_3. \quad 22.51. f(x, y) = 1 + \Delta x + \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} \Delta x^2 \Delta y + R_3.$$

$$22.52. \Delta z = \frac{\Delta y - \Delta x}{(x-y)^2} + \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y + \Delta y^2}{(x-y)^2} + R_2,$$

$$22.53., \Delta z = \frac{\Delta x + \Delta y}{2\sqrt{x+y}} + \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x \Delta y + \Delta y^2}{8(x+y)^{3/2}} + R_2,$$

$$22.54. \Delta z = e^{x+y}(\Delta x + \Delta y) + e^{x+y} \frac{(\Delta x + \Delta y)^2}{2} + R_2.$$

$$22.55. x^3 + 2y^3 - xy + h(3x^2 - y) + k(6y^2 - x) + 3xh^2 - hk + 6yk^2 + h^3 + 2k^3.$$

$$22.56. f(x+h, y+k) \approx f(x, y) + e^x[\sin y + h \sin y + k \cos y + \frac{1}{2}(h^2 \sin y + 2hk \cos y - k^2 \sin y) + \frac{1}{6}(h^3 \sin y + 3h^2 k \cos y - 3hk^2 \sin y - k^3 \cos y)] + R_3,$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$f(0,1; 0,49\pi) \approx 1,1051.$$

$$22.57. \quad f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 + 2(x-1)(y-1) + 2(x-1)(z+2) + 2(y-1)(z+2).$$

$$22.58. \quad f(x, y, z) = 2 - 4(y-1) + 7(z-2) + x^2 + 3(z-2)^2 - 2(y-1)(z-2).$$

$$22.59. \quad f(x, y, z) = 6 + 6(x-1) + 3(y-2) + 2(z-3) + 3(x-1)(y-2) + \\ + 2(x-1)(z-3) + (y-2)(z-3) + (x-1)(y-2)(z-3).$$

$$22.60. \quad f(x, y, z) = 2 + 3(x-1) - 3y + \\ 3(z-1) + 3(x-1)^2 + 3(z-1)^2 - 3(x-1)y - 3y(z-1) + (x-1)^3 + y^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)y(z-1).$$

$$22.61. \quad f(x, y, z) = 8 - 8(y+1) + 4(z-2) + (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 - 2(x-1)(y+1) - \\ - 2(x-1)(z-2) - 2(y+1)(z-2).$$

$$22.62. \quad f(x, y) = 1 + y + \frac{1}{2}(y^2 - x^2) + \frac{1}{3}(y^3 - 3x^2y) + o(\rho^3), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$22.63. \quad f(x, y) = xy + \frac{1}{3!}(xy^3 - x^3y) + o(\rho^4), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

23-§. Кўп ўзгарувчили функциянинг экстремумлари

23.1. Функциянинг максимум ва минимум қийматлари.

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функция очик $\{M\}$ ($\{M\} \subset R^m$) тўпламда берилган бўлиб, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in \{M\}$ бўлсин.

23.1– таъриф. Агар M_0 нуқтанинг шундай

$$U_\delta(M_0) = \left\{ M \in \{M\} : p(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2} < \delta \right\} \subset \{M\}$$

атрофи мавжуд бўлиб, $\forall M \in U_\delta(M_0)$ учун $f(M) \leq f(M_0)$ ($f(M) \geq f(M_0)$) тенгсизлик бажарилса, $f(M)$ функция M_0 нуқтада *максимумга* (*минимумга*) эга дейилади. $f(M_0)$ қиймат эса, $f(M)$ функциянинг *максимум* (*минимум*) *қиймати* ёки *максимуми* (*минимуми*) дейилади ва у,

$$f(M_0) = \max_{M \in U_\delta(M_0)} \{f(M)\} \left(f(M_0) = \min_{M \in U_\delta(M_0)} \{f(M)\} \right) \text{ каби белгиланади.}$$

23.2 – таъриф. Агар M_0 нуқтанинг шундай $U_\delta(M_0)$ атрофи мавжуд бўлиб, $\forall M \in U_\delta(M_0) \setminus \{M_0\}$ учун $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$) тенглик бажарилса,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$f(M)$ функция M_0 нуктада қатъий максимумга (қатъий минимумга) эга дейилади, $f(M_0)$ қийматга эса, $f(M)$ функциянинг қатъий максимум (қатъий минимум) қиймати ёки қатъий максимуми (қатъий минимуми) дейилади.

Функциянинг максимуми ва минимуми, умумий ном билан, унинг экстремуми деб юритилади.

23.1. ва 23.2 – таърифлардаги M_0 нукта $f(M)$ функцияга максимум (минимум), қатъий максимум (қатъий минимум) қиймат берадиган нукта дейилади. 23.1. ва 23.2 – таърифлардан кўринадики, $f(M)$ функциянинг M_0 нуктадаги $f(M_0)$ қиймати, унинг шу нукта атрофидаги нукталардаги қийматлари билан солиштирилар экан. Шунинг учун, функциянинг M_0 нуктадаги экстремуми, *локал экстремум* деб юритилади.

Мисол. Қуйидаги

$$1) u = x^2 + y^2; \quad 2) u = |x - y|; \quad 3) u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

функцияларни қараймиз. Равшанки, $M_0(0;0)$ нукта: 1) функция учун қатъий минимум; 2) функция учун, минимум; 3) функция учун эса, қатъий максимум нуктаси бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $M_0(0;0)$ нуктанинг шундай

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$U_r(0;0) = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < r^2\} \quad (0 < r < 1)$ атрофини карайлик. Бу атрофдан олинган $\forall M(x,y) \in U_r(0;0) \setminus \{0;0\}$ учун, $u = \sqrt{1-x^2-y^2} < U(0;0) = 1$ бўлади.

23.2. Функция экстремумининг зарурий шарти.

$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(M)$ функция очик $\{M\} (\{M\} \subset R^m)$ тўпланда аниқланган бўлсин.

23.1 – теорема (экстремумнинг зарурий шарти). Агар $f(M)$ функция M_0 нуктада экстремумга эга бўлиб, шу нуктада барча $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда, $f'_{x_1}(M_0) = 0, f'_{x_2}(M_0) = 0, \dots, f'_{x_m}(M_0) = 0$ бўлади.

23.1-эслатма. $f(M)$ функциянинг бирор M' нуктада барча $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_m}$ хусусий ҳосилаларга эга ва $f'_{x_1}(M') = 0, f'_{x_2}(M') = 0, \dots, f'_{x_m}(M') = 0$ бўлишидан, унинг шу M' нуктада экстремумга эга бўлиши ҳар доим ҳам келиб чиқавермайди.

Масалан, $u = f(x,y) = xy$ функция R^m тўпланда аниқланган бўлиб, $\frac{\partial u}{\partial x} = y, \frac{\partial u}{\partial y} = x$ хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, улар $M_0(0;0)$ нуктада нолга

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

айланади. Аммо, бу функция $M_0(0;0)$ нуктада нолга айланади, $\forall U_\delta(0,0)$ атрофда эса, мусбат ва манфий қийматлар қабул қилади.

Демак, **23.1** – теорема функция экстремумга эга бўлишининг зарурий шартини ифодалар экан. $u = f(M)$ функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини нолга айлантирувчи нукталарга *стационар нукталар* дейилади. Стационар нукталарда функция экстремумга эга бўлиши ҳам, эга бўлмаслиги ҳам мумкин.

23.2 – эслатма. Агар $f(M)$ функция M_0 нуктада дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда функция экстремумга эга бўлишининг зарурий шартини, $df(M_0) = 0$ кўринишда ҳам ёзиш мумкин.

23.1 – мисол. Ушбу

$$u = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

функция $M_0(0;0)$ нуктада экстремумга эга бўладими?

Ечилиши. Берилган функция $M_0(0;0)$ нуктада нолга айланади. $M_0(0;0)$ нуктанинг ихтиёрий $U_\delta(M_0) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < \delta\}$ ($\delta > 0$) атрофини қараймиз.

Унда $\forall M(x, y) \in U_\delta(M_0)$ учун $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq f(0;0) = 0$ бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Демак, берилган функция $M_0(0;0)$ нуктада минимумга эга ва $\min\{f(x,y)\}=0$ бўлади. Лекин, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ функция $M_0(0;0)$ нуктада хусусий ҳосилаларга эга эмас. Шундай қилиб, $u=f(x_1,x_2,\dots,x_m)$ функция, очик $\{M\}\subset R^m$ тўпламининг:

- 1) барча хусусий ҳосилалар нолга айланадиган, яъни $\frac{\partial u}{\partial x_1}=0, \frac{\partial u}{\partial x_2}=0, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}=0$ тенгламаларни қаноатлантирадиган нуқталарида;
- 2) хусусий ҳосилалар мавжуд бўлмаган нуқталарида экстремумга эришиши мумкин.

23.3. Функция экстремумининг етарли шарти.

23.3.1. Квадратик форма тўғрисида қисқача маълумот. Квадратик формалар алгебра курсида батафсил ўрганилса-да, биз, келгусида қўлланиладиган, квадратик формага оид баъзи бир тушунчаларни келтириб ўтамыз. Ушбу,

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1m}x_1x_m + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{mm}x_m^2$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

(ёки $Q = \sum_{i,j=1}^m a_{ij} x_i x_j$) ифодага, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларнинг *квадратик формаси*

дейлади, бунда a_{ik} ($a_{ij} = a_{ji}$) лар - квадратик формасининг *коэффициентлари* дейлади. Бу коэффициентлардан тузилган,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2m} \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mm} \end{pmatrix}$$

матрицага – квадратик форманинг *матрицаси* дейлади. Ушбу

$$\delta_1 = a_{11}, \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}, \dots, \delta_m = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

детерминантларга эса, A матрицанинг *минорлари* дейлади. Равшанки, $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$ бўлганда ҳар қандай квадратик форма учун, $Q(0,0,\dots,0) = 0$ бўлади. Энди бошқа нуқталарни қарайлик. Бунда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1. Барча $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 > 0$ нуқталар учун, $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) > 0$ бўлса, бу ҳолда квадратик форма *мусбат аниқланган* дейлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

2. Барча $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 > 0$ нукталар учун, $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) < 0$ бўлса, бу ҳолда квадратик форма *манфий аниқланган* дейилади.

3. Баъзи $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нукталар учун, $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) > 0$, баъзи $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нукталар учун эса $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) < 0$ бўлса, бу ҳолда квадратик форма *ноаниқ* (аниқланмаган) дейилади.

4. Барча $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 > 0$ нукталар учун, $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) \geq 0$ ва улар орасида, $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ бўладиган $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нукталар ҳам бор бўлса, квадратик форма - *ярим мусбат аниқланган* дейилади.

5. Барча $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2 > 0$ нукталар учун, $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq 0$ ва улар орасида, $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0$ бўладиган $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ нукталар ҳам бор бўлса, квадратик форма - *ярим манфий аниқланган* дейилади.

Сильвестр аломати. $Q(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i,k=1}^m a_{ik} x_i x_k$ квадратик форманинг

мусбат аниқланган бўлиши учун, $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0, \dots, \delta_m > 0$ тенгсизликларнинг;
манфий аниқланган бўлиши учун, $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0, \delta_3 < 0, \delta_4 > 0, \dots, (-1)^m \delta_m > 0$
тенгсизликларнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Функция икки ўзгарувчига боғлиқ бўлган хусусий ҳолни қараймиз.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$u = f(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0)$ нуктанинг бирор

$U_\delta(M_0) = \{(x, y) \in R^2 : p(M, M_0) < \delta\} \ (\delta > 0)$ атрофида аниқланган, у барча биринчи

ва иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлиб, M_0 нукта

$u = f(M)$ функциянинг стационар нуктаси, яъни

$$f'_x(M_0) = 0, f'_y(M_0) = 0$$

бўлсин. $a_{xx} = f''_{xx}(M_0)$, $a_{xy} = f''_{xy}(M_0)$, $a_{yy} = f''_{yy}(M_0)$ деб белгилаймиз.

1⁰. Агар $\begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} > 0$ бўлса, $f(M)$ функция M_0 нуктада

минимумга эришади.

2⁰. Агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ва $a_{11} < 0$ бўлса, $f(M)$ функция M_0 нуктада максимумга эришади.

3⁰. Агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ бўлса, $f(M)$ функция M_0 нуктада экстремумга эришмайди.

4⁰. Агар $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ бўлса, $f(M)$ функция M_0 нуктада экстремумга эришиши ҳам мумкин, эришмаслиги ҳам мумкин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

23.3-теорема (шартсиз экстремумнинг старли шarti). $f(M)$ функция

$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтанинг бирор атрофида иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга ва $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта - $f(M)$ функциянинг стационар нуқтаси бўлсин. У ҳолда:

1) агар

$$B(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j$$

квадратик форма, яъни $f(M)$ функциянинг $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтадаги иккинчи тартибли дифференциали $B(dx_1, dx_2, \dots, dx_n) = d^2 f(M_0)$ мусбат (манфий) аниқланган бўлса, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта - $f(M)$ функциянинг минимум (максимум) нуқтаси бўлади.

2) агар $B(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ квадратик форма аниқланмаган бўлса (ҳам мусбат, ҳам манфий қийматлар қабул қилса), $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта - $f(M)$ функциянинг экстремум нуқтаси бўлмайди.

23.2 – мисол. Қуйидаги

а) $u = x^2 - xy + y^2$; б) $u = x^2 - xy - y^2$

функцияларни экстремумга текширинг.

Ечилиши. а) Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топамиз ва нолга тенглаштирамиз. $u'_x = 2x - y = 0$, $u'_y = -x + 2y = 0$. Бу системани ечиб, экстремумга шубҳали, $M_0(0;0)$ нуктани топамиз. Энди иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз: $a_{xx} = u''_{xx} = 2$; $a_{xy} = u''_{xy} = -1$; $a_{yy} = u''_{yy} = 2$. Бу хусусий ҳосилаларнинг $M_0(0;0)$ нуктадаги қийматларни ҳисоблаймиз:

$$u''_{xx}(M_0) = 2, u''_{xy}(M_0) = -1, u''_{yy}(M_0) = 2$$

Шундай қилиб, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0$, $a_{11} = 2 > 0$.

Демак, Сильвестр аломатининг 1^0 – шартига асосан, функция $M_0(0;0)$ нуктада минимумга эришади, яъни $U_{\min}(0;0) = U(0;0) = 0$.

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш

```
> readlib(extrema):  
> extrema(x^2-x*y+y^2,{},{x,y},'z');z;
```

{0}

{y=0,x=0}

б) Худди а) банддаги сингари, $u'_x = 2x - y$, $u'_y = -x - 2y$ хусусий

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳосилаларни топиб, уларни нолга тенглаштирамиз:

$u'_x = 2x - y = 0$, $u'_y = -x + 2y = 0$. Бу системани ечиб, $M_0(0;0)$ стационар нуқтани, яъни экстремумга шубҳали нуқтани топамиз.

Иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топиб, уларнинг $M_0(0;0)$ стационар нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз: $a_{xx} = u''_{xx} = 2$; $a_{xy} = u''_{xy} = -1$;

$a_{yy} = u''_{yy} = -2$. Унда $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 2 \cdot (-2) - (-1)^2 = -4 - 1 = -5 < 0$.

Демак, Сильвестр аломатининг 3^0 - шартига асосан, функция $M_0(0;0)$ нуқтада экстремумга эришмайди.

23.3 – мисол. Ушбу $u = x^2 + 2y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 1$ функцияни экстремумга текширинг.

Ечилиши. Берилган функциянинг хусусий ҳосилаларини топиб, уларни нолга тенглаштирамиз: $u'_x = 2x - 2 = 0$, $u'_y = 4y + 4 = 0$, $u'_z = 2z - 6 = 0$. Бу системани ечиб, $M_0(1;-1;3)$ стационар нуқтани топамиз.

Энди иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларни топиб, уларнинг $M_0(1;-1;3)$ стационар нуқтадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$u''_{xx}(M_0) = 2, u''_{xy}(M_0) = 0, u''_{yx}(M_0) = 0, u''_{xz}(M_0) = 0, u''_{zx}(M_0) = 0,$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Чикиш

қўшимча муносабатлар билан боғланган бўлсин ($m < n$).

(23.2) тенгламалар системаси – *боғланишлар тенгламалари ёки боғланишлар* дейилади. Координаталари (23.2) системани қаноатлантирадиган нуқталар тўпламини E ($E \subset G$) орқали белгилаймиз.

23.3 – таъриф. Агар M_0 ($M_0 \in E$) нуқтанинг шундай $U(M_0)$ атрофи мавжуд бўлиб, $E \cap U(M_0)$ тўпладан олинган $\forall M$ нуқталар учун,

$$f(M) \leq f(M_0) \quad (f(M) \geq f(M_0))$$

тенгсизлик бажарилса, $M_0 \in E$ нуқта $f(M)$ функциянинг, (23.2) боғланишларга нисбатан, *шартли максимум (минимум) нуқтаси* дейилади.

23.4 – таъриф. Агар M_0 ($M_0 \in E$) нуқтанинг шундай $U(M_0)$ атрофи мавжуд бўлиб, $E \cap U(M_0)$ тўпладан олинган $\forall M$ нуқталар учун

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0))$$

тенгсизлик бажарилса, $M_0 \in E$ нуқта $f(M)$ функциянинг, (23.2) боғланишларга нисбатан, *шартли қатъий максимум (минимум) нуқтаси* дейилади.

Бу ерда ҳам, шартли максимум ва шартли минимум, умумий ном билан, *шартли экстремум* деб юритилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Бошқача айтганда, *шартли максимум (минимум)* - функциянинг, M_0 ($M_0 \in E$) нуқтанинг $U(M_0)$ атрофдаги барча нуқталарга нисбатан эмас, балки, $U(M_0)$ атрофдаги (23.2) системани қаноатлантирадиган нуқталарга нисбатан M_0 нуқтадаги энг катта (энг кичик) қийматидан иборатдир.

Масалан, $u = f(x, y) = xy$ функция $\varphi(x, y) = y - x = 0$ боғланишга нисбатан $O(0,0)$ нуқтада шартли қатъий минимумга эга, чунки $f(0,0) = 0$, аммо $y - x = 0$ тенгламани қаноатлантирадиган $(\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$, нуқталарда функциянинг қийматлари мусбат: $f(\varepsilon, \varepsilon) = \varepsilon^2 > 0$.

Шартли экстремумни топиш ҳақидаги масалани ечишнинг иккита усулини қараймиз.

23.4.1. Ўзгарувчиларнинг бир қисмини йўқотиш усули. Фараз қилайлик, M_0 ($M_0 \in E$) нуқтанинг бирор $\omega = U(M_0)$ атрофида: 1) $f(M)$ функция ва (23.2) системадаги $\varphi_i(x)$, $i = \overline{1, m}$ функциялар дифференциалланувчи; 2) $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, $(i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$ хусусий ҳосилалари M_0 нуқтада узлуксиз; 3) ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (23.3)$$

матрицанинг бирорта m - тартибли минори M_0 нуқтада нолдан фаркли бўлсин. Масалан, $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0$, яъни (23.3) матрицанинг M_0 нуқтада ранги m га тенг бўлсин. У ҳолда, M_0 нуқтанинг кичик атрофи, $Q \subset \omega = U(M_0)$ параллелепипедда, (23.2) система, қандайдир m та ўзгарувчиларга, масалан, $x_1, x_2, \dots, x_m$ ўзгарувчиларга нисбатан ягона ечимга эга бўлади, яъни

$$x_i = \psi_i(x_{m+1}, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, m}, \quad (23.4)$$

бунда $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ лар (23.2) системадан аниқланадиган ошкормас функциялар. У ҳолда, Q параллелепипедда (23.2) система, $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ ўзгарувчилар эркин деб қараладиган, (23.4) боғланишларга тенг кучли бўлади.

Агар $x_i = \psi_i(x_{m+1}, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, m}$, функцияларни ошкор равишда топиш мумкин бўлса, уларни (23.1) га келтириб қўйиб, $n - m$ ўзгарувчили,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$z = f(\psi_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, \Psi_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) \equiv g(x_{m+1}, \dots, x_n) = g(M')$$

функцияни ҳосил қиламиз. Q параллелепипед билан чегараланган соҳада $g(M')$ функциянинг ихтиёрий $M'(x_{m+1}, \dots, x_n)$ нуқтадаги қиймати, $f(M)$ функциянинг (23.4) тенгламаларни қаноатлантирадиган, ёки (23.2) тенгламаларни қаноатлантирадиган, унга мос $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ нуқтадаги қиймати билан устма – уст тушади. Шу сабабли, (23.1) функциянинг Q параллелепипеддаги (23.2) боғланишлар бажарилгандаги шартли экстремум масаласи, $g(M')$ функциянинг шартсиз экстремуми масаласига келтирилади.

23.4 – мисол. Ўзгарувчиларнинг бир қисмини йўқотиш усули бўйича,

$$f(M) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad (M(x_1, x_2, x_3))$$

функциянинг экстремумини

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (*)$$

боғланишлар бажарилганда топинг.

Ечилиши. Масаладаги $\varphi(M) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$ тенгламадан $x_3 = 1 - x_2 - x_1$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ни топиб, $f(x)$ функцияга келтириб қўямиз ва икки ўзгарувчили

$$g(M') = g(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 1 \quad (M' \in R^2)$$

функцияни ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, берилган $f(M) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ функциянинг (*) тенгламага нисбатан $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in E$ нуқтадаги шартли экстремумини топиш масаласини, $g(M')$ функциянинг $P(x_1^0, x_2^0)$ нуқтадаги шартсиз экстремумини топиш масаласига келтирдик. Энди охирги масаланинг стационар нуқталарини топамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x_1} = 4x_1x_2 - 2 = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} = 4x_2 + 2x_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \\ 2x_2 + x_1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, \\ x_2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Демак, $M'_0(x_1^0, x_2^0) = M'_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ нуқта, $g(M') \quad (M' \in R^2)$ функциянинг стационар нуқтасидир. Бу стационар нуқта, $g(M') \quad (M' \in R^2)$ функциянинг (абсолют) минимум нуқтаси бўлади, чунки $g(x_1, x_2)$ қатъий қавариқ функциядир. Ҳақиқатан ҳам, бу функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

матрицаси $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ бўлиб, унинг бош минорлари $\delta_1 = 4 > 0$, $\delta_2 = 12 > 0 \Rightarrow$ матрица мусбат аниқланган.

Энди $x_1^0 = \frac{1}{3}$, $x_2^0 = \frac{1}{3}$ қийматларни $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ ифодага келтириб қўйиб,
 $x_3^0 = \frac{1}{3}$ эканлигини топамиз.

Демак, $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = M_0\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ нукта - берилган шартли экстримум масаласида минимум нуктаси бўлади. Максимум нуктаси мавжуд эмас, чунки,

$$\sup(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = +\infty, \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad x \in R^3.$$

Агар (23.4) функцияларни ошкор кўринишда топиш қийинчилик туғдирса ёки унинг иложи бўлмаса, қуйидагича иш кўриш мумкин. Фараз қилайлик, (23.4) функциялар (23.1) га келтириб қўйилган ва унинг натижасида $g(M')$ функция ҳосил қилинган, ҳамда улар (23.2) тенгламаларга келтириб қўйилган, натижада тенгламалар айниятларга айланган бўлсин. У ҳолда $g(M')$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функциянинг дифференциалини, биринчи дифференциал шаклининг инвариантлигига асосан,

$$dg = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (23.5)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бунда $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ – эркин ўзгарувчиларнинг дифференциаллари, $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ лар эса, - (23.4) ошкормас функцияларнинг дифференциалларидир. Юқорида ҳосил қилинган айниятларни дифференциаллаб,

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{cases} \quad (23.6)$$

чизиқли тенгламалар системасини ҳосил қиламиз. Бу системадан (23.4) ошкормас функцияларнинг $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ дифференциалларини, эркин ўзгарувчиларнинг $dx_{m+1}, \dots, dx_n$ дифференциаллари орқали ифодалаймиз.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ лар учун олинган ифодаларни (23.5) муносабатга келтириб қўйиб,

$$dg = \sum_{i=m+1}^n A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i \quad (23.5')$$

тенгликни ҳосил қиламиз, бунда

$$x_j = \psi_j(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Агар $g(M')$ функция $M'_0 = (x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0)$ нуктада экстремумга эришса,

$dg|_{M'_0} = 0$, яъни

$$\sum_{i=m+1}^n A_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) dx_i = 0 \quad (23.7)$$

бўлади, бунда

$$x_j^0 = \psi_j(x_{m+1}^0, x_{m+2}^0, \dots, x_n^0) = \psi_j(M'_0), \quad j = \overline{1, m}.$$

$dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ лар эркин ўзгарувчиларнинг дифференциаллари

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўлганлигидан, (23.7) муносабатдан,

$$A_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, x_{m+1}^0, \dots, x_n^0) = 0, i = \overline{m+1, n} \quad (23.8)$$

эканлигини оламин.

Шундай қилиб, (23.8) тенгликлар системаси, $g(M')$ функциянинг M'_0 нуқтада экстремумга эга бўлишининг зарурий шартларини ёки $f(M)$ функциянинг, (23.2) боғланишлар қатнашганда, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтада шартли экстремумга эга бўлишининг зарурий шартларини ифода қилади. Бу ердан, қаралаётган масалада экстремумга шубҳали бўлган $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқталарни топиш учун, n та $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумларга нисбатан, n та,

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m} \\ A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = \overline{1, m+1, n} \end{cases} \quad (23.9)$$

тенгламалар системасини ечиш лозим бўлади.

Агар экстремумга шубҳали бўлган $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта топилган бўлса, уни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

экстремумга текшириш, $d^2 f|_{M_0}$ иккинчи тартибли тўлиқ дифференциални ҳисоблашга боғлиқ бўлади. Буни ҳисоблашда, f ва φ_i ($i = \overline{1, m}$) функциялар икки марта дифференциалланувчи деб фараз қилиб, dg учун олинган (23.5') тенгликни дифференциаллаш ва (23.4) ошкормас функцияларнинг $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ дифференциаллари учун (23.6) системадан топилган ифодалардан фойдаланиш зарур. Натижада, биз $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ ўзгарувчиларга нисбатан $d^2 f|_{M_0}$ - квадратик формани ҳосил қиламиз.

Агар бу квадратик форма мусбат (манфий) аниқланган бўлса, (23.1) функция M_0 нуқтада шартли минимум (максимум) га эришади.

23.5 – мисол. Ўзгарувчиларнинг бир қисмини йўқотиш усули ёрдамида,

$$u = f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3 \quad (23.10)$$

функциянинг экстремумини,

$$\begin{cases} 4x_1^3 + 4x_2^3 + 4x_3^3 + 12x_1 + 12x_2 + 12x_3 = 13 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \quad (23.11)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

боғланишлар тенгламалари бажарилганда топинг.

Ечилиши. Бу масалани ечишда юқорида келтирилган иккинчи усулдан, яъни (23.11) тенгламаларда ўзгарувчилардан қандайдир икkitасини учинчиси орқали ошкор равишда ифодалаш мумкин бўлмаган усулдан фойдаланамиз.

(23.11) система икки марта дифференциалланувчи $x_2(x_1)$ ва $x_3(x_1)$ ошкормас функцияларни аниқлайди, деб фараз қиламиз ва улар боғланишлар тенгламаларига келтириб қўйилган деб ҳисоблаб, (23.11) тенгламаларни айниятлар системаси каби қараймиз. (23.11) айниятларни ҳар иккала томонидаги дифференциалларни ҳисоблаб, натижада

$$\begin{cases} (x_1^2 + 1)dx_1 + (x_2^2 + 1)dx_2 + (x_3^2 + 1)dx_3 = 0 \\ dx_1 + dx_2 = 0 \end{cases}$$

муносабларни ҳосил қиламиз. Бу ердан,

$$\begin{cases} dx_2 = -dx_1, \\ dx_3 = \frac{-2x_1 + 1}{x_3^2 + 1} dx_1 \end{cases} \quad (23.12)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

эканлигини топамиз. Бу ифодаларни, (23.10) функциянинг $du = dx_1 + dx_2 - dx_3$ кўринишдаги дифференциали ифодасига келтириб қўйиб,

$$du = \frac{2x_1 - 1}{x_3^2 + 1} dx_1 \equiv Adx_1 \quad (23.13)$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

Энди, (23.11) тенгламалар ва $A = 0$ тенгламалардан ташкил топган,

$$\begin{cases} 4x_1^3 + 4x_2^3 + 4x_3^3 + 12x_1 + 12x_2 + 12x_3 - 13 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0, \\ \frac{2x_1 - 1}{x_3^2 + 1} = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасини (бу система, қаралаётган ҳол учун (23.9) системадан иборат) қараймиз. Бу система, ягона $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 0$ ечимга эга, яъни

$M_0 = \left(1/2, \frac{1}{2}, 0\right)$ - (23.10) функциянинг (23.11) боғланишларга нисбатан

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

экстремумга шубҳали бўлган ягона нуқтасидир.

Энди du нинг (23.13) даги ифодасини дифференциаллаймиз:

$$d^2u = \frac{2(x_3^2 + 1)dx_1 - (2x_1 - 1)2x_3dx_3}{(x_3 + 1)^2}dx_1.$$

Охирги ифодадан, (23.12) тенгламаларни ҳисобга олиб,

$$d^2u|_{M_0} = 2(dx_1)^2$$

муносабатга келамиз. Модомики, $2(dx_1)^2 - dx_1$ бир ўзгарувчининг мусбат аниқланган квадратик формаси экан, (23.10) функция (23.11) боғланишларда M_0 нуқтада минимумга эришади.

23.3-эслатма. Биз масалани, (23.11) система икки марта дифференциалланувчи $x_2(x_1)$ ва $x_3(x_1)$ функцияларни аниқлайди, деб фараз

қилиб, ечдик. Энди, бу шартнинг $M_0 = (1/2, 1/2, 0)$ нуқтанинг бирор атрофида бажарилишини кўрсатамиз. Бунинг учун, 1- банддаги 1)- 3) шартларни

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

текширамиз.

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^3 + 4x_2^3 + 4x_3^3 + 12x_1 + 12x_2 + 12x_3 - 13 \text{ ва } \varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - 1$$

функциялар M_0 нуқтанинг ихтиёрий атрофида дифференциалланувчи;

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 12(x_1^2 + 1), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = 12(x_2^2 + 1), \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} = 0 \text{ хусусий ҳосилалар } M_0 \text{ нуқтада}$$

узлуксиз; $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ ва $\varphi_2(x_1, x_2, x_3)$ функциялар M_0 нуқтада нолга айланади ва

$$\left. \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_2, x_3)} \right|_{M_0} = -12 \neq 0.$$

Демак, 1)- 3) шартларга асосан, (23.11) система M_0 нуқтанинг бирор атрофида ягона $x_2(x_1)$ ва $x_3(x_1)$ функцияларни аниқлайди. Бундан ташқари, $\varphi_1(x_1, x_2, x_3)$ ва $\varphi_2(x_1, x_2, x_3)$ функциялар M_0 нуқтанинг ихтиёрий атрофида икки марта дифференциалланувчи, у ҳолда $x_2(x_1)$ ва $x_3(x_1)$ функциялар ҳам икки марта дифференциалланувчи бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

23.4.2. Кўп ўзгарувчили функциянинг шартли экстремумини топишнинг Лагранж кўпайтувчилари қондаси. Шартли экстремум масаласини ечишда юқорида кўриб ўтилган усулларни кўп ҳолларда қўллаб бўлмайди, яъни боғланишлардан ўзгарувчиларнинг бир қисмини қолганлари орқали ошкор ёки ошкормас шаклда ифодалаш мумкин бўлмайди.

Бундай масалаларни ечишда қуйидагича иш кўрилади.

Бизга, (23.1) функциянинг экстремумини, (23.2) боғланишлар бажарилганда, топиш масаласи қўйилган бўлсин, ҳамда $f(M)$, $\varphi_i(M), (i = \overline{1, m})$ функциялар $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтада ва унинг бирор атрофида узлуксиз дифференциалланувчи, ва ниҳоят,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги m га тенг бўлсин. Қуйидаги $n+m$ ўзгарувчили

$$L(M, \lambda) = f(M) + \lambda_1 \varphi_1(M) + \lambda_2 \varphi_2(M) + \dots + \lambda_m \varphi_m(M) \quad (23.14)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

функцияни киритамиз, бунда $M \in G \ (G \subset R^n), \lambda \in R^m, \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ - Лагранж кўпайтувчилари, λ - Лагранж вектори, $L(M, \lambda)$ функция эса, Лагранж функцияси деб аталади.

23.4-теорема (Лагранж кўпайтувчилари қондаси). Фараз қилайлик, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ - $f(M)$ функциянинг (23.2) боғланишлар бажарилгандаги шартли экстремум нуқтаси бўлсин. У ҳолда, шундай ягона $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ Лагранж вектори топиладики, (M_0, λ^0) жуфтлик учун,

$$\begin{cases} \frac{\partial L(M_0, \lambda^0)}{\partial M} = 0 & \Leftrightarrow & \frac{\partial L(M_0, \lambda^0)}{\partial x_j} = 0, \ j = \overline{1, m}, \end{cases} \quad (23.15)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L(M_0, \lambda^0)}{\partial \lambda_1} = \varphi_1(M_0) = 0, \dots, \frac{\partial L(M_0, \lambda^0)}{\partial \lambda_m} = \varphi_m(M_0) = 0 \end{cases} \quad (23.16)$$

муносабатлар бажарилади.

(23.15), (23.16) муносабатларни қаноатлантирувчи (M_0, λ^0) жуфтлик-Лагранж функциясининг стационар нуқтаси, шартли экстремум масаласининг *шартли стационар нуқтаси* дейилади.

23.4-теоремадан келиб чиқадики, (23.1) функцияга, (23.2) боғланишлар қатнашганда, шартли экстремум бериши мумкин бўлган нуқталарни топиш

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

учун, $n+m$ та, $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, номаълумларга нисбатан,

$$\begin{cases} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, m} \\ \frac{\partial L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (23.17)$$

$n+m$ та тенгламалар системасини ечиш лозим бўлади. (23.17) тенгламалар системаси- *стационарлик* тенгламалари системаси дейилади.

Шундай қилиб, агар (M_0, λ^0) жуфтлик (23.17) тенгламалар системасининг ечими бўлса (бундай ечимлар бир нечта бўлиши ҳам мумкин), $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта - (23.1) функцияга, (23.2) боғланишлар қатнашганда, шартли экстремум бериши мумкин бўлган нуқта бўлади. Бу нуқтанинг шартли экстремум нуқтаси бўлишини аниқлашда, (23.1) функция ва (23.2) боғланишларда қатнашаётган функциялар иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, деб фараз қилиниб, Лагранж функциясининг, белгиланган $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0$ лар учун, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтада $x_1, x_2, \dots, x_n$ ўзгарувчилар бўйича ҳисобланган,

$$d^2 L(M_0, \lambda^0) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 L(M_0, \lambda^0)}{\partial x_k \partial x_j} dx_k dx_j \quad (23.18)$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

иккинчи тартибли дифференциали қаралади.

23.5-теорема (шартли экстремумнинг иккинчи тартибли зарурий шарти) Фараз қилайлик, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ - $f(M)$ функциянинг (23.2) боғланишлар бажарилгандаги шартли минимум (максимум) нуқтаси, $f(M)$, $\varphi_i(M)$, $(i = \overline{1, m})$ функциялар $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтанинг бирор атрофида иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, ҳамда $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқтада (23.3) матрицанинг ранги m га тенг бўлсин. У ҳолда, шундай $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_m^0)$ Лагранж вектори топиладики, (M_0, λ^0) жуфтлик - Лагранж функциясининг стационар нуқтаси бўлади ва

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_n} dx_n = 0 \end{cases} \quad (23.19)$$

тенгламалар системасини қаноатлантирувчи $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ лар учун

$$d^2 L(M_0, \lambda^0) \geq 0 \quad (d^2 L(M_0, \lambda^0) \leq 0)$$

муносабат бажарилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

23.6-теорема (шартли экстремумнинг етарли шарти). $f(M)$,

$\varphi_i(M), (i=\overline{1,m})$ функциялар $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуктанинг бирор атрофида иккинчи тартибли узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуктада

(23.3) матрицанинг ранги m га тенг, ҳамда (M_0, λ^0) жуфтлик- Лагранж функциясининг стационар нуктаси бўлсин. У ҳолда:

1) агар $d^2L(M_0, \lambda^0), dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ лар (23.19) тенгламалар системасини қаноатлантирганда, мусбат аниқланган квадратик форма бўлса, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нукта - $f(M)$ функциянинг, (23.2) боғланишлар бажарилганда, шартли минимум нуктаси бўлади.

2) агар $d^2L(M_0, \lambda^0), dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ лар (23.19) тенгламалар системасини қаноатлантирганда, манфий аниқланган квадратик форма бўлса, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нукта - $f(M)$ функциянинг, (23.2) боғланишлар бажарилганда, шартли максимум нуктаси бўлади.

3) агар $d^2L(M_0, \lambda^0), dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ лар (23.19) тенгламалар системасини қаноатлантирганда, аниқланмаган квадратик форма (ҳам мусбат, ҳам манфий қийматлар қабул қилувчи) бўлса, $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нукта - $f(M)$ функциянинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

шартли экстремум нуктаси бўлмайди.

Хусусий ҳолда, $u = f(x, y)$ функция $\varphi(x, y) = 0$ боғланишлар тенгламаси билан берилган бўлса, Лагранж функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y).$$

(23.17) тенгламалар системаси, учта тенгламадан иборат бўлади:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

(M_0, λ^0) жуфтлик- Лагранж функциясининг стационар нуктаси бўлсин ва

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x(M_0) & \varphi'_y(M_0) \\ \varphi'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0, \lambda_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) \\ \varphi'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0, \lambda_0) & L''_{yy}(M_0, \lambda_0) \end{vmatrix}.$$

Агар $\Delta < 0$ бўлса, $M_0(x^0, y^0)$ нукта - $u = f(x, y)$ функциянинг, $\varphi(x, y) = 0$ боғланишлар бажарилганда, шартли максимум нуктаси бўлади.

Агар $\Delta > 0$ бўлса, $M_0(x^0, y^0)$ нукта - $u = f(x, y)$ функциянинг, $\varphi(x, y) = 0$ боғланишлар бажарилганда, шартли минимум, нуктаси бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Изоҳлар.

1. Функцияларнинг экстремумини боғланишлар қатнашганда топиш масалалари жуда кенг тарқалган, улар экстремал масалаларнинг бир қисмидан иборат бўлиб, уларни ўрганувчи бўлим – *экстремал масалалар назарияси*, ҳозирги вақтда, кўп амалий масалаларда қўлланилмоқда.

2. Биз юқорида кўрган масалаларда, ҳам экстремумини топиш талаб қилинган функцияни, ҳам боғланишлар функцияларини етарли силлиқ, деб фараз қилган эдик. Лекин боғланишлар фақат тенгликлар кўринишида эмас, балки тенгсизликлар кўринишида ҳам бўлиши, улардаги функциялар одатдаги маънода дифференциалланувчи бўлмаслиги ҳам мумкин.

3. Боғланишлар функциялари ёрдамида тузилган (23.3) матрицанинг ранги m га тенг бўлсин, деган талаб ҳам анча кучли, кўп масалаларда бундай талабни қўйиш мумкин эмас. Бу ҳолда, Лагранж кўпайтувчилари усулининг умумлашмасидан, аниқроғи, умумлашган Лагранж функциясидан фойдаланилади.

23.6-мисол. Лагранж усулидан фойдаланиб, ушбу $u = 2x + 4y - 5$ функциянинг $x^2 + y^2 = 125$ боғланишларни қаноатлантирувчи шартли

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

экстремумларини топинг.

Ечилиши. Дастлаб Лагранж функциясини кураимиз:

$$L(x, y, \lambda) = 2x + 4y - 5 + \lambda(x^2 + y^2 - 125).$$

Энди Лагранж функциясидан хусусий ҳосилаларни олиб, (23.17) тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 4 + 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 125, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 4 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 125. \end{cases}$$

Бу система иккита ечимга эга:

$$x_1 = -5, y_1 = -10, \lambda_1 = 0,2; \quad x_1 = 5, y_1 = 10, \lambda_1 = -0,2.$$

$L(x, y, \lambda)$ Лагранж функциясининг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топиб, иккинчи тартибли дифференциалини тузамиз:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda, \quad d^2 L = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

$\lambda_1 = 0,2$ бўлганда $d^2 L > 0$. Шунинг учун, 23.6-теоремага асосан, $M_1(-5; -10)$ нуқтада u функция шартли минимумга эга ва $u_{\min} = u(-5, -10) = -55$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$\lambda_2 = -0,2$ бўлганда $d^2L < 0$. Шунинг учун, 23.6-теоремага асосан, $M_2(5; 10)$ нуқтада u функция шартли максимумга эга ва унинг максимум қиймати 55 га тенг, $u_{\max} = u(5, 10) = 45$.

u функцияни шартли экстремумга текширишнинг бошқа йўлини қараймиз.

$\lambda_1 = 0,2$ бўлганда $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 125$, $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 2y$, $\varphi'_x(-5, -10) = -10$,

$$\varphi'_y(-5, -10) = -20, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0,4, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0,4.$$

Демак,

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & -10 & -20 \\ -10 & 0,4 & 0 \\ -20 & 0 & 0,4 \end{vmatrix} = 200 > 0$$

Демак, $M_1(-5; -10)$ нуқтада u функция шартли минимумга эга ва унинг максимум виймати -55 га тенг, яъни $u_{\min} = u(-5, -10) = -55$.

Худди, шунга ўхшаш, $\lambda_2 = -0,2$ бўлган ҳолда ва $M_2(5; 10)$ нуқтада

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & 10 & 20 \\ 10 & -0,4 & 0 \\ 20 & 0 & -0,4 \end{vmatrix} = -200 < 0.$$

Демак, $M_2(5; 10)$ нуқтада u функция шартли максимумга эга ва унинг

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

қиймати 45 га тенг, яъни $u_{\max} = u(5, 10) = 45$.

Мисолни Maple тизимидан фойдаланиб ечиш

> readlib(extrema) :

> extrema(2*x+4*y-5, {x^2+y^2-125=0}, {x,y}, 'u') ;u;

{-55, 45}

{y = 10, x = 5}, {y = -10, x = -5}

23.7-мисол. Лагранж усулидан фойдаланиб, $u = xy + yz$ функциянинг

$x^2 + y^2 = 2, y + z = 2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) боғланишларни қаноатлантирувчи

экстремумларини топинг.

Ечилиши. Дастлаб Лагранж функциясини тузамиз:

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xy + yz + \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(x + z - 2).$$

Бу Лагранж функциясидан хусусий ҳосилаларни олиб,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda x, \\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + z + 2\lambda y + \mu, \\ \frac{\partial L}{\partial z} = y + \mu, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2. \end{cases} = \begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + z + 2\lambda y + \mu = 0, \\ y + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

тенгламалар системасини тузамиз. Бу системадан λ ва μ сонларни ва стационар нуктанинг координаталарини топамиз: $x = y = z = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = -1$.

$L(x, y, z, \lambda, \mu)$ Лагранж функциясининг иккинчи тартибли дифференциалини топамиз ва унга $\lambda = -\frac{1}{2}$ қийматни келтириб қўямиз:

$$d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2) + 2dxdy + 2dydz = -dx^2 - dy^2 + 2dxdy + 2dydz.$$

Боғланишлар тенгласидан, $dy = -dx = -dz$ эканлиги келиб чиқади. Буни эътиборга олсак, у ҳолда $d^2L = -dx^2 - 3dy^2 - 2dz^2 < 0$ бўлади.

Демак, 23.6-теоремага асосан, $M_0(1, 1, 1)$ нуктада u функция шартли

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

максимумга эга ва унинг қиймати 2 га тенг, яъни $u_{\max} = u(1, 1, 1) = 2$.

23.5. Кўп ўзгарувчили функциянинг энг кичик ва энг катта қийматлари.

Агар $u = f(M)$ функция чегараланган ёпик $\{M\} (\{M\} \subset R^m)$ тўпламда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функция шу тўпламда ўзининг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегараларига эришади (**Вейерштрасс теоремаси**).

$u = f(M)$ функция чегараланган соҳада дифференциалланувчи ва соҳанинг чегарасида узлуксиз бўлса, бу функция, ёки стационар нуқталарда, ёки соҳанинг чегара нуқталарида ўзининг энг катта ва энг кичик қийматларига эришади.

Кўп ўзгарувчили функциянинг энг кичик ва энг катта қийматларини топиш қоидаси қуйидагича :

1) берилган соҳада жойлашган стационар нуқталарни топиш ва функциянинг бу нуқталардаги қийматларини ҳисоблаш;

2) соҳани чегарасини ташкил қилувчи чизикда функциянинг энг кичик ва энг катта қийматларини топиш;

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

3) функциянинг топилган барча қийматларини солиштириш: буларнинг энг кичиги ва энг каттаси, мос равишда, функциянинг қаралаётган соҳада энг кичик ва энг катта қиймати бўлади.

23.8-мисол. Ушбу $u = x^2 - 4x - y^2$ функциянинг $x^2 + y^2 \leq 16$ доирадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топинг.

Ечилиши. 1. $u = x^2 - 4x - y^2$ функциянинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$u'_x = 2x - 4, \quad u'_y = -2y.$$

Бу хусусий ҳосилаларни нолга тенглаштириб, системани ечиб, битта $P_0(2;0)$ стационар нуқтани топамиз, унда функциянинг қиймати -4 га тенг, яъни $z(2;0) = 4 - 8 - 0 = -4$

2. Энди функциянинг чегарадаги, яъни $x^2 + y^2 = 16$ айланадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топамиз. $u = x^2 - 4x - y^2$ функцияни бу айлана нуқталарида битта x ўзгарувчининг функцияси сифатида ифодалаш мумкин. $y^2 = 16 - x^2$ функцияни u функцияга келтириб қўямиз:

$u = x^2 - 4x + y^2 = 2x^2 - 4x - 16$. $y = \pm\sqrt{16 - x^2}$ функциянинг аниқланиш соҳаси

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$[-4; 4]$ бўлади.

Шундай қилиб, икки ўзгарувчили функциянинг $x^2 + y^2 = 16$ айланадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топиш, бир ўзгарувчили, $u = 2x^2 - 4x - 16$ функциянинг $[-4; 4]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта қийматларини топишга келтирилди. Бу функциянинг $(-4; 4)$ ораликдаги критик нуқталарини топамиз ва ораликнинг четларидаги қийматларини топамиз: $u' = 4x - 4$, $4x = 4$, бундан $x = 1$ критик нуқтани оламиз: $u|_{x=1} = -18$, сўнгра $u|_{x=4} = 0$, $u|_{x=-4} = 32$ эканлигини топамиз.

3. Берилган функциянинг стационар ва чегара нуқталардаги қийматларини ҳисоблаб, уларни солиштирамиз:

$$u(-2; 0) = -4, \quad u(1; -2\sqrt{2}) = -11, \quad u(4; 0) = 0, \quad u(1; 2\sqrt{2}) = 11, \quad u(-4; 0) = 32$$

$$u(0; 4) = -16, \quad u(0; -4) = -16.$$

Демак, берилган функциянинг энг кичик қиймати -16 , энг ката қиймати эса, 32 бўлади,

$$u_{e.kich} = u(0; 4) = u(0; -4) = -16, \quad u_{e.kat} = u(-4; 0) = 32.$$

23.9-мисол. Тўғри бурчакли параллелепипеддан иборат усти очик бак V литр ҳажмга эга. Бакнинг ўлчовлари қандай бўлганда, унга сарфланадиган

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

материал энг кам бўлади?

Ечилиши. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчовларини x, y, z ($x > 0, y > 0, z > 0$) деб белгилаймиз. У ҳолда, унинг ҳажми, $V = xyz$ бўлади.

Бундан $z = \frac{V}{xy}$. Масаланинг шартига кўра, тўғри бурчакли

параллелепипеднинг тўла сирти,

$$S = S(x, y) = 2(xz + 2yz) + xy = 2(x + y) \frac{V}{xy} + xy = 2V \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + xy$$

бўлади. $S(x, y)$ функциянинг энг кичик қийматини топамиз. Равшанки,

$$S'_x = -\frac{2V}{x^2} + y,$$

$$S'_y = -\frac{2V}{y^2} + x$$

Стационар нуқталарни топиш учун, хусусий ҳосилаларни нолга тенглаштириб, ҳосил қилинган системани ечамиз:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{2V}{x^2} + y &= 0 \\ -\frac{2V}{y^2} + x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_0 &= \sqrt[3]{2V}, \\ y_0 &= \sqrt[3]{2V}, \end{aligned} \quad P_0(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}).$$

Икки ўзгарувчили функция минимумининг етарли шартини текширамыз:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$S''_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \quad S''_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2$$

$$S''_{y^2} = \frac{4V}{y^3}, \quad S''_{y^2}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2$$

$$S''_{xy} = 1, \quad S''_{xy}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 1$$

$$\Delta = S''_{x^2}(P_0)S''_{y^2}(P_0) - S''_{xy}(P_0) = 4 - 1 = 3 > 0, \quad S''_{xx}(P_0) > 0.$$

Демак, $S(x, y)$ функция, $P_0(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$ нуктада минимумга эга бўлади:

$$z(P_0) = \frac{V}{x_0 y_0} = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}; \quad S_{\min} = S(P_0) = 2V \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2V}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2V}} \right) + \sqrt[3]{4V^2} = 3 \sqrt[3]{4V^2}.$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги икки ўзгарувчи функцияларни экстремумга текширинг:

23.1. $u = -x^2 - xy.$

23.2. $u = 2x^2 + xy + y^2.$

23.3. $u = x^3 - 3xy - 3y.$

23.4. $u = x^4 + y^4 - 4xy.$

23.5. $u = -2x^2 + xy - 2y^2 + 6x + 6y.$

23.6. $u = x^3 - 9xy + y^3.$

23.7. $u = x^3 + 6xy + 8y^3 - 1.$

23.8. $u = xy(1 - x - y).$

23.9. $u = x^2 - 3xy + y^2 - 4x + 5y + 6.$

23.10. $u = x^2 + y^2 - 8x - 2.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$23.11. u = x^2 + xy - y^2 - 3x - 6y.$$

$$23.13. u = 3x^2 - y^2 + 4y + 5.$$

$$23.15. u = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6y.$$

$$23.23. u = x^3 - 3axy + y^3.$$

$$23.19. u = \sin x + \sin y + \sin(x + y), \text{ бунда } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$23.20. u = xe^{y+x\sin y}.$$

$$23.22. f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4.$$

$$23.23. f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 2y^3.$$

Қуйидаги уч ўзгарувчили функцияларни экстремумга текширинг:

$$23.25. u = x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 2z.$$

$$23.27. u = x^2 + y^2 + (z + 1)^2 - xy + x.$$

$$23.29. u = xyz(16 - x - y - 2z).$$

$$23.31. u = \frac{1}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} + x + 1.$$

$$23.12. u = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$$

$$23.14. u = x^2 + xy + 2y^2 - x + y.$$

$$23.16. u = (x + y^2)e^{x/2}.$$

$$23.18. u = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$$

$$23.21. u = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y.$$

$$23.24. f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2.$$

$$23.26. u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

$$23.28. u = x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 4z.$$

$$23.30. u = \frac{226}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + z^2.$$

$$23.32. u = x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3}.$$

Қуйидаги икки ўзгарувчили функцияларни шартли экстремумга текширинг:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$23.33. u = xy, \quad x + y - 2 = 0.$$

$$23.34. u = x^2 + y^2, \quad x + y - 1 = 0.$$

$$23.35. u = x^2 + y^2, \quad 3x + 4y - 12 = 0.$$

$$23.36. u = xy, \quad 2x + 3y - 5 = 0.$$

$$23.37. u = xy^2, \quad x + 2y - 1 = 0.$$

$$23.38. u = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4, \quad x + y + 3 = 0.$$

$$23.39. u = \cos^2 x + \cos^2 y, \quad x - y - \frac{\pi}{4} = 0.$$

$$23.40. u = 5 - 3x - 4y, \quad x^2 + y^2 = 25.$$

$$23.41. u = 1 - 4x - 8y, \quad x^2 - 8y^2 = 8.$$

$$23.42. u = x^2 + xy + y^2, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Қуйидаги уч ўзгарувчили функцияларни шартли экстремумга текширинг.

$$23.43. u = 2x^2 + 3y^2 + 4z^2, \quad x + y + z - 13 = 0.$$

$$23.44. u = xy^2z^3, \quad x + y + z - 12 = 0, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$23.45. u = x - 2y + 2z, \quad x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

$$23.46. u = xy + 2xz + 2yz, \quad xyz = 108.$$

$$23.47. u = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$

23.48. $f(x, y) = x^3 + y^2$ функциянинг $x^2 + y^2 = 1$ айланадаги экстремум қийматларини топинг.

23.49. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 2y$ функциянинг $x^2 + y^2 \leq 1$ доирадаги экстремум қийматларини топинг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

23.50. $f(x, y, z) = x - y + z$ функциянинг $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ бирлик сферадаги экстремум қийматларини топинг.

23.51. $f(x, y, z) = x(y + z)$ функциянинг $x^2 + y^2 = 1$ тўғри доиравий конус ва $xz = 1$ гипербولىк цилиндрларнинг кесишиш чизиғидаги экстремум қийматларини топинг.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган D тўпламда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

23.52. $u = x^3 - 3xy + y^3$, $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2 \quad -1 \leq y \leq 2\}$.

23.53. $u = x - 2y + 5$, $D = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

23.54. $u = x^2 - 4x - y^2$, $D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

23.55. $u = xy(4 - x - y)$, $D = \{(x, y) \in R^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 8\}$.

23.56. $u = x^3 - 9xy + y^3 + 27$, $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 4 \quad 0 \leq y \leq 4\}$.

23.57. $u = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, $D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \pi/2 \quad 0 \leq y \leq \pi/2\}$.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган D тўпламда энг катта ва энг кичик қийматларини топинг:

23.58. $u = xy + x + y$, $D = \{(x, y) \in R^2 : -2 \leq x \leq 2 \quad -2 \leq y \leq 2\}$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$23.59. u = x^3 - 6xy + 8y^3 + 1, D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq 2 \quad -1 \leq y \leq 1\}.$$

$$23.60. u = 3 + 2xy, D = \{(x, y) \in R^2 : -4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

$$23.61. u = x^4 - y^4, D = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}.$$

$$23.62. u = x^2 + y^2, D = \{(x, y) \in R^2 : (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9\}.$$

$$23.63. u = \cos x \cos y \cos(x + y), D = \{(x, y) \in R^2 : 0 \leq x \leq \pi \quad 0 \leq y \leq \pi\}.$$

Берилган функцияларнинг берилган R соҳада максимум ва минимум қийматларини топинг.

23.64. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 3y$, R : биринчи квадрантда $x + y = 4$ тўғри чизик билан кесилган учбурчакли соҳа.

23.65. $f(x, y) = y^2 - xy - 3y + 2x$, R : $x = \pm 2$ ва $y = \pm 2$ тўғри чизиклар билан чегараланган квадратик соҳа.

23.66. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y$, R : пастдан Ox ўқ, юқоридан $y = x + 2$ тўғри чизик ва ўнгдан $x = 2$ тўғри чизик билан чегараланган учбурчакли соҳа.

23.67. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2$, R : $x = \pm 1$ ва $y = \pm 1$ тўғри чизиклар билан чегараланган квадратик соҳа.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

23.1. $u_{\max} = u(0,0) = 0.$ 23.2. $u_{\min} = u(0,0) = 0.$

23.3. $(-1; 1)$ стационар нуқтада экстремум йўқ.

23.4. $u_{\min} = u(1; 1) = u(-1; -1) = -2,$ $O(0; 0)$ стационар нуқтада экстремум йўқ.

23.5. $u_{\max} = u(2; 2) = 12.$

23.6. $u_{\min} = u(3; 3) = -27,$ $O(0; 0)$ стационар нуқтада экстремум йўқ.

23.7. $u_{\max} = u(-1; -0,5) = 0.$ 23.8. $u_{\max} = u\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}.$

23.9. $\left(\frac{7}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ стационар нуқтада экстремум йўқ. 23.10. $u_{\min} = u(4; 0) = -18.$

23.11. $u_{\min} = u(0; 3) = -9.$

23.12. $u_{\min} = u\left(0; -\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3},$ $\left(2; -\frac{2}{3}\right)$ стационар нуқтада экстремум йўқ.

23.13. Экстремум йўқ. 23.14. $u_{\min} = u(1; -1) = 0.$ 23.15. $u_{\max} = u(0; 3) = 9.$

23.16. $u_{\min} = u(-2; 0) = -\frac{2}{e}.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$23.23. \quad a < 0 \quad da \quad u_{\max} = u(a; a) = -a^3, \quad . \quad a > 0 \quad da \quad u_{\min} = u(a; a) = -a^3.$$

$$23.18. \quad u_{\min} = u(1; 2) = 7 - 10 \ln 2. \quad 23.19. \quad u_{\max} = u\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \sqrt{3}. \quad 23.20. \quad \text{Экстремум йўқ.}$$

$$23.21. \quad u = u_{\min}(4; 2) = 6. \quad 23.22. \quad f_{\min} = f(-2, -2) = -8. \quad 23.23. \quad f_{\max} = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

$$23.24. \quad f_{\min.} = f(0, 2) = -4, \quad f_{\max.} = f(-2, 0) = 4.$$

$$23.25. \quad u_{\min} = u(2; -3; 1) = -14. \quad 23.26. \quad u_{\min} = u\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; 1\right) = -\frac{4}{3}.$$

$$23.27. \quad u_{\min} = u\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -1\right) = -\frac{1}{3}.$$

$$23.28. \quad u_{\min} = u(6; -18; 2) = -112.$$

$$23.29. \quad u_{\max} = u(4; 4; 2) = 128.$$

$$23.30. \quad u_{\min} = u(8; 4; 2) = 60.$$

$$23.31. \quad u_{\min} = u(1; 1; 1) = 5, \quad u_{\max} = u(-1; 1; -1) = -3. \quad 23.32. \quad u_{\min} = u(0; 0; 0) = 0.$$

$$23.33. \quad u_{\max} = u(1; 1) = 1.$$

$$23.34. \quad u_{\min} = u(0, 5; 0, 5) = 0, 5.$$

$$23.35. \quad u_{\min} = u\left(\frac{36}{25}; \frac{48}{25}\right) = \frac{144}{25}.$$

$$23.36. \quad u_{\max} = u\left(\frac{5}{4}; \frac{5}{6}\right) = \frac{25}{24}.$$

$$23.37. \quad u_{\max} = u(1; 0) = 0 \quad u_{\min} = u\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27}. \quad 3.38. \quad u_{\min} = u\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) = -\frac{19}{4}.$$

$$23.39. \quad u_{\min} = u\left(\frac{5\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad u_{\max} = u\left(\frac{\pi}{8} + \pi k; -\frac{\pi}{8} + \pi k\right) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$23.40. \quad u = u_{\min}(3; 4) = -20, \quad u = u_{\max}(-3; -4) = 30.$$

$$23.41. \quad u = u_{\min}(-4; 1) = 9, \quad u = u_{\max}(4; -1) = -7.$$

$$23.42. \quad u = u_{\min}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \mp \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad u = u_{\max}\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

$$23.43. \quad u_{\min} = u(6; 4; 3) = 156.$$

$$23.44. \quad u_{\max} = u(2; 4; 6) = 6912.$$

$$23.45. \quad u_{\max} = u(1; -2; 2) = 9, \quad u_{\min} = u(-1; 2; -2) = -9.$$

$$23.46. \quad u_{\min} = u(6; 6; 3) = 108.$$

$$23.47. \quad u_{\max} = u(\pm a; 0; 0) = a^2, \quad u_{\min} = u(0; 0; \pm c) = c^2.$$

$$23.48. \quad f_{\max} = f(0, \pm 1) = f(1, 0) = 1, \quad f_{\min} = f(-1, 0) = -1.$$

$$23.49. \quad f_{\max} = f(0, 1) = 5, \quad f_{\min} = f(0, -1/3) = -\frac{1}{3}.$$

$$23.50. \quad f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3}, \quad f_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\sqrt{3}.$$

$$23.51. \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) \text{ ва } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) - \text{ максимум нукталари, уларда функция}$$

$$\frac{3}{2} \text{ қиймат қабул қилиди; } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right) \text{ ва } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right) - \text{ минимум}$$

$$\text{нукталари, уларда функция } \frac{1}{2} \text{ қиймат қабул қилади.}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$23.52. u_{e. kich.} = u(1; 1) = u(0; -1) = -1, \quad u_{e. kat.} = u(2; -1) = 13. \quad 23.53. u_{e. kat.} = u(1; 0) = 6.$$

$$23.54. u_{e. kich.} = u(1; -2\sqrt{2}) = u(1; 2\sqrt{2}) = -11, \quad u_{e. kat.} = u(-3; 0) = 21.$$

$$23.55. u_{e. kich.} = u(4; 4) = -64, \quad u_{e. kat.} = u\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27}.$$

$$23.56. u_{e. kich.} = u(3; 3) = 0, \quad u_{e. kat.} = u(4; 0) = u(0; 4) = 91. \quad 23.57. u_{e. kat.} = u(\pi/3; \pi/3) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

$$23.58. u_{e. kich.} = -6, \quad u_{e. kat.} = 14.$$

$$23.59. u_{e. kich.} = -7, \quad u_{e. kat.} = 9 + 4\sqrt{2}.$$

$$23.60. u_{e. kich.} = -6, \quad u_{e. kat.} = 12.$$

$$23.61. u_{e. kich.} = -81, \quad u_{e. kat.} = 81.$$

$$23.62. u_{e. kich.} = 0, \quad u_{e. kat.} = 25.$$

$$23.63. u_{e. kich.} = -\frac{1}{8}, \quad u_{e. kat.} = 1.$$

$$23.64. f_{\max} = f(0, 4) = 28; \quad f_{\min} = f\left(\frac{3}{2}, 0\right) = -\frac{9}{4}.$$

$$23.65. f_{\max} = f(2, -2), \quad f_{\min} = f\left(-2; \frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}.$$

$$23.66. f_{\max} = f(-2, 0) = 8, \quad f_{\min} = f(1, 0) = -1.$$

$$23.67. f_{\max} = f(1, 0) = 4, \quad f_{\min} = f(0, -1) = -4.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24-§. Ошкормас функциялар

24.1. Ошкормас функция ҳақида тушунча.

Фараз қилайлик, x ва y ўзгарувчиларнинг қийматлари, ўзаро, ушбу

$$F(x, y) = 0 \quad (24.1)$$

тенглама орқали боғланган бўлсин. Бунда $F(x, y)$, икки ўзгарувчининг функцияси сифатида, $\{M\} = \{(x, y) \in R^2 : a < x < b, c < y < d\}$ тўпламда берилган бўлсин. Бирор x_0 сонни ($x_0 \in (a, b)$) олиб, уни (24.1) тенгламадаги x нинг ўрнига қўйсак, натижада, y ни топиш учун, қуйидаги

$$F(x_0, y) = 0 \quad (24.2)$$

тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани ечишда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1⁰. (24.2) тенглама ягона y_0 ечимга эга ,

2⁰. (24.2) тенглама битта ҳам ечимга эга эмас ,

3⁰. (24.2) тенглама бир нечта, ҳатто, чексиз кўп, ечимга эга бўлиши

мумкин.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Масалан: 1) $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ тенглама $[-a, a]$ кесмада y ни, x нинг

икки қийматли функцияси сифатида аниқлайди: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. Буни

$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ тенгламадаги y нинг ўрнига қўйсак, натижада айният ҳосил бўлади.

2) $F(x, y) = y\sqrt{x^2 - 3} - 2 = 0$ тенглама, x нинг $R \setminus \{x \in R : -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}\}$ дан олинган ҳар бир қийматида, ягона $y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3}}$ ечимга эга, бундан $F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3}}\right) \equiv 0$.

Юқоридаги келтирилган 1) ва 2) мисолларда, y ни x орқали ифодалаш мумкин бўлди. Лекин, ҳар доим ҳам бундай осон бўлавермайди. Масалан, ушбу

$$F(x, y) = y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (24.3)$$

тенгламани қарайлик. Бунда y ни, x орқали элементар функциялар ёрдамида аниқлаб бўлмайди. Лекин, $F(x, y) = y - x - \varepsilon \sin y = 0$ ($0 < \varepsilon < 1$) тенглама, умумий ҳолда, y ни, x нинг бир қийматли функцияси сифатида аниқлайди. Ҳақиқатан ҳам, тенгламани $x = y - \varepsilon \sin y = \varphi(y)$ ($y \in (-\infty; +\infty)$) кўринишда ёзиб олиб, $\varphi(y)$ функциянинг $(-\infty; \infty)$ оралиқда узлуксизлигига, ҳамда $\varphi'(y) = 1 - \varepsilon \cos y > 0$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

хосилага эга эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. Унда, тескари функциянинг мавжудлиги тўғрисидаги теоремага асосан, ягона $y = \varphi^{-1}(x)$ функция мавжуд.

(24.3) тенглама - Кеплер тенгламасини ифодалайди.

Демак, (24.3) тенглама, ягона $y = \varphi^{-1}(x)$ ечимга эга, бунда $F(x, \varphi^{-1}(x)) \equiv 0$.

3) $F(x, y) = x^2 + y^2 - \ln y = 0$ ($y > 0$) тенглама, x нинг $(-\infty; \infty)$ ораликдан олинган ҳеч қандай қийматида ечимга эга эмас. Чунки, доимо $y^2 - \ln y > 0$ муносабат ўринли. Бу ҳолда берилган тенглама битта ҳам ечимга эга эмас.

$F(x, y) = 0$ тенглама учун, 1-ҳолнинг ўринли бўлиши муҳим аҳамиятга эга.

Унинг ёрдамида функция аниқланиши мумкин.

x ўзгарувчининг қийматларидан иборат, x нинг ундан олинган ҳар бир қийматида $F(x, y) = 0$ тенглама ягона ечимга эга бўлган, X тўпламни қараймиз. X тўпламдан ихтиёрий x сонни олиб, унга, $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ягона ечими бўлган, y ни мос мос қўямиз. Натижада, X тўпламдан олинган ҳар бир x га, юқорида кўрсатилган қоидага кўра, битта y мос қўйилиб, функция ҳосил бўлади. Бунда x ва y ўзгарувчилар орасидаги боғланиш, $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида ифодаланган бўлади. Одатда, бундай

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

аниқланган функция, *ошкормас функция* дейилади ва $y: x \rightarrow y: F(x, y) = 0$ каби белгиланади. Масалан, 2), 3) мисоллардаги ошкормас функциялар,

$$x \rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3}}, F\left(x, \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3}}\right) = 0, x \rightarrow y = \varphi^{-1}(x): F(x, \varphi^{-1}(x)) = 0$$

каби ёзилади.

24.1-эслатма. Агар $F(x, y) = 0$ тенглама ошкормас кўринишдаги функцияни аниқламаса, баъзи ҳолларда, y га маълум шарт қўйиш натижасида берилган тенглама, ошкормас функцияни аниқлаши мумкин. Масалан, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ тенглама x нинг $(-1; 1)$ ораликдан олинган ҳар бир қийматида, иккита, $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ ечимларга эга. Агар y га, унинг қийматлари $[-1, 0]$ кесмада бўлсин, деган шарт қўйилса, y ҳолда, берилган тенглама ёрдамида аниқланган,

$$x \rightarrow y = -\sqrt{1 - x^2}, F(x, -\sqrt{1 - x^2}) = 0$$

кўринишдаги ошкормас функция ҳосил бўлади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24.2. Ошкормас функциянинг мавжудлиги.

24.1 – теорема. $F(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор $U_{h,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\}$ ($h > 0, k > 0$) атрофида берилган бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

- 1) $U_{h,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;
- 2) x ўзгарувчининг $(x_0 - h, x_0 + h)$ ораликдан олинган ҳар бир тайин қийматида, y ўзгарувчининг функцияси сифатида, ўсувчи;
- 3) $F(x_0, y_0) = 0$ бўлсин.

У ҳолда $M_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг шундай

$$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\} (0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k)$$

атрофи топиладики:

а) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун $F(x, y) = 0$ тенглама, ягона y ечимга ($y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$) эга, яъни $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида $x \rightarrow y : F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функция аниқланади;

б) $x = x_0$ бўлганда, $y = y_0$ унга мос келди;

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

с) $x \rightarrow y: F(x, y) = 0$ ошкормас функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ораликда узлуксиз бўлади.

24.3. Ошкормас функциянинг ҳосиласи.

24.2 – теорема. $F(x, y)$ функция $M_0(x_0, y_0) \in R^2$ нуқтанинг бирор $U_{n,k}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - h < x < x_0 + h, y_0 - k < y < y_0 + k\} (h > 0, k > 0)$ атрофида берилган бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

- 1) $U_{n,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз;
- 2) $U_{n,k}((x_0, y_0))$ да узлуксиз $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$;
- 3) $F(x_0, y_0) = 0$.

У ҳолда, $M_0(x_0, y_0)$ нуқтанинг шундай

$$U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0)) = \{(x, y) \in R^2 : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\} (0 < \delta < h, 0 < \varepsilon < k)$$

атрофи топиладики:

а) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ учун $F(x, y) = 0$ тенглама ягона, y ечимга $(y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$ эга, яъни, $F(x, y) = 0$ тенглама ёрдамида, $x \rightarrow y: F(x, y) = 0$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ошкормас функция аниқланади;

b) $x = x^0$ бўлганда, $y = y_0$ унга мос келди;

c) $x \rightarrow y: F(x, y) = 0$ ошкормас кўринишда аниқланган функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

оралиқда узлуксиз бўлади;

d) ошкормас кўринишдаги функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ оралиқда узлуксиз ҳосилага эга бўлади ва унинг ҳосиласи

$$y'_{x_0} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x_0, y_0)} \quad (24.4)$$

формула бўйича ҳисобланади.

$F(x, y)$ функция, $U_{\delta, \varepsilon}((x_0, y_0))$ атрофда узлуксиз иккинчи тартибли

$F''_{x^2}(x, y)$, $F''_{xy}(x, y)$, $F''_{y^2}(x, y)$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. y нинг x га

боғлиқлигини эътиборга олиб, (24.4) тенгликни x бўйича дифференциаллаб,

қуйидагини топамиз:

$$y'' = \frac{2F'_x F'_y F''_{xy} - F'^2_{y^2} F''_{x^2} - F'^2_{x^2} F''_{y^2}}{(F'_y)^3}.$$

Худди шундай, ошкормас кўринишдаги функциянинг учинчи ва ҳоказо тартибдаги ҳосилалари топилади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24.4. Кўп ўзгарувчили ошкормас функциялар.

$F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$) функция

$$\{M\} = \{(x, y) \in R^{m+1} : a_1 < x_1 < b_1, a_1 < x_2 < b_2, \dots, a_m < x_m < b_m, c < y < d\}$$

тўпламда аниқланган бўлсин. Ушбу

$$F(x, y) \equiv F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0 \quad (24.5)$$

тенгламани қараймиз. $x \in R^m$ нуқталардан иборат, ундан олинган ҳар бир

x нуқтада (24.5) тенглама ягона ҳақиқий ечимга эга бўлган, X ($X \subset R^m$)

тўпламни қараймиз. X тўпламдан ихтиёрий x нуқтани олиб, унга (24.5)

тенгламининг ягона ҳақиқий ечими y ни мос қўямиз. Натижада, X тўпламдан

олинган ҳар бир x нуқтага, юқорида кўрсатилган қоидага кўра, битта y мос

қўйилиб, функция ҳосил қилинади. Бундай аниқланган функцияга, кўп

ўзгарувчили (m ўзгарувчили) *ошкормас кўринишда аниқланган функция* деб

аталади ва у,

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y : F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$

каби белгиланади.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24.3-теорема. $F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция $(x^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуктанинг

бирор

$$U_{h_1, h_2, \dots, h_m, k}(x^0, y_0) = \{(x, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, \\ x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m, y_0 - k < y < y_0 + k\} \quad (h_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, k > 0)$$

атрофида аниқланган ва у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $U_{h_1, h_2, \dots, h_m, k}((x^0, y_0))$ да узлуксиз;

2) $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчининг

$$\{x \in R^m : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m\}$$

тўпламдан олинган ҳар бир тайин қийматларида, y ўзгарувчининг функцияси сифатида, ўсувчи (камаювчи);

3) $F(x^0, y_0) = 0$. У ҳолда, $(x^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуктанинг шундай

$$U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \varepsilon}(x^0, y_0) = \{(x, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, \\ x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\} \quad (0 < \delta_i < h_i, i = 1, 2, \dots, m, 0 < \varepsilon < k)$$

атрофи топиладики: а) $\forall x \in \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1,$

$x_2 - \delta < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ учун, $F(x, y) = 0$ тенглама,

$y (y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$ ягона ҳақиқий ечимга эга, яъни (24.5) тенглама,

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y : F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги функцияни аниқлайди;

b) $x = x^0$ бўлганда, $y = y_0$ унга мос келди;

c) ошкормас кўринишда аниқланган $(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y : F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$ функция,

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2 - \delta < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўпламда узлуксиз бўлади.

24.4-теорема. $F(x, y) = F(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ функция $(x^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуқтанинг

бирор

$$U_{h_1, h_2, \dots, h_m, k}(x^0, y_0) = \{(x, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots,$$

$$x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m, y_0 - k < y < y_0 + k\} (h_i > 0, i = 1, 2, \dots, m, k > 0)$$

атрофида аниқланган бўлиб, у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $U_{h_1, h_2, \dots, h_m, k}(x^0, y_0)$ да узлуксиз;

2) $U_{h_1, h_2, \dots, h_m, k}(x^0, y_0)$ да $F_{x_i}(x_1, x_2, \dots, x_m, y) (i = 1, 2, \dots, m), F_y(x_1, x_2, \dots, x_m, y)$ узлуксиз

хусусий ҳосилаларга эга ва $F'_y(x; y) \neq 0$;

3) $F(x^0, y_0) = 0$.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

У ҳолда, $(x^0, y_0) \in R^{m+1}$ нуктанинг шундай

$$U_{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m, \varepsilon}(x^0, y_0) = \{(x, y) \in R^{m+1} : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, \\ x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m, y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon\} \quad (0 < \delta_i < h_i, i = 1, 2, \dots, m, 0 < \varepsilon < k)$$

атрофи топиладики:

а)

$$\forall x \in \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

учун, $F(x, y) = 0$ тенглама, $y (y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon))$ ягона ҳақиқий ечимга эга, яъни

(24.5) тенглама, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y : F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$ ошкормас кўринишдаги

функцияни аниқлайди;

б) $x = x^0$ бўлганда, $y = y_0$ унга мос келди;

с) ошкормас кўринишда аниқланган $(x_1, x_2, \dots, x_m) \rightarrow y : F(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$

функция,

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, x_2^0 - \delta_2 < x_2 < x_2^0 + \delta_2, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$$

тўпдамда узлуксиз бўлади.

д) ошкормас кўринишдаги функция узлуксиз хусусий хосилаларга эга бўлади.

24.1 – мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$y^4 - 4x^2y^2 + \sin x = 0$$

тенгламадан y ни, ошкор шаклда, x орқали ифодаланг.

Ечилиши. $y^2 = z$ алмаштириш олиб, $z^2 - 4x^2z + \sin x = 0$ квадрат

тенгламага эга бўламиз. Бундан, $y^2 = z_{1,2} = 2x^2 \pm \sqrt{4x^4 - \sin x}$, $y^2 > 0$ бўлгани

учун, квадрат илдиз олдидаги “+” ишорани оламиз:

$$y = \pm \sqrt{2x^2 + \sqrt{4x^4 - \sin x}}.$$

24.2 – мисол. Ушбу

$$y^2 - 2x^3y + x^6 - x^4 + x^2 = 0 \quad (24.6)$$

тенглама, y ни $M_0(0,0)$ нукта атрофида x нинг бир қийматли узлуксиз

функцияси сифатида аниқлайдими?

Ечилиши. $F(x, y) = y^2 - 2x^3y + x^6 - x^4 + x^2$, $F_y^1 = 2y - 2x^3$. Бу ҳосила $M_0(0,0)$ нуктада $F_y'(0;0) = 0$ бўлади. Демак, ошкормас функциянинг мавжудлиги ва узлуксизлиги ҳақидаги 24.1 – теореманинг шартлари бажарилмайди. Шунинг учун, берилган тенглама, $M_0(0;0)$ нуктанинг атрофида ошкормас функцияни аниқламайди. Ҳақиқатан ҳам, (24.6) тенгламани y га нисбатан ечиб, $y = x^3 \pm x\sqrt{x^2 - 1}$ ни ҳосил қиламиз. Бу функциялар $x = 0$ ва $|x| > 1$ да аниқланган

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўлиб, $M_0(0;0)$ нуктанинг атрофида, (24.6) тенгламани қаноатлантирувчи $M_0(0;0)$ нуктадан бошқа бирорта ҳам нукта мавжуд эмас. $M_0(0;0)$ нукта- эгри чизиқнинг яккаланган нуктаси бўлар экан.

24.3 – мисол. Ушбу

$$ye^x - x \ln y - 1 = 0$$

тенглама, $x = 0$ нукта атрофида, узлуксиз $y = f(x)$ функцияни аниқлайдими? Агар аниқласа, бу функция ҳосилага эгами? Агар ҳосилага эга бўлса, унинг ҳосиласини ҳисобланг.

Ечилиши. $ye^x - x \ln y - 1 = 0$ тенгламага $x = 0$ қийматни қўйиб, $y = 1$ бўлишини топамиз. Энди $M_0(0;1)$ нукта атрофида $F(x, y) = ye^x - x \ln y - 1$ функциянинг 24.2 – теореманинг шартларини қаноатлантиришини текшириб кўрамиз:

1) $F(x, y) = ye^x - x \ln y - 1$ функция, $y > 0$ ярим текисликда аниқланган, узлуксиз. Унинг хусусий ҳосилалари мавжуд ва узлуксиз:

$$F'_x = ye^x - \ln y, F'_y = e^x - \frac{x}{y};$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$2) F'_y(0;1) = e^0 - \frac{0}{1} = 1 \neq 0.$$

Шундай қилиб, 24.2 – теореманинг шартлари бажарилади, шунинг $ye^x - x \ln y - 1 = 0$ тенглама $M(0;1)$ нуқтанинг атрофида $x \rightarrow y(x): ye^x - x \ln y - 1 = 0$ кўринишдаги ошкормас узлуксиз функцияни аниқлайди. Бу ошкормас функция, қуйидаги узлуксиз ҳосилага эга:

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{ye^x - \ln y}{e^x - \frac{x}{y}} = -\frac{y(ye^x - \ln y)}{ye^x - x}.$$

24.4 – мисол. Ушбу $xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0$ ошкормас кўринишда берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

Ечилиши. $xe^{2y} - y \ln x - 8 = 0$ тенгликни x бўйича (y ни x нинг функцияси, деб қараб) икки марта дифференциаллаймиз:

$$a) e^{2y} + xe^{2y} \cdot 2y' - y' \cdot \ln x - \frac{y}{x} = 0;$$

$$b) e^{2y} \cdot y' + e^{2y} \cdot 2y' + 2x(e^{2y} \cdot (y')^2 + e^{2y} \cdot y'') - y'' \cdot \ln x - \frac{y'}{x} - \frac{xy' - y}{x^2} = 0.$$

а) дан

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$y' = \frac{\frac{y}{x} - e^{2y}}{2xe^{2y} - \ln x} = \frac{e^{2y} - \frac{y}{x}}{\ln x - 2xe^{2y}}, \quad (24.7)$$

b) дан

$$y'' = \frac{2xy'(1 - xe^{2y} - x^2e^{2y} \cdot y')}{2xe^{2y} - \ln x}. \quad (24.8)$$

Агар (24.8) да y' нинг ўрнига (24.7) даги ифодани келтириб қўйсак, натижада y'' нинг x ва y орқали ифодаси топилади.

24.5 – мисол. Ушбу $z^3 - 3xyz = 8$ тенгламанинг $M_0(0; -1; 2)$ нуқта атрофида, ягона, $z = f(x, y)$ ошкормас функцияни аниқлашни исбот қилинг. Унинг $z'_x(0; -1)$ ва $z'_y(0; -1)$ хусусий ҳосилаларни топинг.

Ечилиши. $F(x, y, z) = z^3 - 3xyz - 8$ функция $M_0(0; -1; 2)$ нуқта атрофида дифференциалланувчи. Унинг $F'_z = 3z^2 - 3xy = 3(z^2 - xy)$ ҳосиласи $M_0(0; -1; 2)$ нуқтада узлуксиз, ҳамда $F(0; -1; 2) = 0$, $F'_z(0; -1; 2) = 12 \neq 0$. Демак,

24.4 – теореманинг ҳамма шартлари бажарилади. Шунинг учун, берилган тенглама, $M_0(0; -1; 2)$ нуқтада ягона, дифференциалланувчи, $z = f(x, y)$ кўринишдаги ошкормас функцияни аниқлайди.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 670 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$z = f(x, y)$ функциянинг $(0; -1)$ нуктадаги қийматини ҳисоблаймиз:

$$z^3 - 3 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot z - 8 = 0, \quad z^3 = 8, \quad z = 2.$$

Энди $z^3 - 3xyz = 8$ тенгламани, мос равишда, x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$3z^2 \cdot z'_x - 3yz - 3xyz'_x = 0, \quad (24.9)$$

$$3z^2 \cdot z'_y - 3xz - 3xz - 3xy \cdot z'_y = 0 \quad (24.10)$$

(24.9) га $x = 0, y = -1, z = 2$ қийматларни келтириб қўйиб,

$$3 \cdot 4 \cdot z'_x - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot z'_x = 0, \quad z'_x = -0,5$$

бўлишини топамиз.

(24.10) га $x = 0, y = -1, z = 2$ қийматларни келтириб қўйиб,

$$3 \cdot 4 \cdot z'_y - 3 \cdot (-1) \cdot 2 - 3 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot z'_y = 0, \quad z'_y = 0$$

эканлигини топамиз.

24.6 – мисол. Ушбу $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$ тенглама билан аниқланган $z(x, y)$ ошкормас функциянинг хусусий ҳосилаларини ва тўлиқ дифференциалини топим.

Ечилиши. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z - 1 = 0$ тенгламани, мос равишда, x ва y

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 671 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

бўйича (z ни x ва y нинг функцияси, деб қараб) дифференциаллаймиз:

$$-2 \cos x \sin x - 2 \cos z \cdot \sin z \cdot z'_x = 0$$

$$-2 \cos y \cdot \sin y - 2 \cos z \cdot \sin z \cdot z'_y = 0.$$

Бу тенгламалардан, $z'_x = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z}$, $z'_y = -\frac{\sin 2y}{\sin 2z}$ хусусий ҳосилаларни топамиз.

Икки ўзгарувчили функциянинг тўлиқ дифференциалини топиш формуласига асосан,

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = -\frac{\sin 2x dx + \sin 2y dy}{\sin 2z}.$$

24.7 – мисол. Ушбу $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ тенглама билан аниқланган $z(x, y)$

функциянинг хусусий ҳосилалари, биринчи ва иккинчи тартибли тўлиқ дифференциалларини топинг.

Ечилиши. $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ тенгламани, мос равишда, x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$2x + 2z \cdot z'_x - 2z'_x = 0, \quad (24.11)$$

$$2y + 2z \cdot z'_y - 2z'_y = 0. \quad (24.12)$$

Бундан, $z'_x = -\frac{x}{z-1}$, $z'_y = -\frac{y}{z-1}$, $dz = \frac{xdx + ydy}{1-z}.$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 672 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

(24.11), (24.12) ларни, мос равишда, x ва y бўйича дифференциаллаймиз:

$$1 + (z'_x)^2 + z \cdot z''_{x^2} - z''_{x^2} = 0,$$

$$1 + (z'_y)^2 + z \cdot z''_{y^2} - z''_{y^2} = 0.$$

Бу тенгламалардан,

$$z''_{x^2} = \frac{1 + (z'_x)^2}{1 - z} = \frac{1 + \frac{x^2}{(1-z)^2}}{(1-z)} = \frac{(1-z)^2 + x^2}{(1-z)^3},$$

$$z''_{y^2} = \frac{(1-z)^2 + y^2}{(1-z)^3}.$$

(24.11) ни y бўйича, (24.12) ни x бўйича дифференциаллаб,

$$z''_{xy} = \frac{xy}{(1-z)^3}, \quad z''_{yx} = \frac{xy}{(1-z)^3} \quad \text{аралаш ҳосилаларни топамиз. Икки ўзгарувчили}$$

функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топиш қондасига асосан,

$$\begin{aligned} d^2 z &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = \\ &= \frac{(1-z)^2 + x^2}{(1-z)^3} dx^2 + \frac{2xy}{(1-z)^3} dx dy + \frac{(1-z)^2 + y^2}{(1-z)^3} dy^2. \end{aligned}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 673 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24.5. Тенгламалар системаси билан аниқланадиган ошқормас функциялар.

Ушбу $F_i(u_1, u_2, \dots, u_n, x_1, x_2, \dots, x_m)$ ($i = 1, \overline{m}$) функциялар бирор

$D = \{(u_1, u_2, \dots, u_n, x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^{m+n}; a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_m < x_m < b_m, c_1 < u_1 < d_1, \dots, c_n < u_n < d_n\}$
 тўпلامда берилган бўлсин.

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= F_1(u_1, u_2, ..., u_n, x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \\ F_2 &= F_2(u_1, u_2, ..., u_n, x_1, x_2, ..., x_m) = 0, \\ \\ F_n &= F_n(u_1, u_2, ..., u_n, x_1, x_2, ..., x_m) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24.13)$$

тенламалар системасини қараймиз. $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ ўзгарувчининг

қийматларидан иборат, ундан олинган ҳар бир $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ нуктада

(24.13) система ягона $u_1, u_2, \dots, u_n$ ечимлар системасига эга бўлган,

$D_x = \{x \in R^m : a_1 < x_1 < b_1, \dots, a_m < x_m < b_m\} \subset R^m$ тўплами қараймиз. D_x тўпландан

олинган ихтиёрий $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ нуқтани олиб, унга (24.13) системанинг

ягона, $u_1, u_2, \dots, u_n$ ечимлар системасини мос кўямиз. Натижада, D_x тўпладан

олинган ҳар бир x нуқтага, юқорида кўрсатилган қоидага кўра, $u_1, u_2, \dots, u_n$ лар

мос қўйилиб, n та функция ҳосил бўлади. Бундай аниқланган функциялар,

Титул в а р а к

Мундарижа

1 - 6 0 6

2 - 6 0 6

3 - 6 0 6

4 - 6 o 6

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 674 / 708

Тулик экран

Чикиш

(24.13) тенгламалар системаси ёрдамида аниқланган *ошкормас функциялар система* деб аталади.

24.5–теорема. $F_i (i = 1, \bar{n})$ функцияларнинг ҳар бири,

$(u^0, x^0) = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ нуқтанинг бирор

$$U_{k,h}(u^0, x^0) = U_{k_1, k_2, \dots, k_n, h_1, h_2, \dots, h_m, k}(x^0, y_0) = \\ = \{(u, x) \in R^{m+n} : u_1^0 - k_1 < u_1 < u_1^0 + k_1, u_2^0 - k_2 < u_2 < u_2^0 + k_2, \dots, u_m^0 - k_m < u_m < u_m^0 + k_m, \\ x_1^0 - h_1 < x_1 < x_1^0 + h_1, x_2^0 - h_2 < x_2 < x_2^0 + h_2, \dots, x_m^0 - h_m < x_m < x_m^0 + h_m\}$$

$$(h_i) > 0, i = 1, 2, \dots, m, k_j > 0, j = 1, 2, \dots, n$$

атрофида аниқланган бўлиб, улар қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) $U_{kh}((u^0, x^0))$ да узлуксиз;

2) $U_{kh}((u^0, x^0))$ да барча хусусий ҳосилаларга эга ва улар узлуксиз;

3) хусусий ҳосилаларнинг (u^0, x^0) нуқтадаги қийматларидан тузилган детерминат нолдан фарқли:

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 675 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial u_1} & \frac{\partial F_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0;$$

4) (u^0, x^0) нуқтада $F_i(u^0, x^0) = 0$ ($i = \overline{1, n}$).

У ҳолда, (u^0, x^0) нуқтанинг шундай $U_{\delta, \varepsilon}((u^0, x^0)) = U_{\delta_1 \delta_2 \dots \delta_m \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n}((u^0, x^0))$

$(0 < \delta_i < n_i < h_i, i = \overline{1, m}, 0 < \varepsilon_j < k_j, j = \overline{1, n})$ атрофи топиладики, бу атрофда:

a) (24.5) система, ошкормас функциялар системасини аниқлайди,

уларни $u_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_m), i = \overline{1, n}$ орқали белгилаймиз;

b) $x = x^0$ нуқтада $f_i(x^0) = y_i^0, i = \overline{1, n}$, бўлади;

c) ошкормас кўринишда аниқланган $f_i(i = \overline{1, n})$ функциялар

$\{x \in R^m : x_1^0 - \delta_1 < x_1 < x_1^0 + \delta_1, \dots, x_m^0 - \delta_m < x_m < x_m^0 + \delta_m\}$ тўпلامда узлуксиз ва

узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлади.

24.8 – мисол. Ушбу

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 676 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$\begin{cases} x + y = u + v \\ xy + yv = 1 \end{cases}$$

система, $(1; 1; 2, 0)$ нуктанинг атрофида, ошкормас функцияларни аниқлайдими?

Ечилиши. Равшанки, $F_1(x, y, u, v) = x + y - u - v$, $F_2(x, y, u, v) = xy + yv - 1$

функциялар $(1; 1; 2, 0)$ нуктанинг атрофида узлуксиз ҳамда барча

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1, \frac{\partial F_1}{\partial u} = -1, \frac{\partial F_1}{\partial v} = -1,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = y, \frac{\partial F_2}{\partial y} = v, \frac{\partial F_2}{\partial u} = 0, \frac{\partial F_2}{\partial v} = y$$

хусусий ҳосилаларга эга ва улар ҳам узлуксиз. $(1; 1; 2, 0)$ нуктада

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0, \quad F_1(1, 1; 2, 0) = 0, \quad F_2(1, 1; 2, 0) = 0.$$

Демак, 24.5 – теоремага кўра, берилган система, u ва v ларни, x ва y ўзгарувчиларнинг функцияси сифатида аниқлайди:

$$u = 2x + y - \frac{1}{y}, \quad v = \frac{1}{y} - x.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 677 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24.8 – мисол. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ошкормас функциялар, ушбу

$$\begin{cases} xu + yv = 4, \\ yu - v = 0 \end{cases}$$

система орқали аниқланган. Агар $x=1, y=-1$ да $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ функциялар $u(1; -1)=2, v(1; -1)=-2$ қийматларни қабул қилса, у ҳолда уларнинг барча хусусий ҳосилалари, биринчи ва иккинчи тартибли тўлиқ дифференциалларини топинг.

Ечилиши. Берилган системани икки марта дифференциаллаймиз:

$$\begin{cases} udx + xdu + vdy + ydv = 0, \\ udy + ydu - dv = 0. \end{cases} \quad (24.14)$$

$$\begin{cases} dudx + dxdu + xd^2u + dvdy + dydv + yd^2v = 0, \\ dudy + dydv + yd^2u - d^2v = 0. \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2dxdu + xd^2u + 2dydv + yd^2v = 0, \\ 2dyd^2u + yd^2u - d^2v = 0. \end{cases} \quad (24.15)$$

(24.14) системага $x=1, y=-1, u=2, v=-2$ қийматларни келтириб қўйиб,

$$\begin{cases} 2dx + du - 2dy - dv = 0, \\ 2dy - du - dv = 0. \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} dv = dx \\ du = 2dy - dx \end{cases}$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 678 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

эканлигини топамиз. Бундан, $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2$. Худди шундай,

$x = 1$, $y = -1$, $u = 2$, $v = -2$ қийматларни, ҳамда dv ва du ларнинг, юқорида топилган, қийматларини (24.15) системага келтириб қўйиб,

$$\begin{cases} 2dx(2dy - dx) + d^2u + 2dxdy - d^2v = 0, \\ 2dy(2dy - dx) - d^2u - d^2v = 0. \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} 6dxdy - 2(dx)^2 + d^2u - d^2v = 0, \\ 4(dy)^2 - 2dxdy - d^2u - d^2v = 0 \end{cases}$$

бўлишини топамиз. Бундан,

$$d^2u - d^2v = 2(dx)^2 - 6dxdy,$$

$$d^2u = (dx)^2 + 4dxdy - 2(dy)^2,$$

$$d^2u + d^2v = 4(dy)^2 - 2dxdy,$$

$$d^2v = -(dx)^2 + 2dxdy + 2(dy)^2.$$

Демак, икки ўзгарувчи функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини

топиш формуласини эътиборга олсак,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2 \quad \text{ларни топамиз.}$$

Мустақил ечиш учун мисоллар

Қуйидаги тенгламаларни y га нисбатан ечиб, x нинг функцияси сифатида ифодаланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 679 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$24.1. y^2 - 5x^2y + 4x^4 = 0.$$

$$24.2. y^4 - 4x^2y^2 + \sin x = 0.$$

$$24.3. e^{x^4+y^5} - x^8 - 6 = 0.$$

$$24.4. x^2y^4 - 3y^3 + 6x^5y^2 - 3y + x^2 = 0.$$

24.2. Қуйидаги тенгламалар системасини, y ва z ларга нисбатан ечиб, x нинг функцияси сифатида ифодаланг.

$$24.5. \begin{cases} y + z = x^2, \\ y^2 - yz + z^2 = 6x. \end{cases}$$

$$24.6. \begin{cases} yz = x^4, \\ y + z + x(y^2 + z^2) = 3x - 1. \end{cases}$$

Қуйидаги тенгламалар, кўрсатилган нукта атрофида, ошкормас функцияни аниқлайдими?

$$24.7. F(x, y) \equiv y^4 + xy + y^3 - 3 = 0, \quad A(1; 1).$$

$$24.8. F(x, y) \equiv x^3 - 3axy + y^3 = 0, \quad A(a \sqrt[3]{4}; a \sqrt[3]{2}).$$

$$24.9. F(x, y) \equiv e^y + y \sin x - x^3 + 7 = 0, \quad A(2; 0).$$

$$24.10. F(x, y) \equiv x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2), \quad A(0; 0).$$

Қуйидаги ошкормас кўринишда берилган функцияларнинг берилган A нуктада f'_x, f'_y хусусий ҳосилаларини ҳисобланг.

$$24.11. u^3 - 2u^2x + uxy - 2 = 0, \quad A(1; 1). \quad 24.12. u^3 + 3uxy + 1 = 0, \quad A(0; 1).$$

$$24.13. e^u - xuy - 2 = 0, \quad A(1; 0).$$

$$24.14. u + \ln(x + y - u) = 0, \quad A(1; -1).$$

Қуйидаги ошкормас кўринишдаги функцияларнинг биринчи тартибли

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 680 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

ҳосиласининг берилган нуқтадаги қийматини топинг.

24.15. $x^3 - 2y^2 + xy = 0$, $(1; 1)$.

24.16. $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0$, $(1; 2)$.

Қуйидаги ошкормас кўринишда берилган функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини ҳисобланг.

24.17. $x^2 - y^2 - 4 = 0$.

24.24. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$.

24.19. $2\cos(x - 2y) - 2y + x = 0$.

24.20. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Қуйидаги ошкормас кўринишдаги функцияларнинг биринчи тартибли ҳосиласининг берилган нуқтадаги қийматини топинг.

24.21. $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0$, $(1; 1; 1)$.

24.22. $\sin(x + y) + \sin(y + z) + \sin(x + z) = 0$, $(\pi; \pi; \pi)$.

Қуйидаги ошкормас кўринишда берилган функцияларнинг биринчи тартибли хусусий ҳосилаларини ва тўлиқ дифференциалларини ҳисобланг.

24.23. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$.

24.24. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = a^2$.

24.25. $z^2 - xy = 0$.

24.26. $z^3 + 3x^2z - 2xy = 0$.

Қуйидаги ошкормас кўринишда берилган функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли тўлиқ дифференциалларини ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 681 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

24.27. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$. **24.28.** $z^3 - 3xyz = a^3$. **24.29.** 3) $x - z \ln \frac{x}{y} = 0$.

24.30. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ошкормас кўринишдаги функциялар, ушбу
$$\begin{cases} u + v = x, \\ u - yv = 0 \end{cases}$$

система орқали аниқланган. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ошкормас кўринишдаги функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли тўлиқ дифференциалларини ҳисобланг.

24.31. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ошкормас кўринишдаги функциялар, ушбу

$$\begin{cases} xu + yv = 1, \\ y + x + u + v = 0 \end{cases}$$
 система орқали аниқланган. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ошкормас

кўринишдаги функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли тўлиқ дифференциалларини ҳисобланг.

24.32. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ошкормас кўринишдаги функциялар, ушбу

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ y \sin u - x \sin v = 0 \end{cases}$$
 система орқали аниқланган. $u(x, y)$ ва $v(x, y)$ ошкормас

кўринишдаги функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли тўлиқ дифференциалларини ҳисобланг.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 682 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Мустақил ечиш учун мисолларнинг жавоблари

24.1. $y = 4x^2$, $y = x^2$. **24.2.** $y = \pm \sqrt{2x^2 \pm \sqrt{4x^2 - \sin x}}$. **24.3.** $y = \sqrt[5]{\ln(x^8 + 6)} - x^4$.

24.4. $y_{1,2} = \frac{3 + \sqrt{9 - 16x^4} \pm \sqrt{(3 + \sqrt{9 - 16x^4})^2 - 16}}{4}$, $y_{3,4} = \frac{3 - \sqrt{9 - 16x^4} \pm \sqrt{(3 - \sqrt{9 - 16x^4})^2 - 16}}{4}$.

24.5. $y = \frac{x^3 \pm \sqrt{8x - \frac{1}{3}x^6}}{2}$, $z = \frac{x^3 \mp \sqrt{8x - \frac{1}{3}x^6}}{2}$.

24.6. $y_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1 + \sqrt{1 + 5x^6}}{2x} \pm \right.$

$\left. \pm \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 5x^6}}{2x} \right)^2 - 4x^2} \right\}$, $y_{3,4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1 + \sqrt{1 + 5x^6}}{2x} \mp \sqrt{\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 5x^6}}{2x} \right)^2 - 4x^2} \right\}$

24.7. Аниқлайди.

24.8. Аниқламайди.

24.9. Аниқлайди.

24.10. Аниқламайди.

24.11. $f'_x(1; 1) = \frac{6}{5}$, $f'_y(1; 1) = -\frac{2}{5}$.

24.12. $f'_x(0; 1) = 1$, $f'_y(0; 1) = 0$. **24.13.** $f'_x(1; 0) = 1$, $f'_y(1; 0) = \frac{\ln 2}{2}$.

24.14. $f'_x(1; -1) = f'_y(1; -1) = -\frac{1}{1 + u_0}$, $u_0 - u + \ln u = 0$ тенгламанинг илдизи.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 683 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$24.15. \frac{4}{3}. \quad 24.16. -\frac{4}{5}.$$

$$24.17. y'_x = \frac{x}{y}, \quad y''_{x^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3}.$$

$$24.24. y'_x = -\frac{x}{y}, \quad y''_{x^2} = \frac{2y}{x^2}.$$

$$24.19. y'_x = \frac{1}{2}, \quad y''_{x^2} = 0.$$

$$24.20. y'_x = \frac{x^2 - y}{x - y^2}, \quad y''_{x^2} = \frac{(x^2 - y)(y^2 - x) + 2x(y^2 - x)^2 + 2y(x^2 - y)^2}{(x - y^2)^3}.$$

$$24.21. \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1; 1; 1)} = \frac{1}{4}, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1; 1; 1)} = -\frac{3}{4}. \quad 24.22. \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(\pi; \pi; \pi)} = -1, \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(\pi; \pi; \pi)} = -1.$$

$$24.23. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3-x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z}, \quad dz = \frac{1}{x}[(3-x)dx - ydy].$$

$$24.24. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x-z}, \quad dz = dx + \frac{y}{x-z} dy.$$

$$24.25. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2z}, \quad dz = \frac{ydx + xdy}{2z}.$$

$$24.26. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2y - 6xz}{3(x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x}{3(x^2 + y^2)}, \quad dz = \frac{(2y - 6xz)dx + 2xdy}{3(x^2 + y^2)}.$$

$$24.27. \quad dz = \frac{xdx + ydy}{1-z}, \quad d^2z = \frac{1-z+x^2}{(1-z)^2} dx^2 + \frac{2xy}{(1-z)^3} dxdy + \frac{1-z+y^2}{(1-z)^2} dy^2.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 684 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

$$24.28. \quad dz = \frac{yzdx + xzdy}{z^2 - xy}, \quad d^2z = \frac{-2xy^3z}{(z - xy)^3} dx^2 + 2 \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z - xy)^3} dx dy + \frac{2x^3yz}{(z - xy)^3} dy^2.$$

$$24.29. \quad dz = \frac{yzdx + z^2dy}{y(x + z)}, \quad d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)}{(z - xy)^3}.$$

$$24.30. \quad du = \frac{ydx + vdy}{1 + y}, \quad dv = \frac{dx - vdy}{1 + y}, \quad d^2u = \frac{2(dx dx - vdy^2)}{1 + y^2}, \quad d^2v = -d^2u.$$

$$24.31. \quad du = \frac{(y - u)dx + (y - v)dy}{x - y}, \quad dv = \frac{(x - u)dx + (x - v)dy}{y - x},$$

$$d^2v = -d^2u = \frac{2}{(x - y)^2} \{ (y - x)dx^2 + (y - v + u - x)dx dy + (u - x)dy^2 \}.$$

$$24.32. \quad du = \frac{(\sin v + x \cos v)dx - (\sin u - x \cos v)dy}{x \cos v + y \cos u},$$

$$dv = \frac{(-\sin v + y \cos u)dx + (\sin u + y \cos u)dy}{x \cos v + y \cos u},$$

$$d^2u = -d^2v = \frac{(2x \cos v + x dv \sin v)dv - (2dy \cos u - y du \sin u)du}{x \cos v + y \cos u}.$$

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



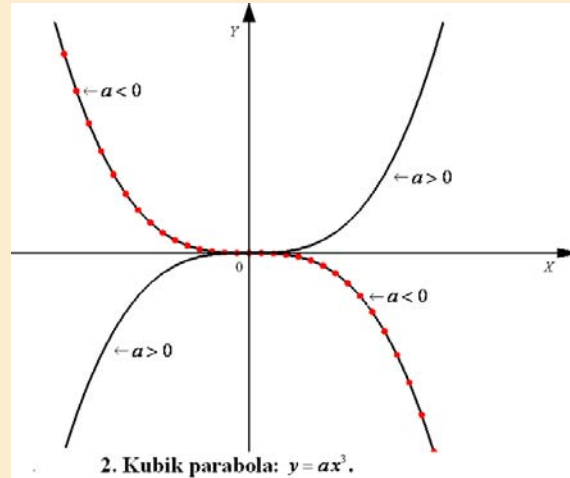
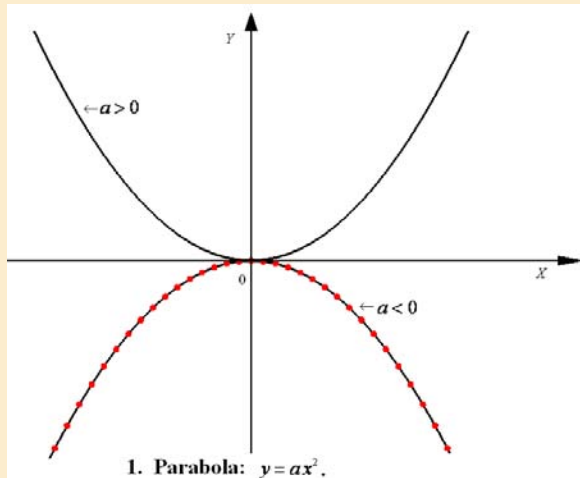
О р к а г а

С а х и ф а 685 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Баъзи чизиқларнинг тенгламалари ва графиклари



Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

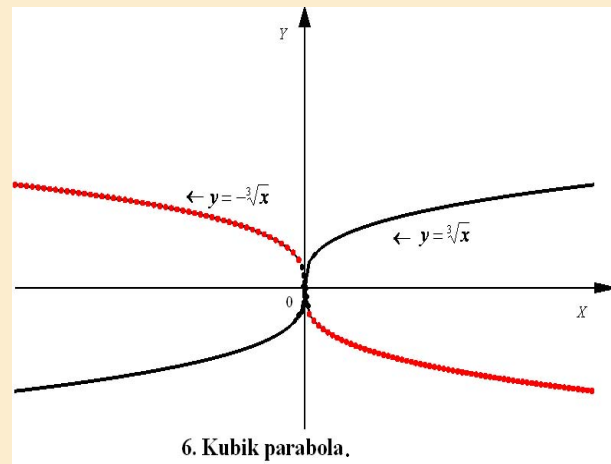
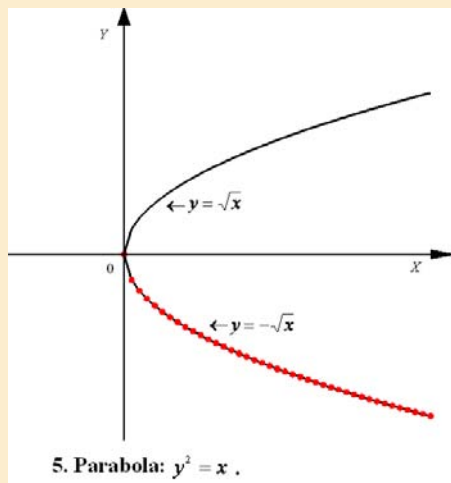
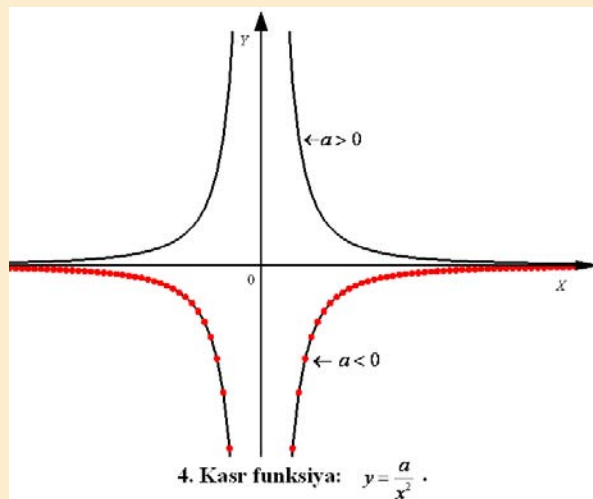
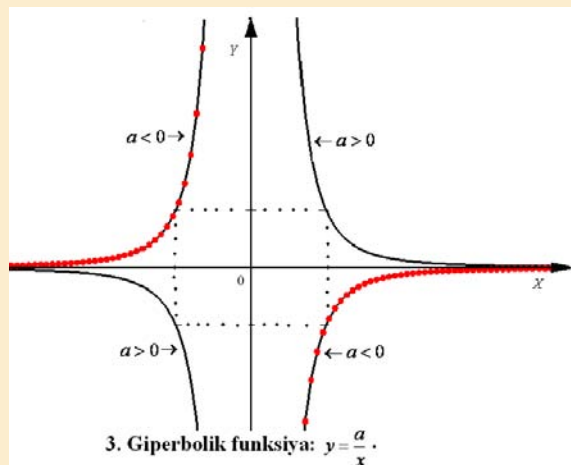


Оркага

Саҳифа 686 / 708

Тулик экран

Чикиш



Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

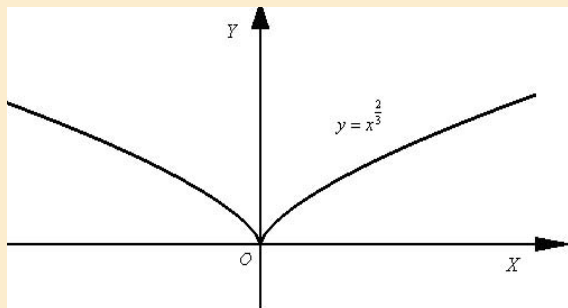


Оркага

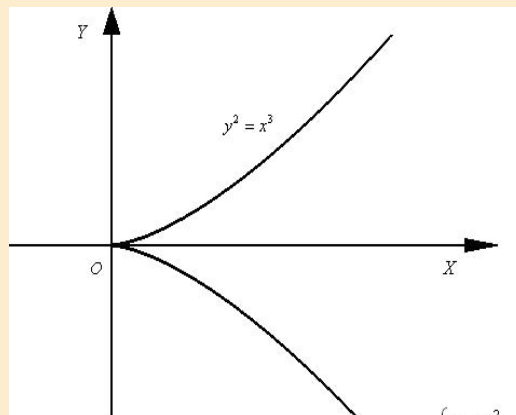
Сахифа 687 / 708

Тулик экран

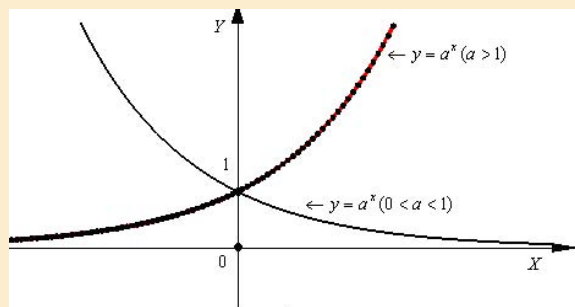
Чикиш



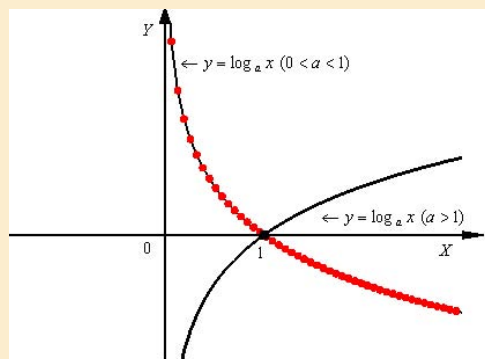
7. Neyl parabolasi: $y^3 = x^2$ yoki $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$



8. Yarimkubik parabola: $y^2 = x^3$, $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$



9. Ko'satgichli funksiya: $y = a^x$.



10. Logarifmik funksiya: $y = \log_a x$.

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

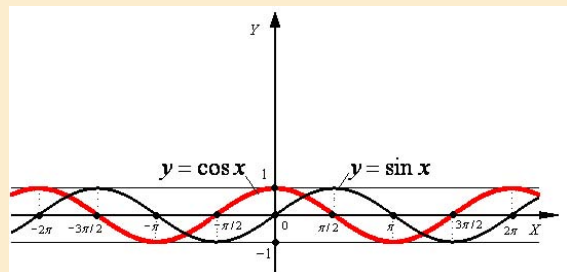


Оркага

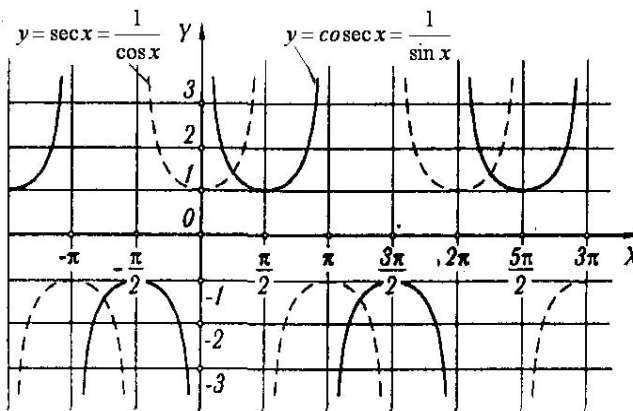
Саҳифа 688 / 708

Тулик экран

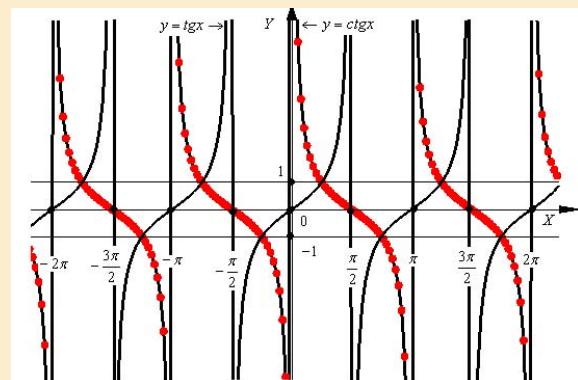
Чикиш



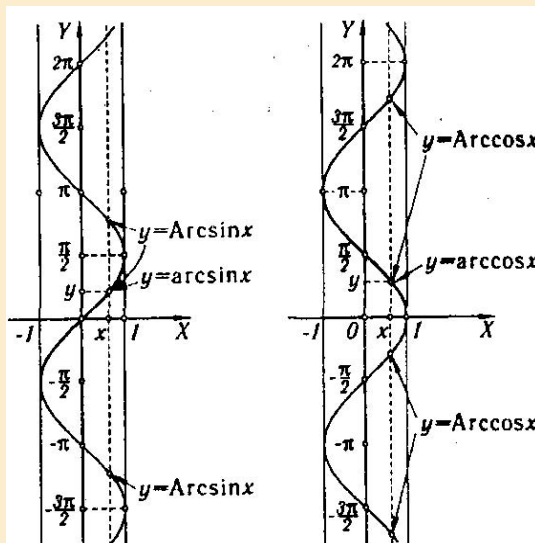
11. Sinus va kosinus funksiyalar.



12. Sekans va kosekans funksiyalar.



13. Tangens va kotangens funksiyalar.



Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

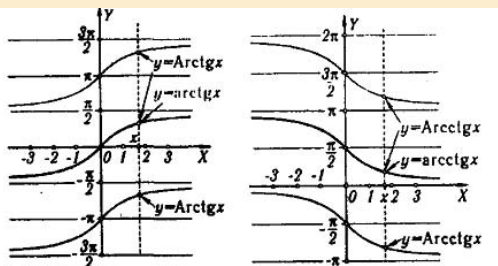


Оркага

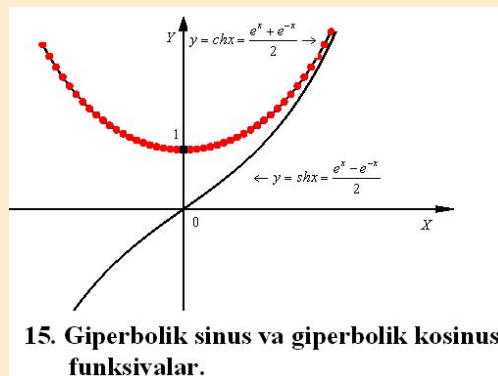
Саҳифа 689 / 708

Тулик экран

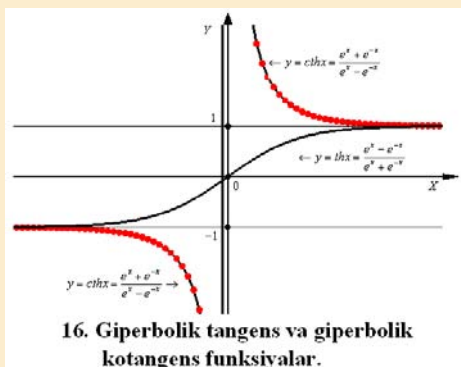
Чикиш



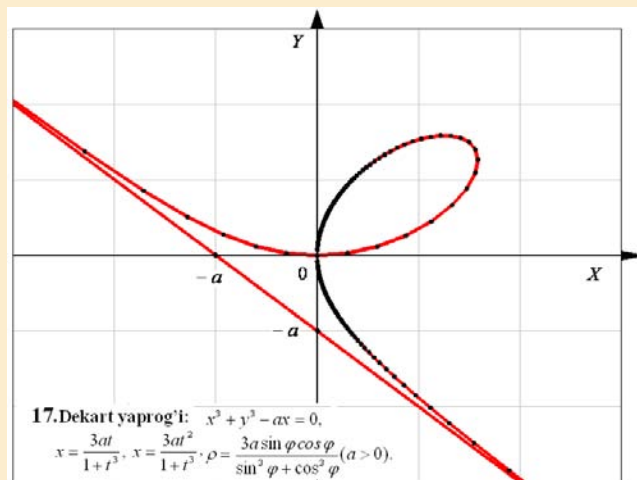
14. Teska trigonometrik funksiyalar.



15. Giperbolik sinus va giperbolik kosinus funksiyalar.



16. Giperbolik tangens va giperbolik kotangens funksiyalar.



17. Dekart yaprog'i: $x^3 + y^3 - ax = 0$,
 $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$, $\rho = \frac{3a \sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$ ($a > 0$).

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

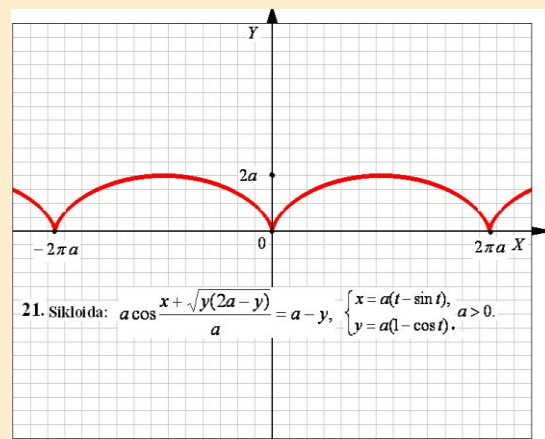
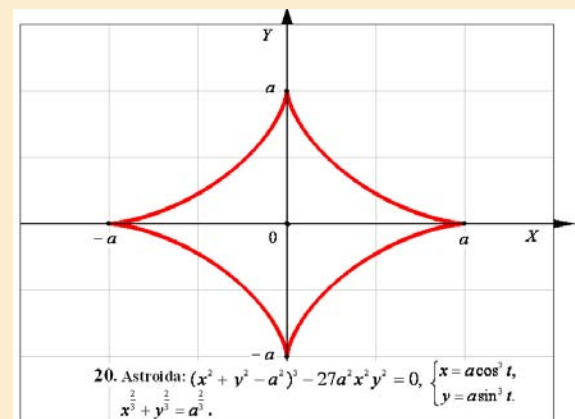
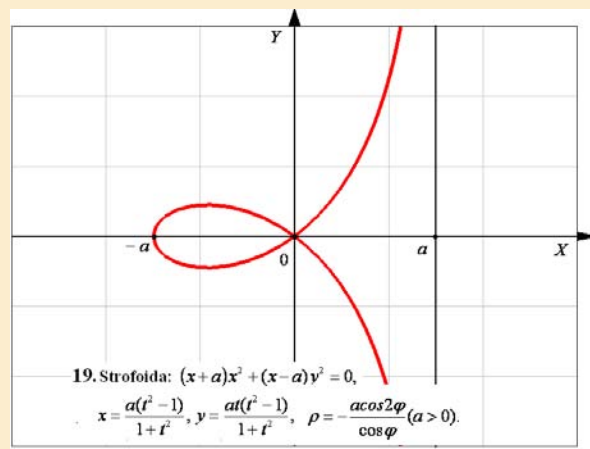
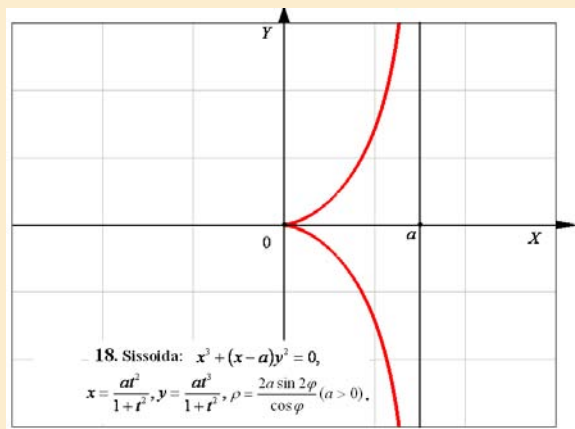


Оркага

Саҳифа 690 / 708

Тулик экран

Чикиш



Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

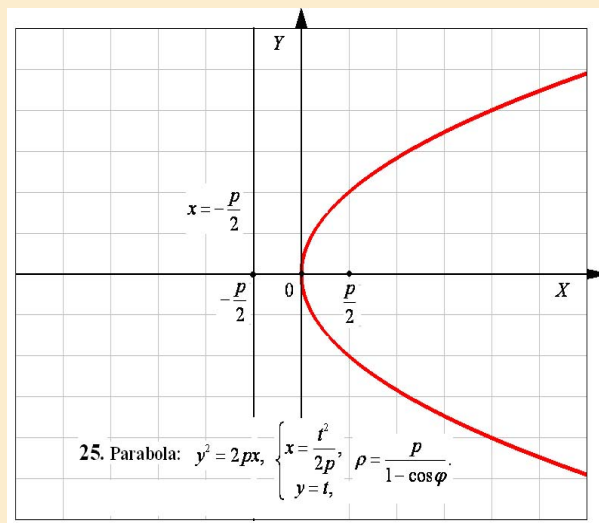
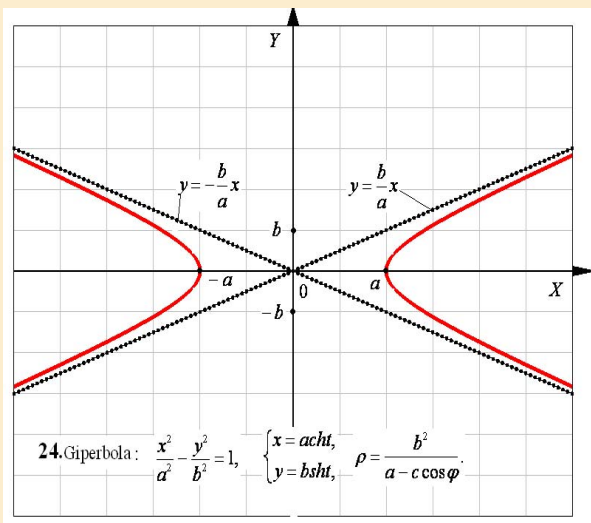
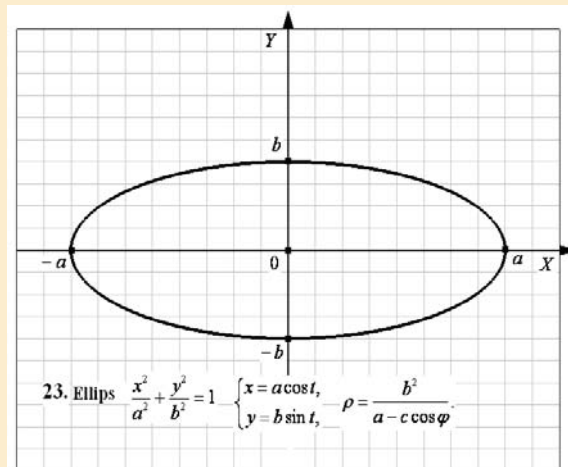
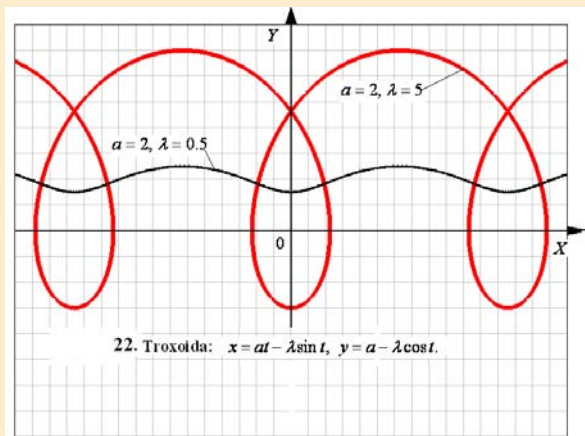


О р к а г а

С а х и ф а 691 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

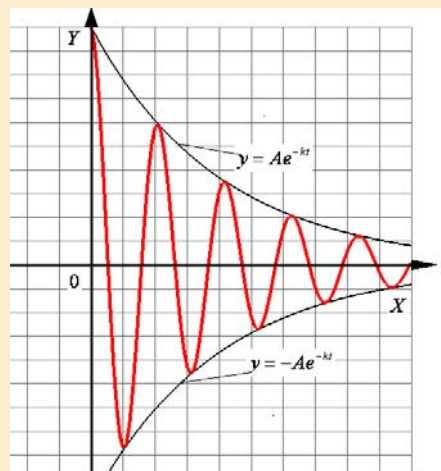


Оркага

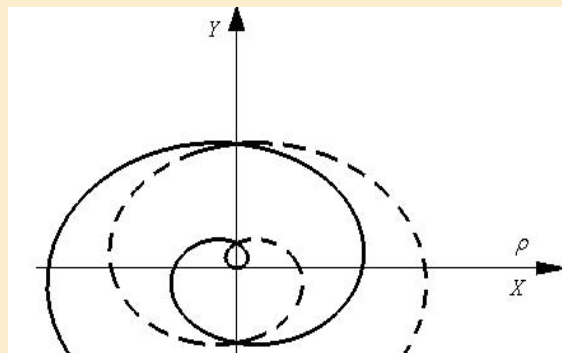
Сахифа 692 / 708

Тулик экран

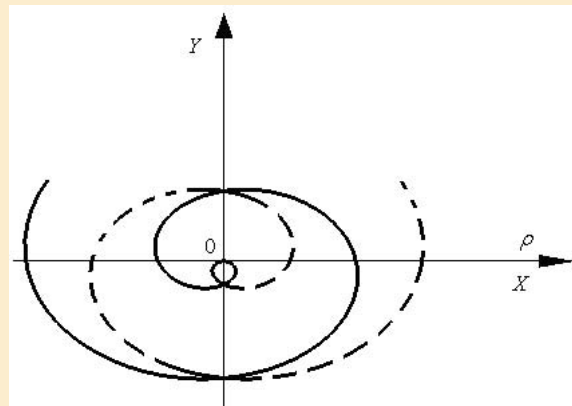
Чикиш



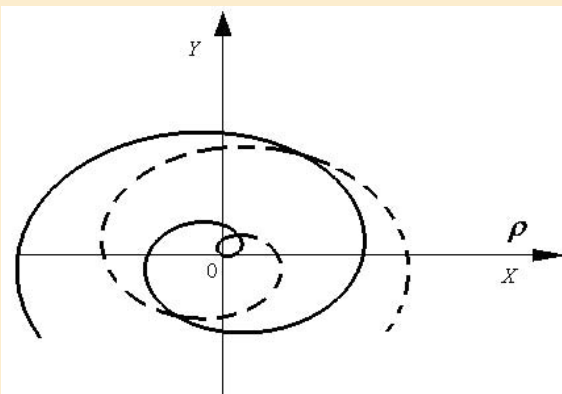
26. Гармоник тебранш: $y = Ae^{-kt} \sin(\omega x + \alpha)$.



a) $\rho = a\varphi$ ($a > 0$).



b) $\rho = a\varphi$ ($a < 0$).



d) $\rho = a\varphi + l$ ($a > 0, l > 0$).

Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

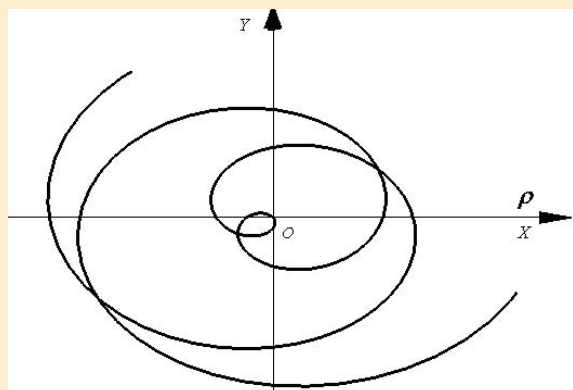


Оркага

Сахифа 693 / 708

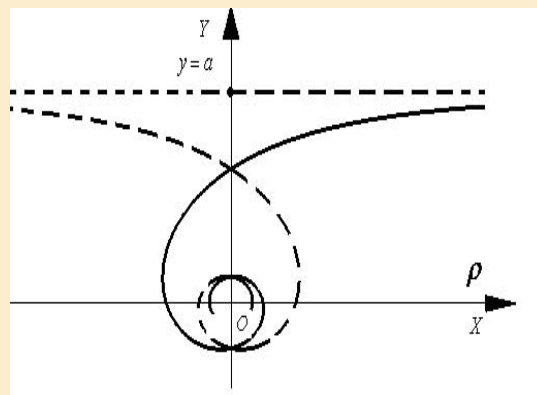
Тулик экран

Чикиш

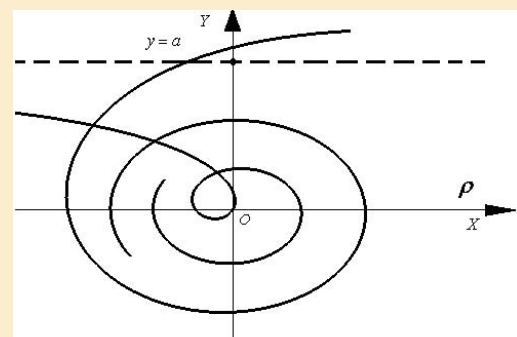


$$e) \rho = a\varphi + l \quad (a < 0, l < 0).$$

27. Arximed spirallari: a), b), d), e).

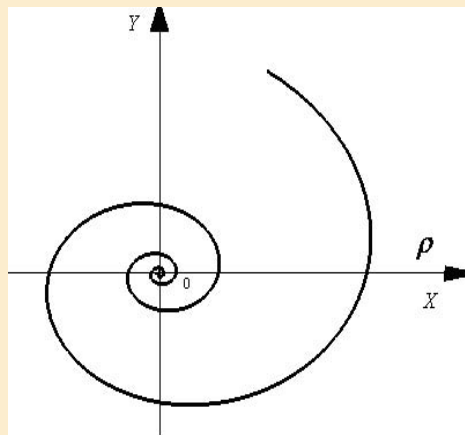


$$a) \rho = \frac{a}{\varphi} \quad (a > 0).$$



$$b) \rho = \frac{a}{\varphi} + l \quad (a > 0, l > 0).$$

28. Giperbolik spirallar: a), b).



$$a) \rho = b^{a\varphi} \quad (b > 0, a > 0).$$

Титул вара к

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

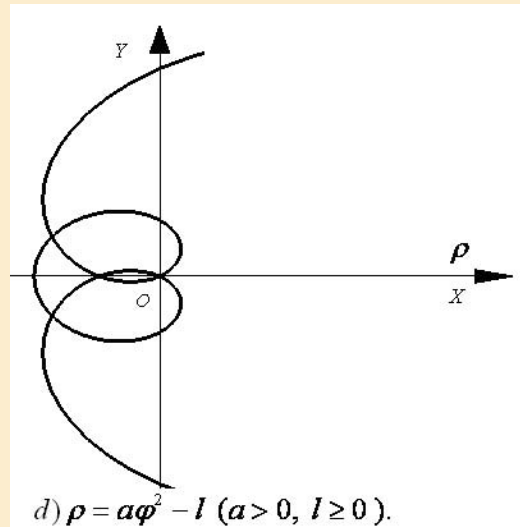
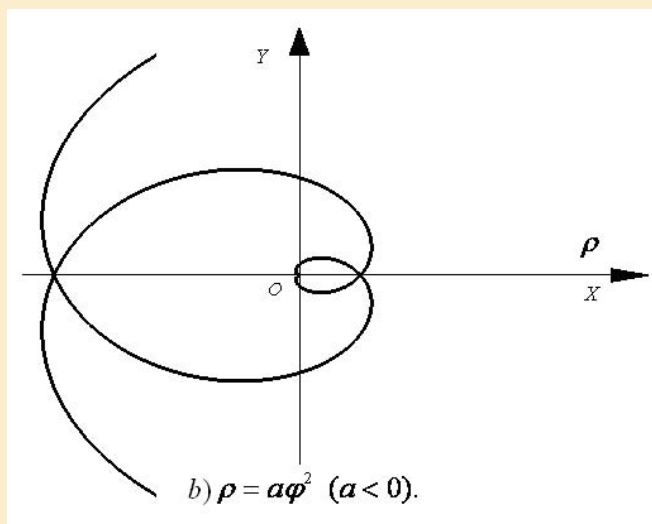
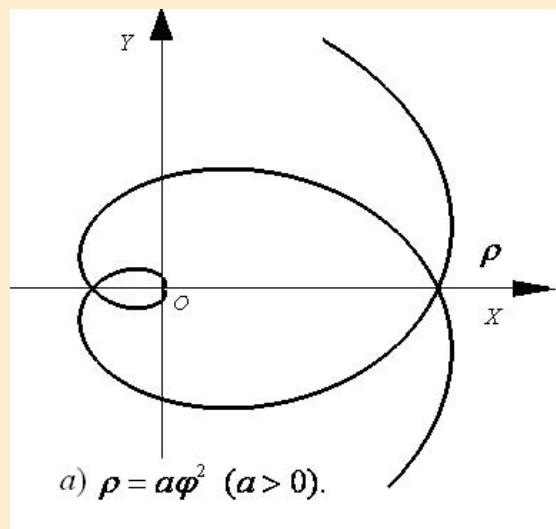
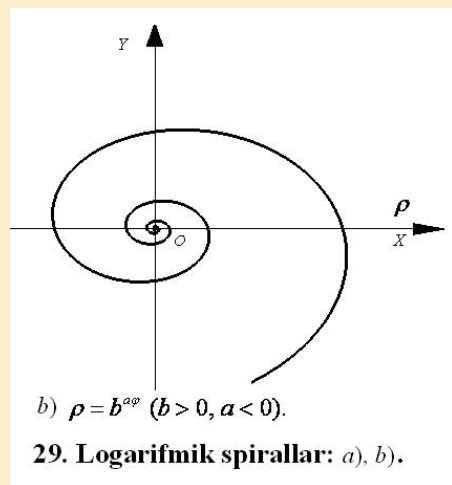


Оркага

Сахифа 694 / 708

Тулик экран

Чикиш



Титул вара к

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

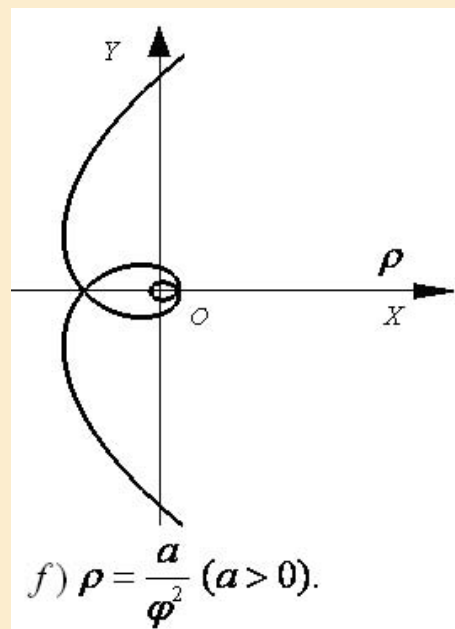
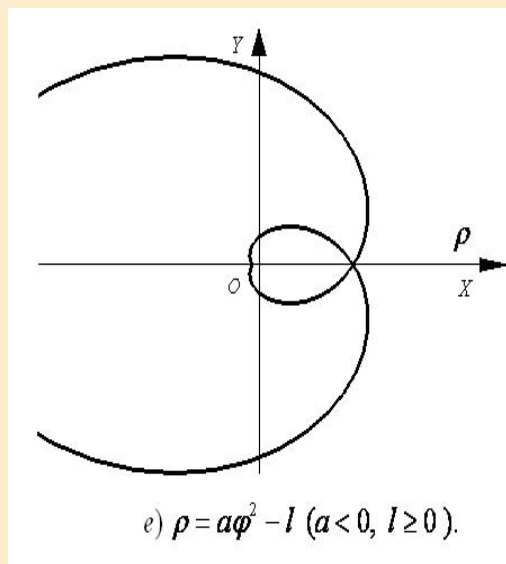


Оркага

Сахифа 695 / 708

Тулик экран

Чикиш



Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

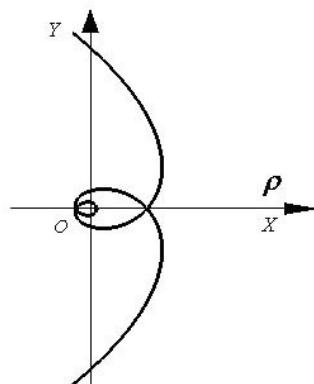


Оркага

Сахифа 696 / 708

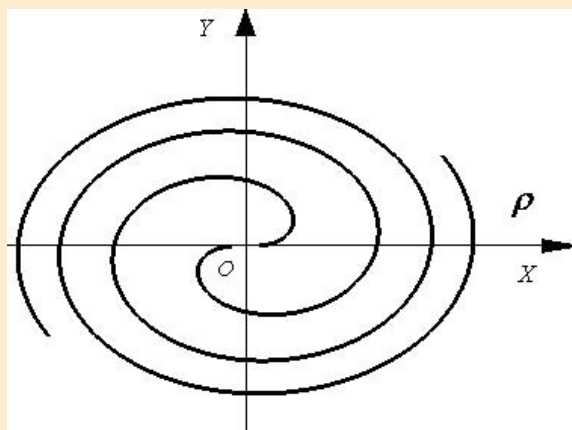
Тулик экран

Чикиш

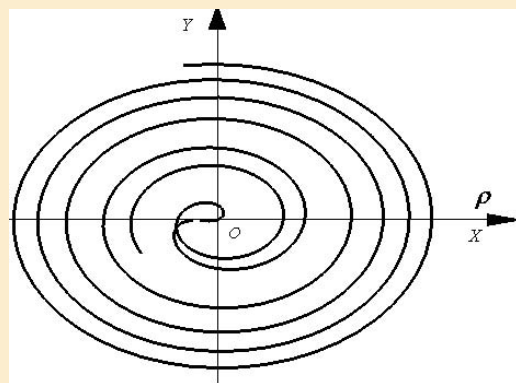


g) $\rho = \frac{a}{\varphi^2} \quad (a < 0).$

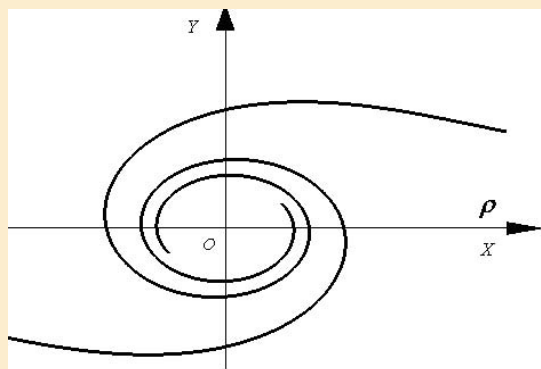
30. Galiley spirallari: a), b), d), e), f), g).



31. Ferma spirali: $\rho^2 = a^2 \varphi.$



32. Parabolik spiral: $(\rho - l)^2 = a^2 \varphi \quad (l > 0).$



33. Jezl spirali: $\rho^2 = \frac{a^2}{\varphi} \quad (a > 0).$

Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

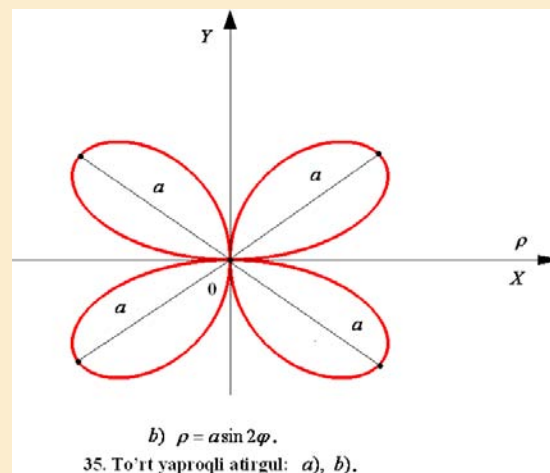
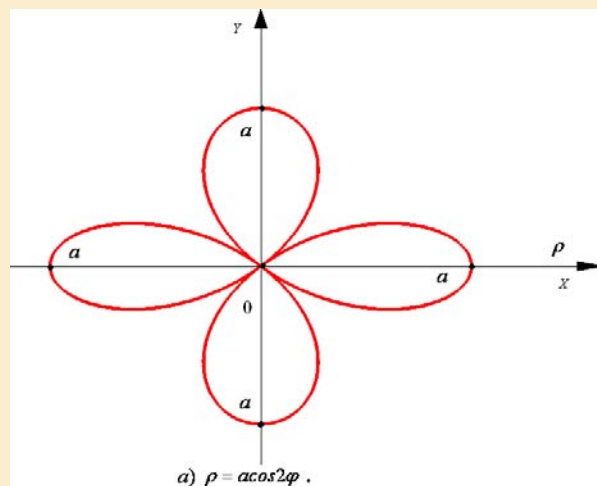
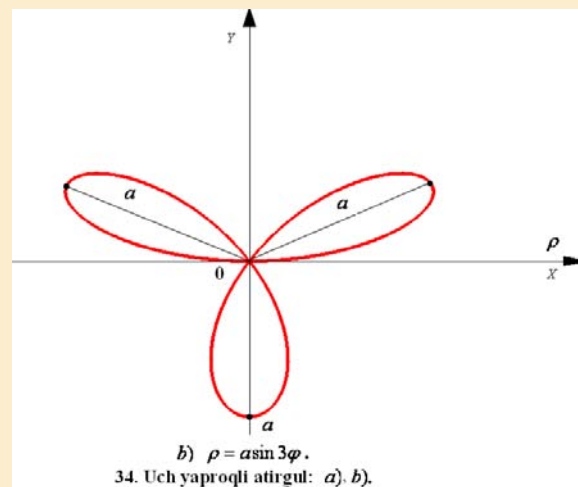
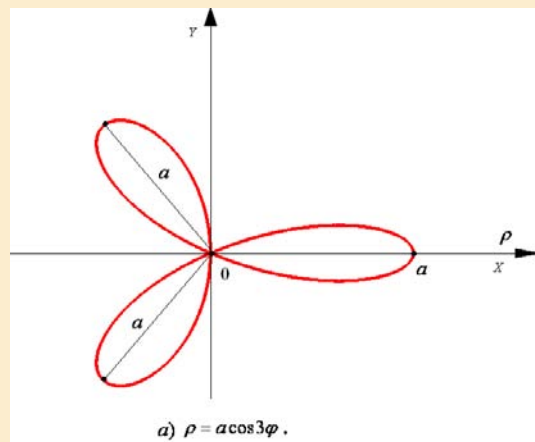


Оркага

Сахифа 697 / 708

Тулик экран

Чикиш



Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р

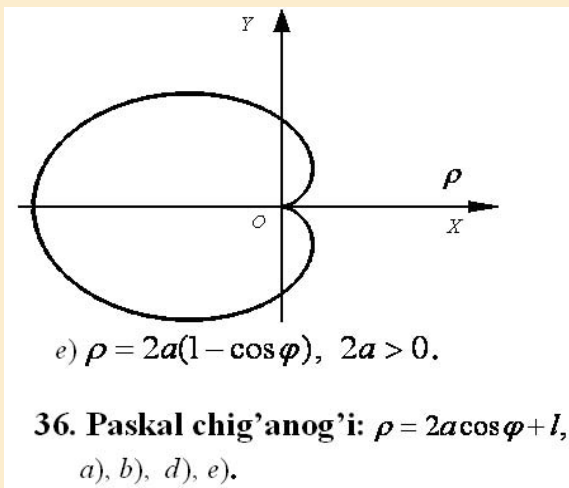
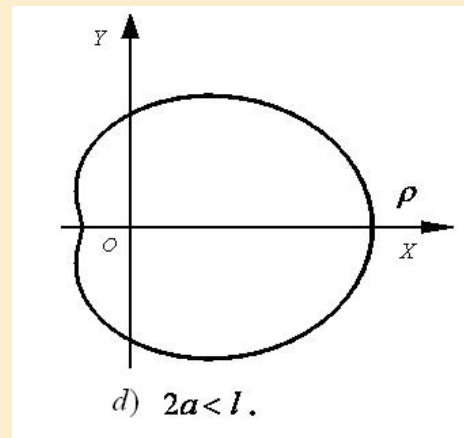
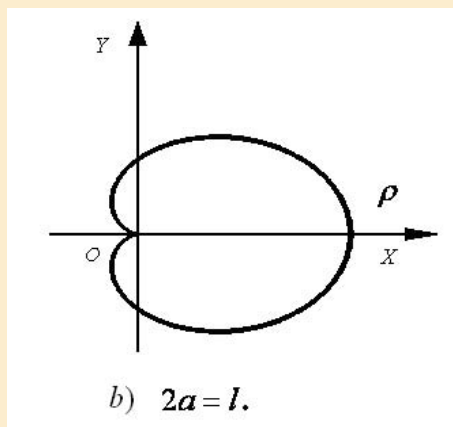
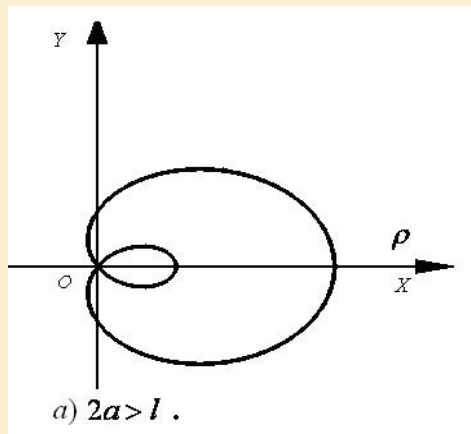


О р к а г а

С а х и ф а 698 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш



Титул вара к

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

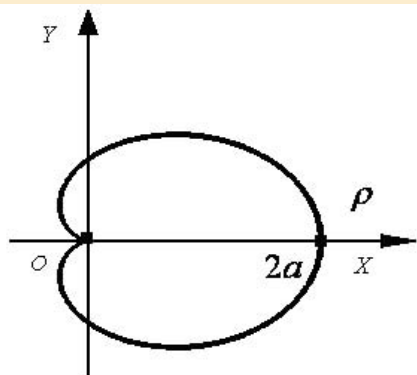


Оркага

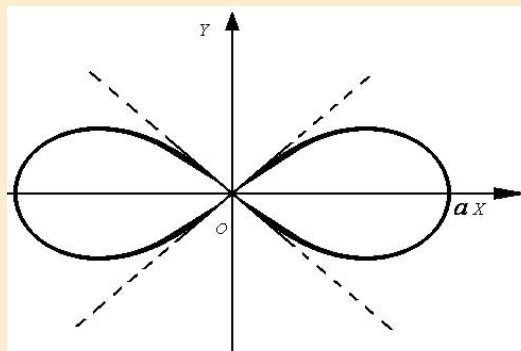
Сахифа 699 / 708

Тулик экран

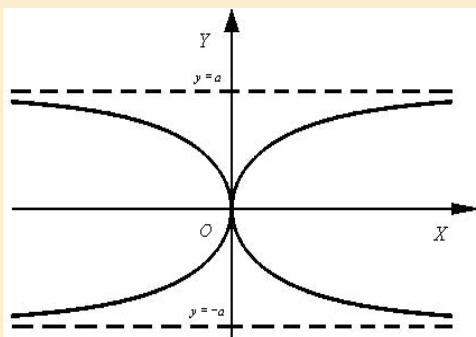
Чикиш



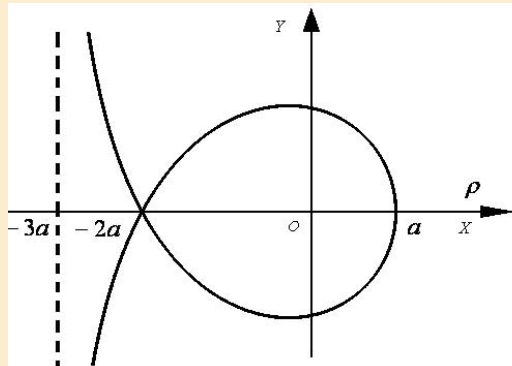
37. Kardioida: $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$,
 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2 y^2 = 0$,
 $\begin{cases} x = a \cos t (1 + \cos t), \\ y = a \sin t (1 + \cos t). \end{cases}$



38. Bernulli lemniskatasi: $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$,
 $(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$.



39. Kappa: $(x^2 + y^2)y^2 - a^2 x^2 = 0$,
 $\rho = a \operatorname{ctg} \varphi$.



40. Makloren trisektrisasi: $\rho = \frac{a}{\cos \frac{\varphi}{3}}$.

Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

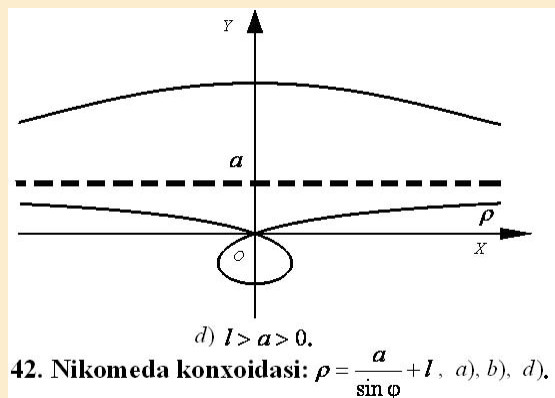
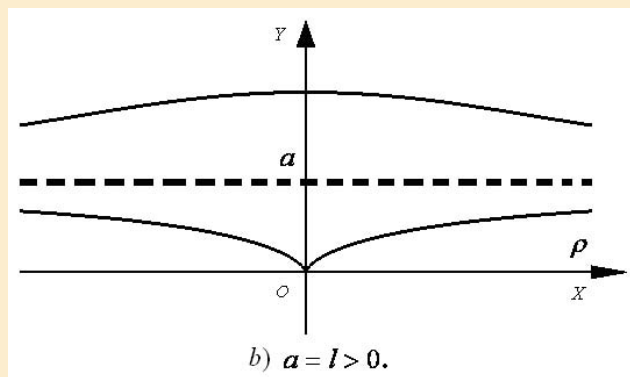
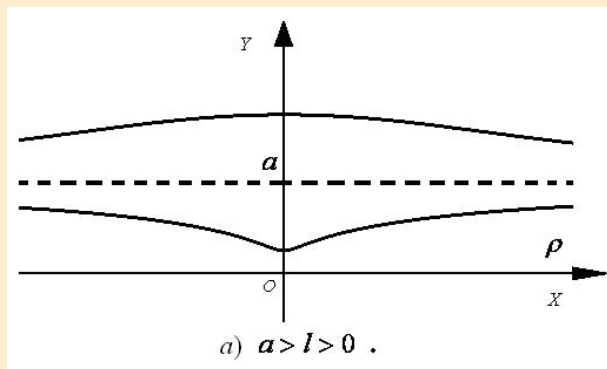
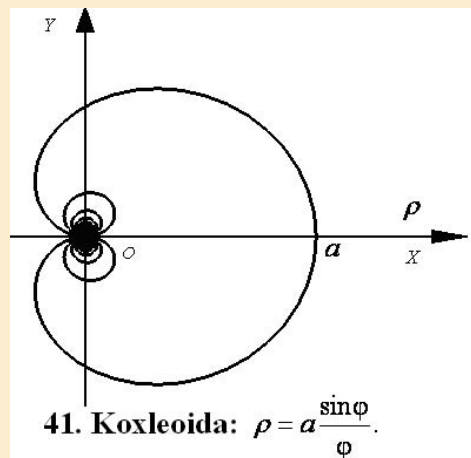


Оркага

Сахифа 700 / 708

Тулик экран

Чикиш



Титул вара к

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

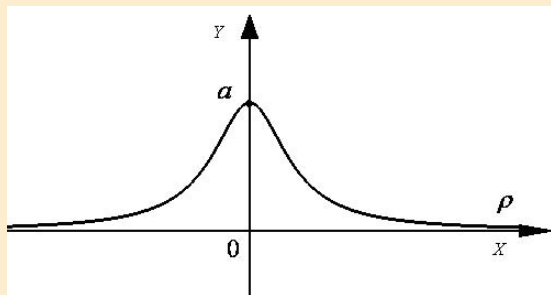


Оркага

Сахифа 701 / 708

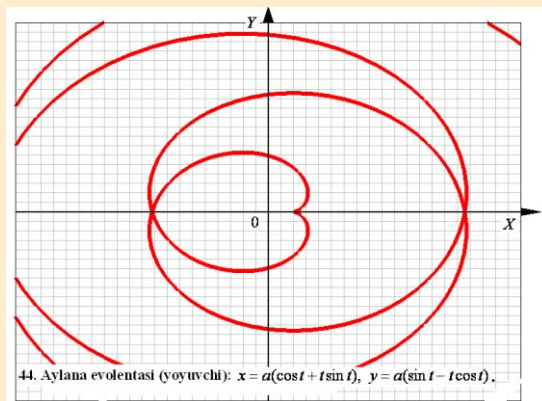
Тулик экран

Чикиш

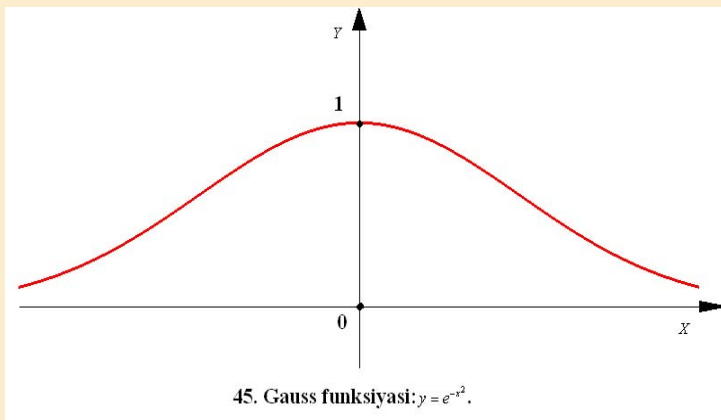


43. Anyezi gajagi: $(x^2 + a^2)y - a^3 = 0$,

$$\rho = \frac{a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$



44. Aylana evolentasi (yoyuvchi): $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.



45. Gauss funksiyasi: $y = e^{-x^2}$.

Титул варак

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар

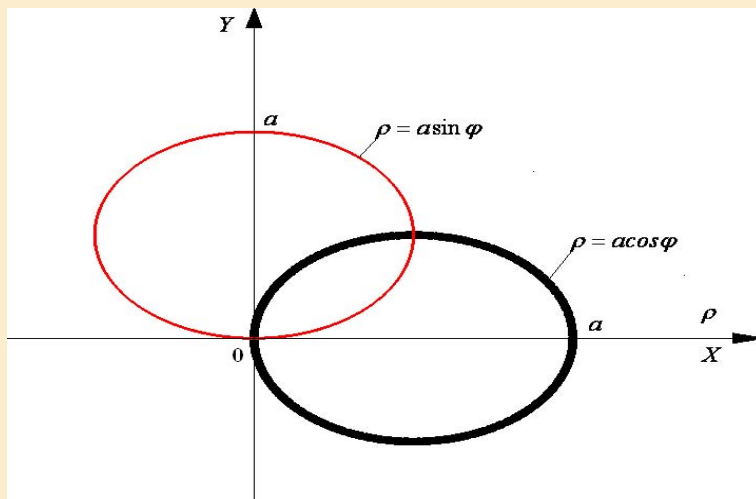


Оркага

Саҳифа 702 / 708

Тулик экран

Чикиш



Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 703 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

Амалиётда кўп учрайдиган баъзи ўзгармаслар ва уларнинг қийматлари

Микдорлар	x	$\lg x$	Микдорлар	x	$\lg x$
π	3,14159	0,49715	$\frac{1}{e}$	0,36788	-1,56571
2π	6,28318	0,79918	e^2	7,38906	0,86859
$\frac{\pi}{2}$	1,57080	0,19612	$\sqrt{e}$	1,64872	0,21715
$\frac{\pi}{4}$	0,78540	-1,89509	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
$\frac{1}{\pi}$	0,31831	-1,50285	$M = \lg e$	0,43429	-1,63778
π^2	9,86960	0,99430	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258	0,36222
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	1 радиан	$57^\circ 17' 45''$	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	$\arcsin 1^\circ$	0,01745	-2,24188
e	2,71828	0,43429	g	9,81	0,99167

Титул варақ

Мундарижа

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

Иловалар



Оркага

Саҳифа 704 / 708

Тулик экран

Чикиш

АДАБИЁТЛАР

1. Азларов Т.А, Мансуров Х.Т. Математик анализ. 1- қисм. -Т.: «Ўқитувчи» 1994.
2. Азларов Т.А., Мирзааҳмедов М.А., Отақўзиев Д.О., Собиров М.А., Тўлаганов С.Т.- Математикадан қўлланма, II-қисм. Т.: «Ўқитувчи», 1990.
3. Атаханов К.У., Ерзин В.А., Ходжаев Б. – Математик анализдан мисол ва масалалар тўплами, 1-қисм, Т.: 2004.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.:Наука,1985.
5. Бруй И.Н., Гаврилюк А.В и др. Лабораторный практикум по математическому анализу. – Минск.: Выщей школа, 1991.
6. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.– Задачи упражнения по математическому анализу, М.: Изд. МГУ, 1988.
7. Gaziyeв A., Israilov I., Yaxshiboyev M. Funksiyalar va grafiklar. “VORIS- NASHRIYOT”. Toshkent-2006.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 705 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. -М. : Наука,1981.
9. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. 1.- М. :Наука,1984.
10. Ильин В.А, Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1. -М.: Наука, 1979.
11. Коровкин Н.П. – Определенный интеграл и ряды. - М.: Учпедгиз., 1959.
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа.Т.1.- М.: Высшая школа, 1981.
13. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: интегралы, ряды.- М.: Наука, 1986.
14. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу: функции нескольких переменных.-Санкт-Петербург, 1994.
15. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А., Матвеев И.В., Смольнский М.А., Цветков А.Т. Задачник по курсу математического анализа. Ч.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 706 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

1.- М. :Наука,1971.

16. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А., Матвеев И.В., Смольнский М.А., Цветков А.Т. Задачник по курсу математического анализа. Ч. I
I.- М. :Наука,1971.

17. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Голович Г.П. – Справочное пособие по математическому анализу, Киев.: «Высшая школа», 1984.

18. Марон И.А.– Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах. - М.: «Наука», 1970.

19. Матросов А. Maple-6. Решения задач высшей математики и механики. Питер.Санкт-Петербург, 2000.

20. Никольский С.М.Курс математического анализа.Т.1.-М.: «Наука», 1983.

21. Садуллаев А., Мансуров Х., Худойбергганов Г., Ворисов А., Гуламов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 1-қисм.- Т.. 1993.

21. Садуллаев А., Мансуров Х., Худойбергганов Г., Ворисов А., Гуламов Р. Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами. 2-

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 707 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш

қисм.- Т.. 1995.

22. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. -М.: Наука,1969.
23. Finney, Weir, Giordano Thomas'CALCULUS. 10-th edition.- Boston, San Francisco, New York, London, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore, Madrid....2001, 1256 pp.
24. Salas Hille Engen. Calculus one variable. 8-th edition.Wiley&Sons. - New York,chichester, Weinheim. Brisbane Singapore Toronto, 1999, 708 pp.

Т и т у л в а р а к

М у н д а р и ж а

1 - б о б

2 - б о б

3 - б о б

4 - б о б

И л о в а л а р



О р к а г а

С а х и ф а 708 / 708

Т у л и к э к р а н

Ч и к и ш