Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта махсус таълим Вазирлиги

Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий Университети

А.САДУЛЛАЕВ, Г.ХУДОЙБЕРГАНОВ, А.ВОРИСОВ, Ҳ.МАНСУРОВ, Б.ШОИМҚУЛОВ, Т.ТУЙЧИЕВ, Н.СУЛТОНОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН

МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I - ҚИСМ

Академик А.Садуллаев таҳрири остида

ТОШКЕНТ - 2008

А.САДУЛЛАЕВ, Г.ХУДОЙБЕРГАНОВ, А.ВОРИСОВ,
Ҳ.МАНСУРОВ, Б.ШОИМҚУЛОВ, Т.ТУЙЧИЕВ, Н.СУЛТОНОВ

МАТЕМАТИК АНАЛИЗДАН

МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

I - ҚИСМ

Академик А.Садуллаев таҳрири остида

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги университетларнинг талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ - 2008

МУНДАРИЖА

VI-БОБ. Аниқмас интеграл

VII-БОБ. Аниқ интеграл

VIII БОБ. Аниқ интегралнинг тадбиқлари

IX БОБ.Хосмас интеграллар

Аннотация

Қўлланма университетлар ҳамда педагогика институтлари, шунингдек олий техника ўқув юртларининг олий математика чуқур дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари ҳамда ўқитувчилари учун мўлжалланган.

Қўлланма ўқув адабиёти Давлат таълим стандартининг 5460100 – “математика”, 5440200 – “механика”, 5480100 – “амалий математика ва информатика” ва 5440100 – “физика” бакалавриат таълим йўналишларига мос келади.

Қўлланма дастлабки тушунчалар, сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити, функция ва унинг лимити, функциянинг узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги, функциянинг ҳосиласи ва дифференциали, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари ва татбиқлари, аниқмас ва аниқ интеграллар, аниқ интегралнинг татбиқлари, сонли қаторлар мавзуларини ўз ичига олади. Қўлланмада 2627 та мисол ва масалалар келтирилган бўлиб, уларнинг аксарияти батафсил ечим ва кўрсатмалар билан таъминланган.

Сўз боши

Ўзбекистонда кадрлар тайёрлаш тизимини тубдан ислоҳ қилиш жараёнида талабаларни ўқув адабиётлари билан таъминлаш муҳимдир. Натижада Давлат таълим стандартлари ва ҳозирги замон талабларига ҳар томонлама жавоб берадиган дарсликларга, ўқув қўлланмаларига эҳтиёж туғилди.

Айни пайтда, ўқиш жараёнида назарий билимлар асосида амалий масалаларни ҳал этишга катта ўрин берилиши, бошқа предметлар сингари математик анализ курси бўйича ҳам машқ ва масалалар тўплами ўқув қўлланмаси ёзилишининг заруриятини юзага келтирди.

Муаллифлар ўзларининг кўп йиллик тажрибаларига таяниб мазкур "Математик анализ курсидан масалалар тўплами" ўқув қўлланмасини ёздилар. Бу ўқув қўлланмасида келтирилган мавзулар ва улар учун тузилган ва тўпланган мисол ва масалалар ҳозирда мақулланган дастур бўйича бўлишига аҳамият берилди. Шунингдек қўлланмада машқ ва масалаларнинг жойлашиш тартибига ҳам эътибор қаратилди. Бунда "соддадан мураккабга қараб" қоидасига амал қилинди.

Ҳар бир параграф бошида қисқача назарий маълумотлар (таърифлр, тасдиқлар, формулалар) келтирилиб, намуна сифатида бир нечта мисоллар ечиб кўрсатилди. Бу ҳол талабаларга мисол ва масалаларни мустақил ечишга ёрдам бериши билан бирга ўқитувчиларга ҳам фойдали бўлади деб ўйлаймиз.

Китобнинг бу қисмига дастлабки тушунчалар, сонлар кетма-кетлиги ва унинг лимити, функция ва унинг лимити, функциянинг узлуксизлиги ва текис узлуксизлиги, функциянинг ҳосиласи ва дифференциали, дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари ва татбиқлари, аниқмас ва аниқ интеграллар, аниқ интегралнинг татбиқлари, сонли қаторлар мавзулари киритилган.

Мазкур қўлланмани ёзишда муаллифлар 1993 йили "Ўзбекистон" нашриётида чоп этилган "Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тўплами" дан ҳам фойдаландилар.

Ўқув қўлланма университетлар ва педагогика институтлари талабалари ва ўқитувчилари учун мўлжалланган бўлиб, ўқув адабиёти Давлат таълим стандартининг 5460100 – “математика”, 5440200 – “механика”, 5480100 – “амалий математика ва информатика” ва 5440100 – “физика” бакалавриат таълим йўналишларига мос келади. Қўлланмадан шунингдек олий техника ўқув юртларининг “Олий математика” курси чуқурлаштирилган дастур асосида ўқитиладиган факультетлари талабалари ҳамда ўқитувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

I-БОБ.

Кириш

1-§. Математик индукция усули

Натурал **n** сонга боғлиқ бирор Φ_n фикр, мулоҳазани (исботланиши керак бўлган тасдиқни):

1) $n=1$ бўлганда (баъзан $n=n_0, n_0>1$ бўлганда) Φ_n нинг ўринли бўлиши кўрсатилса,

2) $n=k$ бўлганда бу Φ_n ни ўринли деб фараз қилиниб,

3) $n=k+1$ учун Φ_n нинг ўринли бўлиши исботланса, у ҳолда Φ_n фикр барча n лар учун ўринли бўлади. Фикрни шу йўл билан исботлаш **математик индукция усули** билан исботлаш дейилади.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} \qquad (n\geq 2) \qquad \textit{(1)}$$

тенглик исботлансин.

◄(1) тенглик Φ_n фикрни ифодаласин. Бу фикр $n=2$ бўлганда (Φ_2 фикр) ўринли бўлади, чунки

$$1-\frac{1}{2^2}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}.$$

$n=k$ бўлганда Φ_n фикр (яъни Φ_k) ўринли бўлсин деб фараз қиламиз:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k+1}{k}.$$

Энди Φ_n фикрни $n=k+1$ учун (яъни Φ_{k+1} ни) ўринли бўлишини кўрсатамиз:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k\cdot(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k+1)+1}{k+1}.$$

Демак, (1) тенглик барча n $(n\geq 2)$ лар учун ўринли бўлади.►

2 – м и с о л . ***Қавариқ*** n ***бурчакли кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси***

$$S_n=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=2(n-2)\cdot d \qquad (n\geq 3) \qquad \textit{(2)}$$

бўлиши исботлансин, бунда d ***- тўғри бурчак.***

◄Маълумки, $n=3$ бўлганда кўпбурчак учбурчакка айланиб, унинг ички бурчаклари йиғиндиси $2d$ га тенг.

Демак, $n=3$ да

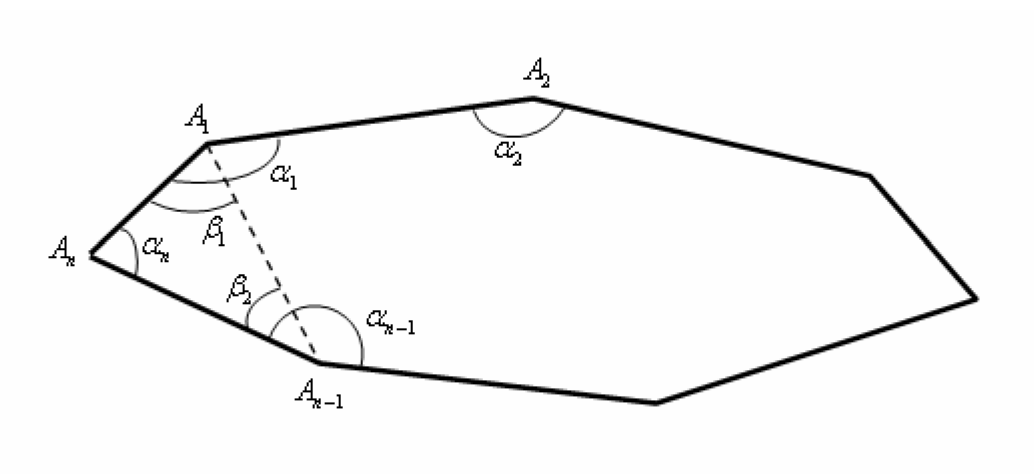
$$S_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2d=2(3-2)\cdot d$$

бўлиб, (2) тенглик ўринли.

Айтайлик, n бурчакли кўпбурчакнинг учлари

$$A_1, A_2, \ldots, A_n$$

бўлсин. Бу кўпбурчакнинг A_1 ва A_{n-1} учларини тўғри чизиқ кесмаси билан бирлаштириб, берилган n бурчакли кўпбурчакни учлари $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ да бўлган $(n-1)$ бурчакли кўпбурчак ва учлари $A_1 A_{n-1} A_n$ бўлган учбурчакларга ажратамиз *(1-чизма)*.



1-чизма.

Равшанки,

$$\beta_1 + \beta_2 + \alpha_n = 2d.$$

Учлари $A_1 A_2 ... A_{n-1}$ нуқталарда бўлган $(n-1)$ бурчакли кўпбурчак учун (2) формула ўринли бўлсин деб фараз қилайлик:

$$(\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_2 + \alpha_3 + ... + \alpha_{n-2} + (\alpha_{n+1} - \beta_2) =$$
$$= 2[(n-1) - 2]d = 2(n-3)d.$$

Энди n бурчакли кўпбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси учун (2) тенгликнинг ўринли бўлишиникўрсатамиз:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = (\alpha_1 - \beta_1) + \alpha_2 + ... + \alpha_{n-2} + (\alpha_{n-1} - \beta_2) +$$
$$+ \beta_1 + \beta_2 + \alpha_n = 2(n-3)d + 2d = 2(n-2)d.$$

Демак, (2) тенглик барча n $(n \geq 3)$ лар учун ўринли.►

Математик индукция усулидан фойдаланиб, қуйидаги тенгликларнинг ихтиёрий натурал сон *n* учун ўринли бўлиши исботлансин:

1. $1 + 2 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.

2. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

4. $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\dfrac{1}{9\cdot 13}+...+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

5. $1^2+3^2+5^2+...+(2n-1)\cdot 2=\dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

6. $1-2^2+3^2-4^2+...+(-1)^n\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$.

7. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+...-\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+...+\dfrac{1}{2n}$.

8. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+...+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$.

9. $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+...+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

10. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)...\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}$.

Математик индукция усулидан фойдаланиб, қуйидаги йиғиндилар ҳисоблансин:

11. $1+2+3+...+n$.

12. $1^3+2^3+...+n^3$.

13. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

14. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+...+n(3n-1)$.

15. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+...+\dfrac{2n-1}{2^n}$.

16. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

17. $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+...+n\cdot n!$

18. $arctg\dfrac{1}{2}+arctg\dfrac{1}{8}+...+arctg\dfrac{1}{2n^2}$

Тенгсизликлар исботлансин.

19. $\sqrt{n} \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$.

20. $(1+\alpha)^n \ge 1 + n \cdot \alpha$ $\qquad (\alpha > -1, \;\; n > 1)$.

21. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

22. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$ $\qquad (n > 1)$.

23. $n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n$.

24. $n^{n+1} > (n+1)^n$ $\qquad (n \ge 3)$.

25. $2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

26. $\underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + ... + \sqrt{c}}}}_{n \text{ та илдиз}} < \sqrt{c} + 1$ $\qquad (c > 0)$.

27. $tgn\alpha > ntg\alpha$ $\qquad (n \ge 2)$.

28. $lg(n+1) > \frac{1}{n}(lg1 + \lg 2 + ... + \lg n)$.

Тенгликлар исботлансин:

29. $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$.

30. $\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{8} ... \cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}}$.

31. $\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 2^2 \alpha \cdot ... \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1} \sin\alpha}$.

32. $\sin x+\sin 2x+...+\sin nx=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\sin\frac{nx}{2}$.

33. $\frac{1}{2}tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2^2}tg\frac{x}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}tg\frac{x}{2^n}=\frac{1}{2^n}ctg\frac{x}{2^n}-ctgx \qquad (x\neq n\pi)$.

34. $tg\alpha\cdot tg2\alpha+tg2\alpha\cdot tg3\alpha+...+tg(n-1)\alpha\cdot tgn\alpha=\dfrac{tgn\alpha}{tg\alpha}-n$.

2-§. Тўплам. Ҳақиқий сонлар ва уларнинг тўплами

1^0. Математик белгилар. Математикада тез-тез учраб турадиган сўз бирикмалари ўрнига махсус белгилар ишлатилади. Биз қуйида улардан фойдаланамиз:

$\in$ - тегишлилик белгиси;

$\overline{\in}$ - тегишли эмаслик белгиси;

$\subset$ -қисм белгиси;

$\forall$ -умумийлик квантори белгиси (“ҳар қандай”, “ихтиёрий”, “барчаси учун” сўзлари ва сўз бирикмалари ўрнида ишлатилади);

$\exists$ - мавжудлик квантори белгиси (“мавжудки”, “топиладики” сўзлари ўрнида ишлатилади);

$\Rightarrow$ - импликация белгиси (агар … бўлса, у ҳолда ... бўлади ибораси ўрнида ишлатилади);

$\Leftrightarrow$ - эквивалентлик белгиси;

$\bigcup$ - йиғинди (бирлашма) белгиси;

$\bigcap$ - кўпайтма (кесишма) белгиси;

$\diagdown$ - айирма белгиси.

2^0. Тўплам. Одатда тўпламлар бош ҳарфлар билан уларнинг элементлари кичик ҳарфлар билан белгиланади. A ва B тўпламлар берилган бўлсин.

1. $\forall a\in A\Rightarrow \quad a\in B$ бўлиши A тўплам B нинг **қисми** эканини билдиради: $A\subset B$.

2. $A\subset B,\ B\subset A$ бўлиши A ва B тўпламларнинг **тенглигини** ифодалайди: $A=B$.

3. A **ва** B тўпламлар **йиғиндиси** ($A\bigcup B$) қуйидагини

$$a\in A\bigcup B\Rightarrow a\in A, \text{ ёки } a\in B, \text{ ёки } a\in A, a\in B$$

англатади.

4. A **ва** B тўпламлар **кўпайтмаси** $(A\bigcap B)$ қуйидагини

$$a\in A\bigcap B \ \Rightarrow\ a\in A,\ a\in B$$

билдиради.

5. A тўпламдан B тўпламнинг **айирмаси** $(A\diagdown B)$ қуйидагини

$$a\in A\diagdown B \ \Rightarrow\ a\in A,\ a\overline{\in} B$$

англатади.

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)=\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)$$

тенглик исботлансин.

◄ $a\in\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)$ бўлсин. У ҳолда

$$a\in A\setminus B \;\Rightarrow\; a\in A,\, a\overline{\in} B$$

ёки

$$a\in B\setminus A \;\Rightarrow\; a\in B,\, a\overline{\in} A$$

бўлиб, булардан $a\in A\bigcup B$, $a\overline{\in} A\bigcap B$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $a\in\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)$ ва

$$\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)\subset\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right) \qquad (3)$$

бўлади.

$a\in\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)$ бўлсин. У ҳолда

$$a\in\left(A\bigcup B\right) \;\Rightarrow\; a\in A, \text{ ёки } a\in B,$$

$$a\overline{\in} A\bigcap B\Rightarrow a\overline{\in} A,\, a\overline{\in} B, \text{ ёки } a\in A, a\overline{\in} B \text{ ёки } a\overline{\in} A, a\in B$$

бўлиб, булардан $a\in A\setminus B$ ёки $a\in B\setminus A$ бўлиши келиб чиқади.

Демак, $a\in\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)$ ва

$$\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right)\subset\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right) \qquad \mathbf{(4)}$$

бўлади. (3) ва (4) муносабатлардан топамиз:

$$\left(A\setminus B\right)\bigcup\left(B\setminus A\right)=\left(A\bigcup B\right)\setminus\left(A\bigcap B\right).►$$

3^0. Ҳақиқий сонлар ва уларнинг тўплами. Маълумки, N - барча натурал сонлар тўпламини, Z - барча бутун сонлар тўпламини, Q - барча рационал сонлар тўпламини ифодалайди:

$$N=\{1,2,3,...n,...\},$$

$$Z=\{...,-2,-1,0,1,2,...\},$$

$$Q=\left\{r: r=\frac{p}{q},\;\; p\in Z,\;\; q=N\right\}.$$

Чексиз даврий бўлмаган ўнли каср билан ифодаланадиган сон иррационал сон дейилади. Уни $\frac{p}{q}$ $\left(p\in Z,\;\; q\in N\right)$ кўринишида ёзиб бўлмайди.

Рационал ва иррационал сонлар умумий ном билан ҳақиқий сон дейилади. Барча ҳақиқий сонлар тўплами R ҳарфи билан белгиланади.

Айтайлик, $E=\{x\}$ бирор ҳақиқий сонлар тўплами бўлсин: $E\subset R$ Агар

$$\exists M\in R, \forall x\in E: x\le M$$

$$\left(\exists m\in R, \forall x\in E: x\ge m\right)$$

бўлса, E тўплам **юқоридан (қуйидан)** чегараланган дейилади. Агар E тўплам ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, E **чегараланган тўплам** дейилади.

Агар

$$1)\quad \forall x \in E \ : \ x \le \alpha \ ;$$
$$2)\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in E \ : \ x_0 > \alpha - \varepsilon$$

бўлса,

$$\alpha = \sup\ E = \sup\{x\}$$

сон E тўпламнинг **аниқ юқори** чегараси дейилади.

Агар

$$1)\quad \forall x \in E \ : \ x \ge \beta \ ;$$
$$2)\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_0 \in E \ : \ x_0 < \beta + \varepsilon$$

бўлса,

$$\beta = \inf\ E = \inf\{x\}$$

сон E тўпламнинг **аниқ қуйи** чегараси дейилади.

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$E = \left\{ x = \frac{n^2}{n^2+4} : n \in N \right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараси топилсин.

◄ Равшанки, $\forall n \in N$ учун

$$0 < \frac{n^2}{n^2+4} < 1 \qquad (5)$$

бўлади. Демак, берилган тўплам чегараланган.

(5) муносабатдан $\forall x \in E$ учун

$$x = \frac{n^2}{n^2+4} \le 1$$

бўлиши келиб чиқади.

$\forall \varepsilon > 0$ сонни $(0 < \varepsilon < 1)$ олиб, E тўпламда, унинг

$$x_0 = \frac{n^2}{n^2+4}, \quad n > \sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

элементи қаралса, унинг учун

$$\frac{n^2}{n^2+4} > 1 - \varepsilon \qquad (6)$$

тенгсизлик бажарилади (чунки

$$\frac{n^2}{n^2+4} > 1-\varepsilon \Rightarrow n^2 > n^2 + 4 - n^2\varepsilon - 4\varepsilon \Rightarrow n^2\varepsilon > 4(1-\varepsilon) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n^2 > \frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}})$$

(5) ва (6) муносабатлардан топамиз:

$$SupE = Sup\left\{ x = \frac{n^2}{n^2+4} : n \in N \right\} = 1.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\inf\ E = \inf\left\{ x = \frac{n^2}{n^2+4} : n \in N \right\} = 0$$

бўлиши кўрсатилади.►

Ихтиёрий A,B,C,D тўпламлар учун қуйидаги муносабатлар исботлансин.

35. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

36. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

37. $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.

38. $(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$.

39. $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$.

40. $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(A\cap B\cap C)=A\cup B\cup C$.

41. $(A\cap C)\cup(B\cap D)\subset(A\cup B)\cap(C\cup D)$.

42. $(B\setminus C)\setminus(B\setminus A)\subset A\setminus C$.

43. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$.

44. $(A\cup B)\setminus C\subset A\cup(B\setminus C)$.

45. $(A\cup C)\setminus B\subset(A\setminus B)\cup C$.

46. $A\cap B\subset A\subset A\cup B$.

47. $A\cap(A\cup B)=A$.

48. Агар $A\setminus B=C$ бўлса, $A=B\cup C$ нинг ўринли бўлиши келиб чиқадими?

49. Агар $A=B\cup C$ бўлса, $A\setminus B=C$ нинг ўринли бўлиши келиб чиқадими?

50. $(A\cup B)\setminus(A\cup C)\subset A\cup(B\setminus C)$.

51. $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$.

52. $A\setminus(B\cup C)\subset(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

53. Агар A ва B чекли тўпламлар бўлиб, уларнинг элементлари сони мос равишда $n(A)$, $n(B)$ бўлса,

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

бўлиши исботлансин.

54. Агар A чекли тўплам бўлиб, унинг элементлари сони m га тенг бўлса, бу тўпламнинг барча қисмий тўпламлари тўпламининг элементлари сони 2^m та бўлиши исботлансин.

55. Квадрати 3 га тенг бўлган рационал соннинг мавжуд эмаслиги исботлансин.

56. Агар r - рационал сон, α - иррационал сон бўлса, $\alpha + r$ нинг иррационал сон бўлиши исботлансин.

57. Агар α ва β иррационал сон бўлса, $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$ сонлар иррационал бўладими?

58. Агар α ва β иррационал сон бўлиб, $\alpha+\beta$ эса рационал сон бўлса, $\alpha-\beta$ ва $\alpha+2\beta$ сонларнинг иррационал бўлиши исботлансин.

59. Ушбу

$$\alpha = \sqrt{1+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{n}}} \qquad (n\in N,\ n\geq 2)$$

соннинг иррационал бўлиши исботлансин.

60. Ушбу

$$\log 2,\ \ \log_2 3$$

сонларнинг иррационал сон бўлиши исботлансин.

Қуйидаги тўпламлар чегараланганликка текширилсин:

61. $E=\left\{x=1-n^2-6n:\ \ n\in N\right\}.$

62. $E=\left\{x=\dfrac{n}{1+n^2}:\ \ n\in N\right\}.$

63. $E=\left\{x=\dfrac{(-1)^n\cdot n+10}{\sqrt{n^2+1}}:\ \ n\in N\right\}.$

64. $E=\left\{x=\dfrac{n}{a^n}:\ \ n\in N,\ \ a>1\right\}.$

65. $E=\left\{x=\left[1+(-1)^n\right]\cdot n+\dfrac{1-(-1)^n}{n}:\ \ n\in N\right\}.$

66. Ушбу

$$E\left\{x=\frac{1}{n}:\quad n\in N\right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари топилсин.

67. Ушбу

$$E=\left\{x=1+\frac{(-1)^n}{n}:\quad n\in N\right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари топилсин.

68. $E\subset R$ тўплам учун $SupE$ ва $\inf E$ лар мавжуд бўлиб,

$$SupE=\inf E$$

бўлса, E тўплам тўғрисида нима дейиш мумкин.

69. Агар $E\subset R$, $F\subset E$ тўпламлар учун:

1) $\forall x\in E,\forall y\in F: x\le y,$

2) $\forall\varepsilon>0,\exists x_0\in E,\exists y_0\in F: y_0-x_0<\varepsilon$

бўлса, у ҳолда

$$SupE=\inf F$$

бўлиши исботлансин.

70. Агар $E\subset R$ тўплам чегараланган бўлиб, $E_1\subset E$ бўлса, у ҳолда

$$SupE_1\le SupE,\quad \inf E_1\ge\inf E$$

бўлиши исботлансин.

71. Агар $E\subset R$ тўплам чегараланган бўлиб, $a\in R$ бўлса, у ҳолда

$$Sup\{a+E\}=a+SupE$$

бўлиши исботлансин.

72. Агар $E\subset R$ тўплам чегараланган бўлиб, $a>0$ бўлса, у ҳолда

$$Sup\{a\cdot E\}=a\cdot SupE$$

бўлиши исботлансин.

73. Айтайлик, чегараланган $\boldsymbol{E=\{x\}\subset R}$ тўплам ҳар бир $\boldsymbol{x}$ элементининг қарама-қаршиси $\boldsymbol{-x}$ лардан тузилган тўплам $\boldsymbol{F}$ бўлсин: $\boldsymbol{F=\{-x: x\in E\}}$. У ҳолда

$$\boldsymbol{SupF=-\inf E,\quad \inf F=-SupE}$$

бўлиши исботлансин.

74. Айтайлик, $\boldsymbol{E=\{x\}\subset R}$, $\boldsymbol{F=\{y\}\subset R}$ чегараланган тўпламлар бўлиб, $\boldsymbol{E+F=\{x+y: x\in E, y\in F\}}$ бўлсин. У ҳолда

$$\boldsymbol{Sup(E+F)=SupE+SupF,}$$

$$\boldsymbol{\inf(E+F)=\inf E+\inf F}$$

бўлиши исботлансин.

75. Айтайлик, $\boldsymbol{E=\{x\}\subset R, F=\{y\}\subset R}$ чегараланган тўпламлар бўлиб, $\boldsymbol{E-F=\{x-y: x\in E, y\in F\}}$ бўлсин. У ҳолда

$$\boldsymbol{Sup(E-F)=SupE-\inf F}$$

бўлиши исботлансин

76. Ушбу $\boldsymbol{E_+=\{x: x>0\}}$, $\boldsymbol{F_+=\{y: y>0\}}$ тўпламлар ёрдамида тузилган $\boldsymbol{E_+\cdot F_+=\{x\cdot y: x\in E_+, y\in F_+\}}$ тўплам учун

$$\boldsymbol{\inf(E_+\cdot F_+)=\inf E_+\cdot\inf F_+,}$$

$$\boldsymbol{Sup(E_+\cdot F_+)=SupE_+\cdot SupF_+}$$

бўлиши исботлансин.

77. Айтайлик, $\boldsymbol{E\subset R}$, $\boldsymbol{F\subset R}$ тўпламлар юқоридан чегараланган бўлсин. Унда

$$\boldsymbol{Sup(E\cup F)=\max(SupE,\ \ SupF)}$$

бўлиши исботлансин.

($\boldsymbol{\max(a,\ \ b)-a}$ ва $\boldsymbol{b}$ ларнинг каттаси)

78. $\boldsymbol{x\in R}$ соннинг абсолют қиймати $\boldsymbol{|x|}$ қуйидагича таърифланади:

$$|x| = \begin{cases} x, & агар \quad x \geq 0 \\ -x, & агар \quad x < 0 \end{cases}$$

Ихтиёрий x ҳақиқий сон учун

$$|x| \geq 0, \qquad |x| = |-x|, \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

бўлиши исботлансин.

79. Ихтиёрий x ва y ҳақиқий сонлари учун

1) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

2) $||x| - |y|| \leq |x - y|$,

3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

бўлиши исботлансин.

80. Ихтиёрий x ва y ҳақиқий сонлари ушбу

$$|x \cdot y| \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

тенгсизликни қаноатлантириши исботлансин.

81. Ушбу

$$E = \{x: \ |x| < a, \ a > 0\},$$

$$F = \{x: \ -a < x < a, \ a > 0\}$$

тўпламларнинг ўзаро тенглиги исботлансин.

82. Ушбу

$$E = \{x: \ |x| > a\},$$

$$F = \{x: \ x > a, \ x < -a\}$$

тўпламларнинг тенглиги исботлансин.

Қуйидаги тенгсизликларнинг ечимлар тўплами топилсин:

83. $|3x - 1| \leq |2x - 1| + |x|$

84. $|x - 2| < 3$

85. $|x + 3| > 2$

86. $|x| < x + 1$

87. $\left|\dfrac{x}{1+x}\right| > \dfrac{x}{x+1}$

88. $\left|x^2-5\right| > 2$

89. $\left|x^2-2x-3\right| > x^2-2x-3$

90. $|x+3|-|x+1| < 2$

91. $\left|x^2-2x\right| > x^2-|2x|$

92. $|x+2|+|x-2| \geq 12$

93. $|x-4|+|x+4| \leq 10$

Қуйидаги тенгламаларнинг ечимлар тўплами топилсин:

94. $|2x+3| = x^2$.

95. $|\sin x| = \sin x + 2$.

96. $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$.

97. $\left|x^2-5x+6\right| = -\left(x^2-5x+6\right)$.

98. $|x| = x^2-6$.

99. $\left|\left(x^2+2x+5\right)+\left(x-5\right)\right| = \left|x^2+2x+5\right|+|x-5|$.

100. $\left|\left(x^4-4\right)-\left(x^2+2\right)\right| = \left|x^4-4\right|-\left|x^2+2\right|$.

II-БОБ.

Функция

1-§. Функция тушунчаси

1^0. Функция, унинг аниқланиш ва ўзгариш тўпламлари (соҳалари). $X \subset R$ ва $Y \subset R$ тўпламлар берилган бўлсин. Агар ҳар бир $x \in X$ сонга бирор f қоидага кўра битта $y \in Y$ сон мос қўйилган бўлса, функция берилган (аниқланган) дейилади ва

$$f: x \to y \quad \text{ёки} \quad y = f(x) \qquad (1)$$

каби белгиланади. Бунда X функциянинг аниқланиш тўплами (соҳаси) дейилиб, x га **функция аргументи**, y га эса x нинг **функцияси** дейилади.

Одатда (1) муносабат маънога эга бўладиган x нинг барча қийматларидан иборат тўпламни топиш билан функциянинг **берилиш соҳаси** аниқланади.

Ушбу

$$Y_f = \{y = f(x) : x \in X\}$$

тўплам $y = f(x)$ функциянинг **қийматлар тўплами** дейилади. Равшанки $Y_f \subset Y$ бўлади.

2^0. Элементар функциялар. Рационал, даражали, кўрсаткичли, логарифмик, тригонометрик ҳамда тескари тригонаметрик функциялар асосий элементар функциялар дейилади.

а) **рационал функция** $y = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$,

(бунда $n \in N, m \in N, a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_m \in R$) нинг аниқланиш соҳаси

$X = R \setminus \{x \in R : b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m = 0\}$ бўлади.

б) **даражали функция** $y = x^\mu$ (бунда $\mu \in R$) нинг аниқланиш соҳаси μ га боғлиқ бўлади.

в) **кўрсаткичли функция** $y = a^x$ (бунда $a > 0, a \neq 1$) нинг аниқланиш соҳаси $X = R$ бўлади.

г) **логарифмик функция** $y = \log_a x$ (бунда $a > 0, a \neq 1$) нинг аниқланиш соҳаси $X = (0, \ +\infty)$ бўлади.

д) **тригонометрик функциялар** $y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = tgx,\ y = ctgx$

нинг аниқланиш соҳалари мос равишда $X = R, \ \ X = R$,

$$X = R \setminus \left\{x \in R : x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \ \ k \in Z\right\}, \ \ X = R \setminus \{x \in R : x = k\pi, k \in Z\}$$

бўлади.

ж) **тескари тригонометрик функциялар**

$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \mathrm{arctg} x, \quad y = \mathrm{arcctg} x$$

нинг аниқланиш соҳалари мос равишда $X = [-1,+1]$, $X = [-1,+1]$, $X = R$, $X = R$ бўлади.

3^0. **Мураккаб ва тескари функциялар.** $y = f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, Y_f - эса шу функциянинг қийматлар тўплами бўлсин. Энди хар бир $y \in Y_f$ сонга F қоидага кўра битта $u(u \in U \subset R)$ сон мос қўйилсин:

$$f : x \to y, \quad F : y \to u.$$

Натижада ҳар бир $x \in X$ сонга битта $u \in U$ сон мос қўйиб, функция ҳосил бўлади:

$$u = F(y) = F(f(x)).$$

Бу функция **мураккаб функция** дейилади.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ функция X тўпламда аниқланган бўлиб, ихтиёрий $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ учун $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлсин. У холда ҳар бир $y \in Y_f$ сон учун ягона $x \in X$ сон топилиб, $f(x) = y$ бўлади. Бундай хосил қилинган функция берилган $f(x)$ га **тескари функция** дейилиб, $x = f^{-1}(y)$ каби белгиланади.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$y = \sqrt{-x^2 + x + 2} \qquad (2)$$

функциянинг аниқланиш соҳаси ва қийматлари тўплами топилсин.

◀(2) муносабат маънога эга бўлиши учун $-x^2 + x + 2 \geq 0$ бўлиши лозим. Кейинги тенгсизликни ечиб топамиз.

$$-x^2 + x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Демак, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси $X = [-1,\ 2]$ бўлади.

Равшанки, $y \geq 0$. Айни пайтда

$$y = \sqrt{-x^2 + x + 2} = \sqrt{-(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}} \leq \frac{3}{2}$$

бўлгани учун $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$ бўлади. Демак, функциянинг қийматлари тўплами

$Y_f = \left[0,\ \frac{3}{2}\right]$ бўлади.▶

2 – м и с о л . ***Агар***

$$f(x) = \mathrm{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{агар } x < 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0, \\ 1, & \text{агар } x > 0 \end{cases} \qquad \textit{ва} \qquad g(x) = x \cdot (1 - x^2)$$

бўлса, $\mathbf{f(g(x)),\ g(f(x))}$ *лар топилсин.*

$$◄\ f(g(x)) = sign[x(1-x^2)] = \begin{cases} 1, & агар\ x(1-x^2)>0 \\ 0, & агар\ x(1-x^2)=0 \\ -1, & агар\ x(1-x^2)<0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & агар\ 0<x<1\ \ ва\ \ x<-1 \\ 0, & агар\ x=0\ \ ва\ \ x=\pm 1 \\ -1, & агар\ x>1\ \ ва\ \ -1<x<0. \end{cases}$$

$\mathbf{g(f(x)) = signx(1-sign^2x) = 0}$.►

Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳалари топилсин.

101. $\mathbf{y = x + \frac{1}{x}}$

102. $\mathbf{y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}}$

103. $\mathbf{y = \frac{2}{\sqrt{25 - x^2}}}$

104. $\mathbf{y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}$

105. $\mathbf{y = \frac{1}{\sqrt{|x| + x}}}$

106. $\mathbf{y = \lg(1 - x^2)}$

107. $\mathbf{y = \lg(4 - x^2)}$

108. $\mathbf{y = \log_2 \log_3 \log_4 x}$

109. $\mathbf{y = \sqrt{9 - x^2} + \log\frac{x+1}{x-2}}$

110. $\mathbf{y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}}$

111. $\mathbf{y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}}$

112. $\mathbf{y = \ln\cos x}$.

113. $\mathbf{y = \arccos\frac{2x}{1+x^2}}$

114. $\mathbf{y = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}}$.

115. $\mathbf{y = \sqrt{\arcsin\left(\lg\frac{x}{10}\right)}}$

116. $\mathbf{y = \sqrt{\lg\cos x + 4}}$.

117. $\mathbf{y = \lg(1 - tgx)}$

118. $y = \mathbf{\lg[\cos(\lg x)]}$.

Қуйидаги функцияларнинг қийматлар тўплами топилсин.

119. $\mathbf{y = \frac{x}{1+x^2}}$

120. $\mathbf{y = \frac{x^2 - 5}{2x - 5}}$

121. $\mathbf{y = x + signx}$

122. $\mathbf{y = x + \frac{1}{x}}$ $\mathbf{\{x > 0\}}$

123. $y=\sqrt{\dfrac{9x^2+1}{x}}$

124. $y=\sin x+\cos x$

125. $y=\lg(1-2\cos x)$

126. $y=\left||x|-1\right|-x$

127. $y=\dfrac{x^2+x+2}{x^2-x+2}$

128. $y=x^2-4\cdot|x-1|+1$

129. Агар $f(x)=|x|-x$ бўлса, $f(-1),f(0),f(1),f(-2),f(2)$ лар топилсин.

130. Агар

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{агар}\quad 0\le x\le 1 \\ x, & \text{агар}\quad 1<x<2 \end{cases}$$

бўлса, $f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f\left(\dfrac{3}{2}\right),f(2)$ лар топилсин.

131. Агар $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ бўлса, $f(0),f(-x),f(x+1),f(x)+1,f\left(\dfrac{1}{x}\right),\dfrac{1}{f(x)}$ лар топилсин.

132. Агар $f(x)=[x]+\mathrm{sign}x$ бўлса, $f(0),f\left(\dfrac{3}{2}\right),f\left(-\dfrac{5}{2}\right),f\left(\dfrac{1}{10}\right)$ лар топилсин.

133. Агар $f(x)=x^3+3x-1$ бўлса, $f(a)+f(-a)$ топилсин.

134. Агар $f(x)=ax^2+bx+c$ бўлса, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ топилсин.

135. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ бўлсин. Агар $f(-1)=0,f(0)=2,f(1)=-3,$ $f(2)=5$ бўлса, $f(x)$ топилсин.

136. Агар $f(x)=3^x(a+bx)$ бўлса,

$$f(x+2)-6f(x+1)+9f(x)=0$$

бўлиши исботлансин.

137. Агар $f(u)$ функция (0,1) да аниқланган бўлса,

$$f(\sin x), f(\ln x), f\left(\frac{[x]}{x}\right)$$

функцияларнинг аниқланиш соҳалари топилсин.

138. Агар $\varphi(x)=x^2$, $\psi(x)=\sqrt{x}$ бўлса,

$\varphi(\varphi(x)), \varphi(\psi(x)), \psi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$ лар топилсин.

139. Агар $\varphi(x)=\text{sign}x$, $\psi(x)=\frac{1}{x}$ бўлса, $\varphi(\varphi(x)), \psi(\psi(x)), \varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$ лар топилсин.

140. Агар $\varphi(x)=\text{sign}x$, $\psi(x)=1+x^2$ бўлса, $\varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$ лар топилсин.

141. Агар $f(x)=\sqrt{1-x^2}, x=1+\sin^2 \pi t=\varphi(t)$ бўлса, $f(\varphi(t))$ функциянинг аниқланиш соҳаси топилсин.

142. Агар $\varphi(x)=\ln x^2, \psi(x)=\sin x$ бўлса, $\varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$ функциялар ва уларнинг аниқланиш соҳалари топилсин.

143. Агар $f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2+1$ бўлса, $f(x)$ топилсин.

144. Агар $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=x$ бўлса, $f(x)$ топилсин.

145. Агар $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$ бўлса, $f(x)$ топилсин.

146. Агар $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ бўлса, $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n\ \text{та}}$ функция топилсин.

147. Агар $f(x)=\frac{1}{1-x}$ бўлса, $f(f(f(x)))=x$ тенглик x нинг қандай қийматларида ўринли бўлади?

148. Агар $\forall x \in R$ да

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

кўпхад нолга тенг бўлса, у ҳолда кўпхаднинг барча коэффицентлари нолга тенг бўлишини исботлансин.

Қуйидаги функцияларга нисбатан тескари бўлган функциялар топилсин.

149. $f(x) = \dfrac{4-x}{4+x}$

150. $f(x) = x^2 + 1,\ -\infty < x \le 0$

151. $f(x) = 2x + x^2,\ -\infty < x \le 1$

152. $f(x) = -e^{\frac{1-x^2}{2}},\ 0 \le x < +\infty$

153. $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

154. $f(x) = \lg\dfrac{x}{2}$

155. $f(x) = \mathrm{arcctg}\,3x$

156. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар} \quad x \le 0 \\ x^2, & \text{агар} \quad x > 0 \end{cases}$

2-§. Маълум хусусиятли функциялар

1^0. **Чегараланган функциялар.** $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин. Агар шундай $M \in R$ топилсаки, X тўпламдан олинган ихтиёрий x учун

$$f(x) \le M$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\exists M \in R,\ \ \forall x \in X:\ \ f(x) \le M$$

бўлса, $f(x)$ функция X да **юқоридан чегараланган** дейилади.

Агар $\exists m \in R,\ \forall x \in X:\ f(x) \ge m$ бўлса, $f(x)$ функция X да **қуйидан чегараланган** дейилади.

Агар $f(x)$ функция X тўпламда ҳам юқоридан, ҳам қуйидан чегараланган бўлса, яъни $\exists C \in R_+ = (0, +\infty),\ \ \forall x \in X: |f(x)| \le C$ бўлса, $f(x)$ функция X да **чегараланган** дейилади.

2^0. **Ўсувчи ва камаювчи функциялар.** $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин.

$\mathbf{x_1 < x_2}$ *тенгсизликни каноатлантирувчи* $\forall \mathbf{x_1} \in \mathbf{X}$, $\forall x_2 \in X$ *лар учун* $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ бўлса, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X}$ да **ўсувчи (қатъий ўсувчи)** дейилади;

$\mathbf{x_1 < x_2}$ *тенгсизликни каноатлантирувчи* $\forall \mathbf{x_1} \in \mathbf{X}$, $\forall x_2 \in X$ *лар учун* $f(x_1) \ge f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ бўлса, $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X}$ да **камаювчи (қатъий камаювчи)** дейилади.

Ўсувчи ва камаювчи функциялар умумий ном билан **монотон функциялар** дейилади.

3^0. Жуфт, тоқ ва даврий функциялар. $\mathbf{X}$ бирор хақиқий сонлар тўплами бўлсин. Агар $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ учун $-\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ бўлса, $\mathbf{X}$ тўплам **0 нуқтага нисбатан симметрик** бўлган тўплам дейилади. 0 нуқтага нисбатан симметрик бўлган $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ тўпламда $\mathbf{f(x)}$ функция аниқланган бўлсин.

Агар $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ учун

$$\mathbf{f(-x) = f(x)}$$

бўлса, $\mathbf{f(x)}$ **жуфт функция** дейилади.

Агар $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ учун

$$\mathbf{f(-x) = -f(x)}$$

бўлса, $\mathbf{f(x)}$ **тоқ функция** дейилади.

Агар шундай $\mathbf{T} \in \mathbf{R}$ $(\mathbf{T} \neq \mathbf{0})$ сон мавжуд бўлсаки, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ учун

$$1)\ \mathbf{x - T \in X, \quad x + T \in X}$$
$$2)\ \mathbf{f(x + T) = f(x)}$$

бўлса, $\mathbf{f(x)}$ **даврий функция**, $\mathbf{T}$ сонга эса унинг **даври** дейилади.

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}}$$

функциянинг чегараланганлиги исботлансин.

◄Бу функция $\mathbf{X = (-\infty, +\infty)}$ да аниқланган бўлиб, $\forall x \in X$ да $\mathbf{f(x) > 0}$ бўлади. Демак берилган функция қуйидан чегараланган. Энди $\mathbf{f(x)}$ функцияни юқоридан чегараланганлигини кўрсатамиз. Равшанки,

$$\mathbf{(1 - x^2)^2 \ge 0}.$$

Бу тенгсизликдан $\mathbf{1 + x^4 \ge 2x^2}$ яъни $\mathbf{\frac{x^2}{1 + x^4} \le \frac{1}{2}}$ бўлиши келиб чиқади. Натижада $\mathbf{f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x^4} = \frac{1}{1 + x^4} + \frac{x^2}{1 + x^4} < 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$ бўлиб, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ да $\mathbf{0 < \frac{1 + x^2}{1 + x^4} < \frac{3}{2}}$ бўлади.►

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{f(x) = \frac{x}{1 + x^2}}$$

функциянинг $\mathbf{X=[1,+\infty)}$ ***тўпламда камаювчи бўлиши исботлансин.***

◄ $\forall\, \mathbf{x_1, x_2 \in X = [1,+\infty)}$ ва $\mathbf{x_1 < x_2}$ бўлсин. Унда

$$\mathbf{f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1^2}-\frac{x_2}{1+x_2^2}=\frac{x_1+x_1\cdot x_2^2-x_2-x_2\cdot x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}$$

$$\mathbf{=\frac{x_1-x_2+x_1\cdot x_2(x_2-x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=\frac{(x_1-x_2)(1-x_1\cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}}$$

бўлади. Кейинги тенгликдан $\mathbf{x_1-x_2<0,\ 1-x_1\cdot x_2<0}$ бўлишини эътиборга олиб, $\mathbf{f(x_1)-f(x_2)>0}$, яъни $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$ эканлигини топамиз.

Демак, $\mathbf{x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)}$.►

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{D(x)}=\begin{cases} 1\,,\ \textit{агар}\ \ x\text{ - }\textit{рационал сон бўлса,} \\ 0\,,\ \textit{агар}\ \ x\text{ - }\textit{иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

функция даврийликка текширилсин. (D(x) Дирихле функцияси дейилади).

◄Бу функция $\mathbf{X=(-\infty;+\infty)}$ да аниқланган. Ихтиёрий $\mathbf{T(T\neq 0)}$ рационал сон олайлик. Равшанки $\forall \mathbf{x}\in(-\infty;+\infty)$ ва $\mathbf{T}$ учун

$$\mathbf{x+T}=\begin{cases} \textbf{рационал сон, агар x - рационал сон бўлса,} \\ \textbf{иррационал сон, агар x - иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

Демак,

$$\mathbf{D(x+T)}=\begin{cases} \textbf{1, агар x - рационал сон бўлса,} \\ \textbf{0, агар x - иррационал сон бўлса} \end{cases}$$

бўлиб,

$$\mathbf{D(x+T)=D(x)}$$

бўлади. Бу эса Дирихли функцияси даврий функция, ихтиёрий $\mathbf{T(T\neq 0)}$ рационал сон унинг даври бўлишини билдиради.

Агар $\mathbf{T}$ иррационал сон, $\mathbf{x}$ эса рационал сон бўлса, равшанки $\mathbf{x+T}$ иррационал сон бўлади ва

$$\mathbf{D(x)=1,\quad D(x+T)=0}$$

Демак, иррационал сон Дирихле функциясининг даври бўлмайди.▶

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган оралиқда чегараланганлиги исботлансин:

157. $f(x)=x^2+2$, $x\in[-1,3]$

158. $f(x)=x^2-x-1$, $x\in[-1,5]$

159. $f(x)=\dfrac{1}{x-10}$, $x\in[0,5]$

160. $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in(-\infty;+\infty)$

170. $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^4}$, $x\in(-\infty;+\infty)$

171. $f(x)=tg^2x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$

172. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$

173. $f(x)=\dfrac{\cos x}{1,5-\sin x}$, $x\in R$

174. $f(x)=\dfrac{2\sin x}{1+tg^2x}$, $x\in R$

175. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $x\in R\setminus\{0\}$

$f(x)$ ***функция*** $X\subset R$ ***тўпламда аниқланган бўлсин. Агар***

$$\forall C\in R_+=(0,+\infty),\ \ \exists x\in X: |f(x)|>C$$

бўлса, $\mathbf{f(x)}$ *функция* $\mathbf{X}$ *да чегараланмаган дейилади.*

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган ораликда чегараланмаганлиги исботлансин.

176. $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x^2}}$, $\mathbf{X=[-1,1]\setminus\{0\}}$.

177. $\mathbf{f(x)=|x+2|}$, $\mathbf{X=R}$.

178. $\mathbf{f(x)=\frac{3^x}{x}}$, $\mathbf{X=R}$.

179. $\mathbf{f(x)=x\cdot\sin x}$, $\mathbf{X=R}$.

180. $\mathbf{f(x)=x+\frac{1}{x}}$, $\mathbf{X=R\setminus\{0\}}$.

181. $\mathbf{X\subset R}$ тўпламда аниқланган $\mathbf{f(x)}$ функциянинг юқоридан ҳамда қуйидан чегараланмаганлиги таърифлари келтирилсин.

182. Ихтиёрий функциянинг квадрати қуйидан чегараланганлиги исботлансин.

183. Ушбу $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}}$ $\mathbf{(x\neq 0)}$ функция $\mathbf{x=0}$ нуқтанинг ихтиёрий атрофида чегараланмаганлиги исботлансин.

184. Ушбу $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x^2-4}}$ $\mathbf{(-2<x<2)}$ функция қуйидан чегараланмаганлиги исботлансин.

185. Ушбу $\mathbf{f(x)=\sin^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)}$ функция юқоридан чегараланмаганлиги исботлансин.

$\mathbf{y = f(x)}$ *функция* $\mathbf{X \subset R}$ *тўпламда аниқланган бўлиб,*

$$\mathbf{Y_f = \{y = f(x) : x \in X\}}$$

эса унинг қийматлар тўплами бўлсин. Бу тўпламнинг аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси $\mathbf{f(x)}$ *функциянинг* $\mathbf{X}$ *тўпламдаги аниқ юқори (аниқ қуйи) чегараси дейилиб, у* $\mathbf{\sup\limits_{X} f(x)}$ $\left(\mathbf{\inf\limits_{X} f(x)}\right)$ *каби белгиланади.*

Агар $\mathbf{X}$ *тўпламда шундай* $\mathbf{x_0}$ *нуқта* $\mathbf{(x_0 \in X)}$ *топилсаки,* $\mathbf{\forall x \in X}$ *учун* $\mathbf{f(x) \le f(x_0)\,(f(x) \ge f(x_0))}$ *тенгсизлик бажарилса* $\mathbf{f(x_0)}$ *– миқдор* $\mathbf{f(x)}$ *функциянинг* $\mathbf{X}$ *тўпламдаги энг катта (энг кичик) қиймати дейилиб, у* $\mathbf{\max\limits_{X} f(x)}$ $\left(\mathbf{\min\limits_{X} f(x)}\right)$ *каби белгиланади.*

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган оралиқда аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари топилсин.

186. $\mathbf{f(x) = x^2 + \pi,\ -1 \le x \le 2}$.

187. $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{1+x^2},\ -\infty < x < +\infty}$.

188. $\mathbf{f(x) = \dfrac{1}{x^2-4},\ -2 < x < 2}$.

189. $\mathbf{f(x) = \{x\},\ 0 < x < 1}$.

190. $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1},\ 0 < x < 1}$.

191. $\mathbf{f(x) = a^{\frac{1}{x}}\,(a > 1),\ -\infty < x < 0}$

192. Ушбу

$$\mathbf{\inf\limits_{X}[-f(x)] = -\sup\limits_{X} f(x)}$$

тенглик исботлансин.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган оралиқда энг катта ва энг кичик қийматлари топилсин.

193. $f(x)=x^2+1,\ -1\le x\le 3$

193. $f(x)=tg^2x,\ -\frac{\pi}{4}\le x\le \frac{\pi}{4}$

194. $f(x)=-x^2-x+2,\ -2\le x\le 1$

195. $f(x)=\frac{x}{x+2},\ -10\le x\le -1$

196. $f(x)=\frac{x^4+4}{x^2},\ 1\le x\le 2$

197. $X\subset R$ тўпламда аниқланган $f(x)$ учун $\max\limits_X f(x)$ ва $\min\limits_X f(x)$ мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\sup_X f(x)=\max_X f(x),\quad \inf_X f(x)=\min_X f(x)$$

бўлиши исботлансин.

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган ораликда ўсувчи бўлиши исботлансин.

198. $f(x)=x^2+1,\qquad 0\le x<+\infty$

199. $f(x)=x^3,\qquad -\infty<x<+\infty$

200. $f(x)=x^4+6x^2+1,\qquad 0<x<+\infty$

201. $f(x)=\arcsin x,\qquad -1\le x\le 1$

202. $f(x)=x+\mathrm{arctg}x,\qquad -\infty<x<+\infty$

203. $f(x)=x^3+\arcsin x,\qquad -\infty<x<+\infty$

204. $f(x)=\cos\frac{x^2}{1+x^2},\qquad -\infty<x\le 0$

205. $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$, $\quad -\infty < x < -2$

206. $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$, $\quad x\in(0,\pi)\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган ораликда камаювчи бўлиши исботлансин:

207. $f(x)=1-x^2$, $\quad 0\le x<+\infty$

208. $f(x)=x^2-5x+6$, $\quad -\infty<x<\dfrac{5}{2}$

209. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1}$, $\quad x\ne 1$

210. $f(x)=\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\quad -\infty<x<+\infty$

211. $f(x)=\operatorname{arctg}x-x$, $\quad -\infty<x<+\infty$

212. $f(x)=\arccos|x|$, $\quad 0\le x\le 1$

213. $f(x)=x-\sqrt{x^2-1}$, $\quad 1\le x<+\infty$

214. $f(x)=\lg(x^2-6x+10)$, $\quad x\in(-\infty,3)$

215. Агар $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда монотон бўлса, $-f(x)$ функция ҳам шу тўпламда манотон бўлиши исботлансин.

216. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X \subset R}$ тўпламда монотон бўлиб, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ да $\mathbf{f(x) > 0}$ бўлса, $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{f(x)}}$ функция ҳам шу тўпламда монотон бўлиши исботлансин.

217. Монотон функциялардан тузилган мураккаб функциянинг монотон бўлиши исботлансин.

Қуйидаги функциялар жуфт ёки тоқликка текширилсин:

218. $\mathbf{f(x) = x^5 - 3x^3 + x}$.

219. $\mathbf{f(x) = x^2 - \cos x}$.

220. $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{1 + x^2}}$.

221. $\mathbf{f(x) = x + tgx}$.

222. $\mathbf{f(x) = x^2 \cdot \sin \dfrac{1}{x}}$.

223. $\mathbf{f(x) = \sqrt{1 - x^2}}$.

224. $\mathbf{f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}}$.

225. $\mathbf{f(x) = \dfrac{|\sin x|}{1 - \cos x}}$.

226. $\mathbf{f(x) = \sin x + \cos x}$

227. $\mathbf{f(x) = lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)}$.

228. $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^3 + \sin x}{1 + x^2}}$ $\mathbf{(-4 \le x \le 4)}$

229. $\mathbf{f(x) = tgx^3 + 4x^9}$.

230. $\mathbf{f(x) = \sqrt{x^2 + 5}}$

231. $\mathbf{f(x) = lg\dfrac{1 + x}{1 - x}}$.

232. $\mathbf{f(x) = x^3 + arctg2x}$.

233. 0 нуқтага нисбатан симметрик бўлган $\mathbf{X \subset R}$ тўпламда $\mathbf{f(x)}$ функция аниқланган. У ҳолда

$$F(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

функция жуфт,

$$\Phi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

функция эса тоқ бўлиши исботлансин.

234. 0 нуқтага нисбатан симметрик бўлган $X \subset R$ тўпламда аниқланган ҳар қандай $f(x)$ функция жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси орқали ифодаланиши исботлансин.

235. Қуйидаги функциялар жуфт ва тоқ функциялар йиғиндиси сифатида ифодалансин.

1) $f(x)=\frac{1}{x^2+x}$

2) $f(x)=x^3$

3) $f(x)=x^2$

4) $f(x)=a^x$

5) $f(x)=(x+1)^3$

6) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ $(-1<x<1)$

7) $f(x)=\arccos x$

Қуйидаги функцияларнинг даврий эканлиги кўрсатилиб, уларнинг энг кичик мусбат даврлари топилсин.

236. $f(x)=\sin 2x$

237. $f(x)=a\sin(\alpha x+\beta)$

238. $f(x)=tgx+ctgx$

239. $f(x)=\sin^4 x$

240. $f(x)=|\cos x|$

241. $f(x)=2^{\sin x}$

242. $\mathbf{f(x)=\sin 2x+2\sin 3x}$ **243.** $\mathbf{f(x)=\sqrt{tgx}}$

244. Қуйидаги функцияларнинг даврий эмаслиги кўрсатилсин:

1) $\mathbf{f(x)=\sin x^2}$

2) $\mathbf{f(x)=tg\sqrt{x}}$

3) $\mathbf{f(x)=x+\sin x}$

4) $\mathbf{f(x)=\sin\sqrt{2}\cdot x+\cos\sqrt{5}\cdot x}$

245. Агар $\mathbf{f(x)=\cos x+\sin ax}$ даврий функция бўлса, $\mathbf{a}$ рационал сон бўлиши исботлансин.

3-§. Функция графиги

1^0. Функция графиги тушунчаси. Функциялар графиклари устида амаллар. $\mathbf{y=f(x)}$ функция $\mathbf{X\subset R}$ тўпламда аниқланган бўлиб, $\mathbf{x_0\in X}$ бўлсин. Функциянинг $\mathbf{x_0}$ нуқтадага қийматини $\mathbf{y_0}$ дейлик: $\mathbf{y_0=f(x_0)}$. Натижада $\mathbf{x_0}$ ва $\mathbf{y_0}$ сонлардан тузилган ($\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}$) жуфтлик хосил бўлади ва у текисликдаги нуқтани ифодалайди.

Текисликнинг ушбу

$$\mathbf{\Gamma_f=\{(x,f(x)):\ \ x\in X\}}$$

нуқталари тўплами $\mathbf{f(x)}$ функциянинг **графиги** дейилади.

$\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{g(x)}$ функциялар $\mathbf{X\subset R}$ тўпламда берилган бўлсин. У ҳолда $\mathbf{f(x)\pm g(x)}$, $\mathbf{f(x)\cdot g(x)}$, $\mathbf{f(x)/g(x)}$, $\mathbf{(g(x)\neq 0)}$ функциялар графиги қуйидагича бўлади:

$$\mathbf{\Gamma_{f\pm g}=\{(x,f(x)\pm g(x)):x\in X\}},$$
$$\mathbf{\Gamma_{f\cdot g}=\{(x,f(x)\cdot g(x)):x\in X\}},$$
$$\mathbf{\Gamma_{f/g}=\{(x,f(x)/g(x)):x\in X\}\ \ (g(x)\neq 0)}.$$

2^0. **$\mathbf{f(x)}$ функция графигига кўра унга боғлиқ бўлган баъзи функцияларнинг графикларини ясаш.** $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X\subset R}$ тўпламда берилган бўлиб, унинг графиги $\mathbf{\Gamma_f}$ маълум бўлсин. Бу функция графигидан фойдаланиб қуйидаги

$$f(x)+b,\ \ f(x-a),\ \ A\cdot f(x),\ \ f(k\cdot x),\ \ Af(k(x-a))+b,\ \ |f(x)|,\ f(|x|)$$

функцияларнинг графикларини топиш мумкин:

1) $f(x)+b$ функция графиги Γ_f ни ординаталар ўқида b бирликка, $b>0$ да юқорига, $b<0$ да пастга суриш билан топилади.

2) $f(x-a)$ функция графиги Γ_f ни абсциссалар ўқи бўйича a бирликка, $a>0$ да ўнгга, $a<0$ да чапга суриш билан топилади.

3) $A\cdot f(x)$ функция графиги Γ_f нуқталар ординаталарини A га кўпайтириш билан топилади.

4) $f(kx)$ функция графиги Γ_f нуқталар абсциссаларини k га бўлиш билан топилади.

5) $Af(k(x-a))+b$ функциянинг графиги Γ_f га юқоридаги қоидаларни бирин-кетин қўллаш билан топилади.

6) $|f(x)|$ функция графиги, бу функцияни

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{агар } f(x)>0,\ \ x\in X, \\ -f(x), & \text{агар } f(x)<0,\ \ x\in X \end{cases}$$

бўлишини эътиборга олиб топилади.

7) $f(|x|)$ функция графиги, бу функцияни

$$f(|x|)=\begin{cases} f(x), & \text{агар } x\ge 0, \\ f(-x), & \text{агар } x<0 \end{cases}$$

бўлишини эътиборга олиб топилади.

6 – м и с о л . *Ушбу*

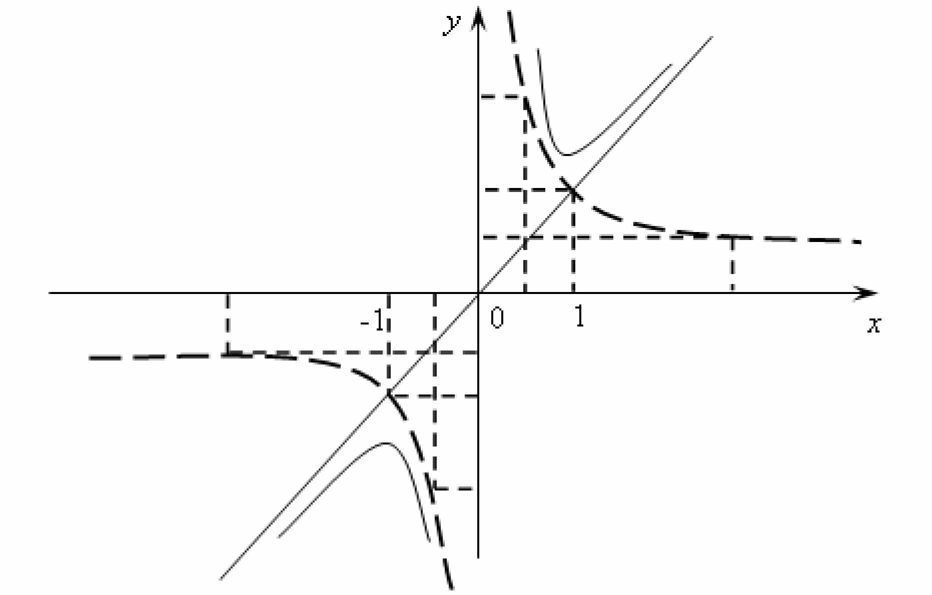
$$f(x)=x+\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)$$

функция графиги чизилсин.

◀Равшанки, бу функция

$$f_1(x)=x \text{ ва } f_2(x)=\frac{1}{x}$$

функциялар йиғиндисидан иборат. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялар графиклари маълум. Улар 2-чизмада пунктир чизиқлар ёрдамида кўрсатилган.



2-чизма.

Энди $\mathbf{x}$ ўзгарувчининг ҳар бир қийматида $\mathbf{f_1(x)+f_2(x)}$ ни ҳисоблаб, сўнг текисликда $\mathbf{(x,\ f_1(x)+f_2(x))}$ нуқталарни аниқлаймиз. (Масалан, $\mathbf{x=\frac{1}{2}}$ да $\mathbf{f_1\left(\frac{1}{2}\right)+f_2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}}$ бўлиб, текисликда $\mathbf{\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)}$ нуқта ҳосил бўлади). Бундай нуқталар орқали эгри чизиқ ўтказиб берилган функциянинг графиги ясалади.►

7 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{f(x)=x+x\cdot\sqrt{(x-1)^2}}$$

функция графиги ясалсин.

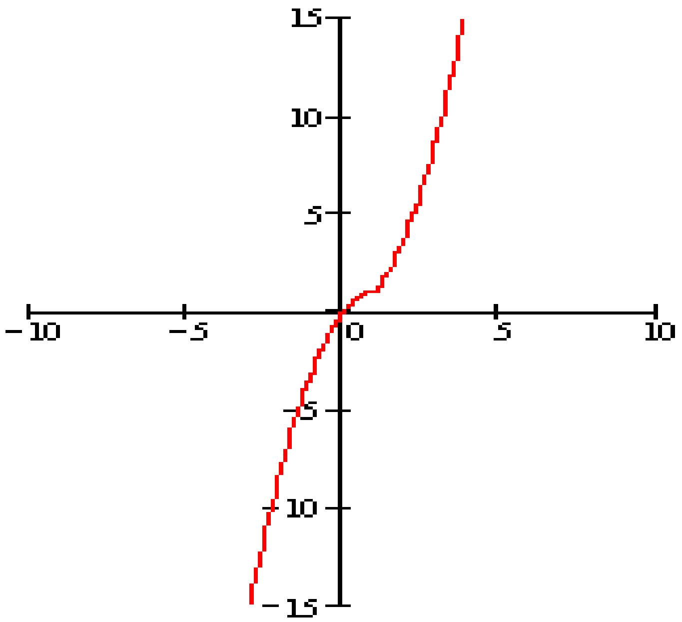
◄Равшанки

$$\mathbf{f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{агар}\ \ x>1\ \ \text{бўлса,} \\ -x^2+2x, & \text{агар}\ \ x\le 1\ \ \text{бўлса} \end{cases}}$$

бўлади. Демак $\mathbf{x>1}$ бўлганда $\mathbf{f(x)=x^2}$ бўлиб, унинг графиги параболадан иборат, $\mathbf{x\le 1}$ бўлганда $\mathbf{f(x)=-x^2+2x}$ бўлиб, уни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\mathbf{f(x)=-x^2+2x=-\left[(x-1)^2-1\right]=-(x-1)^2+1}$$

Бу функциянинг графигини $\mathbf{f_1(x)=x^2}$ функция графиги ҳамда $2^{\mathbf{0}}$ да келтирилган қоидалардан фойдаланиб топамиз. Берилган функциянинг графиги 3-чизмада тасвирланган.►



3-чизма.

8 – м и с о л . ***Ушбу***

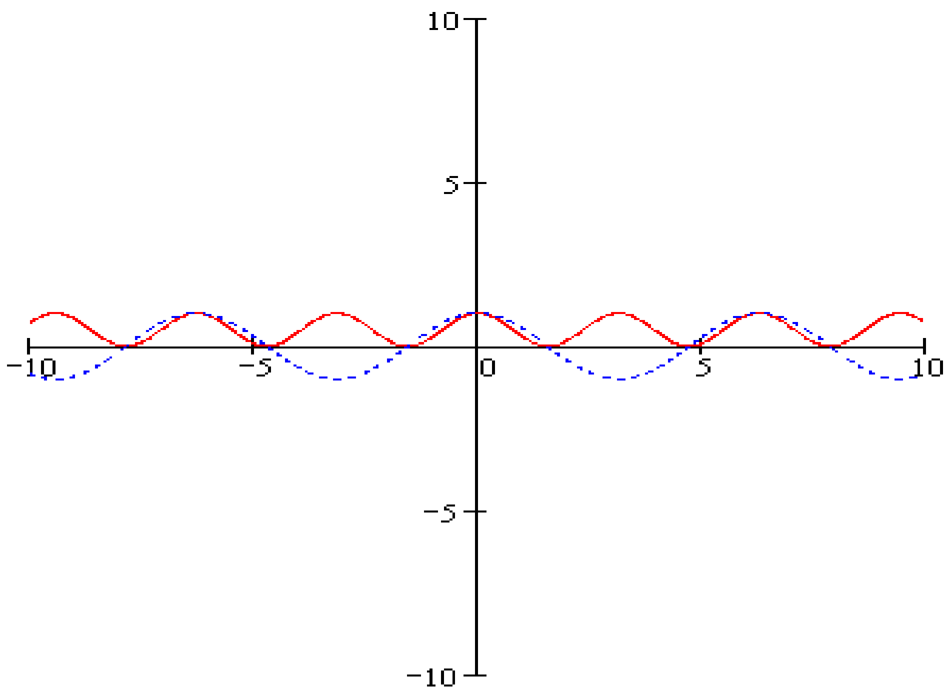
$$\mathbf{f(x) = \cos^2 x}$$

функция графиги чизилсин.

◄Аввал берилган функцияни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\mathbf{f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x},$$

сўнгра $\mathbf{f_1(x) = \cos x}$ функция графигига ҳамда $1^{\mathbf{0}}$, $2^{\mathbf{0}}$ да келтирилган қоидаларни қўллаб берилган функциянинг графигини ясаймиз *(4-чизма)*.►



4-чизма.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари чизилсин:

246. 1) $\mathbf{f(x)=0,}$ 2) $\mathbf{f(x)=2,}$ 3) $\mathbf{f(x)=-1}$

247. 1) $\mathbf{f(x)=x,}$ 2) $\mathbf{f(x)=-x,}$ 3) $\mathbf{f(x)=2x,}$ 4) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}\cdot x}$

248. 1) $\mathbf{f(x)=2x+3,}$ 2) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2},}$ 3) $\mathbf{f(x)=3-2x}$

249. $\mathbf{f(x)=\begin{cases} -x+1, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } x\geq 0 \text{ бўлса} \end{cases}}$

250. 1) $\mathbf{f(x)=|x|,}$ 2) $\mathbf{f(x)=-|x|,}$ 3) $f(x)=2\cdot|x|$

251. 1) $\mathbf{f(x)=|x+1|,}$ 2) $\mathbf{f(x)=|x-1|}$

252. $\mathbf{f(x)=|x|+|x-1|+|x+1|}$

253. 1) $\mathbf{f(x)=2^x}$, 2) $\mathbf{f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x}$, 3) $\mathbf{f(x)=e^x}$

254. 1) $\mathbf{f(x)=\log_2 x}$, 2) $\mathbf{f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x}$, 3) $\mathbf{f(x)=\ln x}$

255. 1) $\mathbf{f(x)=\sin x}$, 2) $\mathbf{f(x)=\cos x}$, 3)$\mathbf{f(x)=tgx}$, 4) $\mathbf{f(x)=ctgx}$

256. 1) $\mathbf{f(x)=signx}$, 2) $\mathbf{f(x)=x\cdot signx}$

257. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$, 2) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x+1}}$, 3) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x-1}}$

258. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{-2}{x+1}}$, 2) $\mathbf{f(x)=\frac{3}{2-x}}$, 3) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{2x+1}}$

259. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x+1}+1}$, 2) $\mathbf{f(x)=\frac{x}{x+1}}$, 3) $\mathbf{f(x)=\frac{x}{1-x}}$

260. $\mathbf{f(x)}$ функциянинг графигини билган ҳолда ушбу

1) $\mathbf{y=-f(x)}$, 2) $\mathbf{y=f(-x)}$, 3) $\mathbf{y=-f(-x)}$ функцияларнинг графиклари топилсин.

261. Агар $\mathbf{f(x)}$ жуфт функция бўлса, унинг графиги ординаталар ўқига нисбатан симметрик жойлашган бўлиши исботлансин.

262. Агар $\mathbf{f(x)}$ тоқ функция бўлса, унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган бўлиши исботлансин.

Ушбу $\mathbf{f(x)=x^2}$ функциянинг графиги маълум. Унга кўра қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

263. $\mathbf{f(x)=2x^2-4x+1}$.

264. $\mathbf{f(x)=x^2-3x}$

265. $\mathbf{f(x)=x^2-5x+6}$

266. $\mathbf{f(x)=3x-4-2x^2}$

267. $\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+x+1}$.

268. $\mathbf{f(x)=-2x^2-x+6}$

269. $\mathbf{f(x)=x\cdot|x|}$.

270. $\mathbf{f(x)=x^2-2|x|+1}$

271. $\mathbf{f(x)=\frac{x^3\cdot x}{|x|}}$.

272. $\mathbf{f(x)=|4x^2-1|-3x}$

273. $\mathbf{f(x)=|x^2+x-2|}$.

274. $\mathbf{f(x)=(x-1)\cdot|x-2|}$

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

275. 1) $f(x)=x^3$ 2) $f(x)=-x^3$ 3) $f(x)=2x^3$ 4) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^3$.

276. 1) $f(x)=(x-1)^3$ 2) $f(x)=(x+1)^3$

277. 1) $f(x)=|x^3|$ 2) $f(x)=-x^2\cdot|x|$

278. $f(x)=x^3-3x$.

279. $f(x)=x^2-x^3$

280. $f(x)=-x^4+4x^2$.

281. $f(x)=1-x-x^3$

282. $f(x)=x^4-x^3+x^2$.

Ушбу $f(x)=\frac{1}{x}$ функциянинг графиги маълум. Унга кўра қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

283. $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$

284. $f(x)=\frac{1-2x}{x-2}$

285. $f(x)=\frac{3x-2}{2x+1}$

286. $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$

287. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}$

288. $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$

289. $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x+1}$.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

290. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x^2}}$, 2) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x^3}}$

291. 1) $\mathbf{f(x)=x+\frac{1}{x^2}}$, 2) $\mathbf{f(x)=x^2+\frac{1}{x}}$

292. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}}$, 2) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}}$

293. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{1-x^2}}$, 2) $\mathbf{f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}}$

294. $\mathbf{f(x)=\frac{x^3}{4-x^2}}$. **295.** $\mathbf{f(x)=\frac{3x-2}{5x^2}}$

296. $\mathbf{f(x)=\frac{2x}{x^2+1}}$

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

297. 1) $\mathbf{f(x)=\sqrt{x}}$ 2) $\mathbf{f(x)=\sqrt[3]{x}}$

298. 1) $\mathbf{f(x)=\sqrt{x-2}}$ 2) $\mathbf{f(x)=\sqrt{1-x}}$

299. $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2-1}}$. **300.** $\mathbf{f(x)=\sqrt{1-x^2}}$

301. $\mathbf{f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$. **302**. $\mathbf{f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$

303. $\mathbf{f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$. **304.** $\mathbf{f(x)=\sqrt{\frac{x^2-4}{x^2-9}}}$.

305. $f(x)=\sqrt{2x-x^2-1}$.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

306. 1) $f(x)=2^x$ 2) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

307. 1) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ 2) $f(x)=2^{\frac{1}{x}}+1$

308. $f(x)=e^{-x^2}$. **309.** $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$

310. $f(x)=5^{x-|x|}$. **311.** $f(x)=3^x-3^{|x|}$

312. $f(x)=\dfrac{1}{2^x-1}$. **313.** $f(x)=3^{1-x^2}$

314. $f(x)=\dfrac{2^x}{2^{x+1}-1}$. **315.** $f(x)=\dfrac{2^{2x}-4}{\left|2^x-2\right|}$

316. $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. **317.** $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

318. $f(x)$ функция тескари $f^{-1}(x)$ функцияга эга бўлсин. Тескари $f^{-1}(x)$ функциянинг графиги $f(x)$ функция графигига $y=x$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлиши исботлансин.

Қуйидаги функцияларнинг графиклари чизилиб, уларга кўра бу функцияларга мос бўлган тескари функция графиклари ясалсин:

319. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}\cdot x-3}$ 2) $\mathbf{f(x)=\sqrt{x}}$

320. 1) $\mathbf{f(x)=\frac{x}{x+1}}$ 2) $\mathbf{f(x)=\frac{x+1}{x-1}}$

321. $\mathbf{f(x)=x^2\cdot signx}$ **322.** $\mathbf{f(x)=2x-x^2 \quad (x\geq 1)}$

323. $\mathbf{f(x)=\sqrt{1-x^2} \quad (0\leq x\leq 1)}$

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

324. 1) $\mathbf{f(x)=\log_2(x+1)}$ 2) $\mathbf{f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)}$

325. 1) $\mathbf{f(x)=\log_3\left(\frac{1}{3}\cdot x+2\right)}$ 2) $\mathbf{f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\cdot x-1\right)}$

326. $\mathbf{f(x)=\log_3|x|}$. **327.** $\mathbf{f(x)=\log_2\log_2 x}$

328. $\mathbf{f(x)=\log_2(x^2-4)}$. **329.** $\mathbf{f(x)=\frac{\log_2 x^2}{|\log_2 x|}}$

330. $\mathbf{f(x)=\log_{\sqrt{2}}(2x-1)}$. **331.** $\mathbf{f(x)=\lg\frac{1-2x}{x+3}}$

332. $\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}\cdot\log_2\frac{1+x}{1-x}}$. **333.** $\mathbf{f(x)=\log_2^2 x}$

Қуйидаги тригонометрик функцияларнинг графиклари ясалсин:

334. 1) $\mathbf{f(x)=\sin 2x}$, 2) $\mathbf{f(x)=\sin 3x}$, 3) $\mathbf{f(x)=\sin 5x}$

335. 1) $f(x)=\sin\frac{1}{2}x$, 2) $f(x)=\sin\frac{1}{3}x$, 3) $f(x)=\sin\frac{1}{5}x$

336. 1) $f(x)=2\sin 2x$, 2) $f(x)=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}x$

337. 1) $f(x)=\cos 2x$, 2) $f(x)=\cos\frac{1}{3}x$, 3) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}x$

338. 1) $f(x)=\mathrm{tg}2x$, 2) $f(x)=\mathrm{tg}\frac{1}{2}x$

339. 1) $f(x)=2\sin(x+2)$, 2) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

340. 1) $f(x)=3\cos(x-1)$, 2) $f(x)=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{3}x-1\right)$

341. $f(x)=\sin x+\cos x$. **342**. $f(x)=\sin 4x+5\cos 6x$

343. $f(x)=2\sin x+|\cos x|$. **344.** $f(x)=\sin x+|\sin x|$

345. $f(x)=x+\sin x$. **346.** $f(x)=3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

347. $f(x)=\cos x-|\cos x|$. **348.** $f(x)=\mathrm{sign}(\sin x)$

34 9. 1) $f(x)=\sin^2 x$, 2) $f(x)=\cos^2 x$

350. $f(x)=x\cdot\sin x$. **351.** $f(x)=\mathrm{tg}x\cdot\cos x$

352. $f(x)=\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$. **353.** $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

354. $f(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$.

355. $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$

356. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

357. $f(x) = x \cdot \left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$

358. $f(x) = \frac{1+\cos x}{3-\sin x}$.

359. $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$

Қуйидаги тескари тригонометрик функцияларнинг графиклари ясалсин:

360. 1) $f(x) = 2\arcsin\frac{x}{2}$, 2) $f(x) = \frac{1}{2}\arccos(2x)$

361. 1) $f(x) = |\arcsin x|$, 2) $f(x) = |\mathrm{arctg}x|$

362. 1) $f(x) = \arcsin\frac{1}{x}$, 2) $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{1}{x}$

363. $f(x) = \arcsin\left(1 - \frac{x}{2}\right)$.

364. $f(x) = \arccos\frac{1+x}{2}$

365. $f(x) = x + \mathrm{arctg}x$.

366. $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$

367. $f(x) = 1 + \arccos\frac{|x|}{2}$.

368. $f(x) = \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$

369. $f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

370. $f(x) = \mathrm{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$

371. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

372. $f(x) = \arcsin(\cos x)$

373. $f(x) = \arccos(\cos x)$.

374. $f(x) = \mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}\frac{1-x}{1+x}$

375. $f(x)=\arccos(\arcsin x)$

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ясалсин:

376. $f(x)=\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

377. $f(x)=\ln(1+e^x)$

378. $f(x)=\ln\sin x$.

379. $f(x)=\sqrt{\ln\cos x}$

380. $f(x)=\arcsin e^x$.

381. $f(x)=\dfrac{|x+1|-|x-1|}{x}$

382. $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

383. $f(x)=2^{\operatorname{arctg} x}$.

384. $f(x)=\operatorname{arctg}(\ln x)$

385. $f(x)=\cos x\cdot \operatorname{sign}(\sin x)$.

386. $f(x)=\dfrac{1}{e^x\cdot\sin x}$.

387. $f(x)=[\sin x]+[\cos x]$.

4-§. Натурал аргументли функциялар (сонлар кетма-кетлиги)

1^0. Сонлар кетма-кетлиги. Чегараланган ва монотон кетма-кетликлар. Маълумки, ҳар бир $n\in N$ натурал сонга f қоидага кўра битта $x_n\in R$ ҳақиқий сон мос қўйилган бўлса, функция берилган дейилар эди. Одатда, бундай функция натурал аргументли функция дейилиб, $x_n=f(n)$ каби белгиланади. Бундай функция қийматларидан тузилган $\{x_n\}: x_1, x_2, x_3,..., x_n,...$ тўплам **сонлар кетма-кетлиги** дейилади.

Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин.

Агар $\exists\ C\in R,\ \ \forall n\in N: x_n\le C$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик юқоридан чегараланган, $\exists\ C\in R,\ \ \forall n\in N: x_n\ge C$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик **қуйидан чегараланган** дейилади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ҳам қуйидан, ҳам юқоридан чегараланган, яъни $\exists\ C\in R_+=(0,+\infty),\ \ \forall n\in N,\ \ |x_n|\le C$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик **чегараланган** дейилади.

Агар $\forall\ C\in R_+,\ \ \exists n\in N: |x_n|>C$ бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик **чегараланмаган** дейилади.

$\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$\forall n\in N$ **да** $x_n\le x_{n+1}$ **бўлса,** $\{x_n\}$ **- ўсувчи**

$\forall n\in N$ **да** $x_n< x_{n+1}$ **бўлса,** $\{x_n\}$ **- қатъий ўсувчи**

$\forall n\in N$ **да** $x_n\ge x_{n+1}$ **бўлса,** $\{x_n\}$ **- камаювчи**

$\forall n\in N$ **да** $x_n> x_{n+1}$ **бўлса,** $\{x_n\}$ **- қатъий камаювчи**

кетма-кетлик дейилади.

2^0. Кетма-кетликлар устида амаллар.

$\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар берилган бўлсин:

$x_1, x_2, x_3,\dots, x_n,\dots$

$y_1, y_2, y_3,\dots, y_n,\dots$

Ушбу

$x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3,\dots, x_n+y_n,\dots$

$x_1-y_1, x_2-y_2, x_3-y_3,\dots, x_n-y_n,\dots$

$x_1\cdot y_1, x_2\cdot y_2, x_3\cdot y_3,\dots, x_n\cdot y_n,\dots$

$\dfrac{x_1}{y_1}, \dfrac{x_2}{y_2}, \dfrac{x_3}{y_3},\dots, \dfrac{x_n}{y_n},\dots \qquad (y_n\ne 0,\ n=1,2,\dots)$

кетма-кетликлар мос равишда $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликларнинг **йиғиндиси, айирмаси**, **кўпайтмаси** ва **нисбати** дейилади ва $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n-y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$, $\{x_n/y_n\}$ каби белгиланади.

9 – м и с о л . ***Ушбу***

$$x_n=\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}+\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}$$

кетма-кетликнинг чегараланганлиги исботлансин.

◀Равшанки,

$$|x_n|=\left|\frac{(-1)^n\cdot\sqrt{n}+\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+1}}\right|\le\sqrt{\frac{n}{n^2+1}}+1.$$

Энди $0 \le (1-n)^2 = 1 - 2n + n^2 \Rightarrow 2n \le n^2 + 1 \Rightarrow \frac{n}{n^2+1} \le \frac{1}{2}$ бўлишини эътиборга олсак, унда $\forall n \in N$ учун $|x_n| \le 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ тенгсизликнинг бажарилишини топамиз.►

10 – м и с о л . ***Ушбу***

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$$

сонлар кетма-кетлигининг ўсувчи эканлиги исботлансин.

◄Бу кетма-кетликнинг n ва $(n+1)$ ҳадлари учун

$$x_n = \frac{n^2}{n^2+1} = 1 - \frac{1}{n^2+1}, \qquad x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

бўлади.

Энди

$$(n+1)^2 > n^2 \Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$$

бўлишини эътиборга олиб, топамиз:

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2+1} > 1 - \frac{1}{n^2+1} = x_n.$$

Демак, $\forall n \in N$ учун $x_n < x_{n+1}$ бўлади.►

Қуйидаги кетма-кетликларнинг умумий хадига кўра дастлабки 5 та ҳади топилсин:

388. $x_n = (-1)^n$

389. $x_n = \frac{n+3}{n+1}$

390. $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{n^2}$

391. $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

392. $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

393. $x_n = \frac{n!}{2^n}$

394. $x_n = \frac{\log_2 n}{n}$.

Кетма-кетликнинг дастлабки ҳадларига кўра умумий хади топилсин:

395. $\sqrt{1\cdot 2}, \sqrt{2\cdot 3}, \sqrt{3\cdot 4},...$

396. $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5},...$

397. $5, \frac{25}{2}, \frac{125}{6}, \frac{625}{24},...$

398. $\frac{1}{11}, \frac{2}{7}, \frac{9}{19}, \frac{8}{13},...$

399. 1,3,1,3,1,3,...

Қуйидаги кетма-кетлик ҳадлари орасида энг каттаси топилсин:

400. $x_n = \sin\frac{n\pi}{2}$

401. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$

402. $x_n = \frac{\pi^2}{(2n+1)!}$

403. $x_n = \frac{10^n}{n!}$

404. $x_n = \frac{90n}{n^2+9}$

Қуйидаги кетма-кетлик ҳадлари орасида энг кичиги топилсин:

405. $x_n = n + \frac{5}{n}$

406. $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

407. $x_n = \cos\frac{n\pi}{2}$

408. $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланганлиги исботлансин:

409. $x_n = \frac{n^3+1}{n^3+4}$.

410. $x_n = \frac{n}{4+n^2}$

411. $x_n = \frac{2^n}{n!}$

412. $x_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$.

413. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

414. $x_n = e^{-n^2}$

415. $x_n = \frac{\log_2 n}{n}$.

416. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.

417. $x_n = n \cdot \ln\frac{n+1}{n}$

418. $x_n = \frac{n}{n^2+1} \cdot \sin\frac{n\pi}{2} + \frac{n^2}{n^4+1} \cdot \cos\frac{n\pi}{2}$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг чегараланмаганлиги исботлансин:

419. $x_n = (-1)^n \cdot n$.

420. $x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$

421. $x_n = n + (-1)^n \cdot n$

422. $x_n = \frac{n+1}{\log_2(n+1)}$

423. $x_n = \left(1 + (-1)^n\right) \cdot n + \frac{1-(-1)^n}{n}$

424. Кетма-кетликнинг юқоридан ҳамда қуйидан чегараланганлиги таърифи келтирилсин.

425. Қуйидаги кетма-кетликларнинг юқоридан чегараланмаганлиги исботлансин: 1) $x_n = \sqrt{n}$, 2) $x_n = \frac{n^3}{n^2+1}$, 3) $x_n = n^{\cos\pi x}$.

426. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чегараланган бўлса, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликларнинг ҳам чегараланган бўлиши исботлансин.

427. Агар $\{x_n\}$ чегараланган, $\{y_n\}$ чегараланмаган бўлса, $\{x_n + y_n\}$ чегараланмаган кетма-кетлик бўлиши исботлансин.

428. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чегараланмаган бўлса, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ кетма-кетликлар ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтирилсин.

Қуйидаги кетма-кетликларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлиши аниқлансин.

429. $x_n = \dfrac{n+1}{n}$

430. $x_n = n^2$

431. $x_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$

432. $x_n = 3^n - 2^n$

433. $x_n = \dfrac{1-n}{\sqrt{n}}$

434. $x_n = \dfrac{3^n}{n!}$

435. $x_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+7}}$

436. $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$

III-БОБ.

Функция лимити ва узлуксизлиги

1-§ Сонлар кетма-кетлигининг лимити

1^0 **Сонлар кетма-кетлигининг лимити тушунчаси**. Айтайлик, $\{x_n\}$ кетма-кетлик ва a сон берилган бўлсин.

1 – т а ъ р и ф . *Агар* $\forall\varepsilon > 0$ *олинганда ҳам шундай* $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ *топилсаки,* $\forall n > n_0$ *да*

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

бўлса, a *сон* $\{x_n\}$ *кетма-кетликнинг л и м и т и дейилади ва*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

каби белгиланади.

Хусусан,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

бўлса, $\{x_n\}$ **чексиз кичик миқдор** дейилади.

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик чекли лимитга эга бўлса, у **яқинлашувчи**, акс ҳолда узоқлашувчи дейилади.

2^0**. Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ҳақида тасдиқлар**:

1) Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик ўсувчи бўлиб, юқоридан чегараланган бўлса, у **яқинлашувчи** бўлади.

2) Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик камаювчи бўлиб, қуйидан чегараланган бўлса, у яқинлашувчи бўлади.

3) Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ ва $\{z_n\}$ кетма-кетликлар учун бирор номердан бошлаб барча $n \in N$ лар учун

$$x_n \le y_n \le z_n \text{ бўлиб, } \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = a$$

бўлса,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a$$

бўлади.

4) $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг яқинлашувчи бўлиши учун $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ топилиб, $\forall n > n_0$, $\forall m > n_0$ да $(n \ne m)$

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

бўлиши зарур ва етарли (Коши теоремаси (критерийси))

3^0**. Яқинлашувчи кетма-кетликлар устида амаллар**. Айтайлик, $\{x_n\}$ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар чекли

$$\lim_{n\to\infty} x_n, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n$$

ларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \qquad \left(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0\right)$,

4) $x_n \le y_n$ бўлганда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ бўлади.

4^0. e - с о н и . *Ушбу*

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1,2,3,...)$$

кетма-кетликнинг лимити (у яқинлашувчи бўлади) e сони дейилади:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e-иррационал сон бўлиб, $e = 2{,}7182818284...$ бўлади.

5^0. Чексиз катта миқдорлар. Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Агар $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $n_0 = n_0(\varepsilon) \in N$ топилсаки, $\forall n > n_0$ да

$$|x_n| > \varepsilon$$

бўлса, x_n кетма-кетликнинг лимити чексиз дейилади ва

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

каби ёзилади. Бундай кетма-кетлик **чексиз катта миқдор** дейилади.

6^0. Кетма-кетликнинг қуйи ва юқори лимитлари. Бирор $\{x_n\}$ кетма-кетлик берилган бўлиб, $\{x_{n_k}\}$ унинг қисмий кетма-кетлиги бўлсин. Одатда, $\{x_{n_k}\}$ нинг лимити берилган $\{x_n\}$кетма-кетликнинг **қисмий лимити** дейилади.

$\{x_n\}$ кетма-кетликнинг қисмий лимитларининг **энг каттаси (энг кичиги)** $\{x_n\}$кетма-кетликнинг **юқори (қуйи)** лимити дейилади ва у

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \qquad \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n\right)$$

каби белгиланади.

1 – м и с о л . ***Лимит таърифидан фойдаланиб***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3 + n + 5} = 0 \tag{1}$$

бўлиши исботлансин.

◄ (1) муносабатни исботлаш учун $\forall\varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай натурал $n_0 = n_0(\varepsilon)$ топилишини кўрсатиш керакки, $\forall n > n_0$ да

$$|x_n - 0| < \varepsilon, \qquad \text{яъни} \quad \left|\frac{1}{n^3+n+5} - 0\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

тенгсизлик бажарилсин.

Равшанки.

$$\left|\frac{1}{n^3+n+5} - 0\right| = \frac{1}{n^3+n+5}$$

бўлиб,

$$\frac{1}{n^3+n+5} < \frac{1}{n^3}$$

бўлади. Демак,

$$\frac{1}{n^3} < \varepsilon$$

тенгсизлик, яъни

$$n > \frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}$$

бажарилса, унда (2) тенгсизлик ҳам ўринли бўлади. Демак, юқорида айтилган n_0 топилди ва уни

$$n_0 = \left[\frac{1}{\sqrt[3]{\varepsilon}}\right] + 1$$

деб олиш етарли бўлади.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$x_n = \frac{n!}{n^n} \qquad (n = 1,2,3,\ldots)$$

кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги исботлансин ва унинг лимити топилсин.

◄Равшанки, $\forall n \in N$ да $x_n > 0$. Бинобарин берилган кетма-кетлик қуйидан чегараланган.

Энди

$$x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

бўлишини ҳамда $\frac{n}{n+1} < 1$ эканини эътиборга олиб, $x_n > x_{n+1}$ тенгсизликнинг бажарилишини топамиз. Бундан $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг камаювчи эканлиги келиб чиқади. Демак, берилган кетма-кетлик чекли лимитга эга. Уни a билан белгилайлик:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=a$$

Бернулли тенгсизлигига $\left((1+\alpha)^n \ge 1+\alpha n; \quad (\alpha>-1)\right)$ кўра

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge 1+n\cdot\frac{1}{n}=2$$

бўлиб, ундан $(n+1)^n \ge 2n^n$ бўлиши келиб чиқади. Бу тенгсизликни эътиборга олиб топамиз:

$$x_n-x_{n+1}=x_n-x_n\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=x_n\quad\frac{(n+1)^n-n^n}{(n+1)^n}\ge x_n\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=x_{n+1}$$

Кейинги тенгсизликдан

$$\lim_{n\to\infty}x_n \ge 2\lim_{n\to\infty}x_{n+1},$$

яъни $a\ge 2a$ бўлиб, ундан $a=0$ бўлиши келиб чиқади.

Демак,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0.$$ ►

Сонлар кетма-кетлиги лимити таърифига кўра a сони $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг лимити эканлиги исботлансин.

437. $x_n=\frac{10}{n}$; $a=0$

438. $x_n=\frac{n}{n+1}$; $a=1$

439. $x_n=\frac{n+1}{n}$; $a=1$.

440. $x_n=\frac{n}{2n+1}$; $a=\frac{1}{2}$

441. $x_n=\frac{(-1)^n}{2n+3}$; $a=0$

442. $x_n=\frac{2+(-1)^n}{n}$; $a=0$

443. $x_n=\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{2}$; $a=0$

444. $x_n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{n^2+1}$; $a=0$

445. $x_n=\frac{4n^2+1}{3n^2+2}$; $a=\frac{4}{3}$

446. $x_n=\frac{2n^2+3n+4}{4n^2-5n+6}$; $a=\frac{1}{2}$

447. $x_n = -\frac{6n}{n+2}$; $a = -6$

448. $x_n = \frac{1-3n^2}{n^2+2}$; $a = -3$

449. $x_n = \frac{2}{\sqrt{2n-1}}$; $a = 0$

450. $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{3n-11}}$; $a = 0$

451. $x_n = \sqrt[n]{2}$; $a = 1$

452. $x_n = \frac{2^n}{n!}$; $a = 0$

453. $x_n = q^n \quad (|q| < 1)$; $a = 0$

454. $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$; $a = 1$

Агар шундай $\varepsilon > 0$ *мавжуд бўлсаки, ихтиёрий* $n_0 \in N$ *учун шундай* $n \in N$ $(n > n_0)$ *топилиб,*

$$|x_n - a| \geq \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, яъни

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in N,\ \exists n \in N\ (n > n_0):\ |x_n - a| \geq \varepsilon \text{ бўлса,}$$

a *сон* $\{x_n\}$ *кетма-кетликнинг л и м и т и э м а с дейилади.*

Қуйидаги $\{x_n\}$ кема-кетликлар учун a сони лимит эмаслиги кўрсатилсин.

455. $x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$; $a = \frac{1}{2}$

456. $x_n = \mathrm{Sin}\frac{\pi n}{6}$; $a = \frac{1}{2}$

457. $x_n = 3^{(-1)^n \cdot n}$; $a = 0$

458. $x_n = \frac{2-\mathrm{Cos}\pi n}{2+\mathrm{Cos}\pi n}$; $a = 3$

459. $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; $a = \frac{1}{9}$

460. $x_n = \frac{n^2-1}{n^3}$; $a = 1$

461. $x_n = \frac{2n-3}{n^2}$; $a = 2$

462. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $a = -1$

463. $x_n = n^{(-1)^n}$; $a = 0$

464. $x_n = \sqrt{n^2+1} - n$; $a = 1$.

$\{x_n\}$ **кетма-кетликнинг чексиз катта кетма-кетлик эканлиги таъриф ёрдамида кўрсатилсин**.

465. $x_n = (-1)^n \cdot n$ **466.** $x^n = 3^{\sqrt{n}}$

467. $x_n = \lg(\lg n) \quad (n \geq 2)$ **468.** $x_n = n^{(-1)^n + 2}$

469. $x_n = n^{(-1)^n} \quad (n = 1,2,...)$ кетма-кетликнинг чегараланмаган кетма-кетлик бўлиб, чексиз катта кетма-кетлик эмаслиги кўрсатилсин.

Яқинлашувчи кетма-кетликнинг чегараланганлиги ҳақидаги теоремадан фойдаланиб $\{x_n\}$ **кетма-кетликнинг узоқлашувчи эканлиги кўрсатилсин.**

470. $x_n = n^2 \cos\frac{\pi n}{4}$ **471.** $x_n = \sqrt{n} \cdot \sin\frac{\pi n}{2}$

472. $x_n = (-1)^n \lg n$ **473.** $x_n = (-1)^n \lg\frac{1}{n}$

474. $x_n = \frac{1}{n} + n^{(-1)^n}$

Чексиз кичик кетма-кетликнинг чегараланган кетма-кетликка кўпайтмаси чексиз кичик кетма-кетлик бўлиши ҳақидаги теоремадан фойдаланиб $\{x_n\}$ **кетма-кетликнинг яқинлашуви эканлиги кўрсатилсин**.

475. $x_n = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} n)}{n}$ **476.** $x_n = \frac{\sin\frac{\pi n}{2}}{\sqrt{n}}$

477. $x_n = \frac{1}{\pi(6 + \cos n)}$ **478.** $x_n = \frac{\frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]}{\ln(n+1)}$

479. $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot [2 + (-1)^n]}$ **480.** $x_n = \frac{\cos\frac{\pi n}{4} - \sqrt{2}}{n^2}$

Кетма-кетлик лимитининг мавжудлиги ҳақидаги тасдиқлардан фойдаланиб, қуйидаги $\{x_n\}$ кетма-кетлик ларнинг яқинлашувчилиги исботлансин.

481. $x_n = \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\alpha}{2^n}$

482. $x_n = \frac{|\cos 1|}{3} + \frac{|\cos 2|}{3^2} + \ldots + \frac{|\cos n|}{3^n}$

483. $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$

484. $x_n = \frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$

485. $x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

486. $x_n = \sin 1 + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2}$

487. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$

488. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, бу ерда $|a_k| < M \quad (k = 0,1,2,\ldots)$ ва $|q| < 1$.

489. $x_n = \frac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos n!}{n\cdot(n+1)}$

490. $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$

491. $x_n = 0,\underbrace{33\ldots3}_{n\ \text{та}}$

492. $x_n = 0,\underbrace{77\ldots7}_{n\ \text{та}}$

493. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

494. $x_n = \frac{2^n}{n!}$

495. $x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{n}{(n+1)^2}$

496. $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$

497. $x_1 = \sqrt{2}\,,\;\; x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \ldots,\;\; x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ та илдиз}}, \ldots$

498. $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши критерийсини қаноатлантирса $\{x_n^2\}$ ҳам Коши критерийсини қаноатлантириши кўрсатилсин.

499. Агар $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ кетма-кетликлар Коши критерийсини қаноатлантирса, $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ лар ҳам Коши критерийсини қаноатлантириши кўрсатилсин.

500. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^n}$$

бўлса, $\{x_n\}$ кетма-кетлик Коши критерийсини қаноатлантириши кўрсатилсин.

501. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ ва $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ бўлса, унда

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots x_n, y_n, \ldots$$

кетма-кетликнинг лимити a га тенг бўлиши кўрсатилсин.

502. Агар $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ бўлиб, $a \neq 0$ бўлса, унда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

бўлиши кўрсатилсин. $a = 0$ бўлган ҳолда ушбу $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ лимит ҳақида нима дейиш мумкин?

Қуйидаги тенгликлар исботлансин.

503. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

504. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$

505. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0 \quad (a>1)$

506. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$

507. $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0 \quad (|q|<1)$

508. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>0)$

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0 \quad (a>1)$

510. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

511. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$

Қуйидаги сонлар кетма-кетликларининг лимитлари топилсин.

512. $x_n=\sqrt{\frac{9n+1}{n}}$

513. $x_n=\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-1}$

514. $x_n=n\left(\sqrt{n^4+n+1}-\sqrt{n^4+1}\right)$

515. $x_n=\frac{(n+2)^{14}+(n+1)^{10}}{(n-1)^{14}+2}$

516. $x_n=\frac{2n^3+3\cdot 2^n+\cos n}{2^n+\sin n}$

517. $x_n=\frac{a^n}{1+a^n} \quad (a\ge 0)$

518. $x_n=\frac{a^n+3b^n}{5a^n+7b^n}, \quad (a>0, \ \ b>0)$

519. $x_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}$

520. $x_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{4n^2-1}$.

Кўрсатма: $\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$.

521. $x_n=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)}{n^3}$.

Кўрсатма: $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)=1^2+2^2+\ldots+n^2+$

$$+(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}.$$

522. $x_n=\sqrt[n]{n^3+n+1}$.

Кўрсатма: $1<\sqrt[n]{n^3+n+1}<\sqrt[n]{3n^2}=\sqrt[n]{3}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2$.

523. $x_n=\sqrt[n]{2^n+5^n}$.

Кўрсатма: $5<\sqrt[n]{2^n+5^n}<5\cdot\sqrt[n]{2}$.

524. $x_n=\sqrt[n]{2^n\cdot 3^0+2^{n-1}\cdot 3+...+2^0\cdot 3^n}$.

Кўрсатма: $3<x_n<3\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+...+\left(\frac{2}{3}\right)+1}<3\cdot\sqrt[n]{n}$.

525. $x_n=\sqrt[n]{1^\pi+2^\pi+...+n^\pi}$.

Кўрсатма: $1<x_n=\sqrt[n]{1^\pi+2^\pi+...+n^\pi}=\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\pi+1}$.

526. $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

527. $x_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}}+...+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$.

528. $x_n=\left(n-\sqrt[3]{n^3-5}\right)\cdot n\sqrt{n}$

529. $x_n=n+\sqrt[3]{4-n^2}$.

530. $x_n=\dfrac{(n+2)(n-1)}{1+2+3+...+n}-\dfrac{2}{3}$

531. $x_n=\dfrac{\sqrt[3]{n\ \ +5}-\sqrt{3n^4+2}}{1+3+5+...+(2n-1)}$

532. $x_n=\dfrac{(3n-1)!+(3n+1)!}{(3n)!\cdot(n-1)}$

533. $x_n=\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+...+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}$

534. $x_n=\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{16}+...+\dfrac{9}{64}+...+\dfrac{1+2^n}{4^n}$

535. $x_n=\left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$

536. $x_n=\left(\dfrac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

537. $x_n=\left(\dfrac{n^3+1}{n^3-1}\right)^{2n-n^3}$

538. $x_n=\left(\dfrac{2n^2+21n-7}{2n^2+18n+9}\right)^{2n+1}$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг юқори ва қуйи лимитлари топилсин $\left(\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n-?;\underline{\lim}_{n\to\infty}x_n-?\right)$

539. $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$

540. $x_n=n^{(-1)^n}$

541. $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n}+\dfrac{1+(-1)^n}{2}$

542. $x_n=1+\dfrac{n}{n+1}\cdot\cos^2\dfrac{n\pi}{2}$

543. $x_n=1+2\cdot(-1)^{n+1}+3\cdot(-1)^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$

544. $x_n=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

545. $x_n=-n\cdot\left[2+(-1)^n\right]$

546. $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(-1)^n+\sin\dfrac{n\pi}{4}$

547. $x_n=\sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$

548. $x_n=\cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$

Қуйидаги кетма-кетликларнинг қисмий лимитлари топилсин.

549. $\{x_n\}:\quad \dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{7}{8},\ldots,\dfrac{1}{2^n},\dfrac{2^n-1}{2^n},\ldots$

550. $\{x_n\}:\quad 1,\dfrac{1}{2},1+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},1+\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\ldots,\dfrac{1}{n},1+\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{2}+$
$+\dfrac{1}{n},\ldots,\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1},\ldots$

551. $\{x_n\}:\quad \dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},\ldots.$

552. $x_n = \frac{1}{2}\left[(a+b)+(-1)^n \cdot (a-b)\right]$

553. Қисмий лимитлари ушбу

$$a_1, a_2, ..., a_p$$

сонларга тенг бўлган сонли кетма-кетликка мисол келтирилсин.

554. Қисмий лимитлари ушбу

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

кетма-кетликнинг барча ҳадларига тенг бўлган кетма-кетликка мисол келтирилсин.

555. Чекли қисмий лимитга эга бўлмаган кетма-кетликка мисол келтирилсин.

556. Яқинлашувчи бўлмаган, лекин ягона қисмий лимитга эга бўлган кетма-кетликка мисол келтирилсин.

557. Чексиз кўп қисмий лимитга эга бўлган кетма-кетликка мисол келтирилсин.

558. $[1;2]$ кесмадаги ихтиёрий ҳақиқий сон қисмий лимити бўлган кетма-кетликка мисол келтирилсин.

559. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи ва $\{y_n\}$ кетма-кетлик узоқлашувчи бўлса, унда

а)$\{x_n + y_n\}$ б)$\{x_n \cdot y_n\}$

кетма-кетликнинг яқинлашиши тўғрисида нима дейиш мумкин?

560. Агар $\{x_n\}$ ва $\{y_n\}$ кетма-кетликлар узоқлашувчи бўлса, унда

а)$\{x_n + y_n\}$ б)$\{x_n \cdot y_n\}$

кетма-кетликлар узоқлашувчи бўладими?

561. Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

бўлиб, $\{y_n\}$-ихтиёрий кетма-кетлик бўлса,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = 0$$

тенглик ўринли бўладими?

562. Агар

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n \cdot y_n\right)=0$$

бўлса, унда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ ёки } \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

тенгликлардан бири ўринли бўладими?

Қуйидаги муносабатлар исботлансин.

563. $\lim x_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = a$

564. $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(-x_n\right) = -\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n$

565. $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(x_n + y_n\right) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

566. $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(x_n + y_n\right) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

567. Агар $x_n \ge 0$ ва $y_n \ge 0$ $\left(n \ge 1, 2, \ldots\right)$ бўлса,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(x_n \cdot y_n\right) \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

бўлади.

568. Агар $x_n \ge 0$ ва $y_n \ge 0$ $\left(n \ge 1, 2, \ldots\right)$ бўлса,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(x_n \cdot y_n\right) \le \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$$

бўлади.

565-568-мисолларда қатъий тенгсизлик ўринли бўладиган кетма-кетликларга мисоллар келтирилсин.

2-§. Функция лимити

1^0. Функция лимити таърифлари. Айтайлик $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in R$ нуқта X нинг лимит нуқтаси бўлсин.

1 – т а ъ р и ф (Г е й н е). *Агар* x_0 *нуқтага яқинлашувчи ихтиёрий* $\{x_n\}$ $\left(x_n \in X,\ \ x_n \ne x_0,\ \ n = 1, 2, \ldots\right)$ *кетма-кетлик учун*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=b$$

бўлса, b сон $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити дейилади ва

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b$$

каби белгиланади.

2 – таъриф. (Коши). ***$\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топилсаки, $0<|x-x_0|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x\in X$ учун***

$$|f(x)-b|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, b сон $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги лимити дейилади.

2^0. Функциянинг бир томонли лимитлари. Айтайлик, $f(x)$ функция $(a,b]$ да аниқланган бўлиб, $x_0\in(a,b]$ бўлсин.

3 – таъриф. ***$\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топилсаки, $x_0-\delta<x<x_0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x\in(a,b]$ учун***

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

бўлса, A сон $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги чап лимити дейилади ва

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A \qquad (A=f(x_0-0))$$

каби белгиланади.

Айтайлик $f(x)$ функция $[a,\ b)$ да аниқланган бўлиб, $x_0\in[a,\ b)$ бўлсин.

4 – таъриф. ***$\forall\varepsilon>0$ олинганда ҳам шундай $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ топилсаки, $x_0<x<x_0+\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x\in[a,b)$ учун***

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

бўлса, A сон $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги ўнг лимити дейилади ва

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A \qquad (A=f(x_0+0))$$

каби белгиланади.

3^0. Функция лимити мавжудлиги ҳақидаги тасдиқлар.

1) $f(x)$ функция (a,b) да аниқланган бўлсин. Агар $f(x)$ функция (a,b) да ўсувчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция a ва b нуқталарда бир томонли лимитларга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=\sup_{a<x<b}\{f(x)\}, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=\inf_{a<x<b}\{f(x)\}$$

бўлади.

2) Агар $f(x)$ функция (a,b) да камаювчи бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция a ва b нуқталарда бир томонли лимитларга эга бўлиб,

$$\lim_{x\to b-0} f(x)=\inf_{a<x<b}\{f(x)\}, \qquad \lim_{x\to a+0} f(x)=\sup_{a<x<b}\{f(x)\}$$

бўлади.

3) Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада ўнг ва чап лимитларга эга бўлиб, улар бир-бирига тенг бўлса,

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = b,$$

у ҳолда $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада лимитга эга ва

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b$$

бўлади.

4) Айтайлик, $\mathbf{f(x)}$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in R$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

$\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада лимитга эга бўлиши учун $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилиб, $0 < |x - x'| < \delta$, $0 < |x - x''| < \delta$ тенгсизликларни қаноатлантирувчи барча $x', x'' \in X$ да

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

бўлиши зарур ва етарли (Коши теоремаси).

4^0. **Функция лимитининг хоссалари.** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in R$ нуқта X нинг лимит нуқтаси бўлсин. Айтайлик, бу функция $\mathbf{x_0}$ нуқтада чекли

$$\lim_{x\to x_0} f(x), \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

лимитларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $\forall x \in X$ да $f(x) \le g(x)$ бўлса, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x), \le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ бўлади,

2) $\forall C \in R$ да $\lim\limits_{x\to x_0}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ бўлади,

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

4) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

5) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ne 0\right)$

5^0. **Чексиз катта ва чексиз кичик функциялар. Функцияларни солиштириш.** Айтайлик $\mathbf{f(x)}$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in R$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ топилсаки, $0 < |x - x_0| < \delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча $x \in X$ да

$$|f(x)| > \varepsilon \quad (f(x) > \varepsilon; \;\; f(x) < -\varepsilon)$$

бўлса, $x \to x_0$ да $\mathbf{f(x)}$ функциянинг лимити ∞ $(+\infty; -\infty)$ дейилади ва

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \qquad \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty; \;\; \lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right)$$

каби белгиланади.

Агар $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ функциянинг лимити чексиз бўлса, у **чексиз катта функция** дейилади.

Агар

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0$$

бўлса, $\varphi(x)$ функция **чексиз кичик функция** дейилади.

Юқоридаги X тўпламда $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялари аниқланган бўлсин.

Агар

$$\exists C>0, \quad \exists \delta>0, \quad \forall x\in X\cap\left(U_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}\right): \qquad |\varphi(x)|\le C|\psi(x)|$$

бўлса, $x\to x_0$ да $\varphi(x)$ функция $\psi(x)$ **функцияга нисбатан чегараланган** дейилади ва $\varphi(x)=O(\psi(x))$ каби белгиланади.

Айтайлик, $x\to x_0$ да $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ лар чексиз кичик функциялар бўлсин. Агар

$$\varphi(x)=\alpha(x)\cdot\psi(x)$$

бўлиб, $x\to x_0$ да $\varphi(x)$ чексиз кичик функция бўлса, $x\to x_0$ да $\varphi(x)$ функция $\psi(x)$ **функцияга нисбатан юқори тартибли чексиз кичик функция** дейилади. ва $\varphi(x)=o(\psi(x))$ каби белгиланади.

Агар

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{x^p}=c \qquad (c\ne 0, \quad p>0)$$

бўлса, $\varphi(x)$ функция x **га нисбатан** p**-тартибли чексиз кичик функция** дейилади.

Агар

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x^p}=c \qquad (c\ne 0, p>0)$$

бўлса, $\varphi(x)$ функция x **га нисбатан** p**-тартибли чексиз катта функция** дейилади.

Агар $x\to x_0$ да $\varphi(x)-\psi(x)=o(\varphi(x))$ бўлса, $x\to x_0$ да $\varphi(x)$ ва $\psi(x)$ функциялар **эквивалент функциялар** дейилади ва $x\to x_0$ да $\varphi(x)\sim\psi(x)$ каби белгиланади.

Агар $x\to x_0$ да $\varphi_1(x)\sim\varphi_2(x)$, $\psi_1(x)\sim\psi_2(x)$ бўлиб,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}=\kappa \qquad (\kappa\in R)$$

бўлса,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}=\kappa$$

бўлади.

6^0. Муҳим лимитлар.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ ёки 2') $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

3 – м и с о л . ***Функция лимити таърифидан фойдаланиб***

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

бўлиши исботлансин.

◄ $\forall\varepsilon>0$ сонни олиб, унга кўра δ ни $\delta=\varepsilon$ дейлик.

Унда $\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча x ларда

$$|\sin x-1|=\left|\sin x-\sin\frac{\pi}{2}\right|=2\left|\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}}{2}\right|\le\left|x-\frac{\pi}{2}\right|<\delta=\varepsilon$$

бўлади. Демак,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1.\blacktriangleright$$

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,tg\frac{\pi x}{2}$$

лимит ҳисоблансин.

◄Аввало $1-x=t$ деб оламиз. Унда $x\to 1$ да $t\to 0$ бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\lim_{t\to 0}t\cdot tg\frac{\pi}{2}(1-t)=\lim_{t\to 0}t\cdot ctg\frac{\pi t}{2}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{2}}=\frac{2}{\pi}.\blacktriangleright$$

Функция лимити таърифидан фойдаланиб қуйидаги тенгликлар исботлансин.

569. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=8$

570. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2$

571. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3}=-7$

572. $\lim\limits_{x\to -1/3}\frac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}}=-4$

573. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$

574. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$

575. $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

576. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

577. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}=\infty$

578. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=0$

579. $\lim\limits_{x\to 3}x^4=81$

580. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+x^2}, & агар \quad x\neq 0 \quad бўлса,\\ 0, & агар \quad x=0 \quad бўлса.\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$

581. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$

582. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{1}{x^2+3x+2}=0$.

Қуйидаги функциялар *a* нуқтада лимитга эга эмаслиги исботлансин.

583. $f(x)=\frac{|x|}{x}, \qquad a=0$

584. $f(x)=\cos\frac{1}{x}, \qquad a=0$

585. $f(x)=\sin\frac{1}{x}, \qquad a=0$

586. $f(x)=\begin{cases}x^3+x^2+x+1, & агар \quad x\geq 1 \quad бўлса,\\ 0, & агар \quad x<1 \quad бўлса.\end{cases} \qquad a=1$

587. $f(x)=x-[x], \qquad a=2$

588. $f(x)=\begin{cases}e^x, & агар \quad x<0 \quad бўлса,\\ 2+x, & агар \quad x\geq 0 \quad бўлса.\end{cases} \qquad a=0$

589. $D(x)=\begin{cases}1, & агар \quad x \quad рационал \quad сон \quad бўлса,\\ 0, & агар \quad x \quad иррационал \quad сон \quad бўлса.\end{cases}$

$\mathbf{a}\in\mathbf{R}$ - ихтиёрий нуқта.

590. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{агар} \quad x \quad \text{иррационал} \quad \text{сон} \quad \text{бўлса}, \\ 1, & \text{агар} \quad x \quad \text{рационал} \quad \text{сон} \quad \text{бўлса}. \end{cases}$ функция қандай нуқталарда лимитга эга?

591. $f(x)=[x]\cdot\dfrac{1}{x}$, функциянинг $x\to 0$ даги лимити мавжудми ?

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқтадаги ўнг ва чап лимитлари топилсин.

592. $f(x)=\dfrac{x-|x|}{2x}, \qquad a=0$

593. $f(x)=\arccos(x-1), \qquad a=0$

594. $f(x)=2^{tgx}, \qquad a=\dfrac{\pi}{2}$

595. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{агар} \quad x>0 \quad \text{бўлса}, \\ \cos x, & \text{агар} \quad x\le 0 \quad \text{бўлса}. \end{cases} \qquad a=0$

596. $f(x)=\operatorname{sgn} x, \qquad a=0$

597. $f(x)=\operatorname{sgn}(\cos x), \qquad a=\dfrac{\pi}{2}$

598. $f(x)=\dfrac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}, \qquad a=3$

599. $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}, \qquad a=-1$

600. $f(x)=x+\lfloor x^2\rfloor, \qquad a=10$

601. $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}, \qquad a=0$

602. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}, \qquad a=0$

603. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}, \qquad a=1$

604. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^n-3}{x^n-1}, \qquad a=1$

Қуйидаги лимитлар топилсин.

605. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

606. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)^2}{x^3-8}$

607. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}$

608. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}, \quad (n,\ m\in N)$

609. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} \quad (n,\ m\in N)$

610. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{m}{1-x^m}\right), \quad (n,m\in N)$

611. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$

612. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{4}{x}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\dfrac{5}{x}}}$

613. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[n]{1+ax}\cdot\sqrt[m]{1+bx}-1}, \quad (n,m\in N)$

614. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}, \quad n\in N$

615. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

616. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+...+x^n-n}{x-1}, \quad n\in N$

617. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$

618. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$

619. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$

Қуйидаги лимитлар топилсин.

620. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx^2}{nx^2}$

621. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}$

622. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 6x-\sin 7x}$

623. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x^3-1}{\sin^6 2x}$

624. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x}$

625. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x\cdot\sin x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

626. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$

627. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos x}}{tgx^2}$

628. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(\cos\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{3}{x}\right)$

629. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\pi\sqrt{n^2+n}$

630. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\cos^2 2x\cdot\cos^3 3x}{x^2}$

631. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x^2-a^2}}$

632. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tgx}$

633. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{tg^2 x}$

634. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{x}$

635. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ch2x-1}{\cos x-1}$

636. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{ch2x}{chx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

637. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{2x}}$

638. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(3^{\frac{1}{x}}-1\right)$

639. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{2x}}{tgx}$

640. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 5x}-e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$

641. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(4^{\frac{1}{x}}-4^{\frac{1}{x+1}}\right)$

642. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 4x}$

643. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a>0,\ b>0)$

644. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 4x-\cos 4x}\right)^{\frac{1}{x}}$

645. $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$

646. a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

647. a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$

Қуйидаги функцияларнинг графиклари чизилсин.

648. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-x^{2n}\right)$ $(-1\le x\le 1)$

649. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{1+x^n}$ $(x\ge 0)$

650. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$

651. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\ge 0)$

652. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}$ $(x\ge 0)$

653. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$

654. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(2^n+x^n\right)}{n}$ $(x\ge 0)$

655. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\,\mathrm{arctg}\,x^n$

656. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтада лимитга эга бўлмаса, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ функцияларнинг бу нуқтадаги лимити ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтирилсин.

657. $f(x)=\operatorname{sgn}\sin\dfrac{1}{x}$ функция $x\to 0$ да лимитга эга эмаслиги кўрсатилсин.

658. Агар $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+\dfrac{1}{|f(x)|}\right]=0$ бўлса, $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ топилсин.

659. Агар $f(x)>0$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right]=2$ бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to a}f(x)=1$ экани исботлансин.

660. Агар $f(x)$ функция даврий бўлиб, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=C$ бўлса, у ҳолда $f(x)=C$ эканлиги кўрсатилсин.

661. Даврий функция $x\to+\infty$ да чексиз катта бўлиши мумкинми?

662. Даврий функция чегараланмаган бўлиши мумкинми?

663. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2^2}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$ топилсин.

664. $[0;+\infty)$ оралиқда аниқланган, қийматлар тўплами $[0;+\infty)$ оралиқдан иборат $f(x)$ функция $x=0$ нуқта атрофида чегараланган бўлиб, бу функция учун $x\geq 0$, $y\geq 0$ ларда

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

муносабат ўринли бўлса, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ лимит мавжудлиги исботлансин.

α ва β ларнинг қандай қийматларда $f(x)$ функция чексиз кичик бўлади?

665. $f(x)=\dfrac{x^2\cdot(x-1)}{(x+1)^2}-\alpha x-\beta,\qquad x\to\infty$

666. $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}-\alpha x-\beta$, $\quad x\to+\infty$

667. $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}-\alpha x-\beta$, $\quad x\to+\infty$

668. $f(x)=x^\alpha\cdot\sin\dfrac{1}{x^\beta}$, $\quad x\to+0$

669. $f(x)=\left(1-x^\alpha\right)^{x^\beta}$, $\quad x\to+0$

670. $f(x)=\dfrac{\ln\left(1+x^\alpha\right)}{x^\beta}$, $\quad x\to+0$

671. $f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}-\alpha x-\beta$, $\quad x\to+\infty$

α ва β ларнинг қандай қийматларида $f(x)$ ва $g(x)=\alpha x^\beta$ функциялар эквивалент бўлади?

672. $f(x)=\sqrt{2x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $\quad$ а) $x\to+0$, $\quad$ б) $x\to+\infty$

673. $f(x)=\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$, $\quad x\to 0$

674. $f(x)=\sin^2 2x+\arcsin^2 x+2arctgx^2$, $\quad x\to 0$

675. $f(x)=1-\cos\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$, $\quad x\to\infty$

$x\to 0$ да чексиз кичик функциянинг тартиби n аниқлансин.

676. $f(x)=3\sin^2 x^2-5x^2$

677. $f(x)=\sqrt{4-x^4}+x^2-2$

678. $f(x)=1-x^4-\cos x^2$

679. $f(x)=2\sin x-tg2x$

680. $f(x)=\sin\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)$

Чексиз катта функциянинг тартиби n аниқлансин.

681. $f(x)=\dfrac{x^5}{2-x+3x^2}$, $\quad x\to\infty$

682. $f(x)=\sqrt{x^4-x+1}$, $\quad x\to\infty$

683. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, $\quad x\to+\infty$

684. $f(x)=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}$, $\quad x\to 1$

685. $f(x)=ctg^2 x^3$, $\quad x\to 0$

686. $f(x)=\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos 2x}}{x^5}$, $\quad x\to 0$

Қуйидаги муносабатлар исботлансин.

687. $o(o(f))=o(f)$

688. $O(o(f))=o(f)$

689. $O(O(f))=O(f)$

690. $o(f)+O(f)=O(f)$

691. $o(f)\cdot O(f)=o(f)$

$\overline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)$ **ва** $\underline{\lim\limits_{x\to 0}} f(x)$ **лар топилсин.**

692. $f(x)=e^{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}$

693. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin^2\dfrac{1}{x}$

694. $f(x)=arcctg\dfrac{1}{x}$

695. $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}$

$\overline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)$ **ва** $\underline{\lim\limits_{x\to\infty}} f(x)$ **лар топилсин.**

696. $f(x)=\dfrac{\pi}{2}\cos^2 x+arctgx$

697. $f(x)=\dfrac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2}\cdot\sin x^2$

698. $f(x)=\left(\sqrt{4x^2+x+1}-\sqrt{4x^2-x+1}\right)\cdot(1+\cos 2x)$

699. $f(x)=(1+\cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

3-§. Функциянинг узлуксизлиги

1^0. Функция узлуксизлиги таърифи. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда аниқланган бўлиб, $x_0 \in X$ нуқта шу тўпламнинг лимит нуқтаси бўлсин.

5 – т а ъ р и ф . *Агар*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада у з л у к с и з дейилади.

Одатда, $x - x_0 = \Delta x$ - **аргумент орттирмаси**, $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$ - **функция орттирмаси** дейилади.

Агар

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада у з л у к с и з дейилади.

Айтайлик, x_0 ва X лар учун шундай $\delta > 0$ мавжуд бўлсинки,

$$(x_0 - \delta, x_0] \subset X$$

бўлсин. ***Агар***

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0] \ : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ч а п д а н у з л у к с и з дейилади.

Бу ҳолда $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ бўлади.

Айтайлик, x_0 ва X лар учун шундай $\delta > 0$ мавжуд бўлсинки,

$$[x_0, x_0 + \delta) \subset X$$

бўлсин. ***Агар***

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + \delta) \ : \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада ў н г д а н у з л у к с и з дейилади. Бу ҳолда $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ бўлади.

Агар $f(x)$ функция X тўпламнинг ҳар бир нуқтасида узлуксиз бўлса, функция шу X т ў п л а м д а у з л у к с и з дейилади.

2^0. Функциянинг узилиши, узилишининг турлари. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлмаса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада узилади дейилади, x_0 эса функциянинг **узилиш нуқтаси** дейилади.

Маълумки, $f(x)$функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши учун:

1) x_0 нуқтада ўнг ва чап лимитлари

$$f(x_0 + 0), \ f(x_0 - 0) \tag{1}$$

мавжуд,

2) $$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) \tag{2}$$

тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли эди.

Агар (1) лимитлар мавжуд ва чекли бўлиб, (2) тенгликнинг бирортаси бажарилмаса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **биринчи тур узилиш нуқтаси** дейилади.

Бу ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуқтада сакрашга эга дейилиб, $|f(x_0+0)-f(x_0-0)|$ миқдор унинг **сакраши** дейилади.

Агар ҳеч бўлмаганда (1) лимитларининг биттаси мавжуд бўлмаса, (ёки чексиз бўлса) x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **иккинчи тур узилиш нуқтаси** дейилади.

3^0. Узлуксиз функцияларнинг хоссалари. Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлсин. У ҳолда:

1) $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган бўлади;

2) $f(x)$ функция $[a,b]$ да ўзининг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегараларига эришади, яъни

$$\exists x_* \in [a,b],\ f(x_*)=\inf\{f(x)\},$$
$$\exists x^* \in [a,b],\ f(x^*)=\sup\{f(x)\}$$

бўлади;

3) $f(a)\cdot f(b)<0$ бўлганда, шундай $x_0\in(a,b)$ топиладики, $f(x_0)=0$ бўлади;

4)Чегаралари $f(a)$ва $f(b)$ бўлган сегментдан олинган ихтиёрий C сони учун шундай $c\in[a,b]$ нуқта топиладики, $f(c)=C$ бўлади.

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}\mathrm{x}, & \text{агар } \mathrm{x}-\text{рационал сон бўлса,}\\ -\mathrm{x}, & \text{агар } \mathrm{x}-\text{иррационал сон бўлса}\end{cases}$$

функциянинг $x_0=0$ нуқтада узлуксиз бўлиши кўрсатилсин.

◄Равшанки, бу функциянинг $x_0=0$ нуқтадаги орттирмаси

$$\Delta f(0)=f(0+\Delta x)-f(0)=\begin{cases}\Delta x, & \text{агар } \Delta x-\text{рационал сон бўлса,}\\ -\Delta x, & \text{агар } \Delta x-\text{иррационал сон бўлса}\end{cases}$$

бўлади. Унда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$$

бўлади. Демак, берилган функция $x_0=0$ нуқтада узлуксиз.►

6 – м и с о л . ***Узлуксиз функция хоссаларидан фойдаланиб, ушбу***

$$\sin x-\cos x>0$$

тенгсизлик ечилсин.

◄Равшанки, $f(x)=\sin x-\cos x$ функция узлуксиз. Бу функцияни $[0,2\pi]$ оралиқда қараймиз. $f(x)$ функция $[0,2\pi]$ оралиқнинг $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$ нуқталарида нолга айланади: $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{5\pi}{4}\right)=0$. Узлуксиз функциянинг хоссасига кўра $f(x)$ функция

$$\left[0,\frac{\pi}{4}\right),\ \left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right),\ \left(\frac{5\pi}{4},2\pi\right]$$

оралиқларнинг ҳар бирида ишора сақлайди. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ бўлганлиги сабабли $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ да $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ бўлади. Демак, берилган тенгсизликнинг ечими

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, ...)$$

бўлади.►

700. $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксизлигининг геометрик талқини берилсин.

701. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада бир томондан (ўнгдан ва чапдан) узлуксиз бўлиши таърифлари келтирилсин.

702. $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз бўлиши зарурий ва етарли шартлари келтирилсин.

703. Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада узлуксиз бўлса, у ҳолда $|f(x)|$ функциянинг ҳам шу нуқтада узлуксиз бўлиши исботлансин.

704. Агар $f(x)$ функция a нуқтада узлуксиз бўлса, $\varphi(x) = f(bx + c)$ $(b \neq 0)$ функция $\frac{a-c}{b}$ нуқтада узлуксиз бўлиши исботлансин.

Берилган $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтада узлуксиз эканлиги таъриф ёрдамида исботлансин.

705. $f(x) = 2x^2 - 4$, $\qquad x_0 = 3$

706. $f(x) = -3x^2 + 8$, $\qquad x_0 = 5$

707. $f(x) = \sqrt{x}$, $\qquad x_0 = 2$

708. $f(x) = x^4$, $\qquad x_0 = 3$

709. $f(x) = \frac{1}{x}$, $\qquad x_0 = 1$

Берилган функцияларнинг ўзининг аниқланиш соҳасида узлуксиз бўлиши кўрсатилсин.

710. $f(x)=\sin x$

711. $f(x)=|x|$

712. $f(x)=x^3$

713. $f(x)=\sqrt[3]{x}$

714. $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Қуйидаги функциялар узлуксизликка текширилсин ва графиклари чизилсин.

715. $f(x)=Sgnx$

716. $f(x)=[x]$

717. $f(x)=\dfrac{|x+2|}{x+2}$

718. $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x^2-x^3}$

719. $f(x)=Sgn\left(e^x-1\right)$

720. $f(x)=Sgn(\sin x)$

721. $f(x)=x-[x]$

722. $f(x)=\dfrac{1}{x-[x]}$

723. $f(x)=\left[\dfrac{1}{x}\right]$

724. $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$

725. $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$

726. $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$

727. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{агар} \quad x\neq 3 \quad \text{бўлса},\\ A, \quad \text{агар} \quad x=3 \quad \text{бўлса}.\end{cases}$

728. $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \quad \text{бўлса},\\ 0, & \text{агар} \quad x=0 \quad \text{бўлса}.\end{cases}$

729. Ҳеч бир нуқтада узлуксиз бўлмаган функцияга мисол келтирилсин.

730. Фақат биргина $x_0\in R$ нуқтада узлуксиз, бошқа нуқталарда узлуксиз бўлмаган функцияга мисол келтирилсин.

731. $f(x)+g(x)$ функция бирор $\mathbf{x_0}$ нуқтада биринчи тур узилишига эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг камида биттаси $\mathbf{x_0}$ нуқтада биринчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

732. $f(x)\cdot g(x)$ функция бирор $\mathbf{x_0}$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ ва $g(x)$ функцияларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси $\mathbf{x_0}$ нуқтада иккинчи тур узилишга эга бўлиши шартми?

Қуйидаги функциялар А нинг қандай қийматларида узлуксиз бўлиши аниқлансин.

733. $$\mathbf{f(x)=\begin{cases} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.} \end{cases}}$$

734. $$\mathbf{f(x)=\begin{cases} x\cdot ctgx, & \text{агар } x\neq 0,\ |x|<\dfrac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.} \end{cases}}$$

735. $$\mathbf{f(x)=\begin{cases} \dfrac{a^x-1}{x}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad (a>0)}$$

736. $$f(x)=\begin{cases} (\pi+2x)tgx, & \textit{агар } -\pi<x<\dfrac{\pi}{2},\ x\neq-\dfrac{\pi}{2} \textit{ бўлса,} \\ A, & \textit{агар } x=-\dfrac{\pi}{2} \textit{ бўлса.} \end{cases}$$

737. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{\ln(1+2x)}, & \textit{агар } x\neq 0 \textit{ бўлса,} \\ A, & \textit{агар } x=0 \textit{ бўлса.} \end{cases}$$

738. $$f(x)=\begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \textit{агар } x\neq 0 \textit{ бўлса,} \\ A, & \textit{агар } x=0 \textit{ бўлса.} \end{cases}$$

739. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

740. $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ A+x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

741. $f(x)=\begin{cases} x\ln x^2, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$

Қуйидаги функциялар узлуксизликка текширилсин ва уларнинг графиклари чизилсин.

742. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n} \quad (x \geq 0)$

743. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$

744. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+xe^{nx}}$

745. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$

746. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$

747. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$

748. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n} x$

749. $f(x)=[x]\cdot\sin\pi x$

750. $f(x)=x\cdot[x]$

751. $f(x)=x^2-[x^2]$

752. $f(x)=\dfrac{1}{\sin(x^2)}$

753. $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$

754. $f(g(x))$ ва $g(f(x))$ фунциялар узлуксизликка текширилсин.

а) $f(x)=\operatorname{sgn} x, \qquad g(x)=1+x^2$

б) $f(x)=\operatorname{sgn} x, \qquad g(x)=x(1-x^2)$

в) $f(x)=\operatorname{sgn} x, \qquad g(x)=1+x-[x]$.

755. $f(g(x))$ мураккаб функция x_0 нуқтада биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлса, $g(x)$ нинг x_0 нуқтада албатта биринчи тур (иккинчи тур) узилишга эга бўлиши шартми?

756. Монотон функциянинг узлуксизлиги ва узилиши ҳақидаги теоремалар келтирилсин.

757. Монотон, лекин узлуксиз бўлмаган функцияларга мисол келтирилсин.

758. Вейерштрасс теоремаларида $[a,b]$ кесма ўрнига (a,b) ёки $[a,b]\cup[c,d]$ қаралса тасдиқ ўринли бўладими?

759. $[a,b]$ кесмада чегараланган ихтиёрий $f(x)$ функция узлуксиз бўладими?

760. Узлуксиз бўлмаган функциялар учун Вейерштрасс теоремалари ўринлими?

761. Ушбу $xe^x=1$ тенглама $(0,1)$ оралиқда ҳеч бўлмаганда битта илдизга эга эканлиги кўрсатилсин.

762. Агар $f(x)$ функция A ва B тўпламларда узлуксиз бўлса, у ҳолда бу функциянинг $A\cup B$ тўпламда узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

763. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда $p(x)=\max\{f(x),g(x)\}$, $q(x)=\min\{f(x),g(x)\}$, $x\in[a,b]$, функциялар ҳам $[a,b]$ да узлуксиз бўлиши кўрсатилсин.

764. $f(x)$ функция $[a,c]\cup[c,b]$ кесмаларда узлуксиз бўлсин. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлиши учун етарли шарт келтирилсин ва исботлансин.

765. Агар $f(x)$ функция $\forall[a,b]\subset X$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда у X тўпламда узлуксиз бўлиши исботлансин $(a<b)$.

766. Тескари функциянинг мавжудлиги ва узлуксизлиги ҳақида теорема келтирилсин ва исботлансин.

767. $f(x)$ функция $[0;1]$ кесмада аниқланган, монотон бўлиб, $f(0)=0$ ва $f(1)=1$ бўлсин. Агар $\forall x\in[0;1]$ учун шундай $n\in N$ топилсаки,

$$\underbrace{f(f\ldots f(f(x)))}_{n\ \text{та}}=x$$

муносабат бажарилса, $[0;1]$ оралиқда $f(x)=x$ экани исботлансин

768. $f(x)$ функция R да узлуксиз бўлиб, $\forall x\in R$ учун

$$f(f(x))=x$$

муносабат бажарилса, у ҳолда шундай c нуқта топилиб, $f(c)=0$ бўлиши исботлансин.

769. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар узлуксиз ва бир хил даврли бўлсин. Агар

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=0$$

бўлса,

$$f(x)=g(x)$$

бўлиши исботлансин.

770. Ушбу

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x-a}, & \text{агар } x\neq a \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } x=a \text{ бўлса.}\end{cases}$$

функциянинг ихтиёрий $[a,b]$ кесмадаги қийматлари $[f(a);\ f(b)]$ кесмани тўлдириши, лекин $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлмаслиги кўрсатилсин.

771. Агар $f(x)$ функция $[a;+\infty]$ да узлуксиз бўлиб, чекли $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ лимитга эга бўлса, унда $f(x)$ функциянинг $[a;+\infty]$ да чегараланган бўлиши исботлансин.

772. Агар $f(x)$ функция

1) $[a,b]$ кесмада аниқланган ва монотон,

2) унинг қийматлари тўплами $[f(a);\ f(b)]$ кесмани туташ тўлдирса,

у ҳолда $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлиши кўрсатилсин.

4-§. Функциянинг текис узлуксизлиги

1^0. Функциянинг текис узлуксизлиги тушунчаси. Айтайлик, $f(x)$ функция $X\subset R$ тўпламда берилган бўлсин.

Агар $\forall\varepsilon>0$ ***олинганда ҳам шундай*** $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ***топилсаки,*** $|x'-x''|<\delta$ ***тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий*** $x',x''\in X$ ***учун***

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ *функция* X *тўпламда текис узлуксиз дейилади.*

2^0. **Кантор теоремаси.** *Агар* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *сегментда узлуксиз бўлса, у ҳолда* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *да текис узлуксиз бўлади.*

Ушбу

$$\omega(f;X)=\operatorname{Sup}\{|f(x')-f(x'')| \ : \ \forall x',x''\in X\}$$

миқдор $f(x)$ функция X тўпламдаги **тебраниши** дейилади.

Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз бўлса, $\forall\varepsilon>0$ учун шундай $\delta>0$ топиладики, $[a,b]$ сегмент узунликлари $\delta>0$ дан кичик бўлакчаларга ажратилганда ҳар бир бўлакчадаги функция тебраниши ε дан кичик бўлади.

7 – мисол. *Ушбу*

$$f(x)=\sin x$$

функциянинг $(-\infty;+\infty)$ *да текис узлуксиз бўлиши исботлансин.*

◄ $\forall\varepsilon>0$ сонни олиб, унга кўра δ ни $\delta=\varepsilon$ деймиз. Унда $|x_1-x_2|<\delta$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x_1,x_2\in(-\infty;+\infty)$ учун

$$|\sin x_1-\sin x_2|=\left|2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\sin\frac{x_1-x_2}{2}\right|\le 2\cdot 1\cdot\left|\frac{x_1-x_2}{2}\right|=|x_1-x_2|<\delta=\varepsilon$$

бўлишини топамиз. Демак, $f(x)=\sin x$ функция $(-\infty;+\infty)$ да текис узлуксиз.►

$y=f(x)$ функциянинг X тўпламда текис узлуксиз эканлиги таъриф ёрдамида кўрсатилсин ($\delta=\delta(\varepsilon)$ топилсин).

773. $f(x)=3x-5$, $X=(-\infty;+\infty)$.

774. $f(x)=x^2-x+1$, $X=(-3;4)$.

775. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $X=[0,2;1]$.

776. $f(x)=\sqrt{x}$, $X=[0;+\infty)$.

777. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $X=[0;2]$.

778. $f(x)=x^3-1$, $X=[-2;3]$.

779. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $X=[3;4]$.

780. $f(x)=3\sin x+2\cos x$, $X=(-\infty;+\infty)$.

$\mathbf{y=f(x)}$ **функциянинг X тўпламда текис узлуксиз эмаслиги исботлансин.**

781. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad X=(0;1)$.

782. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $\qquad X=(0;1)$.

783. $f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$, $\qquad X=(0;1)$.

784. $f(x)=x^2$ $\qquad X=(-\infty;+\infty)$.

785. $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ $\qquad X=(3;5)$.

786. $f(x)=\ln x$ $\qquad X=(0;1)$.

Қуйидаги функциялар берилган оралиқда текис узлуксизликка текширилсин.

787. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ $\quad (0<x<\pi)$

788. $f(x)=x^2$ $\quad (-10<x<10)$

789. $f(x)=x\sin x$ $\quad (0\le x<\infty)$

790. $f(x)=e^x$ $\quad (-\infty<x<+\infty)$

791. $f(x)=\cos x\cdot\cos\dfrac{\pi}{x}$ $\quad (0<x<1)$

792. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ $\quad (0<x<\pi)$

793. $f(x)=\sin\sqrt{x}$ $\quad (1\le x<+\infty)$

794. $f(x)=e^{-\arcsin x}$ $\quad (-1\le x\le 1)$

795. $f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{агар } x\le 0 \text{ бўлса,} \\ e^{-x}, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса} \end{cases}$ $\quad X=(-\infty;+\infty)$

796. $f(x)=x+\sin x,$ $\quad X=(-\infty;+\infty)$

Айтайлик, $\mathbf{f(x)}$ *функция* $\mathbf{X \subset R}$ *тўпламда берилган бўлиб,* $\delta > 0$ *бўлсин. Ушбу*

$$\omega_f(\delta) = \mathbf{Sup}\{|f(x') - f(x'')| \ : \ \forall x', x'' \in X, \ |x' - x''| < \delta\}$$

миқдор $\mathbf{f(x)}$ *функциянинг* $\mathbf{X}$ *тўпламидаги* ***у з л у к с и з л и к   м о д у л и*** *дейилади.*

Қуйидаги функцияларнинг берилган ораликдаги узлуксизлик модуллари топилсин.

797. $\mathbf{f(x) = 2x - 1, \quad X = (-\infty; +\infty)}$ **798.** $\mathbf{f(x) = x^2, \quad X = [-e; e]}$

799. $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}, \quad X = [a; +\infty), \ a > 0}$ **800.** $\mathbf{f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad X = (0; 1)}$

801. $\mathbf{f(x) = x^3, \quad X = (-\infty; +\infty)}$ **802**. $\mathbf{f(x) = \ln x, \quad X = [1; +\infty)}$

803. $\mathbf{f(x) = \cos x, \quad X = (-\infty; +\infty)}$

804. Агар $\delta_1 < \delta_2$ бўлса, $\omega_f(\delta_1) \le \omega_f(\delta_2)$ тенгсизлик исботлансин.

805. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X}$ тўпламда чегараланган бўлса, у ҳолда $\forall\delta > 0$ учун $\omega_f(\delta) < +\infty$ экани исботлансин.

806. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция чегараланган $\mathbf{X}$ тўпламда аниқланган бўлиб, чегараланмаган бўлса, у ҳолда $\forall\delta > 0$ учун $\omega_f(\delta) = +\infty$ эканлиги исботлансин.

807. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{a}$ нуқтада текис узлуксиз деган жумла маънога эгами?

808. $\mathbf{(a, b)}$ ораликда текис узлуксиз функция шу ораликда чегараланган бўладими?

809. Функция текис узлуксизлигининг геометрик талқини ифодалансин.

810. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X}$ тўпламда узлуксиз бўлса, у берилган тўпламда текис узлуксиз бўладими?

811. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{[a, b]}$ ва $\mathbf{[b, c]}$ кесмаларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда у $\mathbf{[a, c]}$ кесмада ҳам текис узлуксизлиги исботлансин.

812. Агар 811-мисолда $\mathbf{[b, c]}$ кесма ўрнига $\mathbf{(b, c]}$ оралиқ олинса, $\mathbf{f(x)}$ функциянинг $\mathbf{[a, c]}$ кесмада текис узлуксизлиги ҳақида нима дейиш мумкин?

813. Агар $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{g(x)}$ функциялар $\mathbf{X}$ тўпламда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда $\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ лар учун $\alpha\cdot\mathbf{f(x)}+\beta\cdot\mathbf{g(x)}$ функция ҳам $\mathbf{X}$ тўпламда текис узлуксиз экани исботлансин.

814. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{A}$ ва $\mathbf{B}$ тўпламларда текис узлуксиз бўлса, у ҳолда у $\mathbf{A}\cap\mathbf{B}$ тўпламда ҳам текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

815. Мураккаб функциянинг текис узлуксиз бўлиши учун бирорта етарли шарт келтирисин ва исботлансин.

816. Узлуксиз даврий функция текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

817. Чекли ёки чексиз интервалда узлуксиз, чегараланган монотон функциянинг текис узлуксизлиги исботлансин.

818. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ кесмада текис узлуксиз бўлмаса, у ҳолда унинг ҳеч бўлмаганда $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ораликдаги бирорта нуқтада узилишга эга эканлиги исботлансин.

819. Чекли $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ ораликда $\mathbf{f(x)}$ функция текис узлуксиз бўлиши учун, унинг $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ ораликда узлуксиз бўлиб, чекли

$$\lim_{x\to a+0}\mathbf{f(x)},\quad \lim_{x\to b-0}\mathbf{f(x)}$$

лимитларнинг мавжуд бўлиши зарур ва етарлилиги исботлансин.

820. Агар $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X}$ тўпламда α-тартибли Гёлдер шартини қаноатлантирса, яъни шундай $\mathbf{k>0}$ ва $\alpha>\mathbf{0}$ сонлар топилсаки, $\forall\mathbf{x_1}\in\mathbf{X}$ ва $\forall\mathbf{x_2}\in\mathbf{X}$ лар учун

$$|\mathbf{f(x_1)-f(x_2)}|\le|\mathbf{x_1-x_2}|^{\alpha}$$

тенгсизлик бажарилса, унда $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X}$ тўпламда текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

821. $[\mathbf{a},+\infty)$ ораликда текис узлуксиз бўлган шундай $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{g(x)}$ функциялар топилсинки, $\mathbf{f(x)-g(x)}$ функция $[\mathbf{a},+\infty)$ да текис узлуксиз бўлмасин.

822. $[\mathbf{a},+\infty)$ оралиқда чегараланган ва текис узлуксиз функцияларнинг кўпайтмаси ҳам шу оралиқда текис узлуксиз бўлиши исботлансин.

IV-БОБ.
Функциянинг ҳосиласи ва унинг геометрик ҳамда механик маънолари

1-§.Функция ҳосиласи, унинг геометрик ва механик маънолари

1^0. Ҳосила таърифи. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$ бўлсин. $x \in X$ учун $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ $(x \neq x_0)$ дейлик. Унда $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ бўлади.

Агар ушбу

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд ва чекли бўлса, у берилган $f(x)$ функциянинг x_0 **нуқтадаги ҳосиласи** дейилади. Уни

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad \text{ёки } f'(x_0), \quad \text{ёки } (f(x_0))'$$

каби белгиланади.

2^0.Ҳосила ҳисоблаш қоидалари. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in R$;

2) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$;

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

4) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, $(g(x) \neq 0)$;

бўлади.

Фараз қилайлик, $y = f(x)$ ва $x = \varphi(t)$ функциялари ёрдамида $y = f(\varphi(t))$ мураккаб функция ҳосил қилинган бўлсин.

5) Агар $f'(x)$ ва $\varphi'(t)$ ҳосилалар мавжуд бўлса, **мураккаб функциянинг ҳосиласи**

$$(f(\varphi(t)))'_t = f'(x)\varphi'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

бўлади.

Айтайлик, $y = f(x)$ функцияга тескари $x = f^{-1}(y)$ функция мавжуд бўлиб, $f'(x) \neq 0$ бўлсин.

6) Тескари функциянинг ҳосиласи

$$x' = \left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}$$

бўлади.

3^0. Ҳосилалар жадвали. Асосий содда функция ҳосилаларининг формулаларини келтирамиз:

1) $(c)' = 0, \quad c = const$

2) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R, \quad x > 0,$

$\left(x^{n}\right)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \in N, \quad x \in R \setminus \{0\}.$

3) $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in R$

$\left(e^{x}\right)' = e^{x}, \quad x \in R$

4) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0$

$\left(\log_a |x|\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0$

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$

$\left(\ln |x|\right)' = \dfrac{1}{x}, \quad x \neq 0$

5) $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R$

6) $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R$

7) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$

8) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n, \quad n \in Z$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

11) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$

12) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$

13) $(shx)' = chx, \quad x \in R$

14) $(chx)' = shx, \quad x \in R$

15) $\left(\mathrm{thx}\right)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$, $x \in R$

16) $\left(\mathrm{cthx}\right)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, $x \in R$, $x \neq 0.$

4^0. Бир томонли ҳосилалар. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $x_0 \in X$, $x_0 + \Delta x \in X$ бўлсин.

Агар

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги **ўнг ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0 + 0)$ каби белгиланади.

Агар

$$\lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги **чап ҳосиласи** дейилади ва $f'(x_0 - 0)$ каби белгиланади.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиши учун унинг шу нуқтада ўнг $f'(x_0 + 0)$ ва чап $f'(x_0 - 0)$ ҳосилаларининг мавжуд бўлиб,

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$$

бўлиши зарур ва етарли.

5^0. Чексиз ҳосилалар. Агар

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **мусбат чексиз ҳосилага** эга дейилади.

Агар

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **манфий чексиз ҳосилага** эга дейилади.

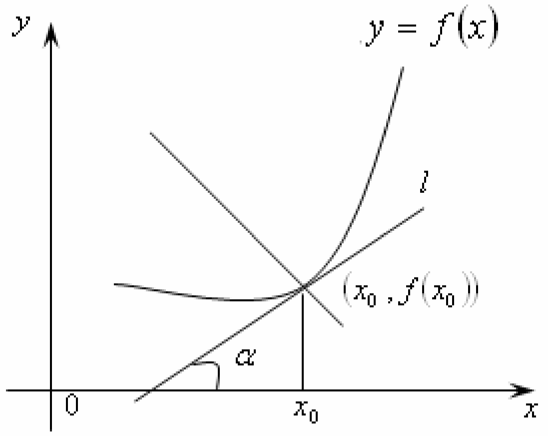
6^0.Параметрик кўринишда берилган функциянинг ҳосиласи. Фараз қилайлик, $x = x(t)$ ва $y = y(t)$ функциялар t_0 нуқтанинг атрофида берилган бўлиб, улар $x_0 = x(t_0)$ нуқтанинг атрофида $y = f(x)$ функцияни аниқласин.

Агар $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар t_0 нуқтада ҳосилага эга бўлиб, $x'_t(t_0) \neq 0$ бўлса, $y = f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга ва у ушбу

$$y'_x = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$$

формула билан топилади.

7^0. **Ҳосиланинг геометрик ва механик маънолари.** $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_0 \in (a,b)$ нуқтада $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлсин. Бу ҳосила $y = f(x)$ функция тасвирлаган эгри чизиққа $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринма ***l*** нинг **бурчак коэффициентини** ифодалайди (5-чизма).



$tg\alpha = f'(x_0)$

5-чизма.

Бунда **уринма тенгламаси**

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

нормалнинг тенгламаси

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

кўринишда бўлади.

Айтайлик, нуқта тўғри чизиқ бўйлаб $S = S(t)$ қонун билан ҳаракат қилсин, бунда t-вақт, S-ўтилган йўл. Бу функциянинг ҳосиласи $S'(t)$ ҳаракатдаги нуқтанинг t вақтдаги **оний тезлиги** $V(t)$ ни ифодалайди:

$$V(t) = S'(t)$$

1 – м и с о л . *Агар* $f(x) = x\cdot|x|$ ***бўлса,*** $f'(x_0)$ ***топилсин.***

◄Айтайлик, $x_0 > 0, \quad x > 0$ ва $x \neq x_0$ бўлсин. Унда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x\cdot|x| - x_0\cdot|x_0|}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^2 - x_0{}^2}{x - x_0} = 2|x_0|$$

бўлади.

Айтайлик, $x_0 < 0$, $x < 0$ ва $x \neq x_0$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-x^2 + x_0{}^2}{x - x_0} = -2x_0 = 2|x_0|$$

бўлади.

Айтайлик, $x_0 = 0, \quad x \neq x_0$ бўлсин. У ҳолда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{x|x|}{x} = 0$$

бўлади. Демак, $f'(x_0)=2|x_0|$.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

функция $x_0=0$ ***нуқтада ҳосилага эга бўладими?***

◄Бу функция учун

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\frac{1}{x}$$

бўлиб, $x\to x_0=0$ лимит мавжуд эмас. Демак, берилган функция $x_0=0$ нуқтада ҳосилага эга эмас.►

3 – м и с о л . ***Параметрик кўринишда берилган ушбу***

$$\begin{cases} x=a\sin t+\sin at, \\ y=a\cos t+\cos at \end{cases}$$

Функциянинг ҳосиласи топилсин.

◄ x ва y функцияларнинг параметр t бўйича ҳосилаларини топамиз:

$$x'_t=a\cos t+a\cos at,\qquad y'_t=-a\sin t-a\sin at$$

Унда

$$\frac{dy}{dx}=y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=-\frac{a(\sin t+\sin at)}{a(\cos t+\cos at)}=\frac{2\sin\frac{t+at}{2}\cdot\cos\frac{t-at}{2}}{2\cos\frac{t+at}{2}\cdot\cos\frac{t-at}{2}}=-\mathrm{tg}\frac{1+a}{2}t$$

бўлади.►

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$y=x^2-4x$$

параболага абсциссаси $x=1$ ***бўлган нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламалари топилсин.***

◄Абсциссаси $x=1$ параболадаги нуқтанинг ординатаси $y=-3$ бўлади. Параболага $(1,-3)$ нуқтада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини топамиз:

$$y'=2x-4,\qquad y'(1)=-2$$

Демак, уринманинг тенгламаси

$$y+3=-2(x-1),\ \text{яъни}\ 2x+y+1=0,$$

нормалнинг тенгламаси эса

$$y+3=\frac{1}{2}(x-1),\ \text{яъни}\ x-2y-7=0$$

бўлади.►

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$12y=x^3$$

кубик парабола бўйича харакат қилаётган нуқтанинг координаталаридан қайси бири тезроқ ўзгаради?

◄Қаралаётган x ва y ларнинг t вақтнинг функцияси деб топамиз:

$$12\frac{dy}{dx} = 3x^2\frac{dx}{dt}$$

Бу тенгликдан

$$\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{4}$$

бўлиши келиб чиқади.

Равшанки, бу тенгликнинг чап томонидаги нисбат нуқта ординатасининг ўзгариш тезлигининг шу нуқта абсциссасининг ўзгариш тезлигига нисбатидан иборат бўлиб, у $|x| < 2$ бўлганда бирдан кичик, $|x| = 2$ бўлганда бирга тенг, $|x| > 2$ бўлганда эса бирдан катта бўлади. Демак,

1) $-2 < x < 2$ бўлганда нуқтанинг ординатаси унинг абсциссасига қараганда секинроқ ўзгаради;

2) $x = \pm 2$ бўлганда абсциссаси ҳамда ординатасининг ўзгариш тезлиги бир ҳил бўлади;

3) $x < -2$ ва $x > 2$ бўлганда нуқтанинг ординатаси унинг абсциссасига қараганда тезроқ ўзгаради.►

Таъриф ёрдамида $f'(x_0)$ топилсин:

823. $f(x) = x^2,\ \ x_0 = 0{,}1$

824. $f(x) = 2\sin 3x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{6}$

825. $f(x) = 1 + \ln 2x,\ \ x_0 = 1$

826. $f(x) = x + \mathrm{ctg}x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$

Таъриф ёрдамида $f'(x)$ топилсин:

827. $f(x) = x^3 + 2x$

828. $f(x) = \frac{1}{x}$

829. $f(x) = \sqrt{x}$

830. $f(x) = x\sqrt[3]{x}$

831. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

832. $f(x) = 2^{x+1}$

833. $f(x) = \ln x$

834. $f(x) = \sin 2x$

835. $f(x) = \mathrm{ctg}x + 2$

836. $f(x) = \arcsin x$

837. $f(x) = \arccos 3x$

838. $f(x) = 7\mathrm{arctg}(x+1)$

Ҳосилалар жадвалидан фойдаланиб, қуйидаги функцияларнинг ҳосилалари топилсин.

839. $y = \frac{2x}{1-x^2}$

840. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

841. $y=\frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

842. $y=\frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$

843. $y=\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$

844. $y=\frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$

845. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

846. $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

847. $y=\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}$

848. $y=x\sqrt{1+x^2}$

849. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$

850. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$

851. $y=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

852. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$

853. $y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$

854. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

855. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$

856. $y=\cos 2x-2\sin x$

857. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$

858. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$

859. $y=\sin^n x\cos nx$

860. $y=\sin[\sin(\sin x)]$

861. $y=\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$

862. $y=\frac{\cos x}{2\sin^2 x}$

863. $y=\frac{1}{\cos^n x}$

864. $y=\frac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$

865. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$

866. $y=\operatorname{tg}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5x$

867. $y=4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8x}$

868. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$

869. $y=\sin\left[\cos^2\left(\operatorname{tg}^3x\right)\right]$

870. $y=\ln x^3-\frac{9}{x}-\frac{27}{2x^2}$

871. $y=\left(\sqrt{2}\right)^x+\left(\sqrt{5}\right)^{-x}$

872. $y=(x^2-7x+8)e^x$

873. $y=2^x\ln|x|$

874. $y=e^x\log_2 x$

875. $y=\log_2 x\cdot\ln x\cdot\log_3 x$

876. $y=\log_x 2$

877. $y=\log_x 2^x$

878. $y=\left(\frac{1-x^2}{2}\cdot\sin x-\frac{(1-x)^2}{2}\cdot\cos x\right)e^{-x}$

879. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$

880. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$

881. $y=e^{ax}\cdot\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$

882. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$

883. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b\quad(a>0\,,b>0)$

884. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\quad(a>0)$

885. $y=\lg^3 x^2$

886. $y=\ln(\ln(\ln x))$

887. $y=\ln\left(\ln^2\left(\ln^3 x\right)\right)$

888. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2(1+x)}$

889. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$

890. $y=\frac{1}{4\left(1+x^4\right)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$

891. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

892. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}\quad(0<k<1)$

893. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$

894. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

895. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\sqrt{x^2+1}$

896. $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x$

897. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

898. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}\quad(a>0\,,b>0)$

899. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

900. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

901. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

902. $y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x$

903. $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

904. $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln\sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}$

905. $y = \ln\frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\cdot \sin x}{a + b\cos x} \quad (0 \le |a| < |b|)$

906. $y = \frac{1}{x}\left(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6\right)$

907. $y = \frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$

908. $y = \frac{3}{2}\cdot\left(1 - \sqrt[3]{1 + x^2}\right) + 3\ln\left(1 + \sqrt[3]{1 + x^2}\right)$

909. $y = \ln\left[\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\frac{1}{x}\right)\right]$

910. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$

911. $y = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$

912. $y = \arcsin\frac{x}{2}$

913. $y = \arccos\frac{1 - x}{\sqrt{2}}$

914. $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$

915. $y = \operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$

916. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

917. $y = x + \sqrt{1 - x^2}\cdot \arccos x$

$$918.\ y = x\cdot\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$$

$$919.\ y = \arccos\frac{1}{x}$$

$$920.\ y = \arcsin(\sin x)$$

$$921.\ y = \arccos(\cos^2 x)$$

$$922.\ y = \arcsin(\sin x - \cos x)$$

$$923.\ y = \arccos\sqrt{1-x^2}$$

$$924.\ y = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$$

$$925.\ y = x + x^x + x^{x^x} \quad (x>0)$$

$$926.\ y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} \quad (a>0, \quad x>0)$$

$$927.\ y = \sqrt[x]{x} \quad (x>0)$$

$$928.\ y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$$

$$929.\ y = (\ln x)^x : x^{\ln x}$$

$$930.\ y = \left[\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$$

$$931.\ y = \log_x e$$

$$932.\ y = \ln(\operatorname{ch}x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$$

$$933.\ y = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2 x} - \ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right)$$

$$934.\ y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$$

$$935.\ y = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right)$$

$$936.\ y = \frac{b}{a}\cdot x + \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\operatorname{th}\frac{x}{2}\right) \quad (0 \le |b| < a)$$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқтада ҳосилаларининг мавжудлигига текширилсин:

937. $f(x)=|x|, \quad x_0=0$

938. $f(x)=|(x-1)(x-2)|, \quad x_0=1, \; x_0=2$

939. $f(x)=|x^3|, \quad x_0=0$

940. $f(x)=x\cdot|x|, \quad x_0=0$

941. $f(x)=|\sin x|, \quad x_0=\pi$

942. $f(x)=|x^2-x|, \quad x_0=1$

943. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса}, \\ x^4, & \text{агар } x\le 0, \end{cases} \quad x_0=0$

944. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x\ge 0 \text{ бўлса}, \\ x^2, & \text{агар } x<0, \end{cases} \quad x_0=0$

945. $f(x)=\begin{cases} x\cdot\cos\dfrac{1}{x}, & \text{агар } x\ne 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x=0, \end{cases} \quad x_0=0$

944. $f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{агар } x\le 0 \text{ бўлса}, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x<0, \end{cases} \quad x_0=0$

945. $f(x)=\begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & \text{агар } x\ne 0 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x=0, \end{cases} \quad x_0=0$

946. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{агар } x-\text{рационал сон бўлса}, \\ 0, & \text{агар } x-\text{иррационал сон бўлса}, \end{cases} \quad x_0=0$

947. $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{агар } x-\text{рационал сон бўлса}, \\ 2(x-1), & \text{агар } x-\text{иррационал сон бўлса}, \end{cases} \quad x_0=0$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган нуқталарда ўнг ва чап ҳосилаларининг мавжудлигига текширилсин.

948. $f(x)=\left|2^x-2\right|,\quad x=1$

949. $f(x)=\sqrt{\sin x^2},\quad x=0,\quad x=\sqrt{\pi}$

950. $f(x)=\arccos\frac{1}{x},\quad x=1,\quad x=-1$

951. $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\frac{1}{x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{агар} \quad x=0, \end{cases} \qquad x=0$

952. $f(x)=\begin{cases} x, & \text{агар} \quad x\leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4}\ln x, & \text{агар} \quad x>0, \end{cases} \qquad x=0$

953. $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{агар} \quad x=0, \end{cases} \qquad x=0$

954. $f(x)=\begin{cases} \frac{|\sin x|}{|x|}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \\ 1, & \text{агар} \quad x=0, \end{cases} \qquad x=0$

955. $f(x)=\begin{cases} x\cdot\sin\frac{1}{x^2}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{агар} \quad x=0, \end{cases} \qquad x=0$

956. $f(x)=|x-1|\cdot e^x,\quad x=1$

957. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{агар} \quad x=0, \end{cases} \qquad x=0$

958. $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x}, & \text{агар} \quad x\neq 0 \\ 0, & \text{агар} \quad x=0, \end{cases} \qquad x=0,\quad x=1$

959. Бутун сонлар ўқида аниқланган ва иккита нуқтада ҳосилага эга бўлмаган функцияга мисол келтирилсин.

960. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар X тўпламда аниқланган бўлиб, $f(x)$ функция $x_0\in X$ нуқтада ҳосилага эга, $g(x)$ эса бу нуқтада ҳосилага эга бўлмасин.У ҳолда

$$\text{а)}\, f(x) \pm g(x), \qquad \text{б)}\, f(x)\cdot g(x)$$

функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтирилсин.

961.Агар 960-мисолда $f(x)$ функция ҳам x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлмаса, у ҳолда $f(x)\pm g(x)$ ва $f(x)\cdot g(x)$ функцияларнинг x_0 нуқтадаги ҳосиласи ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтирилсин.

962.Бутун сонлар ўқида аниқланган ва фақат n та нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтирилсин.

963.Ҳосилага эга бўлган жуфт функциянинг ҳосиласи тоқ функция эканини исботлансин.

964.Ҳосилага эга бўлган тоқ функциянинг ҳосиласи жуфт функция эканини исботлансин.

965.Ҳосиласи жуфт функция бўлган, ўзи тоқ бўлмаган функцияга мисол келтирилсин.

966.Агар $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $f'(x)$ тоқ функция бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция жуфт эканини исботлансчин.

967.Агар ҳосилага эга бўлган $f(x)$ функция даврий бўлиб, унинг даври T бўлса, у ҳолда $f'(x)$ функция ҳам даврий бўлиб, унинг даври T га тенг бўлишини исботлансин.

968.Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтанинг бирор атрофида ҳосилга эга бўладими?

969.Бутун сонлар ўқида аниқланган бўлиб, ихтиёрий $x\in R$ нуқтада ҳосилага эга бўлмаган, лекин квадрати $\forall x\in R$ нуқтада ҳосилага эга бўлган функцияга мисол келтирилсин.

970.Агар $f(x)$ функция x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $\left\{n\left(f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0)\right)\right\}$ кетма-кетлик яқинлашувчи эканини исботлансин.

971. x_0 нуқтада ҳосилага эга бўлмаган $f(x)$ ва $g(x)$ функциялардан тузилган мураккаб функцияларнинг ҳосилалари ҳақида нима дейиш мумкин? Мисоллар келтирилсин.

Кўрсатилган нуқталарда тескари функцияларнинг ҳосилалари топилсин:

972. $y = x + \frac{1}{5}x^5, \quad y = 0, \quad y = \frac{6}{5}$

973. $y = 2x - \frac{\cos x}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$

974. $y = 0{,}1x + e^{0{,}1x}, \quad y = 1$

975. $y = 2x^2 - x^4, \quad x > 1, \quad y = 0$

976. $y = 2x^2 - x^4, \quad 0 < x < 1, \quad y = \frac{3}{4}$

Тескари функциянинг ҳосиласи топилсин, уларнинг аниқланиш соҳалари кўрсатилсин.

977. $y = x + \ln x, \quad x > 0$

978. $y = x + e^x$

979. $y = \frac{x^2}{1 + x^2}, \quad x < 0$

980. $y = \mathrm{ch}x, \quad x > 0$

Параметрик кўринишда берилган $y = y(x)$ функция учун y'_x топилсин.

981. $x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

982. $x = e^{-t}, \quad y = t^3, \quad -\infty < t < +\infty$

983. $x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 < t < \pi$

984. $x = a \quad \mathrm{ch}t, \quad y = b \quad \mathrm{sh}t, \quad -\infty < t < 0$

985. $x = t^2 + 6t + 5, \quad y = \frac{t^3 - 54}{t}, \quad 0 < t < +\infty$

986. $x = (t-1)^2(t-2), \quad y = (t-1)^2(t-3), \quad \frac{5}{3} < t < +\infty$

987. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad -\infty < t < +\infty$

988. $x = \ln\sin\frac{t}{2}, \quad y = \ln\sin t, \quad 0 < t < \pi$

Параметрик кўринишда берилган $x = x(y)$ функция учун x'_y топилсин:

989. $x = t + 2t^2 + t^3, \quad y = -2 + 3t - t^3, \quad 1 < t < +\infty$

989. $x = (t^3 - 2t^2 + 3t - 4)e^t, \quad y = (t^3 - 2t^2 + 4t - 4)e^t, \quad 1 < t < +\infty$

990. $x = ctg2t, \quad y = \dfrac{2\cos 2t - 1}{2\cos t}, \quad 0 < t < \dfrac{\pi}{2}.$

$r = r(\varphi)$ тенглама билан берилган $y = y(x)$ функция учун $y'(x_0)$ топилсин (бу ерда r ва $\varphi - (x; y)$ нуқтанинг қутб координаталари):

991. $r = a\varphi, \quad \dfrac{4\pi}{3} < \varphi < 2\pi, \quad x_0 = 0$

992. $r = e^{\varphi}, \quad -\dfrac{\pi}{6} < \varphi < \dfrac{\pi}{6}, \quad x_0 = 1$

993. $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{4}, \quad x_0 = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$

Қуйидаги тенгламалар ёрдамида берилган ошкормас $y(x)$ функциянинг ҳосиласи топилсин:

994. $y^5 + y^3 + y - x = 0$

995. $y - x = \varepsilon \sin y, \quad |\varepsilon| < 1$

996. $y^2 = 2px, \quad y > 0$

997. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad y > 0$

998. $(2a - x)y^2 = x^3, \quad y < 0$

999. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$

1000. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, \quad y > 0$

1001. $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0, \quad y < -1$

1002. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \ , x < 2y - 1$

Қуйидаги мисолларда $y'(x_0)$ топилсин:

1003. а) $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 2 = 0, \quad y > -5, \quad x_0 = 0$

б) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0,\quad y<2,\quad x_0=\frac{11}{12}$

в) $e^y+xy=e,\quad y>0,\quad x_0=0$

г) $xy+\ln y=1,\quad y<e^2,\quad x_0=0$

Ҳосиланинг геометрик маъноси

$y=f(x)$ функция графиги абсциссалар ўқини қандай бурчак остида кесиб ўтиши аниқлансин:

1004. $y=\sin 3x$

1005. $y=\mathrm{tg}x$

1006. $y=\ln|x|$

1007. $y=1-e^x$

1008. $y=\mathrm{arctg}\alpha x,\quad \alpha>0$

1009. $x=(t-1)^2(t-2),\quad y=(t-1)^2(t-3),\quad 2<t<+\infty$

1010. $y=\frac{3at}{t^3+1},\quad y=\frac{3at^2}{t^3+1},\quad -1<t<\frac{1}{2}$

1011. $x^2+y^2+2y-9=0,\quad y>-1$

Қандай нуқталарда қуйидаги $y=f(x)$ функция графигига ўтказилган уринмалар абсцисса ўқига параллел бўлади?

1012. $y=2x^3-3x^2-12x+7$

1013. $y=3x^4+4x^3-12x^2-1$

1014. $y=3x^4-28x^3-6x^2+84x+1$

1015. $y=\cos 2x-5\cos x$

1016. $y=\left(3-x^2\right)\cdot e^x$

1017. $y=\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$

1018. $y=|x-5|\cdot(x-3)^3$

1019. $x=\frac{t^3}{1+t^2},\quad y=\frac{t^3-2t^2}{1+t^2}$

1020. $x^2+2y^2+4x-4y=0,\quad y>1$

$y=f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган уринманинг тенгламаси ёзилсин.

1021. $y=\sqrt{5-x^2}, \quad x_0=1$

1022. $y=\operatorname{arctg}2x, \quad x_0=0$

1023. $y=\ln\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}, \quad x_0=0$

1024. $y=4\operatorname{ctg}x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}, \quad x_0=\frac{\pi}{2}$

1025. $2x^2-4xy+y^2-2x+6y-3=0$ эгри чизиғига ўтказилган ва $(3;\ 4)$ нуқтадан ўтувчи уринмалар орасидаги бурчак топилсин.

$y=f(x)$ функция графигига $(x_0, f(x_0))$ нуқтада ўтказилган нормалнинг тенгламаси ёзилсин:

1026. $y=\cos 2x-2\sin x, \quad x_0=\pi$

1027. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, \quad x_0=1$

1028. $y=\frac{x^3}{(2-x)^2}, \quad x_0=6$

1029. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}, \quad x_0=-3$

1030. $y^2=2px, \quad y\geq 0, \quad x=x_0$

1031. $x=e^{2t}\cos^2 t, \quad y=e^{2t}\sin^2 t, \quad |t|<\frac{\pi}{4}, \quad t_0=\frac{\pi}{6}$

1032. $3x^2+2xy+2y^2+3x-4y=0$ эллипснинг $(-2;\ 1)$ нуқтасига ўтказилган нормалнинг тенгламаси ёзилсин.

Берилган эгри чизиқ графигига M нуқтада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаси ёзилсин:

1033. $x^3+y^2+2x-6=0, \quad M(-1;3)$

1034. $4x^3-3xy^2+6x^2-5xy-8y^2+9x+14=0, \quad M(-2;3)$

1035. $y^4-4x^4-6xy=0, \quad M(1;2)$

1036. $x^5+y^5-2xy=0, \quad M(1;1)$

1037. $(4-x)y^2=x^3, \quad M(x_0;y_0)$

1038. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2,\ \ n \in N,\ \ M(a;b)$

1039. $x = t^2,\ \ y = t^3,\ \ M(4;8)$

1040. $x = \sqrt{2}\cos^3 t,\ \ y = \sqrt{2}\sin^3 t,\ \ M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

1041. $x = t\cos t,\ \ y = t\sin t,\ \ M\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{8};\frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$

1042. $x = \frac{1+t}{t^3},\ \ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t},\ \ M(2;2)$

1043. $x = \frac{2t-1}{t^2},\ \ y = \frac{3t^2-1}{t^3},\ \ M(1;2)$

Қуйидаги функциялар графикларининг кесишиш нуқталари топилсин ва қандай бурчак остида кесишишлари аниқлансин:

1044. $f_1(x) = x - x^3,\ \ f_2(x) = 5x$

1045. $f_1(x) = \sqrt{2}\sin x\ ,\ f_2(x) = \sqrt{2}\cos x$

1046. $f_1(x) = x^2,\ \ f_2(x) = x^3$

1047. $f_1(x) = \frac{1}{x}\ ,\ f_2(x) = \sqrt{x}$

1048. $f_1(x) = x^3,\ \ f_2(x) = \frac{1}{x^2}$

1049. $f_1(x) = \ln x\ ,\ f_2(x) = \frac{x^2}{2e}$

1050. $f_1(x) = x^2 - 4x + 4,\ \ f_2(x) = -x^2 + 6x - 4$

1051. $f_1(x) = 4x^2 + 2x - 8,\ \ f_2(x) = x^3 - x + 10$

Ҳосиланинг механик маъноси.

1052. $y = \sin\frac{1}{x}$ функциянинг $\left[\frac{2}{\pi};\frac{6}{\pi}\right]$ кесмадаги ўртача ўзгариш тезлиги аниқлансин.

1053. Массаси $\mathbf{m=1{,}5}$ бўлган жисм $\mathbf{S(t)=t^2+t+1}$ қонуни бўйича тўғри чизиқли ҳаракат қилади. Ҳаракат бошлангандан 5с дан кейин жисмнинг кинетик энергияси топилсин (масса кг да, йўл метр билан ўлчанади).

1054. Нуқта $\mathbf{y=8x-x^2}$ парабола бўйича шундай ҳаракат қиладики, унинг абсциссаси $\mathbf{x=\sqrt{t}}$ қонуни билан ўзгаради ($\mathbf{x}$-метр билан, $\mathbf{t}$-секунд билан ўлчанади). Ҳаракат бошлангандан 9с дан кейин нуқта ординатасининг ўзгариш тезлиги топилсин.

1055. Шарнинг радиуси 5см/с тезлик билан текис ўсади. Шарнинг радиуси 50см бўлган вақтда шар ҳажмининг ўзгариш тезлиги топилсин.

1056.Ғилдирак шундай айланадики, бурилиш бурчаги вақтнинг квадратига пропорционал. Биринчи айланишга 8с вақт кетди. Ҳаракат бошланганидан 64с дан кейин бурчак тезлиги топилсин.

1057.Абсцисса ўқи бўйича

$$\mathbf{x=100+5t,\quad x=\frac{t^2}{2}}$$

ҳаракат қонунлари билан иккита нуқта ҳаракатланмоқда. Ўзаро учрашиш моментида улар бир-биридан қандай тезлик билан узоқлашишади ($\mathbf{x}$-метр билан, $\mathbf{t}$-секунд билан ўлчанади)?

1058. Бошланғич $\boldsymbol{\vartheta_0}$ тезлик билан горизонтга α бурчак остида ташланган моддий нуқтанинг ҳаракат қонуни ҳаво қаршилигини ҳисобга олмаганда

$$\mathbf{x=(\vartheta_0\cos\alpha)t,\quad y=(\vartheta_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2}}$$

бу ерда $\mathbf{t}$-вақт, $\mathbf{g}$-оғирлик кучи тезланиши. Тезлик вектори координиталари ва тезлик миқдори аниқлансин.

2-§. Функция дифференциали

1^0. Функция дифференциали тушунчаси. $\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{(a,b)}$ да берилган бўлиб, $\mathbf{x_0\in(a,b),\quad x_0+\Delta x\in(a,b)}$ бўлсин.

Агар функция орттирмаси $\mathbf{\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}$ ни ушбу

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x \qquad (1)$$

кўринишда ифодалаш мумкин бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **дифференциалланувчи** дейилади, бунда A миқдор Δx га боғлиқ бўлмаган ўзгармас, α эса $\Delta x \to 0$ да нолга интилади.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлиши учун унинг шу нуқтада чекли $f'(x_0)$ ҳосилага эга бўлиши зарур ва етарли.

(1) ифодадаги

$$A \cdot \Delta x$$

қўшилувчи $f(x)$ функциянинг x_0 **нуқтадаги дифференциали** дейилади. Уни

$$f'(x_0) \cdot dx \qquad (A = f'(x_0), \quad \Delta x = dx)$$

каби ҳам ёзиш мумкин.

Функция дифференциали $df(x_0)$ каби ёзилади.

Демак,

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx \qquad (2)$$

2^0. Дифференциаллашнинг содда қоидалари. Айтайлик, $u = u(x), \quad v = v(x)$ дифференциалланувчи функциялар бўлсин. У ҳолда:

а) $d(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot du + \beta \cdot dv,$ бунда α ва β ихтиёрий ўзгармаслар;

б) $d(u \cdot v) = udv + vdu$;

в) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} \quad (v \neq 0)$

бўлади;

г)Агар $y = f(x), \quad x = \varphi(t)$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, $y = f(\varphi(t))$ функция ҳам дифференциалланувчи бўлиб,

$$df(x) = f'(x)dx \qquad (dx = \varphi'(t)dt)$$

бўлади. (Бу дифференциал шаклининг **инвариантлиги** хоссасини ифодалайди).

3^0. Тақрибий ҳисоблаш формуласи. $f(x)$ функция x_0 нуқтада дифференциалланувчи бўлсин. Унда

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

бўлиб, Δx етарлича кичик бўлганда ушбу

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$$

тақрибий формула ҳосил бўлади. Бу формулани қуйидагича

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \qquad (3)$$

ҳам ёзиш мумкин.

1 – м и с о л . *Ушбу*

$$f(x) = \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}$$

функциянинг дифференциали топилсин.

◄Бу функциянинг дифференциалини (2) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$df(x) = d\left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right) = \left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right)' \cdot dx = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{3}{x^2}\cos\frac{3}{x}\right)dx . ►$$

2 – м и с о л . ***Агар*** $u = u(x), \quad v = v(x)$ ***дифференциалланувчи функциялар бўлса,***

$$y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$$

нинг дифференциали топилсин.

◀Дифференциал шаклининг инвариантлиги хоссасидан фойдаланиб топамиз:

$$dy = d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{vdu - udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{u^2 + v^2}$$ ▶

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\alpha = \sqrt[4]{17}$$

миқдорнинг тақрибий қиймати тописин.

◀(3) формулада

$f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x = 17, \quad x_0 = 16$ дейилса, унда $\Delta x = x - x_0 = 1$ бўлиб,

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x = 2 + \frac{1}{32}\cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2{,}031$$

бўлади. Демак, $\alpha = 2{,}031$.▶

1059. $y = (x-1)^3$ функция орттирмаси билан дифференциалининг айирмаси топилсин.

Функция дифференциали топилсин:

1060. $y = \frac{1}{x}$

1061. $y = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$

1062. $y = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$

1063. $y = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right|$

1064. $y = \arcsin\frac{x}{a} \qquad (a \neq 0)$

Дифференциал топилсин:

1065. $d\left(e^{-x} + \ln x\right)$

1066. $d\left(\sqrt{x} + 2\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)$

1067. $d\left(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2)\right)$

1068. $d\left(\arccos e^x\right)$

$$1069.\ d\ln\left(\sqrt{1+2\sin x}+\sqrt{2\sin x-1}\right)$$

$$1070.\ d\left(5\mathrm{sh}^7\left(\frac{x}{35}\right)+7\mathrm{sh}^5\left(\frac{x}{35}\right)\right)$$

$$1071.\ d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

$$1072.\ d\left(\ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}+2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin x}\right)$$

$$1073.\ d\left(x^{x^2}\right)$$

Кўрсатилган нуқталардаги дифференциал топилсин:

$$1074.\ d\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{x-1}{x}\right),\quad x=-1$$

$$1075.\ d\left(\mathrm{arctg}\frac{\ln x}{x}\right),\quad x_1=\frac{1}{e},\quad x_2=e$$

$$1076.\ d\left(\frac{(2x-1)^3\sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}\right),\quad x=0$$

$$1077.\ d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right),\quad x_1=1,\quad x_2=2$$

Агар u, ϑ, ω лар x нинг дифференциалланувчи функциялари бўлса, $y=y(x)$ функциянинг дифференциали топилсин:

$$1078.\ y=u\vartheta\omega$$

$$1079.\ y=\frac{u}{\vartheta^2}$$

$$1080.\ y=\frac{1}{\sqrt{u^2+\vartheta^2}}$$

$$1081.\ y=\mathrm{arctg}\frac{u}{\vartheta}$$

$$1082.\ y=\ln\sqrt{u^2+\vartheta^2}$$

Топилсин:

$$1083.\ \frac{d}{d(x^3)}\left(x^3-2x^6-x^9\right)$$

$$1084.\ \frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$1085.\ \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$$

$$1086.\ \frac{d(\mathrm{tg}x)}{d(\mathrm{ctg}x)}$$

$$1087.\ \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$$

Қуйидаги ошкормас ёки параметрик кўринишда берилган $y=y(x)$ функциянинг кўрсатилган нуқтадаги дифференциали топилсин:

$$1088.\ y^3-y=6x^2,\quad (1;2)$$

$$1089\ x^4+y^4-8x^2-10y^2+16=0,\quad (1;3)$$

$1090.\ y^5+x^4=xy^2,\ \ (x_0;y_0)$

$1091.\ x+y\ln y=0,\ \ (x_0;y_0)$

$1092.\ xy-\sqrt[3]{xy^2+6}=0,\ \ (2;1)$

$1093.\ xe^{\left(\frac{x}{y^2}-1\right)}-2y=0,\ \ (4;2)$

$1094.\ 3^{\sin yx^2}-3x(y-\pi)-1=0,\ \ (1;\pi)$

$1095.\ 4xy^3+\ln\sqrt[3]{\frac{x}{x+y}}=0,\ \ (1;0)$

$1096.\ x=(t-1)^2(t-2),\ \ y=(t-1)^2(t-3),\ \ (4;0)$

$1097.\ x=\frac{e^t}{t},\ \ y=(t-1)^2\cdot e^t,\ \ \left(-\frac{2}{\sqrt{e}};\frac{9}{4\sqrt{e}}\right)$

Функция орттирмасини дифференциал билан алмаштириб, қуйидаги қийматлар тақрибий ҳисоблансин:

$1098.\ \sqrt[3]{1,02}$ $\qquad 1099.\ \sin 29^0$ $\qquad 1100.\ \cos 151^0$

$1101.\ \mathrm{arctg}1,05$ $\qquad 1102.\ \lg 11$

3-§. Функциянинг юқори тартибли ҳосила ва дифференциаллари

1^0. Юқори тартибли ҳосила тушунчаси. $f(x)$ функция (a,b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Уни $g(x)$ дейлик:

$$g(x)=f'(x)\qquad (x\in(a,b))$$

$g(x)$ функциянинг $x_0\in(a,b)$ нуқтадаги ҳосиласи $g'(x_0)$ га $f(x)$ функциянинг x_0 нуқтадаги **иккинчи тартибли ҳосиласи** дейилади ва

$$f''(x_0)\qquad \text{ёки}\qquad \frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$$

каби белгиланади.

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функциянинг **3-тартибли, 4-тартибли** ва ҳ.к. тартибли ҳосилалари таърифланади. Умуман,

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'\qquad (n=2,3,...).$$

2^0. Содда қоидалар. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари (a,b) да $f^{(n)}(x)$ ва $g^{(n)}(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $\left(c\cdot f(x)\right)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x),\quad c=\mathrm{const}$;

2) $\left(f(x)\pm g(x)\right)^{(n)}=f^{(n)}(x)\pm g^{(n)}(x)$;

3) $\left(f(x)\cdot g(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)\cdot g^{(n-k)}(x)$

$$\left(C_n^k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!},\ f^{(0)}(x)=f(x)\right) \tag{1}$$

бўлади. (1) формула **Лейбниц формуласи** дейилади.

3^0. Асосий формулалар:

1) $\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a\quad (a>0);\qquad \left(e^x\right)^{(n)}=e^x$,

2) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$,

3) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$,

4) $\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$,

5) $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$.

4^0. Юқори тартибли дифференциал тушунчаси. $f(x)$ функция (a,b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Уни

$$f'(x)=g(x)\qquad (x\in(a,b))$$

дейлик.

Агар $g(x)$ функция $x_0\in(a,b)$ да дифференциалланувчи бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **икки марта дифференциалланувчи** дейилади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $x\in(a,b)$ нуқтада икки марта дифференциалланувчи бўлсин. Бу функция дифференциали $df(x)$ нинг дифференциали

$$d(df(x))$$

га $f(x)$ функциянинг **иккинчи тартибли дифференциали** дейилади. Уни $d^2f(x)$ каби белгиланади:

$$d^2f(x)=d(df(x)).$$

Функциянинг иккинчи тартибли дифференциали

$$d^2f(x)=f''(x)dx^2$$

бўлади.

Худди шунга ўхшаш $f(x)$ функциянинг 3-тартибли,4-тартибли ва ҳ.к. тартибли дифференциаллари таърифланади. Умуман,

$$d^nf(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right)\qquad (n=2,3,\cdots)$$

бўлиб,

$$d^nf(x)=f^{(n)}(x)dx^n$$

бўлади.

5^0. **Содда қоидалар.** $f(x)$ ва $g(x)$ функциялари (a,b) да $d^n f(x)$ ва $d^n g(x)$ дифференциалларга эга бўлсин. У ҳолда:

1) $d^n(c\cdot f(x)) = c\cdot d^n f(x), \quad c = const$;

2) $d^n(f(x)\pm g(x)) = d^n f(x)\pm d^n g(x)$;

3) $d^n(f(x)\cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f(x)\cdot d^{n-k} g(x)$

бўлади.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x) = |x|^3$$

функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи топилсин.

◀Айтайлик, $x\neq 0$ бўлсин, Унда

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{агар } x>0, \\ -x^3, & \text{агар } x<0 \end{cases}$$

бўлиб,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{агар } x>0, \\ -3x^2, & \text{агар } x<0 \end{cases}$$

бўлади.

Айтайлик, $x=0$ бўлсин. Бу ҳолда таърифга биноан

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = 0$$

бўлади.

Демак, берилган функция x нинг барча қийматларида ҳосилага эга бўлиб,

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x$$

бўлади.

Худди юқоридагидек, $x\neq 0$ бўлганда

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & \text{агар } x>0, \\ -6x, & \text{агар } x<0, \end{cases} \qquad x=0$$

бўлган

$$f''(0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x^2 \operatorname{sign}\Delta x}{\Delta x} = 0$$

бўлиб, барча x ларда

$$f''(x) = 6|x|$$

бўлади.▶

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}$$

функциянинг n***-тартибли ҳосиласи топилсин.***

◀Равшанки,

$$\frac{2x+3}{x^2-5x+6}=\frac{9}{x-3}-\frac{7}{x-2}$$

бўлиб,

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)}=\left(\frac{9}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{7}{x-2}\right)^{(n)}=9\cdot\left((x-3)^{-1}\right)^{(n)}-7\cdot\left((x-2)^{-1}\right)^{(n)}$$

бўлади. 3^0 даги 4)–формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\left((x-3)^{-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x-3)^{-n-1}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}},$$

$$\left((x-2)^{-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\cdot n!(x-2)^{-n-1}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

Демак,

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)}=\frac{9(-1)^n\cdot n!}{(x-3)^{n+1}}+\frac{7(-1)^{n+1}\cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.\blacktriangleright$$

Фараз қилайлик, x ўзгарувчи ва унинг функцияси y лар бирор ёрдамчи t ўзгарувчи (параметр) орқали берилган бўлсин:

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

y нинг x бўйича ҳосилалари қуйидаги формулалар ёрдамида топилади:

$$\left.\begin{aligned} y'&=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ y''&=\frac{dy'}{dx}=\frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \\ y'''&=\frac{dy''}{dx}=\frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \end{aligned}\right. \qquad (2)$$

3 – м и с о л . ***Параметрик кўринишда берилган ушбу***

$$x=1+e^{at},\quad y=at+e^{-at}$$

функциянинг учинчи тартибли ҳосиласи топилсин.

◀Бу функциянинг ҳосилаларини (2) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{a-ae^{-at}}{ae^{at}}=e^{-at}-e^{-2at};$$

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{2ae^{-2at}-ae^{-at}}{ae^{at}}=2e^{-3at}-e^{-2at};$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{2ae^{-2at} - 6ae^{-3at}}{ae^{at}} = 2e^{-3at} - 6e^{-4at}. \blacktriangleright$$

4 – м и с о л . *Агар* $u, \; v, \; du, \; dv$ *ҳамда* $d^2u, \; d^2v$ *лар маълум бўлса,* $d^2\left(\frac{u}{v}\right)$ *топилсин.*

◀Таъриф ҳамда содда қоидалардан фойдаланиб топамиз:

$$d^2\left(\frac{u}{v}\right) = d\left(d\left(\frac{u}{v}\right)\right) = d\left(\frac{vdu - udv}{v^2}\right) = \frac{v^2 d(vdu - udv) - (vdu - udv)dv^2}{v^4} =$$

$$= \frac{v^2\left(vd^2u + dvdu - ud^2v - dudv\right) - 2v(vdu - udv)dv}{v^4} =$$

$$= \frac{1}{v}d^2u - \frac{u}{v^2}d^2v - \frac{2}{v^2}dudv + \frac{2u}{v^3}dv^2. \blacktriangleright$$

Иккинчи тартибли ҳосила топилсин:

1103. $y = x^2 + 13x + 11$

1104. $y = 1 + 10x + \frac{1}{x^{98}}$

1105. $y = \frac{x\left(1 + 3\sqrt{1 - x^2}\right)}{\sqrt{1 - x^2}}$

1106. $y = \cos^2 x$

1107. $y = sh^2x + ch^2x$

1108. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

1109. $y = \mathrm{arctg}\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

1110. $y = \mathrm{arctg}\frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$

1111. $y = \arcsin\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

1112. $y = 2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x} - \ln\frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x}$

1113. $y(0), \; y'(0)$ ва $y''(0)$ лар топилсин:

$$y = e^{\sin x} \cdot \cos(\sin x)$$

Функциянинг иккинчи дифференциали топилсин:

1114. $y = \left(x^2 + x + 1\right)e^{-x}$

1115. $y = 2x + \mathrm{ctg}2x$

1116. $y = x(\cos\ln x + \sin\ln x)$

1117. $y = x^x$

Агар $u = u(x)$, $\vartheta = \vartheta(x)$ - икки марта дифференциалланувчи функциялар бўлса, d^2y топилсин.

1118. $y = u \cdot \vartheta$

1119. $y = \dfrac{u}{\vartheta}$

1120. $y = u^m \cdot \vartheta^n$ (m ва n-ўзгармас сонлар)

1121. $y = a^u$

1122. $y = \ln\sqrt{u^2 + \vartheta^2}$

1123. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{\vartheta}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ **топилсин:**

1124. $x = t^3, \quad y = t^2$

1125. $x = \dfrac{t^2}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{t^3}{1+t^3}$

1126. $x = \ln\cos t, \quad y = \ln\cos 2t$

1127. $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$

1128. $x = (1+\cos^2 t)\sin t, \quad y = \sin^2 t\cos t$

1129. $x = tcht - sht, \quad y = tsht - cht$

1130. $x = \dfrac{e^t}{1+t}, \quad y = (t-1)e^t$

1131. $x = \dfrac{1}{\cos t}, \quad y = tgt - t$

1132. $x = \sin\log_2 t, \quad y = tg\log_2 t$

1133. $x = 2^{\cos^2 t}, \quad y = 2^{\sin^2 t}$

Ошкормас кўринишда берилган $y = y(x)$ функция учун y'' топилсин:

1134. $x^2 + y^2 = a^2$

1135. $x^2 - y^2 = a^2$

1136. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

1137. $y^2 = 2px$

1138. $e^{x-y} = x + y$

1139. $e^{2y} - 2\ln x - 1 = 0$

1140. $y - xtg\ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0$

1141. $y^2 = e^{x^4 - y^2}$

Кўрсатилган тартибдаги ҳосилалар топилсин:

1142. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3; \quad y^{(6)}$ ва $y^{(7)}$

1143. $y = \dfrac{a}{x^m}; \quad y'''$

1144. $y = \sqrt{x}; \quad y^{(10)}$

1145. $y = \dfrac{x^2}{1-x}; \quad y^{(8)}$

1146. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}; \quad y^{(100)}$

1147. $y = x^2 e^{2x}; \quad y^{(20)}$

1148. $y = \dfrac{e^x}{x}; \quad y^{(10)}$

1149. $y = x\ln x; \quad y^{(5)}$

1150. $y = \dfrac{\ln x}{x}; \quad y^{(5)}$

1151. $y = x^2 \sin 2x; \quad y^{(50)}$

1152. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}; \quad y'''$

1153. $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x; \quad y^{(10)}$

1154. $y = x \cdot \mathrm{sh}x; \quad y^{(100)}$

1155. $y = e^x \cos x; \quad y^{iv}$

1156. $y = \sin^2 x \cdot \ln x; \quad y^{(6)}$

$y = y(x)$ функция учун кўрсатилган тартибдаги дифференциаллар топилсин:

1157. $y = x^5; \quad d^5y$

1158. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}; \quad d^3y$

1159. $y = x\cos 2x; \quad d^{10}y$

1160. $y = e^x \ln x; \quad d^4y$

1161. $y = \cos x \cdot \mathrm{ch}x; \quad d^6y$

1162.Ошкормас $y = y(x)$ функция берилган тенгламани қаноатлантириши исботлансин:

1) $y = A\ln y + x + B, \quad y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3$

2) $(A + Bx)e^{\frac{y}{x}} = x, \quad x^3y'' = (xy' - y)^2$

Қуйидаги функциялар учун $y^{(n)}(x)$ топилсин:

1163. $y = x^3 + x + e^{3x}$

1164. $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$

1165. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$

1166. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

1167. $y=\ln(ax+b)$

1168. $y=\sin^2 x$

1169. $y=\sin ax\sin bx$

1170. $y=\operatorname{ch}ax\cdot\operatorname{ch}bx$

1171. $y=\sin^2 x\sin 2x$

1172. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$

1173. $y=\cos^4 x$

1174. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

1175. $y=\dfrac{x}{x^2-4x-12}$

1176. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

1177. $y=\dfrac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$

$d^n y$ топилсин:

1178. $y=x^n e^x$

1179. $y=\dfrac{\ln x}{x}$

1180.Тенглик исботлансин:

$$\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Кўрсатма: Математик индукция усулини қўлланг.

4-§. Дифференциал ҳисобнинг асосий теоремалари

Қуйидаги келтириладиган теоремалар функцияларни ўрганишда муҳим аҳамиятга эга:

1^0. Ролль теоремаси. $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) $f(x)\in C[a,b]$,

2) $\forall x\in(a,b)$ *да* $f'(x)$ *мавжуд ва чекли,*

3) $f(a)=f(b)$.

У ҳолда шундай $c\in(a,b)$ *топиладики,*

$$f'(c)=0$$

бўлади.

2^0. Лагранж теоремаси. $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) $f(x)\in C[a,b]$,

2) $\forall x\in(a,b)$ *да* $f'(x)$ ***мавжуд ва чекли.***

У ҳолда шундай $c\in(a,b)$ ***топиладики,***

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

бўлади.

3^0. **Коши теоремаси.** $f(x)$ ***ва*** $g(x)$ ***функциялар*** $[a,b]$ ***да берилган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарсин:***

1) $f(x)\in C[a,b],\ g(x)\in C[a,b]$,

2) $\forall x\in(a,b)$ *да* $f'(x)$ *ва* $g'(x)$ ***хосилалар мавжуд ва чекли,***

3) $\forall x\in(a,b)$ *да* $g'(x)\neq 0$.

У ҳолда шундай $c\in(a,b)$ ***топиладики,***

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

бўлади.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=2-\sqrt[3]{x^2}$$

функцияга $[-1,1]$ ***оралиқда Ролль теоремасини қўллаш мумкинми?***

◄Равшанки, берилган функция $(-\infty,+\infty)$ оралиқда, жумладан $[-1,1]$ да узлуксиз. $[-1,1]$ оралиқнинг четларида

$$f(-1)=1-\sqrt[3]{(-1)^2}=1-1=0,$$

$$f(1)=1-\sqrt[3]{1^2}=1-1=0$$

бўлиб, $f(-1)=f(1)$ бўлади. $f(x)$ функциянинг ҳосиласи $x\neq 0$ бўлганда

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

бўлиб, $x=0$ нуқтада мавжуд эмас. Бинобарин, Ролль теоремасининг $(-1,1)$ да чекли ҳосила мавжуд бўлиши шарти бажарилмайди. Шунинг учун берилган функцияга Ролль теоремасини қўллаб бўлмайди.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$fx=4x^3-5x^2+x-2$$

функцияга $[0,2]$ ***оралиқда Лагранж теоремасини тадбиқ этиб, ундаги*** c ***нуқта топилсин.***

◄Берилган функциянинг $[0,2]$ оралиқда Лагранж теоремасининг шартларини бажариши равшан. Лагранж теоремасига биноан

$$f(2)-f(0)=f'(c)\cdot(2-0)$$

бўлади. Берилган функция учун

$$f(2)=12,\quad f(0)=-2,\quad f'(x)=12x^2-10x+1,$$

$$f'(c)=12c^2-10c+1$$

бўлиб,

$$12-(-2)=f'(c)\cdot 2$$

бўлади. Натижада

$$12c^2-10c-6=0$$

квадрат тенгламага келамиз. Бу квадрат тенгламанинг ечимлари

$$\mathbf{c_1=\frac{5+\sqrt{97}}{12}},\quad \mathbf{c_2=\frac{5-\sqrt{97}}{12}}$$

бўлиб, улардан $\mathbf{c_1}$ ечим $[\mathbf{0,2}]$ га тегишли бўлади.▶

1181. $\mathbf{f(x)=x(x^2-1)}$ функция учун $[\mathbf{-1,1}]$ ва $[\mathbf{0,1}]$ оралиқларда Ролль теоремасининг шартлари текширилсин..

1182. $\mathbf{f(x)=(x^2-1)(x-2)}$ функция учун $(\mathbf{-1,1})$ ва $(\mathbf{1,2})$ интервалларда шундай нуқталар топилсинки, бу нуқталарда функция графигига ўтказилган уринмалар абсциссалар ўқига параллел бўлсин.

1183. Ҳақиқий коэффицентли кўпҳад фақат ҳақиқий илдизларга эга бўлса, унинг барча ҳосилалари ҳам фақат ҳақиқий илдизларга эга экани исботлансин.

1184. Ҳақиқий коэффицентли кўпҳаднинг иккита ҳақиқий илдизлари орасида унинг ҳосиласининг илдизи ҳам бор экани исботлансин.

1185. Агар $\mathbf{f}$ функция $[\mathbf{a,b}]$ кесмада $\mathbf{n}$ маротаба дифференциалланувчи ва бу кесманинг $\mathbf{n+1}$ та нуқтасида нолга айланса, у ҳолда $\mathbf{f^{(n)}(\xi)=0}$ бўладиган $\xi\in(\mathbf{a,b})$ нуқтанинг мавжудлиги исботлансин.

1186. Ушбу

$$\mathbf{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

кўпҳаднинг ҳосиласининг илдизлари ҳақиқий, туб ва $(\mathbf{0;1})$, $(\mathbf{1;2})$, $(\mathbf{2;3})$, $(\mathbf{3;4})$ интервалларда ётиши исботлансин.

1187. $\mathbf{y=x^3}$ эгри чизиғида шундай нуқта топилсинки, бу нуқтада унга ўтказилган уринма $\mathbf{A(-1;-1)}$ ва $\mathbf{B(2;8)}$ нуқталарни туташтирувчи ватарга параллел бўлсин.

1188. $\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}}$ функцияси учун $[\mathbf{a,b}]$ кесмада $(\mathbf{a\cdot b<0})$ чекли орттирмалар формуласи (Лагранж формуласи) ўринлими?

1189. Фараз қилайлик, $\mathbf{f(x)}$ функция $(\mathbf{a,b})$ интервалда узлуксиз $\mathbf{f'(x)}$ ҳосилага эга бўлсин. $(\mathbf{a,b})$ да ётувчи ихтиёрий ξ нуқта учун

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \qquad (a<x_1<\xi<x_2<b)$$

муносабат ўринли бўладиган x_1, x_2 нуқталарини кўрсатиш (топиш) мумкинми?

Ушбу мисолни қаранг: $f(x)=x^3 \quad (-1\le x\le 1), \quad \xi=0$.

1190.Лагранж теоремасидан фойдаланиб, тенгсизликлар исботлансин:

а) $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$;

б) $py^{p-1}(x-y)\le x^p-y^p\le px^{p-1}(x-y)$, бу ерда $0<y<1$ ва $p>1$;

в) $|\mathrm{arctg} a-\mathrm{arctg} b|\le|a-b|$;

г) $\frac{a-b}{a}<\ln\frac{a}{b}<\frac{a-b}{b}$, агар $0<b<a$;

д) $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x, \quad x>0$;

е) $e^x>1+x, \quad x\in R$;

ж) $e^x>ex, \quad x>1$.

1191.Қуйидаги

$$f(x)=x^2 \qquad \text{ва} \qquad g(x)=x^3$$

функциялар учун $[-1;1]$ кесмада Коши формуласи ўринли эмаслиги тушунтирилсин.

1192.Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[x_1,x_2]$ $(x_1\cdot x_2>0)$ кесмада дифференциалланувчи бўлсин. Қуйидаги исботлансин:

$$\frac{1}{x_1-x_2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi), \text{ бу ерда } x_1<\xi<x_2.$$

1193.Агар $f(x)$ функция $x>0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

бўлиши исботлансин.

1194. Агар $f(x)$ функция $x > 0$ нуқталарда дифференциалланувчи бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$$

бўлса, у ҳолда $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$ экани исботлансин.

1195. Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалда дифференциалланувчи ва чегараланмаган бўлса, у ҳолда унинг ҳосиласи ҳам чегараланмаганлиги исботлансин.

1196. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ кесмада дифференциалланувчи бўлиб, $f(a)=f(b)$ бўлса, у ҳолда $\exists\,\xi\in(a,b)$ мавжуд бўлиб,

$$f(a)-f(\xi)=\frac{1}{2}\xi f'(\xi)$$

муносабат ўринлилигини исботлансин.

1197. Исботлансин:

а) $2\operatorname{arctg}x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi\operatorname{sgn}x,\quad |x|\ge 1$;

б) $3\arccos x-\arccos\left(3x-4x^3\right)=\pi,\quad |x|\le\dfrac{1}{2}$.

5-§. Тейлор формуласи

1^0. **Тейлор формуласи.** Айтайлик, $f(x)$ функция (a,b) да берилган, $x_0\in(a,b)$ бўлиб, бу функция x_0 нуқтада $f',f'',\dots,f^{(n)}$ ҳосилаларига эга бўлсин. Ушбу

$$f(x)=f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

формулага $f(x)$ функциянинг **Тейлор формуласи** дейилади, $R_n(x)$ эса Тейлор формуласининг **қолдиқ ҳади** дейилади.

2^0. **Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи.** Айтайлик, (a,b) да берилган $f(x)$ функция қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $\forall x\in(a,b)$ да $f',f'',\dots,f^{(n-1)}$ ҳосилалар мавжуд,

2) $f^{(n)}(x_0)$ ҳосила мавжуд.

У ҳолда

$$f(x)=f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right) \quad (1)$$

бўлади. Бу формула **Пеано кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи** дейилади. Равшанки, бу ҳолда $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ бўлади.

3^0. Лагранж ҳамда Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формулалари. $f(x)$ функция (a,b) да

$$f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$$

ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$f(x)=f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (2)$$

ва

$$f(x)=f(x_0)=\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta_1(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta_1)^n \quad (3)$$

бўлади, бунда $0<\theta<1, \quad 0<\theta_1<1$.

(2) формула **Лагранж кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи** дейилади. Бу ҳолда

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

бўлади.

(3) формула **Коши кўринишидаги қолдиқ ҳадли Тейлор формуласи** дейилади. Бу ҳолда

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta_1(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta_1)^n$$

бўлади.

(2), (3), (4) Тейлор формулаларида $x_0=0$ бўлганда, **Маклорен формулалари** деб ҳам юритилади.

4^0. Баъзи содда функцияларнинг Маклорен формулалари. Юқоридаги (2) формуладан ($x_0=0$ бўлган ҳол учун) фойдаланиб баъзи содда функцияларнинг Тейлор формулаларини келтирамиз:

1) $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+...+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

2) $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+...+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})$

3) $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+...+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$

4) $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

5) $$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\sin(\sin x)$$

функция Маклорен формуласи бўйича $o(x^3)$ ***ҳадгача ёзилсин.***

◄Бу функцияни Маклорен формуласи бўйича ёзишда 2-формуладан фойдаланимиз. Аввало 2) да x нинг ўрнига $\sin x$ ни қўйиб топамиз:

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{\sin^3 x}{6}+o(\sin^4 x)$$

Агар

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4),$$

$$\sin^3 x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^3=x^3+o(x^4),$$

$$\sin^4 x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^4)\right)^4=x^4+o(x^5)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\sin(\sin x)=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$$

бўлишини топамиз.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$shx=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})$$

муносабат исботлансин.

◄Равшанки,

$$shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1) -формуладан фойдаланиб топамиз:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),$$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+o(x^n).$$

Кейинги тенгликлардан

$$e^x-e^{-x}=2x+2\frac{x^3}{3!}+...+2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{n+2})$$

бўлади. Натижада

$$\mathbf{shx}=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right)=x+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o\left(x^{2n+2}\right)$$

бўлиши келиб чиқади.►

3 – м и с о л . *Агар* $x\to 0$ *да* $f(x)=1+\frac{1}{2}x+o(x)$ *бўлса,*

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\sqrt{e}$$

бўлиши исботлансин.

◄Равшанки,

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln f(x)}.$$

Агар

$$\ln f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{2}x+o(x)\right)=\frac{1}{2}x+o(x)$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$e^{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x+o(x)\right)}=e^{\frac{1}{2}+\frac{o(x)}{x}}$$

бўлишини топамиз.
Кейинги тенгликдан

$$\lim_{x\to 0}[f(x)]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(e^{\frac{1}{2}+\frac{o(x)}{x}}\right)=\sqrt{e}$$

бўлиши келиб чиқади.►

4 – м и с о л . *Ушбу*

$$\alpha=(1{,}2)^{1{,}1}$$

миқдор тақрибий ҳисоблансин.

◄5-формулага кўра

$$(1+x)^{m}=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^{2}+o\left(x^{2}\right)$$

бўлиб, ундан қуйидаги тақрибий формула ҳосил бўлади:

$$(1+x)^{m}\approx 1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^{2}.$$

Кейинги муносабатда $x=0{,}2,\ \ m=1{,}1$ деб топамиз:

$$\alpha=(1{,}2)^{1{,}1}=(1+0{,}2)^{1{,}1}\approx 1+1{,}1\cdot 0{,}2+\frac{1{,}1\cdot 0{,}1}{2}\cdot 0{,}04=1{,}2222.►$$

Қуйидаги функциялар Маклорен формуласи бўйича $o\left(x^{2}\right)$ ҳадгача ёйилсин:

1198. $f(x)=e^{tgx}$ **1199.** $f(x)=e^{\sqrt{1+2x}}$ **1200.** $f(x)=\ln\cos x$

Қуйидаги функциялар Маклорен формуласи бўйича $o\left(x^3\right)$ ҳадгача ёйилсин:

1201. $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$

1202. $f(x)=\sqrt[3]{1+3\sin x}$

1203. $f(x)=\ln(1+\arcsin x)$

1204. $f(x)=\operatorname{arctg}(\sin x)$

Қуйидаги функциялар Маклорен формуласи бўйича $o\left(x^n\right)$ ҳадгача ёйилсин:

1205. $f(x)=e^{5x-1}$

1206. $f(x)=\sin(2x+3)$

1207. $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$

1208. $f(x)=\ln\left(e^x+2\right)$

1209. $f(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$

1210. $f(x)=3^{2-x}$

1211. $f(x)=\left(x^2-x\right)e^{-x}$

1212. $f(x)=\ln\frac{1+2x}{1-x}$

1213. $f(x)=\ln\left(2+x-x^2\right)$

1214. $f(x)=\frac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$

1215. $f(x)=\frac{x^3}{x-1}$

1216. $f(x)=\frac{x^2+1}{2x-3}$

1217. $f(x)=\frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$

Қуйидаги функциялар Тейлор формуласи бўйича x_0 нуқтанинг атрофида $o\left((x-x_0)^2\right)$ ҳадгача ёйилсин:

1218. $f(x)=\frac{1}{x},\ x_0=2$

1219. $f(x)=\sin(2x-3),\ x_0=1$

1220. $f(x)=xe^{2x},\ x_0=-1$

1221. $f(x)=x^2e^{-2x},\ x_0=-1$

1222. $f(x)=\left(x^2-1\right)e^{2x},\ x_0=-1$

1223. $f(x)=\sin(x+1)\sin(x+2),\ x_0=-1$

1224. $f(x)=\ln(2x+1),\ x_0=\frac{1}{2}$

1225. $f(x)=\ln\sqrt[3]{7x-2},\ x_0=1$

1226. $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}\ln x,\ x_0=1$

1227. $f(x)=\frac{2x}{1-x^2},\ x_0=2$

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин:

1228. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

1229. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$

1230. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4}$

1231. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$

1232. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}x-\arcsin x}{x^2}$

1233. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-x}{\sin x-x}$

1234. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

1235. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^x-1}{x^2}$

1236. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

1237. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sh}(\mathrm{tg}x)-x}{x^3}$

1238. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-\sqrt{1+x^2}-x\cos x}{\ln^3(1-x)}$

1239. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\mathrm{tg}x\right)^{\mathrm{tg}x}$

1240. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-x^2+\frac{\pi}{2}\right)$

1241. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt[4]{x^{12}-x^9+2}\right)$

1242. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(\sin\pi x)}{\ln(1+\ln x)}$

1243. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^{\pi x-2x^2}}{\cos x}$

$$1244.\ \lim_{x\to\infty} x\left[(2e)^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}-2\right]$$

$$1245.\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\,tg\,x}\right)$$

$$1246.\ \lim_{x\to\infty}\left(x^2-\frac{x}{2}-\left(x^3+x+1\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

V-БОБ.
Ҳосила ёрдамида функцияларни текшириш

1-§. Функциянинг ўсувчилиги ва камаювчилиги

1^0. Функциянинг ўсувчилиги шарти. $f(x)$ функция (a,b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин. $f(x)$ (a,b) да **ўсувчи** бўлиши учун $f'(x)\geq 0$ $(x\in(a,b))$ бўлиши зарур ва етарли.

Агар $f'(x)>0$ бўлса, $f(x)$ функция (a,b) да **қатъий ўсувчи** бўлади.

2^0. Функциянинг камаювчилиги шарти. $f(x)$ функция (a,b) да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлсин $f(x)$ (a,b) да **камаювчи** бўлиши учун $f'(x)\leq 0$ $(x\in(a,b))$ бўлиши зарур ва етарли.

Агар $f'(x)<0$ бўлса $f(x)$ функция (a,b) да **қатъий камаювчи** бўлади.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$$

функциянинг ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқлари топилсин.

◄Берилган функция жуфт бўлганлиги учун уни $(0,+\infty)$да қараш етарли бўлади. Равшанки,

$$f'(x)=\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}.$$

Энди $f'(x)>0$, яъни $\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}>0$ тенгсизликни ечамиз.

$$\sin\frac{\pi}{x}>0 \quad \Rightarrow 0<\frac{\pi}{x}<\pi \qquad \text{ва} \qquad 2n\pi<\frac{\pi}{x}<\pi+2n\pi \qquad (n\in N).$$

Кейинги тенгсизликлардан

$$x>1 \text{ ва } \quad \frac{1}{2n+1}<x<\frac{1}{2n} \qquad (n\in N)$$

бўлиши келиб чиқади.

Демак, $(1,+\infty)$ ва $\left(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}\right),$ $(n\in N)$ интервалларда функция қатъий ўсувчи бўлади.

Равшанки, $f'(x)<0$, яъни $\frac{\pi}{x^2}\cdot\sin\frac{\pi}{x}<0$ тенгсизликнинг ечими

$$\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n-1} \qquad (n \in N)$$

бўлади. Демак, $f(x)$ функция

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right) \qquad (n \in N)$$

интервалларда қатъий камаювчи бўлади.

$f(x)$ жуфт функция бўлгани учун у $(-\infty, 0)$ даги

$$\left(-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2n-1}\right) \qquad (n \in N)$$

интервалларда қатъий ўсувчи,

$$(-\infty, -1) \qquad \text{ва} \qquad \left(-\frac{1}{2n+1}, -\frac{1}{2n}\right) \qquad (n \in N)$$

Интервалларда эса қатъий камаювчи бўлади.►

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \ln x$$

функция ўсувчи, камаювчиликка текширилсин.

◄Бу функция $(0, +\infty)$ да аниқланган бўлиб, унинг ҳосиласи

$$f'(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$$

бўлади.

Энди $f'(x) \geq 0$, яъни $\frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geq 0$

ёки $f'(x) \leq 0$, яъни $\frac{x}{5} - \frac{1}{x} \leq 0$

бўлишга текширамиз. Равшанки,

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5}{5x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right) \geq 0$$

Бундан эса, $\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ да $f'(x)\geq 0$, $\left(0,\sqrt{5}\right)$ да $f'(x)\leq 0$ бўлишини топамиз. Демак, берилган функция $\left(0,\sqrt{5}\right)$ да камаювчи, $\left(\sqrt{5},+\infty\right)$ да ўсувчи бўлади.►

3 – м и с о л . *Агар* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* $[a,b]$ *сегментда:*

1) $f'(x),\ \ g'(x)$ *ҳосилаларга эга,*

2) $f'(x)\geq g'(x)$ *тенгсизлик ўринли,*

3) $f(a)=g(a)$

бўлса, $\forall x\in (a,b]$ *да* $f(x)>g(x)$ *бўлиши исботлансин.*

◄$f(x)-g(x)=\varphi(x)$ дейлик. Унда $\varphi'(x)=f'(x)-g'(x)\geq 0$ бўлади. Демак, $\varphi(x)$ функция $[a,b]$ да ўсувчи.

Энди $\varphi(a)=f(a)-g(a)=0$ бўлишини эътиборга олиб $(a,b]$ да $\varphi(x)>0$ яъни $f(x)>g(x)$ бўлишини топамиз.

Хусусан, $f(x)=\ln(1+x),\ \ g(x)=x-\dfrac{x^2}{2}\ \ (0<x<+\infty)$ дейилса, улар учун уччала шарт бажарилиб, ушбу

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}\ \ (0<x<+\infty)$$

тенгсизлик келиб чиқади.►

Қуйидаги функцияларнинг ўсувчи, камаювчи бўладиган оралиқлари топилсин.

1247. $f(x)=3x-x^3$

1248. $f(x)=8x^3-x^4$

1249. $f(x)=x^3-3x+5$

1250. $f(x)=x\left(1+2\sqrt{x}\right)$

1251. $f(x)=e^{kx}$

1252. $f(x)=x\,|\,x\,|$

1253. $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

1254. $f(x)=|\,x\,|^3$

1255. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

1256. $f(x)=\cos x-x$

1257. $f(x)=x+\sin x$

1258. $f(x)=x^2-10\ln x$

1259. $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

1260. $f(x)=x^2e^{-x^2}$

1262. $f(x)=x+|\sin 2x|$

1263. $f(x)=x^2\ln x$

1264. $f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$

1265. $f(x)=x^2-\ln x^2$

1266. $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2-1}$

1267. $f(x)=x^n e^{-x} \quad (n>0,\ \ x\geq 0)$

1268. $f(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$

1269. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

1270. $f(x)=3^{\frac{1}{x-3}}$

1271. $f(x)=(x+1)\sqrt{x^2-1}$

1272. $f(x)=\operatorname{arctg}x-\ln x$

Қуйидаги функциялар ўсувчиликка ва камаювчиликка текширилсин:

1273. $f(x)=\ln|x|$

1274. $f(x)=x+\operatorname{arctg}x$

1275. $f(x)=x^3+\arcsin x$

1276. $f(x)=\lg^3 x+x^4$

1277. $f(x)=x^5\lg^7 x \quad (x\geq 1)$

1278. $f(x)=\lg\cos x \quad \left(0\leq x<\frac{\pi}{2}\right)$

1279. $f(x)=\arcsin(3x-1)$

1280. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$

1281. $f(x)=|\ln x|$

1282. $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2-2x+3)$

1283. $f(x)=(x^2+4x+6)\cdot\ln(x^2+4x+6)$

1284. $f(x)=\frac{1}{1+\cos^2 x}$

1285. $f(x)=\frac{x}{x^2-6x-16}$

1286. $f(x)=2\cdot e^{x^2-4x}$

1287. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8x+20)$

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X\subset R$ тўпламда берилган бўлиб, бу тўпламда $f(x)$ мусбат ва камаювчи, $g(x)$ эса манфий ва ўсувчи бўлса, қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлиши аниқлансин:

1289. $y = f(x)\cdot g(x)$

1290. $y = f(x) - 4g(x)$

1291. $y = f^2(x)$

1292. $y = g^2(x)$

$f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, шу тўпламда бу функциялар манфий ва камаювчи бўлса, қуйидаги функцияларнинг ўсувчи ёки камаювчи бўлиши аниқлансин:

1293. $y = f(x)\cdot g(x)$

1294. $y = f^3(x)$

1295. $y = 4f(x) + 8g(x)$

1296. $y = g^6(x)$

1297.Агар $f(x)$ функция (a,b) интервалда ўсувчи бўлиб, $f'(x)$ мавжуд бўлса, $f'(x)$ нинг (a,b) да ўсувчилиги ҳақида нима дейиш мумкин?

1298. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар қуйидаги шартларни бажарсин:

1) $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар n марта дифференциалланувчи;
2) $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0,1,2,\ldots,n-1)$,
3) $x > x_0$ да $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x)$.

У холда $x > x_0$ да $f(x) > g(x)$ бўлиши исботлансин.

Қуйидаги тенгсизликлар исботлансин:

1299. $x + \dfrac{1}{x} \ge 2 \qquad (x > 0)$

1300. $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x} \qquad (x > 1)$

1301. $(1+x)^{\alpha} \ge 1 + \alpha x \qquad (x \ge -1,\ \ \alpha > 1)$

1302. $e^x \ge 1 + x$

1303. $e^x \ge ex$

1304. $e^x \ge 1 + x + \dfrac{x^2}{2} \qquad (x \ge 0)$

1305. $\ln(1+x) \le x \qquad (x \ge 0)$

1306. $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}$ $\quad (x > 0)$

1307. $e^x > 1 + \ln(1+x)$ $\quad (x > 0)$

1308. $1 - 2\ln x \le \frac{1}{x^2}$ $\quad (x > 0)$

1309. $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$ $\quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

1310. $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ $\quad (x > 0)$

1311. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ $\quad (x > 0)$

1312. $\mathrm{tg}x > x + \frac{x^3}{3}$ $\quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

1313. $\mathrm{arctg} \le x$ $\quad (x \ge 0)$

1314. $\sin x + \mathrm{tg}x > 2x$ $\quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

1315. $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x$ $\quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$

1316. $(a+b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha$ $\quad (0 \le \alpha \le 1)$

1317. $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \le \sqrt[n]{x-y}$ $\quad (x \ge y \ge 0.)$

1318. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \le \frac{x^n + y^n}{2}$ $\quad (x \ge 0,\ y \ge 0,\ n \in N)$

1319. $\frac{x-y}{x} < \ln\frac{x}{y} < \frac{x-y}{y}$ $\quad (x > y > 0)$

1320. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$ $\quad (x > 0)$

1321. $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ $\quad (x > 1,\ \alpha \ge 2)$

2-§. Функция экстремумлари

1^0. Функциянинг экстремуми тушунчаси. Экстремумнинг зарурий шарти. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, $\delta > 0$ учун $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$ бўлсин.

Агар $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (f(x) \ge f(x_0))$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **максимумга (минимумга)** эришади дейилиб,

$$f(x_0) = \max f(x) \qquad (f(x_0) = \min f(x))$$

қиймат функциянинг $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ даги **максимум (минимум)** қиймати дейилади. Бунда x_0 нуқта функцияга максимум (минимум) қиймат берадиган нуқта бўлади.

Агар $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ да

$$f(x) < f(x_0) \qquad (f(x) > f(x_0))$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **қатъий максимумга (қатъий минимумга)** эришади дейилади.

Функциянинг максимум ва минимуми умумий ном билан унинг **экстремуми** дейилади.

$f(x)$ функция x_0 нуқтада максимумга (минимумга) эришиб, шу нуқтада ҳосилага эга бўлса, $f'(x_0) = 0$ бўлади.

Бу функция экстремумга эришишининг **зарурий шартини** ифодалайди.

Функция ҳосилага эга бўлмаган нуқтада ҳам экстремумга эришиши мумкин.

Функция экстремум қиймат берадиган нуқталарни:

а) функция ҳосиласини нолга айлантирадиган (улар **стационар нуқталар** дейилади),

б) функция ҳосиласи мавжуд бўлмаган

нуқталар орасидан излаш керак.

2^0. Функция экстремумга эришишининг етарли шартлари.

Биринчи қоида. $f(x)$ функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $f'(x_0) = 0$ бўлсин, ёки функция $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ да $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, x_0 нуқтада ҳосила мавжуд бўлмасин.

1) Агар

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ да } f'(x) > 0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ да } f'(x) < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **максимумга** эга бўлади.

2) Агар

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ да } f'(x) < 0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ да } f'(x) > 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **минимумга** эга бўлади.

3) Агар

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ да } f'(x) > 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \text{ да } f'(x) > 0$$

ёки

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \text{ да } f'(x) < 0$$
$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \text{ да } f'(x) < 0$$

бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **экстремумга** эга бўлмайди.

Иккинчи қоида. $f(x)$ функция $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ да $f'(x)$ ҳосилага, x_0 нуқтада эса иккинчи тартибли ҳосилага эга бўлиб, $f'(x_0)=0,\ f''(x_0)\neq 0$ бўлса, у ҳолда $f''(x_0)<0$ бўлганда x_0 нуқтада максимумга, $f''(x_0)>0$ бўлганда, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **минимумга** эга бўлади.

Учинчи қоида. $f(x)$ функция $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ да $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ ҳосилаларга, x_0 нуқтада эса $f^{(n)}(x_0)$ ҳосилага эга бўлиб, $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$ бўлсин.

Агар n-жуфт сон бўлиб, $f^{(n)}(x_0)<0$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **максимумга**, $f^{(n)}(x_0)>0$ бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **минимумга** эга бўлади.

Агар n-тоқ сон бўлса, $f(x)$ функция x_0 нуқтада **экстремумга** эга бўлмайди.

4 – м и с о л . ***Ушбу*** $f(x)=2\sqrt[3]{x^5}-5\sqrt[3]{x^2}+1$ ***функция экстремумга текширилсин.***

◄Берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$ функциянинг ҳосиласи $x=1$ нуқтада нолга айланади $(f'(1)=0)$, $x=0$ нуқтада эса функция ҳосиласи мавжуд эмас. Демак, $f(x)$ функциянинг экстремумга синаладиган нуқталари $x=1,\ x=0$ бўлади.

$x=0$ нуқтанинг $(-\delta,\delta)$ атрофини $(0<\delta<1)$ олиб, $(-\delta,0)$ ва $(0,\delta)$ да функция ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз:

$$\forall x \in (-\delta, 0) \text{ да } f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}>0$$
$$\forall x \in (0, \delta) \text{ да } f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}<0$$

бўлиб, берилган функция $x=0$ нуқтада максимумга эришиб, $\max f(x)=f(0)=1$ бўлади.

Энди $x=1$ нуқтанинг атрофида функция ҳосиласининг ишорасини аниқлаймиз:

$$\forall x \in (1-\delta, 0) \text{ да } f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}<0$$
$$\forall x \in (0, 1+\delta) \text{ да } f'(x)=\frac{10}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}>0$$

бўлиб, берилган функция $x=1$ нуқтада минимумга эришиб, $\min f(x)=f(1)=-2$ бўлади►

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 1, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция экстремумга текширилсин.

◀Берилган функциянинг ҳосиласи $f'(x)=2x$ бўлиб, унинг ишораси $(-\delta,0)$ да манфий, $(0,\delta)$ да эса мусбат бўлсада функция $x=0$ нуқтада минимумга эга бўлмайди, чунки берилган функция $x=0$ нуқтада узлуксиз эмас.▶

6 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса}\end{cases}$$

функция экстремумга текширилсин.

◀ $x\neq 0$ да берилган функциянинг ҳосиласи

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x}$$

бўлади.

Демак, $x=0$ нуқта функциянинг экстремумга эришишига синаладиган нуқта бўлади.

$$\begin{aligned} &\forall x\in(-\delta,0) \quad \text{да} \quad f'(x)<0 \\ &\forall x\in(0,\delta) \quad \text{да} \quad f'(x)>0 \end{aligned} \qquad (\delta>0)$$

бўлиб, $x=0$ нуқтада берилган функция узлуксиз бўлганлиги сабабли $f(x)$ функция $x=0$ нуқтада минимумга эга бўлади.▶

7 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x$$

функция экстремумга текширилсин.

◀Берилган функция ҳосиласи

$$f'(x)=e^x-e^{-x}-2\sin x$$

бўлиб, у $x=0$ нуқтада нолга айланади. Функциянинг юқори тартибли ҳосилаларини топиб, уларни $x=0$ нуқтадаги қийматлари ҳисоблаймиз:

$$f''(x)=e^x+e^{-x}-2\cos x, \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x)=e^x-e^{-x}+2\sin x, \qquad f'''(0)=0$$

$$f^{(iv)}(x)=e^x+e^{-x}+2\cos x, \qquad f^{(iv)}(0)=4$$

Жуфт тартибли ҳосила $x=0$ нуқтада мусбат бўлгани учун берилган функция $x=0$ нуқтада минимумга эга бўлиб, $\min f(x)=f(0)=4$ бўлади.▶

Қуйидаги функциялар экстремумга текширилсин:

1322. $y=x^2-6x+8$ 　　　　 **1323.** $y=2x^2-x^4$

$1324.\ y=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}\cdot x^2-6x+3$

$1325.\ y=(x-1)^3$

$1326.\ y=x^2\cdot e^{-x}$

$1327.\ y=e^x+e^{-x}$

$1328.\ y=\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x$

$1329.\ y=x-\operatorname{arctg}x$

$1330.\ y=x\cdot\sqrt{1-x^2}$

$1331.\ y=x^3-3x^2+3x$

$1332.\ y=\sin x-x$

$1333.\ y=2\sin 2x+\sin 4x$

$1334.\ y=\frac{x}{\ln x}$

$1335.\ y=|x^2-5x+6|$

$1336.\ y=|x^2-1|\cdot e^{|x|}$

$1337.\ y=x^{\frac{1}{x}}$

$1338.\ y=|x^3-3x^2|$

$1339.\ y=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x\neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса} \end{cases}$

1340. Ушбу $y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+...+(x-a_n)^2$ функция x нинг қандай қийматида минимумга эришади. $a_1,a_2,...,a_n$ -берилган сонлар.

Қуйидаги функцияларнинг экстремумлари топилсин:

$1341.\ y=\sqrt[5]{x^4}$

$1342.\ y=x^3-6x^2+9x-4$

$1343.\ y=\frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

$1344.\ y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

$1345.\ y=x+\frac{1}{x}$

$1346.\ y=x-\ln(1+x)$

$1347.\ y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

$1348.\ y=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$1349.\ y=\frac{e^x}{x}$

$1350.\ y=x\cdot\ln^2 x$

$1351.\ y=\sqrt[3]{2x^3+3x^2-36x}$

$1352.\ y=\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x$

1353. $y=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^4}{n!}\right)\cdot e^{-x}, n\in N$

$f(x)$ ***функция*** $X\subset R$ ***тўпламда берилган бўлсин. Агар*** $\forall x\in X$ ***да*** $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ ***бўлса,*** $f(x_0)$ ***миқдор функцияни*** X ***даги энг катта (энг кичик) қиймати дейилади.***

$[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлган функциянинг **энг катта** ва **энг кичик** қийматлари қуйидагига топилади:

1) $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ даги экстремумга синаладиган нуқталари топилиб, бу нуқталарда функция қийматлари хисобланади.

2) $f(a)$, $f(b)$ лар хисобланади.

Топилган қийматлар орасидаги **энг каттаси (энг кичиги)** берилган функциянинг $[a,b]$ даги **энг катта (энг кичик)** қиймати бўлади.

Қуйидаги функцияларнинг энг катта ва энг кичик қийматларининг мавжудлиги аниқлансин ва мавжуд бўлган ҳолда улар топилсин:

1354. $y=|x|$ $\quad(-1\le x\le 1)$

1355. $y=x^3-6x$ $\quad(-3\le x\le 4)$

1356. $y=x+2\sqrt{x}$ $\quad(0<x\le 4)$

1357. $y=\dfrac{1}{x}$ $\quad(0<x\le 4)$

1358. $y=\sin 2x-x$ $\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

1359. $y=x^x$ $\quad(0{,}1\le x\le\infty)$

1360. $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$ $\quad(0\le x\le 3)$

1361. $y=x^2\cdot\ln x$ $\quad(1\le x\le e)$

1362. $y=\sqrt[3]{x^2}-1$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$

1363. $y = 2\sin x + \cos 2x \qquad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right)$

Қуйидаги функцияларнинг энг катта ва энг кичик фийматлари топилсин:

1364. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35 \qquad (-4 \le x \le 4)$

1365. $y = e^{-x^2} \qquad (0 \le x \le 1)$

1366. $y = x \cdot |x| \qquad (-2 \le x \le 2)$

1367. $y = \operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x} \qquad (0 \le x \le 1)$

1368. $y = x^4 - 2x^2 + 5 \qquad (-2 \le x \le 2)$

1369. Шундай сон топилсинки, унга шу соннинг квадратини қўшганда, ҳосил бўладиган йиғинди энг катта қийматга эга бўлсин.

1370. Ушбу

$$f(x) = x \cdot \sin\frac{\pi}{x}$$

функция (0,1) оралиқда чексиз кўп сондаги экстремум нуқталарга эга бўлиши исботлансин.

1371. Ушбу

$$\frac{3}{2} \le \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \le 2 \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

тенсизлик исботлансин.

1372.Ушбу $|a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \le \sqrt{a^2+b^2}$ тенгсизлик исботлансин.

Қуйидаги кетма-кетлик нечанчи ҳадида энг катта қийматига эга бўлади?

1373. $x_n = 105n + 3n^2 - n^3$ **1374.** $x_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1985}$

1375. $x_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{n+19}$

1376. $x_n = \frac{n^2}{n^2+200}$

1377. $x_n = \frac{n^{10}}{2^n}$

1378. $x_n = \sqrt[n]{n}$

Қуйидаги функцияларнинг аниқ юқори чегараси (sup), аниқ қуйи чегараси (inf) топилсин.

1379. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ $\quad (0 \le x < +\infty)$

1380. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

1381. $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$ $\quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$

1382. $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ $\quad (-1 \le x \le 1)$

1383. $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$ $\quad (0 < x \le 1)$

1384. $f(x) = \ln x - x$ $\quad (0 < x < +\infty)$

1385. $f(x) = (x^2+4) \cdot e^{-x}$ $\quad (0 \le x < +\infty)$

1386. $f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$ $\quad (0 < x < +\infty)$

1387. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

1388. $f(x) = (x+1)\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$ $\quad \left(\frac{3}{2} < x < 6\right)$

3-§. Функциянинг қавариқлиги, ботиқлиги, эгилиш нуқталари ва асимптоталари

1^0. Функция қавариқлиги ва ботиқлиги тушунчаси. $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $x_1 < x_2$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ихтиёрий $x_1, x_2 \in (a,b)$ лар берилган бўлсин. Маълумки, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ нуқталар орқали ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси қуйидаги

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2)$$

кўринишга эга.

Агар ихтиёрий $x_1, x_2 \in (a,b)$ да $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \ge l(x) \quad (f(x) > l(x))$$

бўлса, $f(x)$ функция (a,b) да **қавариқ (қатъий қавариқ)** дейилади.

Агар ихтиёрий $x_1, x_2 \in (a,b)$ да $\forall x \in (x_1, x_2)$ учун

$$f(x) \le l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

бўлса, $f(x)$ функция (a,b) да **ботиқ (қатъий ботиқ)** дейилади.

2^0. Функция қавариқлиги ва ботиқлигининг етарли шартлари. $f(x)$ функция (a,b) да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлсин. Агар (a,b) да

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0)$$

бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция (a,b) да **ботиқ (қавариқ)** бўлади.

3^0. Функция графигининг эгилиш нуқтаси. Эгилиш нуқта бўлишининг етарли шарти. $f(x)$ функция (a,b) да берилган бўлиб, $\delta > 0$ ва $x_0 \in (a,b)$ учун

$$(x_0 - \delta,\ \ x_0 + \delta) \subset (a,b)$$

бўлсин. Агар $f(x)$ функция

$(x_0 - \delta,\ \ x_0)$ да ботиқ (қавариқ)

$(x_0,\ \ x_0 + \delta)$ да қавариқ (ботиқ)

бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг (функция графигининг) **эгилиш нуқтаси** дейилади.

Агар

1) $f(x)$ функция $(x_0 - \delta,\ \ x_0 + \delta)$ да иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга,

2) $f''(x) = 0$,

3) $(x_0 - \delta,\ \ x_0)$ да $f''(x) > 0$, $(x_0,\ \ x_0 + \delta)$ да $f''(x) < 0$ ёки $(x_0 - \delta,\ \ x_0)$ да $f''(x) < 0$, $(x_0,\ \ x_0 + \delta)$ да $f''(x) > 0$

бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **эгилиш нуқтаси** бўлади.

Функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд бўлмайдиган нуқтаси ҳам унинг эгилиш нуқтаси бўлиши мумкин.

4^0. Функция графигининг асимптоталари. $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлиб, a нуқта X тўпламнинг лимит нуқтаси $(a \in R \cup \{-\infty, +\infty\})$ бўлсин.

Агар

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0 \text{ ёки } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

бўлса, $y=kx+b$ тўғри чизиқ, $f(x)$ функциянинг **оғма асимптотаси** дейилади. Бунда

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$$

бўлади.

Агар ушбу $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$ **ёки** $-\infty$,

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=+\infty \text{ ёки } -\infty$$

муносабатлардан хеч бўлмаганда биттаси ўринли бўлса, $x=a$ $(a\in R)$ тўғри чизиқ $f(x)$ функциянинг **вертикал асимптотаси** дейилади.

8 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=3x^5-5x^4+4$$

функциянинг қавариқлиги, ботиқлигини аниқлаб эгилиш нуқтаси топилсин.

◀Берилган функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$f'(x)=15x^4-20x^3$,

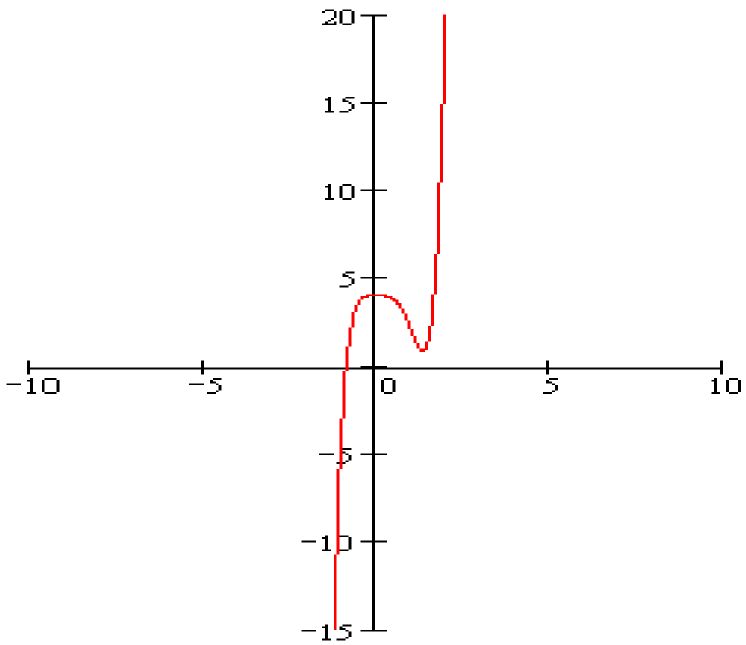
$f''(x)=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$

Равшанки, $x_1=0$ да $f''(0)=0$, $x_2=1$ да $f''(1)=0$ бўлади. Бу нуқталар атрофида $f''(x)$ нинг ишорасини аниқлаймиз;

$(-\delta,0)$ да $f''(x)<0$, $(0,\delta)$ да $f''(x)<0$, $(\delta>0)$

$(1-\delta,1)$ да $f''(x)<0$, $(1,\ 1+\delta)$ да $f''(x)>0$.

Демак, $(-\infty,1)$ да $f''(x)<0$ бўлиб, шу оралиқда функция қаварик бўлади; $(1,+\infty)$ да $f''(x)>0$ бўлиб, шу оралиқда функция ботиқ бўлади. $x=1$ нуқта эгилиш нуқтаси бўлади. (6-чизма).►



6-чизма.

9 – м и с о л . ***Ушбу*** $\mathbf{f(x)=\sqrt[3]{x^5}}$ ***функция графигининг эгилиш нуқтаси топилсин.***

◀Бу функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$\mathbf{f'(x)=\frac{5}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}}},\qquad \mathbf{f''(x)=\frac{10}{9}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9\cdot\sqrt[3]{x}}}$$

Равшанки $\mathbf{x=0}$ нуқтада функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мавжуд эмас. Бу нуқта атрофида $\mathbf{f''(x)}$ нинг ишорасини аниқлаймиз:

$\mathbf{x<0}$ бўлганда $\mathbf{f''(x)<0,}$ $\mathbf{x>0}$ бўлганда $\mathbf{f''(x)>0}$ бўлгани сабабли берилган функция $\mathbf{(-\infty,0)}$ да қаварик, $\mathbf{(0,+\infty)}$ да ботиқ бўлиб $\mathbf{x=0}$ эгилиш нуқтаси бўлади.▶

10 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{f(x)=\frac{x^2-6x+3}{x-3}}$$

функция графигининг асмптоталари топилсин.

◀Равшанки, $\mathbf{x\to 3}$ да $\mathbf{f(x)\to\infty}$. Демак $\mathbf{x=3}$ тўғри чизиқ функция графигининг вертикал асимптотаси бўлади. Энди қуйидаги

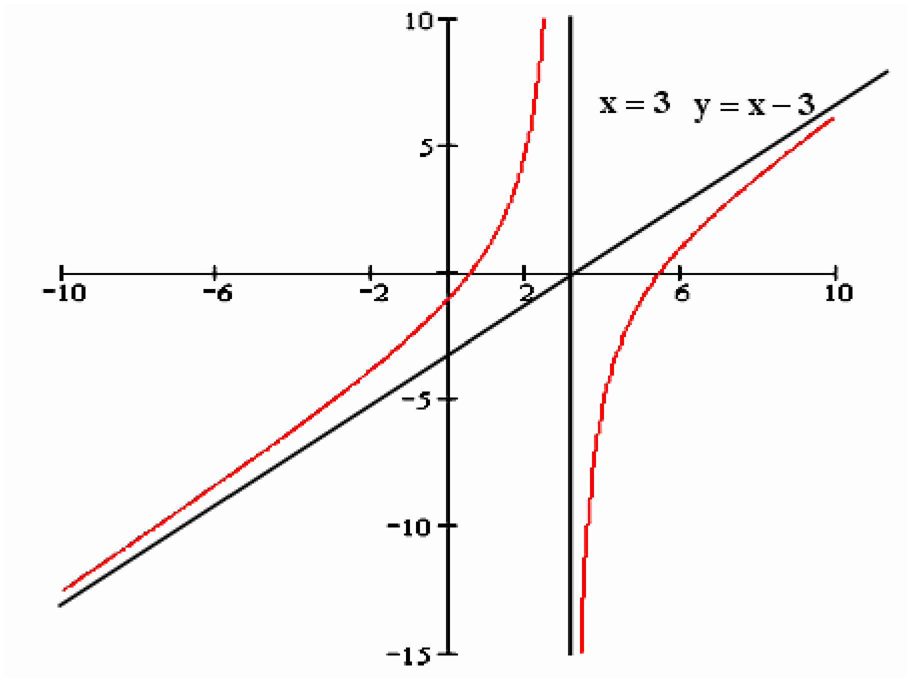
$$\mathbf{k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}},\qquad \mathbf{b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]}$$

лимитларни ҳисоблаймиз.

$$\mathbf{k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-6x+3}{x(x-3)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1}$$

$$\mathbf{b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3-3x}{x-3}=-3}$$

Демак, $\mathbf{y=x-3}$ тўғри чизиқ берилган функция графигининг оғма асимптотаси бўлади. (7-чизма).▶



7-чизма.

Қуйидаги функцияларнинг қаварик ва ботиқ бўлиш ораликлари топилсин.

1389. $y = x^3 - 4x$

1390. $y = \dfrac{1}{x^2}$

1391. $y = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 12$

1392. $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$

1393. $y = \dfrac{1}{(x+1)^3}$

1394. $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$

1395. $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$

1396. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$

1397. $y = \sqrt{1+x^2}$

1398. $y = e^{-x^2}$

1399. $y = x + \sin x$

1400. $y = \ln(1 + x^3)$

1401. $y = \dfrac{|x-1|}{x \cdot \sqrt{x}}$

1402. $y = 4 \cdot \sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$

1403. $y = 1 - |x^2 - 2|$

1404. $y = (1 + x^2)e^x$

1405. Ушбу $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 1$ функция a нинг қандай қийматида $(-\infty, +\infty)$ да ботиқ бўлади.

1406. Ушбу $y = x^n$ функция $n > 1$ бўлганда $(0, +\infty)$ оралиқда қаварик, $0 < n < 1$ бўлганда $(0, +\infty)$ да ботиқ бўлиши кўрсатилсин.

1407. Агар $[a, b]$ сегментда $f''(x) \geq 0$ бўлса, ихтиёрий $x_1, x_2 \in [a, b]$ лар учун

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

бўлиши исботлансин.

$f(x)$ функция (a, b) да берилган бўлиб, $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ва $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ учун

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция (a, b) да **ботиқ,**

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

бўлса, $f(x)$ функция (a, b) да **қаварик** дейилади.

1408. Ушбу

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2} \qquad (x, y \in (-\infty, +\infty))$$

тенгсизлик исботлансин.

Қуйидаги функция графигининг эгилиш нуқталари топилсин.

1409. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

1410. $y = \cos x$

1411. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

1412. $y = e^{\frac{1}{x}}$

1413. y=1-ln(x2-4)

1414. $y=\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$

1415. $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1416. $y = \frac{|x - 1|}{x^2}$

1417. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1418. $y = 2x^2 + \ln x$

1419. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$

1420. $y = \sqrt{1-x^3}$

Қуйидаги функцияларни қаварикликка, ботиқликка текширилсин, эгилиш нуқталари топилсин.

1421. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

1422. $y = \dfrac{1}{x^2-4}$

1423. $y = (x+1)^4 + e^x$

1424. $y = \mathrm{arctg}x - x$

1425. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$

1426. $y = 2 - \left|x^5 - 1\right|$

1427. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

1428. $y = e^{\sin x} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \le x \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

Қуйидаги функцияларнинг эгилиш нуқталари топилсин.

1429. $y = x^5 - 10x^2 + 3$

1430. $y = e^{\mathrm{arctg}x}$

1431. $y = 4x^2 + \dfrac{1}{x}$

1432. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1433. a ва b қандай қийматларида $y = ax^3 + bx^2$ функциянинг эгилиш нуқтаси $x = 1$ бўлади?

1434. Ушбу $y = x^3 + x^4 \sin\dfrac{\pi}{x}$ функциянинг эгилиш нуқтаси $x = 0$ бўлиши исботлансин.

1435. Ушбу $y = x\sin x$ функциянинг эгилиш нуқтаси қуйидаги

$$y^2(4+x^2) = 4x^2$$

тенгликни қаноатлантириши кўрсатилсин.

1436. h нинг қандай қийматларида $x = \pm\sigma$ нуқта

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \cdot x^2} \quad (h > 0)$$

функциянинг эгилиш нуқтаси бўлади?

Қуйидаги функцияларнинг эгилиш нуқталари топилсин.

1437. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

1438. $y = \left| e^x - 1 \right|$

Қуйидаги функция графикларининг асимптоталари топилсин.

1439. $y = \dfrac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$

1440. $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$

1441. $y = \dfrac{x^5}{x^4 - 1}$

1442. $y = \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

1443. $y = 2x - \dfrac{\cos x}{x}$

1445. $y = 4x + \mathrm{arctg}\dfrac{x}{4}$

1446. $y = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$

1447. $y = \dfrac{x^2}{|x| + 1}$

1448. $y = x \cdot \mathrm{arctg}x$

1449. $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$

1450. $y = 1 + x \cdot e^{\frac{x}{2}}$

1451. $y = \left| e^x - 1 \right|$

1452. $y = x + \dfrac{\ln x}{x}$

1453. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

1454. $y = x\sin\dfrac{1}{x}$

1455. $y = x^2 \ln x$

1456. $y = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$

1457. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$

1458. $y = \ln \mathrm{sh}x$

1459. $y = \ln x - \mathrm{arctg}x$

4-§. Функцияларни тўлиқ текшириш. Графикларни чизиш

Функцияни тўлиқ текшириш деганда функция ҳақидаги барча маълумотлардан, жумладан функция ҳосиласи тўғрисидаги маълумотлардан фойдаланиб функция хусусиятини ўрганиш ва шу асосда **унинг графигини чизиш** тушунилади.

$\mathbf{y = f(x)}$ функция тўлиқ текширилиши ва унинг графиги чизилиши керак бўлсин. Текширишни қуйидаги схема бўйича олиб бориш мумкин:

1) Функциянинг аниқланиш тўпламини (соҳасини) топиш;
2) Функцияни жуфт, тоқлигини ҳамда даврийлигини аниқлаш;
3) Функциянинг узлуксизлигини аниқлаш, узилиш нуқталарини топиш.
4) Функцияни ўсувчи ва камаювчилигини аниқлаш, ўсувчи ва камаювчи бўладиган оралиқларини топиш;
5) Функциянинг экстремум қийматларини топиш;
6) Функциянинг қавариқлиги ва ботиқлигини аниқлаш, қаварик хамда ботиқ бўладиган оралиқларни, шунингдек эгилиш нуқталарини топиш;
7) Функция графиги асимптоталарини топиш;
8) Функция аргументи $\mathbf{x}$ нинг баъзи қийматларида функция қийматларини, жумладан координаталар ўқларини кесиш нуқталарини топиш.
9) Келтирилган маълумотларидан фойдаланиб функция графигини чизиш.

11 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2}$$

функция тўлиқ текширилсин ва графиги чизилсин.

◄$\mathbf{f(x)}$ функция $\mathbf{X = R \setminus \{0\}}$ тўпламда аниқланган. Бу функция учун

$$\mathbf{f(-x) \neq f(x) \qquad f(-x) \neq -f(x)}$$

бўлгани учун у жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. Функция $\mathbf{(-\infty,0) \cup (0,+\infty)}$ да узлуксиз бўлиб, $\mathbf{x = 0}$ нуқтада 2–тур узилишга эга. Равшанки,

$$\mathbf{f'(x) = \frac{8x^3 - 1}{x^2}}, \qquad \mathbf{f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3}}$$

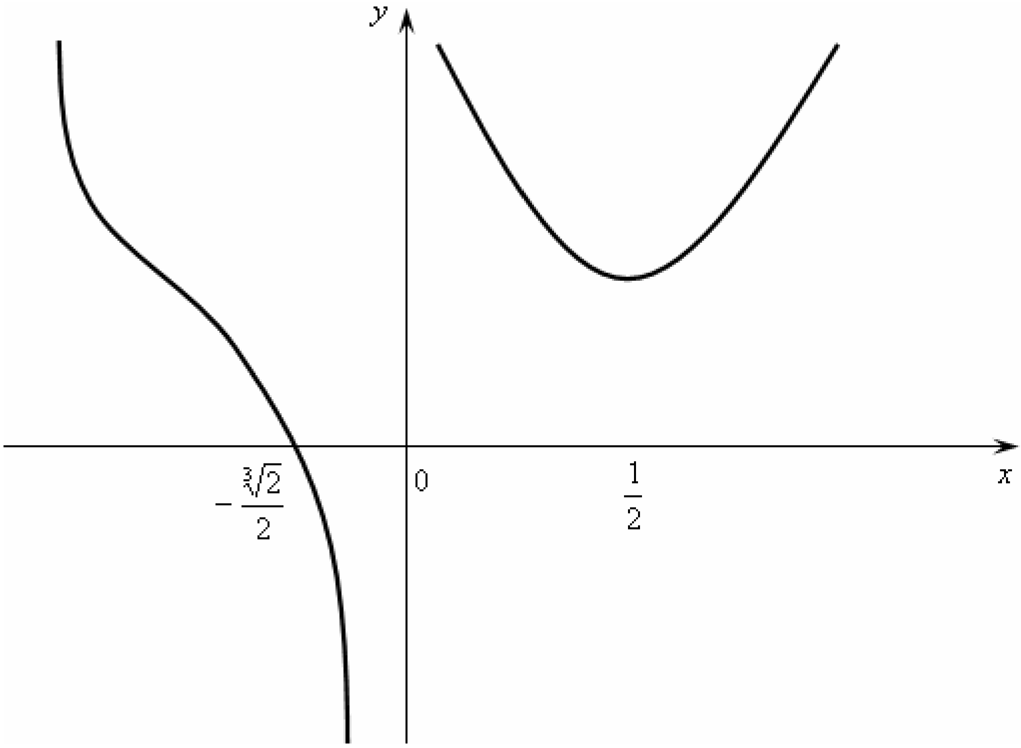
бўлиб, $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$ функциянинг стационар нуқтаси бўлади. (чунки $\mathbf{\frac{8x^3 - 1}{x^2} = 0} \Rightarrow \mathbf{x = \frac{1}{2}}$).

Агар $\mathbf{x < \frac{1}{2}}$ бўлса, $\mathbf{f'(x) < 0;}$ $\mathbf{x > \frac{1}{2}}$ бўлса, $\mathbf{f'(x) > 0}$ бўлади. Демак, функция $\mathbf{\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)}$ да камаювчи, $\mathbf{\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)}$ да ўсувчи бўлиб, $\mathbf{f''\left(\frac{1}{2}\right) > 0}$ бўлгани сабабли функция $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$ нуқтада минимумга эришади ва $\mathbf{\min f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 3}$ бўлади. Энди $\mathbf{f''(x) = 8 + \frac{2}{x^3} = 0}$ тенгламани ечиб, топамиз; $\mathbf{x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$. Агар $\mathbf{-\infty < x < \frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$ ва $\mathbf{0 < x < +\infty}$ бўлса, $\mathbf{f''(x) > 0;}$ $\mathbf{-\frac{\sqrt[3]{2}}{2} < x < 0}$ бўлса $\mathbf{f''(x) < 0}$ бўлади.

Демак, функция $\mathbf{\left(-\infty, -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)}$ ва $\mathbf{(0. + \infty)}$ да ботиқ, $\mathbf{\left(-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}, 0\right)}$ да қаварик бўлиб, $\mathbf{x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$ нуқта эгилиш нуқтаси бўлади. $\mathbf{x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$ да $\mathbf{OX}$ ўқини кесади.

$\mathbf{x = 0}$ тўғри чизиқ берилган функциянинг вертикал асимптотаси бўлади

Келтирилган маълумотлардан фойдаланиб функция графигини чизамиз (8-чизма).►



8-чизма.

12 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

функция тўлиқ текширилсин ва графиги чизилсин.

◄Бу функциянинг аниқланиш соҳаси $(-\infty,+\infty)$ бўлади. Равшанки, $f(x)$ функция учун

$$f(-x)=-f(x)$$

бўлади. Демак, $f(x)$ тоқ функция бўлиб, унинг графиги координаталар бошига нисбатан симметрик бўлади.

Берилган функция $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз. Унинг ҳосилалари

$$f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x^2-1}},\quad f''(x)=\frac{2}{9}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x+1)^4}-\sqrt[3]{(x-1)^4}}{\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}$$

бўлади. Ихтиёрий $x\in(-\infty,+\infty)$ да $f'(x)\neq 0$ бўлиб, $x=\pm 1$ нуқталарда ҳосила мавжуд эмас.

$x\in(-1-\delta,-1)$ да $f'(x)<0$, $x\in(-1,-1+\delta)$ да $f'(x)>0$ ва

$x\in(1-\delta,1)$ да $f'(x)>0$, $x\in(1,\ 1+\delta)$ да $f'(x)<0$

бўлгани учун $x=-1$ да функция минимумга эга бўлиб, $\min f(x)=f(-1)=-\sqrt[3]{4}$, $x=1$ да функция максимумга эга бўлиб, $\max f(x)=f(1)=\sqrt[3]{4}$ бўлади.

Равшанки, $f''(x)=0$ ва $x=\pm 1$ нуқта $f''(x)$ мавжуд эмас. $x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$ да $f''(x)<0$, $x \in (0,+\infty) \setminus \{1\}$ да $f''(x)>0$ бўлади.

Демак $(-\infty, 0)$ да функция қаварик, $(0,+\infty)$ да ботиқ бўлиб, $x=0$ эгилиш нуқта.

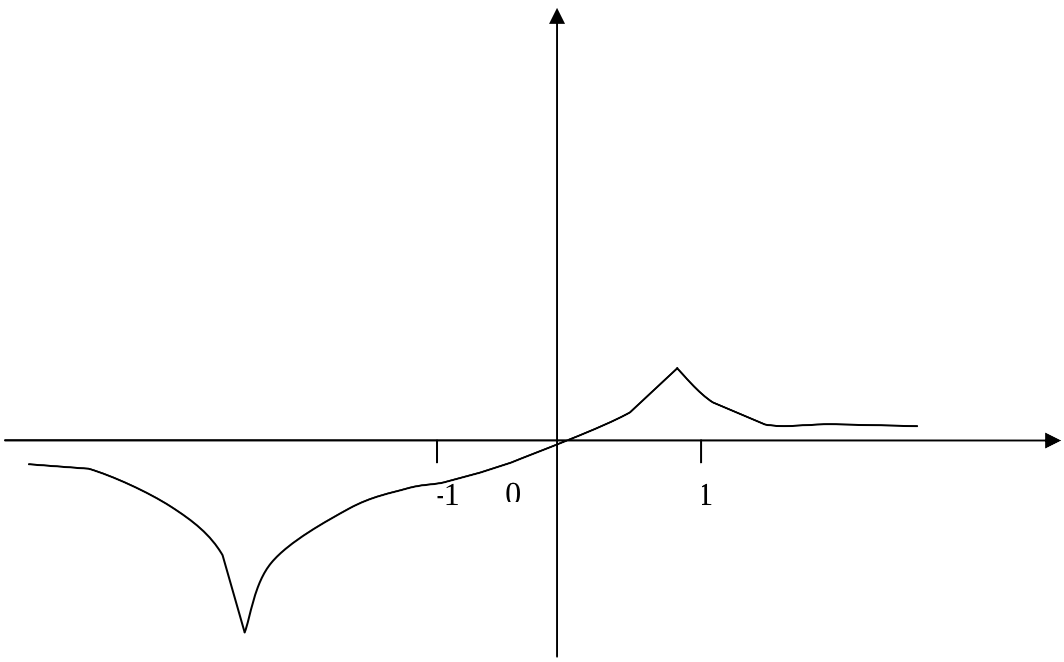
Берилган функция графиги вертикал асимптотага эга эмас ва

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)=0$$

бўлгани учун $y=0$ оғма (бу ҳолда горизонтал) асимптота бўлади. Функция OY ўқини $x=0$ нуқтада кесиб ўтади: $f(0)=0$.

Бу маълумотлардан фойдаланиб функция графигини чизамиз. (9-чизма).►



9-чизма.

Қуйидаги функциялар тўлиқ текширилсин, графиклари чизилсин.

1460. $y=x|x|$

1461. $y=\frac{1}{5}\cdot(4x^3-x^4)$

1462. $y=(x-1)^2\cdot(x+2)$

1463. $y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$

1464. y= $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$

1465. $y=16x(x-1)^3$

1466. $y=\frac{x^4+3}{x}$

1467. $y=x^2+\frac{2}{x}$

1468. $y=\frac{4x-12}{(x-2)^2}$

1469. $y=\frac{4x}{4+x^2}$

1470. $y=\frac{16}{x^2(x-4)}$

1471. $y=(x-3)\cdot\sqrt{x}$

1472. $y=\sqrt{8+x}-\sqrt{8-x}$

1473. $y=2(x+1)-3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}$

1474. $y=\sqrt[3]{1-x^3}$

1475. $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x^2+1}$

1476. $y=\frac{4}{\sqrt{4-x^2}}$

1477. $y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

1478. $y=\frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$

1479. $y=\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-4)^2}$

1480. $y=xe^{-x}$

1481. $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

1482. $y=e^{2x-x^2}$

1483. $y=\left(2+x^2\right)\cdot e^{-x^2}$

1484. $y=x+e^{-x}$

1485. $y=\frac{e^x}{1+x}$

1486. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1487. $y=\frac{x^2}{2}\cdot\ln\frac{x}{a}$

1488. $y=\ln\left(x^2-1\right)+\frac{1}{x^2-1}$

1489. $y=\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1490. $y=\sin x-\cos x$

1491. $y=\sin x+\frac{1}{2}\cdot\sin 2x$

1492. $y=\sin x\cdot\sin 2x$

1493. $y=x+\sin x$

1494. $y=x-|\sin x|$

1495. $y=2x-\operatorname{tg}x$

1496. $y=\arcsin|x|$

1497. $y=x-2\operatorname{arctg}x$

1498. $y=\ln(\sin x)$

1499. $y=\ln x-\operatorname{arctg}x$

5-§. Аниқмасликларни очиш. Лопиталь қоидалари

1^0. $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасликлар учун Лопиталь қоидаси. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтанинг бирор ўйилган атрофида аниқланган бўлиб, қуйидаги шартлар бажарилсин.

1) $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x) \neq 0$.
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.
3) Ушбу $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ лимит мавжуд (чекли ёки чексиз). У ҳолда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

бўлади.

2^0. $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликлар учун Лопиталь қоидаси. $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар a нуқтанинг бирор ўйилган атрофида аниқланган бўлиб, қуйидаги шартларни бажарилсин:

1) $f'(x)$ ва $g'(x)$ ҳосилалар мавжуд ва $g'(x) \neq 0$.
2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$
3) Ушбу $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ лимит мавжуд (чекли ёки чексиз). У ҳолда

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

бўлади.

3^0. Бошқа кўринишдаги аниқмасликлар. Қуйидаги $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 кўринишидаги аниқмасликлар алгебраик алмаштиришлар хамда логарифмлаш ёрдамида $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликларга келтирилади.

4^0. Эслатма. $a = \infty$, яъни $x \to \infty$ да хам юқорида келтирилган қоидалар ўринли бўлади.

13 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \mathrm{arctg}x}{x^3}$$

лимит ҳисоблансин.

◄Бу холда $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмасликка эга бўламиз. Лопиталь қоидалардан фойдаланиб топамиз.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arctg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\operatorname{arctg}x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}.\blacktriangleright$$

14 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}$$

лимит ҳисоблансин.

◄Бу ҳолда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишидаги аниқмасликка эга бўлган Лопиталь қоидасидан фойдаланиб топамиз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg}x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=0.\blacktriangleright$$

15 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$$

лимит ҳисоблансин.

◄Бу холда $\infty-\infty$ кўринишидаги аниқмаслик юзага келади. Агар $\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\cdot\ln x}$ дейилса, $\frac{0}{0}$ кўринишидаги аниқмаслик ҳосил бўлиб лимитни Лопиталь қоидасига кўра топамиз:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x\ln x-x+1)'}{((x-1)\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\frac{1}{x}-\ln x-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\ln x-\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(-\ln x)'}{\left(\ln x-\frac{1}{x}+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{2}.\blacktriangleright$$

16 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$$

лимит ҳисоблансин.

◄ $x\to\frac{\pi}{4}$ да $(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ ифода 1^{∞} кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Аввало

$$y=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$$

ни логарифмлаб топамиз:

$$\ln y = \ln(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = \frac{\ln \mathrm{tg}x}{(\mathrm{tg}2x)^{-1}}.$$

Бу $x \to \frac{\pi}{4}$ да $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмаслик бўлади. Унда Лопиталь қоидасидан фойдаланиб

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \mathrm{tg}x}{(\mathrm{tg}2x)^{-1}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \mathrm{tg}x)'}{\left[(\mathrm{tg}2x)^{-1}\right]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2\cdot(\mathrm{tg}2x)^2}{\cos^2 2x}} = -\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1$$

бўлишини топамиз. Демак, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = -1$ бўлиб, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = \frac{1}{e}$ бўлади.►

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин:

1500. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{2x^3-x-1}$

1501. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$

1502. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\mathrm{tg}x}$

1503. $\lim\limits_{x\to a} \frac{e^x-e^a}{x-a}$

1504. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

1505. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$

1506. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$

1507. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$

1508. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x-x\cdot\cos x}{\sin^3 x}$

1509. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$

1510. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

1511. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{10x}}{x^{100}}$

1512. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n \sin\frac{a}{x} \quad (n>0)$

1513. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x}$

1514. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

1515. $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

1516. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2\ln x}{x}$

1517. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

1518. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{tg^2x}$

1519. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^a-a^x}{x^a-a^a}\quad (a>0)$

1520. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$

1521. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin(\sin x)-\sin^2 x}{x^6}$

1522. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$

1523. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{tgx}-1}{2\sin^2 x-1}$

1524. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg2x}{ar\sin 5x}$

1525. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\quad (a>0)$

1526. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin z}-e^x}{\sin x-x}$

1527. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot tg\pi x$

1528. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$

1529. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$

1530. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\pi x-1}{2x^2}+\dfrac{\pi}{x(e^{2\pi x}-1)}\right]$

1531. $\lim\limits_{x\to+0}(x^x-1)\ln x$

1532. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$

1533. $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{2a}}$

1534. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

1535. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0,01x}$

1536. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$

1537. $\lim\limits_{x\to+0}(\arcsin x)^{tgx}$

1538. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln shx}}$

1539. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

1540. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$

1541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$

1542. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{tgx}{tga}\right)^{ctg(x-a)}$

1543. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

1544. $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}x)^{\sin x}$

1545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\cdot\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

1546. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)$

1547. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^{\frac{7}{3}}-x^{\frac{6}{7}}\cdot\ln^2 x\right)$

1548. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\ln\left(\frac{2}{\pi}\arg\mathrm{tg}x\right)$

1549. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha}\cdot a^{x} \quad (\alpha>0,\ \ a\neq 1)$

1550. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3x^2+3^x\right)^{\frac{1}{x}}$

1551. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

1552. Агар $f(x)$ функция иккинчи тартибли $f''(x)$ ҳосилага эга бўлса, у ҳолда ушбу

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

тенглик ўринли бўлиши исботлансин.

1553. Ушбу

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x-\sin x}$$

лимит ҳисоблашда Лопиталь қоидасидан фойдаланиш мумкинми? Лимит ҳисоблансин.

1554. Ушбу

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

лимит ҳисоблашда Лопиталь қоидасидан фойдаланиш мумкинми? Лимит ҳисоблансин.

Қуйидаги лимитлар Лопиталь қоидаси бўйича ҳисобланмаслиги кўрсатилсин. Лимитлар топилсин.

1555. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

1556. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\cdot\sin\frac{1}{x}}{\sin^2 x}$

1557. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\cos x}$

1558. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

1559. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$

1560. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-ax}}{e^{-x}(2-\sin x-\cos x)}$ $\quad (a\neq 1)$

VI БОБ.

Аниқмас интеграл

1-§. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчалари. Содда аниқмас интеграллар

1^0. Бошланғич функция ва аниқмас интеграл тушунчаси. Айтайлик, $\mathbf{f(x)}$ ва $\mathbf{F(x)}$ функциялар $\mathbf{(a,b)}$ да узлуксиз бўлиб, $\mathbf{F(x)}$ эса $\mathbf{F'(x)}$ ҳосилага эга бўлсин. Агар $\mathbf{(a,b)}$ да $\mathbf{F'(x)=f(x)}$ бўлса, $\mathbf{F(x)}$ функция $\mathbf{f(x)}$ нинг **бошланғич функцияси** дейилади. $\mathbf{f(x)}$ функция бошланғич функцияларининг умумий кўриниши

$$\mathbf{F(x)+C} \qquad \mathbf{(C=const)}$$

$\mathbf{f(x)}$ нинг **аниқмас интеграли** дейилади:

$$\int \mathbf{f(x)dx = F(x)+C} \qquad \mathbf{(C=const)}$$

2^0. Аниқмас интегралнинг асосий хоссалари. Аниқмас интеграл қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\mathbf{d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx}$
2. $\int \mathbf{df(x)=f(x)+C} \qquad \mathbf{(C=const)}$
3. $\int \mathbf{kf(x)dx=k\int f(x)dx} \qquad (k=const)$
4. $\int \mathbf{(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx}$

3^0. Содда интеграллар жадвали. Қуйидаги содда интеграллар жадвалини келтирамиз:

1. $\int \mathbf{x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C} \qquad \mathbf{(n\neq -1)}$
2. $\int \mathbf{\frac{dx}{x}=\ln|x|+C} \qquad \mathbf{(x\neq 0)}$

$$\int \mathbf{\frac{dx}{1+x^2}} = \begin{cases} \mathbf{arctgx+C} \\ \mathbf{-arcctgx+C} \end{cases}$$

3. $$\int \frac{dx}{x^2+\mathbf{a^2}} = \begin{cases} \mathbf{\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C} \\ \mathbf{-\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a}+C} \end{cases}$$

4. $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

5. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

7. $$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0, a \neq 1);$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

8. $$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$$

9. $$\int \cos x\, dx = \sin x + C$$

10. $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$$

11. $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$$

12. $$\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch} x + C$$

13. $$\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh} x + C$$

14. $$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C$$

15. $$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$$

4^0. Содда аниқмас интегралларни ҳисоблаш. Содда аниқмас интеграллар асосан бевосита хоссалардан ҳамда жадвалдан фойдаланиб ҳисобланади.

1 – м и с о л . *Ушбу*

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x}} dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интеграл остидаги функцияни қуйидагича $\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$ ёзиб оламиз. Сўнг интегрални хоссалар ва жадвалдан фойдаланиб топамиз:

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} +$$

$$+C = 2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5} + \frac{x}{3} + 1 \right) + C. ▶$$

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I = \int \frac{\sqrt{4+x^2} - 3\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Аниқмас интегралларнинг хоссалари ва жалвалдан фойдаланиб топамиз:

$$I = \int \frac{\sqrt{4+x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx - 3\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x}{2} + 3\ln\left| x + \sqrt{x^2+4} \right| + C. ▶$$

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I = \int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интеграл остидаги ифодани қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$I = \int \frac{d(tgx)}{3+4tg^2x}.$$

Натижада,

$$I = \int \frac{dtgx}{3+4tg^2x} = \frac{1}{4}\int \frac{dtgx}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + tg^2x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2tgx}{\sqrt{3}} + C \text{ бўлади.}▶$$

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1561. $\int \sqrt{x}dx$

1562. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

1563. $\int \frac{dx}{x^2}$

1564. $\int \sqrt[m]{x^n}dx$

1565. $\int 10^x dx$

1566. $\int a^x e^x dx$

1567. $\int\left(3-x^2\right)^3dx$

1568. $\int\frac{\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt[4]{x}}dx$

1569. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx$

1570. $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx$

1571. $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx$

1572. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx$

1573. $\int\frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$

1574. $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}dx$

1575. $\int\frac{3\cdot2^x-2\cdot3^x}{2^x}dx$

1576. $\int\frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$

1577. $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$

1578. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+13}}$

1579. $\int 2^{2x}\cdot e^xdx$

1580. $\int\frac{\left(1+2x^2\right)}{x^2\left(1+x^2\right)}dx$

1581. $\int\frac{x^2dx}{1+x^2}$

1582. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

1583. $\int\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

1584. $\int\frac{\sqrt{4+x^2}+2\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}dx$

1585. $\int\left(2^x+3^x\right)^2dx$

1586. $\int(1+\sin x+\cos x)dx$

1587. $\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

1588. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2x\cdot\sin^2x}dx$

1589. $\int\frac{dx}{\cos 2x+\sin^2x}$

1590. $\int tg^2xdx$

1591. $\int ctg^2xdx$

1592. $\int 2\sin^2\frac{x}{2}dx$

Берилган $f(x)$ функция учун графиги (x_0,y_0) нуқтадан ўтувчи бошланғич функция $F(x)$ топилсин.

$$\mathbf{1593.}\ f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sin(x+1),\quad x\in(0,+\infty),\quad (x_0,y_0)=(1;1)$$

$$\mathbf{1594.}\ f(x)=\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2},\quad x\in(-\infty;0),\quad (x_0,y_0)=(-1;1)$$

$$\mathbf{1595.}\ f(x)=|x|,\quad x\in R,\quad (x_0,y_0)=(-2;4)$$

1596. Агар $F(x)$ функция сонлар ўқида $f(x)$ функциянинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда қуйидаги тасдиқларнинг тўғри ёки нотўғрилиги текширилсин:

a. Агар $f(x)$ функция даврий бўлса, унда $F(x)$ ҳам даврий функция бўлади.

b. Агар $f(x)$ - тоқ функция бўлса, унда $F(x)$ - жуфт функция бўлади.

c. Агар $f(x)$ - жуфт функция бўлса, унда $F(x)$ - тоқ функция бўлади.

1597. Агар $\int f(x)dx = F(x)+C$ бўлса, унда ушбу

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \qquad (a\neq 0)$$

тенгликнинг ўринли бўлиши исботлансин.

1598. Узилишга эга бўлган шундай функцияга мисол келтирингки, унинг бошланғич функцияси бутун сонлар ўқида аниқланган бўлсин.

Қуйидаги функцияларнинг бошланғич функциялари топилсин.

$\mathbf{1599.}\ f(x)=|x|,\ x\in R$

$\mathbf{1600.}\ f(x)=x|x|,\ x\in R$

$\mathbf{1601.}\ f(x)=|1+x|-|1-x|,\ x\in R$

$\mathbf{1602.}\ f(x)=(2x-3)\cdot|x-2|,\ x\in R$

$\mathbf{1603.}\ f(x)=e^{|x|},\ x\in R$

$\mathbf{1604.}\ f(x)=|\mathrm{sh}x|,\ x\in R$

$$\mathbf{1605.}\ f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{агар } |x|\le 1 \text{ бўлса}\\ 1-|x|, & \text{агар } |x|>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$$

$\mathbf{1606.}\ f(x)=\max(1;x^2),\ x\in R$

$\mathbf{1607.}\ f(x)=[x]\cdot|\sin\pi x|,\ x\in[0;+\infty)$

2-§. Интеграллаш усуллари.

1^0. Ўзгарувчиларини алмаштириш усули. Айтайлик, ушбу

$$\int f(x)dx$$

интеграл ҳисобланиши керак бўлсин. Агар $x=\varphi(t)$ дейилса, (t-янги ўзгарувчи, φ-узлуксиз дифференциалланувчи функция) берилган интеграл қуйидаги

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

кўринишга келади. Бунда φ функциясини шундай танлаш лозим бўладики, (1) тенгликнинг ўнг томонидаги интеграл ҳисоблаш учун қулай кўринишга келсин.

2^0. Бўлаклаб интеграллаш усули. Агар $u=u(x),\ \ v=v(x)$ дифференциалланувчи функциялар бўлса, ҳолда

$$\int udv=uv-\int vdu \qquad (2)$$

бўлади. Одатда (2) **бўлаклаб интеграллаш формуласи** дейилади. (2) формула udv нинг интегралини vdu нинг интеграли орқали ифодалайди. Бу формуладан фодаланиш учун қараладиган интегралнинг остидаги ифлдани u ва dv лар кўпайтмаси кўринишида ёзиб олинади, бунда албатта dv ва vdu ифодаларнинг интегралларини осон ҳисоблана олинишини эътиборга олиш лозим.

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I=\int\arcsin xdx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегрални (2) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$I=\int\arcsin xdx=\begin{bmatrix} u=\arcsin x, & du=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv=dx, & v=x\end{bmatrix}=x\arcsin x-\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Равшанки, $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(1-x^2\right)=-\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Демак, $I=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.►

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx \qquad (-a\le x\le a)$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегрални (1) формуладан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\begin{bmatrix} x=a\sin t & \left(-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}\right) \\ dx=a\cos tdt & \end{bmatrix}=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=$$

$$=a^2\int\cos^2 tdt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\cdot\sin 2t+C.$$

Агар $\sin t = \frac{x}{a}$, $t = \arcsin\frac{x}{a}$ бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$I = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

бўлиши келиб чиқади.►

6 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} \qquad (n = 1,2,3...)$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Равшанки,

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$$

Берилган интегрални бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = \left[\begin{array}{ll} u = \frac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n}, & du = -\frac{2nxdx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right] = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} +$$

$$+ 2n\int \frac{x^2}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}}dx = \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n}dx - 2na^2\int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + 2n \cdot I_n - 2na^2 \cdot I_{n+1}$$

Кейинги тенгликдан топамиз:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + a^2\right)^n} + \frac{2n - 1}{2na^2}I_n . ►$$

Ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1608. $\int \frac{6x - 7}{3x^2 - 7x + 1}dx$

1609. $\int \frac{x - 1}{x^2 - x - 1}dx$

1610. $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}dx$

1611. $\int \frac{xdx}{\left(x^2 - 1\right)^{3/2}}dx$

1612. $\int x\sqrt{1 - x^2}dx$

1613. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

1614. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$

1615. $\int \frac{dx}{e^{x/2}+e^x}$

1616. $\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$

1617. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

1618. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

1619. $\int \frac{\ln^{100} x}{x}dx$

1620. $\int xe^{-x^2}dx$

1621. $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

1622. $\int \frac{2^x\cdot 3^x}{9^x-4^x}dx$

1623. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}dx$

1624. $\int \sqrt{1-x^2}dx$

1625. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$

1626. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

1627. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$

1628. $\int \frac{dx}{\sin x}$

1629. $\int \frac{dx}{\cos x}$

1630. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$

1631. $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$

1632. $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$

1633. $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}}dx$

1634. $\int \frac{\sqrt[4]{\operatorname{tg} x}}{\sin^2 x}dx$

1635. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+4\cos x+\cos^2 x}}dx$

Ушбу $x=a\sin t$, $x=a\operatorname{tg} t$, $x=a\sin^2 t$ ва бошқа тригонометрик алмаштиришлардан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1636. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$

1637. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$

1638. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

1639. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$

1640. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$

1641. $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}dx$

1642. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

Кўрсатма. $x-a=(b-a)\sin^2 t$ алмаштиришдан фойдаланилсин.

1643. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)}dx$

Ушбу $x=a\,sht,\;\; x=a\,cht$ ва бошқа гиперболик алмаштиришлардан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1644. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$

1645. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$

1646. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}dx$

1647. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}$

Кўрсатма. $x+a=(b-a)\sin^2 t$ алмаштиришдан фойдаланилсин.

1648. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}dx$

Бўлаклаб интеграллаш усулидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1649. $\int x\sin x\,dx$

1650. $\int xe^{-x}\,dx$

1651. $\int x^n \ln x\,dx \quad (n \neq -1)$

1652. $\int \arcsin x\,dx$

1653. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx$

1654. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}dx$

1655. $\int \mathrm{arctg} x\,dx$

1656. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

1657. $\int \sin x \ln(tgx)dx$

1658. $\int \cos(\ln x)dx$

1659. $\int e^{ax}\cos bx\,dx$

1660. $\int e^{ax}\sin bx\,dx$

1661. $\int \sqrt{x}\cdot \ln^2 x\,dx$

1662. $\int e^{2x}\cdot \sin^2 x\,dx$

1663. $\int x\cdot (arctgx)^2\,dx$

1664. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$

1665. $\int x^2 shx\,dx$

1666. $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$

1667. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx$

1668. $\int \frac{arctg(e^x)}{e^x}dx$

Қуйидаги I_n $(n\in N)$ интеграллар учун реккурент формулалар топилсин.

1669. $I_n=\int x^n e^{ax}\,dx,\quad a\neq 0$

1670. $I_n=\int \ln^n x\,dx$

1671. $I_n=\int x^{\alpha}\ln^n x\,dx,\quad \alpha\neq -1$

1672. $I_n=\int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2+a}},\quad n>2$

1673. $I_n=\int \sin^n x\,dx,\quad n>2$

1674. $I_n=\int \cos^n x\,dx,\quad n>2$

1675. $I_n=\int \frac{dx}{\sin^n x},\quad n>2$

Қуйидаги тенгликлар ҳисоблансин.

1676. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C,\qquad (a\neq 0)$

1677. $\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\qquad (a\neq 0)$

1678. $\int \frac{xdx}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln\left|a^2\pm x^2\right|+C.$

1679. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\qquad (a>0)$

1680. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,\qquad (a > 0)$

1681. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2} + C.$

1682. $\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,\qquad (a > 0)$

1683. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

1676–1683 мисоллардаги тенгликлардан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1684. $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$

1685. $\int \frac{xdx}{x^4 - 2x^2 - 1}$

1686. $\int \frac{x^3dx}{x^4 - x^2 + 2}$

1687. $\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}$

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}}\quad (b \neq 0)$

1689. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}$

1690. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}$

1691. $\int \frac{dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}$

1692. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - 3x^2 - 2x^4}}$

1693. $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x + \cos^2 x}}dx$

1694. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$

1695. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 1}}$

1696. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 2}}$

1697. $\int \sqrt{2 + x - x^2}\,dx$

1698. $\int \sqrt{2 + x + x^2}\,dx$

1699. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$

3-§. Рационал функцияларни интеграллаш

1^0.Содда касрлар ва уларнинг интеграллари. Ушбу

1. $\dfrac{A}{x-a}$, $\quad (A=const, \quad a=const)$,

2. $\dfrac{A}{(x-a)^n}$, $\quad (A=const, \quad a=const, \quad n=2,3,...)$,

3. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ $\quad (M,N,p,q=const, \quad p^2-4q<0)$,

4. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$

$$(M,N,p,q=const, \quad p^2-4q<0, \quad n=2,3...)$$

касрлар **содда касрлар** дейилади. Уларнинг интеграллари қуйидагича бўлади:

$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C;$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}}+C \qquad (n\neq 1);$$

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{N-\frac{Mp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\mathrm{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C;$$

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n}+$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right]^n} \qquad (n=2,3,...)$$

Кейинги интеграл **2-§** да келтирилган реккурент формула ёрдамида ҳисобланади.

2^0. Рационал функцияларни интеграллаш. Ушбу

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m}$$

рационал функциянинг интеграли $\int f(x)dx$ қуйидагича ҳисобланади:

агар $n\geq m$ бўлса, касрнинг бутун қисмини ажратиб, уни **бутун рационал функция** ва **тўғри каср** йиғиндиси кўринишида ёзиб олинади. Равшанки, бутун рационал функциянинг интеграли осон ҳисобланади.

Маълумки, ҳар қандай тўғри каср содда касрлар йиғиндиси сифатида ифодаланади. Демак, тўғри касрнинг интеграли содда касрларнинг интегралларига келтириб ҳисобланади.

7 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{I = \int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интеграл остидаги касрнинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратамиз:

$$\mathbf{\frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2}}$$

сўнг бу тенгликнинг ўнг томонидаги тўғри касрни содда касрларга ёямиз:

$$\mathbf{\frac{1}{x^4 + 3x^2} = \frac{1}{x^2(x^2 + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 3}} \qquad (*)$$

Бундан

$$\mathbf{I = Ax(x^2 + 3) + B(x^2 + 3) + (Cx + D)x^2 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 3Ax + 3B}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\mathbf{A + C = 0, \quad B + D = 0, \quad 3A = 0, \quad 3B = 1.}$$

Кейинги тенгликдан эса

$$\mathbf{A = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{3}}$$

бўлишини топамиз. (*) тенгликка кўра

$$\mathbf{\frac{1}{x^2(x^2 + 3)} = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2 + 3)}}$$

бўлади. Энди берилган интегрални ҳисоблаймиз:

$$\mathbf{\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 + 3x^2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2} \right) dx = \int \left[2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2 + 3)} \right] dx =}$$

$$\mathbf{= x^2 - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C}. \blacktriangleright$$

8 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\mathbf{I = \int \frac{3x + 1}{x(1 + x^2)^2} dx}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Интеграл остидаги касрни содда касрларга ёямиз:

$$\mathbf{\frac{3x + 1}{x(1 + x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{1 + x^2} + \frac{Dx + F}{(1 + x^2)^2}}$$

Умумий махражга келтириб топамиз:

$$\mathbf{3x + 1 = A(1 + x^2)^2 + (Bx + C)x(1 + x^2) + (Dx + F)x =}$$
$$\mathbf{= (A + B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C + F)x + A}.$$

$\mathbf{A, B, C, D, F}$ ларни топиш учун қуйидаги

$$\begin{cases} \mathbf{A+B=0} \\ \mathbf{C=0} \\ \mathbf{2A+B+D=0} \\ \mathbf{C+F=0} \\ \mathbf{A=1} \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бу системани ечсак,

$$\mathbf{A=1,\quad B=\text{-}1,\quad C=0,\quad D=\text{-}1,\quad F=3}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак, интеграл остидаги функция

$$\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{-x+3}{\left(1+x^2\right)^2}$$

бўлади. Унинг интегралини ҳисоблаймиз:

$$I=\int\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^2}+3\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+3\int\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Кейинги тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални **2-§** да келтирилган реккурент формулага кўра топамиз:

$$I_2=\int\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{2}I_1=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+C$$

Демак,

$$I=\int\frac{3x+1}{x\left(1+x^2\right)}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{3x+1}{2\left(x^2+1\right)}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}x+C.\blacktriangleright$$

Номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1700. $\int\frac{dx}{(x+1)(x-2)}$

1701. $\int\frac{xdx}{2x^2-3x-2}$

1702. $\int\frac{2x+11}{x^2+6x+13}dx$

1703. $\int\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$

1704. $\int\frac{3x^3-5x+8}{x^2-4}dx$

1705. $\int\frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$

1706. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

1707. $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$

1708. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

1709. $\int \frac{xdx}{(x+1)(x^2+1)}$

1710. $\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$

1711. $\int \frac{dx}{x^3+1}$

1712. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

1713. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$

1714. $\int \frac{(3x^2-2)xdx}{(x+2)^2(3x^2-2x+4)}$

1715. $\int \frac{x^2dx}{(x+1)(x^3+1)}$

1716. $\int \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^4+x^3+2x^2}dx$

1717. $\int \frac{dx}{x^4-x^3-x+1}$

1718. $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$

1719. $\int \frac{(x^4+1)dx}{(x-1)(x^4-1)}$

1720. $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}dx$

1721. $\int \frac{dx}{x^4-1}$

1722. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

1723. $\int \frac{dx}{(x+1)(1+x^2)(1+x^3)}$

1724. $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$

1725. $\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$

1726. $\int \frac{dx}{x^6+1}$

1727. $\int \frac{dx}{x^6-1}$

Қуйидаги интеграллар Остроградский усулидан фойдаланиб ҳисоблансин.

1728. $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$

1729. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

1730. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

1731. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+2x+2)^2}$

1732. $\int \frac{dx}{(x^4+1)^2}$

1733. $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}dx$

1734. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$

4-§. Баъзи иррационал функцияларни интеграллаш

$$1^0.\ \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx \qquad (1)$$

кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш. (1) интегралда $r_1, r_2, \ldots, r_n -$ рационал сонлар, $a, b, c, d -$ ҳақиқий сонлар бўлиб, $ad - bc \neq 0$.

Агар $r_1, r_2, \ldots, r_n -$ рационал сонларнинг умумий махражи p бўлса, (1) интегралда

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$$

алмаштириш билан қаралаётган интеграл рационал функциянинг интегралига келади.

$$2^0.\ \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx \qquad \left(a \neq 0,\ \ b^2-4ac \neq 0\right) \qquad (2)$$

кўринишидаги интегрални ҳисоблаш.

Бу интеграл қуйидаги учта алмаштириш (**Эйлер алмаштиришлари**) билан рационал функциянинг интегралига келади:

1) $a > 0,\ \ \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\ t \pm \sqrt{a}\cdot t$,

2) $c > 0,\ \ \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\ x\cdot t \pm \sqrt{c}$,

3) $b^2-4ac > 0,\ \ \sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\ t\ (x - x_1)$, бунда $x_1 -$ сони $ax^2+bx+c=0$ тенгламанинг илдизларидан бири.

$3^0.\ \int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$ **кўринишидаги интегрални ҳисоблаш, бунда $m, n, p -$ рационал сонлар.** Бу интеграл:

1) $p -$ бутун сон бўлган ҳолда $x = t^s$ алмаштириш билан, бунда s **сони** m ва n рационал сонларнинг умумий маҳражи;

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – бутун сон бўлган ҳолда $a+bx^n=t^s$ алмаштириш билан, бунда s сони p рационал соннинг маҳражи;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p$ – бутун сон бўлган ҳолда $ax^{-n}+b=t^s$ алмаштириш билан, бунда s сони p рационал соннинг маҳражи,

рационал функциянинг интегралига келади.

9 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I=\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Равшанки,

$$(1-x)\sqrt{1-x^2}=(1-x)\sqrt{(1-x)(1+x)}=(1-x)(1+x)\cdot\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Демак, интеграл остидаги функция x ва $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ ларнинг рационал функцияси бўлади.

Бу интегралда $\dfrac{1-x}{1+x}=t^2$ $\left(t=\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{-4tdt}{(1+t^2)^2},\quad 1-x=\frac{2t^2}{1+t^2},\quad 1+x=\frac{2}{1+t^2}$$

бўлиб,

$$I=-\int\frac{4tdt}{(1+t^2)^2\,\dfrac{2t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{2}{1+t^2}\cdot t}=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C$$

бўлади. Демак,

$$I=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.►$$

10 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегралда $a=4>0$ бўлгани учун $\sqrt{4x^2+4x+3}=t-2x$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$4x^2+4x+3=t^2-4tx+4x^2,\quad 4x+3=t^2-4xt,\quad x=\frac{t^3-3}{4(1+t)},\quad dx=\frac{t^2+2t+3}{4(1+t)^2}dt,$$

$$\sqrt{4x^2+4x+3}=t-\frac{2(t^2-3)}{4(1+t)}=\frac{t^2+2t+3}{2(1+t)}$$

бўлиб,

$$I=\int\frac{\frac{t^2+2t+3}{4(1+t)^2}dt}{\frac{t^3-3}{4(1+t)}\cdot\frac{t^2+2t+3}{2(1+t)}}=2\int\frac{dt}{t^2-3}$$

бўлади. Равшанки,

$$2\int\frac{dt}{t^2-3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C$$

Демак,

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}}\right|+C.\blacktriangleright$$

11 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Берилган интегрални қуйидагича

$$I=\int\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx$$

ёзиб оламиз. Интеграл остидаги ифода учун

$$a=b=1,\quad m=0,\quad n=4,\quad p=-\frac{1}{4}$$

бўлиб,

$$\frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$$

бўлади. Бу интегралда

$$1+x^{-4}=t^4$$

деб топамиз:

$$x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}},\quad \left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}=\frac{\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}}{t},\quad dx=-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}dt.$$

Натижада,

$$I=\int\frac{\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}}{t}\cdot\left(-t^3\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}\right)dt=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\frac{1}{2}\left[\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2-1}\right]$$

бўлади. Кейинги интегрални ҳисоблаб,

$$I=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}t+C=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+4}{\sqrt[4]{1+x^4}-4}-\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}+C$$

бўлишини топамиз.►

Интеграл остидаги функцияни рационал функцияга келтириш йўли билан қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1735. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

1736. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$

1737. $\int\frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$

1738. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$

1739. $\int\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}dx$

1740. $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$

1741. $\int\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^3(4-x)}}$

1742. $\int\frac{\sqrt{x+4}}{x}dx$

1743. $\int\frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$

1744. $\int\sqrt[4]{x-2x}\,dx$

1745. $\int\frac{\sqrt[3]{x+2}}{x+\sqrt[3]{x+2}}x\,dx$

1746. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$

1747. $\int\sqrt[5]{\frac{x}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x^3}$

1748. $\int\frac{dx}{\sqrt[6]{(x-7)^7(x-5)^5}}$

1749. $\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ $(a\neq b)$

1750. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

751. $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

1752. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{4x^2+4x+1}-\sqrt{2x+1}}$

1753. $\int\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$

1754. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}$

1755. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

Оддий квадратик иррационалликлар қатнашган интеграллар ҳисоблансин.

1756. $\int \sqrt{3-4x+4x^2}dx$

1757. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}dx$

1758. $\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx$

1759. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}dx$

1760. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

1761. $\int \frac{dx}{(1-x)^2\sqrt{1-x^2}}$

1762. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}dx$

1763. $\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$

1764. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$

Эйлер алмаштиришларидан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1765. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

1766. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

1767. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}dx$

1768. $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$

1769. $\int \frac{dx}{\left[1+\sqrt{x(1+x)}\right]^2}$

Биномиал дифференциалларни интеграллашдан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1770. $\int \sqrt{x^3+x^4}dx$

1771. $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$

1772. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1773. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$

1774. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

1775. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$

1776. $\int \sqrt[3]{3x-x^3}\,dx$

1777. $\int x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}\,dx$

1778. $\int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,dx$

1779. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

1780. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$

1781. $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{x^6+1}}$

1782. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$

1783. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$

1784. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{2-x^3}}$

1785. $\int \sqrt[3]{x-x^3}\,dx$

Турли усуллардан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1786. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$

1787. $\int \frac{dx}{\sqrt{2}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}$

1788. $\int \frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$

1789. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}$

1790. $\int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2-1)\sqrt{x^4+1}}$

1791. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$

5-§. Тригонометрик функцияларни интеграллаш.

1^0. $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш. Бундай интегралларда

$$tg\frac{x}{2}=t \qquad (-\pi<x<\pi)$$

алмаштиришларни бажарилса, у ҳолда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

бўлиб, қаралаётган интеграл **рационал функциянинг интегралига** келади.

2^0. $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ **кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.** Бундай интеграллар m тоқ бўлганда $\cos x = t$ алмаштириш ёрдамида, n тоқ бўлганда эса $\sin x = t$ алмаштириш ёрдамида ҳисобланади.

Агар m ва n лар жуфт сонлар бўлса, унда $\sin^2 x$ ва $\cos^2 x$ ни мос равишда

$$\frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \frac{1+\cos 2x}{2}$$

га алмаштириш лозим.

3^0. $\int \sin mx \cdot \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx\, dx$ **кўринишидаги интегралларни ҳисоблаш.** Бундай интегралларни қуйидаги

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x]$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

формулалардан фойдаланиш керак.

12 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I = \int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Бу интегралда $tg\frac{x}{2} = t$ алмаштириш бажарамиз. Унда

$$I = \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}dt}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt$$

бўлиб,

$$I = \frac{1}{2}\left(\ln|t| + \frac{1}{2}t^2 + 2t\right) + C = \frac{1}{2}\left(\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{2}tg^2\frac{x}{2} + 2tg\frac{x}{2}\right) + C$$

бўлади.▶

13 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I = \int \sin^3 x \cos^5 x\, dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Бу интегралда $\cos x = t$ алмаштириш бажариб, уни ҳисоблаймиз:

$$I = \int\left(1-\cos^2 x\right)\cos^5 x \sin x dx = [\cos x = t, \quad -\sin x dx = dt] =$$

$$= -\int\left(1-t^2\right)t^5 dt = \frac{1}{8}t^8 - \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C. ▶$$

14 – м и с о л. ***Ушбу***

$$I=\int \sin^3 2x\cos^2 3x\,dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◀Бу интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$I=\int \sin 2x\sin^2 2x\,\cos^2 3x\,dx=\int \sin 2x\frac{1-\cos 4x}{2}\cdot\frac{1+\cos 6x}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int \sin 2x(1-\cos 4x)(1+\cos 6x)dx=\frac{1}{4}\int(\sin 2x-\sin 2x\cdot\cos 4x)(1+\cos 6x)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left[\sin 2x-\frac{1}{2}(\sin(-2x)+\sin 6x)\right](1+\cos 6x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int(3\sin 2x-\sin 6x)(1+\cos 6x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\left[3\sin 2x-\frac{3}{2}\sin 4x+\frac{3}{2}\sin 8x-\sin 6x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]dx=$$

$$=-\frac{3}{16}\cos 2x+\frac{3}{64}\cos 4x-\frac{3}{128}\cos 8x+\frac{1}{48}\cos 6x+\frac{1}{192}\cos 12x+C.$$ ►

Ушбу $\int \sin^m x\cos^n x\,dx$ кўринишидаги интегралларни ҳисоблашдан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1792. $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

1793. $\int \sin^5 x\cos^5 x dx$

1794. $\int \sin^6 x dx$

1795. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

1796. $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

1797. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$

1798. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

1799. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^4 x}$

1800. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$

1801. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^4 x}$

1802. $\int \cos^3 x\cdot\cos 2x\,dx$

1803. $\int \cos^5 2x\cdot\sin^7 2x\,dx$

1804. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cdot\cos^5 x}}$

1805. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{tgx}}$

1806. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin 4x}dx$

1807. $\int \frac{\sin 3x}{\cos^4 x}dx$

1808. $\int \frac{\cos 3x}{\sin^5 x}dx$

Ушбу

1) $\sin\alpha \cdot \mathrm{sos}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

2) $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

3) $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$

формулалардан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1809. $\int \sin x \cdot \sin 3x\,dx$

1810. $\int \cos x \cdot \cos 4x\,dx$

1811. $\int \sin 2x \cdot \cos 4x\,dx$

1812. $\int \sin 5x \cdot \cos x\,dx$

1813. $\int \sin^2 x \cdot \cos(3x+1)dx$

1814. $\int \sin^2 2x \cdot \cos^2 3x\,dx$

1815. $\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x\,dx$

1816. $\int \sin x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{3}dx$

1817. $\int \sin x \cdot \sin(x+a) \cdot \sin(x+b)dx$

1818. $\int \cos^2 ax \cdot \cos^2 bxdx$

Ушбу $\int R(\sin x, \cos x)dx$ кўринишдаги интегралларни ҳисоблашдан фойдаланиб қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1819. $\int \frac{\sin x}{(3\cos x - 1)^3}dx$

1820. $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x}dx$

1821. $\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$

1822. $\int \frac{\sin 2x}{3+4\sin^2 x}dx$

1823. $\int \frac{\cos x - \cos 3x}{1-\sin^4 x}dx$

1824. $\int \frac{tgx}{tgx-3}dx$

1825. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$

1826. $\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}$

1827. $\int \frac{dx}{5 + \cos^2 x}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

1828. $\int \frac{dx}{2 + 3\sin 2x - 4\cos^2 x}$

1829. $\int \frac{dx}{tg^2 x + 4tgx}$

1830. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

1831. $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$

1832. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx$

1833. $\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$

1834. $\int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2}$

1835. $\int \frac{dx}{7\cos x - 4\sin x + 8}$

1836. $\int \frac{\cos x + 2\sin x}{4\cos x + 3\sin x - 2} dx$

1837. $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x + \sqrt{2}} dx$

1838. $\int \frac{2\cos x + \sin x - 3}{2\cos x - \sin x - 3}$

1839. $\int \frac{1 + \sin x}{\sin 2x + 2\sin x} dx$

1840. $\int \frac{dx}{\sin 2x + 4\sin x - 4\sin^2 x}$

1841. $\int \frac{dx}{(1 - \cos x + \sin x)^2}$

1842. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x}\, dx$

1843. $\int \frac{dx}{(\sin x + 2\cos x)^3}$

1844. $\int \frac{\sin x}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} dx$

1845. $\int \frac{2\sin x - \cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$

Қуйидаги интегралларни ҳисоблаш учун реккурент формулалар топилсин ($n, m \in N$).

1846. $I_n = \int \sin^n x\, dx$

1847. $I_n = \int \cos^n x\, dx$

1848. $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$

1849. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$

1850. $I_{n,m} = \int \sin^n x \cdot \cos^m x \; dx$

6-§. Турли хилдаги интегралларни ҳисоблаш

Қуйидаги интеграллар ҳисоблансин.

1851. $\int \frac{x^3 - x^2}{x+3} dx$

1852. $\int \frac{x\,dx}{2x^2 - x + 1}$

1853. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 12x + 35}$

1854. $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 4}$

1855. $\int \frac{dx}{x^4 - x^3}$

1856. $\int \frac{dx}{x^4 + 8x}$

1857. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 12x + 35)^2}$

1858. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x} + x \cdot \sqrt[4]{x}}$

1859. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

1860. $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$

1861. $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt{1 - x^2}}$

1862. $\int x^3 \sqrt{x^2 - 1}\, dx$

1863. $\int x^4 \sqrt{4 - x^2}\, dx$

1864. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

1865. $\int \sqrt{4x^2 - 4x + 3}\, dx$

1866. $\int \sqrt{1 - 4x - x^2}\, dx$

1867. $\int \frac{dx}{1 - \sin x}$

1868. $\int \frac{1 - \sin x}{\cos x} dx$

1869. $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$

1870. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$

1871. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$

1872. $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin x \cos 3x}$

1873. $\int \frac{\cos 3x}{\cos^4 x} dx$

1874. $\int \frac{\sin x \cdot \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx$

1875. $\int x e^{\sqrt{x}}\, dx$

1876. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$

1877. $\int x|x|dx$

1878. $\int (x+|x|)^2 dx$

1879. $\int \max(1, x^2) dx$

1880. $\int \{|1+x|-|1-|x||\} dx$

1881. $\int e^{ax}\sin^3 bx dx$

1882. $\int x^2 e^x \cos^2 x\, dx$

1883. $\int \dfrac{dx}{1+e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{3}}+e^{\frac{x}{6}}}$

1884. $\int \dfrac{dx}{e^x+e^{-x}-2}$

1885. $\int \ln^n x\, dx,\quad n\in N$

1886. $\int \dfrac{\arccos x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

1887. $\int \dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

1888. $\int x\ln(4+x^4) dx$

1889. $\int \dfrac{\arcsin x}{x^2}\cdot\dfrac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1890. $\int \dfrac{x^3\cdot\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

1891. $\int \dfrac{x^4\cdot \mathrm{arctg} x}{1+x^2} dx$

1892. $\int \dfrac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$

1893. $\int \dfrac{dx}{\sqrt[6]{x^5}+4\sqrt{x}}$

1894. $\int \dfrac{dx}{(1-x^4)\sqrt{1+x^2}}$

1895. $\int \dfrac{dx}{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2}$

1896. $\int \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x^4-1} dx$

1897. $\int \dfrac{dx}{(1+x^4)\sqrt[4]{1+2x^4}}$

1898. $\int \left(\dfrac{\sin x}{e^x}\right)^2 dx$

1899. $\int \dfrac{x\ln|x|}{(1-x^2)\sqrt{x^2-1}} dx$

1900. $\int \dfrac{\ln x\cdot\cos(\ln x)}{x} dx$

VII-БОБ.

Аниқ интеграл

1-§. Функциянинг интеграл ва Дарбу йиғиндилари. Аниқ интеграл таърифи

1^0. Функциянинг интеграл ва Дарбу йиғиндилари. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда берилган бўлсин. $[a,b]$ сегментнинг $a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_n = b$ $\quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n)$ нуқталари уни $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,...,n-1)$ бўлакларга ажратади. Бу нуқталар системаси $[a,b]$ ни бўлаклаш дейилади ва у $P = \{x_0, x_1, \cdots x_n\}$ каби белгиланади. Ушбу

$$\lambda_p = \max_k \{\Delta x_k\}, \Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad (k = 0,1,\cdots,n-1)$$

миқдор P бўлаклашнинг **диаметри** дейилади.

Ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ да иҳтиёрий ξ_k нуқтани:

$$\xi_k \in [x_k, x_{k+1}] \quad (k = 0,1,\cdots,n-1)$$

олиб, қуйидаги

$$\sigma = f(\xi_0)\cdot \Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot \Delta x_1 + \cdots + f(\xi_{n-1})\cdot \Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k \qquad (1)$$

йиғиндини тузамиз. **(1)** йиғинди $f(x)$ функциянинг **интеграл (Риман) йиғиндиси** дейилади. Равшанки,

$$\sigma = \sigma_p(f : \xi_k)$$

Фараз қилайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган бўлсин. Унда

$$\begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \\ M_k &= \sup\{f(x)\}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}] \end{aligned} \qquad (k = 0,1,...,n-1)$$

миқдорлар мавжуд бўлади. Ушбу

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \cdot \Delta x_k, \qquad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot \Delta x_k$$

йиғиндилар мос равишда **Дарбунинг қуйи** ва **юқори** йиғиндилари дейилади.

Равшанки,

$$s = s_p(f), \quad S = S_p(f).$$

2^0. Аниқ интеграл таърифи.

1-таъриф. ***Агар $\forall \varepsilon > 0$ олинганда ҳам шундай $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ сон топилсаки, $[a,b]$ сегментнинг диаметри $\lambda_p < \delta$ бўлган ҳар қандай P бўлаклаши ҳамда ҳар бир $[x_k, x_{k+1}]$ дан олинган иҳтиёрий ξ_k учун тузилган σ интеграл йиғиндиси ушбу***

$$|\sigma - \Im| < \varepsilon$$

тенгсизликни қаноатлантирса, $\Im$ *сон* σ *йиғиндининг* $\lambda_p \to 0$ *даги лимити дейилади. Бу ҳолда* $f(x)$ *функция* $[a,b]$ *да интегралланувчи,* $\Im$ *сон эса* $f(x)$ *функциянинг аниқ интеграли дейилади. Уни*

$$\int_a^b f(x)dx$$

каби белгиланади. Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda_p \to 0} \sigma = \lim_{\lambda_p \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

Айтайлик, $\mathcal{P} - [a,b]$ сегментнинг бўлаклашлари тўплами бўлсин: $\mathcal{P} = \{P\}$. Ҳар бир $P \in \mathcal{P}$ бўлаклашга нисбатан Дарбу йиғиндилари $s(p)$ ва $S(p)$ ни тузиб, ушбу

$$\{s(p)\}, \{S(p)\}$$

тўпламларни ҳосил қиламиз.

2-таъриф. *Агар*

$$\operatorname{Sup}\{s(p)\} = \inf\{S(p)\}$$

бўлса, $f(x)$ ***функция*** $[a,b]$ ***да интегралланувчи, бу тенгликнинг умумий қийматига эса*** $f(x)$ ***функциянинг аниқ интеграли дейилади.*** Демак,

$$\int_a^b f(x)dx = \inf\{S(p)\} = \sup\{s(p)\}$$

1 – мисол. ***Ушбу*** $f(x) = e^x$ ***функциянинг*** $[0,1]$ ***сегментдаги интеграл йиғиндиси топилсин, бунда*** $[0,1]$ ***сегментни*** n ***та тенг бўлакка бўлиб, ҳар бир бўлакда*** ξ_k $(k = 0,1,\cdots,n-1)$ ***нуқта сифатида бўлакнинг чап четкаси олинсин.***

◄Бу ҳолда $[0,1]$ сегментнинг бўлаклаши

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{k}{n}, \cdots, 1\right\}$$

бўлиб,

$$\Delta x_k = \frac{1}{n}, \ \xi_k = \frac{k}{n} \quad (k = 0,1,\cdots,n-1)$$

бўлади. Шуларни эътиборга олиб топамиз.

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}}\right)$$

Равшанки,

$$1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}} - 1}$$

(маҳражи $q = e^{\frac{1}{n}}$, биринчи ҳади 1 бўлган геометрик прогрессиянинг n та ҳади йиғиндиси). Демак, берилган функциянинг интеграл йиғиндиси

$$\sigma=\frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}$$

бўлади.►

2 – м и с о л . $[a,b]$ ***сегментда Дирихле функцияси***

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{агар } x-\text{рационал сон}\in[a,b],\\ 0, \text{агар } x-\text{иррационал сон}\in[a,b]\end{cases}$$

нинг Дарбу йиғиндилари топилсин.

◄ $[a,b]$ сегментнинг иҳтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n\} \qquad (a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_k<x_{k+1}<\cdots<x_n=b)$$

бўлаклашини оламиз.

Бу функция учун

$$m_k=\inf\{D(x)\}=0,\ x\in[x_k,x_{k+1}]$$
$$M_k=\sup\{D(x)\}=1,\ x\in[x_k,x_{k+1}]$$

бўлади. Демак,

$$s(p)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=0, \qquad S(p)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=b-a$$

бўлади.►

3 – м и с о л . ***Юқоридаги 2-таърифдан фойдаланиб,*** $f(x)=x$ ***функциянинг***

$$\int_a^b x\,dx$$

интеграли топилсин.

◄ $[a,b]$ сегментнинг иҳтиёрий

$$P=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\} \qquad (a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_n=b)$$

бўлаклашини оламиз. Равшанки, ҳар бир $[x_k,x_{k+1}]$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ сегментда $f(x)=x$ функциянинг аниқ чегаралари қуйидагича бўлади:

$$m_k=\inf\{f(x)\}=x_k \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$
$$M_k=\sup\{f(x)\}=x_{k+1} \qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)$$

Демак,

$$s(p)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\cdot\Delta x_k,$$
$$S(p)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}\cdot\Delta x_k.$$

Энди бу йиғиндиларни (уларнинг аниқ чегараларини топиш мақсадида) қулай кўринишда ёзамиз:

$$s(p)=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}x_k(x_{k+1}-x_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}^2-x_k^2)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)^2=$$
$$=\frac{1}{2}(x_n^2-x_{0.}^2)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2,$$

$$S(p)=\sum_{k=0}^{n-1}x_{k+1}\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(x_k+\Delta x_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}x_k\Delta x_k+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2+\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2=\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2\ .$$

Равшанки,

$$\sup_p\{s(p)\}=\sup_p\left\{\frac{b^2-a^2}{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2\right\}=\frac{b^2-a^2}{2},$$

$$\inf_p\{S(p)\}=\inf_p\left\{\frac{b^2-a^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k^2\right\}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Демак,

$$\sup\{s(p)\}=\inf\{S(p)\}=\frac{b^2-a^2}{2}$$

бўлиб,

$$\int_a^b xdx=\frac{b^2-a^2}{2}$$

бўлади.►

1901. Берилган кесмани n та тенг бўлакка ажратиб ва $\xi_i\ (i=1,\cdots,n)$ аргументнинг қиймати сифатида ҳар бир бўлакнинг ўртасини олиб, $f(x)=1+x$ функция учун $[-1;2]$ кесмада σ интеграл йиғинди ёзилсин.

1902. Берилган кесмани n та тенг бўлакка ажратиш орқали $f(x)$ функция учун Дарбунинг қуйи s_τ ва юқори S_τ йиғиндилари топилсин:

а) $f(x)=x^3,\ [-2;3]$; б) $f(x)=\sqrt{x},\ [0;1]$; в) $f(x)=2^x,\ [0;10]$;

1903. $\int_0^T(gt+\vartheta_0)dt$ интеграл таъриф ёрдамида ҳисоблансин.

1904. Таъриф ёрдамида ҳисоблансин.

а) $\int_0^1 e^x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$; в) $\int_0^x \cos t dt$; г) $\int_1^2\frac{dx}{x^2}$;

1905. $[1,2]$ кесмани геометрик прогрессия ташкил қилувчи нуқталар ёрдамида бўлакларга ажратиб, $\int_1^2 x^3dx$ интегрални интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблансин.

1906. $\int_a^b \frac{dx}{x}$, $(0 < a < b)$, интегрални интеграл йиғиндининг лимити сифатида ҳисоблансин.

1907. Кесмада монотон бўлган ҳар қандай функция ушбу кесмада интегралланувчи бўлиши исботлансин.

1908. Агар f функция $[0;1]$ кесмада узлуксиз ва мусбат бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \cdots f\left(\frac{n}{n}\right)} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(x) dx\right)$$

бўлиши исботлансин.

1909. $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $[a,b]$ кесмада узлуксиз бўлсин. Қуйидаги муносабатнинг тўғрилиги исботлансин:

$$\lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx,$$

бу ерда $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}, x_i \le \theta_i \le x_{i+1}$ $(i = 0,1,\cdots,n-1)$ ва $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(x_0 = a, x_n = b)$.

1910. f функция $[a,b]$ кесмада узлуксиз дифференциалланувчи ва

$$\Delta_n = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$$

бўлсин. $\lim\limits_{n\to\infty} n\Delta_n$ ҳисоблансин.

1911. Узилишга эга бўлган $f(x) = \operatorname{sign}\sin\frac{\pi}{x}$ функциянинг $[0,1]$ кесмада интегралланувчи эканлиги исботлансин.

1912. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & \text{агар } x \ne 0, \\ 0, & \text{агар } x = 0. \end{cases}$

функция $[0,1]$ кесмада интегралланувчи бўлиши исботлансин

1913. $$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x-\text{иррационал},\\ \dfrac{1}{n}, & \text{агар } x=\dfrac{m}{n} \quad (m \text{ ва } n-\text{ўзаро туб}, n\geq 1).\end{cases}$$

Риман функцияси ихтиёрий чекли оралиқда интегралланувчи бўлиши кўрсатилсин.

2-§. Аниқ интегралларни ҳисоблаш. Ньютон-Лейбниц формуласи

Функциянинг аниқ интеграллари асосан Ньютон-Лейбниц формуласи, ўзгарувчиларини алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усуллари (формулалари) ёрдамида ҳисобланади.

1^0. Ньютон-Лейбниц формуласи. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз бўлиб, $F(x)$ функция эса унинг бошланғич функцияси бўлсин $\left(F'(x)=f(x),\quad x\in[a,b]\right)$. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b \qquad (2)$$

бўлади.

Аниқ интегрални ҳисоблаш имконини берадиган (2) формула **Ньютон-Лейбниц формуласи** дейилади.

2^0. Ўзгарувчини алмаштириш формуласи. Фараз қилайлик:

1) $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда узлуксиз;
2) $\varphi(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз ва узлуксиз $\varphi'(t)$ ҳосилага эга;
3) $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$;
4) $f(\varphi(t))$ мураккаб функция $[a,b]$ да аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

бўлади.

(3) формула **ўзгарувчини алмаштириш формуласи** дейилади.

3^0. Бўлаклаб интеграллаш формуласи. Айтайлик, $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ сегментда узлуксиз ва узлуксиз $f'(x), g'(x)$ ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)dx \qquad (4)$$

бўлади.

(4) формула **бўлаклаб интеграллаш формуласи** дейилади.

Эслатма: Айрим ҳолларда йиғиндининг лимити аниқ интегралга келтириб ҳисобланади.

1 – м и с о л . ***Ушбу интеграл***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{|x|}{x}dx$$

ҳисоблансин.

◀Айтайлик, $0 \le a \le b$ бўлсин. Бу ҳолда $x > 0$ бўлиб, $f(x) = \frac{|x|}{x} = 1$ бўлади. Демак,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx = \int_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a$$

Айтайлик, $a < b < 0$ бўлсин. Бу ҳолда $x < 0$ бўлиб, $f(x) = \frac{|x|}{x} = -1$ бўлади. Демак,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx = \int_a^b (-1)dx = -x\Big|_a^b = a - b$$

Айтайлик, $a < 0 < b$ бўлсин. Бу ҳолда

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 \text{ , агар } & a < x < 0 \\ 1 \text{ , агар } & 0 < x < b \end{cases}$$

бўлади. Демак,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx = \int_a^0 (-1)dx + \int_0^b 1dx = -x\Big|_a^0 + x\Big|_0^b = a + b$$

Юқоридаги учта ҳолни бирлаштириб,

$$\int_a^b \frac{|x|}{x}dx = |b| - |a|$$

бўлишини топамиз.▶

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int_0^{10\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx$$

ҳисоблансин.

◀Маълумки,

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2\sin^2 x} = \sqrt{2} \cdot |\sin x|$$

Унда

$$\int_0^{10\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}dx = \sqrt{2}\int_0^{10\pi} |\sin x|dx$$

бўлади. Аниқ интегралнинг хоссаларидан фойдаланиб топамиз:

$$\int_0^{10\pi} |\sin x|dx = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin dx - \int_{3\pi}^{4\pi} \sin x dx + \cdots + \int_{8\pi}^{9\pi} \sin x dx - \int_{9\pi}^{10\pi} \sin x dx =$$

$$= \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{10\text{та}} = 20.$$

Демак,

$$\int_0^{10\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx = 20\cdot\sqrt{2}\,.►$$

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегрални ўзгарувчини алмаштириш усулидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = \left[x = a\sin t\,,\ dx = a\cos t dt\,,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right] = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^4}{16}\pi\ ►$$

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\Im = \int_1^{e}(x\ln x)^2 dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Бу интегрални бўлаклаб интеграллаш формуласидан фойдаланиб ҳисоблаймиз:

$$\Im = \int_1^{e}(x\ln x)^2 dx = \left[u = \ln^2 x\,,\ du = 2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx\,,\ dv = x^2dx\,,\ v = \frac{x^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln^2 x\Big|_1^e - \frac{2}{3}\int_1^{e} x^2\ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\int_1^{e} x^2\ln x dx$$

Кейинги интеграл ҳам бўлаклаб интеграллаш усули ёрдамида ҳисобланади:

$$\int_1^{e} x^2\ln x dx = \left[u = \ln x\,,\ du = \frac{1}{x}dx\,,\ dv = x^2dx\,,\ v = \frac{x^3}{3}\right] =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^{e} x^2dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Bigg|_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

Демак,

$$\Im = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{4}{27}e^3 - \frac{2}{27} = \frac{1}{27}\left(5e^3 - 2\right).►$$

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$S_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \qquad (\alpha > 0)$$

йиғиндининг лимити аниқ интеграл ёрдамида топилсин.

◄Аввало берилган йиғиндини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$S_n = \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \ldots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\cdot\frac{1}{n}$$

Энди $f(x)=x^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ функцияни $[0,1]$ сегментда қараймиз. Равшанки, бу функция $[0,1]$ сегментда интегралланувчи бўлади. $[0,1]$ сегментни n та тенг бўлакка бўлиб, ушбу

$$P=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\ldots\frac{k-1}{n},\frac{k}{n},\ldots\frac{n}{n}=1\right\}$$

бўлаклашни ҳосил қиламиз. Ҳар бир

$$\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]\ (k=1,2,3,\ldots,n)$$

бўлаклашда $\xi_k=\frac{k}{n}$ деб, P бўлаклашга нисбатан $f(x)=x^{\alpha}$ функциянинг интеграл йиғиндисини тузамиз:

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

Демак, юқоридаги S_n йиғинди σ интеграл йиғиндидан иборат экан:

$$S_n=\sigma$$

$f(x)=x^{\alpha}$ функция $[0,1]$ да интегралланувчи бўлганлиги сабабли

$$\lim_{n\to\infty}\sigma=\int_0^1 x^{\alpha}dx$$

бўлади. Шуни эътиборга олиб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1 x^{\alpha}dx=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.\blacktriangleright$$

Интеграллар ҳисоблансин.

1914. $\int_{-1}^{2}x^3dx$

1915. $\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

1916. $\int_{1}^{2}(x^2-2x+3)dx$

1917. $\int_{-1}^{1}(x^3-2x^2+x-1)dx$

1918. $\int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)dx$

1919. $\int_{0}^{\pi}\sin x dx$

1920. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$

1921. $\int_{-1/2}^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

1922. $\int_{-\pi/4}^{0}\frac{dx}{\cos^2 x}$

1923. $\int_{2}^{9}\sqrt[3]{x-1}dx$

1924. $\int_1^2 e^x dx$

1925. $\int_0^2 2^x dx$

1926. $\int_2^4 \frac{dx}{x}$

1927. $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$

1928. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$

1929. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$

1930. $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}$

1931. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$

1932. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$

1933. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} tg^4 x dx$

1934. $\int_0^2 sh^3 x dx$

1935. $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$

1936. $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2} dx$

1937. $\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$

1938. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-2x-8}$

1939. $\int_0^2 \frac{2x-1}{2x+1} dx$

1940. $\int_0^1 \frac{x^2+3x}{(x+1)(x^2+1)} dx$

1941. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

1942. $\int_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$

1943. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

1944. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$

1945. $\int_0^1 xe^{-x} dx$

1946. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{xdx}{\sin^2 x}$

1947. $\int_1^3 \ln x dx$

1948. $\int_1^2 x\ln x dx$

1949. $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$

1950. $\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx$

1951. $\int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx$

1952. $\int_0^e \sin\ln x dx$

1953. $\int_0^2 |1-x|dx$

1954. Тенгсизликлар исботлансин:

а) $\frac{1}{10\sqrt{2}} < \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx < \frac{1}{10}$

б) $\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}dx < \frac{1}{20}$

в) $0 < \int_0^{200} \frac{e^{-5x}dx}{x+20} < 0{,}01$

г) $1 < \int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}dx < 1+\frac{1}{42}$

д) $1-\frac{1}{n} < \int_0^1 e^{-x^n}dx < 1, \quad n>1$

е) $0 < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx < \ln 3$

ж) $\sin 1 < \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{1+x^2}dx < 2\sin 1$

з) $\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi+2}{2} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x(x+1)}dx < \ln\frac{\pi+2}{3}$

и) $\frac{1}{8} < \frac{\pi}{6}\int_0^2 \frac{\sin\frac{\pi}{6}(x+1)}{(x+1)(3-x)}dx < \frac{1}{6}$

к) $0{,}03 < \int_0^1 \frac{x^7}{(e^x+e^{-x})\sqrt{1+x^2}}dx < 0{,}05$

1955. Интеграллар ҳисоблансин:

а) $\int_0^2 f(x)dx, \quad f(x)=\begin{cases} x^2, \text{ агар } 0\le x\le 1, \\ 2-x, \text{ агар } 1<x\le 2. \end{cases}$

б) $\int_0^1 f(x)dx, \quad f(x)=\begin{cases} x, \text{ агар } 0\le x\le t, \\ t\frac{1-x}{1-t}, \text{ агар } t<x\le 1. \end{cases}$

1956. Тенгликларнинг нима учун нотўғрилиги тушунтирилсин.

а) $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\left(\text{arctg}\frac{1}{x}\right)dx = \text{arctg}\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$

б) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0$

в) $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2+\text{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arctg}\frac{\text{tg}^2 x}{\sqrt{2}}\Big|_{-1}^{1} = 0$

Аниқ интеграллар ёрдамида қуйидаги лимитлар ҳисоблансин:

1957. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

1958. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

1959. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

1960. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

1961. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\quad (p>0)$

1962. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

1963. Лимитлар ҳисоблансин:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$

б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\int_0^x (\mathrm{arctg}t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}$

г) $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}t}\,dt}{\int_0^{\mathrm{tg}x}\sqrt{\sin t}\,dt}$

Ўзгарувчиларни алмаштириш ва бўлаклаб интеграллаш усуллари ёрдамида ҳисоблансин:

1964. $\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt[3]{\sin x}\,dx$

1965. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2}\sin x\,dx$

1966. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\cos^2 x + x^2\sin x\right)dx$

1967. $\int_{-1}^{1}\cos x\,\mathrm{th}x\,dx$

1968. $\int_{-1}^{1}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\mathrm{tg}x\,dx$

1969. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\left(x^{2}\sin 5x+\cos\frac{x}{3}+\mathrm{tg}^{3}x\right)dx$

1970. $\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{2x^{7}-x^{5}+2x^{3}-x+1}{\cos^{2}x}dx$

1971. $\int_{0}^{2}e^{x^{2}}x\,dx$

1972. $\int_{0}^{1}x^{2}\sqrt{1-x^{2}}\,dx$

1973. $\int_{0}^{\ln 2}\sqrt{e^{x}-1}\,dx$

1974. $\int_{0}^{\ln 2}xe^{-x}dx$

1975. $\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$

1976. $\int_{0}^{\pi/4}x\sin 2x\,dx$

1977. $\int_{0}^{2\pi}x^{2}\cos x\,dx$

1978. $\int_{0}^{1}\arccos x\,dx$

1979. $\int_{1}^{3}\mathrm{arctg}\sqrt{x}\,dx$

1980. $\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

1981. $\int_{0}^{1}\frac{e^{2x}+2e^{x}}{e^{2x}+1}dx$

1982. $\int_{0}^{\pi/2}\frac{dx}{2-\sin x}$

1983. $\int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{dx}{3+\cos x}$

1984. $\int_{0}^{3/4}\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^{2}+1}}$

1985. $\int_{1}^{9}x\cdot\sqrt[3]{1-x}\,dx$

1986. $\int_{-3}^{-2}\frac{dx}{x\sqrt{x^{2}-1}}$

1987. $\int_{0}^{1}x^{15}\sqrt{1+3x^{8}}\,dx$

1988. $\int_{0}^{\pi/2}\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx$

1989. $\int_{0}^{\ln 2}\mathrm{sh}^{4}x\,dx$

1990. $\int_{1}^{2}x^{2}\ln x\,dx$

1991. $\int_{1}^{n}x^{n}\ln x\,dx$

1992. $\int_{0}^{\sqrt{3}}x\,\mathrm{arctg}x\,dx$

1993. $\int_{0}^{1}x\left(2-x^{2}\right)^{12}dx$

1994. $\int_{0}^{1}\arcsin\sqrt{x}\,dx$

1995. $\int_{0}^{\pi}e^{x}\cos^{2}x\,dx$

1996. Тенглик исботлансин.

$$\int_0^1 (1-x)^m x^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}, \quad m \in N, n \in N.$$

1997.Интеграллар ҳисоблансин:

а) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2 dx$ б) $\int_0^{\pi} (x\cos x)^2 dx$

1998. $J_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n \geq 2$

интеграл учун

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$$

рекуррент формула исботлансин.

1999.Исботлансин:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ агар } n - \text{жуфт бўлса,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, \text{ агар } n - \text{ток бўлса, } n \in N. \end{cases}$$

2000.Исботлансин:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{\pi}{2}$$

Кўрсатма: 1999-мисол натижасидан фойдаланинг.

2001.Исботлансин:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{агар } m \text{ ва } n \text{ жуфт бўлса,} \\ \frac{(m-1)!!(n-1)!!}{(m+n)!!} & \text{бошка барча холларда, } m \in N, n \in N. \end{cases}$$

2002. $n \in N$ учун қуйидаги тенгликлар исботлансин:

а) $\int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$ б) $\int_0^a (a^2 - x^2)^{\frac{2n-1}{2}} dx = a^{2n} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

2003.Исботлансин:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx dx = \frac{1}{2^{n+1}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}, n \in N$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}, n \in N$

2004. $m \in N$ учун тенгликлар исботлансин:

а) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x dx = 0$ б) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^m x \sin(m+2)x dx = \frac{1}{m+1}$

в) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos(m+2)x dx = -\frac{\sin\frac{m\pi}{2}}{m+1}$ г) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \sin(m+2)x dx = \frac{1}{m+1}\cos\frac{m\pi}{2}$

2005. f функция $[a,b]$ кесмада интегралланувчи, F функция $[a,b]$ кесмада чекли сондаги $x_1, \ldots, x_n$ биринчи тур узилиш нуқталарига эга бўлсин. Агар F функция $[a,b]$ кесманинг чекли сондаги ички нуқталаридан бошқа барча нуқталарида дифференциалланувчи ва $F'(x) = f(x)$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринли эканлиги исботлансин:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(b+0) - \sum_{k=1}^{n}[F(x_k+0) - F(x_k-0)]$$

(F функция f функциянинг **умумлашган бошланғич функцияси** дейилади.)

2006. Қуйидаги узилишга эга функцияларнинг узлуксиз умумлашган бошланғич функциялари топилсин:

а) $\mathrm{sign}x$ б) $\mathrm{sign}(\sin x)$ в) $[x]$ г) $x[x]$ д) $(-1)^{[x]}$

2007. $\int\limits_0^x f(t)dt$ интеграл ҳисоблансин. Бу ерда

$$f(t) = \begin{cases} 1, \text{ агар } |t| < l, \\ 0, \text{ агар } |t| > l, \quad l \geq 0 \end{cases}$$

2008. Ҳисоблансин:

а) $\int\limits_0^3 \mathbf{sign}\left(x - x^3\right)dx$ б) $\int\limits_0^2 \left[e^x\right]dx$

в) $\int\limits_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}dx$ д) $\int\limits_1^{n+1} \ln[x]dx, \quad n \in N$

г) $\int\limits_0^{\pi} x\,\mathbf{sign}(\cos x)dx$ е) $\int\limits_0^1 \mathbf{sign}(\sin\ln x)dx$

3-§. Аниқ интегралнинг хоссалари. Ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар

1⁰. Аниқ интегралнинг асосий хоссалари. $[a,b]$ сегментда интегралланувчи функциялар синфини $R([a,b])$ каби белгилаймиз.

1-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b]),\ c \in R$ бўлса, у ҳолда $c \cdot f(x) \in R([a,b])$ бўлиб,

$$\int\limits_a^b (c \cdot f(x))dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$$

бўлади. (интегралнинг **чизиқлилик** хоссаси)

2-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b]), g(x) \in R([a,b])$ бўлса, у ҳолда $f(x) + g(x) \in R([a,b])$ бўлиб,

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$$

бўлади. (интегралнинг **аддитивлик** хоссаси)

3-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b]),\ a < c < b$ бўлса, у ҳолда $f(x) \in R([a,c])$, $f(x) \in R([c,b])$ бўлиб,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$

бўлади.

4-хосса. Агар $f(x) \in R([a,b]), g(x) \in R([a,b])$ бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \le g(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$$

бўлади. (интегралнинг **монотонлик** хоссаси)

Натижа. Агар $f(x) \in R([a,b])$ бўлиб, $f(x) \ge 0$ бўлса,

$$\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$$

бўлади.

2^0.Функциянинг ўрта қиймати ва ўрта қиймат ҳақидаги теоремалар. Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда берилган бўлиб, у шу сегментда интегралланувчи бўлсин.

Ушбу

$$M[f]=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

миқдор $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ даги **ўрта қиймати** дейилади.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ да чегараланган бўлиб, $\forall x\in[a,b]$ да $m\le f(x)\le M$ бўлсин.

1 – т е о р е м а . ***Агар*** $f(x)\in R([a,b])$ ***бўлса, у ҳолда шундай*** μ ***сон*** $(m\le\mu\le M)$ ***топиладики,***

$$\int_a^b f(x)dx=\mu\cdot(b-a)$$

бўлади.

2 – т е о р е м а . ***Агар*** $f(x)\in C([a,b]),\ g(x)\in C([a,b])$ ***бўлиб,*** $\forall x\in[a,b]$ ***да*** $g(x)>0$ ***ёки*** $g(x)<0$ ***бўлса, у ҳолда шундай*** μ ***сон*** $(m\le\mu\le M)$ ***топиладики,***

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx$$

бўлади.

1 – м и с о л . ***Агар*** $f(x)\in C([a,b]),\ g(x)\in C([a,b])$ ***бўлса, ушбу***

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\le\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx \qquad (*)$$

тенгсизликнинг ўринли бўлиши исботлансин.

◄Аниқ интегралнинг хоссаларига кўра

$$f(x)-\alpha\cdot g(x)\in R([a,b]) \qquad (\alpha\in R)$$

бўлиб,

$$\int_a^b [f(x)-\alpha\cdot g(x)]^2dx\ge 0$$

бўлади. Бу муносабатдан

$$\alpha^2\int_a^b g^2(x)dx-2\alpha\int_a^b f(x)g(x)dx+\int_a^b f^2(x)dx\ge 0$$

бўлиши келиб чиқади.

Маълумки, квадрат учҳад манфий бўлмаса, унинг дискриминанти мусбат бўлмайди. Демак,

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2-\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx\le 0$$

Бу тенгсизликдан топамиз:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)dx \cdot \int_a^b g^2(x)dx \blacktriangleright$$

(*) тенгсизлик **Коши-Буняковский тенгсизлиги** дейилади.

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int_0^\pi x\cdot\sqrt{\sin x}dx \le \frac{2}{3}\pi^3$$

тенгсизлик исботлансин.

◀Агар (*) тенгсизликда $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{\sin x}$ дейилса, у ҳолда

$$\int_0^\pi x\cdot\sqrt{\sin x}dx \le \int_0^\pi x^2dx\cdot\int_0^\pi \sin xdx = \frac{2}{3}\pi^3$$

бўлади.▶

3 – м и с о л . ***Агар***

$$f(x)=e^{2x},\ a=0,\ b=1$$

бўлса, у ҳолда c ***нинг қандай қийматида ушбу***

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$$

тенглик ўринли бўлади?

◀Равшанки,

$$\int_0^1 e^{2x}dx = \left.\frac{e^{2k}}{2}\right|_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$$

бўлади. Демак,

$$e^{2c} = \frac{e^2-1}{2}$$

Бу тенгликдан c ни топамиз:

$$2c = \ln\frac{e^2-1}{2},\quad c=\frac{1}{2}\ln\frac{e^2-1}{2} \blacktriangleright$$

4 – м и с о л . ***Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, ушбу***

$$\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx \qquad (0<a<b)$$

интеграл баҳолансин.

◀Ўрта қиймат ҳақидаги 2-теоремада $f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай c нуқта $(a<c<b)$ топиладики,

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

бўлади. Шу тенгликдан фойдаланиб топамиз:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x}}\sin xdx = \frac{1}{\sqrt{c}}\int_a^b \sin xdx = \frac{1}{\sqrt{c}}(\cos a-\cos b)$$

Агар $0<a<b$ бўлганда

$$\frac{1}{\sqrt{c}} < \frac{1}{\sqrt{a}} \qquad \text{ва} \qquad |\cos a - \cos b| \le 2$$

бўлишини эътиборга олсак, у ҳолда

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx\right| \le \frac{2}{\sqrt{a}}$$

бўлиши топилади.►

2009. Қайси бири катта эканлиги аниқлансин:

а) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx$ ёки $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx$ б) $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ёки $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

в) $\int_0^1 e^{-x}\sin x dx$ ёки $\int_0^1 e^{-x^2}\sin x dx$ г) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ ёки $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

2010. Тенгсизликлар исботлансин:

а) $0 < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt[5]{x^2+2}}dx < \frac{\pi}{\sqrt[5]{2}}$

б) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\pi + \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^2+8}}dx < \frac{3}{2}$

в) $\frac{\sqrt{2}}{3} < \int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{2+x^2}dx < 1$

2011. f функция $[a,b]$ кесмада интегралланувчи бўлсин.

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0$$

тенглик бажарилиши учун, f функциянинг барча узлуксиз нуқталарида $f(x)=0$ бўлиши зарур ва етарли эканлиги исботлансин.

2012. Берилган функцияларнинг кўрсатилган оралиқлардаги ўрта қийматлари аниқлансин:

а) $f(x) = x^2, \quad [0,1];$ б) $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0,100];$

в) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x, \quad [0, 2\pi];$ г) $f(x) = \sin x \sin(x+\varphi), \quad [0, 2\pi]$

Ўрта қиймат ҳақидаги биринчи теоремадан фойдаланиб, интеграллар баҳолансин:

2013. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0{,}5\cos x}$ **2014.** $\int\limits_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}}dx$ **2015.** $\int\limits_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100}dx$

Ўрта қиймат ҳақидаги иккинчи теоремадан фойдаланиб, интеграллар баҳолансин:

2016. $\int\limits_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}dx$

2017. $\int\limits_a^b \frac{e^{-\alpha x}}{x}\sin x dx \quad (\alpha \ge 0 \,;\, 0 < a < b)$

2018. $\int\limits_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b)$

4-§. Аниқ интегрални тақрибий ҳисоблаш

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,b]$ сегментда интегралланувчи бўлсин. Бу функциянинг аниқ интеграли

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

кўпинча, **тўғри тўртбурчаклар, трапеция ва параболалар** формулалари ёрдамида тақрибий ҳисобланади.

1^0. Тўғри тўртбурчаклар формуласи. $[a,b]$ сегментни

$$x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n)$$

нуқталар ёрдамида n та тенг бўлакка бўламиз.

Ушбу

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right) + R_n \qquad (**)$$

формула **тўғри тўртбурчаклар формуласи** дейилади.

$f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлса, **(**)** формуланинг қолдиқ ҳади

$$R_n = \frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(c) \quad (a \le c \le b)$$

бўлади.

2^0. Трапециялар формуласи. Ушбу

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]+R_n \qquad (***)$$

формула **трапециялар формуласи** дейилади.

$f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз $f''(x)$ ҳосилага эга бўлса, **(***)** формуладаги қолдиқ ҳад

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \quad (a \le c \le b)$$

кўринишга эга бўлади.

3^0. Симпсон формуласи. Ушбу

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+2k\cdot\frac{b-a}{2n}\right)+\right.$$
$$\left.+4\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(2k+1)\cdot\frac{b-a}{2n}\right)\right]+R_n \qquad (****)$$

формула **Симпсон (параболалар) формуласи** дейилади.

$f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз $f^{(4)}(x)$ ҳосилага эга бўлса, **(****)** формуладаги қолдиқ ҳад

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(c) \quad (a \le c \le b)$$

кўринишга эга бўлади.

5-мисол. ***Ушбу***

$$\Im = \int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Аввало бу интегрални Ньютон-Лейбниц формуласи ёрдамида ҳисоблаймиз:

$$\Im = \int_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx = \frac{1}{6}\int_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}} d(6x-5) = \frac{1}{9}(6x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = 38.$$

Энди $[1,9]$ сегментни

$$x_0 = 1;x_1 = 2;x_2 = 3;x_3 = 4;x_4 = 5;x_5 = 6;x_6 = 7;x_7 = 8;x_8 = 9$$

нуқталар ёрдамида 8 та тенг бўлакка бўлиб, берилган интегрални трапециялар ва Симпсон формулалари ёрдамида тақрибий ҳисоблаймиз.

Берилган $f(x)=\sqrt{6x-5}$ функциянинг $x_0,...,x_8$ нуқталардаги қийматларини ҳисоблаймиз.

$$x_0 = 1,\ f(x_0)=\sqrt{6\cdot 1-5} = 1{,}0000$$
$$x_1 = 2,\ f(x_1)=\sqrt{12-5} = 2{,}6458$$
$$x_2 = 3,\ f(x_2)=\sqrt{18-5} = 3{,}6056$$
$$x_3 = 4,\ f(x_3)=\sqrt{19} = 4{,}3589$$
$$x_4 = 5,\ f(x_4)=\sqrt{25} = 5{,}0000$$
$$x_5 = 6,\ f(x_5)=\sqrt{31} = 5{,}5678$$

$$x_6 = 7,\ f(x_6) = \sqrt{37} = 6{,}0828$$
$$x_7 = 8,\ f(x_7) = \sqrt{43} = 6{,}5574$$
$$x_8 = 9,\ f(x_8) = \sqrt{49} = 7{,}0000$$

Равшанки, бу ҳолда $[a,b] = [1,9]\quad b - a = 8,\ n = 8$.

Трапециялар формуласи бўйича:

$$\Im = \int_1^9 \sqrt{6x-5}dx \approx \frac{1}{16}\left[1 + 7 + 2\sum_{k=1}^{7}\sqrt{6\cdot x_k - 5}\right] = 37{,}8183$$

бўлади.

Бу ҳолда абсолют хатолик $\Delta = 0{,}1817$ га тенг.

Симпсон формуласи бўйича:

$$\Im \approx \frac{1}{3}(8 + 4\cdot 19{,}1299 + 2\cdot 14{,}6884) \approx 37{,}9655$$

бўлади.

Бу ҳолда абсолют ҳатолик $\Delta = 0{,}0345$ га тенг.►

2019. J интегрални: а) тўғритўртбурчаклар формуласи $(n=1)$, б) трапециялар формуласи $(n=1)$, в) Симпсон формуласи $(n=2)$ ёрдамида тақрибий ҳисоблансин ва интегралнинг аниқ ва тақрибий қийматлари айирмаси топилсин:

1) $J = \int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ 2) $J = \int_0^{\pi/2} \sin x dx$

Трапециялар формуласи ёрдамида тақрибий ҳисоблансин ва уларнинг хатолиги баҳолансин:

2020. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\quad (n=8)$

2021. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}\quad (n=12)$

2022. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x dx}\quad (n=6)$

Симпсон формуласи ёрдамида интеграллар ҳисоблансин:

2023. $\int\limits_1^9 \sqrt{x}dx \quad (n=4)$

2024. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{3+\cos x}dx \quad (n=6)$

2025. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx \quad (n=10)$

2026. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\ln(1+x)} \quad (n=6)$

2027. Тўғри тўртбурчаклар формуласи ёрдамида хатолиги 10^{-2} дан кўп бўлмаган тақрибий қиймати ҳисоблансин:

а) $\int\limits_1^2 x^3dx$

б) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x^2}$

в) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{1+\ln x}$

г) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x}dx$

д) $\int\limits_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x}dx$

е) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^{2/3}}dx$

2028. Трапециялар формуласи ёрдамида хатолиги 10^{-2} дан кўп бўлмаган тақрибий қиймати ҳисоблансин:

а) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{x}$

б) $\int\limits_0^{1,2} e^x dx$

в) $\int\limits_0^{1,2} \sin x dx$

г) $\int\limits_1^3 \ln 2x dx$

д) $\int\limits_0^2 e^{-x^2}dx$

е) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{1+4x^3}$

2029. Симпсон формуласи ёрдамида хатолиги ε дан кўп бўлмаган тақрибий қийматин ҳисоблансин:

а) $\int\limits_1^5 \frac{dx}{x}$, $\varepsilon = 10^{-2}$

б) $\int\limits_0^{\pi} \sin x dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$

в) $\int\limits_1^3 \sqrt{x}dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$

г) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$

д) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, $\varepsilon = 10^{-4}$

е) $\int\limits_2^5 \ln x dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$

ж) $\int_{4}^{16} \frac{\mathbf{dx}}{\sqrt{\mathbf{x}} + \mathbf{1}}$, $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{10^{-4}}$

VIII-БОБ.

Аниқ интегралнинг тадбиқлари

1-§. Аниқ интеграл ёрдамида функция лимитини ҳамда функциянинг ўрта қийматини ҳисоблаш

1^0. **Функция лимитини ҳисоблаш.** $f(x)$ функция $[a,b]$ да берилган бўлиб $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ учун $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ $(k = 0,1,2...n-1)$ бўлсин. Маълумки, $f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи бўлса, у ҳолда $\max\limits_k(\Delta x_k) \to 0$ да ушбу

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k = f(\xi_0)\cdot\Delta x_0 + f(\xi_1)\cdot\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\cdot\Delta x_{n-1}$$

йиғиндининг лимити мавжуд ва

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x_k)\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$$

бўлади.

2^0. **Функциянинг ўрта қиймати.** $f(x)$ функция $[a,b]$ да берилган бўлсин. Агар $f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз бўлса, у ҳолда шундай $c \in (a,b)$ нуқта топиладики, $M[f] = f(c)$ бўлади , бу ерда

$$M(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

миқдор $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ даги **ўрта қиймати**. Агар $f(x)$ ва $g(x)$ функциялар $[a,b]$ да интегралланувчи бўлиб, $g(x)$ функция $[a,b]$ да ишора сақласа, у ҳолда

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx$$

бўлади, бунда $m \le \mu \le M$, $m = \inf\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}, M = \sup\limits_{a\le x\le b}\{f(x)\}$

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

лимит ҳисоблансин.

◄Аввало $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ деб, уни логарифмлаймиз.

$$\ln a_n = \ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{n}(\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n) - \ln n =$$

$$=\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\ln\frac{2}{n}+\ldots+\ln\frac{n}{n}\right]=\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}.$$

Бу йиғинди $f(x)=\ln x$ функциянинг $[0,1]$ орлиқда интеграл йиғиндиси эканини эътиборга олиб топамиз.

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\ln x\,dx=-1.$$

Демак,

$$\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\right)=-1,\qquad \text{яъни}\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{-1}.►$$

2 – м и с о л . *Ушбу*

$$f(x)=\cos ax$$

функциянинг $\left[0,\frac{\pi}{a}\right]$ ***даги ўрта қиймати топилсин.***

◄Берилган функциянинг ўрта қийматини (1) формуладан фойдаланиб топамиз.

$$M[f]=\frac{1}{\frac{\pi}{a}}\int_0^{\frac{\pi}{a}}\cos ax\,dx=\frac{a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{a}}\cos ax\,dx=\frac{a}{\pi a}\cdot\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{a}}=0.►$$

Аниқ интеграл ёрдамида қуйидаги лимитлар топилсин.

2030. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$

2031. $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{1}{2n^2}\right)$

2032. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$

2033. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n^4}}$

2034. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+\ldots+\frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)$

2035. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(1+\sqrt{\frac{n}{n+3}}+\sqrt{\frac{n}{n+6}}+\ldots+\sqrt{\frac{n}{n+3(n-1)}}\right)$

2036. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$

2037. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\frac{1}{(n^2+1)^2}+\frac{1}{(n^2+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(n^2+n)^2}\right)$

2038. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right)$

2039. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}\qquad (p>0)$

2040. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

2041. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{n}{n}}\right)$

2042. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4n}}+\frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{4n}}+\frac{1}{\cos^2\frac{3\pi}{4n}}+\ldots\frac{1}{\cos^2\frac{n\pi}{4n}}\right)$

2043. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

2044. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]$, $f(x)$ функция $[a,b]$ да интегралланувчи

2045. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{n^2}+\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{2\pi}{n^2}+\ldots+\left(1+\frac{n}{n}\right)\cdot\frac{n\pi}{n^2}\right]$

2046. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\cdot\left(\frac{1}{2+\cos\frac{\pi}{n}}+\frac{1}{2+\cos\frac{2\pi}{n}}+\ldots+\frac{1}{2+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$

2047. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{1}{n}\right)+\left(x+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(x+\frac{n}{n}\right)\right]$

2048. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{n}}+2^{\frac{2}{n}}+\ldots+2^{\frac{n}{n}}\right)$

2049. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$

2050. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин.

2051. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 dx}{x}$

2052. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_0^x (\mathrm{arctg}t)^2 dt}{\sqrt{x^2+1}}$

2053. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^1 e^{t^2}\cdot dt\right)^2}{\int_0^x e^{2t^2}\cdot dt}$

2054. $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\mathrm{tg}t}dt}{\int_0^{\mathrm{tg}x}\sqrt{\sin t}dt}$

2055. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\int_0^x\frac{t\cdot \mathrm{arctg}t}{1+t}dt$

2056. Агар $f(x)$ функция $[0,1]$ да интегралланувчи бўлса

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$$

бўлиши исботлансин.

2057. Ушбу

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\sin^n x dx=0$$

тенглик исботлансин.

Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин.

2058. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int\limits_0^x \dfrac{\sqrt[3]{1+t}-1}{t}dt$

2059. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\int\limits_0^x e^{t^2}dt\right)^{\frac{1}{x^2}}$

2060. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \left(1-x^2\right)^n dx$

$f(x)$ функция $[0,1]$ да узлуксиз. Қуйидаги лимитлар ҳисоблансин.

2061. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^n\cdot f(x)dx$

2062. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\int\limits_0^1 x^n f(x)dx\right)$

2063. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\int\limits_0^1 e^{-nx}\cdot f(x)dx\right)$

2064. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int\limits_0^1 f(x)\cdot\sin^{2n}2\pi x dx}{\int\limits_0^1 e^{x^2}\cdot\sin^{2n}2\pi x dx}$

2065. $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^{2\pi} f\left(\sin^{2n}x\right)dx$

Қуйидаги функцияларнинг кўрсатилган ораликдаги ўрта қиймати топилсин:

2066. $f(x)=x^2$ $[0,1]$ да

2067. $f(x)=\dfrac{1}{x+x^2}$ $[1,15]$ да

2068. $f(x)=\sqrt{x}$ $[0,100]$ да

2069. $f(x)=\cos^3 x$ $[0,\pi]$ да

2070. $f(x)=a+b\cos x$ $[-\pi,\pi]$ да

2071. $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$ $[0,2]$ да

2072. $f(x)=\sin^3 x$ $\quad [0,\pi]$ да

2073. $f(x)=\sin^4 x$ $\quad [0,\pi]$ да

2074. $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ $\quad [0,2\pi]$ да

2075. $f(x)=\sin x\cdot\sin(x+\varphi)$ $\quad [0,2\pi]$ да

2076. Ушбу

$$f(x)=\sin\frac{2\pi\cdot\alpha x}{T}$$

функциянинг $\left[0,\frac{T}{4}\right]$ оралиқадаги ўрта қиймати топилсин.

2077. Агар $f(x)$ функция $[0,+\infty)$ да узлуксиз бўлиб,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a \qquad (a\in R)$$

бўлса,

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=a$$

бўлиши исботлансин.

2078. Параметр φ нинг қандай қийматида қуйидаги

$$f(t)=\sin\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi\right)$$

функциянинг $\left[0,\frac{T}{4}\right]$ оралиқдаги ўрта қиймати $\frac{2}{\pi}$ га тенг бўлади?

Қуйидаги тенгликлар ξ нинг қандай қийматларида ўринли бўлади?

2079. $\int_0^2\left(2x-\frac{3}{4}\cdot x^2\right)dx=2\cdot\xi\cdot\left(2-\frac{3}{4}\cdot\xi\right)$

2080. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} tg^2 x dx=-\frac{\pi}{4}\cdot tg^2\xi$

$$2081.\ \int_{1}^{e^2} \ln x dx = \left(1 - e^2\right) \cdot \ln \xi$$

$$2082.\ \int_{0}^{1} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx = (\xi + 1) \cdot \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2083.\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = \xi \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

Қуйидаги тенгликлардан θ топилсин.

$$2084.\ \int_{0}^{x} t^n dt = x \cdot (\theta \cdot x)^n \qquad (n > -1)$$

$$2085.\ \int_{0}^{x} \ln t dt = x \cdot \ln \theta x$$

$$2086.\ \int_{0}^{x} e^t dt = x \cdot e^{\theta x}$$

Ўрта қиймат ҳақидаги теоремадан фойдаланиб, қуйидаги интеграллар баҳолансин.

$$2087.\ I = \int_{0}^{1} \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$2088.\ I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx$$

$$2089.\ I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sin^2 x} dx$$

$$2090.\ I = \int_{0}^{2\pi} \frac{dx}{10 + 3\cos x}$$

$$2091.\ I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{2 + x - x^2}}$$

$$2092.\ I = \int_{0}^{1} e^{-x^2} dx$$

$$2093.\ I = \int_{0}^{200} \frac{e^{-5x}}{x+20} dx$$

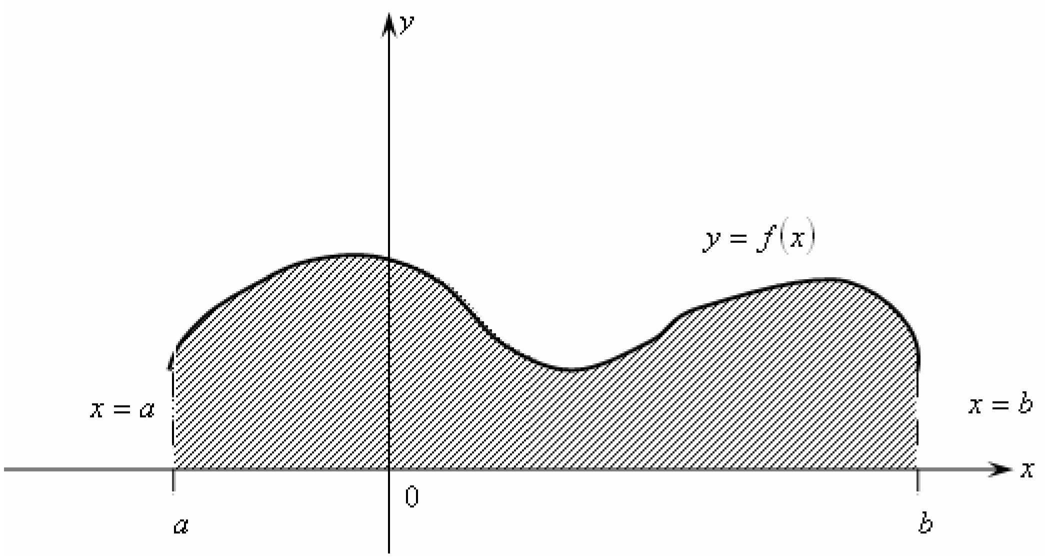
$$2094.\ I = \int_{0}^{1} \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}} dx$$

$$2095.\ I=\int_0^1 e^{-x^n}dx \qquad (n>1)$$ $$2096.\ I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x(x+1)}dx$$

2-§. Текис шаклнинг юзи

1^0. Тўғри бурчакли координаталар системасида текис шаклнинг юзаси. $y=f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз бўлиб, $\forall x\in[a,b]$ да $f(x)\geq 0$, бўлсин. Юқоридан $f(x)$ функция графиги, ён томонларидан $x=a, x=b$ чизиқлар, пастдан абциссалар ўқи билан чегараланган шаклнинг (эгри чизиқли трапециянинг) юзи S қуйидагига тенг бўлади (10-чизма):

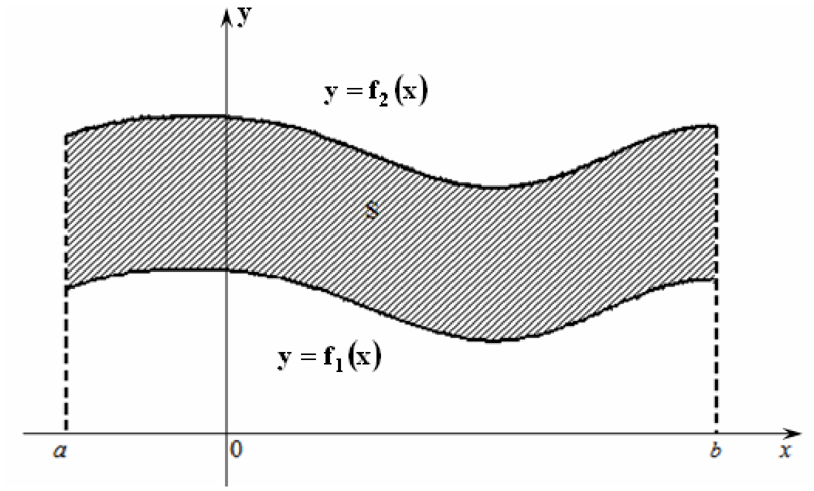
$$S=\int_a^b f(x)dx$$



10-чизма.

$y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ функциялар $[a,b]$ да узлуксиз бўлиб, $\forall x\in[a,b]$ да $f_1(x)\leq f_2(x)$ бўлсин. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функция графиклари, $x=a, x=b$ чизиқларбилан чегараланган шаклнинг юзи S қуйидагига тенг бўлади (11-чизма):

$$S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$



11-чизма.

2^0. Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқлар билан чегараланган шаклнинг юзаси. Текисликдаги шаклни ўраб турувчи эгри чизиқ ушбу

$$\begin{cases} x = x(t) \\ x = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

параметрик тенглама билан аниқлансин.

Агар $x = x(t), y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз бўлиб, $\forall t \in [\alpha, \beta]$ да $x(t) \ge 0, y(t) \ge 0$ ва $x'(t) \ge 0$ бўлса у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt$$

бўлади.

Агар $x = x(t), y = y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз бўлиб $\forall t \in [\alpha, \beta]$да $x(t) \ge 0, y(t) \ge 0$ ва $y'(t) \ge 0$ бўлса у ҳолда шаклнинг юзи

$$S = \int_\alpha^\beta x(t) \cdot y'(t) dt$$

бўлади.

3^0. Қутб координаталар системасида берилган текис шаклнинг юзи. Қутб координаталар системасида ушбу $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ тенглама билан аниқланган узлуксиз эгри чизиқ ҳамда иккита қутб радиуслари $r_1 = r(\alpha), r_2 = r(\beta)$ билан чегараланган шакл (сектор) нинг юзи

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi) d\varphi$$

бўлади.

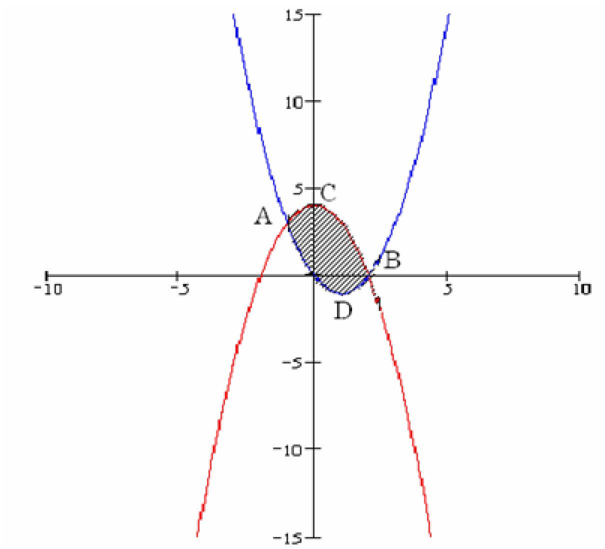
3 – м и с о л . *Ушбу*

$$y = 4 - x^2 \qquad \textit{ва} \qquad y = x^2 - 2x$$

эгри чизиқлар (параболалар) билан чегараланган шаклнинг юзи топилсин.

◄Параболалар $A(-1;3)$ ва $B(2;0)$ нуқталарда кесишади. Изланаётган шаклнинг юзаси

$$S = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$$ бўлади. (12-чизма)



12-чизма.

Равшанки

$$S_{A_1ACB} = \int_{-1}^{2}\left(4 - x^2\right)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 9,$$

$$S_{OBD} = \int_{2}^{0}\left(x^2 - 2x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{2}^{0} = \frac{4}{3},$$

$$S_{A_1AO} = \int_{-1}^{0}\left(x^2 - 2x\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{4}{3}.$$

Демак, $S = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9$.►

4 – м и с о л . $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ ***эллипснинг юзи топилсин.***

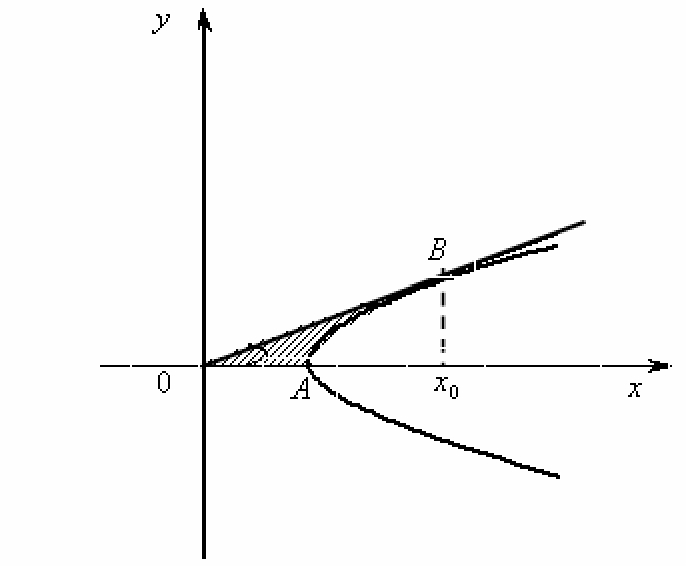
◄Эллипс координата ўқларига нисбатан симметрик бўлганлиги сабабли, унинг биринчи чоракдаги қисмининг юзасини топиш етарли.

Энди $x = a\cos t = 0$, $x = a\cos t = a$ деб, t ўзгарувчининг $t_1 = \frac{\pi}{2}$ дан $t_2 = 0$ гача ўзгаришини топамиз. Демак,

$$\frac{1}{4}S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ab\sin t(-\sin t)dt = ab\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 tdt = \frac{\pi ab}{4}$$

бўлиб, $S = \pi ab$ бўлади.►

5 – м и с о л . *Тенгламаси* $x^2 - y^2 = a^2$ *бўлган гиперболада* $M(x_0, y_0)$ *нуқта*



13-чизма.

олинган. 13 - чизмада кўрсатилган эгри чизиқли $\mathbf{OAB}$ ***учбурчак юзи топилсин.***

◄ $\mathbf{x = r\cos\varphi}$, $\mathbf{y = r\sin\varphi}$ деб қутб координаталар системасида берилган гиперболанинг тенгламасини тузамиз:

$$\mathbf{x^2 - y^2 = r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi = r^2\cos^2 2\varphi}.$$

Демак, $\mathbf{r^2 = \dfrac{a^2}{\cos 2\varphi}}$

Унда изланаётган шаклнинг юзаси

$$\mathbf{S = \frac{1}{2}\int_0^a r^2(\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^a \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{4}\cdot \ln\frac{(x_0+y_0)^2}{a^2} = \frac{a^2}{2}\ln\frac{x_0+y_0}{a}}.►$$

Тўғри бурчакли координаталар системасида берилган қуйидаги эгри чизиқлар билан чегараланган шаклларнинг юзаси топилсин.

2097. $\mathbf{y = x^2 + 1,\ \ x + y = 3}$

2098. $\mathbf{y = 4x - x^2,\ \ y = 0}$

2099. $\mathbf{y^2 = 2px,\ \ x^2 = 2py}$

2100. $\mathbf{y^2 = 2x + 1,\ \ x - y - 1 = 0}$

2101. $\mathbf{y = \ln x,\ \ y = 0,\ \ x = e}$

2102. $\mathbf{y^2 = x^3,\ \ x = 0,\ \ y = 4}$

2103. $\mathbf{y = |\lg x|,\ \ y = 0,\ \ x = 0{,}1,\ \ x = 10}$

2104. $\mathbf{y = \dfrac{x^2}{2},\ \ y = 2 - \dfrac{3}{2}x}$

2105. $\mathbf{y = x,\ \ y = x + \sin^2 x,\ \ 0 \le x \le \pi}$

2106. $\mathbf{y = \mathrm{tg}\,x,\ \ y = 0,\ \ x = \dfrac{\pi}{3}}$

2107. $y = \frac{1}{2} \cdot x^2, \quad y = \frac{1}{1+x^2}$

2108. $y = tgx, \quad y = \frac{2}{3} \cdot \cos x, \quad x = 0$

2109. $y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2x$

2110. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1$

2111. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 2a$

2112. $y = x - x^2, \quad y = x \cdot \sqrt{1-x}$

2113. $y = \sin 2x, \quad y = \sin x, \quad \frac{\pi}{3} \le x \le \pi$

2114. $2y = x^2, \quad x^2 + y^2 = 8, \quad y \ge 0$

2115. $y = \ln(1+x), \quad y = -xe^{-x}, \quad x = 1$

2116. $y = 6x^2 - 5x + 1, \quad y = \cos \pi x, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}$

2117. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad x = 0, \quad x = a$

2118. $y = x^2 + 6x + 10, \quad x^2 + y^2 + 6x - 2y + 8 = 0$

2119. $6x = y^3 - 16y, \quad 24x = y^3 - 16y$

2120. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

2121. $y^2 = x^2\left(a^2 - x^2\right)$

2122. $y = \ln\cos x, \quad 0 \le x \le a \quad \left(a < \frac{\pi}{2}\right).$

2123. $y = 2^{\sqrt{1+e^{\frac{x}{2}}}}, \quad \ln 9 \le x \le \ln 64$

2124. $x = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(y-1)^3}, \quad 0 \le x \le 2\sqrt{3}.$

2125. $y^2 = \frac{x^2}{2a - x}, \quad x = 2a$

2126. $x = a \cdot \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y = 0$

Параметрик кўринишда берилган эгри чизиқлар билан чегараланган шаклларнинг юзи топилсин:

2127. $x = a\cos t, \quad y = a\sin t$

2128. $x = at - t^2, \quad y = at^2 - t^3 \qquad (a > 0)$

2129. $x = 1 + t - t^3, \quad y = 1 - 15t^2$

2130. $x = \dfrac{t(1-t^2)}{1+3t^2}, \quad y = \dfrac{4t^2}{1+3t^2}$

2131. $x = \dfrac{1}{1+t^2}, \quad y = \dfrac{t(1-t^2)}{1+t^2}$

2132. $x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \quad y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \qquad (\text{бунда} \quad 0 \le t < +\infty)$

2133. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ ҳамда $y = 0 \quad (0 \le t \le 2\pi)$

2134. $x = a\sin^3 t, \quad y = b\cos^3 t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

2135. $x = a\sin t \cdot \cos^2 t, \quad y = b\cos t \cdot \sin^2 t, \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

2136. $x = a(1 - \cos t)\cos t, \quad y = a(1 - \cos t)\sin t$

2137. $x = a(\cos t + t\sin t), \quad y = a(\sin t - t\cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$ ва $(a,0), \quad (a,-2\pi a)$ нуқталарни бирлаштирувчи тўғри чизиқ кесмаси.

2138. $x = a(2\cos t - \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t)$

2139. $x = a\sin 2t, \quad y = a\sin t \quad (a > 0)$

2140. $x = a\left(\dfrac{2}{\pi}t - \sin t\right), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (a > 0)$

2141. $x = a\cos t, \quad y = \dfrac{a\sin^2 t}{2 + \sin t}$

Қутб координаталар системасида берилган қуйидаги эгри чизиқлар билан чегараланган шаклларнинг юзи топилсин.

2142. $r = a\varphi \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$

2143. $r = a\cos\varphi$

2144. $r = r\sin 2\varphi$

2145. $r = a\sin 5\varphi$

2146. $r = a^2\cos 2\varphi$

2147. $r = a\cos 3\varphi$

2148. $r = a(1 + \cos\varphi)$

2149. $r = 2 + \cos\varphi$

2150. $r = a\dfrac{\cos\varphi \cdot \sin\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$

2151. $r = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a\cos\varphi, \quad r = 2a\sin\varphi$

2152. $r = 2 - \cos\varphi, \quad r = \cos\varphi$

2153. $r = a\cos\varphi, \quad r = a\cos\varphi + a\sin\varphi$

2154. $r = 2a\cos\varphi, \quad r = a\dfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \quad \varphi = 0$

2155. $r = \dfrac{1}{\varphi}; \quad r = \dfrac{1}{\sin\varphi} \quad \left(0 < \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$

2156. $r = a(1 - \cos\varphi), \quad r = a$

2157. $r = \dfrac{p}{1 + \dfrac{1}{2}\cos\varphi}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

2158. $\varphi = r - \sin r, \quad \varphi = \pi$

2159. $\varphi = r \cdot \operatorname{arctg} r, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$

2160. $r = \dfrac{2at}{1 + t^2}, \quad \varphi = \dfrac{\pi t}{1 + t}$

3-§. Ёй узунлигини ҳисоблаш

1^0. **Тўғри бурчакли координаталар системасида берилган ёйнинг узунлиги**. Ёй ушбу

$$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

тенглама билан берилган эгри чизиқни ифодаласин, бунда $f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз ва узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга. У ҳолда эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx \qquad \textbf{(1)}$$

бўлади.

2^0. **Параметрик кўринишда берилган ёйнинг узунлиги**. Ёй ушбу

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

тенгламалар системаси билан (параметрик кўринишда) берилган эгри чизиқни ифодаласин, бунда $x(t),\ y(t)$ фукнциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $x'(t),\ y'(t)$ ҳосилага эга. У ҳолда эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \qquad \textbf{(2)}$$

бўлади.

3^0. **Қутб координаталар системасида берилган ёйнинг узунлиги**. Ёй қутб координаталар системасида ушбу $r = r(\varphi)$ $(\alpha \le t \le \beta)$ тенглама билан берилган эгри чизиқни ифодаласин, бунда $r(\varphi)$ функция $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $r'(\varphi)$ ҳосилага эга. У ҳолда эгри чизиқ ёйининг узунлиги

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi \qquad \textbf{(3)}$$

бўлади.

6 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x) = \frac{a}{2} \cdot \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (a > 0)$$

тенглама билан берилган эгри чизиқнинг (занжир чизиғининг) $[-a, a]$ ***оралиқдаги ёй узунлиги топилсин.***

◄Эгри чизиқнинг узунлигини (1) формуладан фойдаланиб топамиз. Равшанки,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right), \qquad 1 + f'^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2$$

бўлиб,

$$\sqrt{1 + f'^2(x)} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

бўлади. (1) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\mathbf{l}=\int_{-a}^{a}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)dx=\frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right]\Bigg|_{-a}^{a}=a\left(e-\frac{1}{e}\right).\blacktriangleright$$

7 – м и с о л . *Ушбу*

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \qquad (0\le t\le 2\pi) \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан берилган эгри чизиқ ёйининг (циклоиданинг) узунлиги топилсин.

◀Бу эгри чизиқнинг узунлигини топишда (2) формуладан фойдаланамиз.

Равшанки, $x'(t)=a(1-\cos t),\quad y'(t)=a\sin t$,

$$x'^2(t)+y'^2(t)=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=2a^2(1-\cos t)$$

бўлиб,

$$\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=a\sqrt{2(1-\cos t)}$$

бўлади. Изланаётган эгри чизиқнинг узунлиги

$$l=\int_0^{2a}a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt$$

бўлади. Бу тенгликнинг ўнг томонидаги интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_0^{2\pi}a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cdot\sin^2\frac{t}{2}}=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=-4a\cdot\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a.$$

Демак, $l=8a$.▶

8 – м и с о л . *Қутб координаталар системасида берилган ушбу*

$$r=a\cdot\cos^3\frac{\varphi}{3}$$

эгри чизиқ узунлиги топилсин.

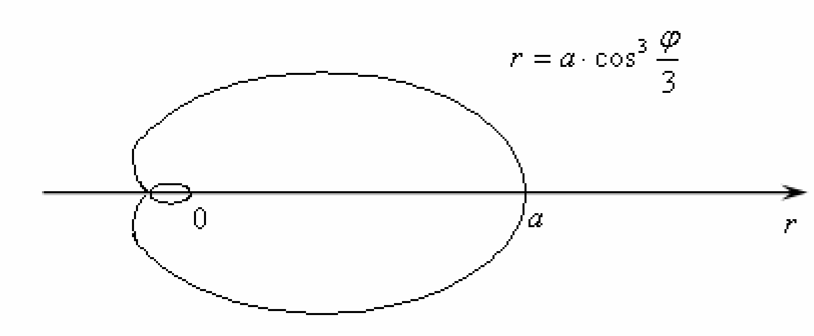
◀Бу эгри чизиқнинг узунлигини топишда (3) формуладан фойдаланамиз. Равшанки,

$$r'(\varphi)=-a\cos^2\frac{\varphi}{3}\cdot\sin\frac{\varphi}{3}$$

бўлиб,

$$\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}=\sqrt{a^2\cdot\cos^6\frac{\varphi}{3}+a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\cdot\sin^2\frac{\varphi}{3}}=a\cdot\cos^2\frac{\varphi}{3}$$

бўлади.



14-чизма.

14-чизмадан кўринадики ўзгарувчи φ учун $0 \le \varphi \le \frac{3\pi}{2}$ қутб радиусининг учи эгри чизиқнинг ярмини чизади. Шунинг учун (3) формулага кўра

$$\frac{1}{2} \cdot l = a \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 \frac{\varphi}{2} d\varphi = a \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \left(1 + \cos \frac{2\varphi}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi + \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a\pi}{2}$$

бўлиб, ундан $l = \frac{3}{2} a\pi$ бўлиши келиб чиқади.►

Эгри чизиқ ёйининг узунлиги топилсин.

2161. $y = \frac{4}{5} \cdot x^{\frac{5}{4}}, \qquad 0 \le x \le 9$

2162. $y = \frac{x}{6} \cdot \sqrt{x + 12} \qquad (-11 \le x \le -3)$

2163. $y = \frac{3}{2}\left(x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}\right) \qquad 1 \le x \le 8$

2164. $y = \ln x, \qquad 2\sqrt{2} \le x \le 2\sqrt{6}$

2165. $y = \frac{x^2}{2} - 1, \qquad -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$

2166. $y = \ln(1 - x^2), \qquad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

2167. $y = 1 - \ln\cos x, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

2168. $y = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{2 - x^2}, \qquad 0 \le x \le 1$

2169. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \qquad 0 \le x \le \frac{9}{16}$

2170. $y = a \cdot \ln \frac{a^2}{a^2 - x^2}, \qquad 0 \le x \le b, \quad b < a$

2171. $y = \frac{1}{4} \cdot y^2 - \frac{1}{2}\ln y, \qquad 1 \le y \le e$

2172. $y^2 = (x-1)^3, \qquad 2 \le x \le 5$

2173. $y = \arcsin e^{-x}, \qquad 0 \le x \le 1$

2174. $y = \ln\sin x, \qquad \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$

2175. $y = \sqrt{e^{2x}-1} - \operatorname{arg\,tg}\sqrt{e^{2x}-1}, \qquad 0 \le x \le 1$

2176. $x = a \cdot \ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y} - \sqrt{a^2-y^2}, \qquad 0 < b \le y \le a$

2177. $x = t^2, \;\; y = t - \frac{1}{2}\cdot t^3, \qquad 0 \le t \le \sqrt{3}$

2178. $y = t^2, \;\; y = \frac{t}{3}(t^2-3), \qquad 0 \le t \le \sqrt{3}$

2179. $y = a\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

2180. $x = e^t \sin t, \;\; y = e^t \cos t, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

2181. $x = t - \frac{1}{2}\operatorname{sh}2t, \;\; y = 2\operatorname{ch}t, \qquad 0 \le t \le t_0$

2182. $x = a(\cos t + t\sin t), \;\; y = a(\sin t - t\cos t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$

2183. $r = a\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$

2184. $r = \frac{p}{1+\cos\varphi}, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

2185. $r = a(1-\sin\varphi), \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$

2186. $r = a\varphi^2, \qquad 0 \le \varphi \le 4$

2187. $r = a \cdot \operatorname{th}\frac{\varphi}{2}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$

Изоҳ. ***Одатда, ушбу кўринишдаги***

$$F(k,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \cdot \sin^2 t}}$$

$$E(k,\varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2 t}dt$$

интеграллар эллиптик интеграллар дейилади.

Агар $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ***бўлса, бу интеграллар тўлиқ эллиптик интеграллар дейилиб, улар мос равишда*** $F(k)$, $E(k)$ ***каби белгиланади:***

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2 t}},\qquad E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2 t}dt$$

9 – мисол. ***Ушбу***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

эллипснинг узунлиги эллиптик интеграл орқали ифодаланиши кўрсатилсин.

◄Қаралаётган эллипс тенгламасини параметрик кўринишда

$$\begin{cases}x=a\sin t,\\ y=b\cos t\end{cases}$$

ёзиб оламиз. У ҳолда

$$x'^2(t)+y'^2(t)=a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t=a^2(1-\sin^2 t)+b^2\sin^2 t=$$

$$=a^2-(a^2-b^2)\sin^2 t=a^2\left[1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\sin^2 t\right]$$

бўлиб, $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}=a\cdot\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2 t}$ бўлади, бунда

$$k=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Эллипс ёйининг кичик ўқининг устки учидаги биринчи квадрантдаги исталган нуқтасигача бўлган ёй узунлиги

$$l=a\int_0^t\sqrt{1-k^2\sin^2 t}dt=a\cdot E(k,t)$$

бўлади. Эллипс чорагининг ёй узунлиги

$$a\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\cdot\sin^2 t}dt=a\cdot E(k)$$

бўлиб, бутун эллипс ёйининг узунлиги $L=4aE(k)$ бўлади.►

Қуйидаги эгри чизиқларнинг ёй узунлиги эллиптик интеграллар орқали ифодалансин:

2188. $r=a\cos\varphi+b$

2189. $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$

2190. $y = a\sin\omega x, \qquad 0 \le x \le x_0 \le \dfrac{\pi}{2\omega}$

2191. $x = at - b\sin t, \quad y = a - b\cos t \qquad a > 0, \quad b > 0, \quad 0 \le t_0 \le t \le \pi$

2192. $r = a\sin n\varphi \quad (n \in N, \quad n > 1)$

4-§. Айланма сиртнинг юзини ҳисоблаш

1^0. $f(x)$ функциянинг $[a,b]$ да узлуксиз $f'(x)$ ҳосилага эга бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ да $f(x) \ge 0$ бўлсин. Бу функция тасвирлаган эгри чизиқнинг $(a, f(x))$ ва $(b, f(b))$ нуқталари орасидаги ёйини OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx \qquad (1)$$

бўлади.

2^0. Эгри чизиқ юқори ярим текисликда $(y \ge 0)$ жойлашган бўлиб, у

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad \alpha \le t \le \beta \end{cases}$$

тенгламалар системаси билан (параметрик кўринишда) берилган, $x(t)$ ва $y(t)$ функциялар $[\alpha, \beta]$ да узлуксиз $x'(t)$, $y'(t)$ ҳосилаларга эга бўлсин. Бу эгри чизиқни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртнинг юзи

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\cdot\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \qquad (2)$$

бўлади.

10 – м и с о л . ***Ушбу***

$$f(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (0 \le x \le a, \quad a > 0)$$

занжир чизиғини OX ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган сиркнинг юзи топилсин.

◄Равшанки,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Юқоридаги (1) формуладан фойдаланиб изланаётган сиртнинг юзасини топамиз:

$$S = 2\pi\int_0^a \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\,dx = \frac{\pi a}{2}\int_0^a \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx =$$

$$=\frac{\pi a}{2}\int_0^a\left(e^{\frac{2x}{a}}+2+e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx=\frac{\pi a}{2}\left(\frac{a}{2}\cdot e^{\frac{2x}{a}}+2x-\frac{a}{2}e^{-\frac{2x}{a}}\right)\Bigg|_0^a=\frac{\pi a^2}{4}\left(e^2-e^{-2}+4\right)►$$

11 – м и с о л . *Ушбу*

$$x^2+(y-2)^2=1$$

айланани **OX** ***ўқи атрофида айланишдан ҳосил бўлган сиртнинг (торнинг) юзи топилсин.***

◄Берилган айлананинг тенгламасини қуйидагича

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=2+\sin t\end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi)$$

параметрик кўринишда ёзиб оламиз:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)\sqrt{(\cos t)'^2+(2+\sin t)'^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi}(2+\sin t)dt=2\pi(2t-\cos t)\Big|_0^{2\pi}=8\pi^2.►$$

Қуйидаги эгри чизиқларни айлантиришдан ҳосил бўлган айланма сиртларнинг юзлари топилсин.

2193. $y=x^3;\ \ x=-\frac{2}{3},\ \ x=\frac{2}{3};$ **OX** ўқи атрофида

2194. $9y^2=x(3-x)^2,\ \ 0\le x\le 3;$ **OX** ўқи атрофида

2195. $y^2=2x,\ \ 0\le x\le \frac{3}{2};$ **OX** ўқи атрофида

2196. $y=\mathrm{tg}x,\ \ 0\le x\le \frac{\pi}{4};$ **OX** ўқи атрофида

2197. $x=a\cos t,\ \ y=a\sin t;$ **OX** ўқи атрофида

2198. $x=e^t\sin t,\ \ y=e^t\cos t,\ \ 0\le t\le \frac{\pi}{2};$ **OX** ўқи атрофида

2199. $y=x\cdot\sqrt{\frac{x}{a}},\ \ 0\le x\le a;$ **OX** ўқи атрофида

2200. $3x^2+4y^2=12;$ **OX** ўқи атрофида

2201. $x=t(3-t^2),\ \ y=t^2,\ \ -\sqrt{3}\le x\le \sqrt{3};$ **OX** ўқи атрофида

2202. $y = e^{-x}, \quad 0 \le x \le a;$ OX ўқи атрофида

2203. $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi;$ OX ўқи атрофида

2204. $y^2 = 4 + x, \quad -4 \le x \le 2;$ OX ўқи атрофида

2205. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}};$ OX ўқи атрофида

2206. $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t);$ OX ўқи атрофида

2207. $r = a(1 + \cos\varphi);$ қутб ўқи атрофида

2208. $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ қутб ўқи атрофида.

5-§. Жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш

1^0. **Кўндаланг кесим бўйича жисмларнинг ҳажмини ҳисоблаш.** Бирор хажмга эга бўлган (V) жисм берилган бўлиб, x нуқтада OX ўқига перпендикуляр бўлган текислик жисмни кесиб, юзи

$$S = S(x) \quad (a \le x \le b)$$

га тенг бўлган шаклни ҳосил қилсин. У ҳолда жисмнинг ҳажми

$$V = \int_a^b S(x)dx \qquad (1)$$

бўлади.

2^0. **Айланма жисмнинг ҳажмини ҳисоблаш.** $f(x)$ функция $[a,b]$ да узлуксиз бўлиб, $\forall x \in [a,b]$ учун $f(x) \ge 0$ бўлсин. Бу функция графиги, $x = a, \quad x = b$ вертикал чизиқлар ҳамда OX ўқидаги $[a,b]$ кесма билан чегараланган шаклни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (2)$$

бўлади.

Агар $f(x)$ функция графиги

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

параметрик кўринишда берилган бўлиб, $x(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз $x'(t) \ge 0$ ҳосилага эга, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ ва $y'(t)$ функция $[\alpha,\beta]$ да узлуксиз, $\forall t \in [\alpha,\beta]$ да $y(t) \ge 0$ бўлса, у ҳолда берилган шаклнинг OX ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг хажми

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}y^2(t)\cdot x'(t)dt \qquad (3)$$

бўлади.

Фараз қилайлик, $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функциялари $[a,b]$ да узлуксиз бўлиб, $\forall x\in[a,b]$ да $f_2(x)\geq f_2(x)\geq 0$ бўлсин. $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функция графиклари, $x=a,\ \ x=b$ чизиқлар билан чегараланган шаклни OX ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг хажми

$$V=\pi\int_a^b\left[f_2^2(x)-f_1^2(x)\right]dx \qquad (4)$$

бўлади.

Тегишли шартларда юқоридаги шаклларни OY ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми мос равишда

$$V=\pi\int_c^d x^2(y)dy \qquad (5)$$

$$V=\pi\int_{\alpha}^{\beta}x^2(t)\cdot y'(t)dt \qquad (6)$$

$$V=\pi\int_c^d\left[x_2^2(y)-x_1^2(y)\right]dy \qquad (7)$$

бўлади.

12 – м и с о л . *Ушбу*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

эллипсоиднинг ҳажми топилсин.

◄ OX ўқига перпендикуляр ва шу ўқдаги $A(x)\ \ (-a\leq x\leq a)$ нуқтадан ўтувчи текислик эллипсоидни эллипс бўйича кесади. Унинг тенгламасини топамиз:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \qquad \text{(ҳозирча } x=const\text{)}.$$

$$\frac{y^2}{\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(\frac{c}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2}=1$$

Бу эллипснинг юзи

$$S(x)=\frac{\pi bc}{a^2}\cdot\left(a^2-x^2\right)$$

бўлади.

Изланаётган ҳажм (1) формулага кўра

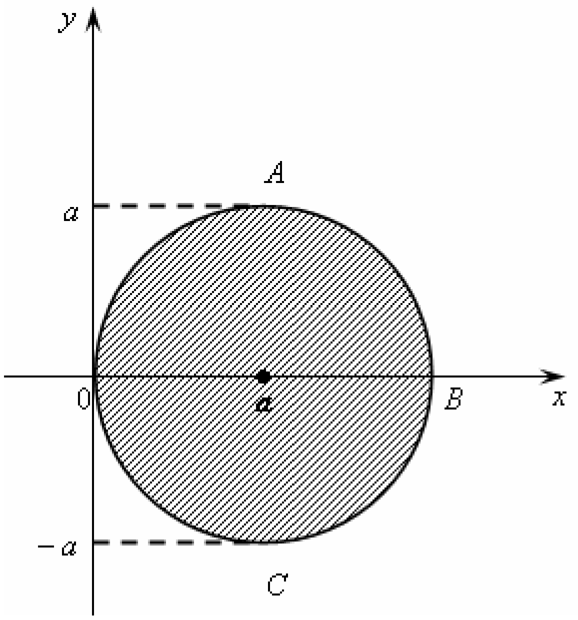
$$V=\int_{-a}^{a}S(x)dx=\frac{\pi bc}{a^2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc$$

бўлади.►

13 – м и с о л . *Ушбу*

$$(x-a)^2+y^2\le a^2$$

доирани* $\mathbf{OY}$ *ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.



15-чизма.

◄15-чизмадан кўринадики, ушбу

$$\begin{aligned} x_1(y)&=a-\sqrt{a^2-y^2},\\ x_2(y)&=a+\sqrt{a^2-y^2}, \end{aligned}\qquad -a\le y\le a$$

функцияларнинг графиклари мос равишда $\mathbf{AOC}$ ва $\mathbf{ABC}$ ёйлардан иборат бўлади.

Изланаётган жисмнинг ҳажмини (7) формуладан фойдаланиб топамиз:

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\left[x_2^2(y)-x_1^2(y)\right]dy=\pi\int_{-a}^{a}\left[\left(a+\sqrt{a^2-y^2}\right)^2-\left(a-\sqrt{a^2-y^2}\right)^2\right]dy=$$

$$=4\pi a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy=\left[y=a\sin t,\ dy=a\cos t\,dt,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right]=$$

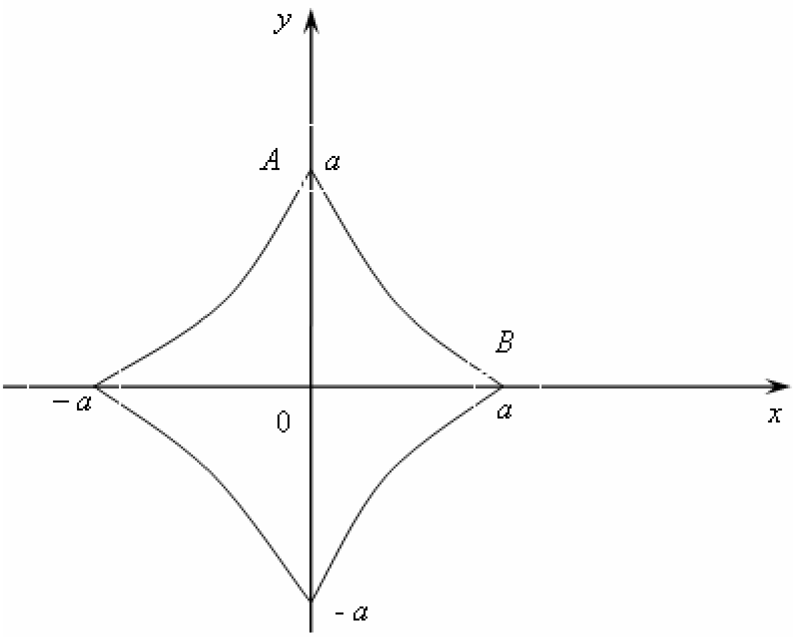
$$=4\pi a^3\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=2\pi^2a^3.$$ ►

14 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t, \end{cases}\qquad (0\le t\le 2\pi)$$

тенгламалар системаси ёрдамида аниқланган эгри чизиқ (астроида) чегаралаб турган шаклни* $\mathbf{OX}$ *ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

◄Маълумки, астроида $\mathbf{OX}$ ва $\mathbf{OY}$ ўқларига нисбатан симметрик жойлашган (16-чизма).



16-чизма.

Изланаётган жисмнинг ҳажми, $\mathbf{OAB}$ эгри чизиқли учбурчак билан чегараланган шаклни $\mathbf{OX}$ ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган $(\mathbf{V_0})$ жисмнинг ҳажмидан 2 марта кўп бўлади. $(\mathbf{V_0})$ жисмнинг ҳажми (3) формулага кўра топилади:

$$\mathbf{V_0 = \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y^2(t)\cdot x'(t)dt = -\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\sin^6 t\cdot a\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)dt =}$$

$$\mathbf{= -3\pi a^3\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 t\right)^3\cdot\cos^2 t d(\cos t) =}$$

$$\mathbf{= -3\pi a^3\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{3}{5}\cos^5 t + \frac{3}{7}\cos^7 t - \frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi a^3}{105}}.$$

Демак, жисмнинг ҳажми $\mathbf{V = \frac{32\pi a^3}{105}}$ бўлади.►

2209. Асосининг радиуси $\mathbf{r}$, баландлиги $\mathbf{h}$ бўлган доиравий конуснинг ҳажми топилсин.

2210.Асосининг юзи $\mathbf{S_0}$, баландлиги $\mathbf{h}$ бўлган пирамиданинг ҳажми топилсин.

2211. Ушбу $x^2+y^2=a^2,\ \ y^2+z^2=a^2$ цилиндр билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин.

Қуйидаги сиртлар билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин:

2212. $x^2+y^2+z^2=R,\ \ x^2=y^2+z^2\ \ (x\ge 0)$

2213. $\dfrac{y^2}{2p}+\dfrac{z^2}{2q}=x,\ \ x=a$

2214. $x^2+y^2=R^2,\ \ y^2+z^2=R^2$

2215. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ \ z=0,\ \ z=h$

2216. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ \ z=\dfrac{c}{a}\cdot x,\ \ z=0$

2217. $x+y+z^2=1,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ z=0$

2218. $z=4-y^2,\ \ x=0,\ \ y=0,\ \ x=a$

2219. $x^2+y^2+z^2=1,\ \ x^2+y^2=x$

2220. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1,\ \ x^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=1$

Кўрсатилган чизиқлар билан чегараланган шаклнинг айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин:

2221. $xy=4,\ \ x=1,\ \ x=4,\ \ y=0;$ **OX** ўқи атрофида

2222. $y^2=2px,\ \ y=0,\ \ y=a;$ **OX** ўқи атрофида

2223. $y=\sin x,\ \ 0\le x\le\pi,\ \ y=0;$ **OX** ўқи атрофида

2224. $y=x^2+1,\ \ y=3x-1;$ **OX** ўқи атрофида

2225. $2y=x^2,\ \ 2x+2y-3=0;$ **OX** ўқи атрофида

2226. $y=x,\ \ y=\dfrac{1}{x},\ \ y=0,\ \ x=2;$ **OX** ўқи атрофида

2227. $y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = 0,\ \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2};$ **OX** ўқи атрофида

2228. $y = xe^{x},\ \ y = 0,\ \ x = 1;$ **OX** ўқи атрофида

2229. $y = 2x - x^{2},\ \ y = 0;$ **OX** ўқи атрофида

2230. $y = e^{-x},\ \ y = 0,\ \ 0 \le x < +\infty;$ **OY** ўқи атрофида

2231. $x^{2} + (y - b)^{2} = a^{2},\ \ (b \ge a);$ **OX** ўқи атрофида

2232. $y^{2} = (x + 4)^{3},\ \ x = 0;$ **OY** ўқи атрофида

2233. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a},\ \ x = 0,\ \ y = 0;$ **OY** ўқи атрофида

2234. $y = e^{-x} \cdot \sqrt{\sin x},\ \ 0 \le x < +\infty;$ **OX** ўқи атрофида

2235. $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t),\ \ 0 \le t \le 2\pi,\ \ y = 0;$ **OX** ўқи атрофида

2236. $y = x,\ \ y = x + \sin^{2} x,\ \ (0 \le x \le \pi);$ **OY** ўқи атрофида

Қутб координаталар системасида ушбу $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi,\ \ 0 \le r \le r(\varphi)$ ***текис шаклни (бунда*** φ ***ва*** r ***лар қутб координаталари) қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми***

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta} r^{3}(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi$$

бўлади.

Қутб координаталар системасида берилган текис шаклнинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин:

2237. $r = a\sin\varphi$

2238. $r = a(1 + \cos\varphi),\ \ (0 \le \varphi \le 2\pi)$

2239. $r = a\cos^{2}\varphi$

2240. $0 \le r \le 2a\sin\varphi$

2241. $0 \le r \le a\cos^{3}\varphi$

2242. $0 \le r \le a\sin^{2}\varphi$

2243. $0 \le r \le 2a\frac{\sin^{2}\varphi}{\cos\varphi},\ \ \left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}\right)$

2244.Ушбу

$$\varphi = \pi r^3, \quad \varphi = \pi$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг қутб ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

6-§. Механика ва физиканинг айрим масалаларини интеграл ёрдамида ечиш

1^0. Статик моментлар ва инерция моментларини ҳисоблаш формулалари. Ихтиёрий силлиқ $y = f(x)$ эгри чизиғи бўйича чизиқли зичлиги $\mu = 1$ бўлган масса тарқатилган бўлсин. У ҳолда бу массали эгри чизиқ ёйининг $(a \le x \le b)$ координаталар ўқларига нисбатан **статик моментлари**

$$M_x = \int_a^b y \cdot (x)\sqrt{1 + y'^2(x)}dx,$$

$$M_y = \int_a^b x \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

бўлади.

Массали эгри чизиқ ёйининг $(a \le x \le b)$ координаталар ўқларига нисбатан **инерция моментлари**

$$I_x = \int_a^b y^2(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2}dx,$$

$$I_y = \int_a^b x^2 \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

бўлади.

Ушбу $y = f(x) > 0, \quad x = a, \quad x = b, \quad y = 0$ чизиқлар билан чегараланган эгри чизиқли трапеция (бунда $f(x)$ $[a, b]$ да узлуксиз) бўйича зичлиги 1 га тенг бўлган масса тарқатилган бўлсин. Унинг **статик ва инерция моменлари**

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx, \qquad M_y = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b f^3(x)dx, \qquad I_y = \int_a^b x^2 \cdot f(x)dx$$

бўлади.

2^0. Оғирлик марказининг координаталари. Юқорида келтирилган массали эгри чизиқли трапециянинг **оғирлик марказининг координаталари**

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b xydx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 \cdot dx$$

бўлади, бунда $\mathbf{S}$ –эгри чизиқли трапециянинг юзи.

3^0. Ўзгарувчи кучнинг бажарган иши. Ўзгарувчи $\mathbf{f(x)}$ кучнинг $\mathbf{OX}$ ўқи йўналиши бўйича $\mathbf{[a,b]}$ оралиқда бажарган **иши**

$$\mathbf{A=\int_a^b f(x)dx}$$

бўлади.

Аниқ интегралдан фойдаланиб жисмларнинг кинетик энергиялари, босим кучи ва шунга ўхшаш масалалар ҳал этилади.

Келтирилган масалаларда масса эгри чизиқ текисликдаги шакл бўйича текис тақсимланган ва зичлик бирга тенг деб қаралади.

14 – м и с о л . $\mathbf{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

эллипс юқори қисмининг $\mathbf{OX}$ ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

◀Эллипснинг юқори қисми

$$\mathbf{y=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}}$$

бўлади. Бу эгри чизиқнинг $\mathbf{OX}$ ўқига нисбатан статик моментини

$$\mathbf{M_x=\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2}dx}$$

формулага кўра топамиз.

Равшанки,

$$\mathbf{y(x)\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}=\sqrt{y^2(x)+(y(x)\cdot y'(x))^2}}$$

бўлади. Агар

$$\mathbf{y^2(x)=b^2-\frac{b^2}{a^2}\cdot x^2,\qquad y(x)\cdot y'(x)=-\frac{b^2}{a^2}\cdot x}$$

бўлишини эътиборга олсак, унда

$$\mathbf{y(x)\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2}}$$

бўлиши келиб чиқади. Демак,

$$\mathbf{M_x=\frac{b}{a}\cdot\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot x^2}=b\left(b+\frac{a}{\sqrt{\dfrac{a^2-b^2}{a^2}}}\cdot\arcsin\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)}$$

бўлади.▶

15 – м и с о л . *Ушбу*

$$\mathbf{ay=2ax-x^2(a>0),\quad y=0}$$

чизиқлар билан чегараланган шакл – параболик сегментнинг $\mathbf{OX}$ ва $\mathbf{OY}$ ўқларига нисбатан инерция моментлари топилсин.

◀Равшанки,

$$y(x) = \frac{1}{a} \cdot \left(2ax - x^2\right) \qquad (a > 0).$$

1^0 да келтирилган формуладан фойдаланиб топамиз:

$$I_x = \frac{1}{3}\int_0^{2a} y^3(x)dx = \frac{1}{3a^3}\int_0^{2a}\left(2ax - x^2\right)^3 dx = \frac{32a^4}{105}.$$

$$I_y = \int_0^{2a} x^2 \cdot y(x)dx = \int_0^{2a} x^2\left(2x - \frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{8}{5}\cdot a^4. ►$$

16 – м и с о л . *Ушбу*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \qquad (x \ge 0, \quad y \ge 0)$$

шакл – эллипснинг биринчи чоракдаги қисмининг оғирлик маркази топилсин.

◄Бу эгри чизиқли трапециянинг оғирлик марказининг координатаси (x_c, y_c)

$$x_c = \frac{1}{S}\int_a^b x \cdot y(x)dx, \qquad y_c = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2(x)dx$$

фомулаларга кўра топилади, бунда S – шаклнинг юзи.

Маълумки, эллипснинг юзи πab га тенг. Демак, $S = \frac{1}{4}\pi ab$. Энди

$$\int_0^a x \cdot y(x)dx \qquad \text{ва} \qquad \int_0^a y^2(x)dx$$

интегралларни ҳисоблаймиз:

$$\int_0^a x \cdot y(x)dx = \frac{b}{a}\int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2 b}{3},$$

$$\int_0^a y^2(x)dx = \frac{b^2}{a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx = \frac{2ab^2}{3}.$$

Демак,

$$x_c = \frac{\frac{a^2 b}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4a}{3\pi}, \qquad y_c = \frac{\frac{2ab^2}{3}}{\frac{\pi ab}{4}} = \frac{4b}{3\pi}.$$

17 – м и с о л . ***Оғирлиги $P = 1{,}5$ т бўлган ракетанинг ер сатхидан $H = 2000$ км баландликка олиб чиқиш учун бажприладиган иш топилсин.***

◄Агар жисмнинг оғирлиги P, ер шарининг радиуси R бўлиб, x эса ер марказидан кўтарилаётган ракетагача бўлган масофа бўлса, тортилиш кучи

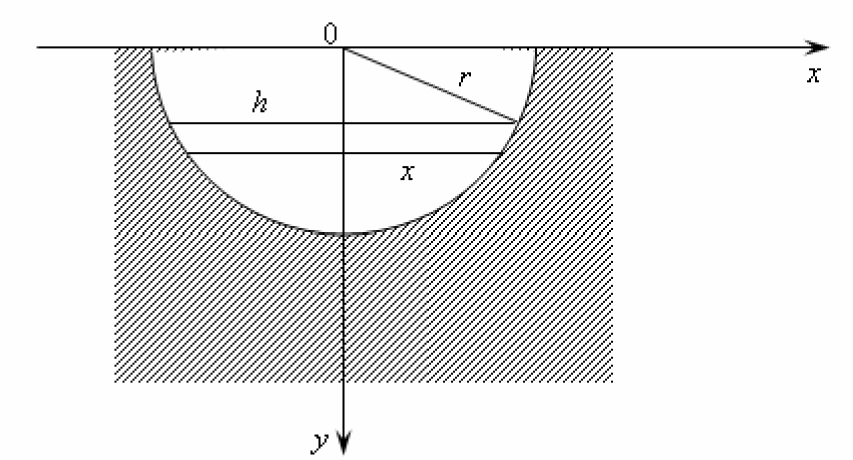
$$F(x) = \frac{P \cdot R^2}{x^2}$$

бўлади. Юқорида келтирилган формуладан фойдаланиб изланаётган ишни топамиз:

$$A=\int_{0}^{R+H}F(x)dx=P\cdot R^2\cdot\int_{R}^{R+H}\frac{dx}{x^2}=P\cdot R^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{R}^{R+H}=\frac{R\cdot P\cdot H}{R+H}.$$

Шартга кўра $P=1{,}5$ т, $H=2000$ км, $R=6400$ км бўлиб, бажарган иш $A\approx 2285714000$ кгм ≈ 22422854340 дж бўлади.►

18 – м и с о л . ***Радиуси r бўлган ярим доира диаметри сув сатхида бўладиган қилиб сувга ботирилган. Ярим доирага таъсир этувчи босим кучи топилсин. (17-чизма).***



17-чизма.

◄Ярим доирани сув сатҳига параллел қилиб олинган бўлакчасининг юзи тахминан

$$\Delta S\approx 2x\cdot\Delta h=2\sqrt{r^2-h^2}\cdot\Delta h$$

бўлади. Бу бўлакчага таъсир этувчи босим кучи

$$\Delta F\approx 2\gamma\cdot h\cdot\sqrt{r^2-h^2}\cdot\Delta h$$

бўлади, бунда γ - сувнинг солиштирма оғирлиги бўлиб, у 1 га тенг. Демак, ярим доирага таъсир этувчи босим кучи

$$F=2\int_{0}^{r}h\cdot\sqrt{r^2-h^2}dh=-\frac{2}{3}\left(r^2-h^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{0}^{r}=\frac{2}{3}\cdot r^3$$

бўлади.►

2245. Тенгламаси $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ бўлган тўғри чизиқни координаталар ўқлари орасидаги қисмининг OX ва OY ўқларига нисбатан статик моментлари топилсин.

2246. $y=\cos x$ эгри чизиқ ёйининг $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$ нуқталар орасидаги қисмининг OX ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2247.Ушбу $\mathbf{x+y=1,\ \ x=0,\ \ y=0}$ чизиқлар билан чегараланган учбурчакнинг **OX** ва **OY** ўқларига нисбатан статик моментлари топилсин.

2248.Ушбу $\mathbf{x=a(t-sint),\ \ y=a(1-cost),\ \ 0\le t\le 2\pi}$ чизиқлар билан чегараланган пластинканинг (циклоиданинг бир аркининг) ОХ ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2249.Томони **a** га тенг бўлган квадратнинг унинг диоганалига нисбатан инерция моменти топилсин.

2250.Асоси **b**, баландлиги **h** бўлган бир жинсли учбурчакнинг асосига нисбатан инерция моменти топилсин.

2251.Ярим ўқлари **a** ва **b** бўлган эллипс шаклдаги бир жинсли пластинканинг унинг асосий ўқларига нисбатан инерция моментлари топилсин.

2252.Ушбу

$$\mathbf{y^2=2px\ \ \left(0\le x\le \frac{p}{2}\right)}$$

парабола ёйининг $\mathbf{x=\frac{p}{2}}$ тўғри чизиққа нисбатан статик моменти топилсин.

2253.Радиуси **a** га тенг бўлган ярим айлана ёйининг шу ёй учини бирлаштирувчи диаметрга нисбатан статик ва инерция моментлари топилсин.

2254.Ушбу

$$\mathbf{y=\frac{2}{1+x^2},\ \ y=x^2}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг **OX** ўқига нисбатан статик моменти топилсин.

2255.Ушбу

$$\mathbf{x^2+4y^2-16=0,\ \ y=0}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2256.Ушбу

$$\mathbf{y=sinx\ \ (0\le x\le\pi)\ \ y=0}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2257.Ушбу

$$\mathbf{ax = y^2, \quad ay = x^2 \quad (x > 0)}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2258.Ушбу

$$\mathbf{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}, \quad x = 0, \quad y = 0}$$

чизиқлар билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2259.Ушбу

$$\mathbf{\begin{cases} x = a(t - sint) \\ y = a(1 - cost) \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2\pi)}$$

чизиқ (циклоида) ҳамда абцисса ўқи билан чегараланган шаклнинг оғирлик маркази топилсин.

2260.Диаметри 20м бўлган ярим сферик идишдаги сувни насос билан тортиб олиш учун керак бўладиган иш миқдори топилсин.

2261.Агар 5кг куч пружинани 25см га чўзса, пружинани 60см га чўзиш учун қандай иш бажариш керак? **(3,6кгм)**.

2262.Вертикал ҳолатда жойлашган баландлиги $\mathbf{H = 6}$**м**, радиуси $\mathbf{R = 2}$**м** бўлган цлиндриксимон идишдаги ёғни тортиб олиш учун зарур бўлган иш топилсин. ($\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0{,}9}$ ёғнинг солиштирма оғирлиги).

2263.Диаметри 4м., маркази эса сув сатҳидан 3м чуқурликда бўлган шарга сув босими топилсин.

IX БОБ.

Хосмас интеграллар

1-§. Чегаралари чексиз хосмас интеграллар

1^0. Чегараси чексиз хосмас интеграл тушунчаси. $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ да берилган, ихтиёрий $[a,t]$ да $(a \le t < +\infty)$ интегралланувчи бўлсин. Агар ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (1)$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит $f(x)$ функциянинг $[a,+\infty)$ **оралиқ бўйича хосмас интеграли** дейилади ва $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ каби белгиланади:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx \qquad (2)$$

Агар (1) лимит мавжуд ва чекли бўлса, (2) хосмас интеграл **яқинлашувчи**, чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (2) хосмас интеграл **узоқлашувчи** дейилади.

Худди шунга ўхшаш $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграллар ва уларнинг яқинлашувчилиги, узоқлашувчилиги таърифланади.

2^0. Манфий бўлмаган функция хосмас интегралининг яқинлашувчилиги. Солиштириш аломатлари.

Айтайлик, $f(x)$ функция $[a,+\infty)$ да берилган бўлиб, $\forall x \in [a,+\infty)$ да $f(x) \ge 0$ бўлсин. Ушбу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлиши учун

$$\int_a^t f(x)dx \le C \qquad (C = const)$$

шартнинг бажарилиши зарур ва етарли.

Агар $\forall x \in [a,+\infty)$ да $0 \le f(x) \le g(x)$ бўлиб, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи бўлади.

Агар

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} f(x) = C \qquad (0 < C < +\infty,\ \alpha > 0)$$

бўлиб, $\alpha > 1$ бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи, $\alpha \le 1$ бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ узоқлашувчи бўлади.

3^0. **Коши теоремаси.** *(2) хосмас интегралнинг яқинлашувчи бўлиши учун* $\forall \varepsilon > 0$ *сон олинганда ҳам шундай* $t_0 \in R\,(t_0 > a)$ *топилиб, ихтиёрий* $t' > t_0$, $t'' > t_0$ *бўлганда*

$$\left| \int_{t'}^{t''} f(x)dx \right| < \varepsilon$$

тенгсизлакнинг бажарилиши зарур ва етарли.

4^0. **Хосмас интегралнинг абсолют ва шартли яқинлашувчилиги**. Агар

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл **абсолют яқинлашувчи** дейилади.

Агар $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ интеграл узоқлашувчи бўлиб, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ яқинлашувчи бўлса, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ интеграл **шартли яқинлашувчи** дейилади.

5^0. **Дирихле ва Абель аломатлари.** *Айтайлик,* $f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* $[a,+\infty)$ *да аниқланган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) $f(x)$ *функция* $[a,+\infty)$ *да узлуксиз ва шу оралиқда чегараланган бошланғич функцияга эга,*

2) $g(x)$ *функция* $[a,+\infty)$ *да узлуксиз дифференциалланувчи ва монотон бўлиб,*

$$\lim_{t\to+\infty} g(x) = 0.$$

У ҳолда

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади. (Д и р и х л е а л о м а т и).

$f(x)$ *ва* $g(x)$ *функциялар* $[a,+\infty)$ *да аниқланган бўлиб, улар қуйидаги шартларни бажарсин:*

1) $f(x)$ *функция* $[a,+\infty)$ *да узлуксиз ва* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *интеграл яқинлашувчи,*

2) $g(x)$ *функция* $[a,+\infty)$ *да чегараланган, узлуксиз дифференциалланувчи ва монотон.*

У ҳолда

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

интеграл яқинлашувчи бўлади. (А б е л ь   а л о м а т и).

6^0. Интегралнинг бош қиймати. Айтайлик, $f(x)$ функция $(-\infty,+\infty)$ да аниқланган бўлсин. Ушбу

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$$

лимит $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интегралнинг **бош қиймати** дейилади. Уни $V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ каби белгиланади:

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)dx$$

1 – м и с о л . *Ушбу*

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$$

хосмас интеграл ҳисоблансин.

◀Таърифга кўра

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} xe^{-x^2}dx$$

бўлади. Равшанки,

$$\int_{0}^{t} xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_{0}^{t} e^{-x^2}dx^2 = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^t = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

Демак,

$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-t^2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$ ▶

2 – м и с о л . *Ушбу*

$$\int_{0}^{+\infty} x\sin x\, dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Таърифдан фойдаланиб топамиз:

$$\int_{0}^{+\infty} x\sin x dx = \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} x\sin x dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-x\cos x\Big|_0^t + \int_{0}^{t}\cos x\, dx\right] = \lim_{t\to+\infty}(-t\cos t + \sin t)$$

.

Бу лимит мавжуд бўлмаганлиги сабабли, берилган хосмас интеграл узоқланувчи бўлади.▶

3 – м и с о л . *Ушбу*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{1+x^6}}dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄Равшанки, $x \ge 1$ бўлганда

$$0 \le \frac{\cos^4 3x}{\sqrt[5]{1+x^6}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{1+x^6}} \le \frac{1}{\sqrt[5]{x^6}} = \frac{1}{x^{\frac{6}{5}}}$$

бўлади. Маълумки, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}}$ яқинлашувчи. Демак, берилган интеграл яқинлашувчи бўлади.►

4 – м и с о л . ***Ушбу***

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \qquad (\alpha > 0)$$

интеграл абсолют яқинлашувчиликка текширилсин.

◄Айтайлик, $\alpha > 1$ бўлсин. Бу ҳолда $x \ge 1$ лар учун

$$\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \le \frac{1}{x^\alpha}$$

бўлиб,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

интегралнинг яқинлашувчилигидан берилган интегралнинг абсолют яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

Айтайлик, $0 < \alpha \le 1$ бўлсин. Бу ҳолда берилган интегралга бўлаклаб интеграллаш формуласини татбиқ этиб топамиз:

$$I = -\frac{\cos x}{x^\alpha}\Big|_1^{+\infty} - \alpha \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx.$$

Агар

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{ва} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}} dx$$

интеграл абсолют яқинлашувчи бўлишини эътиборга олсак, берилган интегралнинг яқинлашувчилигини топамиз. Аммо бу ҳолда

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| dx \qquad (0 < \alpha \le 1)$$

интеграл узоқлашувчи бўлади. Демак, берилган интеграл $0 < \alpha \le 1$ да шартли яқинлашувчи бўлади.►

5 – м и с о л . ***Қуйидаги***

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

интеграл топилсин.

◄Таърифга кўра

$$V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

бўлади. Интегрални ҳисоблаб, сўнг унинг лимитини топамиз:

$$\int_{-t}^{t}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\int_{-t}^{t}\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int_{-t}^{t}\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}(-t)+\frac{1}{2}\ln\frac{1+t^2}{1+t^2},$$

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}(-t)\right)=\pi$$

Демак, $\mathbf{V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\pi$.►

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчи эканлиги кўрсатилсин ва қийматлари топилсин.

2264. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x+x^2}$

2265. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$

2266. $\int_{1}^{+\infty}e^{-3x}dx$

2267. $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$

2268. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$

2269. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$

2270. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$

2271. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-5x+7}$

2272. $\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx$

2273. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$

Қуйидаги хосмас интегралларнинг узоқлашувчи эканлиги исботлансин

2274. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$

2275. $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x}$

2276. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$

2277. $\int_{0}^{+\infty}\sin x\,dx$

2278. $\int_{-\infty}^{0}\frac{x+1}{x^2+1}dx$

2279. $\int_{3}^{+\infty}\frac{2x+5}{x^2+3x-10}$

2280. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x\right)}{x}dx$

2281. $\int_{0}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2-1}$

2282. $\int_{1}^{+\infty}x\cos x\,dx$

2283. $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

Қуйидаги хосмас интеграллар ҳисоблансин.

2284. $\int_{2}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2-1}+\frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$

2285. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$

2286. $\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}dx$

2287. $\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}dx$

2288. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2-1\right)^2}$

2289. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{e^x+\sqrt{e^x}}$

2290. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+12}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2291. $\int_{0}^{+\infty}x^{10}e^{-x}dx$

2292. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+1}dx$

2293. $\int_{1}^{+\infty}\frac{x\ln x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

2294. $\int_{0}^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}dx$

2295. $\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}\cos 3x\,dx$

2296. $\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}\sin 3x\,dx$

2297. $\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx \quad (a>0)$

2298. $\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,dx \quad (a>0)$

2299. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}}$

2300. $\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}$

2301. $\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2+12}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2302. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)^3}$

Тартибини пасайтириш йўли билан қуйидаги хосмас интеграллар ҳисоблансин (n - натурал сон).

2303. $I_n = \int\limits_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$

2304. $I_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}$ $\quad (ac - b^2 > 0)$

2305. $I_n = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+n)}$

2306. $I_n = \int\limits_0^{1} \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$

Қуйидаги интегралларнинг яқинлашувчилиги исботлансин.

2307. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} dx$

2308. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{1 + 2\sqrt{x} + x^2} dx$

2309. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

2310. $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx$

2311. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \ln x}$

2312. $\int\limits_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$

2313. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$

2314. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$

2315. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{x\sqrt{x}} dx$

2316. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1 + x + x\sqrt{x})}{\sqrt{x^3}} dx$

Қуйидаги интегралларнинг абсолют яқинлашувчилиги исботлансин.

2317. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

2318. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(1 + 2x)}{(\sqrt{x} - \ln x)^3} dx$

2319. $\int\limits_1^{+\infty} \ln^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin x \, dx$

2320. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1+x}{x^3} \cdot \sin x^3 dx$

2321. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin(x + x^2)}{x\sqrt{x}} dx$

2322. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos(x - x^2)}{x^2} dx$

Қуйидаги интегралларнинг шартли яқинлашувчилиги исботлансин.

2323. $\int\limits_{0}^{+\infty} \sin x^2 dx$

2324. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{x^3+1} dx$

2325. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{\sqrt{x}} dx$

2326. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}+\ln x} dx$

2327. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+100} dx$

2328. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\ln x} dx$

2329. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$

2330. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right) dx$

2331. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2\ln x} dx$

2332. $\int\limits_{1}^{+\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{x^{2/3}}\right) dx$

Қуйидаги интеграллар абсолют ва шартли яқинлашишга текширилсин.

2333. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx \qquad (\alpha > 0)$

2334. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^{\alpha}} \sin x dx$

2335. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{[2x-\cos(\ln x)]^{\alpha}}$

2336. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x^{\alpha} \sin x}{x^3+1} dx$

2337. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\cos\sqrt{x}}{x^{\alpha}\ln x} dx$

2338. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\sin x}{\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\right)^{\alpha}} dx$

Қуйидаги интегралларнинг Коши маъносидаги бош қийматлари топилсин.

2339. $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$

2340. $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx$

2341. $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{13+x}{17+x^2}dx$ **2342.** $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{arctg}x\,dx$

2343. $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$

2344. Агар ушбу $\int\limits_{1}^{+\infty}f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлса, унда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

тенглик ўринли бўладими?

2345. Айтайлик $f(x)\in C[0,+\infty)$ ва $f(x)\geq 0$ бўлиб, $\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашсин. Унда

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

тенглик ўринли бўладими?

2346. $f(x)\in C[0,+\infty)$, $f(x)>0$ ва $\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи бўлган шундай f (x) функция топилсинки,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq 0$$

муносабат бажарилсин.

2347.Ихтиёрий $[a,+\infty)$, $a>0$, оралиқда узлуксиз ва чегараланмаган шундай $f(x)$ функция топилсинки,

$$\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашсин.

2348.Ихтиёрий $[a,+\infty)$, $a>0$, оралиқда узлуксиз манфий бўлмаган ва чегараланмаган шундай $f(x)$ функция топилсинки,

$$\int\limits_{0}^{+\infty}f(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашсин.

2349.Агар ушбу $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ хосмас интеграл яқинлашувчи ва $\varphi(x)$ функция $[a,+\infty)$оралиқда чегараланган бўлса, унда

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

хосмас интеграл яқинлашувчи бўладими?

2-§. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли

1^0**. Махсус нуқта.** Айтайлик, $f(x)$ функция $X \subset R$ тўпламда берилган бўлсин. Агар $f(x)$ функция

$$X \cap \left(\{x \in R : x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \quad x \neq x_0\}\right) \neq \varnothing \quad (\delta > 0)$$

тўпламда чегараланмаган бўлса, x_0 нуқта $f(x)$ функциянинг **махсус нуқтаси** дейилади.

2^0**. Чегараланмаган функциянинг хосмас интеграли тушунчаси.** $f(x)$ функция $[a,b)$да берилган бўлиб, b нуқта шу функциянинг **махсус нуқтаси** бўлсин. Бу функция ихтиёрий $[a,t]$ да $(a < t < b)$ интеграллланувчи бўлсин. Агар ушбу

$$\lim_{t \to b-0} \int\limits_{a}^{t} f(x)dx \qquad (1)$$

лимит мавжуд бўлса, бу лимит чегараланмаган $f(x)$ функциянинг $[a,b)$ **бўйича хосмас интеграли** дейилади. Уни $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ каби белгиланади:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to b-0} \int\limits_{a}^{t} f(x)dx \qquad (2)$$

Агар (1) лимит мавжуд ва чекли бўлса, (2) хосмас интеграл **яқинлашувчи**, чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (2) хосмас интеграл **узоқлашувчи** дейилади.

1 – м и с о л . ***Қуйидаги***

$$I = \int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Интеграл остидаги функция учун $x = 1$ нуқта махсус нуқта бўлади. Бу интегрални таърифга кўра топамиз:

$$\int\limits_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t_1 \to +0} \int\limits_{-1}^{1-t_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{t_2 \to +0} \int\limits_{1+t_2}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{t_1 \to +0} \left(3\sqrt[3]{(x-1)}\right)\Big|_{-1}^{1-t_1} +$$

$$+\lim_{t_2\to+0}\left(3\sqrt[3]{(x-1)}\right)\Big|_{1+t_2}^{2}=3\lim_{t_1\to+0}\left(\sqrt[3]{-t_1}-\sqrt[3]{-2}\right)+3\lim_{t_2\to+0}\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{t_2}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).►$$

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx$$

интеграл яқинлашувчиликка текширилсин.

◄Интеграл остидаги функция учун $x=0$ нуқта махсус нуқта бўлади. Бу интеграл билан бирга қуйидаги

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{x^\alpha}$$

интегрални қараймиз. Унинг $0<\alpha<1$ бўлганда яқинлашувчи бўлиши маълум.

Равшанки, $0<\alpha<1$ бўлганда

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x^\alpha}}=((\textit{Лопиталь коидасидан фойдаланамиз}))=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ctgx}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}}=-\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\alpha}\frac{x}{\sin x}x^\alpha\cos x\right)=0$$

Бўлади, чунки $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)=1$ ва $\lim\limits_{x\to0}\left(x^\alpha\cos x\right)=0$. Демак, берилган интеграл яқинлашувчи.►

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}$$

интеграл ҳисоблансин.

◄Интеграл остидаги функция учун $x=1$ нуқта махсус нуқта бўлади. Бу $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ функциянинг бошланғич функцияси $F(x)=\sqrt{x^2-1}$ $[1,2]$ оралиқда узлуксиз. Ньютон-Лейбниц формуласини қўллаб топамиз:

$$\int_1^2\frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}\Big|_1^2=\sqrt{3}.►$$

Қуйидаги хосмас интегралларнинг яқинлашувчи эканлиги кўрсатилсин ва қийматлари топилсин.

2350. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$

2351. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2352. $\int_{0}^{1} \ln x dx$

2353. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

2354. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

2355. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$

2356. $\int_{0}^{3} \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$

2357. $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2358. $\int_{2}^{3} \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$

2359. $\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$

Қуйидаги хосмас интегралларнинг узоқлашувчи эканлиги исботлансин.

2360. $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{x}$

2361. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$

2362. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$

2363. $\int_{-2}^{2} \frac{x dx}{x^2-1}$

2364. $\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$

2365. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2-5x^2}$

2366. $\int_{0}^{e} \frac{dx}{e^x-1}$

2367. $\int_{-1}^{1} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^3}$

Қуйидаги хосмас интеграллар ҳисоблансин.

2368. $\int_{0}^{1} \frac{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

2369. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$

2370. $\int_{-2}^{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

2371. $\int_{2}^{3} \frac{2-x}{\sqrt{3-x}} dx$

2372. $\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

2373. $\int_{-1}^1 \frac{(x-1)e^x+1}{x^2}dx$

2374. $\int_{-0,5}^{-0,25} \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$

2375. $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

2376. $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$

2377. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(16-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

2378. $\int_0^1 \frac{x^3 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

2379. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mathrm{ctg}x}dx$

2380. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathrm{tg}x}dx$

2381. $\int_a^b x\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx, \qquad b>a$

2382. $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}, \qquad b>a$

2383. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$

2384. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx$

2385. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln\cos x)\cos 2nx dx, \quad n\in N$

2386. $I_n = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx, \quad \alpha>-1, \quad n\in N$

2387. $I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}, \quad n\in N$

Қуйидаги интегралларнинг яқинлашувчилиги исботлансин.

2388. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

2389. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{1-x^{10}}}$

2390. $\int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{\cos x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$

2391. $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x^4}}dx$

2392. $\int_0^2 \sqrt{\frac{16+x^4}{16-x^4}}dx$

2393. $\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x}$

2394. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

2395. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{\sin x}} dx$

2396. $\int_0^{\pi} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt[3]{x}} dx$

2397. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$

Қуйидаги интегралларнинг узоқлашувчилиги исботлансин.

2398. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$

2399. $\int_1^2 \frac{(x-2)dx}{x^3 - 3x^2 + 4}$

2400. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^5}}$

2401. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$

2402. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^2} dx$

2403. $\int_0^{\pi} \frac{\ln(\sin x)}{x\sqrt{\sin x}} dx$

Қуйидаги хосмас интеграллар яқинлашишга текширилсин.

2404. $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}} dx$

2405. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$

2406. $\int_0^1 x^2 \ln^2 \frac{1}{x} dx$

2407. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x-1)}{x-\sqrt{x}} dx$

2408. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\ln(1+x)}$

2409. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x\left(e^x - e^{-x}\right)}}$

2410. $\int_0^1 \frac{\arcsin\left(x^2 + x^3\right)}{x \cdot \ln^2(1+x)} dx$

2411. $\int_0^1 \frac{\sqrt{e^2 + x^2 - e^{\cos x}}}{x^2} dx$

2412. $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \cos\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} dx$

2413. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + \operatorname{arctg} x}}$

Қуйидаги хосмас интеграллар α параметрнинг қандай қийматларида яқинлашувчи бўлиши аниқлансин.

2414. $\int_0^{\pi}\frac{1-\cos x}{x^{\alpha}}dx$

2415. $\int_0^{1} e^{\frac{\alpha}{x}}(\cos x)^{\frac{1}{x^3}}dx$

2416. $\int_0^{1}\frac{\sqrt{e^2+x^2}-e^{\cos x}}{x^{\alpha}}dx$

2417. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 2x-e^{-4x^2}}{x^{\alpha}\cdot \mathrm{tg}x}dx$

2418. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{a\cdot\cos x}-\sqrt{1+2\cos x}}{\sqrt{\cos^5 x}}dx$.

2419. $\int_0^{1}\frac{\ln\sqrt{1+2x}-xe^{-x}}{1-\cos^{\alpha} x}dx$

2420. $\int_1^{2}\frac{\mathrm{arctg}(x-1)}{\left(x-\sqrt{x}\right)^{\alpha}}dx$

2421. $\int_0^{1}\frac{\sin\left(\arcsin x+x^3\right)-x}{\sin^{\alpha} x}dx$

2422. $\int_0^{1}\frac{\mathrm{arctg}\left(x^2+x^{2\alpha}\right)}{x\cdot\ln^{\alpha}(1+x)}dx$

Қуйидаги хосмас интеграллар α ва β параметрларнинг қандай қийматларида яқинлашувчи бўлиши аниқлансин.

2423. $\int_0^{1} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}dx$

2424. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha} x\cos^{\beta} x\, dx$

2425. $\int_0^{1} x^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{1}{x}dx$

2426. $\int_0^{1} x^{\alpha}(1-x)^{\beta}\ln x\, dx$

2427. $\int_0^{0.5}\frac{\ln^{\alpha}\left(\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{tg}^{\beta}x}dx$

Қуйидаги хосмас интеграллар абсолют ва шартли яқинлашишга текширилсин.

2428. $\int_0^{0.5}\frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x}dx$

2429. $\int_0^{1}(1-x)^{\alpha}\sin\frac{\pi}{1-x}dx$

2430. $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{x^2+1}\sin\frac{1}{x}dx$

2431. $\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)\frac{dx}{x^\alpha}$

2432. $\int\limits_0^{0.5}\left(\frac{x}{1-x}\right)^\alpha \cos\frac{1}{x^2}dx$

2433. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right)\frac{dx}{\sin^\alpha x}$

2434. $\int\limits_0^1 \frac{x^\alpha}{e^x-1}\sin\frac{1}{x}dx$

2435. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x^\alpha}{x^2}dx$

2436. $\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\left(\sqrt{x}-x\right)^\alpha}dx$

2437. $\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x}\sin\frac{1}{x}dx$

Қуйидаги интегралларнинг Коши маъносидаги бош қийматлари топилсин.

2438. $V.p.\int\limits_1^{10}\frac{dx}{7-x}$

2439. $V.p.\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{(x-1)^3}$

2440. $V.p.\int\limits_a^b\frac{dx}{(x-c)^n}\quad c\in(a,b),\ \ n\in N$

2441. $V.p.\int\limits_{0.5}^{4}\frac{dx}{x\ln x}$

2442. $V.p.\int\limits_0^{\pi} x\,tgx\,dx$

2443. $V.p.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{3-5\sin x}$

2444. $V.p.\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\alpha-\sin x},\quad \alpha\in(0;1)$

2445. $V.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x}$

2446. $V.p.\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{1-x^2}$

2447. $V.p.\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$

2448. α параметрининг қандай қийматларида

$$V.p.\int\limits_0^2\frac{x^\alpha}{1-x}dx$$

мавжуд бўлади?

3-§. Хосмас интегралларнинг татбиқлари.

Хосмас интеграллар ёрдамида геометрик ва механик масалалар ечилади.

1 – м и с о л . *Ушбу*

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$$

эгри чизиқ ва унинг асимптотаси билан чегараланган шаклнинг юзи ҳисоблансин.

◀Қаралаётган эгри чизиқнинг асимптотаси OX ўқидан иборат.
Шаклнинг юзи

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} dx$$

бўлади. Маълумки,

$$\int_0^{+\infty} \frac{8a^3}{x^2+4a^2} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{8a^3}{x^2+4a^2} dx = \lim_{t\to+\infty} 8a^3 \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{t}{2a} = 2a^2\pi$$

Демак, $S = 4a^2\pi$.▶

2 – м и с о л . *Ушбу* $r = e^{a\varphi}$ ***логарифмик спиралнинг радиуси*** $r = 1$ ***бўлган айлана ичидаги қисмининг узунлиги топилсин.***

◀Айлана ичидаги логарифмик спирал нуқтасининг қутб бурчаги $-\infty$ дан **0** гача ўзгариб, $\varphi \to -\infty$ да радиус-вектор **0** гача камаяди. Логарифмик спиралнинг бу нуқтаси қутб нуқтага яқинлашади.

Логарифмик спирал узунлигини топамиз:

$$\ell = \int_{-\infty}^0 \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \int_{-\infty}^0 \sqrt{e^{2a\varphi} + a^2 e^{2a\varphi}} d\varphi = \sqrt{1+a^2} \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{a} e^{a\varphi}\Big|_t^0 = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$ ▶

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ва абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклларнинг юзалари топилсин.

2449. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$

2450. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}, \quad 0 \le x < +\infty$

2451. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}, \quad 1 \le x < +\infty$

2452. $f(x) = x^4 e^{-x}, \quad 0 \le x < +\infty$

2453. $f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^3}, \quad -\infty < x < +\infty$

2454. $f(x) = \frac{1}{1+x^3}, \quad 0 \le x < +\infty$

2455. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}, \quad 0 \le x < +\infty$

2456. $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x^5+1}, \quad 0 \le x < +\infty$

2457. $f(x)=\dfrac{x+1}{\left(x^2+4x+5\right)^2}$, $-1\le x<+\infty$ **2458.** $f(x)=|\sin x|e^{-x}$, $0\le x<+\infty$

2459. Ушбу $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ функция графигини унинг асимптотаси атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин.

$y=f(x)$ функция графигини абсциссалар ўқи атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин.

2460. $y=e^{-x}\sin\pi x,\quad x\ge 0$ **2461.** $y=e^{-x}\sqrt{\sin x},\ x\ge 0$

2462. $y=e^{-x},\quad x\ge 0$, функция графигини унинг асимптотаси атрофида айлантириш натижасида ҳосил бўлган сиртнинг юзи топилсин.

Қуйидаги тенгсизликлар исботлансин.

2463. $0<\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sqrt{x^3-x^2+3}}{x^5+x^2+1}dx<\dfrac{1}{10\sqrt{2}}$ **2464.** $0<\int\limits_{10}^{+\infty}\dfrac{x^2}{x^4+x+1}dx<0{,}1$

2465. $\left|\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{\cos 4x}{x^2+4}dx\right|<\dfrac{\pi}{4}$ **2466.** $0{,}25<\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x^6+1}{x^{11}+1}dx<0{,}35$

2467. $\dfrac{1}{29}<\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{x^{30}+1}{x^{60}+1}dx<\dfrac{1}{29}+\dfrac{1}{59}$ **2468.** $0<\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{x^{20}+1}{x^{40}+1}dx-\dfrac{20}{19}<0{,}05$

2469. $0<\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{e^{-x}}{x+100}dx<0{,}01$ **2470.** $0<\int\limits_2^{+\infty}e^{-x}dx<\dfrac{1}{4e^4}$

2471. $0<\int\limits_{10}^{+\infty}e^{-x^2}dx<\dfrac{1}{5\cdot 2^{102}}$

Қуйидаги функцияларнинг графиклари ва абсциссалар ўқи билан чегараланган шаклларнинг юзлари топилсин.

2472. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-5x}},\quad x\in[0;0{,}4)$

2473. $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}},\quad x\in[-1;1],\quad x\neq 0$

2474. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}},\quad x\in(a;b)$

2475. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{(x-3)(5-x)}},\quad x\in(3;5)$

2476. $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{\ln x}},\quad x\in(1;e]$

2477. $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x},\quad x\in[0;1)$

2478. $f(x)=\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}},\quad x\in[0;1)$

2479. $f(x)=\frac{|\ln x|}{\sqrt{1-x^2}},\quad x\in(0;1)$

Қуйидаги тенгламалар ёрдамида берилган функцияларнинг графиклари ва уларнинг асимптоталари билан чегараланган шаклларнинг юзалари топилсин.

2480. $xy^2=8-4x$

2481. $(x+1)y^2=x^2,\quad x<0$

2482. $(4-x)y^2=x^3$

2483. $(1-x^2)y^2=x^2,\ x>0$

Қуйидаги қутб координаталар системасида берилган чизиқлар билан чегараланган шаклларнинг юзалари топилсин.

2484. $r=\mathrm{tg}\varphi,\quad r=\frac{1}{\cos\varphi},\quad \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$

2485. $r=\frac{1}{\varphi},\quad r=\frac{1}{\sin\varphi},\quad \varphi\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$

2486. $y=e^{-x^2}$ функция графиги ва $y=0$ тўғри чизиқ билан чегараланган шаклни ординаталар ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган сирт билан чегараланган жисмнинг ҳажми топилсин.

2487. Қуйидаги $(4-x)y^2-x^3=0$ тенглама ёрдамида берилган функция графигини унинг асимптотаси атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажми топилсин.

Қуйидаги тенгсизликлар исботлансин.

2488. $\frac{\pi}{10} < \int_0^2 \frac{dx}{\left(4+\sqrt{\sin x}\right)\sqrt{4-x^2}} < \frac{\pi}{8}$

2489. $\frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{11} < \int_1^2 \frac{dx}{(10+\sin x)\sqrt{x^2-1}} < \frac{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}{10}$

2490. $\int_{1.9}^{2} \frac{e^{-x}dx}{\sqrt[4]{2+x-x^2}} < 0{,}03$

2491. $\int_0^1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}{\sqrt{1-x^2}}dx > 0$.

X-БОБ.

Сонли қаторлар

1-§. Асосий тушунчалар.

Яқинлашувчи қаторнинг асосий хоссалари

1^0. Сонли қатор тушунчаси. Қаторнинг яқинлашувчилиги ва узоқлашувчилиги. Ушбу

$$\mathbf{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n} \qquad \textbf{(1)}$$

ифода **қатор (сонли қатор)** дейилади, бунда $\mathbf{a_1, a_2, \ldots}$ ҳақиқий сонлар **қатор ҳадлари**, a_n эса қаторнинг **умумий ҳади** ($\mathbf{n}$ - ҳади) дейилади.

Қуйидаги

$$\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

йиғинди (1) қаторнинг **қисмий йиғиндиси** ($\mathbf{n}$-қисмий йиғиндиси) дейилади.

1 – т а ъ р и ф . *Агар*

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} S_n}$$

мавжуд бўлиб, у чекли сон $\mathbf{S}$ га $(\mathbf{S} \in \mathbf{R})$ тенг бўлса, (1) қатор я қ и н л а ш у в ч и , $\mathbf{S}$ сон эса унинг й и ғ и н д и с и дейилади.

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n} .$$

Агар $\mathbf{n \to \infty}$ да $\{\mathbf{S_n}\}$ кетма-кетликнинг лимити чексиз ёки мавжуд бўлмаса, (1) қатор **узоқлашувчи** дейилади.

2^0. Яқинлашувчи қаторнинг асосий хоссалари. Айтайлик, $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$ ва $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$ қаторлар яқинлашувчи бўлиб, уларнинг йиғиндиси мос равишда $\mathbf{S_1}$ ва $\mathbf{S_2}$ бўлсин:

$$\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1}, \quad \mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2}$$

У ҳолда

1) $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} ca_n}$ яқинлашувчи ва $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c \cdot S_1}$ бўлади, бунда $\mathbf{c = const}$,

2) $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)}$ яқинлашувчи ва $\mathbf{\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S_1 \pm S_2}$ бўлади.

3) Қуйидаги

$$\mathbf{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$$

муносабат ўринли бўлади. Бу шарт қатор яқинлашишининг **зарурий шартини** ифодалайди.

1 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

қаторнинг яқинлашувчилиги аниқлансин, йиғиндиси топилсин.

◀Бу қаторнинг умумий ҳадини қуйидагича

$$\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}$$

ёзиб, унинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n=\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=$$

$$=2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\ldots-\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n+1}=2-\frac{2}{2n+1}$$

Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{2n+1}\right)=2$$

Демак, берилган қатор яқинлашувчи, унинг йиғиндиси 2 га тенг.▶

2 – м и с о л . ***Ушбу***

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Равшанки, бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$$

бўлади. Уни қуйидагича ёзиб оламиз:

$$S_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{\frac{2}{3}}+\left[\frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Натижада

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{2}{3}$$

бўлиб, ундан берилган қаторнинг яқинлашувчи, йиғиндиси $S=\frac{2}{3}$ бўлиши келиб чиқади.▶

3 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Бу қаторнинг умумий ҳади

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$$

бўлади. $n \to \infty$ да a_n нинг лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}\ln\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{\ln\ln n}{n}}} = 1$$

Қатор яқинлашишининг зарурий шарти бажарилмайди. Бинобарин, қатор узоқлашувчи бўлади.▶

4 – м и с о л . *Ушбу*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Одатда бу қаторни **геометрик қатор** дейилади. Қаторнинг қисмий йиғиндисини топамиз:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q} \qquad (q \neq 1)$$

Равшанки,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}\ , \text{ агар } \ |q| < 1 \text{ бўлса}, \\ +\infty \ \ , \text{ агар } \ q > 1 \text{ бўлса}, \\ \text{мавжуд эмас}, \ \text{ агар } \ q \leq -1 \text{ бўлса}, \end{cases}$$

ва $q = 1$ да $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ бўлади.

Демак, геометрик қатор $|q| < 1$ бўлганда яқинлашувчи, $|q| \geq 1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.▶

2-§. Мусбат ҳадли қаторлар

1^0. Мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашувчилиги. Фараз қилайлик, бирор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2)$$

қатор берилган бўлсин.

Агарда $\forall n \in N$ учун $a_n \geq 0$ бўлса, (2) қатор **мусбат ҳадли қатор** (қисқача **мусбат қатор**) дейилади.

Т е о р е м а . *Мусбат ҳадли*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун унинг қисмий йиғиндиларидан иборат

$$\{S_n\} = \{a_1 + a_2 + ... + a_n\} \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

кетма-кетликнинг юқоридан чегараланган бўлиши зарур ва етарли.

2^0. Солиштириш (таққослаш) аломатлари. Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \qquad (3)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ... \qquad (4)$$

лар мусбат қаторлар бўлсин.

1-Солиштириш аломати. Агар (3) ва (4) қаторларнинг ҳадлари учун $0 \le a_n \le b_n \quad (n \ge 1)$ бўлса, (4) қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан (3) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши ((3) қаторнинг узоқлашувчи бўлишидан (4) қаторнинг узоқлашувчи бўлиши) келиб чиқади.

2-Солиштириш аломати. Агар (3) ва (4) қаторларнинг ҳадлари учун $n \ge 1$ да $a_n > 0, \; b_n > 0$ бўлиб,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \qquad (0 \le c \le \infty)$$

бўлса, у ҳолда:

1) $c < +\infty$ бўлиб, (4) қатор яқинлашувчи бўлса, (3) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади,

2) $c > 0$ бўлиб, (4) узоқлашувчи бўлса, (3) қатор ҳам узоқлашувчи бўлади.

3) $0 < c < +\infty$ бўлса, (3) ва (4) қаторлар бир вақтда ё яқинлашувчи бўлади ёки узоқлашувчи бўлади.

3-Солиштириш аломати. Агар (3) ва (4) қаторларнинг ҳадлари учун $\forall n \ge 1$ да $a_n > 0 \;, \; b_n > 0$ бўлиб,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

бўлса, у ҳолда (4) қаторнинг яқинлашувчи бўлишидан (3) қаторнинг ҳам яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.

5 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3(-1)^n}{2^{n+3}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄Бу қаторнинг умумий ҳади

$$a_n = \frac{5 + 3(-1)^n}{2^{n+3}}$$

бўлиб, унинг учун

$$2 \le \frac{5 + 3(-1)^n}{2^{n+3}} \le \frac{8}{2^{n+3}} = \frac{1}{2^n}$$

бўлади. Равшанки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

қатор (махражи $q=\frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик қатор) яқинлашувчи. Унда 1-солиштириш аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.►

6 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}=\frac{1}{3-1}+\frac{1}{3^2-2}+\ldots+\frac{1}{3^n-n}+\ldots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄Маълумки, қуйидаги

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

қатор яқинлашувчи. (махражи $q=\frac{1}{3}$ бўлган геометрик қатор бўлганлиги учун).

Бу қатор билан берилган қаторга 1-солиштириш аломатини қўллаймиз:

$$\left(a_n=\frac{1}{3^n-n},\ \ b_n=\frac{1}{3^n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n-n}:\frac{1}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1.$$

Демак, аломатга кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.►

7 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◄Бу қаторнинг қисмий йиғиндиси

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$S_n>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}$$

Унда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$$

бўлганлиги сабабли, берилган қатор узоқлашувчи бўлади.►

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилиги кўрсатилсин ва уларнинг йиғиндилари топилсин:

2492. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$ **2493.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

2494. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ **2495.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

2496. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$

2497. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+3)}$

2498. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2-n}{n(n+1)(n+3)}$

2499. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$

2500. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^3-1}{n^3+1}$

2501. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

2502. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\alpha}{2^{n+1}}\cdot\sin\frac{3\alpha}{2^{n+1}}$

2503. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)}$

2504. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{2^n}\cdot\cos\frac{3}{2^n}$

2505. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$

2506. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

Қуйидаги қаторлар учун қатор яқинлашувчилигининг зарурий шарти бажарилмаслиги кўрсатилсин:

2507. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0,02}$

2508. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$

2509. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^3-2}{3n^3+4}\right)^{n^2}$

2510. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\ln^2(n+1)}$

2511. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+2)\ln\frac{n^2+1}{n^2}$

2512. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\operatorname{arctg}\frac{1}{n+2}$

2513. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$

2514. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n+1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

2515. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+9)\arcsin\frac{1}{n^2+5}$

Солиштириш (таққослаш) аломатларидан фойдаланиб қуйидаги $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторлар яқинлашишга текширилсин:

2516. $a_n = \dfrac{\sin^2 3n}{n\sqrt{n}}$

2517. $a_n = \dfrac{\mathrm{arctg}\, n}{n^2+1}$

2518. $a_n = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{4n}}{\sqrt[5]{2n^5-1}}$

2519. $a_n = \dfrac{\ln n + \sin n}{n^2 + 2\ln n}$

2520. $a_n = \dfrac{\arcsin\dfrac{n-1}{n+1}}{n\sqrt{\ln(n+1)}}$

2521. $a_n = \dfrac{\mathrm{arctg}(n^2+2n)}{3^n+n^2}$

2522. $a_n = \dfrac{n^2}{e^n}$

2523. $a_n = (3n+n^3)e^{-\sqrt{n}}\cdot \ln n$

2524. $a_n = \dfrac{\left(3-2\cos^2\dfrac{\pi n}{3}\right)\cdot e^n}{n^2\cdot 2^n}$

2525. $a_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

2526. $a_n = \left(e^{-\frac{1}{n}}-1\right)\cdot \sin\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

2527. $a_n \geq 0$ бўлиб, $\{na_n\}$ кетма-кетлик чегараланган бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ қатор яқинлашувчилигини исботланг.

3-§. Қаторларнинг яқинлашиш аломатлари

Фараз қилайлик, ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (5)$$

мусбат қатор берилган бўлсин. Бу қаторнинг яқинлашувчи бўлиши аломатларини келтирамиз:

1^0. Коши аломати. *Агар (5) қаторда* $n \in N$ *нинг бирор* n_0 *қийматидан бошлаб, кейинги барча* $n \geq n_0$ *учун*

$$\sqrt[n]{a} \leq q < 1$$

бўлса, (5) қатор я қ и н л а ш у в ч и ,

$$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$$

бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$$

бўлиб, $q<1$ бўлса, (5) қатор **яқинлашувчи**, $q>1$ бўлса, (5) қатор **узоқлашувчи** бўлади.

2^0. **Даламбер аломати.** *Агар (5) қаторда* $n\in N$ *нинг бирор* n_0 *қийматидан бошлаб, кейинги барча* $n\geq n_0$ *учун*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq d<1$$

бўлса, (5) қатор яқинлашувчи,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$$

бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=d$$

бўлиб, $d<1$ бўлса, (5) қатор **яқинлашувчи**, $d>1$ бўлса, (5) қатор **узоқлашувчи** бўлади.

3^0. **Раабе аломати.** *Агар (5) қаторда* $n\in N$ *нинг бирор* n_0 *қийматидан бошлаб, кейинги барча* $n\geq n_0$ *учун*

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geq r>1$$

бўлса, (5) қатор яқинлашувчи,

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)<1$$

бўлса, (5) қатор узоқлашувчи бўлади.

Бу аломатни қуйидагича ҳам айтиш мумкин:

Агар

$$\lim_{n\to\infty}n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\rho \qquad (\rho\in R)$$

бўлиб, $\rho>1$ бўлса, (5) қатор **яқинлашувчи**, $\rho<1$ бўлса, (5) қатор **узоқлашувчи** бўлади.

4^0. **Кошининг интеграл аломати.** *Агар* $f(x)$ *функция* $[1,+\infty)$ *да узлуксиз, камаювчи ва*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

бўлиб, ушбу

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt$$

функция** $f(x)$ **нинг бошланғич функцияси бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x f(t)dt$$

лимит мавжуд ва чекли бўлганда (5) қатор   я қ и н л а ш у в ч и ,   бу лимит чексиз ёки мавжуд бўлмаганда (5) қатор   у з о қ л а ш у в ч и   бўлади.

5^0. Гаусс аломати. *Агар (5) қатор учун*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}} \qquad (|\theta_n|<c,\ \varepsilon>0)$$

бўлса, у ҳолда

1) $\lambda>1$ ***бўлганда (5) қатор   я қ и н л а ш у в ч и ,***

2) $\lambda<1$ ***бўлганда (5) қатор   у з о қ л а ш у в ч и ,***

3) $\lambda=1,\ \mu>1$ ***бўлганда (5) қатор   я қ и н л а ш у в ч и ,***

4) $\lambda=1,\ \mu\le 1$ ***бўлганда (5) қатор   у з о қ л а ш у в ч и***

бўлади.

8 – м и с о л . *Ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}\cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Берилган қаторнинг умумий ҳади

$$a_n=\frac{n^{n^2}\cdot 2^n}{(n+1)^{n^2}}$$

бўлади. Бу қаторга Коши аломатини қўллаб топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{n^2}\cdot 2^n}{(1+n)^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\cdot 2}{(1+n)^n}=\lim_{n\to\infty}2\left(\frac{n}{1+n}\right)^n=\frac{2}{e}.$$

Равшанки, $\frac{2}{e}<1$. Демак, берилган қатор Коши аломатига кўра яқинлашувчи бўлади.▶

9 – м и с о л . *Ушбу*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$$

қатор яқинлашувчиликка текширилсин.

◀Берилган қатор учун

$$a_n=\frac{n^5}{2^n+3^n},\ a_{n+1}=\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}+3^{n+1}}$$

бўлиб,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^5}{2^{n+1}+3^{n+1}}\cdot\frac{2^n+3^n}{n^5}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\frac{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^{n+1}\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\cdot\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$$

бўлади. Энди бу нисбатнинг лимитини топамиз:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5\cdot\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}=\frac{1}{3}<1$$

Демак, берилган қатор Даламбер аломатига кўра яқинлашувчи бўлади.►

10 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+...+\frac{1}{n^\alpha}+... \qquad (\alpha>0)$$

қатор яқинлашувликка текширилсин.

◄Айтайлик,

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

бўлсин. Бу функция $[1,+\infty)$ да узлуксиз, $f(x)>0$, камаювчи ва

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

бўлади. Равшанки,

$$F(x)=\int_1^x f(t)dt=\int_1^x\frac{dt}{t^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right) \qquad (\alpha\neq1)$$

$x\to+\infty$ да бу функциянинг лимити

$$\lim_{x\leftarrow+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1}, & \text{агар } \alpha>1\\ \infty, & \text{агар } \alpha<1\end{cases}$$

бўлиб, $\alpha=1$ бўлганда

$$\lim_{x\leftarrow+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{dt}{t}=\lim_{x\to+\infty}\ln x=\infty$$

бўлади. Унда Кошининг интеграл аломатига кўра

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} \qquad (*)$$

қатор $\alpha>1$ бўлганда яқинлашувчи, $\alpha\leq1$ бўлганда узоқлашувчи бўлади.►

Одатда, (*) қатор ***умумлашган гармоник қатор****,* $\alpha=1$ *бўлган ҳолда (*) қатор* ***гармоник қатор*** *деб юритилади.*

Коши ва Даламбер аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторлар яқинлашишга текширилсин:

2528. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$

2529. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-5)}$

2530. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

2531. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{an}{n+2}\right)^n, \quad a>0$

2532. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n^2}$

2533. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2+4n+5}$

2534. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(3n^2+2n+1)^{(n+3)/2}}$

2535. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}+3}\right)^{n^{\frac{3}{2}}}$

2536. $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

2537. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{a}{n}\right)^{n^3}, \quad a>0$

2538. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!a^n}{n^n}, \quad a\neq e, \quad a>0$

2539. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

2540. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(3n+4)3^n}$

2541. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{3^n \cdot n!}$

2542. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\ldots(3n)}{(n+1)!}\arcsin\frac{1}{2^n}$

2543. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!}\operatorname{arctg}\frac{1}{3^n}$

Раабе ва Гаусс аломатларидан фойдаланиб қуйидаги қаторлар яқинлашишга текширилсин:

2544. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ \ldots\ (2n)}\right]^p \frac{1}{n^q}$

2545. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$

2546. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

2547. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2\cdot\ln 3\ldots\ln(n+1)}{\ln(2+a)\cdot\ln(3+a)\ldots\ln(n+1+a)}, \quad a>0$

2548. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{3}\right)\ldots\left(a+\sqrt{n+1}\right)}, \quad a>0$

2549. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$

2550. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{q(q+1)\ldots(q+n-1)}\right]^{\alpha} \quad (p>0, \ \ q>0)$

Қуйидаги $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ қаторлар яқинлашишга текширилсин:

2551. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$

2552. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$

2553. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$

2554. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$

2555. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$

2556. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

2557. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-\sqrt[3]{n}}$

2558. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1\right)$

2559. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{n^{\alpha}} - 1$

2560. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sin\frac{\pi}{n}$

2561. $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

2562. $a_n = e^{\sqrt{n}/\left(n^2+1\right)} - 1$

2563. $a_n = \mathrm{tg}\frac{1}{n} - \mathrm{arctg}\frac{1}{n}$

2564. $a_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$

2565. $a_n = \frac{(2n+2)!}{\pi^n (n!)^2}$

2566. $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n+1)}}$

2567. $a_n = \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}$

2568. $a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$

2569. $a_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^4}dx$

2570. $a_n = \frac{1}{\int_0^n \sqrt{1+x^4}dx}$

2571. $a_n = \int_n^{n+2} e^{-\sqrt[4]{x}}dx$

2572. $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{x\sin^5 x}{1+x^2}dx$

2573. $a_n = \frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}$

2574. Агар $\lim_{n\to\infty} na_n = a$ бўлиб, $a \neq 0$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор узоқлашувчи бўлиши исботлансин.

2575. Агар $a_n > 0$, $\forall n \in N$ ларда $a_{n+1} \leq a_n$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор яқинлашувчи бўлса, $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ экани исботлансин.

2576. Агар $a_n \geq 0$ бўлиб, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор хусусий йиғиндилари кетма-кетлигининг бирорта қисмий кетма-кетлиги юқоридан чекланган бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қаторнинг яқинлашувчилиги исботлансин.

2577. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ қаторлар яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

қаторлар ҳам яқинлашувчи бўлиши исботлансин.

2578. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор $(a_n \geq 0)$ берилган бўлиб, $n \geq n_0$ ларда $\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln n} \geq p > 1$ бўлса, берилган қатор яқиндашувчи, $n \geq n_0$ ларда $\left(1-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln n} \leq 1$ бўлса узоқлашувчи экани исботлансин.

2579. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ қатор $(a_n > 0)$ берилган бўлсин. Шундай $\alpha > 0$ мавжуд бўлиб, $n \ge n_0$ ларда $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} \ge 1+\alpha$ бўлса, қатор яқинлашувчи, $n \ge n_0$ ларда $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} \le 1$ бўлса, қатор узоқлашувчи экани исботлансин.(**Логарифмик аломат**.)

4-§. Ихтиёрий ҳадли қаторлар. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар

Айтайлик,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (6)$$

қатор берилган бўлиб, унинг ҳар бир ҳади ихтиёрий ҳақиқий сон бўлсин. Одатда бундай қатор **ихтиёрий ҳадли қатор** дейилади.

1^0. Ихтиёрий ҳадли қаторнинг яқинлашиши.

1 – т е о р е м а (К о ш и т е о р е м а с и) . ***Ихтиёрий ҳадли (6) қаторнинг яқинлашувчи бўлиши учун***

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in N\,,\ \forall n > n_0,\ m = 1,2,3,\ldots :$$

$$\left|S_{n+m} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}\right| < \varepsilon$$

тенгсизликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

2 – т е о р е м а . ***Агар***

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (7)$$

қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда (6) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

2^0. Қаторнинг абсолют ва шартли яқинлашувчилиги.

1 – т а ъ р и ф . ***Агар (7) қатор яқинлашувчи бўлса, (6) қатор а б с о л ю т я қ и н л а ш у в ч и дейилади.***

2 – т а ъ р и ф . ***Агар (6) қатор яқинлашувчи бўлиб, (7) қатор узоқлашувчи бўлса, (6) қатор ш а р т л и я қ и н л а ш у в ч и дейилади.***

3^0. Ихтиёрий ҳадли қаторларнинг яқинлашиш аломатлари.

1) Лейбниц аломати. Ушбу

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \ldots + (-1)^{n-1} C_n + \ldots \qquad (8)$$

қаторни қарайлик, бунда $C_n > 0 \quad (n = 1,2,3,\ldots)$.

Одатда бу (8) қатор ҳадларининг ишоралари навбат билан ўзгариб келадиган қатор дейилади.

3 – т е о р е м а (Л е й б н и ц) : ***Агар (8) қаторда:***

а) $C_{n+1} < C_n \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$

б) $n \to \infty$ *да* $C_n \to 0$

бўлса, у ҳолда (8) қатор яқинлашувчи бўлади.

2) Абель аломати. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n + ... \qquad (9)$$

қаторни қарайлик.

4 – т е о р е м а (А б е л ь). ***Агар (9) қаторда:***

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***қатор яқинлашувчи,***

б) $\{b_n\}$***- чегараланган, монотон кетма-кетлик бўлса,***

у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ***қатор яқинлашувчи бўлади.***

3) Дирихле аломати. Бу аломат қуйидаги теорема орқали ифодаланади.

5 – т е о р е м а (Д и р и х л е). ***Агар (9) қаторда:***

а) $\{a_n\}$ ***кетма-кетлик монотон,***

б) $n \to \infty$ *да* $a_n \to 0$,

в) $\exists\, C > 0, \quad \forall n \geq 1: \left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| \leq C$

бўлса, у ҳолда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

қатор яқинлашувчи бўлади.

11 – м и с о л . ***Коши теоремасидан фойдаланиб, ушбу***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x}{n(n+1)}$$

қаторнинг яқинлашувчи бўлиши кўрсатилсин.

◄Равшанки, бу қатор учун

$$|S_{n+m} - S_n| = \left|\sum_{k=m+1}^{n+m} \frac{\sin kx}{k(k+1)}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n+1}$$

бўлади. Демак,

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+m}| < \frac{1}{n+1}$$

ва

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Бундан эса берилган қаторнинг яқинлашувчи бўлиши келиб чиқади.►

12 – м и с о л . ***Ушбу***

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

қаторнинг ихтиёрий $x \in R$ ***да яқинлашувчи бўлиши кўрсатилсин.***

◄Агар $x = k\pi, \ k \in Z$ бўлса, унда қаторнинг яқинлашувчи бўлиши равшан.

Айтайлик, $x \neq k\pi,\ \ k \in Z$ бўлсин. Берилган қаторда

$$\frac{1}{n} = a_n,\ \ \sin nx = b_n \qquad (n \geq 1)$$

дейилса, унда берилган қатор

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

кўринишдаги қаторга келади. Бу қатор учун Дирихле теоремасининг шартларининг бажарилишини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам,

$$a_n = \frac{1}{n}$$

бўлганлигидан, унинг монотонлиги ҳамда $n \to \infty$ да $a_n \to 0$ бўлишини топамиз.

Энди учинчи шартнинг бажарилишини кўрсатамиз:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin kx\right| = \frac{1}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\left|\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

Демак, Дирихле аломатига кўра берилган қатор яқинлашувчи бўлади.►

Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчилиги Коши теоремаси ёрдамида исботлансин.

2580. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$

2581. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$

2582. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$

2583. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{10^n} \quad (|C_n| < 10)$

2584. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{(n+1)(n+3)}$

Қуйидаги қаторларнинг узоқлашувчилиги Коши теоремаси ёрдамида исботлансин.

2585. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$

2586. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

2587. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+4}$

2588. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

2589. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots$

Қуйидаги қаторларнинг абсолют яқинлашувчилиги исботлансин.

2590. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2n+\frac{\pi}{4}\right)}{n^3\sqrt{n+2}}$

2591. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}(-n)^n}{\sqrt[4]{2n^6+3n+1}}$

2592. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln^2 n}{2^n}$

2593. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}}\arcsin\frac{\pi}{4n}$

2594. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos^3 n\cdot\operatorname{arctg}\frac{n+1}{n^3+2}$

2595. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\sin ne^{-\sqrt{n}}$

2596. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(2n)!}$

2597. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ln^2(n+1)}{n\sqrt{n+1}}$

2598. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!!}{(n+1)^n}$

2599. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n(n+1)/2}\frac{2^n+n^2}{3^n+n^3}$

2600. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\pi n$

Қуйидаги қаторлар яқинлашишга текширилсин.

2601. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}}$

2602. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{\sqrt{n}}$

2603. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}\right)$

2604. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$

2605. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{\sqrt{n^2+4}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\sqrt{n}}$

2606. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(n+\frac{\pi}{4}\right)}{\ln^2(n+1)}$

2607. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos^2 2n}{\sqrt{n}}$

2608. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt[5]{n+1}}$

2609. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{n}} \cdot \sin 2n$

2610. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

2611. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}+\sin n}$

2612. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\sin n}{\sqrt[3]{n}}\right)$

2613. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

2614. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln(n+1)}$

2615. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$

2616. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

2617. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}$

Қуйидаги қаторлар абсолют ва шартли яқинлашишга текширилсин.

2618. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n^p}$

2619. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

2620. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$

2621. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n \sin^{2n} x}{n}$

2622. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$

2623. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

2624. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n}$

2625. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n^2]{n}}$

2626. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6 ... (2n)}\right]^p$

2627. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$

ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

11. $\frac{n(n+1)}{2}$. **12.** $\frac{n(n+1)^2}{2}$. **13.** $\frac{n}{2n+1}$. **14.** $n^2(n+1)$. **15.** $3-\frac{2n+3}{2^n}$.

16. $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. **17.** $(n+1)!-1$. **18.** $\mathrm{arctg}\frac{n}{n+1}$. **48.** Йўқ, $A\subset B\bigcup C$ бўлиши келиб чиқади. **49.** Йўқ, $A\setminus B\subset C$ бўлади. **57.** Шарт эмас. **61.** Юқ. чегараланган. **62.** Чегараланган. **63.** Чегараланган. **64.** Чегараланган. **65.** Қуй. чегараланган. **66.** 1,0. **67.** $\frac{3}{2},0$. **68.** Битта элементдан иборат тўплам.

83. R. **84.** $-1<x<5$. **85.** $x>-1,\ x<-5$. **86.** $x<-\frac{1}{2}$. **87.** $-1<x<0$.

88. $|x|>\sqrt{7},\ |x|<\sqrt{3}$. **89.** $-1<x<3$. **90.** $x<-1$. **91.** $x<2,\ x\neq 0$.

92. $x\geq 6,\ x\leq -6$. **93.** $-5\leq x\leq 5$. **94.** $x_1=-1,\ x_2=3$. **95.** $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

96. $|x|>1,\ x=1$. **97.** $2\leq x\leq 3$. **98.** $x_1=3,\ x_2=-3$. **99.** $x\geq 5$. **100.** $|x|\geq\sqrt{3}$.

101. $X=R\setminus\{0\}$. **102**. $X=R\setminus\{2,3\}$. **103**. $X=(-5,5)$. **104**. $X=\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

105. $X=(0,+\infty)$. **106**. $X=(-1,+1)$. **107**. $X=R\setminus\{-2,2\}$. **108**. $X=(4,+\infty)$.

109. $X=[-3,-1)\cup(2.3]$. **110**. $X=R\setminus Z$. **111**. $X=\{x\in R: 4\pi^2k^2\leq x\leq$ $\leq\pi^2(2k+1)^2\}k=0,1,2...$. **112.** $X=\left\{x\in R: 2\pi k-\frac{\pi}{2}<x<2\pi k+\frac{\pi}{2}\right\}\ k\in Z$.

113. $X=R$. **114**. $X=[1,2]$. **115**. $X=[1,100]$.

116. $X=\{x\in R: x=2k\pi,\ k\in Z\}$. **117**. $X=\left\{x\in R: -\frac{\pi}{2}+\pi k<x<\right.$ $\left.<\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z\right\}$. **118**. $X=\left\{x\in R: 10^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}<x<10^{\frac{\pi}{2}+2\pi k},\ k\in Z\right\}$.

119. $Y_f=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. 120. $Y_f=(-\infty,+\infty)$. **121.** $Y_f=(-\infty,-1)\cup\{0\}\cup\{1,+\infty)$.

122. $Y_f=[2,+\infty)$. 123. $Y_f=\left[\sqrt{6},+\infty\right)$. 124. $Y_f=\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

125. $Y_f=(-\infty,\lg 3]$. 126. $Y_f=[-1,+\infty)$. 127. $Y_f=\left[\frac{9-4\sqrt{2}}{7},\frac{9+4\sqrt{2}}{7}\right]$.

128. $Y_f=[-6,+\infty)$. **129**. 2;0;0;4;0. **130**. $0;\frac{1}{4};\frac{3}{2}$, мавжуд эмас.

131. $1;\frac{1+x}{1-x};-\frac{x}{2+x};\frac{2}{1+x};\frac{x-1}{x+1};\frac{1+x}{1-x}$. **132.** 0;2;-4;1. **133** -2.

134. $2ax+ah+6$. 135. $f(x)=\frac{10}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2-\frac{29}{6}x+2$.

137. $2k\pi<x<\pi+2k\pi,\ k\in Z;\ 1<x<e;\ x>0,\ x\neq k,\ (k=0,1,2...)$.

138. $x^4;x^2;\sqrt[4]{x};|x|$. 139. $\operatorname{sign}x, x, \operatorname{sign}x, \operatorname{sign}x$. **140.** $1;\begin{cases}2, & \text{агар } x\neq 0\\ 1, & \text{агар } x=0\end{cases}$.

141. $X=Z$. 142. $\varphi(\psi(x))=\ln\sin^2 x,\ X=R\setminus\{x=k\pi,\ k\in Z\}$;

$\psi(\varphi(x))=\sin\ln x^2,\ X=R\setminus\{0\}$. 143. $f(x)=1+\frac{1}{x^2}$. **144.** $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$.

145. $f=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. **146.** $f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. 147. $x\in R\setminus\{0,1\}$.

149. $f^{-1}(y)=\frac{4(1-y)}{1+y}$. **150.** $f^{-1}(y)=-\sqrt{y-1},\ y\in[1,+\infty)$. **151.** $f^{-1}(y)=1-$

$-\sqrt{1-y}$, $y\geq 1$. 152. $f^{-1}(y)=\sqrt{1-2\ln(-x)},\ -\sqrt{e}\leq y<0$. 153. $f^{-1}(y)=$

$=\sqrt{1-2\ln(-x)},\ -\sqrt{e}\leq y<0$. 154. $f^{-1}(y)=2\cdot 10^y,\ -\infty<y<\infty$.

155. $f^{-1}(y)=\frac{1}{3}\cdot\operatorname{tg}y,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. **156.** $f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & \text{агар } -\infty<y\leq 0\\ \sqrt{y}, & \text{агар } 0<y<\infty\end{cases}$.

186. $\inf f=\pi,\ \sup f=1+\pi$. 187. $\inf f=0,\ \sup f=1$. 188. $\inf f=-\frac{1}{3}$,

$\sup f = -\frac{1}{4}$. **189**. $\inf f = 0,\ \sup f = 1$. **190.** $\inf f = 0,\ \sup f = 1$. **191.** $\inf f = 0,\ \sup f = 1$. **193**. $\max f = 10;\ \min f = 1$. **193**. $\max f = 1;\ \min f = 0$. **194.** $\max f = 2;\ \min f = 0$. **195.** $\max f = 3;\ \min f = \frac{5}{4}$. **196.** $\max f = 5;\ \min f = 4$ **218**. тоқ. **219.** жуфт. **220.** жуфт. **221**. тоқ. **222**. тоқ. **223.** жуфт. **224.** тоқ. **225**. жуфт. **226.** жуфт ҳам эмас, тоқ ҳам эмас. **227**. тоқ. **228**. тоқ. **229.** тоқ **230**. жуфт. **231.** тоқ. **232.** тоқ. **235.** 1)$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - x^3}$.

2)$f(x) = 0 + x^3$. 3)$f(x) = x^2 + 0$. 4)$f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right) + \frac{1}{2}\left(a^x - a^{-x}\right)$.

5)$f(x) = \left(3x^2 + 1\right) + \left(x^3 + 3x\right)$. 6)$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} + \frac{x}{x^2 - 1}$. 7)$f(x) = \frac{\pi}{2} + \left(-\arcsin x\right)$. **236.** $T = 1$. **237.** $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. **238.** $T = \pi$. **239.** $T = \pi$. **240.** $T = \pi$. **241.** $T = 2\pi$. **242.** $T = 2\pi$. **243.** $T = \pi$. **388.** $-1, 1, -1, 1, -1$. **389**. $2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$.

390. $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0$. **391**. $1, 0, -1, 0, 1$. **392.** $0, \frac{1}{4}, \frac{8}{27}, \frac{81}{256}, \frac{1024}{3125}$.

393. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{15}{4}$. **394.** $0, \frac{1}{2}, \frac{\log_2 3}{3}, \frac{1}{2}, \frac{\log_2 5}{5}$. **395**. $x_n = \sqrt{n \cdot (n + 1)}$.

396. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. **397.** $x_n = \frac{5^n}{n!}$. **398** $x_n = \frac{n^2}{n^2 + 10}$. **399**. $x_n = 2 + (-1)^n$.

400. $x_{4n+1} = 1$. **401.** $x_3 = \frac{9}{8}$. **402.** $x_1 = \frac{\pi^2}{6}$. **403.** $x_9 = x_{10} = \frac{10^9}{9!}$. **404.** $x_3 = 15$.

405. $x_2 = 9$. **406.** $x_1 = \frac{1}{2}$. **407.** $x_{4n-2} = -1$. **408.** $x_1 = 2$. **428.** Чегараланган, чегараланмаган ҳам бўлиши мумкин. **429.** камаювчи. **430.** ўсувчи. **431.** камаювчи. **432.** ўсувчи. **433.** камаювчи. **434.** $n > 2$ дан, камаювчи. **435.** $n > 1$ дан, камаювчи. **436.** камаювчи. **512.** 3. **513.** $\frac{1}{2}$. **514.** $\frac{1}{2}$. **515.** 1. **516.** 3. **517.** 0, агар $\mathbf{0 \le a < 1}$ бўлса; $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, агар $\mathbf{0 \le a < 1}$ бўлса; 1, агар $\mathbf{0 \le a < 1}$ бўлса. **518.** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$, агар $\mathbf{a > b}$ бўлса; $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$, агар $\mathbf{a = b}$ бўлса; $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$, агар $\mathbf{a < b}$ бўлса. **519.** 1. **520.** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. **521.** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$. **522.** 1. **523.** 5. **524.** 3. **525.** 1. **526.** 1. **527.** 1. **528.** 0. **529.** 0. **530.** $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$. **531.** $-\sqrt{\mathbf{3}}$. **532.** 3. **533.** $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$. **534.** $\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$. **535.** $\mathbf{e^{-4}}$. **536.** $\sqrt{\mathbf{e}}$. **537.** $\mathbf{e^{-2}}$. **538.** $\mathbf{e^{3}}$. **539.** $\mathbf{1;0}$. **540.** $\mathbf{+\infty;0}$. **541.** $\mathbf{1;0}$. **542.** $\mathbf{2;1}$. **543.** $\mathbf{6;-4}$. **544.** $\mathbf{1;-\frac{1}{2}}$. **545.** $\mathbf{-\infty;+\infty}$. **546.** $\mathbf{e+1;-\left(e+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$. **547.** $\mathbf{2;1}$. **548.** $\mathbf{1;0}$. **549.** $\mathbf{0;1}$. **550.** $\mathbf{\{x_n\};\ 1,\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2}+\frac{1}{3},\frac{1}{4},1+\frac{1}{4},\frac{1}{2}+\frac{1}{4},\frac{1}{3}+ +\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots,\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\ \ 1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\ldots;0}$. **551.** $\mathbf{[0;1]}-$кесмадаги ихтиёрий ҳақиқий сон. **552.** $\mathbf{a;b}$. **559.** а) узоқлашади, б) яқинлашиши ҳам, узоқлашиши ҳам мумкин. **560.** а) шарт эмас б) шарт эмас. **561.** шарт эмас. **562**. шарт эмас, масалан: $\mathbf{x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}}$ ва $\mathbf{y_n = \frac{1-(-1)^n}{2}}$. **590.** $\mathbf{a = \pm 1}$ нуқталарда. **591.** мавжуд эмас. **592.** $\mathbf{0;1}$. **593.** $\boldsymbol{\pi}$; мавжуд эмас. **594.** $\mathbf{0;+\infty}$. **595.** $\mathbf{1;1}$. **596.** $\mathbf{1;-1}$. **597.** $\mathbf{-1;1}$. **598.** $\mathbf{\frac{1}{3};0}$. **599.** $\mathbf{+\infty;1}$. **600.** $\mathbf{110;109}$. **601.** $\mathbf{1;-1}$. **602.** $\mathbf{\sqrt{2};-\sqrt{2}}$. **603.** $\mathbf{1;0}$. **604.** $\mathbf{2;3}$. **605.** **4.** **606.** **0.** **607.** 3. **608.** $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}$. **609**. $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{m}}$. **610.** $\mathbf{\frac{n-m}{2}}$. **611.** 3. **612.** $\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{12}}$. **613.** $\mathbf{\frac{nm}{am+bn}}$. **614.** $\mathbf{2n}$. **615.** 1. **616.** $\mathbf{\frac{n(n+1)}{2}}$. **617.** 1. **618.** $\mathbf{e^{3}}$. **619.** $\mathbf{e^{-2}}$. **620.** $\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}}$. **621.** 1. **622.** -1. **623.** $\mathbf{-\frac{9}{128}}$. **624.** $\mathbf{\cos a}$. **625**. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. **626**. $\mathbf{\frac{1}{2\pi}}$. **627.** $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. **628.** **4.** **629.** **1.** **630.** **18**. **631.** $\mathbf{e^{\frac{1}{2a+tga}},\ a \ne \frac{\pi}{2}+\pi k}$.

632. 1. 633. $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 634. 1. 635. -4. 636. $e^{\frac{3}{2}}$. 637. $\sqrt{e}$. 638. $\ln 3$. 639. 5. 640. 2.

641. $\ln 4$. 642. $\frac{25}{16}$. 643. $\sqrt{ab}$. 644. 0. 645. $\sqrt{2}$. 646. a) $+\infty$; b) $\frac{1}{2}$.

647. a) -1; b) 1. 648. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{агар } |x|<1 \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } |x|=1 \text{ бўлса} \end{cases}$.

649. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } 0\le x<1 \text{ бўлса}, \\ \frac{1}{2} & \text{агар } x=1 \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса}. \end{cases}$. 650. $f(x)=|x|$.

651. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{агар } 0\le x\le 1 \text{ бўлса}, \\ x, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса} \end{cases}$. 652. $f(x)=\begin{cases} 1, & \text{агар } 0\le x\le 1 \text{ бўлса}, \\ x, & \text{агар } 1<x<2 \text{ бўлса}, \\ \frac{x^2}{2}, & \text{агар } x\ge 2 \text{ бўлса} \end{cases}$.

653. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } x\ne(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ бўлса}, \\ 1, & \text{агар } x=(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ бўлса}, \\ k\in Z. \end{cases}$.

654. $f(x)=\begin{cases} \ln 2, & \text{агар } 0\le x\le 2 \text{ бўлса}, \\ \ln x, & \text{агар } x>2 \text{ бўлса}. \end{cases}$.

655. $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{агар } -1\le x\le 1 \text{ бўлса}, \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{агар } x>1 \text{ бўлса} \end{cases}$. 663. $\frac{\sin x}{x}$. 665. $\alpha=1; \beta=-3$.

666. $\alpha=-1; \beta=\frac{1}{3}$. 667. $\alpha=1; \beta=0$. 668. $\alpha>0,\ \beta-$ ихтиёрий; $\alpha\le 0,\ \beta<0,\ \alpha>\beta$. 669. $\alpha+\beta>0$. 670. $\alpha>\beta$. 671. $\alpha=2; \beta=\frac{1}{4}$.

672. а) $\alpha=1, \beta=\frac{1}{8}$; б) $\alpha=\sqrt{2}, \beta=\frac{1}{2}$. 673. $\alpha=\frac{1}{2}; \beta=2$. 674. $\alpha=7; \beta=2$.

675. $\alpha=\frac{1}{8};\ \beta=-4$. **676.** $n=4$. **677.** $n=2$. **678.** $n=4$. **679.** $n=3$. **680.** $n=2$. **681.** $n=3$. **682.** $n=2$. **683.** $n=2$. **684.** $n=1$. **685.** $n=6$. **686.** $n=3$. **692.** $e;\frac{1}{e}$. **693.** $+\infty;0$. **694.** $\pi;0$. **695.** $+\infty;-\frac{1}{2}$. **696.** $\pi;-\frac{\pi}{2}$. **697.** $3;-3$. **698.** $1;-1$. **699.** $e;2$. **715.** $x=0$ нуқтада узилишга эга. **716.** $x=k,\ k\in Z$ нуқталарда узилишга эга. **717.** $x=-2$ нуқтада узилишга эга. **718.** $x=0$ ва $x=1$ нуқталарда узилишга эга. **719.** $x=0$ нуқтада узилишга эга. **720.** $x=k\pi,\ k\in Z$ нуқталарда узилишга эга. **721.** $x=k,\ k\in Z$ нуқталарда узилишга эга. **722.** $x=k,\ k\in Z$ нуқталарда узилишга эга. **723.** $x=\frac{1}{k},\ k\in Z$ нуқталарда узилишга эга. **724.** $x=k\pi,\ k\in Z$ нуқталарда узилишга эга. **725.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z$ нуқталарда узилишга эга. **726.** $x=0$ нуқтада узилишга эга. **727.** $A=6$ бўлса узлуксиз; $A\neq 6$ бўлса $x=3$ нуқтада узилишга эга. **728.** узлуксиз. **733.** $A=n$. **734.** $A=1$. **735.** $A=\ln a$. **736.** $A=-2$. **737.** $A=\frac{1}{2}$. **738.** $A=e$. **739.** $A=0$. **740.** $A=1$. **741.** $A=0$.

742. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } 0\le x<1 \text{ бўлса},\\ \frac{1}{2}, & \text{агар } x=1 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } x>1 \text{ бўлса}.\end{cases}$ $x=1$ - 1-тур узилиш нуқтаси. **743.**

$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{агар } |x|<1 \text{ бўлса},\\ 0, & \text{агар } x=\pm 1 \text{ бўлса},\\ 1, & \text{агар } |x|>1 \text{ бўлса}.\end{cases}$ $x=\pm 1$ – 1-тур узилиш нуқталари. **744.**

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{агар } x>0 \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x=0 \text{ бўлса,}\\ x, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$$ $x=0$ - 2-тур узилиш нуқтаси.

745. $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{агар } x\ge 0 \text{ бўлса,}\\ x, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса.}\end{cases}$ Функция узлуксиз.

746. $f(x)=\begin{cases}1, & \text{агар } |x|\le 1 \text{ бўлса,}\\ x^2, & \text{агар } |x|>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$ Функция узлуксиз.

747. $f(x)=\begin{cases}x, & \text{агар } |x-k\pi|<\frac{\pi}{6} \text{ бўлса,}\\ \frac{x}{2}, & \text{агар } x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi \text{ бўлса,}\\ 0, & \text{агар } \frac{\pi}{6}<|x-k\pi|<\frac{5\pi}{6} \text{ бўлса.}\end{cases}$ $k\in Z.$

$x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$ – 1-тур узилиш нуқталари.

748. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{агар } x\ne k\pi \text{ бўлса,}\\ 1, & \text{агар } x=k\pi \text{ бўлса.}\end{cases}$ $k\in Z.$ $x=k\pi$ – 1-тур узилиш нуқталари. **749.** Функция узлуксиз. **750.** $x=k$ $(k=\pm1,\pm2,...)$ - 1-тур узилиш нуқталари. **751.** $x=\pm\sqrt{n}$ $(n=1,2,...)$ - 1-тур узилиш нуқталари. **752.** $x=\pm\sqrt{k\pi}$ $(k=0,1,2,...)$ - 2-тур узилиш нуқталари. **753.** $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$ - 1-тур узилиш нуқталари, $x=0$. - 2-тур узилиш нуқтаси. **754.** а) $f(g(x))$ узлуксиз; $g(f(x))$ функция $x=0$ нуқтада узилишга эга; б) $f(g(x))$ функция $x=-1,$ $x=0$ ва $x=1$ нуқталарда узилишга эга; $g(f(x))=0$ узлуксиз; в) $f(g(x))$ ва $g(f(x))$ функциялар узлуксиз. **787.** текис узлуксиз. **788.** текис узлуксиз. **789**. текис узлуксиз эмас. **790.** текис узлуксиз эмас. **791**. текис узлуксиз эмас. **792.** текис узлуксиз. **793.** текис узлуксиз. **794.** текис узлуксиз. **795.** текис узлуксиз**.** **796.** текис узлуксиз. **797.** $\omega_f(\delta) = 2\delta$. **798.** $\omega_f(\delta) = \begin{cases} \delta(2e - \delta), & \text{агар } 0 < \delta < e \text{ бўлса}, \\ e^2, & \text{агар } \delta \geq e \text{ бўлса}. \end{cases}$

799. $\omega_f(\delta) = \dfrac{\delta}{a(a+\delta)}$. **800.** $\forall\delta > 0$ учун $\omega_f(\delta) = +\infty$. **801.** $\forall\delta > 0$ учун $\omega_f(\delta) = +\infty$. **802.** $\omega_f(\delta) = \ln(1+\delta)$.

803. $\omega_f(\delta) = \begin{cases} 2\sin\dfrac{\delta}{2}, & \text{агар } 0 < \delta < \pi \text{ бўлса}, \\ 2, & \text{агар } \delta \geq \pi \text{ бўлса}. \end{cases}$

823. 0,2. **824.** 0. **825.** 1. **826.** -1. **827.** $3x^2 + 2$. **828.** $-\dfrac{1}{x^2}$. **829.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ **830.** $\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

831. $-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. **832.** $2^{x+1}\ln 2$. **833.** $\dfrac{1}{x}$. **834.** $2\cos 2x$. **835.** $-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

836. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **837.** $-\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$. **838.** $\dfrac{7}{x^2+2x+2}$. **839.** $\dfrac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$

840. $\dfrac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$. **841.** $\dfrac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}$.

842. $\dfrac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3}$ **843.** $-\dfrac{(1-x)^{p-1}[p+q+(p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$.

844. $\dfrac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2}\cdot\left[p-(q+1)x-(p+q-1)x^2\right]$ **845.** $1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

846. $-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}-\dfrac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$. **847.** $\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. **848.** $\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}$

849. $\dfrac{6+3x+8x^2+4x^3+2x^4+3x^5}{\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{(3+x^3)^2}}$. **850.** $\dfrac{(n-m)-(n+m)x}{(n+m)\cdot\sqrt[n+m]{(1-x)^n(1+x)^m}}$.

851. $\dfrac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$ **852.** $\dfrac{2x^2}{1-x^6}\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. **853.** $-\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

854. $\dfrac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ 855. $\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}}$.

856. $-2\cos x(1+2\sin x)$. 857. $x^2\sin x$ 858. $-\sin 2x\cdot\cos(\cos 2x)$.

859. $n\sin^{n-1}x\cdot\cos(n+1)x$. 860. $\cos x\cdot\cos(\sin x)\cdot\cos[\sin(\sin x)]$.

861. $\dfrac{2\sin x\cdot\left(\cos x\cdot\sin x^2-x\sin x\cdot\cos x^2\right)}{\sin^2 x^2}$. 862. $-\dfrac{1+\cos^2 x}{2\sin^3 x}$. 863. $\dfrac{n\sin x}{\cos^{n+1}x}$.

864. $\dfrac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$. 865. $\dfrac{2}{\sin^2 x}$. 866. $1+\mathrm{tg}^6 x$. 867. $\dfrac{8}{3\sin^4 x\sqrt[3]{\mathrm{ctg}x}}$.

868. $\dfrac{-16\cos\dfrac{2x}{a}}{a\sin^3\dfrac{2x}{a}}$. 869. $\dfrac{3}{x}+\left(\dfrac{3}{x}\right)^2+\left(\dfrac{3}{x}\right)^3$. 871. $\dfrac{\ln 2}{2}\cdot\left(\sqrt{2}\right)^x-\dfrac{\ln 5}{2}\left(\sqrt{5}\right)^{-x}$.

872. $\left(x^2-5x+1\right)e^x$. 873. $\left(\ln 2\cdot\ln|x|+\dfrac{1}{x}\right)\cdot 2^x$. 874. $\left(\log_2 x+\dfrac{1}{x\ln 2}\right)\cdot e^x$.

875. $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\ln x\cdot\log_3 x}{\ln 2}+\log_2 x\cdot\log_3 x+\dfrac{\ln x\cdot\log_2 x}{\ln 3}\right)$. 876. $-\dfrac{1}{x\ln x\log_2 x}$.

877. $\dfrac{\ln x-1}{\ln x\cdot\log_2 x}$. 878. $x^2e^{-x}\sin x$. 879. $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2\sin^2\dfrac{x}{2}}$ $(x\neq 2k\pi)$.

880. $-\dfrac{1+\ln^2 3}{3^x}\cdot\sin x$. 881. $\sqrt{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx$. 882. $e^x\left[1+e^{e^x}\left(1+e^{e^{e^x}}\right)\right]$.

883. $y\cdot\left(\ln\dfrac{a}{b}-\dfrac{a-b}{x}\right)$. 884. $a^a\cdot x^{a^a-1}+ax^{a-1}a^{x^a}\ln a+a^x a^{a^x}\cdot\ln^2 a$.

885. $\dfrac{6}{x}\lg e\lg^2 x^2$. 886. $\dfrac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}$. 887. $\dfrac{6}{x\ln x\ln\left(\ln^3 x\right)}$.

888. $\dfrac{1}{(1+x)^2\left(2+x^2\right)}$. 889. $\dfrac{x}{x^4-1}$. 890. $\dfrac{1}{x\left(1+x^4\right)^2}$. 891. $\dfrac{1}{3x^2-2}$

892. $\dfrac{2}{\left(1-x^2\right)\left(1-kx^2\right)}$. 893. $\dfrac{1}{2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$. 894. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

895. $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. 896. $\ln^2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. 897. $\sqrt{x^2+a^2}$. 898. $\dfrac{1}{a-bx^2}$.

899. $-\dfrac{8}{x^5\sqrt{1-x^2}}$. 900. $\dfrac{1}{\sin x}$. 901. $\dfrac{1}{\cos x}$. 902. $-\operatorname{ctg}^3 x$. 903. $-\dfrac{1}{\cos x}$.

904. $\dfrac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$. 905. $\dfrac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$. 906. $-\dfrac{\ln^3 x}{x^2}$ $(x>0)$. 907. $\dfrac{1}{x^5}\cdot\ln x$.

908. $\dfrac{2x}{1+\sqrt[3]{1+x^2}}$. 909. $-\dfrac{1+x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}}{\left(1+x\ln\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left[1+x\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right]}$. 910. $2\sin(\ln x)$.

911. $\sin x\cdot\ln\operatorname{tg}x$. 912. $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. 913. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 914. $\dfrac{1}{x^2+2}$.

915. $\dfrac{2ax}{x^4+a^2}$. 916. $\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$. 917. $-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\arccos x$. 918. $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$.

919. $\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$. 920. $\operatorname{sgn}(\cos x)$. 921. $\dfrac{2\operatorname{sgn}(\sin x)\cdot\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$. 922. $\dfrac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$.

923. $\dfrac{\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$. 924. $\dfrac{1}{1+x^2}$. 925. $1+x^x(1+\ln x)+x^x\cdot x^{x^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$.

926. $x^{a-1}\cdot x^{x^a}(1+a\ln x)+a^x\cdot x^{a^x}\left(\dfrac{1}{x}+\ln a\cdot\ln x\right)+x\cdot^{x} a^{x^x}\cdot\ln a\cdot(1+\ln x)$.

927. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. 928. $(\sin x)^{1+\cos x}\left(\operatorname{ctg}^2 x-\ln\sin x\right)-$

$-(\cos x)^{1+\sin x}\left(\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x\right)$. 929. $\dfrac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x+1}}\cdot\left[x-2\ln^2 x+x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)\right]$.

930. $2y\left\{\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\cdot\ln\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}+\operatorname{arctg}^2 x\left[\dfrac{\sin x\cdot\operatorname{sgn}(\cos x)}{\arcsin(\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}-\right.\right.$

$\left.\left.-\dfrac{\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)}{\arccos(\cos^2 x)\sqrt{1+\cos^2 x}}\right]\right\}$. 931. $-\dfrac{1}{x}(\log_x e)^2$. 932. $\operatorname{th}^3 x$. 933. $-\dfrac{2}{\operatorname{sh}^3 x}$.

934. $\frac{1}{ch2x}$. **935.** $\frac{sgn(shx)}{chx}$. **936.** $\frac{a+bchx}{b+achx}$. **937.** мавжуд эмас. **938.** мавжуд эмас. **939.** $f'(0)=0$. **940.** $f'(0)=0$. **941.** мавжуд эмас. **942.** мавжуд эмас. **943.** $f'(0)=0$. **944.** $f'(0)=0$. **945.** мавжуд эмас. **944.** мавжуд эмас. **945.** $f'(0)=0$. **946.** $f'(0)=0$. **947.** **мавжуд эмас.** **948.** $f'_+(1)=\ln 4$, $f'_-(1)=-\ln 4$. **949.** $f'_+(0)=1$, $f'_-(0)=-1$, $f'_-(\sqrt{\pi})=-\infty$, $f'_+(\sqrt{\pi})$ - мавжуд эмас. **950.** $f'_-(-1)=f'_+(1)=+\infty$, $f'_+(-1)$ ва $f'_-(1)$- мавжуд эмас. **951.** $f'(0)=0$. **952.** $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$. **953.** $f'_-(0)=-\infty$, $f'_+(0)=0$. **954.** мавжуд эмас. **955.** мавжуд эмас. **956.** $f'_-(1)=-e$, $f'_+(1)=e$.

957. $f'_-(0)=0$ $f'_+(0)=+\infty$. **958.** $f'(0)=\frac{1}{2}$ $f'(1)=\sin 1+\cos 1-1$.

972. $x'(0)=1, x'\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{1}{2}$. **973.** $x'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. **974.** $x'(1)=5$.

975. $x'(0)=-\frac{\sqrt{2}}{8}$. **976.** $x'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **977.** $x'(y)=\frac{x}{x+1}, y\in R$.

978. $x'(y)=\frac{1}{1+y-x}, y\in R$. **979.** $x'(y)=\frac{x^3}{2y^2}, y\in(0;1)$.

980. $x'(y)=\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}, y\in(1;+\infty)$. **981.** $y'_x=-1$. **982.** $y'_x=-3t^2e^t$.

983. $y'_x=-\frac{b}{a}ctgt$. **984.** $y'_x=\frac{b}{a}ctht$. **985.** $y'_x=1-\frac{3}{t}+\frac{9}{t^2}$. **986.** $y'_x=\frac{3t-7}{3t-5}$.

987. $y'_x=ctg\frac{t}{2}$. **988.** $y'_x=\frac{2\cos t}{1+\cos t}$. **989.** $x'_y=\frac{3t+1}{3-3t}$. **989.** $x'_y=1-\frac{1}{t^2}$.

990. $x'_y=\frac{1}{\sin^3 t(3+4\cos^2 t)}$. **991.** $-\frac{2}{3\pi}$. **992.** 1. **993.** 0. **994.** $\frac{1}{5y^4+3y^2+1}$.

995. $\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}$. **996.** $\frac{p}{y}$. **997.** $\frac{b^2x}{a^2y}, |x|>a$. **998.** $\frac{(3a-x)y}{(2a-x)x}, 0<x<2a$.

999. $1-\frac{2}{\sqrt{x}}, 0<x<4$. **1000.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, |x|<a, x\neq 0$. **1001.** $\frac{5}{9}\cdot\frac{3-x}{y+1}, |x-3|<3$.

1002. $\frac{4y-2x-4}{8y-4x-3}, x<3$. **1003.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. б) $-\frac{24}{41}$. в) $-\frac{1}{e}$. г) $-e^2$.

1004. $x=\frac{2\pi k}{3}$ нуқталарда $\varphi=\mathrm{arctg}3, x=\frac{\pi(2k+1)}{3}$ нуқталарда $\varphi=\pi-\mathrm{arctg}3$ $(k\in Z)$. **1005.** $\frac{\pi}{4}$. **1006.** $x=1$ нуқтада $\varphi=\frac{\pi}{4}, x=-1$ нуқтада $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. **1007.** $x=\frac{3\pi}{4}$. **1008.** $\mathrm{arctg}\alpha$. **1009.** $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$. **1010.** 0.

1011. $x=-3$ нуқтада $\varphi=\mathrm{arctg}3, x=3$ нуқтада $\varphi=\pi-\mathrm{arctg}3$.

1012. $(-1;14), (2;-13)$. **1013.** $(0;-1), (1;-6), (-2;-33)$. **1014.** $(-1;-58), (1;54), (7;-2106)$. **1015.** $(\pi k;1-5\cdot(-1)^k), k\in Z$. **1016.** $(1;2e), (-3;-6e^{-3})$.

1017. $(2;0), \left(5;-\frac{27}{4}\right)$. **1018.** $(3;0), \left(\frac{9}{2};\frac{27}{16}\right)$. **1019.** $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

1020. $(-2;1+\sqrt{3})$. **1021.** $y=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$. **1022.** $y=2x$. **1023.** $y=-3x$.

1024. $y=-3x+\frac{3\pi}{2}$. **1025.** $\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{7}{2}$. **1026.** $x+2y-\pi-2=0$.

1027. $8x+4y-8-\pi=0$. **1028.** $x=6$. **1029.** $y-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}=2\sqrt[3]{2}(x+3)$.

1030. $\sqrt{2px_0}\cdot x+py-\sqrt{2px_0}(p+x_0)=0$. **1031.** $y-\frac{1}{4}e^{\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{12}\cdot\left(x-\frac{3}{4}e^{\frac{\pi}{3}}\right)$. **1033.** $5x+6y-13=0; 6x-5y+21=0$.

1034. $9x+2y+12=0; 2x-9y+31=0$. **1035.** $14x-13y+12=0; 13x+14y-41=0$. **1036.** $x+y-2=0; y=x$.

1037. $y-y_0=\frac{x_0^2(6-x_0)}{y_0(4-x_0)^2}\cdot(x-x_0); y-y_0=-\frac{y_0(4-x_0)^2}{x_0^2(6-x_0)}\cdot(x-x_0)$.

1038. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2;\ ax-by=a^2-b^2$. **1039.** $3x-y-4=0;\ x+3y-28=0$.

1040. $x+y-1=0;\ x-y=0$. **1041.** $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=$

$=0;\ (\pi-4)x-(\pi+4)y+\pi\sqrt{2}=0$. **1042.** $7x-10y+6=0;\ 10x+7y-34=0$.

1043. $3x-y-1=0;\ x+3y-7=0$. **1044.** $(0;0),\ \varphi=\mathrm{arctg}\frac{2}{3}$.

1045. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k\ ;(-1)^k\right),\ \varphi=\frac{\pi}{2}$. **1046.** $(0;0),\ \varphi=0\ ;\ (1;1),\ \varphi=\mathrm{arctg}\frac{1}{7}$.

1047. $(1;1),\ \varphi=\mathrm{arctg}3$. **1048.** $(1;1),\ \varphi=\frac{\pi}{4}$. **1049.** $\left(\sqrt{e};\frac{1}{2}\right),\ \varphi=0$.

1050. $(1;1)$ ва $(4;4),\ \varphi=\mathrm{arctg}\frac{6}{7}$. **1051.** $(3;34),\ \varphi=0;\ (-2;4),\ \varphi=\mathrm{arctg}\frac{25}{153}$.

1052. $-\frac{\pi}{8}$. **1053.** 90,75 Дж. . **1054.** $\frac{1}{3}$ м/с. **1055.** 0,05 м^3/с. **1056.** 4π рад/с.

1057. 15 м/с. **1058.** $\vartheta=(\vartheta_0\cos\alpha,\vartheta_0\sin\alpha-gt),\ |\vartheta|=\sqrt{\vartheta_0^2-2\vartheta_0 gt\sin\alpha+g^2t^2}$.

1059. $3(x-1)\cdot\Delta x^2+\Delta x^3$. **1060.** $-\frac{dx}{x^2}$. **1061.** $\frac{dx}{a^2+x^2}$. **1062.** $\frac{dx}{x^2-a^2}$.

1063. $\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}$. **1064.** $\frac{\mathrm{sgn}\,a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$. **1065.** $\left(\frac{1}{x}-e^{-x}\right)dx$.

1066. $\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x(x+\sqrt{x})}}dx$. **1067.** $9\sqrt{x}\ln x dx$. **1068.** $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$.

1069. $\frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-1}}dx$. **1070.** $\mathrm{sh}^4\left(\frac{x}{35}\right)\mathrm{ch}^3\left(\frac{x}{35}\right)dx$. **1071.** $\frac{x\arcsin x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}dx$.

1072. $\frac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}dx$. **1073.** $x^{x^2}(1+2\ln x)x dx$. **1074.** $-\frac{1}{2}dx$.

1075. $\frac{2e^2}{e^2+1}dx;\ 0$. **1076.** $-\frac{89\sqrt{2}}{192}dx$. **1077.** $(2+\ln 4)dx;\ 0$.

1078. $\vartheta\omega du + u\omega d\vartheta + u\vartheta d\omega$. **1079.** $\frac{\vartheta du - 2ud\vartheta}{\vartheta^3}$. **1080.** $-\frac{udu + \vartheta d\vartheta}{\left(u^2+\vartheta^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

1081. $\frac{\vartheta du - ud\vartheta}{u^2+\vartheta^2}$. **1082.** $\frac{udu + \vartheta d\vartheta}{u^2+\vartheta^2}$. **1083.** $1-4x^3-3x^6$.

1084. $\frac{1}{2x^2}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right)$. **1085.** $-\mathrm{ctg}x$. **1086.** $-\mathrm{tg}^2x$. **1087.** -1.

1088. $\frac{12}{11}dx$. **1089.** $\frac{1}{4}dx$. **1090.** $\frac{y_0^2-4x_0^3}{5y_0^4-2x_0y_0}dx$. **1091.** $\frac{y_0}{x_0-y_0}dx$.

1092. $-\frac{11}{20}dx$. **1093.** $\frac{1}{3}dx$. **1094.** $-2\pi\cdot\frac{\ln 3}{3+\ln 3}dx$. **1095.** 0. **1096.** $\frac{1}{2}dx$.

1097. $\frac{1}{8}dx$. **1098.** 1,007 (жадвал бўйича 1,0066). **1099**. 0,4849 (жадвал бўйича 0,4848). **1100.** -0,8747 (жадвал бўйича -0,8746). **1101.** 0,8104=$\mathrm{arc}46^0 26'$ (жадвал бўйича $\mathrm{arc}46^0 24'$). **1102.** 1,043 (жадвал бўйича 1,041). **1103.** 2.

1104. $\frac{9702}{x^{100}}$. **1105.** $3x\left(1-x^2\right)^{-\frac{5}{2}}$. **1106.** $-2\cos 2x$. **1107.** $4\mathrm{ch}2x$.

1108. $-x\left(x^2+1\right)^{-\frac{3}{2}}$. **1109.** $-x\left(1+x^2\right)^{-2}$. **1110.** $(x-1)\left(2x-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}$.

1111. $-\frac{4x\,\mathrm{sgn}\,x}{\left(1+x^2\right)^2}$. **1112.** $4x^3\left(1+x^4\right)^{-\frac{5}{4}}$. **1113.** $y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=0$.

1114. $\left(x^2-3x+1\right)e^{-x}dx^2$. **1115.** $\frac{8\mathrm{ctg}2x}{\sin^2 2x}dx^2$. **1116.** $-\frac{2\sin\ln x}{x}dx^2$.

1117. $\left(x(1+\ln x)^2+1\right)x^{x-1}dx^2$. **1118.** $ud^2\vartheta + 2dud\vartheta + \vartheta d^2u$.

1119. $\frac{\vartheta\left(\vartheta d^2u - ud^2\vartheta\right) - 2d\vartheta\left(\vartheta du - ud\vartheta\right)}{\vartheta^3}$. **1120.** $u^{m-2}\vartheta^{n-2}\left\{\left[m(m-1)\vartheta^2du^2 + \right.\right.$

$\left.\left.+2mnu\vartheta dud\vartheta + n(n-1)u^2d\vartheta^2\right] + u\vartheta\left(m\vartheta d^2u + nud^2\vartheta\right)\right\}$.

1121. $a^u \ln a\left(du^2 \ln a + d^2u\right)$. 1122. $\left[\left(\vartheta^2 - u^2\right)du^2 - 4u\vartheta du d\vartheta + \right.$ $\left. + \left(u^2 - \vartheta^2\right)d\vartheta^2 + \left(u^2 + \vartheta^2\right)\left(ud^2u + \vartheta d^2\vartheta\right)\right] \cdot \left(u^2 + \vartheta^2\right)^{-2}$. 1123. $\left[-2u\vartheta du^2 + \right.$ $\left. + 2\left(u^2 - \vartheta^2\right)du d\vartheta + 2u\vartheta d\vartheta^2 + \left(u^2 + \vartheta^2\right)\left(\vartheta d^2u - ud^2\vartheta\right)\right] \cdot \left(u^2 + \vartheta^2\right)^{-2}$.

1124. $-\frac{2}{9}t^4$. 1125. $\frac{6}{t}\left(\frac{1+t^3}{2-t^3}\right)^3$. 1126. $-\frac{8\cos^2 t}{\cos^2 2t}$. 1127. $-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}$.

1128. $\frac{1}{\cos^3 t\left(3\cos^3 t - 1\right)}$. 1129. $-\frac{1}{\mathrm{tsh}^3 t}$. 1130. $\frac{2(1+t)^3}{te^t}$. 1131. $\frac{\cos^3 t}{\sin t}$.

1132. $\frac{3\sin \log_2 t}{\cos^5 \log_2 t}$. 1133. $2^{3\sin^2 t - 1}$. 1134. $-\frac{a^2}{y^3}$. 1135. $-\frac{a^2}{y^3}$. 1136. $-\frac{b^4}{a^2 y^3}$.

1137. $-\frac{p^2}{y^3}$. 1138. $\frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$. 1139. $-\frac{3 + 2\ln x}{x^2(1 + 2\ln x)^2}$. 1140. $\frac{2\left(x^2+y^2\right)}{(x-y)^3}$.

1141. $\frac{2x^2y\left(3y^4 + 2\left(3 - x^4\right)y^2 + 3 + 2x^4\right)}{\left(y^2+1\right)^3}$. 1142. $4 \cdot 6!;\, 0$.

1143. $-\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}}$. 1144. $-\frac{17!!}{2^{10}x^9 \cdot \sqrt{x}}$. 1145. $\frac{8!}{(1-x)^9}$.

1146. $\frac{197!!(399 - x)}{2^{100}(1-x)^{100}\sqrt{1-x}}$. 1147. $2^{20}e^{2x}\left(x^2 + 20x + 95\right)$.

1148. $e^x \cdot \sum_{i=1}^{10}(-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}}$, бу ерда $A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdot \ldots (11 - i)$ ва $A_{10}^0 = 1$. 1149. $-\frac{6}{x^4}$.

1150. $\frac{274}{x^6} - \frac{120}{x^6} \cdot \ln x$. 1151. $2^{50}\left(-x^2 \sin 2x + 50x\cos 2x + \frac{1225}{2} \cdot \sin 2x\right)$.

1152. $\frac{27(1-3x)^2 - 36}{(1-3x)^{7/3}} \cdot \sin 3x - \frac{27(1-3x)^2 - 28}{(1-3x)^{10/3}} \cdot \cos 3x$.

1153. $-2^8 \cdot \sin 2x - 2^{18} \sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10} \sin 6x$. 1154. $x \cdot \mathrm{sh}x + 100\mathrm{ch}x$.

1155. $-4e^x \cos x$. 1156. $-\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} - \frac{96}{x}\right) \cdot \sin 2x +$

$+\left(\frac{60}{x^6}-\frac{180}{x^4}+\frac{120}{x^2}+32\ln x\right)\cdot\cos 2x$. **1157.** $120dx^5$. **1158.** $-\frac{15}{8x^3\sqrt{x}}dx^3$.

1159. $-1024(x\cos 2x+5\sin 2x)dx^{10}$. **1160.** $e^x\left(\ln x+\frac{4}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{8}{x^3}-\frac{6}{x^4}\right)dx^4$.

1161. $8\sin x\,\mathrm{sh}x\,dx^6$. **1163.** $3^n e^{3x}$, $n>3$; $y'''=6+27e^{3x}$; $y''=6x+9e^{3x}$.

1164. $a_0\cdot n!$. **1165.** $\frac{2\cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$. **1166.** $(-1)^{n-1}n!c^{n-1}(ad-bc)(cx+d)^{-n-1}$.

1167. $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$. **1168.** $-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

1169. $\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\left((a-b)x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\left((a+b)x+\frac{\pi n}{2}\right)$.

1170. $y^{(2k-1)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k-1}\mathrm{sh}(a+b)x+\frac{1}{2}(a-b)^{2k-1}\mathrm{sh}(a-b)x$;

$y^{(2k)}=\frac{1}{2}(a+b)^{2k}\mathrm{ch}(a+b)x+\frac{1}{2}(a-b)^{2k}\mathrm{ch}(a-b)x$. **1171.** $2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+$

$+4^{n-1}\sin\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **1172.** $4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **1173.** $2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+$

$+2^{2n-3}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right)$. **1174.** $(2n-1)!!(1-2x)^{-(2n+1)/2}$.

1175. $\frac{(-1)^n n!}{4}\left(3(x-6)^{-n-1}+(x+2)^{-n-1}\right)$. **1176.** $n!\left((1-x)^{-n-1}+\right.$

$\left.+(-1)^n(1+x)^{-n-1}\right)$. **1177.** $(-1)^n n!\left(2^n(2x-1)^{-n-1}+(x+2)^{-n-1}\right)$.

1178. $e^x\left[x^n+n^2x^{n-1}+\frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2}+\ldots+n!\right]dx^n$.

1179. $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)dx^n$. **1182.** $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{7}}{3}$. **1187.** $(1;1)$.

1188. Ўринли эмас. **1189.** Умуман олганда, йўқ. **1198.** $1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$.

1199. $e+ex+o(x^2)$. **1200.** $-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$. **1201.** $e-\frac{e}{2}x+\frac{11}{24}ex^2-$

$-\frac{7e}{16}x^3+o(x^3)$. **1202.** $1+x-x^2+\frac{3}{2}x^3+o(x^3)$. **1203.** $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)$.

1204. $x-\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$. **1205.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{5^k}{e\cdot k!}x^k+o(x^n)$.

1206. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin\left(3+k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}+o(x^n)$. **1207.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos\left(2+k\frac{\pi}{2}\right)}{2^k\cdot k!}x^k+o(x^n)$.

1208. $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{e}{2}\right)^k x^k+o(x^n)$. **1209.** $\sum_{k=0}^{n}(k+1)x^k+o(x^n)$.

1210. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{9(\ln 3)^k}{k!}x^k+o(x^n)$. **1211.** $-x+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k k}{(k-1)!}x^k+o(x^n)$.

1212. $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}-2^k+1}{k}x^k+o(x^n)$. **1213.** $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}-2^{-k}}{k}x^k+o(x^n)$.

1214. $3+\sum_{k=1}^{n}\left[3+k(k-1)2^{k-2}\right]\frac{(-1)^k}{k!}x^k+o(x^n)$. **1215.** $-\sum_{k=3}^{n}x^k+o(x^n)$.

1216. $-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}x-\frac{13}{12}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot x^k+o(x^n)$.

1217. $\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}-7\cdot 2^{-(k+1)}}{3}x^k+o(x^n)$. **1218.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k+$

$+o\left((x-2)^n\right)$. **1219.** $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k\sin\left(\frac{k\pi}{2}-1\right)}{k!}(x-1)^k+o\left((x-1)^n\right)$.

1220. $-e^{-2}+\sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-2}2^{k-1}(k-2)}{k!}(x+1)^k+o\left((x+1)^n\right)$.

1221. $\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k e^2 2^{k-2}}{k!}(k^2+3k+4)(x+1)^k+o\left((x+1)^n\right)$.

1222. $\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-2}2^{k-2}(k-5)}{(k-1)!}(x+1)^k+o\left((x+1)^n\right).$

1223. $\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{k-1}\cos 1\cdot 2^{2k-1}}{(2k)!}(x+1)^{2k}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{\sin 1(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!}+(x+1)^{2k+1}+$ $+o\left((x+1)^n\right).$ **1224.** $\ln 2+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(-1)^{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)^k+o\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right).$

1225. $\frac{\ln 5}{3}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(\frac{7}{5}\right)^k-\frac{(x-1)^k}{3k}+o\left((x-1)^n\right).$

1226. $3+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(k-2)}{k(k+1)}(x-1)^k+o\left((x-1)^n\right).$

1227. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left(1+1/3^{k+1}\right)(x-2)^k+o\left((x-2)^n\right).$ **1228.** $-1/2$. **1229.** $1/2$.

1230. 1/24. **1231.** $\frac{1}{2}$. **1232.** 0. **1233.** -2. **1234.** $-e/2$. **1235.** 1. **1236.** $\frac{1}{2}$. **1237.** $\frac{1}{2}$. **1238.** -1/2. **1239.** 1. **1240.** 1/3. **1241.** 17/21. **1242.** $-\pi$. **1243.** $-\pi$. **1244.** $2+\ln 2$. **1245.** 1/3. **1246.** -4/3. **1247.** $-\infty<x<-1$ да камаювчи; $-1<x<1$ да ўсувчи; $1<x<+\infty$ да камаювчи. **1248.** $-\infty<x<6$ да ўсувчи; $6<x<+\infty$ да камаювчи. **1249.** $-\infty<x<-1$ да ўсувчи; $-1<x<1$ да камаювчи; $1<x<+\infty$ да ўсувчи. **1250.** $0\le x<+\infty$ да ўсувчи. **1251.** $k>0$ учун $(-\infty,+\infty)$ да ўсувчи; $k<0$ учун $(-\infty,+\infty)$ да камаювчи. **1252.** $(-\infty,+\infty)$ да ўсувчи. **1253.** $-\infty<x<-1$ да камаювчи; $-1<x<1$ да ўсувчи; $1<x<+\infty$ да камаювчи. **1254.** $0\le x<+\infty$ да ўсувчи; $-\infty<x\le 0$ да камаювчи. **1255.** $-\infty<x<0$ да камаювчи; $0<x<1$ да камаювчи; $1<x<+\infty$ да ўсувчи. **1256.** $-\infty<x<1$ да камаювчи. **1257.** $-\infty<x<1$ да ўсувчи. **1258.** $0<x<\sqrt{5}$ да камаювчи; $\sqrt{5}<x<+\infty$ да ўсувчи. **1259.** $0<x<1,$ $1<x<e$ да камаювчи; $e<x<+\infty$ да ўсувчи. **1260.** $-\infty\le x<-1,\ \ 0<x<1$ да ўсувчи; $-1<x<0,\ \ 1<x<+\infty$ да камаювчи. **1262.** $\frac{k\pi}{2}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ да ўсувчи; $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{3}<x<\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$ да камаювчи; $k=0,\pm1,\pm2,...$. **1263.** $0<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$ да камаювчи; $\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty$ да ўсувчи. **1264.** $-\infty<x<-3,\ 3<x<+\infty$ да камаювчи; $-3<x<-\sqrt{3},\quad -\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\quad \sqrt{3}<x<3$ да ўсувчи. **1265.** $-\infty<x<-1,\ 0<x<1$ да камаювчи; $-1<x<0,\ 1<x<+\infty$ да ўсувчи. **1266.** $-\infty<x<-1,\ -1<x<0,\ 0<x<1$ да ўсувчи; $1<x<+\infty$ да камаювчи. **1267.** $0<x<n$ да ўсувчи; $n<x<+\infty$ да камаювчи. **1268.** $-2\sqrt{2}\le x<-2,\ 0<x<2$ да ўсувчи; $-2<x<0,\ 2<x<2\sqrt{2}$ да камаювчи. **1269.** $-\infty\le x<-1,\ 0<x<+\infty$ да ўсувчи. **1270.** $-\infty<x<3,$ $3<x<+\infty$ да камаювчи. **1271.** $-\infty\le x<-1,\ 1<x<+\infty$ да ўсувчи. **1272.** $0<x<+\infty$ да камаювчи. **1273.** $-\infty<x<0$ да камаювчи; $0<x<+\infty$ да ўсувчи. **1274.** ўсувчи. **1275.** ўсувчи. **1276.** ўсувчи. **1277.** ўсувчи. **1278.** камаювчи. **1279.** ўсувчи. **1280.** ўсувчи. **1281.** $0<x<1$ да камаювчи; $1<x<+\infty$ да ўсувчи. **1282.** $-\infty<x<1$ да камаювчи; $-2<x<+\infty$ да ўсувчи. **1283.** $-\infty<x<-2$ да камаювчи; $-2<x<+\infty$ да ўсувчи. **1284.** $0\le x<\frac{\pi}{2}$ да ўсувчи; $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$ да камаювчи. **1285.** $-\infty<x<-2$ да ўсувчи; $-2<x<8,\ 8<x<+\infty$ да камаювчи. **1286.** $-\infty<x<2$ да камаювчи; $2<x<+\infty$ да ўсувчи. **1287.** $-\infty<x<4$ да ўсувчи; $2<x<+\infty$ да камаювчи. **1289.** ўсувчи. **1290.** камаювчи. **1291.** камаювчи. **1292.** камаювчи. **1293.** ўсувчи. **1294.** камаювчи. **1295.** камаювчи. **1296.** ўсувчи. **1297**. $f'(x)$ функция ўсувчи бўлиши шарт эмас. Масалан $f(x)=x+\sin x$. **1301.** ◄$f(x)=$ $=(1+x)^{\alpha}-1-\alpha x,\ f(0)=0,\ f'(x)=\alpha\left[(1+x)^{\alpha-1}-1\right]$ агар $x\ge0$ бўлса, $f'(x)\ge0$ бўлиб, $f(x)$ ўсувчи бўлади: $f(x)\ge f(0)=0$. $(1+x)^{\alpha}\ge1+\alpha x\ \ x\ge0$. Агар $-1\le x<0$ бўлса, $f'(x)<0$ бўлиб, функция $[-1,0]$ да камаювчи. Демак, $f(x)\ge f(0)=0$ бўлиб, $(1+x)^{\alpha}\ge1+\alpha x$ бўлади.►

1322. $x=3$ да $\min y=-1$. **1323.** $x=0$ да $\min y=0$; $x=\pm\sqrt{2}$ да $\max y=1$.

1324. $\left.\begin{matrix}x=1\\x=3\end{matrix}\right\}$ да $\min y=\frac{3}{4}$; $x=2$ да $\max y=1$. **1325.** экстремум йўқ.

1326. $x=0$ да $\min y=0$; $x=2$ да $\max y=\frac{4}{e^2}$. **1327.** $x=0$ да $\min y=2$.

1328. $x=1$ да $\min y=0$; $x=e\approx 7.389$ да $\max y=4e^{-2}\approx 0.541$.

1329. экстремум йўқ. **1330.** $x=-\frac{1}{2}$ да $\min y=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ да $\max y=\frac{1}{2}$.

1331. экстремум йўқ. **1332.** экстремум йўқ. **1333.** $x=\left(k-\frac{1}{6}\right)\pi$ да $\min y=-\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$; $x=\left(k+\frac{1}{6}\right)\pi$ да $\max y=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$ $(k=0,\pm1,\pm2,...)$.

1334. $x=e$ да $\min y=e$. **1335.** $x=2, x=3$ да $\min y=0$. **1336.** $x=\pm1$ да $\min y=0$; $x=\pm\left(1-\sqrt{2}\right)$ да $\max y=2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}-1}$. **1337.** $x=e$ да $\max y=e^{\frac{1}{e}}$. **1338.** $x=0,\ x=3$ да $\min y=0$. **1339.** $x=0$ да $\min y=0$.

1340. $x=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$. **1341.** $x=0$ да $\min y=0$. **1342.** $x=1$ да $\max y=0$; $x=3$ да $\min y=-4$. **1343.** $x=0$ да $\max y=\sqrt{2}$.

1344. $x=3{,}2$ да $\max y=\frac{9}{16}$. **1345.** $x=-1$ да $\max y=-2$; $x=1$ да $\min y=2$. **1346.** $x=0$ да $\min y=0$. **1347.** $x=\frac{7}{5}$ да $\min y=-\frac{1}{24}$.

1348. $x=\pm1$ да $\min y=0$; $x=0$ да $\max y=1$. **1349.** $x=1$ да $\min y=e$.

1350. $x=\frac{1}{e^2}$ да $\max y=\frac{4}{e^2}$; $x=1$ да $\min y=0$. **1351.** $x=-3$ да $\max y=3\cdot\sqrt[3]{3}$; $x=2$ да $\min y=-\sqrt[3]{44}$. **1352.** $x=k\pi$ да $\max y=(-1)^k+\frac{1}{2}$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$ да $\min y=-\frac{3}{4}$; $k=0,\pm1,\pm2...$.

1353. $\mathbf{n}$-тоқ бўлса, $\mathbf{x=0}$ да $\mathbf{\max y=1}$; $\mathbf{n}$-жуфт бўлса, $\mathbf{x=0}$ да экстримум йўқ. **1354.** 1;0. **1355.** 40;-9. **1356.** 8, мавжуд эмас. **1357.** мавжуд эмас; $\mathbf{\frac{1}{4}}$. **1358.** $\mathbf{\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{2}}$. **1359.** мавжуд эмас; $\mathbf{\frac{1}{\sqrt[e]{e}}}$. **1360.** $\mathbf{\sqrt[3]{9};0}$. **1361.** $\mathbf{e^2;0}$. **1362.** мавжуд эмас; -1. **1363.** $\mathbf{\left(\frac{3}{2};1\right)}$. **1364.** 40;-41. **1365.** $\mathbf{1;e^{-1}}$. **1366.** 4;-4. **1367.** $\mathbf{\frac{\pi}{4};0}$. **1368.** 13;4. **1369.** $\mathbf{-\frac{1}{2}}$. **1373.** $\mathbf{n=7}$. **1374.** $\mathbf{n=1985}$. **1375.** $\mathbf{n=10}$. **1376.** $\mathbf{n=7}$. **1377.** $\mathbf{n=14}$. **1378.** $\mathbf{n=3}$. **1379.** 1;0. **1380.** 1;0. **1381.** 1;0. **1382.** $\mathbf{-\frac{1}{4};-\frac{1}{3}}$. **1383.** $\mathbf{+\infty;\frac{3}{\sqrt[3]{4}}}$. **1384.** $\mathbf{-1;-\infty}$. **1385.** 4;0. **1386.** $\mathbf{\frac{1}{e};0}$. **1387.** $\mathbf{\frac{3}{2};0}$. **1388.** $\mathbf{+\infty;\frac{5}{2}}$. **1389.** $\mathbf{-\infty<x<0}$ да қаварик; $\mathbf{0<x<+\infty}$ да ботиқ. **1390.** $\mathbf{-\infty<x<0}$ да қаварик; $\mathbf{0<x<+\infty}$ да ботиқ. **1391.** $\mathbf{-\infty<x<\frac{1}{3}}$, $\mathbf{1<x<+\infty}$ да ботиқ; $\mathbf{\frac{1}{3}<x<1}$ да қаварик. **1392.** $\mathbf{|x|<\frac{a}{\sqrt{3}}}$ да қаварик; $\mathbf{|x|>\frac{a}{\sqrt{3}}}$ да ботиқ. **1393.** $\mathbf{(-\infty,-1)}$ да қаварик; $\mathbf{(1,+\infty)}$ да ботиқ. **1394.** $\mathbf{-\infty<x<0}$ да ботиқ; $\mathbf{0<x<+\infty}$ да қаварик. **1395.** $\mathbf{-\infty<x<-1}$ да қаварик; $\mathbf{1<x<+\infty}$ да ботиқ. **1396.** $\mathbf{0<x<\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$ да қаварик; $\mathbf{\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}<x<+\infty}$ да ботиқ. **1397.** ботиқ. **1398.** $\mathbf{\left(-\infty<x<-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$, $\mathbf{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}<x<+\infty\right)}$ да ботиқ; $\mathbf{-\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}}}$ да қаварик. **1399.** $\mathbf{2k\pi<x<(2k+1)\pi}$ да қаварик; $\mathbf{(2k+1)\pi<x<(2k+2)\pi}$ да ботиқ $\mathbf{k\in Z}$. **1400.** $\mathbf{-1<x<0}$, $\mathbf{\sqrt[3]{2}<x<+\infty}$ да ботиқ; $\mathbf{0<x<\sqrt[3]{2}}$ да қаварик. **1401.** $\mathbf{0<x<1}$ ва $\mathbf{5<x<+\infty}$ да ботиқ; $\mathbf{1<x<5}$ да қаварик. **1402.** ботиқ. **1403.** $\mathbf{-\infty<x<-\sqrt{2}}$, $\mathbf{\sqrt{2}<x<+\infty}$ да қаварик; $\mathbf{-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}}$ да ботиқ. **1404.** $\mathbf{-\infty<x<-3}$, $\mathbf{-1<x<+\infty}$ да қаварик; $\mathbf{-3<x<-1}$ да ботиқ.

1405. $|a| < 2$. **1409.** $x = 1$. **1410.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$. **1411.** $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

1412. $x = -\frac{1}{2}$. **1413.** эгилиш нуқтаси йўқ. **1414.** эгилиш нуқтаси йўқ.

1415. $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. **1416.** $x = 3$. **1417.** $x = e^{\frac{8}{3}}$. **1418.** $x = \frac{1}{2}$. **1419.** эгилиш нуқтаси йўқ. **1420.** $x = 0, x = 1$. **1421.** $-\infty < x < 1$ да қаварик; $1 < x < +\infty$ да ботиқ; $x = 1$ эгилиш нуқтаси. **1422.** $-\infty < x < -2,\ 2 < x < +\infty$ да ботиқ; $-2 < x < 2$ да қаварик; эгилиш нуқтаси йўқ. **1423.** ботиқ; эгилиш нуқтаси йўқ. **1424.** $-\infty < x < 0$ да ботиқ; $0 < x < +\infty$ да қаварик; $x = 0$ эгилиш нуқтаси. **1425.** $-\infty < x < -\sqrt{3}$ ва $0 < x < \sqrt{3}$ да ботиқ; $-\sqrt{3} < x < 0$ ва $\sqrt{3} < x < +\infty$ да қаварик; $x = \pm\sqrt{3},\ x = 0$ эгилиш нуқталари. **1426.** $-\infty < x < 0$ да қаварик; $0 < x < 1$ да ботиқ; $1 < x < +\infty$ да қаварик; $x = 0,\ x = 1$ эгилиш нуқталари. **1427.** $-\infty < x < 0$ да қаварик; $0 < x < +\infty$ да ботиқ; да қаварик; $x = 0$ эгилиш нуқтаси. **1428.** $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\arcsin\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ да ботиқ; $\arcsin\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) < x < \frac{\pi}{2}$ да қаварик. **1429.** $x = 1$. **1430.** $x = \frac{1}{2}$.

1431. $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. **1432.** $x = e^{\frac{8}{3}}$. **1433.** $a = -\frac{3}{2},\ b = \frac{9}{2}$. **1436.** $h = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2}}$.

1437. $x = \frac{\pi}{8},\ x = \frac{3\pi}{8}$. **1438.** $x = 0$. **1439.** $x = 3,\ y = x - 3$. **1440.** $x = 1,\ x = 3,\ y = 0$. **1441.** $x = -1,\ x = 1,\ y = x$. **1442.** $y = -1,\ y = 1$. **1443.** $x = 0,\ y = 2x$. **1445.** $y = 4x - \frac{\pi}{2},\ y = 4x + \frac{\pi}{2}$. **1446.** $y = 0$. **1447.** $y = -x - 1,\ y = x - 1$. **1448.** $y = \frac{\pi}{2}\cdot x - 1,\ y = -\frac{\pi}{2}\cdot x - 1$. **1449.** $y = -2x,\ y = 0$. **1450.** $x = 0,\ y = x + 3$. **1451.** $y = 1$. **1452.** $x = 0,\ y = x$. **1453.** $y = e$.

1454. $y=1$. **1455.** асимптотаси йўқ. **1456.** $y=0,\ y=-x$. **1457.** $x=\frac{3}{4}\cdot\pi+k\pi,\ k\in Z$. **1458.** $x=0,\ y=x-\ln 2$. **1459.** $x=0$. **1460.** узлуксиз, ўсувчи $x<0$ да ботиқ; $x>0$ да қавариқ; $x=0$ эгилиш нуқтаси $f(0)=0$. **1461.** $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз; $(0,0)$, $(4,0)$ нуқталари координата ўқлари билан кесишади; $x=3$ да $\max f(x)=f(3)=5{,}4$; $(-\infty,3)$ да ўсувчи; $(3,+\infty)$ да камаювчи; $(-\infty,0)$ ва $(2,+\infty)$ да қавариқ; $(0,2)$ да ботиқ; $x=0,\ x=2$ эгилиш нуқталари. **1462.** $x=-1$ да $\max f(x)=f(-1)=4$; $x=1$ да $\min f(x)=f(1)=0$; $x=0$ эгилиш нуқтаси. **1463.** $(-\infty,+\infty)\setminus\{2\}$ да узлуксиз; $(-1,0)$, $(0,-\infty)$ нуқталарда координата ўқлари билан кесишади; $\max f(x)=f(-1)=0,\ \min f(x)=f(5)=12,$ $x=2,\ y=x+4$ лар асимптоталар. **1464.** $\max f(x)=f(0)=-2;$ $\min f(x)=f(2)=2;\ x=1,\ y=x-1$ асимптоталар. **1465.** $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз; $(0,0)$, $(1,0)$ да координата ўқлари билан кесишади; $\min f(x)=f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{27}{16};\ x=1,\ x=\frac{1}{2}$ эгилиш нуқталари. **1466.** $\max f(x)=f(-1)=-4;\ \min f(x)=f(1)=4;\ x=0$ асимптота. **1467.** $\min f(x)=f(1)=3;\ x=-\sqrt[3]{2}$ эгилиш нуқта; $x=0$ асимптота. **1468.** $\min f(x)=f(1)=3;\ x=-\sqrt[3]{2}$ эгилиш нуқта; $x=0$ асимптота. **1469.** $\min f(x)=f(-2)=-1;\ \max f(x)=f(2)=1;\ x=0$ эгилиш нуқтаси; $x=\pm 2\sqrt{3}$ эгилиш нуқтаси; $y=0$ асимптота. **1470.** $\max f(x)=f\left(\frac{8}{3}\right)=$ $=-\frac{27}{16};\ x=0,\ x=4,\ y=0$ асимптоталар. **1471.** $\min f(x)=f(1)=-2;$ $(3,0)$, $(0,0)$ координата ўқлари билан кесишиш нуқталари. **1472.** $x=0,$ эгилиш нуқтаси; $y=0$ асимптота. **1473.** $(-1,0)$, $\left(\frac{19}{8},0\right)$, $(0,-1)$ координата ўқлари билан кесишиш нуқталари; $\max f(x)=f(-1)=0$ $\min f(x)=f(0)=-1$. **1474.** $x=0,\ x=1$ эгилиш нуқталари; $y=0$ асимптота. **1475.** $\min f(x)=$ $=f(0)=-1$; қаварик; $y=0$ асимптота. **1476.** $x=2,\ x=-2,\ y=0$ асимптоталар. **1477.** $\min f(x)=f(6)=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$; $x=12$ эгилиш нуқтаси $x=2$ асимптота. **1478.** $\min f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}$; **ботиқ;** $y=x+\frac{3}{2},\ x=0$ асимптоталар. **1479.** $\min f(x)=f(2)=\sqrt[3]{4}$; $\min f(x)=f(4)=\sqrt[3]{4}$; $\max f(x)=f(3)=2$. **1480.** $\max f(x)=f(1)=\frac{1}{e}$; $x=2$ эгилиш нуқтаси; $y=0$ асимптота. **1481.** $\max f(x)=f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$; $\min f(x)=$ $=f(1)=-\frac{1}{\sqrt{e}}$; $y=0$ асимптота; $x=-\sqrt{3}$ $x=0,\ x=\sqrt{3}$ эгилиш нуқталари. **1482.** $\max f(x)=f(1)=e$; $x=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ эгилиш нуқталари; $y=0$ асимптота. **1483.** $\max f(x)=f(0)=2$; $x=\pm1$ эгилиш нуқталари. **1484.** $\max f(x)=$ $=f(0)=1$; ботиқ; $y=x$ асимптота. **1485.** $\min f(x)=f(0)=1$; $(-\infty,-1)$ да қаварик; $(-1,-\infty)$ да ботиқ. **1486.** $\max f(x)=f\left(e^{2}\right)=0{,}74$; $x=e^{\frac{8}{3}}$ эгилиш нуқтаси; $x=0,\ y=0$ асимптоталар. **1487.** $\min f(x)=f\left(\frac{a}{\sqrt{e}}\right)=$ $=-\frac{a^{2}}{4e}$; $x=\frac{a}{\sqrt{e^{3}}}$ эгилиш нуқтаси. **1488.** $\min f(x)=f\left(\pm\sqrt{2}\right)=1$; $x=\pm1{,}89$ эгилиш нуқталари; $x=\pm1$ асимптоталар. **1489.** $y=0,\ y=-x$ асимптоталар. **1490.** $\max f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$; $\min f(x)=f\left(\frac{7\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$; $x=\frac{\pi}{4},\ x=\frac{5\pi}{4}$; эгилиш нуқталари. **1491.** $\min f(x)=f\left(\frac{5\pi}{2}+2k\pi\right)=-\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}$;

$\max f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}$; $x=k\pi,$ $x=\arccos x\left(-\frac{1}{4}\right)+2k\pi$ эгилиш нуқталари; $k\in Z$. **1492.** $[0,\pi]$ да $\max f(x)=f\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}}$; $\max f(x)=f(\pi)=0$; $\min f(x)=f\left(\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)=-\frac{4}{3\sqrt{3}}$; $\min f(x)=f(0)$; $x=\frac{\pi}{2},$ $x=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$, $x=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$ эгилиш нуқталари. **1493.** $x=k\pi$ эгилиш нуқталари; $k\in Z$. **1494.** $(-\infty,+\infty)$ да узлуксиз; ўсувчи; $(k\pi,(k+1)\pi)$ да ботиқ; $k\in Z$. **1495.** $\max f(x)=f\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$; $\min f(x)=f\left(\frac{3\pi}{4}+k\pi\right)=\frac{3}{2}\pi+1+2k\pi$; $x=k\pi$ эгилиш нуқталари; $x=\frac{2k-1}{2}\cdot\pi$ асимптота; $k\in Z$. **1496.** $[-1,1]$ да аниқланган; $\min f(x)=f(0)=0$. **1497.** $\max f(x)=f(-1)=\frac{\pi}{2}-1$; $\min f(x)=f(1)=1-\frac{\pi}{2}$; $x<0$ да қаварик; $x>0$ да ботиқ; $x=0$ эгилиш нуқтаси; $y=x-\pi,$ $y=x+\pi$ асимптота. **1498.** $(2k\pi,\ 2k\pi+\pi)$ да аниқланган; $\max f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=0$; $x=k\pi$ асимптоталар; $k\in Z$. **1499.** $(0,+\infty)$ да аниқланган; ўсувчи; $x=0$ асимптота. **1500.** 1. **1501.** $\frac{1}{2}$. **1502.** 0. **1503.** e^a. **1504.** $-\frac{1}{3}$. **1505.** 2. **1506.** 2. **1507.** 1. **1508.** $\frac{1}{3}$. **1509.** -3. **1510.** 0. **1511.** ∞. **1512.** $n>1$ да ∞; $n=1$ да a; $n<1$ да 0. **1513.** $\frac{e}{2}$. **1514.** 0. **1515.** -1. **1516.** 1. **1517.** 0. **1518.** $-\frac{1}{2}$. **1519.** $1-\ln a$. **1520.** 1. **1521.** $\frac{1}{18}$. **1522.** $1\frac{7}{9}$. **1523.** $\frac{1}{3}$.

1524. $\frac{2}{5}$. **1525.** $\frac{1}{a}$. **1526.** 1. **1527.** $-\frac{2}{\pi}$. **1528.** 1. **1529.** e^3. **1530.** $\frac{\pi^2}{8}$. **1531.** 0. **1532.** 1. **1533.** $e^{\frac{2}{\pi}}$. **1534.** $e^{-\frac{1}{2}}$. **1535.** 0. **1536.** 2. **1537.** 1. **1538.** e. **1539.** $e^{-\frac{1}{6}}$. **1540**. $e^{-\frac{1}{2}}$. **1541**. 0. **1542.** $e^{\frac{2}{\sin 2a}}$, $a \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$. **1543.** $\frac{1}{e}$. **1544.** 1. **1545.** $e^{-\frac{2}{\pi}}$. **1546.** 0. **1547.** $+\infty$. **1548.** $-\frac{2}{\pi}$. **1549.** $0 < a < 1$ да 0; $a > 1$ да $+\infty$. **1550**. 3. **1551.** 0. **1553.** мумкин эмас, чунки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ мавжуд эмас; лимит 1 га тенг. **1554.** мумкин эмас, чунки $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$ мавжуд эмас; лимит 0 га тенг. **1555.** 0. **1556.** 0. **1557.** 1. **1558.** 1. **1559.** 1. **1560.** 0, агар $a > 1$ бўлса; $-\infty$, агар $a < 1$ бўлса. **1561.** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$. **1562.** $\sqrt{x} + C$. **1563.** $-\frac{1}{x} + C$.

1564. $\frac{mx^{\frac{n}{m}+1}}{n+m} + C$. **1565.** $\frac{10^x}{\ln 10} + C \approx 0.4343 \cdot 10^x + C$. **1566.** $\frac{a^x \cdot e^x}{1+\ln a} + C$.

1567. $27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C$. **1568.** $\frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.

1569. $\frac{4\left(x^2+7\right)}{7\cdot\sqrt[4]{x}} + C$. **1570.** $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C$. **1571.** $-\frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x| + C$.

1572. $x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C$. **1573**. $\frac{2x^2 - 12x - 6}{3\sqrt{x}} + C$. **1574.** $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C$.

1575. $3x - \frac{2\cdot 3^x}{2^x\cdot(\ln 3 - \ln 2)} + C$. **1576**. $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) + C$.

1577. $\frac{8}{15}x\cdot\sqrt[8]{x^7} + C$. **1578.** $\ln\left(x + \sqrt{x^2+13}\right) + C$. **1579.** $\frac{2^{2x}\cdot e^x}{1+2\ln 2} + C$.

1580. $\mathrm{arctg}x - \frac{1}{x} + C$. **1581.** $x - \mathrm{arctg}x + C$. **1582.** $\arcsin x +$

$+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **1583.** $\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right|+C$. **1584.** $\arcsin\frac{x}{2}+$

$+2\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C$. **1585** $\frac{4^x}{\ln 4}+2\cdot\frac{6^x}{\ln 6}+\frac{9^x}{\ln 9}+C$. **1586.** $x-\cos x+x$

$+2\ln\left(x+\sqrt{4+x^2}\right)+C$. **1587.** $(\cos x+\sin x)\operatorname{sgn}(\cos x-\sin x)+C$.

1588. $-\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **1589.** $\operatorname{tg}x+C$. **1590.** $\operatorname{tg}x-x+C$.

1591. $-\operatorname{ctg}x-x+C$. **1592.** $x-\sin x+C$. **1593.** $F(x)=\sqrt{x}-$

$-\cos(x+1)+\cos 2$. **1594.** $F(x)=2\ln|x|+\frac{3}{x}+4$. **1595.** $F(x)=\frac{x|x|}{2}+6$.

1596. а) нотўғри, б) тўғри, с) нотўғри. **1599.** $F(x)=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x+C$.

1600. $F(x)=\frac{|x|^3}{3}+C$. **1601.** $F(x)=\frac{(1+x)\cdot|1+x|}{2}+\frac{(1+x)\cdot|1-x|}{2}+C$.

1602. $F(x)=\begin{cases}-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-6x+C, & \text{агар } x<2 \text{ бўлса,}\\ \frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+6x-\frac{20}{3}+C, & \text{агар } x\ge 2 \text{ бўлса.}\end{cases}$

1603. $F(x)=\begin{cases}-e^{-x}+2+C, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,}\\ e^x+C, & \text{агар } x\ge 0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

1604. $F(x)=\begin{cases}1-\operatorname{ch}x+C, & \text{агар } x<0 \text{ бўлса,}\\ \operatorname{ch}x-1+C, & \text{агар } x\ge 0 \text{ бўлса.}\end{cases}$

1605. $F(x)=\begin{cases}x-\frac{x^3}{2}+C, & \text{агар } |x|\le 1 \text{ бўлса,}\\ x-\frac{x|x|}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{sign}x+C, & \text{агар } |x|>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$

1606. $F(x)=\begin{cases}x+C, & \text{агар } |x|\le 1 \text{ бўлса,}\\ \frac{x^3+2\operatorname{sign}x}{3}+C, & \text{агар } |x|>1 \text{ бўлса.}\end{cases}$

1607. $F(x)=\frac{[x]}{\pi}\left([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x\right)+C$. 1608. $\ln\left|3x^2-7x+1\right|+C$.

1609. $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-x-1\right|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|+C$. 1610. $-\sqrt{1-x^2}+C$.

1611. $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+C$. 1612. $-\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$. 1613. $-\arcsin\frac{1}{|x|}+C$.

1614. $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C$. 1615. $-x-2e^{-\frac{x}{2}}+2\ln\left(1+e^{\frac{x}{2}}\right)+C$.

1616. $\ln\left|\ln(\ln x)\right|+C$. 1617. $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. 1618. $2\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|1+x|}\right)\cdot\operatorname{sgn}x+$

$+C\ \ (x(1+x)>0)$. 1619. $\frac{\ln^{101}x}{101}+C$. 1620. $-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$.

1621. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+C$. 1622. $\frac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\cdot\ln\left|\frac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$.

1623. $2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}+C$. 1624. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x+C$.

1625. $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{7}\sin^2 x+\frac{2}{11}\sin^4 x\right)\sqrt{\sin^3 x}+C$. 1626. $\frac{3}{2}\sqrt{1-\sin 2x}+C$.

1627. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)+C$. 1628. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C$. 1629. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

1630. $2\operatorname{arctg}e^x+C$. 1631. $-\frac{1}{2}\cos^2 x++\frac{1}{2}\ln\left(1+\cos^2 x\right)+C$.

1632. $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right)^2+C$. 1633. $\frac{1}{8}\sqrt{25\sin^2 x+9\cos^2 x}+C$.

1634. $-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}^3 x}+C$. 1635. $-\ln\left(2+\cos x+\sqrt{\cos^2+4\cos x+1}\right)+C$.

1636. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C$. 1637. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C$. 1638. $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+$

$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$. **1639.** $\frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$. **1640.** $-\sqrt{a^2-x^2}+a\cdot\arcsin\frac{x}{a}+C$.

1641. $-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}+C$. **1642.** $2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$.

1643. $\frac{2x-(a+b)}{4}\sqrt{(x-a)(b-x)}+\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C$.

1644. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$.

1645. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C$.

1646. $\sqrt{x^2-a^2}-2a\ln\left(\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}\right)+C$, агар $x>a$ бўлса; $-\sqrt{x^2-a^2}+2a\left(\sqrt{-x+a}+\sqrt{-x-a}\right)+C$ агар $x<-a$ бўлса.
1647. $2\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)+C$, агар $x+a>0$ ва $x+b>0$ бўлса; $-2\ln\left(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}\right)+C$ агар $x+a<0$ ва $x+b<0$ бўлса.

Кўрсатма. $x+a=(b-a)\sin^2 t$ алмаштиришдан фойдаланилсин.

1648. $\frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)}-\frac{(b-a)^2}{4}\ln\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)+C$ агар $x+a>0$ ва $x+b>0$ бўлса. **1649.** $-x\cos x+\sin x+C$.

1650. $-(x+1)e^{-x}+C$. **1651.** $\frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x-\frac{1}{n+1}\right)+C$, $(n\neq -1)$.

1652. $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$. **1653.** $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C$. **1654.** $-\frac{\arcsin x}{x}-$

$-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$. **1655.** $x\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$. **1656.** $x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-$

$-\sqrt{1+x^2}+C$. **1657.** $\ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|-\cos x\cdot\ln(\mathrm{tg}x)+C$.

1658. $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]+C$. 1659. $\frac{a\cdot\cos bx+b\cdot\sin bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}+C$.

1660. $\frac{a\cdot\sin bx-b\cdot\cos bx}{a^2+b^2}\cdot e^{ax}+C$. 1661. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\ln^2 x-\frac{4}{3}\ln x+\frac{8}{9}\right)+C$.

1662. $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)+C$. 1663. $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-$

$-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$. 1664. $x-\frac{1-x^2}{2}\cdot\ln\frac{1+x}{1-x}+C$.

1665. $(x^2+2)\operatorname{ch}x-2x\operatorname{sh}x+C$. 1666. $-\frac{1}{2x^2}\left(\ln^3 x+\frac{3}{2}\ln^2 x+\frac{3}{2}\ln x+\frac{3}{4}\right)+C$.

1667. $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C$. 1668. $-x+\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})-e^{-x}\cdot\operatorname{arcctg}e^{x}+C$.

1669. $I_n=\frac{1}{a}x^n e^{ax}-\frac{n}{a}I_{n-1}$. 1670. $I_n=x\cdot\ln^n x-n\cdot I_{n-1}$.

1671. $I_n=\frac{x^{\alpha+1}\ln^n x}{\alpha+1}-\frac{n}{\alpha+1}I_{n-1}$. 1672. $I_n=\frac{x^{n-1}\sqrt{x^2+a}}{n}-\frac{n-1}{n}a\cdot I_{n-2}$.

1673. $I_n=-\frac{\cos x\cdot\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 1674. $I_n=\frac{\sin x\cdot\cos^{n-1}x}{n}+$

$+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 1675. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$. 1684. $\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. 1685. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-(\sqrt{2}+1)}{x^2+(\sqrt{2}+1)}\right|+C$. 1686. $\frac{1}{4}\ln(x^4-x^2+2)+$

$+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{7}}+C$. 1687. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2}\right)+C$. 1688. $\frac{1}{\sqrt{b}}\ln(x\sqrt{b})+$

$+\sqrt{a+bx^2}+C$, агар $b>0$ бўлса; $\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right)+C$, агар $a>0$ ва

$b<0$ бўлса. 1689. $\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$.

1690. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(x-\frac{1}{4}+\sqrt{x^2-\frac{1}{2}x+1}\right)+C$. 1691. $-\sqrt{5+x-x^2}+$

$+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C$. 1692. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}+C$.

1693. $\arcsin\left(\frac{2\sin x-1}{3}\right)+C$. 1694. $-\ln\left|\frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C$.

1695. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}{1+x}\right|+C$. 1696. $\arcsin\left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}\right)+C \quad \left(|x|>\sqrt{2}\right)$.

1697. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C$. 1698. $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2+x+x^2}+$

$+\frac{7}{8}\ln\left(\frac{1}{2}+x+\sqrt{2+x+x^2}\right)+C$. 1699. $\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C$.

1700. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$. 1701. $\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{1}{10}\ln|2x+1|+C$.

1702. $\ln\left(x^2+6x+13\right)+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2}+C$. 1703. $x+3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$.

1704. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2(x+1)}+C$. 1705. $x+3\ln\left(x^2-6x+10\right)+$

$+8\operatorname{arctg}(x-3)+C$. 1706. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3}\right|+C$. 1707. $-\frac{1}{3(x-1)}+$

$+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C$. 1708. $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$. 1709. $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}x-$

$-\frac{1}{4}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+1}+C$. 1710. $-\frac{5x+6}{x^2-3x+2}+4\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|+C$. 1711. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+$

$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$. 1712. $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

1713. $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}-\frac{1}{2(x+1)}+C.$ 1714. $\frac{1}{x+2}+\ln|x+2|-$

$-\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C.$ 1715. $\frac{1}{6}\ln\frac{x^2-x+1}{x^2+2x+1}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

1716. $\frac{1}{4}\ln\left(x^4+x^3+2x^2\right)-\frac{2}{x}-\frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}+C.$ 1717. $\frac{1}{3(1-x)}+$

$+\frac{1}{6}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}+\frac{\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ 1718. $\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2}-\frac{7}{4(x-1)^2}+$

$+\frac{1}{4}\operatorname{arctg}x+C.$ 1719. $\frac{1}{4}\ln\left|x^4-1\right|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2(x-1)}+C.$

1720. $-\frac{1}{96(x-1)^{96}}-\frac{3}{97(x-1)^{97}}-\frac{3}{98(x-1)^{98}}-\frac{1}{99(x-1)^{99}}+C.$

1721. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$ 1722. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C.$

1723. $-\frac{1}{6(1+x)}+\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

1724. $\frac{1}{7}\ln\frac{\left|x^7\right|}{\left(1+x^7\right)^2}+C$. 1725. $\frac{x^4}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4+1}{\left(x^4+2\right)^4}+C.$

1726. $\frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}x^3+C.$

1727. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$

1728. $-\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2}+\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C.$ 1729. $\frac{x}{3\left(x^3+1\right)}+$

$+\frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$ 1730. $\frac{x\left(3x^2+5\right)}{8\left(x^2+1\right)^2}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x+C.$

1731. $\frac{1}{x^2+2x+2}+\operatorname{arctg}(x+1)+C.$ 1732. $\frac{x}{4\left(x^4+1\right)}+\frac{3}{16\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-$

$-\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}+C$. **1733.** $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)}+\frac{1}{9}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+$

$+\frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$. **1734.** $\frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2}+\frac{21}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{21}{64}\operatorname{arctg}x+C$.

1735. $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$. **1736.** $x-2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$.

1737. $2\sqrt{x}-x-2\ln(2\sqrt{x}+1)+C$. **1738.** $x+4\sqrt{x+1}+4\ln\left|\sqrt{x+1}-1\right|+C$.

1739. $\frac{x}{2}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-1}+x\right|+C$. **1740.** $\frac{1}{3}\ln\frac{t^2+t+1}{t^2-2t+1}+$

$+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+\frac{2t}{t^3-1}+C,\quad t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$. **1741.** $-\frac{4t^3}{t^4+1}+$

$+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1}-\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{\sqrt{2}t}+C,\quad t=\sqrt[4]{\frac{4-x}{x}}$. **1742.** $2\sqrt{x+4}+$

$+2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right|+C$. **1743.** $\ln\left|1+3\sqrt[3]{x}\right|+C$.

1744. $\frac{4}{45}(x-2)(5x+8)\sqrt[4]{x-2}+C$.

1745. $\frac{3}{4}\left(t^4-2t^2-\ln|t-1|+\frac{5}{2}\ln(t^2+t+2)-\frac{9}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{7}}\right)+C,\quad t=\sqrt[3]{x+2}$.

1746. $\frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$. **1747.** $\frac{5}{4}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}-$

$-\frac{5}{9}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{9}{5}}+C$. **1748.** $-3\sqrt[6]{\frac{x-5}{x-7}}+C$. **1749.** $\frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}+C$.

1750. $3\sqrt[3]{x}-6\sqrt[6]{x}+6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C$. **1751.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C$.

1752. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2x+1}+3\sqrt[6]{2x+1}+3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|+C$.

1753. $6t-3t^2-2t^3+\frac{3}{2}t^4+\frac{6}{5}t^6-\frac{6}{7}t^7+3\ln(1+t^2)-6\operatorname{arctg}t+C,\quad t=\sqrt[6]{x+1}$.

1754. $\dfrac{2}{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}-\dfrac{4}{1+\sqrt[4]{x}}+C$. 1755. $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+C$.

1756. $\dfrac{2x-1}{4}\sqrt{3-4x+4x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{3-4x+4x^2}\right)+C$.

1757. $\dfrac{2x^2+x+1}{6}\sqrt{x^2+2x+2}-\dfrac{1}{2}\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$.

1758. $\dfrac{x^2+2x}{4}\sqrt{x^2+4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C$.

1759. $\dfrac{2x-3}{4}\sqrt{1+x+x^2}-\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{2}+x+\sqrt{1+x+x^2}\right)+C$.

1760. $-\ln\left|\dfrac{2-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right|+C$. 1761. $\dfrac{2-x}{3(1-x)^2}\sqrt{1-x^2}+C$.

1762. $\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)-\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{x+2+\sqrt{2}\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\right|+C$.

1763. $\arcsin\dfrac{1+2x}{\sqrt{5}}+\ln\left|\dfrac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right|+C$.

1764. $\dfrac{1-2x}{4}\sqrt{1+x-x^2}-\dfrac{11}{8}\arcsin\dfrac{1-2x}{\sqrt{5}}+C$.

1765. $\dfrac{3}{2(2z+1)}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z^4}{|2z+1|^3}+C, \quad z=x+\sqrt{x^2+x+1}$.

1766. $\ln\left|\dfrac{z-1}{z}\right|-2\,\mathrm{arctg}\,z+C, \quad z=\dfrac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}$.

1767. $\dfrac{1}{8}\left\{\dfrac{1}{3}\left[(z-1)^3+(z-1)^{-3}\right]+\left[(z-1)^2-(z-1)^{-2}\right]+\left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\right\}+$

$+\dfrac{1}{2}\ln|z-1|+C, z=x+\sqrt{x^2-2x+2}$. 1768. $-\dfrac{5}{18(z+1)}-\dfrac{1}{6(z+1)^2}+$

$+\dfrac{3}{4}\ln|z-1|-\dfrac{16}{27}\ln|z-2|-\dfrac{17}{108}\ln|z+1|+C, \ z=\dfrac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

1769. $\dfrac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)}+\dfrac{2}{5\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{5}+1+2z}{\sqrt{5}-1-2z}\right|+C,\qquad z=-x+\sqrt{x(1+x)}.$

1770. $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x+x^2)^3}-\dfrac{1+2x}{8}\sqrt{x+x^2}+\dfrac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)+C,\qquad x>0.$

1771. $\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+18x^{\frac{1}{6}}+\dfrac{3x^{\frac{1}{6}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}-21\operatorname{arctg}x^{\frac{1}{6}}+C.$

1772. $-z+\dfrac{2}{3}z^3-\dfrac{z^5}{5}+C,\qquad z=\sqrt{1-x^2}.$ 1773. $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-$
$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2z+1}{\sqrt{3}}+C,\qquad z=\dfrac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$ 1774. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right|-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}z+C,$
$z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$ 1775. $\dfrac{5}{4}z^4-\dfrac{5}{9}z^9+C,\qquad z=\sqrt[5]{1+\dfrac{1}{x}}.$ 1776. $\dfrac{3z}{2(z^3+1)}-$
$-\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{(z+1)^2}{z^2-z+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2z-1}{\sqrt{3}}+C,\qquad z=\dfrac{\sqrt[3]{3x-x^3}}{x}.$ 1777. $\dfrac{3}{11}(x+1)^{\frac{11}{3}}-$
$-\dfrac{3}{4}(x+1)^{\frac{1}{3}}+\dfrac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}}+C.$ 1778. $\dfrac{12}{13}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{13}{3}}-\dfrac{18}{5}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{10}{3}}+$
$+\dfrac{36}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}+C.$ 1779. $\dfrac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}}+C.$

1780. $\dfrac{6}{7}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{7}{2}}-\dfrac{18}{5}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}+6x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+C.$ 1781. $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{z-1}{z+1}+$
$+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{z^2-z+1}{z^2+z+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2z+1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2z-1}{\sqrt{3}}+C,\qquad z=\sqrt[6]{x^6+1}.$

1782. $\dfrac{3}{5}\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}+\left(1-2x^{\frac{2}{3}}\right)\left(1+x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+C.$ 1783. $-\dfrac{3x^3+4}{8x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}+C.$

1784. $-\dfrac{\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}}{4x^2}+C$. 1785. $\dfrac{z}{2\left(z^3+1\right)}-\dfrac{1}{12}\ln\dfrac{z^2+2z+1}{z^2-z+1}-$

$-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2z-1}{\sqrt{3}}+C$, $z=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{x^2}}$. 1786. $\dfrac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)+$

$+\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right|+C$. 1787. $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin x+C$.

1788. $\sqrt{1+x+x^2}+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+2x+2\sqrt{1+x+x^2}}{\left(2+x+2\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}+C$. 1789.

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\dfrac{x\sqrt{2}}{x^2+1}+C$. 1790. $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{2}+\sqrt{x^4+1}}{x^2-1}\right|+C$.

1791. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}+C$ $|x|>\sqrt{\sqrt{2}-1}$. 1792. $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}+\dfrac{\sin^3 2x}{48}+C$.

1793. $-\dfrac{\cos 2x}{64}+\dfrac{\cos^3 2x}{96}-\dfrac{\cos^5 2x}{320}+C$. 1794. $\dfrac{5}{16}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x+$

$+\dfrac{3}{64}\sin 4x+\dfrac{1}{48}\sin^3 2x+C$. 1795. $\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|+C$.

1796. $-\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$. 1797. $\operatorname{tg}x-\dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3}+C$. 1798.

$-\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}-\operatorname{ctg}x+C$. 1799. $-8\operatorname{ctg}2x-\dfrac{8}{3}\operatorname{ctg}^3 2x+C$. 1800. $\dfrac{\operatorname{tg}^4 x}{4}+\dfrac{3\operatorname{tg}^2 x}{2}-$

$-\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}+3\ln|\operatorname{tg}x|+C$. 1801. $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{3\cos^3 x}+\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C$. 1802. $\sin x\cdot\cos^2 x+$

$+\dfrac{2\sin^5 x}{5}+C$. 1803. $\dfrac{\sin^8 2x}{16}-\dfrac{\sin^{10} 2x}{10}+\dfrac{\sin^{12} 2x}{24}+C$. 1804. $-2\sqrt{\operatorname{ctg}x}+$

$+\dfrac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}+C$. 1805. $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\left(z^2+1\right)^2}{z^4-z^2+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2z^2-1}{\sqrt{3}}+C$, $z=\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$.

1806. $\dfrac{1}{8}\ln\left(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x\right)+C$. 1807. $\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}+C$. 1808. $\dfrac{2}{\sin^2 x}-$

$-\frac{1}{4\sin^4 x}+C$. 1809. $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C$. 1810. $\frac{\sin 5x}{10}+\frac{\sin 3x}{6}+C$.

1811. $\frac{\cos 2x}{4}-\frac{\cos 6x}{12}+C$. 1812. $-\frac{\cos 4x}{8}-\frac{\cos 6x}{12}+C$.

1813. $-\frac{\sin(x+1)}{4}+\frac{\sin(3x+1)}{6}-\frac{\sin(5x+1)}{20}+C$.

1814. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{16}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+\frac{\sin 10x}{80}+C$.

1815. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}+\frac{\sin 4x}{16}+\frac{\sin 6x}{24}+C$.

1816. $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{22}\cos\frac{11x}{6}+C$.

1817. $-\frac{1}{2}\cos(a-b)\cdot\cos x-\frac{1}{4}\cos(x+a+b)+\frac{1}{12}\cos(3x+a+b)+C$.

1818. $\frac{x}{4}+\frac{\sin 2ax}{8a}+\frac{\sin 2bx}{8b}+\frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)}+\frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)}+C$.

1819. $\frac{1}{6\cdot(3\cos x-1)^2}+C$. 1820. $\frac{\cos x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{1-\sqrt{2}\cos x}{1+\sqrt{2}\cos x}\right|+C$.

1821. $\frac{1}{4}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1}{2(1+\cos x)}+C$. 1822. $\frac{1}{4}\ln\left(3+4\sin^2 x\right)+C$.

1823. $\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}-2\operatorname{arctg}(\sin x)+C$. 1824. $\frac{x+3\ln|\sin x-3\cos x|}{10}+C$.

1825. $\ln|\sin x+\cos x|+C$. 1826. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x+1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}x+1-\sqrt{2}}\right|+C$.

1827. $\frac{1}{\sqrt{30}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{6}}\operatorname{tg}x\right)+C$. 1828. $\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|+C$.

1829. $\frac{1}{68}\left(17\ln|\sin x|-\ln|\sin x+4\cos x|-4x\right)+C$. 1830. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}2x}{\sqrt{2}}\right)+C$.

1831. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}\right)+C.$ 1832. $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+$

$+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|+C.$ 1833. $\frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{a\operatorname{tg}x}{b}\right)+C.$

1834. $-\frac{\cos x}{a(a\ \sin x+b\ \cos x)}+C.$ 1835. $\left[\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-5}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-3}\right|+C\right].$

1836. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\ln|4\cos x+3\sin x-2|+\frac{4}{5\sqrt{21}}\ln\left|\frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-\sqrt{3}-\sqrt{7}}\right|+C.$

1837. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln\left(\cos x+\sin x+\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)+C.$

1838. $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}\ln|2\cos x-\sin x-3|+\frac{6}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{5\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)+1}{2}\right)+C.$

1839. $\frac{1}{8}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$ 1840. $\frac{1}{6}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{5}{6}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-3\right|-$

$-\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)-1\right|+C.$ 1841. $\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|+C.$

1842. $-\frac{3}{80}(\cos x)^{\frac{4}{3}}\cdot\left(20-16\cdot\cos^2 x+5\cdot\cos^4 x\right)+C.$

1843. $\frac{2\sin x-\cos x}{10(\sin x+2\cos x)^2}+\frac{1}{10\sqrt{5}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)\right|+C.$

1844. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin^2 x}}{|\cos x|}\right)+C$. 1845. $-\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sin x}{2-\sin x}\right)+C$.

1846. $I_n=\frac{\cos x\cdot(\sin x)^{n-1}}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$. 1847. $I_n=\frac{\sin x\cdot(\cos x)^{n-1}}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

1848. $I_n=-\frac{\cos x}{(n-1)(\sin x)^{n-1}}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$. 1849. $I_n=\frac{\sin x}{(n-1)(\cos x)^{n-1}}+$ $+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$. 1850. $I_{n,m}=\frac{(\sin x)^{n+1}\cdot(\cos x)^{m-1}}{n+m}+\frac{m-1}{n+m}I_{n,m-2}$. 1851. $\frac{x^3}{3}-2x^2+$ $+12x-36\ln|x+3|+C$. 1852. $\frac{1}{4}\ln\left(2x^2-x+1\right)+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C$.

1853. $x+\frac{25\ln|x+5|-49\ln|x+7|}{2}+C$. 1854. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-3x+\frac{3}{x+1}+$ $+5\ln|x+1|+C$. 1855. $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$. 1856. $\frac{1}{24}\ln\left|\frac{x^3}{x^3+8}\right|+C$.

1857. $\frac{35}{4}\ln\left|\frac{x+7}{x+5}\right|-\frac{37x+210}{2\left(x^2+12x+35\right)}+C$. 1858. $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)\right)+C$.

1859. $\left(1+\sqrt[4]{2x-1}\right)^2+2\ln\left|1-\sqrt[4]{2x-1}\right|+C$. 1860. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

1861. $-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}+\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right)+C$. 1862. $\frac{1}{5}\left(x^2-1\right)^{\frac{5}{2}}+$ $+\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}+C$. 1863. $\left(\frac{x^5}{6}-\frac{x^3}{6}-x\right)\cdot\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}+C$.

1864. $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{1+x^2}+C$. 1865. $\frac{2x-1}{4}\sqrt{4x^2-4x+3}+$ $\frac{1}{2}\ln\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)+C$. 1866. $\frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{x+2}{\sqrt{5}}+C$.

1867. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos x}+C=\frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C_1=\operatorname{tg}\frac{2x+\pi}{4}+C$. 1868. $\ln(1+\sin x)+C$.

1869. $x - \mathrm{tg}x + \frac{1}{\cos x} + C$. **1870.** $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C$. **1871.** $\frac{\sin^3 x}{3} - 2\sin x - \frac{1}{\sin x} + C$. **1872.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\sin^2 x}{\left|4\sin^2 x - 1\right|} + C$. **1873.** $\frac{5}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{2x+\pi}{4}\right| - \frac{3}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + C$. **1874.** $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\sin x + \cos x\right| - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x\right) + C$.

1875. $2\left(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6\right)e^{\sqrt{x}} + C$. **1876.** $e^x \cdot \mathrm{tg}\frac{x}{2} + C$. **1877.** $\frac{x^2|x|}{3} + C$.

1878. $\frac{2x^2}{3}\left(x + |x|\right) + C$. 1879. $x + C$, агар $|x| \le 1$ бўлса; $\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{sgn}x + C$, агар $|x| > 1$ бўлса. **1880.** $\frac{(1+x)|1+x|}{2} + \frac{(1-x)|1-x|}{2} + C$.

1881. $\frac{e^{ax}}{4}\left[\frac{3(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} - \frac{a\sin 3bx - 3b\cos bx}{a^2 + 9b^2}\right] + C$.

1882. $\frac{e^x}{2}\left[x^2(\sin x + \cos x) - 2x\sin x + (\sin x - \cos x)\right] + C$.

1883. $x - 3\ln\left\{\left(1 + e^{\frac{x}{6}}\right) \cdot \sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}} - 3\mathrm{arctg}e^{\frac{x}{6}}\right\} + C$.

1884. $\ln\left(e^x - 1\right) + C$. **1885.** $x \cdot \left[\ln^n x - n\ln^{n-1} x + (n-1) \cdot n\ln^{n-2} x + \ldots + (-1)^{n-1} n(n-1) \ldots \cdot 2\ln x + (-1)^n \cdot n!\right] + C$. **1886.** $\frac{x\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} - \ln\sqrt{1 - x^2} + C$.

1887. $-\ln\sqrt{1 + x^2} + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + C$. **1888.** $-x^2 + \frac{x^2}{2}\ln\left(4 + x^4\right) + 2\mathrm{arctg}\frac{x^2}{2} + C$. **1889.** $-\frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\arcsin x + \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + \ln|x| + C$

$\left(0<|x|<1\right)$. **1890.** $-\dfrac{6x+x^2}{9}-\dfrac{2+x^2}{9}\sqrt{1-x^2}\arccos x+C,\quad \left(|x|<1\right)$.

1891. $-\dfrac{x^2}{6}-\left(x-\dfrac{x^3}{3}\right)\mathrm{arctg}x+\dfrac{1}{2}(\mathrm{arctg}x)^2+\dfrac{2}{3}\ln\left(1+x^2\right)+C$.

1892. $\dfrac{3x+5}{8(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x}-\dfrac{3}{8}\arcsin\dfrac{1}{|x+1|}+C,\qquad x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$.

1893. $6\sqrt[6]{x}-12\,\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt[6]{x}}{2}+C$. **1894.** $\dfrac{x}{2\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|+C$.

1895. $\dfrac{3t^2-1}{6t^3}+C,\qquad t=\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$. **1896.** $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{2}\cdot x}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{2}\cdot x}+$

$+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{x^4+1}{2x^2}}+C$. **1897.** $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+2x^4}+x}{\sqrt[4]{1+2x^4}-x}-\dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt[4]{1+2x^4}}{x}+C$.

1898. $\dfrac{1}{8}\left(\cos 2x-\sin 2x-2\right)e^{-2x}+C$. **1899.** $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}+\arcsin\dfrac{1}{x}+C$.

1900. $\ln x\cdot\sin(\ln x)+\cos(\ln x)+C$. **1901.** $\sigma_n=\dfrac{9}{2}$. **1902.** а) $16\dfrac{1}{4}+\dfrac{175}{2n}+\dfrac{125}{4n^2}$

б) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$ в) $\dfrac{10230\cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n\left(2^{\frac{10}{n}}-1\right)}$. **1903.** $\dfrac{gT^2}{2}+\vartheta_0 T$. **1904.** а) $e-1$ б) 1 в) $\sin x$ г) $\dfrac{1}{2}$.

1905. $\dfrac{15}{4}$. **1906.** $\ln\dfrac{b}{a}$. **1910.** $\dfrac{b-a}{2}\left(f(a)-f(b)\right)$. **1914.** $\dfrac{15}{4}$. **1915.** $\dfrac{3}{2}\left(2\sqrt[3]{2}-1\right)$.

1916. $\dfrac{7}{3}$. **1917.** $-\dfrac{10}{3}$. **1918.** $\dfrac{19}{15}$. **1919.** 2. **1920.** $\dfrac{\pi}{6}$. **1921.** $\dfrac{\pi}{3}$. **1922.** 1. **1923.** $\dfrac{45}{4}$.

1924. $e(e-1)$. **1925.** $\dfrac{3}{\ln 2}$. **1926.** $\ln 2$. **1927.** $\dfrac{\ln 3}{2}$. **1928.** $\dfrac{\pi}{12}$. **1929.** $\ln 2$.

1930. $\ln 1{,}5$. **1931.** π. **1932.** π. **1933.** $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{8\sqrt{3}}{27}$. **1934.** $\dfrac{1}{3}\left(2-3\,\mathrm{ch}2+\mathrm{ch}^3 2\right)$.

1935. $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}$. 1936. $\frac{11}{2}+7\ln 2$. 1937. $2\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{2}$. 1938. $\frac{1}{6}\ln\frac{2}{5}$.

1939. $2-\ln 5$. 1940. $\frac{\pi}{4}$. 1941. $\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. 1942. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 1943. $4-2\ln 3$.

1944. $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 1945. $1-\frac{2}{e}$. 1946. $\frac{\pi\left(9-4\sqrt{3}\right)}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 1947. $3\ln 3-2$.

1948. $2\ln 2-\frac{3}{4}$. 1949. $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$. 1950. $\pi^3-6\pi$. 1951. $\frac{e^{\pi}-2}{5}$.

1952. $\frac{e(\sin 1-\cos 1)}{2}$. 1953. 1. 1955. а) $\frac{5}{6}$ б) $\frac{t}{2}$. 1957. $\frac{1}{2}$. 1958. $\ln 2$.

1959. $\frac{\pi}{4}$. 1960. $\frac{2}{\pi}$. 1961. $\frac{1}{p+1}$. 1962. $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$. 1963. а) 1 б) $\frac{\pi^2}{4}$ в) 0 г) 1.

1964. 0. 1965. 0. 1966. $\frac{\pi}{2}$. 1967. 0. 1968. 0. 1969. $6\sin\frac{\pi}{9}$. 1970. $2\sqrt{3}$.

1971. $\frac{e^4-1}{2}$. 1972. $\frac{\pi}{16}$. 1973. $\frac{4-\pi}{2}$. 1974. $\frac{1}{2}\ln\frac{e}{2}$. 1975. π. 1976. $\frac{1}{4}$.

1977. 4π. 1978. 1. 1979. $\frac{\pi}{6}-\sqrt{3}+1$. 1980. $2\left(\sqrt{2}-1\right)$. 1981. $2\operatorname{arctg}e+$

$+\frac{1}{2}\ln\frac{e^2+1}{2}$. 1982. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$. 1983. $\frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}-\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{6}}}{\sqrt{2}}$. 1984. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$.

1985. $-\frac{468}{7}$. 1986. $\arcsin\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}$. 1987. $\frac{29}{270}$. 1988. $\frac{1}{6}$. 1989. $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{225}{1024}$.

1990. $\frac{3}{8}\ln 2-\frac{7}{9}$. 1991. $\frac{n^{n+1}}{n+1}\ln n-\frac{n^{n+1}-1}{(n+1)^2}$. 1992. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1993. $\frac{8191}{26}$.

1994. $\frac{\pi}{4}$. 1995. $\frac{3}{5}\left(e^{\pi}-1\right)$. 1997. а) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}-\frac{1}{2}\right)$ б) $\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}\right)$. 2006. а) $|x|$

б) $\arccos(\cos x)$ в) $x[x]+\frac{[x]([x]+1)}{2}$ г) $\frac{x^2}{2}[x]-\frac{[x]([x]+1)(2[x]+1)}{12}$

д) $\frac{1}{\pi}\arccos(\cos\pi x)$. **2007.** $\frac{1}{2}(|x+1|-|x-1|)$. **2008.** а) -1 б) $14-\ln(7!)$ в) $\frac{30}{\pi}$ г) $-\frac{\pi^2}{4}$ д) $\ln(n!)$ е) $-\mathrm{th}\frac{\pi}{2}$. **2009.** а) иккинчиси б) биринчиси в) биринчиси г) иккинчиси. **2012.** а) $\frac{1}{3}$ б) $6\frac{2}{3}$ в) 10 г) $\frac{1}{2}\cos\varphi$. **2013.** $\frac{8\pi}{3}\pm\frac{4\pi}{3}\theta \quad (|\theta|<1)$.

2014. $\frac{1}{10\sqrt{2}}$ ва $\frac{1}{10}$ сонлари оралиғида жойлашган.

2015. $0{,}01-0{,}005\theta \quad (0<\theta<1)$. **2016.** $\frac{\theta}{50\pi} \quad (0<\theta<1)$. **2017.** $\frac{2}{a}\theta \quad (|\theta|<1)$.

2018. $\frac{\theta}{a} \quad (|\theta|<1)$. **2019.** 1) а) $\frac{4}{9},\frac{1}{18}$; б) $\frac{5}{8},-\frac{1}{8}$; в) $\frac{109}{216},\frac{1}{216}$

2) а) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4},1-\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; б) $\frac{\pi}{4},1-\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi(2\sqrt{2}+1)}{12},1-\frac{\pi(2\sqrt{2}+1)}{12}$;

2020. 0,69315. **2021.** 0,83566. **2022.** 1,4675. **2023.** 17,333. **2024.** 5,4024. **2025.** 1,37039. **2026.** 0,2288. **2027.** а) 3,746 б) 0,497 в) 2,099 г) 0,524 д) 0,461 е) 1,253. **2028.** а) 0,916 б) 2,320 в) 0,636 г) 2,682 д) 0,882 е) 0,647. **2029.** а) 1,610 б) 2,00027 в) 2,796 г) 1,14778 д) 0,88137 е) 3,66088 ж) 2,9783

2030. $\ln 2$. **2031.** $\frac{\pi}{4}$. **2032.** $\frac{1}{2}$. **2033.** $\frac{3}{4}$. **2034.** 16. **2035.** 2. **2036.** $\frac{1}{2}$. **2037.** $\frac{1}{4}$.

2038. $\frac{\pi}{6}$. **2039.** $\frac{1}{p+1}$. **2040.** 2. **2041.** $\frac{2}{3}\cdot(2\sqrt{2}-1)$. **2042.** $\frac{4}{\pi}$. **2043.** $\frac{2}{\pi}$.

2044. $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)dx$. **2045.** $\frac{5}{6}\cdot\pi$. **2046.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2047.** $x+\frac{1}{2}$. **2048.** $\frac{1}{\ln 2}$.

2049. $\frac{1}{\ln 2}$. **2050.** $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **2051.** 1. **2052.** $\frac{\pi^2}{4}$. **2053.** 0. **2054.** 1. **2055.** $\frac{\pi}{2}$. **2058.** $\frac{1}{13}$.

2059. e. **2060.** 0. **2061.** 0. **2062.** $f(1)$. **2063.** $f(0)$. **2064.** $\frac{f(1)}{e}$. **2065.** $2\pi f(0)$.

2066. $\frac{1}{3}$. **2067.** $\approx 0{,}3648$. **2068.** $6\frac{2}{3}$. **2069.** 0. **2070.** a. **2071.** 0,283. **2072.** $\frac{1}{2}$.

2073. $\frac{3}{8}$. **2074.** 10. **2075.** $\frac{1}{2}\cdot\cos\varphi$. **2076.** $\frac{1-\cos\pi\alpha}{\pi\alpha}$.

2078. $\varphi = 2k\pi, \varphi = \frac{\pi}{2}+2k\pi$. **2079.** $\xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_2 = 2$. **2080.** $\xi = -\arg\operatorname{tg}\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}}$.

2081. $\ln\xi = \frac{e^2-1}{e^2+1}$. **2082.** $\frac{2}{\pi}$. **2083.** $\frac{\pi-2}{2}$. **2084.** $\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}$. **2085.** $\frac{1}{e}$.

2086. $\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{e^x-1}{x}$. **2087.** $\frac{1}{10\sqrt{2}} < I < \frac{1}{10}$. **2088.** $\frac{\pi}{4} \le I \le \frac{\pi\cdot\sqrt{6}}{8}$.

2089. $\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$. **2090.** $\frac{2}{13}\pi < I < \frac{2}{7}\cdot\pi$. **2091.** $\frac{2}{3} < I < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2092. $\frac{1}{e} < I < 1$. **2093.** $0 < I < 0{,}01$. **2094.** $1 < I < 1+\frac{1}{42}$. **2095.** $1-\frac{1}{n} < I < 1$.

2096. $\frac{2}{\pi}\ln\frac{\pi+2}{2} < I < \ln\frac{\pi+2}{2}$. **2097.** $4\frac{1}{2}$. **2098.** $\frac{32}{3}$. **2099.** $\frac{4p^3}{3}$. **2100.** $5\frac{1}{3}$.

2101. 1. **2102.** $\frac{24}{5}\cdot\sqrt[3]{2}$. **2103.** $2-\frac{1}{\ln 2}$. **2104.** $\frac{125}{12}$. **2105.** $\frac{\pi}{2}$. **2106.** $\ln 2$.

2107. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **2108.** $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2109.** 4. **2110.** $e+\frac{1}{e}-2$.

2111. $ab\left[2\sqrt{3}-\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right]$. **2112.** 0,1. **2113.** $\frac{9}{4}$. **2114.** $2\pi+\frac{4}{3}$.

2115. $\ln 4 - 2e^{-1}$. **2116.** $\frac{1}{\pi}-\frac{1}{8}$. **2117.** $\frac{a^2(e^2-1)}{2e}$. **2118.** $\frac{3\pi+2}{6}$; $\frac{9\pi-2}{6}$.

2119. 16. **2120.** $\frac{3}{8}\cdot\pi a^2$. **2121.** $\frac{4}{3}\cdot a^3$. **2122.** $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{a}{2}\right)$. **2123.** $\ln 3$. **2124.** $\frac{14}{3}$.

2125. $3\pi a^2$. **2126.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **2127.** πa^2. **2128.** $\frac{a^5}{60}$. **2129.** 8. **2130.** $\frac{1}{3}$. **2131.** $\frac{4-\pi}{4}$.

2132. $\frac{3}{2}\cdot a^2$. **2133.** $3\pi a^2$. **2134.** $\frac{3\pi ab}{8}$. **2135.** $\frac{\pi a^2}{32}$. **2136.** $\frac{3\pi a^2}{2}$.

2137. $\frac{a^2\left(4\pi^3+3\pi\right)}{3}$. **2138.** $6\pi a^2$. **2139.** $\frac{4a^2}{3}$. **2140.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\right)$.

2141. $\pi a^2\left(\frac{16}{\sqrt{3}}-9\right)$. 2142. $\frac{4}{3}\cdot\pi^3\cdot a^2$. 2143. $\left(\frac{\pi a^2}{4}\right)$. 2144. $\frac{\pi a^2}{8}$. 2145. $\frac{\pi a^2}{2}$.

2146. a^2. 2147. $\frac{\pi a^2}{4}$. 2148. $\frac{3\pi a^2}{2}$. 2149. $\frac{9\pi}{2}$. 2150. $\frac{a^2}{6}$. 2151. $a^2\cdot\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)$.

2152. $\frac{17\pi}{4}$. 2153. $\frac{a^2}{4}(\pi-1)$. 2154. $\frac{a^2(3\pi+4)}{12}$. 2155. $\frac{1}{\pi}$. 2156. $2a^2\left(\frac{5\pi}{8}-1\right)$.

2157. $\frac{\pi\cdot p^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$. 2158. $\pi\left(1+\frac{\pi^2}{6}\right)$. 2159. $\frac{1}{2}\left(1-\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$. 2160. $\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\cdot a^2$.

2161. $\frac{232}{15}$. 2162. $\frac{25}{3}$. 2163. $10,\ \ 8$. 2164. $2+\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$. 2165. $\sqrt{6}+\ln\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

2166. $2\ln 3-1$. 2167. $\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$. 2168. $\frac{n+1}{4}$. 2169. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. 2170. $a\cdot\ln\frac{a+b}{a-b}-b$.

2171. $\frac{e^2+1}{4}$. 2172. $\frac{1}{27}\cdot\left(40^{\frac{3}{2}}-15^{\frac{3}{2}}\right)$. 2173. $\ln\left(e+\sqrt{e^2-1}\right)$. 2174. $\frac{1}{2}\ln 3$.

2175. $e-1$. 2176. $a\cdot\ln\frac{a}{b}$. 2177. $4\sqrt{3}$. 2178. $4\sqrt{3}$. 2179. $6a$.

2180. $\sqrt{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$. 2181. $\operatorname{sh}^2 t_0$. 2182. $2\pi^2 a$. 2183. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+$
$+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$. 2184. $p\cdot\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. 2185. $2a$.

2186. $8a\cdot\frac{5\sqrt{5}-1}{3}$. 2187. $a(2\pi-\operatorname{th}\pi)$. 2188. $4(a+b)\cdot E\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)$.

2189. $4aF\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 2190. $\frac{a}{k}\cdot E(\omega x_0,k),\ \ k=\frac{a\omega}{\sqrt{1+a^2\omega^2}}$.

2191. $\frac{a+b}{2}\cdot E\left(\frac{\pi-t_0}{2};\ \ \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)$. 2192. $2na\cdot E\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{n}\right)$.

2193. $\frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right)$. 2194. 3π. 2195. $\frac{14\pi}{3}$.

2196. $\pi\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)+\pi\ln\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{5}+1}$. 2197. $4\pi a^2$. 2198. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$.

2199. $\frac{4\pi a^2}{243}\cdot\left(21\sqrt{13}+2\ln\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)$. 2200. $2\pi\left(4+3\ln 3\right)$. 2201. $\frac{56\sqrt{3}}{5}\cdot\pi$.

2202. $2\pi\left(\sqrt{2}-e^{-a}\cdot\sqrt{1+e^{-2a}}-\ln\frac{e^{-a}+\sqrt{1+2^{-2a}}}{1+\sqrt{2}}\right)$. 2203. $2\pi\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$.

2204. $\frac{62\pi}{3}$. 2205. $\frac{12}{5}\cdot\pi a^2$. 2206. $\frac{64}{3}\cdot\pi a^2$. 2207. $\frac{32}{5}\cdot\pi a^2$.

2208. $8\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 2209. $\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot r^2\cdot h$. 2210. $\frac{1}{3}\cdot S_0\cdot h$. 2211. $\frac{16}{3}\cdot a^3$.

2212. $\frac{\pi R^3}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$. 2213. $\pi\cdot a^2\cdot\sqrt{pq}$. 2214. $\frac{16}{3}\cdot R^3$. 2215. $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$.

2216. $\frac{2}{3}abc$. 2217. $\frac{4}{5}$. 2218. $\frac{16a}{3}$. 2219. $\frac{2}{3}\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. 2220. $\frac{128}{105}$. 2221. 12π.

2222. πpa^2. 2223. $\frac{\pi^2}{2}$. 2224. $\frac{17}{15}\pi$. 2225. $18\frac{2}{15}\pi$. 2226. $\frac{5\pi}{6}$. 2227. $\frac{\pi(\pi-2)}{4}$.

2228. $\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right)$. 2229. $\frac{16\pi}{15}$. 2230. $\frac{\pi}{2}$. 2231. $2\pi^2a^2b$. 2232. $\frac{2048\pi}{35}$.

2233. $\frac{\pi a^3}{15}$. 2234. $\frac{\pi}{5\left(1-e^{-2\pi}\right)}$. 2235. $5\pi^2a^3$. 2236. $\frac{\pi^3}{2}+\frac{3\pi^2}{8}$. 2237. $\frac{\pi^2a^3}{4}$.

2238. $\frac{8}{3}\pi a^3$. 2239. $\frac{4}{21}\pi a^3$. 2240. $2\pi^2a^3$. 2241. $\frac{\pi a^3}{15}$. 2242. $\frac{64\pi a^3}{105}$.

2243. $\frac{\pi a^3\left(51-64\ln 2\right)}{4}$. 2244. $\frac{2\pi}{3}$. 2245. $M_x=\frac{b\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $M_y=\frac{a\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. 2246. $M_x=\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. 2247. $M_x=\frac{1}{6}$, $M_y=\frac{1}{6}$.

2248. $M_x = \frac{5}{2}\cdot\pi\cdot a^2$. 2249. $I = \frac{a^4}{12}$. 2250. $I = \frac{1}{2}b\cdot h^3$. 2251. $\frac{\pi ab^2}{4}$, $\frac{\pi a^3 b}{4}$.

2252. $\frac{p^2}{8}\left[\sqrt{2} + 5\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. 2253. $2a^2$, $\frac{\pi a^3}{2}$. 2254. $\frac{\pi}{4}+\frac{4}{5}$. 2255. 0, $\frac{8}{5}$.

2256. $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{8}$. 2257. $\frac{9}{20}a$, $\frac{9}{20}a$. 2258. $\frac{a}{5}$, $\frac{a}{5}$. 2259. πa, $\frac{5}{6}a$.

2260. $2{,}5\cdot 10^6\cdot\pi$ кгм. 2261. 3,6кгм. 2262. $\frac{\pi\delta R^2\cdot H^2}{2} \approx 64800\pi$ кгм.

2263. $\approx 470880\cdot\pi$ н. 2264. $\frac{1}{2}\ln 2$. 2265. $\frac{\pi}{4}$. 2266. $\frac{1}{3e^3}$. 2267. 1. 2268. π.

2269. $\frac{\pi^2}{8}$. 2270. $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$. 2271. $\frac{2\pi}{\sqrt{31}}$. 2272. -1. 2273. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 2284. $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\ln 3$.

2285. π. 2286. 1. 2287. $\frac{1}{a}$ $(a>0)$. 2288. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\ln 3$. 2289. $2(1-\ln 2)$.

2290. $\frac{13\pi}{4}$. 2291. 10!. 2292. 0. 2293. 0. 2294. $\frac{\pi}{2}-1$. 2295. $\frac{2}{13}$. 2296. $\frac{3}{13}$.

2297. $\frac{a}{a^2+b^2}$. 2298. $\frac{b}{a^2+b^2}$. 2299. $\frac{1}{9}$. 2300. $\frac{2}{3}$. 2301. $\frac{13\pi}{4}$. 2302. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

2303. $I_n = n!$. 2304. $I_n = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\cdot\frac{\pi a^{n-1}\operatorname{sgn} a}{\left(ac-b^2\right)^{n+\frac{1}{2}}}$.

2305. $I_n = n!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(k+1)$.

2306. $I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{агар } n\text{ - жуфт сон бўлса,} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{агар } n\text{ - ток сон бўлса.} \end{cases}$ 2333. $\alpha > 1$ да абсолют, $0<\alpha\le 1$ да шартли яқинлашувчи. 2334. $\alpha>1$ да абсолют, $0<\alpha\le 1$ да шартли яқинлашувчи. 2335. $\alpha>1$ да абсолют, $0<\alpha\le 1$ да шартли яқинлашувчи. 2336. $\alpha<2$ да абсолют, $2\le\alpha\le 3$ да шартли яқинлашувчи. 2337. $\alpha>1$ да абсолют, $\frac{1}{2}\le\alpha\le 1$ да шартли яқинлашувчи.

2338. $\alpha < -1$ да абсолют, $-1 \le \alpha < 0$ да шартли яқинлашувчи. **2339.** 0. **2340.** мавжуд эмас. **2341.** $\frac{13\pi}{\sqrt{17}}$. **2342.** 0. **2343.** π. **2344.** Шарт эмас. Масалан, $f(x) = \cos x^2$. **2345.** Шарт эмас. Масалан, $f(x)$ функция сифатида $\left[n - \frac{1}{n^2};\ n + \frac{1}{n^2}\right]$ $n = 2,3,4,...,$ кесмалардан ташқарида 0 га тенг, $x = 2,3,4,...,$ нуқталарда 1 га тенг ҳамда $\left[n - \frac{1}{n^2}; n\right]$ ва $\left[n; n + \frac{1}{n^2}\right]$ кесмаларда чизиқли функцияга тенг бўлган узлуксиз функцияни олиш мумкин. **2346.** $f(x)$ функция сифатида e^{-x} функция ва 2345-мисол учун қурилган функциянинг йиғиндисини олиш мумкин. **2347.** Масалан, $f(x) = x\cos x^4$. **2348**. $f(x)$ функция сифатида $\left[n - \frac{1}{n^2}; n + \frac{1}{n^2}\right]$ $n = 1,2,3,...,$ кесмалардан ташқарида 0 га тенг, $x = n$ нуқталарда n га тенг ҳамда $\left[n - \frac{1}{n^2}; n\right]$ ва $\left[n; n + \frac{1}{n^2}\right]$ кесмаларда чизиқли функцияга тенг бўлган узлуксиз функцияни олиш мумкин. **2349.** Шарт эмас. Масалан, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ва $\varphi(x) = \operatorname{sign}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$. **2350.** 2. **2351.** $\frac{\pi}{2}$. **2352.** -1. **2353.** $2\ln 3$. **2354.** $\frac{1}{\ln 2}$. **2355.** $\frac{\pi}{2}$. **2356.** $\frac{9\pi}{4}$. **2357.** $\frac{\pi^2}{8}$. **2358.** $\frac{2}{3}\sqrt[4]{125}$. **2359.** $6\sqrt[3]{2}$. **2368.** $\frac{31}{5}$. **2369.** 4. **2370.** 2π. **2371.** $-\frac{4}{3}$. **2372.** $\frac{21}{4}$. **2373.** $\frac{(e-1)^2}{e}$. **2374.** $2\ln\left(\sqrt{2} - 1\right)$. **2375.** $\frac{\pi}{2}$. **2376.** $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}$. **2377.** $\frac{\pi}{4\sqrt{15}}$. **2378.** $\frac{7}{9}$. **2379.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\pi + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)$.

2380. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. **2381.** $\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$. **2382.** π. **2383.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$. **2384.** $-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

2385. $I_n=(-1)^{n-1}\frac{\pi}{4n}$. **2386.** $I_n=\frac{(-1)^n\cdot n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$.

2387. $I_n=\begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{агар } n\text{ - ток сон бўлса,}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}, & \text{агар } n\text{ - жуфт сон бўлса.}\end{cases}$

2404. яқинлашувчи. **2405.** узоқлашувчи. **2406.** яқинлашувчи. **2407.** яқинлашувчи. **2408.** узоқлашувчи. **2409.** яқинлашувчи. **2410.** узоқлашувчи. **2411.** яқинлашувчи. **2412.** узоқлашувчи. **2413.** яқинлашувчи. **2414.** $\alpha<3$. **2415.** $\alpha\le\frac{1}{2}$. **2416.** $\alpha<3$. **2417.** $\alpha<4$. **2418.** $\alpha=1$. **2419.** $\alpha\ne 0$. **2420.** $\alpha<2$. **2421.** $\alpha<4$. **2422.** $\alpha<0,\ \ 0<\alpha<2$. **2423.** $\alpha>-1,\ \beta>-1$. **2424.** $\alpha>-1,\ \beta>-1$. **2425.** $\alpha>-1,\ \beta>-1$. **2426.** $\alpha>-1,\ \beta>-2$. **2427.** $\beta<1$, α- ихтиёрий сон; $\beta=1$, $\alpha<-1$. **2428.** шартли яқинлашади. **2429.** $\alpha>-1$ да абсолют ва $-2<\alpha\le-1$ да шартли яқинлашади. **2430.** $\alpha>-1$ да абсолют ва $-2<\alpha\le-1$ да шартли яқинлашади. **2431.** $\alpha<1$ да абсолют ва $1\le\alpha<\frac{3}{2}$ да шартли яқинлашади. **2432.** $\alpha>-1$ да абсолют ва $-3<\alpha\le-1$ да шартли яқинлашади. **2433.** $\alpha<1$ да абсолют ва $1\le\alpha<2$ да шартли яқинлашади. **2434.** $\alpha>0$ да абсолют ва $-1<\alpha\le 0$ да шартли яқинлашади. **2435.** $\alpha>1$ да абсолют ва $\alpha<-1$ да шартли яқинлашади. **2436.** $\alpha<1$ да абсолют яқинлашади ва $\alpha\ge 1$ да узоқлашади. **2437.** $\alpha>-1$ да шартли яқинлашади ва $\alpha\le-1$ да узоқлашади. **2438.** $\ln 2$. **2439.** $\frac{1}{9}$. **2440.** $\ln\frac{b-c}{c-a}$, агар $n=1$ бўлса; $\frac{1}{n-1}\left[(a-c)^{1-n}-(b-c)^{1-n}\right]$, агар $n=2k+1$ бўлса; $\nexists$, агар $n=2k$ бўлса.

2441. $\ln 2$. **2442.** $-\pi\ln 2$. **2443.** $-\frac{\ln 3}{4}$. **2444.** $\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}$.

2445. 0. **2446.** 0. **2447.** $-\ln 2$. **2448.** $\alpha > -1$. **2449.** π. **2450.** $2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

2451. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$. **2452.** 24. **2453.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$. **2454.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **2455.** 1. **2456.** $\frac{\pi}{5}$.

2457. $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}$. **2458.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$. **2459.** $\frac{\pi^2}{2}$. **2460.** $\frac{\pi^3}{4\left(1+\pi^2\right)}$. **2461.** $\frac{\pi e^{2\pi}}{5\left(e^{2\pi}-1\right)}$.

2462. $\pi\left[\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right]$. **2472.** $\frac{2\sqrt{2}}{5}$. **2473.** $\frac{10}{7}$. **2474.** $\frac{\pi(a+b)}{2}$. **2475.** $\frac{33\pi}{2}$.

2476. 2. **2477.** 1. **2478.** 2. **2479.** $\frac{\pi\ln 2}{2}$**.** **2480.** 4π. **2481.** $\frac{8}{3}$. **2482.** 12π. **2483.** 2.

2484. $\frac{\pi}{4}$. **2485.** $\frac{1}{\pi}$. **2486.** π. **2487.** $16\pi^2$. **2492.** 3/2. **2493.** 1. **2494.** 1/4.

2495. 1/18. **2496.** 1/60. **2497.** 5/36. **2498.** -1/36. **2499.** $-\ln 3$. **2500**. $\ln 2/3$.

2501. 3/4. **2502.** $\sin^2\frac{\alpha}{2}$. **2503.** 1. **2504.** $1/2\sin 2$. **2505.** $\pi/4$. **2506.** 1/8.

2516. Яқинлашувчи. **2517.** Яқинлашувчи. **2518.** Узоқлашувчи. **2519.** Яқинлашувчи. **2520.** Узоқлашувчи. **2521.** Яқинлашувчи. **2522.** Яқинлашувчи. **2523.** Яқинлашувчи. **2524.** Узоқлашувчи. **2525.** Яқинлашувчи. **2526.** Яқинлашувчи. **2528.** Яқинлашувчи. **2529**. Яқинлашувчи. **2530.** Яқинлашувчи. **2531.** $0<\alpha<1$ да яқинлашувчи, $\alpha \ge 1$ да узоқлашувчи. **2532.** Узоқлашувчи. **2533.** Яқинлашувчи. **2534.** Яқинлашувчи. **2535.** Яқинлашувчи. **2536.** Яқинлашувчи. **2537.** Яқинлашувчи. **2538.** $\alpha<e$ да яқинлашувчи, $\alpha>e$ да узоқлашувчи. **2539.** Узоқлашувчи. **2540.** Узоқлашувчи. **2541.** Яқинлашувчи. **2542.** Узоқлашувчи. **2543.** Яқинлашувчи. **2544.** $\frac{p}{2}+q>1$ да яқинлашувчи. **2545.** $p>3/2$ да яқинлашувчи. **2546.** Узоқлашувчи. **2547.** Узоқлашувчи. **2548.** Яқинлашувчи. **2549.** $q>p$ да яқинлашувчи. **2550.** $\alpha(q-p)>1$ да яқинлашувчи. **2551.** $\mathbf{p>1}$ да яқинлашувчи. **2552.** $\mathbf{\forall q, p>1}$ да яқинлашувчи, $\mathbf{p=1, q>1}$ да яқинлашувчи. **2553.** $\alpha>\frac{1}{2}$ да яқинлашувчи. **2554.** Узоқлашувчи. **2555.** Узоқлашувчи. **2556.** Яқинлашувчи. **2557.** Яқинлашувчи. **2558.** Яқинлашувчи. **2559.** $\alpha<-1$ да яқинлашувчи. **2560.** Яқинлашувчи. **2561.** Узоқлашувчи. **2562.** Яқинлашувчи. **2563.** Яқинлашувчи. **2564.** Яқинлашувчи. **2565.** Яқинлашувчи. **2566.** Узоқлашувчи. **2567.** $\alpha>2$ да яқинлашувчи. $\alpha\le 2$ да узоқлашувчи. **2568.** Узоқлашувчи. **2569.** Яқинлашувчи. **2570.** Яқинлашувчи. **2571.** Яқинлашувчи. **2572.** Яқинлашувчи. **2573.** Яқинлашувчи. **2601.** Яқинлашувчи. **2602.** Яқинлашувчи. **2603.** Яқинлашувчи. **2604.** Узоқлашувчи. **2605.** Яқинлашувчи. **2606.** Яқинлашувчи. **2607.** Яқинлашувчи. **2608.** Яқинлашувчи. **2609.** Яқинлашувчи. **2610.** Яқинлашувчи. **2611.** Узоқлашувчи. **2612.** Яқинлашувчи. **2613.** Яқинлашувчи. **2614.** Яқинлашувчи. **2615.** Узоқлашувчи. **2616.** Узоқлашувчи. **2617.** Яқинлашувчи. **2618.** $\mathbf{p>1}$ да абсолют яқинлашувчи, $\mathbf{0<p\le 1}$ да шартли яқинлашувчи. **2619.** $\mathbf{p>1}$ да абсолют яқинлашувчи, $\mathbf{0<p\le 1}$ да шартли яқинлашувчи. **2620.** $\mathbf{p>1}$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2}<\mathbf{p}\le 1$ да шартли яқинлашувчи. **2621.** $|\mathbf{x}-\mathbf{k}\pi|<\frac{\pi}{4}$ да абсолют яқинлашувчи, $\mathbf{x}=\mathbf{k}\pi\pm\frac{\pi}{4}$ да шартли яқинлашувчи. **2622.** $\mathbf{p>1}$ да абсолют яқинлашувчи, $\frac{1}{2}<\mathbf{p}\le 1$ да шартли яқинлашувчи. **2623.** Шартли яқинлашувчи. **2624.** Абсолют яқинлашувчи. **2625.** Узоқлашувчи. **2626.** $\mathbf{p>2}$ да абсолют яқинлашувчи, $\mathbf{0<p\le 2}$ да шартли яқинлашувчи. **2627.** Шартли яқинлашувчи.

Адабиётлар

1. **Азларов Т. А., Мансуров Х. Т.** *“Математик анализ”*. I, II том 1994, 1995.
2. Г. **Худойберганов, А. Ворисов, Х. Мансуров**. *«Математик анализ»,* +арши. Насаф нашриёти. 2003 йил.
3. **Фихтенгольц Г. М.** *“Курс дифференциального и интегрального исчисления”*. Т. 1-3. М., 1970.
4. **Ильин В. А., Садовничний В. А. Сендов Б. Х.** *”Математический анализ”*. М. ; Из-во МГУ 1987.
5. **Зорич В. А. “***Математический анализ”*. Ч. I,II. М. 1981, 1984.
6. **Ильин В. А., Поздняк Э. Г.** *“Основы математического анализа***”**. Ч. I. М. 1982, Ч. II. 1980.
7. **Кудрявцев Л. Д.** “*Курс математического анализа”*. Т. I,II -М. 1981.
8. **Никольский С. М.** *“Курс математического анализа***”**. Т. I, II - М, 1990, 1991.
9. **А. Садуллаев, Х. Мансуров, Г. Худойберганов, А. Варисов, Р. Ғуломов** *“Математик анализ курсидан мисол ва масалалар тыплами”* 1,2 том. ”Ўзбекистон”, 1993, 1995.
10. **Демидович Б. П.** “*Сборник задач и упражнений по математическому анализу”*. М. 1972.
11. **Туйчиев Т. Т., Джумабоев Д. Х.** *“Математик анализ фанидан 1- курс талабалари учун лаборатория ишлари”,Т.”Университет” 2003.*
12. **Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.** “*Сборник задач по математическому анализу*”**,** т. 1, 2-М., ”Наука”, 1984, 1986.
13. **Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А.** “*Задачи и упражнения по математическому анализу*”, т. 1. -Издательство Московского Университета, 1988.
14. **Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Медведев Г. Н., Шишкин А. А.** “*Математический анализ в вопросах и задачах”***,** ч. 1, 2-М., “Высшая школа”, 1984, 1988.
15. **Виноградова И. А., Олехник С. Н., Садовничий В. А**. “*Математический анализ в задачах и упражнениях”*. Из-во МГУ. 1991.