МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
КУЙБЫШЕВСКИЙ ФИЛИАЛ ГОУ ВПО «НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Н. П. Шаталова

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебник для студентов

*Печатается по решению
научно-методического совета
ГОУ ВПО «НГПУ» Куйбышевского филиала*

Красноярск
2010

УДК 517.5
ББК 22.161.54
Ш28

Рецензенты:

О.А. Тарасова,
кандидат педагогических наук, доцент,
декан ФМиИ Куйбышевского филиала ГОУ ВПО «Новосибирский государственный педагогический университет»
И.А. Дудковская,
кандидат педагогических наук, доцент,
зав. каф.МИиМП Куйбышевского филиала ГОУ ВПО «Новосибирский государственный педагогический университет»
В.В. Моторин
кандидат педагогических наук, доцент,
член-корреспондент АПСН РФ

Шаталова Н.П.
Ш28 Теория функций действительного переменного : Учебник. / Н.П. Шаталова. – Красноярск : ООО «Научно-инновационный центр», 2010. – 208 с.

Учебник предназначен для организации конструктивного обучения студентов педагогических вузов специальности «математика» с дополнительной специальностью. Учебник имеет инновационную структуру, соответствующую требованиям и принципам конструктивного обучения.

УДК 517.5
ББК 22.161.54

ISBN 978-5-904771-07-2

ОТ АВТОРА

Знание элементов теории функций действительной переменной является необходимой частью математической культуры будущего учителя, готовящегося к обучению математике учащихся образовательных учреждений. Эта дисциплина излагается в педагогическом университете на третьем курсе. Дисциплина относится к циклу фундаментальных математических дисциплин. Изучение данной дисциплины базируется на знаниях студентами курса «Математика» в объеме средней школы, а также математических дисциплин, изучаемых на 1-ом и 2-ом курсах: «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра», «Математический анализ». Предполагается также свободное владение основными понятиями математического анализа, такими как предел, производная, интегралы, ряды. Однако, знание этих понятий в объеме курса математического анализа не всегда достаточно для решения современных прикладных и теоретических задач. Поэтому возникает необходимость расширения знаний с целью: развития у студентов конструктивного мышления и формирования у обучаемых математических знаний для успешного овладения профессиональными навыками на необходимом научном уровне. Кроме того, основные положения дисциплины «ТФДП» являются фундаментом математического образования прикладного математика, важны для успешного изучения общематематических и специальных дисциплин.

Содержание дисциплины предполагает изучение следующих вопросов: «Мощность множества. Счетные и несчетные множества. Строение замкнутых и открытых множеств на числовой прямой. Понятие метрического пространства. Полные метрические пространства. Мера Лебе-

га. Множества и функции, измеримые по Лебегу. Интеграл Лебега. Ряды Фурье».

В результате изучения дисциплины студент должен освоить основные понятия и теоремы, знать способы их применения для решения и конструирования задач. А именно, должен знать:

- *основные понятия теории метрических пространств: основные примеры метрических пространств, сходимость, непрерывные отображения метрических пространств, полнота, принцип сжимающих отображений;*
- *основные понятия теории нормированных пространств: примеры, связь с метрически ми пространствами, сходимость и линейные свойства;*
- *основные понятия теории линейных операторов: непрерывность и ограниченность, норма, линейность;*
- *основные понятия теории евклидовых и гильбертовых пространств: основные примеры, ортогонализация, ортогональные разложения, ряды Фурье, и должен сформировать навыки и умения:*
- *решать задачи, связанные с рассматриваемыми понятиями и теоремами;*
- *применять полученные знания при изучении других дисциплин: теория приближения функций, численные методы.*

Учебник, по своей структуре, инновационен. Он предназначен для организации конструктивного обучения во время проведения лекций, практических занятий, организации творческой самостоятельной и научной (учебной) работы. Теоретический материал изложен в тезисном варианте. Материал напечатан только на четных страницах книги, при этом нечетные страницы – чистые, на них студент может вносить личные записи во время прослушивания лекций. В случае, если студент не смог посетить лекцию, то личные записи он сможет внести во время само-

стоятельной работы с научной литературой, рекомендуемой лектором. Кроме того, студент имеет возможность заблаговременно (до начала лекции) ознакомиться с основными вопросами темы, а во время лекции акцентировать внимание на наиболее трудных. Преподаватель получает возможность больше времени уделить анализу сложных тем и раскрытию новейших достижений в излагаемой проблеме. Таким образом, лекция превращается из традиционной диктант-лекции в конструкт-лекцию сотрудничества и сознательного приобретения знаний, основанного на уже приобретенном опыте студента.

Получив теоретические знания, студент имеет возможность применить их при решении задач. Учебник содержит более 180 задач. В моменты затруднений можно обратиться к ответам и указаниям по решению задач.

Для подготовки к коллоквиуму, зачету или экзамену в конце учебника приведены вопросы и задания для контрольной работы по всему курсу.

Тематика курсовых (дипломных) работ и задачи, олимпиадного характера, окажут помощь студенту, желающему продолжить изучение дисциплины, проводить самостоятельные исследования и научные эксперименты.

Н.П. Шаталова

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

РАЗДЕЛ 1. МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

1.1. Соответствия между множествами

Теория функций действительного переменного изучает общие свойства некоторых пространств и их отображений. Особое внимание уделяется множествам, элементами которых являются функции и последовательности. Рассмотрим основные понятия: множества, виды множеств, их основные свойства и некоторые соответствия между множествами.

Множества бывают конечными и бесконечными, равными и неравными.

Определение 1

Множество называют конечным, если оно состоит из конечного числа элементов.

Определение 2

Множество называют бесконечным, если число элементов в нем – бесконечно.

Определение 3

Множество называют пустым, если оно не содержит ни одного элемента.

Определение 4

Множество называют универсальным, если в нем содержатся элементы всех «мыслимых и немыслимых» множеств.

Определение 5

Два множества называют равными, если одно из них является подмножеством другого множества и при этом второе множество является подмножеством первого.

Замечание. То есть, в случае если все элементы первого множества принадлежат второму множеству, и все элементы

Личные заметки студента

второго множества принадлежат первому множеству, то такие множества будут равными.

Свойства конечных множеств

1. Если к конечному множеству добавить конечное число элементов, то получится конечное множество.
2. Если из конечного множества выбросить конечное число элементов, то получится конечное, либо пустое множество.
3. Объединение конечного числа конечных множеств есть множество конечное.
4. Объединение бесконечного числа конечных множеств есть множество бесконечное.

Множества различают также и по содержанию его элементов. Например, множества, элементы которых числа, называют числовыми множествами. Примером числовых множеств являются, например, множества:

- натуральных чисел;
- целых чисел;
- четных чисел;
- положительных чисел;
- рациональных чисел;
- иррациональных чисел;
- действительных чисел;
- чисел, принадлежащих отрезку $[a;b]$ и пр.

Определение 6

Числовое множество A называют *ограниченным сверху,* если существует такое число M, что все числа из A не превосходят M. Число M называют *верхней гранью A.*

Множество ограниченное сверху имеет бесконечно много верхних граней, поскольку любое число, большее верхней грани, само является верхней гранью.

Определение 7

Наименьшую из верхних граней называют *точной верхней гранью* и обозначают $\sup A$

Аналогично определяют *множество ограниченное снизу, нижняя грань, точная нижняя грань* как наибольшая из нижних граней, её обозначают $\inf A$.

Личные заметки студента

Замечание. Основная теорема теории вещественных чисел утверждает, что ограниченное сверху множество вещественных чисел имеет точную верхнюю грань, ограниченное снизу – точную нижнюю грань. Следует иметь в виду, что для множества, состоящего только из рациональных чисел, это неверно. Грани ограниченного множества могут принадлежать или не принадлежать множеству. Так, оба множества (0,1), [0,1] имеют точные верхние грани 1 и нижние 0. В первом случае они не входят во множество, во втором – входят.

Между множествами часто устанавливаются соответствия между их элементами по какому-нибудь признаку, правилу либо описанию. Среди всех соответствий особенно выделяют функциональное соответствие, которое называют еще и функцией либо отображением.

Рассмотрим два множества произвольной природы: X и Y.

Определение 8

Функцией (или отображением) $f\colon X\to Y$ называют правило, которое каждому элементу множества X сопоставляет элемент множества Y.

Замечание. Элемент y из Y, сопоставленный элементу $x\in X$, обозначают через $f(x)$. Если $X_1\subset X$, то *образом* X_1 при отображении f называют множество $f(X_1)=\{f(x)\colon x\in X_1\}\subset Y$.

Если $Y_1\subset Y$, то *прообразом* Y_1 при отображении f называют множество $f^{-1}(Y_1)=\{x\colon f(x)\in Y_1\}\subset X$.

Тождественное отображение $i_X\colon X\to X$ имеет вид $i(x)=x$ для любого $x\in X$.

Определение 9

Если $\sup A\in A$, то множество A имеет максимум, в этом случае вместо $\sup A$ используют обозначение $\max A$.

Аналогично определяют минимум множества $\min A$.

Определение 10

Суперпозицией отображений $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, называют отображение $f o g\colon X\to Z$, действующее по правилу $f o g(x)=g(f(x))$.

Определение 11

Отображение $f^{-1}\colon Y\to X$ называют *обратным* к f, если

$$f o f^{-1}=i_X,\ f^{-1} o f=i_Y.$$

Личные заметки студента

Необходимым и достаточным условием существования отображения f^{-1} является биективность отображения *f*. Справедлива следующая формула: $(f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$.

Замечание. Обозначения прообраза множества и обратной функции совпадают, но смысл их различен. В первом случае он применяется к множеству и значением является множество, во втором – к элементу, и значением является элемент. Прообраз множества существует всегда, а обратная функция не всегда.

1.2. Взаимнооднозначные соответствия. Эквивалентность множеств

Среди различных видов соответствий между двумя множествами особо выделим взаимнооднозначное (иньективное) соответствие. Пусть A и B – два множества.

Определение 12

Правило F, которое каждому элементу *a* множества *A* соотносит один и только один элемент *b* множества *B*, причём каждый элемент $b \in B$ оказывается соотнесённым одному и только одному $a \in A$, называют *взаимнооднозначным соответствием* (иньективным отображением) между множествами *A* и *B*.

Определение 13

Если между множествами *A* и *B* можно установить взаимнооднозначное соответствие, то говорят, что эти множества *эквивалентны* (и пишут: A ~ B)

$$((\exists F : A \to B) \quad \Lambda \quad (F - \textit{иньективно})) \Leftrightarrow \quad (A \sim B) \;)$$

Приведём некоторые простые свойства эквивалентности:

- свойство *рефлексивности*: всегда *A ~ A;*
- свойство *симметричности:* если *A ~ B,* то *B ~ A;*
- свойство *транзитивности*: если

A ~ B, а *B ~C,* то *A ~ C.*

Теорема 1

Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ две последовательности множеств. Если множества A_n и B_n (для любого n) не пересекаются между собою:

$$A_n \cap A_{n'} = \varnothing, \; B_n \cap B_{n'} = \varnothing \qquad (n \neq n'),$$

Личные заметки студента

и если при каждом n

$$A_n \sim B_n \qquad (n=1, 2, 3, \ldots),$$

то

$$\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa \sim \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa$$

1.3. Счетные множества. Свойства счетных множеств

Определение 14

Множество A называют *счётным* множеством, если оно эквивалентно множеству N всех натуральных чисел.

Примеры счётных множеств:

$$A = \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots,\ n^2,\ \ldots\},$$

$$B = \{1,\ 8,\ 27,\ 64,\ \ldots,\ n^3,\ \ldots\},$$

$$C = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n,\ \ldots\},$$

$$D = \{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots\}.$$

Теорема 2

Для того чтобы множество A было счётным, необходимо и достаточно, чтобы его можно было «перенумеровать», то есть представить в форме последовательности

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}.$$

Доказательство

Если множество A представлено в форме

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\},$$

то достаточно каждому его элементу a_n соотнести индекс n этого элемента, чтобы получить взаимнооднозначное соответствие между A и N, так что A счётно.

Обратно, если A счётно, то существует взаимнооднозначное соответствие φ между A и N. Достаточно обозначить через a_n тот из элементов множества A который в соответствии φ отвечает числу n, чтобы получить представление A в форме

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\}.$$

Личные заметки студента

Теорема 3

Из всякого бесконечного множества A можно выделить счётное подмножество D.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть A бесконечное множество, из него всегда можно выделить произвольный элемент a_1. Так как A бесконечно, то оно не исчерпывается выделением элемента a_1, что позволяет выделить элемент a_2 из оставшегося множества A / $\{a_1\}$. По тем же соображениям множество A / $\{a_1, a_2\}$ не пусто, и из него можно выделить элемент a_3. Ввиду бесконечности множества A этот процесс можно продолжать неограниченно, в результате чего получится последовательность выделенных элементов a_1, a_2, …, a_n, …, которая и образует искомое счетное множество D.

Теорема 4

Всякое бесконечное подмножество B счётного множества A счётно.

Д о к а з а т е л ь с т в о

По условию A счётное множество, а B его бесконечное подмножество. Расположив элементы множества A в форме последовательности

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

и перебирая элементы A в порядке их номеров, можно встретить элементы множества B, так как множество В есть подмножество множества А. Определив каждому элементу множества B номер под которым они встретились, можно перенумеровать множество B. В силу его бесконечности в перенумерации будут заняты все натуральные числа.

Теорема 5

Если из счётного множества A удалить конечное подмножество M, то оставшееся множество A / M будет счётным.

(Д о к а з а т ь самостоятельно)

Теорема 6

Объединение конечного множества и счётного множества без общих элементов есть счётное множество.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$, причём $A \cap B = \varnothing$. Если $A \cup B = S$, то S можно представить в форме

Личные заметки студента

$$S = \{a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, b_3, ...\}.$$

После чего и появляется возможность перенумеровать элементы множества S.

Теорема 7

Объединение конечного числа попарно не пересекающихся счётных множеств есть счётное множество.

Доказательство

Пусть дано конечное число попарно непересекающихся счётных множеств:

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, ...\},$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, ...\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...\},\ n\text{-const}.$$

Записав элементы данных множеств в виде таблицы (матрицы), так чтобы все элементы k –ого ($1<k<n$) множества заняли место k в строке таблицы, можно заметить, что каждый столбец полученной таблицы имеет конечное число элементов.

Теперь объединение элементов данных множеств можно представить в форме последовательности:

$$S = \{a_{11}, a_{21}, ... a_{n1}, a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2}, a_{13}, ...\},$$

записывая по порядку элементы каждого столбца таблицы, начиная с первого. Счетность полученного множества очевидна.

Теорема 8

Объединение счётного множества попарно не пересекающихся конечных множеств есть счётное множество.

Доказательство

Пусть $A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ суть попарно не пересекающиеся конечные множества:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, ..., a_{n_1}^{(1)}\},$$
$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, ..., a_{n_2}^{(2)}\},$$
$$A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, ..., a_{n_3}^{(3)}\},$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Для того, чтобы расположить объединение их S в форме последовательности, достаточно выписать подряд все элементы множества A_1, затем элементы A_2 и так далее.

Личные заметки студента

Теорема 9

Объединение счётного множества попарно не пересекающихся счётных множеств есть счётное множество

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть множества $A_k (k = 1, 2, 3, \ldots)$ попарно не пересекаются и счётны. Запишем эти множества так:

$$A_1 = \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \ldots\}$$

$$A_2 = \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \ldots\}$$

$$A_3 = \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \ldots\}$$

. . . .

. . . .

Если мы выпишем элемент $a_1^{(1)}$, затем оба элемента $a_2^{(1)}$, и $a_1^{(2)}$, у которых сумма верхнего и нижнего индексов равна 3, затем те элементы, у которых эта сумма равна 4, и т. д., то объединение

$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ окажется представленной в форме последовательности

$$S=\{ a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_3^{(1)}, a_2^{(2)}, a_1^{(3)}, a_4^{(1)}, \ldots\},$$

откуда и следует её счётность.

Замечание. Иногда говорят также, что множество *A «имеет мощность a».* Используя символ *a* как обозначение мощности счётного множества, можно доказанные теоремы изобразить с помощью мнемонических схем:

$$a - n = a, \quad a + n = a, \quad a + a + \ldots + a = na = a,$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots = a, \quad a + a + a + \ldots = aa = a.$$

Теорема 10

Множество всех рациональных чисел счётно.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Множество дробей вида $\frac{p}{q}$ с данным знаменателем q т. е. множество $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, \ldots$

Личные заметки студента

счётно. Но знаменатель может принять также счётное множество натуральных значений 1, 2, 3, … Значит множество дробей $\frac{p}{q}$ счётно; удаляя из него все сократимые дроби (множество которых счетно), убеждаемся в счётности R_+ всех *положительных* рациональных чисел. Так как множество $R\_$ отрицательных рациональных чисел эквивалентно множеству R_+, то счётно и оно, а тогда счётно и множество R, ибо

$$R = R\_ \cup \{0\} \cup R_+.$$

Следствие. Множество рациональных чисел любого отрезка: [a, b] - счётно.

1.4. Несчетные множества. Множества континуума и их свойства

Рассмотрим математическое **утверждение** «Среди всех бесконечных множеств имеются и несчетные множества. Так, например, множество точек отрезка [0, 1] *несчётено»*. Докажем это утверждение методом «от противного».

Пусть множество точек отрезка [0, 1] - есть счётное множество. Тогда все точки его можно расположить в виде последовательности:

$$x_1, x_2, x_3, \ \ldots$$

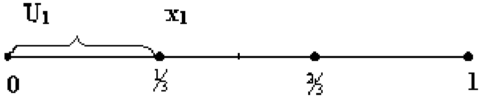
Тогда всякая точка $x \in [0, 1]$ находится в этой последовательности. Разделим отрезок [0, 1] на три равные части точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Поскольку точка x_1 не может принадлежать всем трём отрезкам:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \ \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right], \ \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

Один из данных отрезков не содержит её. Обозначим через U_1 любой отрезок, которому точка x_1 не принадлежит (в случае если она не принадлежит сразу двум отрезкам, то выберем самый левый из них).

Личные заметки студента

Теперь разделим на три равные отрезка отрезок U_1, обозначив через U_2 тот, который не содержит точки x_2 (а если таких



сегментов два, то один из них, например тот, что расположен левее).

Затем делим на три равные отрезка отрезок U_2 и обозначаем через U_3 тот из них, который не содержит точки x_3 и т. д.

В результате мы получим бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков:

$$U \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset ...,$$

которые обладают тем свойством, что

$$x_n \,\overline{\in}\, U_n.$$

Длина отрезка U_n равна $\frac{1}{3^n}$. С возрастанием *n* *длина отрезка* U_n *будет* стремиться к нулю, значит по теореме о вложенных отрезках, существует точка ξ, принадлежащая всем сегментам U_n:

$$\xi \in U_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно, что точка ξ должна входить в последовательность:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

но это невозможно. Какое бы *n* ни взять мы имеем:

$$x_n \,\overline{\in}\, U_n, \quad \xi \in U_n, \text{ откуда } \xi \neq x_n,$$

то есть ξ не может совпасть ни с одной из точек последовательности: $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Полученное противоречие и доказывает сделанное предположение:

«множество точек отрезка [0, 1] несчётено».

Определение 15

Множество *A* эквивалентное множеству точек отрезка [0,1] называют множеством *континуума.*

Теорема 11

Множество точек любого промежутка:

Личные заметки студента

$$[a,b],\ (a,b)\ ,(a,b],[a,b)$$

является множеством континуума.

Доказательство

Пусть

$$A = [a, b],\ U = [0, 1].$$

Формула: $y = a + (b - a)x$, устанавливает взаимнооднозначное соответствие между множествами: $A = \{y\}$, $U = \{x\}$, откуда и следует, что A – есть множество континуума.

Так как удаление одного или двух элементов из бесконечного множества приводит к множеству, эквивалентному исходному, то множество точек промежутков:

$$(a, b),\ (a, b],\ [a, b)$$

также являются множествами континуума.

Теорема 12

Объединение конечного числа попарно не пересекающихся множеств континуума является множеством континуума.

Доказательство

Пусть

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \quad (E_k \cap E_{k'} = \varnothing,\ \ k \neq k'),$$

где каждое E_k – множество континуума.

Возьмём полуинтервал [0, 1) и точками:

$$0 = c_0 < c_1 < c_2 < \ \ldots < c_{n-1} < c_n = 1$$

разделим его на n полуинтервалов:

$$[c_{k-1},\ c_k) \qquad (\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Множество точек каждого полуинтервала является множеством континуума. Между множеством точек E_k и полуинтервалом: $[c_{k-1}, c_k)$ всегда можно установить взаимнооднозначное соответствие. А значит существует и взаимнооднозначное соответствие между множеством S и полуинтервалом:

$$[0, 1) = \bigcup_{k=1}^{n} [c_{k-1}, c_k).$$

Теорема 13

Объединение счётного множества попарно непересекающихся множеств континуума есть множество континуу-

ма.

Личные заметки студента

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} E_k \quad (E_k \cap E_{k'}{}' = \varnothing\,, \;\; k \neq k'),$$

где каждое E_k –множество континуума.
Возьмём на полуинтервале [0, 1) монотонно возрастающую последовательность

$$c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \ldots, \quad \text{для которой} \quad \lim_{k\to\infty} c_k = 1.$$

Установив взаимнооднозначное соответствие между множествами: E_k, $[c_{k-1}, c_k)$ для всех k, тем самым устанавливается взаимнооднозначное соответствие между точками множеств:

S и [0, 1).

1.5. Понятие мощности множеств. Трахеотомия множеств

Каждое множество характеризуется свойством принадлежности к определенному классу эквивалентных множеств, имеющих одинаковую мощность. Если множество конечно, то его мощность определяется числом элементов. Если множество, имеет бесконечное число элементов, то его мощность может быть либо счетной, либо континуумом, либо булеаном, либо булеан булеаном и т. д.. Для определения мощности множества нужно установить его отношение к одному из эквивалентных классов:

- класс счетных множеств, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел;
- класс множеств континуума, если оно эквивалентно множеству действительных чисел;
- класс множеств булеана, если, но эквивалентно множеству всех подмножеств множества мощности континуума;
- класс множеств булеан булеанов, если... и т.д.

Сравнение множеств по мощности *называют трахеотомией* множеств. Если множества А эквивалентно хотя бы одному из подмножеств множества В, то говорят, что множество А

Личные заметки студента

не превосходит множества А по мощности, и записывают:

$$B \succ A.$$

Если два множества В и А неэквивалентны, но множество В эквивалентно хотя бы одному подмножеству множества А, говорят, что множество А мощнее, чем множество В, и записывают: $A \succ B$ или $B \prec A$.

Теорема 14

Всякое бесконечное множество содержит эквивалентную часть.

Доказательство

Действительно, удаляя из бесконечного множества произвольное конечное подмножество, его мощность не изменяется.

Как уже отмечалось, конечное множество не обладает указанным свойством. Это обстоятельство позволяет дать, принадлежащее Дедекинду, определение бесконечного множества.

Определение 16

Множество называют *бесконечным*, если оно содержит эквивалентную часть.

Памятка студенту

1. Прочитайте текст, предложенный в данном учебнике

2. Выделите наиболее сложный для понимания материал

3. Прослушайте лекции преподавателя, дополняя запись на нечетных страницах учебника

4. Во время лекции попросите преподавателя дать разъяснения по непонятным вам вопросам

5. Используя математическую символику и рисунки, сделайте записи, соответствующие определениям, теоремам и их доказательствам, которые записаны на четных страницах

6. Проверьте свои знания по данному разделу, отвечая на вопросы к коллоквиуму или экзамену

7. Решите задачи с помощью указаний к решению.

Личные заметки студента

РАЗДЕЛ 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Метрика. Примеры метрических пространств

Идея «метрики» в пространстве формализует понятие «расстояния». В обобщенном смысле можно ввести расстояние между объектами различной природы, например, функциями или последовательностями.

Определение 17

Метрикой называют числовой прообраз функции $\rho(x,y)$, зависящей от двух переменных и удовлетворяющей трем аксиомам:

а) неотрицательность: для всех точек множества $\rho(x,y) \geq 0$, причем условие $\rho(x,y) = 0$ выполняется только в единственном случае, если $x = y$;

б) симметричность: для всех точек множества $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

в) неравенство треугольника: для всех точек множества выполняется неравенство

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,y).$$

Определение 18

Метрическим пространством называют множество X, на котором определена метрика. То есть любым двум элементам (точкам) x,y данного множества сопоставлено число удовлетворяющее всем трем аксиомам метрики.

Теорема 15

Справедливо неравенство

$$|\rho(x,z)-\rho(z,y)| \leq \rho(x,y),$$

которое следует из неравенства треугольника.

Д о к а з а т е л ь с т в о

По аксиомам «неравенство треугольника» и «симметрия метрики» имеем:

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(z,y), \qquad \rho(z,y) \leq \rho(x,y) + \rho(x,z).$$

Из первого неравенства следует $\rho(x,z) - \rho(z,y) \leq \rho(x,y)$, из второго – $\rho(z,y) - \rho(x,z) \leq \rho(x,y)$. Нужное неравенство следует из того, что пара неравенств $a \le b, \quad -a \le b$ равносильна одному неравенству $|a| \le b$.

Личные заметки студента

Замечание. Если на одном и том же множестве заданы две метрики, то имеем два разных метрических пространства.

Примеры *метрических пространств*

1. Множество действительных чисел *R*.

Метрика определяется по правилу $\rho(x,y) = |x-y|$. Первые две аксиомы метрики очевидны, неравенство треугольника следует из неравенства $|a+b| \le |a| + |b|$ при заменах $a = x-z$, $b = z-y$.

2. Конечномерные метрические пространства R^p_n .

Рассмотрим множество векторов вида $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с действительными компонентами. Пусть число $p \ge 1$. Определим метрику формулой

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Первые две аксиомы метрики очевидны, неравенство треугольника следует из неравенства Минковского.

На множестве *n*-мерных векторов можно определить метрику формулой:

$$\rho_\infty(x,y) = \max |x_i - y_i| .$$

Проверьте это самостоятельно.

3. Пространство непрерывных функций *C на отрезке* [0,1], которое обозначается *C*[0,1].

Определим метрику:

$$\rho(x,y) = \max_t |x(t) - y_i(t)|$$

Функция

$$|x(t) - y(t)|$$

непрерывна на отрезке [0,1] и достигает максимального значения. Покажем выполнение всех аксиом метрики.

а) $\rho(x,y) \ge 0$. Пусть $\rho(x,y) = 0$. Это означает, что

$$|x(t) - y(t)| = 0$$

при любом $t \in [0,1]$, т.е функции совпадают ($x = y$).

б) Симметричность следует из того, что

$$|x(t) - y(t)| = |y(t) - x(t)|,$$

но тогда равны и максимумы этих функций.

Личные заметки студента

c) Для доказательства неравенства треугольника, используя свойство модуля, запишем неравенство, справедливое для любой точки *z(t)* отрезка:

$$|x(t)-y(t)| \le |x(t)-z(t)| + |z(t)-y(t)|.$$

По определению метрики ρ, как максимального значения, получаем неравенство

$$|x(t)-y(t)| \le \rho(x;z) + \rho(z;y)$$

поскольку это неравенство справедливо при всех значениях аргумента, то $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$, что и требовалось доказать.

4. Пространство сходящихся последовательностей

Элементами этого пространства являются сходящиеся последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ с метрикой

$$\sup_i |x_i - y_i|.$$

Проверьте это самостоятельно.

5. Пространства непрерывных функций $L^p{}_c$.

Рассмотрим множество непрерывных функций, определенных на отрезке [0,1]. Метрику между функциями определим формулой

$$\left(\int_0^1 |x(t)-y(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \quad \text{где } p \ge 1.$$

Выполнимость аксиом метрики следуют из свойств интеграла и неравенства Минковского.

6. Дискретные метрические пространства. Рассмотрим произвольное множество и определим на нем метрику таким образом, что $\rho(x,y) = 1$, если $x \neq y$. В этом пространстве шар $B(x, \varepsilon) = B(x,1)$ $(1 > \varepsilon > 0)$ содержит только центр шара.

2.2. Топологические понятия в метрических пространствах

Все точки метрического пространства подразделяют на три непересекающихся класса: внутренние, внешние, граничные. Для определения каждого из перечисленных видов точек необ-

Личные заметки студента

ходимо ввести понятие окрестности точки метрического пространства.

Определение 19

Открытой (замкнутой) окрестностью точки a метрического пространства Е называют множество точек x метрического пространства Е, которые удовлетворяют условию: $\rho(a;x)<\varepsilon$ $(\rho(a;x)\leq\varepsilon)$, при этом ε-называют радиусом окрестности. Окрестность точки a обозначают: $U_\varepsilon(a)$.

$$U_\varepsilon(a) = \{x \;/\; x \in E \text{ и } \rho(a;x)<\varepsilon \}$$

Свойства окрестностей

1. Точка a метрического пространства Е принадлежит любой своей окрестности.
2. Если точка a имеет две окрестности, то одна из них является подмножеством другой последовательности.
3. Если $b\in U_\varepsilon(a)$, то найдется такое действительное положительное число $\delta>0$, что $U_\delta(b)\subset U_\varepsilon(a)$.
4. Если две точки a и b метрического пространства Е имеют окрестности $U_\delta(a)$ и $U_\varepsilon(b)$ соответственно, то возможно только три случая расположения окрестностей в метрическом пространстве Е, каждый из которых удовлетворяют соответствующим условиям:

а) окрестности не имеют общих точек, если метрика между точками больше суммы радиусов их окрестностей:

$$\rho(a;b)>\delta+\varepsilon \text{ , то } U\delta(a)\cap U\varepsilon(b)=\emptyset;$$

в) окрестности имеют одну единственную общую точку, если метрика между точками равна сумме радиусов их окрестностей:

$$\rho(a;b)=\delta+\varepsilon \text{ то } U_\delta(a)\cap U_\varepsilon(b)= c \text{ и } c \text{ – единственная;}$$

с) окрестности имеют общих точек, если метрика между точками меньше суммы радиусов их окрестностей:

$$\rho(a;b)<\delta+\varepsilon\text{, то есть } U_\delta(a)\cap U_\varepsilon(b)\neq\emptyset.$$

Докажем одно из перечисленных свойств окрестностей. ***Доказательство остальных свойств окрестностей предлагаем провести студентам самостоятельно.***

Доказательство первого свойства

Пусть $x=a$, согласно определению окрестности вычислим метрику $\rho(a;a)$. Получим $\rho(a;a)=0<\varepsilon$. Откуда следует вывод о том, что $x=a \in U_\varepsilon(a)$.

Личные заметки студента

Рассмотрим метрическое пространство E, которое является подмножеством пространства M. Введем основные определения для точек пространства M относительно пространства E.

Определение 20

Точку a называют *внутренней точкой* метрического пространства E только в случае, если найдется такая ее окрестность, которая целиком содержится внутри рассматриваемого метрического пространства E. То есть:

$(\exists \varepsilon>0 : U_{\varepsilon}(a)\subset E)\rightarrow(a-$ внутренняя точка метрического пространства E)

Определение 21

Точку a называют *внешней точкой* метрического пространства E только в случае, если найдется такая ее окрестность, которая целиком не содержится внутри рассматриваемого метрического пространства E. То есть:

$(\exists \varepsilon>0 : U_{\varepsilon}(a)\cap E=\emptyset)\rightarrow(a -$ внешняя точка метрического пространства E)

Определение 22

Точку a называют *граничной точкой* метрического пространства E только в случае, если любая ее окрестность, имеет как точки, принадлежащие рассматриваемому метрическому пространству E, так и точки, не принадлежащие ему. То есть:

$(\forall \varepsilon>0 \quad \exists c,b\in U_{\varepsilon}(a) :(c\in E \wedge b\notin E))\rightarrow(a-$ граничная точка метрического пространства E).

Очевидно, любая точка пространства M не может быть одновременно внутренней и граничной, внешней и внутренней, граничной и внешней. Именно поэтому внешние, внутренние и граничные точки считают основными. *Они образуют непересекающиеся классы, объединение которых образует все пространство M.*

Примеры

а) Всякая точка интервала – внутренняя точка;

б) концы линейного отрезка – его граничные точки;

в) множество иррациональных точек n-мерного отрезка состоит только из граничных точек;

г) всякая точка, не принадлежащая n-мерному отрезку, есть внешняя точка для него.

Личные заметки студента

В метрическом пространстве есть и другие виды точек, привлекающие внимание - это изолированные точки, точки прикосновения, предельные точки. Введем их определения.

Определение 23

Точку a называют *изолированной точкой* метрического пространства E только в случае, если найдется такая ее окрестность, в которой не содержится ни одной точки рассматриваемого метрического пространства E, кроме самой точки a. То есть:

$(\exists\varepsilon>0 : U_\varepsilon(a)\cap E=\{a\})\rightarrow(a -$ изолированная точка метрического пространства E)

Определение 24

Точку a называют *точкой прикосновения* метрического пространства E только в случае, если в любой ее окрестности имеется хотя бы одна точка из рассматриваемого метрического пространства E. То есть:

$(\forall\varepsilon>0 : U_\varepsilon(a)\cap E\neq\emptyset)\rightarrow(a-$ точка прикосновения метрического пространства E)

Принимая во внимание перечисленные выше определения, остается ответить на вопрос: «К какому классу точек (внутренние, внешние, граничные) относятся изолированная точка и точка прикосновения?» Ответ вытекает из сопоставления определений и логических выводов из него. Любая окрестность данных точек содержит хотя бы одну точку принадлежащую пространству E и хотя бы одну точку ему не принадлежащую, а следовательно данные точки относятся к классу граничных.

Замечание. У любого множества на плоскости все его изолированные точки являются граничными.

Понятие предельной точки подмножества действительных чисел рассматривалось в курсе математического анализа. В общем случае это понятие имеет следующий вид.

Определение 25

Точку a называют *предельной точкой E*, если в любой окрестности a есть точки множества $E\setminus\{a\}$, где M - метрическое пространство, $E\subset M$, $a\in E$.

Личные заметки студента

Определение 26

Точку a называют *предельной точкой* множества E, если в любой окрестности точки a содержится хотя бы одна точка из E, отличная от a.

В любой окрестности a есть точки множества M, отличные от a. Предельная точка может, как принадлежать, так и не принадлежать множеству.

Задача

Докажите, что для того, чтобы а была предельной точкой множества E, необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности точки а существовало бесконечно много точек из E.

Доказательство предлагаем читателю провести самостоятельно.

Задача

Докажите, что если предельная точка a не принадлежит множеству M, то найдется последовательность точек $\{x_n\} \in M$, сходящаяся к a в этом метрическом пространстве.

Доказательство

Для доказательства достаточно взять открытые шары в этой точке радиусов $1/n$ и выбрать из каждого шара точку, принадлежащую M. Верно и обратное, если для a есть такая последовательность, то точка является предельной.

Предельные точки могут быть в одних определенных случаях внутренними, в других – граничными.

Рассмотрим еще ряд определений, относящихся к вопросам топологии в метрическом пространстве. Точки, удовлетворяющие конкретным условиям, образуют множества, свойства которых помогают решить некоторые важные математические задачи.

Определение 27

Множество всех граничных точек метрического пространства E называют *граничным множеством (границей E)* и обозначают ∂E.

Определение 28

Множество всех внутренних точек метрического пространства E называют его *ядром E* и обозначают O(E). То есть:

Личные заметки студента

$$O(E) = E \setminus \partial E$$

Определение 29

Множество, состоящее только из изолированных точек называют *изолированным*.

Примеры

а) конечное множество есть множество изолированное;

б) множество натуральных чисел – множество изолированное.

Определение 30

Множество всех предельных точек множества E называют его *производным* множеством и обозначают E'.

Определение 31

Множество всех точек прикосновения метрического пространства E *называют замыканием E* и обозначают E'.

Определение 32

Множество всех точек прикосновения множества E называют *замыканием множества*.

Определение 33

Замыканием множества E называется объединение E с множеством его предельных точек E'.

Свойства замыкания множеств

1. Справедливо утверждение: $M \subset \overline{M}$.

Доказательство следует непосредственно из определения замыкания.

2. Если $M \subset N$, *то* $\overline{M} \subset \overline{N}$.

Доказательство

Если $a \in \overline{M}$, $a \notin M$, то в любой окрестности a есть точки множества M. Они же являются точками N. Поэтому $a \in \overline{N}$. Для точек из M это очевидно по определению.

3. *Справедливо утверждение*: $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

Доказательство

Поскольку $M \subset M \cup N$, $N \subset M \cup N$, то $\overline{M} \subset \overline{M \cup N}$, $\overline{N} \subset \overline{M \cup N}$ по свойству 2, откуда $\overline{M \cup N} \supset \overline{M} \cup \overline{N}$.

Докажем обратное включение. Рассмотрим точку $a \in \overline{M \cup N}$. Если $a \in M \cup N$, то, очевидно, что $a \in \overline{M} \cup \overline{N}$. Пусть теперь

Личные заметки студента

$a \in \overline{M \cup N} \setminus (M \cup N)$. Найдется последовательность точек $x_n \in M \cup N$, сходящаяся к точке a. Так как множеств всего два, а членов последовательности бесконечное число, то по крайней мере одно из них (например, M) содержит бесконечное число членов последовательности, то есть существует такая подпоследовательность, что

$$x_{n_k} \in M \text{ и } x_{n_k} \to a.$$

Это означает, что $a \in \overline{M}$. Таким образом,

$$\overline{M \cup N} \subset \overline{M} \cup \overline{N}.$$

4. Справедливо утверждение: $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$.

Доказательство

Из первого свойства следует $\overline{\overline{M}} \supset \overline{M}$. Пусть $a \in \overline{\overline{M}}$. Покажем, что $a \in \overline{M}$. Докажем от противного, пусть $a \notin \overline{M}$. Тогда в любой окрестности точки a есть точки множества $\overline{M}$, а в окрестностях последних есть точки M. Более точно. Пусть $r > 0$. В шаре $B(a,r/2)$ есть точка $b \neq a$ множества $\overline{M}$. В шаре $B(b,\rho(a,b)/2)$ есть точка $c \in M$. Поскольку по обратному неравенству треугольника

$$\rho(a,c) \geq |\rho(a,b) - \rho(b,c)| \geq \rho(a,b) - \rho(a,b)/2 = \rho(a,b)/2 > 0, \text{ то } a \neq c.$$

В то же время $\rho(a,c) \leq \rho(a,b) + \rho(b,c) < 3\rho(a,b)/2 < r$.

Таким образом, поскольку число r произвольное, то в любой окрестности точки a есть точки множества M, отличные от a, т.е. $a \in \overline{M}$. Доказанное противоречие завершает доказательство.

5. Замыкание пустого множества пустое.

Это утверждение из общего определения не следует, однако является очевидным.

Определение 34

Множество E называют *плотным на множестве* A, если замыкание множества E включает A, то есть $A \subset E$.

Личные заметки студента

2.3. Открытые и замкнутые множества

Рассмотрим понятие «замкнутые множества» и свойства замкнутых множеств. Пусть E точечное множество метрического пространства.

Определение 35

Множество называют *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки, то есть если $E' \subset E$, то множество E называют *замкнутым*.

Проиллюстрируем данные определения примерами.

Примеры.

1. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, $E' = \{0\}$. Множество не замкнуто.
2. $E = (a,b)$, $E' = [a,b]$. Множество не замкнуто.
3. $E = [a,b]$, $E' = [a,b]$. Множество замкнуто.
4. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}, \ldots, 0\right\}$, $E' = \{0\}$. Множество замкнуто.
5. $E = R$ (множество всех рациональных чисел), $E' = Z$, множество не замкнуто.
6. E – конечное множество, E' =0, т.е. конечное множество замкнуто.

Свойства замкнутого множества

1. *Производное множество E′ любого точечного множества E замкнуто.*

Доказательство

Теорема очевидна, если E' пусто. Пусть E' не пусто и x_0 есть предельная точка E'. Рассмотрим произвольный интервал (α,β), содержащей точку x_0. По определению предельной точки, в этом интервале найдётся точка $z \in E'$. Значит интервал (α,β) есть интервал, охватывающий предельную точку исходного множества E, а потому он содержит бесконечное множество точек E.

Итак, всякий интервал, содержащий точку x_0 содержит бесконечное множество точек E, так что точка x_0 есть предельная

Личные заметки студента

точка *E*. То есть $x_0 \in E'$. Значит, множество E' содержит все свои предельные точки и, стало быть, замкнуто.

2. *Замыкание* $\overline{E}$ *любого множества E замкнуто.*

Доказательство

Действительно,

$$(\overline{E})' = (E \cup E') = E' \cup (E')' \subset E' \cup E' = E' \subset E'.$$

3. *Для того, чтобы множество E было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно совпадало со своим замыканием*: $E = \overline{E}$.

Доказательство

Достаточность этого условия вытекает из предыдущего свойства. Обратно, пусть множество *E* замкнуто, тогда $\overline{E} = E \cup E' \subset E \subset \overline{E}$, откуда и следует, что $E = \overline{E}$.

4. *Объединение конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Доказательство

Рассмотрим сначала случай двух слагаемых множеств

$$\Phi = F_1 \cup F_2.$$

В силу выше перечисленных свойств, имеем $\Phi' = F'_1 \cup F'_2$, но, так как $F_1^{'} \subset F_1$, $F_2^{'} \subset F_2$, то $\Phi' \subset \Phi$, откуда и следует формулировка теоремы.

Общий случай доказывается способом математической индукции.

5. *Пересечение любого множества замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

Доказательство

Пусть замкнутые множества F_ξ отмечены для отличия друг от друга значком ξ, принимающим какое-нибудь множество значений, и $\Phi = \bigcap_{\xi} F_\xi$ их пересечение.

Тогда $\Phi \subset F_\xi$ при любом ξ, откуда следует, что $\Phi' \subset F'_\xi$ и тем более $\Phi' \subset F_\xi$. Так как это верно при любом ξ, то

Личные заметки студента

$\Phi' = \bigcap\limits_{\xi} F_{\xi}$ т.е. $\Phi' \subset \Phi$, что и требовалось доказать.

6. *Пусть F замкнутое множество и*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots$$

последовательность точек F. Если $\lim x_n = x_0$ *, то* $x_0 \in F$.

Доказательство

В самом деле, если рассматриваемая последовательность содержит бесконечное множество различных точек, то x_0 есть предельная точка F и $x_0 \in F$, если же в данной последовательности лишь конечное число различных точек, то, как легко понять, все члены последовательности, начиная с некоторого, совпадают с x_0 и $x_0 \in F$.

*Рассмотрим понятие «**открытое множество**» и **свойства** открытых множеств.*

Определение 36

Множество E называют ***открытым***, если все его точки являются внутренними.

Проиллюстрируем на ***примерах***.

1. Всякий интервал (a, b) есть открытое множество.
2. Множество Z всех вещественных чисел открыто.
3. Пустое множество 0 открыто.
4. Сегмент $[a, b]$ не есть открытое множество, ибо его концы не являются внутренними точками.

Свойства открытых множеств

1. *Объединение любого множества открытых множеств есть множество открытое.*

Доказательство

Пусть S – *объединение* открытых множеств G_{ξ}. Пусть $x_0 \in S$ тогда $x_0 \in G_{\xi}$ при некотором ξ_0. Так как G_{ξ} есть открытое множество, то существует такой интервал (α, β), что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G_{\xi}$, но тогда и подавно $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset S$, так что

Личные заметки студента

x_0 есть внутренняя точка *S*. Поскольку x_0 есть произвольная точка *S*.

Следствие. Любое множество, представимое в форме суммы интегралов, открыто.

2. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть

$$P = \bigcap_{k=1}^{n} G_k ,$$

где все G_k открыты. Если *P* пусто, то утверждение очевидно. Допустим, что *P* не пусто, и пусть $x_0 \in P$.

Тогда

$$x_0 \in G_k, \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

и для каждого *k* найдётся интервал (α_k, β_k) такой, что

$$x_0 \in (\alpha_k, \beta_k) \subset G_k .$$

Пусть

$$\lambda = \max(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \text{ и } \quad \mu = \min(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$$

очевидно

$$x_0 \in (\lambda, \mu) \subset P ,$$

то есть x_0 есть внутренняя точка *P*.

Замечание. Пересечение бесконечного множества открытых множеств может не быть открытым множеством.

Итак, если

$$G_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

то все множества G_n открыты, но их пересечение

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$$

не является открытым множеством.

Личные заметки студента

Рассмотрим ***связь между открытым и замкнутым*** *множествами*. Пусть E и S два точечных множества.

Определение 37

Если $E \subset S$, то множество $S \backslash E$ называют *дополнением множества E до множества S* и обозначается так: $C_S E$.

В частности, множество $C_Z E$, где $Z = (-\infty, +\infty)$, называют просто *дополнением* множества E и обозначается через CE.

Свойства дополнения множества

1*. Если множество G открыто, то его дополнение CG замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $x_0 \in G_k$, тогда существует такой интервал (α, β), что

$$x_0 \in (\alpha, \beta) \subset G.$$

Данный промежуток вовсе не содержит точек CG, следовательно, x, не является предельной точкой множества CG, а значит точка, являющаяся предельной точкой множества CG, не может принадлежать G. Отсюда следует, что CG содержит все свои предельные точки.

2. *Если множество F замкнуто, то его дополнение CF открыто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $x_0 \in CF$. Тогда точка x_0 не является предельной точкой множества F и, следовательно, существует интервал (α, β), содержащий точку x_0 и не содержащий ни одной, отличной от x_0 точки F. Но так как и x_0 не входит в F, то в (α, β) вообще нет точек F, так что $(\alpha, \beta) \subset CF$ и x_0 есть внутренняя точка CF.

3. *Если G открытое множество, а* $[a, b]$ *– содержащий его сегмент, то множество* $[a, b] \setminus G$ *замкнуто и что если F замкнутое множество, а* (a, b) *– содержащий его интервал, то множество* $(a, b) \setminus F$ *открыто.*

Личные заметки студента

Д о к а з а т е л ь с т в о

Эти утверждения следуют из очевидных тождеств

$$[a, b] \setminus G = [a, b] \cap CG. \quad (a, b) \setminus F = (a, b) \cap CF.$$

Пусть F замкнуто и $F \subset [a, b]$, тогда множество $[a, b] \setminus F$ не является, открытым. Пусть, например, $F = [0, 1]$ и $[a, b] = [0, 2]$, тогда $[a, b] \setminus F = (1, 2]$.

4. *Если S есть наименьший отрезок, содержащий ограниченное замкнутое множество F, то множество $C_S F = [a, b] \setminus F$ открыто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть E непустое ограниченное множество и $a = \inf E$, $b = \sup E$. Отрезок $S = [a, b]$ называют *наименьшим отрезком*, содержащим E. Поэтому достаточно убедиться в справедливости тождества

$$C_S F = (a, b) \cap F.$$

Пусть

$$x_0 \in C_S F.$$

Значит

$$x_0 \in [a, b], \qquad x_0 \overline{\in} F.$$

Но поскольку

$$x_0 \overline{\in} F,$$

то

$$x_0 \neq a \qquad x_0 \neq b$$

(ибо a и b входят в F). Значит $x_0 \in (a, b)$. Кроме того, x_0, очевидно, входит в CF, так что $C_S F \subset (a;b) \cap CF$. Обратное же включение очевидно.

2.4. *Связные и несвязные метрические пространства*

Определение 38

Метрическое пространство E называют *несвязным*, если существует непрерывное отображение F этого пространства на

Личные заметки студента

двухточечное пространство $\{0;1\}$ и связным в противном случае.

$$\left(E - несвязно \Leftrightarrow \exists F : E \to \{0;1\}\right)$$

Определение 39

Метрическое пространство называется *связным*, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств и несвязным в противном случае.

$$(\left(E - несвязно\right) \Leftrightarrow \left(E = A \cup B\right) \wedge (A \cap B = \varnothing \wedge A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing))$$

***Теорема* 16**

Любой числовой промежуток связен.

Доказательство

Докажем методом «от противного». Пусть числовой промежуток E несвязен, тогда существует F -непрерывное отображение E в двухточечное пространство $\{0;1\}$. Пусть $F(x)=1$, $F(y)=0; (x,y \in E)$. Так как отрезок $[x;y] \in E$, то отображение F непрерывно на этом отрезке. По теореме о промежуточном значении числовой функции, непрерывной на отрезке, найдется такая точка $\xi \in [x;y]$, что $F(\xi)=\frac{1}{2}$. Так как $\xi \in E$, то получили противоречие с тем, что отображение F на E принимает лишь значения 0 и 1. Значит, предположение о несвязности E ложно.

Теорема 17

Каждая связная часть E числовой прямой R. вместе с любыми двумя точками x и y содержит весь отрезок [x;y].

$$\left((E \subset R) \wedge (E - связно) \wedge (x \in E) \wedge (y \in E)\right) \Rightarrow ([x;y] \in E)$$

Доказательство

Докажем методом «от противного». Пусть существует точка $\xi \in [x;y]$ *и* $\xi \notin E$. Пусть $E_1 = E \cap \left(-\infty;\xi\right)$ и $E_2 = E \cap \left(\xi;+\infty\right)$. Очевидно, что $E_1 \neq \varnothing$ и $E_2 \neq \varnothing$, причем E_1, E_2- открыты в E. Поскольку

$$\xi \notin E, \text{ то } E_1 \cup E_2 = E \cap (R \setminus \{\xi\}) = E;$$

кроме того $E_1 \cap E_2 = \varnothing$. Итак, пространство E удалось представить в виде двух непересекающихся непустых открытых множеств, значит E несвязно, что противоречит усло-

Личные заметки студента

вию теоремы. Полученное противоречие и доказывает справедливость теоремы.

Теорема 18

Образ связного пространства E при непрерывном отображении F является связным.

$$\big((F : E \to P) \wedge (E - связно) \wedge F - непрерывное\big) \Rightarrow (P - связно)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Докажем методом «от противного». Пусть F(E) = P несвязно. Это означает, что существует отображение G пространства P на $\{0;1\}$. Но тогда отображение G(F(E)) было бы непрерывным отображением пространства E на $\{0;1\}$, что противоречит связности E.

Теорема 19

Если числовая функция f непрерывная на связном пространстве E, принимает на E значения x и y (x<y), то она принимает на E и любое промежуточное значение ξ ($x<\xi<y$).

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть *f*(E)=P, $P \in \boldsymbol{R}$. Так как E –связно, то связно и P (следует из предыдущей теоремы). Но тогда, поскольку $x \in E$ и $y \in E$, то и весь отрезок $[x;y] \in E$. Значит для любого $\xi \in [x;y]$ найдется такая точка $\eta \in P$, что $f(\xi) = \eta$.

Примеры

1. Связные множества: ковер Серпинского, любое одноточечное множество метрического пространства.

3. Несвязное множество: множество точек фигуры, состоящей из двух непересекающихся кругов.

2.5. Совершенное множество. Канторово совершенное множество

Определение 40

Если множество замкнуто и не содержит изолированных точек, то его называют *совершенным*.

Личные заметки студента

Построение канторова множества:

а) из отрезка $[0;1]$ исключается один интервал $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$,

б) затем выбрасываются два интервала: $\left(\frac{1}{9};\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9};\frac{8}{9}\right)$ из оставшихся двух промежутков: $\left[0;\frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3};1\right]$, то есть выбрасываются интервалы длины $\frac{1}{3^2}$ с центрами в серединах этих промежутков,

в) затем из оставшихся уже четырех промежутков: $\left(0;\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right),\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3};1\right)$ - исключаются интервалы длины $\frac{1}{3^3}$ с центрами в серединах этих промежутков и так далее.

Множество оставшихся после исключения всех указанных интервалов, является совершенным множеством – оно и называется канторовым совершенным множеством.

Его точки можно подразделяют на две части. Первая часть – это концы выбрасываемых интервалов, таких точек счетное множество.

Вторая часть – все остальные точки канторова множества, их –континуум.

Арифметическая ***структура канторова*** *множества.*

Канторово множество состоит из тех и только тех точек отрезка $[0;1]$, которые могут быть записаны в виде троичной дроби, не содержащей единицы в числе своих троичных знаков.

Личные заметки студента

2.6. Линейные нормированные пространства

Введем определение нормы.

Определение 41

Нормой называют функцию, зависящую от одной переменной и удовлетворяющая трем *аксиомам*:

1. *аксиома неотрицательности* : $||x||\geq 0$ для любой точки x, причем $||x||=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;
2. *положительная однородность нормы*: $|| \lambda\cdot x|| = |\lambda |\cdot || x||$ для любой точки x и любого действительного числа λ;
3. *неравенство Минковского*: $||x+y||\leq ||x||+||y||$ для любых точек x, y из данного пространства.

Определение 42

Линейное пространство называют *нормированным пространством*, если каждой точке x этого пространства поставлено в соответствие норма (действительное число $||x||$).

Примеры

1. Множество действительных чисел R , где в качестве нормы числа рассматривается его модуль.

2.Пространство векторов на плоскости (или в пространстве) с нормой, равной длине вектора.

Теорема 20 (*о связи между метрикой и нормой*).

В любом линейном нормированном пространстве можно ввести метрику следующим образом:

$$\rho(x,y) = ||x - y||$$

Доказательство

Доказательство теоремы сводят к проверке выполнения каждой аксиомы метрического пространства.

Выполнение первой аксиомы метрического пространства следует из первой аксиомы нормированного пространства.

Выполнение второй аксиомы также очевидно, так как:

$$\rho(x,y) = ||x - y|| = ||(-1)\cdot(-x+ y)|| =|-1|\cdot ||y - x||= \\ = 1\cdot ||y - x|| = ||y - x||= \rho(y,x)$$

Выполнение третьей аксиомы метрического пространства следует из неравенства Минковского:

$$\rho(x,y) = ||x - y|| = ||x +0 - y|| =||x+(-z+z) - y|| = \\ = ||(x-z)+(z- y)|| \leq ||x -z||+ ||z-y|| = \rho(x,z)+ \rho(z,y),$$

Личные заметки студента

то есть $\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

Замечание. Обратное утверждение неверно. Не в любом метрическом пространстве можно ввести норму, поскольку понятие нормы вводится лишь в линейном пространстве, а метрическое пространство может не быть линейным пространством.

Далее рассмотрим **множество L** - *некоторое множество объектов произвольной природы рассматриваемое на множестве действительных чисел.* Эти объекты будем называть точками пространства L .

Определение 43

Множество L называют *линейным пространством,* если на нем определены две операции:

1) операция сложения любых двух точек этого пространства: каждой паре точек x, y из этого пространства поставлена в соответствие точка z этого пространства, которую называют суммой точек x и y (обозначение: $z = x + y$);

2) операция умножения точек данного пространства на число β из множества действительных чисел: каждой точке x из L и каждому числу поставлена в соответствие точка z из L, которую называют произведением числа β и точки x (обозначение $z = =\beta \cdot x$), причем эти операции удовлетворяют следующим *восьми* ***свойствам*** в заданном пространстве, то есть

1. $x + y = y + x$ *для любых точек* $x, y \in L$;
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ *для любых точек* $x, y, z \in L$;
3. *существует нуль пространства* $\theta \in L$, *такой, что* $x + \theta = x$ *для любой точки* $x \in L$;
4. *для каждой* $x \in L$ *существует "противоположная" ей точка* $(-x) \in L$, *такая, что* $x + (-x) = \theta$;
5. *для каждой* $x \in L$ *существует "единственная" точка* $(1) \in L$, *такая, что* $1 \cdot x = x$;
6. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$ *для любой точки* $x \in L$ *и любых чисел* $\alpha, \beta \in R$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ *для любой точки* $x \in L$ *и любых чисел* $\alpha, \beta \in R$;
8. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ *для любой точки* $x, y \in L$ *и любых чисел* $\alpha \in R$.

Личные заметки студента

Приведем ***примеры*** *линейных пространств*

1. Линейное пространство векторов на плоскости (или в трехмерном пространстве) с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число. Нулем пространства является нулевой вектор.

2. Линейное пространство всевозможных последовательностей действительных чисел с операциями сложения и умножения на число, где нуль пространства – последовательность

$$(0, 0, ..., 0, ...).$$

3. Линейное пространство функций, непрерывных на данном отрезке $[a;b]$ обычными операциями сложения функций и умножения функции на действительное число, где нуль пространства – функция $f(x)=0$.

Определение 44

Пространство называют *линейным нормированным пространством*, если оно является линейным и нормированным одновременно.

Рассмотрим некоторые ***свойства линейных нормированных пространств.***

1. Норма точки нормированного пространства является метрикой между нулем пространства и данной точкой.

Доказательство

Пусть $y=0$, тогда в формуле

$$\rho(x,y) = ||x - y||$$

из теоремы о связи метрики нормы следует

$$\rho(x,0) = ||x -0|| =||x||.$$

2 . Справедливо утверждение:

$$\rho(\lambda x,\lambda y) = |\lambda|\cdot\rho(x,y)$$

Доказательство

$$\rho(\lambda x,\lambda y) = ||\lambda x - \lambda y||= ||\lambda(x - y)||= |\lambda|\cdot ||x-y||=|\lambda|\cdot\rho(x,y)$$

3. Справедливо утверждение:

$$\rho(x+z,y+z) = \rho(x,y)$$

Доказательство

$$\rho(x+z,y+z) =||(x+z) -(y+z)||= ||x +z- y-z||=||x-y|| = \rho(x,y)$$

Личные заметки студента

Таблица 1

Таблица основных линейных нормированных пространств

	Элементы пространства		
	Кортежи из n действительных чисел $x=(x_1,...;x_n)$	Бесконечные последовательности $x_i \in R$ $x=(x_1,...,x_n,...)$	Функции $x=x(t)$, непрерывные на отрезке $[a;b]$
Обозначения и формулы для нормы	R_2^n $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$	R_2^∞ $\|x\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ x такие, что ряд $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$ сходится	$C_2[a;b]$ $\|x\|=\sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$
	R_1^n $\|x\|=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$	R_1^∞ $\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|$ x такие, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i\|$ сходится	$C_1[a;b]$ $\|x\|=\int_a^b \|x(t)\|dt$
			$C[a;b]$ $\|x\|=\max_{a\le t\le b}\|x(t)\|$
	R_∞^n $\|x\|=\max_i \|x_i\|$	R_∞^∞ $\|x\|=\sup_i \|x_i\|$ x - ограниченные последовательности	$D^n[a;b]$ $\|x\|=\max_{a\le t\le b}\left\{\|x(t)\|;\|x'(t)\|;...;\|x^{(n)}(t)\|\right\}$

2.7. Предел и непрерывность в метрических пространствах

Введем основные понятия, встречающиеся в математическом анализе для метрических пространств. Поскольку точками метрического пространства могут быть объекты произвольной природы, например, и числа, и числовые кортежи, и точки гео-

Личные заметки студента

метрического пространства, и линии, и функции, то вводимые ниже определения имеют более широкую область применения. Определение предела числовой последовательности опирается на понятие метрики.

Определение 45

Точку a метрического пространства Е называют *пределом последовательности точек* $\{x_n\}$ из пространства Е, если для любого положительного действительного числа ε можно указать такой номер N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon$. При этом пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

То есть: ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ((\forall\ \varepsilon > 0)\ (\exists N\ (\varepsilon)\ )\ (\forall\ n>N)\ (\forall\ x_n \in \{x_n\} \cap E\ ):$$
$$: (\rho(x_n, a) < \varepsilon)))$$

Определение 46

Точку $a \in$ Е называют *пределом последовательности точек* $\{x_n\}$ из пространства Е, если числовая последовательность $\{\rho(a, x_n)\}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то при этом пишут

$$\lim_{n\to\infty} \rho(a, x_n) = 0.$$

Определение 47

Последовательность $\{x_n\}$ называют сходящейся, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ по метрике пространства Е.

При этом пишут ($x_n \to a$) или $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и говорят, что $\{x_n\}$ *сходится к точке* a по метрике пространства Е.

Определение 48

Если последовательность $\{x_n\}$ не сходится ни к какой точке из пространства Е, её называют *расходящейся*.

Неравенство $\rho(x_n, a) < \varepsilon$ означает, что x_n находится в - окрестности точки a. Поэтому можно дать и «геометрическое» определение предела.

Определение 49

Точку a называют *пределом последовательности точек* $\{x_n\}$ в пространстве E с заданной метрикой, если любая окрест-

Личные заметки студента

ность точки a содержит все точки данной последовательности, начиная с некоторой.

Замечание. Если, например, метрики в пространствах $C[a;b]$, $C_1[a;b]$, $C_2[a;b]$ различны, то говорят о разных видах сходимости последовательностей функций.

Теорема 21

Сходимость по метрике пространства $C[a;b]$ равносильна равномерной сходимости.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть последовательность функций из пространства $C[a;b]$ сходится в этом пространстве к функции f. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n, f) = 0$, где

$$\rho(f_n, f) = \max_{a\le x\le b}|f_n(x) - f(x)|.$$

Но тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что при $n > N$ для всех $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Это значит, что последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится на $[a;b]$ к f.

Обратно, если последовательность $\{f_n\}$ функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$, равномерно сходится на $[a;b]$ к f, то, как известно, функция f тоже непрерывна на $[a;b]$, то есть $f \in C[a;b]$. При этом, в силу определения равномерной сходимости, $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(f_n, f) = 0$, то есть $\{f_n\}$ сходится к f по метрике $C[a;b]$.

Свойства сходящихся последовательностей

1. *Никакая последовательность точек метрического пространства не может иметь более одного предела.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Предположим, что в некотором метрическом пространстве имеется последовательность $\{x_n\}$, имеющая два предела:

Личные заметки студента

a и b, $a \neq b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(b, x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(b, x_n) = 0$. Кроме того, в силу метрики

$$0 \leq \rho(a,b) \leq \rho(a, x_n) + \rho(b, x_n).$$

Переходя в этом числовом неравенстве к пределу, получаем: $\rho(a,b) = 0$, что противоречит аксиоме тождества, поскольку $a \neq b$.

2. *Если последовательность точек метрического пространства имеет предел, то и любая её последовательность имеет тот же предел.*

Доказательство **предлагаем осуществить читателю самостоятельно.**

3. *Всякая сходящаяся последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства E ограничена.*

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда найдётся такое N, что $\rho(a, x_n) < 1$ при $n > N$. Обозначим через r наибольшее из чисел $1, \rho(a, x_1), \ldots, \rho(a, x_N)$. Все точки рассматриваемой последовательности принадлежат замкнутому шару радиуса r с центром в точке a. Это и означает, что последовательность ограничена.

4. *Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ из метрического пространства сходятся, то*

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \rho\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right).$$

Доказательство предлагаем осуществить читателю самостоятельно.

5. *Если в линейном нормированном пространстве последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, то и последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится, причём*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Доказательство

Пусть $x_n \to a$, $y_n \to b$. Тогда

$$
\begin{aligned}
&0 \le \left\|(a+b)-(x_n+y_n)\right\| = \\
&= \left\|(a-x_n)+(b-y_n)\right\| \le \left\|a-x_n\right\| + \left\|b-y_n\right\|
\end{aligned}
$$

Личные заметки студента

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим искомое.

6. *Если числовая последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к числу λ, а последовательность $\{x_n\}$ из линейного нормированного пространства L сходится к $a \in L$, то последовательность $\{\lambda_n x_n\}$ сходится в L к элементу λ_a.*

Доказательство

Рассмотрим соотношения

$$0 \le \|\lambda_n x_n - \lambda_a\| =$$

$$= \|\lambda_n (x_n - a) + (\lambda_n - \lambda) a\| \le |\lambda_n| \cdot \|a - x_n\| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \|a\| .$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, получим искомое.

2.8. Непрерывные отображения метрических пространств

Познакомимся с более общим понятием в метрических пространствах – непрерывным отображением. Пусть А и В – метрические пространства с метриками ρ_A и ρ_B соответственно и f - отображение А в В.

Определение 50 (на «языке неравенств»)

Отображение $f: A \to B$ называют *непрерывным в точке* $a \in A$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для всех $x \in A$, удовлетворяющих неравенству $\rho_A(a, x) < \delta$, выполняется неравенство $\rho_B(f(a), f(x)) < \varepsilon$.

Определение 51 (на «языке окрестностей»)

Отображение $f: A \to B$ называют *непрерывным в точке* $a \in A$, если для любой окрестности V точки $b = f(a)$ можно указать в A такую окрестность U точки a, что $f(U) \subset V$.

Определение 52 (на «языке последовательностей»

Отображение $f: A \to B$ называют *непрерывным в точке* $a \in A$, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся в

Личные заметки студента

A к точке a, последовательность $\{f(x_n)\}$, в точке *B* сходится к точке $f(a)$.

Замечание. Эквивалентность этих определений непрерывности доказывается точно так же, как и для функций

$$f : R \to R.$$

Определение 53

Отображение $f: A \to B$ называют *непрерывным на всём метрическом пространстве A* (или просто непрерывным), если оно непрерывно в каждой точке из *A*.

Свойства непрерывных отображений

1. Пусть отображение $f: A \to B$ *непрерывно в точке a пространства A, а отображение* $g: B \to C$ *- в точке* $b = f(a)$ *пространства B. Тогда и сквозное отображение*

$$x \to g(f(x))$$

пространства A в C непрерывно в точке a.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Выберем любую окрестность W точки $c = g(f(a))$ пространства C. Так как отображение g непрерывно в точке $b = f(a)$ и $g(b) = c$, то найдётся окрестность V точки b такая, что $g(V) \subset W$. Точно так же, в силу непрерывности отображения f в точке a, найдётся окрестность U этой точки такая, что $f(U \subset V)$. Но тогда имеем:

$$g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

а это и значит, что отображение $x \to g(f(x))$ непрерывно в точке a.

Замечание. Пусть ϕ и φ - два отображения метрического пространства M в линейное пространство L. В этом случае можно

Личные заметки студента

говорить о сумме отображений ϕ и φ, а также о произведении этих отображений на число λ. А именно полагаем:

$$(\phi+\varphi)(x)=\phi(x)+\varphi(x); \qquad (\lambda\varphi)(x)=\lambda\varphi(x).$$

2. *Пусть ϕ и φ - непрерывные отображения метрического пространства M в линейное нормированное пространство L. Тогда отображение $\phi+\varphi$ и $\lambda\varphi$ также непрерывны на M.*

Доказательство

Пусть $a\in M$. Так как отображение ϕ и φ непрерывны в точке a, то для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $\delta>0$, что при $\rho(a,x)<\delta$ выполняются неравенства

$$\|\phi(x)-\phi(a)\|<\frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|\varphi(x)-\varphi(a)\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Но тогда

$$\|(\phi+\varphi)(x)-(\phi+\varphi)(a)\|\le\|\phi(x)-\phi(a)\|+\|\varphi(x)-\varphi(a)\|<\varepsilon.$$

Значит, $\phi+\varphi$ - непрерывное отображение M в L.

Замечание. Непрерывность $\lambda\phi$ доказывается аналогично.

3. *Если f - непрерывное отображение метрического пространства A в метрическое пространство B, то полный прообраз любого открытого множества из B открыт, а замкнутого – замкнут в A.*

Доказательство

Пусть $\overline{B}$ - открытое множество из B. Требуется доказать, что все точки множества $\overline{A}=f^{-1}(\overline{B})$ из *A* являются внутренними.

Пусть $a\in\overline{A}$ и $f(a)=b$. Тогда $b\in\overline{B}$ и, поскольку $\overline{B}$ открыто в B, b - внутренняя точка $\overline{B}$. Поэтому существует окрестность V этой точки, принадлежащеё $\overline{B}$.

Поскольку отображение f непрерывно в a, найдётся такая окрестность U точки a, что $f(U) \subset V$. Но тогда $f(U) \subset \overline{B}$, и

Личные заметки студента

поэтому $U \subset \overline{A} = f^{-1}\left(\overline{B}\right)$. Это показывает, что у любой точки $a \in \overline{A}$ есть окрестность, принадлежащая $\overline{A}$, т.е. a - внутренняя точка для $\overline{A}$. Поэтому $\overline{A}$ открыто в A.

Поскольку дополнение к замкнутому множеству открыто, а прообразы двух дополнительных друг другу множеств из B взаимно дополнительны в $\overline{A}$, то из доказанного вытекает справедливость и второго утверждения.

2.9. Неподвижные точки отображения метрического пространства. Сжимающие отображения

Пусть задано некоторое отображение F метрического пространства *M* в себя, то есть $F: M \to M$.

Определение 54

Точка *a* из М называется *неподвижной точкой* отображения F, если выполняется условие: $F(a) = a$.

Определение 55

Отображение F метрического пространства М в себя называют *сжимающим*, если существует такое число δ, что $0<\delta<1$, и при любом выборе в этом пространстве двух точек x_1 и x_2 выполняется неравенство: $\rho(F(x_1);F(x_2)) \le \delta \cdot \rho(x_1;x_2)$.

$$\begin{pmatrix} (F - \text{сжимающее}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow ((\exists \delta \in (0;1))(\forall x_1; x_2 \in M) : (\rho(F(x_1);F(x_2)) \le \delta \cdot \rho(x_1;x_2)) \end{pmatrix}$$

Число δ называется *константой сжатия.*

Теорема Банаха (22)

Если сжимающее отображение F задано в полном метрическом пространстве E, то в этом пространстве существует одна и только одна неподвижная точка отображения.

Доказательство

Пусть $x_0 \in E$, тогда $F(x_0) \in E$ так как по условию теоремы, заданное отображение сжимающее на E, а значит отображает E в себя. Обозначим $F(x_0) = x_1$. Но тогда

$$F(F(x_0)) = F(x_1) = x_2 \in E,$$

Личные заметки студента

Продолжая процесс неограниченно дальше, получим последовательность точек $\{x_n\}$ $(n \in N)$пространства Е для которых справедливо неравенство:

$$\rho(F(x_{n-1}); F(x_n)) \le \delta^n \cdot \rho(x_0; x_1).$$

Неравенство можно доказать методом математической индукции, исходя из условия, данного в определении сжимающего отображения.

Выберем какое-нибудь натуральное число N и пусть $m > n > N$, тогда из «неравенства многоугольника»:

$$(\rho(x_n, x_m)) \le \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + \rho(x_{m-1}; x_m)$$

следует, что

$$\rho(x_n; x_m) \le \delta^n \cdot \rho(x_0; x_1) + \delta^{n+1} \cdot \rho(x_0; x_1) + \ldots +$$

$$+ \delta^{m-1} \rho(x_0; x_1) \le \frac{\delta^n \cdot \rho(x_0; x_1)}{1 - \delta}$$

Откуда следует, что

$$\rho(x_n; x_m) \le \frac{\delta^N \cdot \rho(x_0; x_1)}{1 - \delta}.$$

Очевидно, что $\delta^N \to 0$ при $N \to \infty$, а значит

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n, m > N) : (\rho(x_n, x_m) \le \varepsilon)),$$

то есть последовательность $\{x_n\}$фундаментальна.

По условию теоремы пространство Е полное, а это значит, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторой точке ***a*** из *E*. Покажем, что *a* – неподвижная точка отображения *F :* поскольку $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, а отображение F непрерывно, то

$$F(a) = F(\lim_{n \to \infty} x_n) = \lim_{n \to \infty} F(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = a.$$

Докажем единственность неподвижной точки. Используем доказательство «методом от противного». Пусть неподвижных точек две: *a* и *b*, причем $a \ne b$ и $F(a) = a; F(b) = b$, тогда $\rho(a;b) = \rho(F(a); F(b)) \le \delta \cdot \rho(a;b)$,то есть

$$\rho(a;b) \le \delta \cdot \rho(a;b).$$

Личные заметки студента

Но $\rho(a;b)>0$ и $\rho(a;b)\neq 0$, тогда $\delta \geq 1$, что неверно. Получено противоречие, доказывающее, что сделанное предположение неверно. Следовательно, отображение F имеет только одну единственную неподвижную точку.

Пример

Доказать, что отображение $F(y(x))=\frac{1}{5}\int_0^x y(t)\cdot dt$ пространства C[0;2] в себя является сжимающим. Найти неподвижную точку заданного отображения.

Решение.

А) Рассмотрим две произвольные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$. пространства C[0;2]. Так как

$$\left|F(y_1(x))-F(y_2(x))\right| = \left|\frac{1}{5}\int_0^x y_1(t)dt-\frac{1}{5}\int_0^x y_2(t)dt\right| =$$

$$=\frac{1}{5}\left|\int_0^x (y_1(t)-y_2(t))dt\right| \leq \frac{1}{5}\int_0^x \left|y_1(t)-y_2(t)\right|dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{5}x\cdot\max_{0\leq t\leq x}\left|y_1(t)-y_2(t)\right| \leq \frac{2}{5}\rho(y_1(x);y_2(x)),$$

то

$$\left|F(y_1(x))-F(y_2(x))\right| =$$

$$=\max_{0\leq t\leq 2}\left|F(y_1(t))-F(y_2(t))\right| \leq \frac{2}{5}\rho(y_1(x);y_2(x)).$$

Итак, найдена константа сжатия $\delta=\frac{2}{5}$, следовательно заданное отображение в пространстве C[0;2] сжимающее.

Б) Неподвижная точка заданного отображения – решение уравнения: $F(y(x))=y(x)$, которое согласно заданному условию можно переписать в виде: $y(x)=\frac{1}{5}\int_0^x y(t)\cdot dt$. Решение полученного интегрального уравнения при помощи дифферен-

Личные заметки студента

цирования сводится к решению дифференциального уравнения вида: $y'(x) = \frac{1}{5} y(x)$. Итак, $\frac{dy}{y} = \frac{1}{5} \cdot x \cdot dx$ или

$\ln y = \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2} + c$ (c – const), откуда $y = e^{\frac{x^2}{10}+c}$.

Значит, неподвижной точкой отображения

$$F(y(x)) = \frac{1}{5}\int_0^x y(t) \cdot dt$$

пространства C[0;2] в себя является функция: $y(x) = ce^{\frac{x^2}{10}}$.

2.10. Полные метрические пространства

Рассмотрим, прежде всего, такие понятия как фундаментальность. Пусть в метрическом пространстве имеется последовательность точек.

Определение 56

Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого числа ε >0 существует такой номер *N* зависящий от ε, что для всех номеров *n*>*N* и *m*>*N* выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

$$((\{x_n\} - фундаментальная) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n, m > N):$$
$$:(\rho(x_n, x_m) \le \varepsilon))$$

Пусть множество *E* является подмножеством метрического пространства M.

Теорема 23

Если последовательность $\{x_n\}$ точек из E сходится в E, то она фундаментальная.

$$((\{x_n\} - сходится) \Rightarrow \{x_n\} - фундаментальная)$$

Личные заметки студента

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства М сходится к точке $x \in M$. По определению сходимости последовательности (для $n,m \in \boldsymbol{N}$) имеем:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = x\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n > N) : \left(\rho(x_n, x) < \tfrac{\varepsilon}{2}\right)$$

;

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_m = x\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall m > N) : \left(\rho(x_m, x) < \tfrac{\varepsilon}{2}\right)$$

,

и так как в метрическом пространстве М справедлива аксиома треугольника: $\rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) \geq \rho(x_n, x_m)$, то

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists N(\varepsilon))(\forall n, m > N) : \left(\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_m, x) + \rho(x_n, x) \leq \right.$$

$$\left. \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \right).$$

Откуда следует, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная (по определению фундаментальной последовательности).

Теорема 24

Если последовательность $\{x_n\}$ *принадлежит подпространству Е пространства М, то из ее фундаментальности в одном из них следует ее фундаментальность в другом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Если для $\varepsilon > 0$ найден требуемый номер N для метрики одного из пространств: Е; М., так что $\forall n, m >$ N выполняется неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$, то он подходит и для метрики другого, поскольку согласно условию $E \subset M$ (то есть $\rho_E(x_n, x_m) = \rho_M(x_n, x_m)$).

Определение 57

Метрическое пространство называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его точек сходится к точке из этого же пространства.

Определение 58

Полное линейное нормированное пространство называется *банаховым пространством*.

Теорема 25

Если E замкнутая часть полного метрического пространства M, то E - полное пространство.

Личные заметки студента

$$\big((E \subset M) \wedge (E - замкнуто) \Rightarrow (E - полное)\big)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\{x_n\}$ - фундаментальная последовательность из *E*. Так как $E \subset M$, то она фундаментальна и в *M*. Но так как *M* - полно по условию, то эта последовательность сходится к некоторой точке *x* из *M*. Кроме того, по условию Е замкнуто, следовательно *x* принадлежит и Е. То есть любая фундаментальная последовательность из *E* сходится в *E*, а это означает, что *E* - полно.

Теорема 26

Всякое полное подпространство E метрического пространства M замкнуто в M.

$$\big((E \subset M) \wedge (E - полное) \Rightarrow (E - замкнуто \quad в \quad M)\big)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $\{x_n\}$ - любая сходящаяся к $x \in M$ последовательность из *E*. Следовательно последовательность $\{x_n\}$- фундаментальна в *M*, а значит и в *E*. Так как *E* - полно, то в *E* существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. В силу единственности предела в метрическом пространстве *M*, точки *x* и *a* совпадают, то есть $x = a$. Следовательно $x \in E$. Значит, предел любой сходящейся последовательности точек из *E* принадлежит *E*, то есть *E* - замкнуто.

Примеры

1. Полные метрические пространства: комплексные числа, действительные числа, n-мерное евклидово пространство R^n.

2. Неполные метрические пространства: рациональные числа; пространство непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций f_n, где метрика определяется по формуле:

$$\rho(f_1, f_2) = \int_a^b |f_1 - f_2| \cdot dx .$$

Личные заметки студента

3.1. Мера Лебега для линейных множеств

Понятие меры точечного множества - суть обобщающее понятие длины промежутка, площади прямоугольника, объема параллелепипеда, приращения неубывающей функции на промежутке, интеграла от неотрицательной функции, взятого по некоторой линейной, плоской или пространственной области и так далее.

Ограничимся знакомством с понятием меры на прямой, отправляясь от понятия длины промежутка числовой прямой. Ниже описанные рассуждения повторяются в абстрактной теории без существенных изменений.

Итак, пусть G - непустое ограниченное открытое множество, F – непустое ограниченное замкнутое множество. Через Δ обозначим интервал $(a;b)$. Через $\Delta_k=(a_k,;b_k)$ обозначим *составляющие интервалы* множества G.

Определение 59

Если интервал Δ содержится в G, но его концы этому множеству не принадлежат, то этот интервал называют *составляющим интервалом множества G.*

Определение 60

Линейной мерой интервала Δ (либо *отрезка* $[a;b]$) называют его длину, то есть число $b-a$, которое обозначают так:

$$m(a,b) = m[a;b] = b-a.$$

Определение 61

Линейной мерой ограниченного *открытого* множества G называют сумму линейных мер составляющих его интервалов Δ_k., то есть $mG=\sum\limits_k m\Delta_k$.

Замечание. Под используемым в определении символом суммы $\sum\limits_k$ в зависимости от мощности множества составляющих интервалов, понимают либо конечную сумму, либо числовой ряд.

Личные заметки студента

Замечание. Пустое множество считают открытым множеством, составляющих интервалов у него нет, следовательно его линейная *мера* равна *нулю.*

Рассматривая непустое ограниченное замкнутое множество F, обозначим через δ – наименьший отрезок $[a,b]$, содержащий множество F. При этом очевидно, что *дополнение* $C_\delta(F)$ множества F до δ - открытое множество и, следовательно, имеет линейную меру $m(C_\delta(F))$.

Определение 62

Линейной мерой непустого ограниченного *замкнутого* множества F называют число:

$$m(F) = b - a - m(C_\delta(F)).$$

Перечислим основные ***свойства линейных мер*** открытых и
замкнутых (ограниченных) множеств:

1. *Если E_1 и E_2 - ограниченные (открытые либо замкнутые) множества и* $E_1 \subset E_2$, то $m(E_1) \leq m(E_2)$.

Доказательство

Докажем для случая, когда E_1 и E_2 - ограниченные открытые множества. Случай , когда E_1 и E_2 - ограниченные замкнутые множества, предлагаем читателю рассмотреть самостоятельно.

Обозначим через $\Delta_k^{(1)}$ составляющие интервалы множества
E_1 , и через $\Delta_i^{(2)}$ - составляющие интервалы множества E_2..
Предположим, что для каждого k найдется такое i , что $\Delta_k^{(1)} \subset \Delta_i^{(2)}$, то, очевидно:

$$m(\Delta_k^{(1)}) \leq m(\Delta_i^{(2)}), \qquad \sum_k m(\Delta_k^{(1)}) \leq \sum_i m(\Delta_i^{(2)}),$$

откуда $mE_1 \leq mE_2$.

Осталось показать, что если E_1 и E_2 - ограниченные открытые множества и $E_1 \subset E_2$, то выполняется условие:

$$\forall k \ \exists i : \Delta_k^{(1)} \subset \Delta_i^{(2)}.$$

Итак, по определению составляющих отрезков имеем:

Личные заметки студента

$$\Delta_k^{(1)} \subset E_1,\ \Delta_i^{(2)} \subset E_2.$$

Если существует такое k, что для всех i выполняется условие $\Delta_k^{(1)} \cap \Delta_i^{(2)} = \varnothing$, то множество E_1 содержит точки не лежащие в множестве E_2, что противоречит условию $E_1 \subset E_2$ Из полученного противоречия следует, что

$$\forall k\ \exists i : \Delta_k^{(1)} \cap \Delta_i^{(2)} \neq \varnothing.$$

Пусть $\Delta_k^{(1)} = (a_k^{(1)}; b_k^{(1)})$ и $\Delta_k^{(1)} \cap \Delta_i^{(2)} \neq \varnothing$, причем все внутренние точки интервала $\Delta_k^{(1)}$ принадлежат множеству E_1, а следовательно и множеству E_2. Предположим, что точка $a_k^{(1)}$ не лежит в интервале $\Delta_i^{(2)}$, тогда она не принадлежит интервалу $\Delta_i^{(2)}$ вместе с некоторой окрестностью, чего быть не может. Аналогично убеждаемся , что $b_k^{(1)} \in \Delta_i^{(2)}$. Итак, концы интервала $\Delta_k^{(1)}$ принадлежат множеству E_2. Это позволяет утверждать, что $\forall k\ \exists i : \Delta_k^{(1)} \subset \Delta_i^{(2)}$.

2. *Линейная мера ограниченного множества E принимает только неотрицательные значения.*

Доказательство

Если E – открытое множество, то справедливость неравенства $0 \le m(E)$ следует из самого определения меры (вполне очевидно, что $\sum_k m(\Delta_k) \ge 0$). Пусть E – замкнутое множество. Линейная мера замкнутого множества (по определению) вычисляется по формуле:

$$m(E) = b - a - m(C_\delta(E)).$$

Но, так как $C_\delta(E) \subset \delta$ то, согласно первому свойству имеем: $m(C_\delta(E)) \le m(\delta)$.

В свою очередь $m(\delta) = b - a$, откуда $m(C_\delta(E)) \leq b - a$, а следовательно: $m(E) = (b - a) - m(C_\delta(E)) \geq 0$.

Личные заметки студента

3. *Если ограниченное множество E (открытое либо замкнутое) является объединением конечного числа или счётного множества открытых множеств* G_k, $(G = \bigcup_k G_k)$, *то*

$$m(G) \le \sum_k m(G_k).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о **этого свойства предлагаем выполнить студенту в качестве самостоятельной работы**.

4. *Если F - замкнутое, G - открытое ограниченные множества. и* $F \subset G$, *то* $m(F) \le m(G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Всегда можно найти интервал Δ, удовлетворяющий условию: $F \subset G \subset \Delta$, из которого видно, что

$$\Delta = G \cup C_\Delta(F) \quad \text{и} \quad m(F) = m(\Delta) - m(C_\Delta(F)).$$

Согласно свойству 3 имеем: $m(\Delta) \le m(G) + m(C_\Delta(F))$.

Посредством алгебраических преобразований получим:

$$m(\Delta) \le m(G) - m(F) + m(\Delta),$$

$$m(F) \le m(G).$$

5. *Линейная мера открытого (замкнутого) ограниченного множества E есть точная верхняя (нижняя) граница мер всевозможных замкнутых (открытых) множеств, содержащихся в множестве (содержащих множество) E.*

Д о к а з а т е л ь с т в о **этого свойства предлагаем выполнить студенту в качестве самостоятельной работы.**

Рассмотрим произвольное ограниченное множество – *E*.

Определение 63

Внешней (внутренней) мерой m^*E ограниченного множества *E* называют точную нижнюю (верхнюю) границу мер всевозможных открытых (замкнутых) ограниченных множеств, содержащих (содержащихся в множестве *E*) множество *E,* то есть

$$m^*E = \inf_{G \supset E} (m(G))$$

$$(m_* E = \sup_{F \subset E} (m(F))).$$

Личные заметки студента

Теорема 27

Внутренняя мера ограниченного множества E не превосходит его внешнюю меру: $m_*E \le m^*E$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Так как множество E ограничено, то для него всегда существует открытое множество G и замкнутое множество F, такие что $F \subset E \subset G$.

Согласно свойствам 4 и 5 имеем: так как $F \subset G$,

то $m(F) \le m(G)$ или $\sup m(F) \le \inf m(G)$, а следовательно $m_* E \le m^*E$.

Определение 64

Число mE равное внешней (внутренней m_*E) мере m^*E произвольного ограниченного множества E называют *мерой Лебега множества E,* если выполняется условие: $m_* E = m^*E$.

Основные свойства множеств, имеющих меру Лебега.

1. *Открытое либо замкнутое ограниченные множества имеет меру Лебега.*

(*Д о к а з а т е л ь с т в о* следует из свойств 1 и 5.)

2. *Если E есть ограниченное множество, содержащееся в интервале* Δ, *то множества* E *и* $C_\Delta E$ *одновременно либо имеют, либо не имеют меру Лебега.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Если Е имеет меру Лебега, то

$$mE = m_*E = m\Delta - m^*C_\Delta E,$$

причем $m_* C_\Delta E = m\Delta - m^*E$

откуда, $mE = m^*E = m\Delta - m_* C_\Delta E$.

Следовательно, $m^* C_\Delta E .= m_* C_\Delta E$.

3. *Если ограниченное множество E есть объединение конечного или счётного числа множеств* E_k, *попарно не пересекающихся и имеющих меру Лебега, то и множество E имеет меру Лебега, причем* $mE = \sum_k mE_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим неравенство:

Личные заметки студента

$$\sum_k mE_k = \sum_k m^* E_k \geq m^* E,$$

$$\sum_k mE_k = \sum_k m_* E_k \leq m_* E,$$

$$m^* E \leq \sum_k mE_k \leq m_* E,$$

из которых видно, что $m^* E \leq m_* E$. Учитывая результат теоремы 1 ($m_* E \leq m^* E$), приходим к выводу: $m_* E = m^* E$. Откуда следует, что существует mE и при этом $mE = \sum_k mE_k$.

Замечание. Доказанное свойство меры Лебега называют её полной аддитивностью.

4. *Пусть заданы ограниченные множества E_1, E_2, E_3, ..., соответственно имеющие меры Лебега: mE_1, mE_2, mE_3, ...*

Если $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset$ ... и множество $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ ограничено, то

$$mE = \lim_{n\to\infty} [mE_n].$$

Доказательство

Множество E можно представить в виде

$$E = E_1 \cup (E_2 / E_1) \cup (E_3 / E_2) \cup (E_4 / E_3) \cup \ldots,$$

где каждое из объединяемых множеств попарно не имеют общих точек. Откуда, в силу свойства 3, следует, что

$$mE = mE_1 + \sum_{k=1}^{\infty} m(E_{k+1} - E_k) = mE_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [mE_{k+1} - mE_k].$$

Переходя в полученном равенстве к пределу, будем иметь:

$$mE = \lim_{n\to\infty} \left\{ mE_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [mE_{k+1} - mE_k] \right\},$$

что и требовалось доказать, так как

$$mE_1 + \sum_{k=1}^{n-1} [mE_{k+1} - mE_k] = mE_n.$$

Личные заметки студента

5. *Пусть заданы ограниченные множества $E_1, E_2, E_3, \ldots$, соответственно имеющие меры Лебега: $mE_1, mE_2, mE_3, \ldots$, и* $E = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. *Если* $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$, *то* $mE = \lim\limits_{n\to\infty} [mE_n]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Обозначив через Δ какой-нибудь интервал, содержащий множество E_1, получим

$$C_\Delta E_1 \subset C_\Delta E_2 \subset C_\Delta E_3 \subset \ldots, \qquad C_\Delta E = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_\Delta E_k .$$

Откуда, согласно свойству (меры Лебега) 3, имеем:

$$m(C_\Delta E) = \lim_{n\to\infty}[m(C_\Delta E_n)],$$

в силу свойств пределов, получим:

$$m\Delta - mE = \lim_{n\to\infty}[m\Delta - mE_n],$$

$$m\Delta - mE = m\Delta - \lim_{n\to\infty} mE_n ,$$

то есть $mE = \lim\limits_{n\to\infty} mE_n$.

Аналогично, изложенному здесь построению понятия меры Лебега для линейных множеств на прямой, построена лебеговская мера на плоскости, в трехмерном пространстве, либо вообще в евклидовом пространстве любой размерности n.

Для каждого из выше названных пространств вводится более общее понятие – измеримость множества по Лебегу.

Определение 65

Множества, имеющие меру Лебега, называют *измеримыми*.

Понятие измеримого множества применяется в теории вероятностей, теории динамических систем, функциональном анализе и других областях математики.

3.2. Измеримые функции и их основные свойства

Наибольший интерес из всех измеримых по Лебегу множеств представляет множество функций.

Личные заметки студента

Здесь будем рассматривать лишь ограниченные функции *f* действительного переменного определенные на измеримом множестве *E*.

Через $E(f(x) > A)$ будем обозначать множество всех точек $x \in E$, в которых имеет место неравенство: $f(x) > A$, то есть

$$(E(f(x) > A) \Leftrightarrow \{ x / x \in E \text{ и } f(x) > A \}).$$

Аналогичный смысл имеют обозначения: $E(f(x) < A)$, $E(f(x) \le A)$, $E(f(x) = A)$, $E(f(x) \ge A)$, $E(B \le f(x) < A)$ и так далее.

Определение 66

Функцию *f* действительного переменного определенную на множестве *E* называют *измеримой*, если измеримы множество E и все множества $E(f(x) > A)$, для любых $A \in (-\infty;+\infty)$.

Основные свойства измеримых функций

1. *Всякая функция, заданная на множестве меры нуль, измерима*.

Доказательство следует очевидным образом из определения измеримой функции.

2 *Если функция f, заданная на измеримом множестве E измерима, то она измерима и на любом его измеримом подмножестве Q.*

Доказательство

Итак, из условия следует: *E* - измеримое множество, $Q \subset E$, $E(f(x) > A)$ и *Q* - измеримые множества. Чтобы функция *f* была измерима на множестве *Q*, необходимо показать, что множество $Q(f(x) > A)$ - измеримо. Из очевидного равенства:

$$Q(f(x) > A) = Q \cap E(f(x) > A),$$

видно, что множество правой части равенства измеримо, значит измеримо и множество, стоящее в левой части равенства.

3. *Если функция f, заданная на измеримом множестве E измерима, то при любом A, измеримы и множества:*

$$a)\ E(f(x) \le A); \quad б)\ E(f(x) \ge A); \quad в)\ E(f(x) < A)$$

и так далее.

Доказательство

Докажем свойство для случая (*а*), доказательство остальных случаев предлагается читателю в качестве самостоятельной работы.

Из условия следует, что функция f, заданная на измеримом

Личные заметки студента

множестве E измерима, значит измеримо и множество

$$E(f(x) > A),$$

для любых $A \in (-\infty;+\infty)$. Представив множество $E(f(x) \leq A$ в виде:

$$E(f(x) \leq A) = E \setminus E(f(x) > A),$$

нетрудно заметить, что множество правой части измеримо (по свойству меры множества по Лебегу, разность двух измеримых множеств измерима), значит измеримо и множество, стоящее в левой части равенства.

4. *Если функция f, заданная на измеримом множестве* $E=\bigcup_k Q_k$ *(последовательность* $\{k\}$*- конечна либо счетна и* $k \in N$*) измерима на каждом из его подмножеств* Q_k*, где каждое множество* Q_k *- измеримо, то она измерима и на множестве E.*

Доказательство

Покажем, что множество $E(f(x) > A)$ – измеримо. Действительно,

$$E(f(x) > A) = \bigcup_k Q_k(f(x) > A)$$

где каждое $Q_k(f(x) > A)$ по условию измеримо, следовательно, как объединение измеримых множеств, измеримо и множество $E(f(x) > A)$.

5. *Если функция f, заданная на измеримом множестве E измерима, а k- конечное число, то измеримы и функции:*

$$а)\ f + k;\ \ б)\ kf;\ \ в)\ |f|;\ \ г)\ f^2;\ \ д)\ \frac{1}{f},\ если\ f(x) \neq 0.$$

Доказательство

а) Запишем очевидное равенство:

$$E((f + k)(x) > A) = E(f(x)+k > A) = E(f(x) > A-k)$$

Из произвольности выбора чисел A и k, последнее множество равенства измеримо по условию, следовательно измеримо и множество левой части равенства. Значит функция $f + k$ - измерима.

Личные заметки студента

б) Измеримость функции *kf* следует из очевидной измеримости множеств: $E(f(x) > \frac{A}{k})$ при *k>0;* $E(f(x) < \frac{A}{k})$ при *k<0,* так как

$$E((fk)(x) > A) = \begin{cases} E(f(x) > \frac{A}{k}), & k > 0, \\ E(f(x) < \frac{A}{k}, & k < 0, \end{cases}$$

и измеримости функции *kf=0 – const* при *k=0.*

в) Функция $|f|$ измерима, так как множество $E(|f| > A)$ можно представить в виде:

$$E(|f| > A) = \begin{cases} E, & \textit{если} \quad A < 0, \\ E(f(x) > A) \cup E(f(x) < -A), & \textit{если} \quad A \geq 0. \end{cases}$$

г) Из равенства

$$E(f^2(x) > A) = \begin{cases} E, & \textit{если} \quad A < 0, \\ E(|f| > \sqrt{A}), & \textit{если} \quad A \geq 0, \end{cases}$$

следует измеримость функции f^2.

д) Измеримость функции $\frac{1}{f}$ $(f(x) \neq 0)$ следует из равенства:

$$E(\frac{1}{f} > A) = \begin{cases} E(f(x) > 0), & \textit{при} \quad A = 0, \\ E(f(x) > 0) \cap E(f(x) < \frac{1}{A}), & \textit{при} \quad A > 0, \\ E(f(x) > 0) \cup E(f(x) < 0) \cap E(f(x) < \frac{1}{A}), & \textit{при} \quad A < 0. \end{cases}$$

6. Если две измеримые функции f и g заданы на измеримом множестве E, то множество $E(f(x)>g(x))$ измеримо.

Личные заметки студента

Д о к а з а т е л ь с т в о

Множество рациональных чисел счетно, значит их можно перенумеровать: $q_1, q_2, ..., q_n, ...$, тогда

$$E(f(x)>g(x)) = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(E\left(f(x) > q_k\right) \cap E\left(g(x) < q_k\right)\right).$$

Каждое множество в записи правой части равенства измеримо, пересечение измеримых множеств измеримо и объединение счетного числа измеримых множеств – множество измеримое, значит и множество левой части равенства также измеримо. Следовательно, функция g измерима.

7. *Разность, сумма, произведение и, в том случае, когда делитель не равен нулю, частное двух измеримых функций f и g,- есть функция измеримая.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

а) Разность измеримых функций f-g измерима, так как

$$E((f-g)(x)>A) = E(f(x)>A+g(x)) .$$

Множество, стоящее в правой части равенства, измеримо на основании предыдущего свойства, так как функция $A+g(x)$ - измерима на основании свойства 5.

б) Сумма измеримых функций $f+g$ - измерима, так как

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - (-g(x))$, а $-g(x)=(-1)g(x)$ - измерима на основании свойства 5.

в) Произведение fg может быть представлено как разность квадратов измеримых функций, то есть функций, измеримых

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=\frac{1}{4}\left(\left(f(x)+g(x)\right)^2-\left(f(x)-g(x)\right)^2\right)$$

Следовательно, на основании свойства 7(б) функция fg измерима.

г) Частное $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$ измеримо как произведение измеримых функций, так как функция $\frac{1}{g(x)}$ при $g(x) \neq 0$ есть измеримая функция на основании свойства 5.

Личные заметки студента

3.3. Интеграл Лебега измеримой функции и его основные свойства

Рассмотрим измеримую ограниченную функцию *f* на измеримом множество *E*, причем $a \le f(x) < A$, где *a* и *A*-данные числа. Разобьем отрезок *[a;A]*, принадлежащий координатной оси *Oy*, на части точками деления

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = A.$$

Пусть $\omega = \max(y_{i+1} - y_i)$, где $i = 1;\bar{n}$. Из выше сказанного следует, что все множества: $E(y_i \le f < y_{i+1})$ - измеримы, попарно не пересекаются и для них справедливы равенства:

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} E(y_i \le f < y_{i+1}); \quad mE = \sum_{i=0}^{n-1} mE(y_i \le f < y_{i+1}).$$

Составим сумму: $S_\omega = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \, mE(y_i \le f < y_{i+1})$.

Определение 67

Сумму $S_\omega = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \, mE(y_i \le f < y_{i+1})$ называют *интегральной суммой Лебега.*

Определение 68

Если существует предел интегральной суммы Лебега при стремлении ω к нулю, то число:

$$I = \lim_{\omega \to 0} S_\omega = \lim_{\omega \to 0} \sum y_i \, mE(y_i \le f < y_{i+1})$$

называют *интегралом Лебега функции f на множестве E* и обозначают $(L)\int_E f(x)dx$.

Замечание. Если множество *E* есть отрезок *[c;d]*, то интеграл Лебега функции *f* на отрезке *[c;d]* обозначают $(L)\int_c^d f(x)dx$.

Личные заметки студента

Теорема 28

Если функция f измерима на измеримом множестве E, то интеграл Лебега $(L)\int_E f(x)dx$ *всегда существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о

Рассмотрим очевидное неравенство:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\, mE(y_i \le f < y_{i+1}) < \sup f(x) \cdot$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} mE(y_i \le f < y_{i+1}),$$

где $\sup f(x)$ - const, ряд $\sum_{i=0}^{n-1} mE(y_i \le f < y_{i+1})$ - сходящийся. Следовательно, сумма Лебега:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i\, mE(y_i \le f < y_{i+1})$$

- ограниченна сверху, а при более мелком дроблении, разве лишь возрастает. Значит предел суммы Лебега измеримой функции *f* на измеримом множестве *E* существует, то есть всякая измеримая функция интегрируема по Лебегу.

Перечислим некоторые ***основные свойства интеграла Лебега:***

1. *Если на измеримом множестве E, мера которого равна нулю, задана ограниченная измеримая функция f, то* $(L)\int_E f(x)dx = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Мера всякого подмножества множества меры нуль также равна нулю. Следовательно, любая интегральная сумма Лебега заданной функции, равна нулю. Значит, значения принимаемые подынтегральной функцией на множестве $W \subset E$ при условии: $mW=0$, не влияют на величину интеграла Лебега.

2. *Если измеримая функция f на измеримом множестве E удовлетворяет неравенству:* $A \le f(x) \le B$, *(A;B –const), то*

$$A \cdot mE \le (L)\int_E f(x)dx \le B \cdot mE .$$

Личные заметки студента

Доказательство

Пусть $\alpha = A - \frac{1}{n}$ и $\beta = B - \frac{1}{n}$, где $n \in N$, тогда справедливо неравенство: $\alpha < f(x) < \beta$. Составим интегральные суммы Лебега, дробя каждый отрезок $[\alpha;\beta]$. Так как $\alpha \le y_i \le \beta$, (где $i = \overline{1;n}$, $y_i = f(x_i)$), то

$$\alpha \sum_{i=0}^{n-1} mE(y_i \le f < y_{i+1}) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n-1} y_i\, mE(y_i \le f < y_{i+1}) \le \beta \sum_{i=0}^{n-1} mE(y_i \le f < y_{i+1}),$$

то есть $\alpha \cdot mE \le S_\omega \le \beta \cdot mE$, переходя в последнем неравенстве к пределу, получим:

$$(A - \frac{1}{n}) \cdot mE \le (L)\int_E f(x)dx \le (B + \frac{1}{n}) \cdot mE .$$

В силу произвольности числа *n*, теорема доказана.

3. *Если на измеримом множестве E таком, что* $E = E_1 \cup E_2$ *и* $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, *задана ограниченная измеримая функция f, то*

$$(L)\int_E f(x)dx = (L)\int_{E_1} f(x)dx + (L)\int_{E_2} f(x)dx .$$

Доказательство

$$(L)\int_E f(x)dx = \lim_{\omega \to 0} \sum y_i\, mE(y_i \le f < y_{i+1}) =$$

$$= \lim_{\omega \to 0} \sum y_i\, mE_1(y_i \le f < y_{i+1}) + \lim_{\omega \to 0} \sum y_i\, mE_2(y_i \le f < y_{i+1}) =$$

$$= (L)\int_{E_1} f(x)dx + (L)\int_{E_2} f(x)dx .$$

4. *Если на измеримом множестве E заданы две измеримые*

Личные заметки студента

ограниченные функции f и g такие, что mE($f \neq g$) =0 , то

$$(L)\int_E f(x)dx = (L)\int_E g(x)dx$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть $E_1 = E(f \neq g)$, тогда справедливы равенства:

$$(L)\int_E f(x)dx = (L)\int_{E\setminus E_1} f(x)dx + (L)\int_{E_1} f(x)dx\,,$$

$$(L)\int_E g(x)dx = (L)\int_{E\setminus E_1} g(x)dx + (L)\int_{E_1} g(x)dx\,,$$

из сравнения которых, следует:

а) первые слагаемые их правых частей равны, поскольку совпадают функции f и g на множестве: $E \setminus E_1$;

б) вторые слагаемые равны нулю на основании свойства 1.

3.4. Сравнение интегралов Римана и Лебега

Теорема 29

Если функция f интегрируема по Риману на промежутке [a; b], то она интегрируема по Лебегу на промежутке [a; b]. Причем интегралы функции на промежутке [a; b] по Риману и по Лебегу равны.

Д о к а з а т е л ь с т в о

Пусть E – множество точек разрыва (если таковые имеются) функции f на промежутке $S=[a;b]$, причем мера этого множества $mE=0$.

Докажем сначала, что множество $M = S(f \geq A)$ измеримо, для произвольного конечного действительного числа A.

Измеримость множества M следует из измеримости множеств $\overline{M}$ и $M' \cap (S/M)$, так как $M = \overline{M} / M'(S/M)$, где $\overline{M}$ - замыкание множества M, M' - множество предельных точек множества M. Разность двух измеримых множеств есть множество измеримое. Множество $\overline{M}$ замкнуто и, значит, измеримо.

Всякая предельная точка множества M, не принадлежащая множеству M, принадлежит E, следовательно,

$$M'(S / M) \subset E .$$

Личные заметки студента

Действительно, пусть χ - предельная точка множества *M*, пусть в этой точке функция *f* непрерывна. Тогда $f(\chi) < A$, причем неравенство остается в силе и для некоторой ε-окрестности точки χ. Значит χ не может быть предельной для множества *M*. Отсюда следует, что если χ-предельная точка множества *M*, не принадлежащая ему, то χ есть точка разрыва, то есть точка, принадлежащая Е.

Поскольку $mE = 0$, то $m(M'(S/M)) = 0$, а это означает, что множество $M' \cap (S/M)$ измеримо.

Разобьем промежуток *S=[a;b]* точками деления $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ и обозначим через H_i и h_i верхнюю и нижнюю грани функции *f* на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда справедливо неравенство:

$$h_i(x_{i+1} - x_i) \le (L)\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx \le H_i(x_{i+1} - x_i).$$

Просуммировав по индексу i, имеем:

$$\sum_{i=0}^{n-1} h_i(x_{i+1} - x_i) \le (L)\int_a^b f(x)dx \le \sum_{i=0}^{n-1} H_i(x_{i+1} - x_i).$$

Между теми же суммами заключен и интеграл Римана $(R)\int_a^b f(x)dx$. Переходя к пределу, получим:

$$(L)\int_a^b f(x)dx = (R)\int_a^b f(x)dx.$$

Личные заметки студента

РАЗДЕЛ 4. РЯДЫ ФУРЬЕ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

4.1. Скалярное произведение. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского

Рассмотрим пространство G произвольной природы элементов: *s, l, t, v, f, g, u, w, …* . Пусть в пространстве введена метрика $\rho(s,t)$ $(\forall s,t \in G)$ и норма $\|s\|$ $(\forall s \in G)$.

Определение 69

Скалярным произведением произвольной пары элементов s и t линейного пространства G называют такое число (s,t), что для любых *s, t,* $g \in G$ и любого числа λ выполняются условия *(аксиомы скалярного произведения)*:

1) $(s,t)=(t,s)$,
2) $(\lambda \cdot s,t)= \lambda \cdot (s,t)$,
3) $(s+g,t)=(s,t)+(g,t)$,
4) $(s,s)>0,\quad \text{если} \quad s \neq 0$.

Определение 70

Линейное пространство с введенным на нем скалярным произведением называют *предгильбертовым пространством.*

Основные ***свойства предгильбертовых пространств***:

1. *В предгильбертовых пространствах для любых элементов* s *и* t *справедливо неравенство Коши-Буняковского:*

$$|(s,t)| \leq \|s\| \cdot \|t\|.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Итак, используя аксиомы скалярного произведения получим: $(\lambda s - t, \lambda s - t) = \lambda^2 (s,s) - 2\lambda (s,t) + (t,t)$, кроме того, согласно четвертой аксиомы скалярного произведения имеем: $(\lambda s - t, \lambda s - t) \geq 0$. Но квадратный трехчлен относительно λ: $\lambda^2 (s,s) - 2\lambda (s,t) + (t,t)$ будет неотрицательным только в случае, если его дискриминант не может быть положительным, то есть: $(s,t)^2 - (s,s)\cdot(t,t) \leq 0$, откуда $(s,t)^2 \leq (s,s)\cdot(t,t)$.

Личные заметки студента

В предгильбертовых пространствах норму задает формула:

$$\|s\| = \sqrt{(s,s)} \quad .$$

Доказательство

а) Из условия рассматриваемого свойства и четвертой аксиомы скалярного произведения следует, что

$$\|s\| = \sqrt{(s,s)} > 0 \text{ и } \|s\| = \sqrt{(s,s)} = 0 \Leftrightarrow s \equiv 0 .$$

б) Согласно третьей и первой аксиомам скалярного произведения, получим:

$$\|\lambda s\| = \sqrt{(\lambda s, \lambda s)} = \sqrt{\lambda(s, \lambda s)} = \sqrt{\lambda(\lambda s, s)} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 (s,s)} = |\lambda|\sqrt{(s,s)} = |\lambda|\|s\|.$$

в) Справедливость третьей аксиомы нормы следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$\|s+t\|^2 = (s+t, s+t) = (s,s) + 2(s,t) + (t,t) \le$$

$$\le \|s\|^2 + 2\|s\| \cdot \|t\| + \|t\|^2 = (\|s\| + \|t\|)^2$$

откуда и следует, что

$$\|s+t\| \le \|s\| + \|t\| .$$

Примеры некоторых предгильбертовых пространств.

1. n - мерное евклидово пространство .

Элементами пространства являются векторы. Пусть

$$s = (s_1, s_2, s_3, ..., s_n) \text{ и } t = (t_1, t_2, t_3, ..., t_n).$$

Скалярное произведение имеет вид: $(s,t) = \sum_{i=1}^{n} s_i t_i$.

Формула $\|s\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2}$, определяет норму в рассматриваемом пространстве, а формула $\rho(s,t) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (s_i - t_i)^2}$ задает метрику.

Неравенство Коши-Буняковского имеет вид:

Личные заметки студента

$$\left|\sum_{i=1}^{n} s_i t_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} s_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}\ .$$

2. Линейное пространство действительных функций, непрерывных на отрезке $[a;b]$.

Пусть скалярное произведение имеет вид:

$$(s,t)=\int_a^b s(x)t(x)dx,$$

формула $\|s\|=\sqrt{\int_a^b s^2(x)dx}$, определяет норму в рассматриваемом пространстве, а формула $\rho(s,t)=\sqrt{\int_a^b (s(x)-t(x))^2 dx}$ задает метрику. Неравенство Коши-Буняковского имеет вид:

$$\left|\int_a^b s(x)t(x)dx\right| \le \sqrt{\int_a^b s^2(x)dx} \cdot \sqrt{\int_a^b t^2(x)dx}\ .$$

3. L_2 - пространство эквивалентных классов измеримых ограниченных функций.

Определение 71

Две ограниченные измеримые функции f и g, заданные на измеримом множестве E называют *эквивалентными*, если мера множества $E(f \neq g)$ равна нулю.

Элементами пространства L_2 являются классы эквивалентных между собой измеримых функций, определенных на измеримом множестве E. На множестве E задана мера $\mu(E)$, удовлетворяющая условию: $\mu(E)<\infty$. Сложение, умножение классов функций на числа определяется как обычное сложение и умножение функций, а скалярное произведение определяется формулой:

$$(s,t)=(L)\int_E s(x)t(x)d\mu,$$

Личные заметки студента

формула $\|s\| = \sqrt{(L)\int\limits_E s^2(x)d\mu}$, определяет норму.

Метрика вычисляется по формуле:

$$\rho(s,t) = \sqrt{(L)\int\limits_E (s(x) - t(x))^2 d\mu} .$$

Неравенство Коши-Буняковского имеет вид:

$$\left|(L)\int\limits_E s(x)t(x)d\mu\right| \le \sqrt{(L)\int\limits_E s^2(x)d\mu} \cdot \sqrt{(L)\int\limits_E t^2(x)d\mu} ,$$

в частности, если $t(x) \equiv 1$, то

$$\left|(L)\int\limits_E s(x)d\mu\right| \le \mu^2(R) \cdot \sqrt{(L)\int\limits_E s^2(x)d\mu} \cdot$$

4.2. Гильбертово пространство. Ряд Фурье

Определение 72

Линейное пространство *G* со скалярным произведением, полное в смысле метрики $\rho(s,t) = \|s - t\|$ $(\forall s,t \in G)$, порожденной заданным скалярным произведением, где число $\sqrt{(s,s)} = \|s\|$ норма произвольного элемента пространства *G*, называют *гильбертовым пространством.*

Определение 73

Полное предгильбертово пространство называют *гильбертовым.*

Пространство L_2 является гильбертовым пространством, так как оно полно. Знакомство с доказательством этого замечания предоставим читателю в качестве самостоятельной работы.

Личные заметки студента

Определение 74

Функции f и φ в пространстве L_2 называют *взаимно ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, то есть

$$(f,\varphi)=(L)\int f(x)\varphi(x)d\mu=0.$$

Определение 75

Систему $\{g_n\}_\infty=\{g_1,g_2,...,g_n,...\}$ отличных от нуля и попарно ортогональных функций из L_2 называют *ортогональной системой*.

Определение 76

Ортогональную систему функций:

$$\{g_n\}_\infty=\{g_1,g_2,...,g_n,...\}$$

называют *нормированной*, если $\|g_n\|=1$ для всех n.

Определение 77

Систему функций $\{g_n\}_\infty=\{g_1,g_2,...,g_n,...\}$ называют *ортонормированной*, если

$$(g_i,g_k)=(L)\int g_i(x)g_k(x)d\mu=\begin{cases}0 & при \quad i\neq k,\\ 1 & при \quad i=k.\end{cases}$$

Примеры *ортонормированных систем функций*:

а) тригонометрическая система:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},...,\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},...$$

является ортогональной нормированной системой функций на отрезке $[-\pi;\pi]$,

б) многочлены Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n\left((x^2-1)^n\right)}{dx^n}\ (n=0,1,2,...),$$

образуют ортогональную систему функций на отрезке $[-1;1]$, нормированную ортогональную систему образуют функции:

Личные заметки студента

$$\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x).$$

Рассмотрим ***задачу:*** Пусть функция f и ортогональная нормированная система:

$$\{g_n\}_\infty = \{\ g_1, g_2, \ldots, g_n, \ \ldots\ \}$$

принадлежат пространству L_2.

При заданном n *подобрать коэффициенты* α_k $\left(k = \overline{1,n}\right)$ *так, чтобы расстояние, в смысле метрики пространства* L_2*, между* f *и суммой* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k$ *было возможно меньше.*

Р е ш е н и е

Пусть $(f, g_k) = c_k$. Учитывая, что система $\{g_n\}_\infty$ ортогональна и нормирована, получим:

$$\|f - S_n\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k\right) =$$

$$= (f, f) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i\right) =$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - c_k)^2$$

.

Откуда видно, что минимум этого выражения достигается тогда, когда последнее слагаемое равно нулю, то есть при

$$\alpha_k = c_k \qquad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

В этом случае имеем:

Личные заметки студента

$$\|f - S_n\|^2 = (f, f) - \sum_{k=1}^{n} c_k^2.$$

Определение 78

Числа $c_k = (f, g_k)$называют *коэффициентами Фурье* функции $f \in L_2$ по ортогональной системе $\{g_n\}_\infty$, а ряд $\sum_{k=1}^{n} c_k g_k$ (он может и не быть сходящимся) называют *рядом Фурье* функции по системе $\{g_n\}_\infty$.

Итак, из всех сумм вида $S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k g_k$ при данном *n* наименее отличается от функции *f* (в смысле метрики L_2) частичная сумма ряда Фурье этой функции.

ГЛАВА 2. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

РАЗДЕЛ 1. Практические занятия по теме «Мощность множества»

Занятие 1. Соответствия между множествами

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какое соответствие между двумя множествами называют взаимно однозначным соответствием?
2. Какое отображение множеств называют взаимно однозначным отображением?
3. Какие из множеств называют числовыми множествами?
4. Приведите примеры числовых множеств.
5. Какое числовое множество называют ограниченным?
6. Что называется точной верхней гранью множества; точной нижней гранью множества?
7. Какие множества называют плоскими; пространственными?
8. Какие дроби называют систематическими?

Решите задачи

№ 1. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел и множеством:

а) целых чисел;

б) всех четных положительных чисел;

в) всех четных чисел;

г) всех рациональных чисел отрезка[0; 1];

д) всех положительных рациональных чисел.

№ 2. Найдите взаимно однозначное отображение:

а) отрезка [1; 3] на отрезок [5; 9];

б) отрезка [0; 1] на отрезок [-7; 2];

в) отрезка [-2; 5] на отрезок [6; 10];

г) отрезка [6; 10] на отрезок [-2; 5];
д) отрезка [a; b] на отрезок [c; d].

№ 3. Найдите взаимно однозначное отображение:
а) интервала (0; 1) на всю числовую прямую;
б) интервала (- ∞ ; + ∞) на интервал (0; 1);
в) всей числовой прямой на интервал (а; в).

№ 4. Найти взаимно однозначное соответствие между:
а) полусегментом [0;1) и полуосью [0; + ∞);
в) полусегментом [0; + ∞) и полуосью [0;1);
г) полусегментом [а; с) и полуосью [0; + ∞).

№ 5. Построить взаимно однозначное отображение:
а) отрезка [0; 1]на интервал (0; 1);
б) отрезка [0; 1]на интервал (0; + ∞);
в) отрезка [0; 1]на интервал (- ∞; + ∞);
г) отрезка [0; 1]на полуинтервал [0; + ∞).

№ 6. Установить взаимно однозначное соответствие между:
а) лучом [0; + ∞).и интервалом (0;1);
б) лучом [0; + ∞).и интервалом (а; в);
в) лучом [0; + ∞).и интервалом (- ∞; + ∞).

№ 7. Построить взаимно однозначное отображение окружности радиуса равного 1 на отрезок [0; 1].

№ 8. Установить взаимно однозначное соответствие между окружностью и прямой.

№ 9. Установить взаимно однозначное соответствие между поверхностью сферы с одной “выколотой” точкой и плоскостью.

№ 10. Установить взаимно однозначное соответствие между поверхностью сферы и плоскостью.

№ 11. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех иррациональных чисел и множеством всех действительных чисел числовой прямой.

№ 12. Установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и точками прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$.

№ 13. Установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и точками плоскости.

№ 14. Установить взаимно однозначное соответствие между точками прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$ и точками плоскости.

Занятия 2 – 3. *Счетные множества. Мощность множеств*

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные <u>вопросы:</u>

1. Какие множества называют конечными (бесконечными)?
2. Какие множества называют счетными (несчетными)?
3. Какие множества называют эквивалентными?
4. Перечислите все признаки эквивалентности множеств (теоремы Кантора – Бернштейна).
5. Какие множества имеют одинаковую мощность?
6. Приведите примеры счетных числовых множеств.
7. Какое множество называют множеством мощности континуума?
8. Какое множество называют множеством мощности гиперконтинуума?
9. Перечислите основные свойства счетных множеств.
10. Какое множество называют множеством мощности булеан?

<u>Решите задачи</u>

№ 15. Задача-шутка.

а) Как-то в гости к математику X пришли его друзья N. В передней они сняли шляпы и повесили на вешалку. Когда гости собрались уходить и стали надевать шляпы, то оказалось, что одной шляпы не хватает. В переднюю за это время никто не заходил.

б) В свой следующий приход гости снова повесили шляпы на вешалки в передней. Когда они, уходя, надели шляпы, одна оказалась лишней. Хозяин и гости твердо помнили, что до их прихода на вешалке не было ни одной шляпы.

в) После еще одного очередного посещения гости надели шляпы и ушли, а хозяин, проводив гостей, обнаружил, что шляп на вешалке оказалось столько же, сколько было до ухода гостей.

г) Наконец, в четвертый раз гости пришли без шляп, а уходя, воспользовались шляпами, оставшимися от прошлого посещения. Проводив гостей, хозяин опять увидел шляпы на вешалке,- столько же, сколько было до прихода гостей.

Как объяснить все эти парадоксальные события?

№16. Доказать, что множество всех окружностей на плоскости, радиусы которых рациональны и координаты центра которых – рациональные числа, есть множество счетное.

№17. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества на прямой больше единицы, то это множество конечно или счетно.

№18. Какова мощность множества всех кругов на плоскости.

№19. Какова мощность множества всех кругов на плоскости.

№20. На плоскости построено некоторое множество попарно не пересекающихся букв Т (размеры букв могут быть и различными). Может ли множество этих букв быть несчетным?

№21. Определите мощность множества попарно не пересекающихся букв Г построенных на плоскости.

№22. Определите мощность следующих множеств:

а) множество точек непрерывной кривой $y = f(x), a \le x \le b$:

б) множество точек гиперболы;

в) множество точек окружности;

г) множество точек круга;

д) множество точек квадранта плоскости;

е) множество точек шара;

ж) множество комплексных чисел;

з) множество попарно неперекрывающихся отрезков прямой.

№ 23. Определите мощность следующих множеств плоскости:

а) множество эллипсов на плоскости, оси которых совпадают с осями координат;

б) множество парабол на плоскости, оси которых параллельны оси координат;

в) множество всех треугольников на плоскости;

г) множество всех четырехугольников на плоскости;

д) множество всех многоугольников на плоскости;

е) множество точек плоскости с рациональными координатами;

ж) множество точек плоскости с иррациональными координатами

з) множество точек плоскости, у которых одна координата рациональная, а другая иррациональная;

и) множество точек плоскости, у которых хотя бы одна координата рациональная.

№ 24. Пусть A и B – два эквивалентных бесконечных множества. Существует ли подмножество A (отличное от A), эквивалентное множеству B?

№ 25. Доказать, что если $A \setminus B \sim B \setminus A$, то $A \sim B$.

№ 26. Доказать, что если

$$A \subset B \text{ и } A \sim A \cup C, \text{ то } B \sim B \cup C.$$

№ 27. Верно или нет утверждение: «Если $A \sim C$ и $B \sim D$, причем $A \supset B$, и $C \supset D$, то $A \setminus B \sim C \setminus D$».?

№ 28. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$ и $C \supset A, C \supset B$, то $C \setminus A \sim C \setminus B$»?

№ 29. Верно ли утверждение: «$A \sim B$ и $A \supset C$ и $B \supset C$, то $A \setminus C \sim B \setminus C$»?

РАЗДЕЛ 2. Практические занятия по теме «Метрические пространства»

Занятие 4. Метрика

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какое множество называют метрическим пространством?
2. Перечислите все аксиомы метрического пространства.
3. Какую функцию называют метрикой?
4. Приведите примеры метрических пространств.
5. В чем заключается суть неравенства Коши-Буняковского?

Решите задачи

№30. Пусть М - произвольное множество, в котором

$$\rho(x;y)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad x\neq y,\\ 0, & \text{если} \quad x=y.\end{cases}$$

Докажите, что $\rho(x;y)$ метрика на множестве М.

№.31. Являются ли метриками на прямой следующие функции:

а) $\rho(x;y)=|x-y|$; б) $\rho(x;y)=|x^3-y^3|$;

в) $\rho(x;y)=x^3-y^3$; г) $\rho(x;y)=|x^2-y^2|$;

д) $\rho(x;y)=|arcctgx-arcctgy|$;

е) $\rho(x;y)=|tg(x-y)|$;

ж) $\rho(x;y)=|y-x|\cdot(x^2+5y^2)$;

з) $\rho(x;y)=|\sin x-\sin y|$

№ 32. Является ли множество всех точек окружности метрическим пространством, если расстояние $\rho(x;y)$ между двумя точками x и y этой окружности определим следующим образом:

а) если $x = y$, то $\rho(x; y) = 0$;

б) если $x \neq z$ и $y \neq z$, то $\rho(x; y)$ равно той длине дуги окружности, которая соединяет точки x и y, и не проходит через точку z (здесь, точка z – произвольная фиксированная точка окружности);

в) если $x = z$ и $y = z$, то $\rho(x; y)$ равно той длине кратчайшей дуги, соединяющей точки x и y.

№ 33. На окружности можно ввести две метрики: расстояние $r(x; y)$ по хорде и расстояние $\rho(x; y)$ по дуге. Выразите одну метрику через другую.

№ 34. Задает ли метрику на пространстве многочленов формула $\rho(P_1; P_2) = |P_1(0) - P_2(0)|$?

№ 35. Проверьте, образует ли множество точек плоскости метрическое пространство, если расстояние между точками $M(a; b)$ и $N(c; d)$ определяется формулой:

$$\rho(M; N) = \left(\sqrt{|a-c|} + \sqrt{|b-d|}\right)^2.$$

№ 36. а) Докажите, что множество полей шахматной доски образует метрическое пространство, если за расстояние от поля x до поля y принять наименьшее число ходов, которое потребуется королю, чтобы перейти с поля x на поле y.

б) Останется ли множество полей шахматной доски метрическим пространством, если в условии (а) заменить короля, либо ладьей, либо конем?

№ 37. Является ли метрикой на множестве натуральных чисел функция:

а) $$\rho(x; y) = \frac{|x-y|}{xy};$$ б)

$$\rho(x; y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x+y}, & \text{если} \quad x \neq y, \\ 0, \text{если} & x = y. \end{cases}$$

№ 38. Докажите, что если ρ - метрика на множестве M, то функция

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

также является метрикой на множестве М.

Занятие 5. Расстояние между функциями в метрическом пространстве

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Назовите основные метрические пространства.
2. Как задается метрика в пространстве непрерывных на отрезке *[a; b]* функций:
$$C_2[a;b];\quad C_1[a;b];\quad C[a;b];\quad D^k[a;b].$$
3. Что называют максимумом функции?
4. Опишите алгоритм нахождения наибольшего значения функции на заданном отрезке.
5. Какую функцию называют бесконечно дифференцируемой на заданном отрезке?
6. Как вычисляется определенный интеграл вида: $\int_b^a |f(x)|\cdot dx$?
7. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

Решите задачи

№ 39. Найдите расстояние между функциями $f_1(x)=5-x^2$, $f_2(x)=6x-7$ в метриках пространств: $C[0;1]$; $C_1[2;5]$.

№ 40. Вычислите расстояние между функциями $f_1(x)=2x+3$ и $f_2(x)=x^2$ в метриках пространств:

а) $C\left[0;\frac{7}{2}\right]$; б) $C_1\left[0;\frac{7}{2}\right]$; в) $D^1\left[0;\frac{7}{2}\right]$.

№ 41. Вычислите в пространстве $C_2\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ расстояние от функции $f_1(x)=\sin x$ до функции $f_2(x)=2$.

№ 42. Что означает геометрически расстояние между функциями $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в метрике пространства $C_1[a;b]$.

№ 43. Найдите расстояние между функциями $f_1(x)=x^3$

и $f_2(x)=3x+4$ в метриках пространств:

а) $D^1[0;2]$; б) $D^2[0;2]$; в) $C_2[0;2]$.

№ 44. Вычислите расстояние

а) $\rho(f_1;f_2)$ в пространстве $C_1[0;1]$;

б) $\rho(f_1;f_4)$ в пространстве $C[1;5]$;

в) $\rho(f_2;f_3)$ в пространстве $C_2[0;1]$;

г) $\rho(f_3;f_4)$ в пространствах: $D^1[0;2]$; $D^2[0;2]$; $D^3[1;2]$;

д) $\rho(f_1;f_5)$ в пространстве $D[2;6]$, если:

$f_1(x)=x^3$; $f_2(x)=1+x$;

$f_3(x)=2x^2-x+3$; $f_4(x)=(x-1)^3$;

$f_5(x)=-6$.

Занятие 6 . Топология множеств в метрических пространствах

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какое множество точек метрического пространства называют окрестностью точки x^0?
2. Перечислите все свойства окрестностей.

3. Какую точку из метрического пространства называют предельной точкой данного множества?
4. Какую точку из метрического пространства называют изолированной точкой данного множества?
5. Какую точку из метрического пространства называют граничной точкой данного множества?
6. Какую точку из метрического пространства называют точкой прикосновения данного множества?
7. Что называют замыканием множества?
8. Какое множество называют замкнутым?
9. Какое множество называют совершенным?
10. Какую точку из метрического пространства называют внутренней точкой данного множества?
11. Какое множество называют открытым?
12. Что называют расстоянием от точки до множества?
13. Что называют расстоянием между двумя множествами?
14. Какие множества называют плотными; всюду плотными; нигде не плотными?

<u>Решите задачи</u>

В задачах №№ 45- 48 указано множество Е$\subset R_2^2$.

Требуется найти:

а) ∂E - граничное множество множества Е;

б) $\overline{E}$ - замыкание множества Е;

в) О(Е) - открытое ядро множества Е;

г) СЕ - внешнее множество для множества Е;

д) О(СЕ) - открытое ядро внешнего множества;

е) $\overline{CE}$ - замыкание внешнего множества.

№ 45. Е – множество точек (х; у) таких, что

$-1 < x \le 1, \quad -1 < y \le 1.$

№ 46. Е – открытый круг с выколотым центром.

№ 47. а) Е – множество точек с целыми координатами;

б) Е – множество точек с рациональными координатами.

№ 48. E = $A_1 \cap A_2$, где A_1 - окружность с центром в точке с координатами (1; 2) и радиусом равным 3, A_2 - окружность с центром в точке с координатами (2;5) и радиусом равным 4.

В задачах №№ 49- 56 найдите множество $\partial E \setminus E$ для

указанного в условии множества E.

№ 49. Множество точек прямой вида:

$$x_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \qquad (n \in N).$$

№ 50. Множество точек плоскости R_2^2, которые соответствуют комплексным числам

$$z_n = i^n + \frac{1}{n} \qquad (n \in N).$$

№ 51. Множество корней уравнения

$$\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{x}} = 0.$$

№ 52. Множество рациональных чисел отрезка [0; 1].

№ 53. Множество точек окружностей

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{n}, \qquad (n \in N) \text{ на плоскости } R_2^2.$$

№ 54. Множество точек окружностей

$$x^2 + y^2 = 1 + \frac{1}{n}, \qquad (n \in N) \text{ на плоскости } R_2^2.$$

№ 55. Множество точек прямых

$$x = \frac{1}{n}, \qquad (n \in N) \text{ на плоскости } R_2^2.$$

№ 56 Множество точек плоскости R_2^2, координаты которых удовлетворяют соотношениям:

а) $x = \frac{1}{n}, \quad |y| \le \frac{1}{n}$; б) $x = \frac{1}{n}, \quad |y| \ge \frac{1}{n}$;

в) $x = \frac{1}{n}, \quad |y| \le n$;

г) $x = \frac{1}{n}, \quad |y| \ge n$, где $n \in N$.

Занятие 7. Линейные нормированные пространства

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какое пространство называют линейным?
2. Что называют нормой на линейном пространстве?
3. Пречислите все аксиомы нормы.
4. Какое пространство называют линейным нормированным пространством?
5. Запишите формулы для нормы в основных метрических пространствах:

$$R_2^n; R_1^n; R_\infty^n; R_2^\infty; R_1^\infty; R_\infty^\infty;$$

$$C_1[a;b]; C_2[a;b]; C\ [a;b]; D^n[a;b].$$

Решите задачи

№ 57. Задает ли функция $f(x) = |arctg(x)|$ норму на числовой прямой?

№ 58. Проверьте, задают ли норму на числовой прямой следующие функции:

а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt{|x|}$; в) $\sqrt{x^2}$; г) x^2; д) $|x|$; е) $|x-4|$; ж) $5|x|$.

№ 59. Пусть задано множество векторов на плоскости, а *x; y* - декартовы координаты вектора $\vec{a}$. Проверьте, задают ли норму на заданном множестве следующие функции:

а) $f(\vec{a})=\sqrt{|xy|}$; б) $f(\vec{a})=|x|+|y|$;

в) $f(\vec{a})=\max\{|x|,|y|\}$; г) $f(\vec{a})=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{|xy|}$;

д) $f(\vec{a})=\sqrt{|x+y|}$; е) $f(\vec{a})=x^2+y^2$.

№ 60. Проверьте, что

$$R_2^n; R_1^n; R_\infty^n; R_2^\infty; R_1^\infty;$$

$R_\infty^\infty; C_1[a;b]; C_2[a;b]; C\ [a;b]; D^n[a;b]$- нормированные пространства.

№ 61. Найдите норму элемента (2, -3, -2) в пространствах $R_2^n; R_1^n; R_\infty^n$, где $n = 3$.

№ 62. Найдите норму функции $y=0{,}2\cdot(4x^3-x^4+5)$ в пространствах: а) $C\ [-1;6]$; б) $C_1[-1;6]$; в) $D\ [-1;6]$.

Занятие 8-9. Сходимость в метрическом пространстве

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Когда последовательность точек метрического пространства называют сходящейся?
2. Что называют пределом последовательности точек метрического пространства?
3. Какие нормы называют эквивалентными?
4. Перечислите свойства сходящихся последовательностей.
5. Какую последовательность точек метрического пространства называют фундаментальной?
6. Какое множество называют предельным множеством?

Решите задачи

№ 63. Проверьте, сходится ли последовательность функций

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$$

к функции $f(x)\equiv 0$ в пространстве: а) $C\,[0;1]$; б) $C_1[0;1]$.

№ 64. Покажите, что последовательность функций

$$f_n(x)=\frac{\ln(1+n^2x^2)}{2n^2}$$

сходится в пространстве $D^1[0;1]$ к функции $f(x)\equiv 0$.

№ 65. Проверьте, сходится ли данная последовательность функций к функции $f(x)\equiv 0$ по метрикам указанных пространств:

а) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ в пространстве $C\,[0;1]$;

б) $f_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}$ в пространстве $C_1[0;1]$;

в) $f_n(x)=xe^{-nx}$ в пространстве $C\,[0;10]$;

г) $f_n(x)=xe^{-nx}$ в пространстве $C_1[0;10]$;

д) $f_n(x)=n^{-\frac{1}{8}}\sqrt{2nx}\cdot e^{-\frac{1}{2}nx^2}$ в пространстве $C\,[0;1]$;

е) $f_n(x)=n^{-\frac{1}{8}}\sqrt{2nx}\cdot e^{-\frac{1}{2}nx^2}$ в пространстве $C_2[0;1]$;

ж) $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n}$ в пространстве $C\,[-\pi;\pi]$;

з) $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n}$ в пространстве $C_1[-\pi;\pi]$;

и) $f_n(x)=\dfrac{\sin(nx)}{n}$ в пространстве $D^1[-\pi;\pi]$.

№ 66. Покажите, что последовательность функций $f_n(x)=2nxx^{-nx^2}$ в каждой точке отрезка [0; 1] сходится к функции $f(x) \equiv 0$. Сходится ли $f_n(x) = 2nxx^{-nx^2}$ к $f(x) \equiv 0$ по метрике пространства $C_1[0;1]$?

Занятие 10-11. Непрерывные отображения метрических пространств

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Что понимают под отображением одного метрического пространства в другое метрическое пространство?
2. Какое отображение называют непрерывным в точке? (Сформулируйте на языке “$\varepsilon - \delta$” и на “языке последовательностей”).
3. Какое отображение называют непрерывным (на множестве X)?
4. Что понимают под образом и прообразом заданного отображения?
5. Какое отображение называют отображение - “на” либо отображение - “в”?

Решите задачи

№ 67. Задано отображение

$$f : (x; y) \to (3x - 2y + 5; -4x + 2y)$$

пространства R^2 в себя. Найдите:

а) образ точки (3;2);

б) образ точки (-5;5);

в) образ биссектрисы первого и третьего координатных углов;

г) прообраз оси абсцисс.

№ 68. Задано отображение

$$F : y \to \int_0^1 (x^2 - y^3(x)) \cdot dx$$

пространства $C[0;1]$ в R. Найдите $F(\sin \pi x)$.Укажите два элемента из прообраза $F^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

№ 69. Задано отображение $F:(x;y)\to \varphi(t)=xt^2-2yt$

пространства R_2^2 в $C[0;1]$. Найдите образ точки (-2; 2) и прообраз функции:

а) $f(t)=2t^2+3t$; б) $f(t)=6t^2-5$; в) $f(t)=\cos t$.

В задачах №№ 70 – 77 требуется

а) задать какое-нибудь (отличное от константы и от тождественного) отображение F : A→B;

б) найти образ элемента $x\in A$;

в) указать хотя бы один элемент из прообраза $F^{-1}(y)$ или показать, что $F^{-1}(y)$ пусто.

№ 70. $A=R_2^2$, $B=R_2^3$, $x=(2;-1)$, $y=(-1;0;1)$.

№ 71. $A=R_2^3$, $B=R_2^2$, $x=(-1;0;+1)$, $y=(2;-1)$.

№ 72. $A=C[0;1]$, $D=R_2^3$, $x=2t^2-3$, $y=(-1;0;+1)$.

№ 73. $A=R_2^2$, $B=C[-1;1]$, $x=(-2;1)$, $y=2t^2+3t-1$.

№ 74. $A=R_2^3$, $B=C[-1;1]$, $x=(-1;1;0)$, $y=\sin t$.

№ 75. $A=D^1[-1;1]$, $B=C[-1;1]$, $x=e^t$, $y=\cos t$.

№ 76. $A = C[0;1], B = C[0;1], \quad x = t^2 - 1, \quad y = \sqrt{t}.$

№ 77.

$$A = R_2^3, \qquad B = R_2^\infty, \qquad x = (1;2;3), \ \ y = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$$

№ 78. Задано отображение $F(y) = y(1)$ пространства $C[0;1]$ в R. Является ли это отображение непрерывным?

№ 79. Задано отображение $F(y) = y(1)$ пространства $C_1[0;1]$ в R. Является ли это отображение непрерывным?

№ 80. Задано отображение

$$F(y) = \int_0^1 |y'(x)| \cdot dx$$

подпространства E непрерывно-дифференцируемых функций пространства $C[0;1]$ в R. Является ли это отображение непрерывным на E?

№ 81. Доказать, что множество D из R_2^3, определяемое неравенством $2x^2 + y^2 + 3x - 4y - 5z^3 > 1$,открыто.

№ 82. Будет ли образ открытого множества при непрерывном отображении открыт?

Занятие 12. Неподвижные точки отображения метрического пространства. Сжимающие отображения

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные <u>вопросы</u>:

1. Какие уравнения называют алгебраическими, функциональными, интегральными, дифференциальными?
2. Укажите некоторые способы решения выше перечисленных уравнений?

3. Какую из точек метрического пространства называют неподвижной точкой заданного отображения?
4. Какое отображение называют «отображением в себя»?
5. Какое отображение называют сжимающим отображением?
6. Какое число называют константой сжатия?
7. Приведите примеры сжимающих и несжимающих отображений пространства R_2^2 в себя.
8. В чем заключается принцип сжимающих отображений? (Теорема Банаха).

<u>Решите задачи</u>

№ 83. Найдите неподвижные точки заданных отображений числовой прямой в себя:

а) $f(x) = e^x + 2 + x - 2\sin x$; б) $f(x) = 3x^3 = 2x^2 + x$;

в) $f(x) = \ln x$; г) $f(x) = 2 - x^2 - \ln x$.

№ 84. Найдите неподвижные точки заданного отображения $f:(x;y) \to (u;v)$ пространства R_2^2 в себя, если:

а) $\begin{cases} u = 2x + y - 2; \\ v = 3x - 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} u = y + \sin x; \\ v = x - 1. \end{cases}$

№ 85. Найдите неподвижные точки заданного отображения $x \to y(x)$ пространства С[0;1] в себя, если:

а) $f(y(x)) = y''(x) - 3y'(x) + 3y(x)$; б) $f(y(x)) = y'''(x)$.

№ 86. Имеет ли заданное отображение $f : x \to y(x)$ пространства С[0;1] в себя неподвижные точки. Если имеются, то найдите их.

а) $f(y) = y^2 - x^2$; б) $f(y) = 3x + \int_0^x y(t)dt$;

в) $f(x) = \frac{\pi}{2} + x - arctgx$.

№ 87. Покажите, что функция $f(x)=x^3$ отображает промежуток $[0;\frac{1}{2}]$ в себя. Определите константу сжатия заданного сжимающего отображения.

№ 88. Является ли отображение $f(x)=\sin x$ числовой прямой в себя сжимающим?

№ 89. Является ли сжимающим отображение $f(x)=\frac{1}{x}+5$ промежутка $[5;\infty)$ в себя?

№ 90. Проверьте, что функция $f(x)=-5x^2+5x$ отображает промежуток $[0;\frac{1}{2}]$ в себя. Является ли заданное отображение сжимающим?

№ 91. Является ли сжимающим отображение $f:(x;y)\to(u;v)$, где $\begin{cases} u=0{,}5x+0{,}6y; \\ v=0{,}1x-0{,}03y \end{cases}$

плоскости в себя, если плоскость рассматривается как пространство: а) R_2^2 б) R_1^2?

№ 92. Является ли отображение $f:(x;y)\to(u;v)$, где

$$\begin{cases} u=0{,}2x+0{,}4y+7; \\ v=-0{,}3x-0{,}6y-15 \end{cases}$$

плоскости в себя сжимающим, если плоскость рассматривать как метрическое пространство:

а) R_2^2; б) R_1^2; в) R_∞^2?

№ 93. Являются ли отображения:

а) $f(y)=\frac{2}{3}\int\limits_0^x y(t)dt$;

б) $f(y)=\frac{3}{2}\int\limits_0^x y(t)dt$

пространства **C**$[0,1]$ в себя сжимающим?

Занятие 13. Полные метрические пространства

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какую последовательность называют фундаментальной последовательностью?
2. Перечислите свойства фундаментальных последовательностей.
3. Какое пространство называют полным?
4. Какое пространство называют банаховым пространством?
5. Перечислите основные свойства полных метрических пространств.
6. Приведите примеры полных метрических пространств.

Решите задачи

№ 94. Является ли фундаментальной последовательность $\{y_n(x)\} = \{x^n\}, \quad (n \in N)$ заданного пространства

$$\text{а) } \mathbf{C}[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]; \quad \text{б) } \mathbf{C}[0;1]?$$

№ 95. Является ли фундаментальной последовательность заданных функций:

а) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2x^2+1}$ пространства $\mathbf{C}[0;1]$;

б) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ пространства $\mathbf{D^1}[0;1]$?

№ 96. Является ли фундаментальной последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{n}, & \text{при } |x| < n; \\ 0, & \text{при } |x| \ge n, \end{cases} \qquad (n \in N)$$

в пространстве ограниченных на числовой прямой функции с метрикой $\rho(f,g)=\sup\limits_{-\infty<x<\infty}\left|f(x)-g(x)\right|$.

№ 97. Является ли полным пространство М натуральных чисел с метрикой

$$\rho(m,n)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{m+n}, & \text{если} \quad m\neq n,\\ 0, & \text{если} \quad m=n?\end{cases}$$

№ 98. Является ли полным пространством числовая прямая, с метрикой $\rho(x,y)=\left|arctgx-arctgy\right|$.

РАЗДЕЛ 3. Практические занятия по теме «Мера и интеграл Лебега»

Занятие 14. Мера Лебега

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какие из множеств называют открытыми (замкнутыми)?
2. Что называют линейной мерой открытого (замкнутого) множества?
3. Что называется внешней (внутренней) мерой множества?
4. Что называется мерой Лебега точечного множества?
5. Перечислите свойства линейной меры точечного множества.
6. Перечислите свойства внешней (внутренней) меры точечного множества.
7. Перечислите свойства меры Лебега точечного множества.
8. Какие множества называют измеримыми по Лебегу?

Решите задачи

№ 99. Будет ли множество иметь меру Лебега, если его внешняя мера не более нуля?

№ 100. Пусть дано множество состоящее из конечного множества точек. Имеет ли оно меру Лебега?

№ 101. Найти меру Лебега множества а) целых чисел, б) всех четных чисел, в) рациональных чисел, г) множества, состоящего из счетного числа точек.

№ 102. Найти Меру Лебега множества иррациональных точек отрезка [0; 1].

№ 103. Определите измеримо ли канторово множество, которое строится следующим образом: из отрезка [0; 1] исключается интервал $(\frac{1}{3};\frac{2}{3})$; затем, из оставшихся двух сегментов выбрасываются интервалы длины $\frac{1}{3^2}$ с центрами в серединах этих сегментов; затем из оставшихся четырех сегментов исключаются интервалы длины $\frac{1}{3^3}$ с центрами в серединах этих сегментов и так далее.

№ 104. Определите, измеримо ли множество натуральных чисел?

№ 105. Измеримо ли множество, состоящее из изолированных точек?

№ 106. Измеримы ли заданные множества $E = \bigcup_n E_n$, в случае положительного ответа найдите их меру Лебега:

а) $E_n = [0;1-\frac{1}{n}], n \in N$;

б) $E_n = [0;n], n \in N$;

в) $E_n = [k;k+\frac{1}{2^k}], n \in N$.

№ 107. Около каждой точки канторова множества описан интервал длины: 0,1 с центром в этой точке. Чему равна мера множества, являющегося объединением всех этих интервалов?

№ 108. Пусть множество E на отрезке [0; 1] имеет меру нуль. Является ли его замыкание также множеством меры нуль?

№ 109. Может ли мера множества быть равной нулю, если оно содержит хотя бы одну внутреннюю точку?

№ 110. Найдите меру Лебега множеств

$$M = \bigcup_n E_n \text{ и } S = \bigcap_n E_n \text{, где } E_n = [-\frac{1}{n}; \frac{n}{n+1}], n \in N.$$

№ 111. Докажите, что множество E чисел отрезка F=[0; 1], десятичное разложение которых невозможно без цифры 5, измеримо и найти его меру.

Занятие 15. Измеримые функции

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какие множества называют измеримыми?
2. Перечислите основные свойства измеримых множеств.
3. Какие функции называют измеримыми?
4. Какие функции называют ограниченными?
5. Какие функции называют непрерывными?
6. Какие функции называют дифференцируемыми?
7. Какие множества называют замкнутыми (открытыми)?
8. Перечислите основные свойства измеримых функций.

Решите задачи

№ 112. Определите, измерима ли функция *f*, равная 5 во всех точках измеримого множества *E?*

№ 113. Измеримы ли множества:

а) $E(f(x) \geq A)$; б) $E(f(x) < A)$, в) $E\,(f(x)=A)$,

если известно, что *f* - ограниченная измеримая функция, заданная на множестве *E*?

№ 114. Доказать, что функция непрерывная на отрезке измерима на нем.

№ 115. Докажите измеримость функции Дирихле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0 & x \in I \end{cases}$$

(*Q*; *I* - множества рациональных и иррациональных чисел, соответственно)

на отрезке *[a;b]*.

№ 116. Измерима ли функция $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$, заданная на множестве иррациональных точек отрезка $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

№ 117. Докажите измеримость всякой рациональной (не целой) функции на любом отрезке.

№ 118. Докажите измеримость функции $F(x) = f(x)\cdot\sin x$, определенной на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, где $f(x)$ – функция Дирихле.

№ 119. Измерима ли функция

$$f(x) = \frac{x}{\cos x},$$

заданная на множестве действительных точек отрезка $[-2\pi;2\pi]$?

№ 120. Функция – f^3 измеримая функция на множестве *E*, докажите, что функция *f* также измерима на *E*.

№ 121. Докажите, что если f^2 - измеримая функция на *E,* то из этого не следует измеримость функции *f* на *E.*

№ 122. Докажите, что если функция *f* имеет производную во всех точках отрезка *[a;b]*, то эта производная f' является измеримой функцией на отрезке *[a;b]*.

№ 123. Докажите, что если функция *f* измерима на любом отрезке $[\alpha;\beta]$, где $a<\alpha<\beta<b$, то она измерима и на всем отрезке *[a;b]*.

Занятие 16-17. Интеграл Лебега

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Какое множество называют измеримым по Лебегу?
2. Какие функции называют измеримыми по Лебегу?
3. Какое число называют мерой Лебега?
4. Что значит, функция интегрируема на измеримом множестве?
5. Какое число называется интегралом Лебега от функции по множеству?
6. Перечислите основные свойства интеграла Лебега.

<u>Решите задачи</u>

№ 124. Вычислите интеграл Лебега: $(L)\int\limits_E 5\cdot dx$, где E – измеримое множество.

№ 125. Вычислите интегралы Лебега:

а) $(L)\int\limits_{Q_0}\frac{\sin x}{5^x}\cdot dx$; б) $(L)\int\limits_{N_0}\frac{\cos x^2}{3^{x+3}}\cdot dx$, где Q_0 – множество рациональных точек отрезка $[2;56,7]$, N- множество натуральных чисел, $N_0=[2;56,7]\cap N$.

№ 126. Вычислите интегралы Лебега: а) $(L)\int\limits_E(-f(x))dx$; б) $(L)\int\limits_E(f(x)+25)dx$; в) $(L)\int\limits_E(3f(x)-7)dx$, если известно, что $(L)\int\limits_E(f(x))dx=2{,}4$, где E - множество чисел отрезка

F=[0; 1], десятичное разложение которых невозможно без цифры 5.

№ 127. Составьте интегральную сумму Лебега для функции $f(x)=[x]$ на отрезке: $0\le x\le 10$. Докажите, что предел этой суммы совпадает с интегралом Римана: $(R)\int\limits_0^{10}f(x)dx$.

№128. На интервале (1; 2) вычислить интеграл Лебега от функции

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}.$$

№129. Определить, суммируемы ли на (0; 1) функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$.

№130. Суммируема ли функция *f(x)* = $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$ на *[1; 3]*, где *f(2) = 1.*

№131. Суммируема ли функция *f(x)* = $\dfrac{1}{x}$ на отрезке [-1; 1], где *f(0) = 0.*

№132. Вычислите интегралы Лебега от функции *f* заданной на отрезке $[0;1]$:

а) $f(x)=\dfrac{1}{2n+1}$, при $x\in\left(\dfrac{1}{2n};\dfrac{1}{2n-1}\right]$;

б) $f(x)=\dfrac{n}{n+3}$, при $x\in\left(\dfrac{1}{2+n};\dfrac{1}{n+1}\right]$, где $n\in N$.

РАЗДЕЛ 4. Практические занятия по теме «Ряд Фурье в гильбертовом пространстве»

Занятие 18. Скалярное произведение. Предгильбертово пространство. Неравенство Коши-Буняковского

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные вопросы:

1. Что называется метрикой пространства?
2. Что называется нормой пространства?
3. Что называют скалярным произведением элементов пространства?
4. Какое пространство называют линейным?
5. Какое пространство называют метрическим?
6. Какое пространство называют предгильбертовым?
7. Перечислите основные свойства предгильбертовых пространств.
8. Какое пространство называют евклидовым?
9. Приведите примеры предгильбертовых пространств.
10. Какие функции называют эквивалентными?

Решите задачи

№ 133. Задают ли скалярное произведение на числовой прямой следующие формулы:

а) $(x,y)=3xy$; б) $(x.y)=xy$; в) $(x.y)=x^2 y$; г) $(x,y)=7xy^3$?

№ 134. Проверьте, является ли предгильбертовым пространством множество векторов плоскости , если каждой паре его векторов $\vec{a}=(a_1;a_2)$ и $\vec{b}=(b_1;b_2)$ поставлено в соответствие действительное число $(\vec{a},\vec{b})$, то есть задают ли скалярное произведение следующие формулы:

а) $(\vec{a},\vec{b})=a_1\cdot b_1$; б) $(\vec{a},\vec{b})=3a_2b_2+5a_1b_1$;

в) $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1-a_2b_2$;

г) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2a_2b_2+a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1$;

д) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2a_2b_2+a_1b_1$; е) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)}$.

№ 135. Докажите обобщенное неравенство Коши: $\left|\sum_{i=1}^{\infty}s_it_i\right|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}s_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^2}$, где s_i,t_i - любые действительные числа такие, что ряды $\sum_{i=1}^{\infty}s_i^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty}t_i^2$ сходятся.

№136. Докажите неравенство Минковского:

$$\left|\int_a^b[s(x)+t(x)]^2dx\right|\le\sqrt{\int_a^b s^2(x)dx}+\sqrt{\int_a^b t^2(x)dx},$$

где s и t – произвольные непрерывные функции на отрезке $[a;b]$.

Занятие 19. Гильбертовы пространства. Ряд Фурье

Проверьте, знаете ли вы ответы на ниже перечисленные <u>вопросы</u>:

1. Какие пространства называют предгильбертовыми?
2. Какое пространство называют полным?
3. Какое пространство называют ортонормированным?
4. Какое пространство называют евклидовым?
5. Какие пространства называют гильбертовыми?
6. Какие ряды называют рядами Фурье?
7. Как находятся коэффициенты ряда Фурье?

<u>Решите задачи</u>

№ 137. Разложить функцию $f(x)=|x|$ в ряд Фурье на измеримом множестве $[-\pi;\pi]$.

№ 138. Разложить функцию $f(x)=\sin\frac{1}{3}x$ в ряд Фурье на промежутке *[-π;π]*.

№ 139. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=5$ на измеримом множестве *E*.

№ 140. Можно ли разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\sin x$ на канторовом совершенном множестве.

№ 141. Разложить в ряд Фурье функцию Дирихле:

$$D(x)=\begin{cases}1 & \textit{для} \quad x \quad -\textit{рационального} \quad \textit{числа}, \\ 0 & \textit{для} \quad x \quad -\textit{иррационального} \quad \textit{числа},\end{cases}$$

на отрезке *[0;2]*.

№ 142. Докажите, что пространство непрерывных на заданном отрезке функций со скалярным произведением, определенным по формуле $(f,g)=\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$, не является гильбертовым.

Занятие 20. Контрольная работа

Каждая задача в контрольной работе содержит четыре варианта: (а), (б), (в), (г) и пример-образец решения аналогичной задачи. Выполнение работы рассчитано на четыре академических часа. Контрольную работу можно предложить как для аудиторной, так и для самостоятельной внеаудиторной работы.

№1. Доказать методом математической индукции следующие предложения:

а) множество точек (x, y) плоскости, у которых обе координаты рациональны, счётно;

б) множество комплексов:

$(n_1, n_2, \ldots, n_k)$,

состоящих из k натуральных чисел, счётно;

в) множество многочленов:

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \ldots+a_{n-1}x+a_n$

с целыми коэффициентами, счётно;

г) множество алгебраических[1] чисел счётно.

Пример. Пусть элементы множества А определяются n знаками, каждый из которых, независимо от других, пробегает счётное множество значений

$A=\{a_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\}$ $(x_k=x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \ldots; k=1, 2, 3, \ldots, n)$,

Показать, что множество А в этом случае - счётно.

Доказательство

Используем метод математической индукции.

1. Предложение очевидно, если $n=1$, то есть имеется только один знак.

2. Допустим, что теорема справедлива для $n=m$.

3. Покажем, что она справедлива для $n=m+1$.

Пусть $A=\{a_{x^1, x^2, \ldots, x^m, x^{m+1}}\}$.

Обозначим через A_i множество тех элементов A, для которых

$$x_{m+1}=x_{m+1}^{(i)},$$

где $x_{m+1}^{(i)}$ одно из возможных значений $(m+1)$-го знака, то есть положим, что

$$A_i=\{a_{x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(i)}}\}.$$

В силу сделанного предположения - множество A_i - счётно, а так как

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

то счётно и А.

№2. Доказать следующие предложения:

(а) множество всех действительных чисел является множеством континуума;

(б) множество всех иррациональных чисел является множеством континуума;

(в) существуют трансцендентные (неалгебраические) числа.;

(г) множество Т всех последовательностей вида:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

где a_k, независимо друг от друга, принимают значения 0 и 1, является множеством континуума.

Пример. Доказать, что множество Q всех последовательностей натуральных чисел $Q=\{(n_1, n_2, n_3, \ldots)\}$является множеством континуума.

Доказательство

В доказательстве используем свойства двоичных дробей[2]. Для определенности договоримся не пользоваться дробями, содержащими единицу в периоде. Тогда каждое число из полуинтервала [0, 1) будет иметь единственное представление в форме:

$0, a_1a_2a_3 \ldots$, причём какое бы число N ни взять, найдутся такие a_k, что $a_k = 0$, $k > N$.

Обратно, любой дроби $0, a_1a_2a_3 \ldots$ с этим свойством отвечает точка из [0, 1). Но задать дробь $0, a_1a_2a_3 \ldots$можно, указав те k, для которых $a_k=0$.

Эти k образуют возрастающую последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ и каждой такой последовательности отвечает дробь $0, a_1a_2a_3 \ldots$. Значит, множество H последовательностей $\{k\}$ является множеством континуума. Но между множествами H и Q можно установить взаимноодно-значное соответствие. Для этого достаточно соотнести последовательности $\{k\}$ последовательность: $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$ из Q, для которой

$$n_1 = k_1,\ n_2 = k_2 - k_1,\ n_3 = k_3 - k_2, \ldots$$

Предложение доказано.

№3. Доказать следующие предложения:

(а) множество всех точек плоскости является множеством континуума;

(б) множество всех точек трёхмерного пространства является множеством континуума;

(в) множество всех точек четырехмерного пространства является множеством континуума;

(г) объединение континуума попарно не пересекающихся множеств является множеством континуума.

Пример.

Доказать, что множество A является множеством континуума, если все его элементы определяются n знаками, каждый из которых, независимо от прочих знаков, принимает континуум значений

$$A=\{ a_{x^1, x^2, \ldots, x^n} \}.$$

Доказательство

Рассмотрим случай для n=3. Рассуждения для произвольного случая n аналогичны. Итак, пусть $A=\{a_{x,y,z}\}$. Обозначим через X (соответственно, Y и Z) множество значений знака x (соответственно - y и z), при этом каждый из знаков изменяется независимо от прочих и каждое из множеств X, Y, Z является множеством континуума. Установим взаимнооднозначное соответствие между каждым из множеств X, Y, Z и множеством Q всех последовательностей натуральных чисел. Это позволит нам установить такое же соответствие между множествами A и Q.

Пусть ξ есть произвольный фиксированный элемент множества A. Тогда

$$\xi = a_{x_0, y_0, z_0}, \text{ где } x_0 \in X, y_0 \in Y, z_0 \in Z.$$

В соответствиях между X, Y, Z и Q элементам x_0, y_0, z_0 отвечают какие-то элементы из Q. Пусть

элементу x_0 соответствует $(n_1, n_2, n_3, \ldots)$, элементу y_0 соответствует $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$, элементу z_0 соответствует $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$. Соотнесём элементу ξ последовательность $(n_1, p_1, q_1, n_2, p_2, q_2, n_3, \ldots)$, входящую в Q. Тогда получим взаимнооднозначное соответствие между множествами A и Q.

Справочный материал

[1] - *Алгебраическим* называется число, являющееся корнем многочлена с целыми коэффициентами.

[2] - *Двоичные дроби* и их основные свойства.

1) Двоичной дробью называется сумма ряда: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}$

$a_k=\begin{cases}0\\1\end{cases}.$

2) Указанная сумма обозначается символом: $0, a_1a_2a_3 \ldots$

3) Всякое число $x\in[0,\ 1]$ допускает представление в форме $x=0, a_1a_2a_3 \ldots$ Это представление *единственно* в случае, когда x не есть дробь вида $\frac{m}{2^n}$ (m=1, 3, …, 2^n-1). Числа 0 и 1 разлагаются (единственным образом) в дроби

0=0,000…, 1=0,111…

4) Если же $x=\frac{m}{2^n}$ (m=1, 3, …, 2^n-1), то x допускает *два* разложения. В этих разложениях знаки $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ совпадают, а знак a_n в одном из них равен 1, а в другом равен 0. Все остальные знаки у первого разложения суть нули («0 в периоде»), а у второго – единицы («1 в периоде»). Например,

$$\frac{3}{8}=\begin{cases}0{,}011000\ldots\\0{,}010111\ldots\end{cases}$$

5) Всякая двоичная дробь: $0, a_1a_2a_3 \ldots$ равна некоторому числу x из [0, 1]. Если эта дробь содержит 0 или 1 в периоде, то x есть число вида $\frac{m}{2^n}$ (m=1, 3, …, 2^n-1) (исключения составляют дроби 0,000 … и 0,111 …), и тогда, наряду с исходным, существует ещё одно двоичное разложение x.

6) Если же дробь: $0, a_1a_2a_3 \ldots$ не содержит цифру 0 или 1 в периоде, то $x\neq\frac{m}{2^n}$ и других двоичных разложений x не имеет.

Ответы и рекомендации по решению задач

№ 1. а) *Решение:* установим нумерацию следующим образом:

$a_1 = 0; a_2 = 1; a_3 = -1; a_4 = 2; a_5 = -2; a_6 = 3; a_7 = -3;...$

б) *Решение:* установим соответствие следующим образом: n$\to 2n \quad n \in N$.

№ 3 а) *Решение:* установим соответствие следующим образом: $x = ctg(\pi \cdot t); t \in (0;1); x \in (-\infty;+\infty)$;

в) *Решение:* установим соответствие следующим образом:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} arcctg(t); t \in (-\infty;+\infty); x \in (a;b).$$

№ 5 а) *Решение:* выделим какую-нибудь последовательность точек на интервале, например:

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = \frac{1}{4};...; x_n = \frac{1}{n+1};... .$$

Установим следующее соответствие: точке 0 ставим в соответствие точку x_1 из интервала; точке 1 из [0; 1] - точку x_2 из интервала; точке $x_1 = \frac{1}{2}$ из [0; 1] - точку x_3 из (0; 1); точке x_2 из [0; 1] - точку x_4 из (0;1) и, вообще, точке x_n из [0; 1] - точку x_{n+2} из (0; 1); … Всем остальным точкам $x \in [0;1]$ ставим в соответствие точки с теми же абсциссами из (0; 1). Полученное в итоге соответствие взаимно однозначно.

в) *Указание:* отобразить [0; 1] на (0; 1), как в предыдущей задаче, и затем (0; 1) на (- ∞; + ∞).

г) *Указание:* используется метод аналогичный методу решения задачи

№ 6. б) *Указание:* отобразить [*а; в*] на [*а; в*) тем методом, каким решена задача № 5(а); затем [*а; в)* на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ с помощью линейной функции; наконец, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$ на [0; + ∞) с помощью функции

y=tg x.

№ 7. *Решение:* отображаем окружность на полуинтервал $[0;2\pi)$, ставим в соответствие каждой точке окружности численное значение угла, составленного радиус-вектором этой точки с некоторым фиксированным радиусом. Затем полуинтервал $[0;2\pi)$ линейным преобразованием отображаем на полусегмент [0;1); наконец, последний полуинтервал отображаем на [0; 1] методом, рассмотренным в задаче № 5(а).

№ 9. *Решение:* отображение производится с помощью так называемой «стереографической проекции». Обозначим через P^0 выколотую точку на сфере, а через M_0 - диаметрально противоположную точку на сфере. Построим плоскость, касающуюся сферы в точке M_0. Далее проведем прямую через точку P^0 и произвольную точку M на сфере. Точку N, в которой эта прямая пересечет плоскость, ставим в соответствие точке M. Это соответствие между точками M на сфере и точками N на плоскости является взаимно однозначным.

№ 10. *Решение:* отобразим сначала всю поверхность сферы на поверхность сферы с «выколотой точкой». Затем сферу с «выколотой» точкой отображаем на плоскость с помощью стереографической поверхности.

№ 11. *Решение:* выделим в множестве I иррациональных чисел какую-либо последовательность, например $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, ..., n\sqrt{2}, ...;$ обозначим через R множество всех действительных чисел; множество всех рациональных точек обозначим через Q (а сами рациональные числа занумеруем: $r_1; r_2; r_3; ...; r_n; ...$); множество всех чисел вида $n\sqrt{2}$ обозначим через A; множество всех иррациональных чисел, не представимых в виде $n\sqrt{2}$ (n>0, целое), обозначим через C. Тогда

I = C $\cup$ A, R = C$\cup$(A$\cup$Q). Элементы множества A ставим во взаимно однозначное соответствие элементам множества A$\cup$Q, например следующим способом:

$$A: \quad \sqrt{2} \quad 2\sqrt{2} \quad 3\sqrt{2}\ldots \quad (2k-1)\sqrt{2} \quad 2k\sqrt{2} \ \ldots$$

$$A\cup Q: \quad r_1 \quad \sqrt{2} \quad r_2\ldots \quad r_k \quad k\sqrt{2} \ \ldots$$

Точки множества C ставим во взаимно однозначное соответствие самим себе. В итоге получится взаимно однозначное соответствие между I и R.

№ 12. *Решение:* каждой точке (χ,η) прямоугольника $(a;в)\times(c;d)$ ставим в соответствие точку ($x;\ y$) квадрата $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\times(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ следующим образом: $x=-\frac{\pi}{2}+\pi\frac{\chi-a}{в-a}$; $y=-\frac{\pi}{2}+\pi\frac{\eta-c}{d-c}$.

№ 13. *Решение:* каждой точке ($x;\ y$) квадрата $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})\times(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$ ставим в соответствие точку (χ,η) плоскости следующим образом: $\chi=tgx,\ \ \eta=tgy$.

№ 17. *Решение:* разобьем прямую на счетное число отрезков точками 0; ± 1; ± 2; ± 3;… Каждый отрезок содержит не более одной точки данного множества; следовательно, между точками данного множества и некоторой совокупностью построенных отрезков существует взаимно однозначное соответствие. Значит данное множество не более чем счетно.

№ 18. Мощности континуума.

№ 19. Мощности континуума. *Решение:* каждому отрезку [a; b] соответствует точка с координатами (*a, в)* на полуплоскости Y>X; это соответствие взаимно однозначно, а множество точек полуплоскости Y>X имеет мощность континуума.

№20. Не более чем счетно. *Решение:* поставим в соответствие каждой букве Т из данного множества тройку рациональных точек M, N, P на плоскости так, чтобы отрезок MN пересекал ножку буквы Т, а отрезки MP и NP пересекали боковые отростки этой буквы. Тогда одной и той же тройке рациональных точек M, N, P может соответствовать не более одной буквы Т (легко доказать, что если бы этой тройке соответствовали две различные буквы Т, то они бы пересекались). Итак, между заданным множеством букв Т и некоторым множеством троек рациональных точек на плоскости установлено взаимно однозначное соответствие. Так как множество таких троек не более чем счетно, то и множество попарно не пересекающихся букв Т также не более чем счетно.

№ 21. Такое множество может иметь любую мощность, меньшую или равную мощности континуума. *Решение*: построим произвольное множество E на прямой $y=-x$ и через каждую точку этого множества проведем букву Г (приняв эту точку за вершину угла буквы Г и направив отрезки буквы Г параллельно осям координат). Все построенные буквы будут попарно не пересекающимися, и множество этих букв имеет мощность, равную мощности множества E.

№ 22. г) *Указание:* возьмите в круге множество, эквивалентное всей плоскости, и воспользуйтесь теоремой о мощности промежуточного множества.

з) Не более чем счетно. *Решение:* на каждом отрезке можно взять рациональное число.

№ 23. в) Мощности континуума. *Указание:* введите какой-нибудь способ упорядочения вершин треугольника и определите инъекцию $M \to R^6$, затем отыщите в M подмножество мощности континуума.

г) мощности континуума;

д) мощности континуума.

№ 57. Указанная функция нормы не задает. *Решение*: если бы эта функция определяла норму на прямой, то в силу второй аксиомы нормы для любых действительных чисел λ и x выполнялось бы соотношение: $|arctg(\lambda x)| = |\lambda|\cdot|arctg(x)|$

Положив в нем $\lambda=\dfrac{1}{3}$, $x=\sqrt{3}$ получаем: $\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$,

что неверно.

№ 63. а) Нет. *Решение*: с помощью производной находим, что

$$\rho(f_n, f) = \max_{0\le x\le 1} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}.$$

Так как $\rho(f_n, f)$ не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ответ на вопрос задачи отрицательный.

б) Да. *Решение:* в пространстве $C_1[0;1]$ имеем:

$$\rho(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_0^1 \frac{nx \cdot dx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{d(1+n^2x^2)}{1+n^2x^2} =$$

$= \dfrac{\ln(1+n^2)}{2n}$. По правилу Лопиталя имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+n^2)}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+n^2} = 0$. Это означает, что $f_n \to f$ по метрике пространства $C_1[0;1]$.

№ 64. Да. *Решение*: с помощью производной находим:

$$\max_{0\le x\le 1} |f_n(x) - f(x)| = \max_{0\le x\le 1} f_n(x) = f_n(1) = \frac{\ln(1+n^2)}{2n^2}$$

$$\max_{0\le x\le 1} |f_n'(x) - f'(x)| =$$

$$= \max_{0\le x\le 1} f_n'(x) = f_n'(\frac{1}{n}) = \left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right)_{x=\frac{1}{n}} = \frac{1}{2n}.$$

Для нахождения $\rho(f_n, f)$ нужно выбрать наибольшее из двух полученных выражений. Однако, поскольку сделать это не совсем просто, можно поступить и иначе. Заметим, что первое (это легко проверить с помощью правила Лопиталя) и второе выражения стремятся к нулю при n стремящемся к бесконечности. Откуда видно, что $\rho(f_n, f)$ стремится к нулю.

№ 78. Да, является. *Решение*: пусть *y(x)* – произвольный элемент пространства $C[0;1]$ и $y_n(x)$-произвольная сходящаяся к нему последовательность. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_{n,}; y) = \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{0\le x\le 1} |y_n(x) - y(x)| = 0.$

Рассмотрим последовательность образов: $F(y_n) = y_n(1).$ Так как в метрике R

$$\rho(F(y_n), F(y)) = \left|F(y_n) - F(y)\right| = \left|y_n(1) - y(1)\right|$$

и

$$\left|y_n(1) - y(1)\right| \le \max_{0\le x\le 1}\left|y_n(x) - y(x)\right| = \rho(y_{n,}; y).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(F(y_n), F(y)) = 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} F(y_n) = F(y)$.

Следовательно, F непрерывно в любой точке пространства $C[a;b]$, то есть непрерывно на всем пространстве.

№ 81. Функция $u = 2x^2 + y^2 + 3x - 4y - 5z^3$ задаёт непрерывное отображение R_2^3 в R. Множество D являются полным прообразом открытого луча $]1;+\infty[$ при этом отображении, а потому, в силу свойств непрерывности отображений оно открыто.

№ 82. Образ открытого множества при непрерывном отображении не обязательно открыт. Например, при непрерывном отображении $x \to \sin x$ интервал $]-\pi;\pi[$ переходит в отрезок $[-1;1]$.

№ 83. (*а,в*) – неподвижных точек нет; б) 0; $-\frac{2}{3}$; г) 1.

№ 84. а) (1;1), б) $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} - 1 + 2\pi n)$, $n \in Z$.

№ 85. а) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^x$, $c_1, c_2 - const$;

б) $y = c_1 e^x + e^{\frac{1}{2}x}(c_2 \cos\sqrt{3}x + c_3 \sin\sqrt{3}x)$, $c_1, c_2, c_3 - const$.

№ 86. а) $y = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4x^2}$; б) $y = 3e^x - 3$; в) нет.

№87. $\dfrac{3}{4}$.

№ 88. Несжимающее.

№ 89. Сжимающее.

№ 90. Несжимающее.

№ 91. а) Несжимающее, б) сжимающее.

№ 92. а, в) Сжимающее, б) несжимающее.

№ 93. а) Сжимающее, б) несжимающее.

№ 94. а) Да, является. Решение: поскольку $\rho(y_n;y)=\max\limits_{-\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{3}}\left|x^n\right|=\dfrac{1}{3^n}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n;y)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}=0$, то данная последовательность сходится в пространстве $C[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}]$ к *y=0*, а всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной.

б) Не является фундаментальной. *Решение:* рассмотрим члены данной последовательности y_n и y_{2n}, для которых имеем: $\rho(y_n;y_{2n})=\max\limits_{0\le x\le 1}(\left|x^n-x^{2n}\right|)\ge x_0^n-x_0^{2n}$, где $x_0\in[0;1]$. Нетрудно заметить, что в промежутке [0;1] существует такое значение $x_0=\dfrac{1}{\sqrt[n]{2}}$, для которого $\rho(y_n;y_{2n})\ge\dfrac{1}{4}$. То есть $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(y_n;y_{2n})\ne 0$, следовательно, данная последовательность не является фундаментальной.

№ 95. а) Да. б) Нет.

№ 96. Нет.

№ 97. Да, является. *Решение*: рассмотрим последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел заданного пространства. Если все члены ее, начиная с некоторого номера, совпадают $(n_k\equiv n;k>K)$, то $\rho(n_k,n_m)=\rho(n,n)=0$ $(k,m>K)$ и эта последовательность является фундаментальной.

А так как $n_k \equiv n\,, k > K$, то $\rho(n_k, n) = 0$ при $k > K$, и это означает, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = n$. Если же в последовательности $\{n_k\}$при любом сколь угодно большом K имеются члены $n_k \neq n_m, k,m > K$, то в силу того, что $\rho(n_k, n_m) = 1 + \dfrac{1}{n_k + n_m} > 1$

такая последовательность не является фундаментальной. Итак, фундаментальными в данном пространстве могут быть лишь последовательности, постоянное с некоторого номера, и они сходятся, значит это пространство полное.

№ 98. Нет, полным не является. *Решение:* рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \{n\}$. Пусть ε –любое положительное число и пусть $k>n>N$.

Тогда $\rho(x_k; x_n) = arctgk - arctgn \le \dfrac{\pi}{2} - (\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon) < \varepsilon$,

поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} arctgn = \dfrac{\pi}{2}$, то существует такой номер N, что при $n>N$ выполняется неравенство $\left| \; arctgn - \dfrac{\pi}{2} \; \right| < \varepsilon$ или $\dfrac{\pi}{2} - \varepsilon < arctgn < \dfrac{\pi}{2} + \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{x_n\}$фундаментальная. Пусть $x_n \to x_0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \; arctgx_0 - arctgn \; \right| = 0$.

Положив $arctgx_0 - arctgn = \beta_n$ (где $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$), получим:

$$\lim_{n\to\infty} arctgx_0 = \lim_{n\to\infty}(arctgn + \beta_n) = \frac{\pi}{2},$$

что невозможно. Полученное противоречие показывает, что рассматриваемая последовательность предела не имеет и пространство не является полным.

№ 99. Внешняя мера множества не может быть отрицательной $m^*E \geq 0$; по условию $m^*E \leq 0$; откуда следует, что $m^*E = 0$.

№ 100. Да, $m\ E = 0$. *Решение*: пусть множество *E* состоит из *n* точек. Построив окрестности каждой точки длиной $\frac{\varepsilon}{n}$, получим совокупность интервалов, покрывающих множество *E* общей длиной ε, где ε -сколь угодно мало. Следовательно, внешняя мера $m^*E = 0$. Внутренняя мера $m^*E \leq m_*E = 0$ не может быть отрицательной; значит, и внутренняя мера в этом случае равна нулю $m_*E = 0$, а, следовательно, и мера множества *E*, состоящего из конечного числа *n* точек, равна нулю.

№ 101. а), б), в), г) $m\ E = 0$. *Решение* (г): пронумеруем точки множества E. Выберем число ε. Построим окрестность длиной $\frac{\varepsilon}{2}$ для первой точки, длиной $\frac{\varepsilon}{4}$ - для второй,…, длиной $\frac{\varepsilon}{2^n}$ -для *n*-ой и так далее. Объединение всех этих окрестностей включает в себя данное множество *E*. Суммарная длина окрестностей не больше, чем ε. Поэтому $m^*E = 0$. Следовательно, и $m_*E = 0$, откуда $m\ E = 0$.

№ 102. $m\ E = 1$. *Решение*: множество иррациональных точек отрезка [0; 1] измеримо, так как его дополнение – множество рациональных точек отрезка [0; 1] измеримо, и равно нулю. Согласно свойству 2 меры Лебега точечного множества, имеем $mE = m\Delta - mC_\Delta(E)$, откуда получим: $mE = 1 - 0 = 1$

№ 103. Да. *Решение*: канторово множество, как множество замкнутое, измеримо. Его мера равна нулю.

№ 104. Да и его мера равна нулю, так как это множество замкнутое.

№ 105. Да и его мера равна нулю, так как это множество замкнутое.

№ 106. а) 1; б) n, если n-фиксированное число; мера не существует, если $n \to \infty$; в) 0, если n. *Решение:* согласно свойству (меры Лебега) 5, имеем: $mE = \lim\limits_{n\to\infty} mE_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

№ 107. $\frac{38}{45}$. *Решение:* объединение всех интервалов-открытое множество:

$$\left(-\frac{1}{20};\frac{1}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{20};\frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{20};\frac{7}{9}+\frac{1}{20}\right)\cup\left(\frac{8}{9}-\frac{1}{20};1\frac{1}{20}\right)$$

. Его мера равна: $4\cdot\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right)=\frac{38}{45}$.

№ 108. Замыкание множества меры нуль не обязано иметь меру нуль. *Решение:* приведем пример, когда замыкание множества не имеет меру нуль: пусть Е –множество рациональных чисел на отрезке $\Delta = [0; 1]$, тогда $mE = 0$, $mC_\Delta(E) = 1$.

№ 109. Нет, не может. *Решение*: если множество Е содержит внутреннюю точку x_0, то в Е входит некоторая окрестность $V(x_0)$ точки x_0 . Мера окрестности $V(x_0)$ положительна(это длина интервала). Но, тогда $mE \ge mV(x_0) > 0$.

№ 110. $mM = 2$; $mS = \frac{1}{2}$.

№ 111. mE=1. *Указание*: представьте множество Е в виде: $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, где из множества $F \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} E_i$, постройте множество E_k тех чисел, в десятичном разложении которых k-ой цифрой после запятой будет обязательно цифра 5, при этом будем считать, что $E_0 = \varnothing$.

Решение: множество E_k состоит из 9^{k-1} элементов. Каждый элемент E_k представляет собой промежуток длины $\frac{1}{10^k}$. Так как множества E_k как объединения конечного числа интервалов – измеримы и попарно не пересекаются, то множество E измеримо, причем

$$mE=\sum_{k=1}^{\infty}mE_k=\frac{1}{10}+\frac{9}{10^2}+...+\frac{9^{k-1}}{10^k}+...=\frac{0,1}{1-0,9}=1.$$

№ 112. Да, измерима. *Решение*: при $A<5$ справедливо равенство: $E(f(x)>A)=E$, а по условию множество Е измеримо, при $A\geq 5$ справедливо равенство: $E(f(x)>A)=\varnothing$, а пустое множество также измеримо.

№ 113. а) Да., измеримо. *Решение:* данное множество можно представить в виде: $E(f(x)\geq A)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f(x)>A-\frac{1}{n})$.

Ввиду произвольности выбора числа *A,* множества $E(f(x)>A-\frac{1}{n})$ измеримы, так как по условию f - ограниченная измеримая функция, заданная на множестве *E.* По свойству меры множества (по Лебегу) пересечение счетного множества измеримых множеств измеримо, откуда и следует измеримость заданного множества..

б) Да, измеримо. *Указание*: представьте данное множество в виде: $E(f(x)<A)$ $= E \setminus E (f (x) \geq A)$ и воспользуйтесь свойствами измеримых множеств и функций.

в) Да, измеримо. *Указание:* представьте данное множество в виде: $E (f(x)=A) = E (f (x) \geq A) \setminus E(f(x)>A)$.

№ 114. *Доказательство*: из условия следует, что заданная функция монотонна и ограничена, значит для любого числа A множества $E(f(x)\geq A)$ замкнуты, откуда и следует их измеримость (см. решение задачи №112(а).

№ 115. *Доказательство*: данная функция измерима, так как множество $E(f(x)>A)$ измеримо, поскольку его можно представить в виде:

$$E(f(x)>A)=\begin{cases}[a;b], & A<0,\\ Q, & 0\leq A<1,\\ \varnothing, & A\geq 1,\end{cases}$$

где множества рациональных чисел Q, множество точек отрезка $[a;b]$ и пустое множество Ø –измеримы.

№ 120. *Доказательство:* по условию f^3 - измеримая функция, значит множество $E(f^3(x) > A)$ - измеримо по Лебегу. Из справедливости равенства множеств:

$$E(f^3(x) > A) = E(f(x) > \sqrt[3]{A}),$$

и произвольности выбора числа A, следует измеримость функции f.

№ 121. Нет, не следует. *Доказательство:* Достаточно привести хотя бы один пример противоречащий условию задачи, например: пусть
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in E, \\ -1, & \text{если} \quad x \in CE, \end{cases}$$

где A- произвольное измеримое множество, а CE –его дополнение, функция f- неизмерима, тогда как функция $f^2(x)=1$ – измерима.

№ 122. *Доказательство:* построим последовательность точек $\{\alpha_i\}$ (такую что $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$) сходящуюся к a, и последовательность $\{\beta_i\}$ (где $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots$) сходящуюся к b . Очевидно, что $(a;b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i;\beta_i]$. Поскольку функция f, по условию, измерима на любом промежутке $[\alpha_i;\beta_i]$, то, для любого числа A, множество точек $E_i = E(f(x) > A) \cap [\alpha_i;\beta_i]$ измеримо. Но множество $E(f(x) > A)$ всех точек из интервала $(a;b)$, в которых $f(x) > A$, равно объединению всех множеств E_i : $E(f(x) > A) = \bigcup_i E_i$. Следовательно, множество $E(f(x) > A)$ измеримо при любом A; значит f измерима на интервале $(a;b)$. А так как отрезок $[a;b]$ отличается от интервала $(a;b)$ лишь множеством меры нуль, то функция f измерима и на отрезке $[a;b]$.

№ 123. *Доказательство:* рассмотрим функцию:

$\varphi_n(x) = \dfrac{f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$. Она определена и измерима на отрезке $\left[a; b-\dfrac{1}{n}\right]$. Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f'(x)$ существует для всех x, и следовательно, предельная функция f' измерима на отрезке $\left[a; b-\dfrac{1}{n}\right]$. А поскольку полуинтервал $[a;b)$ является объединением отрезков $\left[a; b-\dfrac{1}{n}\right]$, то функция f' измерима на полуинтервале $[a;b)$. Но тогда функция f' измерима и на всем отрезке $[a;b]$.

№ 124. $5mE$.

№ 125. а) 0; б) 0.

№ 126. а) –2,4; б) 22,6; в) 0,2.

№128. $\dfrac{3}{2}$. Решение. Строим срезку

$$f_N(x) = \begin{cases} N, \ f(x) \geq N, \\ f(x), \ f(x) < N. \end{cases}$$

$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}} = N$, $x = 1 + \dfrac{1}{N^3}$. $\lim\limits_{N\to\infty} \int\limits_E f_N(x)dx = \int\limits_E f(x)dx$,

$$\int\limits_{(1;2)} f_N(x)dx = \int\limits_1^{1+\frac{1}{N^3}} N dx + \int\limits_{1+\frac{1}{N^3}}^{2} \frac{d(x-1)}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$= Nx\Big|_{1}^{1+\frac{1}{N^3}} + \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_{1+\frac{1}{N^3}}^{2} =$$

$$=N\left(1+\frac{1}{N^3}\right) - N + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{N^3}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{N^2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{N^2}$$

=

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{3}{2},$$

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{(1;2)} f_N(x)dx = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{N^2}+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

$$(L)\int\limits_{(1;2)} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}dx = \frac{3}{2}.$$

№129. функция $f(x) = \frac{1}{x}$ суммируемой не является; функция $f(x) = \frac{1}{x^2}$ суммируемой не является. *Решение:*

Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$. Строим срезку $\frac{1}{x} = N$, $x = \frac{1}{N}$.

$$\int\limits_{(0;1)} f_N(x)dx = \int_0^{\frac{1}{N}} Ndx + \int_{\frac{1}{N}}^{1} \frac{1}{x}dx = Nx\Big|_0^{\frac{1}{N}} + \ln x\Big|_{\frac{1}{N}}^{1} =$$

$$= 1 - \ln\frac{1}{N} = 1 + \ln N,$$

$$\int\limits_{(0;1)} \frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{(0;1)} f_N(x)dx = \lim_{N\to\infty}(1+\ln N) = +\infty,$$

Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Строим срезку $\frac{1}{x^2} = \mathrm{N}$, $x = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

$$\int\limits_{(0;1)} f_N(x)dx = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{N}}} Ndx + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{N}}}^{1} \frac{1}{x^2}dx = Nx\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{N}}} - \frac{1}{x}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{N}}}^{1} =$$

$$= \frac{N}{\sqrt{N}} - (1 - \sqrt{N}) = \sqrt{N} - 1 + \sqrt{N} = 2\sqrt{N} - 1,$$

$$\int\limits_{(0;1)} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{N\to\infty} \int\limits_{(0;1)} f_N(x)dx = \lim_{N\to\infty} (2\sqrt{N} - 1) = +\infty,$$

№130. $\frac{3}{2}$. Решение: строим срезку $\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = N$,

$x = 2 + \frac{1}{N^3}$.

$$(L) \int\limits_{[2;3]} f_+ dx = \lim_{N\to\infty} \left(\int\limits_2^3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} \right)_N dx \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\int\limits_2^{2+\frac{1}{N^3}} Ndx + \int\limits_{2+\frac{1}{N^3}}^{3} \frac{d(x-2)}{\sqrt[3]{x-2}} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(Nx\Big|_2^{2+\frac{1}{N^3}} + \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_{2+\frac{1}{N^3}}^{3} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(N\left(2 + \frac{1}{N^3}\right) - 2N + \frac{3}{2} - \frac{\left(\frac{1}{N^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(2N + \frac{1}{N^2} - 2N + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{N^2}\right) \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{2N^2}+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Строим срезку $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = N, \quad x = 2 - \dfrac{1}{N^3}.$

$$(L)\int\limits_{[1;2]} f\_dx = \lim_{N\to\infty}\left(\int\limits_{2-\frac{1}{N^3}}^{2} Ndx - \int\limits_{1}^{2-\frac{1}{N^3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(Nx\Big|_{2-\frac{1}{N^3}}^{2} + \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\Big|_{1}^{2-\frac{1}{N^3}}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(2N - N\left(2-\frac{1}{N^3}\right) + \frac{3\left(-\frac{1}{N^3}\right)^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(2N - 2N + \frac{1}{N^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{N^2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

№131. На [-1 ;1] функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не является суммируемой.

№ 132. а) $\dfrac{1}{2}-\ln 2$; б) 0.25.

№ 134. а), в), е) – нет, не является; д), г) – да, является.

№ 137. $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$.

$$\frac{2\sin\frac{1}{3}\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n\sin nx}{n^2-\frac{1}{9}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Вопросы к коллоквиуму, зачету и экзамену

- А -

По первому вопросу контрольного билета во время экзамена *студент должен ответить на пять из ниже перечисленных вопросов и привести примеры*

Перечислите виды множеств и их свойства?

1. Какие множества называют равными?
2. Какие множества называют конечными?
3. Какие множества называют бесконечными?
4. Какое соответствие между двумя множествами называют взаимно однозначным соответствием?
5. Какие соответствия называют иньективными?
6. Какие функции называют иньективными?
7. Какое отображение множеств называют взаимно однозначным отображением?
8. Какие множества называют числовыми?
9. Какие множества называют функциональными?
10. Перечислите названия операций над числовыми множествами?
11. Дайте определение каждой из операций над числовыми множествами.
12. Какие множества называют равными?
13. Какое числовое множество называют ограниченным?
14. Что называется точной верхней гранью множества; точной нижней гранью множества?
15. Какие множества называют плоскими (пространственными)?
16. Какие множества называют счетными?
17. Какие множества называют несчетными?
18. Какие множества называют эквивалентными?
19.
20. Что понимают под мощностью множеств?
21. Какие множества называют равномощными?
22. Какие множества имеют одинаковую мощность?

23. Перечислите способы определения счетности множества.
24. Приведите примеры счетных числовых множеств.
25. Какое множество называют множеством мощности континуума?
26.
27. Какое множество называют множеством мощности гиперконтинуума?
28. Как установить мощность множества?
29. Какое множество называют множеством мощности булеан?
30. Что понимают под трахеотомией множеств?
31. Какое множество называют метрическим пространством?
32. Какую функцию называют метрикой?
33. Приведите примеры метрических пространств.
34. В чем заключается суть неравенства Коши-Буняковского?
35. Назовите основные метрические пространства.
36. Как задается метрика в пространстве непрерывных на отрезке [a; b] функций:

$$C_2[a;b]; \quad C_1[a;b]; \quad C[a;b]; \quad D^k[a;b].$$

37. Какое множество точек метрического пространства называют окрестностью точки x_0?
38. Какую точку из метрического пространства называют внешней точкой данного множества?
39. Какую точку из метрического пространства называют граничной точкой данного множества?
40. Какую точку из метрического пространства называют внутренней точкой данного множества?
41. Какую точку из метрического пространства называют предельной точкой данного множества?
42. Что называют пределом последовательности точек метрического пространства?
43. Какую точку из метрического пространства называют изолированной точкой данного множества?
44. Какую точку из метрического пространства называют точкой прикосновения данного множества?
45. Что называют замыканием множества?
46. Какое множество называют замкнутым?
47. Какое множество называют совершенным?

48. Что называют ядром множества?
49. Какое множество называют граничным?
50. Какое множество называют зполным?
51. Какое множество называют открытым?
52. Какие множества называют плотными; всюду плотными; нигде не плотными?
53. Какое пространство называют линейным?
54. Что называют нормой на линейном пространстве?
55. Какое множество называют совершенным?.
56. Какое пространство называют линейным нормированным пространством?
57. Запишите формулы для нормы в основных метрических пространствах:

    R_2^n; R_1^n; R_∞^n; R_2^∞; R_1^∞; R_∞^∞; $C_1[a;b]$; $C_2[a;b]$; $C\ [a;b]$; $D^n[a;b]$.
58. Когда последовательность точек метрического пространства называют сходящейся?
59. Что называют пределом последовательности точек метрического пространства?
60. Какие нормы называют эквивалентными?
61. Докажите теорему о связи нормы и метрики.
62. Перечислите свойства, исходящие из формулы связи метрики и нормы. Докажите их.
63. Перечислите свойства сходящихся последовательностей.
64. Какую последовательность точек метрического пространства называют фундаментальной?
65. Какое множество называют предельным множеством последовательности?
66. Что называют отображением одного метрического пространства в другое метрическое пространство?
67. Какое отображение называют непрерывным в точке? (Сформулируйте на языке “$\varepsilon-\delta$”).
68. Какое отображение называют непрерывным в точке? (Сформулируйте на “языке последовательностей”).
69. Какое отображение называют непрерывным на множестве X?

70. Что называют образом отображения?
71. Что называют прообразом отображения?
72. Что значит найти образ по известному прообразу?
73. Что значит найти прообраз по известному образу?
74. Какое отображение называют отображение - “на” либо отображение - “в”?
75. В чем заключается принцип неподвижной точки?
76. Что называют коэффициентом сжатия?
77. Какие множества называют несвязными?
78. Какие множества называют связными?
79. Какие множества называют измеримыми?
80. Перечислите свойства измеримых множеств.
81. Что называют измеримыми функциями?
82. Перечислите свойства измеримых функций.
83. Дайте определение линейной меры открытого множества.
84. Дайте определение линейной меры замкнутого множества.
85. Какую меру называют внутренней?
86. Какую меру называют внешней?
87. Дайте определение меры Лебега.
88. Дайте определение интеграла Лебега.
89. Как вычисляется интеграл Лебега?
90. В чем отличие, и в чем схожесть интегралов Лебега и Римана.
91. Соотношения между понятиями интегрируемости и измеримости для ограниченной функции.
92. Какое пространство называют предгильбертовым?
93. Какое пространство называю гильбертовым?
94. Что называют скалярным произведением?
95. Какие функции называют ортогональными?
96. Перечислите свойства (аксиомы) скалярного произведения.
97. Запишите формулу ряда Фурье.

- Б -

По второму вопросу контрольного билета во время экзамена *студент должен доказать теорему либо перечислить и доказать свойства, перечисленные ниже.*

Свойства:

1. конечных множеств;
2. эквивалентных множеств;
3. счетных множеств;
4. множеств континуума;
5. окрестностей в метрических пространствах;
6. замыкания множеств;
7. замкнутых множеств;
8. открытых множеств;
9. дополнения до данного множества;
10. линейных множеств;
11. линейных нормированных пространств;
12. сходящихся последовательностей;
13. непрерывных отображений;
14. линейных мер;
15. множеств, имеющих меру Лебега;
16. измеримых функций;
17. интеграла Лебега;
18. гильбертовых пространств.

Теоремы:

1. Пусть $A_1, A_2, A_3, \ldots$ и $B_1, B_2, B_3, \ldots$ две последовательности множеств. Если множества A_n и B_n (для любого n) не пересекаются между собою: $A_n \cap A_{n'} = \varnothing$, $B_n \cap B_{n'} = \varnothing$ $(n \neq n')$, и если при каждом n $A_n \sim B_n$ (n=1, 2, 3, …), то

$$\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} A_\kappa \sim \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} B_\kappa$$

2. Для того чтобы множество A было счётным, необходимо и достаточно, чтобы его можно было «перенумеровать», то есть представить в форме последовательности $A=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$.
3. Из всякого бесконечного множества A можно выделить счётное подмножество D.
4. Всякое бесконечное подмножество B счётного множества A счётно.
5. Если из счётного множества A удалить конечное подмножество M, то оставшееся множество A / M будет счётным.

6. Объединение конечного множества и счётного множества без общих элементов есть счётное множество.
7. Объединение конечного числа попарно не пересекающихся счётных множеств есть счётное множество.
8. Объединение счётного множества попарно не пересекающихся счётных множеств есть счётное множество
9. Множество всех рациональных чисел счётно.
10. Множество точек любого промежутка: является множеством континуума.
11. Объединение конечного числа попарно не пересекающихся множеств континуума является множеством континуума.
12. Объединение счётного множества попарно непересекающихся множеств континуума есть множество континуума.
13. Всякое бесконечное множество содержит эквивалентную часть.
14. Справедливо неравенство $|\rho(x,z)-\rho(z,y)| \leq \rho(x,y)$, которое следует из неравенства треугольника.
15. Любой числовой промежуток связен.
16. Каждая связная часть E числовой прямой R. вместе с любыми двумя точками x и y содержит весь отрезок $[x;y]$.
17. Образ связного пространства E при непрерывном отображении F является связным
18. Если числовая функция f непрерывная на связном пространстве E, принимает на E значения x и y $(x<y)$, то она принимает на E и любое промежуточное значение ξ $(x<\xi<y)$.
19. В любом линейном нормированном пространстве можно ввести метрику
20. Сходимость по метрике пространства $C[a;b]$ равносильна равномерной сходимости.
21. Если сжимающее отображение F задано в полном метрическом пространстве E, то в этом пространстве существует одна и только одна неподвижная точка отображения
22. Если последовательность $\{x_n\}$ точек из E сходится в E, то она фундаментальная.

23. Если последовательность $\{x_n\}$ принадлежит подпространству Е пространства М, то из ее фундаментальности в одном из них следует ее фундаментальность в другом.
24. Если Е замкнутая часть полного метрического пространства М, то Е - полное пространство.
25. Всякое полное подпространство Е метрического пространства М замкнуто в М.
26. Внутренняя мера ограниченного множества Е не превосходит его внешнюю меру: $m_*E \leq m^*E$.
27. Если функция f измерима на измеримом множестве Е, то интеграл Лебега $(L)\int\limits_E f(x)dx$ всегда существует
28. Если функция f интегрируема по Риману на промежутке [a; b], то она интегрируема по Лебегу на промежутке [a; b]. Причем интегралы функции на промежутке [a; b] по Риману и по Лебегу равны.

2. Тематика проектов для самостоятельной реферативно-исследовательской работы

- Свойства счетных множеств.
- Свойства множеств мощности континуума.
- Мера Лебега на плоскости и в пространстве.
- Свойства интеграла Лебега.
- Сравнение интегралов Римана и Лебега.
- Топология метрических пространств.
- Применение рядов Фурье.

4. Задачи олимпиадного и конструктивного характера

1. Найти предел последовательности функций $x_n(t) = t^n$ в пространстве $C_1[0;1]$.

Решение. Предположим, что последовательность сходится к функции $\theta(t) \equiv 0$. В данном пространстве $\rho(x_n, \theta) = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, а значит, $\rho(x_n, \theta) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, выполненное предположение верно.

2. Исследовать на сходимость последовательность функций $x_n(t)=t^n$ к функции $\theta(t) \equiv 0$ в пространстве C [0;1].

Решение. Эта же последовательность функций в пространстве C [0;1] не сходится к функции θ, поскольку в этом случае

$$\rho(x_n, \theta) = \max_{0 \le t \le 1} t^n = 1$$

.

3. Составьте интегральную сумму Лебега для функции $f(x) = \sin x$ на промежутке: $0 \le x \le 1$. Покажите, какой площади на чертеже соответствует составленная сумма.

4. Вычислите интеграл Лебега функции

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & x \in Q, \\ g^2(x), & x \in I, \end{cases} \quad (Q \cup I = R),$$

где $g(x) = e^x + 5$- функция, заданная на множестве точек отрезка: $0 \le x \le 1$ (R-множество действительных чисел) .

5. Вычислите интегралы Лебега:

$$\text{а)} (L)\int_0^1 g(x) \cdot dx\text{; б) } (L)\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cdot \sin x \cdot dx;$$

$$\text{в)} (L)\int_{-2\pi}^{2\pi} g(x) \cdot cosx \cdot dx,$$ где $g(x)$ - функция Дирихле.

Решение. По свойствам меры и интеграла Лебега имеем:

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_{Q_0} g(x)dx + \int_{I_0} g(x)dx =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}(g_i(x)\cdot mQ_0^{(i)}) + \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}(g_j(x)\cdot mI_0^{(j)}) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1\cdot\sum_{i=0}^{n-1} mQ_0^{(i)}) + \lim_{n\to\infty}(0\cdot\sum_{j=0}^{n-1} mI_0^{(j)}) =$$

$$= 1\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} mQ_0^{(i)} + 0\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} mI_0^{(j)} =$$

$$= 1\cdot mQ_0 + 0\cdot mI_0 = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0, \text{ где } Q_0 = [0;1]\cap Q;$$

$$I_0 = [0;1]\cap I; \quad Q_0^i = Q_0(g_i(x)\le g < g_{i+1}(x));$$

$$I_0^j = I_0(g_j(x)\le g < g_{j+1}(x)).$$

6. Вычислите интеграл Лебега от функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{если} \quad x\in K, \\ \dfrac{1}{5^n}, & \textit{если} \quad x\in P_n, \forall n\in N, \end{cases}$$

на отрезке $\Delta = [0;1]$. Здесь K - точки канторова множества, множество P_n – множество точек всех интервалов, которые удаляются из отрезка на n-ом шаге построения множества Кантора.

Решение. Поскольку множество точек отрезка можно представить, согласно условию задачи, в виде:

$$\Delta = [0;1] = K\cup P_1\cup P_2\cup\ldots\cup P_n\cup\ldots,$$

Очевидно, что $mK = 0$ и $mP_n = 2^{n-1}\cdot\dfrac{1}{3^n}$, так как на n – ом шаге построения канторова множества удаляется 2^{n-1} интервалов, длина которых равна $\dfrac{1}{3^n}$. Следовательно,

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_K f(x)dx + \int_{P_1} f(x)dx + \ldots + \int_{P_n} f(x)dx + \ldots =$$

$$= 0+\frac{1}{2}mP_1+\frac{1}{2^2}mP_2+\ldots+\frac{1}{2^n}mP_n+\ldots=$$

$$=0+\frac{1}{2}\cdot 2^0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\cdot 2^1\cdot\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{2\cdot 3^n}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}.$$

7. Функция *f(x)* определена на числовой прямой следующим образом:

f(x)=0 в иррациональных точках; *f(x)*= $\frac{(-1)^p}{q}$ в рациональных точках, представимых в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}\neq 0$, где $q>0$ и *f(x)*=1 при *x*=0. Найти все её точки разрыва и непрерывности.

8. Определить мощность множества всех конечных подмножеств счетного множества. *Ответ*: счетное.

9. Построить на отрезке [0; 1] совершенное нигде не плотное множество, линейная мера которого равна 0,9.

10. Справедливо ли равенство

$$(A\cap B)\cup(C\cap D)=(A\cup C)\cap(B\cup D)\,?$$

3. Рекомендуемая литература

1. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. – М. : Наука, 1977
2. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. -М.: Наука, 1973.
3. Колмогоров А.К., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1989.
4. Колмогоров А.К, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1989.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. -М.: Наука, 1974.
6. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. -М.: Просвещение, 1981.
7. Шаталова Н.П. Практикум по ТФДП : учебное пособие. -Куйбышев, ГОУ ВПО НГПУ КФ: Простор, 2006.- 68 с.
8. Шаталова Н.П Кластер тестов по курсу «Теория функций действительного переменного» : учебное пособие. Барнаул : изд-во БГПУ. – 2007. – 64 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Наталья Петровна Шаталова

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебник для студентов

Печатается по решению научно-методического совета
Куйбышевского филиала ГОУ ВПО «НГПУ»

Редактор Н.П. Шаталова
Художник и оператор компьютерной верстки Т.Ю. Юнусова

Сдано в печать 30.07.2010. Подписано в печать 15.08.2010.
Формат 60x 84/16. Печать офсетная.
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 9.
Тираж 100 экз.   Зак.____

Издательство ООО «Научно-инновационный центр»
660077, г. Красноярск, ул. Молокова, 1
т. (391) 271-23-89

Отпечатано в ОАО «Барабинская типография»
632382, г. Куйбышев, ул.Коммунистическая, 145