4-§. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

4.1. Asosiy tushunchalar.

4.1-Ta'rif. *n*- tartibli chiziqli differensial tenglama deb,

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \qquad (4.1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $a_1(x), a_2(x),...,a_n(x)$ va $f(x)$ lar tenglama qaralayotgan biror sohada aniqlangan, uzluksiz funksiyalar yoki o'zgarmaslardir.

(4.1) tenglama o'ng tomonida turgan $f(x)$ funksiya aynan nolga teng ($f(x) \equiv 0$) bo'lsa, u holda (4.1) tenglamaga o'ng tomonsiz, yoki bir jinsli, noldan farqli ($f(x) \neq 0$) bo'lganda esa, o'ng tomonli, yoki bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama deyiladi. Demak,

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \qquad (4.2)$$

tenglamaga bir jinsli tenglama deyiladi, chunki tenglama chap tomoni $y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)},..., y', y$ larga nisbatan bir o'lchovli bir jinsli funksiyadir.

1-*Misol*. a) $y''' - 4y'' + xy' = 0$ - bir jinsli,

b) $7y''' - 4xy'' + xy + 1 = 0$ - bir jinsli emas, chunki $f(x) = -1$.

(4.2) tenglamaning asosiy xossalariga to'xtalamiz.

4.1-Teorema. Agar $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_m(x)$ funksiyalar (4.2) tenglamaning yechimlari bo'lsa, u holda bu yechimlarning ixtiyoriy $\sum_{j=1}^{m} C_j y_j(x)$ chiziqli kombinasiyasi ham (4.2) tenglamaning yechimi bo'ladi.

4.2-Teorema. $y(x) = u(x) + iv(x)$ funksiya (4.2) differensial tenglamaning yechimi bo'lishi uchun, $\operatorname{Re} y(x) = u(x)$ va $\operatorname{Im} y(x) = v(x)$ funksiyalar alohida –alohida (4.2) tenglamaning yechimlari bol'ishi zarur va yetarli.

2-*Misol*. a) Tekshirib ko'rish orqali ishonch hosil qilish mumkin-ki, $y_1 = e^x$ va $y_2 = e^{-x}$ funksiyalar $y'' - y = 0$ tenglamaning yechimlari, demak **4.1-Teorema** ga asosan ixtiyoriy c_1 va c_2 lar uchun $y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1e^x + c_2e^{-x}$ funksiya ham berilgan tenglama yechimi bo'ladi.

b) Ravshanki $y=\cos 2x+i\sin 2x$ funksiya $y''+4y=0$ tenglamani qanoatlantiradi, demak **4.2-Teorema** ga asosan $y_1=\cos 2x$ va $y_2=\sin 2x$ funksiyalar ham berilgan tenglama yechimi bo'ladi.

Eslatma. *Chiziqli tenglamaning har qanday yechimi uning xususiy yechimi bo'ladi, ya'ni (4.2) tenglama maxsus yechimga ega emas.*

4.2-Ta'rif. Agar n ta $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ bir xil vaqtda nolga teng bo'lmagan $\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2>0\right)$ sonlar mavjud bo'lib, biror $[a,b]$ oraliqda barcha x lar uchun

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\alpha_3 y_3(x)+...+\alpha_n y_n(x)=0,\ x\in[a,b] \qquad (4.3)$$

ayniy munosabat bajarilsa, $y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar sistemasi $[a,b]$ da **chiziqli bog'liq** deyiladi, agar (4.3) tenglik faqat $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_n=0$ da bajarilsa, u holda $y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x)$ funksiyalar sistemasi $[a,b]$ da **chiziqli erli (bog'liqsiz)** deyiladi.

3-*Misol*. $y_1(x)=x, y_2(x)=2x, y_3(x)=3x, ..., y_n(x)=nx$ funksiyalar $x\in R$ da chiziqli bog'liqli ekanligini ko'rsating.

Yechish. **4.2-Ta'rifga** asosan shunday $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2>0\right)$ sonlar mavjud bo'lib, $x\in R$ da (4.3) tenglik bajarilisa berilgan funksialar chiziqli bog'liqli bo'ladi. Ravshanki $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$ sonlarning $\alpha_1=1, \alpha_2=1, \alpha_3=1, ...,$ $\alpha_{n-1}=1, \alpha_n=\dfrac{1-n}{2}$ qiymatlarida, $x+2x+3x+...+(n-1)x+\dfrac{1-n}{2}nx=0$ tenglik $x\in R$ dajariladi. Demak $y_1(x)=x, y_2(x)=2x, y_3(x)=3x, ..., y_n(x)=nx$ funksiyalar $x\in R$ da chiziqli bog'liqli bo'ladi.

4-*Misol*. $y_1(x)=x, y_2(x)=x^2, y_3(x)=x^3, ..., y_n(x)=x^n$ funksiyalar $x\in R\setminus\{0\}$ da chiziqli erkli ekanligini ko'rsating.

Yechish. **4.2-Ta'rifga** asosan (4.3) tenglik faqat $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_n=0$ da bajarilisa berilgan funksialar chiziqli erkli bo'ladi. Ma'lumki $\alpha_i\neq 0\ (i=1,...,n)$ da

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\alpha_3 y_3(x)+...+\alpha_n y_n(x)=\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+...+\alpha_n x^n$$

ko'phadning hech bo'lmaganda ikkita hadi $(x\neq 0\text{da})$ o'xshash bo'lmaydi, o'xshash bo'lmagan hadlar esa ixchamlanmaydi, ya'ni (4.3) tenglik $x\in R\setminus\{0\}$ da bajarilmaydi, demak

$y_1(x)=x, y_2(x)=x^2, y_3(x)=x^3,..., y_n(x)=x^n$ funksiyalar $x\in R\setminus\{0\}$ da chiziqli erkli bo'ladi.

4.3-Ta'rif. (4.2) birjinsli tenglamaning n ta $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$ chiziqli erkli xususiy yechimlari sistemasi, (4.2) birjinsli tenglamaning **fundamental yechimlari sistemasi** deyiladi, fundamental yechimlar sistemasi $x=x_0\left(x_0\in[a,b]\right)$ da normal tipda deyiladi, agar

$$\begin{array}{c} y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0,\ y_1''(x_0)=0,...,\ y_1^{(n-1)}(x_0)=0 \\ y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1,\ y_2''(x_0)=0,...,\ y_2^{(n-1)}(x_0)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0,\ y_n''(x_0)=0,...,\ y_n^{(n-1)}(x_0)=1 \end{array} \qquad (4.4)$$

bajarilsa.

Eslatma. *Agar (4.2) tenglamaning* $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$ *fundamental yechimlari sistemasi ma'lum bo'lsa, u holda (4.2) tenglamaning* $D=\{(x,y): a<x<b, |y|<+\infty, |y'|<+\infty,...,|y^{(n-1)}|<+\infty\}$ *sohadagi umumiy yechimi*

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+C_3y_3(x)+...+C_ny_n(x) \qquad (4.5)$$

formula orqali topiladi, bu yerda $C_1,C_2,C_3,...,C_n$ *- ixtiyoriy o'zgarmaslar*.

5-*Misol.* $y^{(n)}=0$ tenglamaning $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x, y_3(x)=\frac{x^2}{2!}$, $y_4(x)=\frac{x^3}{3!},...,\ y_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ xususiy yechimlari sistemasi $x=0$ da normal tipda fundamental yechimlar sistemasi ekanini ko'rsating.

Yechish. Berilgan xususiy yechimlar sistemasi fundamental sistema ekani ravshan (4-misolga qarang). Demak (4.4) bajarilishini tekshirish yetarli.

$$\begin{array}{c} y_1(0)=1,\ y_1'(0)=0,\ y_1''(0)=0,...,\ y_1^{(n-1)}(0)=0 \\ y_2(0)=0,\ y_2'(0)=1,\ y_2''(0)=0,...,\ y_2^{(n-1)}(0)=0 \\ y_3(0)=0,\ y_3'(0)=0,\ y_3''(0)=\dfrac{2}{2!}=1,...,\ y_3^{(n-1)}(0)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(0)=0,\ y_n'(0)=0,\ y_n''(0)=0,...,\ y_n^{(n-1)}(0)=\dfrac{(n-1)(n-2)\cdot...\cdot2\cdot1}{(n-1)!}=1 \end{array}$$

(4.4) bajarildi, demak $y_1(x)=1,\ y_2(x)=x, y_3(x)=\frac{x^2}{2!}, y_4(x)=\frac{x^3}{3!},...,$ $y_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ fundamental yechimlar sistemasi $x=0$ da normal tipda bo'ladi.

4.2. Funksiyalarning chiziqli bog'liqlik va chiziqli erklilik sharti.

4.3-Ta'rif. Agar $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda n-1 marta differersiallanuvchi, ya'ni $y_i(x) \in C^{n-1}(a,b), (i=\overline{1,n})$ bo'lsa , u holda shu funksiyalardan tuzilgan

$$W(y_1, y_2, y_3,..., y_n) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \; ... \; y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) \; ... \; y_n'(x) \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... \; y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (4.6)$$

determinantga **Vronskiy[1] determinanti** yoki **Vronskian** deyiladi.

4.3-Teorema. (a,b) oraliqda (n-1)- tartibgacha ((n-1) – *tartib ham kiradi*) uzliksiz hosilalarga ega bo'lgan $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$ funksiyalar (a,b)da chiziqli erkli bo'lishi uchun, shu funksiyaldan tuzilgan vronskian (a,b) oraliqdan olingan hech bo'lmagan bitta qiymatida noldan farqli bo'lishi ya'ni $W(x) \equiv W(y_1, y_2, y_3,..., y_n) \neq 0, \; \left(x \in (a,b)\right)$ bo'lishi yetarli.

6-*Misol*. Agar $y_1(x) = e^{kx}$, $y_2(x) = e^{nx}$ funksiyalar $k \neq n$ da chiziqli erkli bo'lishini ko'rsating.

Yechish. $y_1(x) = e^{kx}$, $y_2(x) = e^{nx}$, $y_1(x) = ke^{kx}$, $y_2(x) = ne^{nx}$.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{kx} & e^{nx} \\ ke^{kx} & ne^{nx} \end{vmatrix} = ne^{(k+n)x} - ke^{(k+n)x} = (n-k)e^{(k+n)x}$$

Demak barcha $x \neq 0$ qiymatlarda va $k \neq n$ da $W(y_1, y_2) \neq 0$ bo'ladi, ya'ni $y_1(x) = e^{kx}$, $y_2(x) = e^{nx}$ funksiyalar $k \neq n$ da chiziqli erkli.

4.4-Teorema. (a,b) oraliqda (n-1)- tartibgacha ((n-1) – *tartib ham kiradi*) uzliksiz hosilalarga ega bo'lgan $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$ funksiyalar (a,b)da chiziqli bog'liqli bo'lsa, u holda $W(x) \equiv W(y_1, y_2, y_3,..., y_n) = 0, \; \left(x \in (a,b)\right)$ bo'ladi.

7-*Misol*. $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$ funksiyalarning hech bo'lmaganda bittasi nolga teng bo'lsa, bu funsiyalar chiziqli bog'liq ekanini hamda $W(x) \equiv W(y_1, y_2, y_3,..., y_n) = 0, \; \left(x \in (a,b)\right)$ bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Faraz qilaylik $y_k(x) = 0, (1 \leq k \leq n, k \in N)$ bo'lsin, u holda shunday $\alpha_i = 0, (i \neq k, i = \overline{1,n})$, $\alpha_k \neq 0$ larni tanlaymizki, natijada $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 > 0$ bo'lib, (4.3) shart bajariladi. Demak $y_1(x), y_2(x), y_3(x),..., y_n(x)$

---

[1] Yuzef Vronskiy (1776-1853)-Polshalik matematik va faylasuf

funsiyalar $y_k(x)=0$da chiziqli bog'liq. Endi $W(x)\equiv W(y_1,y_2,y_3,...,y_n)$ ni hisoblaymiz.

$$W(y_1,y_2,y_3,...,y_n)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & y_k(x) & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & y_k'(x) & ... & y_n'(x) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & y_k^{(n-1)}(x) & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & ... & 0 & ... & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & ... & 0 & ... & y_n'(x) \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & ... & 0 & ... & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}=0$$

4.5-Teorema. (4.2) tenglamaning $y_1(x),y_2(x),y_3(x),...,y_n(x)$ yechimlari (a,b) oraliqda chiziqli erkli bo'lishi uchun, $W(x)\equiv W(y_1,y_2,y_3,...,y_n)\neq 0,\ (\forall x\in(a,b))$ bo'lishi zarur va yetarli.

8-*Misol*. $y^{IV}-y=0$ tenlamaning $y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=e^{-x},\ y_3(x)=\cos x,\ y_4(x)=\sin x$ yechimlaridan iborat sistema berilgan tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo'lishini isbotlang.

Yechish. 4.3 ta'rifga asosan $y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=e^{-x},\ y_3(x)=\cos x,$ $y_4(x)=\sin x$ funksiyalar berilgan tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo'lishini uchun bu funksiyalar chiziqli erkli bo'lishi kerak, buning uchun esa 4.5-teoremaga asosan $W(x)\equiv W(y_1,y_2,y_3,y_4)\neq 0,\ (\forall x\in R)$ bo'lishi zarur va yetarli. (4.6) formula bo'yicha $W(y_1,y_2,y_3,y_4)$ ni hisoblaymiz:

$$W(y_1,y_2,y_3,y_4)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ e^x & e^{-x} & -\cos x & -\sin x \\ e^x & -e^{-x} & \sin x & -\cos x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & \cos x & \sin x \\ e^x & -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ 2e^x & 2e^{-x} & 0 & 0 \\ 4e^x & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-4e^x\begin{vmatrix} e^{-x} & \cos x & \sin x \\ -e^{-x} & -\sin x & \cos x \\ 2e^{-x} & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=-8\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=-8\neq 0$$

Demak $y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ y_4(x)$ funksiyalar sistemasi chiziqli erkli, ya'ni $y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=e^{-x},\ y_3(x)=\cos x,\ y_4(x)=\sin x$ yechimlaridan iborat sistema berilgan tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi bo'ladi.

Eslatma. Agar n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning y_1 xususiy yechimi berilgan bo'lsa, $y=y_1\cdot z$, $z'=u$ almashtirishlar orqali tenglamani (chiziqliligini saqlagan holda) tartibini bittaga pasaytirish mumkin.

Agar $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ tenglamaning biror y_1 xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, quyidagi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx} \tag{4.7}$$

Ostragradskiy-Liuvill formulasi orqali y_1 xususiy yechim bilan chiziqli erkli bo'lgan y_2 ikkinchi xususiy yechim topiladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

Quyidagi funksiyalarni chiziqli erkli yoki chiziqli bo'liq ekanligini aniqlang (325-346).

325. $5,\ x,\ 3x^2$ **;**

326. $x,\ 2x,\ 3x^2$ **;**

327. $x+2,\ x-2$ **;**

328. $4-x,\ 2x+3,\ 6x+8$ **;**

329. $x^2+2x,\ 3x^2-1,\ x+4$ **;**

330. $\sqrt{x},\ \sqrt{x+1},\ \sqrt{x+2}$ **;**

331. $x,\ e^x,\ xe^x$ **;**

332. $0,\ x,\ e^x$ **;**

333. $2^x,\ 3^x,\ 6^x$ **;**

334. $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$ **;**

335. $e^x,\ e^{-x},\ e^{2x}$ **;**

336. $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$ **;**

337. $\sin x,\ \cos x,\ \cos 2x$ **;**

338. $\sin x,\ \sin(x+2),\ \cos(x-5)$ **;**

339. $1,\ \sin x,\ \cos 2x$ **;**

340. $5,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$ **;**

341. $\sin x,\ \cos x, \sin 2x$ **;**

342. $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$ **;**

343. $shx, chx,\ 2+e^x$ **;**

344. $x,\ |x|,\ 10x+\sqrt{100x^2}$ **;**

345. $1,\ arctgx,\ arcctgx$ **;**

346. $1,\ \arcsin x,\ \arccos x$ **;**

5-§. n-tartibli o'zgarmas koeffisiyentli chiziqli differensial tenglamalar.

5.1. Bir jinsli tenglamalar.

Quyidagi

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{5.1}$$

tenglamani qaraylik,

bu yerda $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ - haqiqiy o'zgarmas sonlar. Bu tenglamaning $y_1(x), y_2(x), y_3(x), ..., y_n(x)$ fundamental yechimlar sistemasi aniqlansa, (5.1) tenglama umumiy yechimi (4.5) formula orqali yoziladi.

Quyida biz, fundamental yechimlar sistemasini qurishning Eyler[2] usuliga to'xtalamiz:

(5.1) tenglamaning xususiy yechimini

$$y = e^{kx} \ (k = const) \tag{5.2}$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda k- topish talab qilinadigan haqiqiy yoki kompleks son. (5.2) funksiyani (5.1) tenglamaga qo'yib,

$$k^n + a_1 k^{(n-1)} + a_2 k^{(n-2)} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0 \tag{5.3}$$

algebraik tenglamani hosil qilamiz. (5.3) tenglamaga, (5.1) tenglamaning ***xarakterisik tenglamasi***, uning yechimlariga esa ***xarakteristik sonlari*** deyiladi.

Demak (5.1) tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi va unga mos umumiy yechimi (5.3) xarakteristik tenglamaning ildizlariga (yechimlariga) bog'liq.

Quyidagi to'rtta holga bo'linadi:

1. ***Xarakteristik tenglamaning ildizlari turli va haqiqiy*.**

Xarakteristik tenglamaning ildizlarii $k_1, k_2, ..., k_{n-1}, k_n$ bo'lsin, u holda (5.2) ga asosan fundamental yechimlar sistemasi $y_1 = e^{k_1 x}, \ y_2 = e^{k_2 x}, ..., y_n = e^{k_n x}$ unga mos umumiy yechim esa

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + ... + C_n e^{k_n x} \tag{5.4}$$

ko'rinishda bo'ladi.

1-*Misol*. $y''' - 5y'' + 6y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama yechimini (5.2) ko'rinishda izlab, $k^3 - 5k^2 + 6k = 0$ xarakteristik tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglama yechimlari, yani xarakteristik sonlari $k_1 = 0, k_2 = 2$ va $k_3 = 3$ ga teng bo'lgan turli haqiqiy sonlardan iborat.

Demak berilgan tenglama umumiy yechimi, (5.4) ga asosan

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

bo'ladi.

2. ***Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va ular orasida karralisi ham bo'lsin.***

Xarakteristik tenglamaning ildizlarii $k_1, k_2, ..., k_{n-1}, k_n$ bo'lib, $m \le n$ tasi karrali ya'ni $k_1 = k_2 =, ..., = k_m = \overline{k}, (m \le n)$, $n - m$ tasi turli bo'lsin. U holda $y_1 = y_2 = ... = y_m = e^{\overline{k}x}$ funksiyalar chiziqli bog'liqli bo'ladi.

[2] Eyler

Demak $y_2, y_3, ..., y_m$ funksiyalarni, $y_1 = e^{\bar{k}x}$ funksiyaga mos $y_2 = xe^{\bar{k}x}$, $y_3 = x^2 e^{\bar{k}x}, ..., y_m = x^{m-1}e^{\bar{k}x}$ ko'rinishda chiziqli erkli bo'ladigan qilib tanlaymiz, ya'ni (5.1) tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi $e^{\bar{k}x}, xe^{\bar{k}x}, x^2 e^{\bar{k}x}, ..., x^{m-1}e^{\bar{k}x}, e^{k_{m+1}x}, e^{k_{m+2}x}, ..., e^{k_n x}$ unga mos umumiy yechim esa

$$y = e^{\bar{k}x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + ... + C_m x^{m-1}) + C_{m+1} e^{k_{m+1}x} + C_{m+2} e^{k_{m+2}x} + ... + C_n e^{k_n x} \quad (5.5)$$

bo'ladi.

2-*Misol*. $y^V - 8y''' + 16y' = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamanig xarakteristik tenglamasi

$$k^5 - 8k^3 + 16k = 0$$

korinishga ega bo'lib. bu tenglama yechimlari, $k_1 = 0, k_{2/3} = -2$ va $k_{4/5} = 2$ ga teng bo'lgan 2 ta ikki karrali (-2 va 2 ikkik karrali ildizlar) va 1 ta bir karrali (0 bir karrali ildiz) haqiqiy sonlardan iborat.

Demak (5.5) formulaga asosan berilgan tenglama umumiy yechimi

$$y = C_1 + e^{-2x}(C_2 + C_3 x) + e^{2x}(C_4 + C_5 x)$$

bo'ladi.

3. ***Xarakteristik tenglamaning ildizlari turliva ular orasida kompleks sonlar ham bo'lsin.***

Faraz qilaylik $k_1 = a + ib$ kompleks son xarakteristik tenglama ildizi bo'lsin, u holda, ma'lumki ((5.1) tenglama koeffisiyentlari haqiqiy sonlar bo'lgani uchun) $k_2 = a - ib$ kompleks son ham xarakteristik tenglama ildizi bo'ladi. (5.2) ga asosan $y = e^{k_1 x} = e^{ax - ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$ funksiya (5.1) tenglama xususiy yechimi bo'ladi, demak **4.2 teorema**ga asosan $y_1 = e^{ax}\cos bx$ va $y_2 = e^{ax}\sin bx$ funksiyalar ham (5.1) tenglama xususiy yechimlari bo'ladi. Xulosa qilib shuni takidlash mumkinki, (5.1) tenglamaning $k_{1/2} = a \pm ib$ xarakteristik sonlariga mos chiziqli erkli xususiy yechimlari $y_1 = e^{ax}\cos bx$ va $y_2 = e^{ax}\sin bx$ bo'ladi.

(4.5) va (5.2) ga asosan (5.3) xarakteristik tenglamaning $k_{1/2} = a_1 \pm ib_1, k_{3/4} = a_2 \pm ib_2, ...$ kompleks va $k_m, k_{m+1}, ..., k_{n-1}, k_n$ turli haqiqiy ildizlariga mos (5.1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{a_1 x}(C_1 \cos b_1 x + C_2 \sin b_1 x) + e^{a_2 x}(C_3 \cos b_2 x + C_4 \sin b_2 x) + ... +$$
$$+ C_m e^{k_m x} + C_{m+1} e^{k_{m+1}x} ... + C_n e^{k_n x} \quad (5.6)$$

bo'ladi.

3-*Misol*. $y^{IV}+4y'''+12y''-4y'-13y=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamanig xarakteristik tenglamasi

$$k^4+4k^3+12k^2-4k-13=(k^2+4k+13)(k^2-1)=0$$

bo'ladi. Bu tenglamani yechib, $k_{1/2}=-2\pm 3i$ 2 ta kompleks va $k_3=-1, k_4=1$ bo'lga ikkita haqiqiy xarakteristik sonlarni topamiz. Berilgan tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi $e^{-2x}\cos 3x$, $e^{-2x}\sin 3x$, e^{-x} va e^x bo'lib, unga mos umumiy yechim

$$y=e^{-2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+C_3e^{-x}+C_4e^x$$

bo'ladi.

4. ***Xarakteristik tenglamaning*** $k=a\pm ib$ ***ildizi*** $m\le\frac{n}{2}$ ***karrali bo'lsin.***

Bu holda (ikkinchi va uchinchi hollarga asosan) (5.1) tenglamaning fundamental yechimlar sistemasi

$$e^{ax}\cos bx,\ e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx,$$
$$x^{m-1}e^{ax}\sin bx,$$
$$e^{k_{2m+1}x},\ e^{k_{2m+2}x},\ldots,e^{k_nx} \tag{5.7}$$

unga mos umumiy yechim esa

$$y=e^{ax}(C_1+C_2x+C_3x^2+\ldots+C_mx^{m-1})\cos bx+$$
$$+e^{ax}(C_{m+1}+C_{m+2}x+\ldots+C_{2m}x^{m-1})\sin bx+C_{2m+1}e^{k_{2m+1}x}+\ldots+C_ne^{k_nx} \tag{5.8}$$

bo'ladi.

4-*Misol*. $y^{VII}+3y^V+3y'''+y'=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamanig xarakteristik tenglamasi

$$k(k^6+3k^4+3k^2+1)=0 \text{ ya'ni } k(k^2+1)^3=0$$

ko'rinishga ega bo'lib, unga mos xarakteristik sonlar $k_1=0,\ k_{2/3}=k_{4/5}=k_{6/7}=\pm i$ bo'ladi. Berilgan tenglamaning fundamental yechimlari sistemasi ((5.7) ga asosan)

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ x\cos x,\ x\sin x,\ x^2\cos x,\ x^2\sin x$$

bo'lib, unga mos umumiy yechim

$$y=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x+C_4x\cos x+C_5x\sin x+C_6x^2\cos x+C_7x^2\sin x$$

bo'ladi.

5.2. Maxsus o'ng tomonli tenglamalar.

4.6-Teoremaga asosan (4.1) tenglamaning $y(x)$ umumiy yechimi, (4.7) ko'rinishda bo'ladi. Demak (4.1) tenglamani integrallash uchun, uning biror xususiy yechimini aniqlaymiz va (5.8) formula orqali (4.1) tenglamaning umumiy yechimini topamiz. (4.1) tenglamaning $\tilde{y}(x)$ xususiy yechimini topish, uning o'ng tomonidagi $f(x)$ funksiya ko'rinishiga qarab aniqlanadi. Agar o'ng tomon maxsus

$$f(x)=e^{ax}(P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx) \qquad (5.9)$$

ko'rinisgda bo'lsa, (*bu yerda* $P_n(x)$ *va* $Q_m(x)$ *mos ravishda n- va m-tartibli polinomlar*) u holda (4.1) tenglamaning biror $\tilde{y}(x)$ xususiy yechimini

$$\tilde{y}(x)=x^s e^{ax}(\tilde{P}_l(x)\cos bx+\tilde{Q}_l(x)\sin bx) \qquad (5.10)$$

ko'rinishda izlaymiz, bu yerda $l=\max(m,n)$, $\tilde{P}_l(x)$ va $\tilde{Q}_l(x)$ esa *l*-tartibli, koeffisiyentlari noma'lum bo'lgan ko'phad, *s*-(5.3) xarakteristik tenglamaning $k=a\pm ib$ ildizlarining karralilik darajasi (agar $a\pm ib$ son (5.3) tenglama ildizi bo'lmasa *s*=0 bo'ladi).

Yechimlarning *superpozitsiya* printsipi:

Agar $y_i(x)$funksiya $Ly=f_i(x)$ $(i=1,2,...,m)$ tenglama yechimi bo'lsa, u holda

$y(x)=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i y_i(x)$ funksiya $Ly=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i f_i(x)$, $\gamma_i=const$ bir jinsli bo'lmagan tenglama yechimi bo'ladi .

Demak yuqoridagi printsipga asosan (4.1) tenglama o'ng tomoni

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i f_i(x) \qquad (5.11)$$

bo'lsa (*bu yerda* $f_i(x)$- (5.9) *korinshdagi funksiyalar*), u holda bu tenglama xususiy yechimi

$$\tilde{y}(x)=\sum_{i=1}^{m}\gamma_i \tilde{y}_i(x) \qquad (5.12)$$

korinishda izlanadi.

5-*Misol.* $y^V-16y'=\sin 2x$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaga mos xarakteristik tenglama ildizlari $k=0,\ k_{2/3}=\pm 2,\ k_{2/3}=\pm 2i$ bo'ladi, (4.7) ga asosan berilgan tenglama umumiy yechimi $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x+\tilde{y}(x)$ korinishda bo'ladi, bu yerda $\tilde{y}(x)$ berilgan tenglama xususiy yechimi. $f(x)=\sin 2x$ bo'lgani uchun (5.9) ga asosan $m=0,\ n=0,\ a=0,\ b=2$ ya'ni $k=\ k_{2/3}=\pm 2i$, demak *s*=1, $l=\max(m,n)=0$ bo'ladi, shunday qilib, (5.10) ga asosan xususiy yechim,

$\tilde{y}(x)=Ax\sin 2x$ ko'rinishda izlanadi.

$$\tilde{y}'(x)=A(\sin 2x+2x\cos 2x);$$

$$\tilde{y}''(x)=4A(\cos 2x - x\sin 2x)\,,\quad \tilde{y}'''(x)=-4A(3\sin 2x+2x\cos 2x)\,;$$
$$\tilde{y}^{IV}(x)=-8A(5\cos 2x-2x\sin 2x)\,,\quad \tilde{y}^{V}(x)=32A(3\sin 2x+x\cos 2x)\,.$$
Topilgan hosilalarni berilgan tenglamaga qo'yib, $A=\dfrac{1}{80}$ ni topamiz. Shunday qilib, berilgan tenglama xususiy yechimi $\tilde{y}(x)=\dfrac{1}{80}x\sin 2x$, umumiy yechimi esa
$$y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x+\frac{1}{80}x\sin 2x \text{ bo'ladi.}$$
6-*Misol.* $y'''-2y''+2y'=e^x\sin x+e^{-x}$ tenglamani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamaning xarakteristik sonlari $k=0,\, k_{2/3}=1\pm i$ bo'ladi, ya'ni (4.7) va (5.12) ga asosan berilgan tenglama umumiy yechimi $y=C_1+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)+\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)$ korinishda bo'ladi, bu yerda $\tilde{y}_1(x)$ va $\tilde{y}_2(x)$ funksiyalar mos ravishda $y'''-2y''+2y'=e^x\sin x$ va $y'''-2y''+2y'=e^{-x}$ tenglamalarning xususiy yechimlari. $f_1(x)+f_2(x)=e^x\sin x+e^{-x}$ funksiyaga mos xususiy yechimni (5.10) ga asosan $\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)=xe^x(A\sin x+B\cos x)+Ce^{-x}$ ko'rinishda izlaymiz. Izlanayotgan xususiy yechimdagi noma'lum koeffisiyentni topish uchun, undan kerakli tartibli hosilalarini hisoblab:
$$\tilde{y}_1'(x)+\tilde{y}_2'(x)=e^x(A\sin x+B\cos x)+xe^x((A-B)\sin x+(A+B)\cos x)-Ce^{-x}$$
$$\tilde{y}_1''(x)+\tilde{y}_2''(x)=e^x((2A-B)\sin x+(A+2B)\cos x)+xe^x(-2B\sin x+2A\cos x)+Ce^{-x}$$
$$\tilde{y}_1'''(x)+\tilde{y}_2'''(x)=e^x((2A-3B)\sin x+(3A+2B)\cos x)+xe^x(-2(A+B)\sin x+2(A-B)\cos x)-Ce^{-x}$$
berilgan tenglamaga qo'yamiz:
$$e^x(-B\sin x+A\cos x)-5Ce^{-x}=e^x\sin x+e^{-x},\quad \text{demak}\quad A=0,\ B=-1,\ C=-\frac{1}{5}$$
bo'ladi, ya'ni $\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)=-xe^x\cos x-\dfrac{1}{5}e^{-x}$ bo'ladi, umumiy yechim esa
$$y=C_1+e^x(C_2\cos x+C_3\sin x)-xe^x\cos x-\frac{1}{5}e^{-x}\,.$$

5.3. Ixtiyoriy o'ng tomonli tenglamalarni yechish (*o'zgarmasni variatsiyalash usuli*).

4.6-Teorema. (4.1) tenglamaning $y(x)$ umumiy yechimi, (4.2) tenglamaning $y_0(x)$ umumiy yechimi va (4.1) tenglamaning biror $\tilde{y}(x)$ xususiy yechimi yigindisidan iborat bo'ladi, ya'ni $y(x)=y_0(x)+\tilde{y}(x)$.

Faraz qilaylik, (4.2) tenglamaning fundamental sistemasi mavjud bo’lsin, u holda (4.1) tenglamaning umumiy yechimini o’garmasni variatsiyalash usuli bilan mumkin. (4.2) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) + ... + C_n y_n(x)$$

korinishda bo’lsin, u holda (4.1) tenglama umumi yechimini quyidagi ko’rinishda izlaymiz:

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + C_3(x) y_3 + ... + C_n(x) y_n \qquad (5.13)$$

Bu yerda $C_1(x), C_2(x), ..., C_{n-1}(x), C_n(x)$ - topishi talab qilinadigan noma’lum funksiyalar. (5.13) ni (4.1) ga qo’yib, noma’lum $C_1(x), C_2(x), ..., C_{n-1}(x), C_n(x)$ larni topamiz. Buning uchun quyidagi sistemanini tuzib olamiz:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 + C_3' y_3 + ... + C_n' y_n = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + C_3' y_3' + ... + C_n' y_n' = 0 \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + C_3' y_3'' + ... + C_n' y_n'' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + C_3' y_3^{(n-1)} + ... + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \qquad (5.14)$$

(5.14) sistemani yechib, $C_1(x), C_2(x), ..., C_{n-1}(x), C_n(x)$ funksiyalarni $C_i(x) = \varphi_i(x) + \tilde{C}_i$, ($i$=1.$n$) korinishda topamiz va topilganlarni (5.13) qo’yib, (4.1) tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

7-*Misol*. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{1}{x}$ tenglamaga mos birjinsli tenglama umumiy yechimi $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$ bo’lsa berilgan tenglama umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglama umumiy yechimini, (5.13) ga ko’ra $y = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{4x}$ ko’rinishda izlaymiz. (5.14) ga asosan quyidagi sistemani tuzib olamiz:

$$\begin{cases} C_1'(x) e^x + C_2'(x) e^{4x} = 0 \\ C_1'(x) e^x + 4C_2'(x) e^{4x} = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Sistemani yechib, $C_1'(x) = \dfrac{e^{-x}}{3x}$; $C_2'(x) = -\dfrac{e^{-4x}}{3x}$, ya’ni $C_1(x) = \int \dfrac{e^{-x}}{3x} dx + \tilde{C}_1$ va $C_2(x) = \int \dfrac{e^{-4x}}{3x} dx + \tilde{C}_2$ larni topamiz. Demak berilgan tenglama umumiy yechimi $y = \tilde{C}_1 e^x + \tilde{C}_2 e^{4x} + \dfrac{e^x}{3} \int \dfrac{e^{-x}}{x} dx - \dfrac{e^{4x}}{3} \int \dfrac{e^{-4x}}{x} dx$ bo’ladi.

5.4. O’zgarmas koeffisiyentli chiziqli tenglamaga keladigan tenglamalar.

1-Ta’rif. Ushbu

$$(kx+b)^n y^{(n)} + a_{n-1}(kx+b)^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1(kx+b)y' + a_0 y = f(x) \quad (5.15)$$

ko’rinishdagi tenglamaga **Lagranj tenglamasi** deyiladi, bu yerda $k, b, a_i \ (i = 0,1,2,...,n-1)$-berilgan sonlar.

Quyidagi $kx + b = \pm e^t$ almashtirishdan keyin, (5.15) tenglama, o’zgarmas koeffisiyentli bir jinsli tenglamaga keladi.

(5.15) tenglamaning $k = 1,\ b = 0$ bo’lgan holi, ya’ni

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_1 xy' + a_0 y = f(x) \quad (5.16)$$

ko’rinishdagi tenglama **Eyler tenglamasi** deb yuritiladi, bu tenglama $x = e^t$ almashtirish orqali, xarakteristik tenglamasi

$$\lambda(\lambda-1)\cdot ...\cdot(\lambda-n+1) + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\cdot ...\cdot(\lambda-n+2) + ... +$$
$$+a_2\lambda(\lambda-1) + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (\lambda = const) \quad (5.17)$$

ko’rinishda bo’lgan o’zgarmas koeffisiyentli bir jinsli tenglamaga keladi.

Eslatma. (5.16) *tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning xususiy yechimlarini* $y = x^{\lambda}\ (\lambda = const)$ *ko’rinishda izlanadi*, *va* (5.17) *ko’rinishdagi xarakteristik tenglama hosil qilinadi.*

7-*Misol*. $x^2 y'' - 2y = \sin\ln x$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamada $x = e^t$ (t parametr) almashtirish bajarib,

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = e^{-t}y'_t, \quad y'' = \frac{\left(e^{-t}y'_t\right)'_t}{x'_t} = \frac{\left(y''_t - y'_t\right)e^{-t}}{x'_t} = \left(y''_t - y'_t\right)e^{-2t}$$

xosilalarni xisoblab, berilgan tenglamaga qo’yamiz va $y''_t - y'_t - 2y = \sin t$ tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglamaning xarakteristik tenglamasi $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ ko’rinishga ega bo’lib, bu tenglama yechimlari $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ bo’ladi. Demak mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi $y_0 = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$ bo’ladi. Ma’lumki o’ng tomonli tenglama xususiy yechimi uning o’ng tomonidagi funksiya qarab, $\tilde{y} = A\sin t + B\cos t$ ko’rinishda izlanadi. Izlanayotgan xususiy yechimning kerakli xosilalarini olib, tegishli tenglamaga qo’ysak, noma’lum koeffisiyentlarning $A = -\frac{3}{10};\ B = \frac{1}{10}$ qiymatlarini topamiz, ya’ni berigan tenglama umumiy yechimi $y(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t} - \frac{3}{10}\sin t + \frac{1}{10}\cos t$ bo’ladi, yoki $x = e^t$, $t = \ln x$ almashtirishlarga asosan berilgan tenglama umumiy yechimi

$y(x) = C_1\dfrac{1}{x} + C_2x^2 - \dfrac{3}{10}\sin\ln x + \dfrac{1}{10}\cos\ln x$ ko'rinishda bo'ladi.

8-*Misol*. $2(2x+1)^2y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamaning xususiy yechimlarini $y = (2x+1)^{\lambda}$ ($\lambda = const$) ko'rinishda izlaymiz, va $8\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2 = 0$ ya'ni $4\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$ ko'rinishga ega bo'lgan xarakteristik tenglamani xosil qilamiz. Bu tenglamaning yechimlari $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = \dfrac{1}{4}$ bo'lib, berilgan tenglama umumiy yechimi esa $y(x) = C_1(2x+1) + C_2(2x+1)^{1/4}$ bo'ladi.

2-Ta'rif. Ushbu

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0 \quad (\lambda = const) \tag{5.18}$$

ko'rinishdagi tenglamaga **Chebishev[3] tenglamasi** deyiladi.

Bu tenglama, $|x| \le 1$ da $x = \cos t\ (t \in (0,\pi))$ almashtirish natijasida $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \lambda^2 y = 0$ ko'rinishga, $x < -1$ da $x = -cht$ ($x > 1$ da $x = cht$) almashtirish natijasida $\dfrac{d^2y}{dt^2} - \lambda^2 y = 0$ ko'rinishga ega bo'lgan o'zgarmas koeffisiyentli bir jinsli tenglamaga keladi.

9-*Misol*. $(1-x^2)y'' - xy' + 4y = 0,\ |x| < 1$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Berilgan tenglamada $x = \cos t\ (t \in (0,\pi))$ almashtirish bajaramiz.

$$y' = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{y'_t}{\sin t}, \qquad y'' = \frac{\left(-\dfrac{y'_t}{\sin t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{(y''_t - y'_t ctgt)}{\sin^2 t}$$

xosilalarni berilgan tenglamaga qo'yib va $x = \cos t$ almashtirishni etiborga olib,

$(1-\cos^2 t)\dfrac{y''_t - y'_t ctgt}{\sin^2 t} + \dfrac{y'_t \cos t}{\sin t} + 4y = 0$ ya'ni $y''_t + 4y = 0$ tenglamani olamiz.

[3] Chebishev

Ma'lumki oxirgi tenglama, o'zgarmas koeffisiyentli bir jinsli tenglama bo'lib, uning umumiy yechimi $y(t)=C_1\sin 2t+C_2\cos 2t$, ya'ni berilgan tenglama umumiy yechimi (*almashtirishga asosan*)

$$y(x)=C_1\sin(2\arccos x)+C_2\cos(2\arccos x)=2C_1x\sqrt{1-x^2}+C_2(2x^2-1)$$

bo'ladi, bu yerda $|x|<1$.

10-*Misol*. Quyidagi Koshi masalasini yeching:

$$(1-x^2)y''-xy'+y=0;\quad y\left(\sqrt{5}\right)=1,\quad y'\left(\sqrt{5}\right)=0.$$

Yechish. Avval berilgan tenglama umumiy yechimini topamiz, buning uchun ($\sqrt{5}>1$, ya'ni $x>1$) $x=cht$ almashtirish bajarib, berilgan tenglamani $y''_t-y=0$ ko'rinishga keltiramiz. Demak berilgan tenglama umumiy yechimi $y(t)=C_1e^t+C_2e^{-t}$ yoki $y(t)=C_1cht+C_2sht$. Demak ($x=cht$ almashtirishga asosan) $y(x)=C_1x+C_2\sqrt{x^2-1}$ funksiya berilgan tenglama umumiy yechimi bo'ladi. Endi Koshi shartlarini qanoatlantiramiz:

$$\begin{cases} y\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}C_1+2C_2=1 \\ y'\left(\sqrt{5}\right)=C_1+\dfrac{\sqrt{5}}{2}C_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{5}C_1=1-2C_2 \\ C_1=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=-2 \\ C_1=\sqrt{5} \end{cases}$$

Demak Koshi masalasining yechimi $y(x)=\sqrt{5}x-2\sqrt{x^2-1}$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

Quyidagi tenglamalarni yeching (357-378):

357. $y''-y'-2y=0$;

358. $y'''-5y''-6y'=0$;

359. $y''-4y=0$;

360. $y'''+2y''-y'-2y=0$;

361. $y'''+6y''+11y'+6y=0$;

362. $y''-4y'+3y=0,$
$y(0)=6,\ y'(0)=10$

363. $y^{IV}-10y''+9y=0$;

364. $2y''-3y'+y=0,$
$y(0)=1,\ y'(0)=1$;

365. $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$;

366. $y'''-3y''+3y'-y=0$;

367. $y^{X}=0$;

368. $y^{IV}-8y'''+16y''=0$;

369. $y^{VI}+6y^{V}+9y^{IV}=0$;

370. $y^{IV}-2y''+y=0$;

371. $y''-y'+2y=0$;

372. $y''+y=0$;

373. $y'''-2y''+2y'=0$;

374. $y'''+27y=0$;

375. $y^{IV}-16y=0$;

376. $y^{VI}-y=0$;

377. $y^{V}-2y'''+2y'=0$;

378. $y'''+y''+y'+y=0$,
$y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=1.$

Quyidagi maxsus o'ng tomonli tenglamalarni yeching (379-392):

379. $y'' - 2y' + y = 4e^x$

380. $y'' + y = 4xe^x$

381. $y'' + 4y = \sin 2x$

382. $y'' + y = 4x\cos x$

383. $y^{IV} + 2y'' + y = \cos x$

384. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$

385. $y^{IV} - y = 5e^x \sin x$

386. $y^{IV} - 8y' = xe^{2x}$

387. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$

388. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^x$

389. $y'' + y = \cos x + \cos 2x$

390. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

391. $y'' - 3y' = e^{3x} - 18x$

392. $y'' - 5y' = \sin 5x + 3x^2$

Quyidagi tenglamalarning xususiy yechimlarini qanday ko'rinishda izlanishini aniqlang (393-412):

393. $y'' + 3y' = 3$

394. $y'' + 3y' = e^x$

395. $y'' + 7y' = e^{-7x}$

396. $4y'' - 3y' = xe^{\frac{3}{4}x}$

397. $y'' - 4y' = xe^{4x}$

398. $y'' + 25y = cos5x$

399. $y'' + k^2 y = k$, $k = const$

400. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x$

401. $y^{IV} - y = 1$

402. $y''' + y'' = 3$

403. $y^{IV} - y''' = 4$

404. $y'' - 8y' + 16y = (1 - x)e^{4x}$

405. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$

406. $y'' - y' - 2y = e^x + e^{-2x}$

407. $y'' + y = \sin x - cosx$

408. $y'' + 16y = \sin(4x + a)$

409. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$

410. $y'' + 4y = \sin x \sin 2x$

411. $y'' - 4y' = 2\cos^2 4x$

412. $y'' - 6y' + 9y = 8^x$.

Quyidagi tenglamalarni o'zgarmasni variatsiyalash usuli orqali yeching (413-423).

413. $y'' + y + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

414. $y'' - y = \dfrac{2}{1 - e^{-x}}$;

415. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$;

416. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$;

417. $y'' + y = \dfrac{1}{x^2}$;

418. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{\sin x}$;

419. $y'' - y' = e^{2x}\cos e^x$;

420. $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$;
$y_1 = e^x$.

421. $y'' + y' + e^{-2x} y = e^{-3x}$;
$y_1 = \cos e^{-x}$.

422. $xy'' - y' + 4x^3 y = 16x^3 e^{x^2}$;

$y_1 = e^{x^2}, \quad y_1 = e^{-x^2}$.

423. $(1-x)y'' + xy' - y = (x-1)^2 e^x; \quad y_1 = e^x, \quad y = x$; $\quad y(-\infty) = 0, \; y(0) = 1$.

Quyidagi Eyler va Chebishev tenglamalarini integrallang. (424-439)

424. $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$;

425. $x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$;

426. $x^3 y''' + xy' - y = 0$;

427. $x^2 y''' - 2y' = 0$;

428. $x^3 y'' - xy' - 3y = 0$;

429. $xy''' + y'' = 0$;

430. $2(2x+1)^2 y'' - (2x+1) y' + 2y = 0$;

431. $(x+2)^2 y'' - 4(x+2) y' + 6y = 0$

432. $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x$;

433. $x^2 y''' + 8x^2 y'' + 12xy' = \ln x$;

434. $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x)$;

435. $(x+2)^3 y''' + 9(x+2)^2 y'' + 18(x+2) y' + 6y = \ln(x+2)$;

436. $\left(1-x^2\right) y'' - xy' + 9y = 0, \; (|x| < 1)$;

437. $\left(x^2-1\right) y'' + xy' - 16y = 0, \; (|x| > 1)$;

438. $\left(x^2-1\right) y'' + xy' - 2y = 0, \; (|x| > 1)$;

439. $\left(1-x^2\right) y'' - xy' + 4y = 0,$

6-§. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar. Chegaraviy masala.

Yuqori tartibli tenglamalar ichida

$$y'' + p_1(x) y' + p_2(x) y = 0 \tag{6.1}$$

ko'rinishdagi ikkinchi tartibli o'zgaruvchi koeffesiyentli chiziqli differensial tenglamalar, tadbiqi jixatidan muhim o'rin tutadi, bu yerda $p_1(x), p_2(x)$ funksiyalar (a,b) oraliqda berilgan uzluksiz funksiyalar. (6.1) ko'rinishdagi tenglamani

$$y = \exp\left(-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx\right) z(x)$$

almashtirish orqali,

$\frac{d^2z}{dx^2} + J(x)z = 0$ (kanonik) ko'rinishga keltirish mumkin, bu yerda $J(x) = p_2(x) - \frac{1}{2}p_1'(x) - \frac{1}{4}p_1^2(x)$ bo'lib, $p_1(x) \in C^1(a,b)$ talab qilanadi.

6.1. Tenglamani darajali qatorlar yordamida integrallash.

Amaliyotda uchraydigan muammolarni hal qilish ko'p hollarda

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6.2}$$

ko'rinishidagi tenglamalarni integrallashga keladi. Faraz qilaylik bu tenglamalarning $p(x)$ va $q(x)$ koeffisiyentlari darajali qatorlar yoki polinomlardan iborat bo'lsin, ya'ni

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i x^i, \quad q(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i x^i; \tag{6.3}$$

bu yerda $\alpha_i, \beta_i = const\ (i = 0,1,2,...)$ bo'lib, $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i^2 \neq 0,\ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i^2 \neq 0$. Demak (6.2) tenglamani

$$y'' + (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ...)y' + (\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ...)y = 0 \tag{6.4}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(6.4) tenglama yechimini

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \qquad a_i = const\ (i = 0,1,2,...) \tag{6.5}$$

darajali qator ko'rinishda izlanadi. (6.5) dagi $y(x)$ ni va uning hosilalarini (6.4) tenglamaga qo'yib, darajali qatorlarni ko'paytiramiz va x ning bir xil darajalari oldidagi koeffisiyentlarni nolga tenglaymiz va

$$\begin{array}{l|l} x^0: & 2\cdot 1 \cdot a_2 + \alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0 \\ x^1: & 3\cdot 2 \cdot a_3 + 2\alpha_0 a_2 + \alpha_1 a_1 + \beta_0 a_1 + \beta_1 a_0 = 0 \\ x^2: & 4\cdot 3 \cdot a_4 + 3\alpha_0 a_3 + 2\alpha_1 a_2 + \alpha_2 a_1 + \beta_0 a_2 + \beta_1 a_1 + \beta_1 a_0 = 0 \\ . & .... \\ . & .... \end{array} \tag{6.6}$$

tenglamalar majmuasiga ega bo'lamiz. Ma'lumki (6.5) tenglamalarning har biri ikkinchisidan boshlab, oldingi tenglamadan bitta ko'p noma'lumga ega, birinchi tenglamada a_0 va a_1 ixtiyoriy ozgarmaslar sifatida qabul qilinib, bu o'zgarmaslarning qiymatlaridan va (6.6) tenglamalardan $a_2, a_3, ...$ koeffisiyentlar topiladi, ya'ni a_0 va a_1 qiymatlari ma'lum bo'lsa, (6.6) dagi 1-tenglamadan a_2, 2-tenglamadan a_3 va hakozo $a_0, a_1, ..., a_k$ ma'lum bo'lganda (6.6) dagi *k*-

tenglamadan a_{k+1} topiladi. (6.2) yoki (6.4) tenglamaning chiziqli erkli ikkita yechimini aniqlashda, qulaylik uchun $a_0 = 0$ va $a_1 = 1$ tanlash orqali $y_1(x)$, hamda $a_0 = 1$ va $a_1 = 2$ tanlash orqali $y_2(x)$ chiziqli erkli yechimlarni olamiz.

6.1-Teorema. Agar (6.3) darajali qatorlar $|x| < R$ da yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda koeffisiyentlari yuqoridagi usulda aniqlangan (6.5) qator ham $|x| < R$ da yaqinlashuvchi va (6.2) yoki (6.4) tenglamaning yechimi bo'ladi.

1-*Misol*. $y'' + xy' + y = 0$ tenglamani darajali qatorlar yordamida integrallang.

Yechish. Berilgan tenglama yechimini (6.5) ko'rishda izlaymiz va

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad y' = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^{i-1}, \quad y'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2}$$

larni berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$\sum_{i=2}^{\infty} i(i-1) a_i x^{i-2} + \sum_{i=1}^{\infty} i a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = 0.$$

Endi esa noma'lum $a_i = const \ (i = 0,1,2,...)$ koeffisiyentlarni topish uchun x ning bir xil darajalari oldidagi koeffisiyentlarni nolga tenglaymiz va

$$\begin{array}{l|l} x^0: & 2\cdot 1 \cdot a_2 + a_0 = 0 \\ x^1: & 3\cdot 2 \cdot a_3 + 2a_1 = 0 \\ x^2: & 4\cdot 3 \cdot a_4 + 3a_2 = 0 \\ x^3: & 5\cdot 4 \cdot a_5 + 4a_3 = 0 \\ . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

tenglamalarni hosil qilamiz. Birinchi holda, soddalik uchun $a_0 = -2$ va $a_1 = 0$ bo'lsin deb olamiz. Hosil bo'lgan tenglamalarning birinchisidan $a_2 = 1$, ikkinchisidan esa $a_3 = 0$, aniqlangan a_2 va a_3 ning qiymatlaridan hamda hosil bo'lgan tenglamalarning uchunchisi va to'rtinchisidan $a_4 = -\frac{1}{4}$ va $a_5 = 0$. Demak bu holda yechim $y_1(x) = -2 + x^2 - \frac{x^4}{1\cdot 4} + \frac{x^6}{1\cdot 4\cdot 16} + ... = -2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{\prod_{i=0}^{k-1} 2^{2i}}$ ko'rinishda bo'ladi.

Ikkinchi holda, $a_0 = 0$ va $a_1 = -1$ bo'lsin, u holda birinchi tenglamadan $a_2 = 0$, ikkinchisidan esa $a_3 = \frac{1}{3}$. Aniqlangan a_2 va a_3 ning qiymatlaridan hamda uchunchi va to'rtinchi tenglamalardan $a_4 = 0$ va $a_5 = -\frac{1}{3 \cdot 5}$.

Demak ikkinchi yechim $y_2(x) = -x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{\prod_{i=0}^{k-1}(2i+1)}$.

Shunday qilib, berilgan tenglama umumiy yechimi

$$y(x) = C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k}}{\prod_{i=0}^{k-1} 2^{2i}} + C_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{\prod_{i=0}^{k-1}(2i+1)} - 2C_1 \text{ bo'ladi.}$$

1-Ta'rif. Ushbu

$$x^{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \ (a_0 \neq 0) \tag{6.7}$$

ko'rinishdagi qatorga, umumlashgan darajali qator deyiladi, ,u yerda ρ-berilgan son, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ darajali qator esa biror $|x| < R$ da yaqinlashuvchi. Ma'lumki, agar ρ-nomanfiy butun son bo'lsa (6.7) qator, darajali qator bo'ladi.

6.2-Teorema. Agar $x = x_0$ nuqta (6.2) tenglamaning maxsus nuqtasi bo'lib,

$$p(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x - x_0)^i}{x - x_0}, \quad q(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (x - x_0)^i}{(x - x_0)^2}; \tag{6.8}$$

(bu yerda $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (x - x_0)^i$ va $\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i (x - x_0)^i$ darajali qatorlar biror $|x - x_0| < R$ da yaqinlashuvchi) bo'lsa, hamda α_0, β_0 va β_1 koeffisiyentlar bir paytda nolga aylanmasa, u holda (6.2) tenglama hech bo'lmaganda bitta

$$y(x) = (x - x_0)^{\rho} \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i, \ (a_0 \neq 0) \tag{6.9}$$

ko'rinishdagi yechimga ega bo'lib, $\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x - x_0)^i$ darajali qator hech bo'lmaganda $|x - x_0| < R$ da yaqinlashuvchi bo'ladi.

(6.2) tenglamaning $x = x_0$ maxsus nuqta atrofidagi (6.9) ko'rinishdagi umumlashgan darajali qator tarzidagi yechimini izlash uchun, (6.9) ning kerakli tartibli hosilalari hisoblanadi va (6.2) tenglamaga qo'yiladi hamda $x-x_0$ ning turli darajalari oldidagi koeffisiyentlari nolga tenglashtiriladi. Umumiylikga ziyon yetkazmay $a_0 \neq 0$ deb farazqilsak, $(x-x_0)^{\rho}$ ning oldidagi koeffisiyentini nolga tenglashtirish natijasida ρ ni aniqlash mumkin bo'lgan quyidagi

$$\rho(\rho-1)+p_0\rho+q_0=0 \tag{6.10}$$

kvadrat tenglamani hosil qilamiz, bu yerda

$$p_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\,p(x), \qquad q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2 q(x). \tag{6.11}$$

(6.10) tenglamaga **aniqlovchi tenglama** deyiladi.Aniqlovchi tenglamaning ildizlariga qarab (6.2) tenglamaning yechimlari aniqlanadi.

Agar (6.10) tenglamaning ρ_1 va ρ_2 ildizlari turli bo'lsa, (6.2) tenglama har doim (6.9) ko'rinishdagi, ya'ni

$$y_1(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{i=0}^{\infty}a_i^1(x-x_0)^i,\ (a_0^1\neq 0) \ \text{(bu yerda } \operatorname{Re}\rho_1>\operatorname{Re}\rho_2 \text{)} \tag{6.12}$$

yechimga ega bo'ladi. Agar ρ_1-ρ_2 musbat butun son bo'lmasa, u holda (6.2) tenglama ρ_2 ildizda mos umumlashgan qator ko'rinishdagi

$$y_2(x)=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{i=0}^{\infty}a_i^2(x-x_0)^i,\ (a_0^2\neq 0) \tag{6.13}$$

yechimga ham ega bo'ladi. Agar ρ_1-ρ_2 musbat butun son bo'lsa, u holda 2-xususiy yechim (6.12) ko'rishda yoki

$$y_2(x)=(x-x_0)^{\rho_2}\sum_{i=0}^{\infty}a_i^2(x-x_0)^i+\gamma y_1(x)\ln(x-x_0),\ (\gamma\neq 0)$$

ko'rishda bo'ladi.

Nihoyat, agar (6.10) tenglamaning ρ_1 va ρ_2 ildizlari bir xil bo'lsa, ya'ni $\rho_1=\rho_2$ bo'lsa, umumlashgan darajali qator ko'rinshda bitta xususiy yechimga ega bo'ladi, ikkinchi xususiy yechimda $\ln(x-x_0)$ qatnashgan bo'ladi va uni

$$y_2(x)=(x-x_0)^{\rho_1}\sum_{i=0}^{\infty}a_i\,(x-x_0)^i+\gamma y_1(x)\ln(x-x_0),\ (\gamma\neq 0) \tag{6.14}$$

ko'rinishda izlash kerak bo'ladi.

6.2. Bessel tenglamasi.

2-Ta'rif. Ushbu

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-n^2\right)y=0 \tag{6.15}$$

tenglamaga **Bessel**[4] **tenglamasi** deyiladi, bu yerda n-berilgan o'zgarmas son.

Umuman aytganda bu tenglama bilan aniqlangan Bessel funksiyalarini elementar funksiyalar yordami bilan ifoda qilib bo'lmaydi. Bessel tenglamasi ikkinchi tartibli chiziqli tenglama bo'lganidan uni to'liq intervallash uchun ikkita $y_1 va\ y_2$ erkin xususiy yechimlarni bilish kifoya qiladi.

Ma'lumki $x=0$ nuqta (6.15) tenlama uchun maxsus nuqta bo'lib, bu nuqta atrofida tenglamani quyidagi

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2-n^2}{x^2}y = 0 \qquad (6.16)$$

ko'rinishda yozib olsak, ((6.2) ga asosan) $p(x)=\frac{1}{x}, \quad q(x)=\frac{x^2-n^2}{x^2}$ bo'ladi. (6.16) tenglamaga mos aniqlovchi tenglama (6.10) ko'rinishda bo'lib, (6.11) ga asosan $p_0=\lim\limits_{x\to 0} xp(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\frac{1}{x}=1$, $q_0=\lim\limits_{x\to 0} x^2q(x)=\lim\limits_{x\to 0} x^2\frac{x^2-n^2}{x^2}=-n^2$ bo'ladi. Demak, (6.10) ko'ra aniqlovchi tenglama $\rho(\rho-1)+\rho-n^2=0$, yoki $\rho^2-n^2=0$ ko'rinishda bo'lib, bu tenglama yechimlari $\rho_1=n,\ \rho_2=-n$ bo'ladi.

(6.15) Bessel tenglamasining birinchi xususiy yechimini ($\rho_1=n$ da)

$$y = x^n\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,\ (a_0 \neq 0) \qquad (6.17)$$

umumlashgan qator ko'rinishda izlaymiz. y, y' va y'' larni (6.15) tenglamaga qo'yib, ba'zi soddalashtirishlardan x^n ga qisqartirishdan so'ng

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+n)^2-n^2\right]\cdot a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+2} = 0$$

tenglamani olamiz. Bundan, x ning turli darajalari oldidagi koeffisiyentlarini nolga tenglashtirib:

---

[4] Bessel- matematik

$$
\begin{array}{l|l}
x^0: & \left(n^2-n^2\right)a_0=0, \\
x^1: & \left[(1+n)^2-n^2\right]a_1=0, \\
x^2: & \left[(2+n)^2-n^2\right]a_2+a_0=0, \\
x^3: & \left[(3+n)^2-n^2\right]a_3+a_1=0, \\
. & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x^k: & \left[(k+n)^2-n^2\right]a_k+a_{k-2}=0, \\
 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}
\qquad (6.18)
$$

(6.18) dagi birinchi munosabatdan a_0 ixtiyoriy qiymat qabul qilishi mumkinligi ma'lum, ikkinchi munosabatdan esa $a_1=0$ ni olamiz. Qolgan koeffisiyentlarni ham keyingi munosabatlardan quyidagi aniqlaymiz:

$$
a_2=-\frac{a_0}{2^2(1+n)},\quad a_3=0,\quad a_4=\frac{a_0}{2^4(1+n)(2+n)\cdot 1\cdot 2},\quad a_5=0,\dots,
$$

$$
a_{2k-1}=0,\ a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2^{2k}(1+n)(2+n)\dots(k+n)\cdot k!},\qquad (k=1,2,3,\dots).
$$

Matemetik analiz kursidan ma'lumki, $k!=\Gamma(k+1)$(bu yerda $\Gamma(\nu)$- Eylerning gamma funksiyasi). $a_{2k}\ (k=1,2,..)$ koeffesiyentlarni soddaroq holda yozish uchun a_0 ni $a_0=\frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}$ tanlaymiz, hamda gamma funksiyaning

$$
\Gamma(\nu+k+1)=(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)
$$

xossasidan foydalamiz. Demak

$$
a_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}(1+n)(2+n)\dots(k+n)\cdot k!\cdot 2^n\Gamma(n+1)}=\frac{(-1)^k}{2^{2k+n}\cdot k!\cdot\Gamma(k+n+1)},\ (k=1,2,\dots)
$$

.

Shunday qilib, Bessel tenglamasining birinchi xususiy yechimi

$$
J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} \qquad (6.19)
$$

Ko'rinishga ega bo'ladi. Bu funksiyaga **Besselning birinchi turdagi n-tartibli funksiyasi** deyiladi.

(6.15) Bessel tenglamasining ikkinchi xususiy yechimini

$$
y=x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k,\ (a_0\neq 0) \qquad (6.20)
$$

ko'rinishda izlaymiz. Ma'lumki, (6.15) tenglamada n juft daraja bilan qatnashadi, ya'ni n ni $-n$ ga almashtirish natijasida tenglama o'zgarmaydi, demak ikkinchi xususiy yechimni, (6.19) da n ni $-n$ ga almashtirish orqali hosil qilish mumkin.

Shunday qilib, ikkinchi xususiy yechim

$$J_{-n}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+1-n)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \tag{6.21}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, va bu funksiyaga **Besselning birinchi turdagi** $-n$ **- tartibli funksiyasi** deyiladi.

Agar n butun son bo'lmasa (6.19) va (6.21) yechimlar chiziqli erkli bo'ladi, chunki $aJ_n(x)+bJ_{-n}(x)$ yig'indi, faqat $a=b=0$ da nolga teng bo'ladi. Demak bu holda Bessel tenglamasining umumiy yechimi $y=C_1J_n(x)+C_2J_{-n}(x)$ bo'ladi.

Agar n butun son bo'lsa, $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$ (n-butun son) tenglik bajarilgani uchun (6.19) va (6.21) yechimlar chiziqli bog'liq bo'ladi. Demak n butun son bo'lsa, $J_{-n}(x)$ yechimdan boshqa $J_n(x)$ bilan chiziqli erkli bo'lgan yechim izlash kerak. Bu yechimni $Y_{n-\varepsilon}(x)=\dfrac{(-1)^nJ_{-n+\varepsilon}(x)-J_{n-\varepsilon}(x)}{\varepsilon}$ ko'rinishda izlaymiz, bu yerda ε-cheksiz kichik son. $Y_n=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}Y_{n-\varepsilon}$ funksiyaga **Besselning ikkinchi turdagi** n **-tartibli funksiyasi** deyiladi. Shunday qilib, n butun son bo'lmaganda (6.5) Bessel tenglamasining umumiy yechimi $y=C_1J_n(x)+C_2Y_n(x)$ bo'ladi.

2-*Misol*. $xy''+y'+xy=0$ tenglamani darajali qatorlar yordamida integrallang.

Yechish. Berilgan tenglama (6.15) ko'rishdagi tenglama bo'lib, bu yerda $n=0$ bo'ladi. $x=0$ maxsus nuqtada berilgan tenglama uchun aniqlovchi tenglama

$\rho(\rho-1)+\rho=0$ yoki $\rho^2=0$ ko'rinishga ega bo'lib, $\rho_1=\rho_2=0$ karrali ildizga ega bo'ladi. Demak berilgan tenglamaning bitta xususiy yechimi darajali qator ko'rinishda ikkinchi xususiy yechimi esa $\ln x$ funksiyani o'z ichiga olgan bo'lib, u (6.14) ko'rinishda izlanadi. Demak birinchi xususiy yechimni $y=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k,\ (a_0\neq 0)$ ko'rinishda izlaymiz va $a_0=1$ deb qabul qilib, (6.18) dan ($n=0$ da) qolgan noma'lum koeffisiyentlarni topamiz: $a_{2k+1}=0\quad (k=0,1,2,...)$,

$$a_2=-\frac{1}{2^2},\quad a_4=\frac{1}{4^2\cdot 2^2},\ a_6=-\frac{1}{6^2\cdot 4^2\cdot 2^2},\ \ldots,\ a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}.$$

Demak berilgan tenglamaning birinchi xususiy yechimi

$$y_1(x) = J_0(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $J_0(x)$ funksiyaga **Besselning birinchi turdagi 0 - tartibli funksiyasi** deyiladi.

Ta'kidlganimizdek ikkinchi xususiy yechim $\ln x$ funksiyani o'z ichiga yechim bo'lib, uni $y_2(x) = \gamma J_0(x)\ln x + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ ($\gamma = const$) ko'rinishda izlaymiz. Yuqoridagidek (umumiylikka zarar yetkazmay $\gamma = 1$ va $a_0 = 0$ deb olib) noma'lum koeffisiyentlar usulini qo'llab, koeffisiyentlarni topamiz va yechimni quyidagicha yozamiz:

$$y_2(x) = K_0(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - ....$$

$K_0(x)$ funksiyaga **Besselning ikkinchi turdagi 0 - tartibli funksiyasi** deyiladi.

Shunday qilib, berilgan Bessel tenglamasining umumiy yechimi $y = C_1 J_0(x) + C_2 K_0(x)$ bo'ladi.

6.3. Gipergeometrik tenglama (yoki Gaus[5] tenglamasi).

3-Ta'rif. Ushbu

$$x(1-x)y'' + \left(c - (a+b+1)x\right)y' - aby = 0 \qquad (6.22)$$

tenglamaga **gipergeometrik tenglama yoki Gaus tenglamasi** deyiladi, bu yerda - a, b, c - berilgan o'zgarmas sonlar.

Bu tenglamani integrallash uchun Bessel tenglamasini integrallashda qo'llagan usulni tadbiq qilamiz, ya'ni uning yechimini $y = x^{\rho}\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $(a_0 \neq 0)$ ko'rinishda izlaymiz. Gaus tenglamasi uchun aniqlovchi tenglama ($a_0 \neq 0$ bo'lgani uchun) $\rho(\rho-1) + c\rho = 0$ ko'rinishga ega bo'lib, bundan $\rho_1 = 0$ va $\rho_2 = 1 - c$. Demak (6.22) tenglamaning, ρ ning $\rho_1 = 0$ qiymatiga mos birinchi xususiy yechimi musbat darajali qator ko'rinishda ya'ni,

$$y_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k + ... \qquad (6.23)$$

ko'rinishda bo'ladi. Izlanayotgan yechimning kerakli tartibli hosilalarini hisoblab, (6.22) ga qo'yib, x^k ning oldidagi koeffisiyentini nolga tenglashtiramiz :

$(k+1)(c+k)a_{k+1} - (a+k)(b+k)a_k = 0$, bundan

---

2. Gauss - matematik

$$a_{k+1} = \frac{(a+k)(b+k)}{(k+1)(c+k)} a_k, \quad k = 0,1,2,3,... \ . \tag{6.24}$$

a_0 ixtiyoriy va $a_0 \neq 0$ bo'lgani uchun, umumiylikka ziyon yetkazmay $a_0 = 1$ deb olamiz, hamda (6.24) dan

$$a_1 = \frac{ab}{c},\ a_2 = \frac{(a+1)(b+1)ab}{1\cdot 2\cdot c(c+1)},\ a_3 = \frac{(a+2)(b+2)(a+1)(b+1)ab}{1\cdot 2\cdot 3\cdot c(c+1)(c+2)},...,$$

$$a_k = \frac{(a+k-1)(b+k-1)(a+k-2)(b+k-2)\cdot ...\cdot (a+1)(b+1)ab}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k(c+k-1)(c+k-2)\cdot ...\cdot (c+1)c}.$$

larni topamiz. Shuni ta'kidlash lozimki koeffisiyentlar aniq topilishi uchun c nol va manfiy butun son bo'lmasligi kerak.

Demak topilgan koeffisiyentlarni (6.23) ga qo'yib, (6.22) tenglamaning birinchi xususiy yechimini topmiz, bu yechimga gipergeometrik qator deyiladi va bu yechim:

$$y_1 = F(a,b,c,x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{ab(a+1)(b+1)}{1\cdot 2\cdot c(c+1)}x^2 + ... +$$

$$+\frac{(a+k)(b+k)(a+k-1)(b+k-1)\cdot ...\cdot (a+1)(b+1)ab}{1\cdot 2\cdot ...\cdot k(k+1)(c+k)(c+k-1)\cdot ...\cdot (c+1)c}\ x^{k+1} + ...$$

ko'rinishda bo'ladi.

(6.22) tenglamaning, $\rho_2 = 1-c$ ga nisbatan ikkinchi xususiy yechimini topishdan avval, (6.22) tenglamada

$$y(x) = x^{1-c}u(x) \tag{*}$$

almashtirish bajarib, bu tenglamani

$$x(1-x)u'' + \big(2-c-(a+b-2c+3)x\big)u' - (a+1-c)(b+1-c)u = 0 \tag{6.25}$$

ko'rinishda yozish mumkin, ya'ni (6.22) tenglamadagi a, b va c parametrlar $a+1-c,\ b+1-c$ va $2\text{-}c$ parametrlarga o'zgardi. Demak (6.25) tenglamaning bir xususiy yechimi $u_1 = F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x)$ bo'ladi. Shunday qilib, (*) ga asosan (6.22) tenglamaning ikkinchi xususiy yechimi $y_2 = x^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x)$ bo'ladi.

Xullas, c- butun son bo'lmaganda, (6.22) tenglamaning umumiy yechimi

$y = C_1F(a,b,c;x) + C_2x^{1-c}F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x)$ bo'ladi.

Eslatma. Agar (6.22) tenglamada c- butun son bo'lsa, aniqlovchi tenglama ildizlari orasidagi ayirma nol yoki butun son bo'ladi, bu holda (6.22) tenglama umumiy yechimida logarifmik had qatnashadi.

3-*Misol*. Ushbu $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$ Lejandr[6] tenglamasining xususiy yechimini toping.

---

[6] Lejanr- matematik

Yechish. Lejandr tenglamasida $x = 1 - 2t$ almashtirish bajaramiz, u holda

$t = \frac{1-x}{2}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{dy}{2dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{4dt^2}$ topilganlarni berilgan tenglamaga qoyib,

$$\frac{1}{4}(1-(1-2t)^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2(1-2t)\frac{dy}{dt} + n(n+1)y = 0,$$

yoki $t(1-t)y'' + (1-2t)y' + n(n+1)y = 0$ tenglamani hosil qilamiz . Bu tenglama (6.22) ko'rinishdaga Gaus tenglamasi bo'lib, bu yerda $a = -n, b = n+1$ va $c = 1$. Bu tenglamaning bitta xususiy yechimi $y(t) = F(-n, 1+n, 1; t)$, yani Lejandr tenglamasining bir xususiy yechimi ($x = 1 - 2t$ almashtirishga asosan) $y(x) = F\left(-n, 1+n, 1; \frac{1-x}{2}\right)$ bo'ladi. Tekshirib ko'rish mumkinki, $F\left(-n, 1+n, 1; \frac{1-x}{2}\right) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ bo'ladi, ya'ni $p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ Lejanr polinomi gipergeometrik funksiyaning ($a = -n, b = n+1$ va $c = 1$ bo'lgan) xususiy holi bo'ladi.

6.4. Chegaraviy masala. Grin funksiyasi.

Agar biror I intervalda aniqlangan $y = \varphi(x)$ funksiya $y^{(n)} = f\left(x, y, y', ..., y^{(n-1)}\right)$ $(n \geq 1)$ differensial tenglamaning $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0, ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}$, $x_0 \in I$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lsa, ushbu yechim yana $\varphi(x_1) = y_1$, $\varphi'(x_1) = y'_1, ..., \varphi^{(n-1)}(x_1) = y_1^{n-1}$, $x_0 \neq x_1$, $x_1 \in I$
shartni ham qanoatlantiradimi, degan savol tug'iladi, ya'ni quyidagi Koshi masalasidan tashqari yana boshqa bir masala tushunchasi paydo bo'ladi.

4-Ta'rif. Ushbu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \ (n \geq 1) \tag{6.26}$$

differensial tenglamaning

$$A_i(x_0, y(x_0), y'(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0); x_1, y(x_1), y'(x_1), ..., y^{(n-1)}(x_1)) = 0 \tag{6.27}$$

$(x_0 \in I,\ x_1 \in I,\ x_0 \neq x_1,\ i = 1, 2, ..., n)$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi ***chegaraviy masala*** deyiladsi.

Bu masala Koshi masalasiga qaraganda umumiy bo'lib, $A_i = y^{(i-1)}(x_0) - y^{(i-1)}(x_1) = 0$, $i = 1, 2, ..., n$ bo'lganda chegaraviy masaladan Koshi masalasi kelib chiqadi.

Agar $n=2$ bo'lsa, (6.26)-(6.27) chegaraviy masala quyidagicha bo'ladi:

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=f(x),\ a\le x\le b, \tag{6.28}$$

$$\alpha y(a)+\beta y'(a)=0,\ \ \gamma y(b)+\delta y'(b)=0. \tag{6.29}$$

Birjinsli chegaraviy masala. Faraz qilaylik (6.27) munosabatda A_i funksiyalar quyidagi ko'rinishda bo'lsin:

$$A_i(y)=\alpha_0^{(i)}y(x_0)+\alpha_1^{(i)}y'(x_0)+...+\alpha_{n-1}^{(i)}y^{n-1}(x_0)+\beta_0^{(i)}y(x_1)+$$
$$+\beta_1^{(i)}y'(x_1)+...+\beta_{n-1}^{(i)}y^{n-1}(x_1)=B_i \tag{6.30}$$

$\alpha_j^{(i)},\ \beta_j^{(i)},\ B_i,\ i=1,2,...,n,\quad j=0,1,2,...,n-1$ - o'zgarmaslar.

Agar $B_i=0,\ (i=1,2,...,n)$ bo'lsa, qo'yilgan masala **bir jinsli chegaraviy masala** deyiladi. Agar $\sum_{i=1}^{n}B_i\ne 0,$ bo'lsa, qo'yilgan masala **bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masala** deyiladi.

n-tartibli chiziqli bir jinsli

$$L(p)y=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0 \tag{6.31}$$

tenglama va (6.30) munosabatlarni $B_i=0,\ (i=1,2,...,n)$ bo'lganda qanoatlantiradigan yechimni topish masalasi (6.31) tenglama uchun bir jinsli chegaraviy masala deyiladi. Ma'lumki bir jinsli chegaraviy masala kamida bitta trivial yechimga , ya'ni $y(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_1]$ yechimga ega. ***Biroq bir jinsli chegaraviy masala trivialmas yechimlarga ham ega bo'lishi mumkin.***

6.3-Teorema. Agar $y_1(x),y_2(x),...,y_n(x),\ x\in[x_0,x_1]$ funksiyalar (6.31) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo'lsa, u holda $L(p)y=0,\ A_i(y)=0$ bir jinsli chegaraviy masala trivialmas yechimga ega bo'lishi uchun

$$D=\begin{vmatrix} A_1(y_1) & A_1(y_2) & ... & A_1(y_n)\\ A_2(y_1) & A_2(y_2) & ... & A_2(y_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ A_n(y_1) & A_n(y_2) & ... & A_n(y_n)\end{vmatrix}=0$$

diterminantning nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

4-*Misol*. $y''-2iy=0;\ y(0)=-1,\ y(+\infty)=0$ chegaraviy masalani yeching.

Yechish. Berilgan tenglamani umumiy yechimini topamiz, buning uchun $k^2-2i=0$ xarakteristik tenglamaning $k_{1/2}=\pm\sqrt{2i}=\pm(1+i)$ ildizlariga mos yechimlarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat $y=C_1e^{(1+i)x}+C_2e^{-(1+i)x}$ umumiy yechimni olamiz. Topilgan umumiy yechimdan chegaviy shartlarni qanoatlantiradiganini ajratamiz:

$$\begin{cases} y(0)=C_1e^{(1+i)0}+C_2e^{-(1+i)0}=C_1+C_2=-1 \\ y(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(C_1e^{(1+i)x}+C_2e^{-(1+i)x}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=-1 \\ C_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=-1 \\ C_1=0 \end{cases}$$

Demak chegaraviy masala yechimi $y=-e^{-(1+i)x}$ bo'ladi.

5-*Misol*. a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=1;\ y(0)=0,\ y(1)=0$ masala yechimga ega bo'lmaydi.

Yechish. Ma'lumki berilgan tenglamaning umumiy yechimi mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi va bir jinsli bo'lmagan tenglamaning bir xususiy yechi yig'indisidan iborat bo'ladi. Agar berilgan tenglamada $a=0$ bo'lsa, $y''=1;\ y(0)=0,\ y(1)=0$ chegaraviy masala $y=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)$ yechimga ega. Berilgan tenglamaning xususiy yechimi ($a\neq 0$ da) $\tilde{y}=\frac{1}{a}$ bo'ladi, mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi: $a>0$ da $y_0=C_1\cos\sqrt{a}x+C_2\sin\sqrt{a}x$, $a<0$ da esa $y_0=C_1e^{\sqrt{-a}x}+C_2e^{\sqrt{-a}x}$ bo'ladi. Demak berilgan tenglama umumiy yechimi: $a>0$ da $y=C_1\cos\sqrt{a}x+C_2\sin\sqrt{a}x+\frac{1}{a}$, $a<0$ da esa $y=C_1e^{\sqrt{-a}x}+C_2e^{\sqrt{-a}x}+\frac{1}{a}$ bo'ladi. Endi shu ikki holda chegaraviy shartlarni qanoatlantiramiz:

1) $a>0$ da. $\begin{cases} y(0)=C_1\cos 0+C_2\sin 0+\frac{1}{a}=0 \\ y(1)=C_1\cos\sqrt{a}+C_2\sin\sqrt{a}+\frac{1}{a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=-\frac{1}{a} \\ \sin\sqrt{a}C_2=\frac{\cos\sqrt{a}-1}{a} \end{cases}$

demak, agar $\begin{cases} \sin\sqrt{a}=0 \\ \cos\sqrt{a}\neq 1 \end{cases}$, ya'ni $a=\pi^2(2n-1)^2,\ n\in N$ bo'lsa chegaraviy masala yechimga ega emas, chunki C_2 aniqlanmaydi.

2) $a<0$ da. $\begin{cases} y(0)=C_1+C_2+\frac{1}{a}=0 \\ y(1)=C_1e^{\sqrt{-a}}+C_2e^{-\sqrt{-a}}+\frac{1}{a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=-\frac{1}{a} \\ C_1e^{\sqrt{-a}}+C_2e^{-\sqrt{-a}}=-\frac{1}{a} \end{cases}$

sistemaning

asosiy diterminanti $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-a}} & e^{-\sqrt{-a}} \end{vmatrix}\neq 0$ (ixtioriy $a<0$ da) bo'lgani uchun sistema yagona yechimga ega.

3) $a=0$ bo'lsa, $y''=1;\ y(0)=0,\ y(1)=0$ chegaraviy masala $y=\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)$ yechimga ega.

Demak qo'yilgan chegaraviy masala $a=\pi^2(2n-1)^2, n\in N$ da yechimga ega emas.

5-Ta'rif. Ushbu

$$L(p)y=0,\ A_i(y)=0,\ i=1,2,...,n \qquad (6.32)$$

chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi deb, shunday $G(x,\xi)$ funksiyaga aytiladiki, u funksiya $\{(x,\xi): x_0\le x\le x_1,\ x_0\le\xi\le x_1\}$ yopiq sohada aniqlangan bo'lib, $[x_0,x_1]$ oraliqdan olingan har bir ξ uchun x ning funksiyasi sifatida quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1. $G(x,\xi)$ funksiya x va ξ bo'yicha $[x_0,x_1]$ oraliqda uzluksiz, x bo'yicha ($n-2$)- tartibgacha uzluksiz differensiallanuvchi;

2. $[x_0,x_1]$ dan olingan ixtiyoriy fiksirlangan ξ uchun $G(x,\xi)$ funksiya x bo'yicha $[x_0,\xi]$ va $[\xi,x_1]$ oraliqlarning har birida ($n-1$)- va n- tarlibli hosilalarga ham ega ammo ($n-1$)-tartibli hosilasi $x=\xi$ nuqtada birichi tur uzilishga ega, ya'ni

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi)=\frac{1}{p_0(\xi)};$$

3. $[x_0,\xi)$ va $(\xi,x_1]$ oraliqlarning har birida x ning funksiyasi sifatida $G(x,\xi)$ funksiya (6.32) ni qanoatlantiradi, ya'ni $L(p)G(x,\xi)\equiv 0,\ A_i\left(G(x,\xi)\right)\equiv 0,\ i=\overline{1,n}$.

6.4-Teorema. Agar (6.32) masala faqat trivial yechimga ega bo'lsa, u holda shu masala uchun Grin funksiyasi mavjad va yagona.

6.5-Teorema. Agar (6.32) masala faqat trivial yechimga ega bo'lsa, u holda $[x_0,x_1]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun $L(p)y=f(x),\ A_i(y)=0,\ i=1,2,...,n$ masalaning yechimi mavjud va bu yechim

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,\xi)f(\xi)d\xi, \quad (G(x,\xi)\text{-Grin funksiyasi}) \qquad (6.33)$$

formula bilan aniqlanadi.

Soddalik uchun ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarga to'xtalamiz. (6.28)-(6.29) masala uchun Grin funksiyasiga ta'rif quyidagicha beriladi.

6-Ta'rif. (6.28)-(6.29) chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi deb, shunday $G(x,\xi)$ funksiyaga aytiladiki, u funksiya $\{(x,\xi): a\le x\le b,\ a\le\xi\le b\}$ yopiq sohada aniqlangan bo'lib, $[a,b]$ oraliqdan olingan har bir ξ uchun x ning funksiyasi sifatida quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1. $x \neq \xi$ da

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (6.34)$$

tenglamani qanoatlantiradi;

2. $x = a$ da va $x = b$ da (6.29) chegaraviy shartni qanoatlantiradi;

3. $[a,b]$ dan olingan ixtiyoriy fiksirlangan ξ uchun $G(x,\xi)$ funksiya $x = \xi$ da x bo'yicha uzluksiz, x bo'yicha birinchi tartibli hosilasi esa $x = \xi$ da $\frac{1}{a(\xi)}$ gat eng bo'lgan sakrashga ega, ya'ni

$$G(\xi+0,\xi) = G(\xi-0,\xi), \quad G'_x(\xi+0,\xi) = G'_x(\xi-0,\xi) + \frac{1}{a(\xi)}. \qquad (6.35)$$

(6.28)-(6.29) chegaraviy masala uchun Grin funksiyasini qurish uchun (6.34) tenglamaning shunday ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ noldan farqli xususiy yechimlarini topamizki, ular (6.29) chegaraviy shartlarning mos ravishda birinchisini va ikkinchisini qanoatlantiradi. Agar $y_1(x)$ funksiya (6.29) chegaraviy shartlarning ikkalasini bir vaqtda qanoatlantirmasa Grin funksiyasi mavjud va uni

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)y_1(x), & a \le x \le \xi \\ B(\xi)y_2(x), & \xi \le x \le b \end{cases}, \qquad (6.36)$$

ko'rinishda izlash mumkin, bu yerdagi $A(\xi)$ va $B(\xi)$ noma'lum funksiyalar (6.35) shartlardan ya'ni,

$$A(\xi)y_1(\xi) = B(\xi)y_2(\xi), \quad A(\xi)y_1'(\xi) + \frac{1}{a(\xi)} = B(\xi)y_2'(\xi) \qquad (6.37)$$

munosabatlardan topiladi.

6-*Misol*. $y'' + 4y' + 3y = f(x)$, $y(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = O(e^{-2x})$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasini tuzing.

***Yechish*.** Berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$ bo'ladi. Bu yechimdan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi ikkita yechim olamiz:

$y(0) = C_1e^0 + C_2e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$,

demak $y_1 = e^{-3x} - e^{-x}$.

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty}\left(C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}\right) = \lim_{x\to\infty} e^{-2x}\left(C_1e^{-x} + C_2e^{x}\right) = O(e^{-2x}) \Rightarrow C_2 = 0,$$

bundan $y_2 = e^{-3x}$. Shunday qilib, (6.36) ga asosan Grin funksiyasini

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A(\xi)\left(e^{-3x} - e^{-x}\right), & 0 \le x \le \xi \\ B(\xi)e^{-3x}, & \xi \le x < +\infty \end{cases}$$

ko'rinishda izlaymiz. (6.37) ga asosan $\begin{cases} A(\xi)\left(e^{-3\xi}-e^{-\xi}\right)=B(\xi)e^{-3\xi} \\ A(\xi)\left(-3e^{-3\xi}+e^{-\xi}\right)+1=-3B(\xi)e^{-3\xi} \end{cases}$ sistemani yechib $A(\xi)=\frac{1}{2}e^{\xi},\ B(\xi)=\frac{1}{2}\left(e^{\xi}-e^{3\xi}\right)$ ni topamiz. Shunday qilib, qo'yilgan chegaraviy masalaning Grin funksiyasi

$$G(x,\xi)=\begin{cases} \frac{1}{2}e^{\xi}\left(e^{-3x}-e^{-x}\right), & 0\le x\le\xi \\ \frac{1}{2}\left(e^{\xi}-e^{3\xi}\right)e^{-3x}, & \xi\le x<+\infty \end{cases}$$ bo'ladi.

7-*Misol*. $x^2y''+2xy'=m(m+1)x^m,\ m>0$, $y(1)=y'(1),\ \lim\limits_{x\to 0}y(x)<\infty$ chegaraviy masalani yeching.

***Yechish*.** Berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y=C_1+\frac{C_2}{x}$ bo'ladi. Bu yechimdan mos ravishda birinchi va ikkinchi chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi $y_1=2-\frac{1}{x}$ va $y_2=1$ yechimlarni olamiz. Demak Grin funksiyasini $G(x,\xi)=\begin{cases} A(\xi), & 0\le x\le\xi \\ B(\xi)\left(2-\frac{1}{x}\right), & \xi\le x\le 1 \end{cases}$ ko'rinshda qidiramiz. (6.37) shartlarga asosan

$$\begin{cases} A(\xi)=B(\xi)\left(2-\frac{1}{\xi}\right) \\ B(\xi)\frac{1}{\xi^2}=\frac{1}{\xi^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(\xi)=2-\frac{1}{\xi} \\ B(\xi)=1 \end{cases}.$$ Bundan

$$G(x,\xi)=\begin{cases} 2-\frac{1}{\xi}, & 0\le x\le\xi \\ 2-\frac{1}{x}, & \xi\le x\le 1 \end{cases}$$ ni olamiz. Shunday qilib, (6.33) ga asosan qo'yilgan chegaraviy masala yechimi

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)m(m+1)\xi^m d\xi=m(m+1)\left[\int_0^x\left(2-\frac{1}{x}\right)\xi^m d\xi+\int_x^1\left(2-\frac{1}{\xi}\right)\xi^m d\xi\right]=$$

$$=m(m+1)\left[\left(2-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{m+1}x^{m+1}+\left(\frac{2}{m+1}\xi^{m+1}-\frac{1}{m}\xi^m\right)\Bigg|_{\xi=x}^{\xi=1}\right]=x^m+m-1$$

7-Ta'rif. Ushbu

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = \lambda y, \; a \le x \le b, \qquad (6.38)$$

tenglamaning (6.29) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasining xos qiymati deb, shunday λ songa aytiladiki, shu λ da (6.38) tenglama (6.29) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi noldan farqli $y(x)$ yechimga ega bo'ladi, $y(x)$ ga xos funksiya deyiladi.

8-Ta'rif. (6.38), (6.29) chegaraviy masalaning noldan farqli $y(x)$ yechimga ega bo'ladigan λ ning qiymatlarini topish masalasi **Shtrum-Liuvill masalasi** deyiladi.

8-*Misol*. $y'' + \frac{1}{x}y' + \lambda y = 0,$, $y(1) = 0, \lim\limits_{x\to 0} y(x) < \infty$ chegaraviy masalaning xos son va xos funksiyalarini toping.

Yechish. Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, berilgan tenglama $y'' + \frac{1}{x}y' = 0,$ ko'rinshda uning umumiy yechimi esa $y = C_1 + C_2 \ln|x|$ bo'ladi. Bu yechimlar ichida chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan faqat $y \equiv 0$ yechim bor, demak $\lambda = 0$ xos son emas.

Agar $\lambda = 0$ bo'lsa, berilgan tenglamada $\sqrt{\lambda}x = t$ almashtirish bajarib, uni $y'' + \frac{1}{t}y' + y = 0$ ko'rinishga keltiramiz, ma'lumki oxirgi tenglama (6.15) ko'rinishdagi Bessel tenglamasi bo'lib, bu yerda $n = 0$. Bessel tenglamasining $t \to 0$ da chekli bo'lgan yechimi $y = CJ_0(t)$ (C=*const*) bo'ladi, bu yerda $J_0(t)$-birinchi turdagi nolinchi tartibli Bessel funksiyasi. Shunday qilib, q'oyilgan chegaraviy masala xos funksiyalari $y_k = J_0\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)$, λ_k lar - $J_0\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$ tenglamaning yechimlari bo'lib, q'oyilgan chegaraviy masalaning xos sonlari hisoblanadi.

9-*Misol*. $x^2y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0$ tenglamani integrallang.

Yechish. Berilgan tenglamada $x^2 = t$ almashtirish bajaramiz, u holda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot 2x, \; \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot 4x^2 + 2\frac{dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot 4t + 2\frac{dy}{dt}$$

hosilalarni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$\frac{d^2y}{dt^2} \cdot 4t^2 + 2t\frac{dy}{dt} + 2t\frac{dy}{dt} + 4(t^2 - 2)y = 0 \qquad \text{yoki} \qquad t^2y'' + ty' + (t^2 - 2)y = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Oxirgi tenglama (6.15) ko'rinishdagi Bessel tenglamasi bo'lib, bu yerda $n = \sqrt{2}$, ya'ni butun son emas. Demak bu tenglama umumiy yechimi $y = C_1 J_{\sqrt{2}}(x) + C_2 J_{-\sqrt{2}}(x)$ bo'ladi, bu yerda

$J_n(x)$ funksiya, (6.19) formula bilan aniqlanadigan birinchi tur Bessel funksiyasi.

Mustaqil yechish uchun mashqlar.

Quyidagi tenglamalarni darajali yoki umumlashgan darajali qatorlar yordamida integrallang (440-449):

4.40. $y'' - xy = 0$.

4.41. $y'' + x^2 y = 0$.

4.42. $y'' + \frac{1}{1-x} y = 0$.

4.43. $y'' + xy' - \left(2x^2 + 1\right) y = 0$.

4.44. $4xy'' + 2y' + y = 0$.

4.45. $y' - 2xy = 0,\ y(0) = 1$.

4.46. $y'' - xy' - 2y = 0$.

4.47. $9x(1-x)y'' - 12y' + 4y = 0$.

4.48. $y'' - xy' + y - 1 = 0,$

$y(0) = y'(0) = 0$.

4.49. $x(1-x)^2 y'' - (x^2 - x)y' - y = 0$.

Quyidagi Bessel va Gaus tenglamalarini umumiy yechimini toping (450-460):

4.50. $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$.

4.51. $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$.

4.52. $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$.

4.53. $y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{1}{9} y = 0$.

4.54. $x^2 y'' - 2xy' + 4\left(x^4 - 1\right) y = 0$.

4.55. $y'' + \frac{1}{x} y' + 4y = 0$.

4.56. $xy'' + \frac{1}{2} y' + \frac{1}{4} y = 0$.

4.57. $x(x-1)y'' - 2(1-x)y' - 2y = 0$.

4.58. $x(x-1)y'' - (1-3x)y' + y = 0$.

4.59. $x(x-1)y'' + (1+x)y' - y = 0$.

4.60. $x(x-1)y'' - (2-3x)y' + y = 0$

Quyidagi chegaraviy masalalarni yeching (461-472):

461. $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

462. $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\quad y'(\pi) = 2$.

463. $y'' + y = 1,\ y(0) = 0,\quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

464. $y'' + y' = 1,\ y'(0) = 0,\quad y(1) = 1$.

465. $y'' - y' = 0,\ y(0) = -1,\quad y'(1) - y(1) = 2$.

466. $y'' - y = 2x,\ y(0) = 0,\quad y(1) = -1$.

467. $y'' - 2y' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$

468. $y'' - 2y' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ \lim_{x\to\infty} y'(x) = 2$

469. $y'' - y = 1,\ y(0) = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y(x) < \infty$

470. $x^2y'' - 6y = 0,\ y(1) = 2,\ \lim\limits_{x\to 0} y(x) < \infty$

471. $y^{IV} - y = 0,\ y(0) = y''(0) = 0,\ \ y(\pi) = y''(\pi) = 0$.

472. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \cos 2x,\ y(0) = y(\pi) = \dfrac{1}{25},\ \ y'(0) = \dfrac{2}{15},\ y'(\pi) = \dfrac{2}{25}$..

Quyidagi chegaraviy masalalarni Grin funksiyasini tuzing (473-482):

473. $y'' = f(x),\ y(0) = y(1) = 0.$

474. $y'' = f(x),\ y(0) + y(1) = 0,\ \ y'(0) + y'(1) = 0.$

475. $y'' = f(x),\ y(0) = 0,\ \lim\limits_{x\to\infty} y(x) < \infty$.

476. $y'' + y = f(x),\ y(0) = y(1) = 0.$

477. $y'' + y = f(x),\ y(0) = y(\pi),\ y'(0) = y'(\pi).$

478. $y'' + y' = f(x),\ y'(0) = 0,\ y(+\infty) = 0$.

479. $y'' - k^2y = f(x),\ k \neq 0,\ y(-1) = y(1),\ y'(-1) = y'(1).$

480. $xy'' - y' = f(x),\ y'(1) = 0,\ y(2) = 0.$

481. $x^2y'' - 2y = f(x),\ y(1) = 0,\ y(2) + 2y'(2) = 0.$

482. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x),\ y(1) = 0,\ \lim\limits_{x\to 0} y(x) < \infty$.

Quyidagi masalalarda xos son va xos funksiyani toping (483-487):

483. $y'' = \lambda y,\ y(0) = y(\pi) = 0$;

484. $y'' = \lambda y,\ y(0) = y'(1) = 0$;

485. $y'' = \lambda y,\ y'(0) = y'(\pi) = 0$;

486. $x^2y'' = \lambda y,\ y(1) = y(a) = 0,\ (a > 1)$

487. $x^2y'' + \frac{1}{4}y = \lambda y,\ y(1) = y(e) = 0$