

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS  
TA'LIM VAZIRLIGI  
ALISHER NAVOIY NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT  
UNIVERSITETI**



**DIFFERENTIAL TENGLAMALAR KAFEDRASI**  
**«DIFFERENTIAL TENGLAMALAR» fanidan**  
**o'quv-uslubiy**

**M A J M U A**

**5460100 – matematika yo'nalish talabalari uchun**

**SAMARQAND-2010**

Ya. Muxtorov., F.R.Tursunov., D.S.Shodiyev «Differensial tenglamalar» fanidan o'quv – uslubiy majmua («5460100 - Matematika» ta'lim yo'nalishi bakalavr talabalari uchun). O'quv - uslubiy majmua. – Samarqand: SamDU nashri, 2010. – bet.

«Differensial tenglamalar» fanidan ushbu o'quv – uslubiy majmua Samarqand davlat universitetining «Differentsial tenglamalar» kafedrasida tayyorlangan. Majmua «Differensial tenglamalar» fanini o'rganish jarayonida talabaning mustaqil ishlashini ta'minlovchi o'quv-uslubiy materiallarni o'z ichiga oladi hamda talaba olgan bilimining sifatini doimo nazorat qilishni ta'minlaydi.

## MUNDARIJA

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Namunaviy o'quv dasturi.....                                                                        | 4   |
| 2. Ishchi o'quv dasturi.....                                                                           | 15  |
| 3. Reyting nazoratlarni grafigi.....                                                                   | 21  |
| 4. Baholash mezonlar.....                                                                              | 22  |
| 5. Kalendar ish reja.....                                                                              | 24  |
| 6. Ma'ruza matni ishlanmasi.....                                                                       | 29  |
| 7. Amaliy mashg'ulotlar ishlanmasi.....                                                                | 265 |
| 8. Mustaqil ta'lim ishlanmasi.....                                                                     | 419 |
| 9. Oraliq nazorat savollari.....                                                                       | 507 |
| 10. Yakuniy nazorat savollari.....                                                                     | 319 |
| 11. Testlar.....                                                                                       | 630 |
| 12. Elektron darslik, elektron qo'llanmalar.....                                                       | 650 |
| 13. Fanning axborot manbai va o'ning ta'minoti (fanga, mavzuda oid<br>o'quv adabiyotlar ro'xati) ..... | 650 |
| 14. Glossariy.....                                                                                     | 651 |

ЎЗБЕКИСТОН RESPUBLIKACI  
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

TAJRIBA-SINOV

Руйхатга олинди  
№ БД5460100-3.01.06  
2008 йил "23" август

Ўзбекистон Республикаси  
Олий ва ўрта махсус таълим  
вазирининг 2008 йил "23"  
август даги "265" - сонли  
буйруғи билан тасдиқланган

«ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР»  
фанининг  
(фаннинг номи)

ЎҚУВ ДАСТУРИ

|                  |                                   |
|------------------|-----------------------------------|
| Билим соҳаси:    | 400000 – Фан                      |
| Таълим соҳаси:   | 460000 – Математика ва статистика |
| Таълим йўналиши: | 5460100 – Математика              |

Тошкент – 2008

Фаннинг ўқув дастури Олий ва ўрта махсус, касб-хунар таълими ўқув-методик бирлашмалари фаолиятини мувофиқлаштирувчи Кенгашининг 2008 йил “20” август даги “4” - сон мажлис баёни билан маъқулланган.

Фаннинг ўқув дастури МИРЗО УЛУҒБЕК номидаги ЎЗБЕКИСТОН МИЛЛИЙ УНИВЕРСИТЕТИда ишлаб чиқилди.

**Тузувчилар:**

|              |                                            |
|--------------|--------------------------------------------|
| Зикиров О.С. | физика-математика фанлари номзоди, доцент. |
| Нагорный А.М | физика-математика фанлари номзоди, доцент. |

**Такризчилар:**

|               |                                                                                    |
|---------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Тўхтасинов М. | физика-математика фанлари доктори, доцент.                                         |
| Хашимов А.Р.  | ЎзР ФА Математика институти катта илмий ходими, физика-математика фанлари номзоди. |

Фаннинг ўқув дастури Мирзо Улуғбек номидаги Ўзбекистон Миллий университети Илмий-методик кенгашида тавсия қилинган.  
(2008 йил “\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ даги “\_\_\_\_” - сонли баённома).

## КИРИШ

Дифференциал тенгламалар фани турли хил физик жараёнларни ўрганиш билан чамбарчас боғлиқдир. Бундай жараёнлар қаторига гидродинамика, электродинамика масалалари ва бошқа кўплаб масалаларни келтириш мумкин. Турли жараёнларни ифодаловчи математик масалалар кўпгина умумийликка эга бўлиб, дифференциал тенгламалар фанининг асосини ташкил этади. Дифференциал тенгламалар олий математиканинг асосий фундаментал ва тадбиқий бўлимларидан бири бўлиб, у бакалавриятнинг математика, механика, амалий математика ва информатика каби йўналишлари ўқув режасидаги умумқасбий фанлардан бири ҳисобланади. Ҳозирги кунда фан ва техниканинг жадал ривожланиб бориши турли мураккаб техник, механик, физик ва бошқа жараёнларни ўрганиш, уларни математик нуқтаи назардан тасаввур қилиш, математик моделларини тузиш ва ечиш нафақат тадбиқий жиҳатдан балки назарий жиҳатдан ҳам долзарб, ҳам амалий аҳамиятга эга бўлган муаммолардан бири ҳисобланади.

### Ўқув фанининг мақсади ва вазифалари

Дифференциал тенгламалар фанининг асосий мақсади бакалавриятнинг математика йўналиши талабаларига бу фаннинг фундаментал асосларини етарли даражада ўқитиш, бу назарий билимлар ёрдамида механика, физика, техника ва бошқа соҳаларда содир бўладиган жараёнларни дифференциал тенгламалар кўринишда ифодалашни, математик моделлар учун масаланинг берилишига қараб, уларни ечишга ўргатиш ва ихтисослик фанларини ўргатишга тайёрлашдан иборат.

Дифференциал тенгламалар фани фундаментал ва тадбиқий фанларнинг асосини ташкил қилади. Жараёнларнинг дифференциал тенгламалар ёрдамида математик моделини тузиш ва ечимларини топиш усулларини ўрганиш, масаланинг берилишига қараб, унинг ечимини назарий таҳлил қилиш дифференциал тенгламалар фанининг асосий вазифасига киради.

### Фан бўйича билимига, кўникма ва малакасига қўйиладиган талаблар

Дифференциал тенгламалар ўқув фанини ўзлаштириш жараёнида амалга оширил-  
адиган масалалар доирасида бакалавр:

- фан бўйича талабалар оддий дифференциал тенгламаларни интеграллашни, Коши масаласининг қўйилишини, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исботлашни, дифференциал тенглама ечимининг турғунлиги назарияси, чизикли дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ечишнинг Грин функцияси усулини **билиши керак**;

- фанни ўрганишда талабалар тегишли жараёнлар ҳақида тасаввурга эга бўлиш-  
лари, айти пайтида уларни мантиқий фикрлаш ва тўғри хулосалар чиқариш **кўникмаларига эга бўлиши керак**;

- дифференциал тенгламалар ва тенгламалар системаси учун Коши масаласи, иккинчи тартибли чизикли тенглама учун чегаравий масала ва бошқа масалалар ечимларининг ягона ва мавжуд эканлигини исботлаш ҳамда ўрганилган назарий билимларни амалиётга қўллаш **малакаларига эга бўлиши керак**.

### Фаннинг ўқув режадаги бошқа фанлар билан ўзаро боғлиқлиги ва услубий жиҳатдан узвий кетма-кетлиги

Дифференциал тенгламалар фани асосий ихтисослик фани ҳисобланиб, 3-4 семестрларда ўқитилади. Бу фан математик анализ, функционал анализ, дифференциал неометрия ва шу каби предметлар билан ўзаро боғлиқ ва услубий жиҳатдан уларнинг давомидир.

### **Фаннинг ишлаб чиқаришдаги ўрни**

Дифференциал тенгламалар фани “Математика” йўналиши бўйича мутахассислар тайёрлашнинг ўқув жараёнида бакалаврларнинг юқори даражадаги математик тайёргарлиги ва кўпгина махсус фанлар бўйича чуқур билимлар эгаси бўлишида асосий ўрин тутди. Мазкур фан дастурга кўра ушбу фан доирасида кўплаб модель масалалар ўрганиладики бу мазкур фанни чуқур ўрганган ҳар бир бакалавр олган билим ва кўникмаларни илмий-тадқиқот ишларида, шунингдек, таълим тизимида самарали фойдаланиш имконини беради.

### **Фанни ўқитишда замонавий ахборот ва педагогик технологиялар**

Талабаларнинг математик физика тенгламалари фанини ўзлаштиришлари учун ўқитишнинг замонавий педагогик усуллари ва информацион технологиялардан фойдаланиш муҳим аҳамиятга эгадир. Бунда электрон дарслик, услубий қўлланмалар, тарқатма материаллар, виртуал стендлар ва янги нашр этилган замонавий адабиётлардан фойдаланилади.

### **Асосий қисм**

#### **Фаннинг назарий машғулотлар мазмуни**

#### **Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар**

Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ечим тушунчаси. Хусусий ва умумий ечим. Интеграл чизик. Коши масаласи. Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида теорема.

Ўзгарувчилари ажралган ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли тенгламалар. Чизикли дифференциал тенгламалар. Ечимнинг хоссалари. Ўзгармасни вариациялаш усули. Бернулли ва Риккати тенгламалари. Тўла дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи ва унинг мавжудлиги ҳақидаги теоремалар.  $y' = f(x, y)$  тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теореманинг исботи.

Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни интеграллаш усуллари. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Махсус ечимлар ва уларнинг мавжудлиги. Параметр киритиш йўли билан тенгламаларни интеграллаш. Лагранж ва Клеро тенгламалари.

#### **Юқори тартибли дифференциал тенгламалар**

$n$  – тартибли дифференциал тенгламалар. Каноник кўринишдаги  $n$  – тартибли дифференциал тенгламалар ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теорема. Юқори тартибли тенгламаларнинг тартибини пасайтириш. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли юқори тартибли тенгламаларни интеграллаш.

$n$  – тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг умумий хоссалари. Умумий ечимнинг хоссалари. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар. Ечимнинг асосий хоссалари. Чизикли боглиқ ва чизикли эркин функциялар. Вронский детерминанти ва унинг хоссалари. Ечимнинг фундаментал системаси. Остроградский -Лиувилл формуласи.

Бир жинсли бўлмаган  $n$  – тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг умумий ва хусусий ечимларини топиш. Ечимнинг хоссалари. Умумий ечим ҳақида теорема. Ўзгармасни вариациялаш методи. Коши формуласи.

Ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар, Эйлер тенгламаси. Бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари. (Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган тенгламалар).

#### **Дифференциаллар тенгламалар системаси**

Дифференциал тенгламалар системасини нормал кўринишга келтириш. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси учун мавжудлик ва ягоналик

теоремаси. Гронуолла-Белман леммаси. Чизикли дифференциал тенгламалар системаси.  $y' = A(x)Y + F(x)$  система учун мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Чизикли бир жинсли тенгламалар системаси ечимларининг хоссалари. Остроградский–Лиувилл формуласи. Чизикли бир жинсли тенгламалар системасининг умумий ечим ҳақида теорема. Чизикли бир жинсли бўлган тенгламалар системаси. Ечимларнинг хоссалари. Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида теорема. Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар системаси.

Матрица кўринишдаги чизикли тенгламалар системаси. Коши интеграл формуласи. Экспоненциал матрица. Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш.

Ечимнинг давомийлиги. Ечимнинг бошлангич қийматларга ва параметрларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақида теорема. Ечимнинг бошлангич қийматлар ва параметрлар бўйича дифференциалланувчанлиги ҳақида теорема.

Автоном системалар. Автоном ечимининг хоссалари. Автоном системанинг мувозанат ҳолати. Ҳолатлар фазоси ва траекторияси. Чизикли бир жинсли иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли автоном системанинг ҳолатлар текслиги.

### **Турғунлик назарияси**

Ляпунов маъносида турғунлик. Ечимнинг турғунлиги. Тривиал ечимнинг турғунлиги, нотурғун ва асимптотик турғунлик ҳақидаги теоремалар. Ляпуновнинг биринчи методи. Биринчи яқинланиш бўйича турғунлик.

Иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламани содда кўринишга келтириш. Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Грин функциясининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида. Ҳос сонлари ва ҳос функциялари тушунчаси. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни даражали қаторлар ёрдамида интеграллаш.

### **Биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар**

Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча. Хусусий ҳосилали биринчи тартибли квазичизикли дифференциал тенгламаларнинг хараakterистикалари. Ечим, умумий ечим ва махсус ечим тушунчаси. Коши масаласи. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси. Коши-Ковалевская теоремаси. Коши масаласининг геометрик талқини.

### **Амалий машғулотларини ташкил этиш бўйича кўрсатмалар**

Амалий машғулотларни ўтказишдан мақсад маъруза материаллари бўйича талабаларнинг билим ва кўникмаларини чуқурлаштириш ва кенгайтиришдан иборатдир. Бунда талабалар мисол ва масалалар ечишда, ечимларни тақлид қилишда олган назарий билимларини қўллаш олишлари назарда тутилади.

### **Амалий машғулотлар мавзулари**

1. Берилган эгри чизиклар асосида дифференциал тенгламалар тузиш. Изоклина.
2. Ўзгарувчилари ажралган ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли тенгламалар.
3. Чизикли дифференциал тенгламалар. Ўзгармасни вариациялаш усули.
4. Бернулли ва Риккати тенгламалари.
5. Тўла дифференциал тенгламалар. Интегралловчи кўпайтувчи ва уни топиш.
6. Ҳосиллага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар ва уларни интеграллаш усуллари.
7. Параметр киритиш йўли билан тенгламаларни интеграллаш. Лагранж ва Клеро тенгламалари.
8. Юқори тартибли дифференциал тенгламаларнинг тартибини пасайтириш. Ўзгарувчилариги нисбатан бир жинсли ва умумлашган бир жинсли юқори тартибли тенгламаларни интеграллаш.
9. Ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар.



10. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар. Эйлер тенгламаси.
11. Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар ва уларнинг хусусий ечимларини топиш.
12. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлган тенгламалар системаси.
13. Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган чизиқли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар системасини ечиш.
14. Экспоненциал матрицани ҳисоблаш. Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш.
15. Чизиқли бир жинсли иккинчи тартибли ўзгармас коэффициентли автоном системанинг ҳолатлар текислиги.
16. Тургунлик назарияси. Ечимнинг тургунлиги таъриф бўйича текшириш. Ляпуновнинг биринчи методи. Махсус нукталарнинг классификацияси.
17. Чегаравий масалалар.
18. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни даражали қаторлар ёрдамида интеграллаш.
19. Чизиксиз тенгламалар системаси.
20. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топиш. Коши масаласи.

### **Семинар машғулотларини ташкил этиш бўйича тавсиялар**

Семинар машғулотларида эътибор тегишли мавзуларни талабалар мустақил ўрганиб, маъруза Пилишга тайёрланиш, мазуни таққил Пилиб фикрлаш ва нотиқлик Побилиятини оширишга йўналтирилади.

### **Семинар машғулотлари мавзулари**

1. Дифференциал тенгламага келтириладиган физик масалалар.
2. Интегралловчи кўпайтувчи ва унинг мавжудлиги ҳақидаги теоремалар.
3. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли тенглама учун Коши масаласи.
4. Юқори тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақида теорема.
5. Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш усуллари.
6. Ечимнинг давомийлиги. Давомсиз ечимлар.
7. Ечимни чексиз давом эттириш ҳақида теорема.
8. Ечимнинг бошлангич қийматларга ва параметрларга узлуксиз боғлиқлиги ҳақида теорема.
9. Ечимнинг бошлангич қийматлар ва параметрлар бўйича дифференциалланувчанлиги ҳақида теорема.
10. Чегаравий масалалар учун Грин функцияси.
11. Штурм-Лиувилл масаласи. Ҳос сонлари ва ҳос функциялар.
12. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни даражали қаторлар ёрдамида интеграллаш.
13. Ечимнинг Ляпунов маъносида турғунлиги.
14. Чизиқли тенгламалар системаси мувозанат ҳолатининг турлари.

### **Мустақил ишларни ташкил этиш шакли ва мазмуни**

Мустақил ишни ташкил этишда унга мўлжалланган ҳар бир бўлим бўйича зарурий адабиётлар ўрганилиши ва шу бўлим бўйича ҳар бир талабага берилган вазифанинг бажарилиши назорат қилинади.

Мустақил ишда талабалар: амалий машғулотларга тайёрланади, уй вазифаларини бажаришади, назарий билимларни мустаҳкамлайди, семинар машғулотларида маъруза

қилишга тайёрланади, мустақил иш учун мўлжалланган назарий ва амалий билим мавзуларини ўзлаштирадilar.

Мустақил иш мавзуларини ўзлаштириш таълим олиш жараёнида узлуксиз назорат қилинади ва ёзма ҳисобот топширилади.

### **Мустақил иш мавзулари.**

Пар бир бўлим бўйича талабаларга мустақил ишлашлари учун вазифалар берилади. Талабаларнинг мустақил ишлари учун Пуйидаги мавзулар бўйича топшириқлар бериш мумкин:

1. Бир жинсли ва умумлашган бир жинсли дифференциал тенгламалар.
2. Чизикли дифференциал тенгламалар. Ечимнинг хоссалари.
3. Ўзгармасни вариациялаш усули.
4. Бернулли ва Риккати тенгламалари.
5. Тўла дифференциал тенгламалар.
6. Интегралловчи кўпайтувчи
7. Параметр киритиш йўли билан тенгламаларни интеграллаш.
8. Лагранж ва Клеро тенгламалари.
9. Ўнг тамони махсус кўринишда бўлган чизикли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар системасини ечиш.
10. Экспоненциал матрицани ҳисоблаш.
11. Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш.
12. Автоном системаларнинг ҳолатлар текислиги.
13. Грин функциясини қуришга доир масалалар.
14. Штурм-Лиувилл масаласи.
15. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларни даражали қаторлар ёрдамида интеграллаш.

### **Дастурнинг информатсион-услубий таъминоти**

ЭХМ ёрдамида математик физика тенгламаларининг баъзи масалаларини ечиш, чегаравий масалаларни сонли интеграллашда, чекли айирмалар усули, вариацион усуллар, Дирихле принципи. Ритц усуллари ўрганишда дастурлар тўплами (Maple, MathCad, Mathlab ва ҳ.к.) ларидан фойдаланиш. Мавзуларни ўзлаштиришда ва мустақил ишларни бажаришда адабиётлар рўйхатида келтирилган мавжуд дарсликлар, ўқув қўлланмалари, электрон адабиётлар билан методик таъминланадилар.

Дастурдаги мавзуларни ўтишда таълимнинг замонавий усуллардан кенг фойдаланиш, ўқув жараёнини янги педагогик технологиялар асосида ташкил этиш самарали натижа беради. Бу борада замонавий педагогик технологияларнинг “Ақлий ҳужум”, «Мунозарали дарс» усуллари ҳамда мавзуларга оид слайдлардан фойдаланиш назарда тутилади.

### **Фойдаланиладиган дарсликлар ва ўқув қўлланмалари рўйхати**

#### **Асосий**

1. Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, “Ўзбекистон”, 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука.. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979 (5-е издание).

#### **Қўшимча**

6. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1991. 314 с.
7. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: изд-во Моск. Ун-та. 1984.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1987.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука. 1980.
11. Самойленко А.М. и др. дифференциальные уравнения. М., 1989. 384 с.
12. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1967. 565 с.
13. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М.: Наука. 1987.
14. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М.: Изд. министерства просвещения РСФСР, 1962
15. [www.lib.homelinux.org/math](http://www.lib.homelinux.org/math)
16. [www.eknigu.com/lib/Mathematics/](http://www.eknigu.com/lib/Mathematics/)
17. [www.eknigu.com/info/M\\_Mathematics/MC](http://www.eknigu.com/info/M_Mathematics/MC)

# САМАРҚАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

«ТАСДИҚЛАЙМАН»

Ўқув ишлар бўйича

проректор \_\_\_\_\_ **проф. Солеев А.С**

-----2010 йил

## МЕХАНИКА – МАТЕМАТИКА ФАКУЛТЕТИ

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси “5460100 –математика таълим йўналиши”

**УМУМИЙ КУРС: «Оддий дифференциал тенгламалар »**

2 курс (математика гурухлари учун)

### И Ш Ч И ДАСТУР

Маъруза: **72 соат**

Амалий машғулот: **72 соат**

Мустақил иш: **134 соат**

**Тузувчилар :**

**Мухторов Я.**

**Шодиев Д.С.**

**Турсунов Ф.Р.**

Ишчи дастур кафедранинг 2010 йил 29 августдаги № 1 баённомаси билан тавсия етилган ва тасдиқланган.

Кафедра мудири:

проф. Бегматов А.Х.

Механика-математика факултети Ўқув -услугий кенгашининг 2010 йил 29 августдаги № 1баённомаси билан маъқулланган.

Ўқув-услугий кенгаш раиси:

доц. Сатторов Е.

Механика -математика факултети Илмий кенгашининг 2010 йил 29 августдаги № 1 қарори билан тасдиқланган.

Факултет декани:

доц. Курбонов Х.

С а м а р қ а н д 2 0 1 1 йил

2- курс 5460100- математика таълим йўналиши учун дифференциал тенгламалар  
фанидан

### РЕЙТИНГ НАЗОРАТЛАРИ ГРАФИГИ

Факултет: Механика - математика

Ихтисослик: 5460100- математика

Фан номи: Дифференциал тенгламалар

Соатлар сони: 72 маъруза , 72 амалиёт, 134 мустақил иш

Қурс: 2

Ўқув тили: ўзбек

Максимал балл: 100

Саралаш балл: 55

Биринчи ярим йиллик

| Ишчи ўқув дастурдаги<br>мавзулар тартиб рақами<br>(қўшимча топшириқ<br>мазмун) | Умумий соат |         |             |      | Баҳолаш<br>тури                        | Назорат<br>шакли                                              | Муддати<br>(хафта) |
|--------------------------------------------------------------------------------|-------------|---------|-------------|------|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------|--------------------|
|                                                                                | Маъруза     | Амалиёт | Мустақил иш | Жами |                                        |                                                               |                    |
| 1-7                                                                            | 18          | 20      | 28          | 66   | 1- Ж Б<br>Мах 12<br><br>1-ОБ<br>Мах 12 | Кундалик<br>назорат,<br>назорат<br>иши, уй<br>иши,<br>Ёзма иш | Декабр<br>3-хафта  |
| 8-14                                                                           | 22          | 18      | 42          | 82   | 2- Ж Б<br>12<br><br>2-ОБ<br>12         | Кундалик<br>назорат,<br>назорат<br>иши, уй<br>иши,<br>Ёзма    | Январ<br>2-хафта   |
| 15-21                                                                          | 14          | 16      | 30          | 60   | 3- Ж Б<br>11<br><br>3-ОБ<br>11         | Кундалик<br>назорат,<br>назорат<br>иши, уй<br>иши,<br>Ёзма    | Феврал<br>2-хафта  |
| 1-21                                                                           | 54          | 54      | 100         | 208  | Я.Б<br>30                              | Оғзаки                                                        | Жадвал<br>асосида  |

*Иккинчи ярим йиллик*

| Ишчи ўқув дастурдаги<br>мавзулар тартиб рақами<br>(қўшимча топшириқ<br>мазмунини) | Умумий соат |                    |             |      | Баҳолаш<br>тури                    | Назорат<br>шакли                                           | Муддати<br>(ҳафта) |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------------|-------------|------|------------------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------|
|                                                                                   | Маъруза     | Амалий<br>машғулот | Мустақил иш | Ҷами |                                    |                                                            |                    |
| 21-29<br><br>Қўшимча мавзу бўйича<br>реферат                                      | 18          | 18                 | 34          | 70   | Ж.Б.<br>Мах 35<br><br>ОБ<br>Мах 35 | Кундалик<br>назорат,<br>назорат<br>иши, уй<br>иши,<br>Ёзма | июн 2-<br>ҳафта    |
| 22-29                                                                             | 18          | 18                 | 34          | 70   | Я.Б.<br>мах 30                     | Ёзма иш                                                    | Жадвал<br>асосида  |

**МЕХАНИКА-МАТЕМАТИКА ФАКУЛТЕТИ 2 КУРС “ 5460100 -  
МАТЕМАТИКА ТАЪЛИМ ЙЎНАЛИШИ”  
УЧУН ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ФАНИДАН  
ИШЧИ ДАСТУРИ**

**1.1. Маъруза машгулотлари**

| №  | Мавзулар, болимлар                                                                                                                                                                                                                                                |   | Фойдалан<br>иш учун<br>адабиётла<br>р<br>(§, бет) | Синфга ва уйга<br>бериладиган<br>мисол ва<br>масалалар. |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1  | Кириш. Дифференциал тенгламаларга келтирила-диган масалалар. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, ечим тушунчаси, хусусий ва умумий ечим, интеграл чизик, Коши масаласи. Егри чизиклар оилсининг дифференциал тенгламасини тузиш. | 2 | [1] –1(6)<br>[2] –1 (3)<br>[2] – 1<br>(17)        | [5] 1-6: 30-34<br>[5] 17-19                             |
| 2  | Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимини мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                         | 2 | [1] §1.2<br>[3] §1<br>(140)                       | [5] 221-222                                             |
| 3  | Ўзгарувчилари ажраладиган, бир жинсли ва бир жинслига келтириладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                                                    | 4 | [3] – 9,3<br>[1] 1.5                              | [5] 52 - 64<br>102 -122                                 |
| 4  | Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари.                                                                                                                                                                                   | 2 | [3] §4,6<br>[1] 1.7;<br>1,8                       | [5] 136-160; 167                                        |
| 5  | Бернулли ва Риккати тенгламалари<br>Дарбу тенгламаси                                                                                                                                                                                                              | 2 | [3] §4,6;<br>1,8<br>[1] §1.9;<br>1,10, [3]<br>§3  | [5] 167-171                                             |
| 6  | Тўлиқ дифференциал тенглама,<br>интегралловчи кўпайтувчи.<br>Интегралловчи кўпайтувчини топиш<br>усуллари.                                                                                                                                                        | 4 | [6] §8<br>(65);<br>[3] §3<br>(100)                | [5] 186-194<br>195-210                                  |
| 7  | Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар,<br>мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                        | 2 | [3] 1,2<br>(101)<br>[2] §3<br>(109)               | [5] 251-264                                             |
| 8  | Параметр киритиш усули, тўлиқ бўлмаган<br>дифференциал тенгламалар.                                                                                                                                                                                               | 2 | [2] §4<br>(114)<br>[1] §3,3<br>(84)               | \5\ 267-286                                             |
| 9  | Лагранж ва Клеро тенгламалари<br>Махсус ечимлар ва уларнинг<br>мавжудлиги. биринчи тартибли ҳар хил<br>синфдаги тенгламалар                                                                                                                                       | 2 | [2] §4<br>(114)<br>[3] §4<br>(120)                | \5\ 287-296<br>\5\ 297<br>\5\ 301-420                   |
| 10 | Югори тартибли дифференциал<br>тенгламалар уни нормал ҳолга келтириш,                                                                                                                                                                                             | 4 | [3] §1<br>(140)                                   | \5\ 421-436                                             |

|    |                                                                                                                                                       |   |                                                                           |                              |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
|    | мавжудлик ва ягоналик теоремаси                                                                                                                       |   |                                                                           |                              |
| 11 | Квадратурага келтириладиган баъзи бир юқори тартибли дифференциал тенгламалар                                                                         | 4 | [1] §4,2<br>[2] §3,4<br>(146)                                             | \5\ 438-450                  |
| 12 | Тартибини пасайтиришга имкон берадиган юқори тартибли тенгламалар. Оралик интеграл.                                                                   | 4 |                                                                           |                              |
| 13 | n- тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                            | 2 | [3] §1<br>(180)<br>[1] §5,1(113)                                          | \5\ 641-662                  |
| 14 | n- тартибли бир чинсли чизикли дифференциал тенглама. Ечимнинг хоссалари. Остроградский формуласи.                                                    | 4 | [2] §3<br>(171)<br>[1] § 2<br>(183)                                       | \5\ 641-662                  |
| 15 | Бир жинсли бўлмаган n-чи тартибли чизикли дифференциал тенглама ўғармасларни, вариациялаш усули                                                       | 2 | [1] §5,3<br>(130)<br>[3] § 3<br>(199)                                     | \5\ 575 – 581                |
| 16 | n- тартибли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламалар.<br>n- тартибли ўғармас коэффицентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар  | 2 | [2] §6<br>(193)<br>[3] § 1<br>(214)<br>[2] §5<br>(184)<br>[3] §1<br>(224) | \5\ 511-532<br>\5\ 533- 548  |
| 17 | n- тартибли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффицентли чизикли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари                          | 2 | [3] §2<br>(224)                                                           | \5\ 549-574                  |
| 18 | Эйлернинг бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалари. Чебишев, Бессел тенгламалари.                                                  | 2 | [1] §6,6<br>(160)<br>[3] §1<br>(214)                                      | \5\ 576 – 581<br>589-600     |
| 19 | Қўшма оператор. Қўшма тенгламалар.                                                                                                                    | 2 |                                                                           |                              |
| 20 | Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар назарияси таққослаш теоремаси Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Хос сонлари ва хос функциялар тушунчаси. | 2 | [1] §7.1<br>(167)<br>[3] § 2<br>(241)<br>[1] §7.3<br>(507)                | \5\ 706 – 715<br>\5\ 751-775 |
| 21 | Дифференциал тенгламалар системанинг нормал шакли. Нормал система учун мавжудлик ва ягоналик системаси. Гронуолла- Белман леммаси                     | 2 | [3] §1<br>(260)<br>[2] § 1<br>(222)                                       | \5\ 813 – 825                |
| 22 | Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси Ўзгармасларни вариациялаш усули | 2 | [1] § 2,2<br>(230)<br>[3] §2<br>(275)                                     | \5\ 786-812                  |



|    |                                                                                                                                                                         |    |                                           |                        |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------|------------------------|
| 23 | Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси.                                                                                 | 2  | [3] §2 (280)<br>[2] § 6 (240)             | \5\ 826-834<br>846-850 |
| 24 | Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Экспоненциал матрица.                                                                                                 | 2  | [4] §1.2 (511)                            | \5\ 851 – 866          |
| 25 | Даламбер усули ёрдамида дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Юқори тартибли тенгламага келтириш усули.                                                               | 2  | [4] §2 (507)                              | \5\ 835-845            |
| 26 | Нормал системанинг биринчи интеграллари. Етарли ва зарурий шарт, Системанинг симметрик формаси                                                                          | 2  | [2] §8.6 (217)<br>[3] §4 (364)            | \5\ 1141-1160          |
| 27 | Автоном системалар. Ечимнинг содда хоссалари. Иккинчи тартибли чизикли ва чизикли бўлмаган ўзгармас коэффициентли автоном системанинг ҳолатлар текислиги. Махсус нукта. | 2  | [1] § 10-1-10,3 (265)<br>[1] § 10,4 (280) | \5\ 1001-1020          |
| 28 | Турғунлик назариясининг элементлари. Ляпунов маъносида турғунлик. Ляпуновнинг биринчи ва иккинчи методи.                                                                | 2  | [1] §11.1, 11,2 (298)<br>[2] § 1.6 (262)  | \5\ 907-912<br>915-222 |
| 29 | Биринчи тартибли хусусий ҳосилали чизикли дифференциал тенгламалар, Коши масаласи. Характеристика усули. Коши – Ковалевская теоремаси.                                  | 4  | [1] §12.1, 12.3 (339)<br>[3] §1-3 (330)   | \5\ 1167- 1193         |
|    | ЖАМИ:                                                                                                                                                                   | 72 |                                           |                        |

## 1.2. Амалий машғулотлар

| № | Мавзулар, болимлар                                                                                                                                                                                                                                             | Ам ал иёт | бериладиган мисол ва масалалар |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|--------------------------------|
| 1 | Кириш. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган масалалар. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, ечим тушунчаси, хусусий ва умумий ечим, интеграл чизик, Коши масаласи. Эгри чизиклар оилсининг дифференциал тенгласини тузиш. | 2         | [5] 1-6: 30-34<br>[5] 17-19    |
| 2 | Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимини мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                      |           | [5] 221-222                    |
| 3 | Ўзгарувчилари ажраладиган, бир чинсли ва бир чинслига келтириладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                                                 | 6         | [5] 52 - 64<br>102 -122        |
| 4 | Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари.                                                                                                                                                                                | 2         | [5] 136-160;<br>167            |
| 5 | Бернулли ва Риккати тенгламалари<br>Дарбу тенгласи                                                                                                                                                                                                             | 2         | [5] 167-171                    |
| 6 | Тўлиқ дифференциал тенглама, интегралловчи кўпайтувчи. Интегралловчи кўпайтувчини топиш усуллари.                                                                                                                                                              | 4         | [5] 186-194<br>195-210         |
| 7 | Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                        | 4         | [5] 251-264                    |
| 8 | Параметр киритиш усули, тўлиқ бўлмаган дифференциал тенгламалар.                                                                                                                                                                                               | 2         | \5\ 267-286                    |

|    |                                                                                                                                                                         |   |                                       |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------|
| 9  | Лагранж ва Клеро тенгламалари<br>Махсус ечимлар ва уларнинг мавжудлиги. биринчи тартибли ҳар хил синфдаги тенгламалар                                                   | 4 | \5\ 287-296<br>\5\ 297<br>\5\ 301-420 |
| 10 | Юғори тартибли дифференциал тенгламалар уни нормал ҳолга келтириш, мавжудлик ва яғоналик теоремаси                                                                      |   | \5\ 421-436                           |
| 11 | Квадратурага келтириладиган баъзи бир юқори тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                           | 4 | \5\ 438-450                           |
| 12 | Тартибини пасайтиришга имкон берадиган юқори тартибли тенгламалар. Оралиқ интеграл.                                                                                     | 4 |                                       |
| 13 | n- тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари мавжудлик ва яғоналик теоремаси.                                                              | 2 | \5\ 641-662                           |
| 14 | n- тартибли бир чинсли чизикли дифференциал тенглама. Ечимнинг хоссалари. Остроградский формуласи.                                                                      | 2 | \5\ 641-662                           |
| 15 | Бир жинсли бўлмаган n- тартибли чизикли дифференциал тенглама ўғармасларни, вариациялаш усули                                                                           | 2 | \5\ 575 – 581                         |
| 16 | n- тартибли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар.<br>n- тартибли ўғармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар                  | 4 | \5\ 511-532<br>\5\ 533- 548           |
| 17 | n- тартибли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари                                           | 2 | \5\ 549-574                           |
| 18 | Эйлернинг бир жинсли ва бир чинсли бўлмаган дифференциал тенгламалари. Чебишев, Бессел тенгламалари.                                                                    | 2 | \5\ 576 – 581<br>589-600              |
| 19 | Қўшма оператор. Қўшма тенгламалар.                                                                                                                                      | 2 | \5\ 706 – 715                         |
| 20 | Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар назарияси таққослач теоремаси<br>Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Хос сонлари ва хос функциялар тушунчаси.                | 2 | \5\ 751-775                           |
| 21 | Дифференциал тенгламалар системанинг нормал шакли. Нормал система учун мавжудлик ва яғоналик теоремаси. Гронуолла-Белман леммаси                                        | 2 | \5\ 813 – 825                         |
| 22 | Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси Ўзгармасларни вариациялаш усули                   | 2 | \5\ 786-812                           |
| 23 | Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси.                                                                                 | 2 | \5\ 826-834<br>846-850                |
| 24 | Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Экспоненциал матрица.                                                                                                 | 2 | \5\ 851 – 866                         |
| 25 | Даламбер усули ёрдамида дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Юқори тартибли тенгламага келтириш усули.                                                               | 2 | \5\ 835-845                           |
| 26 | Нормал системанинг биринчи интеграллари. Етарли ва зарурий шарт, системанинг симметрик формаси                                                                          |   | \5\ 1141-<br>1160                     |
| 27 | Автоном системалар. Ечимнинг содда хоссалари. Иккинчи тартибли чизикли ва чизикли бўлмаган ўзгармас коэффициентли автоном системанинг ҳолатлар текислиги. Махсус нукта. | 2 | \5\ 1001-<br>1020                     |
| 28 | Турғунлик назариясининг элементлари. Ляпунов маъносида турғунлик. Ляпуновнинг биринчи ва иккинчи методи.                                                                | 4 | \5\ 907-912<br>915-222                |
| 29 | Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар чизикли дифференциал                                                                                                                 | 4 | \5\ 1167-                             |

|  |                                                                                 |    |      |
|--|---------------------------------------------------------------------------------|----|------|
|  | тенгламалар, Коши масаласи. Характеристика усули. Коши – Ковалевская теоремаси. |    | 1193 |
|  | ЖАМИ:                                                                           | 72 |      |

### 1.3. Мустақил ишлар

| №  | Мавзулар                                                                                                                                                                                                                                                         | Мустақил иш | Фойдаланиш учун адабиётлар (§, бет)           | Синфга ва уйга бериладиган мисол ва масалалар. |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-----------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1  | Кириш. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган масалалар. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, ечим тушунчаси, хусусий ва умумий ечим, интеграл чизик, Коши масаласи. Эгри чизиклар оилсининг дифференциал тенгламасини тузиш. | 4           | [1] –1(6)<br>[2] –1 (3)<br>[2] – 1 (17)       | [5] 1-6: 30-34<br>[5] 17-19                    |
| 2  | Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимини мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                        | 4           | [1] §1.2<br>[3] §1 (140)                      | [5] 221-222                                    |
| 3  | Ўзгарувчилари ажраладиган, бир жинсли ва бир жинслига келтириладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                                                   | 4           | [3] – 9,3<br>[1] 1.5                          | [5] 52 - 64<br>102 -122                        |
| 4  | Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари.                                                                                                                                                                                  | 4           | [3] §4,6<br>[1] 1.7;<br>1,8                   | [5] 136-160;<br>167                            |
| 5  | Бернулли ва Риккати тенгламалари Дарбу тенгламаси                                                                                                                                                                                                                | 4           | [3] §4,6;<br>1,8<br>[1] §1.9;<br>1,10, [3] §3 | [5] 167-171                                    |
| 6  | Тўлиқ дифференциал тенглама интегралловчи кўпайтувчи. Интегралловчи кўпайтувчини топиш усуллари.                                                                                                                                                                 | 4           | [6] §8 (65);<br>[3] §3 (100)                  | [5] 186-194<br>195-210                         |
| 7  | Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                          | 4           | [3] 1,2 (101)<br>[2] §3 (109)                 | [5] 251-264                                    |
| 8  | Параметр киритиш усули, тўлиқ бўлмаган дифференциал тенгламалар.                                                                                                                                                                                                 | 6           | [2] §4 (114)<br>[1] §3,3 (84)                 | \5\ 267-286                                    |
| 9  | Лагранж ва Клеро тенгламалари Махсус ечимлар ва уларнинг мавжудлиги. биринчи тартибли ҳар хил синфдаги тенгламалар                                                                                                                                               | 6           | [2] §4 (114)<br>[3] §4 (120)                  | \5\ 287-296<br>\5\ 297<br>\5\ 301-420          |
| 10 | Юғори тартибли дифференциал тенгламалар уни нормал ҳолга келтириш, мавжудлик ва ягоналик теоремаси                                                                                                                                                               | 6           | [3] §1 (140)                                  | \5\ 421-436                                    |
| 11 | Квадратурага келтириладиган баъзи бир                                                                                                                                                                                                                            | 6           | [1] §4,2                                      | \5\ 438-450                                    |

|    |                                                                                                                                                         |   |                                                                           |                              |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
|    | юқори тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                 |   | [2] §3,4<br>(146)                                                         |                              |
| 12 | Тартибини пасайтиришга имкон берадиган юқори тартибли тенгламалар. Оралик интеграл.                                                                     | 6 |                                                                           |                              |
| 13 | n- тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                              | 6 | [3] §1<br>(180)<br>[1]<br>§5,1(113)                                       | \5\ 641-662                  |
| 14 | n- тартибли бир чинсли чизикли дифференциал тенглама. Ечимнинг хоссалари. Остроградский формуласи.                                                      | 6 | [2] §3<br>(171)<br>[1] § 2<br>(183)                                       | \5\ 641-662                  |
| 15 | Бир жинсли бўлмаган n-чи тартибли чизикли дифференциал тенглама ўзгармасларни, вариациялаш усули                                                        | 4 | [1] §5,3<br>(130)<br>[3] § 3<br>(199)                                     | \5\ 575 – 581                |
| 16 | n- тартибли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар.<br>n- тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар | 6 | [2] §6<br>(193)<br>[3] § 1<br>(214)<br>[2] §5<br>(184)<br>[3] §1<br>(224) | \5\ 511-532<br>\5\ 533- 548  |
| 17 | n- тартибли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари                           | 4 | [3] §2<br>(224)                                                           | \5\ 549-574                  |
| 18 | Эйлернинг бир жинсли ва бир чинсли бўлмаган дифференциал тенгламалари. Чебишев, Бессел тенгламалари.                                                    | 2 | [1] §6,6<br>(160)<br>[3] §1<br>(214)                                      | \5\ 576 – 581<br>589-600     |
| 19 | Қўшма оператор. Қўшма тенгламалар.                                                                                                                      | 6 |                                                                           |                              |
| 20 | Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар назарияси таққослаш теоремаси Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Хос сонлари ва хос функциялар тушунчаси.   | 4 | [1] §7.1<br>(167)<br>[3] § 2<br>(241)<br>[1] §7.3<br>(507)                | \5\ 706 – 715<br>\5\ 751-775 |
| 21 | Дифференциал тенгламалар системанинг нормал шакли. Нормал система учун мавжудлик ва ягоналик системаси. Гронуолла- Белман леммаси                       | 4 | [3] §1<br>(260)<br>[2] § 1<br>(222)                                       | \5\ 813 – 825                |
| 22 | Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси Ўзгармасларни вариациялаш усули   | 4 | [1] § 2,2<br>(230)<br>[3] §2<br>(275)                                     | \5\ 786-812                  |
| 23 | Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган                                                                                        | 4 | [3] §2<br>(280)                                                           | \5\ 826-834<br>846-850       |

|    |                                                                                                                                                                        |     |                                                  |                        |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------|------------------------|
|    | тенгламалар системаси.                                                                                                                                                 |     | [2] § 6<br>(240)                                 |                        |
| 24 | Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Экспоненциал матрица.                                                                                                | 4   | [4] §1.2<br>(511)                                | \5\ 851 – 866          |
| 25 | Даламбер усули ёрдамида дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Юқори тартибли тенгламага келтириш усули.                                                              | 4   | [4] §2<br>(507)                                  | \5\ 835-845            |
| 26 | Нормал системанинг биринчи интеграллар. Етарли ва зарурий шарт, системанинг симметрик формаси                                                                          | 4   | [2] §8.6<br>(217)<br>[3] §4<br>(364)             | \5\ 1141-1160          |
| 27 | Автоном системалар. Ечимнинг содда хоссалари. Иккинчи тартибли чизикли ва чизикли бўлмаган ўзгармас коэффицентли автоном системанинг ҳолатлар текислиги. Махсус нукта. | 6   | [1] § 10-1-<br>10,3 (265)<br>[1] § 10,4<br>(280) | \5\ 1001-1020          |
| 28 | Турғунлик назариясининг элементлари. Ляпунов маъносида турғунлик. Ляпуновнинг биринчи ва иккинчи методи.                                                               | 4   | [1] §11.1,<br>11,2 (298)<br>[2] § 1.6<br>(262)   | \5\ 907-912<br>915-222 |
| 29 | Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар чизикли дифференциал тенгламалар, Коши масаласи. Характеристика усули. Коши – Ковалевская теоремаси.                                | 4   | [1] §12.1,<br>12.3 (339)<br>[3] §1-3<br>(330)    | \5\ 1167- 1193         |
|    | ЖАМИ:                                                                                                                                                                  | 134 |                                                  |                        |

### Асосий адабиётлар

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз.Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

### Кушимча адабиётлар

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск.Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорук М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989.384с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амеликин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

**Дифференциал тенгламалар фани бўйича жорий назоратларда  
талабалар билими ва амалий кўникма даражасини аниқлаш мезони  
(мах балл-35)**

| Максимал балл |          |          | Назорат<br>қилинадиган ва<br>баҳоланадиган иш<br>турлари         | Баҳолашда эътибор қаратиладиган жиҳатлар                                                                                                                                      |
|---------------|----------|----------|------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1-<br>ЖН      | 2-<br>ЖН | 3-<br>ЖН |                                                                  |                                                                                                                                                                               |
| 2             | 2        | 2        | Мавзулар бўйича назарий тайёргарлик даражаси ва дарсдаги фаоллик | Асосий тушунчалар, таърифлар, теоремалар ва формулаларни билиш, моҳиятини тушуниш, ижодий фикрлай олиш, билимларни амалда қўллай олиш                                         |
| 2             | 2        | 2        | Уйга берилган топшириқларни бажариш сифати                       | Топшириқларни тўғри ва тўлиқ бажариш, масалаларни ҳал қилишга ижодий ёндашиш, тушунтириб бера олиш                                                                            |
| 6             | 6        | 5        | Назорат ишларини бажариш сифати                                  | Топшириқларни тўғри ва тўлиқ бажариш, ижодий ёндашиш, мустақил фикрлаш, ечимни асослай олиш                                                                                   |
| 2             | 2        | 2        | Мустақил топшириқларни бажарилиш сифати                          | Берилган топшириқни тўғри ва тўлиқ бажариш, мустақил мулоҳаза юрита олиш, билимларни амалда қўллай олиш, масалага ижодий ижодий ёндашиш, моҳиятини тушуниш ва айтиб бера олиш |
| 12            | 12       | 11       |                                                                  |                                                                                                                                                                               |

**Дифференциал тенгламалар фани бўйича оралик ва якуний назоратларда  
талабалар билими ва амалий кўникма даражасини аниқлаш мезони  
(ОН бўйича мах балл-35, ЯБ бўйича мах балл – 30)**

| Савол<br>лар |   | ОН (мах балл) |          |       | ЯН<br>(мах<br>балл) | Баҳолашда эътибор қаратиладиган жиҳатлар                                                                                                                                                   |
|--------------|---|---------------|----------|-------|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|              |   | 1-<br>ОН      | 2-<br>ОН | 3- ОН |                     |                                                                                                                                                                                            |
| Наза<br>рий  | 1 | 2             | 2        | 2     | 6                   | Асосий тушунчалар, таърифлар, формулалар, теоремаларни ва уларни исботини билиш, моҳиятини тушуниш, тасаввур қилиш ва айтиб бера олиш, ижодий фикрлай олиш ва мустақил мулоҳаза юрита олиш |
|              | 2 | 2             | 2        | 2     | 6                   |                                                                                                                                                                                            |
| Ама<br>лий   | 3 | 3             | 3        | 2     | 6                   | Топшириқларни тўғри ва тўлиқ бажариш, ижодий ёндашиш, мустақил фикрлаш, ечимни асослай олиш, моҳиятини тушуниш                                                                             |
|              | 4 | 3             | 3        | 3     | 6                   |                                                                                                                                                                                            |

|            |   |    |    |    |    |                                                                                                                       |
|------------|---|----|----|----|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Муст<br>иш | 5 | 2  | 2  | 2  | 6  | Саволга тўлиқ ва тўғри жавоб бериш, мисоллар билан асослаш, ижодий ёндашиш, моҳиятини тушуниш ва тушунтириб бера олиш |
| Жами       |   | 12 | 12 | 11 | 30 |                                                                                                                       |

**Дифференциал тенгламалар фани бўйича рейтинг назоратларида ўзлаштириш кўрсаткичини аниқлаш мезони**

| ЖН            | ОН            | ЯН            | Баҳолашларда эътибор қаратиладиган асосий жиҳатлар                                                                                                                                                                                                    |
|---------------|---------------|---------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 31-35<br>балл | 31-35<br>балл | 27-30<br>балл | Асосий тушунча, таъриф, формула, теоремалар исботларни билиш амалда қўллай олиш, моҳиятини тушуниш, ижодий фикрлай олиш, тасаввурга эга бўлиш, айтиб бера олиш, мустақил мушоҳада юрита олиш, топшириқларни аниқ ва тўғри бажариш.                    |
| 25-30<br>балл | 25-30<br>балл | 22-26<br>балл | Асосий тушунча, таъриф, формула, теоремаларни билиш, енгил исботларни бажара олиш, билимларни амалда қўллай олиш, ижодий ёндашишга ҳаракат қилиш, тасаввурга эга бўлиш, топшириқларни тўғри бажариш ва тушунтириш.                                    |
| 19-24<br>балл | 19-24<br>балл | 17-21<br>балл | Асосий тушунча, таъриф, формула ва теоремаларни билиш ва амалда қўллай олиш, моҳиятини бироз тушуниш ва тўлиқ бўлмаган тасаввурга эга бўлиш. Амалий топшириқларни деярли тўғри бажариш ва тушунтириб беришга ҳаракат қилиш.                           |
| 0-18<br>балл  | 0-18<br>балл  | 0-16<br>балл  | Асосий тушунча, таъриф, формула ва теоремаларни тўлиқ билмаслик ва амалда қўллай олмаслик мустақил мулоҳаза юрита олмаслик, етарлича тасаввурга эга бўлмаслик ва тушунтира олмаслик, топшириқларни тўлиқ бажармаслик ва қўпол хатоликларга йўл қўйиш. |

Дифференциал тенгламалар  
фанидан  
**КАЛЕНДАР ИШ РЕЖАСИ**

**маъруза**

| Ўтиладиган мавзулар                                                                                                                                                                                                                                              | Соат | Ўтказиш Санаси | Ижро белгиси | Изоҳ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|----------------|--------------|------|
| Кириш. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган масалалар. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, ечим тушунчаси, хусусий ва умумий ечим, интеграл чизик, Коши масаласи. Эгри чизиклар оилсининг дифференциал тенгламасини тузиш. | 2    |                |              |      |
| Ўзгарувчилари ажраладиган, бир жинсли ва бир жинслига келтириладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                                                   | 6    |                |              |      |
| Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари.                                                                                                                                                                                  | 2    |                |              |      |
| Бернулли ва Риккати тенгламалари<br>Дарбу тенгламаси                                                                                                                                                                                                             | 2    |                |              |      |
| Тўлиқ дифференциал тенглама, интегралловчи кўпайтувчи. Интегралловчи кўпайтувчини топиш усуллари.                                                                                                                                                                | 4    |                |              |      |
| Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                          | 4    |                |              |      |
| Параметр киритиш усули, тўлиқ бўлмаган дифференциал тенгламалар.                                                                                                                                                                                                 | 2    |                |              |      |
| Лагранж ва Клеро тенгламалари<br>Махсус ечимлар ва уларнинг мавжудлиги. биринчи тартибли ҳар хил синфдаги тенгламалар                                                                                                                                            | 4    |                |              |      |
| Квадратурага келтириладиган баъзи бир юқори тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                                                                                    | 4    |                |              |      |
| Тартибини пасайтиришга имкон берадиган юқори тартибли тенгламалар. Оралик интеграл.                                                                                                                                                                              | 4    |                |              |      |
| n- тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                       | 2    |                |              |      |
| n- тартибли бир чинсли чизикли дифференциал тенглама. Ечимнинг хоссалари. Остроградский формуласи.                                                                                                                                                               | 2    |                |              |      |
| Бир жинсли бўлмаган n-чи тартибли чизикли дифференциал тенглама ўзгармасларни, вариациялаш усули                                                                                                                                                                 | 4    |                |              |      |
| n- тартибли ўзгармас коэффицентли дифференциал тенгламалар. n-чи тартибли ўзгармас коэффицентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар                                                                                                             | 4    |                |              |      |
| n-чи тартибли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффицентли чизикли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари                                                                                                                                   | 4    |                |              |      |
| Эйлернинг бир жинсли ва бир чинсли бўлмаган дифференциал тенгламалари. Чебишев, Бессел тенгламалари.                                                                                                                                                             | 2    |                |              |      |
| Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар назарияси таққослач теоремаси<br>Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Хос сонлари ва хос функциялар тушунчаси.                                                                                                         | 2    |                |              |      |
| Жами                                                                                                                                                                                                                                                             | 54   |                |              |      |
| 2-сем                                                                                                                                                                                                                                                            |      |                |              |      |
| Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси ўзгармасларни вариациялаш усули                                                                                                            | 2    |                |              |      |
| Ўзгармас коэффицентли чизикли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси.                                                                                                                                                                           | 2    |                |              |      |
| Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Экспоненциал матрица.                                                                                                                                                                                          | 2    |                |              |      |
| Даламбер усули ёрдамида дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Юқори тартибли тенгламага келтириш усули.                                                                                                                                                        | 2    |                |              |      |
| Автоном системалар. Ечимнинг содда хоссалари. Иккинчи тартибли чизикли ва чизикли бўлмаган ўзгармас коэффицентли автоном системанинг ҳолатлар текислиги. Махсус нукта.                                                                                           | 2    |                |              |      |
| Турғунлик назариясининг элементлари. Ляпунов маъносида турғунлик. Ляпуновнинг биринчи методи.                                                                                                                                                                    | 4    |                |              |      |
| Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар чизикли дифференциал тенгламалар, Коши масаласи. Характеристика усули. Коши – Ковалевская теоремаси.                                                                                                                          | 4    |                |              |      |



|         |    |  |  |  |
|---------|----|--|--|--|
| ЖАМИ    | 18 |  |  |  |
| Хаммаси | 72 |  |  |  |

**Дифференциал тенгламалар  
фанидан  
КАЛЕНДАР ИШ РЕЖАСИ**

**амалий машғулот**

| <b>Ўтиладиган мавзулар</b>                                                                                                                                                                                                                                        | <b>Соат</b> | <b>Ўткази<br/>ш<br/>Санаси</b> | <b>Ижро<br/>белгис<br/>и</b> | <b>Изоҳ</b> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------------------------|------------------------------|-------------|
| Кириш. Дифференциал тенгламаларга келтирила-диган масалалар. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, ечим тушунчаси, хусусий ва умумий ечим, интеграл чизиқ, Коши масаласи. Егри чизиқлар оилсининг дифференциал тенгламасини тузиш. | 2           |                                |                              |             |
| Ўзгаришлари ажраладиган, бир чинсли ва бир чинслига келтириладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                                                      | 6           |                                |                              |             |
| Биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари.                                                                                                                                                                                   | 2           |                                |                              |             |
| Бернулли ва Риккати тенгламалари<br>Дарбу тенгламаси                                                                                                                                                                                                              | 2           |                                |                              |             |
| Тўлиқ дифференциал тенглама интегралловчи кўпайтувчи.<br>Интегралловчи кўпайтувчини топиш усуллари.                                                                                                                                                               | 4           |                                |                              |             |
| Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                           | 4           |                                |                              |             |
| Параметр киритиш усули, тўлиқ бўлмаган дифференциал тенгламалар.                                                                                                                                                                                                  | 2           |                                |                              |             |
| Лагранж ва Клеро тенгламалари<br>Махсус ечимлар ва уларнинг мавжудлиги. биринчи тартибли ҳар хил синфдаги тенгламалар                                                                                                                                             | 4           |                                |                              |             |
| Квадратурага келтириладиган баъзи бир юқори тартибли дифференциал тенгламалар                                                                                                                                                                                     | 4           |                                |                              |             |
| Тартибини пасайтиришга имкон берадиган юқори тартибли тенгламалар. Оралик интеграл.                                                                                                                                                                               | 4           |                                |                              |             |
| n- тартибли чизиқли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари мавжудлик ва ягоналик теоремаси.                                                                                                                                                        | 2           |                                |                              |             |
| n- тартибли бир чинсли чизиқли дифференциал тенглама. Ёчимнинг хоссалари. Остроградский формуласи.                                                                                                                                                                | 2           |                                |                              |             |
| Бир жинсли бўлмаган n-чи тартибли чизиқли дифференциал тенглама ўгармасларни, вариациялаш усули                                                                                                                                                                   | 4           |                                |                              |             |
| n- тартибли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар.<br>n-чи тартибли ўгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизигли дифференциал тенгламалар                                                                                                          | 4           |                                |                              |             |
| n-чи тартибли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари                                                                                                                                   | 4           |                                |                              |             |
| Эйлернинг бир жинсли ва бир чинсли бўлмаган дифференциал тенгламалари. Чебишев, Бессел тенгламалари.                                                                                                                                                              | 2           |                                |                              |             |
| Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар назарияси такқослаш теоремаси<br>Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Хос сонлари ва хос функциялар тушунчаси.                                                                                                          | 2           |                                |                              |             |
| Жами                                                                                                                                                                                                                                                              | 54          |                                |                              |             |
| 2-сем                                                                                                                                                                                                                                                             |             |                                |                              |             |
| Бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар системаси. Бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламалар системаси Ўзгармасларни вариациялаш усули                                                                                                             | 2           |                                |                              |             |
| Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси.                                                                                                                                                                           | 2           |                                |                              |             |
| Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Экспоненциал матрица.                                                                                                                                                                                           | 2           |                                |                              |             |
| Даламбер усули ёрдамида дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Юқори тартибли тенгламага келтириш усули.                                                                                                                                                         | 2           |                                |                              |             |
| Автоном системалар. Ёчимнинг содда хоссалари. Иккинчи тартибли чизиқли ва чизиқли бўлмаган ўзгармас коэффициентли автоном                                                                                                                                         | 2           |                                |                              |             |

|                                                                                                                                        |    |  |  |  |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|--|--|--|
| системанинг ҳолатлар текислиги. Махсус нукта.                                                                                          |    |  |  |  |
| Турғунлик назариясининг элементлари. Ляпунов маъносида турғунлик. Ляпуновнинг биринчи методи.                                          | 4  |  |  |  |
| Биринчи тартибли хусусий ҳосилали чизикли дифференциал тенгламалар, Коши масаласи. Характеристика усули. Коши – Ковалевская теоремаси. | 4  |  |  |  |
| ЖАМИ                                                                                                                                   | 18 |  |  |  |
| Хаммаси                                                                                                                                | 72 |  |  |  |

## МАЪРУЗА 1

**Мавзу :** Дифференциал тенгламаларга олиб келадигин масалалар.

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

1. Кириш
2. Дифференциал тенгламаларга олиб келадиган масалалар
3. Дифференциал тенгламалар хақида тушунчалар
4. Ечим, умумий ечим, хусусий ечим тушунчалари.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;

- *Ўқитиш шароитлари*: техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг*: ўзбеки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

#### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

##### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: тайёргарликни текшириш (даволат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти*: ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

##### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти*: янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;

- *Шакиллар, усулар, услублар*: фронтов сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзу бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти*: ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

#### Маъруза режаси:

5. Кириш
6. Дифференциал тенгламаларга олиб келадиган масалалар
7. Дифференциал тенгламалар ҳақида тушунчалар
8. Ечим, умумий ечим, хусусий ечим тушунчалари.

**Калит сўзлар**: Дифференциал тенглама; Оддий дифференциал тенглама; Хусусий ҳосилали дифференциал тенглама; тенглама тартиби. Эгри чизиклар оиласи берилган бўлса, унга мос дифференциал тенглама тузиш қоидаси

#### 1.3.1. Маъруза матни

Дифференциал тенгламалар физика, механика, дифференциал геометрия, вариацион ҳисоб, исиклик техникаси, электротехника, кимё, биология ва иқтисод каби фанларда кенг қўлланилади.

Бу фанларда учрайдиган куплаб жараёнлар дифференциал тенгламалар ёрдамида тавсифланади. Шу тенгламаларни урганиш билан тегишли жараёнлар ҳақида бирор маълумотга, тасаввурга эга бўламиз.

Ушбу дифференциал тенгламалар, урганнилатган жараёнинг математик моделидан иборат бўлади. Бу модель канча мукамал бўлса, дифференциал тенгламаларни урганиш натижасида олинган маълумотлар жараёнларни шунча тула тавсифлайди. Шунини айтиб ўтиш кераким, табиатда учрайдиган турли жараёнлар бир хил дифференциал тенгламалар билан тавсифланиши мумкин.

**Таъриф.** Дифференциал тенглама деб, эркин узгарувчи  $x$ , номаълум функция  $y$  ва унинг ҳосилалари орасидаги боғланишдан иборат бўлган тенгламага айтилади.

У символик равишда  $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  (1) қуринишда ёзилади.

Бунда  $F$  қўрилатган соҳада уз аргументларининг узлуксиз функциясидир. (1) тенгламада эркин узгарувчи, номаълум функция ва ҳосилалардан бир нечтаси катнашмаслиги мумкин. Лекин у дифференциал тенглама бўлса,  $y$  ҳолда ҳосилалардан ҳеч бўлмаганда биттаси катнашиши шарт.

Дифференциал тенглама таркибига кирган ҳосилаларнинг энг юқори тартибига, дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади.

Масалан (1) тенглама,  $n$ -нчи тартибли дифференциал тенгламадир.

Агар тенламадаги номаълум функция факат битта эрки узгарувчига боглик булса, бундай тенгламага оддий дифференциал тенглама дейилади (ОДТ).

Агар тенгламадаги номаълум функция бир нечта эрки узгарувчига боглик булса, тенгламада хар бир эрки узгарувчилар буйича олинган хусусий хосилалар катнашиши мумкин. Бундай дифференциал тенгламаларга хусусий хосилали дифференциал тенглама дейилади.

Масалан  $u(x, y)$  функция иккита  $x, y$  аргументга боглик булсин.

У холда

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (2)$$

тенгламага иккинчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенглама дейилади.

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (3)$$

га эса биринчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенглама дейилади.

Биринчи тартибли ОДТ нинг умумий криниши

$$F(x, y, y') = 0 \quad (4)$$

дан иборат.

Агар бу тенгламани  $y'$  га нисбатан ечиш мумкин булса яъни

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) \quad (5)$$

тенглама хосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама дейилади.

Дифференциал тенгламага келтириладиган баъзи бир масалаларни карай-миз.

**Масала. 1.** Битта параметрга боглик булган эгри чизиклар оиласининг дифференциал тенгламаси тузилсин.

**Ечиш.** Маълумки битта параметрга боглик булган эгри чизиклар оиласининг умумий тенгламаси

$$F(x, y, c) = 0 \quad (6)$$

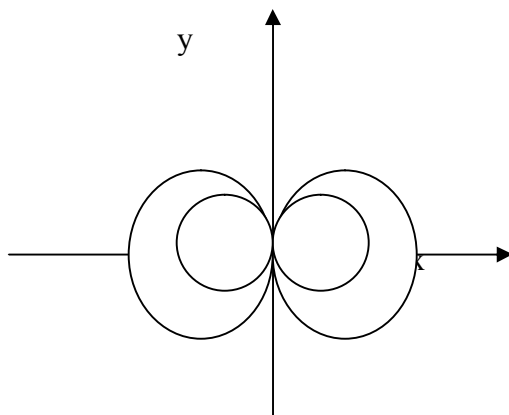
дан иборат. Бунда  $c$ - параметр булиб,  $F$  функция  $x, y(x)$  ларга нисбатан узлуксиз дифференциаланувчи функция (6) дан

$$F_x^1 + F_y^1 \cdot y' = 0 \quad (7)$$

хосилани оламиз. (6) ва (7) дан параметр  $c$  ни йукотсак изланаётган

$$\phi(x, y, y') = 0 \quad \text{дифференциал тенгламага эга буламиз.}$$

**Мисол 2.** Маркази обцисса укида булиб, ордината укига уринувчи айланалар оиласининг дифференциал тенгламаси тузилсин.



Маълумки бундай айланалар оиласининг тенгламаси  $(x - c)^2 + y^2 = c^2$  дан иборатдир, ёки очиб ёзсак

$$F(x, y, c) \equiv x^2 - 2xc + y^2 - c^2 = 0 \quad (8)$$

га эга булиб, бундан

$$\begin{aligned} 2x - 2c + 2yy' &= 0 \\ 2c &= 2x + 2yy' \end{aligned} \quad (9)$$

(8) ва (9) дан

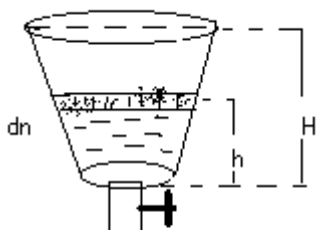
$$x^2 - x(2x + 2yy') + y^2 = 0$$

ёки

$$x^2 + 2xyy' - y^2 = 0$$

Бу изланаётган дифференциал тенгламадир. Бу тенгламанинг ечими (8) дан иборат.

**Масала 3.** Суюкликнинг идишдан окиб чиқиши учун кетган вақтни аниклаш. Идишнинг кундаланг кесим юзи  $S$  бўлсин ва у идишдаги суюклик баландлиги  $h$  нинг функция бўлсин  $S(h)$ . Идиш ичидаги суюклик идиш остида, кундаланг кесим юзи  $\omega$  бўлган жумракдан окиб чиқади.



Бизга идиш ичидаги суюкликнинг  $H$  дан  $h$  га келгунча кетган вақт  $t$  ни ва суюкликнинг тула окиб чиқиш учун кетган  $T$  вақтни аниклаш талаб этилсин.

Идишдаги суюклик микдорининг узгариш тезлиги  $\dot{Q}$  ҳам идишдаги суюклик баландилиги  $h$ -нинг функция бўлсин  $\dot{Q}(h)$ .  $dt$  вақт ичида идишдан окиб чиқкан суюклик микдори  $dQ$  цилиндр шаклида булиб, бу цилиндрнинг баландилиги  $\dot{Q}(h) dt$  ва асоси  $\omega$  дан иборат бўлгани учун, окиб чиқкан суюклик микдори

$$dQ = \dot{Q}(h) \cdot \omega dt \quad (10)$$

дан иборат бўлади. Иккинчи томонидан бу окиб чиқкан суюклик микдорини бошқача ҳам ҳисоблаш мумкин.

$dt$  вақт ичида идишдаги суюклик сатҳи  $dh$  га камаяди.

У ҳолда бу суюклик микдори

$$dQ = -S(h)dh \quad (dh < 0) \quad (11)$$

дан иборат

(10) ва (11) га асосан

$$\omega \dot{Q}(h) dt = -S(h)dh$$

ёки

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega \dot{Q}(h)} dh \quad (12)$$

дифференциал тенгламага эга буламиз (12) ни интегралласак

$$t = -\int_H^h \frac{S(h)}{\omega \vartheta(h)} dh = \frac{1}{\omega} \int_h^H \frac{S(h)}{\vartheta(h)} dt$$

$$T = \frac{1}{\omega} \int_h^H \frac{S(h)}{\vartheta(h)} dh$$

Агар идиш остидаги жумракнинг кундаланг кесим юзи кичик булса, Торичелли конунига асосан, идишдан суюкликнинг окиб чиқиш тезлиги

$$\vartheta(h) = \mu \sqrt{2gh}$$

формула билан аникланади.

Бунда  $\mu$  - суюкликнинг ёпишкоклигига, идиш формасига ва бошкаларга боглик булиб сув учун  $\mu = 0,6$  га тенг.

У холда юкоридаги формулалар.

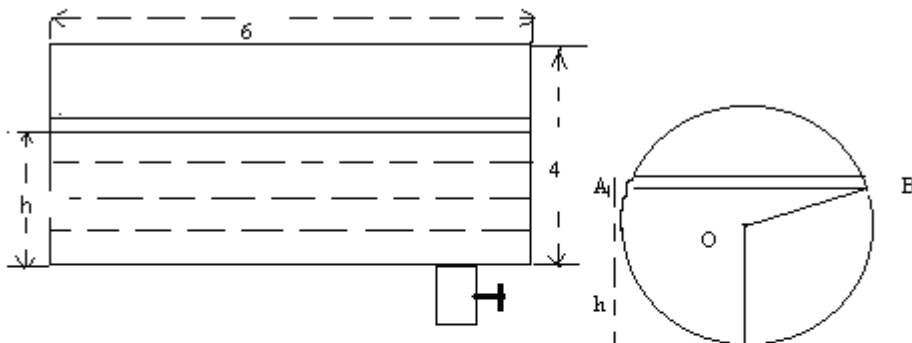
$$t = \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \int_h^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh$$

$$T = \frac{1}{\mu \omega \sqrt{2g}} \int_0^H \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh$$

қуринишга келади.

Мисол 4. Горизонтал холдаги цилиндрик бакнинг узунлиги 6 метр, диаметри 4 метр.

Бу бак ичидаги суюклик радиуси  $\frac{1}{12}$  метрли жумракдан неча минутда окиб чиқади.



$AB = b$  булсин

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2^2 - (h-2)^2 \quad \frac{b^2}{4} = 4 - h^2 + 4h - 4 = 4h - h^2$$

$$b = 2\sqrt{h}\sqrt{4-h} \quad S(h) = 6 \cdot b = 12\sqrt{h}\sqrt{4-h}$$

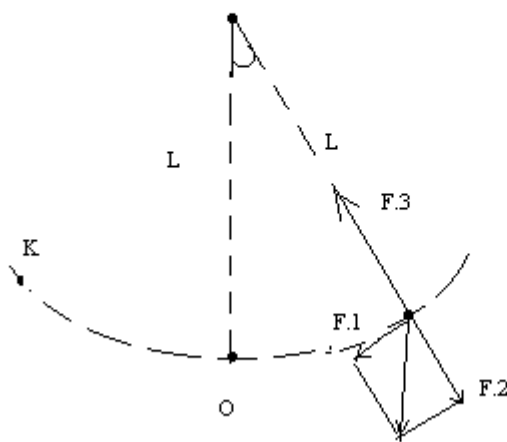
$$T = \frac{1}{0,6 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 \pi \sqrt{2g}} \int_0^4 \frac{12\sqrt{h}\sqrt{4-h}}{\sqrt{h}} dh = \frac{12^3}{0,6\pi\sqrt{2g}} \int_0^4 \sqrt{4-h} dh = \frac{12^3}{0,6\pi\sqrt{2g}} \left[ -\frac{2}{3}(4-h)^{3/2} \right]_0^4 =$$

$$= \frac{12^3 \cdot 2 \cdot 4^{3/2}}{3 \cdot 0,6\pi\sqrt{2g}} \approx 1104 \text{сек} \approx 18,4 \text{мин.}$$

**Масала 4.** Математик тебрангич (маятник) нинг харакат тенгламасини келтириб чикаринг.

Вертикал текисликда ётган  $\ell$  радиусли К айлана бўйлаб, огирлик кучи таъсири остида харакат килувчи  $m$  массага эга булган Р нукта математик тебрангични тасвирлайди.

Хар бир моментда Р нуктанинг сёрни  $\varphi(t)$  бурчак билан тула аникланади.



Масаланинг шарти буйича Р нукта фақат огирлик куч таъсири остида харакат килади. Аммо бу харакатдада айлананинг роли бор.

У Р нуктани айлана бўйлаб харакат килишга мажбур этади. Яъни Р нуктага айлананинг ички нормали буйича йуналган  $F$  кучи таъсир этади. Агар тортиш кучи  $mg$  ни иккита ташкил этувчига ажратсак

$$F_1 = -mg \sin \varphi, \quad F_2 = -mg \cos \varphi$$

у холда  $F_1 + F_2 = 0$  булади.

Шундай килиб, Р га таъсир этаётган кучларнинг тенг таъсир этувчиси

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = F_1 = -mg \sin \varphi$$

Демак Рнуктанинг харакат тенгламаси Ньютоннинг иккинчи конунига асосан

$$ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \quad \text{ёки} \quad l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi$$

куринишда булади. Бу эса иккинчи тартибли дифференциал тенгламадир.



**Масала 5.** Жисм 10 минут ичида  $100^0$ дан  $60^0$ га совуйди. Агар атроф мухитнинг температураси  $20^0$  булса, канча вақтдан сунг жисмнинг температураси  $25^0$ га тушади.

**Ечиш.** Ньютон конунига асосан жисмнинг хавода совиш тезлиги, хаво билан жисм темпратуралари айирмасига пропорционал.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20) \quad (13)$$

бунда

$T$  – жисм температураси,  $\frac{dT}{dt}$  - жисмнинг совиш тезлиги,  $k$ - пропорционаллик коэффициент  
(3) дан

$$\frac{dT}{T - 20} = -kdt$$

Буни интеграллаймиз;  $\ln(T - 20) = -kt + \ln c$

ёки  $T - 20 = c\ell^{-kt}$

масаладаги шартлардан фойдаланамиз;

$$t = 0 \text{ булганда } T = 100^0$$

$$100^0 - 20^0 = c\ell^{-k \cdot 0} \quad c = 80^0 \quad T - 20^0 = 80^0 \ell^{-ke}$$

$$t = 10 \text{ булганда } T = 60^0 \quad 60^0 - 20^0 = 80^0 \ell^{-10k} \quad \ell^{-10k} = \frac{1}{2}$$

$$\ell^{-ke} = \ell^{(-10k)\frac{t}{10}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

$$T = 25^0 \quad 25^0 - 20^0 = 80^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \quad 5 = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \quad \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \quad \frac{t}{10} = 4 \quad t = 40 \text{ мин.}$$

Ж; 40 минут

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

Саволлар.

1. Дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
2. Дифференциал тенглама тартиби кандай аникланади?
3. Оддий дифференциал тенглама билан хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг фарқи нимадан иборат?
4. Битта параметрга боғлиқ булган эгри чизиклар оиласининг дифференциал тенгламаси кандай тузилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Бир узгарувчи функция деб, нимага айтилади?
2. Кўп узгарувчи функция деб, нимага айтилади?
3. Дифференциал тенглама деб нимага айтилади?
4. Дифференциал тенглама тартиби кандай аникланади?

### 1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар

1. Оддий дифференциал тенглама билан хусусий хосилали дифференциал тенгламанинг фарқи нимадан иборат?
2. Битта параметрга боғлиқ булган эгри чизиклар оиласининг дифференциал тенгламаси қандай тузилади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириши*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия этилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.

Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 – е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.

Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.

Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.

Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.

Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.

Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с

Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.

Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### 1.4. Ўқитиш усуллари қоидалари

#### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлар туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «–» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
  - Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРУЗА 2**

**Мавзу :** Хосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. Ечим тушунчаси. Хусусуий ва умумуий ечим, интеграл чизик. Коши масаласи.

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

1. Хосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар.
2. Ечим тушунчаси.
3. Хусусуий ва умумуий ечим, интеграл чизик. Коши масаласи.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;

- *Ривожлантирувчи*: китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, хулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи*: актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари*: инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари*: фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари*: Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари*: техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг*: ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;

- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустахкамловчи сўров.

## 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини таркатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўкилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустахкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий хужум, “Инсерт” техникаси.

## 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

#### Маъруза режаси:

1. Хосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар.
2. Ечим тушунчаси.
3. Хусусуий ва умумий ечим, интеграл чизик. Коши масаласи.

**Калит сўзлар:** Дифференциал тенглама, ечим, умумий ечим, умумий интеграл, интеграл чизик изоклина. Коши масаласи.

#### 1.3.1. Маъруза матни

Биринчи тартибли оддий дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Агар (1) тенгламанинг  $y'$  га нисбатан ечиш мумкин бўлса

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

тенгламага эга бўламиз.

Бунда  $f(x, y)$  функция  $R^2$  текисликнинг (сонлар текислиги  $R^2 = \{(a, b); a \in R, b \in R\}$   $R$  -хакикий сонлар туплами)  $G$  соҳасида аниқланган бўлсин. Агар  $J$  (очик, ёпик ёки ярим очик) интервалда аниқланган  $y = \varphi(x)$

функция учун қуйидаги ўрта шарт:

1.  $(x, \varphi(x)) \in G, \quad G \subset R^2, \quad x \in J$
2.  $\varphi(x) \in C^1(J)$
3.  $\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)), \quad x \in J$

бажарилса, у ҳолда бу функция  $J$  интегралда (2) тенгламанинг ечими дейилади.

Агар  $y = \psi(x, c)^{(3)}$  функция, (2) тенгламани каноатлантирса, унга тенгламанинг умумий ечими дейилади.

Бунда  $c$ - ихтиёрий узгармас сон (параметр) Баъзи вақтларда умумий ечим ошқармас

$$F(x, y, c) = 0 \quad (4)$$

равишда берилиши мумкин (4) ечимга, тенгламанинг умумий интегралли дейилади. Тенгламанинг умумий  $y = \psi(x, c)$  ечими ёки умумий  $F(x, y, c) = 0$

интегралли, геометрик нуктаи назардан, битта параметрга боғлиқ бўлган эгри чизиклар оиласини ифода қилади. Текисликда ҳар бир ечим эгри чизикдан иборат. Унга тенгламанинг интеграл чизиги дейилади. (2)

тенгламани геометрик нуктаи назардан текшира миз.

$x$  ва  $y$  узгарувчини текисликдаги нуктанинг декарт координаталари учун қабул. Қилсак, у ҳолда  $f(x, y)$  функция аниқланган  $G$  соҳанинг ҳар бир  $x, y$  нуктасига (2) тенглама,  $G$  соҳанинг ҳар бир нуктадан ўтувчи интеграл чизикка ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини ифода қилади. Бошқача айтганда  $\frac{dy}{dx}$  қийматини

мос қуяди.  $\frac{dy}{dx}$  нинг қиймати,  $y = \varphi(x)$  интеграл чизигининг ихтиёрий нуктасига ўтказилган уринманинг абцисса ўқининг мусбат йўналиши билан ташкил этган бурчакнинг  $\tan$  ини билдиради. Яъни ҳар бир нуктада уринманинг йўналишини аниқлайди. Биз йўналишлар майдонига эга бўламиз.

Демак геометрик нуктаи назардан биринчи тартибли дифференциал тенгламани ечиш, шундай чизикларни топиш керакким унинг ҳар бир нуктасига ўтказилган уринманинг йўналиши, шу нуктадаги йўналишлар майдонига мос келсин.

**ТАЪРИФ.** Бир хил йўналиш майдонига эга бўлган нукталарнинг геометрик урнига изоклина дейилади.

Изоклиналарга қура, дифференциал тенгламаларнинг интеграл чизиларни чизиш мумкин.

**Изоклиналар усули.**

Ҳосиллага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (2)$$

Дифференциал тенгламанинг интеграл чизикларини чизиш учун қуйидаги ишларни бажариш керак.

1. Агар берилган дифференциал тенглама ҳосиллага нисбатан ечилмаган бўлса, даставвал уни ҳосиллага нисбатан ечиб оламиз.
2. Интеграл чизикларнинг чапдан унга томон ҳаракат этганда, унинг йўналишини аниқлаймиз;

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) > 0$$

шарти бажарилган сохада интеграл чизиклар юкорига караб йуналади.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) < 0$$

шарти бажариладиган сохада интеграл чизиклар пастгга караб йуналади.

3. Дифференциал тенгламанинг изоклиналар оиласи тенгламасини тузамиз.

$$f(x, y) = k \quad (k = 0; \pm 1; 2, \dots)$$

бунда k-параметр.

Бу изоклиналар ичида энг ахамиятлиси  $k=0$ ;  $k=\pm 1$  кийматдаги изоклинадир.  $k=0$  булганда берилган дифференциал тенглама

$$f(x, y) = 0$$

куринишни олади.

Бу интеграл чизикларнинг максимум ва минимум ётадигин нукталарининг геометрик урни булиб, бунда

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) > 0 \end{cases}$$

шарти бажариладиган сохада интеграл чизикларининг минимум нукталари ётади.

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ f'_x(x, y) < 0 \end{cases}$$

шарти бажариладиган сохада интеграл чизикларнинг максимум нукталари ётади.

$k = -1$  булса,  $f(x, y) = -1$  изоклинали хосил киламиз.

Интеграл чизиклар, бу изоклина билан кесишган нукталарида бурчак коэффициенти  $-1$  га тенг булган уринмаларга эга булади. Яъни улар узаро  $135^\circ$  бурчак остида кесишади  $k = 1$  булганда  $f(x, y) = 1$  изоклина тенгламасига эга булаемиз.

Интеграл чизиклари бу изоклина чизиги билан бурчак коэффициенти  $tg\varphi = 1$  яъни  $45^\circ$  бурчак остида кесишади. Интеграл чизикларни янада аниқроқ чизиш учун букилиш нукталарининг геометрик урини топамиз.

Маълумки букилиш нукталарининг геометрик урни, иккинчи тартибли хосилани нолга тенглаштириш йули билан аникланади.

(2) тенгламага асосан  $y''$  ни топамиз:

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f}{\partial y} = f'_x(x, y) + f(x, y) f'_y(x, y)$$

бундан

$$f'_x(x, y) + f(x, y) f'_y(x, y) = 0 \quad (5)$$

(5) тенглама билан аникланувчи чизик букулиш нукталарининг геометрик урини аниқлайди.

Бунда

$$y'' = f''_x + f f''_y > 0$$

шартини каноатлантирувчи сохада интеграл чизиклари ботик ( $\cup$ ) булиб,

$$y'' = f'_x + f \cdot f'_y < 0$$

шартни канотлантирувчи сохада интеграл чизиклари каварик ( $\cap$ ) булади.

Юкорида келтирилган маълумотларга асосланиб, берилган дифференциал тенгламанинг интеграл чизикларини чизиш мумкин.

Мисол .  $y' = 2x - y$  тенгламанинг интеграл чизикларини, изоклина ёрдамида чизинг.

Ечиш. Интеграл чизикларининг харакат йуналишларини аниқлаймиз:

Агар  $y' = 2x - y > 0$  булса,  $y < 2x$  булади.

Бу шартни каноатлантирувчи сохада интеграл чизиклар юкорига караб йуналадилар. ( $\uparrow$ )



Агар  $y' = 2x - y < 0$  булса,  $y > 2x$  булади.

Бу сохада интеграл чизиклар пастга караб йуналадилар. ( $\downarrow$ )

Изоκлиналар оиласининг тенгламасини тузамиз:

$$y' = 2x - y = k \quad \text{бундан} \quad y = 2x - k.$$

$k=0$  булсин. У холда

$y=2x$  га эга буламиз.

$$\begin{cases} f(x, y) = 2x - y = 0 \\ f'_x(x, y) = 2 > 0 \end{cases}$$

Бундан  $y=2x$ .

$y=2x$  тугри чизигида интеграл чизикларнинг минимум нукталари ётади.

Интеграл чизиклар максимум нуктага эга эмас. Чунки  $x$  ва  $y$  нинг курилайтган сохадаги хамма кийматлари учун

$$f'_x(x, y) = 2 > 0$$

$k=1$  булсин. У холда  $y=2x-1$  га эга буламиз. Интеграл чизиклар бу тугри чизик билан  $45^\circ$  бурчак остида кесишадилар.

$k=-1$  булсин. У холда  $y=2x+1$  га эга буламиз. Интеграл чизиклар бу тугри чизик билан  $135^\circ$  бурчак остида кесишади.

$k=2$  булсин. У холда  $y=2x-2$  га эга буламиз. Бу берилган тенгламани ечими булади.

Ҳақиқатан ҳам

$$y'=2, \quad 2 \equiv 2x - 2x + 2$$

тенгламанинг интеграл чизиклари бу интеграл чизик билан кесишмайди.

Энди букилиш нукталарининг геометрик урнини аниқлаймиз.

Бунинг учун берилган тенгламадан

$$y''=2-y'=2-2x+y=0$$

бундан

$$y=2x-2$$

Бу букилиш нукталарининг геометрик урни.

$y > 2x-2$  шартни каноатлантирувчи сохада интеграл чизиклари ботик,

$$y < 2x-2$$

шартни каноатлантирувчи сохада интеграл чизиклари каварик булади.

Бу маълумотларга кура, интеграл чизикларни чизиш мумкин.

### Коши масаласи.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

тенглама учун Коши масаласи деб,  $x=x_0$  булганда  $y(x_0) = y_0$  шартини каноатлантирувчи ечимни топишга айтилади. Бошқача айтганда, тенгламанинг шундай ечимини топиш керакким,  $y(x_0, y_0)$  нуктасидан утсин. Коши масаласини ечиш учун, даставвал берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечими  $y = \varphi(x, c)$  топилади сунгра  $x = x_0$   $y(x_0) = y_0$  бошлангич шартлар ёрдамида параметр  $c$  нинг киймати  $c = c_0$  аникланади.

$y = \varphi(x, c)$  ечимдаги  $c$  урнига  $c_0$  куйсак Коши шартини каноатлантирувчи

$y = \varphi(x, c_0)$  ечимга эга буламиз.

### 3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Дифференциал тенгламанинг ечими деб нимага айтилади?

2. Умумий ечим билан умумий интегралнинг фаркини айтиниг.
- 3.Йуналишлар майдони кандай аникланади?
- 4.Изоклиналар оиласининг тенгламаси кандай тузилади?
- 5.Изоклиналар ёрдамида дифференциал тенгламанинг интеграл чизиклари кандай чизилади?
- 6.Дифференциал тенгламанинг интеграл чизики деб нимага айтилади?

### **1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар**

- 1 Умумий ечим билан умумий интегралнинг фаркини айтиниг.
- 2..Йуналишлар майдони кандай аникланади?
- 3.Изоклиналар оиласининг тенгламаси кандай тузилади?

### **1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар**

1. Дифференциал тенгламанинг ечими деб нимага айтилади?
2. Дифференциал тенгламанинг интеграл чизики деб нимага айтилади?

### **1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар**

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### **1.3.4. Карточкалар учун тестлар**

### **1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)**

- Презентация

### **1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар**

#### **АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР**

Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз.Физ-мат. литература.1958.

Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 – е издание).

#### **КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР**

Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.

Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.

Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та.1984.

Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.

Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.

Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с

Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.

Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## **1.5. Ўқитиш усуллари қоидалари**

### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

### **МАЪРУЗА 3**

**Мавзу :** Узгарувчилар ажраладиган дифференциал тенгламалар.  
Биринчи тартибли бир жинсли ва унга келтириладиган  
бир жинсли дифференциал тенгламалар

#### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоты тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:** Ечим, умумий ечим, умумий интеграл, узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама, узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириладиган тенгламалар, бир жинсли тенглама; бир жинслига келтириладиган тенгламалар.

**Ўқув машғулоты мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

### **Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

• **1 босқич. Ўқув машғулотиға кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

**2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий хужум, “Инсерт” техникаси.

**3 босқич. Якунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

**1.3. Ўқув-методик материаллар**

**Маъруза режаси:**

Ечим, умумий ечим, умумий интеграл, узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама, узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтираладиган тенгламалар, бир жинсли тенглама; бир жинслига келтираладиган тенгламалар.

**Калит сўзлар:** Ечим, умумий ечим, умумий интеграл, узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама, узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтираладиган тенгламалар, бир жинсли тенглама; бир жинслига келтираладиган тенгламалар.

**1.3.1. Маъруза матни**

Бундай тенгламаларнинг оддий курунишидан бири

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad dy = f(x)dx \quad (1)$$

Бунда  $f(x)$   $[a, b]$  да аниқланган бўлиб,  $a < x < b$  ички нукталарида узлуксиздир.

Аниқмас интеграллар назариясидан маълумки

$$y = \int f(x)dx + c \quad (2)$$

яъни (1) тенгламанинг умумий ечими топилади. (2) формулани бошқача ҳам ёзиш мумкин.

$$y = \int_{x_0}^x f(t)dx + c \quad a < x_0 < b$$

$x=x_0$  десак  $y(x_0)=c$ ,  $c=y_0$  булса

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(t)dt \quad (3)$$

Курилатган соҳанинг ҳар бир  $(x_0, y_0)$  нуктасидан факат битта интеграл чизиги утади.

$c$  нукта  $a, b$  оралигида бўлиб,  $x \rightarrow c$  да  $f(x) \rightarrow +\infty$  интилсин.

Йуналиш майдони  $x=c$  тугри чизикка яқинлашган сари  $y$  тобора тик була бошлайди.

$x \rightarrow c-0$  булганда  $\int_{x_0}^x f(t)dt$  интеграл яқинлашувчи булсин. У ҳолда  $x$  симиз  $c-0$  га

интилганда интеграл чизик  $x=c$  да аниқ бир қийматини олади.

$$\lim_{x \rightarrow c-0} y = y_0 + \lim_{x \rightarrow c-0} \int_{x_0}^x f(t)dt = y_0 + N = M$$

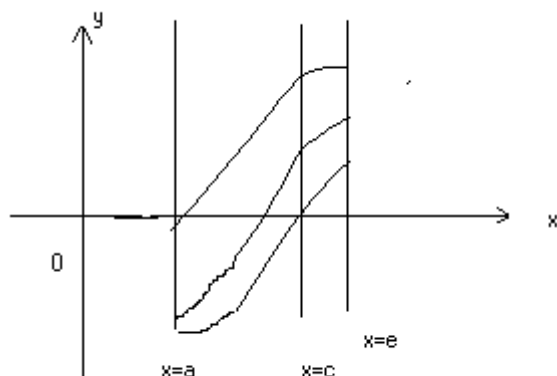
энди  $\int_{x_0}^x f(t)dt \quad a < x < c \quad (4)$

ва

$$\int_{x_0}^x f(t)dt \quad c < x < b \quad (5)$$

интегралларини қараймиз.

(4) ва (5) интеграллар яқинлашаувчи булса, бошқача айтганда  $x \rightarrow c-0$  да (4) интеграл яқинлашувчи булса,  $y$  ҳолда  $x \rightarrow c+0$  да (5) интеграл ҳам яқинлашувчи булади. ( $x \rightarrow c$   $f \rightarrow +\infty$ )  $x=c$  тугри чизик ҳам интеграл чизик булади. Агар (4) ва (5) интеграллар узоклашувчи булса ( $x \rightarrow c, f(x) \rightarrow +\infty$ )



Интеграл чизиклар  $x=c$  тугри чизигига асимптотик равишда якинлашади.

Бу холда  $a < x < c$  ва  $c < x < b$  полосаларнинг ҳар бир нуктасидан битта факат битта интеграл чизик утади.

Агар (4) ва (5) интеграллар  $x \rightarrow c \pm 0$  да якинлашувчи булиб,

$$f(x) \rightarrow +\infty, \quad f(x) \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow c+0 \quad x \rightarrow c-0$$

булса, интеграл чизикларни жойланиши (схематик тасвири) куйидагича булади.  $x=c$  тугри чизикнинг ихтиёрий  $A$  нуктасидан чексиз куп интеграл чизиклар утади.  $a < x < c$  ва  $c < x < b$  полосаларнинг ҳар бир ички нуктасидан факат битта интеграл чизик утади. Колган холларни ҳам текшириб куриш мумкин.

Узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалардан бири

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \quad (6)$$

куринишда булиб, бунда  $f(y)$ , курилатган ораликда узлуксиз булиб,  $f(y) \neq 0$  (6) дан

$$\frac{dy}{f(y)} = dx \Rightarrow x + c = \int \frac{dy}{f(y)} \quad \text{бу (6) тенгламанинг}$$

умумий интегралидир.

Мисол  $\frac{dy}{dx} = y \ln y \quad y \neq 0 \quad \frac{dy}{y \ln y} = dx$

$$\frac{d \ln y}{\ln y} = dx \quad x + c = \ln \ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{тенгламани}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (7)$$

куринишга келтириш мумкин. Фараз этайлик

$$M(x, y) = M_1(x)N_1(y) \quad \text{ва} \quad N(x, y) = M_2(x)N_2(y)$$

куринишда булсин.

У холда узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламанинг умумий куриниши

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad (8)$$

булади. Бунда  $M_1(x)N_1(y) \neq 0$  у холда  $\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0$

га эга буламиз. Бундан

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = c$$



(8) тенгламанинг умумий интегралига эга буламыз.

Мисол  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$   $(x^2 - 1)dy + 2xy^2 dx = 0$

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} dx = 0 \quad -\frac{1}{y} + \ln|x^2 - 1| + c = 0 \quad y(\ln|x^2 - 1| + c) = 1 \quad y = 0$$

$$y' = f(ax + bx + y) \quad (9)$$

қурилишдаги дифференциал тенгламаларни ҳам алмаштириш ёрдамида узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтириш мумкин. Бунинг учун  $ax + by + c = z$  (10)

алмаштиришни оламыз.

У холда  $a + by' = z'$   $y' = \frac{1}{b}(z' - a)$   $\frac{1}{b}(z' - 0) = f(z)$

ёки  $z' = bf(z) + a$

бу эса узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир.

$$\frac{dz}{bf(z) + a} = dx \quad x + c = \int \frac{dr}{bf(z) + a}$$

Мисол  $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$  тенгламанинг ечинг

$$2x - y = z^3$$

$$2 - y' = 3z^2 z' \quad y' = 2 - 3z^2 z' \quad 2 - 3z^2 z' = z + 2 \quad z + 3z^2 z' = 0 \quad z(1 + 3zz') = 0$$

$$z = 0 \quad y = 2x \quad 1 + 3zz' = 0 \quad 3zz' = -1 \quad \frac{3}{2}z^2 = \frac{c}{2} - x \quad 3z^2 = c - 2x$$

кубга кутарсак

$$27 + z^6 = (c - 2x)^3 \quad 27(2x - y)^2 = (c - 2x)^3$$

### Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламалар

**Таъриф.**  $t > 0$  нинг ҳар қандай қийматида  $f(tx, ty) \equiv t^m f(x, y)$  айният бажарилса,  $f(x, y)$  функция,  $x, y$  узгарувчиларга нисбатан  $m$ - улчовли бир жинсли функция дейилади.

Масалан  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$  функция 0 улчовли бир жинсли функциядир.

$$\text{Ҳақиқатан ҳам } f(tx, ty) = \frac{(tx)^2 + (ty)^2}{2(tx)(ty)} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{2t^2 xy} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = f(x, y)$$

Фараз этайлик ҳосилга нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  (1)

берилган бўлиб, бунда  $f(x, y)$   $x, y$  узгарувчиларга нисбатан 0 улчовли бир жинсли функция бўлса, бундай тенгламага бир жинсли тенглама дейилади.

Фаразимиз буйича.  $f(tx, ty) \equiv f(x, y)$  бунда  $t = \frac{1}{x}$  деб олсак

$$f(x, y) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

булади. У холда (1) тенгламани

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2)$$

қурилишда ёзиш мумкин. (2) тенгламада

$$\frac{y}{x} = z \quad y = xz \quad (3)$$

алмаштиришни олсак,  $y$  узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага айланади. (3) дан  $y' = z + xz'$  бунга асосан (2) тенгламани куйидагича ёзиш мумкин.  
 $z + xz' = \varphi(z)$  бундан

$$xz' = \varphi(z) - z \quad (4)$$

Бу эса узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадирю

Бунда 2 хол булиши мумкин.

**1 хол**  $\varphi(z) - z \neq 0$

бу холда (4) дан  $\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad \ln x + \ln c = \int \frac{dz}{\varphi(z) - z}$

интеграллаб булгач (3) дан  $z$  кийматини келтириб куйсак, (1) тенгламанинг умумий интегралига эга буламиз.

**2 хол**  $\varphi(z) - z = 0 \quad \varphi(z) = z \quad \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$

Бунга асосан (2) тенглама  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  курунишга келади.

Бундан  $\ln|y| = \ln|x| + \ln c \quad y = cx$

бу холда тенгламанинг умумий ечими координата бошидан утувчи тугри чизиклар оиласидан иборат булади.

**Эслатма**  $\varphi(z) - z = 0$  тенглама  $z = z_s \quad (s = 1, 2, \dots, n)$  ечимларга эга булиши мумкин бу хол  $y = z_s x$  нинг хар бири тенгламанинг интеграл чизиги булади.

Мисол  $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$

$y = xz; \quad dy = xdz + zdx$

$(x^2 z^2 - 2x \cdot xz)dx + x^2(xdz + zdx) = 0$

$(z^2 - z)dx + xdz = 0 \quad \frac{dx}{x} + \frac{dz}{z(z-1)} = 0$

$\frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)dz = 0 \quad \ln|x| + \ln|z-1| - \ln|z| = \ln c$

$\frac{x(z-1)}{z} = c \quad x(z-1) = cz \quad x\left(\frac{y}{x} - 1\right) = c \frac{y}{x} \quad x|y-x| = cy$

$z(z-1) = 0 \quad z = 0 \quad y = 0$

$z = 1 \quad y = x$

Булар хам тенгламанинг ечимлари булади.

## Бир жинсли тенгламага келтириладиган дифференциал тенгламалар

Бундай тенгламаларнинг умумий куруниши

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \quad (1)$$

дан иборат. Бунда  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  узгармас сонлар булиб  $f$  курилайтган сохада узлуксиз функция. Бунда кийидаги холларни караймиз.

**1 ҳол.** Агар  $c=0$ ,  $c_1=0$  булса, (1) тенглама бир жинсли тенгламага айланади.

**2 ҳол.** Фараз этамиз  $c$  ва  $c_1$  лардан ҳеч булмаганда бири нолга тенг булмасин ва

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

бу ҳолда 
$$\begin{cases} x = u + \gamma \\ y = \vartheta + \beta \end{cases} \quad (2)$$

алмаштиришни олиб (1) тенгламани бир жинсли тенгламага келтириш мумкин. Бунда  $\gamma$  ва  $\beta$  лар ихтиёрий узгармас сонлар булиб,  $u$  ва  $\vartheta$  янги узгарувчилар (2) га асосан (1) тенглама

$$\frac{d\vartheta}{du} = f\left(\frac{a(u+\gamma)+b(\vartheta+\beta)+c}{a_1(u+\gamma)+b_1(\vartheta+\beta)+c_1}\right) = f\left(\frac{au+b\vartheta+a\gamma+b\beta+c}{a_1u+b_1\vartheta+a_1\gamma+b_1\beta+c_1}\right) \quad (3)$$

$\gamma$  ва  $\beta$  ихтиёрий узгармас сонлар булгани учун, уларни шундай танлаб оламизки.

$$\begin{cases} a\gamma + b\beta + c = 0 \\ a_1\gamma + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

бажарилсин. Шартга асосан бу сиситеманинг асос детерминати  $\Delta \neq 0$  булгани учун (4) системадан  $\gamma$  ва  $\beta$  лар бир кийматли аникланади (4) га асосан (3) тенгламани

$$\frac{d\vartheta}{du} = f\left(\frac{au+b\vartheta}{a_1u+b_1\vartheta}\right)$$

қуринишда ёзиш мумкин. Бу эса бир жинсли тенгламадир. Тенглама  $\vartheta = uz$  алмаштириш ёрдамида узгарувчилари ажраладиган тенгламага келади.

**3 ҳол**  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$  булсин, Бундан  $ab_1 - a_1b = 0$   $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$

$a_1 = a\lambda$   $b_1 = b\lambda$  (1) тенглама  $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right)$  қуринишга келади.

Бу тенглама  $z = ax + by$  алмаштириш ёрдамида, узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади. Ҳақиқатдан ҳам

$$z = ax + by \quad z' = a + by' \quad y' = \frac{1}{b}(z' - a) \quad \frac{1}{b}(z' - a) = f\left(\frac{z+c}{\lambda z + c_1}\right) \text{ бундан}$$

$$\frac{dz}{bf\left(\frac{z+c}{\lambda z + c_1}\right) + a} = dx$$

Мисол

(117)

$$(y+2)dx = (2x+y-4)dy \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{2x+y-y} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad x = u + \alpha$$

$$y = \vartheta + \beta$$

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{\vartheta + \beta + 2}{2u + \vartheta + 2\alpha + \beta - 4} \quad \begin{cases} \beta + 2 = 0 \\ 2\alpha + \beta - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \beta = -2 \\ \alpha = 3 \end{matrix} \quad \frac{d\vartheta}{du} = \frac{\vartheta}{2u + \vartheta}$$

$$\vartheta = uz \quad \vartheta' = uz' + z \quad u \frac{dz}{du} + z = \frac{z}{2+z} \quad u \frac{dz}{du} = \frac{z}{2+z} - z = \frac{-z - z^2}{2+z}$$

$$\frac{2+z}{z(1+z)dz} = -\frac{du}{u} \quad \left( \frac{2}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz = -\frac{du}{u} \quad 2\ell n|z| - \ell n|z+1| = -\ell n|u| + \ell n c$$

$$\frac{z^2}{z+1} = \frac{c}{u} \quad z = \frac{\vartheta}{u} = \frac{y+2}{x-3} \quad (y+2)^2 = c(x+y-1)$$

Бази холларда берилган дифференциал тенгламани  $y = z^m$  алмаштириш ёрдамида, тенгламани бир жинсли тенглама келтириш мумкин.

Мисол  $2x^2y' = y^3 + xy \quad y = z^m \quad y' = mz^{m-1}z' \quad 2x^2mz^{m-1}z' = z^{3m} + xz^m$

$$2 + m - 1 = 3m = 1 + m \quad 2m = 1 \quad m = \frac{1}{2}$$

$$x^2z' = z^2 + xz \quad \text{бу бир жинсли тенгламадир.}$$

$$z = ux \quad xu' = u^2 \quad cx = \ell^{-\frac{x}{y^2}}$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламанинг содда куринишлари кандай куринишда булади?
2. Узгарувчилари ажраладиган тенгламанинг умумий интегралини ёзинг.
3. Узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириладиган тенглама-нинг умумий куриниши кандай булади?
4. Бир жинсли тенглама деб, кандай тенгламага айтилади?
5. Бир жинсли тенгламани ечиш учун кандай алмаштириш олинади?
6. Бир жинсли тенгламага келтириладиган тенгламани узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш учун кандай алмаштиришлар олинади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламанинг содда куринишлари кандай куринишда булади?
2. Узгарувчилари ажраладиган тенгламанинг умумий интегралини ёзинг.
3. Узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириладиган тенглама-нинг умумий куриниши кандай булади?

### 1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар

1. Бир жинсли тенглама деб, кандай тенгламага айтилади?
2. Бир жинсли тенгламани ечиш учун кандай алмаштириш олинади?
3. Бир жинсли тенгламага келтириладиган тенгламани узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш учун кандай алмаштиришлар олинади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириши*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.

Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.

Эльсгольд Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 – е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.

Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.

Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.

Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.

Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.

Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
2. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
3. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### **3.4. Ўқитиш усуллари қоидалари**

#### **3.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **3.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **3.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмат кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;

- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРЎЗА - 4

Мавзу: **Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама ва унинг хоссалари**

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

1. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама.
2. Тенламанинг хоссалари
3. Вариациялаш усули.
4. Умумий ечим формуласи

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;



- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини

баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Маъруза режаси:**

1. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама.

2. Тенгламанинг хоссалари

3. Вариациялаш усули.

4. Умумий ечим формуласи

*Калит сўзлар:* Чизикли тенглама, бир жинсли булмаган тенглама, бир жинсли тенглама, вариациялаш усули, умумий ечим, Эйлер- Бернулли усули

#### 1.3.1. Маъруза матни

**Таъриф.** Номалум функция ва унинг хосиласи биринчи даражада булган биринчи тартибли дифференциал тенгламага чизикли дифференциал тенглама дейилади.

Бундай тенгламанинг умумий курилиши

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0 \quad (1)$$

дан иборат. Бунда  $A(x)$ ,  $B(x)$ ,  $C(x)$  курилатган ораликда узлуксиз функциялардир.

Агар курилатган ораликда  $x$  нинг ҳамма кийматларида

$A(x) \neq 0$  булмаса, (1) тенгламани

$$y' + p(x)y = Q(x) \quad (2)$$

курилишга келтириш мумкин.

Бунда 
$$p(x) = \frac{B(x)}{A(x)}, \quad Q(x) = -\frac{C(x)}{A(x)}$$

(2) тенгламага бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенглама дейилади.

Агар (2) да  $Q(x) = 0$  булса

$$y' + p(x)y = 0 \quad (3)$$

тенгламага бир жинсли чизикли дифференциал тенглама дейилади. ((2) тенгламага мос булган).

(3) тенглама узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир.

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \quad \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln c \quad y = c\ell^{-\int p(x)dx} \quad (4)$$

с нинг узгармас кийматларида (4), (3) тенгламани каноатлантиради. Яъни (3) тенгламанинг умумий ечими булади. (2) тенгламанинг ҳам умумий ечимини с ни х нинг функцияси деб, (4) курилишда излаймиз.

У холда (4) дан

$$y' = c'(x)\ell^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)\ell^{-\int p(x)dx} \quad (5)$$

(4) ва (5) га асосан (2) тенглама

$$c'(x)\ell^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)\ell^{-\int p(x)dx} + c(x)p(x)\ell^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x)\ell^{-\int p(x)dx} = Q(x) \quad c'(x)\ell^{\int p(x)dx} = Q(x)$$

Бундан

$$c(x) = \int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c_1 \quad (6)$$

У холда (4) ва (6) га асосан (2) нинг умумий ечими

$$y = \ell^{-\int p(x)dx} \left[ \int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c_1 \right] \quad (7)$$

булади.

Бу бир жинсли булмаган чизикли тенгламанинг умумий ечимни топиш формуласи.

(7) дан куринадики чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими, иккита квадратура билан аникланади.

Чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечимини бундай усул билан топишга, узгармасларни вариациялаш усули ёки Лагранж усули дейилади.

Бир жинсли булмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечимини иккита ечимлар йигиндисидан иборатдир.

Улардан бири  $c_1 \ell^{-\int p(x)dx}$ , бир жинсли (3) тенгламанинг умумий ечимидан, иккинчиси эса, (2) тенгламанинг хусусий

$$\ell^{-\int p(x)dx} \left[ \int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx \right]$$

ечимдан иборатдир.

(7) ни интеграллаб булгач у куйидаги курунишга келади.

$$y = c\varphi(x) + \varphi(x) \quad c = const$$

Бундан куринадики чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими ихтиёрий узгармасга нисбатан чизикли функциядан иборатдир.

(2) тенгламанинг умумий ечимини Эйлер-Бернулли усулидан фойдаланиб топиш ҳам мумкин.

(2) тенгламада

$$y = u\vartheta \quad (8)$$

алмаштиришни оламиз.

Бунда  $u$  ва  $\vartheta$  лар ихтиёрий узлуксиз дифференциалланувчи функциялардир.

$$y' = u'\vartheta + u\vartheta'$$

$$u'\vartheta + u\vartheta' + p(x)u\vartheta = Q(x) \quad (9)$$

$$u\vartheta' + (u' + p(x)u)\vartheta = Q(x) \quad (10)$$

$u(x)$  функция ихтиёрий булгани учун, уни шундай танлаб оламизки

$$u' + p(x)u = 0$$

шарти бажарилсин.

Бундан 
$$\frac{du}{u} = -p(x)dx$$

$$\ln|u| = -\int p(x)dx \quad u = \ell^{-\int p(x)dx} \quad (11)$$

(11) ни (10) га олиб бориб куйсак

$$\ell^{-\int p(x)dx} \vartheta' = Q(x) \quad \vartheta' = \ell^{\int p(x)dx} Q(x) \quad \vartheta = \int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \quad (12)$$

га эга буламиз

(8),(11),(12) га асосан бир жинсли булмаган дифференциал тенгламанинг умумий ечими.

$$y = \ell^{-\int p(x)dx} \left[ \int \ell^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c \right]$$

Чизикли дифференциал тенглама куйидаги хоссаларга эга.

1 хосса. Агар бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламанинг битта хусусий  $y_1$  ечими берилган булса, унинг умумий ечими битта квадратура билан аниқлангади.

Исбот.  $y_1$  (2) тенгламанинг ечими булсин

$$\text{Яъни} \quad y_1' + p(x)y_1 \equiv Q(x) \quad (13)$$

$$y = z + y_1 \quad (14)$$

алмаштиришини оламиз. Бунда  $z$  янги номалум функциядир.

$$(14) \text{ дан} \quad y' = y_1' + z' \quad (15)$$

(14) ва (15) га асосан (2) тенглама

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) = Q(x) \quad \text{ёки} \quad z' + p(x)z + (y_1' + p(x)y_1 - Q(x)) = 0 \quad \text{бундан}$$

$$z' + p(x)z = 0$$

бу эса бир жинсли чизикли дифференциал тенглама булиб, унинг умумий ечими битта квадратура ёрдамида аниқлади. Бу топилган  $z$  кийматини (14) га куйсак (2) тенгламанинг умумий ечимига эга буламиз.

**2 хосса.** Агар  $y_1$  бир жинсли чизикли (3) тенгламанинг ечими булса, у холда  $cy_1$  ҳам (3) тенгламанинг ечими булади.

**3 хосса.** Агар (2) тенгламанинг иккита  $y_1, y_2$  хусусий ечимлар берилган булса, унинг умумий ечими квадратурасиз арикланади.

Хакиятдан ҳам  $y_1, y_2$  тенгламанинг ечими булгани учун

$$y_1' + p(x)y_1 \equiv Q(x)$$

$$y_2' + p(x)y_2 \equiv Q(x)$$

$$\text{буларни хадлаб айрсак} \quad y_2' - y_1' + p(x)(y_2 - y_1) \equiv 0$$

$$\frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + p(x)(y_2 - y_1) \equiv 0$$

бундан куринадиким, бир жинслимас чизикли дифференциал тенгламанинг

2 та хусусий ечимлар айирмаси, бир жинсли тенгламанинг ечими булади.

У холда 1 ва 2 хоссага асосан, (2) тенгламанинг умумий ечими

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1)$$

дан иборат булади.

**Мисол.1.**

$$xy' + y = x^3 \quad y' + \frac{1}{x}y = x^2$$

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}} \left[ \int e^{\int \frac{dx}{x}} x^2 dx + c \right] = e^{-\ln|x|} \left[ \int e^{\ln|x|} x^2 dx + c \right] = \frac{1}{x} \left[ \int x \cdot x^2 dx + c \right] = \frac{1}{x} \left[ \int x^3 dx + c \right] =$$

$$= \frac{1}{x} \left( \frac{x^4}{4} + c \right) = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4}$$

**Мисол 2.**  $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{y^2}{x-2xy-y^2} & \frac{dx}{dy} &= -\frac{x-2xy-y^2}{y^2} & \frac{dx}{dy} + \frac{1-2y}{y}x &= 1 \\ x &= \ell^{-\int \frac{1-2y}{y^2} dy} \left[ \int \ell^{\frac{1-2y}{y^2}} dy + c \right] = \ell^{\frac{1}{y} + 2\ln|y|} \left[ \int \ell^{-\frac{1}{y} - 2\ln|y|} dy + c \right] = \ell^{\frac{1}{y}} y^2 \left[ \int \ell^{-\frac{1}{y}} \cdot \frac{1}{y^2} dy + c \right] = \\ &= \ell^{\frac{1}{y}} y^2 \left[ \int \ell^{-\frac{1}{y}} d\left(-\frac{1}{y}\right) + c \right] = \ell^{\frac{1}{y}} y^2 \left[ \ell^{-\frac{1}{y}} + c \right] = c \ell^{\frac{1}{y}} y^2 + y^2 \end{aligned}$$

Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама интеграл чизикларини геометрик нуктаи назардан текширамиз.

$$y' + p(x)y = q(\lambda) \quad (16)$$

тенгламанинг иккита  $y_1$  ва  $y_2$  хусусий ечимлари берилган булсин.

Маълумки у холда (16) тенгламанинг умумий ечими

$$y = y_1 + c(y_2 - y_1) \quad (17)$$

дан иборат.

Фараз этамиз, (16) тенгламанинг  $y_1$ ,  $y_2$  хусусий ечимларидан ташкари унинг  $y_3$  ечими ҳам маълум булсин.

Бу ечим, (17) умумий ечимдан с нинг  $c_1$  кийматида аникланади, яъни

$$y_3 = y_1 + c_1(y_2 - y_1) \quad (18)$$

Куйидаги тенгликларни тузамиз;

$$y_2 - y_3 = y_2 - y_1 - c_1(y_2 - y_1) = (y_2 - y_1)(1 - c_1)$$

$$y_3 - y_1 = c_1(y_2 - y_1)$$

буларни хадлаб булсак.

$$\frac{y_2 - y_3}{y_3 - y_1} = \frac{1 - c_1}{c_1} = \lambda \quad (19)$$

га эга буламиз.

(19) тенгликдан куринадиким, чизикли дифференциал тенгламанинг хар кандай интеграл чизиги, бу тенгламанинг иккита интеграл чизиклари орасидаги ордината кесмасини узгармас нисбатда булади.

(19) дан

$$\frac{M_2 M_3}{M_1 M_3} = \frac{N_2 N_3}{N_1 N_3} = \dots = \lambda \quad (20)$$

га эга буламиз.

Бу тенгликдан куринадиким, интеграл чизикларни кесувчи тугри чизиклар ё бир-бирларига параллел буладилар ёки улар бир нуктада кесишадилар.

Агар  $N_1 N_2$  кесмасини  $M_1 M_2$  кесмасига якинлаштирсак, интеграл чизигини кесишувчи чизиклар, интеграл чизикларининг урунма чизикларига айланади. Шундай килиб, интеграл чизикларнинг ордината укига параллел булган тугри чизиклар билан кесишган нукталарига утказилган урунмалар ё бир-бирларига параллел булади ёки улар бир нуктада кесишадилар.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

- 1.Биринчи тартибли чизикли тенглама деб қандай тенгламага айтилади?
- 2.Биринчи тартибли чизикли тенгламанинг умумий ечими қандай топилади?
- 3.Тенгламанинг битта, иккита хусусий ечимлари берилган бўлса, унинг умумий ечими қандай топилади?
- 4.Тенгламани ечиш учун Эйлер-Бернулли усулида қандай алмаштириш олинади?

#### **1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар**

- 1.Биринчи тартибли чизикли тенглама деб қандай тенгламага айтилади?
- 2.Биринчи тартибли чизикли тенгламанинг умумий ечими қандай топилади?

#### **1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар**

- 3.Тенгламанинг битта, иккита хусусий ечимлари берилган бўлса, унинг умумий ечими қандай топилади?
- 4.Тенгламани ечиш учун Эйлер-Бернулли усулида қандай алмаштириш олинади?

#### **1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар**

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириши*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

#### **1.3.4. Карточкалар учун тестлар**

#### **1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)**

- Презентация

#### **1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар**

##### **АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР**

- Салоҳиддинов М.С. Насриддин Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
- Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
- Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
- Эльсгольд Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
- Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

##### **КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР**

- Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
- Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
- Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
- Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.

- Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
- Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
- Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
- Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

### **3.5. Ўқитиш усуллари қоидалари**

#### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамыз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРЎЗА - 5**

**Мавзу:** Бернулли ва Риккати тенгламалари.

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Чизикли тенглама, чизиклимас тенглама, ечим, хусусий ечим, умумий ечим, умумий интеграл, квадратура

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш;



Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий хужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мультимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

#### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

##### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (даволат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

##### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади;

биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);

- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

## 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Чизикли тенглама, чизиклимас тенглама, ечим, хусусий ечим, умумий ечим, умумий интеграл, квадратура

### 1.3.1. Маъруза матни

#### Бернули тенгламаси

(1654-1705 Швецария)

Бернулли тенгламасининг умумий куриниши

$$y' + p(x)y = Q(x)y^n \quad (1)$$

дан иборат

Агар  $n = 0$  булса, биз чизикли тенгламага, агар  $n \neq 0$  булса.

$$y' + (p(x) - Q(x))y = 0$$

узгарувчилар ажралади дифференциал тенгламага эга буламиз.

$n \neq 0$ ,  $n \neq 1$  тенг булмасин.

Бу ҳолда (1) тенгламани алмаштириш ёрдамида чизикли тенгламага келтириш мумкин.

(1) тенгламанинг ҳар иккала томонини  $y^{1-n}$  га буламиз:

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = Q(x) \quad (2)$$

$$\text{Бу тенгламада} \quad y^{1-n} = z \quad (3)$$

алмаштиришини оламиз.

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \quad y^{-n}y' = \frac{1}{1-n}z'$$

Буларга асосан (2) тенгламани

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = Q(x) \quad z' + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)$$

бу эса чизикли тенгламадир.

Маълумки унинг умумий ечими

$$z = e^{-(1-n)\int p(x)dx} [(1-n)\int e^{(1-n)\int p(x)dx} Q(x)dx + c]$$

формула билан аникланади .

z кийматини (3) га куйиб , уни соддалаштирсак

$$y = e^{-\int p(x)dx} [(1-n)\int e^{(1-n)\int p(x)dx} Q(x)dx + c]^{\frac{1}{1-n}}$$

Бернулли тенгламасининг умумий ечимига эга буламиз.

Кейинги тенгламани

$$y = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[(1-n)\int e^{(1-n)\int p(x)dx} Q(x)dx + c]^{\frac{1}{n-1}}}$$

куринишда ёзиш ҳам мумкин.

**Эслатма.**1) Агар  $n > 0$  булса , Бернулли тенгламаси  $y=0$  ечимга эга булади.

2) Бернулли тенгламасининг ечими , ҳеч вақт ОХ уқини кесмайди.

Бернулли тенгламасини

$$y = u(x) \exp(-\int p(x)dx) \quad (4)$$

алмаштириш ёрдамида, уни узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш мумкин.

Ҳақиқатан ҳам (4) дан

$$y' = u'(x) \exp(-\int p(x)dx) - u(x)p(x) \exp(-\int p(x)dx) \quad (5)$$

(4) ва (5) га асосан (1) тенгламани куйидаги куринишга келтириш мумкин:

$$u'(x) \exp(-\int p(x)dx) - u(x)p(x) \exp(-\int p(x)dx) + u(x)p(x) \exp(-\int p(x)dx) =$$

$$Q(x)[u(x) \exp(-\int p(x)dx)]^n$$

$$u'(x) \exp(-\int p(x)dx) = Q(x)u^n(x) \exp(-n\int p(x)dx)$$

$$u'(x) = u^n(x)Q(x) \exp((1-n)\int p(x)dx) \frac{du}{u^n} = Q(x) \exp((1-n)\int p(x)dx) -$$

$$- \frac{1}{(n-1)u^{n-1}} = \int Q(x) \exp((1-n)\int p(x)dx) dx + c$$

$$u^{n-1} = \frac{1}{(1-n)\int Q(x) \exp((1-n)\int p(x)dx) + c}$$

$$u(x) = \frac{1}{[(1-n)\int Q(x) \exp((1-n)\int p(x)dx) + c]^{\frac{1}{n-1}}}$$

**Бу ва (4) га асосан Бернулли тенгламасининг умумий ечими**

$$y = \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{[(1-n)\int Q(x) \exp((1-n)\int p(x)dx) + c]^{\frac{1}{n-1}}}$$

ёки

$$y = \frac{\exp(-\int p(x)dx)}{[(1-n)\int \exp^{(1-n)\int p(x)dx} Q(x)dx + c]^{\frac{1}{n-1}}}$$

**Мисол.**  $xy' + y = y^2 \ln x$

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x} \quad y^{-2} y' + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

$$z = y^{-1} \quad z' = -y^{-2} y'$$

$$-z' + \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{x} \quad z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x}$$

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[ -\int e^{-\int \frac{dx}{x}} \frac{\ln x}{x} dx + c \right] = e^{\ln|x|} \cdot \left[ (-\int e^{-\ln|x|} \frac{\ln x}{x} dx + c) \right] = x \left[ -\int \frac{\ln x}{x^2} dx + c \right] =$$

$$u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$d\vartheta = \frac{dx}{x^2} \quad \vartheta = -\frac{1}{x}$$

$$= x \left[ \frac{\ln x + 1}{x} + c \right] = cx + 1 - \ln x$$

$$y^{-1} = cx + 1 - \ln x, \quad y = \frac{1}{cx + 1 - \ln x}$$

## Риккати тенгламаси

(1676-1754 Италия)

**Риккати тенгламасининг умумий куруниши**

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (1)$$

дан иборат. Бунда  $P(x) \cdot R(x) \neq 0$  ва  $P(x), Q(x), R(x)$  лар курилатган ораликда аниқланган ва узлуксиз функциялардир.

Риккати тенгламасининг 2 та хоссасини исботсиз келтирамиз.

**1\* хосса.** Риккати тенгламасида эркин узгарувчини алмаштирсак, яна Риккати тенгламасига эга буламиз.  $x = \varphi(t)$   $\varphi$  - дифференциалланувчи функция.

**2\* хосса.** Риккати тенгламасида номаълум функцияни каср-чизикли функция шаклида алмаштирсак, ҳосил булган тенглама яна Риккати тенгламаси булади.

$$y = \frac{\alpha(x)z + \beta(x)}{\gamma(x)z + \delta(x)}$$

бунда  $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$  лар ихтиёрий узлуксиз дифференциалланувчи функция бўлиб  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  шarti бажарилиши керак.

**ТЕОРЕМА.1** Агар Риккати тенгламасининг битта  $y_1(x)$  хусусий ечими берилган бўлса, унинг умумий ечими 2 та квадратура ёрдамида аниқланади.

**Исбот.**  $y_1(x)$  (1) тенгламанинг ечими бўлсин яъни

$$y_1' = P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) \quad (2)$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \quad \text{алмаштиришини оламиз.} \quad (3)$$

$u(x)$  янги номаълум функция. Бу алмаштириш Риккати тенгламасининг чизикли тенгламага айлантиради.  
 Хакикатан ҳам (3) дан.

$$\frac{dy}{dx} = y' = y_1' - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} \quad (4)$$

(3) ва (4) га асосан (1) тенгламани

$$y_1' - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = P(x) \left( y_1 + \frac{1}{u} \right)^2 + Q(x) \left( y_1 + \frac{1}{u} \right) + R(x)$$

$$y_1' - \frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} = P(x) y_1^2 + Q(x) y_1 + R(x) + 2P(x) \cdot \frac{y_1}{u} + P(x) \frac{1}{u^2} + Q(x) \cdot \frac{1}{u}$$

(2) ни эътиборга олсак, кейинги тенгламани

$$\frac{du}{dx} + (2Py_1 + Q)u = -P \quad (5)$$

курунишга келтириш мумкин. Бу эса чизикли дифференциал тенглама булиб унинг умумий ечими иккита квадратура ёрдамида аникланади.

(5) тенгламадан аникланган  $u(x)$  кийматини (3) га олиб бориб куйисак, Риккати тенгламасининг умумий ечимига эга булаимиз.

**Теорема 2.** Агар Риккати тенгламасининг иккита  $y_1(x), y_2(x)$  хусусий ечимлари берилган булса,  $u$  холда тенгламанинг умумий ечими битта квадратура ёрдамида аникланади.

**Исбот** (3) дан 
$$u = \frac{1}{y - y_1}$$

Агар  $y_1, y_2$  Риккати тенгламасининг хусусий ечимлари булса,  $u$  холда (5) тенгламанинг битта хусусий ечими

$$u_1 = \frac{1}{y_2 - y_1} \quad \text{дан иборат.}$$

Маълумки (5) нинг битта хусусий ечими берилган булса, унинг умумий ечими битта квадратура ёрдамида аникланади.

**Теорема 3** Агар Риккати тенгламасининг 3 та  $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$  хусусий ечимлари маълум булса, унинг умумий ечими квадратурасиз аникланади.

**Исбот** Агар  $y_1, y_2, y_3$  Риккати тенгламасининг хусусий ечимлари булса, (5) тенглама  $u_1$  хусусий ечимдан ташкари

$$u_2 = \frac{1}{y_3 - y_1} \quad \text{хусусий ечимга эга булади. } U \text{ холда (5)}$$

тенгламанинг 2 та хусусий ечими маълум булгани учун унинг умумий ечими квадратурасиз аникланди.

$$u = u_1 + c(y_2 - y_1) = \frac{1}{y_2 - y_1} + c \left( \frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1} \right)$$

$$\frac{1}{y - y_1} = \frac{1}{y_2 - y_1} + c \left( \frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1} \right)$$

**Бу Риккати тенгламасининг умумий интегралли булади.**

Махсус Риккати тенгламасининг умумий куруниши

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = Bx^m \quad (6)$$

дан иборат.

Бунда  $A$  ва  $B$  лар узгармас сонлар. Агар (6) тенгламада  $m = 0$  булса  $y$  узгарувчилари ажраладиган тенгламага айланади.

$$\frac{dy}{dx} = B - Ay^2 \quad \frac{dy}{B - Ay^2} = dx$$

Агар (6) тенгламада  $m = -2$  булса, (6) тенгламани

$$\frac{dy}{dx} + Ay^2 = \frac{B}{x^2}$$

куринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламани  $y = \frac{z}{x}$  алмаштириш ёрдамида уни

узгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириш мумкин.

Хакикатдан ҳам

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x^2}$$

$$\frac{1}{x} \frac{dz}{dx} - \frac{z}{x^2} + A \frac{z^2}{x^2} = \frac{B}{x^2}$$

$$x \frac{dz}{dx} = B - Az^2 + z \quad \frac{dz}{B - Az^2 + z} = \frac{dx}{x}$$

Лиувилль (1809-1882 француз), (6) тенгламада

$$\frac{m}{2m+4} = k \quad (k\text{-бутун сон})$$

булгандагина унинг ечимини квадратура ёрдамида аниклаш мумкин эканлигини исбот этган.

Бошка ( $k$ - бутун сон булмаганда) холларда тенгламанинг ечимини квадратура ёрдамида аниклаш мумкин эмас.

**Мисол:**  $x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4$  тенглама хусусий ечимини  $y = \frac{a}{x}$

куринишда излаймиз  $y' + \frac{1}{x}y + y^2 = \frac{y}{x^2} \quad y' = -\frac{a}{x^2}$

$$-\frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^2} = \frac{y}{x^2} \quad a^2 = 4 \quad a = \pm 2$$

$$y_1 = \frac{2}{x} \quad y = \frac{2}{x} + \frac{1}{u}$$

алмаштириш тенгламани  $u' - \frac{5}{x}u = 1$  чизикли тенгламага келтиради. Бундан

$$u = x^5 \left( c - \frac{1}{4x^4} \right), \quad y = \frac{2}{x} + \frac{1}{cx^5 - \frac{x}{4}} \quad \text{тенгламанинг умумий ечими}$$

**Мисол 2**  $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$   $R(x) = 5 - x^2$  бутун функция  $y$  холда хусусий ечимни  $y = ax + b$  куринишда излаймиз.

$$a - 2x(ax + b) + (ax + b)^2 = 5 - x$$

$$\begin{cases} a^2 - 2a = -1 & (a-1)^2 = 0 & a = 1 \\ -2b + 2ab = 0 \\ a + b^2 = 5 & 1 + b^2 = 5 & b^2 = 4 & b = \pm 2 \end{cases}$$

$$y_1 = x + 2 \quad y = x + 2 + \frac{1}{u}$$

$$u' - 4u = 1 \quad u = ce^{4x} - \frac{1}{4} \quad y = x + 2 + \frac{1}{ce^{4x} - \frac{1}{4}}$$

**Эслатма.** Агар  $y_1(x)$ , (1) тенгламанинг хусусий ечими булса,

$y = y_1 + z$  алмаштириш ёрдамида уни Бернулли

$$\frac{dz}{dx} = P(x)z^2 + (2Py_1 + Q)z \quad \text{тенгламасига, сунгра } u = z^{-1}$$

алмаштириш ёрдамида  $\frac{du}{dx} + (2Py_1 + Q)u = P$  чизикли тенгламага келтириш мумкин.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

- 1.) Бернулли ва Риккати тенгламалари чизикли тенгламами?
- 2.) Тенгламаларни чизикли тенгламага келтириш учун кандай алмаштиришлар олинади?
- 3.) Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими берилган булса, унинг умумий ечими нечта квадратура ёрдамида топилади?
- 4.) Иккита хусусий ечими берилса-чи?
- 5.) Учта хусусий ечими берилса-чи?
- 6.) Махсус Риккати тенгламасини квадратурага келтириш учун канака алмаштиришлар олинади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Бернулли ва Риккати тенгламалари чизикли тенгламами?
2. Тенгламаларни чизикли тенгламага келтириш учун кандай алмаштиришлар олинади?
3. Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими берилган булса, унинг умумий ечими нечта квадратура ёрдамида топилади?

### 1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар

1. Иккита хусусий ечими берилса-чи?
2. Учта хусусий ечими берилса-чи?
3. Махсус Риккати тенгламасини квадратурага келтириш учун канака алмаштиришлар олинади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириши*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

#### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз.Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

6. Бибилов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
7. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
11. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
12. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
13. Амелин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
14. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех. задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### 3.6. Ўқитиш усуллари қоидалари

#### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ;
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, ағал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### 1.4.2. "Инсерт" техникаси қоидалари



- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «–» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмат кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
  - Биз бир кемадамыз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шунини ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРЎЗА- 6

Мавзу: Тулик дифференциал тенглама

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Тулик дифференциал тенглама, ечим, умумий ечим, умумий интеграл, хусусий ечим, етарли ва зарурий шарт, интегралловчи купайтувчи

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

4. *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
5. *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
6. *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;

- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини

баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Тулик дифференциал тенглама, ечим, умумий ечим, умумий интеграл, хусусий ечим, етарли ва зарурий шарт, интегралловчи купайтувчи

#### 1.3.1. Маъруза матни

**Хосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{дифференциал тенгламани}$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

қуринишга келтириш мумкин. (1) тенгламада  $x$  ва  $y$  узгарувчилар тенг кучли равишда катнашадилар.

Таъриф. Агар (1) тенгламанинг чап томони бирор  $u(x, y)$  функциянинг тулик дифференциалига тенг булса,  $u$  холда (1) тенгламага тулик дифференциалли тенглама дейилади.

Яъни

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad (2)$$

$$(2) \text{ дан } \frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \quad (3)$$

га эга буламиз.

Агар (1) тенгламанинг бирор ечимини (2) га келтириб қўйсак

$$du = 0 \quad \text{га эга буламиз.}$$

Бундан  $u(x, y) = c$ . Бу эса, тулик дифференциал тенгламанинг умумий интегралдир.

Фараз этайлик  $M(x, y)$  ва  $N(x, y)$  функциялари, мос равишда  $y$  ва  $x$  га нисбатан узлуксиз хусусий хосилаларга эга булсин.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

$$\text{бундан } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad (4)$$

Бу (4), (1) тенгламанинг чап томони бирор функцияни тулик дифференциали бўлишлигини зарурий шартидир.

Исбот этамизки бу етарли шарт ҳамдир. Ҳақиқатдан ҳам (4) тенглик бажарилганда шундай  $u(x, y)$  функцияни топиш мумкинким, бу функция (3) тенгликларни қаноатлантиради.

Фараз этайлик,  $u$  (3) нинг биринчисини қаноатлантирсин.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$$

Агар бунда  $y$  ни параметр деб олсак, уни

$$dy = M(x, y)dx$$

куринишда ёзиш мумкин.

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y) \quad (5)$$

Бунинг ҳар иккала томонини  $y$  га нисбатан дифференциаллаймиз.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) \end{aligned}$$

(3) ни эътиборга олсак, кейинги тенгликдан

$$\varphi'(y) = N(x_0, y)$$

га эга буламиз.

Бундан 
$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy \quad (6)$$

(6) ва  $u(x, y) = c$  га кура, (5) дан

$$\int_{x_0}^x M(x, y)dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y)dy = c \quad (7)$$

Бу курсатадиким (4) бажарилганда (1) ни чап томони тулик дифференциал тенглама булади. (7) тулик дифференциалли тенгламанинг умумий интегралини топиш формуласи.

Мисол

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

$$M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2 \quad N(x, y) = 6x^2y + 4y^3$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy \quad \text{демак} \quad \frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}$$

Берилган тенглама тулик дифференциали тенгламадир

$$1) u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$$

$$2) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2y + y'(y) \quad 3) \quad \begin{aligned} 6x^2y &= 6x^2y + 4y^3 + y'(y) \\ y'(y) &= 4y^3 \end{aligned}$$

$$4) \quad \varphi(y) = 4y^4 \quad 5) \quad x^3 + 3x^2y^2 + 4y^4 = c_{11}$$

Интегралловчи купайтувчи.

Фараз этайлик

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (1)$$

тенгламанинг чап томони бирор функциянинг тулик дифференциалли булмасин. (1) нинг чап томонини бирор  $\mu(x, y)$  функцияга купайтирганда  $y$  тулик дифференциалли тенгламага айланса,  $\mu(x, y)$  га интегралловчи купайтувчи дейилади.

$$\mu(M(x, y)dx + N(x, y)dy) \equiv du \quad (2)$$

у холда (2)  $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$  шартини каноатлантиради.

**Теорема 1.** Интегралга эга булган ҳар қандай биринчи тартибли дифференциал тенглама интегралловчи купайтувчига эгадир.

**Исбот.** Фараз этайлик (1) тенгламанинг умумий интеграли  $u(x, y) = c$  булсин.

$$\text{Бундан} \quad \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0 \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{u_x}{u_y} \quad (3)$$

$$(1) \text{ тенгламадан эса} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \quad (4)$$

(3) ва (4) дан

$$-\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = -\frac{M}{N} \quad \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{M} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{N} = \mu(x, y) \quad (5)$$

$$(5) \text{ дан} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu M \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N$$

$$\text{у холда} \quad \mu(Mdx + Ndy) = \mu Mdx + \mu Ndy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du$$

яъни (5) дан аникланган  $\mu(x, y)$  функция (1) тенгламанинг интегралловчи купайтувчиси булади.

**Теорема 2.** Агар (1) тенглама битта интегралловчи купайтувчига эга булса, у чексиз куп интегралловчи купайтувчиларга эга булади.

**Исбот.** Фараз этайлик (1) тенгламанинг интегралловчи купайтувчиси  $\mu(x, y)$  ва унинг умумий интеграли  $u(x, y) = c$  булсин.

$$\text{У холда} \quad \mu_1 = \mu\varphi(u) \quad (6)$$

хам (1) тенгламанинг интегралловчи купайтувчиси булади. Бунда  $\varphi(u)$  Узлуксиз функциядир.

Хакикатан хам

$$\mu_1(Mdx + Ndy) = \mu\varphi(u)(Mdx + Ndy) = \varphi(u)(\mu Mdx + \mu Ndy) = \varphi(u)du = d \int \varphi(u)du$$

Бу курсатадики, тенгламанинг чап томони

$$F(u) = \int \varphi(u)du$$

функциянинг тулик дифференциалига тенгдир, яъни  $\mu_1(x, y)$  хам (1) тенгламанинг интегралловчи купайтувчисидир.

(1)тенгламанинг хамма интегралловчи купайтувчилари (6) тенглик билан аникланади. Хакикатдан хам, фараз этайлик (1) тенглама  $\mu$  интегралловчи купайтувчидан бошка  $\mu_1$  интегралловчи купайтувчига эга булсин.

Яъни

$$\mu(Mdx + Ndy) \equiv du \quad (7)$$

$$\mu_1(Mdx + Ndy) \equiv d\vartheta \quad (8)$$

$$\text{Булардан} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \mu M, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mu N, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \mu_1 M, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \mu_1 N$$

Бу кейинги тенгликлардан

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} \quad \frac{M}{N} = \frac{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}}$$

тенгликларнинг чап томонлари тенг булганидан.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0$$

$$\text{ёки} \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{га эга буламиз} \quad (9)$$

(9) дан куринадиким  $u$  ва  $\mathcal{G}$  функциялар орасида функционал боғланиш мавжуд, яъни

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \psi(u) & d\mathcal{G} &= \psi'(u)du \\ (7) \quad \text{ва (8) га асосан} \\ \mu_1(Mdx + Ndy) &\equiv d\mathcal{G} = \psi'(u)du = \psi'(u)\mu(Mdx + Ndy) \end{aligned}$$

Бу кейинги тенгликдан

$$\mu_1 = \psi'(u)\mu$$

$$\mu_1 = \mu\varphi(u)$$

$$\text{деб олсак} \quad \psi'(u) = \varphi(u)$$

### Интегралловчи купайтувчини топиш.

Интегралловчи купайтувчини умумий холда топамиз.

Фараз этайлик (1) тенгламани

$$\mu = \mu[\omega(x, y)] \quad (10)$$

га купайтирганда, у тулик дифференциалли тенгламага айлансин.

$$\text{яъни} \quad \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \text{ёки} \quad \mu \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \mu \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} \end{aligned} \quad (11)$$

$$(10) \text{ дан} \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y}$$

у холда (11) тенгликнинг

$$\mu(M_y^1 - N_x^1) = (N\omega_x^1 - M\omega_y^1) \frac{\partial \mu}{\partial \omega}$$

куринишда ёзиш мумкин

$$\text{Бундан} \quad \frac{d\mu}{\mu} = \frac{M_y^1 - N_x^1}{N\omega_x^1 - M\omega_y^1} d\omega$$

Бу эса  $\mu$  га нисбатан биринчи тартибли дифференциал тенглама  
Буни интегралласак

$$\ell n|\mu(\omega)| = \int \frac{M_y^1 - N_x^1}{N\omega_x^1 - M\omega_y^1} d\omega + \ell n c$$

$$c = 1 \quad \text{деб} \quad (12)$$

$$\mu = \mu[\omega(x, y)] = \ell^{-\int \frac{M_y^1 - N_x^1}{N\omega_x^1 - M\omega_y^1} d\omega}$$

(12) интегралловчи купайтувчини топиш формуласи.

Баъзи бир хусуий холларни караймиз.

1) Интеграл купатувчи факат  $x$  га боглик булсин.

Яъни  $\omega(x, y) = x \quad \omega_x^1(x, y) = 0 \quad d\omega = dx$

У холда (12) дан

$$\mu(x) = \ell^{\int \frac{M_y^1 - N_x^1}{N} dx} \quad \text{га эга буламиз.}$$

2) интеграл купатувчи факат  $y$  га боглик булсин.

Яъни  $\omega(x, y) = y \quad \omega_x^1 = 0 \quad \omega_y^1 = 1 \quad d\omega = dy$

У холда (12) дан  $\mu(x) = \ell^{-\int \frac{M_y^1 - N_x^1}{M} dy}$  га эга буламиз.

3) Интеграл купайтувчи  $xy$  га боглик булсин.

$\omega(x, y) = xy \quad \omega' = y \quad \omega' = x \quad d\omega = d(xy)$

У холда (12) дан

$$\mu(xy) = \ell^{\int \frac{M_y^1 - N_x^1}{Ny - Mx} d(xy)}$$

**Масала 1.** Бир жинсли дифференциал тенгламанинг интегралловчи купайтувчисини топинг.

Фараз этайлик  $M(x, y)dx + N(y)dy = 0 \quad (1)$

Тенгламада  $M$  ва  $N$  функциялар  $x$  ва  $y$  га нисбатан  $m$  улчовли бир жинсли функциялар булсин.

$$y = xz \quad (13)$$

алмаштиришни олсак (1) тенгламани

$$M(x, xz)dx + N(x, xz)(xdz + zdx) = 0$$

$$x^m M(1, z)dx + x^m N(1, z)(xdz + zdx) = 0$$

$$x^m [M(1, z) + zN(1, z)]dx + x^{m+1} N(1, z)dz = 0$$

Бу эса узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир. Маълумки бу тенгламанинг интегралловчи купайтувчиси

$$\mu = \frac{1}{x^{m+1} [M(1, z) + zN(z)]}$$

$z = \frac{y}{x}$  ни эътиборга олсак, кейинги тенгликдан



$$\mu = \frac{1}{xM + yN} \quad \text{га эга буламиз.}$$

Бу бир жинсли тенгламанинг интегралловчи купайтувчисидир.

Исбот этиш мумкинки; чизикли

$$y' + p(x)y = Q(x) \quad \text{тенгламанинг} \quad \text{интегралловчи} \quad \text{купайтувчиси}$$

$$\mu = e^{\int p(x) dx} \quad \text{дан иборат}$$

Бернулли  $y' + p(x)y = Q(x)y^n$  тенгламасининг интегралловчи купайтувчиси

$$\mu = y^{-n} e^{\int (1-n)p(x) dx} \quad \text{дан иборат} \quad (\text{исботланг})$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Тенгламанинг, тулик дифференциал тенглама булишлигининг етарали ва зарурий шартини ёзинг.
- 2). Тулик дифференциал тенгламанинг умумий интегралини ёзинг.
- 3). Интегралловчи купайтувчи деб, нимага айтилади?
- 4). Интегралловчи купайтувчининг умумий курунишини ёзинг.
- 5). Бир жинсли тенгламанинг интегралловчи купайтувчисини топинг.
  1. 6) Бернулли тенгламасининг интегралловчи купайтувчисини топинг

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

- 1). Тулик дифференциал тенгламанинг умумий интегралини ёзинг.
- 2). Интегралловчи купайтувчи деб, нимага айтилади?

### 1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар

1. Бир жинсли тенгламанинг интегралловчи купайтувчисини топинг.
2. Бернулли тенгламасининг интегралловчи купайтувчисини топинг

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддин Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.

4. Эльсгольд Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

#### **КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР**

6. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
7. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск.Ун-та.1984.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
- 10.Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 11.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
- 12.Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
- 13.Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
- 14.Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

### **14.4. Ўқитиш усуллари қоидалари**

#### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос қўйлаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқиясиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқиясиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқитётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРУЗА 7**

**Мавзу:** Биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси.

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Ечим, бошланғич шарт, интеграл тенглама, катор, яқинлашши, аналитик давом эттириш лимитик функция. Вейерштрасс теоремаси. Липшиц шарт.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

7. *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
8. *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, хулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
9. *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасаввур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;

- *Ўқитиш шакллари*: фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари*: Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари*: техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг*: ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти*: ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти*: янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб,

конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;

- *Шакиллар, усулар, услублар*: фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мнавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти*: ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

## 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар**: Ечим, бошлангич шарт, интеграл тенглама, катор, яқинлашши, аналитик давом эттириш лимитик функция. Вейерштрасс теоремаси. Липшиц шarti.

### 1.3.1. Маъруза матни

**Фараз этайлик, хосилага нисбатан ечилган**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

дифференциал тенглама ва  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  бошлангич кийматлар берилган бўлсин.

$f(x, y)$  функцияси куйидаги шартларни қаноатлантирсин:

- 1)  $f(x, y)$ ,  $x, y$  узгарувчиларга нисбатан ёпик  $R \left( \begin{array}{l} |x - x_0| \leq a \\ |y - y_0| \leq b \end{array} \right)$  соҳада узлуксиз функция

бўлсин. Бунда  $a, b$  мусбат узгармас сонлардир.

$f(x, y)$  функция,  $R$  соҳанинг ҳар бир нуктасида уз аргументларига нисбатан узлуксиз бўлганлиги сабабли,  $y$  шу соҳада чегараланган бўлади, яъни шундай  $M$  мусбат сони мавжудки,  $f(x, y)$  функция соҳанинг ҳамма нукталарида

$$|f(x, y)| \leq M \quad (2)$$

тенгсизлигини қаноатлантиради.

- 2)  $f(x, y)$  функция  $R$  соҳада узгарувчи  $y$  га нисбатан Липшиц шартини қаноатлантирсин, яъни шундай мусбат  $N$  сони мавжудки,  $x$  нинг ихтиёрий  $|x - x_0| \leq a$  оралигидаги кийматларида,  $y$  нинг исталган 2 та  $|y_1 - y_0| \leq b$ ,  $|y_2 - y_0| \leq b$  кийматлари учун

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2| \quad (3)$$

тенгсизлиги бажарилсин. Бунда  $N$  мусбат сон.

Агар  $f(x, y)$  функцияси  $R$  соҳанинг ҳар бир нуктасида  $y$  га нисбатан чегараланган

хусусий хосилага эга бўлса, яъни  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N$

$y$  ҳолда Липшиц шarti ҳаммавақт бажарилади.

Хакикатан ҳам  $R$  соҳанинг 2та  $(x, y_1)$  ва  $(x, y_2)$  нукталари учун чекли ортирма хакидаги теоремани кулласак

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = (y_1 - y_2) f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)), \quad 0 < \theta < 1$$

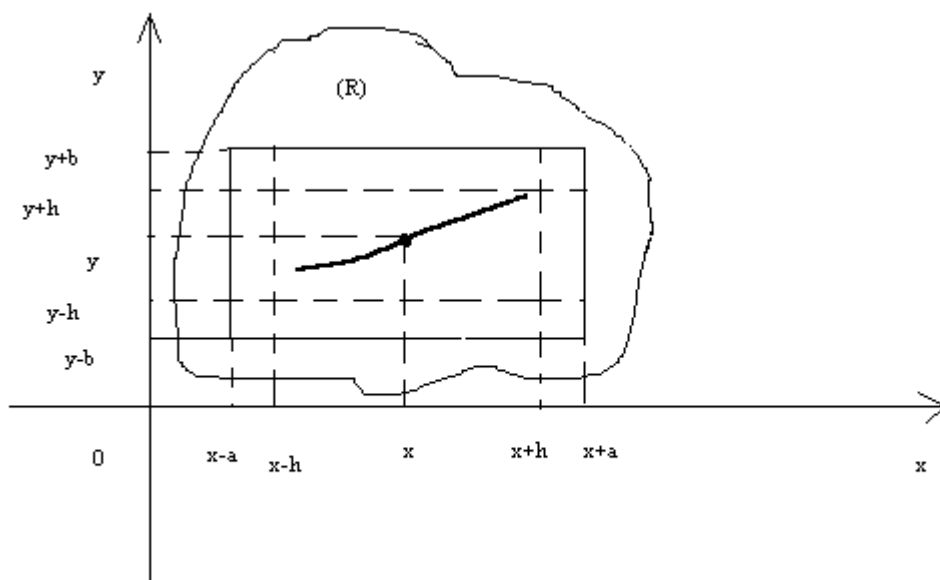
га эга буламиз, бунда  $|f'_y| \leq N$  десак (3) тенгсизлиги бажарилади.

Лекин соҳанинг ҳар бир нуктасида функция чегараланган хусусий ҳосилага эга булмаса ҳам Липшиц шарти бажарилиши мумкин.

**Мисол.**  $y$  га боглиқ булган  $|y|$  функция  $y=0$  булганда ҳосилага эга эмас, лекин ихтиёрий  $y_1, y_2$  кийматлар учун  $\|y_1 - y_2\| \leq |y_1 - y_2|$  тенгсизлиги бажарилади бунда  $N=1$

Юкоридаги 1) 2) шартлар бажарилганда Пикарнинг (Француз 1856 -1941) ушбу теоремасини исбот этамиз.

**Теорема.** 1) ва 2) шартлар бажарилганда (1) тенгламани каноатлантирадиган ва  $x=x_0$  булганда  $y=y_0$  кийматга эга буладиган ягона  $y(x)$  функция мавжудки, бу функция  $x$  нинг ҳарқандай  $|x - x_0| \leq h$  ораликдаги кийматлари учун аниқланган ва узлуксиздир бунда  $h, a$  ва  $\frac{b}{M}$  сонларнинг энг кичигидир яъни  $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$



**Исбот.** Фараз этайлик  $y=y(x)$  функция (1) тенгламанинг  $x=x_0$  да  $y_0=y(x_0)$  бошлангич шартини каноатлантирувчи ечим булсин, яъни

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

бошлангич шартни эътиборга олиб бу кейинги айниятни  $x_0$  дан  $x$  оралигида интеграласак

$$y(x) \Big|_{x=x_0}^{x=x} = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx, \quad \text{ёки} \quad y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

тенгламасига эга буламиз.

Бундан куринадики бошлангич шартни каноатлантирувчи (1) дифференциал тенгламанинг ечими

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (4)$$

интеграл тенгламани (чунки ноъмалум функция интеграл ишораси остида) каноатлантиради. Аксинча, (4) интеграл тенгламанинг ечими бошлангич шартни каноатлантирувчи (1) дифференциал тенгламанинг ечими булади. Хакикатан ҳам (4) дан  $x=x_0$  булганда  $y_0=y(x_0)$  булади ва уни дифференциаласак  $\frac{dy(x)}{dx} \equiv f(x, y(x))$  булади.

Шунинг учун агар биз, (4) интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини курсатсак, теоремани исбот этган буламиз.

Теоремани кетма-кет якинлашиш методидан фойдаланиб исботлаймиз ва унинг исботини уч қисмга буламиз.

- 1)  $y=y_n(x)$  кетма-кетлигининг текис якинлашувчи эканлигини;
- 2)  $Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$  функцияси (4) интеграл тенгламанинг ечими эканлигини;
- 3) (4) тенгламанинг,  $Y(x)$  ечимини ягоналигини исботлаймиз.

Узгармас  $y_0$  сонни нолинчи якинлашиш учун қабул қилиб биринчи якинлашишни қуйидагича аниқлаймиз:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \quad (5_1)$$

(5<sub>1</sub>) да интеграл остидаги функция узлуксиз булганлиги сабабли  $y_1$  квадратура ёрдамида аниқланади ва бу  $y_1$  функция бошлангич шартларни каноатлантиради чунки  $x=x_0$  да булганда  $y_1=y_0$  булади.

$R$  соҳада  $x$  нинг узгаришини шундай чегаралаймизки яъни  $|x - x_0| \leq h$  булсин бунда  $h \leq a$  булганлиги сабабли  $|f(x, y)| \leq M$  шартини каноатлантирувчи  $f(x, y_0)$  функциянинг  $x, y_0$  аргумент қийматлари  $R$  соҳада ётади. У ҳолда (5<sub>1</sub>) формуладан.

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh$$

лекин  $h \leq \frac{b}{M}$  шунинг учун кейинги тенгликдан  $|y_1 - y_0| \leq b$  га эга буламиз демак  $x$  нинг узгаришини чегараланганда  $y_1$  ҳам  $R$  чикмайди.

Иккинчи якинлашиш

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \quad (5_2)$$

формула билан аниқланади.

$y_1$  узлуксиз функция булганлиги сабабли (5<sub>2</sub>) даги интеграл остидаги функция ҳам узлуксиз булади. Шунинг учун  $y_2$  квадратура ёрдамида аниқланади. Иккинчи якинлашиш ҳам бошлангич шартларни каноатлантиради, чунки (5<sub>2</sub>) дан  $x=x_0$  булганда  $y_2=y_0$  булади.  $x$  нинг  $|x - x_0| \leq h$  ораликда қийматларида  $f(x, y_1)$  функциянинг аргументлари  $R$  соҳадан чикмайди. (5<sub>2</sub>) дан

$$|y_2 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \right| \leq M |x - x_0| \leq Mh \leq b$$

бу курсатадиким  $y_2$  ҳам  $R$  соҳадан чикмайди. Фараз этайлик  $n-1$  якинлашиш аниқланган бўлсин, у ҳолда  $n$ - якинлашиш

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx \quad (5_n)$$

формула билан аниқланади.

Фараз этайлик  $x$  нинг  $|x - x_0| \leq h$  ораликдаги кийматларида  $y_{n-1}$  нинг киймати  $R$  соҳадан чикмасин. Яъни  $|f(x, y_{n-1})| \leq M$ , у ҳолда  $y_n$  учун

$$|y_n - y_0| \leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b$$

демак  $y_n$  якинлашиш ҳам  $R$  соҳадан чикмайди. Шундай қилиб тулик индукция методи бўйича исбот этамизки  $|x - x_0| \leq h$  бўлганда кетма-кет якинлашишларнинг ҳеч бири  $R$  соҳадан чикмади. Энди исбот этамизки  $\{y_n\}$  кетма-кетликларнинг лимити мавжуд:

$$Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) \quad (6)$$

ва бу лимитик  $Y(x)$  функция, бошланғич шартларни ва (1) тенгламани қаноатлантиради.  $\{y_n\}$  кетма-кетликлар лимитининг мавжудлиги курсатиш учун

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots \quad (7)$$

каторни якинлашини курсатиш етарлидир, бунда  $n$ - йгинди  $S_n = y_n$  шунинг учун агар биз (7) ни  $Y(x)$  функцияга якинлашишини исботласак, (6) ни исботлаган бўламиз. (7) катор ҳадларининг абсолют кийматлари айирмасини

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq M |x - x_0| \quad (8_1)$$

белгилаймиз, сунгра (5<sub>2</sub>) ва (5<sub>1</sub>) айирмаларини абсолют киймати

$$|y_2 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx - \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1) - f(x, y_0)| dx \right|$$

лекин  $f(x, y)$  функция 2) шартга қура  $y$  га нисбатан Липшиц шартини қаноатлантирганлиги сабабли  $(x, y_1)$  ва  $(x, y_0)$

кийматлар учун  $|f(x, y_1) - f(x, y_0)| \leq N|y_1 - y_0|$  бўлади.

Бунга қура охирни тенгсизликдан

$$|y_2 - y_1| \leq \left| \int_{x_0}^x N(y_1 - y_0) dx \right| \leq MN \left| \int_{x_0}^x |x - x_0| dx \right| = \frac{MN}{2} |x - x_0|^2 \quad (8_2)$$

шунга ухшаш

$$\begin{aligned} |y_3 - y_2| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_2) - f(x, y_1)| dx \right| \leq N \left| \int_{x_0}^x |y_2 - y_1| dx \right| \leq \\ &\leq N \cdot \frac{MN}{2} \left| \int_{x_0}^x |x - x_0|^2 dx \right| = \frac{MN^2}{2 \cdot 3} |x - x_0|^3 \end{aligned} \quad (8_3)$$



энди харкандай натурал  $n$ - сони учун

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{MN^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \quad (8_n)$$

тенгсизлигини тугрилигини исбот этамиз бунинг исботи учун тулик математик индукция методидан фойдаланамиз.

Фараз этайлик  $(8_n)$   $n$  учун тугри булсин буни  $n+1$  учун тугрилигини исботлаймиз.  $(8_n)$  бажарилганда

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| dx \right|$$

ни бахолаймиз

Липшиц шартига кура

$$|f(x, y_n) - f(x, y_{n-1})| \leq N |y_n - y_{n-1}|$$

Шунинг учун кейинги тенгсизликда

$$|y_{n+1} - y_n| \leq N \left| \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dx \right| \leq \frac{MN^n}{n!} \left| \int_{x_0}^x |x - x_0|^n dx \right| = \frac{MN^n}{(n+1)!} |x - x_0|^{n+1} \quad (8_{n+1})$$

демак  $(8_n)$  тенгсизлиги  $n+1$  учун ҳам тугри, бу тенсизлик

$n=2$  ва  $n=3$  учун тугри булганлиги сабабли у ихтиёрий натурал  $n$ - учун ҳам тугри,  $(8_1)$   $(8_2)$ , .....,  $(8_n)$  ларга асосан, ушбу каторни

$$M|x - x_0| + \frac{MN}{2!} |x - x_0|^2 + \frac{MN^2}{3!} |x - x_0|^3 + \dots + \frac{MN^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n + \dots$$

тузаш.

Агар бу каторда  $|x - x_0|$  урнига ундан катта булган  $h$  кийматини куйсак

$$Mh + \frac{MN}{2!} h^2 + \frac{MN^2}{3!} h^3 + \dots + \frac{MN^{n-1}}{n!} h^n + \dots \quad (9)$$

бу сонли катор якинлашувчидир, хакикатдан ҳам Даламбер белгисига кура

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{MN^n}{(n+1)!} h^{n+1}}{\frac{MN^{n-1}}{n!} h^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Nh}{n+1} = 0 < 1$$

(7) катор хадларнинг абсолют киймати (9) каторнинг мос хадларидан кичик булганидан (биринчи  $y_0$  хадида ташкари) Вейерштрасс теоремасига асосан (7) катор  $x$  нинг  $|x - x_0| \leq h$  араликда ҳамма кийматларида абсолют текис якинлашувчи булади. (7) каторнинг хар бир хади  $x$  нинг узлуксиз функциясидан иборат булгани учун, каторнинг

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

мавжуд ва  $y$   $x$  нинг узлуксиз функцияси булади.

2

Исбот этамизким, бу топилган  $y(x)$  функция бошлангич шартларни ва (4) интегралли тенгламани каноатлантиради.

Хакикатан ҳам

$$y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = y_0 \quad (5_n) \text{ га асосан}$$

энди (4) интеграл тенгламани каноатлантиришини курсатишимиз керак.

$f(x, y)$  функцияси  $R$  соҳада  $y$  га нисбатан текис узлуксиз булганлиги сабабли харкандай  $E > 0$  сони учун шундай  $\delta > 0$  сонини топиш мумкинки  $R$  соҳанинг ихтиёрӣ 2 нуктаси  $(x, y_1), (x, y_2)$  учун

$$|y_1 - y_2| < \delta \quad (10)$$

булганда

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < E$$

тенгсизлиги бажарилади.

Иккинчи томондан  $\{y_n\}$  кетма-кетлиги лимитик функцияга текис якинлашувчи булганлигидан танланган  $\delta$  учун шундай натура  $n_0$  сонини топиш мумкинки,  $n - 1 > n_0$  кийматида  $x$  нинг  $|x - x_0| \leq h$  ораликдаги хамма кийматлари учун

$$|y_{n-1}(x) - y(x)| < \delta \quad (11)$$

тенгсизлик бажарилсин.

(10) ва (11) солиштириб карасак,  $n - 1 > n_0$  кийматида

$$|f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y(x))| < E$$

тенгсизлигига эга буламиз бу холда

$$\left| \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \right| \leq \int_{x_0}^x |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y(x))| dx < E|x_0 - x_0| \leq Eh$$

Е- чексиз кичик микдор булганлиги учун (12) да

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \right| = 0 \quad \text{булади.}$$

Бундан 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad \text{булади.}$$

Агар (5<sub>n</sub>) да  $n \rightarrow \infty$  лимитга утсин

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx$$

эга буламиз юкоридагига асосан

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (13)$$

(13) тенглиги курсатадиким топилган  $y(x)$  функция (4) интеграл тенгламани каноатлантиради (13) да интеграл остидаги функция узлуксиз булганлиги учун уни  $x$  га нисбатан дифференциаллаш мумкин  $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$

яъни  $y(x)$  функция (1) дифференциал тенгламани каноатлантиради.

Шундай килиб бу ечим мавжудлигини исбот этдик.

### 3

Фараз этайлик (1) дифференциал тенгламанинг бошлангич

$x = x_0, y = y_0$  шартларини каноатлантирувчи  $y(x)$  ечимдан аник яна - -- ечим хам мавжуд булсин.

Яъни

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx \quad (14)$$

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, z(x)) dx \quad (15)$$

$(x_0, x_0 + e)$  ораликдаги  $x$  нинг харкандай киймати учун  $y \neq z$  булсин  $y$  холда  $|y(x) - z(x)|$  мусбат функция шу ораликда узининг энг катта  $Q >$  кийматига эга булади. Бу кийматни  $x = \xi$  нуктада кабул килсин.  $\xi = x_0$  булиши мумкин эмас чунки  $x = x_0$  нуктада  $z = y$  булиб калади.

(14) ва (15) дан

$$|y(\xi) - z(\xi)| \leq \left| \int_{x_0}^{\xi} |f(xy(x)) - f(xz(x))| dx \right| \leq$$

Липшиц шартига кура

$$\leq N \left| \int_{x_0}^{\xi} |y(x) - z(x)| dx \right| \leq N |\xi - x_0| \max |y(x) - z(x)|$$

$$\max |y(\xi) - z(\xi)| \leq N |\xi - x_0| \max |y(x) - z(x)|$$

$(x_0, \xi)$  оралик уриши  $(x_0 - x_0 + E)$  оралигини олсак тенгсизлик яна хам кучаяди, яъни у холда  $Q \leq NEQ$  тенгсизлигига эга буламиз. Шартга кура  $Q \neq 0$  булмаганлиги сабабли  $1 < NE$  булади. Бунинг булиши мумкин эмас, чунки  $E$  ихтиёрий чексиз кичик сон булгани учун уни шундай  $E < \frac{1}{N}$  танлаб олсак  $1 < 1$ , бу карама- каршлик курсатадими тенглама факат битта ечимга эгадир.

Биз ечимни факат  $|x - x_0| \leq h$  ораликда мавжудлигини исбот этдик.  $f(x, y)$  функцияси аникланган ва узлуксиз булган  $K$  сохадан чиккан булмасак ечимни давом этириш мумкин.

Хакикатан хам фараз этайлик топилган ечимнинг  $x = x_0 + h$  даги киймати  $y_0^{(1)}$  булсин, бунда  $x_0^{(1)} = x_0 + h$ ,  $y_0^{(1)}$  нукта  $R$  соха ичида ётади.

У холда  $R_1 \left( \begin{array}{l} |x - x_0^{(1)}| \leq a_1 \\ |y - y_0^{(1)}| \leq b_1 \end{array} \right)$  туртбурчак топиш мумкинки, бу  $D$  соха ичида тулик ётади.

$|f(x, y)|$  функциянинг  $R_1$  туртбурчакдаги энг катта кийматини  $M_1$  билан белгилаймиз. У холда юкорида исбот этганимизга асосланиб (1) дифференциал тенгламани

$$x_0^{(1)} - h_1 \leq x \leq x_0^{(1)} + h_1$$

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = \int_0^x \left( x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}$$

$$y_3 = \int_0^x \left( x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$y_n = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right) + 1 + 1 - 1 - x =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{xz} - 1 - x) = e^x - 1 - x$$

берилган тенгламани ечинг

Мисол 2.  $\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad x_0 = 0$

$$y_0 = 0 \quad R(|x| \leq 1 \quad |y| \leq 1)$$

$$|f'_y| = |2y| \leq 2 \quad \max |f(x, y)| = \max |x^2 + y^2| = 1 = M \quad h = \frac{1}{2}$$

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x (x^2 + 0) dx = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2 = \int_0^x \left( x' + \frac{x^6}{9} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3 = \int_0^x \left( x' + \left( \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \right)^2 \right) dx = \left( x^2 + \frac{x^6}{9} + \frac{2x^{10}}{3 \cdot 63} + \frac{x^{14}}{63} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{10}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535} + \dots \quad \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Оралик ечими мавжудлигини курсатишимиз мумкин бунда

$$h_1 = \min \left( a_1, \frac{b_1}{M_1} \right)$$

$I_1 = (x_0^{(1)} - h_1, x_0^{(1)} + h_1)$  интервалнинг уртаси  $I = (x_0 - h, x_0)$  интервалнинг учи билан устма уст тушади. Бу нуктада биз топган иккала ечим факат битта  $y_0^{(1)}$  кийматини қабул қилади, демак ягоналик хоссасига қура  $I$  ва  $I_1$  интервалларни умумий киймати иккала ечим бир хил булади, лекин  $I_1$  интервалли иккинчи ярим,  $(x_0^{(1)} + h_1)$   $I$  интервалдан ташқарида ётади. Бу ҳолда биз бу ярим ораликда топилган ечим  $I$  интервалда топилган ечимнинг давоми дейилади.

Агар  $x_0^{(1)} + h_1$  нуктада ечимни киймати  $y_0^{(2)\ell}$  координаталари  $x_1^{(2)} = x_0^{(1)} + h_1$ ,  $y_0^{(2)}$  нукта D соҳа ичида ётса,  $(x_0^{(2)}, y_0^{(2)})$  бошлангич шартлари каноатлантирувчи  $I_2$  интервалда (1) тенглама ечимини топиш мумкин ва ечимни то соҳа чегарасигича давом этиришимиз мумкин.

#### Мисол 1

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{бу чизикли тенглама}$$

$$R(|x| \leq 2 \quad |y| \leq 1) \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

$$|f_y^1| = 1 \quad \text{Липшиц шарти бажарилди.}$$

$$\max |f(x, y)| = \max_{x=1} |x + y| = 3 \quad h = \frac{1}{3}$$

#### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

3. Коши масаласининг мохияти нимадан иборат.
4. Пикар теоремасининг шартларини айтинг.
5. Липшиц шартини маъноси нимадан иборат.
6. Мавжудлик ва ягоналик теоремасини қайси методдан фойдаланиб исботланган.
7. Вейерштрасс теоремасини айтинг.
8. Аналитик давом эттириш, нимани билдиради.

#### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Пикар теоремасининг шартларини айтинг.
2. Липшиц шартини маъноси нимадан иборат.

#### 1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар

9. Мавжудлик ва ягоналик теоремасини қайси методдан фойдаланиб исботланган.
10. Вейерштрасс теоремасини айтинг.
11. Аналитик давом эттириш, нимани билдиради.

#### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириши*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

#### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

#### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

#### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

##### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддин Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### **КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР**

6. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
7. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
8. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
9. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
11. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
12. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
13. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
14. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж. тех. задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### **14.5. Ўқитиш усуллари қоидалари**

#### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос қўйлаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқиясиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқиясиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқитётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гурӯҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРЎЗА - 8**

**Мавзу:** Хосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар.  
Тулик булмаган дифференциал тенгламалар.

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Хосилага нисбатан ечилмаган тенглама, ечим, умумий ечим, параметрик ечим, юкори даражали тенглама.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

1. *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
2. *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини

ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;

*3.Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

#### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

##### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.



## 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилар қўйдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

## 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Хосилага нисбатан ечилмаган тенглама, ечим, умумий ечим, параметрик ечим, юкори даражали тенглама.

#### 1.3.1. Маъруза матни

Хосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий куруниши

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

дан иборат.

Фараз этайлик  $F$  функция бирор соҳада коэффициентлари  $x$  ва  $y$  га боғлиқ булган  $y'$  га нисбатан  $m$ -чи даражали купхадлидан иборат булсин:

$$F(x, y, y') = A_m(x, y)(y')^m + A_{m-1}(x, y)(y')^{m-1} + \dots + A_1(x, y)y' + A_0(x, y)$$

у холда (1) тенгламани

$$A_m(x, y)(y')^m + A_{m-1}(x, y)(y')^{m-1} + \dots + A_1(x, y)y' + A_0(x, y) = 0 \quad (2)$$

курунишда ёзиб оламиз.

Агар курилайтган соҳада  $x$  ва  $y$  нинг ҳамма кийматларида

$A_m(x, y) \neq 0$  булмаса (2) тенгламанинг ҳар иккала томони  $A_m(x, y)$  га булиб, уни

$$(y')^m + P_{m-1}(x, y)(y')^{m-1} + \dots + P_1(x, y)y' + P_0(x, y) = 0 \quad (3)$$

куринишга келтириш мумкин. Бу тенгламага биринчи тартибли  $m$ -чи даражали дифференциал тенглама дейилади.

Фараз этайлик, Бу тенглама  $k$ - та хакикий ечимларга эга булсин.

$$y' = f_i(x, y) \quad (i = 1, 2, \dots, k; k \leq m) \quad (4)$$

Агар (4) тенгламадаги  $f_i(x, y)$  функциялар Коши-Пикар теоремасидаги шартларни каноатлантиса, у холда (4) тенглама ечимга эга булиб, унинг умумий интегралини

$$\psi_i(x, y) = c \quad (i = 1, k) \quad (5)$$

куринишда ёзишимиз мумкин.

Бу умумий интеграллар туплами (1) тенгламанинг умумий интеграли булади. (5) умумий интегрални куп холларида унга эквивалент булган, куйидагича ёзиш мумкин:

$$[\psi_1(x, y) - c][\psi_2(x, y) - c] \dots [\psi_k(x, y) - c] = 0$$

Бундан куринадики, (1) тенгламанинг умумий интеграли, ихтиёрий узгармасга нисбатан  $k$ -нчи даражали купхадлидан иборатдир.

Мисол.

$$y'^2 + yy' - (x^2 + xy) = 0$$

$$y' = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4(x^2 + xy)}}{2} = \frac{-y \pm \sqrt{(2x + y)^2}}{2} = \frac{-y \pm (2x + y)}{2}$$

$$y' = \frac{-y - 2x - y}{2} = -y - x; \quad y' = \frac{-y + 2x + y}{2} = x$$

$$y' + y = -x \quad y = e^{-\int dx} \left[ -\int e^{\int dx} x dx + c \right] =$$

$$= e^{-x} \left[ -(\ell^x x - \ell^x) + c \right] = c\ell^{-x} - (x - 1); \quad y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$(y - c\ell^{-x} + x - 1)(y - \frac{x^2}{2} - c) = 0$$

Тулик булмаган дифференциал тенгламалар.

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Дифференциал тенглама берилган булсин куйидаги холларни караймиз.

**1 хол.** (1) тенгламада  $x$  ва  $y$  узгарувчилар катнашмасин, яъни

$$F(y') = 0 \quad (2)$$

Агар бу тенгламанинг ечими  $y' = k_i$  булса,  $k_i$   $x$  ва  $y$  га боглик булмагани учун, охирги тенгламанинг умумий ечими

$$y = k_i x + c \text{ булади.}$$

Бундан  $k_i = \frac{y - c}{x}$  у холда (2) тенгламанинг умумий интеграли

$$F\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0 \text{ дан иборат булади.}$$

Мисол  $y'^5 + y'^2 - 3 = 0$  умий интеграли  $\left(\frac{y - c}{x}\right)^5 + \left(\frac{y - c}{x}\right)^2 - 3 = 0$

**2 хол.** (1) тенгламада у катнашмасин:

$$F(x, y') = 0 \quad F(y, p) = 0 \quad (3)$$

Бунда  $y' = p$

Агар  $F$  функция ошкормас функциянинг мавжудлиги хақидаги теорема шартларини каноатлантирса, (3) тенгламани  $p$  ни  $x$  нинг функцияси шаклида ёзиш мумкин:

$$p = y' = f_k(x) \quad (4)$$

Агар курилатган ораликда  $f_k(x)$  функция узлуксиз булса, (4) нинг умумий ечимлари  $y = \int f_k(x)dx + c$  дан иборат булади. Бу ечимлар туплами (3) тенгламанинг ечими булади.

Фараз этайлик (3) тенгламани  $x$  га нисбатан ечиш осонрок булсин:

$$x = \psi(p) \quad (5)$$

маълумки  $p = \frac{dy}{dx} \quad dy = p dx$

у холда  $dy = p \cdot \psi'(p)dp, \quad y = \int p \psi'(p)dp + c \quad (6)$

(3) тенгламанинг параметрик курунишдаги умумий ечими

$$\begin{cases} x = \psi(p) \\ y = \int p \psi'(p)dp + c \end{cases}$$

дан иборат булади.

Агар (3) тенгламани  $x$  ва  $p$  га нисбатан ечиш мураккаб булса, лекин уни, унга эквивалент булган

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (7)$$

параметр курунишда ёзиш мумкин булса, у холда (3) тенгламанинг параметр курунишдаги умумий ечими.

$$dy = p dx = \psi(t)\varphi'(t)dt$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \end{cases}$$

дан иборат булади.

Баъзи холларда бу кейинги тенгликдан параметр  $t$  ни йукотиб, (3) тенгламанинг умумий интегралини

$$\phi(x, y, c) = 0$$

курунишда ёзиш мумкин

Мисол 1.  $\ell^{y'} + y' = x \quad y' = p \quad x = \ell^p + p \quad dy = p dx = p(\ell^p + 1)dp$

$$y = \int p(\ell^p + 1)dp + c = \ell^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + c \quad \begin{cases} x = \ell^p + p \\ y = \ell^p(p-1) + \frac{p^2}{2} + c \end{cases}$$

Мисол 2.  $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0 \quad y' = p \quad x^3 + p^3 - 3xp = 0$

$$p = xt \quad \text{параметрни} \quad \text{киритсак.} \quad x^3 + t^3 x^3 - 3x^2 t = 0 \quad x(1+t^3) = 3t$$

$$\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ p = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad dy = p dx = \frac{3t^2 \cdot 3(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt$$

$$\begin{cases} y = \int \frac{9t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} dt + c \\ x = \frac{3t}{1+t^3} \end{cases}$$

**3 хол.** (1) тенгламада  $x$  катнашмасин:

$$F(y, y') = 0 \quad F(y, p) = 0 \quad (8)$$

Бу тенгламани  $y$  га нисбатан ечиш осонрок булсин:

$$y = \varphi_k(p) \quad (9)$$

Маълумки  $dy = p dx$   $dx = \frac{dy}{p}$  шунинг учун

$$dx = \frac{\varphi_k^1(p) dp}{p} \quad x + c = \int \frac{\varphi_k^1(p) dp}{p}$$

(8) тенгламанинг параметр куринишдаги умумий ечими

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi_k^1(p) dp}{p} + c \\ y = \varphi_k(p) \end{cases} \quad \text{дан иборат булади.}$$

Фараз этайлик (8) тенгламанинг  $p$  га нисбатан ечиш осонрок булсин:

$$p = \varphi_k(y)$$

$$dy = p dx; \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{dy}{\varphi_k(y)}, \Rightarrow \quad x = \int \frac{dy}{\varphi_k(y)} + c$$

бу берилган тенгламанинг умумий интегралидир.

(8) тенгламани  $y$  ва  $p$  га нисбатан ечиш мураккаб булсин. Лекин (8) тенгламани параметрик куринишда ёзиш мумкин булсин.

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ p = \psi(t) \end{cases} \quad (10)$$

Бу холда тенгламанинг умумий интеграл куйидагича топилади.

$$dy = p dx \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} \quad x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + c$$

$$\begin{cases} x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} \\ y = \varphi(t) \end{cases}$$

Мисол 1.  $y = y' + \ell n y'$   $y = p + \ell n p$

$$x = \int \frac{\left(1 + \frac{1}{p} dp\right)}{p} + c = \int \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\right) dp + c = \ln p - \frac{1}{p^2} + c$$

$$\begin{cases} x = \ln p - \frac{1}{p^2} + c \\ y = p + \ln p \end{cases}$$

Мисол 2.  $y(1 + y'^2) = 2a$        $y(1 + p^2) = 2a$        $p = \operatorname{tg} t$

$$y = \frac{2a}{1 + p^2} = \frac{2a}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = 2a \cos^2 t \quad \begin{cases} y = 2a \cos^2 t \\ p = \operatorname{tg} t \end{cases}$$

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{-4a \cos t \sin t}{\operatorname{tg} t} dt = -4a^2 \cos^2 t dt$$

$$x = -4a \int \cos^2 t dt + c = -4a \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + c = -2a \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c$$

$$\begin{cases} x = -2a \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c \\ y = 2a \cos^2 t \end{cases}$$

Бу берилган тенгламанинг параметрик курилишдаги умумий ечимидир.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1.  $m$ -нчи даражали биринчи тартибли тенгламанинг умумий интегралли қандай топилади?
2. Хосиллага нисбатан ечилмаган тенгламалар қандай ечилади?
3. Тулик булмаган тенгламанинг курилиши қандай?
4. Тулик булмаган дифференциал тенгламаларнинг параметрик курилишдаги умумий ечими қандай топилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1.  $m$ -нчи даражали биринчи тартибли тенгламанинг умумий интегралли қандай топилади?
2. Хосиллага нисбатан ечилмаган тенгламалар қандай ечилади?

### 1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар

1. Тулик булмаган тенгламанинг курилиши қандай?
2. Тулик булмаган дифференциал тенгламаларнинг параметрик курилишдаги умумий ечими қандай топилади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таҳлил, қайта ишлаш, мустаҳкамлаш, эслаб қолиш, чуқурлаштириш;

- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириши*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли ҳолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салохитдинов М.С. Насриддин Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.  
Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.  
Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.  
Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 – е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

- Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.  
Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.  
Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.  
Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.  
Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.  
Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с  
Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.  
Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.  
Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### а. Ўқитиш усуллари қоидалари

#### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ

- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### 1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини куйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқитётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### 1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмат кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

### МАЪРУЗА 9

Мавзу: Дифференциал тенгламани ечишда параметр киритиш усули.

#### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулотлари тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Хосилага нисбатан ечилмаган тенглама, ечим, умумий ечим, параметрик ечим, умумий интеграл, махсус ечим: параметр киритиш усули.

**Ўқув машғулотлари мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли

масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;

- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик тўғрларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиқ бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

#### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

##### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг



ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;

- *Талабалар фаолияти*: ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

## **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини таркатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти*: янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

## **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти*: ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### **1.3. Ўқув-методик материаллар**

**Калит сўзлар**: Хосилага нисбатан ечилмаган тенглама, ечим, умумий ечим, параметрик ечим, умумий интеграл, махсус ечим: параметр,

#### **1.3.1. Маъруза матни**

Хосилга нисбатан ечилмаган

$$F(x, y, p) = 0 \quad (1)$$

дифференциал тенгламанинг интеграллашдаги асосий масала уни хосилага нисбатан ечишдан иборатдир. Агар  $x, y, p$  ни фазодаги декарт координаталари деб карасак (1) тенглама фазода бирор сиртни аниқлайди.

Маълумки, фазодаги сирт нукталарини иккита  $u, v$  узгарувчиларини функцияси шаклида ифодалаш мумкин:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, \sigma) \\ y = \psi(u, \sigma) \\ p = \chi(u, \sigma) \end{cases} \quad (2)$$

(1) ва (2) тенгламалар узаро эквивалентдир.  
Маълумки

$$dy = p dx$$

Бунга  $dx, dy, p$  кийматларни (2) дан келтириб куйисак

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} d\sigma = \chi(u, \sigma) \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} d\sigma \right)$$

Агар бунда  $u$  ни аргумент учун,  $\vartheta$  ни функция учун қабул қилсак, бу тенгламани куйидагича ёзиш мумкин.

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) \frac{d\vartheta}{du} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad \text{ёки}$$

$$\frac{d\vartheta}{du} = \chi \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u} / \left( \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \chi \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right)$$

Бу эса ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламадир. Фараз этайлик бу тенгламанинг умумий ечими

$$\vartheta = \omega(u, c) \text{ булсин.}$$

У ҳолда (2) га асосан (1) тенгламанинг умумий ечими

$$\begin{cases} x = \varphi(u, \omega(u, c)) \\ y = \psi(u, \omega(u, c)) \end{cases} \quad \text{булади.}$$

(1) тенгламани ечишда куйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

1 ҳол. (1) тенгламани  $u$  га нисбатан ечиш осонроқ булсин.

$$y = f(x, p) \quad (4)$$

Бу тенгламани ҳар иккала томони  $x$  га нисбатан дифференциал-лаймиз.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} \frac{dp}{dx} \quad \text{ёки} \quad p = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dp} \frac{dp}{dx} \quad (5)$$

Бу тенглама,  $p$  ва  $x$  га нисбатан биринчи тартибли дифференциал тенгламадир.

Агар бу тенгламанинг умумий ечими  $p = \beta(x, c)$  булса,  $u$  ҳолда

(4) тенгламанинг умумий ечими  $y = f(x, \beta(x, c))$  булади.

Мисол.  $y = xy' - x^2 y'^3 \quad y' = p \quad y = xp - x^2 p^3$

$$p = p - 2xp^3 + (x - 3x^2 p^2) \frac{dp}{dx} \quad 2xp^3 = x(1 - 3xp^2) \frac{dp}{dx} \quad \frac{dx}{dp} + \frac{3}{2p} x = \frac{1}{2p^3}$$

$$x = \ell^{-\frac{3}{2} \ell n p} \left[ \int \ell^{\frac{3}{2} \ell n p} \frac{1}{2p^3} dp + c \right] = p^{-\frac{3}{2}} \left[ \int \frac{1}{2p^{3-\frac{3}{2}}} dp + c \right] = p^{-\frac{3}{2}} \left[ -p^{-\frac{1}{2}} + c \right] =$$

$$= -p^{-2} + cp^{-\frac{3}{2}} \quad xp^2 = c\sqrt{|p|} - 1$$

Агар  $p = 0$  булса  $y = 0$  ҳам тенгламанинг ечими булади.

**2 хол.** (1) тенгламани  $x$  га нисбатан ечиш осонрок булсин:

$$x = f(y, p) \quad (5)$$

хар иккала томонидан  $y$  га нисбатан хосиласини оламин.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df}{dy} + \frac{df}{dp} \frac{dp}{dy}$$

Бу  $p$  ва  $y$  га нисбатан биринчи тартибли дифференциал тенгламадир.

Агар бу тенгламанинг умумий ечими  $p = \alpha(y, c)$  булса,

(5) тенгламанинг умумий интеграли  $x = f(y, \alpha(y, c))$  булади.

Мисол  $y' = \ell^{\frac{xy'}{y}}$   $y' = p$   $p = \ell^{\frac{xp}{y}}$   $\ell np = \frac{xp}{y}$

$$x = \frac{y}{p} \ell np \quad (*) \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \ell np + \left( -\frac{y}{p^2} \ell np + \frac{y}{p^2} \right) + \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{1}{p} (1 - \ell np) = \frac{y}{p^2} (1 - \ell np) \frac{dy}{dy} \quad 1 - \ell np = 0 \quad \ell np = 1 \quad p = \ell \quad y = \ell x$$

$$1 - \ell np \neq 0 \quad \frac{1}{p} = \frac{y}{p^2} \frac{dp}{dy} \quad \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y} \quad \ell np = \ell ny + \ell nc \quad p = cy$$

$$(*) \quad \text{дан} \quad xp = y \ell np \quad xcy = y \ell ncy \quad cx = \ell ncy$$

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремаси

1)  $F(x, y, y')$  функцияси  $(x_0, y_0, y'_0)$  нуктанинг ёпик атрофида узининг барча  $F'_y, F'_{y'}$  хусусий хосилалари билан бирга аникланган ва узлуксиз дифференциалланувчи булсин.

2) Бу нуктада  $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$

3)  $F'_{y'}(x_0, y_0, y'_0) \neq 0$

У холда (1) тенглама  $x = x_0$  нукта атрофида аникланган ва узлуксиз дифференциалланувчи ягона  $y = y(x)$  ечимга эга булиб, бу ечим  $y(x_0) = y_0$ , бошлангич шартни ҳамда  $y'(x_0) = y'_0$  шартни каноатлантиради.

## Лагранж

тенгламаси

(1736-1813 француз)

Дифференциаллаш методи билан квадратурага келтираладиган хосилага нисбатан ечилмаган тенгламалардан бири Лагранж тенгламаси булиб, унинг умумий курилиши

$$A(p)y + B(p)x + C(p) = 0 \quad (1)$$

булади. Бунда  $A(p), B(p), C(p)$  курилатган сохада узлуксиз функциялар булиб унда  $A(p) \neq 0$  (1) тенгламадан куринадиким. Лагранж тенгламаси  $x$  ва  $y$  ларга нисбатан чизикли дифференциал тенгламадир (1) нинг хар иккала томони  $A(p) \neq 0$  га булсак,

$$y = \varphi(p)x + \psi(p) \quad (2)$$

тенгламага эга буламиз.

Бунда 
$$\varphi(p) = \frac{-B(p)}{A(p)}, \quad \psi(p) = -\frac{C(p)}{A(p)}$$

(2) Лагранж тенгласининг каноник (содда) курунишидир.

(2) тенгламани ечиш учун дифференциаллаш усулидан фойдаланамиз

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \\ p &= \varphi(p) + (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} \\ p - \varphi(p) &= (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} \end{aligned} \quad (3)$$

$p - \varphi(p) \neq 0$  булмасин.

(3) тенгламада  $x$  ни функция  $p$ -ни аргумент деб кабул этсак, тенгламани

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= \frac{x\varphi'(p) + \psi'(p)}{p - \varphi(p)} = -\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x - \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} \\ \frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x &= -\frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} \end{aligned}$$

Бу эса биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламадир.

Маълумки унинг умумий ечими

$$x = \ell \int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} dp \left[ - \int \ell \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p} dp + c \right] = c\omega(p) + \alpha(p)$$

дан иборат.

Бу топилган кийматни (2) га олиб бориб куйсак Лагранж тенгласининг параметрга боғлиқ булган умумий ечимига эга буламиз.

$$\begin{cases} x = c\omega(p) + \alpha(p) \\ y = \varphi(p)[c\omega(p) + \alpha(p)] + \psi(p) \end{cases}$$

Фараз этайлик  $\varphi(p) - p = 0$  булсин.

Бу тенгламанинг ечимларидан бири  $p = c_0$  булсин яъни

$$\varphi(c_0) - c_0 \equiv 0.$$

у холда (2) дан  $y = c_0x + \psi(c_0)$  га эга буламиз

Бу ҳам Лагранж тенгласининг ечимидир. Бу ечим тенгламанинг махсус ечими булиши мумкин.

Мисол.  $y = (1 + y')x + y^{12} \quad y = (1 + p)x + p^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 1 + p + x \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx} = 1 + p + (x + 2p) \frac{dp}{dx} \\ p &= 1 + p + (x + 2p) \frac{dp}{dx} \quad (x + 2p) \frac{dp}{dx} = -1 \quad \frac{dx}{dp} = -(x + 2p) \\ \frac{dx}{dp} + x &= 2p \quad x = \ell^{-p} \left[ -2 \int \ell^p p dp + c \right] = \ell^{-p} \left[ -2 \ell^p (p - 1) + c \right] = \\ &= -2(p - 1) + c \ell^{-p} \quad \left( \int \ell^u du = \ell^u (u - 1) + c \right) \\ \begin{cases} x = c \ell^{-p} - 2p + 2 \\ y = (1 + p)(c \ell^{-p} - 2p + 2) + p^2 \end{cases}\end{aligned}$$

Клеро тенгламаси

(1713-1765 француз)

Лагранж тенгламасининг хусусий холи Клеро тенгламасидир Лагранж тенгламасида  $\varphi(p) \equiv p$  булса

$$y = px + \psi(x) \quad (1)$$

Бу Клеро тенгламасининг каноник куринишидир Клеро тенгламасининг хам дифференциаллаш усулидан фойдаланиб ечамиз.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= p + x \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx} = p + (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} \\ p &= p(x - \psi'(p)) \frac{dp}{dx} \quad (x + \psi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0\end{aligned}$$

Бундан  $\frac{dp}{dx} = 0$  ва  $x + \psi'(p) = 0$   $\frac{dp}{dx} = 0$  дан  $p = c$  буни (1) тенгламага куйсак

$y = cx + \psi(c)$  Клеро тенгламасининг умумий ечимига эга булаамиз.

Бундан куринадиким Клеро тенгламасининг умумий ечими, ихтиёрий узгармасга (параметр) боглик булган тугри чизиклар оиласидан иборатдир.

Энди  $x + \psi'(p) = 0$  ни  $p$  га нисбатан ечиш мумкин булсин.

$$p = \omega(x)$$

$$У \text{ холда (1) дан } y = x\omega(x) + \psi(\omega(x)) \quad (2)$$

га эга булаамиз. Бу хам Клеро тенгламасининг ечими булиб, у махсус ечим булиши мумкин.

Клеро тенгламасининг умумий ечимини

$$\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = -p\psi'(p) + \psi(p) \end{cases} \quad (3)$$

параметр куринишда хам ёзиш мумкин. (2) ечимни умумий ечимдан фарки шундаки унда биринчидан узгармас сон катнашмайди. Иккинчидан ихтиёрий узгармас соннинг хечкандац киматида уни хосил килиб булмайди. (2) ечимга Клеро тенгламасининг махсус ечими дейилади.

Маълумки махсус ечим

$$\begin{cases} y = cx + \psi(c) \\ x + \psi'(c) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

тенгламалардан ихтиёрий узгармас  $c$  ни йукотиш натижасида хосил булади. (4) нинг иккинчиси, биринчисининг параметр  $c$  га нисбатан дифференциаллашдан хосил булган.

Дифференциал геометриядан маълумки бундай амаллар ёрдамида ҳосил булган чизик, битта параметрга боғлиқ булган

$$y = cx + \psi(c)$$

туғри чизиклар оиласининг урамасидан иборатдир.

Демак геометрик нуктаи назаридан Клеро тенгламасининг махсус ечими, унинг умумий ечимини ифодаловчи туғри чизиклар оиласини урамасидан иборатдир

Мисол  $y = xy' + y'^2$   $y = px + p^2$   $y = cx + c^2$

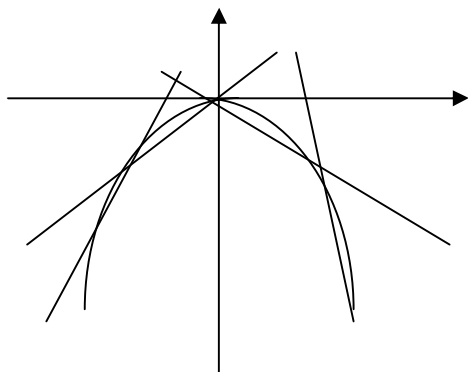
Тенгламанинг умумий ечими.

$$\frac{dy}{dx} = p + (x + 2p) \frac{dp}{dx} \quad p = p + (x + 2p) \frac{dp}{dx} \quad (x + 2p) \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \quad p = c \quad x + 2p = 0 \quad p = -\frac{x}{2}$$

$$y = -\frac{x}{2}x + \left(-\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$

Бу махсус ечимдир.



### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Ҳосиллага нисбатан ечилмаган тенглама ечимини мавжудлик ва ягоналик теоремасини айтинг?
2. Параметр киритишдан мақсад нима?
3. Лагранж тенгламаси, қандай ечилади?
4. Клеро тенгламасининг умумий ечими ва махсус ечими қандай топилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

4. Ҳосиллага нисбатан ечилмаган тенглама ечимини мавжудлик ва ягоналик теоремасини айтинг?
5. Махсус ечим деб нимага айтилади?

### 1.3.2-в. Ойлаки сўров учун саволлар

1. Параметр киритишдан мақсад нима?
2. Лагранж тенгламаси, қандай ечилади

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, Пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;

- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект Ўқимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддин Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### Ўқимча АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 14.6. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилатган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ

- Агар ғоялар такрорланса ўксинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқиясиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқиясиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

### **МАЪРЎЗА 10**

**Мавзу:** Махсус ечимлар

**Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);



**Ўқув машғулотлари тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Ечим, умумий ечим, махсус ечим, интеграл чизик, р-дискриминант, Липшиц шарт, эгри чизиклар оиласи, урама.

**Ўқув машғулотлари мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

**Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади

- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

## • 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси

### • 1 босқич. Ўқув машғулотиға кириш (10 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташки кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишға тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

### 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашға чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф етади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф етади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларға ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

**Калит сўзлар:** Ечим, умумий ечим, махсус ечим, интеграл чизик, р-дискриминант, Липшиц шарти, эгри чизиклар оиласи, урама.

### 1.3.1. Маъруза матни

Маълумки Коши теоремасига асосан

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

дифференциал тенгламанинг унг томони бирор сохада узлуксиз булиб, унда у га нисбатан чегаралган хусусий хосилага эга булса, соханинг ихтиёрий хар бир  $(x_0, y_0)$  нуктасидан биргина интеграл эгри чизиги утади.

Бу интеграл эгри чизик битта параметрга боглик булган эгри чизиклар оиласи таркибига кириб, параметрнинг аник соний кийматида аникланади.

Битта параметрга боглик булган эгри чизиклар оиласи умумий ечимни ташкил этиб, хар бир интеграл эгри чизиклар хусусий ечимларни ташкил этади. Ягоналик теоремасига асосан бу холда бошка хеч кандай ечим, шу жумладан махсус ечим хам мавжуд эмас.

**ТАЪРИФ:** Дифференциал тенгламанинг махсус ечими деб узининг хамма нуктасида бирлик хусусиятини каноатлантирмайдиган ечимга айтилади, яъни махсус ечимнинг ихтиёрий хар бир  $(x_0, y_0)$  нуктасидан хеч булмаганда иккита интеграл эгри чизиги утади.

Коши теоремаси бирор сохада ечими мавжуд булмаслигини етарлиги шартини беради. Демак, аксинча махсус ечимнинг мавжуд булишлиги учун Коши теоремасидаги шартларнинг бажарилмаслиги зарурдир. Шундай килиб махсус ечимнинг  $XOY$  текислигининг шундай нукталарида излашимиз керакки у нукталарда Коши теоремасининг шартлари бажарилсин. Хусусий холда агар тенгламанинг унг томонидаги  $f(x, y)$  функция курилайтган соханинг хамма нукталарида узлуксиз булса махсус ечим Липшиц шarti бажарилмайдиган нукталардан утиши мумкин:

Агар  $f(x, y)$  функция курилайтган сохада у га нисбатан чекли ёки чекли булмаган

хусусий хосилага эга булса, у холда Липшиц шarti  $\frac{\partial f}{\partial y}$  хосила

чексизликка айланадиган нукталарда бажарилмайди.

Бирок Липшиц шarti бажарилмаган нукталарнинг геометрик урни эгри чизик булган холда унинг махсус ечим булиши мумкин, лекин унинг махсус ечим булмаслиги хам мумкин. Чунки у эгри чизикнинг узи тенгламанинг ечими булолмаслиги мумкин яъни Коши теоремасидан махсус ечим учун факат зарурий шарт келиб чиқади.  $f(x, y)$

узлуксиз ва  $\frac{df}{dy}$  чексиз булган хол, купинча  $f(x, y)$  иррационал функция булган холда учрайди.

**Мисол. 1**  $y' = \sqrt{y-x}$   $f(x, y) = \sqrt{y-x}$   $f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$

Бу хосила  $y=x$  да чегараланмаган. Лекин  $y=x$  функция тенглама ечими эмас. Шунинг учун у махсус ечим хам булалмайди.

**Мисол 2.**  $y' = \sqrt{y-x} + 1$   $f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y-x}}$

Липшиц шarti бажаралимайдиган нукталарнинг геометрик урни  $y=x$  лекин  $y=x$  берилган дифференциал тенгламанинг ечими. Демак  $y=x$  махсус ечим булиши мумкин. Буни текшириш учун берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

$$\begin{aligned}
y - x &= (p - 1)^2 & y &= x + (p - 1)^2 \\
p &= 1 + 2(p - 1)p' \\
p - 1 &= 2(p - 1)p' \\
1 &= 2p'; & \frac{dp}{dx} &= \frac{1}{2} & p - 1 &= 0 & p &= 1 \\
y &= x \\
p &= \frac{1}{2}x + c + 1
\end{aligned}$$

Лагранж тенгласининг умумий ечими

$$y = \left( \frac{1}{2}x + c \right)^2 + x \quad (2) \text{ булади}$$

$$\left( \frac{1}{2}x + c \right)^2 \geq 0 \quad \text{булганлиги учун} \quad y - x \geq 0 \text{ булади.}$$

Умумий ечим ярим параболалардан иборатдир.  $y = x$  тугри чизикнинг харбир  $(x_0, y_0)$  нуктасидан (2) тенгламадан  $c = -\frac{x_0}{2}$  кийматида аникланувчи парабола утади. Шундай килиб  $y=x$  мухсус ечим.

Демак (1) тенгламанинг махсус ечимни топиш учун, Липшиц шarti бажарилмайдиган нукталарни урини топиш керак.

Агар бу урин бир ёки бир неча эгри чизикларни ташкил этса, бу эгри чизикларнинг (1) тенгламани интеграл эгри чизики булишлигини текшириш керак ва унинг хар бир нуктасида ягоналик хоссасини бажарилмаслигини текшираимиз.

Агар бу икки шарт бажарилса, топилган эгри чизик махсус ечим булади. Фараз этайлик, хосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенглама

$$F(x, y, y') = 0 \quad F(x, y, p) = 0 \quad (3)$$

берилган булсин.

(3) тенгламанинг чап томони  $p$  га нисбатан  $n$ - нчи даражали келтирилмайдиган алгебраик купхадлидан иборат булсин. Яъни

$$A_n(x, y)p^n + A_{n-1}(x, y)p^{n-1} + \dots + A_1(x, y)p + A_0(x, y) = 0 \quad (4)$$

бунда  $A_k(x, y)$   $k = \overline{0, n}$  коэффициентларнинг хаммаси  $x$  ва  $y$  га нисбатан купхадлидир. (4) тенглама умумий айтганда  $n$ -та ечимга эга.

$$y'_i = f_i(x, y) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (5)$$

бу  $n$ - та тармокларидан факат хакикий тармокларни караймиз. Бу тармокларни хаммаси  $A_n(x, y) \neq 0$  булмаган  $x$  ва  $y$  нинг кийматларида  $x$  ва  $y$  нинг узлуксиз функциялари булади.

Бу тармоklar учун Липшиц шартини бажарилишлигини текшираимиз.

$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial y'}{\partial y}$  хосилани хисоблаш учун ошкормас функцияни дифференциалаш

коидасидан файдаланиб (3) дан.

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{га эга буламиз.}$$

Бу кейинги тенгликдан

$$\frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial p}} \quad (6) \text{ хосил булади}$$

Лекин  $A_k(x, y)$  коэффициентларнинг хаммаси  $y$  га нисбатан дифференциаланувчи булгани учун (6) хосила  $A_n \neq 0$  ва махражи нульга тенг булмаган хамма кийматларда чекли ва узлуксиздир, яъни Липшиц шартини каноатлантирмайдиган  $x$  ва  $y$  нинг кийматлари

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

тенгламани каноатлантириши керак.

дифференциалаш амали бажарилгандан сунг чап томонидаги  $y'$  урнига (3) тенгламадан аникланган  $f_i(x, y)$  функциялардан бирини олиш керак. Бошқача айтганда Липшиц шарти бажарилмайдиган нукталарнинг  $XOY$  текисликдаги геометрик урнини аникловчи тенгламани тузиш учун (3) ва (7) дан  $p$  ни йукотиш керак. Олий алгебрада, рационал операциялар ёрдамида икки алгебраик тенгламадан битта узгарувчини йукотиш усули берилади. Бунга бу тенгламаларнинг резултант дейилади. Резултантнинг нульга тенглиги эса икки тенгламанинг умумий ечимига эга булиш шартидан иборат. Биз кураётган холда (7), (3) дан  $y'$  га нисбатан олинган хосиладир. Бу тенгламаларнинг резултант,  $y'$  га нисбатан (3) тенгламанинг дискриминантдан иборатдир. Дискриминантнинг нульга тенглиги берилган тенглама ва ундан хосила олиш натижасида хосил булган тенгламанинг умумий ечимга эга булиш шартидир. Бошқача айтганда (3) тенгламанинг  $y'$  узгарувчига нисбатан каррали илдизга эга булиши шартидир.

(3) ва (7) тенгламадан  $y'$  ни йукотсак

$$D_p(x, y) = 0 \quad (8)$$

тенгламага эга буламиз.

Бу тенгламага (3) тенгламанинг  $p$ - дискриминант эгри чизиги дейилади. Умуман айтганда  $p$ -дискриминант эгри чизик бир ёки бирнечта эгри чизикларни ифода этади. Фараз этайлик (8) ни  $y$  га нисбатан ечиш мумкин булсин.

Яъни  $y = \varphi(x)$  (9)

Агар (9) эгри чизик (3) тенгламанинг ечими булса, умуман айтганда, бу махсус ечим булиши мумкин.

**Қоида 1.** Агар  $F(x, y, p) = 0$  (3) тенгламанинг чап томони  $p$  га нисбатан купхадли булса,  $y$  холда

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

тенгламани тузамиз. (3) ва (7) тенгламалардан  $p$  ни йукотиб, дискриминант эгри чизикни аникловчи (8) тенгламани хосил киламиз. Агар бу тенгламадан аникланган

$y = \varphi(x)$  функция дифференциал тенгламанинг ечими булса, у умуман айтганда махсус ечим булиши мумкин.

**Мисол 1.**  $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$

$$F(x, y, p) = xp^2 - 2yp + 4x = 0$$

$$F_p'(x, y, p) = -2p + 2y = 0$$

$$x \cdot \frac{y^2}{x^2} - 2y \cdot \frac{y}{x} + 4x = 0 \quad p = \frac{y}{x}$$

$$D(x, y) = 4x^2 - y^2 = 0 \quad 4x^3 - 2xy^2 = 0$$

$$y = \pm 2x$$

Булар берилган тенгламанинг ечими булади. Демак улар махсус ечим булиши мумкин. Берилган тенгламанинг умумий ечимини топамиз

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x} \quad \text{бу биржинсли тенглама}$$

$$y = ux \quad x \frac{du}{dx} = \sqrt{u^2 - 4}$$

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - 4}} = \frac{dx}{x} \quad \ln(u + \sqrt{u^2 - 4}) + \ln c = \ln x$$

$$c(u + \sqrt{u^2 - 4}) = x \quad c\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 4} = x - \frac{cy}{x}$$

$$c\sqrt{y^2 - 4x^2} = x^2 - cy \quad x^2 = 2cy - 4c^2$$

$$x^2 = 2c(y - 2c) \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{2c}x^2 + 2c$$

Бу боши ордината укида булиб, узгарувчи параметрга боглик булган параболалар оиласидан иборатдир.

$y = \pm 2x$  махсус ечимдир чунки унинг ихтиёрий

$(x_0; \pm 2x_0)$  нуктасидан (10) параболалар оиласининг  $c = \pm \frac{x_0}{2}$  киймати билан

аникланувчи параболалардан бири утади. Бу махсус ечим, параболалар оиласининг урамасидан иборатдир.

**Мисол 2.**  $y'^2 - y^3 = 0$

$$F(x, y, p) = p^2 - y^3 = 0$$

$$F_p'(x, y, p) = 2p = 0$$

$$p = 0$$

р ни йукатсак р- дискриминантини топамиз.

$y=0$  бу берилган тенгламани каноатлантиради.

Унинг махсус ечими ёки махсусмаслигини билиш учун берилган тенгламани умумий ечимини топамиз.

$$y' = y^{3/2} \quad \frac{dy}{y^{3/2}} = dx \quad -\frac{2}{y^{1/2}} = x + c \quad y^{1/2} = -\frac{2}{x + c}$$

$$y = \frac{4}{(x + c)^2}$$

$y=0$  ечим узгармас  $c$  нинг хеч кандай кийматида умумий ечимдан келиб чикмайди. Шунинг билан бирга  $y$  махсус ечим эмас, чунки интеграл эгри чизиклар абцисса укини кесмайди.

**Мисол 3.**  $(y'-1)^2 - y^3 = 0$

$$F(x, y, p) = (p - 1)^2 - y^3 = 0$$

$$F'_p(x, y, p) = 2(p - 1) = 0$$

$$p = 1$$

$p$ - дискриминат топамиз  $D(x, y) \equiv y = 0$  лекин  $y = 0$  тенглама ечими эмас демак  $y$  махсус ечим хам булаолмайди.

**2 ХОЛ** Юкорида курдикким, агар берилган дифференциал тенглама  $x, y, p$  ларга нибатан алгебраик купхадлидан иборат булса, топилган махсус ечим хам  $x, y$  га нисбатан алгебраик функциядан иборат булади.

Фараз этайлик (3) тенгламанинг умумий интеграл

$$\phi(x, y, c) = 0 \quad (11)$$

берилган булсин.

Маълумки (11) эгри чизиклар оиласининг урама чизиги мавжуд булса, у  $\frac{\partial \phi}{\partial c} = 0$

(12) тенглама ва (11) дан параметр  $c$  ни йукотиш натижасида хосил булган

$$D_c(x, y) = 0 \quad (13)$$

Эгри чизик билан аникланар эди. (13) га  $c$  –дискриминанти чизиги дейилади. Агар бу эгри чизик (11) эгри чизиклар оиласининг урамаси булса,  $y$  биринчидан (3) тенгламанинг ечими булади. Хакикатдан хам ураманинг хар бир нуктасидаги  $(x, y, p)$  элемент, (11) интеграл эгри чизиклар оиласининг биттасининг элементи билан мос келади. Лекин (11) интеграл эгри чизиклар оиласи (3) тенгламанинг ечими булгани учун, ураманинг хамма элементлари хам бу тенгламани каноатлантиради.

Яъни урама тенгламанинг ечими булади. Иккинчидан бу урама махсус ечим булади чунки урама нукталаридан умумий уринмага эга булган иккита интеграл эгри чизиклар утади, бу эгри чизиклардан бири (11) оиланинг эгри чизиклари, иккинчиси эса урама чизигининг узидир. Яъни урама нукталарида Коши теоремасининг ягоналик шарти бажарилмайди.

Демак берилган тенгламанинг умумий интеграл маълум булса, унинг махсус ечим (11) ва (12) тенгламадан параметр  $c$  ни йукотиш натижасида хосил килинади. (агар йукотиш натижасида хосил килинган эгри чизик тенгламанинг каноатлантирса)

**Мисол**  $4y^2 p^2 + 4y^2 - (x + py)^2 = 0$

тенгламанинг умумий интегралини топамиз.

$$(x + py)^2 = 4y^2(p^2 + 1) \quad x = y(2\sqrt{p^2 + 1} - p)$$

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = 2\sqrt{p^2 + 1} - p + y \left( \frac{2p}{\sqrt{p^2 + 1}} - 1 \right) \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2p - \sqrt{p^2 + 1}}{\sqrt{p^2 + 1}} \cdot \frac{p}{1 + p^2 - 2p\sqrt{1 + p^2}} dp \quad 1 + p^2 = z^2$$

$$2pdp = 2zdr$$

$$pdp = zdr$$

$$\int \frac{2\sqrt{z^2 - 1} - z}{z} \cdot \frac{zdr}{z^2 - 2z\sqrt{z^2 - 1}} = \int \frac{2\sqrt{z^2 - 1} - z}{z(z - 2\sqrt{z^2 - 1})} dz = -\int \frac{dz}{z}$$

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dy}{y} + \ln c \quad \ln z = -\ln y + \ln c \quad z = \frac{c}{y}$$

$$\sqrt{1 + p^2} = \frac{c}{y} \Rightarrow p = \frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y} \quad x = y \left( 2 \cdot \frac{c}{y} - \frac{\sqrt{c^2 - y^2}}{y} \right)$$

$$x = 2c \cdot \sqrt{c^2 - y^2} \quad 2c - x = \sqrt{c^2 - y^2} \quad (2c - x)^2 = c^2 - y^2$$

$$(x - 2c)^2 + y^2 = c^2 \quad (14)$$

Бу берилган тенгламанинг умумий интегралидир. Умумий интеграл, маркази абсцисса укида ётиб, радиуси марказ абсциссасининг ярмига тенг булган айланалар оиласидан иборатдир.

Махсус ечимни аниқлаймиз. Юқорида айтилганларга кура:

$$F(x, y, c) \equiv (x - 2c)^2 + y^2 - c^2 = 0$$

$$F'_c(x, y, c) \equiv 2(x - 2c) \cdot (-2) - 2c = 0$$

$$-2x + 4c - c = 0 \quad 3c = 2x \quad c = \frac{2}{3}x$$

c-дискриминант эгри чизик тенгламасини тузамиз:

$$D_c(x, y) \equiv \left( x - 2 \cdot \frac{2}{3}x \right)^2 + y^2 - \frac{4}{9}x^2 = 0,$$

бундан

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x \quad (15)$$

га эга булаемиз. Биринчидан бу, умумий интеграллар оиласининг урамаси, иккинчидан булар берилган тенгламанинг ечими.

Демак  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$  берилган тенгламанинг махсус ечими.

Унинг махсус ечим эканлигига ишониш учун унинг ихтиёрий хар бир нуктасига, тенгламанинг бошка интеграл чизикларининг уринишини аниқлаймиз.



Маълумки иккита  $y = \varphi(x)$  ва  $y = \psi(x)$  эгри чизикларнинг, абсциссаси  $x_0$  булган нуктада уриниш шarti

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = \psi(x_0) \\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0) \end{cases} \quad (16)$$

дан иборатдир.

Бу шартнинг тенгламанинг

$$y = \pm \sqrt{c^2 - (x - 2c)^2} \quad \text{ва} \quad y = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$$

интеграл чизиклари учун бажарилишини текширамиз.

(16) га асосан  $x=x_0$  да

$$\begin{cases} \sqrt{c^2 - (x_0 - 2c)^2} = \frac{x_0}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2(x_0 - 2c)}{2\sqrt{c^2 - (x_0 - 2c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad (17)$$

Буларнинг иккинчисидан

$$\begin{aligned} 3(x_0 - 2c)^2 &= c^2 - (x_0 - 2c)^2 \\ 4(x_0 - 2c)^2 &= c^2 & \pm 2(x_0 - 2c) &= \pm c \\ 2(x_0 - 2c) &= -c & 3c &= 2x_0 & c &= \frac{2x_0}{3} \end{aligned}$$

Бу кийматни (17) нинг биринчисига куйсак

$$\sqrt{\frac{4x_0}{9} - \left(x_0 - 2\frac{2x_0}{3}\right)^2} = \frac{x_0}{\sqrt{3}} \quad \text{соддалаштирсак}$$

$$\frac{x_0}{\sqrt{3}} = \frac{x_0}{\sqrt{3}} \quad \text{га эга буламиз. Бу тенглик } x_0 \text{ нинг хамма кийматларида}$$

уринлидир.

Демак (15) ечимнинг абсциссаси  $x_0$  булган хар бир нуктасига, (14) ечимнинг  $c = \frac{2x_0}{3}$

да аникланган интеграл чизиги уринади.

(15) тенгламанинг махсус ечимидир.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

12. Тенгламанинг махсус ечими деб, кандай ечимга айтилади?
13. Тенгламанинг оддий ечими деб кандай ечимга айтилади?
14. Агар берилган тенгламанинг чап томони  $y'$  га нисбатан купхадлидан иборат булса, унинг махсус ечими кандай топилади?
15. Агар берилган тенгламанинг умумий ечими (умумий интеграл) маълум булса унинг махсус ечими кандай топилади?
16. Иккита эгри чизикларнинг узаро уриниш шартларини ёзинг.
17. Махсус ечимнинг мавжудлигининг зарурий шarti нимадан иборат?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

- 1.Тенгламанинг оддий ечими деб қандай ечимга айтилади?
- 2.Агар берилган тенгламанинг чап томони  $u'$  га нисбатан қўлхадлидан иборат бўлса, унинг махсус ечими қандай топилади?
3. Агар берилган тенгламанинг умумий ечими (умумий интеграл) маълум бўлса

### 1.3.2-в. Оғзаки сўров учун саволлар

1. Агар берилган тенгламанинг умумий ечими (умумий интеграл) маълум бўлса унинг махсус ечими қандай топилади?
15. Иккита эгри чизикларнинг узаро уриниш шартларини ёзинг.

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таққил, Пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, қўрқлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект қўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз.Физ-мат. литература.1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

#### ҚУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

## **15.4. Ўқитиш усуллари қоидалари**

### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шунинг учун ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРУЗА 11**

**Мавзу:** Юкори тартибли дифференциал тенгламалар, уни нормал холга келтириш мавжудлик ва ягоналик теоремаси.

## Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Дифференциал тенглама тартиби, ечим ҳақида тушунча, эквивалентлик, узлуксизлик, Липшиц шarti, тенгламалар системаси, ошкормас функция ҳақида тушунча, нормал система ҳақида тушунча.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

**Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

## • 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси

### • 1 босқич. Ўқув машғулотиға кириш (10 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишға тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

### 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашға чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф етади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф етади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларға ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мнавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишининг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Дифференциал тенглама тартиби, ечим, эквивалент, узлуксиз, Липшиц шарти, тенгламалар системаси, ошкормас функция, нормал система.

#### 1.3.1. Маъруза матни

$n > 1$  чи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий курилиши

$$F(x, y, y', y'' \dots y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

дан иборат.

Бунда  $F$  уз аргументларининг курилатган соҳада аниқланган ва узлуксиз функциясидир.

Фараз этайлик  $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n)})$  бирор нуктада

$$F(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n)}), \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y_0=y_0 \\ \dots \\ y^{(n)}=y_0^{(n)}}} \neq 0$$

шартлари бажарилсин.

У холда ошкормас функциянинг мавжудлик теоремасига асосан, (1) тенгламани  $y^{(n)}$  ҳосилага нисбатан ечиш мумкин.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

(2) тенгламани унга эквивалент булган  $n$ - номаълумли  $n$  та биринчи тартибли дифференциал тенгламалар системаси билан алмаштириш мумкин.

Бунинг учун у дан ташкари  $n-1$  та  $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  янги узгарувчилар-ни киритамиз.

$y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  янги узгарувчи функция билан  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  функциялар куйидагича боғланишда буладилар:

$$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \dots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \quad (3)$$

(2) дан куринадиким.

$$y_k = \frac{d^k y}{dx^k} = y^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

шунга асосан

$$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \quad (4)$$

(3) ва (4) биргаликда биринчи шартли тенгламалар системасини ташкил этади. Ҳосил булган тенгламалар системасини симметрик курилишда ёзиш учун  $y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$  ларни мос равишда  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  лар билан алмаштирамиз.

У холда юқоридаги дифференциал тенгламалар системасини куйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (5)$$

(5) га дифференциал тенгламалар системасининг нормал холи дейилади.

(Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси)

Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси, номаълум функцияларнинг биринчи тартибли хосилаларига нисбатан ечилган булади.

### МАВЖУДЛИК ВА ЯГОНАЛИК ТЕОРЕМАСИ.

$D \left( \begin{cases} |x - x_0| \leq a \\ |y_i - y_i^{(0)}| \leq b \end{cases} \right)$  ёпик сохада каралаётган  $f_i$  функциялари куйидаги шартларни

каноатлантирсин:

1.  $f_i$  функциялари  $D$  сохада барча аргументларига нисбатан аникланган ва узлуксиз булсин. Функциялар курилатган сохада узлуксиз булгани учун у шу сохада чегараланган булади.

Яъни ихтиёрий  $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}) \in D$

нуктаси учун

$$|f_i(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})| \leq M$$

шарти бажарилади. Бунда  $M > 0$

2.  $f_i$  функциялари  $D$  сохада  $y_j (j = \overline{1, n})$  га нисбатан Липшиц шартини каноатлантирсин.

Яъни ихтиёрий иккита

$$(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) \in D, \quad (x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n) \in D$$

нукталар учун

$$|f_i(x, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) - f_i(x, \bar{\bar{y}}_1, \bar{\bar{y}}_2, \dots, \bar{\bar{y}}_n)| \leq L \sum_{j=1}^n |\bar{y}_j - \bar{\bar{y}}_j|$$

шарт бажарилсин.

Бунда  $L$  мусбат сон.

У холда (5) тенгламалар системаси  $x=x_0$  булганда  $y_i(x_0)=y_i^{(0)}$  бошлангич кийматларни каноатлантирувчи ягона  $y_i=y_i(x)$  ечимлар системаси мавжудки, бу ечимлар системаси  $x$  нинг  $|x - x_0| \leq h$  ораликдаги хамма кийматларида аникланган ва узлуксиз буладилар.

Бунда  $h = \min \left( a, \frac{b}{M} \right)$ .

Агар  $f_i$  функцияларнинг хаммаси  $y_j$  га нисбатан чегараланган хусусий хосилага эга булсалар, яъни

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq L \quad (i, j = \overline{1, n})$$

у холда бу функционаллар Липшиц шартини каноатлантиради.

Энди (5) тенгламалар системасини унга эквивалент булган битта  $n$ -нчи тартибли дифференциал тенгламага келтиришни караймиз.

(5) системадан биринчисини олайлик

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (6_1)$$

(6<sub>1</sub>) ни  $x$  га нисбатан дифференциаллаймиз.

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{df_1}{dy_i} \frac{dy_i}{dx} \quad (6_2)$$

(6<sub>2</sub>) да  $\frac{dy_i}{dx}$  урнига (5) дан унинг кийматини келтириб куйсак.

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{df_1}{dx} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{df_1}{dy_i} \equiv F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (7_2)$$

(7<sub>2</sub>) уз навбатида яна  $x$  га нисбатан дифференциаллаймиз.

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \frac{dF_2}{dx} + \sum_{i=1}^n \frac{dF_2}{dy_i} \frac{dy_i}{dx} \quad (6_3)$$

Бунда хам  $\frac{dy_i}{dx}$  лар урнига (5) дан унинг кийматларини келтириб куйсак.

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \frac{dF_2}{dx} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{dF_2}{dy_i} \equiv F_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (7_3)$$

Худди шундай давом эттирсак, натижада

$$\frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} = F_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (7_{n1})$$

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (7_n)$$

га эга буламыз

(6<sub>1</sub>), (7<sub>2</sub>), ..., (7<sub>n-1</sub>) ларни битта система деб караймиз.

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} &= F_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} &= F_{n-1}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (6)$$

Агар (6) системада  $\frac{D(f_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(y_2, y_3, \dots, y_n)} \neq 0$  булмаса



(6) системадан  $n-1$  та номаълум  $y_2, y_3, \dots, y_n$  ларни  $x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}$  лар оркали ифодалаш мумкин. Бу кийматларни яъни  $y_2, y_3, \dots, y_n$  ларни (7<sub>n</sub>) куйсак

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = F\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}\right) \quad (7)$$

битта  $n$ -чи тартибли дифференциал тенгламага эга буламиз, (7) тенгламани ҳосил булишидан маълумки  $y_1, y_2, \dots, y_n$  лар (5) системанинг ечимлари булсалар, у ҳолда  $y_1$  (7) тенгламанинг ечими булади, ва аксинча, агар  $y_1$  (7) дифференциал тенгламанинг ечими булса, у ҳолда

$$\frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}$$

ҳосилаларни топиб уни (6) тенгламага олиб бориб куйсак  $y_2, y_3, \dots, y_n$  ларни аниклаш мумкин булади. Бу топилган  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ечимлар (5) системани қаноатлантиради.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

#### Саволлар

1. Юкори тартибли дифференциал тенгламанинг умумий қурилишини ёзинг.
2. Юкори тартибли тенгламани, биринчи тартибли тенгламалар системасига келтириш мумкин-ми?
3. Қандай шартлар бажарилганда, юкори тартибли тенгламаларнинг ечими мавжуд ва ягона булади.
4. Липшиц шarti нимадан иборат.
5. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системасини, битта юкори тартибли тенгламага келтириш мумкин-ми?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Юкори тартибли тенгламани, биринчи тартибли тенгламалар системасига келтириш мумкин-ми?

2. Қандай шартлар бажарилганда, юкори тартибли тенгламаларнинг ечими мавжуд ва ягона булади.

### 1.3.2-в. Ойзаки сўров учун саволлар

1. Липшиц шarti нимадан иборат.
2. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системасини, битта юкори тартибли тенгламага келтириш мумкин-ми?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўйимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

#### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольд Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибилов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж. тех. задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.5. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, ағал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;

- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмат кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
  - Биз бир кемадамыз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шунини ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРУЗА 12,13

**Мавзу:** Квадратурага келтириладиган баъзи бир юкори тартибли дифференциал тенгламалар

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 + 2соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Юкори тартибли дифференциал тенгламалар, квадратурага ажратишга келтирадиган баъзе бир дифференциал тенгламалар, умумий ва хусусий ҳоллар.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;

- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини

баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Юкори тартибли дифференциал тенгламалар, квадратурага ажратишга келтирадиган баъзе бир дифференциал тенгламалар, умумий ва хусусий ҳоллар.

#### 1.3.1. Маъруза матни

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

$n > 1$  нчи тартибли дифференциал тенглама берилган бўлсин.

(1) тенгламани интеграллашдаги асосий типларни қараймиз.

**1 тип.**

$$F(x, y^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

фараз этайлик (2) тенгламани  $y^{(n)}$  га нисбатан ечиш мумкин бўлсин.

$$\text{Яъни} \quad y^{(n)} = f(x) \quad (3)$$

Бу тенгламанинг умумий ечимини топиш учун уни  $n$  марта кетма-кет интеграллаймиз.

$$\text{Маълумки} \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = f(x) dx$$

$$\text{Интегралласак} \quad y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + c_1$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \left[ \int_{x_0}^x f(x) dx + c_1 \right] dx$$

$$y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx dx + c_1 (x - x_0) + c_2$$

Худди шундай давом эттирсак

$$y = \underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx}_{n\text{-та}} + \frac{c_1 (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2 (x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + c_{n-1} (x - x_0) + c_n$$

(4)

Бу (3) тенгламанинг умумий ечимдир. (4) формулани келтириб чиқаришда билинадирким  $y, x = x_0$  бўлганда

$$y_0 = c_n, \quad y_0' = c_{n-1}, \quad y_0'' = c_{n-2}, \quad y_0^{(n-1)} = c_1$$

бошлангич шартларни қаноатлантирувчи Коши масаласидир.

Демак (4) нинг унги томонидаги биринчи ҳад

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \quad (5)$$

(3) тенгламанинг хусусий ечимидир. (5) интегрални, параметрга боглик булган битта интеграл билан алмаштириш мумкин.

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz \quad (6)$$

Бунга асосан (3) тенгламанинг умумий ечимини

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz + \frac{c_1 (x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{c_2 (x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots$$

$$+ \frac{c_{n-2} (x-x_0)^2}{2!} + \frac{c_{n-1} (x-x_0)}{1!} + c_n \quad (7)$$

куринишда ёзиш мумкин.

Агар (2) тенгламани  $y^{(n)}$  га нисбатан ечиш кийин булса, лекин уни унга эквивалент булган параметр куринишда ёзиш мумкин булса

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y^{(n)} = \psi(t) \end{cases} \quad (8)$$

У холда тенгламанинг умумий ечими куйидагича топилади.

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx = \psi(t) \varphi'(t) dt$$

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + c_1 = \omega_1(t, c_1)$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx = \omega_1(t, c_1) \varphi'(t) dt$$

$$y^{(n-2)} = \int \omega_1(t, c_1) \varphi'(t) dt + c_2 = \omega_2(t, c_1, c_2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y = \omega_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

га эга буламыз.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \omega_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases} \quad \text{тенгламанинг параметр куринишдаги}$$

умумий ечимидир.

**Мисол 1.**  $y''' = x + \sin x$  3 марта кетма-кет

$$y'' = \int (x + \sin x) dx + c_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + c_1$$

$$y' = \int \left( \frac{x^2}{2} + \cos x + c_1 \right) dx + c_2 = \frac{x^3}{3} - \sin x + c_1 x + c_2$$

$$y = \frac{x^4}{4!} + \cos x + \frac{c_1 x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

**Мисол 2.**  $y''^2 + x^2 = 1$   $y''^2 = 1 - x^2$   $x = \sin t$  деб олсак

$$y''^2 = 1 - \sin^2 t = \cos^2 t \quad \begin{cases} x = \sin t \\ y'' = \cos t \end{cases} \quad dy' = y'' dx = \cos t \cdot \cos t dt$$

$$y' = \int \cos^2 t dt + c_1 = \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + c_1 = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c_1$$

$$y = \int \left( \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + c_1 \right) \cos t dt + c_2$$

**2 тип.**

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0 \quad (1)$$

тенглама натурал  $n$  нинг хар кандай кийматида квадратланади.

$$\text{Бунинг учун} \quad y^{(n-1)} = z \quad (2)$$

$$\text{алмаштиришини оламиз.} \quad y^{(n-1)} = z'$$

$$\text{У холда} \quad F(z', z) = 0 \quad (3)$$

га эга буламиз. (3) тенгламани  $z'$  га нисбатан ечиш мумкин булсин ;

$$z' = f(z)$$

бу эса узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир бундан

$$\frac{dz}{f(z)} = dx, \quad x + c_1 = \int \frac{dz}{f(z)} \quad (4)$$

Агар (4) ни  $z$  га нисбатан ечиб ,топилган  $z$  кийматини (2)

куйсак , биринчи типдаги дифференциал тенгламага эга буламиз

$$z = \varphi(x, c_1) \quad y^{(n-1)} = \varphi(x, c_1)$$

буни  $n-1$  марта кетма-кет интеграллаб берилган тенгламанинг

умумий ечими  $y = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$  га эга буламиз.

$$\text{Мисол} \quad y''' + y''^2 = 0 \quad y'' = z, \quad y''' = z'$$

$$y'''' + y'^2 = 0 \quad y'' = z, \quad y'''' = z'$$

$$z' + z^2 = 0 \quad z' = -z^2 \quad -\frac{dz}{z^2} = dx \quad \frac{1}{z} = x + 4$$

$$z = \frac{1}{x + 4}$$

$$y'' = \frac{1}{x + 4} \quad y' = \ln |x + c_1| + c_2$$

$$y = (x + c_1) \ln(x + c_1) - (x + c_1) + c_2 x + c_3$$

Фараз этамиз (1) тенгламани параметр

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t) \\ y^{(n-1)} = \psi(t) \end{cases} \quad \text{куринишда ёзиш мумкин булсин.}$$

$$\text{Бу холда} \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx \quad dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

Бундан



$$x = \int \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + c_1$$

$$dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx = \psi(t) \frac{\psi'(t)dt}{\varphi(t)}$$

$$y^{(n-2)} = \int \frac{\psi(t)\psi'(t)dt}{\varphi(t)} + c_2$$

.....

$$dy = y'dx \quad y = \int y'dx + c_n$$

### 3 тип

$$F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0 \quad (1)$$

бундай курунишдаги дифференциал тенгламалар ҳам квадратурага келтирилади.

Бунинг учун  $y^{(n-2)} = z \quad (2)$

десак  $y^{(n)} = z''$  булади.

ва  $F(z'', z) = 0 \quad (3)$

тенгламага эга буламиз (3) тенгламани  $z''$  га нисбатан ечиш мумкин булсин:  
 $z'' = f(z)$

Бунинг хар иккала томонини  $2z'dx$  купайтирамир:

$$2z'z''dx = 2z'f(z)dx = 2f(z)dz \quad d(z')^2 = 2f(z)dz$$

$$(z')^2 = \int 2f(z)dz + c_1 \quad z' = \sqrt{\int 2f(z)dz + c_1}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz + c_1}} = dx \quad x + c_2 = \int \frac{dz}{\sqrt{\int 2f(z)dz + c_1}}$$

Агар бу кейинги тенгликни  $z$  га нисбатан еча олсак, яъни

$$z = \varphi(x, c_1, c_2)$$

у холда (1) тенгламанинг ечимини топиш 1-нчи типдаги дифференциал тенгламанинг ечишга келтирилади.

$$y^{(n-2)} = \varphi(x, c_1, c_2)$$

Буни  $n-2$  марта кетма-кет интеграллаб унинг умумий ечими.

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

ни топамиз.

**Мисол 423.**  $y^3 y'' = 1 \quad y'' = \frac{1}{y^3} \quad 2y'dx$

$$2y'y''dx = \frac{2dy}{y^3} \quad d(y') = \frac{2}{y^3} dy \quad y'^2 = -\frac{1}{y^2} + c_1 \quad y' = \sqrt{c_1 - \frac{1}{y^2}}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{c_1 y^2 - 1}} = dx \quad \frac{c_1 y dy}{\sqrt{c_1 y^2 - 1}} = c_1 dx \quad \sqrt{c_1 y^2 - 1} = c_1 x + c_2$$

(1) тенгламани

$$\begin{cases} y^{(n)} = \varphi(t) \\ y^{(n-\ell)} = \varphi(t) \end{cases} \quad (4)$$

параметрик курунишга келтириш мумкин булсин.

$$\text{Маълумки} \quad \begin{cases} dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx \\ dy^{(n-\ell)} = y^{(n-1)} dx \end{cases} \quad (5)$$

(5) ни биринчисини хар иккала томонини  $2y^{(n-1)}$  га купайтирсак.

$$2y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = 2y^{(n)} y^{(n-1)} dx = 2y^{(n)} dy^{(n-2)}$$

$$\text{Ёки} \quad d(y^{(n-1)}) = 2y^{(n)} dy^{(n-2)} = 2\varphi(t)\psi'(t)dt \quad (6)$$

$$y^{(n-1)} = \int \sqrt{2\varphi(t)\psi'(t)dt} + c_1$$

га эга буламиз.

(6) билан (4) нинг иккинчиси биргаликда 2 нчи типдаги дифференциал тенгламани ташкил этади.

### Оралик интеграллари

n- нчи тартибли

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

дифференциал тенглама берилган булсин.

Маълумки, бу тенгламанинг умумий интеграллари  $x, y$  ва ихтиёрий  $n$  та  $c_1, c_2, \dots, c_n$  узгармас сонлар орасидаги

$$\phi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (2)$$

богланишдан иборат эди.

Бошқача килиб айтганда (2) тенглик ва ундан  $x$  га нисбатан кетма-кет олинган  $n$  та хосилаларидан тузилган тенгламалар система-сидан ихтиёрий узгармас  $c_i (i = \overline{1, n})$  ларни йукотиш натижасида (1) тенглама хосил булса, (2) ифодага (1) нинг умумий интеграллари дейилади.

$$\text{Фараз этайлик} \quad \psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n) = 0 \quad (3)$$

ифода берилган булсин.

Бунда  $c_i (i = \overline{k+1, n})$  ихтиёрий узгармас сонлар (3) ни  $x$  га нисбатан кетма-кет  $n-k$  марта дифференциаллаймиз.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} y' + \frac{\partial \psi}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}} y^{(k+1)} = 0$$

$$\dots + \frac{\partial^{n-k} \psi}{\partial x^{n-k}} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y^{(k)}} y^{(n)} = 0$$

$n-k+1$  та (3) ва (4) тенгламалардан  $n-k$  та  $c_i (i = \overline{k+1, n})$  ихтиёрий узгармас сонларни йукотиш натижасида (1) тенглама хосил булса (3) га (1) тенгламанинг оралик интеграллари дейилади.

Агар оралик интеграллари битта ихтиёрий узгармас  $c_1$  га боглик булса, яъни

$$\psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, c_1) = 0$$

бунга (1) дифференциал тенгламанинг биринчи интеграллари дейилади.

Агар (3) ифодани дифференциал тенглама деб карасак, унинг узи ҳам  $k$  нчи тартибли дифференциал тенгламадан иборат булади. Бу тенгламанинг хар кандай ечими (1) тенгламанинг ҳам ечими булади.

Хакикатдан ҳам  $y = y(x)$  (3) тенгламанинг ечими булса, у (3) ва (4) тенгламаларни айниятга айлантиради. (1) эса (3) ва (4) нинг натижаси булгани сабабли, бу функция (1) ни ҳам каноатлантиради. Яъни у (1) нинг ҳам ечими булади.

Агар (3) ни  $x$  га нисбатан  $k$  марта кетма-кет интегралласак, унинг умумий интегралида  $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$  ихтиёрий сонлардан ташкари

$c_1, c_2, \dots, c_k$  ихтиёрий узгармас сонлар ҳам катнашади.

Юкорида айтилганларга асосан бу умумий интеграл, (1) тенгламанинг ҳам умумий интеграли булади.

Демак (1) дифференциал тенглама (3) куринишдаги оралик интегралига эга булса, уни интеграллаш масаласи  $k$  – нчи тартибли дифференциал тенгламанинг интеграллаш масаласига келтирилади.

#### 4 тип .

Номаълум функция катнашмаган юкори тартибли дифференциал тенгламалар.

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

(1) тенгламани интеграллаш учун

$$y^{(k)} = z \quad (2) \quad \text{алмаштиришни оламиз.}$$

Бундан  $y^{(k+1)} = z', y^{(k+2)} = z'', \dots, y^{(n)} = z^{(n-k)}$

Буларга асосан (1) тенгламани

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (3)$$

куринишга келтирамыз.

Фараз этамыз (3) тенгламанинг умумий интеграли

$$\phi(x, z, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}) = 0 \quad (4)$$

булсин.

Бундаги  $z$  урнига (2) дан унинг кийматини келтириб куйсак

$$\phi(y^{(k)}, x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}) = 0 \quad (5)$$

га эга буламыз. Бу (1) тенгламанинг оралик интегралидир.

Агар (5) ни  $y^{(k)}$  га нисбатан ечсак

$$y^{(k)} = f(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k})$$

биринчи типдаги дифференциал тенгламага эга буламыз.

Бу тенгламани  $k$ - марта кетма-кет интеграллаш натижасида (1) тенгламанинг умумий ечими.

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-k}, \dots, c_n)$$

га эга буламыз.

**Мисол.**  $4y' + y'^2 = 4xy''$

$$y' = z, \quad y'' = z' \quad 4z + z^2 = 4xz'$$

$$\frac{4dz}{4z + z^2} = \frac{dx}{x} \quad \ln x + \ln c_1 = 4 \int \frac{dz}{(z+2)^2 - 4} = \ln \frac{(z+2)-2}{(z+2)+2}$$

$$c_1 x = \frac{z}{z+4} \quad z = c_1 x z + 4c_1 x \quad z = \frac{4c_1 x}{1 - c_1 x} \quad y' = \frac{4c_1 x}{1 - c_1 x}$$

$$y = 4 \int \frac{c_1 x}{1 - c_1 x} dx + c_2 = 4 \int \left( \frac{1}{1 - c_1 x} - 1 \right) dx + c_2 = -\frac{4}{c_1} \ln|1 - c_1 x| - 4x + c_2$$

### 5 тип.

Аргумент катнашмаган юкори тартибли дифференциал тенгламалар

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Бундай курунишдаги тенгламада  $y$  ни аргумент,  $y'$  ни функция учун кабул килиб  $y' = p$  алмаштириш ёрдамида тенглама тартибини 1 тага пасайтириш мумкин. Бунинг учун  $y$  дан  $x$  буйича олинган

$y', y'', \dots, y^{(n)}$  хосилаларни  $p$  дан  $y$  га нисбатан олинган хосилалар билан алмаштирамиз:  $p = p(y)$

$$y' = \frac{dy}{dx} = p; \quad y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left( p \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( p \frac{dp}{dy} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = p \left[ \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 + p \frac{d^2 p}{dy^2} \right]$$

.....

$$y^{(n)} = p \omega(p, p', p'', \dots, p^{(n-1)})$$

Бу топилган кийматларни (1) тенгламага куйсак, куйидагига эга буламиз:

$$F(y, p, p p_y^1, \dots, p \omega(p, p', p'', \dots, p^{(n-1)})) = 0 \quad (2)$$

фараз этайлик (2) тенгламанинг умумий интеграли

$$\phi(y, p, c_1 c_2, \dots, c_{n-1}) = 0 \quad \text{ни } p \text{ га нисбатан ечиш мумкин булсин:}$$

$$p = \phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

бундан  $\frac{dy}{dx} = \phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) \quad dy = \phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx$

$$\frac{dy}{\phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})} = dx \quad x + c_n = \int \frac{dy}{\phi(y, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})}$$

Бу (1) тенгламанинг умумий интегралидир.

Мисол.  $1 + y'^2 = 2yy'' \quad y' = p \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$

$$1 + p^2 = 2yp \frac{dp}{dy} \quad \frac{dy}{y} = \frac{2p dp}{1 + p^2} \quad \ln y + \ln c_1 = \ln(1 + p^2)$$

$$1 + p^2 = c_1 y \quad p^2 = c_1 y - 1 \quad p = \sqrt{c_1 y - 1} \quad \frac{dy}{dx} = \sqrt{c_1 y - 1}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1 y - 1}} = dx \quad \frac{2}{c_1} \sqrt{c_1 y - 1} = x + c_2 \quad 4(c_1 y - 1) = c_1^2 (x + c_2)^2$$

### 6 тип.

Номаълум функция ва унинг хосилаларига нисбатан бир жинсли булган юкори тартибли дифференциал тенгламалар.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

тенгламада  $F$  функция номаълум функция ва унинг хосилаларига нисбатан бир жинсли бўлсин.

Яъни ҳар қандай  $t > 0$  учун

$$F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) \equiv t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

айнияти бажарилсин.

Бундай типдаги дифференциал тенгламаларни

$$y' = yz \quad (2)$$

алмаштириш ёрдамида тенглама тартибини биттага пасайтириш мумкин. Бунинг учун номаълум функцияни хосилаларини аниқлаймиз.

$$y'' = y'z + yz' = yzz' + yz' = y(z^2 + z') = y(z' + z^2)$$

$$y''' = y'(z' + z^2) + y(z'' + 2zz') = y(zz' + z^3 + 2zz' + z'') = y(z'' + 3zz' + z^3)$$

.....

$$y^{(n)} = y\omega(z, z', z'', \dots, z^{(n-1)})$$

бу топилган қийматларни (1) тенгламага қуйсак

$$F(x, y, yz, y(z' + z^2), \dots, y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0$$

тенгламага эга бўламиз.

Шартга қура  $F$  бир жинсли функция. Шунинг учун кейинги тенгликдан.

$$y^m F(x, 1, z, z' + z^2, \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})) = 0 \quad (3)$$

агар  $m > 0$  бўлса тенгламанинг ҳар иккала томонини  $y^m$  га бўлиб, уни

$$F_1(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

ҳолга келтириш мумкин.

Фараз этамиз бу тенгламанинг умумий интегрални

$$\varphi(x, z, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) = 0$$

ни  $z$  га нисбатан ечиш мумкин бўлсин:

$$z = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) = 0$$

У ҳолда (2) га асосан:

$$y' = y\psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) = 0$$

га эга бўламиз. Бу эса узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламадир.

$$\frac{dy}{y} = \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx$$

$$\ln |y| - \ln c_n = \int \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx$$

$$y = c_n e^{\int \psi dx} = c_n e^{\int \psi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) dx}$$

Бу (1) тенгламасининг умумий ечимидир. Умумий ечим  $y=0$  ечимни ҳам уз ичида сақлайди.  $c_n=0$  бўлса  $y=0$  бўлади.

**Мисол**

$$\begin{aligned}
xyy'' - xy'^2 &= yy', \\
y' &= yz, \quad y'' = y(z' + z^2) \\
xy \cdot y(z' + z^2) - xy^2 z^2 &= y \cdot yz \\
x(z' + z^2) - xz^2 &= z, \quad xz' = z, \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \\
\ln z &= \ln x + \ln c_1, \quad z = c_1 x \\
y &= c_2 e^{2 \int c_1 x dx} = c_2 e^{c_1 x^2},
\end{aligned}$$

### 7-тип.

**Умумлашган бир жинсли юкори тартибли дифференциал тенгламалар.**

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

дифференциал тенгламада  $x$  ни бир улчовли,  $y$  ни  $k$  улчовли  $y'$  ни  $k-1$  улчовли,  $\dots$ ,  $y^{(n)}$  ни  $k-n$  улчовли деб олганда тенгламадаги хамма хадларнинг улчовлари бир хил булса, бундай тенгламага умумлашган бир жинсли дифференциал тенглама дейилади. Яъни ихтиёрий  $t > 0$  учун (1) тенгламанинг чап томонидаги функция учун.

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', \dots, t^{k-n} y^{(n)}) \equiv t^m F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

шарти бажарилсин.

Бундай типдаги дифференциал тенгламаларни ечиш учун  $t$  ва  $z$  янги узгарувчиларни киритамиз. Бу узгарувчилар билан эски  $x$  ва  $y$  узгарувчилар орасида боғланиш

$$\begin{aligned}
x &= \ell^t \\
y &= z \ell^{kt}
\end{aligned} \quad (2)$$

дан иборатдир

бунда  $z = z(t)$

Бу холда  $y$  дан  $x$  буйича олинган хосилаларни  $z$  дан  $t$  буйича олинган хосилалар билан алмаштирамыз.

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(z \ell^{kt}) = \frac{d}{dt}(z \ell^{kt}) \frac{dt}{dx} = \ell^{-t} (\ell^{kt} \frac{dz}{dt} + k \ell^{kt} z) = \ell^{(k-1)t} \left( \frac{dz}{dt} + kz \right) \\
y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dt} (\ell^{(k-1)t} (z' + kz)) \frac{dt}{dx} = \ell^{-t} \left[ \ell^{(k-1)t} (z'' + kz') + (k-1) \ell^{(k-1)t} (z' + kz) \right] = \\
&= \ell^{(k-2)t} (z'' + (2k-1)z' + (k-1) \cdot kz)
\end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \ell^{(k-n)t} \omega(z, z', z'', \dots, z^{(n)})$$

Бу топилган кийматларни (1) тенгламага куйиб, унинг бир жинслигини эътиборга олсак, (1) тенгламани

$$F(e^t, z e^{kt}, e^{(k-1)t} (z' + kz), \dots, e^{(k-n)t} \omega(z, z', \dots, z^{(n)})) = 0$$

$$e^{tm} F(1, z, z' + kz, \dots, \omega(z, z', z'', \dots, z^{(n)})) = 0$$

$$\text{ёки} \quad \phi(z, z', z'', \dots, z^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

куринишга келтириш мумкин

Бу 5 нчи типдаги дифференциал тенгламадир.

Маълумки (3) тенгламани ечиш учун

$$z' = \frac{dz}{dt} = p \quad z'' = p \frac{dp}{dz}, \dots, z^{(n)} = p\alpha(p, p', \dots, p^{(n-1)})$$

алмаштиришларни (3) тенгламага куйсак

$$\phi(z, p, pp', \dots, p\alpha(p, p', \dots, p^{(n-1)})) = 0$$

тенгламага ёки

$$\phi_1(z, p, p', p'', \dots, p^{(n-1)}) = 0 \quad (4)$$

тенгламага эга буламиз.

Агар (4) тенгламанинг умумий интеграли

$$\varphi(z, p, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}) = 0 \quad \text{ни}$$

р га нисбатан ечиш мумкин бўлса:

$$p = \psi(z, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

у хола

$$\frac{dz}{dt} = \psi(z, c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\frac{dz}{\psi(z, c_1, c_2, \dots, c_n)} = dt \quad t + c_n = \int \frac{dz}{\psi(z, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})}$$

Агар бу кейинги тенгликни z га нисбатан ечсак

$$z = \omega(t, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad \text{булади.}$$

У холда (2) алмаштиришга асосан (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y = z\ell^{kt} = x^k \omega(en|x|, c_1, c_2, \dots, c_n) \quad \text{дан иборат булади.}$$

$$\text{Мисол} \quad x^4 y'' - (x^3 + 2xy)y' + 4y^2 = 0$$

$$4 + k - 2 = 3 + k - 1 = 1 + k + k - 1 = 2k \quad k = 2$$

$$\begin{cases} x = e^t \\ y = ze^{2t} \end{cases} \quad y' = e^t(z' + 2z), \quad y'' = (z'' + 3z' + 2z)$$

$$e^{4t}(z'' + 3z' + 2z) - (e^{3t} + 2e^t ze^{2t})e^t(z' + 2z) + 4z^2 e^{4t} = 0$$

$e^{4t}$  га қискартиб, ихчамласак

$$z'' + 2(1 - z)z' = 0 \quad z' = p \quad z'' = p \frac{dp}{dz} \quad p \frac{dp}{dz} + 2(1 - z)p = 0$$

$$p = 0 \quad z = c \quad y = cx^2 \quad dp + 2(1 - z)dz = 0 \quad dp = 2(z - 1)dz$$

$$p = z^2 - 2z + c_1^2 + 1 = (z - 1)^2 + c_1^2 \quad z' = p \quad \frac{dz}{dt} = (z - 1)^2 + c_1^2$$

$$\frac{dz}{(z - 1)^2 + c_1^2} = dt \quad \frac{1}{c_1} \operatorname{arctg} \frac{z - 1}{c_1} = t + c_2 \quad \operatorname{arctg} \frac{z - 1}{c_1} = c_1(t + c_2)$$

$$\frac{z - 1}{c_1} = \operatorname{tg} c_1(t + c_2) \quad z = 1 + c_1 \operatorname{tg} \ell_1(t + c_2) \quad y = x^2 [1 + c_1 \operatorname{tg}(c_1 \ell n|x| + c_2)]$$

### 8 тип.

Тенгламанинг чап томони бирор функциянинг хосиласига тенг булган дифференциал тенгламалар

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

тенгламанинг чап томонидаги функция  $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$  узгарувчиларга боглик булган  $\phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  функциядан х буйича олинган хосиласига тенг булсин

$$\text{яъни } \frac{d}{dx} \phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

Ухолда (1) га асосан кейинги тенгламадан

$$\frac{d}{dx} \phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

га эга буламиз.

Бундан

$$\phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = c_1 \text{ булади}$$

яъни берилган тенгламанинг тартиби 1 тага пасайди.

$$\text{Мисол } y'' - xy' - y = 0 \quad \phi = y' - xy$$

$$\frac{d}{dx}(y' - xy) = 0 \quad y' - xy = c_1 \quad y = \ell^{\frac{x^2}{2}} \left[ c_1 \int \ell^{-\frac{x^2}{2}} dx + c_2 \right]$$

Бу тенгламанинг умумий ечимидир.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Юқори тартибли тенглама таърифи.
2. Тўлиқмас юқори тартибли тенглама
3. Параметр киритиш усули
4. Бир жинсли юқори тартибли тенглама тартибини пасайтириш.
5. Тўлиқ дифференциалли юқори тартибли тенглама тартибини пасайтириш.

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Тўлиқмас юқори тартибли тенглама
2. Параметр киритиш усули

### 1.3.2-в. ОЎзаки сўров учун саволлар

1. Бир жинсли юқори тартибли тенглама тартибини пасайтириш.
2. Тўлиқ дифференциалли юқори тартибли тенглама тартибини пасайтириш.

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўйимчаси; мустақил иборалар тузиш;



- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

#### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

#### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

#### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

##### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз.Физ-мат. литература.1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

##### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск.Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

#### 15.6. Ўқитиш усуллари қоидалари

##### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;

- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРУЗА 14, 15, 16,

Мавзу: **n – нчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг хоссалари. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси.**

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 + 2 + 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

#### Маъруза режаси:

Чизикли тенглама, юкори тартибли тенглама, Липшиц шарти, мавжудлик ва ягоналик шарти, ечим хоссалари, чизикли боглик, Вронский детерминанти, фундаментал ечимлар системаси, ечим, хусусий ечим, умумий ечим, бир жинсли ва бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар.

#### Ўқув машғулоти мақсади:

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

#### Ўқув машғулотнинг вазифалари:

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустакил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### Ўқитиш технологияси:

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### Педагогик масалалар:

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;

- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал обектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ештиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини

баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни кўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Чизикли тенглама, юкори тартибли тенглама, Липшиц шarti ,мавжудлик ва ягоналик шarti, ечим хоссалари ,чизикли боглик, Вронский детерминанти, фундаментал ечимлар системаси, ечим, хусусий ечим, умумий ечим, бир жинсли ва бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар.

#### 1.3.1. Маъруза матни

$n$ -нчи тартибли чизикли дифференциал тенглама (чдт) деб,  $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$  лар биринчи даражада булган

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = F(x) \quad (1)$$

тенгламага айтилади.

Бунда  $a_i(x)$  ( $i = \overline{0, n-1}$ ) курилайтган ораликда аникланган ва узлуксиз функциялардир. Агар курилайтган ораликда  $x$  нинг хамма кийматларида  $a_0(x) \neq 0$  булмаса, бу холда (1) тенгламанинг хар иккала томонини  $a_0(x)$  га булиб уни

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (2)$$

курунишда ёзиш мумкин.

Бунда 
$$P_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_0(x)} \quad (i = \overline{1, n}), \quad f(x) = \frac{F(x)}{a_0(x)}$$

Агар  $f(x) \neq 0$  булмаса (2) тенгламага  $n$ - нчи тартибли бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенглама дейилади.

Агар  $f(x) = 0$  булса

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (3)$$

тенгламага  $n$ - нчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенглама дейилади.

(аникроги (2) тенгламага мос булган бир жинсли чизикли дифференциал тенглама ) Чизикли дифференциал тенгламалар куйидаги хоссаларга эга:

**IXосса..** Агар чизикли дифференциал тенгламада аргументни ихтиёрий

$$x = \varphi(t) \quad (4)$$

чизикли алмаштирсак, хосил булган тенглама яна чизикли дифференциал тенглама булади.

Бунда  $\varphi(t)$  курилайтган ораликда  $n$  марта узлуксиз дифференциалланувчи функция булиб, бу ораликда  $\varphi(t) \neq 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Худди шунга ухшаш.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{dy}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{dy}{dt} \right] \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'^2(t)} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)} \frac{dy}{dt}$$

Худди шундай давом эттирсак  $\frac{d^k y}{dx^k}$  хосилани коэффициентлари  $t$  нинг узлуксиз функцияси булган

$$\frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^k y}{dt^k}$$

хосилалар оркали чизикли алмаштириш мумкин булади.

Бу топилган кийматларни (2) тенгламага куйсак ва ихчамласак

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + b_n(t) y = 0(t)$$

тенгламага эга булаемиз.

**2 хосса.** Агар чизикли дифференциал тенгламада номаълум функцияни ихтиёрий

$$y = u(x)\eta + \vartheta(x) \quad (5)$$

чизикли алмаштирсак, хосил булган тенглама яна чизикли дифференциал тенглама булади.

Бунда  $u, \vartheta, \eta$  функциялар  $n$  марта узлуксиз дифференциаланувчи функциялардир.

Хакикатдан хам, (5) дан

$$y' = u\eta' + u'\eta + \delta'$$

$$y^{(1)} = u\eta^{(1)} + 2u'\eta' + \delta' \dots \dots$$

Буларга асосан (1) тенгламани соддалаштирган сунг уни куйидагича ёзиш мумкин.

$$C_0(x) \frac{d^n \eta}{dx^n} + C_1(x) \frac{d^{n-1} \eta}{dx^{n-1}} + \dots + C_{n-1}(x) \frac{d\eta}{dx} + C_n(x) \eta = F_1(x)$$

Мавжудлик ва ягоналик теоремаси

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (2)$$

Агар (2) тенгламада хамма  $P_i(x) (i = \overline{1, n})$  коэффициентлар ва  $f(x)$  функция  $[a, b]$  интервалида узлуксиз булсалар, у холда (2) тенглама  $x=x_0$  булганда

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{бошлангич шартларни}$$

каноатлантирувчи ягона  $y = y(x)$  ечимга эга булиб, бу узининг  $n$ - тартибли хосиласи билан  $[a, b]$  ораликда аникланган ва узлуксиз булади. (Пикар теоремаси).

Бу теоремани бошқача хам баён этиш мумкин.

(2) тенгламани

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

$$y^{(n)} = - \sum_{i=1}^{n-1} p_i(x)y^{(n-i)} + f(x) = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (6)$$

$$x = x_0 \quad y(x_0) = y_0 \quad y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)} \quad (k = \overline{1, n-1}) \quad (7)$$

Теорема. Агар  $F$  функция ёпик  $D$  сохада узининг барча аргументларига нисбатан узлуксиз ва унда  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  узгарувчилар буйича Липшиц шартини каноатлантирса, у холда  $D$  соханинг ихтиёрий  $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$  нуктасида (6) тенглама ягона ечимга эга булиб, бу ечим  $x = x_0$  нукта атрофида аникланган ва узлуксиз булади, хамда (7) бошлангич шартни каноатлантиради.

**$n$ - НЧИ ТАРТИБЛИ БИР ЖИНСЛИ ЧИЗИКЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР**

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

бир жинсли чизикли дифференциал тенглама берилган булсин.

Куйидаги белгилашни киритамиз.

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

$$\text{у холда (1) тенгламани} \quad L[y] = 0 \quad (1)$$

куринишда ёзиш мумкин.  $L[y]$  га чизикли дифференциал оператор дейилади. У номаълум у узгарувчи устида бажарилган амаллар тупламини билидиради.

Чизикли дифференциал оператор куйидаги хоссаларга эга:

**1 хосса.** Йигиндининг оператори, операторлар йигиндинсига тенг. Яъни

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

**2 хосса.** Узгармас сонни оператор ишорасидан ташкарига чикориш мумкин яъни  $L[cy] = cL[y]$

Бу хоссаларни исботлаш жуда хам осон.

**ТЕОРЕМА 1.** Агар  $y_1$  ва  $y_2$  (1) тенгламанинг ечимлари булса у холда  $y_1 + y_2$  хам (1) тенгламанинг ечимлари булади

**Исбот.** Оператор хоссасига асосан

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

лекин, шартга кура  $y_1$  ва  $y_2$  (1) тенгламанинг ечимлари булгани учун

$$L[y_1] \equiv 0, \quad L[y_2] \equiv 0$$

$$\text{Шунинг учун} \quad L[y_1 + y_2] \equiv 0$$

Бу курсатадики  $y_1 + y_2$ , (1) тенгламанинг ечимидир

**ТЕОРЕМА 2.** Агар  $y_1$  (1) тенгламанинг ечими булса, у холда  $cy_1$  ( $c = \text{const}$ ) хам (1) тенгламани ечими булади.

**Исбот.** Оператор хоссасига асосан  $L[cy_1] = cL[y_1]$  лекин  $L[y_1] \equiv 0$ ,

Булган учун  $L[cy_1] \equiv 0$ , бундан  $cy_1$  (1) тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади.

Натижа. Агар  $y_1, y_2, \dots, y_k$  лар (1) тенгламанинг хусусий ечимлари булсалар у холда уларнинг чизикли

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ky_k$$

комбинацияси хам (1) тенгламанинг ечими булади.

Агар  $k = n$  булса  $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$

(1) тенгламанинг умумий ечими булади.  $y_1, y_2, \dots, y_n$  лар (хусусий ечимлар) умумий ечимни ташкил килиши уларнинг чизикли боглик ва боглик булмаслигига боглиқдир.

**Таъриф.** Хаммаси бирданига нолга тенг булмаган  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  сонлар мавжуд булсаким,  $[a, b]$  оралигида аникланган  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  функциялар,  $x$  нинг бу ораликдаги хамма кийматлари учун

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \dots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0 \quad (2)$$

айният бажарилса, у холда бу ораликда  $\varphi_i(x) (i = \overline{1, n})$  функциялар чизикли богланган дейилади.

Агар (2) айнйят факат  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  кийматда бажарилса, у холда  $\varphi_i(x)$  функциялари, курилаётган ораликда чизикли богланмаган булади.

**Мисол1.** Фараз этайлик  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$  функциялардан бири курилаётган ораликда нолга тенг булсин. У холда бу функциялар чизикли богланган буладилар.  $\varphi_n(x) = 0$

$$0 \cdot \varphi_1(x) + 0 \cdot \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0$$

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$$

**Мисол 2.**  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  булса

$$\varphi_1(x) = \sin^2 x, \quad \varphi_2(x) = \cos^2 x, \quad \varphi_3(x) = 1$$

функциялари чизикли боглаган булади, чунки

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 \equiv 0$$

**Мисол 3.**  $1, x, x^2, \dots, x^n$  функциялар  $(-\infty, \infty)$  ораликда чизикли богланмаган.

Ҳақиқатан ҳам фараз этайлик улар чизикли богланган булсин. У ҳолда ҳаммаси бирданига нолга тенг бўлмаган шундай  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$  сонлари мавжудки

$$\alpha_1 + \alpha x + \alpha_3 x^2 + \dots + \alpha_n x^{n-1} + \alpha_{n+1} x^n \equiv 0 \quad (3)$$

айният  $x$  нинг ҳамма қийматларида бажарилади.

Лекин бу охириги тенглик  $n$  нчи даражали алгебраик тенгламадир. Маълумки бу тенглама факат  $x$  нинг  $n$  та қийматида нолга тенг булади.

Бу карама-каршилиқ курсатадими, берилган функциялар  $(-\infty, \infty)$  ораликда чизикли богланмаган.

$x$  га нисбатан  $n-1$  нчи тартибли узлуксиз ҳосилаларга эга булган  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  функциялардан тузулган

$$w[y_1, y_2, \dots, y_n] = w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1^{11} & y_2^{11} & y_3^{11} & \dots & y_n^{11} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (4)$$

детерминантга Вронский детерминанти дейилади. (Вронский Юзеф 1778-1853 поляк)

**Теорема 3.** Агар  $y_1, y_2, \dots, y_n$  функциялар  $[a, b]$  оралигида чизикли боглик булсалар, у ҳолда бу ораликда уларнинг Вронский детерминанти айнан нолга тенг булади. Яъни  $w(x) \equiv 0$

**Исбот.** Шартга асосан  $y_1, y_2, \dots, y_n$  функциялар  $[a, b]$  оралигида чизикли богланган булганлиги сабабли ҳаммаси нолга тенг булмаган шундай  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  сонлари мавжудки  $x$  нинг ҳамма қийматлари учун

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 + \dots + \alpha_{n-1} y_{n-1} + \alpha_n y_n \equiv 0$$

тенглик бажарилади.

Фараз этайлик  $\alpha_n \neq 0$  булмасин. У ҳолда кейинги тенгликдан

$$y_n = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1} \quad (5)$$

га эга буламиз. Бунда  $\beta_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_n}$  ( $i = 1, n-1$ ). (5) ни кетма-кет  $n-1$  марта

дифференциаллаш натижасида

$$\begin{aligned} y_n^1 &= \beta_1 y_1^1 + \beta_2 y_2^1 + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}^1 \\ y_n^{11} &= \beta_1 y_1^{11} + \beta_2 y_2^{11} + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{11} \\ &\dots \\ y_n^{(n-1)} &= \beta_1 y_1^{(n-1)} + \dots + \beta_{n-1} y_{n-1}^{(n-1)} \end{aligned} \quad (6)$$



га эга буламиз.

Агар Вронский детерминантини 1-нчи устун элементларини  $-\beta_1$  га, 2-нчи устун элементларини  $-\beta_2$  га, ва хоказо  $n-1$  нчи устун элементларини  $-\beta_{n-1}$  га купайтириб, уларнинг йигиндисини охирги устун элементлари билан кушсак (6)га асосан охирги устун элементлари нолга тенг булади У холда детерминантнинг киймати ҳам нолга тенг булади яъни

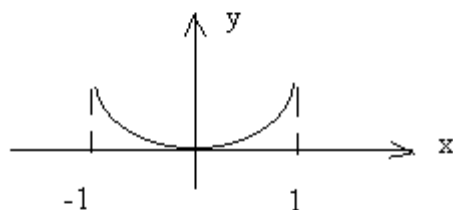
$$w(x) \equiv 0$$

Вронский детерминантининг нолга тенг булиши берилган функцияларининг курилайётган ораликда чизикли богланган булишлигининг факат зарурий шarti булади, етарли шарт эмас.  $[-1,1]$  оралигида

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \equiv 0 \quad -1 \leq x \leq 1$$



чунки  $-1 \leq x \leq 1$  ораликда иккинчи устун элементлари нолга тенг.  $0 < x \leq 1$  оралигида эса биринчи устун элементлари нолга тенг. Лекин  $y_1(x), y_2(x)$  функциялири  $-1 \leq x \leq 1$  ораликда чизикли богланмагандирлар. Чунки

$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \equiv 0$  айниятдан  $-1 \leq x \leq 0$  ораликда  $\alpha_1 = 0$ ,  $0 < x \leq 1$  ораликда  $\alpha_2 = 0$  эканлиги келиб чикади.

Бу курсатадиким  $y_1(x)$  ва  $y_2(x)$  функциялар  $[-1,1]$  оралигида чизикли богланмагандирлар.



(11)

**Мисол:**

$x \neq 0$  да улар фундаментал

**ТЕОРЕМА 6.** Агар  $y_1, y_2, \dots, y_n$  (1) тенгламанинг фундаментал ечимлар

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ..... + c_n y_n \quad (12)$$

**Исбот.** Маълумки ихтиёрий  $n$  та узгармас сонларга боглик булган ифодадан ичтиёрий узгармасларни маълум бир кийматларида тенгламанинг хамма хусусий ечимлари келиб чикса бундай ифода тенгламанинг умумий ечими булар эди.

$$y(x_0) = y_0 \quad y' = y'_0 \quad y_0', \dots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)} \quad (13)$$

$y_0, y_0^1, \dots, y_0^{(n-1)}$  ихтиёрий сонлар,  $a < x_0 < b$

$$\begin{aligned} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \dots + c_n y_{n0} &= y_0 \\ c_1 y_{10}^! + c_2 y_{20}^! + \dots + c_n y_{n0}^! &= y_0^! \\ \vdots &\vdots \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \dots + c_n y_{n0}^{(n-1)} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{14}$$

Шунинг учун (14) сиситемадан  $c_i$  лар бир жййматли аникланади.

Демак (12) ифода (1) тенгламанинг умумий ечимидир.

**ТЕОРЕМА 7.** Агар  $n$ - нчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар  $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$  хусусий ечимларга эга булса, бу ечимлар чизикли боћланган буладилар.

Бошкача айтганда  $n$ -нчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар  $n$  тадан ортик чизикли боћланмаган ечимга эга эмас.

**Исбот.** Фараз этайлик  $y_1, y_2, \dots, y_n$  лар чизићли боћланган булсинлар. У холда  $n$  та чизићли боћланган функциялар  $(n+1)$  та чизићли боћланган функцияларнинг хусусий холидир.

Хаћићатан хам,  $x$  нинг камма ћийматларида

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} \equiv 0$$

айният бажарилади.

2 хол.  $y_1, y_2, \dots, y_n$  функциялар чизикли боћланмаган булсин. У холда улар фундаментал ечимлар системани ташкил этади.

Маълумки тенгламанинг ихтиёрий хусусий ечими булар оркали коэффицентлари узгармас булган чизикли равићда ифодаланади, шу жумладан  $y_{n+1}$  ечим хам

$$y_{n+1} = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

яъни улар чизићли боћлангандир.

**ТЕОРЕМА 8.** Агар иккита бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар

$$\begin{aligned} y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + p_n(x)y &= 0 \\ y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + q_2(x)y^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + q_n(x)y &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

бир хил фундаментал ечимлар системасига эга бўлса, у қолда улар айнан ёзаро тенгдир яъни  $q_i(x) \equiv p_i(x) \quad (i = \overline{1, n})$

**Исбот.** (15) тенгламаларнинг биринчисидан иккинчисини қадлаб айирамиз:

$$(p_1 - q_1)y^{(n-1)} + (p_2 - q_2)y^{(n-2)} + \dots + (p_n - q_n)y = 0 \quad (16)$$

тенгламага эга бўламиз.

Фараз этайлик  $p_1 \neq q_1$  бўлмасинлар у қолда  $p_i(x)$  ва  $q_i(x)$  узлуксиз функциялар булгани сабабли шундай  $\alpha < x < \beta$  оралић топиладиким бу оралићда айирма нолга тенг бўлмайди:

$$p_i(x) - q_i(x) \neq 0.$$

шунинг учун (16) ни қар иккала томонини  $p_i(x) - q_i(x)$  булиб, уни

$$y^{(n-1)} + \frac{p_2 - q_2}{p_1 - q_1} y^{(n-2)} + \dots + \frac{p_n - q_n}{p_1 - q_1} y = 0$$

бу тенглама (15) тенгламаларнинг натијаси булгани учун  $y_1, y_2, \dots, y_n$  лар бу тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Лекин бу тенглама  $(n-1)$  тартибли булгани учун у  $n$  та чизикли боғлиқ булмаган  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ечимларга эга булолмайди (7 теорема). Бу карама-каршилиқ курсатадиким

$$p_i(x) - q_i(x) \equiv 0.$$

Худди шундай давом эттирсак натијада

$$P_i(x) \equiv q_i(x) \quad (i = \overline{1, n})$$

га эга буламиз. Демак (15) тенгламалар битта тенгламадан иборатдир.

**Масала.** Агар  $n$ - нчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг фундаментал ечимлари  $y_1, y_2, \dots, y_n$  берилган булса, тенгламани тузинг.

**Ечиш.** Фараз этайлик изланган бир жинсли чизикли дифференциал тенглама

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = 0 \quad (17)$$

Шартга кура  $y_1, y_2, \dots, y_n$  лар (17) тенгламанинг ечимлари булгани учун:

(18)  $p_i(x)$  ларга нисбатан бир жинсли булмаган алгебраик тенгламалар системасидан иборат. Унинг асос детерминати Вронский детерминатдан иборат булгани учун у нолга тенг эмас (чунки  $y_i \quad i = \overline{1, n}$  тенгламанинг фундаментал ечимлар сисиемасидир) шунинг учун (18) системадан  $p_i(x)$  лар бир кийматли аникланади. Бу топилган  $p_i(x)$  кийматларни (17) тенгламага куйсак, изланган бир жинсли тенгламага эга буламиз.

хакикатдан ҳам охирги устун элементлари урнига  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ларни куйсак икки устун элементлари тенг булгани учун детерминат киймати нолга тенг булади. (19) топилиши керак булган бир жинсли чизикли дифференциал тенгламадир.

детерминатни очиб чикиб, ихчамласак  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$  га эга буламиз.

$y^{(n)}$  олдидаги коэффициент Вронский детерминатидан иборат булгани учун у нолга тенг эмас. Шунинг учун (20) хар иккала томонини  $w(x)$  га булиш мумкин.

Сунгра хосил булган тенглама билан (17) ни солиштириб карасак

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{w(x)} \quad (21)$$

га эга буламиз.

(21) нинг сурати, махражининг хосиласидан иборатдир.

Хакикатан хам олий, алгебрадан маълумки элементлари  $x$  нинг функциясидан иборат булган  $n$ -нчи тартибли детерминатнинг хосиласи,  $n$  та  $n$ -нчи тартибли детерминатлар йигиндисига тенг булиб, уларнинг биринчисидан биринчи сатр элементларинг хосиласи олиниб колган элементлар узгартирилмай колади. Иккинчи детерминатда иккинчи сатр элементларнинг хосиласи олиниб колган элементлар уз холича колади ва хоказо шундай давом эттирсак  $n$ -нчи детерминатнинг  $n$ -нчи сатр элементлари, уларнинг хосиласи билан алмаштириб колган элементлар уз холича колдирилади. Шундай килиб,  $n-1$  та  $n$ -нчи тартибли детерминатларда икки сатр элементлари узаро тенг булгани учун улар нолга тенг. охирги  $n$ -нчи детерминат эса (21) детерминатнинг

суратидан иборат булади. яъни 
$$p_1(x) = -\frac{w'(x)}{w(x)}$$

Бу узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалардир

$$\frac{dw(x)}{w(x)} = -p_1(x)dx$$

$$\ell n w(x) = -\int_{x_0}^x p_1(x)dx + \ell n w(x_0)$$

агар  $w(x_0) = c$

$$w(x) = w(x_0) \ell^{-\int_{x_0}^x p_1(x)dx}$$

десак 
$$w(x) = c \ell^{-\int_x^x p(x)dx} \quad (23)$$

(22) га Остроградский – Лиувилль формуласи дейилади.

Остроградский-Лиувилль формуласини, иккинчи тартибли дифференциал тенгламаларнинг умумий ечимини топишга тадбик этамиз.

Фараз этайлик  $y_1$

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

тенгламанинг хусусий ечими булсин. у эса унинг  $y_1$  дан фарк килувчи ихтиёрый ечими (23) га асосан

$$\begin{vmatrix} y & y_1 \\ y' & y_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix} = c_1 \ell^{-\int p_1(x)dx}$$

$$y'y_1 - yy_1' = C_1 \ell^{-\int p_1(x)dx}$$

Бу тенгламанинг хар иккала томонини  $y_1^2$  га буламиз:

$$\frac{y'y_1 - yy_1'}{y_1^2} = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx}$$

$$d\left(\frac{y}{y_1}\right) = \frac{c_1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx} \quad \frac{y}{y_1} = c_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} + C_2$$

$$y = y_1 \left\{ c_1 \int \frac{e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right\}$$

га эга буламиз. Бу формулада иккита ихтиёрий узгармас сон катнашаётир.

Бу иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

**Хулоса.** Агар бир жинсли иккинчи тартибли чизик дифференциал тенгламанинг битта хусусий ечими берилган булса унинг умумий ечими квадратура ёрдамида аниклангади.

**Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг тартибини пасайтириш**  
 n-нчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенглама берилган булсин.

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (1)$$

Агар бу тенгламанинг нолга тенг булмаган  $y_1$  хусусий ечими берилган булса

$$y = y, z$$

алмаштириш ёрдамида (1) тенгламанинг тартибини биттага пасайтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам, (2) дан

$$y' = y_1 z' + y_1' z$$

$$y'' = y_1 z'' + 2y_1' z' + y_1'' z$$

$$y''' = y_1 z''' + 3y_1' z'' + 3y_1'' z' + y_1''' z$$

$$\dots\dots\dots$$

$$y^{(n-1)} = y, z^{(n-1)} + c_{n-1} y_1' z^{(n-2)} + c_{n-1}^2 y_1'' z^{(n-3)} + \dots + y_1^{(n-1)} z$$

$$y^{(n)} = y, z^{(n)} + c_n' y_1' z^{(n-1)} + c_n^2 y_1'' z^{(n-2)} + \dots + y_1^{(n)} z$$

Бу топилган кийматларни (1) тенгламага куйиб ихчамласак

$$y_1 z^{(n)} + (p_1(x)y_1 + c_n' y_1') z^{(n-1)} + \dots + (y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1) z = 0$$

га эга буламиз. шартга асосан  $y_1 \neq 0$  (1) тенгламанинг ечими яъни

$$L[y_1] \equiv 0 \quad \text{шунинг учун кейинги тенгламадаги } z \text{ олдидаги коэффициент нолга тенг булади.}$$

(3) тенгламанинг ҳар иккиала томонини  $y_1$  га булсак.

$$z^{(n)} + Q_1(x)z^{(n-1)} + Q_2(x)z^{(n-2)} + \dots + Q_1(x)z' = 0$$

тенгламага эга буламиз.

Бу тенгламада  $z' = u$  алмаштиришни олиб уни

$$u^{(n-1)} + Q_1(x)u^{(n-2)} + \dots + Q_1(x)u = 0 \quad (4)$$

қурилишга келтирамиз.

Агар (4) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  булса, у ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечимлари

$$y_1; \quad y_2 = y_1 \int u_1 dx; \quad y_3 = y_1 \int u_2 dx, \dots, y_n = y_1 \int u_{n-1} dx \quad (5)$$

булади. Исбот этамизки бу ечимлар чизикли богланмагандирлар. яъни улар (1) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Тескаринча фараз этайлик булар чизикли богланган булсинлар. У холда бирданига хаммаси нолга тенг булмаган шундай  $c_1, c_2, \dots, c_n$  сонлари топиладиким,  $x$  -нинг курилайтган ораликдиги хамма кийматлари учун

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \equiv 0 \quad (6)$$

айнияти бажарилади.

Бундан  $y_1$  нолга тенг булмаганли сабабли (6) дан

$$c_1 + c_2 \left( \frac{y_2}{y_1} \right) + c_3 \left( \frac{y_3}{y_1} \right) + \dots + c_n \left( \frac{y_n}{y_1} \right) = 0 \quad (7)$$

(5) ва (7) га асосан

$$c_2 u_1 + c_3 u_2 + \dots + c_n u_{n-1} = 0$$

га эга буламиз.

Лекин  $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$  лар чизикли боглик булмаганлиги сабабли, кейинги тенгликдан

$$c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$$

келиб чикади. У холда (6) дан  $c_1 = 0$  келиб чикади.

Бу карама-каршилиқ курсатадиким  $y_1, y_2, \dots, y_n$  лар чизикли боглик эмас.

Демак улар (1) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Фараз этайлик (1) тенгламанинг  $k$  та  $y_1, y_2, \dots, y_k$  хусусий ечимлари берилган булсин.

$u = \left( \frac{y}{y_1} \right)^1$  алмаштириш ёрдамида (1) тенглама (4) курунишга келади.

Лекин (4) тенгламанинг

$$u_1 = \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^1, \quad u_2 = \left( \frac{y_3}{y_1} \right)^1, \quad \dots, \quad u_{k-1} = \left( \frac{y_k}{y_1} \right)^1 \quad (8)$$

ечимлари мавжуд булади.

Исбот этамиким, (8) ечимлар системаси узаро чизикли боглик эмас. Аксинча фараз этайлик булар чизикли боглик булсинлар. У холда хаммаси бирданига нолга тенг булмаган шундай  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  сонларни топиш мумкинким

$$\gamma_2 u_1 + \gamma_3 u_2 + \dots + \gamma_k u_{k-1} \equiv 0 \quad (9)$$

(9) ни хар иккала томонини интеграллаймиз

$$\gamma_2 \int u_1 dx + \gamma_3 \int u_2 dx + \dots + \gamma_k \int u_{k-1} dx = -\gamma_1$$

( $\gamma_1$  - интеграллаш доимийлиги)

бу кейинги тенгликдан

$$\gamma_2 \left( \frac{y_2}{y_1} \right) + \gamma_3 \left( \frac{y_3}{y_1} \right) + \dots + \gamma_k \left( \frac{y_k}{y_1} \right) = -\gamma_1$$

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 + \dots + \gamma_k y_k = 0$$

шартга асосан  $y_1, y_2, \dots, y_k$  лар чизикли богланмаган, шунинг учун кейинги тенгликдан

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_k = 0$$

Бу карма-каршилиқ курсатадиким

$$u_1, u_2, \dots, u_k$$

лар чизикли богланмагандирлар

Яъни улар (4) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.



(4) тенгламада  $\vartheta = \left(\frac{u}{u_1}\right)^1$  алмаштиришни олсак тенгламанинг тартиби биттага пасаяди

(1) тенгламанинг тартиби эса икки бирликка пасаяди.

Бундан шундай хулосага келамиз.

Агар бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг к та чизикли боглик булмаган хусусий ечимлари берилган булса, у холда унинг тартиби к бирликка камаяди яъни (1) тенгламани интеграллаш n-k нчи тартибли тенгламани интеграллашга келтирилади.

Иккинчи тартибли бир жинсли дифференциал тенгламанинг битта

$y_1 \neq 0$  хусусий ечими берилган булсин

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (10)$$

$$y = y_1 \int u dx \text{ алмаштиришни оламиз}$$

$$y' = y_1 u + y_1' \int u dx \quad y'' = 2y_1' u + y_1 u' + y_1'' \int u dx$$

Буларга асосан (10) тенгламани

$$y_1 u' + (2y_1' + p_1(x)y_1)u + (y_1'' + p_1(x)y_1' + p_2(x)y_1) = 0$$

$$u' + \frac{2y_1' + p_1(x)y_1}{y_1}u = 0 \quad \frac{u'}{u} = -\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1(x)\right)$$

$$\ln u = -2 \ln y_1 - \int p_1(x) dx + \ln c_1 \quad u = \frac{c_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2}$$

Бу кийматни  $y = y_1 \int u dx + c_2$  га куйсак

$$y = y_1 \left[ \int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$

га эга буламиз. Бу эса (10) тенгламанинг умумий ечимидир.

$$u = \left(\frac{u}{u_1}\right)^1 \quad \frac{y}{y_1} = \int u dx + c$$

**Мисол**

$$x^3 y^{111} - 3x^2 y^{11} + 6xy^1 - 6y = 0$$

тенгламанинг 2 та хусусий ечими  $y_1 = x, y_2 = x^2$  берилган булса, тенгламанинг умумий ечимини топим.

$$y = x \int u dx \text{ алмаштиришни оламиз.}$$

$$\begin{aligned}
y^1 &= \int u dx + xu \quad y^{11} = 2u + xu^1 \quad y^{111} = 3u^1 + xu^{11} \\
x^3(3u^1 + xu^{11}) - 3(2u + xu^1)x^2 + 6x(\int u dx + xu) - 6x \int u dx &= 0 \\
x^2 u^{11} = 0 \quad u^{11} &= 0 \\
u_1 &= \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^1 = \left( \frac{x^2}{x} \right)^1 = (x)^1 = 1 \quad u_1 = 1 \\
v &= \left( \frac{u}{u_1} \right)^1 \quad u = u_1 \int v dv = \int v dv \\
u' &= v, \quad u'' = v' \quad v' = 0 \quad v = 2 \\
u_2 &= u_1 \int v dx = 2 \int dx = 2x \\
u_1 &= \left( \frac{y_2}{y_1} \right)^1 \quad u_2 = \left( \frac{y_3}{y_1} \right)^1 \quad y_3 = y_1 \int u_2 dx = x \int 2x dx = x^3 \\
y &= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3.
\end{aligned}$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

- 1.Юкори тартибли чизикли тенгламада аргументни ёки функцияни алмаштирсак кандай тенглама хосил булади?
- 2.Юкори тартибли дифференциал тенглама ечимининг мавжудлик ва ягоналик теоремасини айтинг.
- 3.Функцияларнинг чизикли боглик шартини айтинг.
- 4.Чизикли тенглама ечимларининг хоссасини айтинг.
- 5.Вронский детерминантининг мохияти нимадан иборат.
- 6.Тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси деб нимага айтилади.
- 7.Кайси вақтда чизикли тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси мавжуд.
- 8.Чизикли тенгламанинг умумий ечимини ёзинг.
- 9.Остроградский-Лиувилль формуласини ёзинг.
10. Бир жинсли тенгламанинг тартибини кандай килиб пасайтириш мумкин?
- 11.Иккинчи тартибли чизикли тенгламанинг битта хусусий ечими берилган бўлса, унинг умумий ечими кандай топилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

- 1.Функцияларнинг чизикли боглик шартини айтинг.
- 2.Чизикли тенглама ечимларининг хоссасини айтинг.
- 3.Вронский детерминантининг мохияти нимадан иборат.
- 3.Тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси деб нимага айтилади.
- 4..Кайси вақтда чизикли тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси

### 1.3.2-в. ОЎзаки сўров учун саволлар

- 1.Чизикли тенгламанинг умумий ечимини ёзинг.

- 2.Остроградский-Лиувилль формуласини ёзинг.
3. Бир жинсли тенгламанинг тартибини қандай қилиб пасайтириш мумкин?
- 4.Иккинчи тартибли чизикли тенгламанинг битта хусусий ечими берилган бўлса, унинг умумий ечими қандай топилади?

#### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, Пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўқимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

#### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

#### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

#### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ.-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амеликин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

#### 15.7. Ўқитиш усуллари қоидалари

#### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРЎЗА 17

**Мавзу:** Узгармас коэффициентли  $n$  ( $n > 1$ ) тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар.

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

#### Маъруза режаси:

Узгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар, бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар, умумий ва хусусий ечимлар, Вандермонд детерминанти.

#### Ўқув машғулоти мақсади:

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

#### Ўқув машғулотнинг вазифалари:

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### Ўқитиш технологияси:

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### Педагогик масалалар:

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;

- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал обектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ештиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини

баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни кўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Узгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар, бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар, умумий ва хусусий ечимлар, Вандермонд детерминанти.

#### 1.3.1. Маъруза матни

Узгармас коэффициентли  $n(n>1)$  нчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламаларнинг умумий курилиши

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

Бунда  $a_i = \text{const} (i = \overline{1, n})$  (1) тенгламанинг ҳаммавакт умумий ечимини топиш мумкин.

(1) тенгламанинг умумий ечимини топиш масаласи алгебраик тенгламани ечишга келтирилади. Маълумки (1) тенгламанинг умумий ечимини топиш учун унинг  $n$ - та фундаментал ечимлар системасини топишга тугри келади. Фундаментал ечимлар системасини элементар функция курилишида излаймиз:

$$y = e^{\lambda x} \quad (2)$$

бундан  $y' = \lambda e^{\lambda x}$   $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$   $y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}, \dots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$

Бу кийматларни (1) тенгламага куйсак

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} [\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n] \quad (3)$$

тенгламанинг чап томонини (3) курилишида ёзиш мумкин. Урта кавс ичидаги ифодани  $F(\lambda)$  деб белгиласак (3) дан

$$L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} F(\lambda)$$

$F(\lambda)$  га  $L$  операторга мос булган купхадли дейилади. Агар (2), (1) тенгламанинг ечими булса, у холда (3) нинг чап томони нолга тенг булади.  $e^{\lambda x} \neq 0$  булмагани учун (3) дан

$$F(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (4)$$

га эга буламиз. (4) га (1) тенгламага мос булган характеристик тенглама дейилади. (5) дан куринадиким, берилган дифференциал тенгламага мос булган характеристик тенгламани тузиш учун, ундаги хосилалар урнига  $\lambda$  ни хосила тартибига тенг булган даражада ёзиш кифоядир.

Фараз этайлик  $\lambda_1$  (4) тенгламанинг илдизларидан бири,  $\lambda_1$  ни (3) га куйсак, унинг унг томони нолга тенг булади. шунинг учун  $L[e^{\lambda_1 x}] = 0$  булади.

Бу курсатадиким  $y_1 = e^{\lambda_1 x}$  (1) тенгламанинг хусусий ечими булади.

Бунда куйидаги холлар булиши мумкин.

#### 1 хол.

Характеристик тенгламанинг илдизлари бир-бирига тенг эмас.

А) фараз этайлик характеристик тенгламанинг илдизлари

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_n$  хакикий ва бир-бирига тенг булмасин.

Характеристик тенгламанинг бу илдизларга мос булган (1) тенгламанинг хусусий ечимлари.

$$y_1 = \ell^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = \ell^{\lambda_2 x}, \quad y_3 = \ell^{\lambda_3 x}, \dots, \quad y_n = \ell^{\lambda_n x} \quad (5)$$

дан иборат булади.

Исбот этамизким бу ечимлар системаси (1) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади. Бунинг учун улардан тузилган Вронский детерминантини караймиз.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \ell^{\lambda_1 x} & \ell^{\lambda_2 x} & \dots & \ell^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 \ell^{\lambda_1 x} & \lambda_2 \ell^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n \ell^{\lambda_n x} \\ \lambda_1^2 \ell^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 \ell^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^2 \ell^{\lambda_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \ell^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} \ell^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} \ell^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Бу Вандермонд детерминанти булиб, унинг киймати

$$= \ell^{\delta x} \left[ (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1) \dots (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \right] \neq 0$$

чунки  $\lambda_i$  лар бир-бирига тенг эмас.

Демак  $y_1, y_2, \dots, y_n$  лар (1) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Ухолда (6) теоремага асосан (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y = c_1 \ell^{\lambda_1 x} + c_2 \ell^{\lambda_2 x} + \dots + c_n \ell^{\lambda_n x}$$

булади.

**Мисол.**  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \quad \lambda_1 = 1 \quad \text{тенгламани илдиз}$$

Горнер схемасига асосан

$$\lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 3$$

$$(\lambda_1 - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

$$(\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 5)(\lambda_3 - 3) = 0$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими  $y = c_1 \ell^x + c_2 \ell^{2x} + c_3 \ell^{3x}$

Б) характеристик тенглама комплекс илдизга эга булсин. Хар кандай хакикий аргументли  $f(x)$  комплекс функцияни

$$f(x) = u(x) + i v(x) \quad (6)$$

куринишда ёзиш мумкин.

Бунда  $u(x)$  ва  $v(x)$  лар хакикий аргументли хакикий функциялар-дир ва аксинча 2 та хакикий аргументли хакикий  $u(x)$  ва  $v(x)$  функциялар берилган булса, комплекс функцияни (6) куринишда ёзиш мумкин.



**Лемма** Агар (1) тенглама (6) курунишдаги комплекс ечимга эга, булса, у холда  $u(x)$  ва  $v(x)$  ларнинг хар бири (1) тенгламанинг хакикий ечимлари булади.

Исбот. Фараз этайлик (1) тенглама (6) курунишдаги комплекс ечимга эга булсин яъни

$$L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$$

оператор хоссасига асосан  $L[u(x)] \equiv 0$ ,  $L[v(x)] \equiv 0$  чунки

$$L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0$$

Бу курсатадиким  $u(x)$  ва  $v(x)$  лар (1) тенгламанинг ечимларидир.

Агар характеристик тенглама  $\lambda_1 = \alpha + \beta i$  комплекс илдизга эга булса, характеристик тенгламанинг коэффициентлари хакикий булгани учун, характеристик тенглама  $\lambda_1$  га кушма булган  $\lambda_2 = \alpha - \beta i$  илдизга хам эга булади.

Маълумки Эйлер формуласи

$$e^{\beta xi} = \cos \beta x + i \sin \beta x$$

дан иборатдир.

Демак характеристик тенгламанинг хар бир жуфт кушма комплекс илдизига, (1) тенгламанинг 2 та хакикий ечими мос келади.

Мисол.  $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$$

Горнер схемасини тузамиз

|   |   |    |    |     |
|---|---|----|----|-----|
|   | 1 | -5 | 17 | -13 |
| 1 | 1 | -4 | 13 | 0   |

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$$

Бу илдизларга мос булган (1) тенгламанинг ечимлари

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{2x} \cos 3x \quad y_3 = e^{2x} \sin 3x$$

булиб унинг умумий ечими

$$y = c_1 e^{2x} + e^{2x} (c_2 \cos 3x + c_3 \sin 3x)$$

**2 хол**

Характеристик тенглама каррали илдизларга эга булсин.

Фараз этайлик  $\lambda_1$  характеристик тенгламанинг  $k \leq n$  каррали илдизи булсин. У холда характеристик тенгламанинг бир-биридан фарк килувчи илдизлар сони  $n$  тадан кам булади. Шу сабабли уларга мос булган тенглама ечимлари хам  $n$  тадан кам булади. Яъни биз бу холда (1) тенгламанинг умумий ечимини тузаолмаймиз.

Бу холда умумий ечим куйидагича топилади:

$$y = e^{\lambda x} \quad (8)$$

$$\text{бунга асосан} \quad L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x} F(\lambda) \quad (9)$$

(9) тенгликнинг хар иккила томонидан  $\lambda$  га нисбатан  $m$ -нчи тартибли хосилаларини оламиз.

(9) чап томонидан

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L[e^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} e^{\lambda x}\right] = L[x^m e^{\lambda x}] \quad (10)$$

Лейбниц формуласига асосан (9) нинг унг томонини хосиласи

да  $u = F(\lambda), \quad v = e^{\lambda x}$  деб олсак

(10) ва (11) га асосан (9) нинг ҳар иккала томонидан  $\lambda$  га нисбатан олинган  $m$ -нчи тартибли ҳосила

га эга буламиз.

Агар  $\lambda_1$  характеристик тенгламанинг  $k$  каррали илдизи булса

$$F^{(k)}(\lambda) \neq 0 \quad \text{булади.}$$

 $\lambda_1$  кийматини (12) га куйсак

га эга буламиз.

Бу курсатадики  $\ell^{\lambda_1 x}, x\ell^{\lambda_1 x}, x^2\ell^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1}\ell^{\lambda_1 x}$  лар характеристик тенгламанинг  $k$  каррали  $\lambda_1$  илдизига мос булган (1) тенгламанинг хусусий ечимлари булади.

Агар  $\lambda_2$  характеристик тенгламанинг  $\kappa_2$  каррали илдизи,  $\lambda_3$  характеристик тенгламанинг  $\kappa_3$  каррали илдизи в.х.з  $\lambda_p$  характеристик тенгламанинг  $\kappa_p$  каррали илдизи булса, бунда

бу холда бу илдизларга мос булган (1) тенгламанинг хусусий ечимлари:

дан иборат булади.

Исбот этамизки, бу ечимлар системаси (1) тенгламанинг фесини ташкил этади. Аксинча фараз этайлик булар чизикли боглик булсинлар яъни

Бунда  $A_i^{(r)}$  лар хаммаси бирданига нолга тенг булмаган узгармас сонлардир.

$(r = \overline{1, p}; \quad j = \overline{0, m_r - 1})$ . Фараз этайлик  $P_r(x)$  купхадлилардан хеч булмаганда бири нольга тенг булмасин, масалан  $P_1(x) \neq 0$

(14) ни  $\ell^{\lambda_1 x}$  га булиб

170

га эга буламиз.

Бу охирги тенгликни  $k = k_1$  марта  $x$  нисбатан дифференциалласак, биринчи кушилувчи нолга тенг булади чунки  $P_1(x)$   $k-1$  даражали купхадлидир. Сумма эса уша даражали бошка купхадлига айланади.

$$\sum_{r=2}^p Q_r(x) e^{(k_r - k_1)x} = 0 \quad (15)$$

бунда  $Q_p(x)$  купхадли айнан нолга тенг эмас. (15) йигинди  $p-1$  кушилувчилардан иборат. Бу ишни юкоридагидек давом эттирсак, натижасида

$$R_p(x) e^{(k_p - k_{p-1})x} = 0 \quad (16)$$

га эга буламиз.

Бундан  $e^{(k_p - k_{p-1})x} \neq 0$  булганлиги сабабли  $R_p(x) = 0$  булиши керак.

Бунинг булиши мумкин эмас, чунки  $R_r(x)$  купхадлининг даражаси  $P_p(x)$  купхадлининг даражаси каби булиб унда коэффицентлардан бири нолга тенг эмас.

Бу карама-каршилиқ курсатадими (13<sub>1</sub>) ечимлар системаси (1) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Тенгламанинг умумий ечими

$$y = \sum_{r=1}^p G_r(x) e^{\lambda_r x}$$

бунда  $G_r(x)$  лар  $k_r-1$  купхадлилардир.

Мисол.

$$y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$$

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \quad (\lambda + 1)^4 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = -1$$

Характеристик тенгламанинг бу илдизларига мос булган тенгламанинг хусусий ечимлари

$$e^{-x}, xe^{-x}, x^2 e^{-x}, x^3 e^{-x}$$

булиб, унинг умумий ечими

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{-x}$$

дан иборат булади.

б) Энди  $\lambda_1$  характеристик тенгламанинг  $k_1$  каррали комплекс илдизи булсин

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i$$

характеристик тенгламанинг коэффицентлари хакикий булгани учун у  $\lambda_1$  га кушма булган  $k_1$  каррали

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i$$

илдизга ҳам эга булади.

Яъни биз тенгламанинг  $2k_1$  та хакикий ечимларига эга буламиз:

$$L[x^m e^{(\gamma + \beta i)x}] = 0 \quad \lambda_1, k_1 - \text{каррали}$$

$$\ell^\alpha \cos \beta x, x \ell^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{k_1-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Мисол

$$y^{IV} - 8y''' + 42y'' - 104y' + 169y = 0$$

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 42\lambda^2 - 104\lambda + 169 = 0$$

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 26\lambda^2 + 16\lambda^2 - 104\lambda + 169 = 0$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2(4\lambda - 13) + (4\lambda - 13)^2 = 0$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 13)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i \quad 2 \text{ каррали}$$

тенгламанинг хусусий ечимлари

$$e^{2x} \cos 3x, xe^{2x} \cos 3x$$

$$e^{2x} \sin 3x, xe^{2x} \sin 3x$$

булиб, унинг умумий ечими

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2x)\cos 3x + e^{2x}(c_3 + c_4x)\sin 3x$$

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2x)\cos 3x + e^{2x}(c_3 + c_4x)\sin 3x$$

Мисол 2.  $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Бундай тенгламага кайтма тенглама дейилади уни куйидагича ечамиз.

Хар иккала томонини  $\lambda^2$  га буламиз:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 + \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + 2(\lambda + \frac{1}{\lambda}) + 3 = 0$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = z \quad \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} = z^2 - 2$$

$$z^2 - 2 + 2z + 3 = 0 \quad z^2 + 2z + 1 = 0$$

$$(z + 1)^2 = 0 \quad z_{1,2} = -1$$

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = -1 \quad \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Бунга мос булган тенгламанинг хусуий ечимлари

$$\ell^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad x\ell^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$$\ell^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad x\ell^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

умуий ечим эса

$$y = (c_1 + c_2x)\ell^{-\frac{1}{2}x} \cos \beta x + (c_3 + c_4x)\ell^{-\frac{1}{2}x} \sin \beta x$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1.  $n$  ( $n > 1$ ) тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг умумий курулиши ёзинг?
2. Тенгламанинг хусусий ечимлари қандай топилади?
3. Бир жинсли тенгламага мос бўлган характеристик тенглама қандай топилади?
4. Вандермонд детерминанти қандай ҳисобланади?
5. Тенгламанинг характеристик тенгламаси комплекс илдизга, қаррали илдизларга эга бўлса унга мос бўлган тенгламанинг хусусий ечимлари қандай топилади?
6. Қайтма тенглама, қандай ечилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Тенгламанинг хусусий ечимлари қандай топилади?
2. Бир жинсли тенгламага мос бўлган характеристик тенглама қандай топилади?
3. Вандермонд детерминанти қандай ҳисобланади?

### 1.3.2-в. Ойзаки сўров учун саволлар

1. Тенгламанинг характеристик тенгламаси комплекс илдизга, қаррали илдизларга эга бўлса унга мос бўлган тенгламанинг хусусий ечимлари қандай топилади?
2. Қайтма тенглама, қандай ечилади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлид, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

### 15.8. Ўқитиш усуллари қоидалари

#### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### 1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқиясиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқиясиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқитётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### 1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРУЗА - 18

**Мавзу:**  $n$  ( $n > 1$ )-нчи тартибли бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар.

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулотли тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Узгармас коэффицентли дифференциал тенгламалар, характеристик тенглама, карралаи илдизлар, хусусий ва умумий ечим.

**Ўқув машғулотли мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқутиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқутиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқутиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;



- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотиға кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйҳати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф етади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф етади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мнавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Узгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар, характеристик тенглама, каррали илдизлар, хусусий ва умумий ечим.

#### 1.3.1. Маъруза матни

$n(n>1)$ -нчи тартибли бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламанинг умумий куруниши

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

дан иборатдир.

Бунда  $p_i(x)$   $i = \overline{1, n}$  функциялар курилатган ораликда аниқланган ва узлуксиз функциялардир.  $f(x)$  функция ҳам узлуксиздир.

(1) тенгламанинг коэффициентларидан тузилган

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

тенгламага, (1) тенгламага мос булган бир жинсли тенглама дейилади.

**ТЕОРЕМА 1.** (1) тенгламанинг умумий ечими, унинг бирор  $Y_1$  хусусий ечими билан (1) тенгламага мос булган (2) бир жинсли тенглама умумий ечимининг йигиндисига тенгдир.

$$y = Y_1 + \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

бунда  $y_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) (2) тенгламанинг фундаментал ечимлар системасидир.

Исбот.  $Y_1$ , (1) тенгламанинг хусусий ечими булсин.

$$y = Y_1 + z \quad (3)$$

алмаштиришни оламир.

(3)ни (1) тенгламага куямиз.

$$L[Y_1 + z] = f(x)$$

$$L[Y_1] + L[z] = f(x)$$

Лекин  $L[Y_1] = f(x)$  булгани учун кейинги тенгликдан

$$L[z] = 0$$

Бу эса бир жинсли тенгламадир. Агар бу тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси  $y_1, y_2, \dots, y_n$  булса, унинг умумий ечими

$$z = \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad \text{булади.}$$

(3) га асосан (1) тенгламанинг умумий ечими

$$y = Y_1 + \sum_{i=1}^n c_i y_i$$

дан иборат булади.

Узгармасларни вариациялаш методи  
(Лагранж методи).

$n$ -нчи тартибли биржинсли булмаган чизикли

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

дифференциал тенглама берилган булсин ва унга мос бир жинсли

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \quad (2)$$

чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими

$$y = \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad (3)$$

берилган булсин.

**ТЕОРЕМА.** Агар  $n$ -нчи тартибли бир жинсли булмаган чизикли дифференциал (1) тенгламага мос булган бир жинсли чизикли дифференциал (2) тенгламанинг умумий ечими берилган булса, (1) тенгламанинг умумий ечими квадратурада аникланади. Исбот. (1) тенгламанинг ечимини хам,  $c_i$  ни  $x$  нинг функцияси деб (3) куринишда излаймиз:

$$y = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i \quad (4)$$

$c_i(x)$  ларни аниклаш учун (4) дан ташкари яна  $(n-1)$  та тенгламалар тузамиз. Бу тенгламаларни куйидагича тузамиз. (4) дан

$$y' = \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i + \sum_{i=1}^n c_i(x) y'_i$$

бунда  $c_i = \text{const}$  деб карасак

$$\sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i = 0 \quad (4_1) \quad y' = \sum_{i=1}^n c_i(x) y'_i \quad (5_1)$$

га эга булаимиз.

(5<sub>1</sub>) ни яна  $x$  га нисбатан дифференциаллаймиз

$$y'' = \sum_{i=1}^n c'_i(x) y'_i + \sum_{i=1}^n c_i(x) y''_i$$

бунда хам  $c_i = \text{const}$  деб олсак

$$\sum_{i=1}^n c'_i(x) y'_i = 0 \quad (4_2) \quad y'' = \sum_{i=1}^n c_i(x) y''_i \quad (5_2)$$

га эга булаимиз.

Бу ишларни худди шундай давом эттирсак натижада:

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(n-2)} + \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i^{(n-1)}$$

бунда  $c_i = \text{const}$  десак

$$\sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(n-2)} = 0 \quad (4_{n-1}) \quad y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i^{(n-1)} \quad (5_{n-1})$$

(5 <sub>$n-1$</sub> ) ни яна бир марта дифференциаллаймиз:

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^n c'_i(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n c_i(x) y_i^{(n)} \quad (6)$$

(3), (5<sub>1</sub>), (5<sub>2</sub>), ..., (5 <sub>$n-1$</sub> ), (6) ларни (1) тенгламага куйсак

$$\sum_{i=1}^n c_i(x) \left[ y_i^{(n)} + P_1(x) y_i^{(n-1)} + P_2(x) y_i^{(n-2)} + \dots + P_{n-1}(x) y_i' + P_n(x) y_i \right] + \\ + \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x)$$

га эга буламиз. Лекин  $L[y_i] \equiv 0$  булгани учун, кейинги тенгликдан

$$\sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \quad (7)$$

булади.

Шундай килиб  $c_i(x)$  ларни аниклаш учун

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i' &= 0 \\ \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i'' &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ \sum_{i=1}^n c_i'(x) y_i^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned} \quad (8)$$

тенгламалар системасига эга буламиз. Бу система  $c_i'(x)$  ларга нисбатан  $n$ -номаълумли  $n$  та бир жинсли булмаган алгебраик тенгламалар системаси булиб. Унинг асос детерминанти Вронский детерминантидан иборат булгани учун у нолга тенг эмас:  $W(x) \neq 0$

Шунинг учун (8) системасидан  $c_i'(x)$  лар бир кийматли аникланади:

$$c_i'(x) = \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)} \quad (9)$$

бунда  $W_{ni}(x)$  Вронский детерминантидаги  $W(x)$ -нинг  $n$ -нчи сатр,  $i$ -нчи устун элементининг алгебраик тулдирувчисидир

$$\frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)} \quad \text{функция узлуксиз булгани учун (9) дан}$$

$$c_i(x) = \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(x) f(x)}{W(x)} dx + \gamma_i$$

бу кийматларни (3) га куйсак

$$y = \sum_{i=1}^n y_i \left[ \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(x) f(x)}{w(x)} dx + \gamma_i \right] = \sum_{i=1}^n y_i \int_{x_0}^x \frac{W_{ni}(x) f(x)}{w(x)} dx + \sum_{i=1}^n y_i \gamma_i \quad (10)$$

Бу бир жинсли булмаган (1) тенгламанинг умумий ечимидир.

Бунда биринчи сумма (1) тенгламанинг хусусий ечими булиб, иккинчи сумма эса (1) тенгламага мос булган бир жинсли тенгламанинг умумий ечимидир.

Мисол

$$y'' + y = \operatorname{tg} x \quad \lambda^2 + 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad (11)$$

$$y_1 = \cos x, \quad y_2 = \sin x \quad \bar{y} = e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\begin{cases} c_1^1(x) \cos x + c_2^1(x) \sin x = 0 \\ c_1^1(x) \sin x + c_2^1(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$c_1^1(x) = -\sin x \cdot \operatorname{tg} x = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$c_2^1(x) = \cos x \operatorname{tg} x = \sin x$$

$$c_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx + \gamma_1 = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx + \gamma_1 = -\int \left( \frac{1}{\cos x} - \cos x \right) dx + \gamma_1 = -\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + \gamma_1$$

$$c_2(x) = \int \sin x dx + \gamma_2 = -\cos x + \gamma_2$$

Бу кийматларни (11) га куйиб

$$\begin{aligned} y &= \left[ -\ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \sin x + \gamma_1 \right] \cos x + (-\cos x + \gamma_2) \sin x = \\ &= \gamma_1 \cos x + \gamma_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \end{aligned}$$

Берилган тенгламанинг умумий ечимига эга буламиз

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Бир жинсли булмаган n-нчи тартибли чизикли тенгламанинг ечими кандай топилади?
2. Вариациялаш усули нимадан иборат?
3. Фундаментал ечимлар системаси маълум булса, бир жинсли булмаган тенгламанинг умумий ечими кандай топилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Бир жинсли булмаган n-нчи тартибли чизикли тенгламанинг ечими кандай топилади?
2. Вариациялаш усули нимадан иборат?

### 1.3.2-в. Оўзаки сўров учун саволлар

1. Фундаментал ечимлар системаси маълум булса, бир жинсли булмаган тенгламанинг умумий ечими кандай топилади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўқимчаси; мустақил иборалар тузиш;

- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амеликин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.9. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;

- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қўйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
  - Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРЎЗА - 19

**Мавзу:** Ўзгармас коэффициентли бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар. ( $n > 1$ ) тартибли)

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Ўзгармас коэффициентли чизикли тенглама, характеристик тенглама, хусусий ечим, каррали илдиз, комплекс илдиз, хусусий ечимларни умумий куринишда аниклаш

Ўзгармас коэффициентли бир жинсли булмаган дифференциал тенгламалар, вариациялаш методи, умумий ва хусусий ечим куринишлари.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқутиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқутиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқутиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;



- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини

баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Узгармас коэффициентли чизикли тенглама, характеристик тенглама, хусусий ечим, каррали илдиз, комплекс илдиз, хусусий ечимларни умумий курунишда аниқлаш

Узгармас коэффициентли бир жинсли булмаган дифференциал тенгламалар, вариациялаш методи, умумий ва хусусий ечим курунишлари.

#### 1.3.1. Маъруза матни

Бундай тенгламанинг умумий куруниши

$$L[y] \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (1)$$

ёки  $L[y] = f(x)$

дан иборат

Бунда  $a_i (i = \overline{1, n})$  узгармас сонлар булиб,  $f(x)$  курилатган ораликда аниқланган ва узлуксиздир.

(1) тенгламанинг унги томони бир неча функцияларнинг йигиндисидан иборат булиши мумкин.

Масалан  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  булсин у ҳолда

$$L[y] = f_1(x) + f_2(x) \quad (2)$$

булади.

**ЛЕММА.** Агар  $y_1[y] = f_1(x)$  тенгламанинг ечими,  $y_2$  эса  $L[y] = f_2(x)$  тенгламанинг ечими булса, у ҳолда  $y_1 + y_2$  ҳам (2) тенгламанинг ечими булади.

Ҳақиқатдан ҳам оператор хоссасига кура

$$L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$$

Лекин шарт асоси  $L[y_1] \equiv f_1(x)$ ,  $L[y_2] \equiv f_2(x)$

булган учун

$$L[y_1 + y_2] \equiv f_1(x) + f_2(x)$$

га эга булаемиз.

Бундан  $y_1 + y_2$  (2) тенгламанинг ечими эканлиги келиб чиқади.

Маълумки бир жинсли булмаган тенгламанинг умумий ечими, унинг бирор хусусий ечими билан унга мос булган бир жинсли тенглама умумий ечимининг йигиндисига тенг. Шунинг учун биз даставвал (1) тенгламанинг хусусий ечимини топиш йулларини қараймиз

$f(x)$  нинг баъзи бир хусусий курунишларида берилган тенгламанинг хусусий ечимини квадратурасиз топиш мумкин.

1 хол.

$$f(x) = P_m(x) e^{\alpha x}$$

Курунишда булсин.

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m \quad (3)$$

$p_i (i = \overline{0, m})$  лар узгармас сонлар

яъни  $P_m(x)$ ,  $x$  га нисбатан  $m$ -нчи даражали купхадли.

Бу холда (1) тенгламанинг хусусий ечимини

$$Y = Q_m(x) \ell^{\alpha x} \quad (4)$$

куринишда излаймиз.

Бунда хам  $Q(x)$ ,  $x$  - га нисбатан  $m$  - нчи даражали купхадли

$$Q_m(x) = q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + \dots + q_{m-1} x + q_m \quad (5)$$

$q_i (i = \overline{0, m})$  узгармас сонлар

Бу узгармас сонларни шундай аниқлаймизки (4) , (1) тенгламанинг ечими булсин.

$$L[Q_m(x) \ell^{\alpha x}] \equiv P_m(x) \ell^{\alpha x} \quad (6)$$

1)  $\alpha$  характеристик тенгламанинг илдизи булмасин.

(5) га кура (6) ни куйидагича ёзиб оламиз.

$$L[(q_0 x^m + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{m-2} + \dots + q_{m-1} x + q_m) \ell^{\alpha x}] = P_m(x) \ell^{\alpha x}$$

$$\text{ёки } L[Q_m(x) \ell^{\alpha x}] = L\left[\sum_{j=0}^m q_j x^{m-j} \ell^{\alpha x}\right] = \sum_{j=0}^m q_j L[x^{m-j} \ell^{\alpha x}] =$$

$$= \sum_{j=0}^m q_j \sum_{i=0}^{m-j} C_{m-j}^i F^{(i)}(\alpha) x^{m-j-i} \ell^{\alpha x}$$

$$\sum_{j=0}^m q_j (F(\alpha) x^{m-j} + C_{m-j}^1 F'(\alpha) x^{m-j-1} + C_{m-j}^2 F''(\alpha) x^{m-j-2} +$$

$$+ C_{m-j}^3 F'''(\alpha) x^{m-j-3} + \dots + C_{m-j}^{m-j-1} F^{(m-j-1)}(\alpha) x +$$

$$+ C_{m-j}^{m-j} F^{(m-j)}(\alpha)) \ell^{\alpha x} = P_m(x) \ell^{\alpha x}$$

$\ell^{\alpha x} \neq 0$  булмагани учун, кейинги тенгламанинг хар иккала томонини  $\ell^{\alpha x}$  га булсак

$$\sum_{j=0}^m q_j (F(\alpha) x^{m-j} + C_{m-j}^1 F'(\alpha) x^{m-j-1} + C_{m-j}^2 F''(\alpha) x^{m-j-2} + \dots +$$

$$+ C_{m-j}^{m-j-1} F^{(m-j-1)}(\alpha) x + F^{(m-j)}(\alpha)) = P_m(x) \quad (7)$$

Бу тенгликнинг бажарилиши учун унг ва чап томондаги  $x$ -нинг бир хил даражали хад олдидаги коэффициентлар тенг булиши керак.  $x$  нинг бир хил даражали хадлар олдидаги коэф-фициентларини тенглаштирамиз.

$$\left| \begin{array}{l} q_0 F(\alpha) = p_0 \\ q_1 F(\alpha) + q_0 C_{m-1}^1 F'(\alpha) = p_1 \\ q_2 F(\alpha) + q_1 C_{m-1}^1 F'(\alpha) + q_0 C_{m-1}^2 F''(\alpha) = p_2 \\ \vdots \\ q_m F(\alpha) + q_{m-1} F^1(\alpha) + \dots + q_0 F^{(m)}(\alpha) = p_m \end{array} \right. \quad (8)$$

$\alpha$  характеристик тенгламанинг илдизи булмагани учун  $F(\alpha) \neq 0$  эмас. Шунинг

учун (8) системадан кетма-кет  $q_0, q_1, \dots, q_m$  коэффициентларни  $p_0, p_1, \dots, p_m$  лар оркали аниқлаймиз.

Бошқача айтганда (8) системадан, унинг асос детерминанти  $[F(\alpha)]^{m+1} \neq 0$  булмагани сабабли

ундан  $q_i (i = \bar{1}, n)$  лар бир киймати аникланади бу топган кийматларни (4) га қўйсак, (1) тенгламанинг хусусий ечими аникланади. У ҳолда (1) тенгламага мос булган бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топсак, (1) тенгламанинг умумий ечими аникланади.

Мисол.

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)\ell^{3x} \quad \alpha = 3$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

$\alpha = 3$  характеристик тенгламанинг илдизи эмас

$$P_2(x)\ell^{3x} = (x^2 + x)\ell^{3x} \quad \text{булгани учун}$$

$$Y = Q_2(x)\ell^{3x} = (Ax^2 + Bx + C)\ell^{3x}$$

$$Y' = [3Ax^2 + (2A + 3B)x + (B + 3C)]\ell^{3x}$$

$$Y'' = [6Ax^2 + 2A + 3B]\ell^{3x} + 3[3Ax^2 + (2A + 3B)x + (B + 3C)]\ell^{3x} =$$

$$= [9Ax^2 + (12A + 9B)x + (6B + C)]\ell^{3x}$$

$y, y', y''$  кийматларни берилган тенгламага қўйиб, сунгра  $x$  нинг бир хил даражалари оладидаги коэффициентларни тенглаштирсак

$$\begin{cases} 2A = 1 \\ 6A + 2B = 1 \\ 3B + 2C = 0 \end{cases}$$

тенгламаларга эга булаемиз.

$$\text{Бундан} \quad A = \frac{1}{2}, \quad B = -1; \quad C = 1$$

У ҳолда берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$Y = \left( \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right) \ell^{3x}$$

Унинг умумий ечими эса

$$y = c_1 e + c_2 e^{2x} + \left( \frac{1}{2}x^2 - x + 1 \right) \ell^{3x}$$

дан иборат булади.

2)  $\alpha$  - харктеристик тенгламанинг  $k$ -каррали илдизи булсин

$$F(\alpha) = 0 \quad F'(\alpha) = 0, \dots, \quad F^{(k-1)}(\alpha) = 0 \quad F^{(k)}(\alpha) \neq 0$$

У ҳолда (1) тенгламанинг хусусий ечимини

$$Y = x^k Q_m(x) \ell^{\alpha x} \quad (9)$$

қурилишда излаймиз.

Бунда ҳам  $Q_m(x)$   $x$  га нисбатан  $m$ -нчи даражали купхадли.

$$Q_m(x) = \sum_{j=0}^m q_j x^{m-j} \quad (10)$$

$q_j (j = \overline{0, m})$  узгармас сонлар. Уларни шундай танлаб оламизким, (9), (1) тенгламанинг каноатлантисин.

$q_j$  ларни аниклаш учун (9) ни (1) тенгламага куямиз.

$$L[x^k Q_m(x) \ell^{\alpha x}] \equiv P_m(x) \ell^{\alpha x} \quad \text{ёки}$$

$$L\left[\sum_{j=0}^m q_j x^{m-j+k} \ell^{\alpha x}\right] \equiv P_m(x) \ell^{\alpha x}$$

Оператор хоссасига асосан, узгармас сони оператор ишорасидан ташкари чиқариш мумкин

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m q_j L[x^{m+k-j} \ell^{\alpha x}] &= P_m(x) \ell^{\alpha x} \\ \sum_{j=0}^m q_j \sum_{i=0}^{m+k-j} C_{m+k-j}^i F^{(i)}(\alpha) x^{m+k-j-i} \ell^{\alpha x} &= P_m(x) e^{\alpha x} \quad (11) \\ \sum_{j=0}^m q_j \sum_{i=0}^{m+k-j} C_{m+k-j}^i F^{(i)}(\alpha) x^{m+k-j-i} &= P_m(x) \end{aligned}$$

Шартга асосан  $\alpha$  характеристик тенгламанинг  $k$  каррали илдизи. Шунинг учун (11) тенгликни

$$\sum_{j=0}^m q_j \sum_{i=k}^{m+k-j} C_{m+k-j}^i F^{(i)}(\alpha) x^{m+k-j-i} \equiv P_m(x) \quad (12)$$

куринишда ёзиш мумкин.

Ички суммани очиб чиқамиз.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m q_j [C_{m+k-j}^k F^{(k)}(\alpha) x^{m-j} + C_{m+k-j}^{k+1} F^{(k+1)}(\alpha) x^{m-j-1} + \\ + C_{m+k-j}^{k+2} F^{(k+2)}(\alpha) x^{m-j-2} + \dots + C_{m+k-j}^{m+k-j-1} F^{(m+k-j-1)}(\alpha) x + \\ + C_{m+k-j}^{m+k-j} F^{(m+k-j)}(\alpha)] \equiv p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + P_m \end{aligned}$$

Аниқмас коэффициентлар методидан фойдаланиб кейинги тенгликдан  $q_j$  ларни аниқлаймиз.

$$\begin{aligned} q_0 C_{m+k}^k F^{(k)}(\alpha) &= p_0 \\ q_1 C_{m+k-1}^k F^{(k)}(\alpha) + q_0 C_{m+k}^{k+1} F^{(k+1)}(\alpha) &= p_1 \\ q_2 C_{m+k-2}^k F^{(k)}(\alpha) + q_1 C_{m+k-1}^{k+1} F^{(k+1)}(\alpha) + q_0 C_{m+k}^{k+2} F^{(k+2)}(\alpha) &= p_2 \\ &\dots \\ q_m F^{(k)}(\alpha) + q_{m-1} F^{(k+1)}(\alpha) + q_{m-2} F^{(k+2)}(\alpha) + \dots + q_0 F^{(m+k)}(\alpha) &= p_m \end{aligned}$$

$\alpha$ , характеристик тенгламанинг  $k$ -каррали ечими илдизи булган учун  $F^{(k)}(\alpha) \neq 0$

Шунинг учун юкоридаги сиситемадан  $q_0, q_1, q_2, \dots, q_m$  лар бир кийматли аникланади.  $q_j$ -нинг топилган бу кийматларини (9) га куйисак (1) тенгламанинг хусусий ечими топилади. Бу холда унинг умумий ечими хам аникланади.

Мисол.

$$y'' - 2y' + y = e^x \quad \alpha = 1$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1$$

1, харктеристик тенгламанинг икки каррали илдизи. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$u = (c_1 + c_2 x)e^x$$

$$Y = Ax^2 e^x \quad A = \frac{1}{2} \quad Y = \frac{1}{2} x^2 e^x$$

$$y = u + Y = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x$$

### 3-хол

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x]$$

куринишда булсин.

Бу холда хусусий ечимни куйидагича топамиз.

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} = -\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2} i$$

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[ \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \cdot P_n(x) - R_m(x) \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2} i \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [P_n(x) - iR_m(x)] e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2} [P_n(x) + iR_m(x)] e^{(\alpha-i\beta)x} =$$

$$= \tilde{P}_\tau(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{R}_\tau(x) e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \tau = \max(n, m)$$

$$Y = \tilde{Q}_\tau(x) e^{(\alpha+i\beta)x} + \tilde{F}_\tau(x) e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$\tilde{Q}_\tau(x) = \frac{1}{2} (Q_\tau(x) - iF_\tau(x)) \quad \tilde{F}_\tau(x) = \frac{1}{2} (Q_\tau(x) + iF_\tau(x))$$

$$Y = \frac{1}{2} (Q_\tau(x) - iF_\tau(x)) e^{(\alpha+i\beta)x} + \frac{1}{2} (Q_\tau(x) + iF_\tau(x)) e^{(\alpha-i\beta)x} =$$

$$= \frac{1}{2} (Q_\tau(x) - iF_\tau(x)) e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + \frac{1}{2} (Q_\tau(x) + iF_\tau(x)) e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{\alpha x} [Q_\tau(x) \cos \beta x - iF_\tau(x) \cos \beta x + iQ_\tau(x) \sin \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x +$$

$$+ Q_\tau(x) \cos \beta x + iF_\tau(x) \cos \beta x - iQ_\tau(x) \sin \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x] =$$

$$= e^{\alpha x} [Q_\tau(x) \cos \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x]$$

Демак бу холда хусусий ечимни

$$Y = e^{\alpha x} [Q_\tau(x) \cos \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x] \quad (13)$$

куринишда излаш керак.

Бунда  $\tau = \max(n, m)$ .

Агар  $\alpha \pm i\beta$  характеристик тенгламанинг илдизи булмаса, (1) тенгламанинг хусусий ечимини (13) курунишда излаймиз.

Агар  $\alpha \pm i\beta$  характеристик тенгламанинг  $k$  каррали илдизи булса, хусусий ечимни

$$Y = x^k e^{\alpha x} [Q_\tau(x) \cos \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x]$$

курунишда излаймиз.

Мисол

$$y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x} \sin 2x \quad \alpha = 4 \pm 2i$$

$$y'' - 8y' + 20y = 0 \quad \lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 4 \pm 2i$$

$F(\alpha) = 0$  яъни  $\alpha = 4 \pm 2i$  характеристик тенгламанинг илдизи

$$Y = xe^{4x} [(Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x]$$

курунишда излаймиз.

$Y$ -хусусий ечимни топиш жадвали.

|    | $f(x)$ нинг куруниши                                       | $F(\lambda)=0$ характеристик тенг. илдизи            | $Y$ хусусий ечимнинг куруниши                                                               |
|----|------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $P_m(x)$                                                   | 0 сони харак. тенг.илдизи эмас                       | $Q_m(x)$                                                                                    |
|    |                                                            | 0 сони харак.тенг.k каррали илдизи                   | $x^k Q_m(x)$                                                                                |
| 2. | $E^{\alpha x} P_m(x)$<br>( $\alpha$ -хакикий сон)          | $\alpha$ сони харак. тенг.илдизи эмас                | $e^{\alpha x} Q_m(x)$                                                                       |
|    |                                                            | $\alpha$ сони харак.тенг.k каррали илдизи            | $x^k e^{\alpha x} Q_m(x)$                                                                   |
| 3. | $P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x$                | $\pm i\beta$ сони харак. тенг.илдизи эмас            | $Q_\tau(x) \cos \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x$<br>$\tau = \max(n, m)$                    |
|    |                                                            | $\pm i\beta$ сони харак.тенг.k каррали илдизи        | $x^k (Q_\tau(x) \cos \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x)$<br>$\tau = \max(n, m)$              |
| 4. | $e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + R_m(x) \sin \beta x)$ | $A \pm i\beta$ сони харак. тенг.илдизи эмас          | $e^{\alpha x} (Q_\tau(x) \cos \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x)$<br>$\tau = \max(n, m)$     |
|    |                                                            | $\alpha \pm i\beta$ сони харак.тенг.k каррали илдизи | $x^k e^{\alpha x} (Q_\tau(x) \cos \beta x + F_\tau(x) \sin \beta x)$<br>$\tau = \max(n, m)$ |

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Узгармас коэффициентли чизикли тенглама деб, кандай тенгламага айтилади?
2. Характеристик тенглама кандай тузилади?
3. Характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва хар хил булса, тенгламанинг умумий ечими кандай топилади?
4. Характеристик тенглама каррали илдизга эга булса, тенгламанинг ечими кандай топилади?

5. Характеристик тенглама комплекс илдизларга эга булса, тенгламанинг ечими кандай топилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

- 1.Характеристик тенглама кандай тузилади?
- 2.Характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва хар хил булса, тенгламанинг умумий ечими кандай топилади?

### 1.3.2-в. ОЎзаки сўров учун саволлар

- 1.Характеристик тенглама каррали илдизга эга булса, тенгламанинг ечими кандай топилади?
- 2.Характеристик тенглама комплекс илдизларга эга булса, тенгламанинг ечими кандай топилади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўйимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с



7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

## **15.10. Ўқитиш усуллари қоидалари**

### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агар улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини куйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқитётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРЎЗА - 20

**Мавзу:** Эйлернинг бир жинсли ва бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалари.

**Эйлернинг бир жинсли чизикли дифференциал тенгламаси.**

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Коэффициентлари узгарувчи тенглама, бир жинсли тенглама, бир жинсли булмаган дифференциал тенглама, алмаштиришлар, хусусий ечим, умумий ечим.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;

- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (даволат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Якунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб

ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Коэффициентлари узгарувчи тенглама, бир жинсли тенглама, бир жинсли булмаган дифференциал тенглама, алмаштиришлар, хусусий ечим, умумий ечим.

#### 1.3.1. Маъруза матни

Эйлернинг бир жинсли чизикли дифференциал тенгламасининг умумий куруниши

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + a_2 x^{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0 \quad (1)$$

дан иборатдир бунда  $a_i (i = \overline{1, n})$  узгармас сонлар. (1) курунишдаги тенгламанинг хаммавакт

$$x = e^t \quad (2)$$

алмаштириш ёрдамида коэффициентлари узгармас булган чизикли дифференциал тенгламага келтириш мумкин.

(1) тенгламада  $y$  дан  $x$  бўйича олинган хосилаларни  $y$  дан  $t$  бўйича олинган хосилалар билан алмаштирамиз:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy^1}{dx} = \frac{dy^1}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-t} \left( e^{-t} \frac{d^2 y}{dt^2} - e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = e^{-3t} \left( \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

.....

$$\frac{d^k y}{dx^k} = e^{-kt} F_k$$

Бунда  $F_k, \frac{d^k y}{dt^k}, \frac{d^{k-1} y}{dt^{k-1}}, \dots, \frac{dy}{dt}$  лар оркали коэффициентлари узгармас булган чизикли функция курунишда ифодаланади. Бу топилган кийматларни (1) тенгламага қуйиб, ихчамласак

$$F_n + a_1 F_{n-1} + \dots + a_{n-1} F_1 + a_n F_0 = 0$$

ёки  $F_k$  ни кийматларини эътиборга олсак кейинги тенгламани

$$\frac{d^n y}{dt^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + A_{n-1} \frac{dy}{dt} + A_n y = 0 \quad (3)$$

Бунда  $A_i \ i = \overline{1, n}$  узгармас сонлар. Бу эса узгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламадир.

Мисол.  $x^3 y''' + xy' - y = 0$

$$x = \ell^t \quad t = \ln x \quad y_x^1 = \ell^{-t} y_t^1 \quad y_x^{11} = \ell^{-2t} (y_t^{11} - y_t^1)$$

$$y''' = \ell^{-3t} (y_t''' - 3y_t'' + 2y_t')$$

$$\ell^{3t} \cdot \ell^{-3t} (y_t''' - 3y_t'' + 2y_t') + \ell^t \cdot \ell^{-t} y_t^1 - y = 0$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \quad y = \ell^{\lambda t}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad (\lambda - 1)^3 = 0 \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

1 характеристик тенгламанинг уч каррали илдизи шунинг учун унга мос булган тенгламанинг хусусий ечимлари.

$$\ell^t, t\ell^t, t^2\ell^t \quad y_t = \ell^t (c_1 + c_2 t + c_3 t^2)$$

берилган тенгламанинг умумий ечими эса

$$y = x(c_1 + c_2 \ln|x| + c_3 \ln^2|x|)$$

узгармас коэффиценти чизикли тенгламага келтирилган Эйлер тенгламаси  $\ell^{\lambda t}, t^m \ell^{\lambda t}$

куринишдаги хусусий ечимларга (агарда характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий булса) эга булганлиги сабабли, Эйлер тенгламасининг узи эса.

$$x^\lambda, [\ell n|x|]^m x^\lambda$$

куринишдаги хусусий ечимларга эга булади шунинг учун Эйлер тенгламанинг хусусий ечимини

$$y = x^\lambda \quad (4)$$

куринишда излаш мумкин.

Бу холда  $y^{(i)} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-i+1)x^{\lambda-i}$

га эга буламиз. Бу кийматни (1) тенглама куйисак:

$$x^n \cdot \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)x^{\lambda-n} + a_1 x^{n-1} \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+2)x^{\lambda-(n-1)} + \dots + a_n x^\lambda = 0$$

ёки

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1) + a_1 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+2) + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (5)$$

тенгламага эга буламиз. (5) Эйлер тенгламасининг характеристик тенгламасидир.

Мисол.  $x^3 y''' + xy' - y = 0$

$$y = x^\lambda \quad y' = \lambda x^{\lambda-1} \quad y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

$$y''' = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3}$$

$$x^3 \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)x^{\lambda-3} + x \cdot \lambda x^{\lambda-1} - x^\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \lambda - 1 = 0$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2\lambda+1) = 0 \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = 1$$

$$y = c_1 x + c_2 x \ln|x| + c_3 x \ln^2|x|$$

Агар характеристик тенглама  $\alpha \pm \beta i$  комплекс илдизга эга булса, у холда унга мос булган хусусий ечим куйидагига топилади.

$$x^{(\alpha+\beta i)} = x^\alpha \cdot x^{\beta i} = x^\alpha e^{i\beta \ln x} = x^\alpha (\cos \beta \ln x + i \sin \beta \ln x)$$

$$y_1 = x^\alpha \cos \beta \ln |x|$$

$$y_2 = x^\alpha \sin \beta \ln |x|$$

**Мисол.**  $x^2 y'' - 3xy' + 5y = 0$

$$y = x^\lambda, \quad x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 3x\lambda x^{\lambda-1} + 5x^\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda-1) - 3\lambda + 5 = 0 \quad \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i$$

$$y_1 = x^2 \cos \ln |x| \quad y_2 = x^2 \sin \ln |x|$$

Эйлернинг бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламасининг умумий куруниши

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (6)$$

бунда  $a_i (i = \overline{1, n})$  лар узгармас сонлар булиб  $f(x)$  курилатган ораликда узлуксиз функциядир.

Бундай курунишдаги тенгламани хам

$$x = e^t \quad t = \ln x$$

алмаштириш ёрдамида узгармас коэффициентли бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламага келтириш мумкин.

Мисол.  $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$

$$x = e^t \quad t = \ln x$$

$$y_t'' - y_t' - 2y = \sin t$$

$$y'' - y' - 2 \quad \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$u = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} = c_1 x^{-1} + c_2 x^2$$

$$y = A \cos t + B \sin t \quad A = 0,1 \quad B = -0,3$$

$$y = 0,1 \cos \ln x - 0,3 \sin \ln x$$

$$y = u + y = c_1 x^{-1} + c_2 x^2 + 0,1 \cos \ln x - 0,3 \sin \ln x.$$

Бу берилган дифференциал тенгламанинг умумий ечимидир.

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = 0$$

курунишдаги тенгламани хам (Лагранж тенгламаси)

$$ax+b = e^t$$

алмаштириш ёрдамида коэффициентлари узгармас булган чизикли дифференциал тенгламага келтириш мумкин.

Бизга маълумки хар кандай узгармас коэффициентли бир жинсли чизикли тенгламанинг умумий ечимини топиш мумкиндир. Баъзи холларда коэффициентлари узгарувчи булган бир жинсли чизикли тенгламаларни алмаштириш ёрдамида узгармас коэффициентли бир жинсли дифференциал тенгламага келтириш мумкин.

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad (7)$$

$$\text{тенгламада} \quad t = \varphi(x) \quad (8)$$

алмаштиришини оламыз.

У холда

$$\begin{aligned}
y'_x &= \varphi'(x)y'_t \\
y''_x &= [\varphi'(x)]^2 y''_t + \varphi''(x)y'_t \\
&\dots\dots\dots \\
y^{(n)}_x &= [\varphi'(x)]^n y^{(n)}_t + \dots\dots\dots + \varphi^{(n)}(x)y'_t
\end{aligned}$$

Бу кийматларни (7) тенгламага куйсак

$$[\varphi'(x)]^n y^{(n)}_t + \dots + p_n(x)y = 0$$

га эга буламиз.

Курилатган ораликда  $\varphi'(x) \neq 0$  булмасин. Шунга кура, кейинги тенгламадан

$$y^{(n)}_t + \dots + \frac{p_n(x)}{[\varphi'(x)]^n} y = 0$$

га эга буламиз.

Бу тенглама узгармас коэффициентли булиши учун  $y$  олдидаги коэффициент узгармас булиши керак.

$$\begin{aligned}
\frac{p_n(x)}{[\varphi'(x)]^n} &= \frac{1}{c^n} \\
[\varphi'(x)]^n &= c^n p_n(x) \quad \varphi'(x) = c^n \sqrt{p_n(x)} \\
t = \varphi(x) &= c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx
\end{aligned}$$

Мисол 1 Чебишев тенгламасини

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$$

$(-1,1)$  ораликда узгармас коэффициентли тенгламага келтиринг.

$$\begin{aligned}
y'' - \frac{x}{1-x^2} y' + \frac{n^2}{1-x^2} y &= 0 \\
t = c \int \sqrt{\frac{n^2}{1-x^2}} dx &= cn \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x
\end{aligned}$$

$$c = -\frac{1}{n}$$

$$t = \arccos x \quad x = \cos t$$

$$y' = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \quad y'' = \frac{1}{\sin^2 t} y''_t - \frac{\cos t}{\sin^3 t} y'_t$$

$$\frac{1}{\sin^2 t} y''_t - \frac{\cos t}{\sin^3 t} y'_t + \frac{\cos t}{\sin^3 t} \frac{1}{\sin t} y'_t + \frac{n^2}{\sin^2 t} y = 0$$

$$y''_t + n^2 y = 0$$

$$y = c_1 \cos nt + c_2 \sin nt$$

Мисол 2.

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

тенгламани узгармас коэффициентли тенгламага келтиринг.

$$P_n(x) = \frac{a_n}{(ax+b)^n}$$

$$t = c \int \sqrt[n]{\frac{a_n}{(ax+b)^n}} dx = c \int \frac{\sqrt[n]{a_n}}{ax+b} dx = \ln|ax+b|$$

$$\frac{c \sqrt[n]{a_n}}{a} = 1 \quad c = \frac{a}{\sqrt[n]{a_n}}$$

$$t = \ln(ax+b) \quad ax+b = e^t$$

$$y'_x = ae^{-t} y'_t$$

$$y''_x = a^2 e^{-2t} (y''_t - y'_t) \quad y'''_x = a^3 e^{-3t} (y'''_t - 3y''_t + 2y'_t)$$

Буларни берилган тенгламага куйиб, сунгра ихчамласак

$$b_n y_t^{(n)} + b_{n-1} y_t^{(n-1)} + \dots + b_1 y'_t + b_0 y = 0$$

бунда  $b_i$   $i = \overline{0, n}$  узгармас сонлар.

Бу n-нчи тартибли узгармас коэффицентли чизикли дифференциал тенгламадир.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Эйлер тенгласининг умумий куриниши кандай булади?
2. Тенгласини, узгармас коэффицентли тенгламага келтириш учун кандай алмаштириш олинади?
3. Эйлер тенгласининг характеристик тенгласини ёзинг?
4. Эйлер тенгласининг хусусий ечимлари кандай куринишда булади?
5. Бир жинсли булмаган Эйлер тенгласи кандай ечилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Тенгласини, узгармас коэффицентли тенгламага келтириш учун кандай алмаштириш олинади?
2. Эйлер тенгласининг характеристик тенгласини ёзинг?

### 1.3.2-в. Оўзаки сўров учун саволлар

1. Эйлер тенгласининг хусусий ечимлари кандай куринишда булади?
2. Бир жинсли булмаган Эйлер тенгласи кандай ечилади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақил, Пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўйимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.



### **1.3.4. Карточкалар учун тестлар**

### **1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)**

- Презентация

### **1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР**

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

### **КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР**

1. Бибилов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## **15.11. Ўқитиш усуллари қоидалари**

### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;

- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРЎЗА - 21, 22

**Мавзу:** Иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар назарияси.  
Тебранувчи ва тебранмас ечимлар.  
Таккослаш теоремаси.

### Маърузага режа-топшириқлар

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 + 2соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Иккинчи тартибли чизикли тенглама, тенглама ечими, узига қўшма дифференциал тенглама, инвариант, тебранувчи ва тебранмас ечимлар, таккослаш теоремаси.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;

- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изохлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

#### **3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;

- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Иккинчи тартибли чизикли тенглама, тенглама ечими, узига кушма дифференциал тенглама, инвариант, тебранувчи ва тебранмас ечимлар, таккослаш теоремаси.

#### 1.3.1. Маъруза матни

Маълумки иккинчи тартибли бир жинсли

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (1)$$

тенгламанинг битта  $y_1(x)$  хусусий ечими маълум бўлса, унинг умумий ечими

$$y = y_1 \left[ \int \frac{c_1 e^{-\int p_1(x) dx}}{y_1^2} dx + c_2 \right]$$

формула билан аниқланар эди. Бунда  $P_1(x)$  ва  $P_2(x)$  лар курилатган ораликда узлуксиз функциялардир.

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0 \quad (2)$$

дифференциал тенгламага узига кушма иккинчи тартибли дифференциал тенглама дейилади. (2) ни очиб чиксак:

$$p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + p'(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0$$

бундан куринадиким, узига кушма дифференциал тенгламада  $y'$  олдидаги коэффициент  $y''$  олдидаги коэффициентнинг хосиласига тенгдир.

**Хосса1** Хар қандай иккинчи тартибли бир жинсли чизикли тенгламани узига кушма бўлган дифференциал тенгламага келтириш мумкин.

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (3)$$

дифференциал тенглама берилган бўлсин.  $P_0(x) \neq 0$ .

(3) тенгламанинг хар иккала томонини  $\mu(x)$  га купайтирганда, у узига кушма бўлган дифференциал тенгламага айлансин, яъни куйидаги шарт бажарилсин.

$$(\mu P_0)' = \mu P_1$$

Бундан  $\mu' P_0 + \mu P_0' = \mu P_1$ ,  $\mu' P_0 = \mu(P_1 - P_0')$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_1 - P_0'}{P_0} dx = -\frac{P_0'(x)}{P_0(x)} dx + \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx$$

интегралласак

$$\ln \mu = -\ln P_0 + \int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx + C, \quad C = 0$$

$$\mu = \frac{1}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx}$$

$$P_0(x) \cdot \frac{1}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} y'' + P_1(x) \frac{1}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} + \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} y = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} \frac{dy}{dx} \right) + \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} y = 0$$

бунда 
$$p(x) = e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx} \quad (6)$$

$$q(x) = \frac{P_2(x)}{P_0(x)} e^{\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx}$$

деб олсак (2) тенгламага эга буламыз (6) дан куринадики  
 $p(x) > 0$ .

**Мисол.** Бессель тенгласини узиға кушма булган дифференциал тенгламага келтиринг

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Бу ерда  $p_0(x) = x^2$   $p_1(x) = x$   $p_2(x) = x^2 - n^2$

$$p(x) = e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} = e^{\int \frac{x}{x^2} dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x$$

$$q(x) = \frac{p_2(x)}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx} = \frac{x^2 - n^2}{x^2} \cdot x = x - \frac{n^2}{x}$$

$$\frac{d}{dx} \left( x \frac{dy}{dx} \right) + \left( x - \frac{n^2}{x} \right) y = 0$$

Бу Бессель тенгласига кушма булган дифференциал тенгламадир.

**Хосса 2.** Иккинчи тартибли бир жинсли чизикли тенгламани эрки узгарувчини алмаштириш ёрдамида уни хамма вақт

$$y'' + Q(t)y = 0 \quad (8)$$

курунишга келтириш мумкин.

Бунда  $Q(t) \in C(I)$   $I = (a; b)$

Фараз этайлик иккинчи тартибли дифференциал тенглама узиға кушма холга келтирилган булсин.

$$\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = 0 \quad (9)$$

Бунда  $t = \int \frac{dx}{p(x)}$

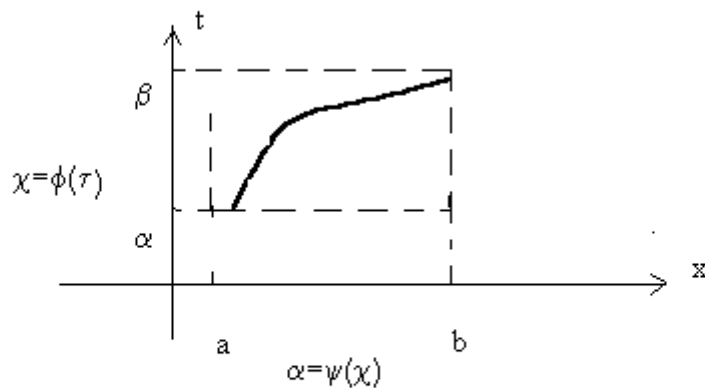
Алмаштиришни оламыз.

(16) га асосан

$$p(x) \neq 0, \quad p(x) > 0 \quad \text{булгани учун}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{p(x)} > 0 \quad \text{га эга буламиз.}$$

Бундан  $t$  узгарувчи  $x$  нинг монотан усувчи функцияси эканлиги келиб чиқади. Бундан чиқадиким,  $x$  ҳам  $t$  нинг узлуксиз ва дифференциалланувчи функцияси сифатида  $I = (a; b)$  интегралга мос келган  $I_1 = (\alpha, \beta)$  интервалда аникланади.



Уни  $x = \varphi(t)$  (10)

десак  $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{dy}{dt}$  бажарилади.

У холда  $\frac{d}{dx} \left( p \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( p(x) \cdot \frac{1}{p(x)} \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{p(x)} \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right)$  (11)

(11) га асосан (9)  $\frac{1}{p(x)} \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) + q(x)y = 0$  (10)ни эътиборга олсак кейинги

тенгламани

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Q(t)y = 0$$

куринишда ёза оламиз.

Бунда  $Q(t) = p(\varphi(t))q(\varphi(t))$

**Мисол.**  $xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0$

$$\mu = \frac{1}{x} \ell^{\frac{dx}{2x}} = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{2} \ln(x)} = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$x^{\frac{1}{2}} y'' + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} y' - x^{-\frac{1}{2}} y = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( x^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{dx} \right) - x^{-\frac{1}{2}} y = 0$$

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{d}{dt} \left( \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dy}{dt} \right) - x^{-\frac{1}{2}} y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - y = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^t = c_1 e^{-2\sqrt{x}} + c_2 e^{\sqrt{2}x}$$

**Хосса 3.** Иккинчи тартибли бир жинсли чизикли тенгламани, номаълум функцияни чизикли алмаштириш ёрдамида.

$$z'' + I(x)z = 0$$

куринишга келтириш мумкин.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (12)$$

$$\text{тенгламада} \quad y = u(x)z \quad (13)$$

алмаштиришни оламиз. Бундан

$$y' = uz' + u'z \quad y'' = uz'' + 2u'z' + u''z$$

Бу кийматларни (12) га куйсак

$$\begin{aligned} uz'' + 2u'z' + u''z + p(x)(uz' + u'z) + q(x)uz &= 0 \\ uz'' + (2u' + p(x)u)z' + (u'' + p(x)u' + q(x)u)z &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$$z'' + \left( \frac{2u'}{u} + p(x) \right) z' + \frac{1}{u} (u'' + p(x)u' + q(x)u) z = 0$$

$u(x)$  ихтиёрий функция булгани учун уни шундай танлаб оламизким

$$\frac{2u'}{u} + p(x) = 0 \quad \text{бажарилсин.}$$

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2} p(x) dx \quad \ln|u| = -\frac{1}{2} \int p(x) dx \quad u = e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

$$\text{бундан} \quad u' = -\frac{1}{2} p(x) e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

$$u'' = -\frac{1}{2} p'(x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} + \frac{1}{4} p^2(x) e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx}$$

Бу кийматларни (14) га куйсак



$$z'' + e^{\frac{1}{2} \int p(x) dx} \times \left[ -\frac{1}{2} p'(x) e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} + \frac{1}{4} p^2(x) e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} + p(x) \left( -\frac{1}{2} p(x) \right) e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} + q(x) e^{-\frac{1}{2} \int p(x) dx} \right] z = 0$$

$$z'' + (q(x) - \frac{1}{2} p'(x) - \frac{1}{4} p^2(x)) z = 0 \quad z'' + I(x) z = 0$$

$$I = q(x) - \frac{1}{2} p'(x) - \frac{1}{4} p^2(x)$$

Бунга (12) тенгламанинг инварианти дейилади.

Агар инвариант узгармас сонга ёки  $I = \frac{c}{(x+a)^2}$  курунишга эга булса у холда иккинчи

тартибли чизикли дифференциал тенгламани хамма вақт интеграллаш мумкин. Чунки бу холда (12) тенглама ё коэффициентлари узгармас тенгламага ёки Эйлер тенгласига келтирилади.

Мисол.  $xy'' + 2y' + xy = 0 \quad y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$

$$q(x) = 1; \quad p(x) = \frac{2}{x}$$

$$I = 2 - \frac{1}{2} \left( -\frac{2}{x^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{2}{x} \right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = 1$$

$$z'' + z = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad z = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$u = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{2}{x} dx} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x} \quad y = uz = \frac{1}{x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

**Иккинчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламани тебранмас ва тебранувчи ечимлари.**

Таккослаш теоремаси

Коэффициентлари узгармас булган, иккита иккинчи тартибли

$$y'' - a^2 y = 0 \quad (1)$$

$$y'' + a^2 y = 0 \quad (2)$$

дифференциал тенгламалар берилган булсин.

Бунда  $a = \text{const}$

Маълумки (1) тенгламанинг хусусий ечимлари  $y_1 = e^{-ax}$ ,  $y_2 = e^{ax}$

дан иборат булиб

Унинг умумий ечими  $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$  дан иборат.

Унинг нолини топамиз

$$c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax} = 0 \quad a > 0 \quad c_1 c_2 < 0$$

$$c_1 + c_2 e^{2ax} = 0 \quad e^{2ax} = -\frac{c_1}{c_2} \quad 2ax = \ln \left| -\frac{c_1}{c_2} \right|$$

$$x = \frac{1}{2a} \ln \left| -\frac{c_1}{c_2} \right|$$

яъни (1) тенгламанинг ечими  $(-\infty, \infty)$  да биттадан ортик нолга эга эмас.

(2) тенгламанинг умумий ечими  $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax = A \sin(ax + \varphi)$

нинг нолини топамиз:

$$A \sin(ax + \varphi) = 0 \quad ax_k + \varphi = \pi k$$

$$x_k = \frac{\pi k}{a} - \frac{\varphi}{a} \quad x_{k+1} - x_k = \frac{\pi(k+1)}{a} - \frac{\pi k}{a} = \frac{\pi}{a}$$

яъни (2) тенглама  $(-\infty, \infty)$  ораликда чексиз куп нолларга эга булиб, кетма-кет иккита нол орасидага масофа  $\frac{\pi}{a}$  га тенг.

Узунлиги  $\frac{\pi}{a}$  дан катта булган хар бир ораликда (2) тенгламанинг ихтиёрий ечимининг битта ноли этади, узунлиги  $\frac{2\pi}{a}$  дан катта булган ихтиёрий интервалда эса 2 та ноли ётади.

**Таъриф.** Агар дифференциал тенгламанинг ечими берилган

ораликда биттадан ортик нолга эга булмаса, бундай ечимга тебранмас ечим дейилади.

Агар бу ечим етарли катта ораликда 2 тадан ортик нолга эга булса, бундай ечимга тебранувчи ечим дейилади.

Маълумки хар кандай иккинчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламани.

$$y'' + p_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

$$\text{ни} \quad y'' + p(x)y = 0 \quad (3)$$

куринишга келтириш мумкин.

**Теорема1.** Агар  $(a, b)$  оралигининг барча нукталарида  $p(x) \leq 0$  булса у, холда (3) тенгламанинг хамма ечимлари бу ораликда тебранмас булади.

**Исбот.** Аксинча фараз этайлик, (3) тенгламанинг ихтиёрий  $y_1(x)$  ечими иккита нолга эга булсин. Бу нолларни  $x_0, x_1$  билан белгилаймиз.

Масаланинг аниклиги учун  $x_0 < x_1$  ва  $(x_0, x_1)$  ораликда  $y_1(x)$  ечим бошка нольга эга булмасин.

У холда узлуксиз  $y_1(x)$  функция бу ораликда уз ишорасини узгартирмайди. хамма вақт бу ораликда уз ишорасини узгартирмайди. Хамма вақт бу ораликда  $y_1(x) > 0$  деб олиш мумкин (акс холда  $-y_1(x)$  ечимни олар эдик). У холда  $y_1'(x) > 0$  чунки  $x_0$

нинг унғ томонида  $y_1(x)$  усувчи функция булиб,  $y_1'(x_0) \neq 0$  акс холда  $y_1(x) \equiv 0$  булар эди (3) тенгламадан.

$$y'' = -p(x)y \Rightarrow y_1'' = -p(x)y_1 > 0$$

яъни иккинчи хосила  $(x_0, x_1)$  ораликда мусбат булгани учун,  $y_1'(x)$  бу ораликда камаювчидир  
яъни

$$y_1'(x) \geq y_1'(x_0) \quad (x_0 < x \leq x_1)$$

У холда чекли ортирма хакидаги теоремага асосан

$$y_1(x_1) - y_1(x_0) = y_1'(\xi)(x_1 - x_0)$$

Бу тенгликнинг чап томони нольга тенг булиб, унғ томони эса нолдан фаркли бунинг булиши мумкин эмас. Бу карама -каршилиқ курсатидиким  $y_1(x)$  ечим курилайтган ораликда тебранмас ечимдир.

### Штурм теоремаси

Маълумки  $y'' + a^2 y = 0$  тенглама 2 та чизикли боглик булмаган

$$y_1 = \cos ax \quad y_2 = \sin ax$$

ечимларга эга булиб, бу ечимлардан бирини кетма-кет иккита ноллари орасида иккинчи ечимнинг факат битта ноли ётади.

Бундай хоссага, хар кандай иккинчи тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг чизикли боглик булмаган

иккита тебранувчи ечимларга эга булади.

**Штурм теоремаси.** Иккинчи тартибли бир жинсли

$$y'' + p(x)y = 0 \quad (3)$$

дифференциал тенгламанинг иккита чизикли боглик булмаган тебранувчи ечимларининг ноллари бир-бирини уз ора ажратади.

**Исбот.** Фараз этайлик  $y_1(x)$  ва  $y_2(x)$  (3) тенгламанинг иккита чизикли боглик булмаган тебранувчи ечимлари булсин ва  $y_1(x)$  ечимнинг иккита кетма-кет ноли  $x_0$  ва  $x_1$  булиб,  $[x_0, x_1]$  ораликда

$y_1(x)$  бошка нольга эга булмасин.

Яъни  $y_1(x) \neq 0 \quad x_0 < x < x_1$

Исбот этамиким  $(x_0, x_1)$  ораликда факат битта  $\bar{x}$  нукта мавжудким, бу нуктада  $y_2(\bar{x}) = 0$  булади. Тескарисинча фараз этайлик  $x_0 < \bar{x} < x_1$  ораликдаги нукта учун

$$y_2(\bar{x}) \neq 0 \text{ булсин.}$$

Масаланнинг аниклиги учун  $(x_0, x_1)$  да  $y_2(x) > 0$  булсин.

$[x_0, x_1]$  оралик охирида  $y_2(x)$  нолга тенг булмайди, яъни  $y_1(x_0) \neq 0 \quad y_2(x_0) \neq 0$  акс, холда Вронскиан

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \quad (4)$$

$x_0$  ва  $x_1$  нуктада нолга тенг булар эди. Бунинг булиши мумкин эмас, чунки  $y_1(x)$  ва  $y_2(x)$  лар чизикли боглик эмас.

Демак Вронский детерминант бу ораликда уз ишорасини узгартирмайди. Шунинг учун  $W(x) > 0$  деб олиш мумкин  $[x_0, x_1]$  да.

(4) нинг хар иккала томонини  $y_2^2(x)$  га буламиз.

$$\frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_2^2} = \frac{W(x)}{y_2^2} \Rightarrow -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{W(x)}{y_2^2}$$

$y_2 > 0$  булгани учун, бу тенгликнинг унг томони  $x$  ни узлуксиз функцияси булади. Кейинги тенгликни хар иккала томонини  $x_0$  дан  $x_1$  ораликда интеграллаймиз:

$$-\left(\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right)_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{W(x)}{y_2^2(x)} dx$$

Бу кейинги тенгликнинг чап томони нольга тенг булиб, унг томони эса мусбатдир.

Бу карама-каршилиқ курсатидиким, шундай  $\bar{x}$  нукта ( $x_0 < \bar{x} < x_1$ ) мавжудким бу нуктада  $y_2(\bar{x}) = 0$ . Бундай нукта ягонадир аксинча фараз этайлик  $y_2(x)$  иккита  $\bar{x}_0, \bar{x}_1$  нолга эга булсин бунда  $x_0 < \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < x_1$ .

$y_1$  билан  $y_2$  уринларини алмаштирсак,  $\bar{x}_0$  билан  $\bar{x}_1$  ораликда  $y_1(x)$  нинг битта ноли булар эди. Бу эса  $y_1(x)$  иккита кетма-кет  $x_0, x_1$  нолга эга деган шартга карама каршидир.

Штурм теоремасига мисол килиб,  $y'' + y = 0$  тенгламани олиш мумкин. Бу тенгламанинг иккита  $y_1 = \cos x$ ,  $y_2 = \sin x$  чизикли боглик булмаган ечимларининг ноллари алмашилиб келади.

### Таккослаш теоремаси

$$y'' + p_1(x)y = 0 \quad (1)$$

$$z'' + p_2(x)z = 0 \quad (2)$$

тенгламалари берилган булсин. Бунда  $p_1(x)$  ва  $p_2(x)$  функциялар  $(a, b)$  ораликда узлуксиз ва бу ораликда

$$p_1(x) \leq p_2(x)$$

шарти бажарилсин. У холда биринчи тенгламанинг ихтиёрий  $\bar{y}(x)$  ечимининг иккита кетма-кет  $x_0, x_1$  ноллари орасида, иккинчи тенгламанинг ихтиёрий  $\bar{z}(x)$  ечимининг ҳеч булмаганда битта ноли этади.

**Исбот.** Фараз этайлик  $x_0$  ва  $x_1$  ечимнинг иккита кетма-кет ноли булсин. Исбот этамизким, шундай  $x^*$  нукта мавжудким, унинг учун  $(x_0 < x^* < x_1)$  булади. Тескарисини фараз этамиз  $(x_0, x_1)$  ораликда  $\bar{z}(x)$  нинг бирорта ҳам ноли булмасин, яъни  $\bar{z}(x) \neq 0$ . Аниклик учун  $(x_0, x_1)$  ораликда  $\bar{y}(x) > 0$ ,  $\bar{z}(x) > 0$  булсин.

У холда  $\bar{y}(x)$ ,  $x_0$  нинг унги томонида усувчи ва  $x_1$  нинг чап томонида камаювчи булади.

Демак

$$\bar{y}'(x_0) > 0, \quad \bar{y}'(x_1) < 0$$

$\bar{y}(x)$  ва  $\bar{z}(x)$  ечимларни (1) ва (2) тенгламага олиб бориб куйсак

$$\begin{aligned} \bar{y}'' + p_1(x)\bar{y} &\equiv 0 \\ \bar{z}'' + p_2(x)\bar{z} &\equiv 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Буларнинг биринчисини  $\bar{z}(x)$  га, иккинчисини  $\bar{y}(x)$  га купайтириб, биринчисидан иккинчисини хадлаб айирсак

$$\begin{aligned} \bar{y}''\bar{z} - \bar{y}\bar{z}'' &= (p_2(x) - p_1(x))\bar{y}\bar{z} \quad \text{ёки} \\ (\bar{y}'\bar{z} - \bar{y}\bar{z}')' &= (p_2(x) - p_1(x))\bar{y}\bar{z} \end{aligned}$$

Бу кейинги тенгликни  $x_0$  дан  $x_1$  оралигида интегралласак

$$(\bar{y}'\bar{z} - \bar{y}\bar{z}') \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} (p_2(x) - p_1(x))\bar{y}\bar{z} dx \quad (4)$$

га эга буламиз.

Лекин  $\bar{y}'(x_0) > 0$ ,  $\bar{y}'(x_1) < 0$ ,  $\bar{z}'(x_0) > 0$ ,  $\bar{z}'(x_1) > 0$ , булгани учун (4)нинг чап томини манфий булиб, унги томони эса мусбатдир.

Бу карама каршилиқ курсатадими,  $(x_0, x_1)$  ораликда шундай  $x^*$  нукта топиладими, бу нуктада  $\bar{z}(x^*) = 0$ .

Шунинг билан бирга куйидаги теоремани исбот этдик.

Агар  $x_0$  (1) ва (2) тенгламанинг  $\bar{y}(x)$  ва  $\bar{z}(x)$  ечимларининг умумий ноли булиб,  $x_0$  дан кейинги  $\bar{y}(x)$  ечимнинг  $x_1$  ноли орасида  $p_1(x) < p_2(x)$  шартини каноатлантирувчи нукталар мавжуд булса, бундан ташқари  $p_2(x) - p_1(x)$  манфий булмаса у холда  $\bar{z}(x)$  ечимнинг  $x_0$  дан кейинги ноли  $x_1$  нинг чап томонида ётади.

**Натижа.** Фараз этайлик  $y'' + p(x)y = 0$  тенглама берилган булсин. бунда  $p(x) > 0$  булиб,  $p(x) \in C_{(a,b)}$  да

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} p(x) = M, \quad \min_{x \in [\alpha, \beta]} p(x) = m \quad M > 0, \quad m > 0 \quad \text{булсин.}$$

У холда тривиал булмаган тенгламанинг ихтиёрий  $y(x) \neq 0$  ечимининг иккита кетма-кет ноллари орасидаги масофа  $\rho$

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

тенгсизликни каноатлантиради.

Бунинг исботи учун

$$\begin{cases} z'' + mz = 0 \\ y'' + p(x)y = 0 \end{cases} \quad m < p(x) \quad \rho \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

$$y_1 = \cos \sqrt{m}x, \quad y_2 = \sin \sqrt{m}x$$

$$\sin \sqrt{m}x = 0 \quad \sqrt{m}x = \pi k \quad k = 1 \quad x = \frac{\pi}{\sqrt{m}}$$

$$\begin{cases} y'' + p(x)y = 0 \\ z'' + Mz = 0 \end{cases} \quad M > p(x) \quad \rho \geq \frac{\pi}{\sqrt{M}} \quad y_2 = \sin \sqrt{M}x$$

$$\sin \sqrt{M}x = 0 \quad \sqrt{M}x = \pi k \quad k = 1 \quad x = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$$

Теорема 1 ни таккослаш теоремасидан фойдаланиб исботлаш мумкин.

**Натижа 1.** Агар  $y'' + p(x)y = 0$  тенгламада  $p(x) \leq 0$  булса, у холда унинг ҳамма ечимлари тебранмасдир.

**Исбот.** (1), (2) тенгламада  $p_1(x) = p(x)$ ,  $p_2(x) = 0$  деб оламиз. Тескарисинча фараз этамиз (1) тенгламанинг ихтиёрий  $y(x)$  ечими иккита кетма-кет  $x_0, x_1$  нолларга эга булсин. У холда  $[x_0, x_1]$  ораликда  $z''(x) = 0$  тенгламанинг ихтиёрий ечими нолга айланиши зарур.

Бунинг булиши мумкин эмас. Масалан  $z(x) \equiv 1$  ечим учун.

Штурм теоремасини ҳам таккослаш теоремасидан фойдаланиб исботлаш мумкин.

**Натижа 2.**  $y'' + p(x)y = 0$  тенгламанинг чизикли боглик булмаган тебранувчи ечимларининг ноллари навбатлашиб келади.

Бошқача айтганда  $y_1(x)$  ечимнинг ихтиёрий иккита кетма-кет ноли орасида  $y_2(x)$  ечимнинг битта ноли ётади.

**Исбот.**  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  тенгламанинг чизикли боглик булмаган ечимлари булсин. Улар умумий нолга эга булиши мумкин эмас, чунки  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$  булганда эди, буларнинг Вронский детерминанти  $x_0$  нуктада нолга тенг булар эди. Бунинг булиши мумкин эмас чунки  $y_1(x)$  ва  $y_2(x)$  чизикли боглик эмас.

Фараз этайлик  $x_1, x_2$ ,  $y_1(x)$  нинг кушни ноллари булсин. Таккослаш учун (1), (2) тенгламада

$$p_1(x) = p_2(x) = p(x)$$

деб оламиз.

Таккослаш теоремасига асосан  $y_1(x)$  ечимнинг  $x_1$  ва  $x_2$  ноллари орасида  $y_2(x)$  ечимнинг  $x_3$  ноли ётади.

Агар  $y_2(x)$  ечим яна битта  $x_4 \in (x_1, x_2)$  нолга эга булса эди, исботлаганимизга асосан  $y_1(x)$  ечим  $x_3$  ва  $x_4$  ноллар орасида нолга эга булар эди. Бунинг булиши мумкин эмас чунки  $x_1, x_2$  кушни ноллар.

**Мисол.**

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad \text{Бессель тенгламасини} \quad 0 < x < +\infty \quad \text{ораликда}$$

караймиз.  $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$  алмаштириш ёрдамида уни

$$z'' + \left( 1 - \frac{n^2 - \frac{1}{4}}{x^2} \right) z = 0 \quad (6)$$

куринишга келтирамиз.

Бунда  $z$  олдидаги коэффициент  $n^2 < \frac{1}{4}$  булганда бирдан катта,  $n^2 > \frac{1}{4}$  булганда бирдан кичик булади.

(6) тенгламани

$$y'' + y = 0$$

тенглама билан таккослаб, Бессель функциясининг кетма-кет ноллари орасидаги масофа  $\rho$ ,

$-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$  да  $\pi$  дан кичик ( $\rho < \pi$ ) ва  $n > \frac{1}{2}$  ва  $n < -\frac{1}{2}$ , да  $\pi$  дан катта булади ( $\rho > \pi$ )

$n = \pm \frac{1}{2}$  да Бессель функциясининг кетма-кет ноллари орасидаги масофа  $\rho = \pi$  га тенг булади.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Иккинчи тартибли дифференциал тенгламанинг битта ечими берилган булса, унинг умумий ечимини қандай топилади?
2. Узига - кушма тенглама деб, қандай тенгламага айтилади?
3. Иккинчи тартибли тенгламани, эркин узгарувчини алмаштириш ёрдамида уни соддалаштиринг?
4. Инвариант ёрдамида иккинчи тартибли дифференциал тенгламани соддалаштиринг?
5. Дифференциал тенгламанинг тебранувчи ва тебранмас ечимлари қандай аникланади?
6. Таккослаш теоремасини исботланг?
7. Тенглама ечимининг иккита кетма-кет ноллари орасидаги масофани топинг?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Иккинчи тартибли тенгламани, эркин узгарувчини алмаштириш ёрдамида уни соддалаштиринг?
2. Инвариант ёрдамида иккинчи тартибли дифференциал тенгламани соддалаштиринг?
3. Дифференциал тенгламанинг тебранувчи ва тебранмас ечимлари қандай аникланади?

### 1.3.2-в. ОЎзаки сўров учун саволлар

1. Таккослаш теоремасини исботланг?
2. Тенглама ечимининг иккита кетма-кет ноллари орасидаги масофани топинг?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлид, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўйимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.12. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

### 1.4.2. "Инсерт" техникаси қоидалари

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- "Инсерт" жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:

Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;

Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;

Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;

Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

### **МАЪРЎЗА - 23.**

**Мавзу: Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси**

#### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан: Оддий дифференциал тенгламалар**

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Чизикли тенгламалар системаси, биржинсли ва биржинсли булмаган тенгламалар системаси, фундаментал ечимлар системаси, система учун Остроградский-Лиувилл формуласи, хусусий ечим, умумий ечим.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;



- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўзбеки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиқ бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини таркатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Якунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Чизикли тенгламалар системаси, биржинсли ва биржинсли булмаган тенгламалар системаси, фундаментал ечимлар системаси, система учун Остроградский-Лиувилл формуласи, хусусий ечим, умумий ечим.

#### 1.3.1. Маъруза матни

**ТАЪРИФ.** Чизикли дифференциал тенгламалар системаси деб, тенгламада катнашаётган номаълум функциялар ва уларнинг ҳосилалари биринчи даражада булган тенгламаларга айтилади.

Чизикли дифференциал тенгламалар система (ч.д.т.с.) нинг каноник куруниши

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j + f_i(x) \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

дан иборат.

Бунда  $P_{ij}(x)$ ,  $f_i(x)$  лар курилатган ораликда  $x$ -нинг узлуксиз функцияларидир.

(1) системани векторли равишда

$$\frac{dy}{dx} = A(x)Y + f(x) \quad (2)$$

курунишда ёзиш мумкин. Бунда  $A(x)$  матрица функция,  $f(x)$  вектор-функция.

$$A(x) = \begin{pmatrix} P_{11}(x) & P_{12}(x) & \dots & P_{1n}(x) \\ P_{21}(x) & P_{22}(x) & \dots & P_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1}(x) & P_{n2}(x) & \dots & P_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \dots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = colon(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = colon(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}$$

$f(x)$  координатлари,  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  булган вектор-функция.

Агар (1) системада, курилатган ораликдаги  $x$  нинг хамма кийматлари учун  $f_i(x) \neq 0$  булмаса, (1) системага биржинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси дейилади.

Агар  $f_i(x) = 0$  булса,

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j \quad (3) \quad (i = \overline{1, n})$$

га, биржинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси дейилади.

Бир жинсли чизикли дифференциал

**тенгламалар системаси.**

Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси берилган булсин

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

Куйидаги теоремаларни осонлик билан исботлаш мумкин.

**ТЕОРЕМА 1.** Агар  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$  лар (1) системанинг ечимлари булса, у холда  $cy_{11}, cy_{12}, \dots, cy_{1n}$  ( $c = const$ ) лар хам (1) системанинг ечимлари булади.

**ТЕОРЕМА 2.** Агар  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$  ва  $y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}$  лар (1) системанинг ечимлари булса, у холда  $y_{11} + y_{21}, y_{12} + y_{22}, \dots, y_{1n} + y_{2n}$  лар хам (1) системанинг ечимлари булади.

Фараз этайлик (1) системанинг хусусий ечимлари

$$\begin{array}{cccc} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{array} \quad (2)$$

булсин.

Агар бу хусусий ечимлардан тузилган

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

детерминант нолга тенг булмаса, (2) ечимлар системасига, (1) системанинг фундаментал ечимлар системаси (фес) дейилади.

**ТЕОРЕМА 3.** Агар берилган дифференциал тенгламалар системасининг коэффицентлари курилатган ораликда узлуксиз булсалар, бу холда системанинг бу ораликда аникланган фундаментал ечимлар системаси мавжуддир.

**ИСБОТ.**  $b_{ik}$  ( $i, k = \overline{1, n}$ ) сонларидан  $n^2$  тасини шундай танлаб оламизки, улардан тузилган детерминант нолга тенг булмасин, яъни

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

(1) системанинг  $n^2$  та  $y_{ik}(x)$  хусусий ечимларининг шундай танлаб оламизким, улар  $x = x_0$  да  $y_{ik}(x) = b_{ik}$  бошлангич шартларни каноатлантирсин. Хусусий ечимлар курилатган ораликда узлуксиз функциялардан иборат. (4) га асосан улардан тузилган детерминант нолга тенг булмагани учун, бу хусусий ечимлар (1) системасининг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

**ТЕОРЕМА 4.** Агар курилатган ораликнинг бирор  $x_0$  нуктасида  $W(x_0) \neq 0$  булмаса, у холда ораликнинг хамма нукталарида булмайди  $W(x) \neq 0$ .

**ИСБОТ.** Теоремани исботи учун (3) детерминантнинг устун элементлари буйича хосилани оламиз.

Маълумки  $n$ -тартибли детерминантнинг хосиласи  $n$ -та  $n$ -тартибли детерминантлар йигиндисига тенг булиб, уларнинг биринчисида факат биринчи устун элементларининг хосиласи олиниб, колган элементлар уз холига колади, иккинчи детерминантида иккинчи устун элементларининг хосиласи олиниб, колган элементлар уз холига колади ва хоказо, яъни

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y'_{1i} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y'_{2i} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y'_{ni} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

бундаги  $y'_{ki}$  лар урнига (1) системадан

$$\frac{dy_{ki}}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_{kj}$$

кийматларни келтириб куйсак,

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & P_{ij}(x)y_{1j} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & P_{ij}(x)y_{2j} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & P_{ij}(x)y_{nj} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

бу охирги детерминант  $i \neq j$  булмаганда у нолга тенг булиб,  $i=j$  булганда  $P_{ii}(x)W(x)$  га тенг булади.

$$W'(x) = \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)W(x)$$

Бундан 
$$\frac{dW(x)}{W(x)} = \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)dx$$

буни хар иккала томонини  $[x_0, x]$  ораликда интегралласак

$$\ln W(x) \Big|_{x_0}^x = \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)dx \quad \text{ёки}$$

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n P_{ii}(x)dx} \quad (5)$$

Бундан куринадиким, агар  $W(x_0) \neq 0$  булмаса, у холда  $W(x) \neq 0$  булмайди. (5) га система учун Остроградский-Лиувилл формуласи дейилади.

**ТЕОРЕМА 5.** Агар  $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn} \quad (k = \overline{1, n})$  (1) системанинг фундаментал ечимлар системаси булса, у холда (1) системанинг умумий ечими

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n c_k y_{ki} \quad (6) \quad (i = \overline{1, n})$$

дан иборат.

**ИСБОТ.** 1 ва 2 теоремаларга асосан (6), (1) системанинг ечими булади. Унинг умумий ечим эканлигини курсатиш учун ундаги узгармасларни  $-c_k$  шундай аниклаб олиш мумкин булсаким  $x=x_0$  булганда  $y_i(x_0) = y_i^{(0)}$  (7) бошлангич шартларни каноатлантирувчи тенгламанинг хамма хусусий ечимларини аниклаш мумкин булсин  $y_i^{(0)}$  ихтиёрий сон.

(7) ни (6) га олиб бориб куйсак  $c_k$  га нисбатан  $n$ -та биржинсли булмаган чизикли алгебраик тенгламалар системасига эга буламиз.

$$\sum_{k=1}^n c_k y_{ki}(x_0) = y_i^{(0)} \quad (8)$$

Бу системанинг асос детерминанти Вронский детерминантидан иборат булиб, у нолга тенг булмайди. Чунки шартга асосан  $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn}$  лар (1) системанинг фундаментал ечимлар системасидан иборат.

Шунинг учун (8) системадан  $c_k = c_k^*$  лар бир кийматли аникланади  $c_k^*$  ларнинг бу кийматларини (6) га олиб бориб куйсак бошлангич шартларни каноатлантирувчи (1) системанинг хамма хусусий ечимларини аниклаш мумкин.

Масала. Агар  $y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{ki}, \dots, y_{kn}$  фундаментал ечимлар системаси берилган бўлса, унга мос бўлган бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системасини топинг.

Фараз этайлик изланаётган тенглама

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j \quad (9) \quad \text{бўлсин.}$$

Бунда  $P_{ij}(x)$  лар аникланиши керак бўлган номаълум функциялар.

Фундаментал ечимлар системасидан  $i$  чисини (9) тенгламага қуйсак

$$\frac{dy_{ki}}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_{kj} \quad (10)$$

айниятига эга бўламиз. Бу эса  $P_{ij}(x)$  ларга нисбатан  $n$  номаълумли  $n$  та тенгламалар системасидан иборатдир. Бу системанинг асос детерминанти Вронский детерминантдан иборат бўлгани учун; ундан  $P_{ij}(x)$  лар бир қийматли аникланади. Бу топилган  $P_{ij}(x)$  ларни (9) тенглама қуйсак изланган тенгламага эга бўламиз.

Буни детерминант шаклида ҳам ёзиш мумкин

$$\begin{vmatrix} \frac{dy_i}{dx} & \frac{dy_{1i}}{dx} & \frac{dy_{2i}}{dx} & \dots & \frac{dy_{ni}}{dx} \\ y_1 & y_{11} & y_{21} & \dots & y_{n1} \\ - & - & - & - & - \\ y_n & y_{1n} & y_{2n} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Мисол.  $y_{11}=x+1$   $z_{12}=x$   
 $y_{21}=2$   $z_{22}=x$

икки номаълумли  $y, z$  тенгламаларнинг фундаментал ечимлар системаси берилган бўлса, тенгламани узини аниклаш.

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & 1 & 0 \\ y & x+1 & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{dz}{dx} & 1 & 1 \\ y & x+1 & 2 \\ z & x & x \end{vmatrix} = 0$$

$y_{ij}$   $j$ -номаълум функция,  $i$ -ечими

$$x(x+1)\frac{dy}{dx} + 2z + 0 - 0 - 2x\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-1} - \frac{2z}{x(x-1)} \\ \frac{dz}{dx} = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-x}\right)z = \frac{z}{x} \end{cases}$$

$$x(x+1)\frac{dz}{dx} + 2z + xy - z(x+1) - 2x\frac{dz}{dx} - xy = 0$$

$$[x(x+1) - 2x]\frac{dz}{dx} = [(x+1) - 2]z$$

$$(x^2 - x)\frac{dz}{dx} = (x-1)z \quad x\frac{dz}{dx} = z$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Чизикли дифференциал тенгламалар деб қандай тенгламага айтилади?
2. Чизикли биржинсли ва биржинсли булмаган тенгламалар системасининг умумий курилишини ёзинг.
3. Фундаментал ечимлар системаси деб, қандай ечимга айтилади?
4. Система учун Остроградский-Лиувилл формуласи қандай бўлади?
5. Фундаментал ечимлар системаси берилган бўлса, системанинг умумий ечими

қандай бўлади?

6. Фундаментал ечимлар системаси берилган бўлса, унга мос тенгламалар системаси қандай тузилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

6. Фундаментал ечимлар системаси деб, қандай ечимга айтилади?
7. Система учун Остроградский-Лиувилл формуласи қандай бўлади?

### 1.3.2-в. ОЎзаки сўров учун саволлар

1. Фундаментал ечимлар системаси берилган бўлса, системанинг умумий ечими

қандай бўлади?

2. Фундаментал ечимлар системаси берилган бўлса, унга мос тенгламалар системаси қандай тузилади?

### 1.3.3. МустаПил иш учун топшириПлар

- *такрорлаш ва машПлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таПлил, Пайта ишлаш, мустаПкамлаш, эслаб Полиш, чуПурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустаПил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект Пўшимчаси; мустаПил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириПлар тузиш; топшириПларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.13. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;



- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
  - Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шунинг учун ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРУЗА 24-25.**

**Мавзу: Бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Узгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системаси.**

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан: Оддий дифференциал тенгламалар**

**Ўқув соати:** 2 + 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Чизикли тенгламалар системаси, бир жинсли ва бир жинсли булмаган тенгламалар системаси, вариациялаш методи, характеристик тенглама, хусусий ечим, умумий ечим.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқутиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқутиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқутиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

## **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

## **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

## **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (даволат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Якунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мнавзу бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

#### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Чизикли тенгламалар системаси, бир жинсли ва бир жинсли булмаган тенгламалар системаси, вариациялаш методи, характеристик тенглама, хусусий ечим, умумий ечим.

##### 1.3.1. Маъруза матни

Бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар системасининг содда куруниши

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j + f_i(x) \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

дан иборат.

Бунда  $P_{ij}(x)$  ва  $f_i(x)$  лар курилатган ораликда  $x$  нинг узлуксиз функциясидир (1) системасининг коэффициентларидан тузилган

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j$$

(2)

системага, (1) тенгламалар системасига мос булган бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси дейилади.

**ТЕОРЕМА.** Агар  $Y_i$  лар (1) системанинг хусусий ечимлари булса унинг умумий ечимини топиш, унга мос булган бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системасини умумий ечимини топишга келтирилади.

**ИСБОТ.**  $y_i = Y_i + z_i$  (3) алмаштиришини оламиз бунда  $z_i$  янги номалум функция.

(3) ни (1) системага куйсак

$$\frac{d(Y_i + z_i)}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)(Y_j + z_j) + f_i(x)$$

ёки

$$\frac{dY_i}{dx} + \frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)Y_j + \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)z_j = f_i(x) \quad (4)$$

лекин

$$\frac{dY_i}{dx} \equiv \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)Y_j + f_i(x)$$

булган учун (4) системадан

$$\frac{dz_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x) z_j \quad (5)$$

га эга буламиз. Бу эса бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системадир. Фараз этайлик (5) системанинг умумий ечими

$$z_i = \sum_{k=1}^n c_k y_{ki}$$

булсин у вақтда (3) га асосан (1) системанинг умумий ечими

$$y_i = Y_i + \sum_{k=1}^n c_k y_{ki}$$

дан иборат булади.

### Система учун узгармасларни вариациялаш методи (Лагранж методи).

**ТЕОРЕМА.** Агар (1) системага мос булган (2) бир жинсли чизикли дифференциал тенглама системани умумий ечими маълум булса, (1) системанинг умумий ечими квадратура ёрдамида аникланади.

**ИСБОТ.** Фараз этайлик (2) системанинг умумий ечими

$$y_i = \sum_{k=1}^n c_k y_{ki} \quad (5)$$

булсин. Бунда  $c_k$  ни  $x$  нинг функцияси деб  $c_k(x)$  ларни аниклаш учун (5) ни (1) га олиб бориб куямиз:

$$\sum_{k=1}^n c'_k(x) y_{ki} + \sum_{k=1}^n c'_k(x) y'_{ki} = \sum_{k=1}^n P_{kj}(x) \sum_{k=1}^n c_k(x) y_{ki} + f_i(x)$$

$$\text{ёки} \quad \sum_{k=1}^n c'_k(x) y_{ki} + \sum_{k=1}^n c'_k(x) [y'_{ki} - \sum_{k=1}^n P_{kj}(x) y_{ki}] = f_i(x) \quad (6)$$

$y_{ki}$  лар (2) системанинг фундаментал ечимлар системаси булгани учун квадрат кавс ичидаги ифода нолга тенг булади у холда (6) дан

бу эса  $c_k^1(x)$  ларга нисбатан  $n$  номаълумли  $n$ - та бир жинсли булмаган тенгламалар системасидан иборат булиб, унинг асос детерминанти  $W(x) \neq 0$  булмгани учун (7) системадан  $c_k^1(x)$  лар бир кийматли аникланади, яъни

$$c_k^1(x) = \sum_{m=1}^n \frac{W_{mk}(x) f_m(x)}{W(x)}$$

бунда  $W_{mk}(x)$  Вронский детерминантининг  $W(x)$ ,  $y_{mk}$  элементининг алгебраик тулдирувчисидир.

Кейинги тенгликнинг  $x_0$  дан  $x$  оралигида интегралласак

$$c_k(x) = \sum_{m=1}^n \int_{x_0}^x \frac{W_{mk}(x)}{W(x)} f_m(x) dx + \gamma_k \quad \gamma_k = \text{const} \quad k = \overline{1, n} \quad (8).$$

ни (5) га куйсак, (1) системанинг умумий ечими

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k y_{ki} + \sum_{k=1}^n y_{ki} \sum_{m=1}^n \int_{x_0}^x \frac{W_{mk}(x)}{W(x)} f_m(x) dx$$

га эга буламиз. Бундаги биринчи сумма (2) системанинг умумий ечими булиб, иккинчи сумма эса (1) системанинг хусусий ечимидир.

Мисол.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - z + \frac{3}{2}x^2 \\ \frac{dz}{dx} = -4y - 2z + 1 + 4x \end{cases}$$

Бунга мос булган бир жинсли тенгламани тузамиз.

$$\begin{cases} y' = y - z \\ z' = -4y - 2z \end{cases}$$

бунинг умумий ечимини топамиз.

$$y' = y - z \quad y'' = y' - z' = (y - z) - (-4y - 2z) = 5y + z$$

$$z = y - y' \quad y'' = 5y + y - y'$$

$$y'' + y' - 6y = 0 \quad \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \lambda_{12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

$$\lambda_{1=-3} \quad \lambda_2 = 2 \quad y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

$$z = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - (-3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{-2x}) = 4c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-3x}$$

$$\begin{cases} y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} \\ z = 4c_1 e^{-3x} - c_2 e^{-2x} \end{cases} \quad (9)$$

(7) системани тузамиз.

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-3x} + c_2'(x)e^{2x} = \frac{3}{2}x^2 \\ 4c_1'(x)e^{-3x} - c_2'(x)e^{2x} = 1 + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{1}{5}e^{-3x} \left( \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1 \right) \\ c_2'(x) = \frac{1}{5}e^{-2x} (-6x^2 + 4x + 1) \end{cases}$$

Энди буларни интеграллаймиз.

$$\int e^{\alpha x} p_m(x) dx = e^{\alpha x} \left[ \frac{p_m(x)}{\alpha} - \frac{p_m'(x)}{\alpha^2} + \frac{p_m''(x)}{\alpha^3} \dots \right]$$

шу формулага асосан

$$c_1(x) = \frac{1}{5}e^{3x} \left[ \frac{\frac{3}{2}x^2 + 4x + 1}{3} - \frac{3x + 4}{9} + \frac{3}{27} \right] + \gamma_1 = \frac{1}{10}e^{3x}(x^2 + 2x) + \wp_1$$

$$c_2(x) = \frac{1}{5}e^{-3x} \left[ \frac{-6x^2 + 4x + 1}{-2} - \frac{-12x + 4}{4} + \frac{-12}{-8} \right] + \gamma_2 =$$

$$= -\frac{1}{5}e^{-2x}(3x^2 + x) + \wp_2$$

$c_1(x)$  ва  $c_2(x)$  ларни (9) га олиб бориб куйсак

$$\begin{cases} y(x) = \gamma_1 e^{-3x} + \gamma_2 e^{2x} - \frac{1}{2} x^2 \\ z(x) = 4\gamma_1 e^{-3x} - \gamma_2 e^{2x} + x^2 + x \end{cases}$$

берилган тенгламанинг умумий ечимига эга буламиз.

### Узгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системаси.

Бундай системанинг содда куриниши

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + f_i(x) \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

дан иборат, бунда  $a_{ij}$  узгармас сонлар.  $f_i(x)$  эса курилайтган ораликда аникланган ва узлуксиз функциядир.

Маълумки, бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топиш учун, унга мос булган бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топишга тугри келади.

Шунинг учун ҳам биз даставвал узгармас коэффициентли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини квадратурасиз топиш усулини караймиз.

Бир жинсли, узгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системаси берилган булсин.

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (2)$$

Маълумки (2) системани, унга эквивалент булган битта  $n$ -тартибли дифференциал тенгламага келтириш мумкин.

Шунинг учун (2) системасининг хусусий ечимларини

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \dots, \quad y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \quad (3)$$

куринишда излаймиз.

Бунда  $\gamma_i$  ва  $\lambda$  лар узгармас сонлардир.

Уларни шундай танлаб оламизки (3), (2) системани каноатлантирсин.

Бунинг учун (2) га (3) олиб бориб куямиз.

$$\lambda \gamma_i e^{\lambda x} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j e^{\lambda x} \quad \text{ёки} \quad \lambda \gamma_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_j \quad \text{буни очиб ёзсак}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \gamma_1 + a_{12} \gamma_2 + a_{13} \gamma_3 + \dots + a_{1n} \gamma_n = 0 \\ a_{21} \gamma_1 + (a_{22} - \lambda) \gamma_2 + a_{23} \gamma_3 + \dots + a_{2n} \gamma_n = 0 \\ a_{n1} \gamma_1 + a_{n2} \gamma_2 + a_{n3} \gamma_3 + \dots + (a_{nn} - \lambda) \gamma_n = 0 \end{cases} \quad (4).$$

Бу  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ , ларга нисбатан бир жинсли алгебраик тенгламалар системасидир. Бу система тривиал булмаган ечимга эга булишлиги учун, унинг асос детерминанти нолга тенг булиши зарур.

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5).$$

(5) га (2) системага мос булган характеристик тенглама дейилади. Унинг илдизларига характеристик сон дейилади.

(5)  $\lambda$  га нисбатан  $n$ - даражали алгебраик тенгламадир

(3), (2) системанинг хусусий ечими булишлиги учун  $\lambda$  (5) характеристик тенгламанинг илдизи булиши керак.

(4) нинг коэффициентларидир ушбу матрицани тузамиз

$$\mu(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \quad (6).$$

а) Фараз этайлик характеристик тенгламанинг  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  илдизлари хакикий ва бир-бирига тенг булмасин.

Агар  $\lambda = \lambda_j$  илдизни (5) га олиб бориб куйсак

$$\Delta(\lambda_j) = 0 \quad (7) \quad \text{булади.}$$

Исбот этамизким  $\lambda = \lambda_j$  кийматда (5) детерминантнинг хеч булмаганда  $n-1$  тартибли манорларидан бири нолга тенг булмайди.

Хакикатан хам  $\lambda = \lambda_j$  характеристик тенгламанинг оддий илдизи булгани учун

$$\left| \frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j} = \Delta'(\lambda_j) \neq 0 \quad (8)$$

нолга тенг булмайди.

Иккинчи томондан

$$\begin{aligned} \Delta'(\lambda) &= \begin{vmatrix} -1 & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{n2} \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & -1 \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & 0 \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \dots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & -1 \end{vmatrix} = - \sum_{k=1}^n \Delta_{kk}(\lambda) \end{aligned} \quad (9)$$

Бунда  $\Delta_{kk}(\lambda)$ ,  $\Delta(\lambda)$  детерминантдаги  $a_{kk} - \lambda$  элементининг алгебраик тулдирувчиси булади. Агар  $\lambda = \lambda_j$  кийматини (9) келтириб куйсак (8) га асосан  $\Delta_{kk}(\lambda_j)$  ларнинг хеч булмаганда бири нолга тенг булмайди, яъни (9) даги  $n-1$  тартибли детерминантлардан хеч булмаганда бири нолга тенг булмайди.

Бундан, (6) матрицанинг ранги  $n-1$  га тенглиги келиб чикади. Яъни (4) системадаги тенгламалардан бири колганларини натижаси эканлиги келиб чикади.

У холда (4) система тривиал булмаган  $\gamma_{j1}, \gamma_{j2}, \dots, \gamma_{jn}$  ечимларга эга . Лекин матрицанинг ранги  $n-1$  га тенг булгани учун, бу илдизлар бир-биридан узгармас сонга фарк килади.

$$\gamma_{j1} = c_j A_{j1}, \quad \gamma_{j2} = c_j A_{j2}, \dots, \gamma_{jn} = c_j A_{jn},$$



Бунда  $A_{ji}$  лар узгармас сонлардир.

Агар  $c_j = 1$  тенг деб, бу кийматларни (3) га куйсак, характеристик тенгламанинг  $\lambda = \lambda_j$  илдизига мос булган (2) системанинг хусусий ечимлари.

$$y_{j1} = A_{j1} e^{\lambda_j x}, \quad y_{j2} = A_{j2} e^{\lambda_j x}, \dots, y_{jn} = A_{jn} e^{\lambda_j x}, \quad (10)$$

га эга буламиз.

Маълумки (2) системанинг хусусий ечимларини бирор узгармас сонга куйайтсак, хосил булган ифода яна берилган системанинг ечими булади.

Шунга кура, характеристик тенгламанинг  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  илдизлари учун юкоридаги мулохазаларни ишлатсак, системанинг  $n$ - та (10) курунишдаги хусусий ечимларини аниклаш мумкин.

Исбот этиш мумкинким, бу топилган хусусий ечимлар, берилган системанинг фундаментал ечимлар системасини ташкил этади.

Мисол

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases} \quad x = \gamma_1 e^{\gamma t} \quad y = \gamma_2 e^{\gamma t} \quad \text{тенглама куйсак}$$

$$\begin{cases} (2 - \lambda)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + (4 - \lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

характеристик тенглама тузамиз

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \begin{cases} \gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 + 3\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_1 = -\gamma_2 \quad \gamma_2 = -1 \quad \gamma_1 = 1$$

$$x_{11} = e^t \quad y_{12} = -e^t \quad |c_1$$

$$\lambda_2 = 5 \quad \begin{cases} -3\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ 3\gamma_1 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \quad \gamma_2 = 3\gamma_1 \quad \gamma_1 = -1 \quad \gamma_2 = 1$$

$$x_{21} = e^{5t} \quad y_{22} = 3e^{5t} \quad |c_2$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 x_{11} + c_2 x_{21} = c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ y(t) = c_1 x_{12} + c_2 x_{22} = -c_1 e^t + 3c_2 e^{5t} \end{cases}$$

б) Фараз этайлик характеристик тенглама  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  комплекс илдизга эга булсин. Характеристик тенгламанинг коэффициентлари хакикий соналардан иборат булгани учун у  $\alpha + i\beta$  га кушма булган  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  комплекс илдизга хам эга булади..

Характеристик тенгламанинг  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  илдизига мос булган (2) системанинг ечими

$$y_j = \gamma_j e^{(\alpha + i\beta)x} = \gamma_j e^{\alpha x} e^{i\beta x} = \gamma_j e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$\gamma_j$  комплекс сон булгани учун уни  $\gamma_j = \lambda_{1j} + i\lambda_{2j}$  курунишда ёзиш мумкин. У холда

$$\begin{aligned}
y_j &= (\gamma_{ij} + i\gamma_{2j})e^{\alpha x}(\cos \beta x + \sin \beta x) = e^{\alpha x}(\gamma_{ij} \cos \beta x - \gamma_{2j} \sin \beta x) + \\
&+ ie^{\alpha x}(\gamma_{ij} \sin \beta x + \gamma_{2j} \cos \beta x) \\
y_{ij} &= e^{\alpha x}(\gamma_{ij} \cos \beta x - \gamma_{2j} \sin \beta x) \\
y_{2j} &= e^{\alpha x}(\gamma_{ij} \sin \beta x + \gamma_{2j} \cos \beta x) \quad (j = \overline{1, n})
\end{aligned}$$

ечимларга эга буламиз. Бундан куринадиким характеристик тенгламанинг бир жуфт комплекс илдизига (2) системанинг 2 та хакикий ечими мос келади.

Мисол 789 (729)

$$\begin{aligned}
\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases} & \quad x = \gamma_1 e^{\lambda t} \quad y = \lambda_2 e^{\lambda t} \\
\begin{cases} (1 - \lambda)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -2\gamma_1 + (3 - \lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} & \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\
\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 & \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm i \quad \lambda_1 = 2 + i \\
\begin{cases} -(1 + i)\gamma_1 + \gamma_2 = 0 \\ -2\gamma_1 + (1 - i)\gamma_2 = 0 \end{cases} & \quad \gamma_2 = (1 + i)\gamma_1 \quad \gamma_1 = 1 \quad \gamma_2 = 1 + i \\
\tilde{x} = e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i \sin t) \\
\tilde{y} = (1 + i)e^{(2+i)t} = e^{2t}(\cos t + i \sin t) + (\cos t + \sin t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x_{11} = e^{2t} \cos t \\ x_{21} = e^{2t} \sin t \end{cases} & \quad \begin{cases} y_{12} = e^{2t}(\cos t - \sin t) \\ y_{22} = e^{2t}(\cos t + \sin t) \end{cases} \Big|_{c_1, c_2} \\
\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t = e^{2t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t) \\ y(t) = e^{2t}[(c_1 + c_2) \cos t + (c_2 - c_1) \sin t] \end{cases}
\end{aligned}$$

в) Фараз этайлик характеристик тенглама каррали илдизларга эга булсин.

У холда системанинг умумий ечимини олдинги методлар билан топа олмаймиз. Лекин бу холда хам унинг умумий ечимини элементар функциялар ёрдамида топиш мумкин.

Узгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламада курган эдиким агар  $\lambda_j$  характеристик тенгламанинг  $k$ - каррали илдизи булса, тенгламанинг бу илдизларига мос булган  $k$  та чизикли боглик булмаган ечимлари мавжуд булади.

Система учун куйидаги теоремани исботсиз келтирамиз.

**ТЕОРЕМА.** Агар  $\lambda_j$  характеристик тенгламанинг  $k$  каррали илдизи булса, бу илдизга мос булган (2) системанинг ечимлари

$$y_1 = p_{k-1}^{(1)}(x)e^{\lambda_j x}, \quad y_2 = p_{k-1}^{(1)}(x)e^{\lambda_j x}, \dots, y_n = p_{k-1}^{(1)}e^{\lambda_j x} \quad (11)$$

куринишда булади.

Бунда  $p_{k-1}^{(i)}(x)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) лар  $x$  га нисбатан даражаси  $k - 1$  дан катта булмаган куп хадлилардир. Бу куп хадлиларнинг хар бирида  $k$  та узгармас сонлар катнашади. Бу купхадлиларнинг хаммасидаги хамма коэффициентлардан  $k$  таси ихтиёрий булиб, колган коэффициентлар шу  $k$  та коэффициентлар оркали ифодаланади. Хусусий холда

$p_{k-1}^{(i)}(x)$  купхаддилар узгармас сонга тенг булиши мумкин. Бу холда  $\lambda_j$  характеристик илдизга мос булган (2) системанинг ечими

$$y_i = \gamma_i e^{\lambda_j x} \quad (i = \overline{1, n}) \quad \text{булади.}$$

Бундаги  $\lambda_i$  сонлардан к таси ихтиёрий булиб, колган  $k - n$  коэффициентлар улар оркали ифодаланади.

Амалиётда  $p_{k-1}^{(i)}(x)$  купхаддиларнинг коэффициентларини топиш учун, уларни берилган (2) системага куйиб, бу купхаддиларнинг коэффициентларига нисбатан тенгламалар системасига эга буламыз. Бу коэффициентлардан к тасини ихтиёрий деб, колган коэффициентларни улар оркали ифодасини топамиз.

Мисол. 811 (751)

$$\begin{cases} x = 2x - y - z & x = \gamma_1 e^{\lambda t} & y = \gamma_2 e^{\lambda t} & z = \gamma_3 e^{\lambda t} \\ y = 2x - y - 2z \\ z = -x + y + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2 - \lambda)\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ 2\gamma_1 - (1 + \lambda)\gamma_2 - 2\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + (2 - \lambda)\gamma_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 2 & -(1 + \lambda) & -2 \\ -1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0 \quad \lambda_{1,2,3} = 1$$

$$\begin{cases} x = (a_1 + a_2 t + a_3 t^2) e^t \\ y = (b_1 + b_2 t + b_3 t^2) e^t \\ z = (q_1 + q_2 t + q_3 t^2) e^t \end{cases}$$

буларни берилган тенглама куйиб, аникмас коэффициентлар методидан фойдалансак  $a_i, b_i, q_i \quad i = 1, 2, 3$  ларга нисбатан тенгламалар системасига эга буламыз.

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 + b_1 + q_1 &= 0 & a_1 - b_1 - q_1 + q_2 &= 0 \\ -a_2 + 2a_3 + b_2 + q_2 &= 0 & a_2 - b_2 - q_2 + 2q_3 &= 0 \\ -a_3 + b_3 + q_3 &= 0 & a_3 - b_3 - q_3 &= 0 \\ -2a_1 + 2b_2 + b_2 + 2q_1 &= 0 \\ -2a_2 + 2b_2 + 2b_3 + 2q_2 &= 0 \\ -2a_3 + 2b_3 + 2q_3 &= 0 \end{aligned}$$

булардан

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 - b_1 - q_1 & a_3 &= 0 & b_3 &= 0 & q_3 &= 0 \\ b_2 &= 2a_1 - 2b_1 - 1q_1 \\ q_2 &= -a_1 + b_1 + q_1 \end{aligned}$$

ечимлар

$$\begin{aligned} x &= [a_1 + (a_1 - b_1 - q_1)t] e^t \\ y &= [b_1 + 2(a_1 - b_1 - q_1)t] e^t \\ z &= [q_1 - (a_1 - b_1 - q_1)t] e^t \end{aligned}$$

хусусий ечимларни топиш

- 1)  $a_1 = 1 \quad b_1 = 0 \quad q_1 = 0$   
 $x_{11} = (1+t)e^t \quad y_{12} = 2te^t \quad z_{13} = -te^t$
- 2)  $a_1 = 0 \quad b_1 = 1 \quad q_1 = 0$   
 $x_{21} = -te^t \quad y_{22} = (1-2t)e^t \quad z_{23} = te^t$
- 3)  $a_1 = 0 \quad b_1 = 0 \quad q_1 = 1$   
 $x_{31} = -te^t \quad y_{32} = -2te^t \quad z_{33} = (1+t)e^t$

Агар да

$$a_1 = c_1 \quad b_1 = c_2 \quad a_1 - b_1 - q_1 = c_3 \quad \text{десак}$$

$$\begin{cases} x(t) = (c_1 + c_3 t)e^t \\ y(t) = (c_2 + 2c_3 t)e^t \\ z(t) = [(c_1 - c_3 - c_3) - c_3 t]e^t \end{cases}$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Бир жинсли булмаган тенгламалар системасининг битта хусусий ечими берилган булса, уни ечиш нимадан иборат?
2. Система учун узгармасларни вариациялаш нимадан иборат?
3. Узгармас коэффициентли тенгламалар системасининг умумий куриниши кандай?
4. Система учун характеристик тенгламани ёзинг.
5. Характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва хар хил булса, системанинг хусусий ечимлари кандай булади?
6. Характеристик тенглама комплекс илдизларга эга булса, унга мос хусусий ечимлар кандай топилади?
7. Характеристик тенглама каррали илдизларга эга булса, унга мос хусусий ечимлар кандай топилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Узгармас коэффициентли тенгламалар системасининг умумий куриниши кандай?
2. Система учун характеристик тенгламани ёзинг.
3. Характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва хар хил булса, системанинг хусусий ечимлари кандай булади?

### 1.3.2-в. ОПзаки сўров учун саволлар

1. Характеристик тенглама комплекс илдизларга эга булса, унга мос хусусий ечимлар кандай топилади?

2.Характеристик тенглама каррала илдизларга эга булса, унга мос хусусий ечимлар кандай топилади?

### 1.3.3. МустаПил иш учун топшириПлар

- *такрорлаш ва машПлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таПлил, Пайта ишлаш, мустаПкамлаш, эслаб Полиш, чуПурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустаПил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект Пўшимчаси; мустаПил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли Полатлар, тестлар, саволлар, топшириПлар тузиш; топшириПларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ.-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амеликин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.14. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## МАЪРЎЗА - 26.

**Мавзу: Матрицалар методи.**

**Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан: Оддий дифференциал тенгламалар**

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Дифференциал тенгламалар системасини векторли куриниши, характеристик тенглама, хусусий ечим, умумий ечим матрицали тенглама, унинг ечими хоссалари.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;

- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасаввур бериш; жавобгарлик тўғрисида тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиқ бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **1 босқич. Ўқув машғулотида кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (даволат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

#### **2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):**



- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини таркатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

## 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Дифференциал тенгламалар системасини векторли қурилиши, характеристик тенглама, хусусий ечим, умумий ечим матрицали тенглама, унинг ечими хоссалари.

### 1.3.1. Маъруза матни

Узгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системаси

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

берилган булсин.

Маълумки (1) системани векторли

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad (2)$$

қурилишда ҳам ёзиш мумкин. Бунда

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

бир устунли матрица ёки  $n$  улчовли вектор устун (2) векторли тенглама учун Коши масаласи

$$y(x_0) = y^0, \quad y^0 = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ - \\ y_n^0 \end{pmatrix} = colon(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$$

(2) тенгламани ечимини

$$y = Be^{\lambda x} \quad (3)$$

куринишда излаймиз. Бунда изламиз. Бунда  $B$ ,  $n \times 1$  тартибли матрица

$$B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

(3) ни (2) га келтириб куйсак

$$B\lambda e^{\lambda x} = AB e^{\lambda x}$$

ёки

$$(A - \lambda E)B = 0 \quad (4)$$

тенглама эга буламиз. Бунда  $E$  бирлик матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & - & 0 \\ 0 & 1 & - & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & 1 \end{pmatrix},$$

тривиал булмаган  $B \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  матрица (4) тенгламани каноатлантириши учун

$$(A - \lambda E) \quad (5)$$

матрицанинг махсус булиши зарур ва етарлидир. Яъни унинг детерминанти

$$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = 0 \quad (6).$$

(6) га (2) системага мос булган харктеристик тенглама дейилади.

сонига  $A$  матрицанинг хос киймати,  $B$  вектор эса  $\lambda$  га мос булган хос вектор дейилади.

(6) харктеристик тенгламанинг хар бир  $\lambda_k$  илдизи учун (4) тенгламадан нольга тенг булмаган

$$B = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(k)} \\ \gamma_2^{(k)} \\ \vdots \\ \gamma_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

матрицани аниклаймиз.

(2) векторли тенгламанинг ихтиёрий  $n$ -та чизикли боглик булмаган

$$Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$$

векторли ечимларга (2) тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси дейилади. Бунда куйидаги холлар булиши мумкин.

1. Храктеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва бир-бирига тенг эмас.

У холда (2) тенглама  $n$ -та ечимларга эга булиб уларни

$$Y_k = B^{(k)} e^{\lambda_k x} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (7)$$

куринишда ёзиш мумкин. Исбот этиш мумкинким булар (2) тенгламанинг фундаментал ечим системасини ташкил этади. У холда (2) тенгламанинг умумий ечими

$$y = \sum_{k=1}^n c_k B^{(k)} e^{\lambda_k x} = \sum_{k=1}^n c_k y_k \quad (8)$$

дан иборат булади.

Мисол  $y' = Ay \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$(A - \lambda E)B = 0 \quad |A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -1 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda_1^2 - 8\lambda + 15 = 0 \quad \lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 5$$

$$(A - \lambda_1 E)B^{(1)} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$3\alpha_1^{(1)} - \alpha_2^{(1)} = 0 \quad 3\alpha_1^{(1)} = \alpha_2^{(1)} \quad \alpha_1^{(1)} = 1 \quad \alpha_2^{(1)} = 3$$

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y_1 = B^{(1)} e^{3t} = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_2 E)B^{(2)} = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \end{pmatrix} = 0$$

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)} \quad \alpha_1^{(2)} = 1 \quad \alpha_2^{(2)} = 1$$

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y_2 = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 хол характеристик тенглама  $\lambda_k = p \pm qi$  комплекс илдизга эга булсин Бу холда (2) тенгламанинг ечими бу илдизга мос булган ечими

$$\overline{y_k} = B^{(k)} e^{(p \pm qi)x} = B^{(k)} e^{px} e^{\pm iqx} = B^{(k)} e^{px} (\cos qx + i \sin qx)$$

$B^{(k)}$  комплекс сон булгани учун уни

$$B^k = B_1^{(k)} + iB_2^{(k)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(k)} \\ \alpha_{12}^{(k)} \\ \alpha_{1n}^{(k)} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \alpha_{21}^{(k)} \\ \alpha_{22}^{(k)} \\ \alpha_{2n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

куринишда ёзиш мумкин  $(A + B)C = AC + BC$  га асосан

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_k &= e^{px} \left[ \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(k)} \\ \gamma_{12}^{(k)} \\ \dots \\ \gamma_{1n}^{(k)} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \gamma_{21}^{(k)} \\ \gamma_{22}^{(k)} \\ \dots \\ \gamma_{2n}^{(k)} \end{pmatrix} \right] (\cos qx + i \sin qx) = \\
&= e^{px} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(k)} \cos qx - \gamma_{21}^{(k)} \sin qx + i(\gamma_{21}^{(k)} \cos qx + \gamma_{11}^{(k)} \sin qx) \\ \gamma_{12}^{(k)} \cos qx - \gamma_{22}^{(k)} \sin qx + i(\gamma_{22}^{(k)} \cos qx + \gamma_{12}^{(k)} \sin qx) \\ \dots \\ \gamma_{1n}^{(k)} \cos qx - \gamma_{2n}^{(k)} \sin qx + i(\gamma_{2n}^{(k)} \cos qx + \gamma_{1n}^{(k)} \sin qx) \end{pmatrix} \\
y_{1k} &= e^{px} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(k)} \cos qx - \gamma_{21}^{(k)} \sin qx \\ \dots \\ \gamma_{1n}^{(k)} \cos qx - \gamma_{2n}^{(k)} \sin qx \end{pmatrix}^{(1)}; \quad y_{2k} = e^{px} \begin{pmatrix} \gamma_{11}^{(k)} \sin qx + \gamma_{21}^{(k)} \cos qx \\ \dots \\ \gamma_{1n}^{(k)} \sin qx + \gamma_{2n}^{(k)} \cos qx \end{pmatrix}^{(2)} \\
y &= c_1 y_{1k} + c_2 y_{2k} = c_1 e^{px} (1) + c_2 e^{px} (2)
\end{aligned}$$

Мисол

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda E)B = 0 \quad |A - \lambda E| = 0 \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 1 + 2i$$

$$(A - \lambda_1 E)B = 0 \quad \begin{pmatrix} 3 - 1 - 2i & -2 \\ 4 & -1 - 1 - 2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(2 - 2i)\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \quad (1 - i)\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 1 - i$$

$$\tilde{y} = B^{(1)} e^{(1+2i)x} = e^x B^{(1)} e^{2ix} = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} (\cos 2x + i \sin 2x) =$$

$$= e^x \begin{pmatrix} \cos 2x + i \sin 2x \\ \cos 2x + \sin 2x + i(\sin 2x - \cos 2x) \end{pmatrix}$$

$$y = c_1 e^x \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \sin 2x - \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$y_1 = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$$

$$y_2 = c_1 e^x (\cos 2x + \sin 2x) + c_2 e^x (\sin 2x - \cos 2x)$$

3 хол. Агар характеристик тенглама  $r$ -каррала  $\lambda_s$  илдизга эга булса, у холда, бу илдизга мос булган (2) тенгламанинг ечими

$$y(x) = \left( B_1^{(s)} + B_2^{(s)}x + B_3^{(s)}x^2 + \dots + B_r^{(s)}x^{r-1} \right) e^{\lambda_s x}$$

дан иборат булади.

Мисол

$$\frac{dy}{dx} = Ay \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda E)B = 0 \quad |A - \lambda E| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda + 1)^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = -1$$

$$y = \left[ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} x \right] e^{-x} = 0$$

буни берилган тенгламага куямиз

$$-\left[ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} x \right] e^{-x} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} 1 - 2 \\ 2 - 3 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} x \right] e^{-x}$$

бундан

$$\begin{cases} -A_1 - A_2x + A_2 = A_1 - 2B_1 + A_1x - 2B_2x \\ -B_1 - B_2x + B_2 = 2A_1 - 3B_1 + 2A_2x - 3B_2x \end{cases}$$

$A_1, A_2$  ихтиёрий

$$-A_1 + A_2 = A_1 - 2B_1 \quad 2B_1 = 2A_1 - A_2$$

$$-A_2 = A_2 - 2B_2 \quad 2B_2 = 2A_2$$

$$-B_1 + B_2 = 2A_1 - 3B_1$$

$$-B_2 = 2A_2 - 3B_2 \quad B_1 = A_1 - \frac{A_2}{2}$$

$$B_2 = A_2$$

$$y = \left[ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 - \frac{A_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \end{pmatrix} x \right] e^{-x} = \left[ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 x \\ \frac{A_2}{2} + A_2 x \end{pmatrix} \right] e^{-x} =$$

$$= c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-x} \begin{pmatrix} 2x \\ 2x - 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = c_1 \quad \frac{A_2}{2} = c_2$$

Энди (2) тенгламанинг  $n$  та чизикли боғлиқ булмаган ечимларидан  $n$  х  $n$   $y(x)$  матрицани тузамиз.

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_{12}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

у холда

$$\frac{dY}{dx} = A(x)Y \quad (9)$$

га матрицали тенглама дейилади.

$$\det Y(x) = W(x) \quad \text{га}$$

Вронский детерминанти дейилади. Агар  $Y(x)$  матрица, (9) матрицали тенгламани каноатлантиса, унга (9) тенгламанинг интегралли ёки фундаментал матрицаси дейилади. (матрицали ечим) Бундан куринадики чизикли дифференциали тенгламалар системасини

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^n P_{ij}(x)y_j \quad \text{ни} \quad \frac{dy}{dx} A(x)y \quad \text{векторли равишда ёки} \quad \frac{dY}{dx} A(x)Y$$

матрицали равишда ёзиш мумкин. Бу тенгламалар орасидаги боғланиш шундан иборатки  $n \times n$   $Y(x)$  матрицали ечимнинг устунлари (2) тенгламанинг узаро чизикли боғлиқ бўлмаган векторли ечимларни ташкил этади.

Агар  $A(x)$  матрица функция, узгармас матрица бўлса.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

узгармас коэффициентли матрицали

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

тенгламанинг ечимини

$$Y = Be^{\lambda x}$$

куринишда излаймиз бунда  $B$   $n + 1$  тартибли матрица

$$B = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

Агар узгармас матрица учун

$$Ah = \lambda h$$

тенглик бажарилса, у холда  $\lambda$  сон  $A$  матрицанинг хос сони (хос киймати),  $h$  векторга эса  $\lambda$  га мос бўлган хос вектор дейилади.

**ТЕОРЕМА.**  $Y(x)$  матрица (9) тенгламанинг фундаментал матрицаси бўлиши  $x \in (\alpha, \beta)$  ораликдаги кийматлар учун

$$\det Y(x) = W(x) \neq 0$$

шартининг бажарилиши зарур ва етарлидир.

**ТЕОРЕМА 2.** Агар  $y_1(x)$  матрица (9) тенгламанинг бирор интервалда аникланган матрицали ечими бўлса у холда  $y_1(x)$ с хам бу тенгламанинг ечими бўлади.

$$\text{Яъни} \quad \frac{d(Y_1 c)}{dx} = A(t)(Y, c)$$

С,  $n \times 1$  тартибли ихтиёрий узгармас матрица ҳақиқатан ҳам

$$\frac{dY_1}{dx} \equiv A(x)Y_1 \quad (10)$$

тенгламанинг икки томонини  $Y_1$  дан С матрицага кўпайтирамиз.

$$\frac{dY_1}{dx} \cdot C = A(x)Y_1 C$$

\С узгармас матрица бўлгани учун

$$\frac{d(Y_1 C)}{dx} = A(x)(Y_1 C)$$

яъни  $Y_1 C$  (9) тенгламани ечими бўлади.

1

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Дифференциал тенгламалар системасини векторли қуринишга келтиринг
2. Хarakterистик тенгламанинг қуриниши.
3. Хarakterистик тенглама, оддий илдизларга комплекс илдизларга, қаррали илдизларга эга бўлса, унга мос хусусий ечимлар қандай топилади.
4. Векторли тенглама билан матрицали тенгламанинг фарқи нимадан иборат.
5. Матрицали тенгламанинг ечимларининг хоссаларини айтинг.

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Хarakterистик тенглама, оддий илдизларга комплекс илдизларга, қаррали илдизларга эга бўлса, унга мос хусусий ечимлар қандай топилади.
2. Векторли тенглама билан матрицали тенгламанинг фарқи нимадан иборат.

### 1.3.2-в. Ойзаки сўров учун саволлар

1. Матрицали тенгламанинг ечимларининг хоссаларини айтинг.

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, қўқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўқимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли қўлатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### 15.15. Ўқитиш усуллари қоидалари

#### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### 1.4.2. "Инсерт" техникаси қоидалари

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос қўйлаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- "Инсерт" жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқиясиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқиясиз;



Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;

Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шунини ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРУЗА - 27.**

**Мавзу: Чегаравий масала ҳақида қисқача маълумот.**

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Чегаравий масала, чегаравий масалани ечиш, Грин функцияси уни чегаравий масалани ечишда қўлланилиши. Грин функциясини тузиш.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал

тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;

- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик тўғрларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиқ бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

#### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

- **1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (даволат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма

материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;

- *Талабалар фаолияти*: ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

## 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти*: янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

## 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти*: ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар**: Чегаравий масала, чегаравий масалани ечиш, Грин функцияси уни чегаравий масалани ечишда кулланилиши. Грин функциясини тузиш.

#### 1.3.1. Маъруза матни

Чегаравий масалалар.

Иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенглама

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (1)$$

ва  $\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \quad (2)$

$$\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

чегаравий шарт берилган булсин.  $a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta$  лар узгармас сонлар (2) чегаравий шартни каноатлантирувчи (1) тенгламанинг ечимни топишга чегаравий масала дейилади. (1) тенгламага мос булган бир жинсли тенглама

$$L[y] \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (3)$$

дан иборат.

Чегаравий масалани ечиш учун (1) тенгламанинг умумий ечимдаги ихтиёрий узгармасларни (2) чегаравий шартдан фойдаланиб аниқлаймиз.

Чегаравий масала, Коши масаласига нисбатан мураккаброк бўлиб, у ҳар вақт ечимга эга эмас. Ечимга эга бўлганда ҳам у ягона бўлмаслиги (Коши масаласи билан чегаравий масаланинг фарқи) мумкин. (1), (2) чегаравий масала учун Грин функцияси деб шундай  $G(x, s)$  функцияга айтиладикимб у қуйидаги шартларни хоссаларга эга:

1)  $G(x, s)$  функция  $a \leq x \leq b$ ,  $a < s < b$  да аниқланиб,  $S$  нинг ҳар бир  $a < s < b$  раликдаги қиймаларда  $x$  нинг узлуксиз функцияси бўлади.

2)  $x \neq s$  нинг барча қиймаларида Грин функцияси (1) тенгламага мос бўлган бир жинсли чизикли

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0 \quad (3)$$

тенгламани қаноатлантиради.

3.  $x = a$  ва  $x = b$  да берилган чегаравий шартни қаноатлантиради.

$$G(a, s) = G(b, s)$$

4.  $x = s$  да ул  $x$ -га нисбатан узлуксиз ва  $x$  га нисбатан олинган ҳосиласи  $\frac{1}{P_0(x)}$

сакрашга эга бўлади. яъни

$$G(s + 0, s) = G(s - 0, s)$$

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=s+0} = \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=s-0} + \frac{1}{P_0(x)}$$

(1), (2) чегаравий масаланинг Грин функциясиини топиш учун (3) тенгламанинг айнан нолдан фаркли,  $y_1(x), y_2(x)$  ечимларини топамиз. Улар мос равишда чегаравий шартларнинг биринчи ва иккинчи шартларини қаноатлантирсин.

Агар  $y_1(x)$  бирданига иккала чегаравий шартини қаноатлантирмаса ул вақтда Грин функцияси мавжуд бўлиб, уни ушбу

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x) & a \leq x \leq s \\ \psi(s)y_2(x) & s \leq x \leq b \end{cases}$$

курнишда ёзиш мумкин.

Бунда  $\varphi(s)$  ва  $\psi(s)$  функциялар 4-чи шартдан аниқланадилар. Яъни

$$\psi(s)y_2(s) = \varphi(s)y_1(s)$$

$$\psi(s)y_2'(s) = \varphi(s)y_1'(s) + \frac{1}{p_0(s)}$$

Агар Грин функцияси мавжуд бўлса, у ҳолда (1) ва (2) чегаравий масалани ечими

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds$$

интегрални ҳисоблаш билан топилади.

Мисол 1.

$$y'' + y = f(x) \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

$$y'' + y = 0 \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$y' = -c_1 \sin x + c_2 \cos x$$

$$2. \quad y(\pi) = 0 \quad c_1 \cos \pi + c_2 \sin \pi = 0$$

$$c_1(-1) + c_2 \cdot 0 = 0 \quad c_1 = 0 \quad y_2 = \sin x$$

$$y'(0) = 0 \quad c_1 \sin 0 + c_2 \cos 0 = 0$$

$$-c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad y_2 = \cos x$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s) \cos x & a \leq x \leq s \\ \psi(s) \sin x & s \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(s) \sin s = \varphi(s) \cos s \\ \psi(s) \cos s = \varphi(s) \sin s + 1 \end{cases}$$

$$\psi(s) = \frac{\cos s}{\sin s} \varphi(s) = \operatorname{ctgs} \cdot \varphi(s)$$

$$\varphi(s) \operatorname{ctgs} \cos s = -\varphi(s) \sin s + 1$$

$$\varphi(s) \left( \frac{\cos^2 s}{\sin s} + \sin s \right) = 1$$

$$\varphi(s) \cdot \frac{\cos^2 s + \sin^2 s}{\sin s} = 1 \quad \varphi(s) = \sin s$$

$$\psi(s) = \operatorname{ctgs} \cdot \sin s = \cos s$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \sin s \cos x & 0 \leq x \leq s \\ \cos s \sin x & s \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$y(x) = \int_0^\pi G(x, s) f(s) ds = \int_0^x \sin s \cos x f(s) ds + \int_0^\pi \cos s \sin x f(s) ds =$$

$$= \cos x \int_0^x \sin s f(s) ds + \sin x \int_0^\pi \cos s f(s) ds$$

$$2. \quad y'' + y' = f(x) \quad y'(0) = 0 \quad y(+\infty) = 0$$

чегаравий масала учун Грин функциясини тузинг

$$y'' + y' = 0 \quad \lambda^2 + \lambda = 0 \quad \lambda(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1$$

$$y = c_1 + c_2 e^{-x}$$

$$y' = -c_2 e^{-x}$$

$$y'(0) = 0 \quad -c_2 e^{-0} = 0 \quad -c_2 \cdot 1 = 0 \quad c_2 = 0 \quad y_1 = 1$$

$$y(+\infty) = 0 \quad c_1 + c_2 e^{-\infty} = 0 \quad c_1 = 0 \quad y_2 = e^{-x}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} 0 \leq x \leq s \\ \cos s \quad \sin x \quad s \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$\psi(s)e^{-s} = \varphi(s)$$

$$-\psi(s)e^{-s} = 0 + 1 \quad \psi(s) = -e^{-s} \quad \varphi(s) = -1$$

$$G(x, s) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq s \\ -e^s - e^{-x} & s \leq x < \infty \end{cases}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq s \\ -e^{s-x} & s \leq x < +\infty \end{cases}$$

Мисол 3. 767

$$y'' - y = f(x) \quad y'(0) = 0 \quad y'(2) + y(2) = 0$$

чегаравий масала учун Грин функциясини тузинг.

$$y'' - y = 0 \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x \quad y'(0) = 0 \quad -c_1 e^{-0} + c_2 e^0 = 0 \quad -c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{2} \quad y_1 = chx$$

$$y'(2) + y(2) = 0 \quad -c_1 e^{-2} + -c_2 e^{-2} + -c_1 e^{-2} + -c_2 e^{-2} = 0$$

$$2c_2 e^{-2} = 0 \quad c_2 = 0 \quad y_2 = e^{-x}$$

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)chx & 0 \leq x \leq s \\ \psi(s)e^x & s \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\psi(s)e^s = \varphi(s)chs$$

$$-\psi(s)e^s = \varphi(s)chs + 1$$

$$-(\varphi(s)shs + 1) = \varphi(s)chs \quad \varphi(s) = \frac{-1}{shs + chs} = \frac{-1}{e^s} = -e^{-s} \quad \psi(s) = -chs$$

$$G(x, s) = \begin{cases} -e^{-s}chx & 0 \leq x \leq s \\ -e^{-x}chs & s \leq x \leq 2 \end{cases}$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

- 1.Чегаравий масала деб нимага айтилади ?
2. Чегаравий масала кандай ечилади ?
3. Грин функцияси, кандай шартларни каноатлантиради ?
- 4.Грин функцияси ёрдамида чегаравий масала кандай ечилади ?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

2. Чегаравий масала кандай ечилади ?
3. Грин функцияси, кандай шартларни каноатлантиради ?

### 1.3.2-в. Ойзаки сўров учун саволлар

- 1.Грин функцияси ёрдамида чегаравий масала кандай ечилади ?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақил, Пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли олатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.

- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

## **15.16. Ўқитиш усуллари қоидалари**

### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;



## **МАЪРЎЗА - 28**

**Мавзу: Дифференциал тенгламалар системасининг биринчи интеграллари.**

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан: Оддий дифференциал тенгламалар**

**Ўқув соати: 2 соат (маъруза);**

**Ўқув машғулоти тури: маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.**

**Маъруза режаси:**

Нормал система, система ечиш, бошлангич шарт, умумий интеграл, биринчи интеграл зарурий ва етарли шарт, система интеграллари тарифлари.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

**Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

**Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

**Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шакилланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;

- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

## • 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси

### • 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

### 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

## 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Нормал система, система ечиш, бошлангич шарт, умумий интеграл, биринчи интеграл зарурий ва етарли шарт, система интеграллари тарифлари.

### 1.3.1. Маъруза матни

Дифференциал тенгламаларнинг нормал

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1) \quad (i = \overline{1, n})$$

Системаси берилган булсин. Бундаги  $f_i$  функциялар ва улардан  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ларга нисбатан олинган хусусий хосилалар, барча аргументларга нисбатан бирор ёпик  $D$  сохада узлуксиз булсинлар. У холда (1) система учун мавжудлик ва ягоналик теоремасини куллаш мумкин. Агар координатлари  $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$  булган нукта  $D$ ,  $C$ ,  $D$  сохада ётса, (1) система битта ва факат битта  $x = x_0$  булганда  $y_i = y_i^0$  бошлангич шартларни каноатлантирувчи ечимлар системасига эга булади.

Фараз этайлик бу ечимлар

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \quad (2)$$

булсин бу ечимлар бошлангич  $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$  кийматларга боглик булиб, биз уларни, турли кийматлар кабул килиши мумкин булган параметр учун кабул киламиз. Куйидаги теоремани исботсиз келтирамиз

$$\text{Агар } \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad \text{система бирор ёпик } D \left( \begin{array}{l} |x - x_0| \leq a \\ |y_0 - y_1^0| \leq c \end{array} \right) \text{ сохада}$$

$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$  узлуксиз хусусий хосилаларга эга булса, ухолда бошлангич  $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$

шартлар билан аникланган  $y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  ечимлар, бошлангич шартларга

нисбатан-  $\frac{\partial y_i}{\partial x_0} \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0}$  узлуксиз хусусий хосилаларга эга булади.

Шу теоремага асосан (2) нинг унг томони  $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$  га нисбатан узлуксиз хусусий хосилаларга эга булади.

Энди  $D$  сохада бошлангич  $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  нуктани ва бу нуктадан утиш интеграл эгри чизик устида иккинчи бир  $(x_1, y_1, y_2, \dots, y_n)$  нуктани оламиз. Бу нукталар (2) мунасабат билан богланган. Агар бошлангич нукта учун  $(x_1, y_1, y_2, \dots, y_n)$  нуктани кабул килсак, бошлангич кийматлар билан аникланувчи ечимнинг ягоналик хоссасига асосан, бу интеграл эгри чизиги  $(x_0, y_1^0, \dots, y_n^0)$  нуктадан утади ва

$$y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \dots, y_n^0) \quad (3)$$

муносабати мавжуд.

(3) муносабат курсатадим (2) тенгламалар системасини бошлангич

$y_1^0, \dots, y_n^0$  кийматларга нисбатан  $D_1$  сохада бир кийматли ечиш мумкин ва бунинг унг томони  $x, y_1, \dots, y_n$  уларга нисбатан узлуксиз хусусий хосилаларга эга.

Агар бошлангич  $y_i^0$  кийматларни  $c_1, \dots, c_n$  ихтиёрий узгармаслар билан алмаштириб, параметр  $x_0$  га бирор аник сон киймати берсак куйидаги

$$\psi_{ii}(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = c_i \quad (4)$$

тенгламалар системасига эга буламиз (4) тенгликлар тупламига (1) системанинг умумий интеграл, харбирига эса системанинг биринчи интегралли дейилади. (4) нинг чап томони эркили узгарувчи  $x$  ва  $y_1, \dots, y_n$  номалумларнинг функциясидир. Агар (4) да

$y_1, \dots, y_n$  лар урнига унинг (2) даги ифодасини келтириб куйсак у бироро узгармас сонга айланади.

$$\text{Яъни } \psi_i(x, \varphi, (x_1, c_1, c_2, \dots, c_n), \dots, \varphi_n(x, c_1, \dots, c_n)) \equiv c_i$$

бундай хоссага эга булган харкандай  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$  функцияга (1) системасининг интегралли дейилади.

Тариф 1. Системанинг интегралли деб, айнан узгармас сонга тенг булмаган шундай  $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$  функцияга айтиладиган бундаги номалум функциялар урнига (1) системанинг ихтиёрий хусусий ечимни куйганда у узгармас кимйматга эга булсин.

Агар  $\psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ , (1) сестемани интегралли булиб,  $x, y_1, \dots, y_n$  ларга нисбатан узлуксиз хусусий хосилаларга эга булса, у холда харкандай хусусий ечим булса у узгармас сонга тенг булганлиги сабабли, унинг тулик  $d\psi$  дифференциал бу ечим буйлаб айнан нольга тенг булади.

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} dy_1 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} dy_n \equiv 0 \quad (5)$$

лекин ечим буйлаб биз

$$dy_i \equiv f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) dx \quad \text{га эга,}$$

шунинг учун бу кейинги тенглик икка асосан (5)

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1^{dx} + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} f_2^{dx} + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n^{dx} \equiv 0 \quad (6)$$

$$\text{ёзилган ёки } \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n \equiv 0 \quad (7)$$

Шундай килиб, агар  $\Psi(x, y_1, \dots, y_n)$  интеграл узининг хамма аргументларига нисбатан узлуксиз хусусий хосилаларга эга булса унинг тулик дифференциали (1) системага асосан айнан нольга тенг булади..

Таъриф 2.  $x, y_1, \dots, y_n$  ларга нисбатан узлуксиз хусусий хосилаларга эга булган

$$\Psi(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ функцияси куршаётган сохада } \frac{d\psi}{dy_i} \quad (i = \overline{1, n})$$

хаммаси бирданига нольга тенг булмаса ва унинг тулик дифференциали (1) системага асосан айнан нольга тенг булса, бу функцияга (1) системанинг интегралли дейилади.

Шундай килиб (7) ни бажариши берилган ихтиёрий  $\psi$  функциянинг интеграл булишлигининг зарурий ва етарли шартини беради.

Иккинчи таъриф буйича аниқланган (1) системанинг интегралли, биринчи тариф буйича (1) системанинг интеграл булади.

Лекин тескари тугри эмас, чунки биринчи таъриф буйича олинган интеграл узиши хамма аргументларига нисбатан хусусий хосилаларга эга булмаслик мумкин. Бирор усул ёрдамида (1) системани  $n$  –та чизикли богли булмаган биринчи интегралларини тополсак, яъни шундайларни тополсак уларни  $y_1, \dots, y_n$  га нисбатан ечганда  $y_1, \dots, y_n$  лар  $x$  ва  $n$ -та изтиёрий узгармас  $c_i$  лар оркали ифодаланса бу ифодалар (1) системани умумий ечимини беради. Хакикатдан хам (4) интеграллар системаси чизикли боглик булмасалар системанинг якобиани

$$\frac{D(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0$$

Фараз этайлик  $x_0, y_1^0, \dots, y_n^0$  кийматлар системасида якобиан нольга тенг булмаса бу холда бу киматлар атрофида  $y_1, \dots, y_n$  лар  $x$  ва  $c_1, \dots, c_n$  нинг бир кийматли узлуксиз функиялари хисобланади. Бошлангич киймат учун  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$  га етарли якин булган  $x_0$  ва  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$  ларни олсак ва унга мос булган ихтиёрий узгармаслари  $c_1, \dots, c_n$  билан белгиласак бу узгармасларнинг кийматлари (1) системанинг ечимни аниқлайди. Яъни

$$y_1 = \overline{\varphi_1(x, \overline{c_1}, \overline{c_2}, \dots, \overline{c_n})}$$

$$y_1 = \overline{\varphi_2(x, \overline{c_1}, \dots, \overline{c_n})}$$

$$y_n = \overline{\varphi_n(x, \overline{c_1}, \dots, \overline{c_n})}$$

бу ечимлар  $x = x_0$  кийматида олдиндан берилган  $y_1^{-0}, \dots, y_n^{-0}$  бошлангич кийматларини кабул қилади. Бу эга умумий ечимнинг шартидир. Шундай қилиб  $n$ - та чизикли богланмаган биринчи интеграллар маълум булса бу (1) системани интеграллаш билан тенг нольдир. Агар бизга битта биринчи  $\Psi(x, y_1, \dots, y_n) = c$  интеграл берилган булса, унда узгарувчилардан ихтиёрий биринчи масала  $y_n$   $x$  ва коганлари орқали ишодалаш мумкин  $y_n = \phi(x, y, \dots, y_{n-1}, c)$  бўлади.

Буни (1) системанинг 1,2, ва... $(n-1)$  сига қўйсак  $n-1$  номалумли  $n-1$  та тенгламалар системасига эга бўламиз. Яни системани тартиби биттага купаяди. Хосил бўлган  $n-1$  тартибли янги системани интеграллаш натижасида  $n-1$  ихтиёрий ўзгармасларга эга бўламиз. С билан  $n$ -та ихтиёрий ўзгармасларга эга бўламиз чни умумий ечимга эга бўламиз.

Худди шунга ўхшаш агар биз  $k$ -та чизикли богланмаган биринчи интегралларга эга бўлсак системани тартиби  $k$  бирликка камаяди.

Мисол 941.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t}{y} & \varphi_1 = t^2 + 2xy \\ \frac{dx}{dt} = -x & \varphi_2 = x^2 - ty \end{cases}$$

система учун дифференциал тенглама системаси учун биринчи буладими.  $\varphi_1$  ва  $\varphi_2$  функциялар учун биринчи интеграл бўлишлигининг зарурий ва етарли шартларнинг бажарилишини текшираимиз.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \equiv 0 \text{ булиши керак.}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \equiv 0 \quad \varphi_1 \text{ булади, } \varphi_2 \text{ булмайди.}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} f_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} f_2 = 2t + 2y \left( \frac{x^2 - t}{y} \right) + 2x(-x) \equiv 0$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} f_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} f_2 = -y + 2x \left( \frac{x^2 - t}{y} \right) - t(-x) = -y + \frac{2x^3}{y} - \frac{2xt}{y} + tx \neq 0$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Дифференциал тенгламалар системасининг куруниши қандай.
2. Системанинг умумий интегралини ёзиш.
3. Биринчи интеграл деб нимага айтилади.
4. Хамма аргументларига нисбатан узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган системанинг биринчи интегралли бўлишининг зарурий ва етарли шартини ёзинг.
5. Нормал система симметрик курунишга қандай алмаштириш ёрдамида келтириш мумкин.
6. Системанинг симметрик формасини афзаллиги нимада.

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Биринчи интеграл деб нимага айтилади.
2. Хамма аргументларига нисбатан узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлган системанинг биринчи интегралли бўлишининг зарурий ва етарли шартини ёзинг.

### 1.3.2-в. Ойлаки сўров учун саволлар

1. Нормал система симметрик курунишга қандай алмаштириш ёрдамида келтириш мумкин.
2. Системанинг симметрик формасини афзаллиги нимада.

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, таққил, тайта ишлаш, мустақкамлаш, эслаб тайлиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект тайшимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли тайлатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибилов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.17. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

### 1.4.2. "Инсерт" техникаси қоидалари

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос қўйиётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- "Инсерт" жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:



Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;

Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;

Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;

Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРЎЗА - 29**

### **Мавзу: Дифференциал тенгламаларнинг мухтор \*автоном) системаси.**

#### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Автоном система: ечим: умумий ечим; траектория; иккинчи ечим хоссаси, мувозанат нукта.

**Ўқув машғулотни мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- **Ўргатувчи:** талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли

масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;

- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантиқий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасаввур бериш; жавобгарлик тўғрларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқитиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиқ бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

#### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

##### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг

ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;

- *Талабалар фаолияти*: ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материални қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

## 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти*: янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

## 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти*: мавзуга бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти*: ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар*: гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Автоном система: ечим: умумий ечим; траектория; иккинчи ечим хоссаси мувозанат нукта

#### 1.3.1. Маъруза матни

Таъриф. Агар оддий дифференциал тенгламалар системасига эркин узгарувчи ошкор равишда кирмаса, бундай система мухтор система дейилади.

Дифференциал тенгламаларнинг нормал мухтор системаси

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1)$$

куринишда булади ёки вектор куринишда.

$$\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

Агар эркли узгарувчи  $t$  ни вақт деб қабул қилсак, система динамик система деб аталади.

Теорема 1. Агар  $x = \varphi(t)$  вектор функция (2) нормал муҳтор вектор тенгламанинг бирор ечими бўлса, у ҳолда ихтиёрий узгармас  $c$  учун

$$x = \varphi_x(t) = \varphi(t + c)$$

вектор функция ҳам (2) тенгламанинг ечими бўлади.

Исбот

$$\dot{\varphi}_x(t) = \frac{d}{dt} \varphi_x(t) = \frac{d}{dt} \varphi(t + c) = \frac{d\varphi(t + c)}{d(t + c)} \cdot \frac{d(t + c)}{dt} = \dot{\varphi}(t + c) \cdot 1 = \dot{\varphi}(t + c)$$

Энди  $\varphi_x(t)$  функция (2) тенгламанинг ечими эканлиги курсатамиз.

Шартга кура  $x = \varphi(t)$  функция (2) тенгламани бирор ечими бўлганлиги учун

$$\dot{\varphi}(t) \equiv f(\varphi(t)) \text{ айният бажарилади.}$$

Бунда  $t$  урнига  $t+c$  ни олсак

$$\dot{\varphi}(t + c) \equiv f(\varphi(t + c))$$

га эга бўламиз

$$\text{Бунга кура } \dot{\varphi}_x(t) \equiv \dot{\varphi}(t + c) \equiv f(\varphi(t + c)) \equiv f(\varphi_x(t))$$

Яъни  $\varphi_x(t)$  (2) тенгламанинг ечими (1) муҳтор системанинг ҳар бир  $x = \varphi(t)$  вектор ечимига  $n$  улчовли фазода  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$  нуктанинг ҳаракатининг мос келтирамиз. Ҳаракат давомида  $x$  нукта уша фазода бирор чизикни чизиди. Шу чизикка  $x$  нуктанинг ҳаракат троекторияси дейилади.

Теорема 2. Агар  $x = \varphi(t)$  ва  $x = \psi(t)$  вектор функциялар (2) тенгламанинг ихтиёрий ечимлар бўлса, у ҳолда бу ечимлар ё бирорта нуктада кесишмайди ёки бутунлай устма уст тушади.

Бошқача айтганда, агар  $t_1 \neq t_2$  да  $\varphi(t_1) = \psi(t_2)$  бўлса у ҳолда  $\psi(t) \equiv \varphi(t + c)$   $c = t_1 - t_2$  айният бажарилади.

Исбот. Теоремани исботи учун  $\varphi(t)$  ечимдан бошқа  $\varphi_x(t) = \varphi(t + c)$ ,  $c = t_1 - t_2$

ечимни

$$\text{Бундан } \varphi_x(t_2) = \varphi(t_2 + c) = \varphi(t_2 + t_1 - t_2) = \varphi(t_1) = \psi(t_2)$$

$$\text{Яъни } \varphi_x(t_2) = \psi(t_2)$$

Яъни (2) тенгламанинг иккита  $x = \varphi_x(t)$  ва  $x = \psi(t)$  ечимлари бир хил бошланғич қийматларига эга. Демак Коши теоремасининг

шартлари бажарилади ягоналик теоремасига асосан  $x = \varphi_x(t)$   $x = \psi(t)$  ечимлар устма-уст тушади.

Агар  $x = \varphi(t)$  (2) системанинг ечими бўлса  $(n+1)$  улчовли  $E_{t,x}^{n+1}$  фазода интеграл чизиклар тенгламаси ушбу

$$x = \varphi(t) \quad t \in J(a, b)$$

куринишида берилган, бу интеграл чизикка мос троектория  $t$  укига параллел булган  $n$  улчовли  $E_x^n$  фазода бу чизикнинг проекциясини аниқлайди.

Траекторияларни урганиш интеграл чизикларни урганишга нисбатан система туришда оз маълумот беради, лекин баъзи холларда траекторияларни урганиш система хакида етарли маълумот беради.

Таъриф. Агар  $f(a) \equiv 0$  бўлса,  $x = a$  (2) автоном системанинг мувозанат нуктаси дейилади.

Агар  $x = a$  мувозанат нукта бўлса,  $x = a \quad -\infty < t < +\infty$  (2) тенгламанинг ечими булади.

Хакикатан  $\frac{dx}{dx} = \frac{da}{dt} = 0 \quad f(x(t)) = f(a) = 0$

Агар  $a$  мувозанат нукта бўлса, у холда  $x = a$  холат траектория

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Автоном тенгламалар системаси деб кандай тенгламага айтилади.
2. Автоном тенгламалар системасини ёзинг.
3. Тенгламалар системасида катнашувчи номаълум функцияларнинг узгариш конуни вақтга боглиқми.
4. Мухтар системанинг иккита ечими уз-аро кесишадими?
5. Мувозанат нукта деб нимага айтилади.

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Автоном тенгламалар системасини ёзинг.
2. Тенгламалар системасида катнашувчи номаълум функцияларнинг узгариш конуни вақтга боглиқми.

### 1.3.2-в. Ойзаки сўров учун саволлар

1. Мухтар системанинг иккита ечими уз-аро кесишадими?
5. Мувозанат нукта деб нимага айтилади.

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлид, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чўқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўқимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддин Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амеликин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.18. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;

- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
  - Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шунини ҳар ким тушуниши лозим;

## **МАЪРЎЗА - 30. 31**

**Мавзу: Чизикли ўзгармас коэффициентли бир жинсли системанинг  
холатлар текслиги, махсус нукталар.**

### **Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан: Оддий дифференциал тенгламалар**

**Ўқув соати:** 2 + 2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Автоном система; махсус нукта; оддий нукта; характеристик тенглама; алмаштиришлар тугун, марказ, эгар, фокус, тугулма тугун, дикритик типдаги махсус нукталар.

**Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

**Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;



- *Ривожлантирувчи*: китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, хулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи*: актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари*: инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқитиш шакллари*: фронтал; жамоавий;
- *Ўқитиш воситалари*: Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқитиш шароитлари*: техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг*: ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;
- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлилийлиги;
- Амалий мағулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

### **• 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси**

#### **• 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):**

- *Ўқитувчининг фаолияти*: тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;

- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

## 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини таркатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўкилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ештиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий хужум, “Инсерт” техникаси.

## 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга бўйича хулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

### 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Автоном система; махсус нукта; оддий нукта; характеристик тенглама; алмаштиришлар тугун, марказ, эгар, фокус, тугулма тугун, дикритик типдаги махсус нукталар.

#### 1.3.1. Маъруза матни

**Хосилга нисбатан ечилган биринчи тартибли**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1) \quad \text{ва} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} = f_1(x, y) \quad (2)$$

тенглама берилган бўлсин.

$P$  нукта (1) ва (2) тенгламалар кўрилатган  $D$  соҳанинг ички нуктаси бўлсин.

Таъриф 1. Агар  $P$  нуктанинг шундай  $\omega \in D$  атрофи мавжуд бўлсаким, бу атрофнинг ҳар бир нуктасидан (1) ёки (2) дифференциал тенгламанинг факат битта интеграл эгри чизиги ўтса ва бу  $\omega$  атрофда  $f(x, y)$  ёки  $f_1(x, y)$  бўлса,  $P$  нуктага берилган дифференциал тенгламанинг оддий нуктаси дейилади.

**Р нукта оддий нукта бўлиши учун бу нуктада  $f(x, y)$  функцияси  $x$  га нисбатан узлуксиз ва  $y$  га нисбатан Липшиц шартини каноатлантириши ёки  $f_1(x, y)$  функция  $y$  га нисбатан узлуксиз ва  $x$  га нисбатан Липшиц шартини каноатлантириши етарлидир.**

**Таъриф 2. Агар 1-таърифдаги шартлардан бирортаси ҳам бажарилмаса у холда Р нуктага махсус нукта дейилади.**

**Таъриф 3. Агар  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$  ф тенгламада  $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$  шарт бажарилса у холда  $(x_0, y_0)$  нуктага берилган дифференциал тенгламанинг махсус нуктаси дейилади.**

$$\text{Энди} \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = cx + my \\ \frac{dy}{dt} = ax + by \end{cases} \quad (3)$$

**автоном тенгламалар системасини караймиз.**

**Бу системани**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + my} \quad (4)$$

**кўринишга келтириш мумкин.**

**$(0,0)$  нукта (3) системани ечим бўлади.**

**(4) тенглама учун  $\frac{0}{0}$  типдаги махсус нукта.  $(0,0)$  нукта бу тенгламанинг махсус нуктаси бўлади. (4) тенгламанинг соддалаштириш мақсадида**

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \quad (5)$$

**алмаштиришини оламиз.**

**Бунда  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  лар ихтиёрий ўзгармас сонлар бўлиб,  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$  яъни (5) алмаштириш махсусмас алмаштиришдир. Уларни шундай танлаб оламизким, (4) тенгламанинг сурати  $\lambda\eta$  га, махражи эса  $\mu\xi$  га тенг бўлсин.**

$$\begin{aligned} (5) \text{ дан} \quad d\xi &= \alpha dx + \beta dy \\ d\eta &= \gamma dx + \delta dy \end{aligned}$$

**. Бунга асосан (4) тенглама**

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma dx + \delta dy}{\alpha dx + \beta dy} = \frac{\gamma + \delta \frac{dy}{dx}}{\alpha + \beta \frac{dy}{dx}} = \frac{\gamma + \delta \frac{ax + by}{cx + my}}{\alpha + \beta \frac{ax + by}{cx + my}} = \frac{\gamma(cx + my) + \delta(ax + by)}{\alpha(cx + my) + \beta(ax + by)}$$

**шартга кўра**

$$\begin{aligned} \gamma(cx + my) + \delta(ax + by) &= \lambda\eta = \lambda(\gamma x + \delta y) \\ \gamma(cx + my) + \beta(ax + by) &= \mu\xi = \mu(\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

. Бундан хар бир тенгламада  $x$  ва  $y$  олдидаги коэффициентни тенглаштирсак, куйидаги 2 та тенгламалар системасига

$$\begin{cases} (c - \lambda)\gamma + a\delta = 0 \\ m\gamma + (b - \lambda)\delta = 0 \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} (c - \mu)\alpha + a\beta = 0 \\ m\alpha + (b - \mu)\beta = 0 \end{cases} \quad (7)$$

эга бўламиз.

Булар  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ларга нисбатан бир жинсли тенгламалар системасидир. Бу тенгламалар системаси нол бўлмаган ечимга эга бўлиши учун унинг асос детерминанти 0 га тенг бўлиши зарур.

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & a \\ m & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8) \quad \begin{vmatrix} c - \mu & a \\ m & b - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Буларни очиб ёзсак

$$\lambda^2(b + c)\lambda - am + bc = 0 \quad (10)$$

$$\mu^2(b + c)\mu - am + bc = 0 \quad (11)$$

(10) ва (11) дан кўринадики  $\lambda$  ва  $\mu$  лар бир хил квадрат тенгламанинг илдизларидир.

(10) ва (11) тенгламаларга характеристик тенглама дейилади.

{(3) ва (4) тенгламаларнинг} характеристик тенгламани

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & m \\ a & b - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

куринишда езиб оламиз.

Исбот этамизки (5) алмаштириш, махсусмас алмаштирадир хакикатдан (10) тенгламанинг илдизини (6) нинг биринчисига куйсак

$$\frac{\gamma}{\delta} = -\frac{a}{c - \lambda_1} \quad \text{га эга буламиз.}$$

$\lambda_2$  илдизини (7) ни биринчисига куйсак

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{a}{c - \lambda_2} \quad \text{га эга бўламиз.}$$

Бу кейинги тенгликнинг чап ва унг тамонлари бир-бирига тенг булмагани учун яъни

$$\frac{\alpha}{\beta} \neq \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{яъни} \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

демак (5) алмаштира ёрдамида берилган тенгламани

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2\eta}{\lambda_1\xi} \quad (12)$$

куринишга келтириш мумкин. Бунда куйидаги холлар булиши мумкин.

1-Хол.

Характеристик тенгламини илдизлари бир-бирига тенг эмас ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

а) характеристик тенгламанинг илдизлари хакикий ва бир-бирига тенг эмас

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| \quad \text{ва} \quad \lambda_1\lambda_2 > 0 \quad \text{булсин}$$

$$(12) \text{ тенгламадан } \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2\eta}{\lambda_1\xi} \quad \text{бундан}$$

$$\ln \eta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln |\xi| + \ln c \quad \eta = c |\xi|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \quad (13)$$

$(\xi \neq 0, \eta \neq 0), \eta = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1$  булгани учун

(13) координата бошидан утувчи параболалар ойласини беради. Координата бошидан ҳамда интеграл чизиклар  $\xi$  укига уриниб утади.

Ҳақиқатдан ҳам

$$\left. \frac{d\eta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} c |\xi|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1} \Big|_{\xi=0} = 0$$

(3) система эса

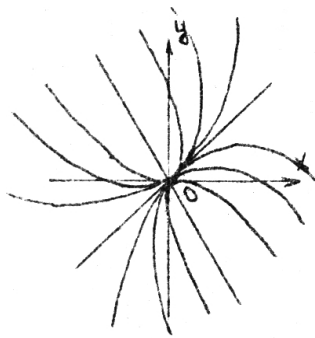
$$x = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

$$y = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$(0,0)$  нукта тугун типдаги махсус нукта интеграл чизиклар бундай ҳолда

$\xi \neq 0, \eta = 0$  текислигидан юқоридагидек жойлашган бўлади.

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$  булгани учун (3) системанинг траекториялари  $t \rightarrow +\infty$  да  $+\infty$  га интилади.

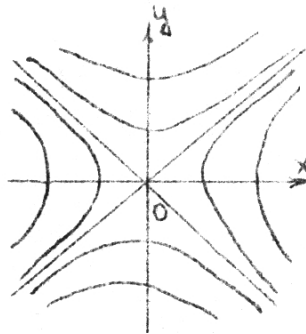


в)  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$  булсин

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2 \quad (\lambda_2 < 0 < \lambda_1) \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -k \quad (k > 0) \quad \eta = c |\xi|^{-k} \quad (14)$$

(12) тенгламанинг ечими бўлади. Бу интеграл чизиклар координата бошидан утмайди. Чунки  $\xi \rightarrow 0$  са  $\eta \rightarrow \infty$  координата бошидан факат иккита ярим уқлар  $\xi = 0 (\eta \neq 0); \quad \eta = 0 (\xi \neq 0)$  тенгламанинг ечими бўлади.

$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$  Булганда  $\xi$  уки бўйича ҳаракат координата бошига йуналган бўлиб,  $\eta$  уки бўйича ҳаракат координата бошидан узоулашади.



(14) гиперболалар оиласининг тенгласидир.

Бу холда  $(0,0)$  нукта эгар типдаги махсус нукта дейилади. Интеграл чизиклар шаклидагидек жойлашган булади.

С)  $\lambda_1$  ва  $\lambda_2$  лар характеристик тенгламанинг комплекс илдизлари булсин. Яъни  $\lambda_{1,2} = p \pm iq$  ( $p \neq 0$ )

У холда (6) тенгламада  $\gamma$  ва  $\delta$  лар ихтиёрий сон булгани учун уларни шундай танлаб оламизки  $\gamma = \overline{\alpha}$ ,  $\delta = \overline{\beta}$  булсин. Бунда  $\overline{\alpha}, \overline{\beta}$  лар  $\alpha, \beta$  ларга кушма булган комплекс сонлардир у вакта (5) алмаштириш

$$\begin{cases} \xi = \alpha\gamma + \beta\delta \\ \eta = \overline{\alpha}\gamma + \overline{\beta}\delta \end{cases}$$

Куринишга эга булади.

Бунда  $x$  ва  $y$  лар хакикий сонларни кабул килганда  $\xi$  ва  $\eta$  лар комплекс сонларни кабул килади.  $x$  ва  $y$  лар хам хакикий сонларни кабул килганда  $\xi$  ва  $\eta$  лар хам хакикий сонларни кабул килишлиги учун куйидаги алмаштиришни оламиз

$$\begin{aligned} \xi &= u - i\vartheta \\ \eta &= u + i\vartheta \end{aligned} \quad (15)$$

у холда  $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2\eta}{\lambda_1\xi}$  тенглама

$$\frac{du + id\vartheta}{du - id\vartheta} = \frac{p + iq}{p - iq} \cdot \frac{u + i\vartheta}{u - i\vartheta} \quad (16)$$

бу тенгламани соддалаштирсак

$$\vartheta d\vartheta + bdb = \frac{p}{q}(ud\vartheta - \vartheta du) \quad (17)$$

га эга буламиз бу тенгламани хар иккала томонини  $u^2 + \vartheta^2$  булиб, уни

$$\frac{1}{2} \frac{d(u^2 + \vartheta^2)}{u^2 + \vartheta^2} = \frac{p}{q} \frac{d\left(\frac{\vartheta}{u}\right)}{1 + \left(\frac{\vartheta}{u}\right)^2} \quad \text{куринишга}$$

келтириш мумкин.

Бу ифодани интегралласак

$$\frac{1}{2} \ln(u^2 + \vartheta^2) = \frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{\vartheta}{u} + \ln c \quad \text{ёки}$$

$$\sqrt{u^2 + \vartheta^2} = ce^{\frac{p}{q} \operatorname{arctg} \frac{\vartheta}{u}}$$

$(u, \vartheta)$  системадан кутиб системага утамиз.

$$u = p \cos \varphi$$

$$\vartheta = p \sin \varphi$$

У холда кейинги тенгликдан

$$p = ce^{\frac{p}{q}\varphi} \quad (18)$$

га эга буламиз.

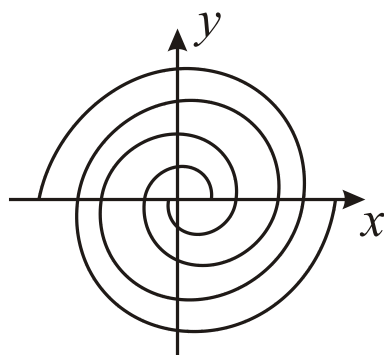
Бу лагарифмик спиралининг тенгламаси. яъни интеграл чизиклар махсус нукта атрофида  $\infty$  марта айланиб маълум бир йуналиш буйича махсус нуктага асимптотик

равишда

$(p < 0; q > 0; p < 0, q < 0)$  якинлашади.

$(p > 0; q > 0; p > 0, q > 0)$  да узоклашади

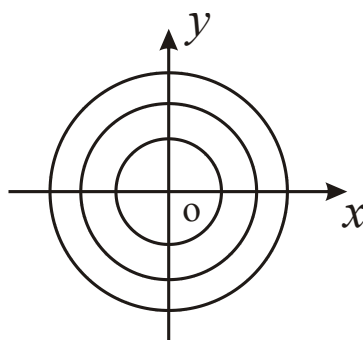
Бундай  $(0,0)$  махсус нуктада фокус махсус нукта дейилади.



Агар  $p = 0$  булса  $\lambda_{1,2} = \pm q$  га эга буламиз у холда (17) дан

$$u du + y dy = 0 \rightarrow u^2 + y^2 = c^2$$

га эга буламиз. Бу марказ типдаги махсус булиб интеграл чизиклар куйидагича жойлашган булади.



2-хол

характеристик тенгламанинг илдизлари бир-бирига тенг яъни  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$   
(10) тенгламадан

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{b+c}{2}, \quad (b-c)^2 + 4am = 0$$

га эга буламиз  $(b-c)^2 + 4am = 0$  дан  $am = -\frac{(b-c)^2}{4}$   $\lambda_1 = \lambda_2$  кийматни (7)

тенгламага куйсак

$$\begin{cases} \left(c - \frac{b+c}{2}\right)a + a\beta = 0 \\ m\alpha + \left(b - \frac{b+c}{2}\right)\beta = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} -\frac{b-c}{2}a + a\beta = 0 \\ m\alpha + \left(\frac{b-c}{2}\right)\beta = 0 \end{cases} \quad (19)$$

тенгламалар системасига эга буламиз. Бу икки хол булиши мумкин.

А)  $a, m, \frac{b-c}{2}$  коэффициснтлардан бирортаси хам нолга тенг эмас (19)

$\alpha, \beta$  га нисбатан бир жинисли алгебраик тенг булиб, униинг асос детерминанти нолга тенг булгани учун системага тирвиал булмаган ечимга эга. Фараз этайлик бу

ечимлардан бири  $\alpha = a$  булсин. У холда (19) нинг биринчисидан  $\beta = \frac{b-c}{2}$  га эга буламиз.

$$\text{У холда} \quad \begin{cases} \xi = ax + \frac{b-c}{2}y \\ \eta = y \end{cases} \quad (20)$$

Алмаштириш (12) тенгламани

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\xi} &= \frac{dy}{adx + \frac{b-c}{2}dy} = \frac{\frac{dy}{dx}}{a + \frac{b-c}{2} \frac{dy}{dx}} = \frac{\frac{ax+by}{cx+my}}{a + \frac{b-c}{2} \frac{ax+by}{cx+my}} = \frac{ax+by}{a(cx+my) + \frac{b-c}{2}(ax+by)} = \\ &= \frac{ax + \frac{b-c}{2}y + \frac{b+c}{2}y}{a\left(c + \frac{b-c}{2}\right)x + \left(am + c + \frac{b-c}{2}b\right)y} = \frac{\xi + \lambda y}{a\lambda x + \left(-\frac{(b-c)^2}{4} + \frac{b-c}{2}b\right)y} = \frac{\xi + \lambda\eta}{a\lambda x + \frac{b-c}{2}\left[-\frac{b-c}{2} + b\right]y} = \\ &= \frac{\xi + \lambda\eta}{a\lambda x + \frac{b-c}{2} \cdot \frac{b+c}{2}y} = \frac{\xi + \lambda\eta}{\left(ax + \frac{b-c}{2}y\right)\lambda} = \frac{\xi + \lambda\eta}{\xi\lambda} \end{aligned}$$

Куринишга келтириш мумкин.

Бундан  $\frac{d\eta}{d\xi} - \frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{\lambda}$  чизикли тенгламага эга буламиз.

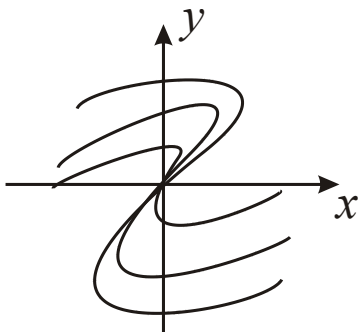
Бунинг умумий ечими

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \xi \ln|\xi| + c\xi \quad (21)$$

дан иборатдир.

$$\text{Бундан} \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \eta' = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\lambda} \ln|\xi| + \frac{1}{\lambda} + c \right) = \pm\infty \quad \begin{pmatrix} \lambda < 0 \\ \lambda > 0 \end{pmatrix}$$

ишора  $\lambda$  нинг ишорасига карама-карши бу курсатадиким интеграл чизиклар координата бошида  $0\eta$  укига уриниб утади. Координата укларидан факат  $0\eta$  уки тенгламанинг интеграл чизиги булади



Бу холда  $(0,0)$  махсус нукта тугилма тугин топишга махусус нукта дейилади.

$\lambda > 0$  булганда тургинмас тугилма тугин

$\lambda < 0$  булганда тургун тугилма тугун дейилади.



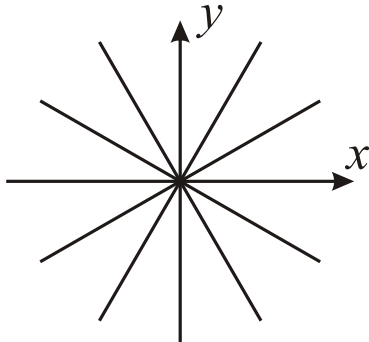
В) Агар  $a = 0 \quad m = 0 \quad \frac{b-e}{2} = 0 \rightarrow b = c$  бўлса (4) тенгламалдан

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}; \quad \left( \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \right) \quad \begin{matrix} (y = 0; & x \neq 0) \\ (x = 0 & y \neq 0) \end{matrix}$$

га эга бўламиз. Бунинг умумий ечими

$$y = cx \quad (x = cy)$$

интеграл чизиклар ярим тугри чизиклардан иборат



$(0,0)$  махсус нукта, дикритик тугун махсус нукта дейилади.

Фараз этайлик  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & m \end{vmatrix} = 0$  бўлсин.

У холда (4) тенгламадан  $\frac{dy}{dx} = K$

га эга бўламиз

$$y = Kx + c$$

Бу холда координат боши махсус нукта бўлмайди.

С) Характеристик тенгламанинг илдизларидан бири нолга тенг бўлсин яъни

$$\lambda_1 \neq 0 \quad \lambda_2 = 0 \quad (12) \quad \text{тенгламани} \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi \\ \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta \end{cases} \quad \text{кўринишда ёзиб оламиз.}$$

$\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = 0$  бўлгани учун  $\begin{cases} \xi = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \eta = c_2 \end{cases} \quad (c_2 = const)$  га эга бўламиз.

Агар  $\lambda_1 < 0$  бўлса, ҳаракат  $\eta = c_2$  горизонтал чизиги бўйлаб ҳар икки томондан  $\eta$  укига томон йўналган бўлади.  $\eta$  ўқининг, яъни  $\xi = 0$  --- тўғри чизигининг ҳамма нукталари мувозанат ҳолатидан иборат

Агар  $\lambda_1 > 0$  бўлса ҳаракат тескари йўналган бўлади.

2) характеристик тенгламанинг иккала илдизи ҳам нолга тенг бўлсин. Яъни

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = 0 & \xi = c_1 & c_1, \quad c_2 = const \\ \frac{d\eta}{dt} = 0 & \eta = c_2 \end{cases}$$

Бу холда  $\xi o \eta$  текисликдаги барча нукталар махсус нукта бўлади.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Холатлар текислиги деб нимага айтилади?
2. Кайси вақтда тургун тугунга эга бўламиз?
3. Кайси вақтда тургунмас тугунга эга бўламиз?
4. Кайси вақтда эгар типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
5. Кайси вақтда фокус типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
6. Кайси вақтда марказ типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
7. Кайси вақтда тургун тугилма типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
8. Кайси вақтда дикритик тугун типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
9. Траектория нима?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Кайси вақтда тургунмас тугунга эга бўламиз?
2. Кайси вақтда эгар типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
3. Кайси вақтда фокус типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
4. Кайси вақтда марказ типдаги махсус нуктага эга бўламиз?

### 1.3.2-в. ОЎзаки сўров учун саволлар

1. Кайси вақтда тургун тугилма типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
2. Кайси вақтда дикритик тугун типдаги махсус нуктага эга бўламиз?
3. Траектория нима?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўйимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольд Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

## КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск.Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

### 15.19. Ўқитиш усуллари қоидалари

#### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - миқдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### 1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини куйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқитётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### 1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб хурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;

- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

МАЪРЎЗА - 32, 33  
**Мавзу: Тургунлик назарияси**

**Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан: Оддий дифференциал тенгламалар**

**Ўқув соати: 2+2 соат (маъруза);**

**Ўқув машғулоти тури: маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.**

**Маъруза режаси:**

Нормал система, ечим, кузгалмас харкат, кузгалувчан харакат, тургун тургунмас харакатлар, асимптотик тургун, биринчи якинлашиш; характеристик тенглама ; гурвиц матрицаси. Раус- Гурвиц шартлари, нол ечимининг тургунлик шarti.

#### **Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

#### **Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакиллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқутиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқутиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқутиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиб бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб характерлаб беради;

- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлийдлиги;
- Амалий маълумотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

## • 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси

### • 1 босқич. Ўқув машғулотига кириш (10 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги,); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишга тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

### 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашга чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф этади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф этади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; қўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларга ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсаткичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишнинг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

## 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Нормал система, ечим, кузгалмас ҳаркат, кузгалувчан ҳаракат, тургун тургунмас ҳаракатлар, асимптотик тургун, биринчи яқинлашиш; характеристик тенглама ; гурвиц матрицаси. Раус- Гурвиц шартлари, нол ечимининг тургунлик шarti.

### 1.3.1. Маъруза матни

Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси берилган бўлсин яъни

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (1)$$

ёки вектор равишда

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2)$$

бунда  $\frac{dy}{dt} = \text{colon}(\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) \quad y(t) = \text{colon}(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$

$$f(t, y) = \text{colon}(f_1(t, y), f_2(t, y), \dots, f_n(t, y))$$

бир устунли матрицалар ёки координаталари  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$  вектор – функциялар.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \text{colon}(f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$n+1$  улчовли фазодаги  $G$  сохада  $f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$  функциялар

$t, y_1, y_2, \dots, y_n$  ларга нисбатан узлуксиз бўлсин ва  $G$  сохада тулик жойлашган  $D$  ёпик сохада  $f_i$  функциялар  $y_1, y_2, \dots, y_n$  ларга нисбатан липщиц шартини каноатлантирсин.

У холда (1) система  $t = t_0, \quad y_i(t_0) = y_i^0$  бошлангич шартларни каноатлантирувчи ягона

$$Y_i = Y_i(t, t_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) \quad \text{ёки}$$

$$t = t_0, \quad y(t_0) = y^0 \quad y = y(t) \text{ ечимга эга булади.}$$

(1) системанинг ҳар бир ечими моддий нуктанинг ҳаракат конунини билдиради шунинг учун уни ҳаракат деб атаймиз.

Бирор бошлангич шартна каноатлантирувчи (2) системанинг  $y = \varphi(t)$  ҳаракатга кузгалмас ҳаракат дейилади. Колган барча ҳаракатларга кузгалувчан ҳаракат дейилади.

Таъриф 1. Ҳар қандай  $E > 0$  учун шундай  $\delta = \delta(E) > 0$  микдорини топиш мумкин бўдаским  $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$  бўлганда исталган  $t_0 \leq t < +\infty$  учун

$$|y(t) - \varphi(t)| < E$$

шарт бажарилса,  $y = \varphi(t)$  ҳаракат ляпунов буйича тургун дейилади.

Таъриф 2. Агар  $\delta > 0$  сони учун  $|y(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta$  бўлганда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - \varphi(t)| = 0 \quad \text{бўлса} \quad y = \varphi(t) \text{ ҳаракат асимптотик тургун дейилади.}$$

Таъриф 3. Агар бирор  $E > 0$ ,  $t_0 \in (a, \infty)$  ва ихтиёрий  $\delta > 0$  учун ҳеч бўлмаганда битта шундай  $y_\delta(t)$  ечим мавжуд бўлсаким,  $t_1 = t_1(\delta) > t_0$  моментда

$$|y_\delta(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta \quad \text{бўлганда}$$

$$|y_\delta(t) - \varphi(t)| \geq E \quad \text{уринли бўлса}$$

$y = \varphi(t)$  ҳаракатга тургунмас ҳаракат дейилади

хусусий холда  $f(t,0) \equiv 0$  нол ечим -  $\varphi(t) \equiv 0$  (мувозанат холати) тургун дейилади, қачонким  $E > 0$  учун шундай  $\delta = \delta(E, t_0) > 0$  мавжуд бўлсаким

$|y(t_0)| < \delta$  бўлганда  $|y(t)| < E$   $t_0 < t < \infty$  бажарилса.

Хусусий холда  $|y(t_0)| < h$  бўлганда  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)| = 0$  бўлса нол ечим яъни

$y = \varphi(t) \equiv 0$  ечим Ляпунов маъносида асимптотик тургун дейилади.

$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$  системада  $y = x + \varphi(t)$  алмаштиришини олсак у холда

$$\frac{dx}{dt} + \frac{d}{dt} \varphi(t) = f(t, x + \varphi(t))$$

бунинг унг томонини  $x$  бўйича тейлор каторига ейсак, уни

$$\frac{dx}{dt} = x(t, x) \quad (3) \quad x(t, 0) = 0 \quad t \leq t$$

куринига келтириш мумкин.

Шундай кулиб, киритган алмаштириш  $y = \varphi(t)$  кузгалмас ҳаракатни, янги системанинг мувозанат холатига келтиради. Яъни  $y = \varphi(t)$  ҳаракатнинг тургунлик масаласи (3) системанинг  $x(t) \equiv 0$  нол ечимининг тургунлик масаласини урганишга келтирилади.

Шунга кура  $\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$

Системанинг унг томонини  $y_i(t) \equiv 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ) ечим атрофида тейлор каторига ёямиз

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j + \varphi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (4)$$

бунда  $\frac{df_i(t, 0, 0, \dots, 0)}{dy_i} = a_{ij} = \text{const}$  деб олинган. (4) системадан

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \quad (5)$$

системани тузамиз.

(5) системага (4) системанинг биринчи яқинлашиши дейилади. Куп ҳолларда (4) системанинг нол ечимини тургунлиги унинг биринчи яқинлашиш системасининг нол ечимнинг тургунлиги билан аникланади.

(5) система учун

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \dots & a_{3n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

характеристик тенгламани тузамиз. Фараз этайлик характеристик тенгламанинг илдизлари  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  бўлсин.

У холда

1. Агар (6) тенглама илдизларининг хақиқий қисмлари манфий бўлса, (5) системанинг нол ечими асимптотик тургун бўлади.
2. Агар (6) тенгламанинг илдизларидан ҳеч бўлмаганда бирининг хақиқий қисми мусбат бўлса, у холда (5) системанинг нол ечими тургунмас бўлади

Маълумки (6) тенглама  $\lambda$  га нисбатан  $n$  даражали алгебраик тенгламадан иборатдир.

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + a_3 \lambda^{n-3} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (7)$$



$\Delta(\lambda)$  дан тузилган куйидаги Гурвиц матрицасини тузамиз

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & 1 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & a_n & \end{pmatrix}$$

Гурвиц матрицасидан куйидаги детерминантларни тузамиз

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

Агар бунда  $\Delta_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ), булса (7) тенгламанинг хамма илдизларининг хакикий кисмининг манфий булишлигининг зарурий ва етарли шрти келиб чикади. зарурий шарт  $a_i > 0$

Агар  $n \leq 2$  булса бу шарт ерали шарт хам булади. (Раус- Гурвиц) шрти.

Мисол

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \quad \text{система ечимнинг тургунлигини текшириш}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha - \lambda & 5 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda^2 - (\alpha + 2)\lambda + 5 + 2\alpha = 0$$

зарурий ва етарли шарт

$$\begin{cases} \alpha + 2 < 0 \\ 2\alpha + 5 > 0 \end{cases} \quad \text{тенгсизликлари бажарилганлиги керак}$$

$$\alpha < -2 \quad \alpha > -\frac{5}{2} \quad -\frac{5}{2} < \alpha < -2$$

$\alpha$  нинг шундай кий

$$\text{Мисол 2.} \quad \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2x^2 \\ \dot{y} = x + 2y - x^2 \end{cases} \quad (8)$$

Махсус нукталарини топамиз

$$\begin{cases} 2x + y - 2x^2 = 0 & 1) x = 0 \quad y = 0 & (0,0) \\ x + 2y - x^2 = 0 & 2) x = 1 \quad y = 0 & (1,0) \end{cases}$$

биринчи якинлашиш

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

(0,0) махсус нукта (нол ечим) тургунмас тугун.

(1,0) махсус нуктани текшираимиз

$$\begin{cases} x = 1 + x \\ y = y_1 \end{cases}$$

алмаштиришини оламиз у холда (8) тенглама

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + y_1 - 2x_1^2 \\ \dot{y}_1 = -x_1 + 2y_1 - x_1^2 \end{cases}$$

биринчи якинлашиш

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + y_1 \\ \dot{y}_1 = -x_1 + 2y_1 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-(\varphi - \lambda^2) + 1 = 0 \quad \lambda^2 = 3 \quad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

демак махсус нукта эгар.

Мисол 3. 
$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + l^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt{1-6x} \end{cases}$$

Унг томонини Тейлор каторига ёямиз.

$$\ln(4y + l^{-3x}) = \ln(1 + (4y + l^{-3x} - 1)) = 4y + l^{-3x} - 1$$

$$\begin{cases} \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1 < x < 1) \\ l^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^4}{n!} + (1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots \end{cases}$$

$$\ln(4y + l^{-3x}) = \ln(1 + (4y + l^{-3x} - 1)) = 4y + l^{-3x} - 1 = 4y + 1 - 3x - 1 = -3x + 4y$$

$$2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x} = 2y - 1 + 1 + \frac{1}{3}(-6x) = -2x + 2y$$

биринчи якинлашиш

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 2y \end{cases} \quad \begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i}{2}$$

тургун фокус.

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системасини ёзинг.
2. Кузгалмас харкат деб, кандай ечимга айтилади.
3. Кузгалувчан харкат деб, кандай ечимга айтилади.
4.  $y = \varphi(t)$  харакат тургун булиши учун, кандай шартлар бажарилиши керак.
5.  $y = \varphi(t)$  харакат асимптотик тургун булиши учун, кандай шартлар бажарилиши керак.
6. Нол ечим асимптотик тургун булиши учун кандай шартлар бажарилиши керак.
7. Нормал системага мос булган биринчи якинлашиш тенгламаси кандай тузилади.
8. Биринчи якинлашиш тенгламалар системасининг характеристик тенгламасини тузинг.
9. Характеристик тенгламанинг илдизлари кандай булганда нол ечим асимптотик тургун булади.
10. Кайси вақтда нол ечим тургунмас булади
11. Гурвиц матрицаси кандай тузилади.
12. Раус-Гурвиц шартидан нимани аниклаш мумкин.
13. Нол ечимнинг тургун булишининг зарурий ва етарли шarti нимадан иборат.

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1.  $y = \varphi(t)$  ҳаракат тургун булиши учун, кандай шартлар бажарилиши керак.
2.  $y = \varphi(t)$  ҳаракат асимптотик тургун булиши учун, кандай шартлар бажарилиши керак.
3. Нол ечим асимптотик тургун булиши учун кандай шартлар бажарилиши керак.
4. Нормал системага мос булган биринчи якинлашиш тенгламаси кандай тузилади.
5. Биринчи якинлашиш тенгламалар системасининг характеристик тенгламасини тузинг.

### 1.3.2-в. ОЎзаки сўров учун саволлар

1. Кайси вақтда нол ечим тургунмас булади
2. Гурвиц матрицаси кандай тузилади.
3. Раус-Гурвиц шартидан нимани аниқлаш мумкин.
4. Нол ечимнинг тургун булишининг зарурий ва етарли шarti нимадан иборат.

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- **такрорлаш ва машқлар:** такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақкамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- **янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш:** янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўйимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- **илмий характердаги ишлар:** муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

## **15.20. Ўқитиш усуллари қоидалари**

### **1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари**

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;
- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнди ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқиётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок етиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

матларида берилган системанин нол ечимлари асимптотик тургун булади..

**МАЪРЎЗА - 34-35**

Мавзу: Биринчи тартибли хусусий ҳосилали чизикли дифференциал тенгламалар. Коши масаласи.

**Маърузага режа-топшириқлар**

**Фан:** Оддий дифференциал тенгламалар

**Ўқув соати:** 2+2 соат (маъруза);

**Ўқув машғулоти тури:** маъруза; янги билимларни мустаҳкамлаш ва ўрганиш.

**Маъруза режаси:**

Хусуий хосилали тенглама; тенглама тартиби; бир жинсли тенглама, бир жинсли булмаган тенглама оддий дифференциал тенгламалар системаси биринчи интегралар; умумий ечим, Коши масаласи

#### **Ўқув машғулоти мақсади:**

Ўқув фани тўғрисида умумий таъсуротлар бериш, Оддий дифференциал тенгламалари ва уни кейинчалик касбий фаолиятидаги роли.

#### **Ўқув машғулотнинг вазифалари:**

- *Ўргатувчи:* талабаларда қабул қилиш фаолиятини ташкил қилиш, янги материални бошланғич эсда қолдириш ва англаш; Оддий дифференциал тенгламаларнинг терминлари, ибораларини характерловчи элементлари; талабаларнинг математик фикрлашини ривожлантириш ва муаммоли масалаларни ечимини маҳоратини ошириш; математик масалаларни ечишда математик символларнинг хусусиятлари билан таништириш;
- *Ривожлантирувчи:* китоб матни билан ишлай билишлиги – мағзларини танлаб олиш, таҳлил қилиш; гаплар тузиш, ҳулоса чиқариш, материални талабаларнинг излаш фаолиятини стимуллаштириш; хусусийдан умумий ҳолга ўтиш усули билан текшириш; текшириш натижаларини таҳлил қилиб ва уни умумлаштира олишини ривожлантириш; аналитик - синтетик фаолиятнинг мантикий фикрлашини қўллаш; талабаларнинг ижодий маҳоратини шакллантириш;
- *Тарбияловчи:* актив фаолиятга, мустақил ишга жалб қилиш; гуруҳларда ишлаш қоидаларига риоя қила олиш; фанни ўрганишга қизиқишни ривожлантириш; Дифференциал тенгламаларни математик-коммуникатив курсни бир қисми сифатида тасавур бериш; жавобгарлик туйғуларини тарбиялаш, меҳнатсеварлик, индивидуал ишни жамоавий иш билан бириктириш, интизомлаштириш.

#### **Ўқитиш технологияси:**

- *Ўқутиш усуллари:* инструктаж; Маъруза, ақлий ҳужум, “Инсерт” техникаси;
- *Ўқутиш шакллари:* фронтал; жамоавий;
- *Ўқутиш воситалари:* Маъруза матни; жадваллар, мултимедия;
- *Ўқутиш шароитлари:* техник жиҳозлаштирилган аудитория;
- *Баҳолаш ва мониторинг:* ўғзаки савол-жавоб, блиц - сўров.

#### **Педагогик масалалар:**

- Фаннинг масалалари ва унинг ўқув фанлар системасидаги ўрни ва роли билан таништириш;
- Ўқув фаннинг тузулмаси ва тавсия этиладиган ўқув - методик адабиётларни тасвирлаш;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятларини очиқ бериш, баҳолаш шакли ва муддатлари;
- Фан маърузаси пайтида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий босқичларини характерлаб бериш ва умумий схемасини тушунтириш.
- Ўқитиш технологияси ривожланиши перспективасини характерлаб бериш;

#### **Ўқув фаолияти натижалари:**

- Фан маърузаси масалалари, мақсадлари ва номлари шаклланади;
- Дифференциал тенгламалари доирасидаги ютуқлар ёритилади;
- Фан соҳасида методик ва ташкилий хусусиятлари ҳамда баҳолаш шакли ва муддатлари айтилади
- Фан маърузасида ўқитиш жараёнини ташкил қилишнинг умумий схемасини кенгайтириб хатактерлаб беради;

- Фаннинг асосий таърифларини беради, Дифференциал тенгламалари фани маърузаларининг асосий йўналишлари берилади;
- Назарий билимларнинг тўлиқлиги, системалийлиги ва ҳаракатлиёлиги;
- Амалий маъулотларни бажаришда ўрганилган иборалар билан ишлай олишлиги;

## • 1.2. Маърузанинг хронологик харитаси

### • 1 босқич. Ўқув машғулотиға кириш (10 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* тайёргарликни текшириш (давомат, конспектнинг борлиги; ўзига ишонч, аниқлиги); керакли материалларни тарқатиш (конспект, тарқатма материаллар); маърузанинг мавзуси ва мақсадини баён қилиш; ўқув машғулотнинг ражаси билан таништириш; калит иборалар ва сўзлар, категориялар; интернет сайтлари ва адабиётлар рўйхати; ўқув натижалари ҳақида айтиш;
- *Талабалар фаолияти:* ўқув жойини тайёрлаш (талабалар борлиги; ташқи кўриниш; ўқув материаллар ва қўлланмалар); маърузанинг мавзуси ва мақсади билан танишиш; ўқув материаллини қабул қилишға тайёргарлик кўриш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* инструктаж; фронтал сўров; мустаҳкамловчи сўров.

### 2 босқич. Асосий қисм (60 дақиқа):

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мавзуга киритади; янги мавзуга доир ўтган фанлар ва машғулотларнинг мавзуларини еслашға чорлайди; маъруза матнини тарқатади, танишишни таклиф етади, “Инсерт” усули билан белгилар қўйишни таклиф етади; биринчи савол бўйича матн ўқилади; кўшимча ўқув материалларини айтиб боориш ва тушунча бериш; натурал объектларни намноён қилиш ва изоҳлаш; тушунарсиз саволларни аниқлаш ва тушинтириш; биринчи савол бўйича назар (шундай қилиб қолган саволларға ҳам);
- *Талабалар фаолияти:* янги мавзуда доир олдинги машғулотларда ва фанларда олган билимларни мустаҳкамлайди; ҳар бир калит ибора ва терминларни ешитиб, ёзиб бориб, конспект қилиб айтиб боришади; “Инсерт” усули билан белгилан ўқийдилар, аниқлик киритадилар, саволлар берадилар ва ўзаро;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* фронтал сўров блиц-сўров; аклий ҳужум, “Инсерт” техникаси.

### 3 босқич. Яқунловчи қисим (10 дақиқа)

- *Ўқитувчининг фаолияти:* мнавзу бўйича ҳулоса қилиш, талабаларнинг эътиборларини асосийларда жалб қилиш; қилинган ишнинг муҳимлигини айтиб ўтиш; алоҳида талабаларнинг бажарилган ишларини баҳолаш; ўзаро баҳолашнинг натижаларини чиқариш; ўқув машғулотнинг ютуқлик даражасини баҳолаш ва таҳлил қилиш; мустақил иш учун топшириқлар; баҳо кўрсатгичлари ва меъзонлари;
- *Талабалар фаолияти:* ишининг таҳлили; натижаларни олиш; технологик билимларни қўллаш; ўзаро баҳолашни ўтказиш, йўл қўйилган ҳатолар бўйича таҳлил ва аниқлик киритиш; мустақил иш топшириқларини ёзиб олиш;
- *Шакиллар, усулар, услублар:* гуруҳларда ишлаш, карточкаларда топшириқлар.

## 1.3. Ўқув-методик материаллар

**Калит сўзлар:** Хусуий хосилали тенглама; тенглама тартиби; бир жинсли тенглама, бир жинсли булмаган тенглама оддий дифференциал тенгламалар системаси биринчи интегралар; умумий ечим, Коши масаласи.

### 1.3.1. Маъруза матни

Фараз этайлик  $x_1, x_2, \dots, x_n$  узгарувчиларга боглик булган  $Z$  функция берилган булсин.

Таъриф. Номаялум функция, эрки узгарувчилар ва номаялум функциядан бу эрки узгарувчиларга нисбатан олинган хусусий хосилалари орасидаги муносабатлардан тузилган тенгламаларга хусусий хосилали дифференциал тенглама дейилади. Бундай тенгламанинг умумий куруниши

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, Z \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial x_n^{k1..}}\right) = 0 \quad (1)$$

дан иборат.

Бунда  $F$  - уз аргументларининг узлуксиз функциядир.

Хусусий хосилали дифференциал тенгламада катнашган хосилаларнинг энг юкори тартибига берилган дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади.

$n$ - та  $x_1, x_2, \dots, x_n$  эрки узгарувчиларга боглик булган биринчи тартибли хусусий хосилани дифференциал тенгламанинг умумий куруниши

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, Z \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0 \quad (2)$$

дан иборат.

Агар бунда  $\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) белгилашни киритсак (2) тенгламани

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0 \quad (3)$$

курунишда ёзиш мумкин.

Агар хусусий хосилали дифференциал тенглама (хусуий хосилали дифференциал тенглама) 2та эрки узгарувчига боглик булса, одатда уни  $x$  ва  $y$  билан белгилаб,  $z$  дан олинган хусусий хосилаларни

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q \text{ деб, уни}$$

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \equiv F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (4)$$

курунишда ёзадилар.

(1) тенгламада эрки узгарувчи, номаялум функция ва хусусий хосилалардан бир нечтаси катнашмаслиги мумкин. Лекин у хусусий хосилага дифференциал тенглама булса, албатта унда хусуий хосилалардан ҳеч булмаганда биттаси катнашиши шарт. Икки узгарувчига боглик булган иккинчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенгламанинг умумий куруниши.

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (5)$$

ёки  $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$

дан иборат

Умуман  $n$ - та эрки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  узгарувчиларга боглик булган  $m$ - та  $z_1, z_2, \dots, z_m$  функциялар берилган булса, бу эрки узгарувчилар, номаялум



функциялар ва номаълум функцияларнинг хусусий хосилаларини боғлавчи тенгламалар системаси

$$F_i \left( x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m, \frac{\partial r_1}{\partial x_1}, \frac{\partial r_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial r_m}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 r_1}{\partial x_1^2} \right) = 0 \quad (6)$$

$$(i = \overline{1, m})$$

Куринишда булади.

Умуман (6) куринишда тенгламалар системасини ечиш, тулик равишда хал этилмаган (6) нинг баъзи бир хусусий куринишларида масалан (6) да катнашаётган функциялар маълум бир бошлангич кийматлар атрофида

Аналитик функция булган холда Ковалевская томонидан ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги исбот этилган ва у ечимни аналитик куринишида топади. Кейинчалик акад петровский (6) ни аналитик булмаган холда ҳам ечимнинг мавжудлигина исбот этади. Хусусий хосилали дифференциал тенгламани хусусий хосилали дифференциал тенглама интеграллаш унинг ҳамма ечимларини топишдан иборатдир. Яъни уни айнан каноатлантирувчи ҳамма функцияларни топишдан иборатдир. Хусусий хосила дифференциал тенгламалар чексиз куп ечимларга эгадирлар хакикатан ҳам, хар кандай оддий дифференциал тенгламани, эркли узгарувчилар сони  $n=1$  та булган хусусий хосилали дифференциал тенглама деб карси мумкин. Маълумки, оддий дифференциал тенгламалар чексиз куп ечимларга эга. Шунинг учун ҳам эркли узгарувчилар сони 2 ва ундан ортик булган хусусий хосилали дифференциал тенгламанинг ечимларини чексиз куплиги келиб чиқади. 2та  $x$  ва  $y$  эркли узгарувчиларга боғлиқ булган ва  $u$  га нисбатан хусусий хосила катнашмаган биринчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенглама

$$F \left( x, y, z, \frac{\partial r}{\partial x} \right) = 0 \quad (7)$$

берилган булсин.

Бу тенгламада факат битта  $\frac{\partial r}{\partial x}$  хосила катнашиб, у нинг узгармас кийматларида (7)

тенгламани номаълум  $z$  функция ва эркли узгарувчи  $x$  нинг оддий дифференциал тенгламаси деб караш мумкин. Лекин бу оддий тенгламалар  $y$  нинг турли кийматларида турли дифференциал тенгламаларни берди. Шунинг учун бунда уни параметр учун кабул килиш мумкин фараз этайлик (7) тенгламанинг умумий ечими

$$Z = \varphi(x, y, c) \quad (8)$$

булсин.  $C$  нинг узгармас кийматларида (8), (7) тенгламани каноатлантиради ва бу ечим параметр  $u$  га боғлиқ булади. (8), нинг умумий ечими булишлиги учун ундаги  $c$ ,  $x$  га нисбатан узгармас булишлиги зарур ва етарлидир яъни  $c$ -у нинг функцияси булиши мумкин:

$$c = \psi(y)$$

У холда (7) тенгламанинг умумий ечими

$$Z = \varphi(x, y, \psi(y))$$

булади.

Бунда  $\psi(y)$  ихтиёрий функциядир.

Мисол

$$x \frac{\partial r}{\partial x} - z = -x^2 y^2$$

бунда уни параметр десак, бу  $x$  ва  $z$  га нисбатан ОДТ деб караш мумкин.

$$\frac{dr}{dx} - \frac{z}{x} = -xy^2$$

Бу тенгламанинг умумий ечими

$$Z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[ - \int e^{\int \frac{dx}{x}} xy^2 dx + \psi(y) \right] = e^{\ln x} \left[ - \int e^{\int \frac{dx}{x}} xy^2 dx + \psi(y) \right] = x \left[ -x^2 y^2 + \psi(y) \right]$$

$$Z = x\psi(y) - x^2 y^2$$

ҳақиқат ҳам

$$x(\psi(y) - 2xy^2) - x\psi(y) + x^2 y^2 \equiv -x^2 y^2$$

шундай қилиб биринчи тартибли хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламанинг умумий ечими битта ихтиёрий функцияси боғлиқдир.

Мисол 2.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

Бу тенглик курсатадимики  $\frac{\partial r}{\partial y}$  ифода  $x$  га боғлиқ эмас уни  $y$  га боғлиқ деб қараш мумкин.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \psi_1(y) \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \psi_1(y)$$

буни интегралласак

$$z = \underbrace{\int \psi_1(y) dy}_{\psi(y)} + \varphi(x) = \varphi(x) + \psi(y)$$

$$z = \varphi(x) + \psi(y)$$

иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар дифференциал тенгламанинг умумий ечими  $n$  –та ихтиёрий функциялардан иборат деб айтиб бўлмайди.

Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар бир жинсли чизикли дифференциал тенглама.

Биринчи тартибли хусусий ҳосилалар бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг умумий курилиши

$$X[z] \equiv X_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0 \quad (1)$$

Бунда номаълум  $z$  ва  $X_i (i = \overline{1, n})$  функциялар  $x_1, x_2, \dots, x_n$  узгарувчиларнинг узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи функцияларидир.

Баъриф. (1) тенгламанинг ечими деб,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  эркали узгарувчиларга боғлиқ бўлган шундай ихтиёрий функцияларга айтиладимики, бу функция (1) тенгламани айнан қаноатлантирсин.

(1) тенгламадан ташқари қуйидаги оддий дифференциал тенгламалар системасини қараймиз

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} \quad (2)$$

(2) системага, (1) тенгламага мос бўлган, оддий дифференциал тенгламалар системаси дейилади. (2) системанинг биринчи интеграллари

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_i \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (3)$$

бўлсин.

Исбот этамиким, (1) ва (2) тенгламалар системасини ечиш узора эквивалентдир.

Теорема 1. (2) системанинг ихтиёрий биринчи  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$  интегралнинг чап кисми, хусусий хосилалари (1) тенгламанинг ечими булади.

Исбот. Биринчи интеграл таърифига кура (2) системанинг ихтиёрий интеграл чизиги буйлаб  $\psi$  функция айнан узгармас санга тенг булади. Яъни  $\psi = c$  демак

$$d\psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx_i \equiv 0 \quad (4)$$

(3) системадан куйидаги нормал системага эга буламиз. Бунда  $x_n$  эркин узгарувчи ва  $X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$  булмасин

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1}{X_n}, \quad \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{X_2}{X_n}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}}{X_n} \quad (5)$$

(5) дан  $dx_i = \frac{X_i}{X_n} dx_n$  буни (4) га куйсак

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \cdot \frac{X_i}{X_n} dx_n \equiv 0 \quad \text{ёки}$$

$$X_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \equiv 0 \quad (6)$$

хосил булади.

Теорема 2. (1) тенгламани каноатлантирувчи ихтиёрий  $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Функцияни узгармас санга тенглаштирсак, у (2) системанинг биринчи интегралли булади.

Исбот.  $z = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (1) тенгламанинг ечими булсин. У холда (6) айният уринлидир.  $\psi$  нинг тулик дифференциали

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \psi}{\partial x_n} dx_n = \left( \overline{X_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \overline{X_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \dots + \overline{X_n} \frac{\partial \psi}{\partial x_n} \right) \frac{1}{X_n} dx_n$$

Бундан (6) га кура

$$d\psi \equiv 0$$

$d\psi \equiv 0$  яъни (2) нинг ихтиёрий интеграл чизиги буйлаб

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = c$$

Ушбу  $\phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = c$

Ифода ҳам (2) нинг биринчи интегралидан иборат. (Бунда  $\phi$  ихтиёрий дифференциалланувчи функциядир) чунки (2) системанинг интеграл чизиги буйлаб, барча  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  функциялар узгармас санга тенг булади шунинг учун  $\phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  функция ҳам (2) системанинг интеграл чизиги буйлаб узгармас санга тенг булади. Демак  $z = \phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  бунда  $\phi$ -ихтиёрий дифференциалланувчи функция, (1) тенгламанинг умумий ечими булади.

(2) системанинг биринчи интегралларидан тузилган  $\phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  функцияни караймиз. Бунда  $\phi$  уз аргументларининг узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи функцияси булиб,  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$  ларни узлари эса эркин  $x_1, x_2, \dots, x_n$  узгарувчиларга нисбатан узлуксиз ва узлуксиз дифференциалланувчи функция булсин.

У холда (1) тенгламанинг умумий ечими  $z = \phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  дан иборат булади.

Хакикатдан ҳам

$$\begin{aligned}
X[z] &\equiv X[\phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})] \equiv X_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \phi}{\partial x_n} = X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + \\
&+ X_2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} \left[ X_1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + X_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \right] = \\
&\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_i} X[\psi_i] = X[\psi_1] \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} + X[\psi_2] \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} + \dots + X[\psi_{n-1}] \frac{\partial \phi}{\partial \psi_{n-1}} \equiv 0
\end{aligned}$$

чунки  $X[\psi_i] \equiv 0 \quad i = \overline{1, n-1}$

Демак  $z = \phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$  (1) тенгламанинг ечими. Унга (1) тенгламанинг умумий ечими деб қараймиз.

Мисол:  $xz \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}$$

Бунинг биринчи интегралларини топамиз.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \ln y = \ln x + \ln c_1$$

$$c_1 = \frac{y}{x} \quad \psi_1 = \frac{y}{x} \quad \frac{dy}{yz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$$

$$d(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

$$\psi_2 = (x^2 + y^2 + z^2)$$

у қолда умумий ечим

$$u = \phi\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right)$$

дан иборат.  $\psi_1 \psi_2$

Текшириб қурайлик:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} + 2x \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} \quad xz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} + 2y \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = 0 \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} + 2z \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2}$$

Қулайтириб ҳадлаб кушсак:

$$-\frac{xyz}{x^2} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} + 2x^2 z \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} + \frac{yz}{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} + 2y^2 \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} - (2x^2 z + 2y^2 z) \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} = 0$$

тенгламани қаноатлантиради.

Мисол 2.  $(x^3 + 3xy^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 2y^2 z$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x^3 + 3xy^2} &= \frac{dy}{2y^3} = \frac{dz}{2y^2z} \\ \frac{dy}{2y^3} &= \frac{dy}{2y^2z} \quad \ln z = \ln y + \ln c_1 \quad c_1 = \frac{z}{y} \quad 2.3 \\ \frac{dx}{x^3 + 3xy^2} &= \frac{dy}{2y^3} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{3}{2y}x + \frac{x^3}{2y^3} \quad 1.2 \\ \frac{dx}{dy} - \frac{3}{2y} &= \frac{x^3}{2y^3} \quad \text{берилган тенглама} \quad x^{-2} = u \\ x^{-3}x^1 - \frac{3}{2y}x^{-2} &= \frac{1}{2y^3} \\ u^1 + \frac{3}{y}u &= -\frac{1}{y^3} \\ u = \frac{1}{y^3}(-y + c_2) \quad \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{y^3}(-y + c_2 \\ c_2 = \frac{y^3}{x^2} &= y \\ \phi\left(\frac{z}{y}, \frac{y^3}{x^2} + y\right) &= 0 \quad \frac{z}{y} = f\left(\frac{y^3}{x^2} + y\right) \\ z = yf\left(\frac{y^3}{x^2} + y\right),, \end{aligned}$$

Биринчи тартибли хусусий хосилали бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенглама учун Коши масаласи.

Квазичизикли

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \quad (1)$$

$$\text{тенгламанинг шундай } z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, z) = c_i \quad i = \overline{0, n-1} \quad (2)$$

булсин

Бунда  $x_n = x_n^0$  шуйсак

$$\psi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^0, z) = \overline{\psi_i} \quad (3)$$

фараз этайлик (3) ни  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, z_0)$  нукта атрофида  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z$  ларга нисбатан ечиш мумкин бўлсин. Яъни

$$\begin{aligned} z &= \omega_0(\overline{\psi_0}, \overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}},) \\ x_i &= \omega_i(\overline{\psi_0}, \overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}},) \end{aligned} \quad (4)$$

Бу холда исбот этишимиз мумкинким Коши шартини жаноатлантирувчи (1) тенгламани ечими

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, z) \equiv \omega_0(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) - \varphi[\omega_1(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}), \dots, \omega_{n-1}(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})] = 0$$

дан иборат бўлади.

Мисол1.  $z \frac{\partial r}{\partial x} + z \frac{\partial r}{\partial y} = y - x \quad x = 1, \quad z = y^2 \quad \frac{dx}{z} = \frac{dy}{-z} = \frac{dz}{y - x}$

$$dx = -dy \quad x + y = c_1$$

$$x dx + y dy + z dz = 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 = c_2$$

$$\psi_1 = x + y$$

$$\psi_0 = x^2 + y^2 + z^2 \quad x = 1 \quad \frac{\partial a}{\partial a} \quad 1 + y = \overline{\psi_1}$$

$$1 + y^2 + z^2 = \overline{\psi_0}$$

$$y = \overline{\psi_1} - 1$$

$$z^2 = \overline{\psi_0} - 1 - y^2 = \overline{\psi_0} - 1 - (\overline{\psi_1} - 1)^2 = \overline{\psi_0} - \overline{\psi_1}^2 + 2(\overline{\psi_1} - 1)$$

$$\psi_0 - \psi_1^2 + 2(\psi_1 - 1) - (\psi_1 - 1)^4 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 = (x + y)^2 - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^4$$

$$z^2 = 2xy - 2(x + y - 1) + (x + y - 1)^4$$

ҳақиқатдан ҳам  $x = 1$  бўлса

$$z^2 = y^4 \quad z = y^2, \dots$$

Мисол (1204)

$$x \frac{\partial r}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial r}{\partial y} = z \quad x + y = 2z \quad xz = 1$$

$$y = \frac{2}{x} - x \quad z = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xz + y} = \frac{dz}{z}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \quad \ln z = \ln x + \ln c_1 \quad z = c_1 x \quad c_1 = \frac{z}{x} \quad \psi_1 = \frac{z}{x}$$

1.3

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{xz + y} \quad \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = c_1 x$$

1.2

$$y = x(c_1 x - c_2) = x(z - c_2)$$

$$c_2 = -\frac{y}{x} + z \quad \psi_2 = z - \frac{y}{x}$$

$$z = \frac{1}{x} \quad \overline{\psi_1} = \frac{x}{x} = \frac{1}{x^2}$$

$$\overline{\psi_2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \left( \frac{2}{x} - x \right) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \quad x^2 = \frac{1}{\overline{\psi_1}}$$

$$\psi_2 = 1 + \sqrt{\psi_1} - 2\psi_1, \psi_2 - 1 + 2\psi_1 = \sqrt{\psi_1}$$

$$(\psi_2 - 1 + 2\psi_1)^2 = \psi_1$$

$$\frac{z}{x} = \left( z - \frac{y}{x} - 1 + 2\frac{r}{x} \right)^2$$

$$xz = (xz - x - y + 2z)^2$$

### 1.3.2-а. Фронтал сўров учун саволлар

1. Хусусий хосилали дифференциал тенглама деб қандай тенгламага айтилади?

2. Биринчи тартибли хусусий хосилали дифференциал тенглама деб қандай тенгламага айтилади?

3. Хусусий хосилали тенгламанинг тартиби қандай аниқланди?

4. Биринчи тартибли хусусий хосилали бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг умумий қурилишини ёзинг.

5. Бир жинсли тенгламага мос бўлган оддий дифференциал тенгламалар системасини ёзинг.

6. Бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламага мос бўлган оддий дифференциал тенгламалар системасининг биринчи интеграллари, бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламанинг ечим бўладими?

7. Тескарисичи

8. Бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими қандай топилади?

9. Бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенглама учун Коши масаласини айтинг.

10. Бир жинсли бўлмаган хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламанинг умумий қурилишини қандай?

11. Бир жинсли бўлмаган хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламани бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламага келтиринг.

12. Бир жинсли бўлмаган хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими қандай топилади?

13. Бир жинсли бўлмаган хусусий хосилали чизикли дифференциал тенглама учун Коши масаласи қандай қўйилади?

### 1.3.2-б. Блиц-сўров учун саволлар

1. Бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламага мос бўлган оддий дифференциал тенгламалар системасининг биринчи интеграллари, бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламанинг ечим бўладими?

2. Тескарисичи?

3. Бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими қандай топилади?

4. Бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенглама учун Коши масаласини айтинг.

### 1.3.2-в. Ойзаки сўров учун саволлар

1. Бир жинсли бўлмаган хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламани бир жинсли хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламага келтиринг.

2. Бир жинсли бўлмаган хусусий хосилали чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими қандай топилади?

3. Бир жинсли бўлмаган хусусий хосилали чизикли дифференциал тенглама учун Коши масаласи қандай қўйилади?

### 1.3.3. Мустақил иш учун топшириқлар

- *такрорлаш ва машқлар*: такрорлаш, ўз-ўзини текшириш, тақлил, пайта ишлаш, мустақамлаш, эслаб олиш, чуқурлаштириш;
- *янги материалларнинг мустақил ўзлаштириш*: янги адабий ва интернет материаллар, конспект ўқимчаси; мустақил иборалар тузиш;
- *илмий характердаги ишлар*: муаммоли қолатлар, тестлар, саволлар, топшириқлар тузиш; топшириқларни бажариш.

### 1.3.4. Карточкалар учун тестлар

### 1.3.5. Экранга таянч материалларни кўрсатиш (слайдлар)

- Презентация

### 1.3.6. Тавсия етилган адабиётлар

#### АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР

1. Салохитдинов М.С. Насриддин Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольд Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибилов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 15.21. Ўқитиш усуллари қоидалари

### 1.4.1. Ақлий ҳужум қоидалари

- Ҳеч қандай ўзаро баҳолаш ва танқид;
- Таклиф етилаётган ғояларни баҳолашдан ўзингни тий, ҳатто улар фантастика ва иложи йўқ бўлса ҳам – ҳаммаси мумкин;



- Танқид қилма – ҳамма айтилган ғоялар бир хилда;
- Баён қилувчи гапини бўлма;
- Изоҳ беришдан ўзингни тий;
- Мақсад бу - микдор;
- Қанча ғоялар кўп бўлса чунча яхши: янги ва зарур ғоя туғулиши имконияти кўпроқ
- Агар ғоялар такрорланса ўқсинма,
- Тасаввурингга эрк бер;
- Сенда яралган ғояларни ташлама, агал улар сенинг назарингда қабул қилинган схемага тегишли бўлмаса ҳам;
- Бу муаммо аниқ усуллар билан ечилади деб ўйлама.

#### **1.4.2. “Инсерт” техникаси қоидалари**

- Матнни ўқиб, уларда саволлат туғдираётган жойларни, уларни билимларига мос келмаётган ва мос келмаётган жойларни қалам билан белгилаб қўйилади;
- “Инсерт” жадвалини қуйидаги белгилашлар билан тўлдириш:  
Агар «!» бўлса сиз ўз билимингизга ёки сиз ўйлаган фикрга тўғри келмаётганини ўқияпсиз;  
Агар «—» бўлса сиз ўз билимингизга ёки тўғри деб ўйлаганингизга мутлақо зид бўлганини ўқияпсиз;  
Агар «+» бўлса сиз ўқитётганингиз сиз учун янгилик;  
Агар «?» бўлса, сиз ўқитётганингиз сиз учун тушунарсиз ёки сиз бу саволга янада кўпроқ маълумотлар олишни истайсиз.

#### **1.4.3. Гуруҳларда ишлаш қоидалари**

- Ҳамма ўз дўстларини тинглаши керак, унга яхши муносабатда бўлиб ҳурмар кўрсатиши керак;
- Ҳамма актив ҳаракат қилиши лозим; берилган топшириққа нисбатан биргаликда ва жавобгарлик билан ишлаши керак;
- Ҳар ким ўзига керак пайтда ёрдам сўраши керак;
- Ҳар ким ундан ёрдам сўралганда ёрдам кўрсатиши керак;
- Гуруҳнинг иш натижаларини баҳолашда иштирок этиши лозим;
- Биз бир кемадамиз, ўзгаларга ёрдам бериб ўзимиз ўрганамиз, шуни ҳар ким тушуниши лозим;

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI**

**ALISHER NAVOIY NOMIDAGI  
SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI**

**DIFFERENTIAL TENGLAMALAR KAFEDRASI**

# ***Differensial tenglamalar***

***yo'nalish: 5460100 – matematika***

***O'quv-uslubiy majmua***

**AMALIY MASHG'LOTLAR**

Tuzuvchilar: Ya. Muxtorov

F.R. Tursunov

D.S. Shodiyev

**SAMARQAND – 2010**

Ya. Muxtorov., F.R.Tursunov., D.S.Shodiyev «Differensial tenglamalar» fanidan o'quv – uslubiy majmua («5460100 - Matematika» ta'lim yo'nalishi bakalavr talabalari uchun). O'quv - uslubiy majmua. – Samarqand: SamDU nashri, 2010. – bet.

«Differensial tenglamalar» fanidan ushbu o'quv – uslubiy majmua Samarqand davlat universitetining «Differentsial tenglamalar» kafedrasida tayyorlangan. Majmua «Differensial tenglamalar» fanini o'rganish jarayonida talabaning mustaqil ishlashini ta'minlovchi o'quv-uslubiy materiallarni o'z ichiga oladi hamda talaba olgan bilimining sifatini doimo nazorat qilishni ta'minlaydi.



**Mashg'ulot - 1**  
**Mavzu: Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli**  
**differentensial tenglamalar**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminologiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik

qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.1 Misol va mashqlar namoishi**

$G \subset \mathbb{R}^2$  sohada aniqlangan va uzluksiz  $f(x,y)$  funksiya berilgan bo'lsin, u holda

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

tenglama hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglama deyiladi.

Agar  $[a,b]$  oraliqda o'z hosilasi bilan aniqlangan  $y=y(x)$  funksiya shu oraliqda (1) tenglamani ayniyatga aylantirsa, bunday funksiyaga (1) differensial tenglamaning yechimi deyiladi.

Ko'pincha (1) tengmani to'la tekshirish uchun shu tenglamaga  $G$  sohada,  $f(x, y) \neq 0$  bo'lganda, teng kuchli bo'lgan

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)} \quad (2)$$

«to'ntarilgan» tenglama ko'riladi; bu tenglama (1) tenglamaning yechimini  $\frac{1}{f(x, y)} = 0$

ga aylantiruvchi  $(x, y)$  nuqtalar atrofida tekshirishga imkon beradi.

Differensial tenglama yechimining grafigi integral chiziq deyiladi.

Differensial tenglamalar nazariyasida boshlang'ich shart yoki Koshi masalasi muhim rol o'ynaydi.

(1) differensial tenglamaning barcha yechimlari orasida shunday  $y=y(x)$  yechimni topish kerakki, bu yechim boshlang'ich  $y(x_0)=y_0$  shartni qanoatlantirsin, bu yerda  $x_0$  va  $y_0$  berilgan boshlang'ich qiymatlar va

$$(x_0, y_0) \in G.$$

Koshi masalasi qisqacha qo'yidagicha yoziladi:

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0 \quad (3)$$

Birinchi tartibli

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

normal shakldagi differensial tenglama deyiladi, bu yerda  $M(x, y), N(x, y)$   $G$  sohadan olingan uzluksiz funksiyalardir.  $(x_0, y_0) \in G$  nuqta maxsus nuqta deyiladi, agar  $M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$  bo'lsa, sohaning boshqa nuqtalari maxsusmas nuqtalar deyiladi.

Differensiallanuvchi  $y=y(x), x \in [a, b]$  funksiyaga (yoki  $x=x(y), y \in [c, d]$  funksiyaga) (4) tenglamaning yechimi deyiladi, agar u tenglamani  $[a, b]$  (yoki  $[c, d]$ ) oraliqda ayniyatga aylantirsa.

Agar  $(x_0, y_0) \in G$  maxsusmas nuqta bo'lsa, u holda shu nuqtaning qandaydir atrofida (4) tenglama quyidagi tenglamalarni birortasiga ekvivalent bo'ladi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}$$

(4) tenglama uchun Koshi masalasi (1) tenglamaniqi kabi qo'yiladi.

Agar (3) masalasining ixtiyoriy ikki  $y = y_1(x), x \in [a_1, b_1]$  va  $y = y_2(x), x \in [a_2, b_2]$  yechimi uchun  $x_0$  nuqtaning  $\varepsilon$  atrofida  $|x - x_0| < \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) bo'lganda  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  ayniyat bajarilsa, (3) Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar  $f$  funksiya o'zining xususiy  $\frac{\partial f}{\partial y}$  hosilasi bilan birorta  $(x_0, y_0)$  nuqta atrofida

uzluksiz bo'lsa, (3) Koshi masalasi  $[x_0 - h, x_0 + h]$  oraliqda aniqlangan yagona yechimga ega bo'ladi.

Agar ixtiyoriy  $(x_0, y_0) \in G$  nuqta uchun  $y_0 = \varphi(x_0, c)$  tenglama  $c_0 = u(x_0, y_0)$  yechimga ega bo'lsa va  $y_0 = \varphi(x, c_0)$  funksiya (3) Koshi masalasining yechimi bo'lsa,  $y = \varphi(x, c)$  uzluksiz funksiya (1) tenglamaning  $G$  sohadagi umumiy yechimi deb aytiladi. Ko'pincha tenglamaning yechimini  $\Phi(x, y, c) = 0$  oshkormas shaklda tuzish mumkin.

Agar  $G$  sohada aniqlangan  $u(x, y) = c$ ,  $(x, y) \in G$  funksional munosabat (1) tenglamaning umumiy yechimni aniqlasa, bu munosabatga (1) tenglamaning  $G$  sohadagi umumiy integrali deb ataladi.

Agar yechimning xar bir nuqtasida Koshi masalasi yagona yechimga ega bo'lsa, bunday yechim xususiy yechim deyiladi. Aks holda, ya'ni agar yechimning xar bir nuqtasida Koshi masalasining yagonaligi bajarilmasa, bunday yechim maxsus yechim deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimini topishga differensial tenglamani integrallash deyiladi.

### ***I - mashg'ulot. Birinchi tartibli sodda differensial tenglamalar***

Birinchi tartibli eng oddiy differensial tenglama analizda uchraydi: berilgan  $f : (a, b) \rightarrow R$  uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish masalasi

$$y' = f(x) \quad (5)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi  $y = y(x)$ ,  $x \in (a, b)$  funksiyaning topish masalasiga teng kuchlidir. (5) tenglamaning  $a < x < b$ ,  $|y| < \infty$  sohada aniqlangan umumiy yechimi (Koshi shaklidagi umumiy yechimi) quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$y = \int f(x) dx + c, \quad x \in (a, b) \quad (6)$$

Bu yerda  $c$  - ixtiyoriy o'zgarmas,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $y_0 \in R$ .

Agar  $f$  funksiya  $x = \alpha \in (a, b)$  nuqtada uzilishga ega bo'lib, oraliqning qolgan hamma nuqtalarida uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda (6) formula yordamida (5) tenglamaning umumiy yechimini  $a < x < \alpha$ ,  $|y| < \infty$  va  $\alpha < x < b$ ,  $|y| < \infty$  sohalarda aniqlash mumkin.  $x = \alpha$  esa «to'ntarilgan» tenglamaning yechimi bo'ladi.

Bu  $x = \alpha$  chiziq (6) integral chiziqlar oilasining  $\int f(s) ds$  integralning xususiyatiga qarab, asimptotikasi yoki o'ramasi bo'ladi.

Tenglamalarni integrallang va integral chiziqni yasang.

1-misol.  $y' = \frac{1}{x^2 - 4}$ ;  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

$f(x)$  funksiya  $]-\infty, -2[$ ,  $]-2, +2[$ ,  $]+2, +\infty[$  oraliqlarda aniqlangan va uzluksiz.  $x = \pm 2$  funksiyaning cheksiz uzilish nuqtalari. Bu tenglamaning aniqlanish sohasidagi umumiy yechimi

$$y = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

$x = \pm 2$  «to'ntarilgan» tenglamaning integral chizig'i bo'ladi va chiziqlar umumiy yechimga kiruvchi integral chiziqlar oilasining asimptotasi bo'ladi.

2-misol.  $y' = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$  tenglamaning umumiy yechimi

$$y = \arcsin \frac{x}{3} + c, \quad |x| < 3.$$



$x = \pm 3$  «to'ntarilgan» tenglamaning maxsus yechimi va bu yechimlar umumiy yechimga kiruvchi integral chiziqlar oilasining o'ramasi bo'ladi.

Endi, erkli o'zgaruvchi qatnashmagan

$$y' = f(y) \quad (7)$$

tenglamani qaraymiz.

$f(y) \neq 0$  bo'lganda, (7) ga teng kuchli bo'lgan «to'ntarilgan» tenglamani qaraymiz:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad (8)$$

bu tenglama uchun yuqorida ko'rib o'tilgan usulni ko'llaymiz.

$f: (c, d) \rightarrow R$  uzluksiz va  $(c, d)$  da nolga teng emas deb faraz qilamiz. U holda (8) tenglamaning  $|x| < +\infty$ ,  $c < x < d$  sohadagi umumiy yechimi (Koshi shaklidagi umumiy yechimi) quyidagicha bo'ladi:

$$x = \int \frac{1}{f(y)} dy + c, \text{ yoki } x = \int_{y_0}^y \frac{1}{f(t)} dt + x_0$$

Agar  $f(y) \neq 0$   $\beta \in (c, d)$  nuqtalarda nolga aylansa, u holda  $y = \beta$  (7) tenglamaning yechimi bo'ladi.

3-misol.  $y' = 4y^{3/4}$ ,  $f(y) = 4y^{3/4}$   
 $f(y)$  funksiya  $y \geq 0$  bo'lganda aniqlangan va uzluksiz, hamda  $f(0) = 0$ . «Tuntarilgan» tenglama  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}}$  bo'lib, yechimi  $(x + c) = \sqrt[4]{y}$  bo'ladi.

Demak,  $y = (x + c)^4$ ,  $x \geq 0$  umumiy yechim,  $y = 0$  maxsus yechim.

Differensial tenglamalarni integrallashda almashtirishlar muhim rol o'ynaydi, masalan

$$y' = f(ax + by) \quad (9)$$

Tenglama  $z = ax + by$  almashtirish yordamida (7) tenglamaga keltiriladi. Bu yerda  $z$  yangi noma'lum funksiya.

4-misol.  $y' = 4\sqrt[4]{(y - x)^3} + 1$ ,  $[z = y - x, y' = z' + 1] \Rightarrow z' = 4\sqrt[4]{z^3}$   
 3 misolni yechishda qo'llangan usuldan foydalanib:  
 $z = (x + c)^4$ ,  $x \geq -c$ ,  $z = 0$  ni hosil qilamiz. Eski o'zgaruvchilarga qaytsak, berilgan tenglamaning  $y = x + (x + c)^4$ ,  $x \geq -c$ ,  $y = x$  yechimini hosil qilamiz.

*Differensial tenglamalarni tuzish*

**Bitta parametrta bog'liq bo'lgan**

$$\Phi(x, y, c) = 0 \quad (10)$$

Egri chiziqlar oilasi berilgan bo'lsin, bu yerda  $\Phi$  differensiallanuvchi funksiya. Egri chiziqlar oilasining differensial tenglamasini tuzish uchun  $y$  ni  $x$  ning funksiyasi deb qarab (10) tenglikni differensiallaymiz:

$$\Phi'_x + \Phi'_y \frac{dy}{dx} = 0.$$

So'ngra (agar  $C$  yo'qolmasa) hosil bo'lgan tenglama va (10) tengmadan parametr  $C$  ni yo'qotsak, berilgan egri chiziqlar oilasining differensial tenglamasi hosil bo'ladi.

5-misol.  $y = (x - c)^3, y' = 3(x - c)^2 \Rightarrow y' = 3y^{\frac{2}{3}}.$

6-misol.  $y^2 + cx = x^3, 2yy' + c = 3x^2 \Rightarrow 2xyy' - y^2 = 2x^3.$

Agar egri chiziqlar oilasi bir necha parametrga bog'liq bo'lsa, u holda shu oila differensial tenglamasini tuzish uchun parametrlar nechta bo'lsa, shuncha marotaba ketma-ket hosila olinadi. So'ngra olingan hosilalar va egri chiziq oilasi tenglamasidan parametrlarni yo'qotish kerak.

### Mustaqil yechish uchun misollar

Differensial tenglamalarni integrallang va integral chiziqlarni chizing.

1.  $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}};$     2.  $y' = ctgx;$     3.  $y' = \frac{x}{\ln x};$
4.  $y' = \sin 5x \cos 3x;$     5.  $y' = |y|^\alpha;$     6.  $y' = 2e^x \cos 2x;$
7.  $y' = x^2 e^x;$     8.  $y' = 4e^x \cos 2x;$     9.  $y' = shx.$

Differensial tenglamalarni integrallang va  $M(x_0, y_0)$  nuqtadan o'tuvchi integral chiziqni aniqlang.

10.  $y' = -2xe^{-x^2}, M(0, 3);$     11.  $y' = \frac{1}{x^2}, M(1, 0);$
12.  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, M(1, 0);$     13.  $y' = tg \frac{x}{2}, M(\frac{\pi}{2}, 1).$

Egri chiziqlar oilasining differensial tenglamasini tuzing.

14.  $y = e^{cx};$     15.  $y = (x - 3)^3;$     16.  $y = cx^3;$
17.  $y = \sin(x + c);$     18.  $x^2 + cy^2 = 2y;$     19.  $y^2 + cx = x^3;$
20.  $y = c(x - c)^2;$     21.  $cy = \sin cx;$     22.  $y = ax^3 + e^x;$
23.  $(x - 1)^2 + by^2 = 1.$

24. Markazi  $y=2x$  to'g'ri chiziqda va radiusi 1 ga teng bo'lgan egri chiziqlar oilasining differensial tenglamasini tuzing.

25.  $y=0$  va  $y=x$  to'g'ri chiziqlarga bir vaqtda o'rinuvchi va simmetriya o'qi  $OY$  o'qiga parallel bo'lgan parabolalar oilasining differensial tenglamasini tuzing.

26. Bir vaqtda koordinata o'qlariga urinuvchi va I, III choraklarda joylashgan aylanalar oilasining differensial tenglamasini tuzing.

27. Koordinata boshidan o'tuvchi va simmetriya o'qi  $OY$  o'qiga parallel bo'lgan parabolalar oilasining differensial tenglamasini tuzing.

### 1.3.2 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

18-27

### 1.3.3 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

#### *АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР*

1. Салохитдинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ.-мат. литература. 1958.

4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 – е издание).

#### *КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР*

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.

2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.

4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.

5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.

6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.

8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

**Mavzu: Birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglamaning geometrik ma'nosi**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv

darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.4 Misol va mashqlar namoishi**

**Yo'nalishlar maydoni.** Izoklina usuli.

(1) tenglamaning har qanday  $(x, y) \in G$  nuqtada  $k = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$  qiymatini

aniqlaydi. (1) tenglamaning  $G$  sohasidagi geometrik ma'nosini yo'nalishlar maydoni yordamida aniqlash mumkin. Buning uchun xar qanday  $(x, y) \in G$  nuqta uchun burchak koeffisiyenti  $k = f(x, y)$  bo'lgan kesma o'tkazamiz. Bu holda integral chiziq o'zining har bir nuqtasida yo'nalishlar maydoniga o'rinadi.

Yo'nalishlar maydonini yasashda izoklinlar muhim rol o'ynaydi. Izoklina-bu yo'nalishlar maydonida burchak koeffisiyentlar bir xil bo'lgan nuqtalar to'plami.

$k$  - izoklinlar tenglamasi  $f(x, y) = k$ .

Izoklinlar orasida  $0$  - izoklina  $f(x, y) = 0$  muhim o'rin tutadi.

$0$  - izoklinada integral chiziqlarning maksimum va minimum nuqtalari joylashadi va demak, bu izoklina differensial tenglamalar berilish sohasini integral chiziqlarning o'sish va kamayish sohasiga bo'ladi.

Shaklni aniqroq chizish uchun yechimlar grafiklarining burilish nuqtalarini

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + f(x, y) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$$

tenglamadan topish mumkin.

7- misol.  $y' = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1$

Izoklina yordamida berilgan tenglamaning integral chiziqlarini chizing.  $k$  - izoklina tenglamasi  $x + y^2 = 2(k + 1)$ ,  $k \geq -1$ . Bu chiziqlar radiusi  $\sqrt{2(k + 1)}$  bo'lgan va markazi koordinata boshida bo'lgan konsentrik aylanalardan iborat.  $k$  - izoklinaning ixtiyoriy nuqtasida yo'nalishlar maydoni va  $x$  o'qining musbat yo'nalishi orasidagi  $\alpha$  burchak  $\alpha = \arctg k$  formula yordamida aniqlanadi.  $k$  ga  $1, 0, -1$  qiymatlar berib jadval tuzamiz:

$$k = 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 0, \quad x^2 + y^2 = 2, \quad \alpha = 0$$

$$k = -1, \quad x^2 + y^2 = 0, \quad x = y = 0, \quad \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

Ekstremumlar chizig'i:  $x^2 + y^2 = 2$ .

$x^2 + y^2 < 2$  da  $y' < 0$  (yechimlar kamayadi)

$x^2 + y^2 > 2$  da  $y' > 0$  (yechimlar o'sadi)

$k$  ga ixtiyoriy  $-1 < k < 0$ ,  $k > 0$  qiymatlar berib izoklinlarni topish mumkin.

### **Mustaqil yechish uchun misollar**

28.  $yy' + x = 0$ ;    29.  $xy' + y = 0$ ;    30.  $y' = x^2 - y^2$ ;

31.  $y' = \frac{x + y}{x - y}$ ;    32.  $y' = y - x^2$ ;    33.  $2(y + y') = x + 3$ ;

34.  $xy' = 2y$ ;    35.  $y' = x - e^y$ .

### **1.3.5 O'quv mashqlar**

–misol va masalalarni eching

–teoremani isbotlang

–shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### **Uyga vazifa**

### 1.3.6 Tavsiya etiladigan adabiyotlar *АСОСИЙ АДАБИЁТЛАР*

1. Салоҳиддинов М.С. Насридинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### *КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР*

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж. тех. задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### *3-mashg'ulot.*

*Mavzu: O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar*

## **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

## **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-



kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, gruppalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.7 Misol va mashqlar namoishi**

$$M(x)dx + N(y)dy = 0. \quad (11)$$

Tenglamaga o'zgaruvchilari ajralgan tenglama deyiladi. Bu yerda  $M(x)$ ,  $N(y)$  mos ravishda  $x \in [a, b]$ ,  $y \in [c, d]$  oraliqlarda aniqlangan uzluksiz funksiyalardir. (11) tenglamaning umumiy integrali

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c, \quad \int_{x_0}^x M(t)dt + \int_{y_0}^y N(s)ds = 0.$$

Bu yerda  $x_0 \in [a, b]$ ,  $y_0 \in [c, d]$  ixtiyoriy qiymatlar.

Agar  $(x_0, y_0)$  maxsusmas nuqta bo'lsa (11) tenglamaning boshlang'ich  $y(x_0) = y_0$  shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimi bo'ladi va u oshkormas shaklda

$$\int_{x_0}^x M(t)dt + \int_{y_0}^y N(s)ds = 0$$

tenglama bilan aniqlanadi.

O'zgaruvchilari ajralgan tenglamalarning ko'rinishi quyidagicha:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0. \quad (12)$$

Bu yerda  $M_1, M_2$  va  $N_1, N_2$  funksiyalar mos ravishda  $[a, b]$  va  $[c, d]$  oraliqlarda aniqlangan.  $M_2$  va  $N_1$  funksiyalar  $\{\alpha_i\}$  ( $M_2(\alpha_i) = 0$ ) va  $\{\beta_j\}$  ( $N_1(\beta_j) = 0$ ) to'plamlarda nolga aylansin.

$M_2(x)N_1(y) \neq 0$  sohada (12) tenglama  $M_2(x)N_1(y)$  ga bo'lish natijasida o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keladi. U vaqtda (12) tenglamaning shu sohada umumiy integrali quyidagicha topiladi:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = c \quad \int_{x_0}^x \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int_{y_0}^y \frac{N_2(s)}{N_1(s)} ds = c.$$

Agar  $\{\alpha_i\}$  va  $\{\beta_j\}$  tenglamalar bo'sh to'plam bo'lmasa, u holda  $x = \{\alpha_i\}$  va  $y = \{\beta_j\}$ ; (12) tenglamaning yechimlari bo'lishi mumkin, bu qiymatlarni berilgan tenglama qo'yib tekshirish bajarish kerak.

Agar  $f(x, y) = \varphi(x)g(y)$  bo'lsa, (1) - tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'ladi.

8- misol  $xydx + (x+1)dy = 0$

O'zgaruvchilarni ajratamiz

$$\frac{x}{x+1} dx + \frac{dy}{y} = 0 \quad [(x+1)y = 0?]$$

$x \neq -1, y \neq 0$  sohada integrallab,  $x - \ln|x+1| + \ln|y| = c$  umumiy yechimni hosil qilamiz.

$x = -1, y = 0$  ham yechimdir.

**Ko'rsatma.** Agar 8 - misolining umumiy yechimida  $c = \ln|c_1|$ ,  $c_1 \neq 0$  deb olsak, umumiy yechimni soddaroq holda yozish mumkin:

$$\ln \frac{e^x |y|}{|x+1|} = \ln c_1$$

Bundan  $ye^x = c_1(x+1)$

Agar  $c_1 = 0$  bo'lsa, u holda  $y = 0$  va demak, javobni quyidagicha yozish mumkin:

$$ye^x = c_1(x+1), \quad x = -1$$

9-misol.  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1.$

O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dy}{y^2} + \frac{2xdx}{x^2 - 1} = 0 \quad (y^2(x^2 - 1) = 0?)$$

Umumiy yechim

$$y(\ln|x^2 - 1| + c) = 1, y \equiv 0.$$

Koshi masalasini yechish uchun berilgan boshlang'ich qiymatlarni tenglamaga qo'yamiz va parametr  $c$  ning qiymatini topamiz:  $c = 1$ . Demak Koshi masalasining umumiy yechimi:

$$y(\ln|x^2 - 1| + 1) = 1.$$

10-misol. Agar egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti o'rinish nuqtasi ordinatasiga teng bo'lsa, shu egri chiziqlar oilasi tenglamasini toping.  $A(0, 1)$  nuqtadan o'tuvchi egri chiziqni aniqlang.

Masala shartiga ko'ra  $y' = y^2$  bo'lib, o'zgaruvchilarni ajratsak

$\frac{dy}{y^2} = dx$  ( $y = 0?$ ) tenglamaga kelamiz. Integrallash natijasida

$$-\frac{1}{y} = x + c \quad \text{va} \quad y = -\frac{1}{x + c} \quad \text{ni hosil qilamiz. Bu chiziq asimptotalari } OX \text{ o'qi va } x =$$

$-c$  chiziq bo'lgan giperbolalar oilasidan iborat.  $y = 0$  tenglamaning xususiy yechimi.

Demak masala yechimi  $y = -\frac{1}{x + c}$ ,  $y = 0$  dan iborat.  $A$  nuqtadan o'tuvchi egri chiziqni topish uchun umumiy yechimda  $x$  va  $y$  ni  $A$  nuqtaning koordinatalari bilan

almashtiramiz  $1 = -\frac{1}{0 + c}$  va

$c = -1$ . Demak berilgan nuqtadan o'tuvchi integral chiziq tenglamasi  $y = -\frac{1}{x - 1}$

yoki  $y = \frac{1}{1 - x}$  dan iborat.

11-misol. Shunday chiziqlarni topish keraki,  $PN$  normal osti har doim  $p$  - ga teng bo'lsin.

Ma'lumki  $PN = yy'$ . Demak masala shartiga ko'ra  $PN = p$ , yoki  $yy' = p$ . O'zgaruvchilarni ajratib  $ydy = p dx$  ni hosil qilamiz. Bu tenglamani integrallaymiz

$\frac{y^2}{2} = px + c$  yoki  $y^2 = 2px + c$  va berilgan masalaning umumiy yechimini hosil qilamiz.

### **Mustaqil yechish uchun misollar**

Teglamalarni yeching va Koshi sharti kuyilgan masalalrning yechimini ham aniqlang.

36.  $y \ln y dx + x dy = 0$ ,  $y(1) = 1$ ; 37.  $3e^x \operatorname{tg} y dx + (2 - e^x) \sec^2 y dy = 0$   
 38.  $y \sin x dx + x \sin y dy = 0$   $y(1) = 0$ ; 39.  $y' = |y|^\alpha$ ,  $y(2) = 0$ ;  
 40.  $xy dx + (x+1) dy = 0$ ; 41.  $\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$ ;  
 42.  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ ,  $y(0) = 1$ ; 43.  $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ ,  $y(0) = -1$ ;  
 44.  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$ ,  $y(2) = 0$ ; 45.  $xy' + y = y^2$ ,  $y(1) = 0,5$ ;  
 46.  $2x^2 yy' + y^2 = 2$ ; 47.  $y' - xy^2 = 2xy$ ;  
 48.  $e^{-s}(1 + \frac{ds}{dt}) = 1$ ; 49.  $z' = 10^{x+z}$ ;  
 50.  $x \frac{dx}{dt} + t = 1$ ; 51.  $y' = \cos(y - x)$ ;  
 52.  $y' - y = 2x - 3$ ; 53.  $(x + 2y)y' = 1$ ,  $y(0) = -1$ ;  
 54.  $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$ ; 55.  $(y - x)\sqrt{1 + x^2} dy = (1 + y^2)^{3/2} dx$ .

56. Egri chiziqqa o'tkazilgan o'rinmaning burchak koeffitsiyenti o'rinish nuqtasi ordinatasiga proporsional bo'lsa, shu chiziqlar oilasi tenglamasini toping.

57. Shunday egri chiziqlarni topingki unda  $MN$  normal va  $PN$  normal osti kesmalar yig'indisi o'zgarmas a ga teng bo'lsa.

58. Shunday egri chiziqlarni topingki unga o'tkazilgan o'rinmaning koordinata o'qlari orasiga joylashgan qismi o'rinish nuqtasida teng ikkiga bulinsa. Bunda  $M(2,3)$  nuqtadan o'tuvchi chiziqni aniqlang.

### 1.3.8 O'quv mashqlar

#### 1.3.9

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

44-55

### 1.3.10 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск.Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

***Mavzu: Birjinsli va birjinsliga keltiriladigan  
differensial tenglamalar.***

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### **3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

#### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

##### **1.3.11 Misol va mashqlar namoishi**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

(4) – differensial shakldagi tenglamaga bir jinsli deb aytiladi. Agar  $M$  va  $N$  koeffitsiyentlar bir xil  $m$  - chi darajali birjinsli funksiya bo'lsa, ya'ni

$$M(tx, ty) = t^m M(x, y); N(tx, ty) = t^m N(x, y), \forall (x, y); (xt, yt) \in D.$$

Masalan.

$$x + y, x^2 + y^2 - xy, \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

Funksiyalar mos ravishda 1,2,0,0 darajali birjinsli funksiyalar.  
 $\sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2} = |t| \sqrt{x^2 + y^2}$  birinchi darajali (musbat) birjinsli funksiya.

Bir jinsli differensial tenglamani  $y = zx, z = z(x)$  (ayrim vaqtlarda  $x = zy, z = z(y)$  almashtirish olish maqsadga muvofiqdir) almashtirish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamaga keltirish mumkin. Agar

$f(x, y) \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  bo'lsa, (1) - tenglama birjinsli tenglama bo'ladi. (0,0) - nuqta birjinsli

differensial tenglamaning maxsus nuqtasi bo'ladi.

12-misol.  $(x + 2y)dx - xdy = 0$

$M(x, y) = x + 2y, N(x, y) = -x$  funksiyalar birinchi darajali birjinsli funksiyalar, demak berilgan tenglama birjinsli differensial tenglamadir.  $y = zx$  almashtirish olamiz:

$$(x + 2zx)dx - xd(zx) = 0$$

Soddalashtiramiz

$$x(1 + 2z)dx - xzdx - x^2 dz = 0, \quad x(1 + z)dx - x^2 dz = 0$$

o'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 + z} = 0, \quad [x^2(1 + z) = 0?]$$

Integrallab,  $x = c(1 + z)$  yechimni topamiz,  $x=0$  va  $z=-1$  ham yechim bo'ladi.

Eski o'zgaruvchilarga qaytib  $x^2 = c(y+x)$  berilgan tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.  $x=0$  yechim umumiy yechimdan  $c=0$  bo'lganda kelib chiqadi.  $y = -x$  ham differensial tenglamaning yechimidir. Demak, tenglamaning yechimlari  $x^2 = c(y+x), y = -x$ .

### ***Bir jinsliga keltiriladigan differensial tenglamalar***

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right), \quad c_1^2 + c_2^2 \neq 0 \quad (13)$$

Tenglama, agar  $\Delta = a_1 b_2 - b_1 a_2 \neq 0$  bo'lsa,  $x = u + x_0, y = v + y_0$  almashtirish yordamida birjinsli tenglamaga keltiriladi. Bu yerda  $(x_0, y_0)$   $a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$  va  $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$  to'g'ri chiziqlarning kesish nuqtasi.



Agar  $\Delta=0$  bo'lsa, bu holda  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \lambda$  faraz qilinsa  $a_1 = a_2\lambda$ ,  $b_1 = b_2\lambda$

bo'lib, (13) ning ko'rinishi

$$y' = f\left(\frac{\lambda(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \equiv \varphi(a_2x + b_2y)$$

shaklga keladi (bunday tenglama 1 mashg'ulotda ko'rib o'tilgan).

13- misol.  $(y+2)dx + (2x+y-4)dy = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} y+2=0 \\ 2x+y-4=0 \end{array} \right\}$$

Sistemani yechamiz. Demak tenglamani birjinsli tenglamaga keltirish uchun  $x=u+3$ ,  $y=v-2$  almashtirish olamiz. U holda  $dx=du$ ,  $dy=dv$  bo'lib, birjinsli differensial tenglamaga keladi, ya'ni

$$vdu = (2u + v)dv$$

Yechish uchun  $v=uz$ ,  $z=z(u)$  almashtirish olamiz, u holda

$$uzdu = (2u + uz)(udz + zdu),$$

$$u[zdu(2+z)(udz + zdu)] = 0,$$

$$u[-z(z+1)du - (2+z)udz] = 0.$$

Bu tenglamani yechib, yana eski o'zgaruvchilar (x,y) ga qaytsak,

$$(x+y-1) = c(y+2)^2, \quad y = -2, \quad (c = \infty)$$

umumiy yechimni hosil qilamiz.

14- misol.  $(x-y-1)dx + (y-x+2)dy = 0$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$z = y - x$ ,  $z = z(x)$ ,  $[dy = dz + dx]$  almashtirish berilgan tenglamani o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiradi, ya'ni  $(z+2)dz + dx = 0$ . Yechimi  $(y-x+2)^2 + 2x = c$ ,

Agar differensial tenglama  $y = z^k$ , ( $z = z(x)$ ) yoki  $x = z^\ell$  ( $z = z(y)$ ) almashtirish yordamida bir jinsli tenglamaga aylansa, bunday tenglama umumlashgan bir jinsli tenglama deyiladi.

$k(\ell)$  sonni topish uchun tenglamada  $y = z^k$  yoki  $x = z^\ell$  almashtirish bajaramiz va  $k(\ell)$  sonni tanlash natijasida tenglama bir jinsli bo'lishini tekshiramiz.

15- misol.  $2y' + x = 4\sqrt{y}$   $y = z^k$  almashtirish bajaramiz.

$$2(z^k)' + x = 4\sqrt{z^k} \Rightarrow 2kz^{k-1}z' + x = 4z^{k/2}.$$

Bir xad darajalari bir xil bo'lsa, tenglama birjinsli tenglama bo'ladi, ya'ni  $k-1=1=\frac{k}{2}$ . Bu tenglamalarni qanoatlantiruvchi yechim  $k=2$ .

Demak, tenglama umumlashgan birjinsli va integrallash uchun  $y = z^2$  ( $z = z(x)$ ) almashtirish olamiz.

Bu almashtirishga asosan tenglama quyidagicha bo'ladi:

$$4zz' + x = 4z.$$

$z = ux, (u = u(x))$  almashtirish bajarsak, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil qilamiz.

Berilgan tenglamaning yechimi

$$(2\sqrt{y} - x) \ln c(2\sqrt{y} - x) = x; \quad 2\sqrt{y} = x$$

Ko'rsatma. Yuqorida bayon qilingan usulni qo'llab  $k(\ell)$  son topilgandan so'ng berilgan tenglamani  $y = zx^k$  ( $x = zy^\ell$ ) almashtirish yordamida o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin.

### *Mustaqil yechish uchun misollar*

59.  $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ ; 60.  $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0$ ;

61.  $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ ;

62.  $y' = e^{-y/x} + \frac{y}{x}$ ;

63.  $(y^2 - 2xy)dx + x^2 = 0$ ;

64.  $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$ ;

65.  $y^2 + x^2y' = xyy'$ ;

66.  $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ ;

67.  $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ;

68.  $xy' = y - xe^{y/x}$ ;

69.  $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}$ ; 70.  $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$ ;

71.  $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$ ;

72.  $(x - y)dx + (2y - x + 1)dy = 0$ ;

73.  $(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$ ;

74.  $(2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 3)dy = 0$ ;

75.  $y' = 2 \left( \frac{y + 2}{x + y - 1} \right)$ ;

76.  $y' = \frac{y + 2}{x + 1} + \operatorname{tg} \frac{y - 2x}{x + 1}$ ;

77.  $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$ ; 78.  $y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$ ;

79.  $(x^2y^2 - y)y' + 2xy^3 = 0$ ; 80.  $(1 + \sqrt{\frac{y^2}{x} - 1})dx - 2ydy = 0$ ;

81.  $x^3(y' - x) = y^2$ ;

82.  $2x^2y' = y^3 + xy$ .

## O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

## Uyga vazifa

73-82

### 1.3.12 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

*Қушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

**5 - mashg'ulot.**  
**Mavzu: Chiziqli va Bernulli tenglamalari**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik

qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## 3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.13 Misol va mashqlar namoishi

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (13)$$

Tenglamaga chiziqli tenglama deyiladi, bu yerda  $p(x)$  va  $q(x)$   $x \in (a, b)$  oraliqda uzluksiz funksiyalar. (13) tenglamaning ikkala tomonini  $x \in (a, b)$  oraliq'ida integrallovchi

ko'paytuvchi  $\mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right)$  ga ko'paytirsak

$\frac{d}{dx}(ye^{\int p(x)dx}) = q(x)e^{\int p(x)dx}$  ni hosil qilamiz. Hosil bo'lgan sodda differensial

tenglamani integrallab chiziqli tenglamaning umumiy yechimi topish formulasini keltirib chiqaramiz:

$$y = e^{-\int p(x)dx} [c + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx],$$

(13) differensial tenglamaning Koshi formasidagi yechimi

$$y = e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt} \left[ y_0 + \int_{x_0}^x q(s)e^{\int_{x_0}^s p(t)dt} ds \right]$$

formula orqali aniqlanadi.

16 misol.  $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$

Integrallovchi ko'paytuvchi,  $\mu(x) = e^{\int \operatorname{tg} x dx} = \frac{1}{\cos x}$  ga berilgan tenglamani ko'paytiramiz:

$$\frac{1}{\cos x} y' + y \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \left( \frac{y}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Ikkala tomonini integrallasak

$$\frac{y}{\cos x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + c \Rightarrow \frac{y}{\cos x} = \operatorname{tg} x + c,$$

bu yerdan  $y = c \cos x + \sin x$  umumiy yechim hosil bo'ladi.

17 misol.  $(x + y^2)dy = ydx$ .

Bu tenglama  $x=x(y)$  ga nisbatan chiziqli tenglama bo'ladi.

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y, [y \neq 0]$$

tenglamani  $\mu(y) = \exp(-\int \frac{1}{y} dy) = \frac{1}{y}$  ga ko'paytirsak  $\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{y} \right) = 1$  oddiy tenglama

hosil qilamiz, bu yerdan

$$x = cy + y^2, y \neq 0 \quad (c = \infty)$$

18 misol.  $y(x) = \int_0^x y(t)dt + x + 1$

Tenglamaning ikkala tomoni  $x$  bo'yicha differensiallab,  $y'(x) = y(x) + 1$  ni hosil qilamiz.

Integral tenglamani yechimi  $y'(x) = y(x) + 1, y(0) = 1$  Koshi masalasiga teng kuchli ekanligini isbotlang?

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, m \neq 0, 1 \quad (14)$$

tenglamaga Bernulli tenglamasi deyiladi. Bu tenglama  $y = z^{\frac{1}{1-m}}, z = z(x)$  almashtirish yordamida chiziqli tenglamaga keltiriladi.

19 misol.  $xy' + (-2)x^2\sqrt{y} = 4y$ . Bernulli tenglamasini standart shaklga yozamiz

$$y' - \frac{4}{x}y = 2x\sqrt{y}, \quad m = \frac{1}{2}$$

$y = z^2$  almashtirish qo'llaymiz

$$(z^2)' - \frac{4}{x}z^2 = 2x\sqrt{z^2} \Rightarrow 2zz' - \frac{4}{x}z^2 = 2xz.$$

Bu yerda  $z' - \frac{2}{x}z = x$  [ $z = 0$ ?] chiziqlali tenglamani hosil qilamiz. Yechimi

$z = x^2(\ln|x| + c)$  va demak, Bernulli tenglamaning umumiy yechimi

$$y = x^4(\ln|x| + c)^2, \quad \ln|x| + c \geq 0.$$

Bundan tashqari  $y=0$  yechimi bo'ladi. Bu yechim maxsus yechimdir (tushuntiring?).

### **Mustaqil yechish uchun misollar.**

83.  $y' - y \sin x = \sin x \cos x$ ;      84.  $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ ;

85.  $ydx + 2(x + y)dy = 0$ ;      86.  $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ ;

87.  $x^2y' + xy + 1 = 0$ ;      88.  $y = x(y' - x \cos x)$ ;

89.  $2x(x^2 + y)dx = dy$ ;      90.  $(xy' - 1) \ln x = 2y$ ;

91.  $(x + y^2)dy = ydx$ ;      92.  $(2e^y - x)y' = 1$ ;

93.  $(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy$ ;      94.  $y'(3x - y^2) = y$ ;

95.  $y' + 2xy = 2x^3y^3$ ;      96.  $xy' + y = y^2 \ln x, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = 1$ ;

97.  $3y^2y' + y^3 + x = 0$ ;      98.  $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{2/3}, \quad x_0 = y_0 = 0$ ;

99.  $y' - y = xy^2, \quad x_0 = y_0 = 0$ ;      100.  $y' + 2y = y^2e^x$ ;

101.  $(x + 1)(y' + y^2) = -y$ ;      102.  $y' = y^4 \cos x + y \tan x$ ;

103.  $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$ ;      104.  $2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}$ ;

105.  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$ ;      106.  $(2x^2y \ln y - x)y' = y$ ;

### **1.3.14 O'quv mashqlar**

–misol va masalalarni eching

–teoremani isbotlang

–shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### **Uyga vazifa**

97-106

### 1.3.15 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

#### *Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### *Кушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.



**6 - mashg'ulot.**  
**Mavzu: Rikkati tenglamasi.**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminologiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik

qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.16 Misol va mashqlar namoishi**

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (15)$$

***Ko'rinishdagi tenglamaga Rikkati tenglamasi deyiladi. Bu tenglama umumiy holda kvadraturaga keltirilmaydi.***

Agar (15) tenglamaning bitta  $y_1$  xususiy yechimi ma'lum bo'lsa,

$y = y_1 + z$ ,  $y = y_1 + \frac{1}{z}$ ,  $z = z(x)$  almashtirish yordamida, mos ravishda, Bernulli va chiziqli tenglamalarga keltiriladi. Demak, bu tenglama kvadraturada yechiladi.

Xususiy yechimni topishning umumiy usulii yo'q. Ba'zi hollarda tenglamadagi  $c(x)$  ozod hadning ko'rinishiga qarab yechimni tanlash taklif qilinadi.

20-misol.  $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$

Ozod hadning ko'rinishiga ko'ra xususiy yechimni  $y_1 = ax + b$  shaklda olamiz. Bu ifodani berilgan tenglamaga qo'yib,  $x$  ning bir xil darajalariga mos koeffitsientlarini tenglashtirsak,  $a$  va  $b$  larni aniqlash uchun quyidagi sistemalarni hosil qilamiz:

$$b^2 - b = 0, \quad 2ab - 2b = 0, \quad a^2 - 2a = -1$$

Natijada,  $a=1$ ,  $b=0$  bo'lib tenglamamanning xususiy yechimini topamiz:  $y_1 = x$

Demak, tenglamaga  $y = y_1 + \frac{1}{z}$  almashtirishni tadbiq qilsak,  $xz' + z = 1$  chiziqli tenglamani hosil qilamiz va uning umumiy yechimi  $zx = x + C$  bo'ladi  
Berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = x + \frac{x}{x + C}$$

bo'ladi

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2}, \quad (16)$$

tenglama Rikkatining maxsus tenglamasi bo'lib bunda, agar  $A, B, C$  o'zgarmaslar  $(B+1)^2 \geq 4AC$  tengsizlikni qanoatlantirsa, (16) - tenglama  $y_1 = \frac{a}{x}$  ko'rinishdagi xususiy yechimga ega bo'ladi

21-misol  $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}$

Tenglamani (16)-bilan solishtirsak,  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = \frac{1}{4}$  bu yerdan

$$(0+1)^2 \geq 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 1 = 1.$$

Demak, tenglamaning xususiy yechimini  $y_1 = \frac{a}{x}$  shaklda izlaymiz.  $a$  ni topish uchun yechimni tenglamaga qo'yamiz:

$$-\frac{a}{x^2} = \frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{4x^2}$$

bu yerdan

$$4a^2 + 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Demak, tenglamaning xususiy yechimi:  $y_1 = -\frac{1}{2x}$ .

Tenglamaga  $y_1 = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{z}$  almashtirish tadbiriq etib, uning umumiy yechimini topish mumkin.

Rikkati tenglamasini  $y = \alpha(x)z$  almashtirish yordamida noma'lum funksiya kvadratining koeffitsiyenti  $+1$  yoki  $-1$  teng bo'lgan Rikkati tenglamasiga keltirish mumkin.

$y = z + \beta(x)$  almashtirish yordamida esa noma'lum funksiya koeffitsiyentini nolga tenglashtirib olish mumkin.

Umuman  $y = \alpha(x)z + \beta(x)$  almashtirish yordamida Rikkati tenglamasini

$$z' = \pm z^2 + R(x)$$

ko'rinishga keltirish mumkin.

22- misol.  $xy' = x^2y^2 - y + 4$  tenglamaga  $y = \alpha(x)z$  almashtirish tadbiriq qilamiz.

$$x(\alpha(x)z)' = x^2\alpha^2(x)z^2 - \alpha(x)z + 4$$

$$x(\alpha'z + \alpha z') = x^2\alpha^2(x)z^2 - \alpha(x)z + 4$$

$\alpha(x)$  funksiyani shunday tanlaymizki  $x^2\alpha^2(x) = 1$  bo'lsin bundan  $\alpha(x) = \frac{1}{x}$

olish mumkin. Demak

$$x\left(-\frac{1}{x^2}z + \frac{1}{x}z'\right) = z^2 - \frac{1}{x}z + 4, \quad -\frac{1}{x}z + z' = z^2 - \frac{1}{x}z + 4$$

yoki  $z' = z^2 + 4$  tenglamani hosil qilamiz.

23-misol.  $y' = y^2 - 2x^2y + x^4 + 2x + 9$  tenglamaga  $y = z + \beta(x)$  almashtirish tadbiriq qilamiz

$$z' + \beta' = (z + \beta)^2 - 2x^2(z + \beta) + x^4 + 2x + 9$$

$$z' + \beta' = z^2 + 2\beta z + \beta^2 - 2x^2z - 2x^2\beta + x^4 + 2x + 9$$

funksiyani shunday tanlaymizki  $z$  koeffitsiyenti nolga teng bo'lsin,  $2\beta - 2x^2 = 0$  bundan  $\beta = x^2$ .

Demak

$$z' + 2x = z^2 + x^4 - 2x^4 + x^4 + 2x + 9$$

yoki  $z' = z^2 + 9$  tenglamani hosil qilamiz.

22, 23 misollarda hosil bo'lgan tenglamalarni yechib eski izlanuvchi funksiya  $y$  ga qaytsak berilgan tenglamani umumiy yechimini hosil qilamiz.

***Mustaqil yechish uchun misollar.***

Xususi yechimi  $y = ax + b$  ko'rinishda bo'lgan tenglamalarni umumiy yechimini toping.

107.  $y' = y^2 - xy - x$

108.  $xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$

tenglamalar umumiy yechimini toping.

$$109. y' + y^2 = -\frac{1}{4x^2}; \quad 110. x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1;$$

$$111. x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0; \quad 112. 3y' - y^2 + \frac{2}{x^2} = 0;$$

noma'lum funksiya kvadrati koeffitsiyentini birga keltirib tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$113. xy' = x^2 y^2 - (2x + 1)y + 1; \quad 114. xy' = x^2 y^2 - y - 1.$$

Noma'lum funksiya koeffitsiyentini nolga keltirib tenglamaning umumiy yechimini toping.

$$115. y' = 4y^2 - 4x^2 y + x^4 + x + 4 ;$$

$$116. y' = y^2 - 2x^2 y + x^4 + 2x + 4.$$

Tenglamani  $y' = y^2 + a$  ko'rinishga keltirib umumiy yechimini toping.

$$117. xy' = x^2 y^2 + y + \frac{2}{x^2} + 2; \quad 118. xy' = y^2 - 3y + 4x^2 + 2.$$

### 1.3.17 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

113-118

### Tavsiya etiladigan adabiyotlar

#### Асосий адабиётлар

1. Салохитдинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### Қушимча адабиётлар

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## **7 - mashg'ulot.**

**Mavzu: To'liq differensialli tenglamalar.**

### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.18 Misol va mashqlar namoishi**

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

tenglama berilgan bo'lsin.

Agar differensiallanuvchi  $U(x, y)$  funksiya mavjud bo'lib,

$$dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy, \quad (x, y) \in D$$

tenglik bajarilsa, (4)-tenglamaga to'liq differensialli tenglama deyiladi.

To'liq differensiallanuvchi tenglama  $dU(x, y) = 0$  tenglamaga teng kuchli va uning yechimi  $U(x, y) = c$ .

$D$  soha bir bog'lamli soha bo'lib, bu sohada  $\frac{\partial M}{\partial y}$  va  $\frac{\partial N}{\partial x}$  hosilalar mavjud va

uzluksiz bo'lsin. (4)-tenglama to'liq differensiallanuvchi tenglama bo'lishi uchun  $\frac{\partial M}{\partial y} \equiv$

$\frac{\partial N}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D$ , shart bajarilshi yetarli va zarurdir.

Differensial tenglamaning umumiy integralini quyidagi formulalarning birortasi yordamida aniqlash mumkin:

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = c,$$

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = c,$$

bu yerda  $(x_0, y_0) \in D$  ixtiyoriy nuqta. Agar  $(x_0, y_0) \in D$  maxsusmas nuqta bo'lsa, u holda differensial tenglama yechimining mavjudligi va yagonalik nuqtasi mavjud bo'ladi.

$y(x_0) = y_0$  Koshi masalasining yechimi esa

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = 0, \quad \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = 0$$

formulalarning birortasi yordamida aniqlanadi.

24 misol.

$$(2 - 9xy^2)xdx + (4y^3 - 6x^3)ydy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x - 9x^2y^2) = -18x^2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(4y^3 - 6x^3y) = -18x^2y$$

bo'lganligi sababli berilgan tenglama to'liq differensialli tenglamadir. Shunday  $u(x, y)$  funksiyani topish kerakki uning to'liq differensial  $dU = U'_x dx + U'_y dy$  berilgan tenglamaning chap tomoniga teng bo'lsin, ya'ni  $u(x, y)$  uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsin:

$$\begin{cases} U'_x = 2x - 9x^2y^2 \\ U'_y = 4y^3 - 6x^3y \end{cases}$$

bu sistemaning birinchi tenglamasini  $x$  bo'yicha integrallaymiz, bu holda  $y$  o'zgarmas deb qaraladi. Integrallash natijasida hosil bo'lgan o'zgaruvniga  $\varphi(y)$  – ni qo'shish kerak (integrallashni ikkinchi tenglamadan ham boshlash mumkin, bu holda o'zgarmas o'rniga  $\varphi(x)$  – ni qo'shish kerak).

$$U(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + \varphi(y)$$

bu ifodani sistemaning ikkinchi tenglamasiga qo'yib  $\varphi(y)$  – ni topamiz



$$(x^2 - 3x^3y^2 + \varphi(y))'_y = 4y^3 - 6x^3y, \quad \varphi'(y) = 4y^3$$

yoki

$$\varphi(y) = y^4.$$

Demak  $U(x, y) = x^2 - 3x^3y^2 + y^4$  va berilgan tenglamaning umumiy integrali quyidagicha bo'ladi

$$x^2 - 3x^3y^2 + y^4 = c$$

Agar berilgan tenglama to'liq differensialli tenglama bo'lsa, uning umumiy integralini yuqorida keltirilgan umumiy integralni topish formulalarining birortasini qo'llab topish mumkin.

25-misol.  $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

Tenglamani to'liq differensialli bo'lish shartini tekshiramiz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = 2x$$

Demak, bu tenglama to'liq differensialli ekan.

$x_0 = 0, y_0 = 0$  deb, olamiz va umumiy integralni formula bo'yicha topamiz:

$$\int_0^x 2xydx + \int_0^y (0 - y^2)dy = c$$

yoki bu yerdan tenglamani umumiy integralini aniqlaymiz:  $x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c$ .

**Ko'rsatma.** To'liq differensialli tenglamani integrallash uchun gruppallash usulini qo'llab, xar bir gruppada to'liq differensial hosil qilib tenglamaning yechimini topish mumkin. Yuqoridagi misolda

$$(2xydx + x^2dy) - y^2dy = 0$$

yoki

$$d(x^2y) - d(\frac{1}{3}y^3) = 0,$$

$$d(x^2y - \frac{1}{3}y^3) = 0, \quad yoki \quad x^2y - \frac{1}{3}y^3 = c.$$

#### **Mustaqil yechish uchun misollar**

119.  $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy = 0;$  120.  $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = 0;$

121.  $(1+e^{x/y})dx + e^{x/y}(1-\frac{x}{y})dy = 0;$  122.  $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0;$

123.  $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0;$  124.  $x \sin x dx + \cos^2 y dy = 0;$

125.  $(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy + (\sin y + y \sin x + \frac{1}{x})dx = 0;$

126.  $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$  ;
127.  $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$ ;
128.  $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0$  ; 129.  $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$ ;
130.  $(\frac{x}{\sin y} dx + 2)dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos^2 y - 1} dy = 0$ .

### 1.3.19 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

123-130

### 1.3.20 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

**1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.**

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольд Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

*Қушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

**8 - mashg'ulot.**  
**Mavzu: Integrallovchi ko'paytuvchi.**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminologiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Rejting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'ektlar bilan ishlash; konspektlash;

## 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, gruppalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## 3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.21 Misol va mashqlar namoishi

Agar

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (4)$$

tenglamani uzluksiz va uzluksiz hosilaga ega bo'lgan  $\mu(x, y) \neq 0$  funksiyaga ko'paytirish natijasida to'liq differensialli tenglama hosil bo'lsa, bunday funksiyaga tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi deyiladi. Masalan, o'zgaruvchilari ajraladigan

(12) tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchi  $\mu(x, y) = \frac{1}{M_2(x)N_1(y)}$ , chiziqli

tenglama (13) uchun

$$\mu(x, y) = \mu(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right).$$

(4) tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisi  $\mu(x, y)$  D sohada mavjud bo'lishi uchun  $M$  va  $N$  funksiyalarning uzluksiz xususiy hosilalari mavjud bo'lishi kerak va  $\mu(x, y)$  funksiya quyidagi xususiy hosilali differensial tenglamani qanoatlantirishi kerak.

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \quad (17)$$

Umumiy holda  $\mu(x, y)$  funksiyani topish usuli mavjud emas. Xususiy hollarda (17) tenglamaning yechimini topish mumkin.

Agar birorta  $\omega = \omega(x, y)$  funksiya uchun

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \omega}{\partial x} - M \frac{\partial \omega}{\partial y}} \equiv \psi(\omega) \quad (18)$$

shart bajarilsa, u holda  $\mu(\omega) = \exp\left(\int \psi(\omega)d\omega\right)$  shakldagi integrallovchi ko'paytuvchi mavjud bo'ladi.

(4) tenglama faqat  $x$  ga bog'liq bo'lgan integrallovchi  $\mu = \mu(x)$  [ $\omega = x$ ] ko'paytuvchiga ega bo'ladi, agar

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x)$$

shart bajarilsa. Xuddi shunday  $\mu = \mu(y)$  [ $\omega = y$ ] agar,

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y).$$

26-misol.  $y^2 dx - (xy + x^3)dy = 0$  tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchi  $\mu = \mu(x)$  yoki  $\mu = \mu(y)$  shaklda bo'lganda integrallaymiz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -y - 3x^2$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : (-M) = (3y + 3x^2) : y^2 \neq \psi(y)$$

Demak, integrallovchi ko'paytuvchi  $y$  ga bog'liq emas

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) : N = -\frac{3}{x}$$

Bu yerdan integrallovchi ko'paytuvchi faqat  $x$  ga bog'liq:  $\mu = \mu(x) = e^{\int (-\frac{3}{x})dx} = \frac{1}{x^3}$

Tenglamaning ikkala tomonini  $\mu(x)$  ga ko'paytirsak

$$\frac{y^2}{x^3} dx - \left(\frac{y}{x^2} + 1\right) dy = 0$$

to'liq differensialli tenglama hosil qilamiz.

Bu tenglamaning umumiy yechimi  $\frac{1}{2} \frac{y^2}{x^3} + y = c, x \neq 0$ .

27-misol.  $(x^2 y^3 + y)dx + (x^3 y^2 - x)dy = 0$  tenglamaning integrallovchi ko'paytuvchisini  $\mu(\omega(x, y))$  shaklda izlaymiz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 y^2 + 1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 1$$

Bu yerda  $\omega = xy$ , (18) ayniyatdan.

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{Ny - Mx} = \frac{3x^2 y^2 + 1 - 3x^2 y^2 + 1}{y(x^3 y^2 - x) - (x^2 y^3 + y)x} = -\frac{1}{xy}$$

Demak,  $\mu(x, y) = \exp \int \left(-\frac{1}{xy}\right) d(xy) = \frac{1}{xy}$ .

Berilgan tenglamaning ikkala tomonini  $\frac{1}{xy}$  ga ko'paytirsak,

$$\left(xy^2 + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x^2 y - \frac{1}{y}\right)dy = 0$$

to'liq differensialli tenglama hosil bo'ladi.

Yechimi

$$x^2 y^2 + 2 \ln \left| \frac{x}{y} \right| = c, \quad x \neq 0 \quad (c = \infty); \quad y \neq 0 \quad (c = \infty).$$

Agar (4) tenglamada biror  $\varphi(x, y)$  funksiyaning to'liq differensialini ajratish mumkin bo'lsa, ba'zi hollarda tenglamani almashtirish bajarib soddalashtirish mumkin. Bu holda  $(x, y)$  o'zgaruvchilardan  $(x, z)$  yoki  $(y, z)$  o'zgaruvchilarga o'tish kerak, bu yerda  $z = \varphi(x, y)$ .

28-misol.  $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$

To'liq differensial ajratamiz

$$(x^2 + y^2)dx + \frac{1}{2} d(x^2 + y^2)dy = 0$$

$x^2 + y^2 = z$  deb olsak  $zdx + \frac{1}{2}dz = 0$  tenglamani hosil qilamiz.

O'zgaruvchilarni ajratib integrallasak  $2x + \ln|z| = c$  yoki  $2x + \ln(x^2 + y^2) = c$  umumiy integralni hosil qilamiz.

29-misol.  $(2x^2y^2 + y)dx + (x^3y - x)dy = 0$  tenglamani yechamiz.

Kavslarni ochamiz  $2x^2y^2dx + ydx + x^3ydy - xdy = 0$ , to'liq differensial ajratamiz.

$$xy(2xydx + x^2dy) + (ydx - xdy) = 0$$

$$xyd(x^2y) + y^2d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$xy$  ga bo'lib,  $x^2y = u$ ,  $\frac{x}{y} = g$  almashtirish olsak  $du + \frac{dg}{g} = 0$  tenglamani hosil

qilamiz. Integrallab eski o'zgaruvchilarga kaytsak berigan tenglamani umumiy integrali kelib chiqadi:

$$x^2y + \ln\left|\frac{x}{y}\right| = c, \quad x = 0, \quad y = 0.$$

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

Ko'rsatilgan argumentga bog'liq integrallovchi ko'paytuvchini topib tenglamani integrallang.

131.  $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ ,  $\mu = \mu(x)$  yoki  $\mu = \mu(y)$ ;

132.  $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1})dy = 0$ ,  $\mu = \mu(x)$  yoki  $\mu = \mu(y)$ ;

133.  $(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0$ ,  $\mu = \mu(x)$  yoki  $\mu = \mu(y)$ ;

134.  $(x^2y + y)dx - xdy = 0$ ,  $\mu = \mu(x)$  yoki  $\mu = \mu(y)$ ;

135.  $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$ ,  $\mu = \mu(y^2 - x^2)$  yoki  $\mu = \mu(x)$ ;

136.  $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$ ,  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ ;

137.  $(x^2y^3 + y)dx + (x^3y^2 - x)dy = 0$ ,  $\mu = \mu(x + y)$ ,  $\mu = \mu(xy)$ ,

$\mu = \mu(x^2 - y^2)$ ;

138.  $\frac{1}{x}dx + (x - \frac{1}{y})dy = 0$ ,  $\mu = \mu(\frac{y}{x})$ ,  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ ;

139.  $(x + y^2)dx + y(1 - x)dy = 0$ ,  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ ;

140.  $(x^2 - y^2 + 1)xdx + (x^2 - y^2)ydy = 0$ ,  $\mu = \mu(x^2 - y^2)$ .

To'liq differensial ajrating va belgilash kiritib tenglamani integrallang.

141.  $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$ ; 142.  $ydy = (xdy + ydx)\sqrt{1 + y^2}$ ;

143.  $xy^2(xy' + y) = 1$ ; 144.  $y^2dx - (xy + x^3)dy = 0$ ;

145.  $(y - \frac{1}{x})dx + \frac{dy}{y} = 0$ ; 146.  $(x^2 + 3 \ln y)ydx = xdy$ ;

147.  $y^2dx + (xy + \operatorname{tg}xy)dy = 0$ ; 148.  $y(x + y)dx + (xy + y^2)dy = 0$ ;

149.  $y(y^2 + 1)dx + x(y^2 - x + 1)dy = 0$ ;

150.  $(x^2 + 2x + y)dx = (x - 2x^2y)dy$ ;

151.  $ydx - xdy = 2x^3 \operatorname{tg} \frac{y}{x} dx$ ; 152.  $y^2dx + (e^x - y)dy = 0$ ;

153.  $xydx = (y^3 + x^2y + x^2)dy$ ; 154.  $x^2y(ydx + xdy) = 2ydx + xdy$ ;

155.  $(x^2 - y^2 + y)dx + x(2y - 1)dy = 0$ ;

156.  $(2x^2y^3 - 1)ydx + (4x^2y^3 - 1)xdy = 0$ .

### 1.3.22 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

150-156

### 1.3.23 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.

4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание). *Кушимча адабиётлар*

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.

2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.

4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.

5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.

6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.

8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.



9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### **9 - mashg'ulot**

#### **Mavjudlik va yagonalik teoremasi**

**Mavzu: Pikar teoremasining qo'llanishi. Maxsus yechimlar.**

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminologiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

#### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Rejting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'ektlar bilan ishlash; konspektlash;

## 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## 3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.24 Misol va mashqlar namoishi

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Koshi masalasini qanoatlaniruvchi tenglama berilgan bo'lsin.

Teorema(Pikar-Lendelyof).  $D = \{(x, y) \in R^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$

yopiq sohada funksiya uzluksiz va y o'zgaruvchi bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantirsin:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|, \quad L - \text{const.}$$

Bu shartlar bajarilganda,  $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$  oraliqda (1)-(2) Koshi masalasini qanoatlantiruvchi yagona  $y = y(x)$  yechim mavjud bo'ladi, bu yerda

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}, \quad D \text{ sohada (ixtiyoriy } M > 0 \text{ mavjud)} \quad |f(x, y)| \leq M.$$

Eslatma. Agar  $D$  sohada  $\frac{\partial f}{\partial y}$  mavjud va uzluksiz bo'lib,  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$  tengsizlik

bajarilsa, bu sohada  $f$  funksiya  $y$  o'zgaruvchi bo'yicha Lipshis shartini qanoatlantiradi, ya'ni

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

Ketma-ket yaqinlashishlar (Pikar yaqinlashishlari)

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

formulalar yordamida aniqlanadi. Bu yaqinlashishlar  $[x_0 - h, x_0 + h]$  oralig'ida  $y = y(x)$  yechimga tekis yaqinlashadi va

$$|y(x) - y_n(x)| \leq ML^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

tengsizlik o'rinli.

Agar (1) tenglama uchun Pikar teoremasi shartlari yopiq chegaralangan sohada bajarilsa, u holda tenglamaning barcha yechimini soha chegarasiga davom ettirish mumkin.

30-misol.  $y' = x - y^2$ ,  $y(0) = 0$  tenglamaning  $y = y(x)$  yechimga

$y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  yaqinlashishlarini toping. Yechim mavjudlik oralig'ining  $|x| \leq h$

uzunligini aniqlang,  $|y(x) - y_2(x)|$  ni baholang. Qaysi nomer  $k$  dan boshlab  $k \geq K$

bo'lganda,  $|y(x) - y_k(x)| \leq 0,001$ ,  $|x| \leq h$  bajariladi.

Pikar teoremasini qo'llash uchun  $D$  soha sifatida markazi  $(0,0)$  nuqtada bo'lgan

$\{(x, y) \in R^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  kvadratni olamiz, demak,  $a=b=1$ .

$f(x, y) = x - y^2$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$  funksiyalar  $D$  sohada uzluksiz va

$|f(x, y)| \leq 2$ ,  $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq 2$ ,  $(x, y) \in D$  demak  $M=2$ ,  $L=2$ .

Pikar teoremasiga asosan

$$|x| \leq h \quad h = \min \left\{ 1, \frac{1}{2} \right\}$$

Ketma-ket  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  yaqinlashishlarni topamiz.

$$y_0 = 0, \quad y_1(x) = 0 + \int_0^x [s - 0] ds = \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x [s - \frac{s^4}{4}] ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},$$

$$|y(x) - y_2(x)| \leq 2 \cdot \frac{2^2}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}, \quad |x| \leq \frac{1}{2}$$

va  $|y(x) - y_k(x)| \leq 2 \cdot \frac{2^k}{(k+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}, \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$  Kerakli  $k$  nomer

$\frac{1}{(k+1)!} \leq 0,001$ , yoki  $(k+1)! \leq 0,001$ , tengsizlikdan aniqlanadi. Bu yerdan  $k=6$ .

31-misol.  $y' = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$  tenglamani yechimining yagonalik sohasini va maxsus yechimlarini aniqlang.

$f = 2 + \sqrt[3]{y-2x}$  funksiya xoy tekislikda aniqlangan va uzluksiz  $y$  bo'yicha xususiy hosilani olamiz.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(y-2x)^2}}$$

Bu funksiya  $y \neq 2x$  bo'lganda aniqlangan va uzluksiz. Bu yerdan  $y_0 \neq 2x_0$  bo'lganda, differensial tenglama yechimi yagona bo'ladi. Yagonalik sharti  $y = 2x$  to'g'ri chiziq nuqtalarida bajarilmaydi. Bu chiziq integral chiziq bo'ladi, chunki differensial tenglamani qanoatlantiradi.  $y = 2x$  ning maxsus yechim bo'lishini ko'rsatamiz. Tenglamaning umumiy yechimi  $27(y-2x)^2 = 8(x+c)^3$ . Faraz qilaylik,  $(x_0, y_0)$  nuqta  $y = 2x$  to'g'ri chiziqning nuqtasi bo'lsin, u holda  $y_0 = 2x_0$ .

Tenglamaning  $(x_0, 2x_0)$  nuqtadan o'tuvchi  $y = 2x$  yechimdan boshqa yechimini topamiz:

Umumiy yechimga  $y = 2x_0$ ,  $x = x_0$  qiymatlarini qo'yib,  $c = -x_0$  ni aniqlaymiz.

Demak,  $27(y-2x)^2 = 8(x-x_0)^3$  integral chiziq  $(x_0, 2x_0)$  nuqtada  $y = 2x$  chiziq bilan umumiy nuqtaga ega, ya'ni  $y = 2x$  chiziqning barcha nuqtalarida yagonalik sharti buziladi, ya'ni  $y = 2x$  maxsus yechimdir.

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

Berilgan tengamaga quyilgan boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimga  $y_0$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  yaqinlashishlarni toping

157.  $y' = x - y^2$ ,  $y(0) = 0$ ; 158.  $y' = y^2 + 3x^2 - 1$ ,  $y(1) = 1$ ;  
 159.  $y' = y + e^{y-1}$ ,  $y(0) = 1$ ; 160.  $y' = 1 + x \sin y$ ,  $y(\pi) = 2\pi$ .

Berilgan boshlang'ich shart yechimi mavjud bo'ladigan biror oraliqni ko'rsating.

161.  $y' = x + y^3$ ,  $y(0) = 0$ ; 162.  $y' = 2y^2 - x$ ,  $y(1) = 1$ ;  
 163.  $x' = t + e^x$ ,  $x(1) = 0$ ; 164.  $y' = x + 2y^2$ ,  $y(0) = 1$ .

Berilgan tenglamalar uchun shunday  $(x, y)$  soha ajratingki, bu sohaning har bir nuqtasidan tenglamaning yagona yechimi o'tsin.

165.  $y' = 2xy + y^2$ ; 166.  $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$ ; 167.  $(x - 2)y' = \sqrt{y} - x$ ;  
 168.  $y' = 1 + tgy$ ; 169.  $(y - x)y' = y \ln x$ ; 170.  $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$ .

171.  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$  sohada qaysi funksiya  $y$  ga nisbatan Lipshis shartini qanoatlantiradi

- a)  $xy^3 + x^2$ , b)  $\sin(x - y)$ , c)  $(x + y)^{-1}$ , d)  $\sqrt{y^2 + 2x}$ ,  
 e)  $|y - x|$ , f)  $xy^2 \ln y$ .

172. Qanday  $a$  va  $n$  ( $n \geq 2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ) sonlar uchun  $y' = x + ay^n$ ,  $y(x_0) = y_0$  tenglamaning  $x_0 \leq x \leq \infty$  da yechimi mavjud bo'ladi.

173.  $y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ ,  $(P, Q) = 1$  va  $P, Q$  ko'phad bo'lganda tenglamaning

maxsus yechimi yo'qligini ko'rsating.

Berilgan tenglamalarning maxsus yechimini toping.

174.  $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ; 175.  $y' = \frac{\sqrt{y-1}}{x}$ ;  
 176.  $y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} + a$ ; 177.  $y' = xy^{\frac{2}{3}}$ .

### 1.3.25 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

172-177

### 1.3.26 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Ассосий адабиётлар*

1. Салохиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибилов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## ***10 mashg'ulot.***

### **Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli**

### **differentensial tenglamalar**

***Mavzu:  $m$  – darajali birinchi tartibli differentensial tenglamalar.***

***To'liqmas tenglamalar.***

### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** “ Differentensial tenglamalari”.

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differentensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminologiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;

- tajriba natijalarini analiz qila olish;

## 1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

### 1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

### 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

## 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

### 1.3.27 Misol va mashqlar namoishi

Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$



Birinchi tartibli m- darajali differensial tenglama

$$(y')^m + A_1(x, y)(y')^{m-1} + \dots + A_{m-1}(x, y)y' + A_m(x, y) = 0 \quad (2)$$

(2) ko'rinishga ega.

Faraz qilaylik, birorta  $D \subset R^2$  sohaning har bir  $(x, y)$  nuqtasida (2) tenglamaning  $y'$  hosilaga nisbatan  $k$  ta haqiqiy yechimlari

$$y' = f_i(x, y), \quad i = \overline{1, k} \quad (3)$$

mavjud bo'lsin, u vaqtda  $\psi_i(x, y) = c$  (3) tenglamalarning umumiy integrallari bo'ladi.

$$\psi_1(x, y) = c, \quad \psi_2(x, y) = c, \dots, \quad \psi_k(x, y) = c \quad (4)$$

funksiyalar to'plamiga (1) tenglamaning umumiy integrali deyiladi. (4) ni boshqa shaklda ham yozish mumkin:

$$[\psi_1(x, y) - c][\psi_2(x, y) - c] \dots [\psi_k(x, y) - c] = 0 \quad (5)$$

Agar  $(x, y)$  nuqtadan (1) tenglamaning umumiy urinovchiga ega bo'lgan ikkita har xil integral yoyi utsa, bu nuqtaga tenglamaning tarmoqlanish nuqtasi deyiladi. Tarmoqlanish nuqtalaridan tuzilgan (1) tenglamaning yechimi maxsus yechim deyiladi. Bu nuqtaning koordinatalari quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi.

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ F_{y'}(x, y, y') = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Agar (6) sistemadan  $y'$  yo'qotilsa, hosil bo'lgan  $\psi(x, y) = 0$  funksiyaning grafigi diskriminant egri chizig'i deyiladi. Umuman bu chiziq bir necha tarmoqlarga ajraladi. Agar tarmoq integral chiziq bo'lsa, (tekshiramiz), u maxsus yechim bo'lishi mumkin (nuqtalari tarmoqlanish nuqtasi bo'lishini tekshiramiz).

Agar (1) tenglama uchun  $y = \varphi(x, c)$  umumiy yechim bo'lsa, u holda shu tenglamaning maxsus yechimi  $y = \varphi(x, c)$  chiziqlar oilasining o'ramasi bo'ladi. Ma'lumki  $\Phi(x, y, c) = 0$  chiziqlar oilasining o'ramasi

$$\Phi(x, y, c) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c} \Phi(x, y, c) = 0$$

tenglamalar bilan aniqlanadigan  $s$  diskriminant chiziqlar turkumiga kiradi.  $s$  diskriminant chiziqning tarmogi o'rama bo'lishi uchun chegaralangan  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}$  lar mavjud bo'lishi va

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \neq 0$$

shart bajarilishi kerak.

Quyidagi tenglamalarning yechimlarini topamiz:

32-misol.  $y^2(y'^2 + 1) = 1.$

Tenglamani hosilaga nisbatan yechamiz

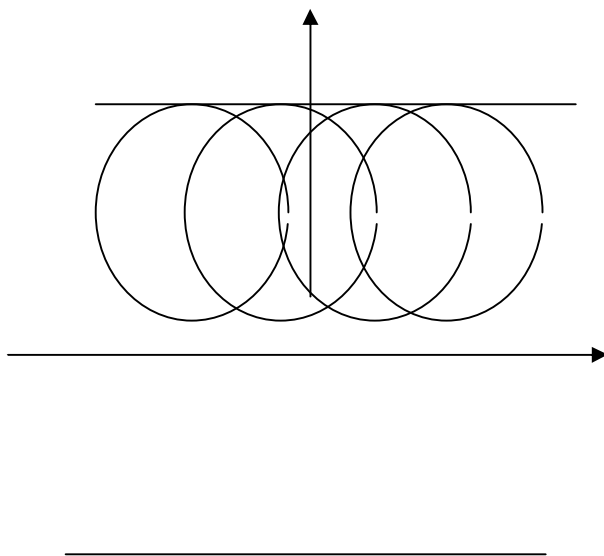
$$y' = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}, [y \neq 0]$$

O'zgaruvchilarga ajratamiz,  $dx = \pm \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}}$ ,  $[y \neq \pm 1]$  va so'ngra integrallab,

$$x + c = \mp \sqrt{1-y^2} \text{ ni hosil qilamiz.}$$

Tekshirib ko'rsak,  $y=0$  tenglamaning yechimi bo'lmaydi.  $y = \pm 1$  maxsus yechim, chunki  $y=1$  ( $y=-1$ ) chiziqning har bir nuqtasiga

integral chiziq o'rinadi. Demak, tenglamaning yechimi:  $(x+c)^2 + y^2 = 1$ ;  $y = \pm 1$ .



33-misol.  $y'^3 + y^2 = yy'(y'+1)$ .

$y'$  nisbatan yechsak  $y'=y$ ,  $y' = \pm \sqrt{y}$  tenglamalarni hosil qilamiz. Bu tenglamalar yechimlari mos ravishda

$$y = ce^x; 4y = (x + c)^2; y = 0$$

$y=0$  birinchi tenglama uchun xususiy yechim, ikkinchisi uchun esa maxsus yechim bo'ladi.

Demak,  $y=0$  berilgan tenglama uchun maxsus yechim.

Yechim:

$$y = ce^x; 4y = (x + c)^2; y = 0.$$

1.  $f(y')=0$ . Agar  $f(\lambda) = 0$  tenglamaning ildizlari yakka bo'lsa, u holda tenglamaning

umumiy yechimi  $f\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0$  shaklda beriladi.

34-misol.  $y'^3 + 3y' + 1 = 0$  tenglamaning yechimi .

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 + 3\left(\frac{y-c}{x}\right) + 1 = 0$$

35-misol.  $y' - |y'| = 0$ ,  $\lambda - |\lambda| = 0$  tenglamaning yechimlari  $\lambda \geq 0$  oraliqni butunlay to'ldiradi. Shuning uchun differensial tenglamaning yechimi ixtiyoriy kamaymaydigan differensiallanuvchi funksiya bo'ladi.

2.  $f(x, y')=0$  va  $f(y, y')=0$  tenglamalar. Agar tenglamalar parametrik ko'rinishda  $x = \varphi(p)$ ,  $y' = \psi(p)$ ;  $y' = \varphi(p)$ ,  $y = \psi(p)$  yozilsa, tenglamaning yechimi kvadraturada integrallanadi. Tenglamalarni yechishda

$$dy = y' dx \quad (7)$$

asosiy munosabatdan foydalaniladi.

36-misol.  $x = y'^3 + y'$ .

$y'=p$  deb belgilasak, tenglama  $x = p^3 + p$  parametrik shaklda ega bo'ladi. (7)

munosabatdan foydalansak,  $dy = pd(p^3 + p)$  yoki  $dy = (3p^3 + p)dp$  hosil

bo'ladi. Bu yerdan  $y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + c$ . Demak, differensial tenglamaning

parametrik shakldagi umumiy yechimini

$$\begin{cases} x = p^3 + p \\ y = \frac{3}{4}p^4 + \frac{1}{2}p^2 + c \end{cases}$$

hosil qilamiz.

37-misol.  $y'^2 + y'^3 = y$

$y' = p$  parametr kiritib, parametrik shakldagi differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$y = p^2 + p^3, \quad y' = p.$$

(7) tenglikka qo'yib,  $dx = \frac{1}{p}(2p + 6p^2)dp$  ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$x = 2p + 3p^2 + c$ . Demak, differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$x = 2p + 3p^2 + c, \quad y = p^2 + 2p^3.$$

$p = 0$  bo'lgan xolatni qaraymiz.  $p = 0$  ni  $y = p^2 + p^3$  ga qo'yib,  $y=0$  yechimni

hosil qilamiz, bu yechim maxsus yechim bo'ladi, chunki har qanday  $(0, x_0)$  nuqtadan

shu nuqtaga o'rinuvchi  $x = 2p + 3p^2 + x_0$ ,  $y = p^2 + 2p^3$  interal chiziq o'tadi.

Demak,

$$\begin{cases} x = 2p + 3p^2 + c \\ y = p^2 + 2p^3 + c, \quad y = 0 \end{cases}$$

differensial tenglamaning parametrik shakldagi umumiy yechimi bo'ladi.

### *Mustaqil yechish uchun misollar*

Tenglamalarni  $y'$  nisbatan yeching va berilgan nuqtadan o'tuvchi chiziqli tenglamasini aniqlang.

178.  $yy'^2 - |xy + 1|y' + x = 0, \quad M(1;1);$  179.  $y'^2 - 4y = 0; \quad M(1,0);$

180.  $y'^2 = 4|y|;$  181.  $y'^2 = \frac{1}{4|x|};$  182.  $y^2(1 + y'^2) = a^2;$

183.  $y'^3 - \frac{1}{4x}y' = 0;$  184.  $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0, \quad M(1,0);$

185.  $yy' + y'^2 = x^2 + xy;$

186.  $xy' = \sqrt{1 + y'^2};$

187.  $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0;$

188.  $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y;$

189.  $y'^3 - 7y' + 6 = 0;$

190.  $y'^3 - (a + b + 1)y'^2 + (ab + a + b)y' - ab = 0;$

191.  $y = y'^2 - y'x + \frac{x^2}{2}.$

Parametr kiritish usuli yordamida to'liqmas tenglamalarni yeching.

192.  $x = ay' + by'^2;$  193.  $x(1 + y'^2)^{3/2} = a;$  194.  $x = y'^3 + 1;$

$$195. xy'^3 = 1 + y'; \quad 196. x^3 - y^3 = xy'; \quad 197. y = \frac{y'^2}{2} + \ln y';$$

$$198. y = y'^2 + 2y'^3; \quad 199. y^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}; \quad 200. \frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = a;$$

$$201. xy'^2 = 1 + y'; \quad 202. y = \frac{y'^2}{2} + \ln y'; \quad 203. x = -\frac{1}{(1+y'^2)};$$

$$204. x = y' + \ln y'; \quad 205. x = y' \sin y' + \cos y'; \quad 206. \arcsin \frac{x}{y'} = y';$$

$$207. x = \ln y' + \sin y'; \quad 208. y' = \arctg \frac{x}{y'^2}; \quad 209. y' \ln y' - y = 0;$$

$$210. y\sqrt{1+y'^2} = y'; \quad 211. y' = e^{y'/y}.$$

### 1.3.28 O'quv mashqlar

#### 1.3.29

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

198-210

### 1.3.30 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск.Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

**11 - mashg'ulot.**  
**Mavzu: Parametr kiritishning umumiy usuli.**

**Lagranj va Klero tenglamalari**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**



- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.31 Misol va mashqlar namoishi**

Agar (1) tenglama  $x = \xi(u, \vartheta)$ ,  $y = \eta(u, \vartheta)$   $y' = \gamma(u, \vartheta)$  (8) parametrik

ko'rinishga bo'lsa, (8) ni (7) munosabatga qo'yib, (1) tenglamani hosilaga nisbatan yechilgan tenglama shakliga keltirish mumkin.

Agar (1) tenglamani  $x$  yoki  $u$  o'zgaruvchilarga nisbatan yechish mumkin bo'lsa,  $u$  va  $V$  parametr sifatida qolgan o'zgaruvchilarni olish mumkin, Masalan, (1) – ni  $x = \zeta(y, y')$  shaklda yozish mumkin bo'lsa,  $u$  holda parametr sifatida  $u$  va  $y' = p$  olinadi va parametrik shakldagi

$$x = \varphi(y, p), \quad y = y, \quad y' = p$$

differentensial tenglama hosil bo'ladi.

Lagranj  $y = \varphi(y')x + \psi(y')$ ,  $\psi(y') \neq y'$  va Klero  $y = y'x + \psi(y')$  tenglamalari yuqorida ko'rsatilgan usul yordamida integrallash mumkin bo'lgan tenglamalar turkumiga kiradi.

38 – misol.  $y = 2xy' - 4y'^3$

Bu tenglama Lagranj tenglamasi.  $y'=p$  deb olamiz va  $x=x$ ,  $y = 2p - 4p^3$ ,  $y' = p$  parametrik shakldagi tenglamani hosil qilamiz.  $dy = p dx$  munosabatga qo'yib,  $2x dp + 2p dx - 12p^3 dp = p dx$

yoki  $p dx + 2x dp = 12p^2 dp$  tenglama hosil qilamiz. Bu yerdan

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 12p, \quad [p \neq 0] \text{ bo'lib, bu tenglamaning yechimi } x = cp^{-2} + 3p^2.$$

Demak berilgan differentensial tenglamaning umumiy yechimi

$$x = cp^{-2} + 3p^2, \quad y = cp^{-1} + 2p^3$$

$p=0$  bo'lgan holni ko'ramiz.

Bu holda  $y=0$  ni hosil qilamiz.  $y=0$  - xususiy yechim (asoslang).

39- misol.  $y = xy' - y'^2$

Bu Klero tenglamasini  $x = x$ ,  $y = xp - p^2$ ,  $y' = p$  parametrik tenglama shakliga keltirish mumkin. Lekin tenglamaning xossalaridan foydalanish, maqsadga muvofiq bo'ladi. Klero tenglamasining umumiy yechimini hosil qilish uchun tenglamada  $y'=c$  deb olish kerak ya'ni  $y = cx - c^2$ . Maxsus yechim  $y = cx - c^2$ ,  $0 = x - 2c$  sistemadan topiladi. Bu yerda  $c$  parametrni yo'qotsak,  $y = \frac{1}{4}x^2$  maxsus yechim hosil bo'ladi.

40- misol  $y'^3 + y^2 = yxy'$

Tenglamani  $x$  ga nisbatan yechamiz:  $x = \frac{y'^2}{y} + \frac{y}{y'}$ . Bundan differensial

tenglamaning parametrik shakldagi  $y = y$ ,  $y' = p$   $x = \frac{y'^2}{y} + \frac{y}{y'}$  ko'rinishi kelib

chiqadi. Bu qiymatlarni (7) asosiy munosabatga qo'ysak,  $\frac{dy}{dp} = \frac{2}{p}y - \frac{y^3}{p^4}$  Bernulli

tenglamasini hosil qilamiz. Tenglamani yechib,  $y^2(2p + c) = p^4$ ,  $pxy = y^2 + p^3$  ga ega bo'lamiz.  $y=0$  ham tenglamaning yechimi bo'ladi.

41-misol.  $y = xy'^2 + y'^3$ .  $y' = p$  deb olamiz.  $y = xp^2 + p^3$ . Berilgan tenglama Lagranj tenglamasi bo'lib, bunda,

$$\varphi(p) = p^2 \quad \psi(p) = p^3$$

Ko'rsatilgan usul bo'yicha berilgan tenglamani  $x$  ga nisbatan differensiallaymiz:

$$p = p^2 + 2xp \frac{dp}{dx} + 3p^2 \frac{dp}{dx}$$

yoki

$$p-1+(2x+3p)\frac{dp}{dx}=0.$$

yoki

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = -\frac{3p}{p-1},$$

bu esa chiziqli tenglama bo'lib, bunda

$$P(p) = \frac{2}{p-1}, \quad Q(p) = -\frac{3p}{p-1},$$

Bu tenglamani chiziqli tenglamaning umumiy yechimini topish formulasi

$$x = e^{-\int P(p)dp} \left[ c + \int Q(p)e^{\int P(p)dp} dp \right]$$

yordamida integrallaymiz:

$$x = \frac{1}{(p-1)^2} \left[ c - p^3 + \frac{3}{2}p \right]$$

demak

$$\begin{cases} y = \frac{p^2}{(p-1)^2} \left[ c - p^3 + \frac{3}{2}p \right] + p^3 \\ x = \frac{1}{(p-1)^2} \left[ c - p^3 + \frac{3}{2}p \right] \end{cases}$$

tenglamani parametr ko'rinishidagi umumiy yechimi bo'ladi.

42-misol.  $y'^2 - y^2 = 0$  tenglamaning maxsus yechimi mavjudmi?

Qo'yilgan savolga javob berish uchun diskriminant chiziqni tuzamiz, buning uchun  $y'^2 + (-y^2) = 0$ ,  $2y' = 0$  tenglamalardan  $y'$  ni yo'qotib  $y=0$  ni hosil qilamiz. Tekshirish natijasida  $y=0$  differensial tenglamaning yechimi ekanligi aniqlanadi.

43-misol. Agar differensial tenglama chiziqlar oilasining yechimi  $y = c(x - c)^2$  ma'lum bo'lsa, differensial tenglamaning maxsus yechimini toping. Agar maxsus yechim ma'lum bo'lsa u chiziqlar oilasining o'ramasi bo'ladi. Avvalo  $C$  diskriminant chizig'ini tuzamiz:

$$y = c(x - c)^2, \quad 0 = (x - c)^2 - 2c(x - c)$$

Bu tenglamalardan  $c$  parametrni yo'qotsak,  $C$  diskriminant chiziqning ikkita  $y=0$ ,

$$y = \frac{4}{27}x^3 \text{ tarmog'ini topamiz.}$$

Birinchi tarmoq uchun  $\frac{\partial}{\partial y}[y - c(x - c)^2]|_{y=0} \neq 0$  va yetarli shartga asosan

$y=0$  o'rama, demak  $y=0$  maxsus yechim.

Xuddi shu usulda  $y = \frac{4}{27}x^3$  ning maxsus yechim ekanligini aniqlaymiz.

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

$$212. \quad 2yy' = x(y'^2 + 4); \quad 213. \quad y = x(1 + y') + y'^2;$$

$$214. \quad y = -xy' + y'^2; \quad 215. \quad 2y(y' + 2) = xy'^2;$$

$$216. \quad y = xy' - y'^2; \quad 217. \quad y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2};$$

$$218. y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}; \quad 219. y = x + y'^2 - y;$$

$$220^*. x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}; \quad 221^*. x + \frac{y}{y'} = \frac{4}{\sqrt{y'}};$$

$$222. xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0; \quad 223. y'^3 = 3(xy' - y);$$

Differensial tenglama maxsus yechimini toping.

$$224. y' = \frac{3}{2}y^{1/3}; \quad 225. y' = 1 + \frac{3}{2}(y - x); \quad 226. y' = \sqrt{y};$$

$$227. y' = x^2 + y^2; \quad 228. y' = \cos(xy); \quad 229. y' = \sqrt[3]{x - y} - 1;$$

$$230. y' = \sqrt[3]{x - y} + 1; \quad 231. y' = \sin x + y \cos x;$$

$$232. y' = y + \sqrt[3]{2y}; \quad 233. y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Berilgan egri chiziqlar oilasining o'ramasi tenglamasini toping

$$234. y = cx + \frac{1}{c}; \quad 235. y^2 = 2cx + c^2;$$

$$236. (x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}; \quad 237. (x - c)^2 + y^2 = 1;$$

$$238. y = ce^x + \frac{1}{c}; \quad 239. y = x\left(c - \frac{1}{x}\right)^2, \quad x \neq 0.$$

### 1.3.32 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### **Uyga vazifa**

224-233

#### **1.3.33 Tavsiya etiladigan adabiyotlar**

##### *Asosiy adabiyotlar*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

##### *Кушимча адабиётлар*

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## **12 - mashg'ulot.**

### **Mavzu: Birinchi tartibli har xil differensial tenglamalarni integrallash**

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asosanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

#### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**



- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.34 Misol va mashqlar namoishi**

Berilgan tenglamalarni tipini aniqlang.

$$240. \quad 1) \quad (2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\frac{x^2}{y^2})dx + (2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\frac{x^3}{y^3})dy = 0;$$

$$2) \quad xy(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0; \quad 3) \quad 2xydx - (x^2 - y^2)dy = 0;$$

$$4) y' \operatorname{ctgx} - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctgx}; \quad 5) x^2 y^2 y' + xy^3 = a^2, \quad a \in R;$$

$$6) y' = 4y^2 - 4x^2 y + x^4 + x + 4; \quad 7) yx' - 2x + y^2 = 0;$$

$$8) xy(1 + y^2)dx - (1 + x^2)dy = 0; \quad 9) \frac{x^2 dy - y^2 dx}{(x - y)^2} = 0;$$

$$10) (x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0; \quad 11) (4 - x^2)y' + xy = 4;$$

$$12) y' \operatorname{tgx} + 2y \operatorname{tg}^2 x = by^2, \quad b \in R; \quad 13) xy' = x^2 y^2 - y + 1;$$

$$14) dx + (x + y^2)dy = 0.$$

Ko'rsatilgan almashtirishni bajarib tenglamani integrallang

$$241. (x - 2y^3)dx + 3y^2(2x - y^3)dy = 0, \quad y^3 = u(x);$$

$$242. xy' + 1 = xe^{x-y}, \quad e^y = u(x);$$

$$243. y' + \sin y + x \cos x + x = 0, \quad \operatorname{tg} \frac{y}{2} = u(x);$$

$$244. y' = \frac{y - x^2 \sqrt{x^2 - y^2}}{xy \sqrt{x^2 - y^2} + x}, \quad y = xu(x);$$

$$245. y' - e^{x-y} + e^x = 0 \quad y = \ln u(x).$$

Ko'rsatilgan amallarni bajaring va integrallash usulini ko'rsatin

$$246. y(x + \ln y) + (x - \ln y)y' = 0, \quad \ln y = u(x);$$

$$247. y' = \cos(ay + bx), \quad a \neq 0, \quad u(x) = ay + bx;$$

$$248. y' + \alpha \sin(ay + bx) + \beta = 0, \quad u(x) = ay + bx;$$

$$249. y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$250. xy^3 - (x^2 y^2 - y^8) y' = 0, \quad u(x) = y^3;$$

$$251. xy + 1 + (x^2 - x^3 y) y' = 0, \quad x = \frac{1}{t};$$

$$252. (ay^3 + bx^2 + cxy^3) + (a_1 x^2 y + b_1 x^3 + c_1 x^3 y) y' = 0, \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = \frac{1}{u};$$

$$253. a\varphi'(y)y' + P(x)\varphi(y) = Q(x), \quad u(x) = \varphi(y);$$

$$254. xy' - (\ln xy - 1) = 0, \quad u(x) = xy;$$

$$255. xy' - y(x \ln \frac{x^2}{y} + 2) = 0, \quad u = \frac{x^2}{y};$$

$$256. xy' + \sin(y - x) = 0, \quad u(x) = x \operatorname{tg} \frac{y - x}{2};$$

$$257. (x^2 + 1)y' + x \sin y \cos y - x(x^2 + 1) \cos^2 y = 0, \quad u(x) = \operatorname{tg} y.$$

Tenglama tipini aniqlang va integrallang.

$$258. (xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0; \quad 259. y' + \sin \frac{x + y}{2} = \sin \frac{x - y}{2};$$

$$260. (x^2 - y^2)dy = 2xydx;$$

$$261. y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; \quad 262. e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0;$$

$$263. x' + x = \cos y; \quad 264. (1 + x^2)dy - (2xy + (1 + x^2)^2)dx = 0;$$

$$265. (x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0; \quad 266. y' - 2xy = 3x^3 y^2;$$

267.  $y' = \frac{2x-1}{x^2}y + 1$ ;                      268.  $y' = y^2 - x^2 + 1$ ;
269.  $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})dx + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})ydy = 0$ ;
270.  $(x \cos \frac{y}{x} + y \sin \frac{y}{x})ydx + (x \cos \frac{y}{x} - y \sin \frac{y}{x})xdy = 0$ ;
271.  $y' + y = xy^3$ ;                      272.  $(xy^4 - x)dx + (y + xy)dy = 0$ ;
273.  $(\sin x + y)dy + (y \cos x - x^2)dx = 0$ ;    274.  $3y'^3 - xy' + 1 = 0$ ;
275.  $yy' + y^2 \operatorname{ctgx} = \cos x$ ;    276.  $(e^y + 2xy)dx + (e^y + x)xdy = 0$  ;
277.  $xy'^2 = y - y'$ ;                      278.  $x(x+1)(y'-1) = y$ ;
279.  $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$ ;                      280.  $xy' + y = \ln y'$ ;
281.  $x^2(dy - dx) = (x + y)ydx$ ;                      282.  $y' + x\sqrt[3]{y} = 3y$ ;
283.  $(x \cos y + \sin 2y)y' = 1$ ;                      284.  $y'^2 - yy' + e^x = 0$ ;
285.  $y' = \frac{x}{y}e^{2x} + y$ ;                      286.  $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1$ ;
287.  $(4xy - 3)y' + y^2 + 1 = 0$ ;                      288.  $y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x}$ ;
289.  $xy' = 2\sqrt{y} \cos x - 2y$ ;    290.  $3y'^4 = y' + y$ ;
291.  $y^2(y - xy') = x^3y'$ ;                      292.  $y' = (4x + y - 3)^2$ ;

293.  $(\cos x - x \sin x)ydx + (x \cos x - 2y)dy = 0$  ;
294.  $x^2 y'^2 - 2xyy' = x^2 + 3y^2$ ;    295.  $\frac{xy'}{y} + 2xy \ln x + 1 = 0$ ;
296.  $xy' = x\sqrt{y - x^2} + 2y$ ;    297.  $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$ ;
298.  $xy'(\ln y - \ln x) = y$ ;    299.  $2y' = x + \ln y$ ;
300.  $yy' = 4x + 3y - 2$ ;    301.  $y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{ctgx}$ ;
302.  $2xy' - y = \sin y$ ;    303.  $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$ ;
304.  $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ ;
305.  $(y' - x\sqrt{y})(x^2 - 1) = xy$ ;    306.  $y = y'$ ;
307.  $y^2 = (xyy' + 1) \ln x$ .

### 1.3.35 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

294-307

### 1.3.36 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ.-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск.Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

### **13-mashg'ulot.**

#### ***Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan $n$ - chi tartibli***

#### ***differential tenglamalar.***

***Mavzu: Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan  $n$ -chi tartibli differential tenglamalar.  
(to'liqmas tenglamalar)***

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differential tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differential tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminologiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

#### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

## 1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'ektlar bilan ishlash; konspektlash;

## 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, gruppalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## 3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.37 Misol va mashqlar namoishi

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$



tenglamaga  $n$ -chi tartibli differensial tenglama deyiladi, bu erda  $x$  - erkli o'zgaruvchi,  $y=y(x)$  izlanuvchi funkciya.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$$

tenglamaga yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan  $n$ -chi tartibli differensial tenglama deyiladi. Koshi masalasi yoki boshlang'ich masala deb  $x = x_0$ ,  $x_0 \in [a, b]$  bo'lganda.

$$y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad (2)$$

shartni qanoatlantiruvchi  $y = y(x)$  funktsiyani topishga aytiladi. Bu yerda  $x, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$  berilgan sonlar. Ko'p hollarda, (1) tenglamani integrallash vaqtida

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-k)}, c_1, \dots, c_k) = 0$$

shakldagi tenglik hosil bo'lishi mumkin. Bu tenglamaga berilgan tenglamaning  $k$  - chi tartibli oraliq integrali deyiladi.

**13-mashg'ulot. Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan  $n$ -chi tartibli differensial tenglamalar. (to'liqmas tenglamalar)**

$$I. F(x, y^{(n)}) = 0 \quad (3)$$

1. Agar (3) tenglamani  $y^{(n)}$  ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, u holda bitta yoki bir nechta  $y^{(n)} = f(x)$  ko'rinishdagi oddiy tenglama hosil qilamiz. Bu tenglamani ketma-ket  $n$  marta integrallab umumiy yechimni topish mumkin.

**Ko'rsatmalar.** Bu holda

$$\int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx \dots dx = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$$

formuladan foydalanish mumkin.

2. Agar (3) tenglamani parametrik ko'rinishda, ya'ni  $x = \varphi(t)$ ,  $y^{(n)} = \psi(t)$  shaklda yozish mumkin bo'lsa, u holda  $dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$  munosabatdan foydalanib, tenglamaning umumiy yechimi parametrik ko'rinishda topiladi.

44-misol.  $xy^{(4)} = 1$ .

Tenglamani  $y^{(4)}$  ga nisbatan yechsak,  $y^{(4)} = \frac{1}{x}$  tenglama hosil bo'ladi. Ketma-ket to'rt

marta integrallab,  $6y = x^3 \ln|x| + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$  umumiy yechimni hosil qilamiz.

45-misol.  $x = e^{-y''} + y''$ .

Bu tenglamada  $y'' = t$  almashtirish olamiz.  $x = e^{-t} + t$ ,  $dy' = y'' dx$  ga qo'ysak,

$$dy' = t(-e^{-t} + 1)dt, \quad y' = te^{-t} + e^{-t} + \frac{t^2}{2} + c_1$$

$$dy = y' dx$$

ga qo'yamiz.

$$dy' = (te^{-t} + e^{-t} + \frac{t^2}{2} + c_1)(-e^{-t} + 1)dt$$

Bu ifodani integrallab tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$x = e^{-t} + t; \quad y = (\frac{t}{2} + \frac{3}{4})e^{-2t} + (\frac{t^2}{2} - 1 + c_1)e^{-t} + \frac{t^3}{6} + c_1t + c_2.$$

$$\text{II. } F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (4)$$

(4) tenglamani  $z = y^{(k)}$ ,  $z = z(x)$  almashtirish yordamida  $n-k$  tartibli

$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0$ , tenglamaga keltirish mumkin.

46-misol  $y''^2 + y' = xy''$

Tenglamada noma'lum funksiya  $y$  qatnashmagan.  $z = y'$  yordamchi funksiyanı kiritamiz.

U vaqtda  $z' = y''$  va tenglama  $z = xz' - z'^2$  ko'rinishga keladi.

Bu tenglama Klero tenglamasi, demak umumiy yechimi  $z = c_1x + c_1^2$ , maxsus yechim

$$z = \frac{x^2}{4} \text{ bo'ladi.}$$

Bu yerdan  $y' = c_1 x + c_1^2$ , va tenglamaning umumiy yechimi  $y = \frac{c_1}{2} x^2 - c_1^2 x + c_2$ ,

maxsus yechimi  $y' = \frac{x^2}{4}$  tenglamadan topiladi va  $y = \frac{1}{12} x^3 + c$ .

$$\text{III. } F(x, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (5)$$

tenglamani  $y' = z, z = z(y)$  almashtirish olib (bu yerda erkli o'zgaruvchi vazifasini y bajaradi) tartibini bitta birlikka pasaytirish mumkin. Bu holda hosilalar quyidagicha topiladi:

$$y'' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \cdot z'_y$$

$$y''' = \frac{d}{dy} (z \cdot z'_y) \frac{dy}{dx} = (z \cdot z''_y + z'^2_y) z$$

va hokazo.

47-misol.  $y'^2 + 2yy'' = 0$ .

$$z = y' \text{ almashtirish olamiz, u holda } y'' = \frac{dz}{dy} z \text{ va tenglama } z + 2yz \frac{dz}{dy} = 0$$

shaklga keladi. Bu yerdan  $z = \frac{c_1}{\sqrt{y}}$  va demak,  $y' = c_1 y^{-1/2}$ . Bu tenglamani integrallab,

berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz,  $\frac{2}{3} y^{3/2} = c_1 x + c_2$ .

**Mustaqil yechish uchun misollar**

$$308. y''' = -\cos x; \quad 309. y''' = \frac{2}{x^3}; \quad 310. x - \sin y'' + 2y'' = 0;$$

$$311. x = e^{-y''} + y''; \quad 312. x = \frac{y''}{\sqrt{1+y''^2}}; \quad 313. y''^2 - 1 = 0;$$

$$314. (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0; \quad 315. xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad 316. xy'' - y' = 0;$$

$$317. y'(1+y'^2) = \alpha y''; \quad 318. yy'' = y'^3; \quad 319. yy''^2 = 1;$$

$$320. 1 + y'^2 = 2yy''; \quad 321. 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0;$$

$$322. xy'' + xy'^2 = y'; \quad 323. y''' - (y'')^3 = 0; \quad 324. y''' - 2y'' = 0;$$

$$325. y^3 y'' + 1 = 0; \quad 326. y^4 - y^3 y'' = 1.$$

Tenglamalarni berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

$$327. y'' = 6x, \quad y = 0 \quad \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa};$$

$$328. y''' = e^{-x}, \quad y = 0, \quad y' = 0, \quad y'' = 0 \quad \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa};$$

$$329. y'' = (1+y'^2)^{3/2}; \quad y = 1, \quad y' = 0 \quad \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa};$$

$$330. y''^2 = y', \quad y = 0, \quad y' = 1 \quad \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa};$$

$$331. 4y' + y''^2 = 4xy'', \quad y = 0, \quad y' = -1 \quad \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa};$$

$$332. 2xy'' + y''' = 0, \quad y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0 \quad \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa};$$

$$333. 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2, \quad y = 1, \quad y' = 0 \quad \text{agar} \quad x = 0 \quad \text{bo'lsa}.$$

### 1.3.38 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

## Uyga vazifa

327-333

### 1.3.39 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

#### **14 - mashg'ulot.**

**Mavzu:** *Tartibini pasaytirish mumkin bo'lgan tenglamalar (birjinsli, umumlashgan birjinsli, to'liq differensial).*

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

### **O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

#### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

#### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

#### **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish



### 1.3.40 Misol va mashqlar namoishi

$$\text{IV. } F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

tenglama noma'lum funksiya va  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  hosilalarga nisbatan birjinsli deyiladi, agar  $F$  funksiya ko'rsatilgan o'zgaruvchilarga nisbatan birjinsli bo'lsa, ya'ni

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

Bu tenglamaning tartibini  $y' = zy$ ,  $z = z(x)$  almashtirish yordamida bittagina pasaytirish

mumkin. Bu holda hosilalar quyidagicha topiladi:  $y' = zy$ ,

$$y'' = y(z^2 + z), \quad y''' = y(z'' + 3zz' + z^3) \text{ va hokazo.}$$

48-misol.  $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$

$y' = zy$  almashtirish olamiz  $y^2(z^2 + z') = z^2y^2 + 15y^2\sqrt{x}$ , bu yerdan tenglamani integrallab, berilgan tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$\ln|y| = 4x^{3/2} + c_1x + c_2; \quad y = 0$$

$$\text{V. } F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

tenglama umulashgan birjinli tenglama deyiladi, agar shunday  $k$  son topib, tenglamaning chap tomoni barcha o'zgaruvchilarga nisbatan  $m$ -chi darajali birjinsli funksiya bo'lsa, bu yerda  $x, y, y', \dots, y^{(n)}$  larni mos ravishda  $l, k, k-1, \dots, k-n$  darajali birjinsli funksiyalar deb olinishi kerak.

Bunday tenglama  $x = e^t$ ,  $y = ze^t$  ( $t$  yangi erkin o'zgaruvchi,  $z$  yangi izlanuvchi funksiya) almashtirish yordamida oshkor ravishda erkli o'zgaruvchi qantashmagan tenglamaga keladi.

49-misol. 
$$\frac{y^2}{x^2} + (y')^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}.$$

Umumlashgan birjinsli tenglama ekanligini ko'rsatamiz. Tenglama bir jinsli bo'lishi uchun tenglamadagi bir hadlar darajalari bir xil bo'lishi kerak, ya'ni

$$2k - 2 = 2(k - 1) = 1 + k - 2 = k + k - 1 - 1$$

tenglamalar  $k=1$  bo'lganda o'rinli. Demak,  $x = e^t$ ,  $y = ze^t$  almashtirish olamiz.

Hosilalarni topsak,

$$y' = (z'_t e^t + z e^t) e^{-t} = z'_t + z$$

$$y'' = (z''_t + z'_t) e^{-t}$$

Tenglamaga qo'yib, soddalashtirsak,

$$z'^2 = 3z'' + 3z'$$
 ni hosil qilamiz. Bu tenglama  $n^0$  III ga tegishli, ya'ni  $z' = u(z)$

almashtirish olib tartibini bittaga pasaytiriladi.

Tenglama yechimi  $y = x \left[ c_3 - 3 \ln \left| \frac{1}{x} - c_1 \right| \right]; y = cx.$

## **VI. To'liq differensialli tenglama.**

Agar differensiallanuvchi  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  funksiya mavjud bo'lib,

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

tenglik bajarilsa,  $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$  tenglama to'liq differensialli tenglama

deyladi va  $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C_1$  berilgan tenglamaning 1-tartibli oraliq integrali (birinchi integral) bo'ladi.

50-misol  $yy''' + 3y'y'' = 0$ .

Tenglamani  $\frac{1}{y''y}$  ga ko'paytirsak,  $\frac{y'''}{y''} + 3\frac{y'}{y} = 0$ ,  $[y'' = 0?]$  to'liq differensialli

tenglama hosil qilamiz, ya'ni

$$\frac{d}{dx} (\ln y'' + \ln y^3) = \frac{y'''}{y''} + 3\frac{y'}{y},$$

bu yerdan  $\ln y'' + \ln y^3 = C_1$  oraliq integralni hosil qilamiz.

Yoki  $y'' y^3 = C_1$  (birinchi integral).

Bu tenglamada  $y' = z$  almashtirish olsak  $z'zy^3 = C_1$  hosil bo'ladi.

Bu yerdan  $z = \pm \sqrt{\frac{C_2 y^2 - C_1}{y^2}}$  yoki  $y' = \pm \frac{\sqrt{C_2 y^2 - C_1}}{y}$

u holda tenglamaning umumiy yechimi  $C_2 y^2 + C_1 = C_2^2 (x + C_3)^2$ .

Agar  $y'' = 0$  bo'lsa,  $y = C_1 x + C_2$  differensial tenglamaning yechimi bo'ladi.

$$334. \quad xyy'' - xy''^2 - yy' - \frac{6xy'^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0;$$

$$335. \quad x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2};$$

$$336. \quad x^2yy'' = (y - xy')^2; \quad 337. \quad yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}};$$

$$338. \quad xyy'' + yy' - x^2y'^3 = 0;$$

$$339. \quad x^4y'' - x^3y'^3 + 3x^2yy'^2 - (3xy^2 + 2x^3)y' + 2x^2y + y^3 = 0;$$

$$340. \quad x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0; \quad 341. \quad y'' = 2yy'; \quad 342. \quad y'' = y'^2 y;$$

$$343. \quad yy'' = y'; \quad 344. \quad yy''' - y'y'' = 0; \quad 345. \quad y'' = (1 + y'^2)^{3/2};$$

$$346. \quad (1 + y'^2)y''' - 3y'y''^2 = 0; \quad 347. \quad y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 1;$$

$$348. \quad y'' + y'\cos x - y\sin x = 0.$$

***Tenglamani berilgan boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping.***

$$349. \quad y'y''' - 3y''^2 = 0; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 1.$$

$$350. \quad 2y'^2 = (y - 1)y''; \quad y(1) = 2; \quad y'(1) = 0.$$

$$351. \quad (y'' - 2x)y - 2(y' - x^2)y' = 0; \quad y(1) = \frac{1}{3}; \quad y'(1) = 1.$$

$$352. \quad y''' = yy'' + y'^2; \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = \frac{1}{2}, \quad y''(0) = 0.$$

$$353. \quad yy'' = 2xy'^2; \quad y(2) = 2; \quad y'(2) = 0,5.$$

$$354. \quad 2y''' - 3y'^2 = 0; \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.$$

$$355. \quad x^2y'' - 3xy' = \frac{6y^2}{x^2} - 4y \quad y(1) = 1; \quad y'(1) = 4.$$

$$356. \quad y''' = 3yy'; \quad y(0) = -2; \quad y'(0) = 0.$$

$$357. \quad y''\cos y + y'^2\sin y = y'; \quad y(-1) = \frac{\pi}{6}; \quad y'(-1) = 2.$$

### 1.3.41 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

349-357

### 1.3.42 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Asosiy adabiyotlar*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## **15 - mashg'ulot.**

### **Mavzu: Amaliy masalalarning matematik modelini tuzish**

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

#### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik

qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.43 Misol va mashqlar namoishi**

Bunday masalalarning quyidagi turkumlarga bo'lish mumkin:

- a) idishdan suyuqlikni oqishi;
- b) issiqlik tarqalishi;
- c) material nuqta harakati;
- d) eritmaga doir;
- e) biologik populyasiyaning matematik modeli;

Har bir turkumdagi masalalarni alohida ko'rib o'tamiz:

**a) idishdan suyuqlikni oqishi;**

Suyuqlik bilan to'ldirgan idish tubida tuynuk bo'lib bu tuynukdan suyuqlik oqib chiqadi. Oqish tezligi  $\mathcal{G} = c\sqrt{2gh}$  formula bilan aniqlanadi, bu yerda  $c$  - suyuqlikning ko'rinishiga bog'liq bo'lgan o'zgarmas miqdor (masalan suv uchun  $c=0,6$ ),  $g$  - erkin tushish tezlanishi,  $h$  - tuynukdan suyuqlik sirtigacha bo'lgan masofa.

1-masala. Konus ko'rinishidagi voronka balandligi  $H$  ga va o'q kesimi uchidagi burchak  $\alpha$  - ga teng bo'lib,  $u$  suv bilan to'ldirilgan. Suv yuzasi  $\sigma$  - ga teng bo'lgan tuynukdan oqib chiqadi. Qancha vaqtdan so'ng idishda suv qolmaydi.

Yechimi.  $t$  - vaqt momentda suv yuzasi tuynukdan  $h = h(t)$  masofada bo'lsin va  $dt$  vaqtda suv balandligi  $dh$  miqdorga kamaysin, u holda yetarlicha kichik  $dt$  uchun oqib chiqqan suv miqdori balandligi  $dh$  va radiusi  $x = h \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  bo'lgan silindr hajmiga teng bo'ladi,

ya'ni  $dV = -\pi h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot dh$ . Boshqa tomondan shu  $dt$  vaqt ichida tuynukdan oqib chiqqan suv

miqdori asos yuzi  $\sigma$  va balandligi  $\mathcal{G}dt$  ga teng bo'lgan silindr hajmiga teng bo'ladi, ya'ni  $dV = c\sigma\sqrt{2gh}dt$  hosil qilingan hajmlarni tenglashtirsin quyidagi differensial tenglamani hosil qilamiz

$$-\pi h^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = c\sigma\sqrt{2gh}dt, \quad h(0) = H.$$

Bu tenglama qo'yilgan masalani matematik modelidir. Hosil qilgan masala o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib, uni o'zgaruvchilarini ajratib integrallaymiz

$$t = \frac{2\pi \operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{3\sigma\sqrt{2g}} (H^{5/2} - h^{5/2}).$$

Demak idishda suv qolmasligi uchun  $h=0$  bo'lishi kerak ya'ni

$$T = \frac{2}{3} \pi \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{\sigma\sqrt{2g}} H^{5/2}.$$

**Mustaqil yechish uchun masalalar.**

358. Balandligi  $H$  ga va asos yuzi  $S$  ga teng bo'lgan silindr tubidagi teshikdan suv oqib chiqadi. Agar teshik yuzi  $\sigma$  ga teng bo'lsa, qancha vaqtdan so'ng idishda suv qolmaydi.

359. Radiusi  $1m$  bo'lgan yarim shar ko'rinishdagi qozon suv bilan tuldirilgan. Agar qozon tubida yuzi  $0,25 \text{ sm}^2$  bo'lgan teshik hosil bo'lsa, qancha vaqtdan so'ng qozonda suv qolmaydi?

360. Radiusi  $2m$  bo'lgan yarim shar ko'rinishdagi idish suv bilan tuldirilgan. Agar idish tubida radiusi  $0,1m$  bo'lgan aylana shaklidagi teshik kesib olinsa, qancha vaqtdan so'ng idishda suv qolmaydi?

361. Vertikal ukli silindr balandligi  $6m$  va diametri  $4m$  bo'lgan silindr suv bilan tuldirilgan. Silindr ostki asosidan radiusi  $\frac{1}{12}m$  bo'lgan aylana ko'rinishidagi teshikdan suv qancha vaqtda to'la oqib chiqadi.



362. Gorizontaal o'qli silindr balandligi 6m va diametri 4m bo'lgan silindr suv bilan to'ldirilgan. Silindr ostki asosidan radiusi  $\frac{1}{12}$  m bo'lgan aylana ko'rinishidagi teshikdan suv qancha vaqtda to'la oqib chiqadi.

363. Suv bilan to'ldirilgan vertikal turgan sisterna tubida teshik mavjud. Agar birinchi suv oqib chiqish tezligi bosimga proporsional va birinchi sutkada suvning  $\frac{1}{10}$  qismi oqib chiqsa, qancha sutka idishdagi suvning yarimi oqib chiqadi.

364. Balandligi 4m va ko'ndalang kesimi tomoni 6m ga teng bo'lgan xovuz  $10 \frac{M^3}{MUH}$  ga ega bo'lgan tezlikda suv oqib tushadi. Agar idish tubida tomoni  $\frac{1}{12}$  m teng bo'lgan kvadrat shaklidagi teshikdan suv oqib chiqsa, qancha vaqtdan so'ng idishni to'ldirish mumkin.

**b) issiqlik tarqalishi;**

Agar biror jismni sirtidagi temperatura (harorat) o'zgarmas bo'lsa, u holda ma'lum vaqtdan so'ng jismning har bir nuqtasidagi harorat o'zgarmas miqdor bo'ladi, ya'ni harorat vaqtga bog'liq bo'lmaydi. Agar  $T$  harorat birta koordinataga  $x$ -ga bog'liq bo'lsa, u holda Nyutonning issiqlik o'tkazish qonuniga muvofiq  $OX$  o'qiga perpendikulyar  $A$  yuzali maydondan  $1s$  da o'tadigan issiqlik miqdori

$$Q = -kA \frac{dT}{dx}$$

ga teng, bu yerda  $k$  - jismning issiqlik o'tkazish koeffitsiyenti bo'lib  $u$  o'zgarmas son. Jismning havoda sovush tezligi jism va havo haroratlari ayirmasiga proporsional, ya'ni

$\frac{dT}{d\tau} = -\ell(T - t)$  bu yerda  $T - \tau$  vaqtda jismning harorati,  $t$  - havo harorati,  $\ell$  - musbat proporsionallik koeffitsiyenti.

2 - masala. Kovak temir ( $k = 58,66 \frac{Dj}{(m \cdot sek)}$ ) shar radiuslari mos ravishda 6sm va 10sm bo'lib stasionar issiqlik xolatida va ichki sirtining harorati  $200^{\circ}C$ , tashqi sirt harorati  $20^{\circ}C$ . Shar markazidan  $r$  ( $6 < r < 10$ ) sm masofadagi haroratni va 1sek. da sharni muhitga tarqatadigan issiqlik miqdorini aniqlang.

Yechimi. Radiusi  $r$  ( $6 < r < 10$ ) sm ga teng bo'lgan sfera  $A$  sirtidagi harorat  $r$  - ga bog'liq, ya'ni  $T = T(r)$ .  $A$  sirt yuzi  $4\pi r^2$  ga teng bo'lganligi sababli Nyuton qonuniga asosan  $A$  sirtidan o'tuvchi issiqlik miqdori  $Q = -4\pi r^2 R \frac{dT}{dr}$  ga teng. Shar sirtlari orasida issiqlik manbai yo'qligi sababli  $A$  sirtidan ixtiyoriy  $r$  uchun birxil issiqlik miqdori o'tadi, ya'ni  $Q$  - o'zgarmas. O'zgaruvchilari ajraladigan tenglamani integrallab

$$4\pi kT = \frac{Q}{r} + c$$

ni hosil qilamiz.  $Q$  va  $C$  larni topish uchun  $T = 20^{\circ}C$ ,  $r = 10 \cdot 10^{-2}$  va  $T = 200^{\circ}C$ ,  $r = 6 \cdot 10^{-2} m$  larni qo'yamiz va hosil bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechib  $c = -1000\pi k$ ,  $Q = 10800\pi k$  ni hosil qilamiz. Demak

$$T = \frac{2700}{r} - 250, \quad Q = 108\pi k = 19892,77 \frac{Dj}{sek}.$$

### Mustaqil yechish uchun masalalar

365. Diametri 20 sm bo'lgan par o'tkazuvchi truba 10sm qalinlikdagi magneziy bilan o'ralgan. Magneziyni issiqlik o'tkazishi  $k = 0,71 \frac{Dj}{(m.sek)}$ . Truba harorati  $160^{\circ}C$  magneziyning tashqi qobig'i harorati  $30^{\circ}S$  bo'lsa, o'rama ichida harorat taqsimlanishini aniqlang va 1metr uzunlikdagi trubani 1 sutkada muhitga chiqargan issiqlik miqdorini aniqlang.

366. G'ishtdan yasalgan devor qalinligi 30 sm  $k = 0,63 \frac{Dj}{(m.sek)}$ . Agar devor harorati ichki qismida  $20^{\circ}C$ , tashqi qismidagi esa  $0^{\circ}C$  bo'lsa, devor haroratini uning ichki nuqtasidan tashqi nuqtasigacha bo'lgan masofaga qanday bog'liqligini ko'rsating.  $1m^2$  maydonga ega bo'lgan devor 2 sutkada tashqi muhitga chiqargan issiqlik miqdorini aniqlang.

367. Nyuton qonuniga muvofiq jismning havoda sovish tezligi jism va havo haroratlari ayirmasiga proporsional. Agar havo harorati  $20^{\circ}C$  va jism 20 minutda  $100^{\circ}S$  dan  $60^{\circ}C$  ga sovusa qancha vaqtdan so'ng uning harorati  $30^{\circ}C$  bo'ldi.

368. Agar jasad topilagn vaqtda uning temperaturasi  $31^{\circ}S$  va bir soatdan so'ng  $29^{\circ}C$  bo'lsa, jinoyat sodir bo'lgan vaqtni aniqlang, bunda inson temperaturasi  $37^{\circ}C$  va havo harorati  $21^{\circ}C$  deb olish kerak.

369. Tandirdan uzilgan nonning issiqligi 20 minutda  $100^{\circ}C$  dan  $60^{\circ}C$  ga kamayadi. Havo harorati  $25^{\circ}C$  bo'lganda qancha vaqtdan so'ng nonning issiqligi  $30^{\circ}C$  ni tashqil etadi.

#### c) material nuqta harakati;

Bu turkumdagi masalalar yechishda Nyutonning ikkinchi qonuni ishlatiladi, ya'ni  $\bar{F} = m\bar{a}$ .

3-masala. Boshlang'ich tezligi  $\bar{g}$  va massasi  $m$  ga teng bo'lgan material nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab tekis harakatlanadi. Harakat yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda  $\bar{F}$  qarshilik kuchi ta'sir etadi, bu kuch moduli  $k\sqrt[3]{g}$  ga teng ( $k$  - o'lcham o'zgarmas koeffitsiyenti). Nuqtaning harakat boshlanishidan to'xtashgacha saralangan vaqt va bosib utgan yul uzunligini aniqlang.

Yechim. Nuqta  $OX$  o'qi bo'yicha tekis harakatlanayapti deb, koordinata boshini esa harakat boshi deb olamiz. Nuqtaga birta kuch  $\bar{F}$  ta'sir etadi, demak nuqta harakati differensial tenglamasi

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k\sqrt[3]{g}$$

bo'ladi. Nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha harakatlanligi sababli  $\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 g}{dt^2}$  va demak tenglama quyidagi ko'rinishga keladi

$$m \frac{d^2 g}{dt^2} = -k\sqrt[3]{g}.$$

Tenglamani integrallab umumiy yechimini topamiz

$$\frac{3}{2} m \tau^{\frac{2}{3}} = -kt + c$$

$t = 0$  da  $\bar{g} = \bar{g}_0$  bo'lganligi sababli  $c = \frac{3}{2}m\bar{g}_0^{2/3}$  va  $t=t_1$  da  $g=0$  bo'lganligidan

$t_1 = \frac{3m}{2k}\bar{g}_0^{2/3}$  ni olamiz.

Harakat qonuni  $x(t)$  ni topish uchun topilgan xususiy yechimni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz

$$\frac{dx}{dt} = (\bar{g}_0^{2/3} - \frac{2kt}{3m})^{3/2}$$

tenlamani integrallab

$$x = -\frac{3m}{5k}(\bar{g}_0^{2/3} - \frac{2kt}{3m})^{5/2} + c_1$$

ni hosil qilamiz.  $t=0$  da  $x=0$  bo'lganligi sababli

$$c = \frac{3m}{5m}\bar{g}_0^{5/3}$$

Demak

$$x = \frac{3m}{5k}\bar{g}_0^{5/3} - \frac{3m}{5k}(\bar{g}_0^{2/3} - \frac{2kt}{3m})^{5/2}$$

da bosib o'tilgan yo'l  $x = \frac{3m}{5k}\bar{g}_0^{5/3}$  ga teng.

#### *Mustaqil yechish uchun masalalar*

370. Poyezdga uning tezligining chiziqli funksiyasi bo'lgan qarshilik kuchi ta'sir etsa, uni to'la to'xtashi uchun qancha vaqt sarflanishi va u qancha masofa bosib o'tishi kerak.

371.  $m$  massali moddiy nuqta boshlang'ich turtki ta'sirida gorizonttal ravishda erkin parvoz qilmoqda. Tashqi muhit ta'sir kuchi  $F$ , uning moduli esa  $F = -k_1\bar{g}^\alpha - k_2\bar{g}$  formula bilan berilsa tushish tezligini toping, bu yerda  $k_1, k_2, \alpha$  - o'lchovga bog'liq o'zgarmlar.

372.  $m$  massali moddiy zarracha qarshiligi uning tezligini kvadratiga proporsional bo'lgan muhitga tushadi. Bu zarracha tezligini o'zgarish qonunini aniqlang va  $t \rightarrow \infty$  da bu

tezlikni  $\sqrt{\frac{g}{h}}$  ga tengligini ko'rsating, bu yerda  $g$  - erkin tushish tezlanishi.

373. Yer ustidagi moddiy nuqtaga (yer radiusi- $R$ )  $\bar{g}_0 = \sqrt{2gR}$  boshlang'ich vertikal tezlik berilgan (ikkinchi kosmik tezlik). Havo qarshiligini e'tiborga olmagan holda nuqtaning harakat qonunini toping

374.  $\bar{g}_0 = 400 \frac{m}{sek}$  tezlikda harakatlanayotgan o'q qalinligi  $h=20sm$  bo'lgan devorni teshib undan  $\bar{g}_1 = 100 \frac{m}{sek}$  tezlikda otilib chiqadi. agar devor qarshiligi o'q tezligining kvadratiga proporsional bo'lsa, uni devorga harakati vaqtini aniqlang.

375. 12000t hajmli kema  $g_0 = 20 \frac{m}{sek}$  tezlikda to'g'ri chiziq buylab tekis harakatlanmoqda. Suv qarshiligi kema tezligini kvadratiga proporsional bo'lib, u  $1 \frac{m}{sek}$  tezlikda 36000 gH ni tashqi qiladi. Kema motori to'htagandan so'ng tezligi  $5 \frac{m}{sek}$  ga yetgancha qadar kema qancha masofani bosib o'tadi.

**d) eritmaga doir masalalar;**

Qattiq modda o'zgarmas temperaturadagi suyuqlikda erish tezligi berilgan vaqtdagi erimagan modda massasi va boyigan eritma va berilgan vaqtdagi eritmalar konsentrasiyalari ayirmasiga proporsionaldir.

4-masala. Erimaydigan modda tarkibida  $x_0 = 10kg$  tuz bor. Bu moddani 90l suvga botirilganda 1 soatda tarkibidagi tuz miqdori 2 marta oshsa 1 soatda qancha tuz eriydi? Boyitilgan eritma quyuqlanishi  $\frac{1}{3}$  ga teng.

Yechimi.  $x=x(t)$  -  $t$  vaqt momentida erimagan tuz miqdori bo'lsin. Modda erish prosessi quyidagi tenglama yordamida aniqlanadi.

$$\frac{dx}{dt} = kx \left( c - \frac{m-x}{V} \right)$$

bu yerda  $k$  - proporsionallik koeffitsiyentini,  $m$  - tuzning boshlang'ich massasi. Berilgan masala uchun Koshi masalasi quyidagicha bo'ladi

$$\frac{dx}{dt} = kx \left( \frac{1}{3} - \frac{10-x}{90} \right), \quad x(0) = 10$$

Bu tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama bo'lib uni integrallasak quyidagini hosil qilamiz

$$\frac{x}{x+20} = \frac{1}{3} e$$

$k$  koeffitsiyentini aniqlash uchun  $t = 1$  da  $x = \frac{x_0}{2}$  miqdorda tuz eriganligidan foydalanamiz

va  $k = \frac{9}{2} \ln \frac{3}{5}$  ni hosil qilamiz. Agar  $V = 2V_0$  bo'lsa, Koshi masalasi quyidagicha bo'ladi

$$\frac{dx}{dt} = \frac{9}{2} \ln \frac{3}{5} x \left( \frac{1}{3} - \frac{10-x}{180} \right), \quad x(0) = 10$$

va bu masala yechimi

$$\frac{x}{x+50} = \frac{1}{6} \left( \frac{3}{5} \right)$$

ko'rinishda bo'ladi.  $t=1$  c deb olsak  $x=5,2kg$  tuzni hosil qilamiz.

**Mustaqil yechish uchun masalalar.**

376. Tarkibida  $2\text{kg}$  tuzli egri maydigan modda ni  $30$  litr suvli idishga qo'yilganda  $5$  minutda  $1\text{kg}$  tuz eriganligi ma'lum bo'ldi. Qancha vaqtdan so'ng boshlang'ich tuz miqdorining  $99\%$  eriydi. Boyitilgan eritma quyuqlanishi  $\frac{1}{3}$  ga teng.

377. Ximik harakatsiz moddadan uni benzolda eritib oltingugurt olindi. Agar moddada  $6\text{ gr}$  oltingugurt bo'lib, uni  $100\text{g}$  benzolda  $6$  soat eritishga qo'yilsa qancha oltingugurt olish mumkin. (Boyitilgan eritmada  $11\text{g}$  oltingugurt eriydi). Proporsionallik koeffitsiyenti  $k = -0,42 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 / (\text{sek} \cdot \text{kg})$ .

378.  $0,3 \text{ m}^3$  hajmli katta idish tubi tuz va erimaydigan modda bilan koplangan. Tuz erish tezligi shu vaqtdagi quyuqlanish va boyitilgan eritma quyuqlanishi  $\left(\frac{1}{3}\right)$  orasidagi ayirmaga proporsional bo'lsa va olingan toza suv massasi  $1$  minutda  $\frac{1}{3} \text{ kg}$  tuz eritilsa  $1$  soatdan so'ng eritmada qancha tuz miqdori bor.

379.  $0,1 \text{ m}^3$  hajmli katta idishda  $10\text{kg}$  tuz eritmasi bor. Bu idishga  $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{min}$  tezlikda suv kuyiladi va shu tezlikda eritma oqib chiqadi, shu bilan birga quyuqlanish birjinsli saqlanadi (masalan aralashtirish yordamida).  $1$  soatdan so'ng idishda qancha tuz qoldi?

380.  $0,1 \text{ m}^3$  hajmli katta idishda  $10\text{kg}$  tuz eritmasi bor. Bu idishga  $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{min}$  tezlikda suv qo'yilib,  $2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{min}$  tezlikda oqib chiqadi. Aralashtirish yordamida quyuqlanish birjinsli saqlanadi.  $1$  soatdan so'ng idishda qancha tuz qoldi?

381. Sig'imi  $V=10800 \text{ m}^3$  bo'lgan binoda havo tarkibida  $0,12\%$   $\text{CO}_2$  bor. Bu tarkibida  $0,04\%$   $\text{CO}_2$  bo'lgan toza havo tekis kiradi. Agar  $10 \text{ min}$ . So'ng binodagi havo tarkibidagi  $\text{CO}_2$   $0,06\%$  ga tushsa binoga  $1$  minutga necha kub metr havo kiradi. (birlik vaqt momentida binoga  $q \text{ m}^2$  havo kiradi deb olish kerak).

**e) biologik populyasiyaning matematik modeli;**

Populyasiyaning o'sish tezligi  $t$  vaqt momentida tug'ilish va o'lish orasidagi ayirmaga teng. Chegaralangan fazo va oziq ovqat imkoniyatlarida tug'ilish zotlar soniga, o'lishi esa zotlar sonining kvadratiga proporsional. Bu holda populyasiyaning o'sishini matematik modeli

$$\frac{dx}{dt} = \beta x - \delta x^2$$

tenglama bilan ifodalanadi, bu yerda  $x(t)$  -  $t$  vaqt momentida populyasiyadagi zotlar soni,  $\beta, \delta$  - mos ravishda, o'rtacha tug'ilish va o'lish koeffitsiyentlari. Bunday tenglama logistik tenglama deyiladi,  $x(t)$  funksiya esa populyasiyaning logistik sonini aniqlaydi. Logistik o'sishda populyasiyadagi zotlar soni vaqt o'tishi bilan limitik o'lchovga yaqinlashadi, ya'ni  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ .

### ***Mustaqil yechish uchun masalalar.***

382. Populyasiyadagi zotlar soni 10 ta. Agar birlik vaqt momentida 1000 zotlardan 100 zot tug'ilib 1ta zot o'lsa, populyasiyaning limitik o'lchovini toping.

383. Bakteriyalar populyasiyasida ular 1 soatda 120 donagacha ko'payadi. Agar bakteriyalarning boshlang'ich soni 100 dona bo'lib limitik o'lchovi 100000 dona bo'lsa ularni  $t$  vaqt momentidagi sonini aniqlang.

384. Logistik tenglamani integrallang

$$\frac{dx}{dt} = x(\beta - \delta x) \left(1 - \frac{m}{x}\right)$$

Bu yerda  $\beta=100$ ,  $\delta=1$ ,  $m=10$ .

#### **1.3.44 O'quv mashqlar**

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

#### **Uyga vazifa**

383-384

#### **1.3.45 Tavsiya etiladigan adabiyotlar**

*Асосий адабиётлар*

**1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Одий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.**

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## **16-mashg'ulot**

### ***n-chi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.***

**Mabzu:** *Chiziqli bog'langan va bog'lanmagan funksiyalar sistemasi.*

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** “Differensial tenglamalari”.

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

## **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materiallarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar royxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'ektlar bilan ishlash; konspektlash;

### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### **3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarining muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

## **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

### **1.3.46 Misol va mashqlar namoishi**



$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  intervalida aniqlangan bo'lsin. Agar hyech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lgan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sonlar topilib,  $x \in (a, b)$  uchun

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0 \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'lsa,  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  intervalda chiziqli bog'langan deyiladi.

Agar (3) tenglik faqat va faqat  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  qiymatlardagina o'rinli bo'lsa,  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiyalar chiziqli bog'lanmagan deyiladi.

51-misol.  $1, x, x^2, x^3, x^4$  funksiyalar sistemasi  $(-\infty; \infty)$  intervalda chiziqli bog'lanmaganligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham

$$\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \alpha_5 x^4 = 0 \quad (4)$$

tenglik  $x \in (-\infty; +\infty)$  ning barcha qiymatlarida, faqat  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$

bo'lganda bajariladi, agar  $\alpha_i (i = \overline{1, 5})$  - ning birortasi nolga teng bo'lmasa, u holda (4) tenglikning chap tomoni ko'pi bilan 4-chi darajali tenglama bo'lib, algebraning asosiy teoremasiga asosan u ko'pi bilan  $x$  ning 4 ta qiymatida nolga teng bo'lishi mumkin.

52-misol.  $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, e^{\lambda_3 x}$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ ) funksiyalar  $(-\infty; +\infty)$  intervalda chiziqli bog'lanmagan funksiyalar sistemasini tashqil etishini ko'rsatamiz.

Bu funksiyalarni chiziqli bog'langan deb faraz qilamiz, u holda  $x \in (-\infty; +\infty)$  uchun

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} + \alpha_3 e^{\lambda_3 x} \equiv 0 \quad (5)$$

va  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sonlarning hyech bo'lmaganda birortasi noldan farqli, masalan  $\alpha_3 \neq 0$

bo'lsin. (5) ni  $e^{\lambda_1 x}$  ga bo'lamiz:

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3 e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} \equiv 0$$

Bu ayniyatni differensiallaymiz

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) e^{(\lambda_3 - \lambda_1)x} \equiv 0 \quad (6)$$

(6) ni  $e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}$  ga bo'lamiz

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) + \alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} \equiv 0$$

Oxirgi tenglikni differensiallab,

$$\alpha_3 (\lambda_3 - \lambda_1) e^{(\lambda_3 - \lambda_2)x} \equiv 0$$

ayniyatga kelimiz.

Bunda  $\alpha_3 \neq 0$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$  va  $e^{kx} \neq 0$  bo'lganligi sababli ziddiyat hosil qildik. Demak, berilgan funksiyalar sistemasi barcha  $x \in (-\infty; +\infty)$  larda chiziqli bog'langandir.

53-misol.  $\sin x$ ,  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$   $x \in (-\infty; +\infty)$  ga chiziqli

bog'langan funksiyalar sistemasini tashqil etishini ko'rsating.

Hyech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lgan  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sonlar uchun  $x \in (-\infty; +\infty)$  da

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \alpha_3 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \equiv 0 \quad (7)$$

ayniyat o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. (7) ayniyatni to'g'ri deb faraz qilib, unga  $x = 0$ ,

$\frac{\pi}{6}$ ,  $-\frac{\pi}{6}$  qiymatlarni berib, quyidagi sistemani hosil qilamiz

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_2 = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Bu sistemaning determinanti

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, (8) birjinsli chiziqli sistema cheksiz ko'p yechimga ega.

$$\alpha_2 = \alpha_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha_1, \quad \alpha_1 = -\sqrt{3} \quad \text{deb olsak,} \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1 \quad \text{bo'ladi. Bu}$$

qiymatlarda  $x \in (-\infty; +\infty)$  lar uchun (7) ayniyat o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

$$\sqrt{3} \sin x + \sin x\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \equiv -\sqrt{3} \sin x + 2 \sin x \cos \frac{\pi}{6} \equiv$$

$$\equiv -\sqrt{3} \sin x + \sqrt{3} \sin x \equiv 0$$

Demak, berilgan funksiyalar sistemasi chiziqli bog'langan.

### ***Vronskiy va Gram determinantlari***

Yuqorida qarab chiqilgan misollardan ko'rinayaptiki, berilgan funksiyalar sistemasining chiziqli bog'langan yoki bog'lanmaganligini bevosita aniqlash yetarlicha murakkab ekan. Lekin, agar funksiyalar chiziqli birjinsli tenglamaning yechimlari bo'lsa, bu masalani Vronskiy determinanti yordamida yechish mumkin.

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiyalar  $(n-1)$  - tartibgacha hosilalarga ega bo'lsin, u holda Vronskiy determinanti quyidagicha tuziladi:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Qo'yidagi teorema o'rinli.

**Teorema.** Birjinsli  $n$  - chi tartibli tenglama ko'effitsiyentlari uzluksiz bo'lgan  $D$  oraliqda uning  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  yechimlari chiziqli bog'lanmagan funksiyalar sistemacisini tashqil etishi uchun  $D$  oraliqning biror nuqtasida Vronskiy determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu holda Vronskiy determinanti  $D$  oraliqning barcha nuqtalarida noldan farqli bo'ladi.

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada berilgan bo'lsin, u holda bu funksiyalar chiziqli bog'langan bo'lishi uchun Gram determinanti

$$G(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_1, y_2) & \dots & (y_1, y_n) \\ (y_2, y_1) & (y_2, y_2) & \dots & (y_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_n, y_1) & (y_n, y_2) & \dots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}$$

nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, bu yerda  $(y_i, y_j) = \int_a^b y_i(x)y_j(x)dx$ ;  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

54-misol.  $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, y_3 = e^{\lambda_3 x}$  funksiyalar yordamida Vronskiy determinantini tuzing.

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2, y_3] &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3 e^{\lambda_3 x} \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3 x} \end{vmatrix} = \\ &= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x} (\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

55-misol.  $y_1 = x, y_2 = 2x$  funksiyalar  $[0, 1]$  kesmada chiziqli bog'langanligini ko'rsating. Gram determinantini tuzamiz

$$\begin{aligned} (y_1, y_1) &= \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \\ (y_1, y_2) &= (y_2, y_1) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3} \\ (y_2, y_2) &= \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$G(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Demak,  $y_1(x)$  va  $y_2(x)$  funksiyalar chiziqli bog'langan.

### ***Ostrogradskiy – Liuvill formulasi***

(2) tenglama yechimlari va koeffitsiyentlari orasidagi bog'lanish Ostrogradskiy – Liuvill formulasi orqali ifodalanadi:

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = W[x_0] \exp \left[ - \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right]$$

56-misol.  $x(x-1)y'' + (x+1)y' - y = 0$  tenglama xususiy yechimi

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n \quad (8)$$

ko'rinishida bo'lsa, uning umumiy yechimini toping.

(8) funksiyani berilgan tenglamaga qo'yamiz va hosil bo'lgan ko'phadning bosh koeffitsiyentini nolga tenglashtirib,

$$n(n-1) + (n-1) = 0$$

tenglamani hosil qilamiz. Bundan  $n = 1$ ,  $n = -1$ . Agar musbat butun  $n$  qiymat topilmasa, bu holda berilgan tenglama (8) ko'rinishdagi yechimga ega bo'lmas edi.

Demak berilgan tenglama  $y = x + a$  ko'rinishdagi yechimga ega. Bu yechimni tenglamaga qo'yib  $a = 1$  ni olamiz. Tenglama yechimini topish uchun Ostrogradskiy – Liuvill formulasidan foydalanamiz

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = ce^{\left[ - \int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx \right]}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = ce^{\left[ - \int \frac{x+1}{x(x-1)} dx \right]}$$

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = \frac{Cx}{(x-1)^2}$$

Bu yerda  $y_1$  ni o'rniga  $y_1 = x+1$  ni qo'yib,  $y_2$  ga nisbatan hosil bo'lgan birinchi tartibli chiziqli tenglamani yechish mumkin, lekin qulayroq usul qo'llash afzalroq, ya'ni oxirgi tenglamani  $y_1^2$  ga bo'lamiz:

$$\left[ \frac{y_2}{y_1} \right]' = \frac{Cx}{(x-1)^2 y_1^2},$$

$$\frac{y_2}{y_1} = C \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^2} + C_2 \quad \text{yoki} \quad \frac{y_2}{y_1} = -\frac{1}{2} C \frac{1}{(x^2-1)} + C_2.$$

$$-\frac{1}{2} C = C_1 \text{ deb olsak,}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{C_1}{(x^2-1)} + C_2$$

yoki

$$y_2 = \frac{C_1}{(x-1)} + C_2(x+1).$$

Hosil bo'lgan funksiya berilgan tenglamaning umumiy yechimini beradi.

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

Berilgan funksiyalar sistemasining o'z aniqlanish sohasida chiziqli bog'lanmaganligini tekshiring.

385. 4, x; 386. x, 2x, x<sup>2</sup>; 387. ye<sup>x</sup>, xe<sup>x</sup>, x<sup>2</sup>ye<sup>x</sup>;  
388. sinx, cosx, cos2x; 389. 5, cos<sup>2</sup>x, sin<sup>2</sup>x; 390. 1, sinx, cos2x;  
Berilgan funksiyalar sistemasi uchun Vronskiy determinantini tuzing.

391. ye<sup>-x</sup>, x<sup>2</sup>, cosx; 392. sin<sup>2</sup>x, cos<sup>2</sup>x, x;  
λ<sub>1</sub>x λ<sub>2</sub>x

393. ye<sup>λ<sub>1</sub>x</sup>, ye<sup>λ<sub>2</sub>x</sup>, ..., ye<sup>λ<sub>n</sub>x</sup> 394. ye<sup>x</sup>, 2ye<sup>x</sup>, ye<sup>-x</sup>;

395. 2, cosx, cos2x; 396. ye<sup>x</sup>sinx, ye<sup>x</sup>cosx

397. x, lnx, 3 398. π, arcsinx, arccosx;

Gram determinanti yordamida funksiyalar sistemasi  $[-\pi, \pi]$  kesmada chiziqli bog'langanligini ko'rsating.

399. x, 2x, x<sup>2</sup>; 400. 5, cos<sup>2</sup>x, sin<sup>2</sup>x;

401. 1, sin2x, (sinx - cosx)<sup>2</sup>;

Xususi yechimi berilgan chiziqli birjinsli tenglamaning umumiy yechimini toping.

402. y'' + y = 0, y<sub>1</sub> = sin x;

403. y'' +  $\frac{2}{x}$  y' + y = 0, x > 0, y<sub>1</sub> =  $\frac{\sin x}{x}$ .

404. y'' +  $\frac{2}{\sin^2 x}$  y = 0, y<sub>1</sub> = ctgx, x ∈ ( $\frac{\pi}{10}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ).

405. x(x+1)y'' + (x+2)y' - y = 0, y<sub>1</sub> = x+2.

406. (2t+1)x + (4t-2)x - 8x = 0, x<sub>1</sub>(t) = t<sup>2</sup> +  $\frac{1}{4}$ .

407. (1-x<sup>2</sup>)y'' - xy' +  $\frac{1}{4}$  y = 0, y<sub>1</sub> =  $\sqrt{1+x}$ .

408. x<sup>2</sup>(ln x - 1)y'' - xy' + y = 0, y<sub>1</sub> = x.

409. y'' + (tgx - 2ctgx)y' + 2ctg<sup>2</sup>x · y = 0, y<sub>1</sub> = sin x.

$$410. \quad y'' + \operatorname{tg} x \cdot y' + \cos^2 x \cdot y = 0, \quad y_1 = \cos(\sin x).$$

$$411. \quad (1 + x^2)y'' + xy' - y = 0, \quad y_1 = x.$$

### 1.3.47 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

404-411

### 1.3.48 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.

4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Қушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.

2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.

4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.

5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.

6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.

8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## ***17 - mashg'ulot.***

### ***Mavzu: Chiziqli differensial tenglama tuzish.***

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** “Differensial tenglamalari”.

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

## 1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

### 1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

### 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarining muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

## 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish



### 1.3.49 Misol va mashqlar namoishi

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  oraliqda uzluksiz va chiziqli bog'lanmagan funksiyalar sistemasini tashqil etib, shu bilan birgalikda  $n$  - chi tartibgacha uzluksiz hosilalarga ega bo'lsin.

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

tenglama  $n$  - chi tartibli chiziqli tenglama bo'lib, bu tenglamaning (*FES*) fundamental yechimlar sistemasini berilgan  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  funksiyalar tashqil etadi.

57-misol. Fundamental yechimlar sistemasi  $y_1 = \sin x$ ,  $y_2 = \operatorname{tg} x$  bo'lgan chiziqli differensial tenglama tuzing.

Tenglama 2 - chi tartibli bo'ladi, chunki *FES* ikkita funksiya iborat. Uchinchi tartibli determinant tuzamiz.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \operatorname{tg} x & y \\ \cos x & \frac{1}{\cos^2 x} & y' \\ -\sin x & \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} & y'' \end{vmatrix} = 0$$

va uni oxirgi ustun elementlari bo'yicha yoyamiz.

$$\begin{aligned} y'' \begin{vmatrix} \sin x & \operatorname{tg} x \\ \cos x & \frac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} - y' \begin{vmatrix} \sin x & \operatorname{tg} x \\ -\sin x & \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \end{vmatrix} + \\ + y \begin{vmatrix} \cos x & \frac{1}{\cos^2 x} \\ -\sin x & \frac{2 \sin x}{\cos^3 x} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Bundan } \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} y'' - \frac{\sin^2 x (2 + \cos^2 x)}{\cos^3 x} y' + \frac{3 \sin x}{\cos^2 x} y = 0$$

tenglamani olamiz.

Bu tenglamani keltirilgan tenglamaga keltirish uchun uni  $\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$  ga bo'lamiz.

$$y'' - \frac{2 + \cos^2 x}{\sin x \cos x} y' + \frac{3}{\sin^2 x} y = 0$$

tenglama maxsus nuqtalarga ega. Bu nuqtalar  $\sin x = 0$ ,  $\cos x = 0$  tenglamaning yechimlaridan iborat, ya'ni

$$x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$$

### ***O'zgarmasni variatsiyalash usuli***

Agar (1) bir jinslimas tenglamaga mos bo'lgan bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi aniqlangan bo'lsa, u holda (1) tenglama umumiy yechimini kvadraturalar yordamida topish mumkin.

58-misol.

$$y'' + y = \cos ecx \quad (9)$$

Tenglamaning umumiy yechimini toping. Mos birjinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \quad (9) \quad \text{tenglamaning yechimini}$$

$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$  ko'rinishda izlaymiz.

Topish kerak bo'lgan  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$  funksiyalar ikkita bo'lganligi sababli bitta ko'shimcha shart qo'yish kerak.  $y'$  va  $y''$  hosilalarni hisoblaymiz.

$$y' = C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = C_1(x) \sin x + C_2'(x) \cos x$$

$C_1(x)$  va  $C_2(x)$  funksiyalarga qo'yiladigan shart

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0.$$

Demak,

$$y' = -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x$$

$$y'' = -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x - C_1(x) \cos x - C_2(x) \sin x$$

Hisoblangan hosilalarni (9) tenglamaga qo'yib, uni soddalashtirgandan so'ng

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \cos ecx$$

tenglamani hosil qilamiz.

Demak,  $C_1(x)$  va  $C_2(x)$  larni topish uchun qo'yidagi sistemani hosil qilamiz

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \cos x \end{cases}$$

Bu sistema  $C_1'(x)$  va  $C_2'(x)$  larga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidir.

Uni yechamiz

$$\begin{cases} C_1'(x) = -1 \\ C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} C_1(x) = -x + C_1 \\ C_2(x) = \ln |\sin x| + C_2 \end{cases}$$

Demak, (9) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|.$$

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

Berilgan fundamental yechimlar sistemasiga ko'ra differensial tenglama tuzing.

412.  $y_1 = x, y_2 = \cos x, y_3 = \sin x;$       413.  $y_1 = 2x, y_2 = x - 2, y_3 = ye^x;$

414.  $y_1 = x, y_2 = x^2, y_3 = x^3;$       415.  $y_1 = \cos^2 x, y_2 = \sin^2 x;$

416.  $y_1 = ye^x, y_2 = xe^x;$       417.  $y_1 = ye^x, y_2 = ye^x \sin x, y_3 = ye^x \cos x.$

Berilgan chiziqli birjinslimas tenglamaga mos bo'lgan birjinsli tenglamaning fundamental yechimlar sistemasini bilgan holda uning umumiy yechimini toping.

418.  $y'' + y = 5, y_1 = \cos x, y_2 = \sin x;$

419.  $y'' - \frac{y'}{x} = x, (x > 0) y_1 = 1, y_2 = x^2;$

420.  $y'' + y = \tan^2 x, x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) y_1 = \cos x, y_2 = \sin x;$

421.  $y'' - y' = \frac{1}{e^{x-1}}, y_1 = 1, y_2 = e^x;$

422.  $y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}, x \neq 0, y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^{-x};$

$$423. xy'' - (1 + 2x^2)y' = 4x^2 e^{x^2}, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = e^{x^2};$$

$$424. y'' - 2y'tgx = 1, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = tgx;$$

$$425. x \ln xy'' - y' = \ln^2 x, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = x(\ln x - 1);$$

$$426. y'' + y'tgx = \cos x \cdot tgx, \quad y_1 = 1, \quad y_2 = \sin x.$$

### 1.3.50 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

420-426

### 1.3.51 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.

4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.

2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.

4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.

5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.

6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.

8. Амеликин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### **18 - mashg'ulot.**

**Mavzu: *n*-chi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamalar**

#### **1. Birjinsli differensial tenglama**

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** “Differensial tenglamalari”.

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil
- 

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.
- 

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;

- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

-

### **O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

#### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

#### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

#### **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati:* ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari:* guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar

- amaliy ishlarni topshirish

### 1.3.52 Misol va mashqlar namoishi

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1)$$

tenglamaga  $n$  - chi tartibli o'zgarmas koeffitsiyentli birjinsli differensial tenglama deyiladi. Bu yerda  $a_0, a_1, \dots, a_n$  o'zgarmas sonlar.

Tenglamaning xususiy yechimi  $y = e^{\lambda x}$  ko'rinishda bo'lib, u

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

$\lambda$  - xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lishi kerak. Yechim ko'rinishi (2) xarakteristik tenglama ildizlariga bog'liq:

#### a) (2) tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy va har xil.

Bu holda  $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}$  yechimlar tenglamaning fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi, chunki ular yordamida tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli (oldingi mavzuning 54- misoliga qarang).

59-misol.  $y'' - 7y' + 12y = 0$ .

Xarakteristik tenglamani tuzamiz

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0.$$

$\lambda = 3, \lambda = 4$  bu tenglamaning ildizlaridir. Demak,  $y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{4x}$  tenglamaning hususiy yechimlari va  $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x}$  berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

#### b) (2) tenglamaning ildizlari orasida kompleks yechim mavjud.

Xarakteristik tenglama haqiqiy koeffitsiyentli bo'lganligi sababli ildizga qo'shma bo'lgan son ham ildiz bo'ladi. Bu ildizlar  $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ , bo'lsin. Bu ildizlarga (1) tenglamaning

$y_1 = e^{\lambda_1 x} \cos \beta x, y_2 = e^{\lambda_2 x} \sin \beta x$  ko'rinishdagi ikkita yechim mos keladi.

60-misol.  $y'' + 4y' + 13y = 0$ .

Xarakteristik tenglama  $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ . U  $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i$  ildizlarga ega, demak,  $y_1 = e^{-2x} \cos 3x, y_2 = e^{-2x} \sin 3x$  berilgan tenglamaning xususiy yechimlari bo'lib, ular chiziqli bog'lanmagan va  $y = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x$  tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

61-misol.

Xarakteristik tenglama ildizlari  $\lambda_{1,2} = 2 \pm 4i, \lambda_{3,4} = -3 \pm i, \lambda_5 = -4$  bo'lgan differensial tenglamaning umumiy yechimini yozing.

Umumiy yechim

$$y = c_1 e^{2x} \cos 4x + c_2 e^{2x} \sin 4x + c_3 e^{-3x} \cos x + c_4 e^{-3x} \sin x + c_5 e^{-4x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

#### c) Xarakteristik tenglamaning ildizlari orasida karrali ildiz mavjud.

Masalan,  $\lambda_1$  tenglamaning  $r$  karrali ildizi bo'lsin, bu holda (1) tenglama  $r$  ta

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = x e^{\lambda_1 x}, \dots, y_r = x^{r-1} e^{\lambda_1 x} \quad (3)$$

ko'rinishdagi hususiy yechimga ega bo'ladi. Bu yechimlarni chiziqli bog'lanmaganligini bevosita Gram determinantidan foydalanmasdan aniqlash mumkin.

$$(c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}) e^{\lambda_1 x} = 0 \quad (4)$$

tenglik barcha  $x$  lar uchun o'rinli bo'lsin, u holda

$$c_1 + c_2 x + \dots + c_r x^{r-1}$$

ko'phad aynan nolga teng bo'ladi, bu esa ko'phadning barcha koeffitsiyentlari nol bo'lgandagina bajarilishi mumkin. Demak, (4) tenglik faqat  $c_1 = c_2 = \dots = c_r = 0$  bo'lganda bajariladi va bundan (3) chiziqli bog'lanmagan funksiyalar sistemasini tashqil etadi.

62-misol. Xarakteristik tenglama ildizlari  $\lambda_{1,2,3,4} = 2$ ,  $\lambda_{5,5} = -3$  bo'lgan  $L[y] = 0$  differensial tenglamaning umumiy yechimini yozing.

$\lambda = 2$  to'rt karrali ildiz bo'lganligi sababli tenglamaning xususiy yechimlari  $e^{2x}, x e^{2x}, x^2 e^{2x}, x^3 e^{2x}$  bo'ladi;  $\lambda = -3$  ikki karrali – yechim  $e^{-3x}, x e^{-3x}$

Shunday qilib, tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishga ega

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3) e^{2x} + (c_5 + c_6 x) e^{-3x};$$

63-misol.  $L[y] = 0$  tenglamaning xarakteristik tenglamasi ildizlari  $\lambda_{1,2,3} = -4 + 3i$ ,  $\lambda_{4,5,6} = -4 + 3i$ ,  $\lambda_{7,8} = 2i$ ,  $\lambda_{9,10} = -2i$  bo'lsa. uning umumiy yechimini yozing.  $\lambda_{1,2,3} = -4 \pm 3i$  uch karrali va  $\lambda_{7,8} = \pm 2i$  ikki karrali ildizlar bo'lganligidan foydalanamiz. Umumiy yechim quyidagi ko'rinishga ega

$$y = e^{-4x} ((c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos 3x + (c_4 + c_5 x + c_6 x \sin 3x) + (c_7 + c_8 x) \sin 2x + (c_9 + c_{10} x) \cos 2x.$$

### Mustaqil yechish uchun misollar

Tenglamalarning umumiy yechimini toping.

$$427. y'' - 4y' + 3y = 0; \quad 428. y'' - 7y' + 12y = 0;$$

$$429. y'' - 2y' + 10y = 0; \quad 430. y'' - 3y' = 0;$$

$$431. y'' + 4y' + 8y = 0; \quad 432. y'' + 16y = 0;$$

$$433. y'' - 6y' + 9y = 0; \quad 434. y'' + 6y' + 10y = 0; \quad 435.$$

$$y^{IV} - y = 0; \quad 436. y^{IV} - 5y'' + 10y' - 6y = 0;$$

$$437. y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 6y' + 3y = 0;$$

$$438. y''' + 5y'' + 7y' + 3 = 0; \quad 439. y^{IV} - 10y''' + 9y' = 0;$$

$$440. y^{VII} + 4y^{VI} - y''' - 4y'' = 0;$$

$$441. y^{VI} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0.$$

Koshi masalasini qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping

$$442. y'' - 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 1;$$



$$443. y'' + 4y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2;$$

$$444. y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2;$$

$$445. y'' - y = 0, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 3.$$

Характеристик tenglamaga ko'ra chiziqli bir jinsli tenglamani tuzing.

$$446. \text{ a) } 9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0; \quad \text{ b) } \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0;$$

$$\text{ c) } (\lambda^2 + 1)^2 = 0; \quad \text{ d) } \lambda^2(\lambda - 1) = 0.$$

Характеристик tenglamani ildizlariga ko'ra birjinsli chiziqli tenglamani tuzing va uning umumiy yechimini yozing.

$$447. \text{ a) } \lambda_1=1, \lambda_2=2; \quad \text{ b) } \lambda_{1,2,3}=1; \quad \text{ c) } \lambda_{1,2}=3 \pm 2i;$$

$$\text{ d) } \lambda_1=2, \lambda_{2,3}=\pm i.$$

### 1.3.53 O'quv mashqlar

–misol va masalalarni eching

–teoremani isbotlang

–shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

442-446

### 1.3.54 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.

4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Биби́ков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.

2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.

3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.

4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.

5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.

6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.

8. Амели́кин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### ***19-mashg'ulot.***

***Mavzu: Birjinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama.***

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashgulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;

- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

## 1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

### 1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

### 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

## 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

### 1.3.55 Misol va mashqlar namoishi

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (5)$$

tenglarni qaraymiz. Bu yerda  $a_0, a_1, \dots, a_n$  - o'zgarmas sonlar,  $f(x)$   $x \in [a, b]$  da aniqlangan va uzluksiz funksiya.

Birjinslimas tenglamaning umumiy yechimi ikkita yechimning algebraik yig'indisidan iborat bo'lib, bunda birinchi qo'shiluvchi berilgan tenglamaga mos bo'lgan birjinsli tenglamaning umumiy yechimidan, ikkinchi qo'shiluvchi esa berilgan tenglamaning bitta hususiy yechimidan iborat.

Umumiy holda, agar mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi ma'lum bo'lsa, o'zgarmasni variatsiyalash usuli yordamida berilgan tenglamaning umumiy yechimini kvadraturalar yordamida topish mumkin. Lekin amaliyotga tegishli muhim hollarda, ya'ni (5) tenglamaning o'ng tomoni

$$f(x) = e^{\alpha x} (P_m(x) \cos \beta x + P_k(x) \sin \beta x) \quad (6)$$

ko'rinishida bo'lganda, tenglama xususiy yechimini aniqmas koeffitsiyentlar usuli yordamida ham aniqlash mumkin. Bu holda xususiy yechim ko'rinishini quyidagi jadvaldan foydalanib topish mumkin

| №  | O'ng tomon ko'rinishi                                                                                                 | Xarakteristik tenglama ildizlari                                        | Xususiy yechim ko'rinishi                                                                                              |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. | $A_m(x)$<br>$n$ -chi darajali ko'phad                                                                                 | 0 son xarakteristik tenglama ildizi emas                                | $y_1 = P_m(x)$<br>$m$ -chi darajali to'la ko'phad                                                                      |
|    |                                                                                                                       | 0 son xarakteristik tenglamaning $s$ -karrali ildizi                    | $y_1 = x^s P_m(x)$                                                                                                     |
| 2. | $A_m(x) e^{\alpha x}$                                                                                                 | $\alpha$ son xarakteristik tenglama ildizi emas                         | $y_1 = P_m(x) e^{\alpha x}$                                                                                            |
|    |                                                                                                                       | $\alpha$ son xarakteristik tenglamaning $s$ -karrali ildizi             | $y_1 = x^s P_m(x) e^{\alpha x}$                                                                                        |
| 3. | $A_m(x) \cos \beta x + B_k(x) \sin \beta x$<br>$A_m(x), B_k(x)$ mos ravishda $n$ -chi va $k$ -chi darajali ko'phadlar | $\pm \beta i$ son xarakteristik tenglama ildizi emas                    | $y_1 = P_r(x) \cos \beta x + Q_r(x) \sin \beta x$<br>$r = \max(m, k)$<br>$P_r(x), Q_r(x)$ $r$ -chi darajali ko'phadlar |
|    |                                                                                                                       | $\pm \beta i$ son xarakteristik tenglamaning $s$ -karrali ildizi        | $y_1 = x^s (P_r(x) \cos \beta x + Q_r(x) \sin \beta x)$                                                                |
| 4. | $e^{\alpha x} (A_m(x) \cos \beta x + B_k(x) \sin \beta x)$                                                            | $\alpha \pm \beta i$ son xarakteristik tenglama ildizi emas             | $y_1 = e^{\alpha x} (P_r(x) \cos \beta x + Q_r(x) \sin \beta x)$                                                       |
|    |                                                                                                                       | $\alpha \pm \beta i$ son xarakteristik tenglamaning $s$ -karrali ildizi | $y_1 = x^s e^{\alpha x} (P_r(x) \cos \beta x + Q_r(x) \sin \beta x)$                                                   |

64-misol. Tenglama umumiy yechimini toping:  $y''' + 3y'' = x^2 - 1$ .

Mos birjinsli tenglama  $y''' + 3y'' = 0$  dan iborat. Xarakteristik tenglama ildizlari  $\lambda_{1,2} = 0$ ,  $\lambda_3 = -3$  va umumiy yechimi:  $y^* = c_1 + c_2x + c_3e^{-3x}$ . Berilgan tenglama xususiy yechimini topamiz.

0 – xarakteristik tenglamaning ikki karrali ildizi, demak,  $s = 2$ . Tenglama o'ng tomoni 2 - chi darajali ko'phad,  $n = 2$ . Jadvalning 1 bandining ikkinchi qismiga ko'ra

$$y_1 = x^2(ax^2 + bx + c) = ax^4 + bx^3 + cx^2,$$

bu xususiy yechim koeffitsiyentlarini topish uchun  $y_1$  ni (7) ga qo'yamiz.

$$24ax + 6b + 36ax^2 + 18bx + bc = x^2 - 6$$

bir xil darajali koeffitsiyentlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} 36a = 1 \\ 24a + 18b = 0 \\ 6c = -6 \end{cases}$$

sistemani yechamiz.

$$a = \frac{1}{36}, b = -\frac{1}{27}, c = -1$$

Bundan  $y_1 = \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{27}x^3 - x^2$  ni olamiz va umumiy yechim:

$$y = y^* + y_1 = c_1 + c_2x + c_3e^{-3x} + \frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{27}x^3 - x^2$$

65-misol. Tenglamani yeching

$$y'' - 4y = xe^{2x} + (5x^2 + 2x)e^{3x}$$

Mos birjinsli tenglamaning xarakteristik tenglamasi ildizlari  $\lambda_{1,2} = \pm 2$ , bundan uning umumiy yechimi  $y^* = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x}$  bo'ladi.

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni  $f_1(x) = xe^{2x}$ ,  $f_2(x) = (5x^2 + 2x)e^{3x}$  funksiyalar yig'indisidan iborat bo'lganligi sababli ikkita yordamchi tenglamalarni qaraymiz:

$$\begin{cases} y'' - 4y = xe^{2x} \\ y'' - 4y = (5x^2 + 2x)e^{3x} \end{cases}$$

Birinchi tenglamada,  $\alpha = 2$  xarakteristik tenglamaning bir karrali ildizi bo'ladi ( $s=1$ ), ko'rsatkichli funksiyaning koeffitsiyenti esa birinchi darajali ko'phaddan iborat ( $m = 1$ ). Jadvalning 2 bandining ikkinchi qismiga ko'ra xususiy yechim

$y_1 = x(ax + b)e^{2x} = (ax^2 + bx)e^{2x}$  ko'rinishda bo'ladi. Uni tenglamaga qo'yamiz,

$$2ae^{2x} + 4(2ax + b)e^{2x} + 4(ax^2 + bx)e^{2x} - 4(ax^2 + bx)e^{2x} = xe^{2x}$$

soddalashtirib mos koeffitsiyentlarni tenglashtiramiz va  $\begin{cases} 8a = 1 \\ 2a + 4b = 0 \end{cases}$  sistemani hosil

qilamiz. Bundan  $a = \frac{1}{8}, b = -\frac{1}{16}$ , demak,  $y_1 = (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x)e^{2x}$ . Yordamchi

tenglamaning ikkinchisida  $\alpha = 3$  va  $m = 2$  xarakteristik tenglamaning ildizlari emas. Jadvalning ikkinchi bandining birinchi qismiga ko'ra

$$y_2 = (ax^2 + bx + c)e^{3x}.$$

Bu yechimni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$2ae^{3x} + 6(2ax + b)e^{3x} + 9(ax^2 + bx + c)e^{3x} - 4(ax^2 + bx + c)e^{3x} = (5x^2 + 2x)e^{3x}.$$

Oxirgi ifodani soddalashtiramiz.

$$5ax^2 + (12a + 5b)x + 2a + 6b + 5c = 5x^2 + 2x.$$

Ko'phadlarning mos darajalar koeffitsiyentlarini tenglashtirib:

$$\begin{cases} 5a = 5 \\ 12a + 5b = 2 \\ 2a + 6b + 5c = 0 \end{cases}$$

sistemadan  $a = 1, b = -2, c = 2$  ni olamiz.

Demak,  $y_2 = (x^2 - 2x + 2)e^{3x}$ . Natijada berilgan tenglamaning yechimi

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + (\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x)e^{2x} + (x^2 - 2x + 2)e^{3x}$$
 ko'rinishga ega

ekanligini hosil qilamiz.

66-misol.  $y'' + 25y = x \cos 5x$  tenglamaning umumiy yechimini toping.

Mos birjinsli tenglamaning xarakteristik tenglamasi  $\lambda^2 + 25 = 0$ , bundan  $\lambda_{1,2} = \pm 5i$  va umumiy yechimi  $y^* = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x$  bo'ladi.

Tenglama o'ng tomoni jadvalning 3 bandiga mos keladi, bunda  $\pm \beta \quad i = \pm 5i$  va  $r = 1, k = 0, \pm 5i$  xarakteristik tenglama ildizi, demak, xususiy yechim

$$y_1 = x((a_0x + a_1) \cos 5x + (b_0x + b_1) \sin 5x)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Koeffitsiyentlarni topish uchun  $y_1$  - ni tenglamaga qo'yamiz va soddalashtirib

$$(20b_0x + 2a_0 + 10b_1) \cos 5x + (20a_0x + 2b_0 - 10a_1) \sin 5x = x \cos 5x$$

ni olamiz.

Bu tenglik o'rinli bo'lishi uchun mos trigonometrik funksiyalar koeffitsiyentlari teng bo'lishi kerak, ya'ni:

$$\begin{cases} 20b_0x + 2a_0 + 10b_1 = x \\ 20a_0x + 2b_0 - 10a_1 = 0 \end{cases}$$

bundan

$$\begin{cases} 20b_0 = 1 \\ 20a_0 + 10b_1 = 0 \\ 20a_0 = 0 \\ 2b_0 - 10a_1 = 0 \end{cases}.$$

Bu sistemaning yechimi  $a_0 = 0$ ,  $b_0 = \frac{1}{20}$ ,  $a_1 = \frac{1}{100}$ ,  $b_1 = 0$  va xususiy yechim

$$y_1 = 0,01x \cos 5x + \frac{1}{20}x^2 \sin 5x.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi:

$$y_1 = c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x + 0,01x \cos 5x + 0,05x^2 \sin 5x$$

bo'ladi.

67-misol.  $y'' - 6y' + 13y = 8e^{3x} \sin 2x$  tenglamaning xususiy yechimining ko'rinishini aniqlang. Mos birjinsli tenglamaning xarakteristik tenglamasi  $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ , ildizlari  $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$ . Jadvalning 4 bandiga ko'ra  $\alpha \pm \beta$   $i = 3 \pm 2i$  va  $s = 1$ ,  $A_m(x) = 0$ ,  $B_k(x) = 1$  bo'lib, nolinci darajali ko'po'addan iborat. Demak, xususiy yechim

$$y_1 = xe^{3x}(a \cos 2x + b \sin 2x)$$

ko'rinishda bo'ladi.

### 3. Koshi masalasi

$n$  - chi tartibli chiziqli tenglama uchun Koshi masalasi berilgan tenglamaning

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimni topishdan iboratdir.

68-misol.  $y'' - 4y = 4e^{2x}$  tenglamaning  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 2$  shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + x e^{2x}.$$

Topilgan yechimni differensiallaymiz

$$y' = 2c_1 e^{2x} - 2c_2 e^{-2x} + e^{2x} + 2x e^{2x}.$$

Koshi masalasi shartiga ko'ra  $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + 1 = 2 \end{cases}$  bundan  $c_1 = \frac{1}{4}$ ,  $c_2 = -\frac{1}{4}$ ,

demak, xususiy yechim  $y = \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + x e^{2x}$  dan iborat.

69-misol.

$$y'' - 3y' + 2y = 4 + 2e^{-x} \cos x$$

tenglamani

$x \rightarrow +\infty$  ga  $y \rightarrow 2$  shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Tenglama umumiy yechimi  $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x)$  dan iborat.

Bir vaqtda nolga teng bo'lmagan  $c_1$  va  $c_2$  lar uchun  $x \rightarrow +\infty$  da yechim chegaralanmagan.  $c_1 = c_2 = 0$  da  $y = 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x)$  va  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$  bo'ladi.

Demak, masala yechimi:  $y = 2 + e^{-x}(\sin x - \cos x)$ .

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

Tenglamalarning umumiy yechimini toping

$$448. y'' + 4y' + y = 4; \quad 449. y'' + 6y' + 9y = 12e^{-3x};$$

$$450. y'' - 6y' + 9y = x^2; \quad 451. y'' + 4y' = 4xe^{-4x};$$

$$452. y'' + 6y' - 3y = 12\cos 3x; \quad 453. y'' - y = 2x - 1 + e^{5x};$$

$$454. y'' - 3y' = 1 + e^x + \cos x + \sin x;$$

$$455. y'' + y' + y + 1 = \sin x + x + x^2;$$

$$456. y'' + y = 2\sin x \sin 2x; \quad 457. y''' - 2y'' + y' = 2x + e^x;$$

Koshi masalasini qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping

$$458. y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), \quad y(0) = 2, y'(0) = 2;$$

$$459. y'' - 5y' + 6y = e^{-x}(3x - 2), \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$460. y'' - y = 3x, \quad y(1) = -1, y'(1) = 0;$$

$$461. y'' + 6y' + 9y = 10\sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$462. y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x), \quad y(0) = -4, y'(0) = 5.$$

Cheksizlikda berilgan shartlarni qanoatlantiruvchi chiziqli differensial tenglamaning xususiy yechimini toping.

$$463. y'' - y = 1, \quad x \rightarrow \infty \text{ da } y - \text{chegaralangan};$$

$$464. y'' - y = 3 - 2\cos x, \quad x \rightarrow \infty \text{ da } y - \text{chegaralangan};$$

$$465. y'' - 2y' + y = 4e^{-x}, \quad y \rightarrow 0, \text{ agar } x \rightarrow \infty;$$

$$466. y'' + 4y' + 3y = 8e^x + 9, \quad y \rightarrow 3, \text{ agar } x \rightarrow -\infty;$$

$$467. y'' - y' - 5y = 1, \quad y \rightarrow -\frac{1}{5}, \text{ agar } x \rightarrow \infty.$$

### **1.3.56 O'quv mashqlar**

–misol va masalalarni eching

–teoremani isbotlang

–shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### **Uyga vazifa**



**1.3.57 Tavsiya etiladigan adabiyotlar***Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

*Қушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### **20-mashg'ulot.**

**Mavzu: O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglamaga keltiriladigan tenglamalar**

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asosanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar

- *o'qitish shartlari*: auditoriya
- *monitoring va baholash*: og'zaki nazorat, individual savol-javob, material tushuntirilishi, nazorat ishi.

#### **Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

#### **O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

#### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

#### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

#### **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.58 Misol va mashqlar namoishi

##### 1. Eyler tenglamasi.

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)$$

ko'rinishdagi tenglama Eyler tenglamasi deyiladi. Bu tenglama  $x = e^t$  almashtirish yordamida o'zgarmas koeffitsiyentli bir jinslimas chiziqli tenglamaga keltiriladi. Yoki mos birjinsli tenglamani xususiy yechimini  $y = x^\lambda$  ko'rinishda olish ham mumkin.

$$a_0 (ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

tenglama umumlashgan Eyler tenglamasi bo'lib bu tenglamani o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli tenglamaga keltirish uchun  $ax + b = e^t$  almashtirish qo'llash kerak.

70-misol.  $x^2 y'' - xy' + 2y = x \ln x$  tenglamaning umumiy yechimini toping.

Bu tenglama Eyler tenglamasi, chunki birhadlardagi hosila tartibi, argument  $x$  ning darajasiga teng.

1 usul.

$x = e^t$  almashtirish bajaramiz.

Bunda

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{d}{dt} \left( e^{-t} \frac{dy}{dt} \right) = e^{-2t} \left( \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

larni tenglamaga qo'yib

$$y'' - 2y' + 2y = te^t \quad (1)$$

o'zgarmas koeffitsiyentli tenglamani hosil qilamiz. Mos bir jinsli tenglama xarakteristik tenglamasi  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$  ildizlari  $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$

Demak, mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi

$$y^* = (c_1 \cos t + c_2 \sin t) e^t.$$

Uning xususiy yechimi  $y_1 = (at + b)e^t$  ko'rinishda bo'lib, bu yechimni berilgan tenglamaga qo'yib,

$$(at + b + 2a) e^t - 2(at + b + a)e^t + 2(at + b)e^t = te^t$$

ni hosil qilamiz. Bundan  $a = 1$ ,  $b = 0$ .

(1) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^t + te^t.$$

Demak, berilgan tenglamaning umumiy yechimi

$$y = (c_1 \cos \ln|x| + c_2 \sin \ln|x|)x + x \ln|x|.$$

2 usul.

Berilgan tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning yechimi  $y = x^\lambda$  ko'rinishda izlaymiz ( $\lambda$  - noma'lum son)

$$y' = \lambda x^{\lambda-1},$$

$$y'' = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$$

tenglamaga qo'yib

$$x^2 \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - x^{\lambda-1} + 2x^\lambda = 0$$

yoki

$$x^\lambda (\lambda(\lambda-1) - \lambda + 2) = 0$$

$x^\lambda \neq 0$  bo'lganligi sababli  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$  tenglama hosil qilamiz. Bu tenglama 1 usulda qaralgan xarakteristik tenglamadir.

## 2. Erkli o'zgaruvchi va izlanuvchi funksiyani almashtirish

- Ma'lumki, chiziqli differensial tenglama erkli o'zgaruvchini xosmas almashtirish yoki izlanayotgan funksiyani chiziqli almashtirish bajarganda tenglama shakli o'zgarmaydi.

N.P. Yerugin

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

tenglama erkli o'zgaruvchini faqat  $t = c \int \sqrt[n]{p_n(x)} dx$  shakldagi almashtirish yordamida o'zgarms koeffitsiyentli tenglamaga keltirilishni isbotlagan.

$y = \alpha(x)z$ ,  $z = z(x)$  almashtirishda  $\alpha(x)$  ni shunday tanlash mumkinki, hosil bo'lgan tenglamada  $(n-1)$  tartibli hosila qatnashmaydi.

Masalan,  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  tenglamaga

$$y = e^{-\int \frac{p(x)}{2} dx} z$$

almashtirish tadbiiq etilsa, tenglama  $z'' + F(x)z = 0$  shakilga keladi, bu yerda

$$F(x) = -\frac{p'(x)}{2} - \frac{p^2(x)}{2} + q(x).$$

## Mustaqil yechish uchun misollar.

Eyler tenglamalarining umumiy yechimini toping.

$$468. x^2 y'' + y = 0;$$

$$469. x^2 y''' - 2y' = 0;$$

$$470. xy''' + y'' = 0;$$

$$471. (x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0;$$

$$472. xy'' - xy' + y = 6x \ln x; \quad 473. x^2 y'' - xy' = -x + \frac{3}{x};$$

$$474. x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin(\ln x).$$

Erkli o'zgaruvchini almashtirish yordamida tenglamalarni o'zgarmas ko'effitsiyentli chiziqli tenglamaga keltiring va uning yechimini toping.

$$475. x^4 y'' + 2x^3 y' + n^2 y = 0; \quad 476. 2xy'' + y' - 2y = 0;$$

$$477. xy'' + \frac{1}{2} y' + y = 0;$$

$$478. (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = 0;$$

$$479. (1-x^2)y'' - 2xy' + n^2 y = 0 \text{ (Chebishev tenglamasi);}$$

$$480. y'' \sin x \cos x - y' + m^2 y \operatorname{tg} x \sin^2 x = 0.$$

Izlanayotgan funktsiyani almashtirish yordamida tenglamalarda  $y'$  ko'effitsiyentini nolga keltiring va uni integrallang.

$$481. x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0 \text{ (Bessel' tenglamasi);}$$

$$482. xy'' + 2y' - xy = e^x; \quad 483.$$

$$y'' + \frac{2}{x} y' - a^2 y = 2.$$

### 1.3.59 O'quv mashqlar

#### 1.3.60

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

472-480

### 1.3.61 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салохиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Одий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1991.314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, “Высшая школа”, 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та.1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука,1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука.1980.
- 6.Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач.М.,1989.384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

### ***21-mashg'ulot.***

***Mavzu: Differensial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida yechimini topish***

### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** “ Differensial tenglamalari“.

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

#### **O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil
- 

#### **O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

#### **O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

-

### **O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob, material tushuntirilishi, nazorat ishi.

-

### **Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

### **O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

#### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati:* o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

#### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati:* oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari:* og'zaki nazorat, gruppalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

#### **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**



- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejas:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.62 Misol va mashqlar namoishi

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

tenglama berilgan bo'lib  $p(x)$  va  $q(x)$  koeffitsiyentlar  $x$  ning butun musbat darajalari bo'yicha qatorga yoyish mumkin.

Bu holda (1) tenglama yechimini  $y = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  ko'rinishda izlaymiz. Bu yechimni

(1) tenglamaga qo'yamiz

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0$$

Soddalashtirishdan so'ng ko'phad koeffitsiyentlarini nolga tenglashtiramiz.

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2 \cdot 1 c_2 + a_0 c_1 + b_0 c_0 = 0 \\ x^1 & 3 \cdot 2 c_2 + 2 a_0 c_2 + a_1 c_1 + b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0 \\ x^2 & 4 \cdot 3 \cdot c_4 + 3 a_0 c_3 + 2 a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0 \\ & \dots \dots \dots \end{array} \quad (2)$$

$c_0, c_1, c_2, \dots$  larga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lib, har bir tenglamada undan oldingi tenglamadan bitta ko'p noma'lum c qatnashgan.

$c_0$  va  $c_1$  koeffitsiyentlar ixtiyoriy bo'lib,  $c_2, c_3 \dots$  ular orqali ifodalanadi.

Amaliyotda quyidagi usuldan foydalanish afzalroq.

Yuqorida ko'rsatilgan usul yordamida (1) tenglamaning 2 ta yechimini topamiz.

Bunda  $y_1(x)$  uchun  $c_0 = 1, c_2 = 0$ ;

$y_2(x)$  uchun  $c_0 = 0, c_1 = 1$  olinadi, ya'ni  $y_1(x)$  uchun boshlang'ich shart  $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ .

$y_2(x)$  uchun esa  $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ .

Agar (1) tenglama uchun  $y(0) = A$ ,  $y'(0) = B$  shartni qanoatlantiruvchi yechim topish talab qilingan bo'lsa, u holda bu yechim  $y = Ay_1(x) + By_2(x)$  ko'rinishda bo'ladi.

71-misol.  $y'' - xy' - 2y = 0$  tenglama yechimini darajali qator shaklida toping.

Tenglamani yechimini  $y_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  qator ko'rinishda izlaymiz. Bu funksiyani berilgan tenglamaga qo'yamiz.

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^k - 2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 0.$$

$y_1(0) = 1$ ,  $y_1'(0) = 0$  deb olamiz va oxirgi tenglamadan  $x$  ning barcha darajalari koeffitsiyentlarini nolga tenglashtiramiz ( $c_0 = 1$ ,  $c_1 = 0$ )

$$\begin{array}{l|l} x^0 & 2c_2 - 2c_0 = 0 \\ x^1 & 3 \cdot 2c_3 - 1 \cdot c_1 - 2c_1 = 0 \\ x^2 & 4 \cdot 3 \cdot c_4 - 2c_2 - 2c_2 = 0 \\ x^3 & 5 \cdot 4c_5 - 3c_3 - 2c_3 = 0 \\ x^4 & 6 \cdot 5c_6 - 4c_4 - 2c_4 = 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \end{array}$$

Bu tenglamalarni yechib  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$ ,  $c_4 = \frac{1}{3}$ ,  $c_5 = 0$ ,  $c_6 = \frac{1}{3 \cdot 5}$ , ... larni olamiz.

$$\text{Demak, } y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{15}x^6 + \dots$$

Shu tartibda  $y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$  va  $y_2(0) = 0$ ,  $y_2'(0) = 1$  boshlang'ich

shartlarni olib, berilgan tenglamadan  $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)a_k x^k = 0$  ni hosil qilamiz. Bu tenglamadan ( $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ )

$$\begin{array}{l|l}
 x^0 & 2_2 = 0 \\
 x^1 & 3 \cdot 2a_3 - 3a_1 = 0 \\
 x^2 & 4 \cdot 3 \cdot a_4 - 4a_2 = 0 \\
 x^3 & 5 \cdot 4a_5 - 5a_3 = 0 \\
 x^4 & 6 \cdot 5a_6 - 6a_4 = 0 \\
 x^5 & 7 \cdot 6a_7 - 7a_5 = 0 \\
 \dots & \dots
 \end{array}$$

Bundan  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = \frac{1}{2}$ ,  $a_4 = 0$ ,  $a_5 = \frac{1}{2 \cdot 4}$ ,  $a_6 = 0$ ,  $a_7 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}$ , ...

Demak,  $a_{2k} = 0$ ,  $a_{2k+1} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2k)}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\text{va } y_2 = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} + \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2}\right)^k = x e^{\frac{x^2}{2}}$$

Berilgan tenglama umumiy yechimi:

$y = Ay_1(x) + By_2(x)$  bo'ladi.

72-misol.  $y'' = e^{xy}$  tenglamaning  $y_1(0) = 1$ ,  $y_1'(0) = 0$  shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini Teylor qatori yoyilmasining dastlabki to'rtta hadini toping.

Ma'lumki  $e^{xy}$  funksiya  $(0, 0)$  nuqta atrofida  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$  sohada yaqinlashuvchi darajali qatorga yoyiladi, ya'ni golomorfdir. Tenglamaning yechimini

$$y(x) = y(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} y^{(k)}(0) x^k \text{ shaklda izlaymiz.}$$

Tenglamani differensiallab va uni  $x = 0$  dagi qiymatini hisoblaymiz.

$$y'''(0) = (y + xy')ye^{xy} \Big|_{x=0} = 1$$

$$y^{IV}(0) = [2y' + xy'' + (y + xy')^2]e^{xy} \Big|_{x=0} = 1$$

topilgan qiymatlarni yechim ko'rinishiga qo'yib, berilgan masala yechimini topamiz.

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

Qo'yidagi tenglamalarni qatorlar yordamida yechimini toping.

484.  $y' - 2xy = 0$ ,  $y(0) = 1$

485.  $y'' + xy' + y = 0$ ,

$$486. y'' - xy' + y - 1 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Qo'yidagi misollarda qo'yilgan boshlang'ich shartlarda yechimning darajali qatorga yoyilmasining dastlabki uchta hadini toping.

$$487. y' = 1 - xy, y(0) = 0; \quad 488. y' = \frac{y-x}{y+x}, y(0) = 1;$$

$$489. y' = \sin xy, y(0) = 1;$$

$$490. y'' + xy = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$491. y'' - \sin xy' = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1;$$

$$492. xy'' + y \cdot \sin x = x, y(\pi) = 1, y'(\pi) = 0;$$

$$493. y'' \ln x \cdot \sin(xy) = 0, y(e) = e^{-1}, y'(e) = 0;$$

$$494. y''' + x \sin y = 0, y(0) = \frac{\pi}{2}, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$$

### 1.3.63 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

489-494

### 1.3.64 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Ассосий адабиётлар*

1. Салохиiddинов М.С. Насриiddинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с

7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.1967.565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР,1962.

### ***22-mashg'ulot***

**Mavzu: O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial  
tenglamalar sistemasi  
*Eyler usuli.***

### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

### **O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil
- 

### **O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

### **O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash

- *rivojlantiruvchi*: o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy*: mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

#### **O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari*: individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari*: daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari*: auditoriya
- *monitoring va baholash*: og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

#### **Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

#### **O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

#### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

#### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi,

aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

## 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejas:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

### 1.3.65 Misol va mashqlar namoishi

1. O'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi qo'yidagicha ko'rinishga ega.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

bu yerda  $a_{ij}$  - o'zgarmas sonlar  $i, j = (1, n)$ .

Bu sistemani matrisaviy ko'rinishda yozish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (2)$$

bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \text{ vektor ustun } t \in (a, b) \text{ da (2) sistemaning yechimi bo'ladi, agar barcha}$$

$a < t < b$  lar uchun  $\frac{dy}{dt} = Ay$  ayniyat bajarilsa.

$$x = \begin{pmatrix} x_k^{(1)}(t) \\ x_k^{(2)}(t) \\ \dots \\ x_k^{(n)}(t) \end{pmatrix} (k = \overline{1, n}) \text{ sistemasining xususiy yechimlari bo'lsin, bunda yuqori indeks}$$

yechimdagi funksiya nomerini, qo'yi indeks esa yechim nomerini bildiradi. Bu yechimlar  $(a, b)$  oraliqda fundamental yechimlar sistemasi deyiladi, agar shu oraliqda uning Vronskiy determinanti uchun

$$W(t) \equiv W[x_1, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_2^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0$$

shart bajarilsa.

## 22-mashg'ulot. Eyler usuli.

(1) differensial tenglamalar sistemasi yechimini

$$x_i = \gamma_i e^{\lambda t}, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3)$$

shaklda izlaymiz. (3) ni (1) ga qo'yib, soddalashtirgandan so'ng  $\gamma_i$  va  $\lambda$  larga nisbatan sistemani hosil qilamiz:



$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n = 0 \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda)\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)\gamma_n = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Bu sistema nolmas yechimga ega, agar uning asosiy determinanti nolga teng bo'lsa, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Bu tenglama xarakteristik tenglama deyiladi. (1) tenglama yechimining ko'rinishi (5) xarakteristik tenglama ildizlarining ko'rinishiga bog'liq. Bu hollarga doir misollar qaraymiz.

**a) xarakteristik tenglama ildizlari haqiqiy va har xil.**

73-misol.

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + 5y - z$$

$$\frac{dz}{dt} = x - y + 3z$$

Sistema xususiy yechimini  $x = \gamma_1 e^{\lambda t}$ ,  $y = \gamma_2 e^{\lambda t}$ ,  $z = \gamma_3 e^{\lambda t}$  shaklda izlaymiz.

Bu yechimni sistemaga qo'yish natijasida

$$\begin{cases} (3 - \lambda)\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + (5 - \lambda)\gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - \gamma_2 + (3 - \lambda)\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

bir jinsli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu yerdan

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

xarakteristik tenglamani hosil qilamiz, yoki  $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$ . Uning yechimlari  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6$  bo'ladi. Bu ildizlarni ketma - ket (6) sistemaga qo'yamiz va hosil bo'lgan sistemalarni yechib,  $\lambda_i$  larga mos  $\gamma_i (i = 1, 2, 3)$  qiymatlarni topamiz:

$$\lambda = 2 \quad \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 0, \gamma_3 = -1$$

$$\lambda = 3 \quad \gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1, \gamma_3 = 1$$

$$\lambda = 6 \quad \gamma_1 = 1, \gamma_2 = -2, \gamma_3 = 1$$

Demak, sistemaning xususiy yechimlari quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = e^{2t} \quad y_1 = 0 \quad z_1 = -e^{2t}$$

$$x_2 = e^{3t} \quad y_2 = e^{3t} \quad z_2 = e^{3t}$$

$$x_3 = e^{6t} \quad y_3 = -2e^{6t} \quad z_3 = e^{6t}.$$

Sistemaning umumiy yechimi:

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ y = c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t} \\ z = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \end{cases}.$$

xarakteristik tenglama ildizlari kompleks son.

74-misol.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 5y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$\gamma_1$  va  $\gamma_2$  ni aniqlash uchun sistema

$$\begin{cases} (1 - \lambda)\gamma_1 - 5\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 - (1 + \lambda)\gamma_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Bu yerdan xarakteristik tenglama  $\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$  ni olamiz, yoki

$\lambda^2 + 9 = 0, \lambda = \pm 3i$ . (7) sistemaga  $\lambda = 3i$  ni qo'yamiz.

$$\begin{cases} (1 - 3i)\gamma_1 - 5\gamma_2 = 0 \\ 2\gamma_1 - (1 + 3i)\gamma_2 = 0 \end{cases}$$

bu sistema cheksiz ko'p yechimga ega, yechimlardan bittasi:  $\gamma_1 = 5, \gamma_2 = 1 - 3i$ .

Bu qiymatlarni yechim ko'rinishiga qo'yamiz:  $x = 5e^{3it}, y = (1 - 3i)e^{3it}$ , bu yechimlarni  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  Eyler formulasidan foydalanib haqiqiy va mavhum qismlarini aniqlaymiz va sistemani 2 ta yechimini topamiz:

$$x_1 = \operatorname{Re} x = 5 \cos 3t \quad x_2 = \operatorname{Im} x = 5 \sin 3t$$

$$y_1 = \operatorname{Re} y = \cos 3t + 3 \sin 3t \quad y_2 = \operatorname{Im} y = \sin 3t - 3 \cos 3t.$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 (\cos 3t + 3 \sin 3t) + c_2 (\sin 3t - 3 \cos 3t)$$

$$\begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 x_2 = 5c_1 \cos 3t + 5c_2 \sin 3t \\ y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 (\cos 3t + 3 \sin 3t) + c_2 (\sin 3t - 3 \cos 3t) \end{cases}$$

**b) xarakteristik tenglama ildizlari karrali.**

Agar  $k$  karrali  $\lambda_0$  ildiz uchun chiziqli bog'lanmagan  $k$  ta xos vektorlar  $g^1, \dots, g^k$  mavjud bo'lsa, bu holda shu ildizga mos yechim  $c_1 g^1 e^{\lambda_0 t} + \dots + c_k g^k e^{\lambda_0 t}$  bo'ladi.

Agar  $k$  karrali  $\lambda_0$  ildizning  $m$  – ta chiziqli bog'lanmagan xos vektorlari bo'lsa, va  $m < k$  bo'lsa, u holda bu ildizga mos yechimlarni qo'yidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$\begin{cases} x_1 = (a_1 + b_1 t + \dots + e_1 t^{k-m}) e^{\lambda_0 t} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = (a_n + b_n t + \dots + e_n t^{k-m}) e^{\lambda_0 t} \end{cases} \quad (8)$$

$a_i, b_i, \dots, e_i$  koeffitsiyentlarni topish uchun (8) ni (1) ga qo'yib hosil bo'lgan chiziqli bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasini yechish kerak.

75-misol.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

Sistema yechimini topamiz. Yechimni  $x = \gamma_1 e^{\lambda t}, y = \gamma_2 e^{\lambda t}, z = \gamma_3 e^{\lambda t}$  ko'rinishda izlaymiz. Bularni sistemaga qo'yib, soddalashtirgandan so'ng

$$\begin{cases} (2 - \lambda)\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ 3\gamma_1 - (2 + \lambda)\gamma_2 - 3\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + (2 - \lambda)\gamma_3 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemaning xarakteristik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 3 & -(2 + \lambda) & -3 \\ -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Yoki  $\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$ , bunda  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ .  $\lambda = 0$  oddiy ildiz, uni (9) ga qo'yamiz:

$$\begin{cases} 2\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ 3\gamma_1 - 2\gamma_2 - 3\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_1 = -\gamma_3$$

$$\gamma_2 = -3\gamma_3$$

Bundan  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 3, \gamma_3 = -1$  va yechim  $x = 1, y = 3, z = -1$  bo'ladi.  $\lambda = 1$  ikki karrali ildiz, uni (9)ga qo'yamiz

$$\begin{cases} \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ 3\gamma_1 - 3\gamma_2 - 3\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 = \gamma_2 + \gamma_3.$$

$\gamma_2 = c_2, \gamma_3 = c_3$  deb olsak,  $\lambda = 1$  ga mos yechim qo'yidagicha bo'ladi:

$$x = c_2 + c_3, y = c_2, z = c_3.$$

Natijada berilgan sistemaning umumiy yechimi:

$$x = c_1 + (c_2 + c_3)e^t, y = 3c_1 + c_2e^t, z = -c_1 + c_3e^t.$$

#### 76-misol.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases} \quad (10)$$

sistemaning umumiy yechimini topamiz.

Yuqorida qarab chiqilgan misol kabi xususiy yechimlarni olamiz va ularni sistemaga qo'yib,  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  larga nisbatan chiziqli bir jinsli sistemani hosil qilamiz:

$$\begin{cases} (1 - \lambda)\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 + (1 - \lambda)\gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ -\gamma_2 + (2 - \lambda)\gamma_3 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Bundan,

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & (1 - \lambda) & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Yoki  $(1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0$  xarakteristik tenglamani hosil qilamiz. Bundan  $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 1$ ,  $\lambda = 2$  uchun (11) sistemadan  $\gamma_2 = 0, \gamma_1 = \gamma_3 = 1$  va mos yechim  $x = e^{2t}, y = 0, z = e^{2t}$  bo'ladi.  $\lambda = 1$  karrali ildizga mos yechimni topishni batafsil qarab chiqamiz: (11) sistemaga  $\lambda = 1$  ni qo'yamiz:

$$\begin{cases} -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ \gamma_1 - 3\gamma_3 = 0 \\ -\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \end{cases}$$

Bu sistemaning matrisasi  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  bo'ladi. Uning rangi 2 ga teng. Chiziqli

bog'lanmagan erkli o'zgaruvchilar  $m = 1$  va  $k - m = 1$  bo'ladi. Demak, bu holda sistemaning yechimi

$$\begin{aligned} x &= (a_1 + b_1 t)e^t \\ y &= (a_2 + b_2 t)e^t \\ z &= (a_3 + b_3 t)e^t \end{aligned} \quad (12)$$

ko'rinishda bo'ladi.

$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$  koeffitsiyentlarni topish uchun (12) ni (10) ga o'yamiz:

$$\begin{cases} b_1 e^t + (a_1 + b_1 t)e^t = (a_1 + b_1 t)e^t - (a_2 + b_2 t)e^t + (a_3 + b_3 t)e^t \\ b_2 e^t + (a_2 + b_2 t)e^t = (a_1 + b_1 t)e^t + (a_2 + b_2 t)e^t - (a_3 + b_3 t)e^t \\ b_3 e^t + (a_3 + b_3 t)e^t = 2(a_3 + b_3 t)e^t - (a_2 + b_2 t)e^t \end{cases}$$

Bu sistemani soddalashtirib va noma'lumning mos darajalari koeffitsiyentlarini tenglashtiramiz.

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 - b_2 + b_3, & b_2 &= b_1 + b_2 - b_3, & b_3 &= 2b_3 - b_2, \\ b_1 + a_1 &= a_1 - a_2 + a_3, & b_2 + a_2 &= a_1 + a_2 - a_3, & b_3 + a_3 &= 2a_3 - a_2, \\ b_3 &= b_2 = b_1 = c_1, & a_3 &= a_1 - b_2 = c_1 - c_2, & a_1 &= c_1, \\ a_2 &= a_1 - 2b_2 = c_1 - 2c_2 \end{aligned}$$

topilgan qiymatlarni (12) qo'yamiz va sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$\begin{aligned} x &= (c_1 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} \\ y &= (c_1 - 2c_2 + c_2 t)e^t \\ z &= (c_1 - c_2 + c_2 t)e^t + c_3 e^{2t} \end{aligned}$$

**Mustaqil yechish uchun misollar**

Eyler usuli yordamida berilgan  $A$  matrisaga ko'ra,  $\frac{dx}{dt} = Ax$  tenglamalar sistemasining umumiy yechimini toping.

$$\begin{aligned} 495. \quad & \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ & \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 496. \quad & \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix} \\ & \lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -2 \end{aligned}$$

$$497. \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$

$$499. \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2 \pm 3i$$

$$498. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2 \pm i$$

$$500. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

### 1.3.66 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

497-500

### 1.3.67 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

**1. Салохитдинов М.С. Насриддинв Г.Н. Одий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.**

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.

9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### **23- mashg'ulot.**

**Mavzu: Sistemani yuqori tartibli tenglamaga keltirish usuli.  
Dalamber usuli.**

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi*: mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi*: o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy*: mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari*: individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari*: daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari*: auditoriya
- *monitoring va baholash*: og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

**2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamashtirish;



- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.68 Misol va mashqlar namoishi

##### 1. Sistemani yuqori tartibli tenglamaga keltirish usuli.

Bu usulni 
$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + ey \end{cases}$$
 sistemaning yechimini topish uchun qo'llaymiz.

Sistemaning birinchi tenglamasini  $t$  bo'yicha differensiallaymiz  $\ddot{x} = a\dot{x} + b\dot{y}$ .

$\dot{y}$  o'rniga ikkinchi tenglamani qo'yamiz:  $\ddot{x} = a\dot{x} + cx + ey$ , agar  $b \neq 0$  bo'lsa, sistemaning birinchi tenglamasidan  $y$  ni topib, uning ikkinchi tenglamasiga qo'ysak, ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamani hosil qolamiz:

$$\ddot{x} - (a + e)\dot{x} + (ae - bc)x = 0$$

Shunday qilib, sistemaning yechimini topishni qo'yidagi sistema yechimini topishga keltirildi:

$$\begin{cases} \ddot{x} - (a + e)\dot{x} + (ae - bc)x = 0 \\ y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax) \end{cases}$$

Agar berilgan sistemada  $b = 0$  bo'lsa,  $c \neq 0$  bo'lganda uni  $y$  ga nisbatan ikkinchi tartibli tenglamaga keltirish mumkin.

Agar  $c = b = 0$  bo'lsa, ajralgan tenglamalar sistemasi bo'lib, uni ikkinchi tartibli tenglamaga keltirib bo'lmaydi.

## 2. Dalamber usuli

Bu usul bo'yicha integrallanuvchi kombinasiyalar tuzish yordamida chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi topiladi.

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by + f_1(t) \\ \dot{y} = cx + ey + f_2(t) \end{cases}$$

sistema uchun integrallanuvchi kombinasiyani tuzamiz.

Ikkinchi tenglamani  $k$  ga ko'paytirib, birinchisiga qo'shamiz:

$$(\dot{x} + k\dot{y}) = (a + kc)(x + \frac{b + ke}{a + kc}y) + f_1(t) + f_2(t).$$

Agar  $\frac{b + ke}{a + kc} = k$  shart bajarilsa, ya'ni,  $ck^2 + (a - e)k - b = 0$  kvadrat

tenglama haqiqiy ildizga ega bo'lsa, integrallanuvchi kombinasiya mavjud bo'ladi.

Agar  $k_1 \neq k_2$  bo'lsa, ikkita integrallanuvchi kombinasiya mavjud bo'ladi va sistemaning umumiy yechimini topish mumkin bo'ladi.

Agar  $k_1 = k_2$  bo'lsa, bitta birinchi integral topiladi va bu holda sistemani bitta tenglamaga keltirish mumkin.

77-misol. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + e^x \\ \dot{y} = 4x + 5y + 1 \end{cases}$$

$$\frac{4 + 5k}{5 + 4k} = k \text{ tenglamadan } k_{1,2} = \pm 1 \text{ ni topamiz. } k = 1 \text{ da}$$

$$\frac{d(x + y)}{dt} = 9(x + y) + e^t + 1,$$

$k = -1$  da

$$\frac{d(x - y)}{dt} = (x - y) + e^t - 1$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu holda mos ravishda  $x + y$  va  $x - y$  larga nisbatan chiziqli tenglamalarni integrallab, berilgan sistemaning umumiy yechimini topamiz:

$$\begin{cases} x + y = c_1 e^{9t} - \frac{1}{8} e^t - \frac{1}{9} \\ x - y = c_2 e^t + t e^t + 1 \end{cases}$$

### Mustaqil yechish uchun misollar

Quyidagi sistemalarni yuqori tartibli tenglamaga keltirib yechimini toping.

501. 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

502. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - x \\ \dot{y} = y + x + e^t \end{cases}$$

$$503. \begin{cases} \dot{x} = -x + y + e^t \\ \dot{y} = x - y + e^t \end{cases}$$

$$504. \begin{cases} \dot{x} = -x + y + \sin t \\ \dot{y} = -4x + 3y + e^t \end{cases}$$

$$505. \begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = -4x + 3y \end{cases}$$

$$506. \begin{cases} \dot{x} = z + t \\ \dot{y} = 2y + \sin t \\ \dot{z} = -x \end{cases}$$

$$507. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z \\ \dot{y} = -2x - z \\ \dot{z} = 2x + y + 2z \end{cases}$$

$$508. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -3x + 2y \end{cases} \\ x(0) = y(0) = 1$$

$$509. \begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = 3x + z \\ \dot{z} = 3x + y \end{cases}$$

$$x(0) = 0, y(0) = z(0) = 1$$

Quyidagi sistemalarning yechimini Dalamber usuli yordamida toping.

$$510. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

$$511. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

$$512. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y \\ \dot{y} = -2x - 8y \end{cases}$$

$$513. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + 4z \\ \dot{y} = 3x + 2y + 4z \\ \dot{z} = 5x + 5y + 2z \end{cases}$$

$$514. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + e^t \\ \dot{y} = 4x + 5y + 1 \end{cases}$$

$$515. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$516. \begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$$

$$517. \begin{cases} \dot{x} = y + z + 10 \cos t \\ \dot{y} = x + z + 2e^t \\ \dot{z} = x + y - 10 \sin t \end{cases}$$

### 1.3.69 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

514-517

### 1.3.70 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

#### *Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

#### *Кушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### 24-mashg'ulot

#### **Mavzu: Birjinsli chiziqli tenglamalarni matrisaviy usulda integrallash**

#### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi*: mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi*: o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy*: mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

#### **O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari*: individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari*: daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari*: auditoriya
- *monitoring va baholash*: og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

#### **Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

#### **O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminologiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

#### **1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

#### **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamashtirish;
- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi,

aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.71 Misol va mashqlar namoishi

Ma'lumki,  $\frac{dx}{dt} = Ax$  chiziqli tenglamalar sistemasining xususiy yechimlari

$x_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T$  ( $k = \overline{1, n}$ ) yechimlar fazosining bazisini tashqil etadi. Bu yechimlar  $n$ -chi tartibli matrisa tashqil etadi

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Bir jinsi tenglamaning yechimidan  $\Phi(t) = e^{At} = \exp(At)$  kelib chiqadi, bu yerda

$$\exp(At) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m, t \in R, \Phi(0) = E.$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi  $x(t) = e^{At} \cdot C$  bo'ladi. Agar  $x|_{t=t_0} = x_0$

bo'lsa, Koshi masalasining yechimi  $x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0$  shaklda topiladi.

78 – misol  $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$  tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$A^0$  matrisaning darajalarini topamiz:

$$A^0 = E, A^1 = A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -13 & -14 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -29 & -30 \\ 45 & 46 \end{pmatrix}, \dots$$

Bu yerdan  $e^{At} \cdot c = (E + At + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4 + \dots) \cdot c =$

$$\begin{pmatrix} 1 - t - \frac{5}{2!} t^2 - \frac{13}{3!} t^3 - \frac{29}{4!} t^4 - \dots & 2t - \frac{6}{2!} t^2 - \frac{14}{3!} t^3 - \frac{30}{4!} t^4 - \dots \\ 3t + \frac{9}{2!} t^2 + \frac{21}{3!} t^3 + \frac{45}{4!} t^4 + \dots & 1 + 4t + \frac{10}{2!} t^2 + \frac{22}{3!} t^3 + \frac{46}{4!} t^4 - \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

tenglamani umumiy yechimi bo'ladi.

$e^A$  matrisani hisoblashda  $A$  matrisani Jordan kataklariga keltirib hisoblash mumkin.

$$I_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$k$  o'lchamli Jordan katagi bo'lsa, u holda bu matrisadagi mos eksponensial matrisa quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\exp(I_k(\lambda)t) = e^{\lambda t} I_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

chiziqli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi  $x(t) = S e^{tA} S^{-1} c$  shaklda bo'ladi, bu yerda

$S$  matrisaning ustunlari  $A$  matrisaning xos vektorlari va unga biriktirilgan vektorlaridan iborat.

79- misol.  $\frac{dx}{dt} = Ax$  tenglamaning umumiy yechimini topamiz, bu yerdan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  matrisaning Jordan matrisasini topamiz. Buning uchun xarakteristik tenglama  $\det(A - \lambda E) = 0$ , ya'ni  $(1 - \lambda)^3 = 0$  ni ildizini topamiz.  $\lambda = 1$  uch karrali ildiz ( $A - \lambda E$ ) matrisaning rangi 2-ga teng, bu xos qiymatga xos vektor mos keladi, demak,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda t} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$S$  matrisani topamiz  $a_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$  xos vektor

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenglikdan aniqlanadi, bu yerdan  $a_0 = \alpha(0, 1, 0)^T$ ,  $\alpha$  - ixtiyoriy noldan farqli son, biriktirilgan  $a_1$  va  $a_2$  vektorlar kuidagicha topiladi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ va } a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \alpha/2 \end{pmatrix} \text{ va } a_2 = \begin{pmatrix} \alpha/6 \\ \delta \\ \beta/2 + \alpha/12 \end{pmatrix}$$

bu yerda  $\beta, \delta$  - ixtiyoriy sonlar,  $\alpha = 12$ ,  $\beta = \delta = 0$  deb olsak  $a_0 = (0, 12, 0)^T$ ,  $a_1 = (0, 0, 6)^T$ ,  $a_2 = (2, 0, 1)^T$  bo'ladi. Demak:



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

bu yerdan yechimning umumiy formulasiga ko'ra,

$$x(t) = \frac{e^t}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -c_1 e^t \\ (t - 3t^2)c_1 e^t - c_2 e^t - 2c_3 e^t \\ -c_3 e^t \end{pmatrix}$$

yechimni hosil qilamiz.

80 – misol.

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

tenglamani yechimini topamiz.

$A$  matrisaning xos qiymatlari  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$  lardan iborat. Xarakteristik tenglama ildizlari 2 va 1 karrali bo'lganligi sababli Jordan matrisasi va unga mos eksponensial matrisa

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e^{It} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$\lambda = 1$  xos qiymatga bitta xos vektor  $a_0 = (1, 0, 1)^T$  mos keladi, unga birlashtirilgan vektor  $a_1 = (1, 3, 0)^T$  bo'ladi.  $\lambda = -1$  xos qiymat uchun  $a_2 = (1, -2, 2)^T$ .

$$\text{Demak, } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bu yerdan qo'yilgan masala yechimini topamiz.

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Bir jinsimas tenglamalar sistemasini yechimini topish uchun o'zgarmaslarni variatsiyalash usulini qo'llash mumkin.

81 – misol.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t \\ \frac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2}t^2 \end{cases} \quad (1)$$

bu sistemaga mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} x = -c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t} \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Bir jinslimas sistemaning yechimini

$$\begin{cases} x = -c_1(t) e^{2t} + 4c_2(t) e^{-3t} \\ y = c_1(t) e^{2t} + c_2(t) e^{-3t} \end{cases} \quad (2)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu funksiyalarni (1) ga qo'yib va uni soddalashtirib,

$$\begin{cases} -c_1' e^{2t} + 4c_2' e^{-3t} = 1 + 4t \\ c_1' e^{2t} + c_2' e^{-3t} = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Sistemani yechamiz va hosil bo'lgan sodda tenglamalarni integrallaymiz:

$$c_1(t) = -\frac{1}{5}(6t^2 - 4t - 1)e^{-2t} + c_1$$

$$c_2(t) = -\frac{1}{10}(t^2 + 2t)e^{3t} + c_2$$

topilgan  $c_1(t)$  va  $c_2(t)$  larni (2) ga qo'yib (1) ning umumiy yechimini topamiz.

$$\begin{cases} x = -c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t} + t + t^2 \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}.$$

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

$\exp At$  ni darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib sistemalarning umumiy yechimini toping.

$$518. \begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$$

$$519. \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$520. \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$521. \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$$

$$522. \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -x + y + 2z \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

$$523. \begin{cases} \dot{x} = x + z \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = x - y + z \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasining yechimini matrisaviy usul (Jordan matrisasiga keltirish) yordamida toping.

$$524. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2y \\ \dot{z} = -2x - 2y - z \end{cases}$$

$$525. \begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y \\ \dot{y} = -3x - 5y \\ \dot{z} = -3x - 6y + z \end{cases}$$

526.

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 8z \\ \dot{y} = 3x - y + 6z \\ \dot{z} = -2x - 5z \end{cases}$$

$$527. \begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 10z \\ \dot{y} = -4x + 3y + 7z \\ \dot{z} = -3x + y + 7z \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$528. \begin{cases} \dot{x} = 3y + 3z \\ \dot{y} = -x + 8y + 6z \\ \dot{z} = 2x - 14y - 10z \end{cases}$$

$$529. \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 0$$

O'zgarmaslarni variatsiyalash usulini qo'llab quyidagi sistemalarning umumiy yechimini toping.

$$530. \begin{cases} \dot{x} = y + tg^2t - 1 \\ \dot{y} = -x + tgt \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$531. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - e^{2t} \\ \dot{y} = -x + y + 6e^{2t} \end{cases}$$

$$x \in R$$

$$532. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

$$I \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$533. \begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{t} \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$534. \begin{cases} \dot{x} = x + y - e^t \\ \dot{y} = y + te^t \\ \dot{z} = z + e^t \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 1$$

### 1.3.72 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

524-530

### 1.3.73 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### *Кушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

**24-mashg'ulot**  
**Mavzu: Birjinsli chiziqli tenglamalarni matrisaviy**  
**usulda integrallash**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** “Differensial tenglamalari”.

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi*: mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi*: o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy*: mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari*: individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari*: daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari*: auditoriya
- *monitoring va baholash*: og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

**1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

**2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.74 Misol va mashqlar namoishi

Ma'lumki,  $\frac{dx}{dt} = Ax$  chiziqli tenglamalar sistemasining xususiy yechimlari

$x_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t), \dots, x_{nk}(t))^T$  ( $k = \overline{1, n}$ ) yechimlar fazosining bazisini tashqil etadi. Bu yechimlar  $n$ -chi tartibli matrisa tashqil etadi

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Bir jinsi tenglamaning yechimidan  $\Phi(t) = e^{At} = \exp(At)$  kelib chiqadi, bu yerda

$$\exp(At) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m t^m, t \in R, \Phi(0) = E.$$

Demak, sistemaning umumiy yechimi  $x(t) = e^{At} \cdot c$  bo'ladi. Agar  $x|_{t=t_0} = x_0$  bo'lsa, Koshi masalasining yechimi  $x(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot x_0$  shaklda topiladi.

78 – misol  $\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} x$  tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$A^0$  matrisaning darajalarini topamiz:

$$A^0 = E, A^1 = A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -13 & -14 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} -29 & -30 \\ 45 & 46 \end{pmatrix}, \dots$$

Bu yerdan  $e^{At} \cdot c = (E + At + \frac{t^2}{2!} A^2 + \frac{t^3}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4 + \dots) \cdot c =$

$$\begin{pmatrix} 1 - t - \frac{5}{2!} t^2 - \frac{13}{3!} t^3 - \frac{29}{4!} t^4 - \dots & 2t - \frac{6}{2!} t^2 - \frac{14}{3!} t^3 - \frac{30}{4!} t^4 - \dots \\ 3t + \frac{9}{2!} t^2 + \frac{21}{3!} t^3 + \frac{45}{4!} t^4 + \dots & 1 + 4t + \frac{10}{2!} t^2 + \frac{22}{3!} t^3 + \frac{46}{4!} t^4 - \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

$e^A$  matrisani hisoblashda  $A$  matrisani Jordan kataklariga keltirib hisoblash mumkin.

$$I_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$k$  o'lchamli Jordan katagi bo'lsa, u holda bu matrisadaga mos eksponensial matrisa quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\exp(I_k(\lambda)t) = e^{\lambda t} I_k(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

chiziqli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi  $x(t) = Se^{Lt} S^{-1} c$  shaklda bo'ladi, bu yerda

$S$  matrisaning ustunlari  $A$  matrisaning xos vektorlari va unga biriktirilgan vektorlaridan iborat.



79- misol.  $\frac{dx}{dt} = Ax$  tenglamaning umumiy yechimini topamiz, bu yerdan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A$  matrisaning Jordan matrisasini topamiz. Buning uchun xarakteristik tenglama  $\det(A - \lambda E) = 0$ , ya'ni  $(1 - \lambda)^3 = 0$  ni ildizini topamiz.  $\lambda = 1$  uch karrali ildiz ( $A - \lambda E$ ) matrisaning rangi 2-ga teng, bu xos qiymatga xos vektor mos keladi, demak,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{\lambda t} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$S$  matrisani topamiz  $a_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$  xos vektor

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tenglikdan aniqlanadi, bu yerdan  $a_0 = \alpha(0, 1, 0)^T$ ,  $\alpha$  - ixtiyoriy noldan farqli son, biriktirilgan  $a_1$  va  $a_2$  vektorlar kuidagicha topiladi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \text{ va } a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \alpha/2 \end{pmatrix} \text{ va } a_2 = \begin{pmatrix} \alpha/6 \\ \delta \\ \beta/2 + \alpha/12 \end{pmatrix}$$

bu yerda  $\beta, \delta$  - ixtiyoriy sonlar,  $\alpha = 12$ ,  $\beta = \delta = 0$  deb olsak  $a_0 = (0, 12, 0)^T$ ,  $a_1 = (0, 0, 6)^T$ ,  $a_2 = (2, 0, 1)^T$  bo'ladi. Demak:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

bu yerdan yechimning umumiy formulasiga ko'ra,

$$x(t) = \frac{e^t}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -c_1 e^t \\ (t - 3t^2)c_1 e^t - c_2 e^t - 2c_3 e^t \\ -c_3 e^t \end{pmatrix}$$

yechimni hosil qilamiz.

80 – misol.

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

tenglamaning yechimini topamiz.

$A$  matrisaning xos qiymatlari  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$  lardan iborat. Xarakteristik tenglama ildizlari 2 va 1 karrali bo'lganligi sababli Jordan matrisasi va unga mos eksponensial matrisa

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, e^{It} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

$\lambda = 1$  xos qiymatga bitta xos vektor  $a_0 = (1, 0, 1)^T$  mos keladi, unga biriktirilgan vektor  $a_1 = (1, 3, 0)^T$  bo'ladi.  $\lambda = -1$  xos qiymat uchun  $a_2 = (1, -2, 2)^T$ .

$$\text{Demak, } S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Bu yerdan qo'yilgan masala yechimini topamiz.

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 & -5 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Bir jinsimas tenglamalar sistemasini yechimini topish uchun o'zgarmlarni variatsiyalash usulini qo'llash mumkin.

81 – misol.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + 4y = 1 + 4t \\ \frac{dy}{dt} + x - y = \frac{3}{2}t^2 \end{cases} \quad (1)$$

bu sistemaga mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimi

$$\begin{cases} x = -c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t} \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} \end{cases}.$$

Bir jinslimas sistemaning yechimini

$$\begin{cases} x = -c_1(t) e^{2t} + 4c_2(t) e^{-3t} \\ y = c_1(t) e^{2t} + c_2(t) e^{-3t} \end{cases} \quad (2)$$

ko'rinishda izlaymiz. Bu funksiyalarni (1) ga qo'yib va uni soddalashtirib,

$$\begin{cases} -c_1' e^{2t} + 4c_2' e^{-3t} = 1 + 4t \\ c_1' e^{2t} + c_2' e^{-3t} = \frac{3}{2}t^2 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Sistemani yechamiz va hosil bo'lgan sodda tenglamalarni integrallaymiz:

$$c_1(t) = -\frac{1}{5}(6t^2 - 4t - 1)e^{-2t} + c_1$$

$$c_2(t) = -\frac{1}{10}(t^2 + 2t)e^{3t} + c_2$$

topilgan  $c_1(t)$  va  $c_2(t)$  larni (2) ga qo'yib (1) ning umumiy yechimini topamiz.

$$\begin{cases} x = -c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-3t} + t + t^2 \\ y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2 \end{cases}.$$

***Mustaqil yechish uchun misollar***

$\exp At$  ni darajali qatorga yoyilmasidan foydalanib sistemalarning umumiy yechimini toping.

$$518. \begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = 3y \end{cases}$$

$$519. \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$520. \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$521. \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x - y \\ \dot{z} = 2z \end{cases}$$

$$522. \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -x + y + 2z \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$$

$$523. \begin{cases} \dot{x} = x + z \\ \dot{y} = y + z \\ \dot{z} = x - y + z \end{cases}$$

Tenglamalar sistemasining yechimini matrisaviy usul (Jordan matrisasiga keltirish) yordamida toping.

$$524. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2y \\ \dot{z} = -2x - 2y - z \end{cases}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$$

$$525. \begin{cases} \dot{x} = 4x + 6y \\ \dot{y} = -3x - 5y \\ \dot{z} = -3x - 6y + z \end{cases}$$

526.

$$\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = 1$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 8z \\ \dot{y} = 3x - y + 6z \\ \dot{z} = -2x - 5z \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2,3} = -1$$

$$527. \begin{cases} \dot{x} = -4x + 2y + 10z \\ \dot{y} = -4x + 3y + 7z \\ \dot{z} = -3x + y + 7z \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2$$

$$528. \begin{cases} \dot{x} = 3y + 3z \\ \dot{y} = -x + 8y + 6z \\ \dot{z} = 2x - 14y - 10z \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = 0$$

$$529. \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$

O'zgarmaslarni variatsiyalash usulini qo'llab quyidagi sistemalarning umumiy yechimini toping.

$$530. \begin{cases} \dot{x} = y + tg^2t - 1 \\ \dot{y} = -x + tgt \end{cases}$$

$$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

$$531. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 2y - e^{2t} \\ \dot{y} = -x + y + 6e^{2t} \end{cases}$$

$$x \in R$$

$$532. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$$

$$I \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$533. \begin{cases} \dot{x} = y + \frac{1}{t} \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

$$534. \begin{cases} \dot{x} = x + y - e^t \\ \dot{y} = y + te^t \\ \dot{z} = z + e^t \end{cases}$$

$$\lambda_{1,2,3} = 1$$

### 1.3.75 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

524-530

### 1.3.76 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

### *Кушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

**26-mashg'ulot.**  
**Mavzu : Tenglamalar sistemasining yechimini**  
**turg'unligini tekshirish**

**Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** “Differensial tenglamalari”.

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi*: mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi*: o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy*: mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari*: individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari*: individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari*: daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari*: auditoriya
- *monitoring va baholash*: og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

## 1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

### 1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari;o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;
- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayyorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

### 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, gruppalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

### 3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari
- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;
- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

#### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.77 Misol va mashqlar namoishi

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \quad (i = \overline{1, n}) \quad (3)$$

Sistema uchun  $\varphi(t_0) = \varphi_{i0} (i = \overline{1, n})$  boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi  $\varphi_i(t) (i = \overline{1, n})$  yechim Lyapunov bo'yicha turg'un deyiladi, agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  uchun  $\delta(\varepsilon) > 0$  mavjud bo'lib, (3) sistemaning barcha  $x_i(t) (i = \overline{1, n})$  yechimlari uchun  $|x_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta (i = \overline{1, n})$  bo'lganda barcha  $t \geq t_0$  larda

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = \overline{1, n}) \quad (4)$$

o'rinli bo'lsa.

Agar yetarlicha kichik  $\delta > 0$  uchun birorta  $x_i(t) (i = \overline{1, n})$  yechim uchun (4) shart bajarilmasa  $\varphi_i(t)$  turg'unmas deyiladi.

Agar turg'un yechim uchun  $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 (i = \overline{1, n})$  shart bajarilsa, bunday yechim asimptotik turg'un deyiladi.

Umuman tenglamalar sistemasi yechimining turg'unligini tekshirish masalasini uning nol yechimi turg'unligini tekshirish masalasiga keltirish mumkin. Nol yechimini tekshirish Lyapunov usullari yordamida bajariladi.

#### A) Lyapunovning I-chi usuli.



Bu usul bo'yicha agar chiziqli sistema matrisasining barcha xos qiymatlarining haqiqiy qismi manfiy bo'lsa, sistema nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi.

Agar birorta xos qiymatning haqiqiy qismi musbat bo'lsa, nol yechim turg'unmas bo'ladi.

84-misol. vektor tenglamaning nol yechimini turg'unligini tekshiring, bunda

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Matrisaning xos quymatlarini  $\det(A - \lambda E) = 0$  tenglamadan topamiz.

$$\begin{vmatrix} 8 - \lambda & 0 & 8 \\ 3 & -1 - \lambda & 6 \\ -2 & 0 & -5 - \lambda \end{vmatrix} = 0, (\lambda^3 + 3)^2 + 3\lambda + 1 = 0 \text{ bundan } \lambda_{1,2,3} = -1.$$

Xos qiymatlar manfiy, demak, nol yechim asimptotik turg'un.

85-misol.  $\alpha, \beta$  parametrlarning qanday qiymatlarida  $\frac{dx}{dt} = Ax$  vektor tenglamaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi, bunda

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 0 \\ \beta & -1 & \alpha \\ 0 & \beta & -1 \end{pmatrix}.$$

$A$  matrisaning xarakteristik tenglamasi  $(1 + \lambda)^3 - 2\alpha\beta(1 + \lambda) = 0$ .

Bundan  $\lambda_1 = -1$ , va  $\lambda_2, \lambda_3$ lar  $\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = -2 \\ \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1 - 2\alpha\beta \end{cases}$  shartlarni qanoatlantiradi.

Nol yechim asimptotik turg'un bo'lishi uchun  $\lambda_2, \lambda_3 > 0$  shart bajarilishi kifoya.

Demak,  $\alpha\beta < \frac{1}{2}$  bo'lganda nol yechim asimptotik turg'un bo'ladi.

Ko'phadning barcha nollarini haqiqiy qismini manfiyligini Raus – Gurbis shartlari yordamida aniqlash mumkin.

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

ko'phad koeffitsiyentlari yordamida Gurvis matrisasini tuzamiz

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ko'phadning barcha nollarining haqiqiy qismi manfiy bo'lishi uchun Gurvis matrisasining barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir.

**Izoh:** Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasini koordinata boshi atrofida chiziqlashtirilgan sistemasini tuzish uchun sistemaning o'ng tomonidagi funksiyalarni Makloren qatoriga yoyish kerak.

86-misol.  $\frac{dx}{dt} = Ax$  vektor tenglama nol yechimining asimptotik turg'unligi tekshiring, bunda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$A$  matrisaning xarakteristik tenglamasi

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0.$$

Gurvis matrisasini tuzamiz:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisaning bosh minorlari  $M_1 = 2 > 0$ ,  $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot M_1 > 0.$$

Demak, nol yechim asimptotik turg'un.

#### **B) Lyapunovning 2-chi usuli.**

Agar sistema matrisasining birorta xos qiymatining haqiqiy qismi nolga teng bo'lsa, Lyapunovning 1-chi usuli yordamida yechimni turg'unligini aniqlab bo'lmaydi. Bu holda Lyapunovning 2-chi usulini qo'llash qulay.

Bu usul bo'yicha berilgan sistema uchun shunday funksiya topilib, u  $V(0)=0$  va musbat (manfiy) aniqlangan va sistema bo'yicha olingan to'liq differensial manfiy (musbat) aniqlangan bo'lsa, u holda sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi.

Bunday  $V$  funksiyaga Lyapunov funksiyasi deyiladi.

Agar  $V$  funksiya musbat (manfiy) ishorali yoki uning sistema bo'yicha olingan to'liq differensial manfiy (musbat) ishorali bo'lsa, u holda sistemaning nol yechimi turg'un bo'ladi.  
87 – misol.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -3(x - \frac{x^3}{3} + \dots) \end{cases}$$

demak, koordinata boshi atrofida chiziqshatirilgan sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -3x \end{cases}$$

bo'lib, uning matrisasi  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$  va xos qiymatlari  $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ , ya'ni, haqiqiy qismi nolga teng. Demak, Lyapunovning 1-chi usuli yordamida turg'unlikni aniqlab bo'lmaydi. Lyapunovning 2-chi usulini qo'llaymiz. Lyapunov funksiyasini

$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + 3(1 - \cos x)$  shaklida olamiz.  $V(0, 0) = 0$  va nol nuqta atrofida musbat.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = 3y \sin x - 3y \sin x \equiv 0,$$

demak, sistemaning nol yechimi turg'un bo'ladi.

### ***Mustaqil yechish uchun misollar***

Lyapunovning 1-chi usuli yordamida sistemaning nol yechimini asimptotik turg'unligini tekshiring.

$$552. \begin{cases} \dot{x} = y + x^2 y + y^3 \\ \dot{y} = x - 4y^5 \end{cases}$$

$$553. \begin{cases} \dot{x} = -y + x^2 \cos y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}$$

$$554. \begin{cases} \dot{x} = -y + \sin x^2 \\ \dot{y} = 4x - 4y + \sin^2 y \end{cases}$$

$$555. \begin{cases} \dot{x} = -\sin(y + z) \\ \dot{y} = -x - z + z^3 \\ \dot{z} = -x - y - 2yx \end{cases}$$

$$556. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 8z = y^2 - z^3 \\ \dot{y} = 3x - y + 6z \\ \dot{z} = -2x - 5z + x^5 \end{cases}$$

$$557. \begin{cases} \dot{x} = -\sin x + z \\ \dot{y} = 2y \\ \dot{z} = -x - 3z \end{cases}$$

Parametrlarining qanday qiymatlarida sistemaning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi.

$$558. \begin{cases} \dot{x} = ax + y + 5y^2 \\ \dot{y} = -e^x + e^{ax} \end{cases} \quad 559. \begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = bx - 3tgy \end{cases} \quad 560.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -tgx - tgy \\ \dot{y} = ax - a^2 y \end{cases} \quad 561. \begin{cases} \dot{x} = y - 7y^2 x^3 \\ \dot{y} = z + y^2 + 3x^3 \\ \dot{z} = -2x - by - az \end{cases}$$

$$562. \begin{cases} \dot{x} = ax + z \\ \dot{y} = \sin ay \\ \dot{z} = ax + az \end{cases} \quad 563.$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + ay + bz \\ \dot{y} = -ax - y - az - \cos^2 x + \cos z \\ \dot{z} = -bx - ay - z \end{cases}$$

Raus – Gurvis sharti yordamida tenglamalarning nol yechimini asimptotik turg'unligini tekshiring.

$$564. y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0 \quad 565. y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 7y' + 2y = 0$$

$$566. y^{IV} + 2y''' + 6y'' - y = 0 \quad 567. y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

$$568. y''' - 2y'' + 2y' - 3y = 0 \quad 569. y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$$

$a$  va  $b$  paramatrning qanday qiymatlarida tenglamalarning nol yechimi asimptotik turg'un bo'ladi.

$$570. y''' + ay'' + by' + 2y = 0 \quad 571. y''' + 3y'' + ay' + by = 0$$

$$572. y^{IV} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0 \quad 573. y^{IV} + y''' + ay'' + y' + by = 0$$

$$574. y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + ay = 0 \quad 575. y^{IV} + ay''' + 4y'' + 2y' + by = 0$$

Ko'rsatilgal Lyapunov funksiyasi yordamida sistemaning nol yechimini asimptotik turg'unligini tekshiring.

$$576. \begin{cases} \dot{x} = -xe^x - y \\ \dot{y} = x^3 \end{cases} \quad 577. \begin{cases} \dot{x} = -f(x) - y^3 \\ \dot{y} = x^3 - \varphi(y) \end{cases} \quad \begin{matrix} f(0) = \varphi(0) = 0 \\ zf(z) > 0, z\varphi(z) > 0 \end{matrix}$$

$$V = x^4 + 2y^4 \quad V = x^4 + y^4$$

$$578. \begin{cases} \dot{x} = f(x) + y^5 \\ \dot{y} = -x^5 - \varphi(y) \end{cases} \quad 579. \begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y \\ \dot{y} = x^4 - x^2 y - x^3 \end{cases}$$

$$V = x^6 + y^6 \quad zf(z) > 0, z\varphi(z) > 0 \quad V = x^6 + 2y^2$$

$$580. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 \\ \dot{y} = x^3 - y^3 \end{cases}$$

$$V = x^4 + y^4$$

$$582. \begin{cases} \dot{x} = -xe^x + y^5 \\ \dot{y} = -x^5 - y^3 \end{cases}$$

$$V = x^6 + y^6$$

$$581. \begin{cases} \dot{x} = -xe^x - y^3 \\ \dot{y} = x^3 - y \end{cases}$$

$$V = x^4 + y^4$$

$$583. \begin{cases} \dot{x} = -x^3 - y^3 \\ \dot{y} = x^3 - y^5 \end{cases}$$

$$V = x^4 + y^4$$

### 1.3.78 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

554-557, 580-583,

### 1.3.79 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибигов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж. тех. задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

### 27-mashg'ulot.

## **Mavzu: Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasi. Xususiy hosilali differensial tenglamalar. Simmetrik sistemalar.**

### **Amaliy mashg'ulotlar rejasi**

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish;o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

### **1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.**

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik qo'llanmalar,kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish ; o'quv

darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## **2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, grupalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## **3 bosqich. Yakuniy qism(10 daqiqa)**

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### **1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma**

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### **1.3.80 Misol va mashqlar namoishi**

Chiziqli bo'lmagan tenglamalar sistemasini noma'lumlarini yo'qotish usuli yordamida yuqori tartibli bir o'zgaruvchili tenglamaga keltirib yechish mumkin. Bu usulni murakkab bo'lmagan sistemalarni yechish uchun qo'llash mumkin.

Umumiy holda sistemalarni integrallanuvchi kombinasiyalarini izlash yordamida yechimini topish qulay. Integrallanuvchi kombinasiya – bu berilgan sistemaning tenglamalaridan tuzilgan ikki o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan va ikkala tomoni to'liq differensialdan iborat tenglamadir.

Integrallanuvchi kombinasiyalarni aniqlash uchun sistemani simmetrik shaklda yozish qulay, ya'ni

$$\frac{dx_1}{f_1(t, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(t, x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(t, x_1, \dots, x_n)} = \frac{dt}{f(t, x_1, \dots, x_n)} \quad (1)$$

Agar  $f(t, x_1, \dots, x_n) \neq 0$  bo'lsa, bu sistema

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{f_1(t, x_1, \dots, x_n)}{f(t, x_1, \dots, x_n)}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{f_n(t, x_1, \dots, x_n)}{f(t, x_1, \dots, x_n)}$$

sistemaga teng kuchli bo'ladi.

88-misol.  $\frac{dx}{xy} = \frac{dy}{x^2 z^2} = \frac{dz}{yz}$  tenglamalar sistemasini yeching.

Bitta integrallanuvchi kombinasiya:

$$\frac{dx}{xy} = \frac{dz}{yz}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} \Rightarrow x = c_1 z.$$

Bu tenglikdan foydalanib,

$$\frac{dy}{x^2 z^2} = \frac{dz}{yz}$$

tenglamadan  $x$  ni yo'qotish mumkin, ya'ni,

$$\frac{dy}{c_1^2 z^4} = \frac{dz}{yz}, \quad ydy = c_1^2 z^3 dz$$

Oxirgi tenglamani integrallab,  $\frac{y^2}{2} = c_1^2 \frac{z^4}{4} + c_2$  ni olamiz.

Demak, sistemaning umumiy yechimi  $x = c_1 z$ ,  $y = \pm \sqrt{c_1^2 \frac{z^4}{2} + 2c_2}$  bo'ladi.

Bu misolni yechishda  $x$  - ni yo'qotmasdan boshqa integrallanuvchi kombinasiya tuzish mumkin, berilgan simmetrik sistemaning birinchi tenglamasini  $z$  ga uchinchisini esa  $x$  - ga ko'paytirib, proporsiya xossasidan foydalansak,

$$\frac{zdx + xdz}{zxy + xyz} = \frac{dy}{(xz)^2}$$

tenglamaga kelimiz, bundan

$$\begin{aligned} \frac{d(xz)}{2y} &= \frac{dy}{(xz)^2}, \\ xzd(xz) &= 2ydy, \\ \frac{(xz)^2}{2} &= y^2 + c_2. \end{aligned}$$

Demak, bu holda sistemaning  $\frac{x}{z} = c_1$ ,  $\frac{x^2 z^2}{2} - y^2 = c_2$  birinchi integrallarini hosil qilamiz.



### Mustaqil yechish uchun misollar

Tenglamalar sistemasining yechimini toping,

$$584. \quad y' = \frac{x}{z}, \quad z' = -\frac{x}{y}$$

$$585. \quad y' = \frac{y^2}{z-x}, \quad z' = y+1$$

$$586. \quad \frac{dx}{2y-z} = \frac{dx}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$587. \quad \frac{dx}{y} = \frac{dx}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$588. \quad \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$$

$$589. \quad \frac{dx}{z} = \frac{dy}{u} = \frac{dz}{x} = \frac{du}{y}$$

$$590. \quad \frac{dx}{z^2-x^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$$

$$591. \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy+z}$$

$$592. \quad \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$$

$$593. \quad \frac{dx}{x+y^2+z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

#### 1.3.81 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

#### Uyga vazifa

590-593,

#### 1.3.82 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

##### Асосий адабиётлар

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ.-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

##### Қушимча адабиётлар

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

## 28-mashg'ulot.

### Mavzu: Birinchi tartibli xususiy hosilali chiziqli differensial tenglamalar.

#### Amaliy mashg'ulotlar rejasi

**Fan:** "Differensial tenglamalari".

**O'quv soati:** 2 s. (amaliy)

**O'quv mashg'ulotlar turi:** kartochka, topshiriq, o'quv materiallar va metodik qullanma vositasi bilan amaliy mashg'ulotlar.

**O'quv mashg'ulotlar rejasi:**

- tarqatma materiallar tayyorlash.
- o'quv masalalari.
- Misol va masalalar echish
- Yakuniy tahlil

**O'quv mashg'ulotlar maqsadi:**

Misol va masalalar echish vositasi bilan Nazariy bilimlarni amaliy mashg'ulotlar bilan chuqurlashtirish

**O'quv mashg'ulotlar vazifasi:**

- *o'qituvchi:* mavzu bo'yicha olgan bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlash
- *rivojlantiruvchi:* o'rganish tajribasini oshirish, Differensial tenglamalari nazariyasini o'rganish, analiz va o'rganish natijalarini umumlashtirish mahoratini rivojlantirish; student ijodiy mahoratini shakllantirish;
- *tarbiyaviy:* mustaqil izlanish mahoratini uyg'otish ; jamoa bilan ish yuritish qoidalariga bo'ysunish. Fanga qiziqishni rivojlantirish, ma'suliyatni his qilish , mehnatsevarlik, individual ishni kollektiv bilan moslashni o'rgatish.

**O'qitish texnologiyasi:**

- *o'qitish metodlari:* individual savol-javob; birga o'qitish; o'quv qo'llanmalarga asoslanib teoremlarni isbotlash, misollar echish mahoratini o'rgatish
- *o'qitish shakllari:* individual, kollektiv.
- *o'qitish vositalari:* daftarda va dockada misol va masalalar echish, metodik ishlanmalar va amaliy ko'rsatmalar
- *o'qitish shartlari:* auditoriya
- *monitoring va baholash:* og'zaki nazorat, individual savol-javob , material tushuntirilishi, nazorat ishi.

**Pedagogik masalalar :**

- mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash uchun o'rganuvchilarni anglash faoliyatini tashkillashtirish
- namuna bo'yicha amaliyotda bilimlarni mustahkamlash;
- mustaqil oliy matematika o'rganishni shakllantirish;

**O'quv faoliyati natijalari:**

- kurs mavzulari bo'yicha bilimlarni sistemalashtirish va mustahkamlashtirish;
- o'rgangan tushunchalar bilan amaliy mashg'ulotlarda ishlay olish;
- misol va masalalarni echishda, hamda teoremlar isbotlashda matematik terminalogiyalarni va tushunchalarni qo'llashni mustaqil o'rganish mahorati;
- mustaqil misol va masalalarni echa olish mahoratini oshirish;
- tajriba natijalarini analiz qila olish;

#### 1.2 Amaliy mashg'ulotning xronologik xaritasi.

**1 bosqich. O'quv mashg'ulotlarga kirish (10 daqiqa);**

- *o'qituvchi faoliyati:* tayyorgarlikni tekshirish (konspektning mavjudligi; tayyorgarlik, qat'iyatlik va aniqlik, davomat); zarur materillarni tarqatish (metodik

qo'llanmalar, kartochkalar); amaliy darsning maqsadi va mavzuni aytish; o'quv darsining rejasi bilan tanishtirish, tushuncha va jumlar; adabiyotlar ruyxati; Reyting-kontrol sistemasi bilan tanishtirish; joriy nazorat baholash mezonlari; o'quv ishlari yakunlarining rejalarini taqdimlash;

- *talaba faoliyati*: o'quv joyini tayyorlash (o'quvchilarning borligi; tashqi ko'rinish; uquv va tarqatma materiallar); mavzu bilan tanishuv va o'quv dars maqsadi; o'quv materialni qabul qilishga tayorgarlik;
- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, individual savol-javob; ob'yektlar bilan ishlash; konspektlash;

## 2 bosqich. Asosiy qism (60 daqiqa);

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzuni kiritish, Differensial tenglamalari o'rganish bilan bog'liq oldingi mavzuni eslashni taklif etish; amaliy mashg'ulotlar matnini tarqatish; qo'shimcha adabiyotlarda tushunchalar berish; ish usullari bilan tanishtirish; mashg'ulotlar tarqatish; tushunarsiz savollarni aniqlab, ularni echimi topishga yordamlash; gruppalarda ishlashni tashkillash; natijalarni muhokamalashtirish;

- *talaba faoliyati*: oldingi mavzu bo'yicha bilimlarni mustahkamlash; quloq solish, yozib olish; tushunchalar va terminlarni aytish; savol berishadi va muhokamalashtirishadi, aniqlashtirishadi; gruppalarda ishlashadi, misol va masalalar ishlashadi; olingan natijalar muhokamasiga qatnashishadi

- *qabul qilish shakli metodlari*: og'zaki nazorat, gruppalarda individual savol-javob; misol va masalalar echimlarini daftarga yozib olish

## 3 bosqich. Yakuniy qism (10 daqiqa)

- *o'qituvchi faoliyati*: mavzu bo'yicha xulosa chiqarish; talabalarni fikrini bir joyga jamlash; qilingan ishlarning muhimligini aytib o'tish; javob bergan talabalarni ishini baholash; o'quv darsning maqsadiga erishish darajasini baholash va analizlashtirish; mustaqil ishlar topshiriqlari

- *talaba faoliyati*: ish analizi; misol va masalalar asosida malaka oshirish; o'zaro baholash o'tkazish; yo'l qo'yilgan xatolarni aniqlash va analizlash; berilgan mustaqil ishlarni yozib olishadi;

- *qabul qilish shakli metodlari*: guruhda va individual ishlash; mustaqil ishlar uchun daftar tutish.

### 1.3 O'quv-uslubiy qo'llanma

O'quv mashg'ulotlar rejasi:

- metodik qullanmalar va topshiriqlar bilan ishlash
- Amaliy darslar uchun daftar tutish
- o'quv topshiriqlar
- amaliy ishlarni topshirish

#### 1.3.83 Misol va mashqlar namoishi

$$f_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + f_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = \Phi \quad (1)$$

ko'rinishdagi tenglamaga xususiy hosilali birinchi tartibli tenglama deyiladi. Bu yerda  $f_1, \dots, f_n, \Phi$  lar  $x_1, \dots, x_n, u$  ga bog'liq funksiyalar,  $u = u(x_1, \dots, x_n)$  izlanayotgan funksiya.

Bu tenglamani yechish uchun simmetrik ko'rinishdagi

$$\frac{dx_1}{f_1} = \dots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{\Phi} \quad (2)$$

sistemani yozib, uni  $n - ta$  o'zaro bog'lanmagan birinchi integrallarini topish kerak. Bu integrallar  $\varphi_i = (x_1, \dots, x_n, z) = c_i \quad (i = \overline{1, n})$  bo'lsa, u holda (1) tenglamani umumiy

yechimi  $F(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$  ko'rinishda bo'lib, bu yerda  $F$  ixtiyoriy differensiallanuvchi funksiya.

(1) tenglamaning

$$u(x_1, \dots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \dots, x_n) = \varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishni masalasi Koshi masalasi deyiladi, bu yerda  $a -$  berilgan o'zgarmas va  $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$  berilgan funksiya.

89-misol.  $u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$  tenglamaning umumiy yechimini toping.

Mos simmetrik sistema tuzamiz

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{0}.$$

Bundan  $u = c_1, x - uy = c_2$  birinchi integrallarni topamiz. Demak,  $F(u, x - uy) = 0$  berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

90-misol.  $(y + u)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - x(y + 2u) \frac{\partial u}{\partial y} = xu$  tenglamani  $u(x, y)|_{y=0} = x^2$

shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping.

Mos simmetrik sistema

$$\frac{dx}{(y + u)^2} = \frac{dy}{-x(y + 2u)} = \frac{du}{xu}.$$

Bundan

$$\frac{dy}{-x(y + 2u)} = \frac{du}{xu}$$

va

$$\frac{d(y + u)}{-x(y + 2u) + xu} = \frac{dx}{(y + u)^2}$$

integrallanuvchi kombinasiyalar olib,

$$\begin{cases} (y + 2u)u = c_1 \\ (y + u)^2 + x^2 = c_2 \end{cases}$$

birinchi integrallarni topamiz, shartga asosan  $y = 0$

$$\begin{cases} 2u^2 = c_1 \\ u^2 + x^2 = c_2 \end{cases},$$

bundan

$$\begin{cases} x^2 = c_2 - \frac{1}{2}c_1 \\ u = \sqrt{\frac{1}{2}c_1} \end{cases}$$

$a = x^2$  ga asosan  $\sqrt{\frac{1}{2}c_1} = c_2 - \frac{1}{2}c_1$  bog'lanishini topamiz.

Demak, qo'yilgan masalaning yechimi

$$\sqrt{\frac{1}{2}(y+u)u} = (y+u)^2 + x^2 - \frac{1}{2}(y+u)u \text{ bo'ladi.}$$

### *Mustaqil yechish uchun misollar*

Tenglamalarni umumiy yechimini toping.

$$594. \quad y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$595. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$596. \quad yz \frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$597. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = x - y$$

$$598. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$$

$$599. \quad y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$600. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2$$

$$601. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$$

$$602. \quad y \frac{\partial u}{\partial x} = u$$

Koshi masalasini yeching.

$$603. \quad (4y - z) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{y=0} = y^2 + z^2$$

$$604. \quad xz \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{z=0} = xy$$

$$605. \quad x(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + y(y - x) \frac{\partial u}{\partial y} + (y^2 - xz) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u|_{x=1} = \frac{z}{y}$$

$$606. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u|_{x=1} = -y$$

$$607. \quad 2x^3 \frac{\partial u}{\partial x} + (3x^2 + y^3) \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 u \quad u|_{x=1} = y^2$$

$$608. \quad 2x^3 \frac{\partial u}{\partial x} + (3x^2 + y^3) \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 u \quad u|_{x=1} = 1 + \frac{1}{y^2}$$

### 1.3.84 O'quv mashqlar

- misol va masalalarni eching
- teoremani isbotlang
- shu mavzuni nazariyasini o'qib oling

### Uyga vazifa

598-602, 605-608

### 1.3.85 Tavsiya etiladigan adabiyotlar

*Асосий адабиётлар*

**1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.**

2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз. Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5-е издание).

*Кушимча адабиётлар*

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М. Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384 с.
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех. задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

АЛИШЕР НАВОИЙ НОМИДАГИ  
САМАРКАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРИ  
КАФЕДРАСИ

**Дифференциал тенгламар фанидан  
Мустақил ишларни бажариш ва  
назоратларни топришга оид мисол ва  
машқлар намоиши.  
Саволлар мажмўаси**

Самарканд 2011

**1-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ВА  
УНГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР**

**1. Умумий тушунчалар.**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (1)$$

кўринишдаги тенглама ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли **дифференциал тенглама** дейилади. Бу ерда  $x$  – эркин ўзгарувчи,  $y = y(x) - x$  аргументнинг номаълум функцияси;  $f(x, y)$  эса  $(x, y)$  текисликнинг бирор  $D$  соҳасида (*соҳа* деганда, биз боғлиқли очик тўпламни назарда тутаямиз) аниқланган ва узлуксиз функция.

$(a, b)$  ораликда аниқланган, узлуксиз дифференциалланувчи  $y = \varphi(x)$  функция (1) **тенгламанинг ечими** дейилади, агар  $y$   $(a, b)$  ораликда (1) тенгликни айниятга айлантирсин:

$$\frac{d\varphi}{dx} = f(x, y), \quad x \in (a, b).$$

$$y = \varphi(x), \quad x \in (a, b) \quad (2)$$

ечим  $(x, y)$  фазода чизикни аниқлайди, шу чизик (1) тенгламанинг **интеграл чизиги** дейилади.

(1) тенгламанинг  $y_0 = \varphi(x_0)$ ,  $(x_0, y_0) \in D$  шартни қаноатлантирувчи  $y = \varphi(x)$  ечимини топиш масаласи **Коши масаласи** дейилади. Бундай ечим кўпинча  $(x_0, y_0)$  нуқтадан ўтувчи ечим ёки интеграл чизик деб ҳам юритилади.

$$y = \varphi(x, C), \quad C \in R - \text{ўзгармас сон}, \quad (3)$$

функциялар синфи  $D$  соҳада (1) тенгламанинг **умумий ечими** дейилади, агар у қуйидаги шартларни қаноатлантирсин:

1) Барча  $C \in R$  ларда (3) система (1) нинг ечимини беради;

2)  $C$  ни танлаб олиш ёрдамида (1) нинг  $D$  дан ўтувчи ихтиёрий ечимини (3) системадан ҳосил қилиш мумкин.

Агар бизга (1) тенгламанинг (3) кўринишдаги умумий ечим маълум бўлса, унда Коши масаласининг ечимини ажратиб олиш мумкин. Бунинг учун (3) тенгликда  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  деб  $C$  нинг шу тенгликни қаноатлантирувчи  $C_0$  қийматини топиш ва уни (3) тенгликка олиб бориб қўйиш керак. Натижавий  $y = \varphi(x, C_0)$  функция исталган ечимни беради.

**Мисол.**  $y = (x - C)^3$  функциялар синфи ҳар бир  $C \in R$  да  $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$  тенгланинг ечими бўлишини, лекин бу тенглама учун умумий ечим бўла олмаслигини исботланг.

*Ечими.* Функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб тенгламага қўямиз:

$$y' = \left[ (x - C)^3 \right]' = 3(x - C)^2,$$

$$3(x - C)^2 = 3\sqrt[3]{\left[ (x - C)^3 \right]^2} = 3(x - C)^2.$$

Берилган функция ихтиёрий  $C$  ларда тенгликни айниятга айлантираётти, демак,  $y$  ҳар бир  $C$  да ечим бўлади. Лекин  $y = (x - C)^3$  функциялар синфидаги  $C$  ни танлаш ҳисобига берилган тенгламанинг барча ечимларини ҳосил қилиб бўлмайди, масалан,  $y = C$  ечимни.

Демак, берилган функциялар синфи тенглама учун умумий ечим бўла олмайди.

**Мисол.**  $y = x + C(1 + x^2)$ ,  $C \in R$  функциялар синфи

$$(2xy - x^2 + 1)dx - (1 + x^2)dy = 0$$

тенгламанинг умумий ечими бўлишини исботланг.

*Ечими.* Функцияни тенгламага қўйиб қуйидагини оламиз:



$$dy = y'(x)dx = 1 + 2Cx,$$

$$\left\{ 2x \left[ x + C(1 + x^2) \right] - x^2 + 1 \right\} dx - (1 + x^2)(1 + 2Cx) dx = \\ (2x^2 + 2Cx + 2Cx^3 - x^2 + 1) dx - (1 + 2Cx + x^2 + 2Cx^2) dx = 0, \quad C \in R.$$

Берилган функция тенгликни барча  $C \in R$  ларда айниятга айлантирди.

Энди биз тенгламанинг ихтиёрий  $y = \varphi(x)$  ечимини берилган функциялар синфига тегишли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам,  $y = \varphi(x)$  ечим бўлгани учун тенгламани қаноатлантиради.

$$(2x\varphi(x) - x^2 + 1)dx - (1 + x^2)d\varphi(x) = 0$$

ёки

$$2x\varphi(x) - x^2 + 1 - (1 + x^2)\frac{d\varphi(x)}{dx} = 0.$$

$F(x) = \frac{\varphi(x) - x}{1 + x^2}$  функциянинг ҳосиласи нолга тенглигини кўрсатамиз:

$$F'(x) = \frac{(1 + x^2)(d\varphi(x)/dx - 1) - (\varphi(x) - x)2x}{(1 + x^2)^2} = \\ = \frac{2x\varphi(x) - x^2 + 1 - (1 + x^2)d\varphi(x)/dx}{(1 + x^2)^2} = 0.$$

Бунда эса  $F(x) = C_0$ ,  $C_0 \in R$  эканлиги келиб чиқади ва демак,

$$F(x) = \frac{\varphi(x) - x}{1 + x^2} = C_0, \quad \varphi(x) = x + C_0(1 + x^2).$$

Шундай қилиб, берилган функциялар синфи тенглама учун умумий ечим экан.

**2.** Ўзгарувчиларини ажратиб ёки бошқача қилиб айтганда, ҳар иккала томонини бир хил функцияга кўпайтириб ёки бўлиб, бир томонида фақат  $x$  иккинчи томонида  $y$  иштирок этадиган кўринишга келтириш мумкин бўлган дифференциал тенглама **ўзгарувчилари ажраладиган тенглама** дейилади. Хусусан,

$$y' = f(x) \cdot g(y), \quad (4)$$

$$M(x)N(y)dx + P(x) \cdot Q(y)dy = 0, \quad (5)$$

кўринишидаги тенгламалар ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалардир. Бундай тенгламаларни ечиш учун ўзгарувчиларини ажратиш ва ҳосил бўлган тенгликни интеграллаш керак.

Тенгламанинг ҳар икала томонини  $x$  ва  $y$  лар иштирок этган ифодага бўлинаётганда шу ифодани нолга айланттириладиган ечимларини йўқотиб қўйишдан эҳтиёт бўлиш керак.

**Мисол.**  $2x^2yy' + y^2 = 2$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* Тенгламани қуйидаги кўринишга келтириб оламиз:

$$2x^2yy' = 2 - y^2 / 2x^2ydy = (2 - y^2)dx.$$

Ҳосил бўлган тенгликнинг ҳар иккала қисмини  $x^2(2 - y^2) \neq 0$  бўлиб,

$$\frac{2ydy}{1 - y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

кўринишдаги ўзгарувчилари ажралган тенгламани оламиз ва интеграллаб:

$$\int \frac{2ydy}{1-y^2} = \int \frac{dx}{x^2}; \quad \ln|y^2 - 2| = 1/x + \ln C_1, \quad C_1 > 0;$$

$$|y^2 - 2| = C_1 e^{1/x}, \quad C_1 > 0;$$

$$y^2 - 2 = \pm C_1 e^{1/x}, \quad C_1 > 0.$$

ечимлар тўпламига эга бўламиз.

Тенгликни  $x^2(2 - y^2)$  га бўлганда  $x = 0$  ва  $y^2 - 2 = 0$  ёки  $y = \pm\sqrt{2}$  ечимлар

йўқотилган бўлиши мумкин. Тушунарлики,  $x = 0$  тенгламанинг ечими эмас,  $y = \pm\sqrt{2}$  эса ечим.

Лекин бу ечимларни (6) ечимлар тўпламига бирлаштириш мумкин, бунинг учун  $C_1 = 0$  деб олиш кифоя ва демак,

$$y^2 - 2 = Ce^{1/x}, \quad C \in R.$$

3.  $y' = f(ax + by + c)$  тенглама  $z = ax + by + c$  алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириб ечилади.

**Мисол.**  $y' = y + 2x - 3$  тенгламани ечинг.

*Ечими.*  $z(x) = y + 2x - 3$  алмаштирали бажариб,  $z' = y' + 2$ ,  $y' = z' + 2$  ва

тенгламага қўйиб  $z' = z + 2$  ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб интеграллаймиз:

$$\frac{dz}{dx} = z + 2; \quad \frac{dz}{z + 2} = dx, \quad z \neq -2; \quad \int \frac{dz}{z + 2} = \int dx;$$

$$\ln|z + 2| = x + \ln C_1, \quad C_1 > 0; \quad z + 2 = \pm C_1 e^x, \quad C_1 > 0.$$

Бу ерда ҳам олдиндаги пунктдагидек  $z + 2 = 0$  ёки  $z = -2$  ечим йўқотилган бўлиши мумкин. Ҳақиқатдан ҳам  $z = -2$  тенгламанинг ечими ва буни ечимлар тўпламига қўшиб қўйиши учун  $C_1 = 0$  деб олиш кифоя. Шундай қилиб,  $z = Ce^x - 2$ ,  $C \in R$  ифодани оламиз, эски ўзгарувчиларга қайтиб, тугал натижага эга бўламиз:

$$y + 2x - 3 = Ce^x - 2; \quad y = Ce^x - 2x + 1.$$

4. Агар ихтиёрий  $k > 0$  учун  $F(kx, ky) = k^n F(x, y)$  тенглик ўринли бўлса,  $F(x, y)$  га *n-даражали бир жинсли функция* дейилади. Масалан,

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \frac{x^5 + xy^4}{x^4 + y^4}, \quad x^2 + y^2 - 5xy, \quad x^n + x^{n-\lambda} y^\lambda + y^n$$

функциялар мос равишда 0, 1, 2, n-даражали бир жинслидир.

Агар  $f(x, y)$  0-даражали бир жинсли функция бўлса,

$$y' = f(x, y)$$

*бир жинсли тенглама* дейилади. Хусусан,  $y' = f(y/x)$  ва агар  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  лар бир хил даражали бир жинсли функциялар бўлса,  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  тенгламалар бир жинслидир.

Бундай тенгламалар  $y = xU(x)$  алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилиб ечилади.

**Мисол.**  $xy' = y - xe^{y/x}$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* Тенгламанинг ҳар икала томони  $x$ ,  $x \neq 0$  га бўлиб,  $y' = y/x - e^{y/x}$  кўринишдаги бир жинсли тенгламани оламиз. Энди юқорида айтилганидек,  $y = x \cup(x)$  алмаштиришни қўллаймиз, у ҳолда

$$dy = Udx + x dU, \quad y' = dy/dx = U + x dU/dx = U + xU'.$$

$y' = U + xU'$  ни тенгламага қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$U + xU' = U - e^U; \quad xU' = -e^U.$$

Ҳосил бўлган тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$e^{-U} dU = -dx/x; \quad \int e^{-U} dU = -\int dx/x; \quad e^{-U} = \ln|x| + C.$$

Бундан эски ўзгарувчиларга қайтиб

$$e^{-y/x} = -\ln|x| + C$$

ифодани оламиз. Тенгликни  $x$  га бўлганимизда  $x = 0$  ечимни йўқотишимиз мумкин эди, тушунарлики,  $x = 0$  тенгламани ечими эмас, ҳатто аниқлаш соҳасига ҳам кирмайди.

$$5. \quad y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \text{ тенглама координата бошини}$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{ва} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

тўғри чизиклар кесишадиган нуқтага кўчириш билан бир жинсли тенгламага келтирилади. Агар бу тўғри чизиклар кесишмаса,  $a_1x + b_1y = k(a_2x + b_2y)$  тенглик ўринли бўлади ва демак, берилган тенглама  $y' = F(a_1x + b_1y)$  кўринишда экан. Бундай тенгламалар (3 пункт)  $z = a_1x + b_1y$  алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади.

$$\textbf{Мисол.} \quad (2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0 \text{ тенгламани ечинг.}$$

*Ечими.* Тенгламани бир жинсли ҳолга келтириш учун

$$2x - 4y + 6 = 0 \quad \text{ва} \quad x + y - 3 = 0$$

тўғри чизикларнинг кесишиш нуқтасини топиб координата бошини шу нуқтага кўчирамиз. Бунинг учун қуйидаги системани ечиб

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0, \end{cases}$$

$x = 1$ ,  $y = 2$  ларни оламиз. Энди  $u = x - 1$  ва  $v = y - 2$  алмаштиришни бажарамиз, тушунарлики, бу алмаштиришда координата боши  $x = 1$ ,  $y = 2$  нуқтага кўчади.

$$du = dx, \quad dv = dy;$$

$$(2(u+1) - 4(v+2) + 6)du + (u+1 + v+2 - 3)dv = 0;$$

$$(2u - 4v)du + (u + v)dv = 0.$$

Натижада, биз бир жинсли тенгламани олдик, уни ечиш учун  $v = u \cdot z$  алмаштиришни бажарамиз:

$$dv = zdu + u dz;$$

$$(2u - 4uz)du + (u + uz)(zdu + u dz) = 0 \quad \text{ёки}$$

$$(2 - 3z + z^2)du + u(1 + z)dz = 0.$$

Бу тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1+z}{2-3z+z^2} dz, \quad u \neq 0, \quad 2-3z+z^2 \neq 0;$$

$$\frac{du}{u} = \left( \frac{2}{z-1} - \frac{3}{z-2} \right) dz; \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{2dz}{z-1} - \int \frac{3dz}{z-2};$$

$$\ln|u| = -\ln \frac{|z-2|^3}{|z-1|^2} + \ln C_1, \quad C_1 > 0;$$

$$\ln \left( |u| \frac{|z-2|^3}{|z-1|^2} \right) = \ln C_1, \quad C_1 > 0;$$

$$u \frac{|z-2|^3}{|z-1|^2} = \pm C_1, \quad C_1 > 0.$$

Эски ўзгарувчиларга қайтиб

$$(v/u - 2)^3 u = \pm C_1 (v/u - 1)^2, \quad C_1 > 0;$$

$$(v - 2u)^3 = \pm C_1 (v - u)^2, \quad C_1 > 0;$$

$$(y - 2x)^3 = \pm C_1 (y - x - 1)^2, \quad C_1 > 0.$$

Тенгликни  $2 - 3z + z^2 = (z-1)(z-2)$  га бўлганимизда  $z=1$ ,  $z=2$  ёки  $x$  ва  $y$  ўзгарувчиларда  $y = x+1$ ,  $y = 2x$  ечимларни йўқотган бўлишимиз мумкин.  $y = 2x$  ечимни топилган ечимлар тўпламига қўшиб қўйиш мумкин бунинг учун  $C_1 = 0$  деб олиш кифоя.  $y = x+1$  эса ечим ва уни ҳақиқатдан ҳам йўқотганмиз. Шундай қилиб,

$$(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2, \quad C \in R, \quad y = x+1$$

ечимлар тўпламига эга бўламиз.

6.  $y' = y/x + g(x) \cdot f(y/x)$ . Бу тенгламани  $y = xv(x)$  алмаштириш ёрдамида  $xu' = g(x) \cdot f(u)$  кўринишга келтириш мумкин. Бундай тенгламаларни биз юқорида ўргандик.

7. Умумлашган бир жинсли тенглама. Агар  $P(u, v, w)$  функция кўпхад ёки умумийроқ ҳолда

$au^\lambda v^\mu w^\nu$  кўринишдаги ҳадлар йиғиндисидан иборат бўлиб,  $r$  ва  $k$  ларнинг мос равишда танлаб олинган қийматларида  $|r| + |k| > 0$  нинг ҳамма ҳадлари бир хил даражали бўлса,  $P(x, y, y') = 0$

тенглама **умумлашган бир жинсли** дейилади. Бундай тенгламалар  $y = z^m$  алмаштириш ёрдамида бир жинсли тенгламага келтирилади. Одатда  $m$  номаълум бўлади, уни топиш учун тенгламада  $y = z^m$  ( $y' = z^{m-1} z'$ ) алмаштиришни бажариш керак. Ҳосил бўлган тенгламани бир жинсли деб фараз қилиб,  $m$  ни топилади, агар бундай  $m$  ни топиш мумкин бўлмаса, берилган тенгламани бу усул билан бир жинсли тенгламага келтириб бўлмайди. У ҳолда бошқачароқ алмаштиришлар қилишга ҳаракат қилиб кўриш керак, масалан,

$$r \neq 0 \text{ бўлганда } y(x) = |x|^k \eta(\xi), \quad \xi = \ln|x|;$$

$$r = 0 \text{ бўлганда } y' = u(x)y \text{ ва ҳоказо.}$$

**Мисол.**  $y' = y^2 - 2/x^2$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* Тенгламада  $y = z^m$  алмаштириш бажарамиз:  $y' = m \cdot z^{m-1} z'$  бўлгани учун  $m \cdot z^{m-1} z' = z^{2m} - 2x^{-2}$ .

Бу тенгламани бир жинсли фарз қилиб,

$$m - 1 = 2m = -2; \quad m = -1$$

тенгликни оламиз. Демак, юқоридаги тенгламани  $y = z^{-1} = 1/z$ ,  $y \neq 0$  алмаштириши ёрдамида бир жинсли тенгламага келтириш мумкин экан. Шу алмаштиришни бажарайлик:  $y' = -z^{-1}/z^2$ . Буни тенгламага қўйиб қуйидагини оламиз:

$$z' = 2 \cdot z^1/x^2 - 1.$$

Бу тенглама бир жинсли тенглама бўлгани учун энди  $z/x = u$  ёки  $z = xu(x)$  алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$dz = xdx + udx, \quad z' = u + u'x, \quad z = xu(x)$$

бўлади. Буни тенгламага қўйиб,

$$u + u'x = 2u^2 - 1; \quad xu' = 2u^2 - u - 1;$$

$$\frac{du}{(2u^2 - u - 1)} = \frac{dx}{x}; \quad 2u^2 - u - 1 \neq 0$$

тенгликка эга бўламиз. Охирги тенгликни интеграллаб ва эски ўзгарувчиларга қайтиб қуйидагиларни оламиз:

$$\int \frac{du}{(2u^2 - u - 1)} = \int \frac{dx}{x}; \quad \frac{1}{3} \int \frac{du}{(u-1)(u+1/2)} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{u-1}{u+1/2} \right| = \ln |x| + \frac{1}{3} \ln 2C_1, \quad C_1 > 0; \quad \left| \frac{u-1}{u+1/2} \right|^{1/3} \cdot \frac{1}{(2C_1)^{1/3}} = |x|;$$

$$\left| \frac{z/x-1}{z/x+1/2} \cdot \frac{1}{2C_1} \right|^{1/3} = |x|; \quad \frac{1/xy-1}{1/xy+1/2} = \pm 2C_1 x^3, \quad C_1 > 0;$$

$$1 - xy = \pm C_1 x^3 (2 + xy), \quad C_1 > 0.$$

Юқорида алмаштириш бажарганимизда  $y = 0$  тенгликни иккала қисмини  $2u^2 - u - 1 = (u-1)(2u+1)$  га бўлганимизда  $u = 1$ ,  $2u = -1$  ёки эски ўзгарувчиларда  $xy = 1$ ,  $xy = -2$  ечимларни йўқотган бўлишимиз мумкин.  $y = 0$  тенгламани ечими эмас,  $xy = 1$  тенгламанинг ечими ва уни юқорида олинган ечимлар тўпламига бирлаштириб юборилса бўлади, бунинг учун  $C_1 = 0$  деб олиш кифоя.  $xy = -2$  тенгламани ечими ва уни юқоридаги тўпلام ифодасига киритиб бўлмайди.

Шундай қилиб, қуйидаги ечимлар тўпламини олдик:

$$1 - xy = Cx^3 (2 + xy), \quad C \in R; \quad xy = -2.$$

**8. Физик масалалар.** Физик масалаларни ечишда аввало қайси миқдорни эркин ўзгарувчи, қайсинисини изланаётган функция сифатида олишни аниқлаш лозим. Кейин эса  $x$  миқдорга  $\Delta x$  орттирма берилганда масалада айтилаётган  $y$  миқдор қанчага ўзгаришини (яъни  $\Delta x$  орқали

$y(x + \Delta x) - y(x)$  ни) аниқлаш керак. Олинган тенгликни иккала қисмини  $\Delta x$  га бўлиб,  $\Delta x \rightarrow 0$  да лимитга ўтсак, дифференциал тенгламага эга бўламиз, уни ечиб, изланаётган функцияни топиб оламиз. Баъзи ҳолларда ҳосиланинг физик маъносидан фойдаланиб (агар  $t$  эркин ўзгарувчи бўлса,  $dy/dx$   $y$  миқдорнинг ўзгариш тезлиги), дифференциал тенгламани қийинчиликсиз тузиш мумкин бўлади.

**Мисоллар.**

1) Ичида 20 л. Суви бўлган идишга ҳар литрда 0,2 кг туз булган қоришма минутига 5 л. Тезлик билан узулксиз қуйилапти. Идишда қоришма сув билан аралашиб, худди шу тезликда чиқиб кетаяпти. 4 минутдан кейин идишдаги туз миқдори қанча бўлади?

*Ечими.*  $y(t)$  орқали  $t$  минутдан кейинги идишдаги тузнинг миқдорини белгилаймиз.

$[t, t + \Delta t]$  оралиқда идишдаги идишдаги тузнинг миқдори қанчага ўзгаришини ҳисоблайлик.  $\Delta t$  вақт идишга 5  $\Delta t$  миқдор қоришма тушади. Бу қоришманинг таркибида  $0,2 \cdot 5 \cdot \Delta t = \Delta t$  кг туз бор.

Шу вақтнинг ичида идишдан 5 л қоришма чиқиб кетади.  $t$  моментда идишдаги тузнинг миқдори  $y(t)$  кг эди, агар  $\Delta t$  вақтда идишдаги тузнинг миқдори ўзгармаса, 5  $\Delta t$  л чиқиб кетаётган аралашма

$$y(t)/20 \cdot 5 \cdot \Delta t = 0,25 y(t) \Delta t \text{ кг}$$

туз бор. Умуман олганда идишдаги тузнинг миқдори қандайдир  $\alpha$  га ўзгаради ( $\Delta t \rightarrow 0$  да  $\alpha \rightarrow 0$ ), шунинг учун идишдан  $\Delta t$  вақтда оқиб чиққан тузнинг миқдори  $0,25(y(t) + \beta) \Delta t$  кг бўлади, бу ерда  $0 < \beta < \alpha$ .

Шундай қилиб  $[t, t + \Delta t]$  вақт оралиғида идишга  $\Delta t$  кг туз тушади,  $0,25(y(t) + \beta) \Delta t$  кг туз идишдан оқиб чиқади. Бундан

$$y(t, t + \Delta t) - y(t) = \Delta t - 0,25(y(t) + \beta) \Delta t$$

тенгликни оламиз. Тенгликни ҳар иккала томони  $\Delta t$  га бўлиб,  $\Delta t \rightarrow 0$  да лимитга ўтамиз. Агар биз  $\Delta t \rightarrow 0$  да  $\beta \rightarrow 0$  эканлигини эътиборга олсак,  $y'(t) = 1 - 0,25y(t)$  дифференциал тенгламани оламиз. Бу тенгламанинг умумий интеграл  $y(t) = 4 + Ce^{-t/4}$  кўринишда бўлади.  $t = 0$  да идишдаги тузнинг миқдори  $y(0) = 0$  бўлганлиги учун

$$y(0) = 4 + Ce^0 = 4 + C = 0,$$

демак,  $C = -4$ . Шундай қилиб, идишдаги тузнинг миқдори

$$y(t) = 4(1 - e^{-t/4})$$

конун билан ўзгаради.  $t = 4$  моментдаги тузнинг миқдори  $y(t) = 4(1 - e^{-1})$  кг га тенг бўлади.

2) Узунлиги  $L$  ва диаметри  $D$  бўлган темир темир йўл цистернаси керосин билан тўлдирилган. Керосин цистерна остида жойлашган ва кесим юзи  $\omega$  бўлган қиска чиқиш найчаси орқали оқизиб юборилганда цистерна қанча вақтда бўшагини аниқланг.

*Ечими.* Аввал бундай умумий ҳолда қандай ҳал қилинишини тушунтирамиз. Фараз қилайлик, кўндаланг кесим юзи  $S$  баландлик  $h$  нинг маълум  $S = S(h)$  функцияси бўлган идиш  $H$  сатҳгача суюқлик билан тўлдирилган бўлсин. Идиш тубида юзи  $\omega$  бўлган тешик бўлиб, ундан суюқлик оқиб чиқади. Суюқлик сатҳи дастлабки  $H$  ҳолатдан исталган  $h$  гача пасайиш вақти  $t$  ни ва идишнинг тўла бўлаш вақти  $T$  ни аниқлаймиз. Биз идишдаги суюқлик сатҳи нинг маълум  $v = v(h)$  функцияси деб фараз қиламиз.

Бирор  $t$  моментда идишдаги суюқлик баландлиги  $h$  га тенг бўлсин.  $[t, t + \Delta t]$  вақт оралиғида идишдан оқиб чиқадиған суюқлик миқдори  $\Delta V$  ни топайлик:  $\Delta V = \omega v(h) \Delta t$ , иккинчи томондан  $\Delta V = -S(h) \Delta t$  (пасайғанлиги учун манфий ишора билан олинди) бўлгани учун  $\omega v(h) \Delta t = -S(h) \Delta t$  тенгликни оламиз. Тенгликни ҳар икки томони  $\Delta t$  га бўлиб,  $\Delta t \rightarrow 0$  да лимитга ўтсак, қуйидаги дифференциал тенгламани оламиз:

$$dt = -\frac{S(h)}{\omega v(h)} dh.$$

Бу тенгламани интеграллаб,

$$t = -\frac{1}{\omega} \int_h^h \frac{S(h)}{v(h)} dh = \frac{1}{\omega} \int_h^h \frac{S(h)}{v(h)} dh$$

ечимни оламиз.

Идиш тўла бўшаганда  $h = 0$  бўлгани учун унинг тўла бўшаш пайти  $T$  қуйидагича топилади:

$$T = -\frac{1}{\omega} \int_0^h \frac{S(h)}{v(h)} dh.$$

Агар суюқлик кичик тешикдан ёки қисқа найчадан оқиб чиқаётган бўлса, Торричелли конунига мувофиқ  $v = \sqrt{2gh\mu}$ , бу ерда  $g$  – оғирлик кучи тезланиши,  $\mu$  – эмпирик коэффициент (сарф бўлиш коэффициенти). У ҳолда ҳосил қилинган ифодалар қуйидаги кўринишни олади:

$$t = -\frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_h^h \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh, \quad T = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_0^h \frac{S(h)}{\sqrt{h}} dh.$$

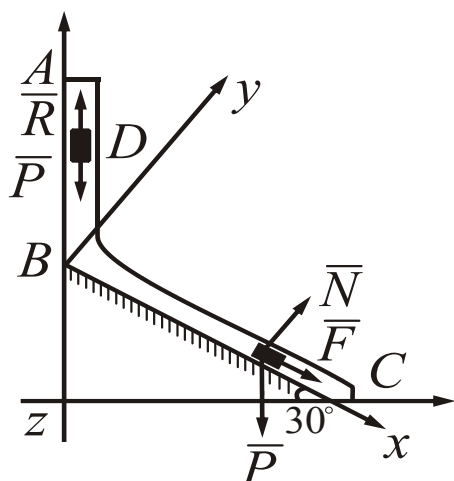
Бизнинг конкрет мисолимизда

$$S(h) = 2xL = 2L\sqrt{R^2 - (h - R)^2} = 2L\sqrt{(D - h)h}$$

бўлгани учун

$$T = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}} \int_0^D \frac{(D - h)h}{\sqrt{h}} dh = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\omega\mu\sqrt{2g}}.$$

**3)** Массаси  $m$  бўлган  $D$  юк  $A$  нуқтада  $U_0$  бошланғич тезлик олиб  $ABC$  букилган трубада (*l-расмга қаранг*) ҳаракат қиляпти.  $AB$  бўлакка юкка оғирлик кучидан ташқари юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган  $R$  қаршилик кучи таъсир этади.  $B$  нуқтадан юк ўз тезлигини ўзгартирмас-



дан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч ҳам таъсир қилади.  $AB$  ва  $F_x$  ( $F_x$  –  $F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) маълум бўлса, юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

Берилган:  $m = 2$  кг,  $R = \mu v^2$ , бу ерда  $\mu = 0,4$  кг/м,  $v_0 = 5$  м/с,  $l = 2,5$  м,  $F_x = 16 \sin 4t$ .

Топиш керак:  $x = f(t)$  юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонуни.

1-расм.

Ечими. а) Юкни материал нукта деб қараб,  $AB$  бўлакдаги ҳаракатини кўриб чиқамиз. Юкка (ихтиёрий ҳолатда) таъсир қилувчи  $\vec{P} = m\vec{g}$  ва  $R$  кучлар чизмада тасвирланган.  $Az$  ўқни ўтказиб, юкнинг ҳаракатини шу ўққа проекцияси дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m \frac{dv_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ ёки } \frac{dv_z}{dt} = \frac{dv_z}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{dv_z}{dz} v_z$$

бўлгани учун

$$mv_z \frac{dv_z}{dz} = P_z + R_z. \quad (1)$$

$R_z = P = mg$ ,  $R_z = -R = -\mu v^2$ ,  $v_z = v$  эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$mv \frac{dv}{dz} mg - \mu v^2 \text{ ёки } v \frac{dv}{dz} = \frac{\mu}{m} \left( \frac{mg}{\mu} - v^2 \right). \quad (2)$$

Ёзувни енгиллатиш учун

$$k = \mu/m = 0,72 \text{ м}^{-1}, \quad n = mg/\mu = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2 \quad (3)$$

белгилашларни киритамиз (бу ерда  $g \approx 10 \text{ м}^2/\text{с}^2$  деб олинди). У ҳолда

(2) тенгламани

$$2v \frac{dv}{dz} = -2k(v^2 - n) \quad (4)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Ўзгарувчиларни ажратиб, ҳар иккала томонини интеграллаб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$\frac{2v dv}{v^2 - n} = -2k dz; \quad \ln(v^2 - n) = -2kz + C_1. \quad (5)$$

$z = 0$  да  $v = v_0$  бўлгани учун (5) тенгликка кўра  $C_1 = \ln(v_0^2 - n)$ . Буни (5) тенгликка қўйиб,

$$\ln(v^2 - n) = -2kz + \ln(v_0^2 - n) \text{ ёки } \ln(v^2 - n) - \ln(v_0^2 - n) = -2kz$$

тенгликни оламиз. Буни эса

$$v^2 = n + (v_0^2 - n)e^{-kz} \quad (6)$$

тенгликни оламиз. (6) тенгликда  $z = l = 2,5$  м,  $k$ ,  $n$  лар (3) тенглик орқали ифодаланган эканлигини ҳисобга олиб, юкнинг  $B$  нуктадаги  $v_B$  тезликни топамиз:



$$v_B^2 = 50 - 25/e; \quad v_B = \sqrt{50 - 25/e} \approx 6,4 \text{ м/с}. \quad (7)$$

б) Энди юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракатини ўрганамиз: топилган  $U_B$  тезлик юкнинг янги бўлакдаги бошланғич тезлиги ( $v_0 = v_B$ ) бўлади. Юкнинг ихтиёрий ҳолатида таъсир этувчи кучларни  $\bar{P} = m\bar{g}$ ,  $\bar{N}$ ,  $F$  билган ҳолда,  $B$  нуқтадан  $Bx$  ўқни ўтказиб, унинг ҳаракатини шу ўққа проекцияси дифференциал тенгламасини тузамиз:

$$m \frac{dv_x}{dt} = P_x + N_x + F_x. \quad (8)$$

$P_x = P \sin 30^\circ = 0,5 mg$ ,  $N_x = 0$ ,  $F_x = 16 \sin 4t$  бўлгани учун (8) тенглама қуйидаги кўринишни олади

$$m \frac{dv_x}{dt} = 0,5 mg + 16 \sin 4t. \quad (9)$$

$m = 2 \text{ кг}$ ,  $g = 10 \text{ м/с}^2$  эканлигини эътиборга олиб, тенгламани интегралласак

$$v_x = 5t - 2 \cos 4t + C_z \quad (10)$$

га эга бўламиз.  $t = 0$  да  $v_x = v_0 = v_B$  бўлгани учун (10) тенгликдан қуйидагини оламиз

$$C_z = v_B + 2 \cos 0 + 6,4 + 2 = 8,4. \quad (11)$$

Буни (10) га қўйиб, ҳар иккала томонини  $dt$  га қўпайтириб интегралласак

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 5t - 2 \cos 4t + 8,4; \quad x = 2,5t^2 - 0,5 \sin 4t + 8,4t + C_a$$

келиб чиқади.  $t = 0$  да  $x = 0$  бўлгани учун  $C_a = 0$  бўлади. Демак, юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонуни

$$x = 2,5t^2 - 0,5 \sin 4t + 8,4t \quad (12)$$

кўринишда бўлади (бу ерда  $x$  материалларда,  $t$  эса секундларда ўлчанган).

9. Геометрик масалаларни ечишда, аввал чизмани чизиб олиш керак. Кейин изланаётган функцияни  $y = y(x)$  орқали белгилаб масала шартини миқдорларни  $x$ ,  $y$  ва  $y'$  ( $y'$  уринманинг бурчак коэффициенти эканлигидан фойдаланиш керак)лар орқали ифодаланса, ҳосил бўлган тенглик дифференциал тенглама бўлади. Дифференциал тенгламани ечиб,  $y = y(x)$  изланаётган функцияни топамиз.

**Мисол.**  $F(x, y, C_1)$  эгри чизиклар ( $C_1$  – параметр) оиласининг изогонал траекторияларини топинг (шу оила эгри чизиклари билан бир хил  $\varphi$  бурчак остида кесишувчи бошқа бир оила изогонал траекториялари дейилади)

*Ечими.* Берилган чизиклар оиласининг дифференциал оиласини тузамиз. Бунинг учун қуйидаги системадан  $C$  параметрни йўқотамиз:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \end{cases} \quad (1)$$

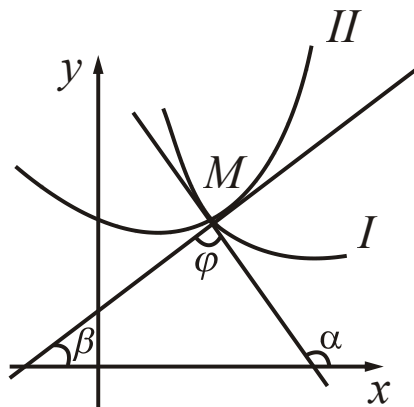
Натижада берилган чизиклар оиласининг

$$y' = f(x, y)$$

кўринишдаги тенгламасини оламиз (бу ерда умуман олганда  $g(x, y, y') = 0$  кўринишдаги тенглама ҳосил бўлади, биз уни  $y'$  га нисбатан ечиб олиш мумкин деб фараз қиламиз).

Маълумки,  $M(x, y)$  нуктада кесишувчи икки эгри чизик орасидаги бурчак деб, эгри чизикларга бу нукталарда ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади. Бири биринчи (берилган), иккинчиси иккинчи (топиш керак бўлган) чизиклар оиласига тегишли бўлган  $M(x, y)$  нуктада ўзаро кесишувчи ихтиёрий иккита чизикни I ва II деб белгилаб олайлик (2-расмга қаранг). I ва II чизикларга  $M$  нуктада ўтказилган уринмаларнинг  $OX$  ўқи билан ҳосил қилган бурчакларни мос равишда  $\alpha$  ва  $\beta$  билан белгиласак, I ва II чизиклар орасидаги бурчак  $\varphi = \pm(\beta - \alpha)$  бўлади. Бундан

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \pm \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha} \quad (2)$$



тенгликни оламиз. Тушунарлики,  $\operatorname{tg} \varphi$  – маълум ( $\varphi$  бурчак берилган),

$$\operatorname{tg} \alpha = f(x, y), \quad \operatorname{tg} \beta = y'$$

( $y'$  чизикка берилган нуктадан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини беради).  
Демак, (2) муносабат

$$y' = \frac{f(x, y) \pm \operatorname{tg} \varphi}{1 \pm \operatorname{tg} \varphi f(x, y)} \quad (3)$$

2-расм.

кўринишида бўлади. Бу умумий интегрални берилган эгри чизиклар оиласи учун изогонал траекториялар бўлади, улар берилган эгри чизикларни бир хил  $\varphi$  бурчак остида кесиб ўтади. Агар траекториялар ортогонал бўлса, у ҳолда

$$\varphi = \pi/2, \quad \beta = \alpha \pm \pi/2, \quad \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{ctg} \alpha = -1/\operatorname{tg} \alpha = -1/f(x, y)$$

бўлиб, ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}. \quad (4)$$

Хусусан,  $y = C_1 x^4$  чизиклар оиласига ортогонал бўлган (чизиклар оиласини) траекторияларини топиш керак бўлсин.

Аввало,  $y = Cx^4$  чизиклар оиласининг дифференциал тенгламасини тузиб оламиз:

$$\begin{aligned} y &= C_1 x^4 \\ y' &= 4C_1 x^3 \end{aligned} \rightarrow y' = 4y/x.$$

Демак, берилган чизиклар оиласининг дифференциал тенгламаси  $y' = 4y/x$  экан. (4) тенгликка кўра изланаётган траекторияларнинг дифференциал тенгламаси

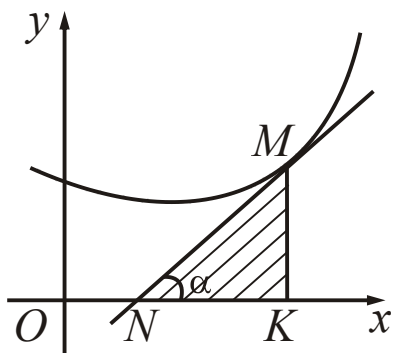
$$y' = -x/4y \quad (5)$$

кўринишда бўлади. Бу дифференциал тенгламани ечамиз

$$4ydy = -x dx; \quad \int 4ydy = -\int x dx; \quad 2y^2 = -x^2/2 + C_2.$$

Демак, изланаётган чизиклар оиласининг тенгламаси  $2y^2 = -x^2/2 + C_2$  бўлади.

**Мисол.** Шундай чизикни топингки, унинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринма, уриниш нуктаси ординатаси ва абсциссалар ўқи ҳосил қилган учбурчак юзи ўзгармас  $a^2$  га тенг бўлсин.



3-расм.

Ечими. Изланаётган чизикнинг ихтиёрий  $M(x, y)$  нуқтасини олайлик (3-расмга қаранг). Тушунарлики, чизикқа  $M(x, y)$  нуқтадан ўтказилган уринма билан  $OX$  ўқи орасидаги бурчак  $\alpha$  учун  $\operatorname{tg} \alpha = y'$  тенглик ўринли. Биз қуйидагиларга эгамиз:

$$MK = y; \quad NK = \frac{y}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{y}{y'};$$

$$S = \frac{1}{2} |MK| |NK| = \frac{1}{2} \frac{y^2}{|y'|}.$$

Иккинчи томондан  $S = a^2$ , демак, қуйидаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{1}{2} \frac{y^2}{y'} = \pm a^2 \quad \text{ёки} \quad y' = \pm \frac{1}{2a^2} + C.$$

Бу тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$\frac{dy}{y^2} = \pm \frac{1}{2a^2} dx; \quad \int \frac{dy}{y^2} = \pm \frac{1}{2a^2} \int dx; \quad -\frac{1}{y} = \pm \frac{x}{2a^2} + C.$$

Шундай қилиб, биз масаланинг ечимини олдик, изланган чизик  $-\frac{1}{y} = \pm \frac{x}{2a^2} + C$  кўринишида бўлар экан.

#### Дифференциал тенгламани ечинг

1.  $\sqrt{y} dx + x^2 dy = 0$

2.  $(1 + y^2) dx = x dy$

3.  $\cos^2 y dx - (x^2 + 1) dy = 0$

4.  $(1 + x^3) y' = 3x^2 y, \quad y(0) = 2$

5.  $y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$

6.  $dx - x dy = 2y dy, \quad y(0) = -1$

7.  $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$

8.  $\operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$

9.  $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$

10.  $y' = \sin^2 x$

11.  $y' = 5x(1 - x^2)^{3/2}$

12.  $y' + 1/y^2 = 1$

13.  $\sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$

14.  $3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$

15.  $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y^2}}{y} x \quad \text{сон} \quad x, y > 0$

16.  $z' = 2^{x+z}, \quad z(0) = -1$

17.  $y' + 1 = \sqrt{x + y}$

18.  $y' = \cos(y - x)$

19.  $y'(x + y)^2 = 1$

20.  $y' + y \sin 2x = 0, \quad y(\pi/4) = 1$

21.  $y' = e^{x-y} - 1$

22.  $y' = -2\sqrt{|y|}$

$$23. y' = \cos(y - x - 1)$$

$$25. y' = \operatorname{tg}(y - 2x)$$

$$27. y' = y^2/x^2 + 4y/x + 2$$

$$29. y' = (x + y)/(x - y)$$

$$31. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

$$33. 2y' = y^2/x^2 + 6y/x + 3$$

$$35. xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$$

$$37. y' = \frac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}$$

$$39. y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}$$

$$41. y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$$

$$43. (x^2 y^2 - 1)y' + xy^3 = 0$$

$$45. 2y' + x = 4\sqrt{y}$$

$$47. x^2 y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$$

$$24. y' = \sqrt[3]{(4x - y + 1)^2}$$

$$26. y' = \sin(y - x - 1)$$

$$28. xy' \cos(y/x) = y \cos(y/x) - 1$$

$$30. xy' = y(1 + \ln(y/x))$$

$$32. (xy' - y) \ln(y/x) = y$$

$$34. xy' = y \ln(y/x)$$

$$36. (x - y \cos(y/x))dx + x \cos(y/x)dy = 0$$

$$38. y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$$

$$40. y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}$$

$$42. y' = 2 \left( \frac{y + 2}{x + y - 1} \right)$$

$$44. (y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$$

$$46. y^3 dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$$

$$48. 2x^2 y' = y^3 + xy$$

**Тенгламани берилган шартини қаноатлантирувчи  
ечимини топинг**

$$49. x^2 y' \cos y + 1 = 0, \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{да} \quad y \rightarrow 16/3 \cdot \pi.$$

$$50. e^y = e^{4y} y' + 1, \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{да} \quad y \text{ чегараланган.}$$

51.  $\alpha$  ва  $\beta$  ларнинг қандай қийматларида  $y' = ax^\alpha + by^\beta$  тенгламани  $y = z^m$  алмаштириш ёрдамида бир жинсли тенгламага келтириш мумкин?

52. Идишда 10 кг туз солинган 100 литрли қоришма бор. Идишга узлуксиз сув қуйиб (минутига 5 л) у қоришма билан аралашаётган бўлсин. Агар қоришма шундай тезлик билан идишдан чиқиб кетаётган бўлса, бир соатдан кейин идишда қанча туз қолади.

53. Материал нукта тўғри чизиқ бўйлаб  $\alpha$  тезланиш билан ҳаракат қилиняпти. Шу нуктанинг ҳаракат қонунини топинг.

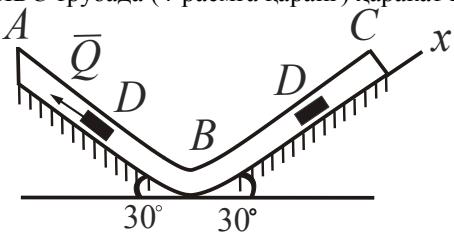
54. Тандирдан узиб олинган ноннинг температураси 20 минутда  $100^\circ$  дан  $60^\circ$  га тушади. Узиб олгандан неча минут кейин ноннинг температураси  $30^\circ$  бўлади?

55. Моторли қайиқ тинч сувда  $v_0 = 20$  км/соат тезлик билан ҳаракат қилаяпти. Шу юришда қайиқнинг мотори ўчириб қўйилди ва 40 секунддан сўнг унинг тезлиги 8 км/соат бўлиб қолди. Сувнинг қаршилиги қайиқнинг тезлигига тўғри пропорционал бўлса, қайиқнинг мотори ўчирилгандан 2 минут кейинги тезлигини топинг.

56. Идиш конус шаклида бўлиб, асосининг радиуси  $R = 0,4$  м, баландлиги  $H = 1$  м, учи эса пастга қаратилган. Агар идишнинг учида 15 см диаметрли тешиқ бўлса, ундаги тўла сув қанча вақтда оқиб

бўлади? (Сувнинг сатхи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $v = 0,6\sqrt{2gh}$  бўлади деб ҳисоблансин).

57. Массаси  $m = 6$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуктада  $v_0 = 15$  км/с бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (4-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлакда юкка оғирлик кўчидан ташқари  $Q = 12$  Н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $v$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,6v^2$  қаршилик кучи таъсир этади,  $B$  нуктада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$



4-расм.

ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $AB = 5$  м ва  $F_x = -5 \sin 2t (F_x - F)$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси эканлигини билган ҳолда юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

58. Қуйидаги чизиклар оиласига ортогонал бўлган траекторияларни топинг: а)  $y = Cx^2$ ; б)  $y^2 = x + C$ ; в)  $y = Ce^x$ .

59. Координата бошидан ўтувчи, ўқи  $OY$  ўқиға параллел бўлган барча парабодаларнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

60. Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринмаларнинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктасининг абсциссасидан икки марта ката бўлсин.

61. Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси, уриниш нуктасининг абсциссаси ва ординатаси айирмасига тенг бўлсин.

62. Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: чизикқа ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринма ва нормаларнинг абсцисса ўқидан ажратган кесмаси  $2a$  га тенг.

### Синов учун савол ва топшириқлар

1. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама андай ечилади?  
2. Ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида қандай дифференциал тенгламаларни келтириш мумкин?

3. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама қандай ечилади?

4. Ушбу  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$  кўринишдаги тенглама қандай усул билан бир жинсли

тенгламага келтирилади?

5. Умумлашган бир жинсли тенгламалар ва уларни бир жинсли тенгламага келтириш усуллари.

6.  $y' = \frac{y+2}{y+2x-4}$  тенгламани ечинг.

7.  $(x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0$  тенгламани ечинг.

### 1. Дифференциал тенгламани ечинг

1.1. а)  $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$

б)  $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$

- 1.2. a)  $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$   
 b)  $y' = (\sin \ln x + \cos \ln x + a)y$
- 1.3. a)  $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$   
 b)  $3y'\sin x \sin y + 5\cos x \cos^3 y = 0$
- 1.4. a)  $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$   
 b)  $y' + \cos \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x-y}{2}$
- 1.5. a)  $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$   
 b)  $\sec^2 x \operatorname{tgy} dx + \sec^2 y \operatorname{tgx} dy = 0$
- 1.6. a)  $6x dx - y dy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$   
 b)  $y' + \sin(x-y) = \sin(x+y)$
- 1.7. a)  $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$   
 b)  $\sin(\ln x)dx - \cos(\ln y)dy = 0$
- 1.8. a)  $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$   
 b)  $\sin x dx - y \ln y dx = 0$
- 1.9. a)  $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0$   
 b)  $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$
- 1.10. a)  $3(x^2y + y)dy + \sqrt{2+y^2}dx = 0$   
 b)  $y' + \cos(x-y) = \cos(x+y)$
- 1.11. a)  $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2}y' = 0$   
 b)  $\sin y + \cos x dy = \cos y \sin x dx$
- 1.12. a)  $20x dx - 3y dy = 3x^2y dy - 5xy^2 dx$   
 b)  $(1+y)(e^x dx - e^{2y} dy) + (1+y^2)dy = 0$
- 1.13. a)  $y(4+e^x)dy - e^x dx = 0$   
 b)  $y' \sin y \cos x + \cos y \sin x = 0$
- 1.14. a)  $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$   
 b)  $y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0$
- 1.15. a)  $(3+e^x)yy' = e^x$

$$\begin{aligned} & \text{b) } x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0 \\ 1.16. & \text{a) } x^2(y+1)dx + (x^3-1)(y-1)dy = 0 \\ & \text{b) } ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0 \\ 1.17. & \text{a) } y(1+\ln y) + xy' = 0 \\ & \text{b) } \operatorname{tg} y dx - \operatorname{ctg} x dy = 0 \\ 1.18. & \text{a) } (xy^4 - x)dx + (y + xy)dy = 0 \\ & \text{b) } 1 + x + (1+x^2)(e^x - e^{2y}y') = 0 \\ 1.19. & \text{a) } y' - y^2 - 3y + 4 = 0 \\ & \text{b) } (1+x^2)dy + y\sqrt{1+x^2}dx - xydx = 0 \\ 1.20. & \text{a) } (1-x^2)y' - xy = xy^2 \\ & \text{b) } (1+y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) - (1+y)dy = 0 \end{aligned}$$

## 2. Дифференциал тенгламани ўзгарувчини алмаштириш йўли билан ечинг

$$\begin{aligned} 2.1. & (2x+3y-1)dx + (4x+6y-5)dy = 0 \\ 2.2. & (2x-y)dx + (4x-2y+3)dy = 0 \\ 2.3. & (x^2 + y^2)dx = xydy \quad (\text{кутб координаталарга ўтинг}) \\ 2.4. & y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \quad (\text{кутб координаталарга ўтинг}) \\ 2.5. & y' = (8x+2y+1)^2 \\ 2.6. & y' = (4x+y+1)^2 \\ 2.7. & (x+2y+1)y' = (2x+4y+3) \\ 2.8. & y' + 2y = 3x+5 \\ 2.9. & e^{x-y}y' = 1 \\ 2.10. & (x+y)^2 y' = a^2 \\ 2.11. & y' = \frac{1}{2x+y} \\ 2.12. & y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y} \\ 2.13. & (2x+2y-1)dy + (x+y-2)dy = 0 \end{aligned}$$

$$2.14. (x - y + 2)dx + (x - y + 3)dy = 0$$

$$2.15. y' = (4x + y - 3)^2$$

$$2.16. y' - 1 = e^{x+2y}$$

$$2.17. y' = \cos(ay + bx), \quad a = 0$$

$$2.18. y' \sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$$

$$2.19. y' = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$$

$$2.20. y' = \sin(x - y)$$

### 3. Дифференциал тенгламани ечинг

$$3.1. a) y' = \frac{x + 2y}{2x + y}$$

$$b) x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0$$

$$3.2. a) xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} - y$$

$$b) y' = y/x + \operatorname{tg}(y/x)$$

$$3.3. a) 3y' = y^2/x^2 + 8y/x + 4$$

$$b) y' = y/x + \sin(y/x)$$

$$3.4. a) xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$$

$$b) x(y' + e^{y/x}) = y$$

$$3.5. a) y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - 2xy}$$

$$b) xdy - y \cos \ln(y/x) dx = 0$$

$$3.6. a) xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

$$b) (1 + e^{y/x})dx + e^{x/y}(1 - x/y)dy = 0$$

$$3.7. a) xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$$

$$b) y' = y/x + e^{y/x}$$

$$3.8. a) y' = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x^2 - 2xy}$$

$$b) y' = y/x + e^{y/x}$$



$$3.9. \text{ a) } xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$$

$$\text{b) } xy' = xe^{y/x} + y + x$$

$$3.10. \text{ a) } y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$$

$$\text{b) } xy' + x \cos(y/x) - y + x = 0$$

$$3.11. \text{ a) } xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$$

$$\text{b) } xy' \operatorname{ch}(y/x) + 2x \operatorname{sh}(y/x) - y \operatorname{ch}(y/x) = 0$$

$$3.12. \text{ a) } 2y' = y^2/x^2 + 8y/x + 8$$

$$\text{b) } (xy' - y) \cos^2(y/x) = xy'$$

$$3.13. \text{ a) } xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$$

$$\text{b) } (y \sin(y/x) - x \cos(y/x)) = xy'$$

$$3.14. \text{ a) } y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$$

$$\text{b) } dy/dx = \cos^2(y/x) + y/x$$

$$3.15. \text{ a) } xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$$

$$\text{b) } (x - y \sin(y/x)) dx + x \sin(y/x) dy = 0$$

$$3.16. \text{ a) } xy' = 2\sqrt{3x^3 + y^2} + y$$

$$\text{b) } y' = y/x + \cos(y/x)$$

$$3.17. \text{ a) } xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$$

$$\text{b) } y dx = x(1 + \ln x - \ln y) dy$$

$$3.18. \text{ a) } xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$$

$$\text{b) } dx = (\sin^2(x/y) + (x/y)) dy$$

$$3.19. \text{ a) } y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$$

$$\text{b) } y(x' + e^{x/y}) = x$$

$$3.20. \text{ a) } 3y' = y^2/x^2 + 10y/x + 10$$

$$\text{b) } x' = x/y + \operatorname{ctg}(x/y)$$

#### 4. Дифференциал тенгламани ечинг

$$4.1. y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}$$

$$4.3. y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}$$

$$4.5. y' = \frac{2x + y - 2}{3x - y - 2}$$

$$4.7. y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$$

$$4.9. y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}$$

$$4.11. y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x + 2}$$

$$4.13. y' = \frac{2x + 2y - 5}{5x - 5}$$

$$4.15. y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}$$

$$4.17. y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$$

$$4.19. y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$$

$$4.2. y' = \frac{x + y - 3}{2x - 2}$$

$$4.4. y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}$$

$$4.6. y' = \frac{x + y - 3}{x - 1}$$

$$4.8. y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}$$

$$4.10. y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$$

$$4.12. y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$$

$$4.14. y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}$$

$$4.16. y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}$$

$$4.18. y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$$

$$4.20. y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$$

#### V. Умумлашган бир жинсли тенгламани ечинг

$$v.1. 2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$$

$$v.3. (x + y^3) + 3(y^3 - x)y^2y' = 0$$

$$v.5. x^2(y' + y^2) = xy - 1$$

$$v.7. (y^4 + 3x^2)y' + xy = 0$$

$$v.9. y^3dx + 2(x^2 - xy^2)dy = 0$$

$$v.11. x^2yy' + 2y^4 = x^2$$

$$v.13. x^4y^2dy + yxdx = 0$$

$$v.15. yy' + y^3 = 1/x^3$$

$$v.2. y' = y^2 - 2/x^2$$

$$v.4. y^3dx - 2(x^2 + xy^2)dy = 0$$

$$v.6. 2y + (x^2y + 1)xy' = 0$$

$$v.8. y'(x^6 - y^4) = x^5y$$

$$v.10. 2y' + y^2 - 1/x^2 = 0$$

$$v.12. 4y^6 + x^3 = 6xy^5y'$$

$$v.14. xy^2(xy' + y) = 1$$

$$v.16. y(1 + \sqrt{x^2y^4 - 1})dx + 2xdy = 0$$

$$\text{v.17. } xy^2 y' - y^3 = 1/3 \cdot x^4$$

$$\text{v.18. } x^2 y y' + y = 1/x$$

$$\text{v.19. } xy y' + 2y^4 = x^2$$

$$\text{v.20. } (x - 2y^3) dx + 3y^2 (2x - y) dy = 0$$

## 6. Тенгламани берилган шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг

$$6.1. \ y'/x - \cos 2y = 1, \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow 3\pi/2$$

$$6.2. \ \cos 2y - 2y'/3x^2 = 0, \quad x \rightarrow 0 \text{ да } y \rightarrow \pi/2$$

$$6.3. \ x^2 y' + \cos 2y = 1, \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow 9\pi/4$$

$$6.4. \ (xy^2 + x) dx + (x^2 y - y) dy = 0, \quad x = 0 \text{ да } y = 1$$

$$6.5. \ (a^2 + y^2) dx + 2x\sqrt{ax - x^2} dy = 0, \quad x = a \text{ да } y = 0$$

$$6.6. \ x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0, \quad x = 0 \text{ да } y = 1$$

$$6.7. \ x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} dy/dx = 0, \quad x = 0 \text{ да } y = 1$$

$$6.8. \ (xy' - y) \operatorname{arctg}(y/x) = x, \quad x = 0 \text{ да } y = 1$$

$$6.9. \ (y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0, \quad x = 0 \text{ да } y = 1$$

$$6.10. \ (\sqrt{xy} - x) dy + y dx = 0, \quad x = 1 \text{ да } y = 1$$

$$6.11. \ y + xy' = 6(1 + x^3 y'), \quad x = 1 \text{ да } y = 1$$

$$6.12. \ (1 - x^2) y' - 2xy^2 = xy, \quad x = 1 \text{ да } y = 1$$

$$6.13. \ y + xy' = a(1 + xy), \quad x = 1/a \text{ да } y = a$$

$$6.14. \ (x + 1) y' = y - 1, \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \text{ чегараланган}$$

$$6.15. \ y' = 2x(\pi + y), \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \text{ чегараланган}$$

$$6.16. \ x^2 y' + \sin 2y = 1, \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow 11\pi/4$$

$$6.17. \ y' x^2 \sin y = 1, \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow \pi/2$$

$$6.18. \ y' x^4 \sin y = 4, \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow \pi/2$$

$$6.19. \ y' x^3 \cos y = 2, \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow 0$$

$$6.20. \ y' = -4/(x^4 \cos y), \quad x \rightarrow +\infty \text{ да } y \rightarrow 0$$

## 7. Масалани ечинг

7.1. Пиво ачитқисини тайёрлашда ишлатиладиган таъсир қилувчи фермент микдорини ўсиш тезлиги унинг шу пайтдаги  $x$  микдорига пропорционал. Ферментни бошланғич микдори  $\alpha$  га тенг. Бир соатдан сўнг у икки марта кўпайган бўлса, уч соатдан кейин неча марта кўпаяди?

7.2. Маълум баландликдан массаси  $m$  бўлган жисм вертикал йўналишда пастга ташлаб юборилди. Агар бу жисмга оғирлик кучи ва ҳавонинг жисм тезлигига пропорционал (пропорционаллик

коэффициенти  $R$ ) бўлган қаршилик кучи таъсир қилаётган бўлса, унинг  $U$  тушиш тезлигининг ўзгариш қонунини топинг.

**7.3.** Учувчининг парашют билан биргаликдаги оғирлиги 80 кг. Ҳавонинг қаршилиги унинг тезлиги  $U$  нинг квадратига пропорционал (пропорционаллик коэффициенти  $k = 400$ ). Вақтга боғлиқ равишда тушиш тезлигини ва тушишдаги энг катта тезликни топинг.

**7.4.** Шамол ўрмон орқали ўтаётиб, дарахтлар қаршилигига учраш натижасида ўз тезлигининг бир қисмини йўқотади. Босиб ўтилган йўл чексиз кичик бўлса, бу йўқотиш бошланғич тезликка ва йўл узунлигига тўғри пропорционал бўлади. Агар шамолнинг бошланғич тезлиги  $U_0 = 12$  м/с ўрмонда  $S = 1$  м йўл босиб ўтгандан кейинги тезлиги  $U_1 = 11,8$  м/с бўлса, ўрмонда 150 м йўл босиб ўтган шамолнинг тезлигини топинг.

**7.5.** Массаси  $m$  бўлган жисм 250 м баландликдан оғирлик кучи ҳавонинг қаршилик кучи таъсирида тушаётган бўлсин. Қаршилик кучини тезликка пропорционал (пропорционаллик коэффициенти  $R$ ) деб олиб, жисмнинг ҳаракат қонуни  $h = f(t)$  ни ва жисм туша бошлагандан неча минут кейин ерга етиб келишини аниқланг.

**7.6.** Ўлчамлари  $60 \times 75$  см, баландлиги 80 см бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги идишга ҳар секунда 1,8 л сув тушаётган бўлсин. Унинг остки қисмида юзи  $2,5 \text{ cm}^2$  бўлган тешик бор. Идиш қанча вақтда тўлади? Натижани худди шундай, лекин тешиги бўлмаган идишнинг тўлиш вақти билан солиштиринг. (Сувнинг сатҳи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда, оқиб чиқаётган сувнинг тезлиги  $v = 0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин).

**7.7.** Диаметри  $2R = 1,8$  м ва баландлиги  $H = 2,45$  м бўлган цилиндр шаклидаги идишдаги сув унинг остки қисмидаги  $2r = 6$  диаметрли тешикдан қанча вақтда оқиб тушади? Цилиндр ўқи горизонтал жойлашган, сувнинг сатҳи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

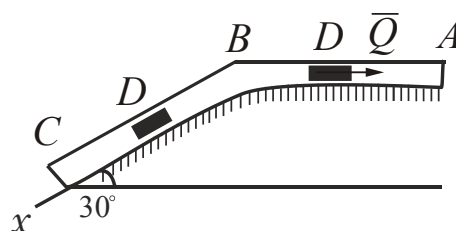
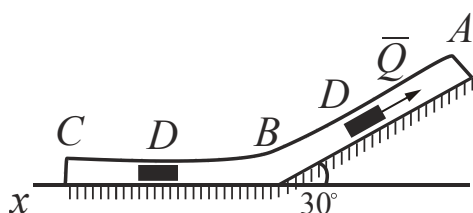
**7.8.** Моторли қайиқ унинг тезлигига пропорционал бўлган сувнинг қаршилиги таъсирида ўз тезлигини пасайтиради. Қайиқнинг бошланғич тезлиги 1,5 м/с бўлиб, 4 секунддан кейин унинг тезлиги 1 м/с бўлади. Қачон қайиқнинг тезлиги 1 см/с га тенг бўлади? Қайиқ тўхтагунча қанча йўл босиб ўтади?

**7.9.** Идиш конус шаклида бўлиб, асосининг радиуси  $R = 6$  см, баландлиги  $H = 10$  см учи эса пастга қаратилган. Агар идишнинг учида 0,5 см диаметрли тешик бўлса, ундаги тўла сув қанча вақтда оқиб бўлади? Сувнинг сатҳи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

**7.10.** Остки қисмида тешиги бор бўлган цилиндр шаклидаги идиш вертикал равишда қўйилган. Идишдаги тўла сувнинг ярми тешикдан 5 минутда оқиб тушади. Қанча вақтда ҳамма сув оқиб бўлади? Сувнинг сатҳи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда, унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

**7.11.** Диаметри  $2R = 1,8$  м ва баландлиги  $H = 2,45$  м бўлган цилиндр шаклидаги идишдаги сув унинг остки қисмидаги  $2r = 6$  диаметрли тешикдан қанча вақтда оқиб тушади? Цилиндр ўқи вертикал жойлашган, сувнинг сатҳи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

**7.12.** Массаси  $m = 2$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуқтада 12 м/с бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (5-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлақда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 5$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,8U^2$  қаршилик кучи таъсир этади.  $B$  нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубадаги  $BC$  бўлақига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $AB = 1,5$  м ҳамда  $F_x = 4\sin 4t$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканини билган ҳолда юкнинг  $BC$  бўлақдаги ҳаракат қонунини топинг.



**7.13.** Массаси  $m = 1,8$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуктада  $24$  м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (6-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 5$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,3U$  қаршилик кучи таъсир этади.  $B$  нуктада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $A$  нуктадан  $B$  нуктага ўтиш вақти  $t_1 = 2$  сек ҳамда  $F_x = -2 \cos 2t$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканини билган ҳолда юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

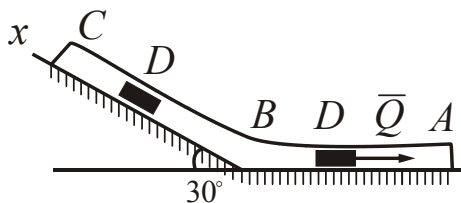
**7.14.** Тажрибаларга кўра ҳар бир грамм радийдан бир йилда  $44$  миллиграмм емирилади. Неча йилдан кейин радийнинг ярми емирилади? Радиоактив модданинг бирлик вақт ичида емирилиш миқдори мавжуд модда миқдорига пропорционал деб ҳисоблансин.

**7.15.**  $30$  кунда радиоактив модданинг  $50$  фоизи емирилади. Қанча вақтдан сўнг радиоактив модданинг бошланғич миқдорининг  $1$  фоизи қолади? Радиоактив модданинг бирлик вақт ичида емирилиш миқдори мавжуд модда миқдорига пропорционал деб ҳисоблансин.

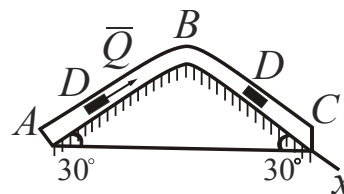
**7.16.** Жисм  $10$  минутда  $100^\circ$  дан  $60^\circ$  гача совийди. Атроф-муҳитнинг температураси  $20^\circ$  да ушлаб турилса, қачон жисмнинг температураси  $25^\circ$  бўлади? Жисмнинг совиш тезлиги жисм ва атроф-муҳит температуралари айирмасига пропорционал деб ҳисоблансин.

**7.17.** Жисм  $10$  минутда  $100^\circ$  дан  $60^\circ$  гача совийди. Атроф-муҳитнинг температураси  $20^\circ$  да ушлаб турилса, қачон жисмнинг температураси  $25^\circ$  бўлади? Жисмнинг совиш тезлиги жисм ва атроф-муҳит температуралари айирмасига пропорционал деб ҳисоблансин.

**7.18.** Массаси  $m = 8$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуктада  $10$  м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (7-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 16$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,5 U^2$  Н қаршилик кучи таъсир этади.  $B$  нуктада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $AB = 4$  м ва  $F_x = 6t^2$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканлиги маълум бўлса, юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.



7-расм.



8-расм.

**7.19.**  $20$  л идишда ҳаво билан тўлдирилган ( $80\%$  азот,  $20\%$  кислород). Идишга секундига  $0,1$  л азот киритилиб, тинимсиз аралаштирилиб турилибди ва худди шундай тезлик билан аралашма чиқиб кетаяпти. Қанча вақтдан кейин идишда  $99\%$  азот бўлади?

**7.20.** Массаси  $m = 3$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуктада  $22$  м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (8-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 9$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,5 U$  қаршилик кучи таъсир этади.  $B$  нуктада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $A$  нуктадан  $B$  нуктага ўтиш вақти  $t_1 = 3$  сек ҳамда  $F_x = 4 \sin 2t$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканлиги маълум бўлса, юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

## 8. Масалани ечинг

**8.1.** Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктасининг абсциссасидан уч марта катта бўлсин.

**8.2.** Шундай чизикларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуктасининг иккиланган абсцисса ва ординаталари айирмасига тенг бўлсин.

**8.3.** Шундай чизикларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуктасининг абсцисса ва ординаталари айирмасига тенг бўлсин.

**8.4.** Чизикнинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуктаси ординатасининг учланганига тенг эканлигини билган ҳолда, унинг тенгламасини тузинг.

**8.5.** Маркази координата бошида бўлган тўғри чизиклар дастасига қуйидаги бурчаклар билан изогонал бўлган траекторияларни топинг:

А)  $30^\circ$ ; В)  $45^\circ$ ; С)  $60^\circ$ ; D)  $90^\circ$ ;

**8.6.** Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: агар чизикнинг ихтиёрий нуктасидан координата ўқларига улар билан кесишгунча параллел тўғри чизиклар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзини шу чизикка 1:4 нисбатда бўлади.

**8.7.**  $y = ax^2$  параболалар оиласига ортогонал траекторияларни топинг.

**8.8.** Шундай чизикларни топингки, уларнинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринманинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуктаси, уриниш нуктасидан ва координата бошидан баравар узоқликда бўлсин.

**8.9.** Шундай чизикларни топингки, унинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринманинг координата бошигача бўлган масофа, уриниш нуктасининг абсциссасига тенг бўлсин.

**8.10.** Шундай чизикларни топингки, унинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринма, уриниш нуктаси ординатаси ва абсциссалар ўқи ҳосил қилган учбурчакда катетлар йиғиндиси ўзгармас 0 сонга тенг бўлсин.

**8.11.** Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктасининг абсциссасидан икки марта кичик бўлсин.

**8.12.** Шундай чизикларни топингки, уларда ҳар бир нуктасида ўтказилган уринма кутб радиус ва кутб ўқлар билан бир хил бурчак ташкил қилсин.

**8.13.** Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктаси абсциссасининг  $2/3$  қисмига тенг бўлсин.

**8.14.** Шундай чизикларни топингки, унинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринмадан координата бошигача бўлган масофа уриниш нуктаси абсциссасининг модулига тенг бўлсин.

**8.15.** Чизикнинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринма ординаталар ўқида уриниш нуктасининг иккиланган ординатасига тенг бўлган кесма ажратишни билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

**8.16.** Шундай чизикларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуктаси абсцисса ва ординаталар йиғиндисига тенг бўлсин.

**8.17.** Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: агар кесишгунча қадар параллел чизиклар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзи шу чизик 1:2 нисбатда бўлади.

**8.18.** Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: агар чизикнинг ихтиёрий нуктасидан координата ўқларига улар билан кесишгунча параллел чизиклар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзини шу чизик 1:3 нисбатда бўлади.

**8.19.** Марказлари  $y = 2x$  чизикда ётган радиуси 1 га тенг. Айланаларнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

**8.20.** Ўқлари  $OY$  ўқида параллел ва бир пайтда  $y = 0$  ҳамда  $y = x$  чизикларга уринадиган параболалар оиласининг дифференциал тенгламасини тузинг.

### 3-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ВА УНГА КЕЛТИРИЛДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1.  $y' + f(x)y = g(x)$  кўринишдаги тенглама **биринчи тартибли чизикли дифференциал тенглама** дейилади. Бу тенгламани ечиш учун аввал унга мос бир жинсли (яъни  $g(x) \equiv 0$  бўлган) тенгламани ечиб олинади

$$y' + f(x)y = 0 \quad (1)$$

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлгани учун, уни интеграллаб қуйидагини оламиз:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y, \quad y \neq 0; \quad \frac{dy}{y} = -f(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx;$$

$$\ln|y| = -\int f(x)dx + \ln C_1, \quad C_1 > 0; \quad y = C_1 e^{-\int f(x)dx}, \quad C_1 > 0.$$

$y = C e^{-\int f(x)dx}$ ,  $C \in R$  ларда (1) тенгламанинг умумий ечими бўлади. Энди биз

$$y' + f(x)y = g(x) \quad (2)$$

тенгламанинг ечимини  $y = C(x)e^{-\int f(x)dx}$  кўринишда қидириб кўрамиз, бу ерда  $C(x)$  – ҳозирча номаълум бўлган функция.  $C(x)$  номалум функцияни топиб олиш учун  $y'$  ҳосилани ҳисоблайлик:

$$y' = \frac{d}{dx} \left[ C(x)e^{-\int f(x)dx} \right] = C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx}.$$

Энди  $y'$  ни (2) га қўйсак қуйидагига эга бўламиз:

$$C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

$$C'(x) = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

Охириги тенгликни интеграллаб

$$C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx + C_1$$

ифодани оламиз. Топилган  $C(x)$  ни ўрнига олиб бориб қўйсак, (2) нинг умумий ечими учун

$$y = e^{-\int f(x)dx} \left[ \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx + C_1 \right] \quad (3)$$

формулага эга бўламиз.

Агар биз (2) тенгламанинг  $(x_0, y_0)$  нуқтадан ўтувчи интеграл чизигини топомокчи бўлсак, (3) дан фойдаланиб, унинг кўриниши

$$y = e^{-\int_{x_0}^x f(x)dx} \left[ \int_{x_0}^x g(x)e^{\int_{x_0}^x f(x)dx} dx + y_0 \right] \quad (4)$$

эканлигига қийинчиликсиз ишонч ҳосил қилишимиз мумкин.

Демак, (2) тенгламанинг  $(x_0, y_0)$  нуқтадан ўтувчи интеграл чизиги (4) кўринишда ва умумий ечими (3) кўринишда экан.

**Мисол.**  $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$  тенгламанинг умумий ечимини топинг.

*Ечими.* Бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиб олайлик

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \quad \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C_1, \quad C_1 > 0, \quad y = C \sin x, \quad C \in R.$$

Энди ўзгармасни вариациялаймиз, яъни берилган тенгламанинг ечимини  $y = C(x) \sin x$  кўринишида излаймиз, бу ерда  $C(x)$  ҳозирча номаълум функция.

$$y = C(x) \sin x \Rightarrow y' = C'(x) \sin x + C(x) \cos x$$

тенгламани қўйиб қуйидагини оламиз

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \cos x = 2x \sin x,$$

$$C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + C_2, \quad y = (x^2 + C_2) \sin x.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими  $y = x^2 \sin x + C_2 \sin x$  кўринишда экан.

Албатта, охириги ифодани (3) формулани қўллаб ҳам олиш мумкин эди. Лекин жуда кўп мисолларда бизга ўхшаб (3) формулани олиш учун қилинган барча ишни бажариб чиққан маъқулроқ.

**2.  $y' + f(x)y - g(x)y^n, \quad n \neq 1$  – Бернулли тенгламаси.**

Бу тенгламани  $z = y^{1-n}$  алмаштириш ёрдамида чизикли тенгламага келтириш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам аввал тенгламани ҳар иккала томони  $y^n$ ,  $y \neq 0$  га бўлиб, уни  $y^{-n}y' + f(x)y^{1-n} = d(x)$  кўринишга келтириб олиб,  $z' = (1-n)y^{-n}y'$  эканлигини эътиборга олинса,

$$z' + (1-n)f(x)z = g(x)(1-n)$$

кўринишдаги чизикли тенглама ҳосил бўлади.

**Мисол.**  $y' + 2y = y^2 e^x$  тенгламанинг умумий ечимини топинг.

*Ечими.*

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{2}{y} = e^x, \quad y \neq 0, \quad n = 2, \quad z = y^{1-n} = y^{-1},$$

$$z' = -1 \cdot y^{-2}y' = \frac{y'}{y^2}, \quad -z' + 2z = e^x, \quad z' - 2z = e^x;$$

$$z' - 2z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 2z, \quad \frac{dz}{z} = 2dx, \quad \ln|z| = 2x + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$z = C^{2x} = 0, \quad C \in R; \quad z = C(x)e^{2x}, \quad z' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x},$$

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = e^x, \quad C'(x) = -e^{-x},$$

$$C(x) = e^{-x} + C_2, \quad z = (C_2 + e^{-x})e^{2x}, \quad \frac{1}{y} = (C_2 + e^{-x})e^{2x},$$

$$y = \frac{1}{(C_2 + e^{-x})e^{2x}}, \quad y = 0.$$

Охириги  $y = 0$  ечимни тенгламанинг ҳар иккала қисмини  $y^2$  га бўлинганда йўқотилган, шуни қўшиб қўйдик.

**3.  $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$  – Риккати тенгламаси.**



Умумий ҳолда бу тенглама квадратураларда интегралланмайди, аммо агар унинг бирорта хусусий ечими  $y_1(x)$  маълум бўлса,  $y = y_1 + z(x)$  алмаштириш ёрдамида уни Бернулли тенгласига келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам  $y = y_1 + z(x)$  ни тенгламага қўйиб

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

тенгликни оламир.  $y_1(x)$  Риккати тенгласининг ечими эканлигидан  $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 = f(x)$  айний тенглик ўринли эканлигини эътиборга олсак, Бернулли тенгласини оламир:

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z = -q(x)z^2.$$

**Мисол.**  $3y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0$  тенгламани ечинг.

Ечими.  $y_1 = \frac{1}{x}$  бу тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас.

$$y_1 = \frac{1}{x} + z \text{ деб,}$$

$$y_1' = \frac{1}{x^2} + z' \text{ ва } 3\left(-\frac{1}{x^2} + z'\right) + \left(\frac{1}{x^2} + z\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 0 \text{ ёки } 3z' + 2\frac{z}{x} = -z^2$$

Бернулли тенгласини оламир.

$$3\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x}\frac{1}{z} = -1, \quad z \neq 0, \quad u = \frac{1}{z}, \quad u' = -\frac{z'}{z^2}, \quad -3u' + \frac{2}{x}u = -1,$$

$$3u' - \frac{2}{x}u = 1, \quad 3\frac{du}{u} = \frac{2}{x}dx, \quad 3\ln|u| = 2\ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$u^3 = Cx^2; \quad C \in R, \quad u = C(x)x^{2/3}, \quad u' = C'(x)x^{2/3} + C(x)\frac{2}{3}x^{-1/3},$$

$$3C'(x)x^{2/3} + 2C(x)x^{-1/3} - \frac{2}{x}C(x)x^{2/3} = 1, \quad C'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3},$$

$$C(x) = x^{1/3} + C_2; \quad u = x^{2/3}(x^{1/3} + C_2), \quad \frac{1}{2} = x + C_2x^{2/3} 0,$$

$$\frac{1}{y-1/x} = x + C_2x^{2/3}, \quad y - \frac{1}{x} = \frac{1}{x + C_2x^{2/3}},$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x + C_2x^{2/3}}, \quad y = \frac{1}{x}.$$

#### 4. Тўлиқ дифференциал тенглама.

Агар

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{5}$$

тенгламанинг чап томони бирорта  $F(x, y)$  функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dF(x, y)$$

бўлса, (5) тенглама **тўлиқ дифференциал тенглама** дейилади. У ҳолда (5) тенгламанинг умумий ечимини  $F(x, y) = C$  кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда  $C$  – ихтиёий ўзгармас. Шу ердан кўриниб турибдики, (5) тенгламани ечиш  $F(x, y)$  функцияни топа билиш эквивалент экан. Қачон (5) тенглама тўлиқ дифференциал  $dF(x, y) = 0$  тенглама бўлади ва  $F(x, y)$  қандай қилиб топилади, деган саволга Эйлер номи билан юритилувчи қуйидаги теорема жавоб беради.

**Теорема.**  $M(x, y)$ ,  $N(x, y)$  функциялар  $xOy$  текисликнинг  $D$  соҳасида аниқланган ва узлуксиз бўлиб, узлуксиз  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y}$  ва  $\frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда (5) тенгламанинг чап томони бирор  $F(x, y)$  функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиш учун  $D$  соҳанинг барча нукталари

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad (6)$$

тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Биз бу теореманинг исботига тўхталмаймиз.  $F(x, y)$  функциянинг қандай топилишини мисолларда тушунтирамиз.

**Мисол.**

*a)*  $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* (6) тенгликни текшириб кўрамиз:

$$M(x, y) = x + y, \quad N(x, y) = x - y, \quad \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 1.$$

Демак,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  шарт бажарилади, яъни берилган тенглама тўлиқ дифференциал тенглама

экан. Энди  $F(x, y)$  функцияни топишга ҳаракат қилайлик. Тушунарлики,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = (x + y)dx + (x - y)dy$$

тенглик ўринли. Бундан эса қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x + y, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x - y. \quad (7)$$

Бу тенгламаларнинг биринчиси  $x$  бўйича интеграллаб,

$$F(x, y) = \int (x + y)dx + \varphi(y) = \frac{x^2}{2} + xy + \varphi(y) \quad (8)$$

тенгликни оламиз ва ўз навбатида бундан  $y$  бўйича дифференциаллаб  $\frac{\partial F}{\partial y} = x + \varphi'(y)$  га эга

бўламиз. Иккинчи тенгликдан маълумки,  $\frac{\partial F}{\partial y} = x - y$ , шунинг учун  $x + \varphi'(y) = x - y$ . Бу

ердан  $\varphi'(y) = -y$  ва  $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C$ .  $\varphi(y)$  ни (8) ифода ўрнига қўйиб,

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + C$$

ни оламиз. Демак, тенгламанинг ечими  $\frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} = C_1$  кўринишда бўлади.

$$b) (1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \text{ тенгламани ечинг.}$$

Ечими. (6) тенгликни текшириб кўрамиз:

$$M(x, y) = 1 + y^2 \sin 2x, \quad N(x, y) = -2y \cos^2 x,$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 2y \sin 2x, \quad \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2y \sin 2x.$$

Демак,  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$  шарт бажарилади, яъни берилган тенглама тўлиқ дифференциал тенглама

экан.  $F(x, y)$  ни топишга ҳаракат қилайлик. Юқорида кўрганимиздек,

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = (1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy$$

тенглик ўринли бўлгани учун

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + y^2 \sin 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y \cos^2 x.$$

Бу тенгламаларни иккинчисини  $y$  бўйича интеграллаб,

$$F(x, y) = -\int 2y \cos^2 x dy = -y^2 \cos^2 x + \varphi(x)$$

тенгликни оламиз (эътибор беринг,  $\varphi(x)$  – бу ерда аниқмас интеграл ҳосил бўладиган ихтиёрий ўзгармас  $C$  ўрнида келаяпти,  $x$  нинг функцияси бўлиб қолди, чунки интеграл остида икки ўзгарувчили

функция) ва ўз навбатида бундан  $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2 \sin 2x + \varphi'(x)$  ни оламиз. Маълумки, биринчи

тенгликка асосан  $\frac{\partial F}{\partial y} = 1 + y^2 \sin 2x$ , шунинг учун  $y^2 \sin 2x + \varphi'(x) = 1 + y^2 \sin 2x$ , бу

ердан  $\varphi'(x) = 1$  ва  $\varphi(x) = x + C$ .  $\varphi(x)$  ни ўрнига қўйиб,

$F(x, y) = -y^2 \cos^2 x + x + C$  ни оламиз. Демак, тенгламанинг ечими  $y^2 \cos^2 x - x = C$  кўринишда бўлади.

##### 5. Интегралловчи кўпайтирувчи.

(5) тенгламанинг чап томонини бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлмаса ҳам баъзан шундай  $\mu(x, y) \neq 0$  функцияни қийинчиликсиз кўрсатиш мумкин бўладики, (5) тенгламанинг ҳар иккала томонини унга кўпайтирганимизда янги тенгламанинг чап томонини тўлиқ дифференциал бўлиб қолади:

$$dF = \mu N dx + \mu M dy. \quad (9)$$

Бундай  $\mu(x, y)$  функция **интегралловчи кўпайтирувчи** дейилади. Шунинг ҳам эслатиб ўтиш керакки, интегралловчи  $\mu(x, y)$  кўпайтувчига кўпайтирилганда уни нолга айланттирувчи ортиқча хусусий ечимлар пайдо бўлиши мумкин. Уларни (5) тенгламага қўйиб кўриб, уни қаноатлантирмаса, чиқариб юборишга тўғри келади.

**Мисол.**  $ydy - (xdy + ydx)\sqrt{1+y^2} = 0$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* Кўриш мумкинки, тенгламани  $\mu = 1/\sqrt{1+y^2}$  га кўпайтирилса, чап томонида тўлиқ дифференциал ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам  $\mu = 1/\sqrt{1+y^2}$  га кўпайтириб,

$$ydy/\sqrt{1+y^2} - (xdy - ydx) = 0$$

тенгликни оламин, буни интеграллаб  $\sqrt{1+y^2} - xy = 0$  ечимини топамиз.

**6.** Албатта, аксарият кўп ҳолларда интегралловчи кўпайтувчи юқоридаги мисолдагидек осон топилавермайди. Умумий ҳолда интегралловчи кўпайтувчини топиш учун

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \quad (10)$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг камида битта нолдан фарқли хусусий ечимини топиш керак. Агар биз (10) тенгламани ёйиб, қулай ҳолга келтирсак,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu,$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{1}{\mu} \frac{\partial M}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \mu(x, y) \neq 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y} M - \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \mu(x, y) \neq 0$$

тенгламани оламин. Умумий ҳолда (11) хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани ечиш берилган дифференциал тенгламани ечишга қараганда қийинроқ бўлади. Шунга қарамасдан, баъзи ҳолларда (11) тенгламани хусусий ечимини топиб олишга қийинчиликсиз эришиш мумкин.

Ундан ташқари, агар (11) тенгламада  $\mu = \mu(x, y)$  функцияни фақат битта аргументининг функцияси деб қаралса, (масалан,

$$\mu = \mu(x+y), \quad \mu = \mu(x^2 + y^2), \quad \mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right), \quad \mu = \mu(x), \quad \mu = \mu(y)$$

ва ҳоказо) уни қийинчиликсиз интеграллаш мумкин бўлади ва изланаётган кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлиши учун шарт олинади. Шундай қилиб, маълум кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчини топиш мумкин бўлган тенгламалар синфи ажратилади.

Биз ҳозир (5) тенглама учун фақат  $y$  га боғлиқ бўлган  $\mu = \mu(y)$  интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлишини таъминлайдиган шарт келтириб чиқарамиз. Шу ҳол учун (11) тенгламани ёзайлик

$$\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y} M = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \mu(y) \neq 0,$$

бундан

$$\left[ \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right] / M, \quad M(x, y) \neq 0.$$

$y$  нинг узлуксиз функция деб қараб, қуйидагини оламин:

$$\ln|\mu| = \int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} dy + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0, \quad (12)$$

$$\mu(y) = Ce^{\int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M} dy}, \quad C \in R.$$

Демак, агар  $\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}$  фақат  $y$  нинг функцияси бўлса, (5) тенглама учун фақат  $y$  га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи мавжуд экан ва  $y$  (12) кўринишда бўлар экан.

Худи шунингдек, агар  $\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}$  фақат  $x$  нинг функцияси бўлса, (5) тенглама учун фақат  $x$  га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи мавжуд ва  $y$

$$\mu(y) = Ce^{\int \frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} dx} \quad (13)$$

кўринишда бўлади.

Юқоридагидек мулоҳаза билан (5) тенглама учун

$$\mu = \mu(x \pm y), \quad \mu = \mu(x^2 \pm y^2), \quad \mu = \mu(xy), \quad \mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right)$$

кўринишдаги интегралловчи кўпайтирувчилар мавжудлигини таъминлайдиган шартлар олиш мумкин.

**Мисол.**  $(x - xy)dx + (y - x^2)dy = 0$  тенгламанинг  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$

кўринишдаги интегралловчи кўпайтирувчиси борми?

*Ечим.*  $x^2 + y^2 = z$  деб белгилайлик. У ҳолда (11) тенглама  $\mu = \mu(x^2 + y^2) = \mu(z)$

бўлганда

$$2(My - Nx) \frac{d \ln|\mu|}{dz} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламадан

$$\ln|\mu| = \frac{1}{2} \int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{My - Nx} dz + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0$$

ёки

$$\mu = Ce^{\frac{1}{2} \int \frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{My - Nx} dz}, \quad C \in R. \quad (14)$$

Демак,  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$  кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлиши учун

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{My - Nx}$$

каср фақат  $x^2 + y^2$  нинг функцияси бўлиши керак экан. Шундай қилиб,

бизнинг мисолимизда

$$\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{My - Nx} = -\frac{3}{x^2 + y^2}$$

бўлгани учун  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$  кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчи мавжуд.

$$\mu = e^{-\frac{3}{2} \int \frac{dz}{z}} = z^{-3/2} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Берилган тенгламани  $\mu = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$  га кўпайтириб, уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{xdx + ydy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x(xdy - ydx)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Бу тўлиқ дифференциал тенгламани интеграллаб ечимини оламиз:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{-x^3 d(y/x)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad x \neq 0;$$

$$\int \frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\int \frac{d(y/x)}{(1 + y^2/x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{y/x}{(1 + y^2/x^2)^{1/2}} + C_1;$$

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + C_1; \quad y - 1 = C_1(x^2 + y^2)^{1/2};$$

$$x^2 + y^2 = C(y - 1)^2, \quad 1/C_1^2 = C.$$

Тенгламани ечинг

63.  $y' + y = e^{-x}$

65.  $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

67.  $x' - x = \sin t$

69.  $x^2 y' + 2xy = \ln x$

71.  $y' \sin x - y = 1 - \cos x$

73.  $y' - \frac{xy}{1 - x^2} = \frac{1}{1 - x^2}$

75.  $y' + 2y = y^2 e^x$

77.  $xy' + y = y^2 \ln x$

79.  $x' = xy + x^2 y^3$

81.  $y' - \frac{3}{2x} y = \frac{3}{2} x \sqrt[3]{y}$

83.  $\int_0^x xy \, dx = x^2 + y$

85.  $x \int_0^x (x - t) y(t) \, dt = 2x + \int_0^x y(t) \, dt$

64.  $y' + 3y/x = x$

66.  $y' - y \operatorname{tg} x = 2 \sin x$

68.  $dx + (x - y) dy = 0$

70.  $2xy' - y + x = 0$

72.  $y'(1 + x^2) - xy = \sqrt{1 + x^2}$

74.  $(y + xy^2) dx - dy = 0$

76.  $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$

78.  $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

80.  $(2x^2 y \ln y - x) y' = y$

82.  $\frac{dx}{dy} - \frac{1}{\sqrt{y - y}} x = -\frac{1}{\sqrt{y - y}} x^2$

84.  $y = \int_0^x y \, dt + x + 1$

86.  $\int_0^x (x - t) y(t) \, dt = 2x + \int_0^x y(t) \, dt$

Коши масаласининг ечимини топинг

87.  $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e$
88.  $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}, \quad x(0) = -1$
89.  $y' = \frac{y}{x} - \frac{2 \ln x}{x}, \quad y(1) = 1$
90.  $(2xy + \sqrt{y}) dy + 2y^2 dx = 0, \quad y(-1/2) = 1$
91.  $y' = \frac{y}{x} - \frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$
92.  $dx + (2x + \sin 2y - 2 \cos^2 y) dy = 0, \quad y(-1) = 0$
93.  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3$
94.  $(2y - x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y) dy = dx, \quad y(0) = \pi$
95.  $(1 - x^2) y' + xy = 1, \quad y(0) = 1$
96.  $y dx + (2x - 2 \sin^2 y - y \sin 2y) dy = 0, \quad y(3/2) = \pi/4$
97.  $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}$
98.  $y' - y \operatorname{tg} x = 2/3 \cdot y^4 \sin x, \quad y(0) = 1$
99.  $2y' - 3y \cos x = -e^{2x} (2 + 2 \cos x) y^{-1}, \quad y(0) = 1$
100.  $2y' \ln x + y/x = y^2 \cos x, \quad y(1) = 1$
101.  $y' + \frac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \sin x, \quad y(0) = 1$

**Риккати тенгламасини ечинг**

102.  $y' - y^2 + (x^2 + 1)y - 2x = 0, \quad y_1 = x^2 + 1$
103.  $y' + xy^2 - x^3 y - 2x = 0, \quad y_1 = x^2$
104.  $(x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0, \quad y_1 = x$
105.  $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2, \quad y_1 = x + 2$
106.  $y' + y^2 = x^2 + 2x$

**Тўлиқ дифференциал тенгламани ечинг**

107.  $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0$

$$108. \left( 3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y} \right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0$$

$$109. (3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0$$

$$110. (2x - 1 - y/x^2) dx - (2y - 1/x) dy = 0$$

$$111. (y^2 + y \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0$$

**Тенгламани интегралловчи кўпайтувчини топиш усулидан  
фойдаланиб ечинг**

$$112. (2xy^2 - y) dx + (y^2 + x + y) dy = 0$$

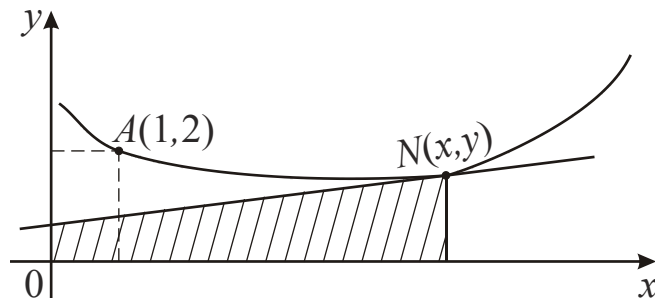
$$113. (xy^2 - y^3) dx + (1 - xy^2) dy = 0$$

$$114. y' \cos x = y \sin x + \cos^2 x$$

$$115. (y^2 - 6x) y' + 2y = 0$$

$$116. x^2 dx - (2xy + 3) dy = 0$$

117. Берилган  $A(1;2)$  нуктадан ўтувчи шундай эгри чизикнинг тенгламасини тузингки,  $PN$  ординатали  $N(x,y)$  нуктасидан ўтказилган уринма  $OY$  ўқнинг  $T$  нуктаси билан кесишгунча давом еттирилганда ҳосил бўладиган  $OTNP$  трапециянинг юзи ўзгармас бўлиб, 1 га тенг бўлсин (9-расмга қара).



9-расм.

118. Ихтиёрий уринмасининг ордината ўқидан ажратган кесамаси, уриниш нуктаси абсциссасининг квадратага тенг бўлган  $(1;-1)$  нуктадан ўтувчи чизикнинг тенгламасини ёзинг.

$$119. dx/dy + a(t)x = f(x) \text{ тенгламада } a(t) \geq c > 0, t \rightarrow +\infty \text{ да } f(t) \rightarrow 0$$

бўлсин. Бу тенгламанинг ҳар бир ечими  $t \rightarrow +\infty$  да нолга интилиши исботланган.

120. Агар  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$ ,  $\varphi(x, y)$  бир жинсли функциялар бўлиб ва  $f_1, f_2$  лар бир хил тартибли бўлса,

$$f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy + \varphi(x, y)(x dy - y dx) = 0$$

тенгламани  $z = y/x$  алмаштириш ёрдамида Бернулли тенгламага келтириш мумкинлигини исботланг.

121. Идишда 100 л аралашма бўлиб, унда 10 кг туз бор. Идишга ҳар минутда 5 л сув қуйилади ва олдиндан тоза сув билан тўлдириб қўйилган 100 л идишга аралашма худди шу тарзда оқиб ўтади. Аралашманинг ортиқчаси иккинчи идишдан оқиб чиқиб кетади. Қачон иккинчи идишдаги тузнинг миқдори энг кўп бўлади? У нимага тенг?

122. Сигими  $C$  га тенг бўлган конденсатор кучланиши  $E$  ва қаршилиги  $R$  бўлган занжирга уланган. Конденсаторнинг улангандан кейинги  $t$  моментдаги заряди аниқлансин.



### Синов учун савол ва топшириқлар

1. Қандай тенгламани чизикли тенглама дейилади? Коши масаласининг қўйилишини ифодаланг.
2. Чизикли тенглама эркли ўзгарувчини ихтиёрий  $x = \varphi(t)$ , номаълум функцияни ихтиёрий чизикли  $y = \alpha(x)z + \beta(x)$ , ( $\alpha(x) \neq 0$ ) алмаштириш натижасида тенгламанинг чизиклилигича қолишини исботланг.
3. Чизикли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ихтиёрий ечими формуласини келтириб чиқаринг.
4. Чизикли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг битта  $y_1(x)$  хусусий ечими ёки иккита  $y_1(x)$  ва  $y_2(x)$  хусусий ечимлари маълум бўлганда унинг умумий ечимларини топинг.
5. Бернулли тенгламаси қандай ечилади?
6. Риккати тенгламаси қандай кўринишга эга? Агар Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими маълум бўлса, унинг бошқа ечимлари қандай топилади?
7. Қандай шартлар бажарилганда  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  тенглама тўлиқ дифференциал тенглама бўлади? Бу тенглама қандай ечилади?
8. Интегралловчи кўпайтувчилар усулининг ғояси нимадан иборат? Қандай шартлар бажарилганда:
  - а) берилган  $\omega(x, y)$  функцияга;
  - б) фақат  $x$  га;
  - в) фақат  $y$  га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлади?
9.  $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1$ ,  $y_1 = 1/x$  Риккати тенгламасини ечинг.
10.  $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$  тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топинг.

### 1. Тенгламани ечинг

- |                                                      |                                                |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1.1. $xy' - 2y = x^3 e^x$                            | 1.2. $y' + y \operatorname{tg} x = \sec x$     |
| 1.3. $xy' + y - e^x = 0$                             | 1.4. $y' - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$ |
| 1.5. $y' + y \cos x = 1/2 \sin 2x$                   | 1.6. $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$   |
| 1.7. $y' - y/(x+2) = x^2 + 2x$                       | 1.8. $y' - y/(x+1) = e^x (x+1)$                |
| 1.9. $y' = y/x + x \sin x$                           | 1.10. $y' + y/x = \sin x$                      |
| 1.11. $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$ | 1.12. $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5$            |
| 1.13. $y' + y/x = e^x (x+1)/x$                       | 1.14. $y' = y/x - 2 \ln x/x$                   |
| 1.15. $y' = y/x - 12/x^3$                            | 1.16. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$       |
| 1.17. $(1-x^2)y' + xy = 1$                           | 1.18. $y' + \frac{xy}{2(1+x^2)} = \frac{x}{2}$ |
| 1.19. $y' - 2/(x+1)y = e^x (x+1)^2$                  | 1.20. $y' + 2xy = x e^{-x^2} \sin x$           |

## 2. Коши масаласининг ечинг

- 2.1.  $dx = (\sin y + 3 \cos y + 3x)dy$ ,  $y(e^{\pi/2}) = \pi/2$
- 2.2.  $e^{y^2} (dx - 2xydy) = ydy$ ,  $y(0) = 0$
- 2.3.  $(x \cos^2 y - y^2)y' = y \cos y$ ,  $y(\pi) = \pi/4$
- 2.4.  $2(y^3 - y + xy)dy = dx$ ,  $y(-2) = 0$
- 2.5.  $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy$ ,  $y(1/4) = 2$
- 2.6.  $2y\sqrt{y}dx - (6x\sqrt{y} + 7)dy = 0$ ,  $y(4) = 1$
- 2.7.  $(2 \ln y - \ln^2 y)dy = ydx - xdy$ ,  $y(4) = e^2$
- 2.8.  $y' = y/(2y \ln y + y - x)$ ,  $x(1) = 1/2$
- 2.9.  $y^2(y^2 + 4)dx + 2xy(y^2 + 4)dy = 2dy$ ,  $y(\pi/8) = 2$
- 2.10.  $2y^2dx + (x + e^{1/y})dy = 0$ ,  $y(1) = 1$
- 2.11.  $(x + \ln^2 y - \ln y)y' = y/2$ ,  $y(2) = 1$
- 2.12.  $2(\cos^2 y \cos 2y - x)y' = \sin 2y$ ,  $y(3/2) = 5\pi/4$
- 2.13.  $y' = 1/(x \cos y + \sin 2y)$ ,  $x(0) = -1$
- 2.14.  $(2xy + \sqrt{y})dy + 2y^2dx = 0$ ,  $y(-1/2) = 1$
- 2.15.  $dx + (2x + \sin 2y - 2 \cos^2 y)dy = 0$ ,  $y(-1) = 0$
- 2.16.  $(2y - x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y)dy = 0$ ,  $y(0) = \pi$
- 2.17.  $ydx + (2x - 2 \sin^2 y - y \sin 2y)dy = 0$ ,  $y(3/2) = \pi/4$
- 2.18.  $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2 \sin^2 y + 2)dy$ ,  $y(-1/2) = \pi/4$
- 2.19.  $\operatorname{ch} y dx = (1 + x \operatorname{sh} y)dy$ ,  $y(1) = \ln 2$
- 2.20.  $2(x + y^4)y' = y$ ,  $y(-2) = -1$

## 3. Бернулли тенгламасининг берилган шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг

- 3.1.  $y + xy = (1 + x)e^{-x}y^2$ ,  $y(0) = 1$
- 3.2.  $xy' + y = 2y^2 \ln x$ ,  $y(1) = 1/2$
- 3.3.  $y' + 4x^3y = 4(x^3 + 1)e^{-4x}y^2$ ,  $y(0) = 1$
- 3.4.  $xy' = -y^2(\ln x + 2) \ln x$ ,  $y(1) = 1$

- 3.5.  $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2, \quad y(0) = 2$   
 3.6.  $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3$   
 3.7.  $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1$   
 3.8.  $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3), \quad y(0) = -1$   
 3.9.  $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1$   
 3.10.  $2y' + 3y \cos x = e^{2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}, \quad y(0) = 1$   
 3.11.  $2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x) y^{-1} e^{2x}, \quad y(0) = 2$   
 3.12.  $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$   
 3.13.  $2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2$   
 3.14.  $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x, \quad y(1) = 1/\operatorname{sh} 1$   
 3.15.  $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2, \quad y(0) = 2$   
 3.16.  $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, \quad y(0) = 1$   
 3.17.  $y' + y = e^{x/2} \sqrt{y}, \quad y(0) = 9/4$   
 3.18.  $4xy' + 3y = e^{-x} x^4 y^5, \quad y(0) = 1$   
 3.19.  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \cos^2 x = 0, \quad y(0) = 1$   
 3.20.  $y' - y \operatorname{tg} x + y^2 \sin^2 x = 0, \quad y(0) = 1$

#### 4. Риккати тенгламасини ечинг

- 4.1.  $y'e^{-x} + y^2 - 2ye^x = 1 - e^{2x}, \quad y_1 = e^x$   
 4.2.  $y' + y^2 - 2y \sin x + \sin^2 x - \cos x = 0, \quad y_1 = \sin x$   
 4.3.  $xy' - y^2 + (2x+1)y = x^2 + 2x, \quad y_1 = x$   
 4.4.  $x^2 y' = x^2 y^2 + xy - 1, \quad y_1 = -1/x$   
 4.5.  $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x, \quad y_1 = e^x$   
 4.6.  $y' + y^2 = 2x^{-2}$   
 4.7.  $4y' + y^2 - 4x^{-2} = 0$   
 4.8.  $2y' + (xy - 2)^2 = 0$   
 4.9.  $y' = y^2 - xy - x$   
 4.10.  $y' + y^2 = -1/4x^2$   
 4.11.  $y' = y^2 + 1/x^2 + y/x$   
 4.12.  $y' - y^2 + y \sin x - \cos x = 0, \quad y_1 = \sin x$

- 4.13.  $y' + 2y^2 = 6/x^2$   
 4.14.  $y' + ay(y-x) = 1, \quad y_1 = x$   
 4.15.  $x^2(y' + y^2) + 4xy + 2 = 0, \quad y_1 = -2/x$   
 4.16.  $y' + y^2 \sin x = 2 \sin x / \cos^2 x, \quad y_1 = 1/\cos x$   
 4.17.  $x(2x-1)y' + y^2 - (4x+1)y + 4x = 0, \quad y_1 = 1$   
 4.18.  $y' = 1/3 y^2 + 2/3 x^2$   
 4.19.  $y' + y^2 + y/x - 4/x^2 = 0$   
 4.20.  $xy' - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x$

### 5. Тўлиқ дифференциал тенгламани ечинг

- 5.1.  $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$   
 5.2.  $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$   
 5.3.  $(\sin 2x - 2 \cos(x+y))dx - 2 \cos(x+y)dy = 0$   
 5.4.  $(xy^2 + x/y^2)dx + (x^2y - x^2/y^3)dy = 0$   
 5.5.  $(1/x^2 + 3y^2/x^4)dx - 2y/x^3 dy = 0$   
 5.6.  $y/x^2 \cos(y/x)dx - (1/x \cos(y/x) + 2y)dy = 0$   
 5.7.  $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0$   
 5.8.  $\frac{1+xy}{x^2y}dx + \frac{1-xy}{y^2x}dy = 0$   
 5.9.  $(xe^x + y/x^2)dx - 1/x dy = 0$   
 5.10.  $(10xy - 1/\sin y)dx + (5x^2 + x \cos y / \sin^2 y - y^2 \sin y^3)dy = 0$   
 5.11.  $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} = 0$   
 5.12.  $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$   
 5.13.  $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$   
 5.14.  $xe^{y^2}dx + (x^2ye^{y^2} + tg^2 y)dy = 0$   
 5.15.  $(\cos(x+y^2) + \sin x)dx + 2y \cos(x+y^2)dy = 0$

$$5.16. (\sin y + y \sin x + 1/x) dx + (x \cos y + \cos x + 1/y) dy = 0$$

$$5.17. (1 + 1/y e^{x/y}) dx + (1 - x/y^2 e^{x/y}) dy = 0$$

$$5.18. \frac{(x-y) dx + (x+y) dy}{x^2 + y^2} = 0$$

$$5.19. x dx + y dy + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$$

$$5.20. 2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$$

**6. Тенгламани интегралловчи кўпайтувчи усулидан  
фойдаланиб ечинг**

$$6.1. y dx - x dy + \ln x dx = 0$$

$$6.2. (x^2 \cos x - y) dx + x dy = 0$$

$$6.3. y dx - (x + y^2) dy = 0$$

$$6.4. y \sqrt{1-y^2} dx + (x \sqrt{1-y^2} + y) dy = 0$$

$$6.5. (y^2 - 2x - 2) dx + 2y dy = 0$$

$$6.6. y^2 dx + (xy - 1) dy = 0$$

$$6.7. 2y + xy^3 dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$$

$$6.8. (1 + x^2 y) dx + (x + x^2 y^2) dy = 0$$

$$6.9. (x^2 + y) dx - x dy = 0$$

$$6.10. (x^2 + y^2)(x dy - y dx) = (a + x) x^4 dx$$

$$6.11. (xy^2 + y) dx - x dy = 0$$

$$6.12. (2xy^2 - y) dx + (y^2 + x + y) dy = 0$$

$$6.13. (1 - x^2 y) dx + x^2 (y - x) dy = 0$$

$$6.14. (x^2 + y^2 + 2x) dx + 2y dy = 0$$

$$6.15. (x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0$$

$$6.16. (x/y + 1) dx + (x/y - 1) dy = 0$$

$$6.17. y/x dx + (y^3 \ln x) dy = 0$$

$$6.18. (\ln y + 2x - 1) y' = 2y$$

$$6.19. (x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$$

$$6.20. dy/dx = 2xy - x^3 + x$$

#### 7. Тенгламани ечинг

$$7.1. x^2 y^3 + y + (x^3 y^2 - x) y' = 0$$

$$7.2. (y + x^2) dy + (x - xy) dx = 0$$

$$7.3. \left( 2y + \frac{1}{(x+y)^2} \right) dx + \left( 3y + x + \frac{1}{(x+y)^2} \right) dy = 0$$

$$7.4. (2x^3 + 3x^2 y + y^2 - y^3) dx + (2y^3 + 3y^2 x + x^2 - x^3) dy = 0$$

$$7.5. (x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$$

$$7.6. x \left( 4 + \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dx - y \left( 4 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy = 0$$

$$7.7. \omega(x^2 + y^2) x dx + \omega_1(x^2 + y^2) y dy = 0$$

$$7.8. x dx + y dy + (x^2 + y^2) x^2 dx = 0$$

$$7.9. y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$7.10. (y^2 + x^2 + x) y' - y = 0$$

$$7.11. x dy + y dx - xy^2 \ln x dx = 0$$

$$7.12. (2x^3 y^3 - x) y' - 2x^3 y^3 - y = 0$$

$$7.13. (2xy^3 - x^4) y' + y^4 + 2yx^3 = 0$$

$$7.14. (x^2 + y^2 + x) y' + y = 0$$

$$7.15. x(xy - 3) y' + xy^2 - y = 0$$

$$7.16. x^3 y' - y^2 - x^2 y = 0$$

$$7.17. (x^2 + x^2 y + 2xy - y^2 - y^3) dx + (y^2 + y^2 x + 2xy - x^2 - x^3) dy = 0$$

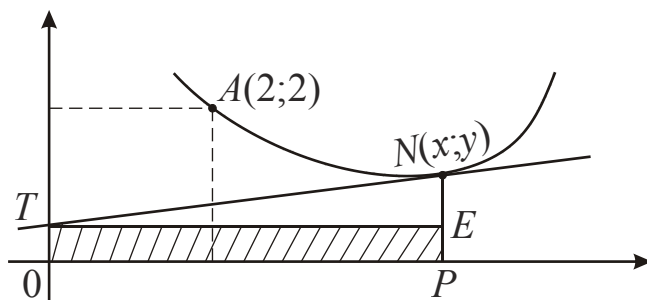
$$7.18. (2x^3 y^2 - y) dx - (2y^3 x^2 - x) dy = 0$$

$$7.19. xy^2 dx + (x^2 y - x) dy = 0$$

$$7.20. x^2 y^3 + y + (x^3 y^2 - x) y' = 0$$

#### 8. Масалани ечинг

8.1. Берилган  $A(2;2)$  нуктадан ўtuvчи шундай эгри чизикнинг тенгламасини тузингки, унинг  $PN$  ординатали ихтиёрий  $N(x,y)$  нуктасидан ўтказилган уринма  $OY$  ўкининг  $T$  нуктаси билан кесишгунча давом эттирилганда ҳосил бўладиган  $OPET$  тўғри тўртбурчакнинг юзи ўзгармас бўлиб, 1 га тенг бўлсин (10-расмга қаранг).

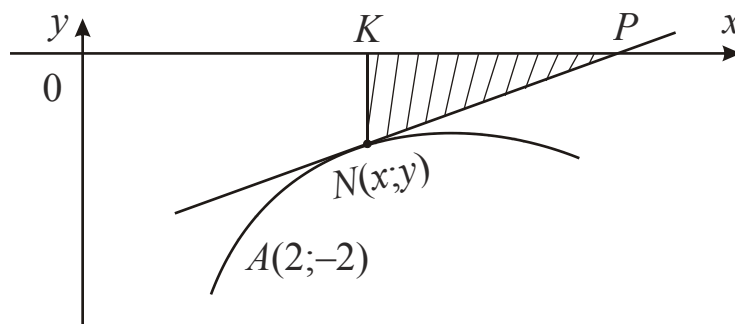


10-расм

8.2. Уринмаси, абсцисса ўки ва координата бошидан уриниш нуктасигача бўлган кесма билан чегараланган учбурчак юзи ўзгармас  $a$  га тенг бўладиган эгри чизикни топинг.

8.3.  $y^2 = Ce^x + x + 1$  чизиклар оиласига ортогонал траекторияларни топинг.

8.4. Ихтиёрий  $N(x,y)$  нуктадан ўтказилган  $NP$  уринма,  $OX$  ўки ва  $N(x,y)$  нуктанинг ординатаси ҳосил қилган учбурчакнинг юзи 1 га тенг бўлган ва  $A(1,-2)$  нуктадан ўtuvчи эгри чизикнинг тенгламасини топинг (11-расмга қаранг).



11-расм

8.5.  $2y^2 = Ce^x + 2x + 1$  чизиклар оиласига ортогонал траекторияларни топинг.

8.6. Координаталар бошидан ўtuvчи шундай эгри чизик тенгламасини тузингки, унинг исталган нуктасидан ўтказилган нормалининг шу нуктадан  $OX$  ўкигача бўлган кесмасининг ўртаси  $y^2 = x$  параболада ётсин.

8.7. Координата ўқлари, уринма ва уриниш нуктасининг ординатаси билан чегараланган трапеция юзи ўзгармас  $3a^2$  га тенг бўладиган эгри чизикни топинг.

8.8.  $y' \sin x = 2(y + \cos x)$  тенгламанинг  $x \rightarrow \pi/2$  да чегараланган бўладаган ечимини топинг.

8.9.  $xy' + ay = 1/(1+x^2)$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$  бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими  $x \rightarrow 0$  да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг  $x \rightarrow 0$  даги лимитини топинг.

8.10.  $xy' + ay = x^2/(1+x^2)$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$  бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими  $x \rightarrow 0$  да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг  $x \rightarrow 0$  даги лимитини топинг.

8.11.  $xy' + ay = \sin x/x$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$  бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими  $x \rightarrow 0$  да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг  $x \rightarrow 0$  даги лимитини топинг.

8.12.  $xy' + ay = 1/(1 + \cos^2 x)$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$  бўлсин. Бу тенгламанинг

фақат битта ечими  $x \rightarrow 0$  да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг  $x \rightarrow 0$  даги лимитини топинг.

8.13.  $xy' + ay = \operatorname{tg} x/x$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$  бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими  $x \rightarrow 0$  да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг  $x \rightarrow 0$  даги лимитини топинг.

8.14.  $xy' + ay = f(x)$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$ ,  $x \rightarrow 0$  да  $f(x) \rightarrow b$  бўлсин.

Бу тенгламанинг фақат битта ечими  $x \rightarrow 0$  да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг  $x \rightarrow 0$  даги лимитини топинг.

8.15.  $xy' + ay = 4/(1 + x^2)$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$  бўлсин. Бу тенгламанинг

ҳамма ечимлари  $x \rightarrow 0$  да бир хил чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг ва бу лимитни топинг.

8.16.  $xy' + ay = 1/(1 + \sin^2 x)$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$  бўлсин. Бу тенгламанинг

ҳамма ечимлари  $x \rightarrow 0$  да бир хил чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг ва бу лимитни топинг.

8.17.  $xy' + ay = f(x)$  тенгламада  $a = \text{const} > 0$ ,  $x \rightarrow 0$  да  $f(x) \rightarrow b$  бўлсин.

Бу тенгламанинг ҳамма ечимлари  $x \rightarrow 0$  да бир хил чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг ва бу лимитни топинг.

8.18.  $dx/dt + x = f(t)$  тенгламада  $|f(t)| < M$ ,  $-\infty < t < \infty$  бўлса, унинг  $-\infty < t < \infty$  да чегараланган битта ечимга эгалигини кўрсатинг ва бу ечимни топинг. Шунаиндек,  $f(t)$  функция даврий бўлганда мос ечимнинг даврий эканлигини кўрсатинг.

8.19.  $xy' - (2x^2 - 1)y = x^2$  тенгламанинг фақат битта ечими  $x \rightarrow 0$  да чекли лимитга интилишини кўрсатинг. Бу ечимни интеграл орқали ифодаланг ва унинг  $x \rightarrow \infty$  даги лимитини топинг.

8.20.  $y' = 2y \cos^2 x - \sin x$  тенгламанинг даврий ечимини топинг.

## 5-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР. ИЗОКЛИНАЛАР ВА КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ МЕТОДЛАРИ

1. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1)$$

Бу тенгламани қуйидаги усуллар билан ечиш мумкин.

I. Агар (1) тенгламани  $y'$  га нисбатан ечишга имконият бўлса,  $y' = f_i(x, y)$ ,  $i = 1, 2, \dots$  кўринишдаги бир нечта тенгламани оламир. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини ечиб (1) тенгламанинг ечимларини топамиз.

**Мисол.**  $y'^2 - 2xy' = 8x^2$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* Бу тенгламани  $y'$  га нисбатан ечиш мумкин.

$$y' = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 32x^2}}{2} = \frac{2x + 6x}{2},$$

бундан  $y' = 4x$  ва  $y' = -2x$  тенгламаларни оламир. Ҳосил бўлган тенгламаларни ечайлик:

$y = 2x^2 + C$ ,  $y = -x^2 + C$ . Иккаласи биргаликда берилган тенгламанинг ечимини беради.

2. (1) тенгламани параметрик кўринишга ўтказамиз:



$$x = \varphi(u, v), \quad y = \phi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

$dy = y'dx$  боғланишни эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} du + \frac{\partial \phi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right],$$

бу тенгламани  $dv/du$  га нисбатан ечиб оламиз:

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \phi}{\partial u}}{\frac{\partial \phi}{\partial v} - \chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}}. \quad (2)$$

Натижада, биз ҳосилага нисбатан ечилган тенгламага эга бўлдик, шу илан тенглама аввал кўрилган тенгламаларнинг бирига келди. Лекин (2) тенглама кўпинча квадратураларда интегралланмайди.

Қуйидаги хусусий ҳолларни алоҳида кўриб чиқайлик.

3. (1) тенглама

$$F(y') = 0 \quad (3)$$

кўринишда бўлиб,  $F(P) = 0$  тенгламанинг камида битта  $p = k_i$  ҳақиқий ечими мавжуд бўлсин.

(3) тенглама  $x$  ва  $y$  га боғлиқ бўлмагани учун  $k_i$  ўзгармас.  $y' = k_i$  тенгламани интеграллаб,

$y = k_i x + C$  ни, бундан эса  $k_i = \frac{y-C}{x}$  оламиз.  $k_i \leftrightarrow F(p) = 0$  тенгламанинг ечими

бўлгани учун  $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$  берилган тенгламанинг интеграли бўлади.

**Мисол.**  $y'^3 - y'^2 + y' - 1 = 0$  тенгламани ечинг.

*Ечими.*  $y'^2(y' - 1) + (y' - 1) = 0$ ,  $(y' - 1)(y'^2 + 1) = 0$  бўлгани учун  $p = 1$

$F(p) = 0$  нинг ечими бўлади. Бундан  $p = 1$  тенгламани оламиз ва буни ечиб  $y = x + C$  га эга бўламиз. Демак,

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3 - \left(\frac{y-C}{x}\right)^2 + \left(\frac{y-C}{x}\right) - 1 = 0$$

берилган тенгламанинг интеграли бўлади.

4. (1) тенглама

$$F(x, y') = 0 \quad (4)$$

кўринишда бўлсин. Агар бу тенгламани  $y'$  га нисбатан ечиб олиш қийин бўлса,  $t$  параметр киритиш ва

(4) тенгламани иккита тенгламага алмаштириш маъкул:  $x = \varphi(t)$  ва  $y' = \varphi(t)$ .  $dy = y'dx$

бўлгани учун бизнинг ҳолимизда  $dy = \phi(t)\varphi'(t)dt$  бу ердан  $y = \int \phi(t)\varphi'(t)dt + C$  ва демак, ечим параметрик кўринишда қуйидагича бўлади:

$$x = \varphi(t),$$

$$y = \int \phi(t)\varphi'(t)dt + C.$$

Агар (4) тенгламани  $x$  га нисбатан ечиш мумкин бўлса,  $x = \varphi(y')$ ,  $t$  параметр сифатида доим  $y'$  ни олган маъкул:  $y' = t$ . У ҳолда

$$x = \varphi(t), \quad dy = y'dx = t\varphi'(t)dt, \quad y = \int t\varphi'(t)dt + C$$

бўлиб, ечим

$$x = \varphi(t), \quad y = \int t\varphi'(t)dt + C$$

кўринишда бўлади.

**Мисоллар.** а)  $x = y'^3 + y'$  тенгламани ечинг.

Ечими.  $y' = t$  параметрни киритайлик, у ҳолда

$$x = t^3 + t, \quad dy = y'dx = t(3t^2 + 1)dt, \quad y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C.$$

Демак,  $x = t^3 + t$ .

$$y = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C$$

тенгламанинг параметрик кўринишдаги интеграл чизиклари.

б)  $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$  тенгламани ечинг.

Ечими.  $y' = t$  параметр киритамиз. У ҳолда

$$x = t\sqrt{t^2 + 1}, \quad dy = y'dx = t\sqrt{t^2 + 1} + t^2/\sqrt{t^2 + 1} dt.$$

Бундан эса иккинчи тенгликни интеграллаб,

$$x = t\sqrt{t^2 + 1},$$

$$y = 1/3 \cdot (2t^2 - 1)\sqrt{t^2 + 1} + C$$

берилган тенгламанинг интеграл чизикларини параметрик кўринишини оламир.

в)  $y/\sqrt{1 + y'^2} = 1$  тенгламани ечинг.

Ечими.  $y' = sh t$  параметрни киритамиз. У ҳолда

$$y = ch t, \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{sh t dt}{sh t} = dt, \quad x = t + C.$$

$y = ch t$  ва  $x = t + C$  дан  $t$  ни йўқотсак,  $y = ch(x - C)$  ечимни оламир.

**5.** Агар (1) тенгламани  $y$  га нисбатан ечиш қулай бўлса, параметр сифатида  $x$  ва  $y'$  ларни олган маъқул. Ҳақиқатан ҳам (1) тенгламанинг кўриниши

$$y = f(x, y') \tag{5}$$

бўлсин. У ҳолда  $x$  ва  $y$  лар сифатида  $x$  ва  $y'$  ларни олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y = f(x, p), \quad dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial p} dp$$

ёки

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}, \\ p &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx}. \end{aligned} \tag{6}$$

(6) ни интеграллаб,  $\Phi(x, p, C) = 0$ , ни оламир.

$$\Phi(x, p, C) = 0,$$

$$y = f(x, p)$$

биргаликда параметрик кўринишдаги интеграл чизиклар оиласини беради.

6. Агар (1) тенглама  $x$  га нисбатан осон ечилса, яъни  $x = f(y, y')$  бўлса, параметр сифатида  $y$  ва  $y' = p$  ларни олган маъкул.  $dy = y'dx$  эканлигини эътиборга олсак,

$$dy = p \left[ \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial p} dp \right]$$

ёки

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dy} \quad (7)$$

тенгликни оламиз. (7) ни интеграллаб,  $\Phi(x, p, C) = 0$  ни оламиз.  $\Phi(x, p, C) = 0$  ва  $x = f(y, p)$  биргаликда берилган тенгламанинг интеграл чизиклари оиласини беради.

7.  $y = x\varphi(y') + \phi(y')$  – Лагранж тенгламаси. Бу тенгламани  $x$  бўйича дифференциаллаб,  $y' = p$  десак,

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \phi'(p) \frac{dp}{dx} \quad (8)$$

ёки

$$\left[ p - \varphi(p) \right] \frac{dp}{dx} = x\varphi'(p) + \phi'(p). \quad (9)$$

Бу чизикли дифференциал тенглама ва қийинчиликсиз интегралланади (3-§, 1 п. га қаранг). (9) нинг интеграли  $\Phi(x, p, C) = 0$  ва  $y = x\varphi(p) + \phi(p)$  биргаликда Лагранж тенгламасини беради.

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad (10)$$

$$y = x\varphi(p) + \phi(p).$$

Фақат биз (8) дан (9) га ўтаётганда тенгликни  $dp/dx$  га бўлиш чоғида  $p = p_i$  ўзгармас ечимларни (агар улар мавжуд бўлса) йўқотаяпмиз,  $dp/dx \equiv 0$ .  $p$  ни ўзгармас десак,  $y$  (8) ни қаноатлантириши учун албатта  $p - \varphi(p) = 0$  тенгламани қаноатлантириши керак, чунки  $dp/dx \equiv 0$ . Демак, агар  $p - \varphi(p) = 0$  тенгламанинг ҳақиқий  $p = p_i$  ечимлари мавжуд бўлса, (10) га унинг тўлиқ бўлиши учун  $y = x\varphi(p_i) + \phi(p_i)$  ни қўшиб қўйиш керак. Шундай қилиб, умуман интеграл чизиклар

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad (11)$$

$$y = x\varphi(p) + \phi(p)$$

ёки

$$y = x\varphi(p_1) + \phi(p_1)$$

дан иборат бўлади.

**Мисол.**  $y = 2xy' - 4y'^3$  тенгламани ечинг.

*Ечими.*  $y' = p$ ,  $y = 2xp - 4p^3$  деб, охирги тенгликни дифференциалласак,

$$p = 2p + 2x \frac{dp}{dx} - 12p^2 \frac{dp}{dx}$$

ифодани оламир ва  $\frac{dp}{dx}$  га бўлиб, чирик тенгламага эга бўларим:

$$p \frac{dp}{dx} + 2x = 12p^2.$$

Бу тенгламани интеграллаб,  $x = 3p^2 + C/p^2$  ни оларим. Демак, интеграл чириклар синфи

$$x = 3p^2 + C/p^2,$$

$$y = 2xp - 4p^3 \text{ ёки } y = 2p^3 + 2C/p.$$

$\frac{dp}{dx}$  га бўлганимизда  $p - \phi(p) = 0$  тенгламанинг илдизлари бўлган  $p_i$  лар учун  $p = p_i$  ечим йўқотилади. Демак,

$$x = 3p^2 + C/p^2, \quad y = 2p^3 + 2C/p, \quad y = 0$$

Лагранж тенгламасининг ечимини беради.

8.  $y = xy' + \phi(y')$  – Клеро тенгламаси.  $y' = p$  деб олсак,  $y = xp + \phi(p)$  ни оларим. Дифференциаллаб,

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \phi'(p) \frac{dp}{dx}$$

ёки

$$(x + \phi'(p)) \frac{dp}{dx} = 0$$

тенгликни оларим. Бундан  $\frac{dp}{dx} = 0$  ёки  $x + \phi'(p) = 0$  келиб чиқади.

Биринчи ҳолда  $p = C$  бўлиб,  $y = xp + \phi(p)$  дан

$$y = Cx + \phi(C) \tag{12}$$

интеграл чириклар оиласини оларим.

Иккинчи ҳолда ечим

$$y = xp + \phi(p) \text{ ва } x + \phi'(p) = 0 \tag{13}$$

тенгламалар билан аниқланади.

Қийинчиликсиз шунга ишонч ҳосил қилиш мумкинки, (13) тенгликлар билан аниқланадиган интеграл чирик (12) интеграл чириклар оиласининг ўрамаси бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, қандайдир  $\Phi(x, p, C) = 0$  чириклар оиласининг ўрамаси

$$\Phi(x, p, C) = 0, \quad \partial\Phi/\partial C = 0 \tag{14}$$

тенгламалар билан аниқланади. Шунинг учун (12) чириклар оиласининг ўрамаси

$$y = xC + \phi(C), \quad x + \phi'(C) = 0$$

тенгламалар билан аниқланади, булар (12) дан фақат параметри билан фарқ қилади, холос.

**Мисол.**  $y = xy' - y'^2$  тенгламани ечинг.

Ечими.  $y' = p$  деб олсак,  $(x - 2p) \frac{dp}{dx} = 0$  ни оларим. Бундан эса  $p = C$ ,

$y = xp - p^2$  ёки  $x - 2p = 0$ ,  $y = xp - p^2$  ифодадарни оларим.

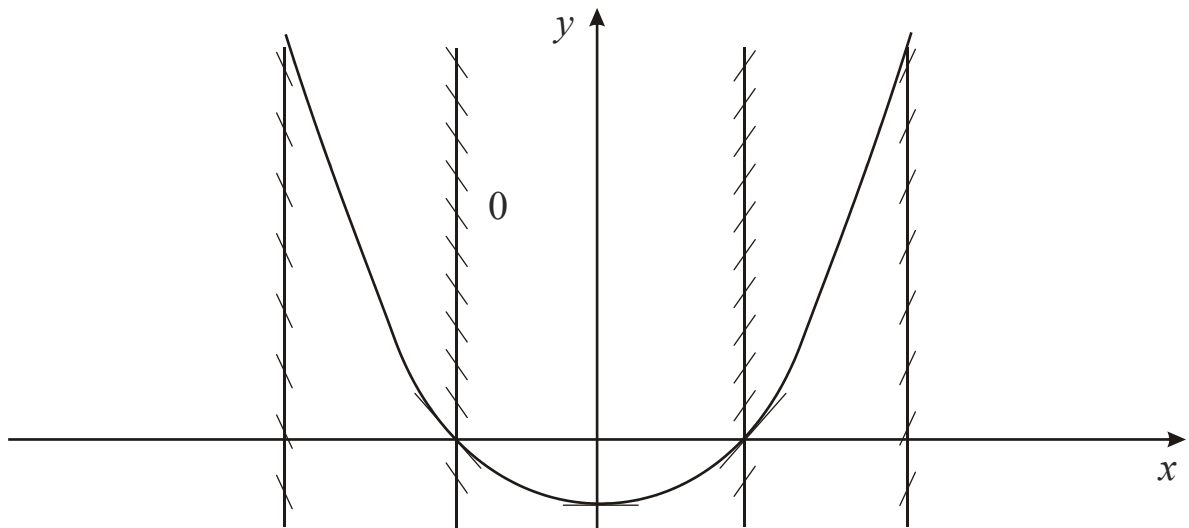
Демак,  $y = xC - C^2$  ва  $y = x^2/4$  лар тенгламанинг ечимлари бўлади.

**II. Изоклиналар.**  $y' = f(x, y)$  тенгламанинг  $(x, y)$  нуктадан ўтган ечими шу нуктада  $f(x, y)$  га тенг бўлган  $y'$  ҳосилага эга бўлади, яъни ечим  $OX$  ўқи билан  $\alpha = \arctg f(x, y)$  бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиққа уриниб ўтиши керак. Агар тўғри чизиқ  $OX$  ўқи билан  $\alpha$  бурчак ташкил қилса,  $\alpha$  *тўғри чизиқнинг оғмалиги* дейилади.  $y' = f(x, y)$  тенглама ечимларига уринмаларнинг оғмалиги бир хил бўлган нукталарнинг геометрик ўрни **изоклиналар** дейилади. Бундан келиб чиқадики, изоклиналар тенгламаси  $f(x, y) = K$ , бу ерда  $K$  – ўзгармас кўринишда бўлади.

$y' = f(x, y)$  тенгламанинг тақрибий ечимини қуриш учун етарли сондаги изоклиналар чизиб олиб, кейин булар ёрдамида ечимни ўтказиш керак, улар  $f(x, y) = K_1, f(x, y) = K_2, \dots$  изоклиналар билан кесишиш нуктасида бурчак коэффициентлари  $K_1, K_2, \dots$  бўлган уринмаларга эга бўлади.

**Мисоллар.** а) Изоклиналар ёрдамида  $y' = x/2$  дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқларини қуриш.

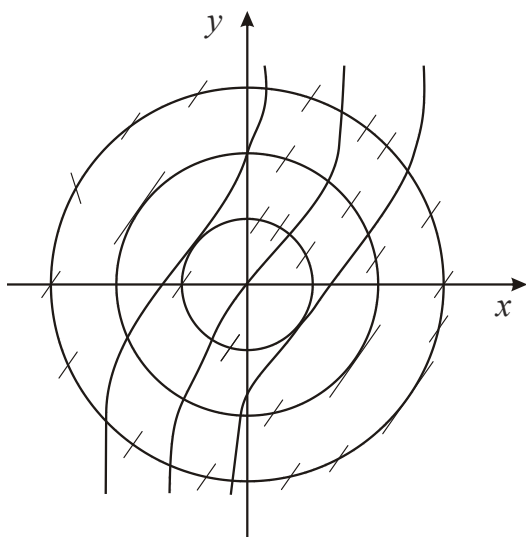
*Ечими.* Берилган тенгламанинг изоклиналар тенгламаси  $x/2 = k$  ёки  $x = 2k$  кўринишда бўлиб,  $OY$  ўққа параллел бўлган тўғри чизиқлардан иборат (12-расмга қаранг).



12-расм

$k = 0$  деб  $x = 0$  изоклиналини ҳосил қиламиз, унинг барча нукталарида майдон йўналиши  $OX$  ўққа параллел.  $k = 1$  да  $x = 2$  изоклиналини оламиз, унинг барча нукталарида майдон  $OX$  ўқ билан  $45^\circ$  ли бурчак ташкил этади;  $k = -1$  деб,  $x = -2$  изоклиналини оламиз, унинг барча нукталарида майдон йўналиш  $OX$  ўқ билан  $-45^\circ$  ли бурчак ташкил этишини кўрамиз ва ҳ.к. Агар бирорта нукта, масалан,  $M(-1, 2)$  нуктани олсак, у ҳолда бу нукта орқали ўтувчи ечимни тақрибан яшаш мумкин, бунинг учун эгри чизиққа ҳар бир нуктада ўтказилган уринма майдонининг бу нуктадаги йўналиши бир хилда бўлишидан фойдаланиш керак. Чизмадан кўриниб турибдики, интеграл эгри чизиқлар параболани эслатади. Ҳақиқатан ҳам  $y' = x/2$  тенгламанинг умумий ечими  $y = x^2/4 + C$  параболалар оиласидан иборат,  $y(-1) = 2$  бошланғич шарт эса бу параболалардан бирини аниқлайди.

б)  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$  дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқларини изоклиналар ёрдамида қуриш.



13-расм

Ечими. Бу тенглама учун  $\frac{dy}{dx} = k$ ,

$\sqrt{x^2 + y^2} = k$  ёки  $x^2 + y^2 = k^2$  айланалар изоклиналар бўлади. Уларнинг марказлари координата боши бўлиб, изланаётган интеграл чизиқнинг уринмаси бурчак коэффиценти айланалар радиусига тенг. Энди  $k$  га маълум қийматлар бериб йўналишлар майдонини чизамиз (13-расмга қаранг) ва изланаётган интеграл чизиқни тахминан ўтказишимиз мумкин.

### III. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (15)$$

Коши масаласи берилган бўлсин.  $f$  ва  $f_y$  функциялар ёпиқ  $R(|x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b)$  соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда  $x_0 - d \leq x \leq x_0 + d$  ораликда (15) масаланинг ягона ечими мавжуд. Бу ерда  $d = \min \left\{ a; \frac{b}{m} \right\}$  деб олиш мумкин,  $a$  ва  $b$  лар юқорида берилган катталиклар,  $m$  эса  $|f| \leq m$  шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий сон.

$$y(x_0) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_{k-1}(S)) dS \quad (16)$$

формула билан аниқланган кетма-кет яқинлашиш берилган ораликда (15) масаланинг ечимига текис яқинлашади.

**Мисол.**  $y' = x - y^2$ ,  $y(0) = 0$  масала учун  $y_0, y_1, y_2, y_3$  кетма-кет яқинлашишлар топилсин.

Ечими. (16) формулага асосан:  $y(0) = 0 = y_0$ ;

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_0(S)) dS = \int_{x_0}^x (S - 0^2) dS = \frac{x^2}{2};$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_1(S)) dS = \int_{x_0}^x \left( S - \frac{S^2}{4} \right) dS = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20};$$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^x f(S, y_2(S)) dS = \int_{x_0}^x \left( S - \frac{S^2}{4} + \frac{S^7}{20} - \frac{S^{10}}{400} \right) dS = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Тенгламанинг ҳамма ечимларини топинг ва агар мавжуд бўлса, махсус ечимларини ажратинг.

123.  $y'^2 - x^2 = 0$

124.  $y'^2 - y^2 = 0$

125.  $y'^2 - x^2 + x^3 = 0$

126.  $1/(y'^2 + 1) = y^2$

127.  $y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$

128.  $y'^2 = y$

129.  $y'^2 - y'y + e^x = 0$   
 131.  $y'^2 - y^2(e^x - 1) = 2yy'$   
 133.  $yy' + y'^2 = x^2 + xy$   
 135.  $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$   
 137.  $y'^2 + y(y-x)y' - xy^3 = 0$   
 139.  $\operatorname{sh} y'^3 + \ln y' + y' = 0$   
 141.  $\cos(y'+1) + y'^2 - 2y' + 1 = 0$   
 143.  $x = e^{y'} - y'^2$   
 145.  $x/y' = 1 + y'^2$   
 147.  $y'(x+1) = \lg y'$   
 149.  $y(2-y') = y' - 1$   
 151.  $y = y'(\ln y' - 1)/2 - 1/2y'^2$   
 130.  $y'^3 + y^2 = yy'(y'+1)$   
 132.  $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$   
 134.  $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$   
 136.  $y'^2 + 2yy'\operatorname{ctg} x - y^2 = 0$   
 138.  $\sin(y'+1)^2 + \operatorname{ctg} y' = 0$   
 140.  $\log_3(y'^2 + 1) + (y'+1)\sin y' = 0$   
 142.  $\cos(y'+1)^3 + \ln(y'+2) + y' = 0$   
 144.  $x(1-y') = y'^2$   
 146.  $x/(1+y'^3) = y' + 2$   
 148.  $y' = y/(1-y'\sin y')$   
 150.  $y = y'\cos y' + \sin y' - 1/y'^2$   
 152.  $y = y'\sin y' + \cos y' + y'^3$   
 Лагранж ва Клеро тенгламаларининг умумий ва махсус ечимларини топинг.  
 153.  $y = 2xy' + \cos y'$   
 154.  $y = 2xy' + \operatorname{tg} y'$   
 155.  $y = 2xy' + (y'+1)^2$   
 156.  $y = 3/2xy' - e^{y'}$   
 157.  $y = 2xy' + x + 1/(y'+1)^2$   
 158.  $y = xy' + y' - y'^2$   
 159.  $(x+1)y'^2 - (y+x)y' + y = 0$   
 160.  $(3x+1)y'^2 - 3(y+2)y' + 9 = 0$   
 161.  $(3x+5)y'^2 - (3y+x)y' + y = 0$   
 162.  $axy'^2 + (bx-ay+c)y' - by = 0$   
 163.  $x^2y'^2 - (2xy+a)y' + y^2 = 0$   
 164.  $yy' = 2xy'^2 + 1$

Изоклиналар методи билан берилган дифференциал тенгламанинг  $M(x_0; y_0)$  нуктадан ўтувчи интеграл эгри чизиғини қуринг.

165.  $x^2 - y^2 + 2yy' = 0$ ,  $M(-2; 1)$   
 166.  $y' = x^2 - y$ ,  $M(2; 3/2)$   
 167.  $y' = y - x$ ,  $M(2; 1)$   
 168.  $yy' = -x$ ,  $M(2; 3)$   
 169.  $y' = y - x$ ,  $M(4; 2)$   
 170.  $y' = (y-3x)/(x+3y)$ ,  $M(1; 3)$

Ечимнинг мавжудлигини ва ягоналигини аниқлаган ҳолда тенгламани ечинг ва берилган  $M(x_0; y_0)$  нуктадан ўтувчи интеграл эгри чизиқни ажратинг.

171.  $y' = -2e^{-x^2}$ ,  $M(0; 1)$   
 172.  $y' = 1/\sin x$ ,  $M(\pi/2; 0)$   
 173.  $y' = -1/x^2$ ,  $M(1; 1)$ ,  $M(-1; -1)$ ,  $M(0; 1)$   
 174.  $y' = 1/2\sqrt{x}$ ,  $M(0; 0)$

175.  $y' = x/\sqrt{1-x^2}$ ,  $M(0; -1)$ ,  $M(0; 1)$ ,  $M(1; 0)$

**Синов учун савол ва топшириқлар**

1. Ҳосилага нисбатан ечиладиган  $F(x, y, y') = 0$  кўринишдаги тенгламани қандай интеграллаш мумкин?

2. Параметр киритиш методини тушунтириб беринг.

3. Номаълум функция  $y$  га ёки эркли ўзгарувчи  $x$  га нисбатан ечиладиган  $F(x, y, y') = 0$  кўринишдаги тенгламани қандай интеграллаш мумкин?

4.  $F(x, y, y') = 0$  кўринишдаги тенгламанинг қандай ечими махсус ечим дейилади ва махсус ечимни қандай топиш мумкин?

5. Клеро тенгламаси қандай кўринишда бўлади ва уни қандай ечиш мумкин?

6. Дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремани айтиб беринг.

7. Дифференциал тенглама ечимининг берилган кесмадаги кетма-кет яқинлашиш формуласини ёзинг.

8.  $y^2 - 2xyy' + (1 + x^2)y'^2 = 1$  тенгламани ечинг.

9.  $y'^2 - 2xy'\sqrt{y} + 4y\sqrt{y} = 0$  тенгламанинг махсус ечимини топинг.

10.  $y'^2 - x^2 + x^3 = 0$  тенгламани ечинг.

1. Ҳосилага нисбатан ечиладиган тенгламани интегралланг.

1.1.  $yy' + y'^2 = x^2 + xy$

1.2.  $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$

1.3.  $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

1.4.  $xy'^2 + 2yy' - x = 0$

1.5.  $x^3 + y'^2 = x^2$

1.6.  $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$

1.7.  $x^2y'^2 - 2xyy' = x^2y^2 - x^4$

1.8.  $(xy' - y)(xy' - 2y) + x^2 = 0$

1.9.  $y'^2y^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$

1.10.  $y'^2 - 2yy' = y^2(e^{2x} - 1)$

1.11.  $y'^2 - 2xyy' - 8x^2 = 0$

1.12.  $x^2y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$

1.13.  $y'^2 - (2x + y)y' + x^2 + xy = 0$

1.14.  $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0$

1.15.  $y'^3 - 2xy'^2 - 4yy' + 8xy = 0$

1.16.  $y'^2 = 4|y|$

1.17.  $y'^2 = 1/(4|x|)$

1.18.  $y^2(1 + y'^2) = a^2$

1.19.  $y'^3 - y/(4x) = 0$

1.20.  $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$

2. Тенгламанинг ҳамма ечимларини топинг.

2.1.  $y'^3 - 3y' + 1 = 0$

2.2.  $y'^3 + y'^2 - y' - 1 = 0$

2.3.  $y' = e^{y'} \sin y'$

2.4.  $\cos y' + \sin y' + e^{y'} = 0$

2.5.  $e^{y'+1} + \sin(y' + 2) = 0$

2.6.  $\operatorname{tg} y' + e^{y'+1} = 0$

2.7.  $\operatorname{sh} y' + \operatorname{ch} y' + y' = 0$

2.8.  $y'^2 = e^{y'} \cos y'$



$$2.9. y' = e^{y'} \operatorname{tg} y'$$

$$2.11. y'^4 + y'^3 - 2y'^2 - 2y' = 0$$

$$2.13. \sin(y' + 1) + \cos(y' + 1) + y' = 0$$

$$2.15. \left( \frac{y' + 1}{2} \right)^2 - 3 \left( \frac{y' + 1}{2} \right) + 2 = 0$$

$$2.17. \sin^4(y'^2 + 1) + y'^4 \cos y' = 0$$

$$2.19. \operatorname{sh}(y'^2 + 1) + \cos y' = 0$$

$$2.10. y'^3 = y' \operatorname{ch} y'^2$$

$$2.12. e^{y'+1} + y' = 1$$

$$2.14. y'^3 + 3y'^2 + 2y' - 1 = 0$$

$$2.16. \left( \frac{\sqrt{y' + 1}}{\sin y'} \right)^3 + \sin y' = 0$$

$$2.18. e^{y'+2} + 2 \sin y' + 1 = 0$$

$$2.20. e^{y'+1} + 2 \operatorname{tg} y' = 0$$

3. Эркил ўзгарувчи  $x$  га нисбатан ечиладиган тенгламани интегралланг.

$$3.1. x = \sin y' + \ln y'$$

$$3.3. xy'^3 = 1 + y'$$

$$3.5. \arcsin(x/y') = y'$$

$$3.7. x = y'(1 + y')$$

$$3.9. x = \ln y' + \cos y'$$

$$3.11. x = y' + \sin y'$$

$$3.13. x = e^{y'^2} + \cos y'$$

$$3.15. xy'^2 = 3y' + 1$$

$$3.17. x = y' \cos y' + \ln y'$$

$$3.19. xy' = 5y' + 6$$

$$3.2. y'^2 - 2xy' - 1 = 0$$

$$3.4. x(1 + y'^2)^{3/2} = a$$

$$3.6. x = 2(\ln y' - y')$$

$$3.8. x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1)$$

$$3.10. x = 2y'^2 - 2y' + 2$$

$$3.12. x = e^{y'/2} + \sin y'$$

$$3.14. x = e^{y'} + \cos y'$$

$$3.16. x = y' \ln y' + \sin y'$$

$$3.18. y'^2 x = e^{1/y'}$$

$$3.20. x = e^{y'} - 2y' + \cos y'$$

4. Номаълум функция  $y$  га нисбатан ечиладиган тенгламани интегралланг.

$$4.1. y = y' \ln y'$$

$$4.3. y = y'^2 e^{y'}$$

$$4.5. y/\sqrt{1 + y'^2} = a$$

$$4.7. y(1 + 1/y'^2)^{3/2}$$

$$4.9. y(1 + y'^2)^{1/2} = y'$$

$$4.11. y = y'(1 + y' \cos y')$$

$$4.13. y' = e^{y'/y}$$

$$4.15. y = y' + \sin y' + \cos y'$$

$$4.17. 3y'^4 = y' + y$$

$$4.19. y' = y(1 + y')$$

$$4.2. y = y'^2 + 2y'^3$$

$$4.4. y = y'^2 + 2 \ln y'$$

$$4.6. y' = \operatorname{arctg}(y/y'^2)$$

$$4.8. y = e^{y'}(y' - 1)$$

$$4.10. y = y'^4 - y'^3 - 2$$

$$4.12. y = \arcsin y' + \ln(1 + y'^2)$$

$$4.14. y = y'/2 + \ln y'$$

$$4.16. y = y' \sqrt{1 + y'^2}$$

$$4.18. y = y' \sqrt{1 - y'^2}$$

$$4.20. y = \arccos y' + \ln(1 + y'^2)$$

5. Лагранж тенгламасини ечинг.

$$5.1. y = 1/2 \cdot x(y' + 4/y')$$

$$5.3. y = (1 + y')x + y'^2$$

$$5.5. y = (1 + y'^2)/(2y') \cdot x$$

$$5.7. xy'^2 + y'^3$$

$$5.9. y = xy'^2 + y'^2$$

$$5.11. yy' = 2xy'^2 + 1$$

$$5.13. 2y(y' + 1) = xy'^2$$

$$5.15. y = -xy' + y'^2$$

$$5.17. y = 2xy' + \sin y'$$

$$5.19. xy'^2 + (y - 3x)y' + y = 0$$

$$5.2. y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$$

$$5.4. y = -1/2 \cdot y'(2x + y')$$

$$5.6. y = 2xy' + 1/y'^2$$

$$5.8. y = (xy' + y' \ln y')/2$$

$$5.10. y = 2xy' - y'^2$$

$$5.12. 2y(y' + 2) = xy'^2$$

$$5.14. 2yy' = x(y'^2 + 4)$$

$$5.16. y = 2xy' + \ln y'$$

$$5.18. y = 3xy'/2 + e^{y'}$$

$$5.20. xy'^2 + 2yy' + a = 0, \quad a \neq 0$$

6. Клеро тенгламасининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

$$6.1. y = xy' + y'^2$$

$$6.3. y = xy' + 1/y'$$

$$6.5. y = xy' + y' + \sqrt{y'}$$

$$6.7. y = xy' + \cos y'$$

$$6.9. y = xy' - a\sqrt{1 + y'^2}$$

$$6.11. y = x(1/x + y') + y'$$

$$6.13. xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$$

$$6.15. \sqrt{y'^2 - 1} + xy' - y = 0$$

$$6.17. y'^2 + (x + 2)y' - y + 1 = 0$$

$$6.19. 2y'^2 + (x - 1)y' - y = 0$$

$$6.2. y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$$

$$6.4. y = xy' - 1/y'$$

$$6.6. y = xy' - e^{y'}$$

$$6.8. y = xy' + y' - y'^2$$

$$6.10. y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2 y'^2}$$

$$6.12. y = xy' + \sqrt{1 - y'^2}$$

$$6.14. y'^2 - (x + 1)y' + y = 0$$

$$6.16. y'^2 + (x + 1)y' - y = 0$$

$$6.18. y'^2 + (ax + b)y' - ay + c = 0$$

$$6.20. xy'^2 - yy' + a = 0$$

7. Изоклиналар методи билан берилган дифференциал тенгламанинг  $M$  нуқтадан ўтувчи интеграл эгри чизиғини кулинг.

$$7.1. y' = y - x^2, \quad M(1; 2)$$

$$7.3. y' = 2 + y^2, \quad M(1; 2)$$

$$7.5. y' = (y - 1)x, \quad M(1; 3/2)$$

$$7.7. y' = 3 + y^2, \quad M(1; 2)$$

$$7.9. y' = y/(x^2 + 2), \quad M(2; 2)$$

$$7.11. y' = y - x, \quad M(9/2; 1)$$

$$7.2. yy' = 2x, \quad M(0; 5)$$

$$7.4. y' = 2x/(3y), \quad M(1; 1)$$

$$7.6. yy' + x = 0, \quad M(-2; -3)$$

$$7.8. xy' = 2y, \quad M(2; 3)$$

$$7.10. x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, \quad M(2; 1)$$

$$7.12. y' = x^2 - y, \quad M(1; 1/2)$$

$$7.13. y' = xy, \quad M(0; -1)$$

$$7.15. y' = -x/2, \quad M(4; 2)$$

$$7.17. y' = x + 2y, \quad M(3; 0)$$

$$7.19. 3yy' = x, \quad M(-3; -2)$$

$$7.14. y' = xy, \quad M(0; 1)$$

$$7.16. 2(y + y') = x + 3, \quad M(1; 1/2)$$

$$7.18. xy' = 2y, \quad M(1; 3)$$

$$7.20. y' = x - y^2, \quad M(-3; 4)$$

8. Бошланғич шартлар берилган дифференциал тенглама учун  $y_0, y_1, y_2$  кетма-кет яқинлашишларни топинг.

$$8.1. y' = y - x^2, \quad y(0) = 0$$

$$8.3. y' = y + e^{y-1}, \quad y(0) = 1$$

$$8.5. y' = x + y^2, \quad y(0) = 0$$

$$8.2. y' = y^2 + 3x^2 - 1, \quad y(1) = 1$$

$$8.3. y' = 1 + x \sin y, \quad y(\pi) = 2\pi$$

Тенгламанинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўладиган бирорта кесмани кўрсатинг.

$$8.6. y' = x + y^3, \quad y(0) = 0$$

$$8.8. dx/dt = t + e^x, \quad x(1) = 0$$

$$8.10. y' = \ln x + \ln y, \quad y(2) = 1$$

$$8.7. y' = 2y^2 - x, \quad y(1) = 1$$

$$8.9. y' = \ln(xy), \quad y(1) = 1$$

Ечимнинг ягоналигини таъминлайдиган бирорта старли шартдан фойдаланиб,  $(x, y)$  текисликдан шундай соҳани ажратингки, унинг ҳар бир нуқтасидан берилган тенгламанинг ягона ечими ўтсин.

$$8.11. y' = 2xy + y^2$$

$$8.13. (x + 2)y' = \sqrt{y} - x$$

$$8.15. y' = 1 + tg x$$

$$8.17. y' = \sin y - \cos x$$

$$8.19. y' = \sqrt{x^2 - y} - x$$

$$8.12. y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$$

$$8.14. (y - x)y' = y \ln x$$

$$8.16. xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$$

$$8.18. y' = \sqrt[3]{3x - y} - 1$$

$$8.20. y' = (x + 1)/(x - y)$$

## 7-§. ТАРТИБИНИ ПАСАЙТИРИШ МУМКИН БЎЛГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. Агар тенгламада номаълум функция, унинг  $(k - 1)$  – тартиблигича ҳосилалари иштирок этмаса, бошқача қилиб айтганда, тенглама

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

кўринишда бўлса, бундай тенгламанинг тартиби  $y^{(k)} = z(x)$  алмаштириш ёрдамида пасайтирилади.

Мисол.  $\frac{d^7 y}{dx^7} - \frac{1}{x} \frac{d^6 y}{dx^6} = 0$  тенгламани ечинг.

Ечими.  $\frac{d^6 y}{dx^6} = z(x)$ ,  $\frac{dz}{dx} - \frac{1}{x}z = 0$  тенгламани оламир. Ўзгарувчиларини ажратиб,

интеграллаб  $\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$  ёки  $z = C_1 x$ ,  $\frac{d^6 y}{dx^6} = C_1 x$  ни ҳосил қиламиз. Бундан эса кетма-кет интеграллаб,

$$y = C_1 x^7 + C_2 x^5 + C_3 x^4 + C_4 x^3 + C_5 x^2 + C_6 x + C_7$$

ечимни оламир.

2. Агар тенгламада эрки ўзгарувчи  $x$  иштирок этмаса, бошқача қилиб айтганда, тенглама

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2)$$

кўринишда бўлса, унинг тартибини янги эрки ўзгарувчи сифатида  $y$  ни, номаълум функция сифатида эса  $y' = p(y)$  ни олиб пасайтириш мумкин.

**Мисол.**  $y'^2 + 2yy'' = 0$  тенгламани ечинг.

Ечими.  $y' = p(y)$  деб  $y'' = p'(y) \cdot y' = p' \cdot p$  га эга бўламиз ва бундан  $p^2 + 2ypp' = 0$  тенгламани оламир.

$$p(p + 2yp') = 0, \quad p = 0, \quad y = C, \quad p + 2yp' = 0.$$

Охириги тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$\ln p = -1/2 \cdot \ln|y| + \ln C_1, \quad p = C_1 / \sqrt{y}, \quad y' = C_1 / \sqrt{y}, \quad \sqrt{y} dy = C_1 dx.$$

Бундан эса ўз навбатида интеграллаб,

$$2/3 \cdot y\sqrt{y} = C_1 x + C_2$$

ни оламир. Демак, ечим  $2/3 \cdot y\sqrt{y} = C_1 x + C_2$  ва  $y = C$  лар экан.

3. Агар тенглама  $y$  унинг хоссаларига нисбатан бир жинсли бўлса, бошқача қилиб айтганда,  $y, y', \dots, y^{(n)}$  ларни бир пайтда  $ky, ky', \dots, ky^{(n)}$  ларга алмаштирилганда тенглама ўзгармаса унинг тартибини  $y' = y \cdot z(x)$  алмаштириш ёрдамида пасайтириш мумкин, бу ерда  $z(x)$  – янги номаълум функция.

**Мисол.**  $xyy'' = xy'^2 = yy'$  тенгламани тартибини пасайтириб ечинг.

Ечими.  $y$  ни  $ky$ ,  $y'$  ни  $ky'$ ,  $y''$  ни  $ky''$  билан алмаштираем,

$$xk^2 y y'' - xk^2 y'^2 = k^2 y y' \quad \text{ёки} \quad x y y'' - x y'^2 = y y'$$

тенгламанинг ўзини оламир. Демак, тенглама бир жинсли экан. Энди  $y' = yz$  алмаштиришни

бажариб,  $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$  эканлигидан фойдалансак,

$$xy(yz^2 + yz') - xy^2 z^2 = y^2 z, \quad xy^2 z' - y^2 z = 0, \quad y^2(xz' - z) = 0$$

тенгламани оламир. Бундан

$$y = 0, \quad xz' - z = 0, \quad dz/z = dx/x, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad z = C_1 x,$$

$$y'/y = C_1 x, \quad dy/y = C_1 x dx, \quad \ln|y| - C_1 x^2 = \ln|C_2|, \quad y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Демак, жавоб  $y = C_2 e^{C_1 x}$ .

Агар тенглама  $x$  ва  $y$  га нисбатан умумлашган бир жинсли бошқача қилиб айтганда, бирор  $m$  учун  $x$  ни  $kx$  га,  $y$  ни  $k^m y$  га,  $y'$  ни  $k^{m-1} y'$  га,  $y''$  ни  $k^{m-2} y''$  га ва ҳоказо алмаштирилганда тенглама ўзгармаса, унинг тартибини пасайтириш мумкин.

Тенгламанинг шу маънода бир жинсли бўлиши ёки бўлмаслигини билиш ва  $m$  ни топиш учун юқоридаги алмаштиришни бажариб, тенгламадаги ҳар бир ҳадда иштирок этган  $k$  нинг даражаларини тенглаштириб чиқиш керак.

Агар  $m$  учун ҳосил бўлган тенгламалар системаси биргаликда бўлса,  $m$  ни топиб,  $x = e^t$ ,  $y = ze^{mt}$ ,  $z = z(t)$  алмаштиришни бажариш керак.

Бу алмаштиришдан кейин янги эрки ўзгарувчи  $t$  иштирок этмаган тенгламани оламин. Бундай тенгламанинг тартибини 2-§ да кўрсатилган усулда пасайтирилади.  $x = e^t$ ,  $y = ze^{mt}$  алмаштиришда ҳосилалар қуйидагича ҳисобланади.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dt} e^t = \left( \frac{dz}{dt} e^{mt} + mze^{mt} \right) e^{-t} = (z' + mz) e^{(m-1)t}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dt} e^t = (z'' + (2m-1)z' + m(m-1)z) e^{(m-1)t}, \\ &\dots\dots\dots \\ y(n) &= g(z, z', \dots, z^{(n)}) e^{(m-1)t}. \end{aligned} \quad (3)$$

**Мисол.**  $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0$  тенгламани ечинг.

*Ечими.*  $x$  ни  $kx$ ,  $y$  ни  $k^m y$ ,  $y'$  ни  $k^{m-1} y'$ ,  $y''$  ни  $k^{m-2} y''$  га алмаштирайлик:

$$k^4 x^4 k^{m-2} y'' + (kx k^{m-1} y' - k^m y)^3 = 0$$

$$m + 2 = 3m = m = 1.$$

Бундан тушунарлики, тенглама умумлашган маънода бир жинсли. Тенгламани ечиш учун  $x = e^t$ ,  $y = ze^t$  алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда  $y' = z' + z$ ,  $y'' = (z'' + z')e^{-t}$ . Бундан

$$e^{4t} (z'' + z') e^{-t} + [e^t (z' + z) - ze^t]^3 = 0, \quad z'' + z' + z^3 = 0.$$

Ҳосил қилинган тенглама  $t$  га боғлиқ эмас.  $z' = p(z)$ ,  $z'' = pp'$ ,  $pp' + p + p^3 = 0$ , бундан эса  $dp/dz = -1 - p^2$  ёки  $p = 0$  ни оламин. Иккинчи  $p = 0$  дан  $z' = 0$ ,  $z = C$ ,  $y = Cx$  келиб чиқади. Биринчи тенгламадан эса

$$dp/(1 + p^2) = -dz, \quad \arctg p = C_1 - z, \quad p = \tg(C_1 - z) \text{ келиб чиқади. Шунинг учун}$$

$$z' = \tg(C_1 - z), \quad \ctg(C_1 - z) dz = dx,$$

$$\int \ctg(C_1 - z) dz = z - \ln|C_2|, \quad \ln|\sin(C_1 - z)| = -x + \ln|C_2|,$$

$$\sin|C_1 - z| = C_2 e^{-x}, \quad z = C_1 + \arcsin C_2 e^{-x}.$$

$y = zx$ ,  $e^{-t} = 1/x$  алмаштиришни ҳисобга олиб,  $y = x(C_1 + \arcsin(C_2/x))$  ни оламин.

**5.** Агар тенгламанинг ҳар иккала томони қандайдир функциянинг тўлиқ дифференциалига келтириш мумкин бўлса, унинг тартибини пасайтириш мумкин.

**Мисол.**  $xy'' - y' - x^2 yy' = 0$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 2$  Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечими тенгламанинг ҳар иккала томонини  $x^2 \neq 0$  га бўлсак, тўлиқ дифференциал ҳолга келади:

$$\frac{xy'' - y'}{x^2} - yy' = 0, \quad \left(\frac{y'}{x}\right)' - \left(\frac{1}{2}y^2\right)' = 0, \quad \left(\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2\right)' = 0,$$

бундан  $\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2 = C_1$ .  $C_1$  ни  $y'(1) = 2, y(1) = 0$  шартдан фойдаланиб топамиз:

$$C_1 = 2/1 - 1/2 \cdot 0 = 2. \text{ У ҳолда}$$

$$\frac{y'}{x} - \frac{1}{2}y^2 + 2, \quad \frac{dy}{y^2 + 4} = \frac{1}{2}x dx, \quad \arctg \frac{y}{2} = \frac{1}{2}x^2 + C_2.$$

$$C_2 = \arctg(0/2) - 1/2 = -1/2.$$

Демак, Коши масаласининг ечими  $y = 2tg \frac{x^2 - 1}{2}$  кўринишда бўлар экан.

**Тенгламани ечинг.**

- |                                         |                                                         |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 176. $y'' + y' + 2 = 0$                 | 177. $3y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$                          |
| 178. $4y' + y''^2 = 4xy''$              | 179. $y'(1 + y'^2) = ay''$                              |
| 180. $y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$    | 181. $yy'' = y' + y'^2$                                 |
| 182. $yy'' = 1 + y'^2$                  | 183. $2yy'' = 1 + y'^2$                                 |
| 184. $y^3y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0$ | 185. $yy'' - y'^2 = y^2y'$                              |
| 186. $nyy'' - (n-1)y'^2 = 0$            | 187. $ayy'' + by'^2 - \frac{yy'}{\sqrt{x^2 + C^2}} = 0$ |
| 188. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$          | 189. $xyy'' - 4xy'^2 + 4yy' = 0$                        |
| 190. $2xyy'' - xy'^2 + yy' = 0$         | 191. $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1}y' = 2x$                  |
| 192. $x^5y''' + x^4y'' = 1$             | 193. $xy''' + y'' + 1/x = 0$                            |
| 194. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$      | 195. $x^4y'' + 3xy^2y' - y^3 = 0$                       |
| 196. $x^4y'' + x^2y'^2 + y^2 = 0$       | 197. $x^4y'' + x^2y'^2 - 2xyy' = 0$                     |
| 198. $x^3y'' + 2xyy' + y^2 = 0$         | 199. $x^4y'' + x^3y'^2 + 3x^2yy'^2 = 0$                 |
| 200. $x^4y'' + 3xy^2y' - y^3 = 0$       |                                                         |

**Коши масаласини ечинг.**

201.  $y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}$   
 202.  $y'y''' - 3y''^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$   
 203.  $y''' = yy'' + y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2, \quad y''(0) = 0$

$$204. 2y'^2 = (y-1)y'', \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$$

$$205. y''' = 3yy', \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3/2$$

### Синов учун савол ва топшириқлар

1.  $F(x, y(k), y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$  кўринишдаги тенгламанинг тартиби қандай пасайтирилади?

2. Қандай алмаштириш ёрдамида  $F(y, y^1, \dots, y^{(n)}) = 0$  кўринишдаги тенгламанинг тартибини пасайтириш мумкин?

3. Номаълум функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан жинсли бўлган тенгламанинг тартиби қандай пасайтирилади?

4. Иккала томони  $x$  нисбатан тўла ҳосиладан иборат тенгламанинг тартибини пасайтириш мумкинми

5. Қандай тенгламага  $x$  ва  $y$  га нисбатан умумлашган бир жинсли тенглама дейилади ва унинг тартиби қандай пасайтирилади?

6.  $n$ -тартибли оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласининг қўйилишини ва уни ечиш усулини ифодаланг.

7.  $y'' + \sin y = 0$  тенгламанинг  $x \rightarrow \infty$  да  $y \rightarrow \pi$  бўладиган ечими бор эканлигини исботланг.

8.  $y^2 y''' = y'^3$  тенгламанинг тартибини пасайтириб, биринчи тартибли тенгламага келтиринг.

#### 1. Тенгламани ечинг.

$$1.1. (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$$

$$1.2. xy'' = y' \ln(y'/x)$$

$$1.3. xy'' - y' = 0$$

$$1.4. y'(1+y'^2) = ay''$$

$$1.5. 2y'(y''+2) = xy''^2$$

$$1.6. y''' - 2y'y''' + 1 = 0$$

$$1.7. xy'' = y' + x \sin(y'/x)$$

$$1.8. y''' = y'^2 + 1$$

$$1.9. y''(2y' + x) = 1$$

$$1.10. (1-x^2)y'' + xy' = 2$$

$$1.11. y''^2 + y' = xy''$$

$$1.12. y'''y'^2 = y'''^3$$

$$1.13. y''(2+x)^5 = 1, \quad y(-1) = 1/12, \quad y'(-1) = -1/4$$

$$1.14. xy'' = (1+2x^2)y'$$

$$1.15. xy'' = y' + x^2$$

$$1.16. x \ln y'' = y'$$

$$1.17. 2y'' = y'/x + x^2/y'$$

$$1.18. y''' = \sqrt{1-y''^2}$$

$$1.19. xy''' - y'' = 0$$

$$1.20. y'' = \sqrt{1-y'^2}$$

#### 2. Тенгламани ечинг.

$$2.1. y'' + y'^2 = 2e^{-y}$$

$$2.2. y'' = e^y$$

$$2.3. y^4 - y^3 y'' = 1$$

$$2.5. yy'' + y = y'^2$$

$$2.7. y'' = ae^y$$

$$2.9. 2(2a - y)y'' = 1 + y'^2$$

$$2.11. y'^2 = (2y - 2y')y''$$

$$2.13. yy'' = y'^2$$

$$2.15. 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$$

$$2.17. yy'' + y'^2 = 0$$

$$2.19. yy'' = 1 + y'^2$$

$$2.4. yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$$

$$2.6. yy''^2 = 1$$

$$2.8. 3y'' = y^{-5/3}$$

$$2.10. 1 + y'^2 = 2yy''$$

$$2.12. 2y'^2 = (y - 1)y''$$

$$2.14. 2yy'' + y'^2 + y'^4 = 0$$

$$2.16. 2yy'' + y'^2 = 0$$

$$2.18. yy'' = y' + y'^2$$

$$2.20. 2yy'' = 1 + y'^2$$

### 3. Тенгламани ечинг.

$$3.1. x^2 yy'' - 2x^2 y'^2 + xyy' + y^2 = 0$$

$$3.3. xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$$

$$3.5. xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4 y^3$$

$$3.7. yy'' - 3y'^2 + 3yy' - y^2 = 0$$

$$3.9. x^2 yy'' = (y - xy')^2$$

$$3.11. 2yy'' - 3y'^2 = 2y^2$$

$$3.13. y'^2 + yy'' = yy'$$

$$3.15. y'y'' - x^2 yy' - xy^2 = 0$$

$$3.17. yy'' - y'^2 - y^2 \ln x = 0$$

$$3.19. 2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$$

$$3.2. x^2 (yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2 y'^2 + y^2}$$

$$3.4. xyy'' - xy'^2 - yy'' = 0$$

$$3.6. yy'' + y'^2 + ayy' + by^2 = 0$$

$$3.8. yy'' - y' = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$3.10. xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$$

$$3.12. 3y'^2 = 4yy'' + y^2$$

$$3.14. (y + y')y'' + y'^2 = 0$$

$$3.16. (xy' - y)y'' + 4y'^2 = 0$$

$$3.18. xyy'' + xy'^2 = 2yy'$$

$$3.20. 3yy'' - 5y'^2 = 0$$

### 4. Тенгламани ечинг.

$$4.1. yy''' + 3y'y'' = 0$$

$$4.3. yy'' + y'^2 = 1$$

$$4.5. y'y''' = 2y''^2$$

$$4.7. y'' = xy' + y + 1$$

$$4.9. y'' = (1 + y'^2)^{3/2}$$

$$4.11. y'' - y'/x + y/x^2 = 1$$

$$4.13. y'y''' - 3y''^2 = 0$$

$$4.15. y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$$

$$4.2. yy'' = y'(y' + 1)$$

$$4.4. xy'' = 2yy' - y'$$

$$4.6. 5y'''^2 - 3y''y'^v = 0$$

$$4.8. xy'' - y' = x^2 yy'$$

$$4.10. (1 + y'^2)y''' = 3y'y''^2$$

$$4.12. y'' + y' \cos x - y \sin x = 0$$

$$4.14. y'''x \ln x = y''$$

$$4.16. (1 + \sin x)y''' = \cos y''$$



4.17.  $y'' \operatorname{th} x = y'''$

4.18.  $y''' \operatorname{tg} x = y'' + 1$

4.19.  $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$

4.20.  $(x + 1)y''' + y'' = x + 1$

5. Умумлашган бир жинсли тенгламани тартибини пасайтириб биринчи тартибли тенгламага келтиринг.

5.1.  $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$

5.2.  $x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$

5.3.  $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$

5.4.  $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x}$

5.5.  $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$

5.6.  $yy' - xyy'' - xy'^2 = x^3$

5.7.  $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$

5.8.  $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3 yy' + 1$

5.9.  $x^4 y'' + (xy' - y)^3 = 0$

5.10.  $xyy'' + yy' - x^2 y'^3 = 0$

5.11.  $x^2 y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$

5.12.  $x^4 y'' - x^3 y'^3 + 3x^2 yy'^2 = 0$

5.13.  $3xy^2 + 2x^3 y' = 2x^2 y + y^3$

5.14.  $x^2 y'' = (y - xy')^2$

5.15.  $nx^3 y'' = (y - xy')^2$

5.16.  $y^2(x^2 y'' - xy' + y) = x^3$

5.17.  $x^2 y^2 y'' - 3xy^2 y' + 4y^3 + x^6 = 0$

5.18.  $x^3 y'' + 2xyy' - x^2 y'^2 - y^2 = 0$

5.19.  $x^4 y^3 + x^2 y'^2 + x^2 yy'' = 0$

5.20.  $x^3 y'' + (xy' - y)^2 = 0$

6. Коши масаласининг ечимини топинг.

6.1.  $yy'' = 2y'^2, y(2) = 2, y'(2) = 0,5$

6.2.  $2y''' - 3y'^2 = 0, y(0) = -3, y'(0) = 1, y''(0) = -1$

6.3.  $x^2 y'' - 3xy' = 6y^2/x^2 - 4y, y(1) = 1, y'(1) = 4$

6.4.  $y''' = 3yy', y(0) = -2, y'(0) = 0, y''(0) = 4,5$

6.5.  $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y, y(-1) = \pi/6, y'(-1) = 2$

6.6.  $y'' y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2$

6.7.  $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$

6.8.  $y'' = 32 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 4$

6.9.  $y'' y^3 + 49 = 0, y(3) = -7, y'(3) = -1$

6.10.  $4y^3 y'' = 16y^4 - 1, y(0) = \sqrt{2}/2, y'(0) = \sqrt{2}/2$

6.11.  $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2$

6.12.  $y'' = 18 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 3$

6.13.  $4y^3 y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = 1/\sqrt{2}$

$$6.14. y'' + 18 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3$$

$$6.15. y'' = 8 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 3$$

$$6.16. y'' + 32 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4$$

$$6.17. y'' = 50 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 5$$

$$6.18. y^3 y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$$

$$6.19. y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5$$

$$6.20. y'' = 2 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 1$$

## 9-§. ЎЗГАРМАС ВА ЎЗГАРУВЧИ КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y = 0 \quad (1)$$

кўринишдаги тенгламани ечиш учун унинг характеристик тенгламасини

$$a_0 \lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (1)$$

тузиб олиш ва унинг  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  илдизларини топиш керак. (1) тенгламанинг умумий ечими, (2)

тенгламанинг оддий  $\lambda_i$  илдизига мос келувчи  $C_1 e^{\lambda_i x}$  ва  $k_j$  каррали  $\lambda_j$  илдизига мос келувчи

$$\left( C_{m+1} + C_{m+2} x + C_{m+2} x^2 + \dots + C_{m+k_j} x^{k_j-1} \right) e^{\lambda_j x}$$

ҳадлар йиғиндисидан иборат бўлади, бу ерда барча  $C$  лар ихтиёрий ўзгармаслардир.

(1) тенгламанинг коэффициентлари ва  $\lambda$  характеристик илдизлари ҳақиқий ҳам, комплекс ҳам бўлавериши мумкин.

**Мисол.**  $y^{(5)} - 12y^{(4)} + 56y''' - 126y'' + 135y' - 54y = 0$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* Характеристи тенгламаси

$$\lambda^5 - 12\lambda^4 + 56\lambda^3 - 126\lambda^2 + 135\lambda - 54\lambda = 0$$

ёки

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)^3 = 0$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг оддий  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$  илдизларга  $C_1 e^x, C_2 e^{2x}$  ҳадлар, 3

каррали  $\lambda = 3$  илдизга эса  $(C_3 + C_4 x + C_5 x^2) e^{3x}$  ҳад мос келади. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими бу ҳадларнинг йиғиндисидан иборат:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (C_3 + C_4 x + C_5 x^2) e^{3x}.$$

Агар (1) тенгламанинг барча коэффициентлари ҳақиқий бўлса, унинг ечими  $\lambda_1$  характеристик илдизлардан бирортаси комплекс бўлганда ҳам ҳақиқий кўринишда ёзиш мумкин. (1) тенгламанинг умумий ечими (2) тенгламанинг  $\lambda = \alpha + \beta i$  ўзаро қўшма комплекс илдизларига мос келувчи

$$C_{m+1} e^{\alpha x} \cos \beta x + C_{m+2} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

кўринишдаги ва  $k$  каррали  $\lambda = \alpha + \beta i$  комплекс илдизларга мос келувчи

$$P_{k-1}(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + Q_{k-1}(x) e^{\alpha x} \sin \beta x \quad (5)$$

кўринишдаги қўшилувчиларнинг йиғиндисидан иборат бўлади. Бу ерда  $C_1$  ихтиёрий ўзгармаслар,  $P_{k-1}(x)$  ва  $Q_{k-1}(x)$  лар (3) ифодадагига ўхшаш  $k-1$  тартибли кўбхадлар бўлиб, уларнинг коэффициентлари ихтиёрий ўзгармаслардир.

**Мисол.**  $y'' - 2y' + 2y = 0$  тенгламани ечинг.

*Ечими.* Характеристик тенгламаси  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$  бўлиб,  $\lambda = 1 \pm i$  оддий илдизларга эга, шунинг учун ечимнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x.$$

2. Чизиқли бир жинсли бўлмаган, ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламанинг ўнг томони  $b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ ,  $e^{\alpha x}$ ,  $\cos \beta x$ ,  $\sin \beta x$  функцияларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, унинг хусусий ечимини номаълум коэффициентлар методи билан кидириш мумкин.

Агар тенгламанинг ўнг томони  $P_m(x)e^{\gamma x}$  кўринишда бўлса, (бу ерда  $P_m(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ ) хусусий ечим

$$y_1 = x^3 Q_m(x) e^{\gamma x}$$

кўринишда бўлади. Бунда  $Q_m(x)$  – коэффициентлар ҳозирча номаълум бўлган  $m$  тартибли кўпхад,  $S$  эса қуйидагича аниқланади: агар  $\gamma$  (2) тенгламанинг илдизи бўлмаса,  $S = 0$ , агар  $\gamma$  тенгламанинг  $p$  каррали илдизи бўлса  $S = P$ .

$Q_m(x)$  кўпхаднинг коэффициентларини топиш учун (6) ечимни берилган дифференциал тенгламага қўйиб, тенгликнинг ўнг ва чап томонидаги ўхшаш ҳадларнинг коэффициентларини тенглаш керак.

Агар ўнг томонида  $\sin$  ва  $\cos$  лар иштирок этиб қолса, бизга маълумки, улар Эйлер формуласи ёрдамида кўрсаткичли функциялар орқали ифодалаш мумкин:

$$\cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \quad \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \quad (7)$$

У ҳолда масала ҳозир кўрилган ҳолга келади.

Агар тенглама чап томонининг коэффициентлари ҳақиқий бўлса, (7) комплекс функцияларсиз масалани ҳал қилиш мумкин.

Ўнг томони

$$e^{\alpha x} (P_k(x) \cos \beta x + Q_i(x) \sin \beta x) \quad (8)$$

кўринишда бўлган тенгламаларда хусусий ечимни

$$y_1 = x^S e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x) \quad (9)$$

кўринишда кидириш мумкин. Бу ерда, агар  $\alpha + \beta i$  (2) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса,

$S = 0$ , акс ҳолда  $S = \alpha + \beta i$  илдизнинг карралиги,  $R_m(x)$  ва  $T_m(x)$  –  $m$ -тартибли кўпхадлар,

$m = \max\{k, 1\}$ ,  $R_m(x)$  ва  $T_m(x)$  кўпхадларнинг коэффициентларини топиб олиш учун (9) хусусий ечими берилган тенгламага қўйиб, тенгликнинг ўнг ва чап томонидаги ўхшаш ҳадларнинг коэффициентларини тенглаштириш керак.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламанинг умумий ечими, шу тенгламанинг битта хусусий ечими билан унга мос келган бир жинсли тенгламалари йиғиндисига тенг. Ундан ташқари, агар тенгламанинг ўнг томони бир нечта функциялар йиғиндисидан иборат бўлса, унинг хусусий ечими шу тенглама чап томонидаги қўшилувчиларнинг ҳар бирига тенглаштириб олинган тенгламалар хусусий ечимлари йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин.

**Мисоллар.** а)  $y'' + y = 4xe^x$  тенгламани ечинг.

Ечими. I.  $y'' + y = 0$  бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Характеристик тенгламасы  $\lambda^2 + 1 = 0$ , бундан  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими  $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$  кўринишда бўлади.

II. Берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}$$

кўринишда кидирамиз. Бизнинг мисолимизда  $S = 0$ , чунки  $\gamma = 1$  характеристик тенгламанинг илдизи эмас,  $Q_m(x) = b_0 + b_1 x$ , чунки  $P_m(x) = 4x$ , яъни  $m = 1$ , шунинг учун хусусий ечими

$$y_1 = (b_0 + b_1 x) e^x$$

кўринишда кидирамиз. Буни берилган тенгламага қўйиб,

$$y'_1 = (b_0 + b_1 + b_1 x) e^x; \quad y'_1 = (b_0 + 2b_1 + b_1 x) e^x;$$

$$(b_0 + b_1 x) e^x + (b_0 + 2b_1 + b_1 x) e^x = 4x e^x;$$

$$2b_0 + 2b_1 + 2b_1 x = 4x; \quad 2b_0 + 2b_1 = 0;$$

$$2b_1 = 4; \quad b_0 = -2; \quad b_1 = 2$$

ларни оламиз. Демак, хусусий ечим  $y_1 = (2x - 2) e^x$  кўринишда экан.

Берилган тенгламанинг умумий ечими, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (I) билан берилган тенгламанинг хусусий ечими (II) нинг йиғиндисига тенг:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + (2x - 2) e^x.$$

б)  $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$  тенгламани ечинг.

Ечими. I.  $y'' + 2y' - 3y = 0$  бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз.

Характеристик тенгламасы  $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$  кўринишда бўлади, бундан  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -3$  эканлигини топамиз, демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

кўринишда бўлади.

II. Берилган тенгламанинг хусусий ечимини олдинги мисолдагидек (6) кўринишда кидирамиз.

Бизнинг мисолимизда  $S = 1$ , чунки  $\gamma = 1$  характеристик тенгламанинг бир қаррали илдизи,

$$Q_m(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

чунки  $P_m(x) = x^2$ , яъни  $m = 2$ , шунинг учун хусусий ечим

$$y_1 = x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) e^x$$

кўринишда кидирилади. Буни берилган тенгламага қўйиб,

$$y'_1 = [b_0 + (b_0 + 2b_1)x + (3b_2 + b_1)x^2 + b_2 x^3] e^x,$$

$$y''_1 = [2 + (b_0 + b_1) + (b_0 + 4b_1 + 6b_2)x + (6b_2 + b_1)x^2 + b_2 x^3] e^x,$$

$$[2 + (b_0 + b_1) + (b_0 + 4b_1 + 6b_2)x + (6b_2 + b_1)x^2 + b_2 x^3] e^x +$$

$$+ 2[b_0 + (b_0 + 2b_1)x + (3b_2 + b_1)x^2 + b_2 x^3] e^x -$$

$$- 3x[b_0 + b_1 x + b_2 x^2] e^x = x^2 e^x,$$

$$4b_0 + 2b_1 = 0, \quad 8b_1 + 6b_2 = 0, \quad 12b_2 = 1,$$

$$b_2 = 1/12, \quad b_1 = -1/16, \quad b_0 = 1/32$$

ларни оламитиз . Демак, хусусий ечим

$$y_1 = x \left( 1/32 - 1/16 \cdot x + 1/12 \cdot x^2 \right) e^x$$

кўринишда экан.

Юқоридагидек, берилган тенгламанинг умумий ечими бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (I) билан бир жинсли бўлмаган (берилган) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисига тенг

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + x \left( 1/32 - 1/16 \cdot x + 1/12 \cdot x^2 \right) e^x.$$

в)  $y'' - 3y' + 2y = x e^x \cos x$  тенгламани ечинг.

Ечими. I.  $y'' - 3y' + 2y = 0$  бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

бўлиб, унинг илдизлари,  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  бўлади. Бундан эса бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

кўринишда эканлиги келиб чиқади.

II. Энди берилган тенгламанинг хусусий ечимини (9) кўринишда, яъни

$$y = x^s e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)$$

холда қидирамиз, чунки тенгламанинг ўнг томони (8) кўринишда, Бизнинг мисолда  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\alpha \pm \beta l = 1 + l$ ,  $S = 0$ , чунки  $\alpha + \beta l = 1 + l$ ,  $S = 0$ , характеристик тенгламанинг ечими эмас.

$R_m(x) = a_0 + a_1 x$ ,  $T_m(x) = b_0 + b_1 x$ , чунки  $P(x) = x$  ва  $Q(x) = 0$ , бўлиб,  $k = 1$  ва  $l = 0$ , шунинг учун  $m = 1$ . Шундай қилиб, хусусий ечимни

$$y_1 = e^x \left( (a_0 + a_1 x) \cos x + (b_0 + b_1 x) \sin x \right)$$

кўринишда қидиришимиз керак экан. Буни тенгламага қўйиб,

$$\begin{aligned} y_1' = & \left[ (b_1 - a_0 - a_1 x) \sin x + (a_1 + b_0 + b_1 x) \cos x + (a_0 + a_1 x) \cos x + \right. \\ & \left. + (b_0 + b_1 x) \sin x \right] e^x = \left[ (a_0 + b_0 + a_1 + (a_1 + b_1) x) \cos x + \right. \\ & \left. (b_0 - a_0 + b_1 + (b_1 - a_1) x) \sin x \right] e^x, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'' = & \left\{ [a_1 + b_1 + b_0 - a_0 + b_1 + (b_1 - a_1) x] \cos x + \right. \\ & + [b_1 - a_1 + a_0 + b_0 + a_1 + (a_1 + b_1) x] \sin x + \\ & + [a_0 + b_0 + a_1 + (a_1 + b_1) x] \cos x + \\ & \left. + [b_0 - a_0 + b_1 + (b_1 - a_1) x] \sin x \right\} e^x = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ [2(a_1 + b_1 + b_0) + 2b_1 x] \cos x [2(b_0 + b_1) + 2b_1 x] \sin x \right\} e^x, \\ & 2[(a_1 + b_1 + b_0) + b_1 x] \cos x + 2[(b_0 + b_1) + b_1 x] \sin x - \\ & - 3\{[(a_0 + b_0 + a_1) + (a_1 + b_1) x] \cos x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ (b_0 - a_0 + b_1) + (b_1 - a_1)x \right] \sin x \} + \\
& + 2 \left[ (a_0 + a_1 x) \cos x + (b_0 + b_1 x) \sin x \right] = x \cos x, \\
& 2b_1 - a_1 - a_0 - b_0 = 0, \quad -a_1 - b_1 = 1, \quad 3a_0 + b_0 - b_1 = 0, \\
& b_1 + 3a_1 = 0, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 1/2, \quad b_0 = -4\frac{1}{2}, \quad b_1 = -1\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ларни оламиз. Бундан эса берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y_1 = e^x \left( (1 + 1/2 \cdot x) \cos x - \left( 4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}x \right) \sin x \right)$$

кўринишда эканлиги келиб чиқади.

Демак, берилган тенгламаларнинг умумий ечими бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (1) билан берилган тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисига тенг:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left[ (1 + 1/2 \cdot x) \cos x - \left( 4\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}x \right) \sin x \right] e^x.$$

а)  $y'' - 5y' - 3x^2 + \sin 5x$  тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиб оламиз:  $y'' - 5y' = 0$ . Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси  $\lambda^2 - 5\lambda = 0$  кўринишда бўлади, бундан  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 5$  ларни оламиз. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{5x} = y = C_1 + C_2 e^{5x}$$

кўринишда бўлади.

Юқорида эслатилган қоидага қўра, бу тенгламанинг ўнг томони иккита ҳар хил функцияларнинг йиғиндиси бўлган учун тенгламанинг чап томони, унинг ўнг томонидаги қўшилувчиларнинг ҳар бирига тенглаштириб, хусусий ечимлар топамиз ва берилган тенгламанинг хусусий ечими сифатида уларнинг йиғиндисини оламиз.

II.  $y'' - 5y' = 3x^2$  тенгламанинг хусусий ечимини (6) кўринишда яъни  $y_1 = x^s Q_m(x) e^{\gamma x}$  ҳолда қидирамиз. Бизнинг мисолда  $\gamma = 0$  ва демак,  $S = 0$  чунки  $\gamma = 0$  характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи,  $Q_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ , чунки  $P_m(x) = 3x^2$ , шундай қилиб хусусий ечимни

$$y_1 = x(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3$$

кўришда қидириш керак экан. Буни тенгламага қўйиб

$$\begin{aligned}
& y_1' = a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2, \quad y_1'' = 2a_1 + 6a_2 x, \\
& 2a_1 + 6a_2 x - 5(a_0 + 2a_1 x + 3a_2 x^2) = 3x^2, \quad 2a_1 - 5a_0 = 0, \\
& 6a_2 - 10a_1 = 0, \quad -15a_2 = 3, \quad a_1 = -3/25, \quad a_0 = -6/125
\end{aligned}$$

ларни оламиз. Демак, бу тенгламанинг хусусий ечими

$$y_1 = -6/125 \cdot x - 3/25 \cdot x^2 - 1/5 x^3$$

кўринишда экан.

III.  $y'' - 5y' = \sin 5x$  тенгламанинг хусусий ечими (9) кўринишда, яъни  $y_2 = x^s e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + T_m(x) \sin \beta x)$  ҳолда қидирамиз. Бизнинг мисолимизда

$S = 0$ , чунки  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 5$ ,  $\alpha + \beta l = 5l$  характеристик тенгламанинг илдизи эмас,  
 $R_m(x) = a_0$ ,  $T_m(x) = b_0$ , чунки

$$P(x) = 0, Q(x) = 1, k = 0, l = 0$$

бўлиб, шундай қилиб, хусусий ечимни

$$y_2 = a_0 \cos 5x + b_0 \sin 5x$$

кўринишда кидириш керак экан. Буни тенгламага қўйиб,

$$\begin{aligned} y_2' &= 5b_0 \cos 5x - 5a_0 \sin 5x, \quad y_2'' = -25b_0 \sin 5x - 25a_0 \cos 5x, \\ -25b_0 \sin 5x - 25a_0 \cos 5x - 25b_0 \cos 5x + 25a_0 \sin 5x &= \sin 5x, \\ 25a_0 - 25b_0 &= 1, \quad 25a_0 + 25b_0 = 0, \quad a_0 = 1/50, \quad b_0 = -1/50 \end{aligned}$$

ларни оламир. Бундан эса ўз навбатида хусусий ечимнинг

$$y_2 = 1/50 \cos 5x - 1/50 \sin 5x$$

эканлиги келиб чиқади.

Юқорида айтилганига кўра, берилган тенгламанинг умумий ечимини топилган ечимларнинг йиғиндисидан иборат:

$$y = C_1 + C_2 e^{5x} - (6x/125 + 3x^2/25 + x^3/5) + 1/50 \cos 5x - 1/50 \sin 5x.$$

**3. Ўзгармасни вариациялаш усули.** Чизикли бир жинсли бўлмаган

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (10)$$

тенгламанинг ечишнинг умумий усулларида бири ўзгармасни вариациялаш усулидир.

Фараз қилайлик, бир жинсли чизикли

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

тенгламанинг умумий ечими топилган ва у  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  кўринишда бўлсин. Бу ерда  $C_1$  лар ихтиёрий ўзгармаслар,  $y_1(x)$  лар эса бир жинсли тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси у ҳолда (10) тенгламанинг ечими,

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \dots + C_n(x) y_n$$

кўринишда кидирилади. Бу ерда  $C_i(x)$  номаълум функцияларни топиб олиш учун

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0,$$

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0,$$

.....

(12)

$$C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0,$$

$$C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x)$$

тенгламани системасини оламир. Бу системанинг  $C_1'$ ,  $C_2'$ , ...,  $C_n'$  ечимларини топиб, уларни интеграллаб  $C_1(x)$ ,  $C_2(x)$ , ...,  $C_n(x)$  функцияларини оламир. Буларни (11) га қўйиб, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини оламир. (12) системанинг ечимга эга эканлиги  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ , ...,  $y_n(x)$  функцияларнинг фундаментал ечимлар системаси эканлигидан келиб чиқади.

**Мисол.**  $y'' + y = 1/\sin x$  тенгламани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечинг.

Ечими.  $y'' + y = 0$  бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиб олайлик.

Характеристик тенгламасы  $\lambda^2 + 1 = 0$  бўлиб,  $\lambda = \pm 1$  бўлади. Шунинг учун, бир жинсли тенгламанинг ечими

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

кўринишда эканлиги келиб чиқади.

Энди берилган тенгламанинг ечимини

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

кўринишда излаймиз, буни тенгламага қўйиб (12) системани оламиз

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0,$$

$$-C_1' \sin x + C_2' \cos x = 1/\sin x.$$

Бу системани ечиб,  $C_2' = \operatorname{ctg} x$ ,  $C_1' - 1$  ифодаларни, буларни интеграллаб эса

$$C_1(x) = -x + \bar{C}_1, \quad C_2(x) = \ln \sin x + \bar{C}_2 \text{ ларни оламиз. Буларни олиб бориб ўрнига қўйиб}$$

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$$

берилган тенгламани умумий ечимини оламиз.

4. Ушбу

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

ёки

$$a_0 (ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (14)$$

кўринишдаги тенгламалар Эйлер тенгламасы дейилади. (13) тенглама  $x = \pm e^t$  алмаштириш билан, (14)

тенглама эса  $ax + b = \pm e^t$  алмаштириш билан чизиқли ўзгармас коэффициентли тенгламаларга келтириш мумкин. Бундай тенгламаларни ечиш эса аввалига пунктларда муфассал ўрганилди.

**Мисол.**  $x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$  Эйлер тенгламасини ечинг.

Ечими.  $x = e^t$  алмаштириш бажарамиз. Тушунарлики,  $t = \ln x$ , бундан

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = y_t' \frac{1}{x} = y_t' e^{-t},$$

$$y'' = \frac{d}{dx} (y_t' e^{-t}) = e^{-t} \frac{d}{dx} (y_t') + y_t' \frac{d}{dx} (e^{-t}) =$$

$$= e^{-t} \frac{d}{dx} (y_t') \frac{dt}{dx} + y_t' \frac{d}{dt} (e^{-t}) \frac{dt}{dx} = e^{-2t} y_{tt}'' - e^{-2t} y_t' = e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t').$$

Энди тенгламага қўйиб

$$e^{2t} \cdot e^{-2t} (y_{tt}'' - y_t') - e^t e^{-t} y' + y = 8e^{3t}$$

ифодани оламиз, бундан эса

$$y_{tt}'' - 2y_t' + y = 8e^{3t} \quad (15)$$

ўзгармас коэффициентли тенгламани оламиз.

Аввало бир жинсли  $y_{tt}'' - 2y_t' + y = 0$  тенгламанинг умумий ечимини топиб оламиз.

Характеристик тенгламасы  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  кўринишда бўлгани учун  $\lambda = 1$  унинг икки қаррали илдири.

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими  $y = C_1 e^t + C_2 t e^t$  кўринишда экан.

(15) тенгламанинг хусусий ечимини  $y_1 = a_0 e^{3t}$  кўринишда кидирамиз (2-пунктга қаранг). У

ҳолда



$$y_1' = 3a_0 e^{3t}, \quad y_1'' = 9a_0 e^{3t}, \quad 9a_0 e^{3t} - 6a_0 e^{3t} + a_0 e^{3t} = 8e^{3t}, \quad 4a_0 = 8, \quad a_0 = 2$$

келиб чиқади. Бундан эса хусусий ечим  $y_1 = 2e^{3t}$  кўринишда эканлиги келиб чиқади. Энди (15) тенгламанинг умумий ечимини ёза оламиз:

$$y = C_1 e^t + C_2 t e^t + 2e^{3t}.$$

Бундан эса  $t = \ln x$  эканлигини ҳисобга олиб, берилган тенгламанинг умумий ечимини оламиз.

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + 2x^3.$$

5. Ўзгарувчи коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар. Агар  $n$ -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг  $y_1$  хусусий ечими маълум бўлса, унинг тартибини чизиклилигини сақлаган ҳолда пасайтириш мумкин. Бунинг учун аввало  $y = y_1 z$  ва кейин  $z' = u$  алмаштиришларни бажариш зарур.

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$  тенгламанинг хусусий ечими маълум бўлса, юқорида айtilган усул билан бу тенгламанинг тартибини пасайтириш мумкин. Лекин мана шу хусусий ҳолда Остроградский-Лиувилл формуласидан фойдаланган маъқулроқ:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C e^{-\int P(x) dx} \cdot P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad (16)$$

бу ерда  $y_1$  ва  $y_2$  лар берилган тенгламанинг ихтиёрий чизикли эркин ечимлари.

**Мисол.**  $x^2(x+1)y'' - 2y = 0$ ,  $y_1 = 1 + 1/x$  бўлса тенгламанинг умумий ечимини топинг.

*Ечими.* Остроградский-Лиувилл формуласига кўра қуйидагини оламиз:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int \frac{0}{x(x+1)} dx} \cdot y_1 y_2' - y_1' y_2 = C_1. \quad (17)$$

$y_1 = 1 + 1/x$  бўлгани учун  $y_2$  га нисбатан чизикли дифференциал тенгламани оламиз, уни қуйидагича усул билан осонроқ ечиш мумкин:

$$\left( \frac{y_2}{y_1} \right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{C_1}{y_1^2}.$$

$y_1 = 1 + 1/x$  ни охириги тенгликка қўйиб интеграллаймиз ва

$$\frac{y_2}{1 + 1/x} = \int \frac{C_1 dx}{(1 + 1/x)^2} + C_2 = \bar{C}_1 \left[ x/2 - \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} \right] + C_2.$$

$$\begin{aligned} y_2 &= (1 + 1/x) \left[ \bar{C}_1 \left( x/2 - \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} \right) + C_2 \right] = \\ &= C_2 (1 + 1/x) + \bar{C}_1 \left( \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x} \ln|x+1| \right) \end{aligned}$$

тенгликларга эга бўламиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_2 (1 + 1/x) + \bar{C}_1 \left( \frac{x+1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x} \ln|x+1| \right)$$

кўринишда бўлар экан.

6. Тушунарлики, олдинги пунктда берилиши талаб қилинган хусусий ечим доим ҳам маълум бўлавермайди, ундан ташқари хусусий ечимни топишнинг ҳатто иккинчи тартибли чизиқли тенгламалар учун ҳам умумий усули йўқ. Баъзи ҳолларда танлаб олиш йўли билан хусусий ечимни топишга эришиш мумкин. Бунда албатта берилган тенгламанинг ўнг томонидаги ифодага эътибор бериш керак, масалан, тенгламанинг ўнг томони полином бўлса, хусусий ечимни полином кўринишда,  $1/x$  нинг функцияси кўринишида бўлса, хусусий ечимни  $a/x$  ёки унинг функцияси кўринишида, агар  $e^{\alpha x}$  нинг функцияси кўринишида бўлса,  $ae^{\alpha x}$  ёки унинг функцияси кўринишида кидирган маъкул ва ҳ.к.

**Мисоллар.** а)  $(2x+1)y'' + 4xy' - 4 = 0$  тенгламанинг  $y_1 = ae^{\alpha x}$  кўринишдаги ечими мавжуд бўлса, уни топинг.

Ечими.  $y_1 = e^{\alpha x}$  ни тенгламага қўямиз:

$$(2x+1)a^2e^{\alpha x} + 4x \cdot ae^{\alpha x} - 4e^{\alpha x} = 0;$$

$$(2x+1)a^2 + 4xa - 4 = 0;$$

$$(2a^2 + 4a)x + (a^2 - 4) = 0;$$

$$2a^2 + 4a = 0, \quad a^2 - 4 = 0, \quad a = -2$$

келиб чиқади. Демак, берилган тенгламанинг  $y_1 = e^{-2x}$  хусусий ечими бўлар экан.

б) Худди шу юқоридаги тенгламанинг  $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$  кўринишдаги ечими мавжуд бўлса, уни топинг.

Ечими.  $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$  ни тенгламага қўйиб, аввало кўпхаднинг тартибини топиб оламиз, бунинг учун ҳосил бўлган тенгликдаги  $x$  нинг энг катта даражаси олдидаги коэффициентини нолга тенглаймиз:

$$(2x+1)(n(n-1)x^{n-2} + \dots) + 4x(nx^{n-1} + \dots) - 4(x^n + \dots) = 0,$$

$$(4n-4)x^n = 0, \quad 4n-4 = 0,$$

бундан эса  $n = 1$  эканлиги келиб чиқади. Демак, кўпхаднинг тартиби фақат 1 бўлиши мумкин, яъни хусусий ечимни  $y_1 = x + a$  кўринишда кидириш керак. Тенгламага қўямиз:

$$(2x+1) \cdot 0 + 4x \cdot 1 - 4(x+a) = 0$$

бундан эса  $a = 0$  ни оламиз. Демак, хусусий ечим  $y_1 = x$  кўринишда экан.

**Тенгламанинг умумий ечимини топинг.**

206.  $y'' + 4y' + 3y = 0$

207.  $y''' - 2y'' + 9y' - 18y = 0$

208.  $y'' - 2y' + 10y = 0$

209.  $y^{IV} + 2y'' - 8y' + 5y = 0$

210.  $y''' - 8y = 0$

211.  $y^{IV} - 2y''' - 2y' - y = 0$

212.  $y^{IV} + 4y = 0$

213.  $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = 0$

214.  $y^{IV} - y = 0$

215.  $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

216.  $y'' + 2y' - 3y = e^{2x}$

217.  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$

218.  $y'' - 9y' = e^{3x} \cos x$

219.  $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$

220.  $y'' + 64y = 16 \sin 8x - 16 \cos 8x - 64e^{8x}$

221.  $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$

$$222. y'' + 81y = 9 \sin 9x + 3 \cos 9x + 162e^{9x}$$

$$223. y''' - 64y' = 128 \cos 8x - 64e^{8x}$$

$$224. y''' - 8y' = 162e^{9x} + 81 \sin 9x$$

Тенгламани ўзгармасларни вариациялаш методи билан ечинг.

$$225. xy'' + (2x - 1)y' = -4x^2$$

$$226. y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos x \operatorname{ctg} x$$

$$227. y'' + y = 1/\cos x$$

$$228. y'' + 4y = 2 \operatorname{ctg} x$$

$$229. y'' + y = 2/\sin^2 x$$

$$230. y'' + y = x \sin x$$

Эйлер тенгламасини ечинг.

$$231. x^2 y'' - 2y = \cos \ln x$$

$$232. (x+1)^2 y''' - 12y' = 0$$

$$233. x^2 y'' - xy' + x^4/(1+x^2) = 0$$

$$234. x^2 y'' - xy' + y = 8x^3$$

$$235. x^2 y'' - xy' - y = x^4$$

Ҳар хил усулларни қўллаб, тенгламани ечинг.

$$236. y'' - 3y' + 2y = (3 + e^{-x})^{-1}, \quad y(0) = 1 + 8 \ln 2, \quad y'(0) = 14 \ln 2$$

$$237. y'' + y/4 = 1/4 \cdot \operatorname{ctg}(x/2), \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = 1/2$$

$$238. y'' - 3y' + 2y = e^x/(1 + e^x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$239. y'' + y' = e^x/(2 + e^x), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9$$

$$240. y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x}/(1 + e^{-3x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Функцияларни чизиқли боғлиқ ёки эркин эканлигини текширинг.

$$241. e^x, e^{2x}, e^{3x}$$

$$242. x, e^x, xe^x$$

$$243. \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, 2e^x - 1, 3e^x + 5$$

$$244. x^2 - x + 3, 2x^2 + x, 2x - 4$$

$$245. x^2 + 2x, 3x^2 - 1, x + 4$$

Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$$246. x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0$$

$$247. x(2x+4)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$$

$$248. xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0, \quad y_1 = e^x$$

$$249. y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0, \quad y_1 = e^{ax^2}$$

$$250. y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0, \quad y_1 = \sin x$$

Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламани ечинг.

$$251. x^2 y'' \ln x - xy' + y = x^2 \ln x$$

$$252. x^2 y'' \ln x - xy' + y = x \ln x$$

$$253. xy'' - (2x+1)y' + 2y = 2xe^{2x}$$

$$254. x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 10x$$

$$255. x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = x^2 + 1$$

Ушбу тенгламаларнинг  $-\infty < x < +\infty$  даги чегараланган ечимини топинг ва унинг даврий ечими эканлигини кўрсатинг.

$$256. y'' + 3y' + 2y = \sin x$$

$$257. y'' + 3y' + 2y = \cos x$$

$$258. y'' + 5y' + 6y = \sin x$$

$$259. y'' + 5y' + 6y = \cos x$$

$$260. y'' + 7y' + 10y = \sin 2x$$

261. Ер шарининг марказидан ингичка кувур ўтказилган бўлсин. Унга ташланган тош ер марказига орадаги масофага пропорционал бўлган куч билан тортилади. Тош қанча вақтда кувурни босиб ўтади?

262. Ҳавонинг қаршилиги жисм тезлигининг квадратига пропорционал ва тезлик лимитини 75 м/сек деб олиб, бошланғич тезлиги нолга тенг бўлган эркин тушувчи жисм ҳаракат қонунини топинг.

263. Жисм бир минутда 90 марта тебранади ва 15 секунд давомида тебраниш амплитудаси икки марта камаяди. Тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

264. Қайикқа  $U = 6$  м/сек бошланғич тезлик берилган. Ҳаракат бошлангандан 60 секунд ўтгач, бу тезлик икки марта камайда. Агар сувнинг қаршилиқ кучи қайиқ тезлигига тўғри пропорционал бўлса, унинг ҳаракат қонунини топинг.

265. Массаси  $m$  бўлган моддий нукта координата бошидан туртилиб, масофага тўғри пропорционал бўлган  $F(F = 8mx)$  куч таъсирида ҳаракат қилмоқда. Нуктага муҳитнинг  $R = 2mv$  қаршилиқ кучи таъсир қилаётган бўлсин. Агар  $t = 0$  координата бошидан моддий нуктагача бўлган масофа 3 га тенг ва тезлик ноль бўлса, нуктанинг ҳаракат қонунини топинг.

### Синов учун савол ва топшириқлар

1.  $n$ -тартибли ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли тенгламанинг умумий кўринишини ёзинг ва уни ечиш усулини келтиринг.

2. Унинг хусусий ечимини топиш мумкин бўлиши учун ўнг томони қандай кўринишга эга бўлиши керак?

3. Чизикли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг битта хусусий ечими ва бир жинсли тенгламанинг умумий ечими маълум бўлганда унинг умумий ечимини қандай топилади.

4.  $n$ -тартибли тенгламалар учун ўзгармас вариациялаш методини мисолларда тушунтиринг.

5. Эйлер тенгламасининг умумий кўринишини ёзинг. Қандай алмаштириш ёрдамида у ўзгармас коэффициентли чизикли тенгламага келтирилади?

6. Функцияларнинг чизикли боғлиқлиги ва чизикли эркилиги таърифини келтиринг ва мисолларда кўрсатинг.

$$7. \text{Эйлер тенгламасини ечинг: } 4x^3 y''' + 3xy' - 3y = 0$$

$$8. y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0, \quad y_1 = \operatorname{tg} x \text{ тенгламанинг умумий ечимини топинг.}$$

### 1. Тенгламани ечинг.

- 1.1.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 2, y''(0) = 3$   
1.2.  $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$  1.3.  $y'' - 2y' - 2y = 0$   
1.4.  $y^{vi} + 2y^v + y^{iv} = 0$  1.5.  $y''' - 8y' + 5y = 0$   
1.6.  $y''' - 2y'' + 2y' = 0$  1.7.  $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$   
1.8.  $y''' - 2y'' + 2y' = 0$  1.9.  $y^{iv} - y = 0$   
1.10.  $y''' - 3y'' - 2y' = 0$  1.11.  $2y''' - 3y'' + y' = 0$   
1.12.  $y^v - 10y''' + 9y' = 0$  1.13.  $y''' + 8y = 0$   
1.14.  $y^{iv} + y = 0$  1.15.  $y^{iv} + 10y'' + 9y = 0$   
1.16.  $y^{iv} + 8y'' + 16y = 0$  1.17.  $y^v + 8y''' + 16y' = 0$   
1.18.  $y^{iv} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$  1.19.  $y^{iv} + 2y''' + 2y'' - 5y = 0$   
1.20.  $y^v + 4y^{iv} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$

### 2. Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

- 2.1.  $y'' - 2y' = 2ch2x$  2.2.  $y'' + y' = 2\sin x - 6\cos x + 2e^x$   
2.3.  $y''' - y' = 2e^x + \cos x$  2.4.  $y'' - 3y' = 2ch3x$   
2.5.  $y'' - 4y' = 16ch4x$  2.6.  $y'' + 2y' = 2sh2x$   
2.7.  $y'' + 3y' = 2sh3x$  2.8.  $y'' + y' = 2shx$   
2.9.  $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$   
2.10.  $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^x$   
2.11.  $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$   
2.12.  $y'' - 4y = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$   
2.13.  $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$   
2.14.  $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$   
2.15.  $y'' + 25y' = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$   
2.16.  $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\sin 4x - 64\cos 4x$   
2.17.  $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$   
2.18.  $y''' - 25y' = 25(\cos 5x + \sin 5x) - 50e^{5x}$   
2.19.  $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$   
2.20.  $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\sin 6x + \cos 6x)$

### 3. Тенгламани ўзгармасларни вариациялаш методи билан ечинг.

- 3.1.  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$  3.2.  $y'' + y = \operatorname{tg} x$

$$3.3. y'' - y = \frac{1}{x}$$

$$3.5. y'' - 2y' + y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$$

$$3.7. y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$3.9. y'' + y = \frac{1}{\sin x}$$

$$3.11. y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$$

$$3.13. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$3.15. y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$$

$$3.17. y''' + y'' = \frac{x-1}{x^2}$$

$$3.19. y'' - 2y'tg x = 1$$

$$3.4. y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$3.6. y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$$

$$3.8. y'' + y = \frac{1}{\sin 2x \sqrt{\cos 2x}}$$

$$3.10. y'' - y = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$3.12. y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$$

$$3.14. y'' + 2y' + 2y = \frac{1}{e^x \sin x}$$

$$3.16. y'' - y = e^{2x} \cos e^x$$

$$3.18. xy'' - (1 + 2x^2)y' = 4x^3 e^{x^2}$$

$$3.20. (x \ln x)y'' - y' = \ln^2 x$$

#### 4. Эйлер тенгламасини ечинг.

$$4.1. x^2 y'' + xy' + y = x(6 - \ln x)$$

$$4.3. x^2 y'' - xy' - 3y = -\frac{16 \ln x}{x}$$

$$4.5. x^2 y'' - xy' = -x + \frac{3}{x}$$

$$4.7. x^2 y'' + xy' + y = 2 \sin(\ln x)$$

$$4.9. x^2 y'' + 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$$

$$4.11. (x+1)^3 y'' - 3(x+1)^2 y' + (x+1)y = 6 \ln(x+1)$$

$$4.12. (x-2)^2 y'' - 3(x-2)^2 y' + 4y = x$$

$$4.13. (2x+1)^2 y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4$$

$$4.14. (x-2)^2 y'' - 3(x-2)^2 y' + 3y = x + 1$$

$$4.15. (2x+3)^3 y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0$$

$$4.16. (2x+1)^2 y'' + 2(2x+1)y'' + y' = 0$$

$$4.17. (2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y = 0$$

$$4.18. (x+2)^2 y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$$

$$4.2. x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$$

$$4.4. x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x$$

$$4.6. x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$$

$$4.8. x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$$

$$4.10. x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2 \ln^2 x + 12$$

$$4.19. (x+1)^2 y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$$

$$4.20. x^2 y'' - 3xy' + 5y = 3x^2$$

5. Ҳар хил усуллар қўллаб, тенгламани ечинг.

$$5.1. y'' + 2y' + y = \cos 1x$$

$$5.2. y'' + 2iy = 8e^x \sin x$$

$$5.3. y'' - 8y' = \cos 2x$$

$$5.4. y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{xe^x}$$

$$5.5. x^2 y'' - 2y' = \frac{x^2}{x+1}$$

$$5.6. y'' - 2y' + y = xe^x \sin^2 ix$$

$$5.7. y'' + 2iy' - y = 8\cos x$$

$$5.8. y'' - \frac{2y}{x^2} = 2\ln(-x)$$

$$5.9. y'' + 2y' + 5y = e^{-x}(\cos^2 x + \operatorname{tg} x) \quad 5.10. x^2 y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$$

$$5.11. y'' + y' = 4x \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$5.12. y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$$

$$5.13. y'' - 6y' + 9y = 16e^{-x} + 9x - 6, \quad y(0) = y'(0) = 1$$

$$5.14. y'' - y' = -5e^{-x}(\sin x + \cos x), \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 5$$

$$5.15. y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x, \quad y(\pi) = \pi e^\pi, \quad y'(\pi) = e^\pi$$

$$5.16. y''' - y' = -2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$$

$$5.17. y^{IV} - y = 8e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$$

$$5.18. y''' - y = 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2$$

$$5.19. y^{IV} - y = 8e^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = 4, \quad y'''(0) = 6$$

$$5.20. y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-x}}, \quad y(0) = 4\ln 4, \quad y'(0) = 9\ln 4 - 3$$

6. Функцияларни чизиқли боғлиқ ёки эркин эканлигини текширинг.

- |                                                                                  |                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 6.1. $e^x$ , $xe^x$ , $x^2e^x$                                                   | 6.2. $\sin x$ , $\cos x$ , $\cos 2x$                |
| 6.3. $1$ , $\sin x$ , $\cos 2x$                                                  | 6.4. $5$ , $\cos^2 x$ , $\sin^2 x$                  |
| 6.5. $\cos x$ , $\cos(x+1)$ , $\cos(x-2)$                                        | 6.6. $1$ , $\sin 2x$ , $(\cos x - \sin x)^2$        |
| 6.7. $x$ , $a^{\log_a x}$ ( $x > 0$ )                                            | 6.8. $\log_a x$ , $\log_a x^2$ ( $x > 0$ )          |
| 6.9. $1$ , $\arcsin x$ , $\arccos 2x$                                            | 6.10. $5$ , $\arctg x$ , $\operatorname{arccctg} x$ |
| 6.11. $2\pi$ , $\arctg \frac{x}{2\pi}$ , $\operatorname{arccctg} \frac{x}{2\pi}$ | 6.12. $x$ , $ x $ , $2x + \sqrt{2x^2}$              |
| 6.13. $\arctg x$ , $\operatorname{arccctg} x$ , $1$                              | 6.14. $\sqrt{x}$ , $\sqrt{x+1}$ , $\sqrt{x+2}$      |
| 6.15. $\sin x$ , $\sin(x+2)$ , $\cos(x-5)$                                       | 6.16. $2^x$ , $3^x$ , $6^x$                         |
| 6.17. $\sin x$ , $\cos x$ , $\sin 2x$                                            | 6.18. $\ln x^2$ , $\ln 3x$ , $7$                    |
| 6.19. $1$ , $\sin^2 x$ , $\cos 2x$                                               | 6.20. $sh x$ , $ch x$ , $2 + e^x$                   |

7. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

- 7.1.  $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ ,  $y_1 = \frac{\sin x}{x}$
- 7.2.  $(\sin x - \cos x)y'' - 2\sin xy' + (\cos x + \sin x)y = 0$ ,  $y_1 = e^x$
- 7.3.  $(\cos x + \sin x)y'' - 2\cos xy' + (\cos x - \sin x)y = 0$ ,  $y_1 = \cos x$
- 7.4.  $(1 - x^2)y'' - xy' + 1/4 y = 0$ ,  $y_1 = \sqrt{1+x}$
- 7.5.  $(x^2 - 3x)y'' + (6 - x^2)y' + (3x - 6)y = 0$
- 7.6.  $x^2(2\ln x - 1)y'' - x(2\ln x - 1)y' + 4y = 0$
- 7.7.  $y'' + 2xy' - 2y = 0$
- 7.8.  $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$
- 7.9.  $(x^2 - 1)y'' = 6y$
- 7.10.  $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
- 7.11.  $(x^2 + 1)y'' - 2y = 0$
- 7.12.  $xy'' + (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$
- 7.13.  $(x^2 - 1)y'' + (x-3)y' - y = 0$
- 7.14.  $x^2y'' \ln x - xy' + y = 0$
- 7.15.  $(3x^3 - x)y'' - 2y' - 6xy = 0$
- 7.16.  $x(x+2)y'' - 2(x+1)y' + 2y = 0$
- 7.17.  $y'' + xy' - y = 0$



- 7.18.  $y'' + 2xy' - 2y = 0$   
 7.19.  $2x(x+2)y'' + (2-x)y' + y = 0$   
 7.20.  $x(x^2 + 6)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 6xy = 0$

8. Ўзгарувчи коэффициентли чизикли бир жинсли, бўлмаган тенгламанинг ечинг.

- 8.1.  $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + 1/x$   
 8.2.  $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$   
 8.3.  $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$ ,  $y_1 = 1/x$   
 8.4.  $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x$ ,  $y_1 = e^x$   
 8.5.  $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x}$ ,  $y_1 = \cos(e^{-x})$   
 8.6.  $(x^4 - x^3)y'' + (2x^3 - 2x^2 - x)y' - y = (x-1)^2/x$ ,  $y_1 = 1/x$   
 8.7.  $y'' - y' - e^{2x}y = xe^{2x} - 1$ ,  $y_1 = \sin(e^{-x})$   
 8.8.  $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = x^2(2x-3)$ ,  $y_1 = x^2$   
 8.9.  $(1+x^2)y'' + 2xy' = 6x^2 + 2$ ,  $y_1 = x^2$   
 8.10.  $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = x$   
 8.11.  $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = x^2$   
 8.12.  $(x+1)y'' + 4xy' - 4y = 1 + 2x$   
 8.13.  $(x+1)y'' + 4xy' - 4y = (1+2x)^2$   
 8.14.  $(x+1)y'' + 4xy' - 4y = (1+2x)e^{-2x}$   
 8.15.  $(x+1)y'' + 4xy' - 4y = (1+2x)^2 e^{-2x}$   
 8.16.  $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = xe^x$   
 8.17.  $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = xe^x$   
 8.18.  $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = x^2e^x$   
 8.19.  $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2+1)e^x$   
 8.20.  $x^2y'' \ln x - xy' + y = \ln x$

9. Масалаларни ечинг.

9.1.  $a$  ва  $b$  сонларнинг қандай қийматларида  $y'' + ay' + by = 0$  тенгламанинг барча ечимлари  $-\infty < X < +\infty$  да чегараланган бўлади?

9.2.  $a$  ва  $b$  сонларнинг қандай қийматларида  $y'' + ay' + by = 0$  тенгламанинг барча ечимлари  $X \rightarrow +\infty$  да нолга интилади?

9.3.  $a$  ва  $b$  сонларнинг қандай қийматларида  $y'' + ay' + by = 0$  тенгламанинг бирорта  $y(x) \neq 0$  бўлган ечими  $x \rightarrow +\infty$  да нолга интилади?

9.4.  $a$  ва  $b$  сонларнинг қандай қийматларида  $y'' + ay' + by = 0$  тенгламанинг  $y(x) = 0$  ечимидан бошқа ҳар бир ечими  $x$  нинг бирор қийматидан бошлаб абсолют қиймати монотон ўсувчи бўлади?

9.5.  $a$  ва  $b$  сонларнинг қандай қийматларида  $y'' + ay' + by = 0$  тенгламанинг ҳар бир ечими чексиз кўп нуқталарда нолга интилади?

9.6.  $y'' + y' - 2y = 0$  тенгламанинг  $x \rightarrow +\infty$  да нолга интилувчи  $y(x) \neq 0$  бўлган бирорта ечими мавжуд бўлишини исботланг.

9.7.  $k$  ва  $\omega$  сонлар қандай бўлганда  $y'' + k^2 y = \sin \omega t$  тенглама камида битта даврий ечимга эга бўлади?

9.8.  $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = \sin t$  тенгламани даврий ечимини топинг?

9.9.  $\ddot{x} + \dot{x} + 3x = \sin 2t$  тенгламани даврий ечимини топинг?

9.10.  $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = e^{\omega}$  тенгламани даврий ечимини топинг?

9.11.  $y'' + 3y' + 2,5y = 0$  тенгламани барча ечимлари  $x \rightarrow +\infty$  да  $y = 0(e^{-x})$  муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.12.  $y'' + 4y' + 5y = 0$  тенгламани барча ечимлари  $x \rightarrow +\infty$  да  $y = 0(e^{-x})$  муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.13.  $y'' + 4y' + 3,5y = 0$  тенгламани барча ечимлари  $x \rightarrow +\infty$  да  $y = 0(e^{-x})$  муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.14.  $y'' + 2,5y' + 1,6y = 0$  тенгламани барча ечимлари  $x \rightarrow +\infty$  да  $y = 0(e^{-x})$  муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.15.  $y'' + 2y' + y = 0$  тенгламанинг  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими  $x \rightarrow +\infty$  да нолга интилишини исботланг.

9.16.  $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 0$  тенгламанинг  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  бошланғич шартларни ечими  $x \rightarrow +\infty$  да нолга интилишини исботланг.

9.17.  $y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = 0$  тенгламанинг  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими  $x \rightarrow +\infty$  да нолга интилишини исботланг.

9.18.  $y'' + 7y' + \frac{49}{4}y = 0$  тенгламанинг  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими  $x \rightarrow +\infty$  да нолга интилишини исботланг.

9.19.  $y'' + 4y' + 4y = 0$  тенгламанинг  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими  $x \rightarrow +\infty$  да нолга интилишини исботланг.

9.20.  $a$  ва  $b$  сонлар қандай қийматларида  $y'' + ay' + by = 0$  тенгламанинг бирорта  $y(x) \neq 0$  бўлган ечими  $x \rightarrow -\infty$  да нолга интилади?

## 10. Масалани ечинг.

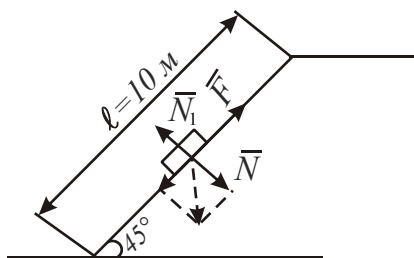
10.1. Массаси 2 грамм бўлган моддий нуқта секундига  $a$  динага ўсадиган  $F$  куч таъсирида тўғри чизиqli ҳаракат қилмоқда. Бошланғич пайтда нуқта координата бошида жойлашган бўлиб, тезлиги

$v_0 = 10$  см/сек эди. Кучнинг бошланғич қиймати  $F = 4$  дина ва координата бошида 450 см узоқликда тезлик  $v = 105$  см/сек эканлигини билган ҳолда  $a$  катталиқнинг қийматини топинг.

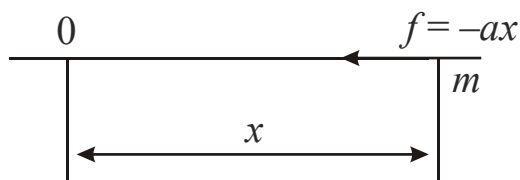
**10.2.** Массаси  $m$  бўлган моддий нукта координата бошидан туртилиб, масофага пропорционал бўлган  $F(F = 4mx)$  куч таъсирида ҳаракат қилмоқда. Нуктага муҳитнинг  $R = 3mv$  қаршилик кучи таъсир қилаётган бўлсин. Агар  $t = 0$  координата бошдан моддий нуктагача бўлган масофа 1 га тенг ва тезлик ноль бўлса, нуктанинг ҳаракат қонунини топинг.

**10.3.** Массаси  $m$  бўлган моддий нукта муҳитда тезликнинг биринчи даражасини тўғри пропорционал бўлган қаршилик таъсирида тушмоқда. Агар  $v = 1$  м/сек бўлганда қаршилик кучи оғирлик кучининг  $1/3$  қисмига тенг ва бошланғич тезлик  $v = 0$  бўлса, моддий нукта тезлигининг энг катта қийматини топинг.

**10.4.** Узунлиги  $l = 10$  м бўлган қия текисликдан  $T$  жисм сирпаниб тушмоқда (14-расмга қаранг). Қиялик бурчаги  $\alpha = 45^\circ$ , жисмнинг текислик сиртидаги ишқаланиш коэффиценти  $k = 0,5$  бўлсин. Агар жисм боланғич пайтда қия текислиқнинг юқори чўққисидан тинч ҳолатда турган бўлса, унинг ҳаракат қонунини ва қия текислиқни тўла сирпаниб ўтиш вақтини топинг.



14-расм

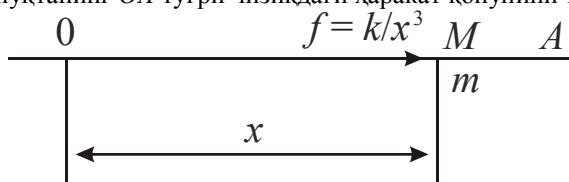


15-расм

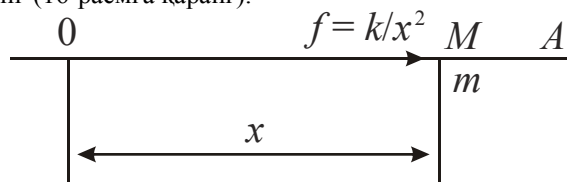
**10.5.** Узунлиги  $l$  бўлган математик маятникнинг кичик четланишдаги ҳаракат қонунини топинг ва тебраниш даври  $T$  ни аниқланг.

**10.7.** Катталиги заррачанинг тортилиш маркази 0 дан узоқлашиши  $x$  га тўғри пропорционал ва тортилиш маркази 0 га қараб йўналган куч таъсирида  $m$  массали заррачанинг ҳаракат қонунини топинг (15-расмга қаранг).

**10.8.** Катталиги ҳаракатдаги нуктадан қўзғалмас  $O$  нуктагача бўлган  $x = OM$  масофанинг учинчи даражасига тесқари пропорционал ва  $O$  га тесқари йўналган куч таъсиридаги  $m$  массали моддий нуктанинг  $OA$  тўғри чизикдаги ҳаракат қонунини топинг (16-расмга қаранг).



16-расм

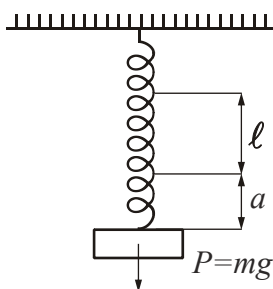


17-расм

**10.9.** Оғирлиги ҳисобга олинмайдиган вертикал пуржинага уни  $l$  қийматга чўзувчи  $P$  юк осилган (17-расмга қаранг). Юкни яна пастга қараб  $a$  масофага тортиб қўйиб юборилгач, у эркин тебрана бошлайди. Атрофидаги қаршилик кучларини ҳисобга олмай шу ҳаракат қонунини топинг.

**10.10.** Пуржинага маҳкамланган  $m$  массали юкни мувозанат ҳолатдан  $x$  масофага чўзиб қўйиб юборилганда, унга катталиги  $kx$  ва йўналиши мувозанат ҳолати томон йўналган куч таъсир қилади. Агар ҳаракат қаршиликсиз бўлса, эркин тебраниш даврини топинг.

**10.11.** Пуржинанинг бир учи қўзғалмас нуктага маҳкамланган, иккинчи учига эса  $m$  массали юк бириктирилган. Юк  $v$  тезлик билан ҳаракат қилса, унга таъсир этадиган куч  $h v$  га тенг. Бошланғич пайтда мувозанатдаги юкка  $v_0$  тезлик берилди. Агар пуржинага маҳкамланган  $m$  массали юкни мувозанат ҳолатидан  $x$  масофага чўзиб қўйиб юборилганда, унга катталиги  $kx$  ва йўналиши мувозанат ҳолати томон йўналган куч таъсир қилса,  $h^2 < 4km$  ва  $h^2 > 4km$  бўлганда юк ҳаракатини текширинг.



18-расм

**10.12.** Катталиги ҳаракатдаги нуктадан қўзғалмас  $O$  нуктагача бўлган  $x = OM$  масофанинг иккинчи даражасига тескари пропорционал ва  $O$  га тескари йўналган куч таъсирида  $m$  массали моддий нуктанинг  $OA$  тўғри чизикдаги ҳаракат қонунини топинг (18-расмга қаранг).

**10.13.** Массаси  $m$  бўлган моддий нукта муҳитда тезликнинг биринчи даражасига тўғри пропорционал бўлган қаршилик таъсирида тушмоқда.

Агар  $v = 0,5$  м/сек бўлганда қаршилик кучи оғирлик кучининг  $1/2$  қисмига тенг ва бошланғич тезлик  $v_0 = 0$  бўлса, моддий нукта тезлигининг энг катта қийматини топинг.

**10.14.** Массаси  $m$  бўлган моддий нукта муҳитда тезликнинг биринчи даражаси тўғри пропорционал (пропорционаллик  $k$ ) бўлган муҳитда ҳаракат қиляпти. Агар нуктанинг бошланғич тезлиги  $v_0$  бўлиб, унга қаршилик кучидан бошқа куч таъсир қилмаётган бўлса, тўхтагунча қанча масофани босиб ўтади?

**10.15.** Массаси  $m$  узунлиги  $2l$  бўлган бир жинсли оғир занжир текис горизонтал столда ярим осилган ҳолда турибди. Унинг столдан сирпаниб тушишидаги ҳаракат қонунини ва сирпаниб тушиш вақтини топинг.

**10.16.** Массаси  $m$  бўлган моддий нукта уни тортаётган  $\frac{mk^2}{r^2}$  куч таъсирида марказга қараб тўғри ҳаракат қиляпти, бу ерда  $r$  нуктадан марказгача масофа. Агар ҳаракат  $r = a$  мувозанат ҳолатдан бошланган бўлса, унинг марказигача келиш вақтини топинг.

**10.17.** Оғир юк қиялик бурчаги  $\alpha$ , ишқаланиш коэффициентини  $\mu$  бўлган қия текисликдан сирпаниб тушмоқда. Агар бошланғич тезлик нолга тенг бўлса, унинг ҳаракат қонунини топинг.

**10.18.** Моддий нукта  $A$  нуктага қараб шундай ҳаракат қилмоқдаки, унинг  $A$  нуктадан  $r$  масофадаги тезланиши  $kr^{-5/3}$  га тенг. Бошланғич  $t = 0$  пайтда нукта  $A$  дан  $i$  масофада мувозанат ҳолатда турган бўлса, у қачон  $A$  га етиб келади?

**10.19.** Оғирлиги 300 кг бўлган моторли қайиқ 16 м/сек бошланғич тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Сувнинг қаршилиги қайиқнинг тезлигига пропорционал ва тезлик 1 м/сек бўлганда 10 кг га тенг. Қайиқ тезлиги 8 м/сек бўлганда қанча масофани босиб ўтади ва бу масофани қанча вақтда ўтади?

**10.20.** Силлиқ михга занжир шундай ташлаб қўйилганки, унинг бир томони 8 м ли қисим, иккинчи томонида 10 м ли қисми осилиб турибди. Занжирнинг михда сирпангандаги тезланиши осилиб турган бўлақлар орасидаги айирмага пропорционал. Қанча вақтда занжир сирпаниб тушади?

## 11-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

**1. Номаълум йўқотиш усули.** Бу усул умуман олганда системани тартиби юқорироқ бўлган бир номаълумли тенгламага келтиради. Системани бу усул билан ечиш фақат содда системалар учунгина ярайди, холос.

**Мисол.** 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$$
 системани ечинг

*Ечими.* Биринчи тенгликдан  $y = \dot{x} - x$  ни олиб, иккинчи тенгламага қўямиз ва

$$\dot{y} = \ddot{x} - \dot{x}; \quad \ddot{x} - \dot{x} = 3(\dot{x} - x) - 2x; \quad \ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0$$

бир номаълумли иккинчи тартибли чизикли тенгламани оламиз. Характеристик тенгламаси  $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$  бўлиб,  $\lambda_{1,2} = 2 \pm 1$  бўлади. Аввалги 9-§, 1-пунктдан маълумки, бу тенгламанинг ечими

$$x = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

кўринишда бўлади. Бундан фойдаланиб, биринчи тенгликдан у ни топиб олиш мумкин:

## Шундай қилиб, тенгламанинг ечими

бўлади.

## 2. Бизга

кўринишдаги, ёки вектор формада

матрица. Бу системани ечиш учун унинг характеристик тенгламасини тузамиз:

Ҳар бир  $\lambda_i$  га

функцияни мос қўямиз. Бу ерда  $Q^i(t)$  вектор функция бўлиб, ҳар бир компоненти тартиби  $k_i - 1$  дан катта бўлмаган номаълум коэффициентли кўпхаддан иборат. (1) системага  $\lambda_i$  га мос келган ечимини (4) кўринишда қидирамиз. Уни (1) системага қўйиб,  $e^{\lambda_i t}$  ларга қискартирилгандан кейин номаълум коэффициентларни топиш учун  $nk_i$  га тенгламадан иборат чизикли оддий алгебраик системани оламиз. Бу системани ечиб, (4) нинг коэффициентларини аниқлаб оламиз. Умумий ечим эса

кўринишда бўлади. Бў баён қилинган метод *Эйлер методи* деб ҳам юритилади.

**Мисол.** Қуйидаги системани ечинг.

*Ечими.* Коэффициентлардан тузилган матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлиб, унинг хос сонлари, яъни характеристик тенгламанинг илдизлари  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ . Эйлер методи билан системани ечамиз.

$\lambda_1 = 2$  оддий хос сонга мос келган (4) кўринишдаги функция (ечим) куйидагича бўлади:

$$x = S_1 e^{2t}, \quad y = S_2 e^{2t}, \quad z = S_3 e^{2t}.$$

Буни берилган системага қўйиб,

$$2S_1 = 2S_1 + S_2 + S_3,$$

$$2S_2 = -2S_1 - S_3,$$

$$2S_3 = 2S_1 + S_2 + 2S_3,$$

системани оламир ва бундан  $S_2 = -2S_1$ ,  $S_3 = 2S_1$ ,  $S_1$  – ихтиёрий сон эканлигини топамиз.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  икки каррала хос сонга мос келган (4) кўринишдаги ечим куйидагича бўлади:

$$x = (a_1 + a_2 t) e^t,$$

$$y = (b_1 + b_2 t) e^t,$$

$$z = (c_1 + c_2 t) e^t.$$

Буни тенгламага қўйиб  $e^t$  га қискартириб,

$$a_1 + a_2 = 2a_1 + b_1 + c_1 \quad (\text{I})$$

$$a_2 = 2a_2 + b_2 + c_2 \quad (\text{II})$$

$$b_1 + b_2 = -2a_1 - c_1 \quad (\text{III})$$

$$b_2 = -2a_1 - c_2 \quad (\text{IV})$$

$$c_1 + c_2 = 2a_1 + b_1 + 2c_1 \quad (\text{V})$$

$$c_2 = 2a_2 + b_2 + 2c_2 \quad (\text{VI})$$

системани оламир. Иккинчи ва тўртинчи тенгламалардан  $a_2 = 0$ ,  $b_2 + c_2 = 0$  биринчи ва учинчидан эса  $a_1 + b_2 = 0$  ва бешинчисидан  $c_1 = b_2 - b_1$  ифодаларга эга бўламиз. Шундай қилиб,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$  илдизига мос келган

$$x = -b_2 e^t,$$

$$y = (b_1 + b_2 t) e^t,$$

$$z = (b_2 - b_1 - b_2 t) e^t$$

ечимларни оламир.

Топилган ечимларнинг йиғиндисини олсак, системанинг умумий ечими

$$x = C_1 e^{2t} - C_2 e^t,$$

$$y = -2C_1 e^{2t} + (C_3 + C_2 t) e^t,$$

$$z = 2C_1 e^{2t} + (C_2 - C_3 - C_2 t) e^t$$

кўринишда бўлади, бу ерда  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  ихтиёрий ўзгармаслар.

**3.** Агар  $\lambda$  характеристик тенгламанинг комплекс илдизи бўлса, юқорида берилган Эйлер методи орқали топилган ечим ҳам комплекс функциялар орқали ифодаланади. Агар (1) тенгламанинг коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлса, ечимни ҳам ҳақиқий функциялар орқали ифодалаш

мумкин. Бунинг учун  $\lambda = \alpha + \beta i$  комплекс илдизга мос келган комплекс ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари чизикли эркин ечимлар бўлишидан фойдаланиш керак.

**Мисол.** 
$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$$
 системани ечинг.

*Ечими.* 
$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$
 характеристик тенгламани тузиб,

$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$  илдизларни оламиз.  $\lambda_1 = 3 + 2i$  илдизга мос келган хос векторни топайлик:

$$(1 - 2i)a - b = 0, \quad 5a - (1 + 2i)b = 0.$$

$a = 1, b = 1 - 2i$  деб олиб, қуйидаги хусусий ечимни топамиз:

$$x = e^{(3+2i)t}, \quad y = (1 - 2i)e^{(3+2i)t}.$$

Берилган системанинг коэффициентлари ҳақиқий бўлгани учун  $\lambda_2 = 3 - 2i$  илдизга мос келган ечимни кидириб ўтиришнинг ҳожати йўқ, чунки у топилган ечим билан ўзаро қўшма комплекс функция бўлади. Иккита ҳақиқий ечим сифатида топилган комплекс ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини олиш керак.

$$e^{(3+2i)t} = e^{3t} (\cos 2t + i \sin 2t) \text{ бўлгани учун}$$

$$x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \cos 2t,$$

$$y_1 = \operatorname{Re} (1 - 2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t),$$

$$x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+2i)t} = e^{3t} \sin 2t,$$

$$y_2 = \operatorname{Im} (1 - 2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t)$$

ифодаларни оламиз. Булардан эса берилган системанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{3t} \cos 2t + C_2 e^{3t} \sin 2t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{3t} (\cos 2t + 2 \sin 2t) + C_2 e^{3t} (\sin 2t - 2 \cos 2t).$$

**4. Ушбу**

$$a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \dots + a_{1n}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \dots + b_{1n}y = 0, \quad (6)$$

$$a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \dots + a_{2n}x + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \dots + b_{2n}y = 0$$

кўринишдаги нормал ҳолга келтирилмаган тенгламани ечиш учун характеристик тенгламани тузиб, уни ечиш керак:

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \dots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \dots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \dots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \dots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

Бу тенгламанинг илдизлари топилгандан кейин, берилган тенгламани ечимини худди 2-пунктдагидек кидирилаверади.

**Мисол.** 
$$\begin{cases} \dot{x} + x + \dot{y} = 0 \\ \ddot{x} - x + \ddot{y} + y = 0 \end{cases}$$
 системани ечинг.

*Ечими.* Характеристик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Бундан икки каррали  $\lambda = -1$  илдизни ҳосил қиламиз.

Энди берилган тенгламанинг ечимини 2-пунктдагидек

$$x = (a + bt)e^{-t}$$

$$y = (c + dt)e^{-t}$$

кўринишда кидирамиз. Буни системанинг биринчи тенгламасига қўйиб

$$(b - a - bt)e^{-t} + (a + bt)e^{-t} + (d - c - dt)e^{-t} = 0$$

ифодани, ундан эса  $d = 0$ ,  $b = c$  ни оламиз. Системанинг иккинчи тенгламасидан ҳам худди шундай муносабатларни оламиз, буни ҳисоблаб кўришни ўқувчиларнинг ўзига қолдирамиз.

Шундай қилиб, умумий ечим

$$x = (C_1 t + C_2)e^{-t},$$

$$y = C_1 e^{-t}$$

кўринишда бўлар экан, бу ерда  $C_1$  ва  $C_2$  ихтиёрий ўзгармаслар.

$$5. \dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

чизикли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини ҳам  $f_i(t)$  функциялар

$b_0 + b_1 t + b_m t^m$ ,  $e^{\alpha t}$ ,  $\cos \beta t$ ,  $\sin \beta t$  кўринишдаги функцияларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва уларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, номаълум коэффицентлар усули билан кидириш мумкин. Албатта, бу ерда ҳам (айрим ўзгаришлар билан) худди ўзгармас коэффицентли тенгламалардагидек иш қилинади. Агар  $f_i(t) = P_m(t)e^{\gamma t}$  бўлиб,  $P_m(t)$  –  $m_i$  тартибли кўпхад бўлса, (8) тенгламанинг

хусусий ечими  $t^s Q_m(t)e^{\gamma t}$  кўринишда эмас,

$$x_i = Q_{m+s}^i(t)e^{\gamma t}, \quad i = 1, \dots, n$$

кўринишда кидирилади, бу ерда  $Q_{m+s}^i(t) - m + s$  тартибли, номаълум коэффицентли кўпхад;

$m = \max m_i$ ; агар  $\gamma$  характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса  $S = 0$ , агар  $\gamma$  характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса,  $s$  сифатида бу илдизнинг карралигини олиш керак. (9) даги номаълум коэффицентлар (9) ифодани (8) тенгламага қўйиб, ўхшаш ҳадлар коэффицентларини тенглаштириш ёрдамида топилади.

$f_i(t)$  функция  $e^{\alpha t} \cos \beta t$  ва  $e^{\alpha t} \sin \beta t$  функцияларни ўз ичига олган бўлиб,

$\gamma = \alpha + i\beta$  характеристик тенгламанинг илдизи бўлганда ҳам (9) ифодадаги кўпхаднинг тартиби юқоридагига ўхшаш аниқланади.

$$\text{Мисол.} \begin{cases} \dot{x} = y + \sin t \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{системани ечинг.}$$

$$\text{Ечими.} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \quad \text{бир жинсли системанинг умумий ечимини топиб оламиз. Бу тенгламанинг}$$

характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Унинг илдизлари  $\lambda_1 = i$  ва  $\lambda_2 = -i$ . Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими



$$\begin{aligned}x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t\end{aligned}$$

кўринишда бўлар экан.

Бизнинг мисолимизда  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = \alpha + i\beta = i$  характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи бўлгани учун, берилган тенгламанинг хусусий ечимини

$$\begin{aligned}x &= (a_1 + a_2 t) \sin t + (a_3 + a_4 t) \cos t, \\y &= (b_1 + b_2 t) \sin t + (b_3 + b_4 t) \cos t\end{aligned}$$

кўринишда кидирамиз. Буни тенгламалар системасига қўйиб  $a_i$  ва  $b_i$  ларни топиш учун тенгламаларга эга бўламиз:

$$a_1 + a_4 = b_3, \quad a_2 - a_3 = b_1 + 1, \quad b_2 + a_4 = 0, \quad a_2 - b_4 = 0, \quad b_1 + b_4 + a_3 = 0.$$

Бу тенгламалардан

$$a_1 = a_3 = a_4 + b_2 = b_3 = 0, \quad b_1 = -1/2, \quad a_2 = b_4 = 1/2$$

ифодаларни оламиз, шундай қилиб, хусусий ечим

$$x = t/2 \cdot \sin t,$$

$$y = -1/2 \cdot \sin t + t/2 \cdot \cos t$$

кўринишда, берилган тенгламалар системасининг умумий ечими эса

$$\begin{aligned}x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t + t/2 \cdot \sin t, \\y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t - 1/2 \cdot \sin t + t/2 \cdot \cos t\end{aligned}$$

бўлар экан.

6. Агар бир жинсли тенгламалар системанинг умумий ечими маълум бўлса,

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + \dots + a_{in}(t)x_n + f_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

тенгламалар системасининг умумий ечимини ўзгармасни вариациялаб ҳам топиш мумкин. Бунинг учун бир жинсли тенгламалар системасининг умумий ечимидаги  $C_i$  ўзгармасларни  $C_i(t)$  функцияларга алмаштириш ва ҳосил бўлган ифодани (10) тенгламалар системасига қўйиб, ҳосил бўлган тенгламалар системасидан  $C_i(t)$  ларни топиш керак.

**Мисол.** 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 1/\cos t \end{cases}$$
 системани ечинг.

*Ечими.* Бу системани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечамиз. Бу системага мос бўлган бир жинсли тенгламалар системасининг кўриниши

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

бўлиб, бунинг умумий ечимини 5-пунктда топган эдик. У

$$\begin{aligned}x &= C_1 \cos t + C_2 \sin t \\y &= -C_1 \sin t + C_2 \cos t\end{aligned}$$

кўринишда  $C_1$ ,  $C_2$  ўзгармасларни вариациялаймиз, яъни  $C_1(t)$  ва  $C_2(t)$  билан алмаштирамиз, сўнгра берилган тенгламага қўямиз:

$$\begin{aligned}x &= C_1(t) \cos t + C_2(t) \sin t \\y &= -C_1(t) \sin t + C_2(t) \cos t\end{aligned}$$

$C_1'(t)$ ,  $C_2'(t)$  ларга нисбатан қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} C_1'(t) \cos t + C_2'(t) \sin t &= 0, \\ -C_1'(t) \sin t + C_2'(t) \cos t &= 1/\cos t. \end{aligned}$$

Бу ерда  $C_1'(t) = -\sin t/\cos t$ ,  $C_2'(t) = 1/\cos t$  топилади. Демак,

$$C_1(t) = \ln|\cos t| + \bar{C}_1, \quad C_2(t) = t + \bar{C}_2$$

буни ўрнига қўйиб

$$x = \bar{C}_1 \cos t + \bar{C}_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t,$$

$$y = -\bar{C}_1 \sin t + \bar{C}_2 \cos t - \sin t \ln|\cos t| + t \cos t$$

умумий ечимни оламир.

**Тенгламалар системасини йўқотиш усули билан ечинг.**

$$266. \begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2y - x \end{cases}$$

$$267. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$$

$$268. \begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$$

$$269. \begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

$$270. \begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$$

$$271. \begin{cases} \dot{x} + x = y + e^t \\ \dot{y} + y = x + e^t \end{cases}$$

**Тенгламалар системасини ечинг.**

$$272. \begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = z + x \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$$

$$273. \begin{cases} \dot{x} = x + x - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$$

$$274. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1)$$

$$275. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \pm 1)$$

$$276. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5)$$

$$277. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$$

Бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ечинг.

$$278. \begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + e^t \\ \dot{y} = 4x + 5y + 1 \end{cases}$$

$$279. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$280. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 5t + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + t - 1 \end{cases}$$

$$281. \begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y + 40 \\ \dot{y} = x - 6y + 9e^{-t} \end{cases}$$

$$282. \begin{cases} \dot{x} = y - \cos t \\ \dot{y} = -x + \sin t \end{cases}$$

$$283. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases}$$

Нормал ҳолга келтирилмаган тенгламалар системасини ечинг.

$$284. \begin{cases} \dot{x} + \dot{y} = 2y \\ 3\dot{x} + \dot{y} = x + 9y \end{cases}$$

$$285. \begin{cases} \ddot{x} = x - 4y \\ \ddot{y} = -x + y \end{cases}$$

$$286. \begin{cases} \ddot{x} - 3\ddot{y} - x = 0 \\ \dot{x} + 3\dot{y} - 2y = 0 \end{cases}$$

$$287. \begin{cases} \ddot{x} + 4\dot{x} - 2x - 2\dot{y} - y = 0 \\ \ddot{x} - 4\dot{x} - \ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 0 \end{cases}$$

$$288. \begin{cases} \dot{x} - \dot{y} - 2x + 2y = 0 \\ \ddot{x} + 2\dot{y} + x = 0 \end{cases}$$

$$289. \begin{cases} 2\dot{x} - 5\dot{y} = 4y - x \\ 3\dot{x} - 4\dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

Системани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечинг.

$$290. \begin{cases} \dot{x} + 2y = 3t \\ \dot{y} - 2x = 4 \end{cases}$$

$$291. \begin{cases} \dot{x} + y - 2x = 0 \\ \dot{y} + x - 2y = -e^t \sin t \end{cases}$$

$$292. \begin{cases} \dot{x} = 3x + y + e^t \\ \dot{y} = x + 3y - e^t \end{cases}$$

$$293. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 4/\cos t \end{cases}$$

$$294. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$$

$$295. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t} \end{cases}$$

Вектор формада берилган  $\dot{X} = AX$  кўринишдаги системани ечинг.

$$296. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$297. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$298. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$299. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$300. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$301. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси (ДТНС) қандай кўринишга эга? Қандай системаларга чизикли, бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган системалар дейилади?
2. ДТНС учун Коши масаласи қандай қўйилади?
3. ДТНС умумий ечими, хусусий ечими, умумий интеграл тушунчаларини изоҳланг.
4. Номаълумларни йўқотиш усулининг ғояси нимадан иборат?
5. Нима учун чизикли система махсус ечимга эга бўлмайди?
6. Ечимларнинг фундаментал системаси деб нимага айтилади? Воронский детерминанти деб-чи?
7. Чизикли бир жинсли бўлмаган системанинг битта хусусий ечими ва унга мос бир жинсли системанинг умумий ечими маълум бўлганда унинг умумий ечими қандай топилади?
8. Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли система ечимларининг фундаментал системасини тузишда Эйлер методи нимадан иборат?
9. Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли системаларни ечишда матрицалар методи нимадан иборат?
10. Ўзгармас вариациялаш методи нимадан иборат?
11. Нормал кўринишга келтирилмаган чизикли системанинг умумий кўринишини ёзинг ва уни ечиш усулини кўрсатинг.

**1. Тенгламалар системасини ечинг.**

$$1.1. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2)$$

$$1.2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1)$$

$$1.3. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3)$$

$$1.4. \begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1)$$

$$1.5. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2)$$

$$1.6. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -5)$$

$$1.7. \begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1)$$

$$1.8. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y - 3z \\ \dot{y} = -6x + 2y + 6z \\ \dot{z} = 6x - 2y - 6z \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} \dot{x} = 4x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases} \\ (\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3)$$

$$1.10. \begin{cases} \dot{x} = 10x - 3y - 9z \\ \dot{y} = -18x + 7y + 18z \\ \dot{z} = 18x - 6y - 17z \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = 2x + 3z + x \end{cases} \\ (\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = 3 \pm 1)$$

$$1.12. \begin{cases} \dot{x} = x - z \\ \dot{y} = -6x + 2y + 6z \\ \dot{z} = 4x - y - 4z \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases} \\ (\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$$

$$1.14. \begin{cases} \dot{x} = -y + z \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -x + z \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} \dot{x} = 5x - y - 4z \\ \dot{y} = -12x + 5y + 12z \\ \dot{z} = 10x - 3y + 9z \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = -x + 5y - z \\ \dot{z} = x - y + 3z \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 12y - 4z \\ \dot{y} = -x - 3y + z \\ \dot{z} = -x - 12y + 6z \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 12x - 4y - 12z \\ \dot{z} = -4x + y + 5z \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} \dot{x} = 21x - 8y - 19z \\ \dot{y} = 18x - 7y - 15z \\ \dot{z} = 16x - 6y - 15z \end{cases}$$

2. Бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ечинг.

$$2.1. \begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4 + 4e^{2t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y - 5e^{-t} \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = y - 2x + 18t \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8 \\ \dot{y} = 3x + 6y \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t \\ \dot{y} = 12x + 2t \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2e^t \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^t \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases}$$

3. Нормал кўринишга келтирилган тенгламалар системасини ечинг.

$$3.1. \begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y \\ \ddot{y} = x - 2y \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} \ddot{x} = 2y \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} + x = 0 \\ \ddot{y} + x = 0 \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} \ddot{x} = y \\ \ddot{y} = -x \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} \ddot{x} + x + y = 0 \\ \ddot{y} - 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} \ddot{x} = 2x + 3y \\ \ddot{y} = 4x - 2y \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} - 2x \\ \ddot{y} = 8y - 3\dot{x} \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y \\ \ddot{y} = -x - y \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} \ddot{x} = \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} \ddot{x} - y = 0 \\ \ddot{y} - x = 0 \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} \ddot{x} = -2y \\ \ddot{y} = 2x \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} - y = 0 \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0 \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} \ddot{x} = 5x + 4y \\ \ddot{y} = 4x + 5y \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} \ddot{x} = -2x - 4y \\ \ddot{y} = x + 3y \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0 \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{x} - \dot{x} - 2x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0 \\ \ddot{x} + 4\dot{x} - x + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0 \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} \ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0 \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0 \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0 \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0 \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0 \\ 3\ddot{x} + 5\dot{x} + \dot{y} + 3y = 0 \end{cases}$$

4. Берилган системани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечинг.

$$4.1. \begin{cases} \dot{x} = y + tg^2t + 1 \\ \dot{y} = -x + tgt \end{cases}$$

$$4.3. \begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 1/(e^t - 1) \\ \dot{y} = 6x + 3y - 3/(e^t - 1) \end{cases}$$

$$4.5. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y + e^t \sqrt{t} \end{cases}$$

$$4.7. \begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t \\ \dot{y} = -y - 2x + \cos t + \sin t \end{cases}$$

$$4.9. \begin{cases} \dot{x} = x + y - t^2 + t - 2 \\ \dot{y} = -2x + 4y + 2t^2 - 4t - 7 \end{cases}$$

$$4.11. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2e^t \\ \dot{y} = -3x - 2y + 4e^t \end{cases}$$

$$4.13. \begin{cases} \dot{x} = x + y + \cos t \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t - \cos t \end{cases}$$

$$4.15. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos t \\ \dot{y} = -y - 2x + \sin t \end{cases}$$

$$4.17. \begin{cases} \dot{x} + y = \cos t \\ \dot{y} + x = \sin t \end{cases}$$

$$4.19. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$$

$$4.2. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 4y - 3x + e^t/(e^{2t} + 1) \end{cases}$$

$$4.4. \begin{cases} \dot{x} = x - y + \sec t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

$$4.6. \begin{cases} \dot{x} + 2x - y = -e^{2t} \\ \dot{y} + 3y - 2x = 6e^{2t} \end{cases}$$

$$4.8. \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 7/\cos t \end{cases}$$

$$4.10. \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + e^{-t} \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$$

$$4.12. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -3x + 2y + 6e^{2t} \end{cases}$$

$$4.14. \begin{cases} \dot{x} = x - y + 4\cos 2t \\ \dot{y} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t \end{cases}$$

$$4.16. \begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = -x + 10/\sin t \end{cases}$$

$$4.18. \begin{cases} \dot{x} + 5x + y = 7e^t - 27 \\ \dot{y} - 2x + 3y = -3e^t + 2 \end{cases}$$

$$4.20. \begin{cases} \dot{x} + 5x + y = e^t \\ \dot{y} + 3y - x = e^{2t} \end{cases}$$

5. Вектор формада берилган  $\dot{X} = Ax$  кўринишдаги системани ечинг.



$$5.1. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5.2. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.3. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.4. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5.5. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5.6. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.7. A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.8. A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.9. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.10. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$5.11. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5.12. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5.13. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5.14. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$5.15. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$5.16. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & 19 \end{pmatrix}$$

$$5.17. A = \begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}$$

$$5.18. A = \begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{5.19.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{5.20.} \ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

### 13-§. ТУРГУНЛИК НАЗАРИЯСИ ВА БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Қуйдаги дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

ёки вектор формада

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Фараз қилайлик,  $f_i$  ва  $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$  функциялар барча  $i$  ва  $k$  ларда  $t_0 \leq t < +\infty$  да узлуksиз бўлсин.

Агар  $x = \varphi(t)$  (2) тенгламанинг ечими берилган бўлиб, ихтиёрий  $\varepsilon > 0$  учун  $\delta > 0$  кўрсатиш мумкин бўлсаки, барча

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \quad (3)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи (2) тенгламанинг  $x(t)$  ечимлари учун ихтиёрий  $t_0 \leq t$  да

$$|x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad (4)$$

шарт бажарилса, берилган  $x = \varphi(t)$  ечим Ляпунов маъносида *тургун* дейилади.

Агар қандайдир  $\varepsilon > 0$  учун шундай  $\delta > 0$  топилмаса,  $\varphi(t)$  ечим *тургун эмас* дейилади.

Агар (2) системанинг  $\varphi(t)$  ечими Ляпунов маъносида тургун бўлиб, етарлича яқин бошланғич шартларда (2) системанинг ечимлари  $t \rightarrow +\infty$  да  $\varphi(t)$  га чексиз яқинлашса, бошқача қилиб айтганда, етарлича кичик  $\delta > 0$  учун (3) шартда  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \varphi(t)) = 0$  келиб чиқса,  $\varphi(t)$  ечим *асимптотик тургун* дейилади.

Юқоридаги (2) тенгламанинг  $x = \varphi(t)$  ечимининг тургунлигини текшириш масаласи, (2) тенгламада  $y = x - \varphi(t)$  алмаштириш бажарилганда ҳосил бўлган тенгламанинг  $y(t) \equiv 0$  ечимини тургунликка текширишга келтирилади.

**2. Биринчи яқинлашиш бўйича тургунликка текшириш.**  $x_i(t) \equiv 0$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (1)

тенгламанинг ечими бўлсин. Шу ечимни тургунликка текшириш учун  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  нукта атрофида  $f_i$  функцияларнинг чизикли қисмини ажратиб олинадимиз, (масалан,  $f_i$  ларни Телор формуласи ёрдамида ёйиш билан). Ҳосил бўлган системанинг нол ечимини тургунлигини қуйидаги теорема орқали текшириш мумкин.

**Ляпунов теоремаси.** Қуйидаги система берилган бўлсин:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n + \phi(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

бу ерда  $a_{ik}$  – ўзгармаслар  $\phi_i$  – шундай функцияларки,

$$|x| < \varepsilon_0, \quad |x| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

шарт бажарилганда

$$|\phi_i| \leq \gamma(x)|x|, \quad i = 1, \dots, n, \quad \gamma(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow 0$$

ўринли бўлади.

Агар (5) тенгламада

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

матрицанинг ҳамма хос сонлари манфий ҳақиқий қисмга эга бўлса, унинг нол ечими асимптотик турғун бўлади; бирорта хос соннинг ҳақиқий қисми мусбат бўлса, нол ечим турғун бўлмайди.

**Мисоллар. а)**

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6 \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4 \end{cases},$$

системанинг  $x = 0, y = 0$  ечимни турғунликка текширинг.

*Ечими.* Юқоридаги теоремани қўллаб ечамиз. Биринчи яқинлашиш бўйича қуйидаги системанинг  $x = 0, y = 0$  ечимини турғунликка текшираемиз:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

Тушунарлики, характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда бўлиб,  $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$ .

Демак, Ляпунов теоремасига кўра  $x = 0, y = 0$  тривиал ечим асимптотик турғун.

**б)**

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{4+4y} - 2e^{x+y}, \\ \dot{y} = \sin ax + \ln(1-4y), \quad a = \text{const}, \end{cases}$$

системанинг  $x = 0, y = 0$  тривиал ечимини турғунликка текширинг.

*Ечими.* Тейлор формуласи ёрдамида ўнг томондаги функцияларнинг чизиқли қисмини ажратиб оламиз.

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + \phi_1(x, y), \\ \dot{y} = ax - 4y + \phi_2(x, y), \end{cases}$$

бу ерда  $\phi_1$  ва  $\phi_2$  функциялар  $C(x^2 + y^2)$  га тенг, яъни чексиз кичик. Коэффициентдан тузилган матрицанинг хос сонларини аниқласак,

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ a & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 6\lambda + 8 + a = 0, \quad \lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{1-a}$$

бўлади.

Агар  $a > 1$  бўлса, илдизлар комплекс сонлар  $\text{Re } \lambda_{1,2} = -3 < 0$ , агар  $-8 < a \leq 1$  бўлса, илдизлар ҳақиқий ва манфий, демак, бу ҳолларда  $x = 0, y = 0$  ечим асимптотик турғун бўлади.

Агар  $a < -8$  бўлса, битта илдиз мусбат бўлади ва демак,  $x = 0, y = 0$  ечим асимптотик турғун эмас.

Агар  $a = -8$  бўлса,  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -6$  тенг бўлади ва турғунлик масаласини юқорида айtilган теорема орқали ҳал қилиб бўлмайди.

**3. Ляпунов функцияси ёрдамида турғунликка текшириш.**

**Ляпунов теоремаси.** Бирор  $\varepsilon_0 > 0$  сон учун  $t_0 \leq t < +\infty$ ,  $|x| < \varepsilon_0$  шартни қаноатлантирувчи  $(t, x)$  ларда (2) системанинг ўнг томони аниқланган узлуксиз бўлиб,  $f(t, 0) \equiv 0$  бўлсин. Ундан ташқари шу  $x$  ларда аниқланган, фақат координата бошида нолга тенг ва узлуксиз дифференциалланувчи  $V(x) \geq 0$  Ляпунов функцияси мавжуд бўлиб, у

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j \leq 0 \quad (7)$$

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда  $x(t) \equiv 0$  ечим турғун бўлади.

Агар  $0 < |x| < \varepsilon_0$  учун

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j \leq -w(x) < 0, \quad (8)$$

(бу ерда  $w(0) = 0$ ,  $x \neq 0$  да  $w(x) > 0$  бўлган қандайдир узлуксиз функция) шарт ҳам бажарилса, нол ечим асимптотик турғун бўлади.

(1) системанинг ечими маълум бўлмаса, Ляпунов функцияси қуришнинг умумий усули йўқ, лекин баъзи ҳолларда бу функцияни квадратик форма шаклида, яъни  $V = \sum_{i,j} b_{i,j} x_i x_j$  кўринишига

келтириб олиш мумкин бўлади.

**Мисоллар. а)**

$$\dot{x} = -(x - 2y)(1 - x^2 - 3y^2),$$

$$\dot{y} = -(y + x)(1 - x^2 - 3y^2),$$

системанинг тривиал ечимини турғунликка текширинг.

*Ечими.* Ляпунов функцияси  $V(x)$  сифатида  $V(x, y) = x^2 + 2y^2$  ни оламыз. Биринчидан,  $V(0, 0) = 0$ ,  $V(x, y) \geq 0$ , иккинчидан, етарлича кичик  $x, y$  лар учун

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) - \\ &- 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2) = -2(1 - x^2 - 3y^2)(x^2 + 2y^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Демак, юқорида баён этилган Ляпунов теоремасининг барча шартлари бажарилади,  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  ечим – турғун ечим экан.

**б)**

$$\dot{x} = -5y - 2x^3$$

$$\dot{y} = 5x - 3y^3$$

системанинг тривиал ечимини турғунликка текширинг.

*Ечими.*  $V(x, y) = x^2 + y^2$  функция Ляпунов теоремасининг иккинчи қисмини (асимптотик турғунликни таъминлайдиган шартни) қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам,

$$1) V(0, 0) = 0, V(x, y) > 0;$$

$$2) \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -4(4x^4 + 6y^4) \leq 0.$$

$$\text{Демак, } \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} \bigg|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = 0 \text{ ва } \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} < 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Шундай қилиб,  $x \equiv 0$ ,  $y \equiv 0$  асимптотик турғун экан.

$$4. \quad a_0 \lambda^n + a_n \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_0, \quad a_0 > 0 \quad (9)$$

ҳақиқий коэффициентли кўпхаднинг барча илдизлари ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун шартлар.

(9) кўпхад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$

бўлиши зарурдир.  $n \leq 2$  бўлганда бу шарт етарлидир.

Раус-Гурвиц шarti. (9) кўпхад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун ушбу

**Гурвиц матрицаси** деб аталувчи матрицанинг

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

асосий диагонал минорлари мусбат бўлиши зарур ва етарлидир. Бу матрицанинг асосий диагоналида  $a_1, a_2, \dots, a_n$  лар турибди. Ҳар бир сатрда элементларнинг индекси олдинги элемент индексида 1 бирликка кичик.  $a_1$  элемент  $i > n$  ёки  $i > 0$  ларда нолга алмаштирилади. Гурвиц матрицасининг асосий диагонал минорлари:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (11)$$

Шу ҳам эслатиб қўйиш керакки,  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\dots$ ,  $\Delta_n > 0$  шартлардаги охириги ифода учун  $\Delta_n = \Delta_{n-1} a_n$  тенглик ўринли бўлгани учун  $\Delta_n > 0$  шартни  $a_n > 0$  шарт билан алмаштириш мумкин.

**Мисол.**  $y^v + y'^v + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$  тенгламанинг тривиал ечимини турғунликка текширинг.

*Ечими.* Характеристик тенгламасини тузамиз:

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Бу ерда  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 7$ ,  $a_3 = 4$ ,  $a_4 = 10$ ,  $a_5 = 3$ .

Гурвиц матрицасининг диагонал минорларини ёзамиз:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0.$$

Шундай қилиб,  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ ,  $\Delta_4 > 0$ ,  $\Delta_5 > 0$  ва демак,  $y \equiv 0$  тривиал ечим асимптотик турғун ечим экан.

**в) Лъенар-Шипар шартти.** (9) кўпхад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун  $a_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  ва юқорида аниқланган  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  лар учун  $\Delta_{n-1} > 0$ ,  $\Delta_{n-3} > 0$ ,  $\Delta_{n-5} > 0$ , ... шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир.

**Мисол.**  $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$  тенгламанинг  $y \equiv 0$  тривиал ечимини турғунликка текширинг.

*Ечими.* Лъенар-Шипар шартини ёзамиз, бунинг учун аввал характеристик тенгламани ёзайлик:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0;$$

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 2 > 0, a_2 = 3 > 0, a_3 = 3 > 0, a_4 = 1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 9 = 5 > 0, \Delta_1 = 2 > 0.$$

Бу ердан  $y \equiv 0$  тривиал ечим асимптотик турғун эканлиги келиб чиқади.

**г) Михайлов критерийси.** (9) кўпхад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун комплекс текисликда  $f(i\omega)$  нукта (бу ерда  $f(\lambda)$  (9) кўпхад)  $\omega$  0 дан  $+\infty$  гача ўзгарганда координата бошидан ўтмасдан мусбат йўналишда  $n\pi/2$  бурчакка бурилиш зарур ва етарлидир.

Бу критерийни қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин эди:  $a_n a_{n-1} > 0$  бўлиб,

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \dots$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \dots$$

кўпхадларнинг барча илдизлари мусбат, ҳар хил ва  $\xi_1$  дан бошлаб алмашиб келиши, яъни  $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots$  бўлиши зарур ва етарли. Шу ерда  $f(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$  эканлигини ўқувчиларга эслатиб қўйишни лозим топдик.

**Мисол.**  $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$  тенгламанинг  $y \equiv 0$  тривиал ечимини турғунликка текширинг.

*Ечими.* Характеристик тенгламасини тузамиз:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Бу ерда

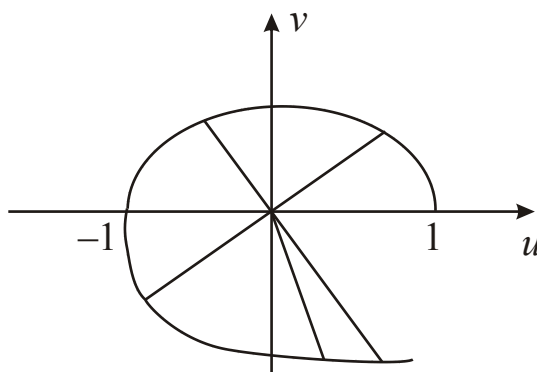
$$f(i\omega) = \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^3 + 2i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 3\omega^3 + 1,$$

$$v(\omega) = -2i\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega).$$

$\omega$  ни 0 дан  $+\infty$  гача ўзгартирамиз ва  $(u, v)$  текисликда ҳосил бўлган  $u = u(\omega)$ ,  $v = v(\omega)$  чизикни ўрганайлик (19-расмга қаранг).

|          |   |                        |    |                        |
|----------|---|------------------------|----|------------------------|
| $\omega$ | 0 | $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ | 1  | $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ |
| $u$      | 1 | 0                      | -1 | 0                      |
| $v$      | 0 | $3-\sqrt{5}$           | 0  | $-(3-\sqrt{5})$        |



19-расм.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{v}{u} = 0, \text{ бурилиш бурчаги } \varphi = 4 \frac{\pi}{4} = (n-2m) \frac{\pi}{2}.$$

Бу ерда  $n-2m=4$ ;  $n=4$ , демак,  $m=0$ . Шундай қилиб, характеристик тенгламанинг ҳамма илдизлари чап ярим текисликда жойлашади, яъни  $y \equiv 0$  тривиал ечим Михайлов критерийсига асосан асимптотик турғун бўлади.

**Махсус нуқталар.** Бизга

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \quad (12)$$

тенгламалар системаси ёки

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (13)$$

тенглама берилган бўлиб,  $P(x, y)$  ва  $Q(x, y)$  функциялар узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин.

У ҳолда  $P(x, y) = 0$ ,  $Q(x, y) = 0$  шартларни қаноатлантирувчи  $(x_0, y_0)$  нуқталар (12) тенгламалар системасининг ёки (13) тенгламанинг **махсус нуқталари** дейилади.

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + yd \quad (14)$$

тенгламалар системаси ёки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + yd}{ax + by} \quad \left( \frac{dx}{dy} = \frac{ax + by}{cx + yd} \right) \quad (15)$$

тенгламанинг махсус нуқталарини синфларга ажратиш учун

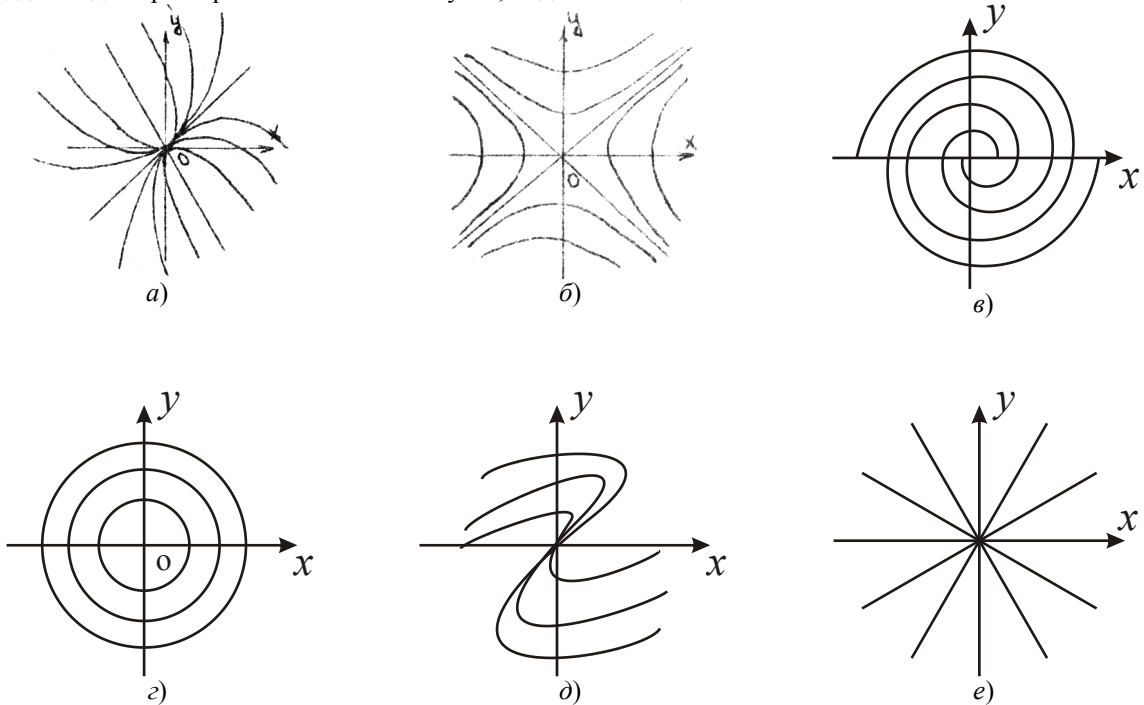
$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$



$dy/dx = y/x$  бўлганда) **дикритик тугун** (е-рasm) дейилади.

**Мисол.**  $\dot{x} = 2x$ ,  $\dot{y} = x + y$  системанинг махсус нуқтасини топиб, типини аниқланг.

*Ечилими.*  $2x = 0, \quad x + y = 0$  системадан махсус нукта  $x = 0, \quad y = 0$  эканлиги келиб чиқади. Энди характеристик тенгламани тузиб, илдизини аниқлаймиз.



20-рasm.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)(1-\lambda) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2. \quad (16)$$

Илдизлар ҳар хил ҳақиқий ва ишораси бир хил, демак,  $x = 0$ ,  $y = 0$  махсус нуқта тугун бўлади.

$$6. a_1(x_1, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, z) \frac{\partial z}{\partial x_n} = b(x_1, \dots, x_n, z) \quad (17)$$

хусусий ҳосилали тенгламанинг умумий ечимини топиш учун куйидаги оддий дифференциал тенгламалар системасининг (яъни (7) тенгламани характеристик тенгламанинг)

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{b} \quad (18)$$

$n$  та эркин биринчи интегралини топиш керак:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, \dots, x_n, z) &= C_1, \\&\dots\dots\dots(19)\\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n, z) &= C_n.\end{aligned}$$

У ҳолда (17) тенгламанинг умумий ечими ошқормас кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) = 0. \quad (20)$$

Бу ерда  $F$  – ихтиёрий дифференциалланувчи функция. Хусусан  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  лардан фақат биттаси  $z$  га боғлиқ бўлса, (20) тенгламани ўшанисига нисбатан ечиб олиш мумкин.

$$7. \quad a_1(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \quad (21)$$

дифференциал тенгламани қаноатлантирувчи ва

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t)$$

чирикдан ўтувчи  $z = z(x, y)$  сиртни топиш учун (21) тенгламанинг характеристик тенгламалар системасини тузиш:

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b} \quad (23)$$

ва унинг иккита эркин биринчи интеграллини

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1, \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2$$

топиш керак. Бу биринчи интеграллардаги  $x, y, z$  ларни қўйиб,

$$\varphi_1(t) = C_1, \quad \varphi_2(t) = C_2 \quad (25)$$

тенгламаларни оламир. Бу тенгламалардан  $t$  параметрни йўқотиб,  $F(C_1, C_2) = 0$  ифодани оламир.

$C_1$  ва  $C_2$  ларнинг ўрнига (24) тенгликларнинг чап қисмларини қўйиб, қидириладиган сиртнинг тенгламасини оламир.

**Мисоллар.** а)  $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  тенгламанинг умумий ечимини топинг.

*Ечими.* Характеристикалар тенгламасини тузиб, биринчи интегралларни топамиз:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}, \quad d(x^2 + y^2) = 0, \quad x^2 + y^2 = C, \quad u = x^2 + y^2.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими  $z = F(x^2 + y^2)$  кўринишда бўлади.

б)  $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  Хопф тенгламасининг умумий ечимини топинг.

*Ечими.* Характеристик система

$$dt = \frac{dx}{u} = -\frac{dy}{0}$$

кўринишда бўлиб, биринчи интеграллари  $v_1 = u, \quad v_2 = x - tu$  бўлади.

Демак, берилган тенгламанинг ихтиёрий ечими

$$F(u, x - tu) = 0$$

кўринишда бўлади.

в)  $(x - a) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - b) \frac{\partial z}{\partial y} = z - c$  тенгламанинг умумий ечимини топинг.

*Ечими.* Характеристикалар системасидан

$$\frac{dx}{dt} = x - a, \quad \frac{dy}{dt} = y - b, \quad \frac{dz}{dt} = z - c$$

куйидагиларни топамиз:

$$x = C_1 e^t + a, \quad y = C_2 e^t + b, \quad z = C_3 e^t + c, \quad C_1, \quad C_2, \quad C_3 \text{ лар}$$

ихтиёрий ўзгармаслар.

Биринчи интеграллари:

$$u_1 = \frac{y-b}{x-a}, \quad u_2 = \frac{z-c}{x-a}$$

кўринишда бўлиб, берилган тенгламанинг ихтиёрий ечими

$$F\left(\frac{y-b}{x-a}, \frac{z-c}{x-a}\right) = 0$$

ифода билан берилади.

$$2) \quad xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy \quad \text{тенгламанинг умумий ечимини ва } y = x^2, \quad z = x^3 \quad \text{чизикдан}$$

ўтувчи ечимини топинг.

*Ечими.* Характеристик тенгласини тузиб, биринчи интегралларни топамиз:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{du}{yz} = \frac{dz}{-xy};$$

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad z^2 + xy = C_2.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$F\left(\frac{x}{y}, z^2 + xy\right) = 0,$$

$F$  – ихтиёрий функция кўринишда бўлади. Бизда  $z$  биринчи интегралларнинг фақат биттаси иштирок этаётгани учун умумий ечимни ошкор кўринишда ёзиш олиш мумкин:

$$z^2 + xy = f\left(\frac{x}{y}\right); \quad z = \pm \sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right) - xy},$$

бу ерда  $f$  – ихтиёрий функция.

Энди берилган чизикдан ўтувчи ечимни топиб олиш учун чизикнинг тенгласини параметрик кўринишда ёзиб оламиз:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Буни биринчи ифодасига қўйиб  $x$  ни йўқотиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{1}{x} = C_1; \quad x^6 + x^3 = C_2; \quad \frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

$C_1$  ва  $C_2$  ларнинг ўрнига интегралларига ифодаларни қўйиб, изланган ечимни оламиз:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^6 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = z^2 + xy.$$

**Ляпуновнинг биринчи яқинлашиш бўйича турғунлик ҳақидаги теоремасидан фойдаланиб, нол ечимни турғунликка текширинг.**

$$302. \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y + x^4 \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^4 \end{cases} \quad 303. \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}(e^x - 1) - 9y \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y \end{cases}$$

$$304. \begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cos y - \frac{x^3}{3} \\ \dot{y} = 3x + 2y + \frac{x^4}{12} - y^3 e^y \end{cases}$$

$$305. \begin{cases} \dot{x} = 7x + 2 \sin y \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 \end{cases}$$

$$306. \begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \sin^2 y \\ \dot{y} = y + 2x \end{cases}$$

$$307. \begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x \\ \dot{y} = x + y + xy^2 \end{cases}$$

Раус-Гурвиц шартларидан ёки Михайлов критерийсидан фойдаланиб, нол ечимни турғунликка текширинг.

$$308. y^{IV} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0$$

$$309. y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0$$

$$310. y''' - 3y'' + 12y' + 10y = 0$$

$$311. y^{IV} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0$$

$$312. y^{IV} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0$$

Берилган тенглама ёки системанинг махсус нуқталарни топинг ва текширинг.

$$313. y' = \frac{2y - 3x}{x - 2y}$$

$$314. \begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{y^3 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$$

$$315. \begin{cases} \dot{x} = \ln(1 - y - y^2) \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y} \end{cases}$$

$$316. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{(x - y)^2 + 3} - 2 \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e \end{cases}$$

$$317. y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$$

$$318. y' = \frac{y - \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$$

Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$$319. 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 5 \frac{\partial z}{\partial y} = 7$$

$$320. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$$

$$321. y^3 \frac{\partial z}{\partial x} + xy^2 \frac{\partial z}{\partial y} = axz$$

$$322. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 + x^2}$$

$$323. y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$$

$$324. (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 + z^2$$

Берилган чизикдан ўтувчи ва берилган тенгламани қаноатлантирувчи сиртни топинг.

$$325. x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x - y, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 4$$

$$326. y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad x = 3, \quad z = 1 + 2y + 3y^2$$

$$327. y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2, \quad y = 5, \quad z = x^2 - 25$$

$$328. x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x - y, \quad x = 4, \quad z = y^2 + 16$$

$$329. y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad x = 15, \quad z = 1 + 2y + 3y^2$$

$$330. xy \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y, \quad x = 3, \quad z = y + 1$$

#### **Синов учун савол ва топшириқлар**

1. Дифференциал тенгламалар системаси ечимининг Ляпунов маъносида турғунлиги таърифни келтиринг.

2. Дифференциал тенгламалар системаси ечимининг Ляпунов маъносида асимптотик турғунлиги таърифни келтиринг.

3. Ляпунов турғунлик ҳақидаги теоремасини келтиринг.

4. Раус-Гувриц шarti ва Михайлов критерийсини келтиринг.

5. Ушбу  $a_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = 0$  кўринишдаги биринчи тартибли хусусий

хосилалар тенглама қандай ечилади? Шу тенглама учун қўйилган Коши масаласи қандай ечилади?

**1. Ляпунов биринчи яқинлашиш бўйича турғунлик ҳақидаги теоремасидан нол ечимни турғунликка текширинг.**

$$1.1. \begin{cases} \dot{x} = 2xy - x + y \\ \dot{y} = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 2y \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} \dot{x} = e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} \dot{x} = \ln(4y + e^{-3x}) \\ \dot{y} = 2y - 1 + \sqrt[3]{1-6x} \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} \dot{x} = \ln(3e^y - 2\cos x) \\ \dot{y} = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y} \end{cases}$$

$$1.6. \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(y-x) \\ \dot{y} = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \end{cases}$$

$$1.7. \begin{cases} \dot{x} = \operatorname{tg}(z-y) - 2x \\ \dot{y} = \sqrt{9+12x} - 3e^y \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$$

$$1.8. \begin{cases} \dot{x} = e^x - e^{-3z} \\ \dot{y} = 4z - 3\sin(x+y) \\ \dot{z} = \ln(1+z-3x) \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - \sin y^2 \\ \dot{y} = -x - 3y + x(e^{x^2/2} - 1) \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} \dot{x} = -x + 3y + x^2 \sin y \\ \dot{y} = -x - 4y + 1 - \cos y^2 \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} \dot{x} = -2x + 8\sin^2 y \\ \dot{y} = x - 3y + 4x^3 \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} \dot{x} = 3x - 22\sin y + x^2 - y \\ \dot{y} = \sin x - 5y + e^{x^2} - 1 \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} \dot{x} = -10x + 4e^y - 4\cos y^2 \\ \dot{y} = 2e^x - 2 - y + x^4 \end{cases}$$

$$1.14. \begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y - y^4 \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 + \frac{5}{2}y^2 \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\sin 2y - x^3 y \\ \dot{y} = -y - 2x + x^4 - y^7 \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} \dot{x} = -2x - x^5 \\ \dot{y} = 2x - y^5 \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} \dot{x} = \frac{5}{2}xe^x - 3y + \sin x^2 \\ \dot{y} = 2x + ye^{-y^2/2} - y^4 \cos x \end{cases}$$

$$1.18. \begin{cases} \dot{x} = 5x + y \cos y \\ \dot{y} = 3x + 2y - y^3 e^y \end{cases}$$

$$1.19. \begin{cases} \dot{x} = \frac{4}{3}\sin x - 7y(1-y)^{1/3} + x^3 \\ \dot{y} = 2/3 \cdot x - 3y \cos y - 11y^5 \end{cases}$$

$$1.20. \begin{cases} \dot{x} = 4y - x^3 \\ \dot{y} = -3x - y^3 \end{cases}$$

**2. Раус-Гурвиц шартларидан ёки Михайлов критерийсидан фойдаланиб нол ечимни турғунликка текширинг.**

$$2.1. y''' + y'' + y' + 2y = 0$$

$$2.2. y''' + 2y'' + y' + 3y = 0$$

$$2.3. y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$2.4. y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

- 2.5.  $y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$   
 2.6.  $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$   
 2.7.  $y^{IV} + 13y''' + 16y'' + 55y' + 76y = 0$   
 2.8.  $y^{IV} + 3y''' + 26y'' + 74y' + 85y = 0$   
 2.9.  $y^{IV} + 3,1y''' + 5,2y'' + 9,8y' + 5,8y = 0$   
 2.10.  $y^V + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$   
 2.11.  $y^V + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0$   
 2.12.  $y^V + 4y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0$   
 2.13.  $y^V + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0$   
 2.14.  $y^V + 4y^{IV} + 16y''' + 25y'' + 13y' + 9y = 0$   
 2.15.  $y^V + 3y^{IV} + 10y''' + 22y'' + 23y' + 12y = 0$   
 2.16.  $y^V + 5y^{IV} + 15y''' + 48y'' + 44y' + 74y = 0$   
 2.17.  $y^V + 2y^{IV} + 14y''' + 36y'' + 23y' + 68y = 0$   
 2.18.  $y^V + 7y^{IV} + 33y''' + 88y'' + 122y' + 60y = 0$   
 2.19.  $y^V + 3y^{IV} + 5y''' + 15y'' + 4y' + 12y = 0$   
 2.20.  $y^{IV} + 11y''' + 41y'' + 61y' + 30y = 0$

3. Берилган тенглама ёки системанинг махсус нуқталарини топинг ва текширинг.

- 3.1.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$       3.2.  $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$       3.3.  $\begin{cases} \dot{x} = x + 3y \\ \dot{y} = -6x - 5y \end{cases}$   
 3.4.  $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$       3.5.  $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$       3.6.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x + y \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$   
 3.7.  $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 4y - 6x \end{cases}$       3.8.  $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x \\ \dot{y} = 2y - 4x \end{cases}$       3.9.  $y' = \frac{2x - x}{3x + 6}$   
 3.10.  $y' = \frac{2x + y}{x - 2y - 5}$       3.11.  $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$       3.12.  $y' = \frac{2y}{x^2 - y^2 - 1}$   
 3.13.  $y' = \frac{4x - y}{3x - 2y}$       3.14.  $y' = \frac{4x - 2y}{x + y}$       3.15.  $y' = \frac{-2x + y}{2y - 3x}$   
 3.16.  $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = \ln(1 - x^2 + x^3) - \ln 3 \end{cases}$       3.17.  $\begin{cases} \dot{x} = \ln(2 - y^2) \\ \dot{y} = e^x - e^y \end{cases}$

$$3.18. \begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y^2 + 2} - 2 \\ \dot{y} = \arctg(x^2 + xy) \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2 \end{cases}$$

#### 4. Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$$4.1. 2x \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2$$

$$4.2. xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz$$

$$4.3. x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z$$

$$4.4. (x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$$

$$4.5. 2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 - 1}$$

$$4.6. x^2 z \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$

$$4.7. yz \frac{\partial z}{\partial x} - xz \frac{\partial z}{\partial y} = e^z$$

$$4.8. (z - y) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xy$$

$$4.9. xy \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yz$$

$$4.10. y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

$$4.11. \sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$$

$$4.12. (x + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y + z) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$$

$$4.13. (xz + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + xz) \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2$$

$$4.14. (y + z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z + x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x + y) \frac{\partial u}{\partial z} = u$$

$$4.15. x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (z + u) \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

$$4.16. (u - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (u - y) \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = x + y$$

$$4.17. \cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y$$



$$4.18. \quad xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

$$4.19. \quad xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = -x(1 + x^2)$$

$$4.20. \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = -y^2$$

5. Берилган чизикдан ўтувчи ва берилган тенгламани қаноатлантирувчи сиртни топинг.

$$5.1. \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x, \quad x = 0, \quad z = y^2$$

$$5.2. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad z = x^2$$

$$5.3. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1$$

$$5.4. \quad \operatorname{tg} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad y = x, \quad z = x^3$$

$$5.5. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x - 3y), \quad x = 1, \quad yz + 1 = 0$$

$$5.6. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2, \quad y = -2, \quad z = x - x^2$$

$$5.7. \quad yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \quad x = a, \quad y^2 + z^2 = a^2$$

$$5.8. \quad z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz, \quad x + y = 2, \quad yz = 1$$

$$5.9. \quad z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} + x = 0, \quad y = x^2, \quad z = 2x$$

$$5.10. \quad (y - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (z - x) \frac{\partial z}{\partial y} = x - y, \quad z = y = -x$$

$$5.11. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + (xz + y) \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad x + y = 2z, \quad xz = 1$$

$$5.12. \quad y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0, \quad x - y = 0, \quad x - yz = 1$$

$$5.13. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = y, \quad y = 2z, \quad x + 2y = z$$

$$5.14. \quad (y + 2z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2, \quad x = z, \quad y = x^2$$

$$5.15. \quad (x - z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - z) \frac{\partial z}{\partial y} = 2z, \quad x - y = 2, \quad z + 2x = 1$$

$$5.16. \quad xy^3 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = y^3 z, \quad x = -z^3, \quad y = z^2$$

$$5.17. \quad \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 4, \quad y^2 = z, \quad x = 0$$

$$5.18. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x - y, \quad x = 1, \quad z = y^2 + 1$$

$$5.19. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad x = 1, \quad z = 1 + 2y + 3y^2$$

$$5.20. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2, \quad y = 1, \quad z = x^2 - 1$$

**МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДА ЗАРУР БЎЛАДИГАН  
ФОРМУЛАЛАР**

**I. Тригонометрик функциялар иштирокидаги формулалар.**

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$5. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$6. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$7. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$8. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$9. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$10. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$11. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

**II. Тригонометрик ва гиперболик функцияларни кўрсаткичли функция орқали ифодалаш**

$$1. \cos x = \frac{1}{2} \cdot [e^{ix} + e^{-ix}]$$

$$2. \sin x = \frac{1}{2i} \cdot [e^{ix} - e^{-ix}]$$

$$3. \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \cdot [e^x + e^{-x}]$$

$$4. \operatorname{sh} x = \frac{1}{2} \cdot [e^x - e^{-x}]$$

**III. Комплекс соннинг тригонометрик формаси ва  
Муавр формуласи**

$$1. z = x + iy, \quad i^2 = -1$$

$$2. z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg z, \\ \arg z = \arg z + 2k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad -\pi < \arg z < \pi,$$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & x < 0, \quad y \geq 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, & x < 0, \quad y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases}$$

$$3. z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi);$$

$$4. \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2m\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2m\pi}{n} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad \varphi = \arg z.$$

#### IV. Ҳосила топишнинг асосий қоидалари

$$1. c' = c, \quad c = \text{const}$$

$$2. (cu)' = cu'$$

$$3. (u + v - w)' = u' + v' - w'$$

$$4. (uv)' = u'v + v'u$$

$$5. \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad v \neq 0$$

$$6. (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

#### V. Ҳосилалар жадвали

$$1. (x^n)' = nx^{n-1}, \quad (n - \text{ўзгармас сон})$$

$$2. (\sin x)' = \cos x$$

$$3. (\cos x)' = -\sin x$$

$$4. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$5. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$6. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$7. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$8. (\operatorname{artg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$9. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$10. (a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad (e^x)' = e^x$$

$$11. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$12. (sh x)' = ch x$$

$$13. (ch x)' = sh x$$

$$14. (th x)' = \frac{1}{ch^2 x}$$

$$15. (cth x)' = \frac{1}{sh^2 x}$$

#### VI. Интеграллар жадвали

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad (x \neq 0)$$

$$3. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$$

$$4. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| \left( x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right) \right| + C$$

$$7. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, \quad a \neq 1), \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$12. \int sh x dx = ch x + C$$

$$13. \int ch x dx = sh x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth x + C$$

$$15. \int \frac{dx}{ch^2 x} = th x + C$$

$$16. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0)$$

$$17. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad (a \neq 0)$$

$$18. \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$$

$$20. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$21. \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$$

$$22. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$$

$$23. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

$$24. \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

$F(x)$  – функция,  $f(x)$  – функциянинг бошланғичи

$$25. \int_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) dx.$$

## Дифференциал тенгламалар фанидан мустақил ишларни бажариш учун савол ва топшириқлар

1. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама қандай ечилади?
2. Ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида қандай дифференциал тенгламаларни келтириш мумкин?
3. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама қандай ечилади?
4. Ушбу  $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$  кўринишдаги тенглама қандай усул билан бир жинсли тенгламага келтирилади?
5. Умумлашган бир жинсли тенгламалар ва уларни бир жинсли тенгламага келтириш усуллари.
6.  $y' = \frac{y+2}{y+2x-4}$  тенгламани ечинг.
7.  $(x^2y^2 - 1)y' + 2xy^3 = 0$  тенгламани ечинг.

### 1. Дифференциал тенгламани ечинг

- 1.1. а)  $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$   
б)  $y^2 \sin x dx + \cos^2 x \ln y dy = 0$
- 1.2. а)  $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$   
б)  $y' = (\sin \ln x + \cos \ln x + a)y$
- 1.3. а)  $x\sqrt{5+y^2}dx + y\sqrt{4+x^2}dy = 0$   
б)  $3y' \sin x \sin y + 5 \cos x \cos^3 y = 0$
- 1.4. а)  $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$   
б)  $y' + \cos \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x-y}{2}$
- 1.5. а)  $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$   
б)  $\sec^2 x \operatorname{tgy} dx + \sec^2 y \operatorname{tgx} dy = 0$
- 1.6. а)  $6x dx - y dy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$   
б)  $y' + \sin(x-y) = \sin(x+y)$
- 1.7. а)  $\sqrt{1-x^2}y' + xy^2 + x = 0$   
б)  $\sin(\ln x) dx - \cos(\ln y) dy = 0$
- 1.8. а)  $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$   
б)  $\sin x dx - y \ln y dx = 0$
- 1.9. а)  $\sqrt{5+y^2} dx + 4(x^2y + y) dy = 0$

- b)  $y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}$
- 1.10. a)  $3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0$   
 b)  $y' + \cos(x-y) = \cos(x+y)$
- 1.11. a)  $2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2} y' = 0$   
 b)  $\sin y + \cos x dy = \cos y \sin x dx$
- 1.12. a)  $20x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 5xy^2 dx$   
 b)  $(1+y)(e^x dx - e^{2y} dy) + (1+y^2) dy = 0$
- 1.13. a)  $y(4+e^x) dy - e^x dx = 0$   
 b)  $y' \sin y \cos x + \cos y \sin x = 0$
- 1.14. a)  $(e^x + 8) dy - ye^x dx = 0$   
 b)  $y' + \frac{x \sin x}{y \cos y} = 0$
- 1.15. a)  $(3+e^x) yy' = e^x$   
 b)  $x\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} dy = 0$
- 1.16. a)  $x^2(y+1) dx + (x^3-1)(y-1) dy = 0$   
 b)  $ye^{2x} dx - (1+e^{2x}) dy = 0$
- 1.17. a)  $y(1+\ln y) + xy' = 0$   
 b)  $\operatorname{tg} y dx - \operatorname{ctg} x dy = 0$
- 1.18. a)  $(xy^4 - x) dx + (y + xy) dy = 0$   
 b)  $1+x + (1+x^2)(e^x - e^{2y} y') = 0$
- 1.19. a)  $y' - y^2 - 3y + 4 = 0$   
 b)  $(1+x^2) dy + y\sqrt{1+x^2} dx - xy dx = 0$
- 1.20. a)  $(1-x^2) y' - xy = xy^2$   
 b)  $(1+y^2)(e^{2x} dx - e^y dy) - (1+y) dy = 0$

## 2. Дифференциал тенгламани ўзгарувчини алмаштириш йўли билан ечинг

2.1.  $(2x+3y-1) dx + (4x+6y-5) dy = 0$

2.2.  $(2x-y) dx + (4x-2y+3) dy = 0$



$$2.3. (x^2 + y^2) dx = xy dy \quad (\text{кутб координаталарга ўтинг})$$

$$2.4. y' = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y} \quad (\text{кутб координаталарга ўтинг})$$

$$2.5. y' = (8x + 2y + 1)^2$$

$$2.6. y' = (4x + y + 1)^2$$

$$2.7. (x + 2y + 1) y' = (2x + 4y + 3)$$

$$2.8. y' + 2y = 3x + 5$$

$$2.9. e^{x-y} y' = 1$$

$$2.10. (x + y)^2 y' = a^2$$

$$2.11. y' = \frac{1}{2x + y}$$

$$2.12. y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$$

$$2.13. (2x + 2y - 1) dy + (x + y - 2) dx = 0$$

$$2.14. (x - y + 2) dx + (x - y + 3) dy = 0$$

$$2.15. y' = (4x + y - 3)^2$$

$$2.16. y' - 1 = e^{x+2y}$$

$$2.17. y' = \cos(ay + bx), \quad a = 0$$

$$2.18. y' \sqrt{1 + x + y} = x + y - 1$$

$$2.19. y' = \frac{3x - 4y - 2}{3x - 4y - 3}$$

$$2.20. y' = \sin(x - y)$$

### 3. Дифференциал тенгламани ечинг

$$3.1. \text{a) } y' = \frac{x + 2y}{2x + y}$$

$$\text{b) } x \ln \frac{x}{y} dy - y dx = 0$$

$$3.2. \text{a) } xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} - y$$

$$\text{b) } y' = y/x + \operatorname{tg}(y/x)$$

$$3.3. \text{a) } 3y' = y^2/x^2 + 8y/x + 4$$

$$\begin{aligned}
& \text{b) } y' = y/x + \sin(y/x) \\
3.4. \text{ a) } xy' &= \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2} \\
& \text{b) } x(y' + e^{y/x}) = y \\
3.5. \text{ a) } y' &= \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2 - 2xy} \\
& \text{b) } xdy - y \cos \ln(y/x) dx = 0 \\
3.6. \text{ a) } xy' &= \sqrt{2x^2 + y^2} + y \\
& \text{b) } (1 + e^{y/x}) dx + e^{x/y} (1 - x/y) dy = 0 \\
3.7. \text{ a) } xy' &= \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2} \\
& \text{b) } y' = y/x + e^{y/x} \\
3.8. \text{ a) } y' &= \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x^2 - 2xy} \\
& \text{b) } y' = y/x + e^{y/x} \\
3.9. \text{ a) } xy' &= \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2} \\
& \text{b) } xy' = xe^{y/x} + y + x \\
3.10. \text{ a) } y' &= \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy} \\
& \text{b) } xy' + x \cos(y/x) - y + x = 0 \\
3.11. \text{ a) } xy' &= 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y \\
& \text{b) } xy' \operatorname{ch}(y/x) + 2x \operatorname{sh}(y/x) - y \operatorname{ch}(y/x) = 0 \\
3.12. \text{ a) } 2y' &= y^2/x^2 + 8y/x + 8 \\
& \text{b) } (xy' - y) \cos^2(y/x) = xy' \\
3.13. \text{ a) } xy' &= \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2} \\
& \text{b) } (y \sin(y/x) - x \cos(y/x)) = xy' \\
3.14. \text{ a) } y' &= \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy} \\
& \text{b) } dy/dx = \cos^2(y/x) + y/x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.15. \text{ a) } xy' &= \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2} \\
&\text{ b) } (x - y \sin(y/x)) dx + x \sin(y/x) dy = 0 \\
3.16. \text{ a) } xy' &= 2\sqrt{3x^3 + y^2} + y \\
&\text{ b) } y' = y/x + \cos(y/x) \\
3.17. \text{ a) } xy' &= \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2} \\
&\text{ b) } ydx = x(1 + \ln x - \ln y) dy \\
3.18. \text{ a) } xy' &= 4\sqrt{x^2 + y^2} + y \\
&\text{ b) } dx = (\sin^2(x/y) + (x/y)) dy \\
3.19. \text{ a) } y' &= \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy} \\
&\text{ b) } y(x' + e^{x/y}) = x \\
3.20. \text{ a) } 3y' &= y^2/x^2 + 10y/x + 10 \\
&\text{ b) } x' = x/y + \operatorname{ctg}(x/y)
\end{aligned}$$

#### 4. Дифференциал тенгламани ечинг

$$\begin{aligned}
4.1. \quad y' &= \frac{x + 2y - 3}{2x - 2} & 4.2. \quad y' &= \frac{x + y - 3}{2x - 2} \\
4.3. \quad y' &= \frac{3y - x - 4}{3x + 3} & 4.4. \quad y' &= \frac{2y - 2}{x + y - 2} \\
4.5. \quad y' &= \frac{2x + y - 2}{3x - y - 2} & 4.6. \quad y' &= \frac{x + y - 3}{x - 1} \\
4.7. \quad y' &= \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8} & 4.8. \quad y' &= \frac{x + 3y + 4}{3x - 6} \\
4.9. \quad y' &= \frac{3y + 3}{2x + y - 1} & 4.10. \quad y' &= \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3} \\
4.11. \quad y' &= \frac{x - 2y + 3}{-2x + 2} & 4.12. \quad y' &= \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9} \\
4.13. \quad y' &= \frac{2x + 2y - 5}{5x - 5} & 4.14. \quad y' &= \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}
\end{aligned}$$

$$4.15. y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}$$

$$4.16. y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}$$

$$4.17. y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$$

$$4.18. y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$$

$$4.19. y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$$

$$4.20. y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$$

#### V. Умумлашган бир жинсли тенгламани ечинг

$$v.1. 2xy'(x - y^2) + y^3 = 0$$

$$v.2. y' = y^2 - 2/x^2$$

$$v.3. (x + y^3) + 3(y^3 - x)y^2 y' = 0$$

$$v.4. y^3 dx - 2(x^2 + xy^2) dy = 0$$

$$v.5. x^2(y' + y^2) = xy - 1$$

$$v.6. 2y + (x^2 y + 1)xy' = 0$$

$$v.7. (y^4 + 3x^2)y' + xy = 0$$

$$v.8. y'(x^6 - y^4) = x^5 y$$

$$v.9. y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$$

$$v.10. 2y' + y^2 - 1/x^2 = 0$$

$$v.11. x^2 yy' + 2y^4 = x^2$$

$$v.12. 4y^6 + x^3 = 6xy^5 y'$$

$$v.13. x^4 y^2 dy + yx dx = 0$$

$$v.14. xy^2(xy' + y) = 1$$

$$v.15. yy' + y^3 = 1/x^3$$

$$v.16. y(1 + \sqrt{x^2 y^4 - 1}) dx + 2x dy = 0$$

$$v.17. xy^2 y' - y^3 = 1/3 \cdot x^4$$

$$v.18. x^2 yy' + y = 1/x$$

$$v.19. xyy' + 2y^4 = x^2$$

$$v.20. (x - 2y^3) dx + 3y^2(2x - y) dy = 0$$

#### 6. Тенгламани берилган шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг

$$6.1. y'/x - \cos 2y = 1, \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{да} \quad y \rightarrow 3\pi/2$$

$$6.2. \cos 2y - 2y'/3x^2 = 0, \quad x \rightarrow 0 \quad \text{да} \quad y \rightarrow \pi/2$$

$$6.3. x^2 y' + \cos 2y = 1, \quad x \rightarrow +\infty \quad \text{да} \quad y \rightarrow 9\pi/4$$

$$6.4. (xy^2 + x) dx + (x^2 y - y) dy = 0, \quad x = 0 \quad \text{да} \quad y = 1$$

$$6.5. (a^2 + y^2) dx + 2x\sqrt{ax - x^2} dy = 0, \quad x = a \quad \text{да} \quad y = 0$$

$$6.6. x\sqrt{1 - y^2} dx + y\sqrt{1 - x^2} dy = 0, \quad x = 0 \quad \text{да} \quad y = 1$$

$$6.7. x\sqrt{1 + y^2} + y\sqrt{1 + x^2} dy/dx = 0, \quad x = 0 \quad \text{да} \quad y = 1$$

$$6.8. (xy' - y) \operatorname{arctg}(y/x) = x, \quad x = 0 \quad \text{да} \quad y = 1$$

$$6.9. (y^2 - 3x^2) dy + 2xy dx = 0, \quad x = 0 \quad \text{да} \quad y = 1$$

- 6.10.  $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$ ,  $x = 1$  да  $y = 1$
- 6.11.  $y + xy' = 6(1 + x^3 y')$ ,  $x = 1$  да  $y = 1$
- 6.12.  $(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy$ ,  $x = 1$  да  $y = 1$
- 6.13.  $y + xy' = a(1 + xy)$ ,  $x = 1/a$  да  $y = a$
- 6.14.  $(x + 1)y' = y - 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y$  чегараланган
- 6.15.  $y' = 2x(\pi + y)$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y$  чегараланган
- 6.16.  $x^2 y' + \sin 2y = 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y \rightarrow 11\pi/4$
- 6.17.  $y' x^2 \sin y = 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y \rightarrow \pi/2$
- 6.18.  $y' x^4 \sin y = 4$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y \rightarrow \pi/2$
- 6.19.  $y' x^3 \cos y = 2$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y \rightarrow 0$
- 6.20.  $y' = -4/(x^4 \cos y)$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y \rightarrow 0$

## 7. Масалани ечинг

7.1. Пиво ачитқисини тайёрлашда ишлатиладиган таъсир қилувчи фермент микдорини ўсиш тезлиги унинг шу пайтдаги  $x$  микдорига пропорционал. Ферментни бошланғич микдори  $\alpha$  га тенг. Бир соатдан сўнг у икки марта кўпайган бўлса, уч соатдан кейин неча марта кўпаяди?

7.2. Маълум баландликдан массаси  $m$  бўлган жисм вертикал йўналишда пастга ташлаб юборилди. Агар бу жисмга оғирлик кучи ва ҳавонинг жисм тезлигига пропорционал (пропорционаллик коэффициентини  $R$ ) бўлган қаршилик кучи таъсир қилаётган бўлса, унинг  $U$  тушиш тезлигининг ўзгариш қонунини топинг.

7.3. Учувчининг парашют билан биргаликдаги оғирлиги 80 кг. Ҳавонинг қаршилиги унинг тезлиги  $U$  нинг квадратага пропорционал (пропорционаллик коэффициентини  $k = 400$ ). Вактга боғлиқ равишда тушиш тезлигини ва тушишдаги энг катта тезликни топинг.

7.4. Шамол ўрмон орқали ўтаётиб, дарактлар қаршилигига учраш натижасида ўз тезлигининг бир қисмини йўқотади. Босиб ўтилган йўл чексиз кичик бўлса, бу йўқотиш бошланғич тезликка ва йўл узунлигига тўғри пропорционал бўлади. Агар шамолнинг бошланғич тезлиги  $U_0 = 12$  м/с ўрмонда  $S = 1$  м йўл босиб ўтгандан кейинги тезлиги  $U_1 = 11,8$  м/с бўлса, ўрмонда 150 м йўл босиб ўтган шамолнинг тезлигини топинг.

7.5. Массаси  $m$  бўлган жисм 250 м баландликдан оғирлик кучи ҳавонинг қаршилик кучи таъсирида тушаётган бўлсин. Қаршилик кучини тезликка пропорционал (пропорционаллик коэффициентини  $R$ ) деб олиб, жисмнинг ҳаракат қонуни  $h = f(t)$  ни ва жисм туша бошлагандан неча минут кейин ерга етиб келишини аниқланг.

7.6. Ўлчамлари  $60 \times 75$  см, баландлиги 80 см бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги идишга ҳар секунда 1,8 л сув тушаётган бўлсин. Унинг остки қисмида юзи  $2,5 \text{ cm}^2$  бўлган тешик бор. Идиш қанча вақтда тўлади? Натижани худди шундай, лекин тешиги бўлмаган идишнинг тўлиш вақти билан солиштиринг. (Сувнинг сатҳи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда, оқиб чиқаётган сувнинг тезлиги  $U = 0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин).

7.7. Диаметри  $2R = 1,8$  м ва баландлиги  $H = 2,45$  м бўлган цилиндр шаклидаги идишдаги сув унинг остки қисмидаги  $2r = 6$  диаметрли тешикдан қанча вақтда оқиб тушади? Цилиндр ўқи горизонтал жойлашган, сувнинг сатҳи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

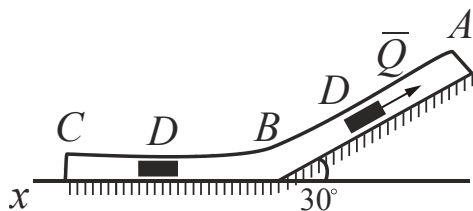
**7.8.** Моторли қайиқ унинг тезлигига пропорционал бўлган сувнинг қаршилиги таъсирида ўз тезлигини пасайтиради. Қайикнинг бошланғич тезлиги 1,5 м/с бўлиб, 4 секунддан кейин унинг тезлиги 1 м/с бўлади. Қачон қайикнинг тезлиги 1 см/с га тенг бўлади? Қайиқ тўхтагунча қанча йўл босиб ўтади?

**7.9.** Идиш конус шаклида бўлиб, асосининг радиуси  $R = 6$  см, баландлиги  $H = 10$  см учи эса пастга қаратилган. Агар идишнинг учида 0,5 см диаметрли тешик бўлса, ундаги тўла сув қанча вақтда оқиб бўлади? Сувнинг сатхи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

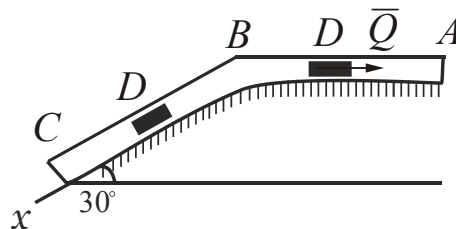
**7.10.** Остки қисмида тешиги бор бўлган цилиндр шаклидаги идиш вертикал равишда қўйилган. Идишдаги тўла сувнинг ярми тешикдан 5 минутда оқиб тушади. Қанча вақтда ҳамма сув оқиб бўлади? Сувнинг сатхи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда, унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

**7.11.** Диаметри  $2R = 1,8$  м ва баландлиги  $H = 2,45$  м бўлган цилиндр шаклидаги идишдаги сув унинг остки қисмидаги  $2r = 6$  диаметрли тешикдан қанча вақтда оқиб тушади? Цилиндр ўқи вертикал жойлашган, сувнинг сатхи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $0,6\sqrt{2gh}$  бўлади, деб ҳисоблансин.

**7.12.** Массаси  $m = 2$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуқтада 12 м/с бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (5-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлақда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 5$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,8v^2$  қаршилиқ кучи таъсир этади.  $B$  нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубадан  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $AB = 1,5$  м ҳамда  $F_x = 4\sin 4t$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканини билган ҳолда юкнинг  $BC$  бўлақдаги ҳаракат қонунини топинг.



5-расм.



6-расм.

**7.13.** Массаси  $m = 1,8$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуқтада 24 м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (6-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлақда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 5$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,3v$  қаршилиқ кучи таъсир этади.  $B$  нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубадан  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $A$  нуқтадан  $B$  нуқтага ўтиш вақти  $t_1 = 2$  сек ҳамда  $F_x = -2\cos 2t$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканини билган ҳолда юкнинг  $BC$  бўлақдаги ҳаракат қонунини топинг.

**7.14.** Тажрибаларга кўра ҳар бир грамм радийдан бир йилда 44 миллиграмм емирилади. Неча йилдан кейин радийнинг ярми емирилади? Радиоактив модданинг бирлик вақт ичида емирилиш миқдори мавжуд модда миқдorigа пропорционал деб ҳисоблансин.

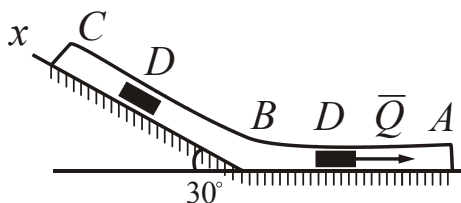
**7.15.** 30 кунда радиоактив модданинг 50 фоизи емирилади. Қанча вақтдан сўнг радиоактив модданинг бошланғич миқдорининг 1 фоизи қолади? Радиоактив модданинг бирлик вақт ичида емирилиш миқдори мавжуд модда миқдorigа пропорционал деб ҳисоблансин.

**7.16.** Жисм 10 минутда  $100^\circ$  дан  $60^\circ$  гача совийди. Атроф-муҳитнинг температураси  $20^\circ$  да ушлаб турилса, қачон жисмнинг температураси  $25^\circ$  бўлади? Жисмнинг совиш тезлиги жисм ва атроф-муҳит температуралари айирмасига пропорционал деб ҳисоблансин.

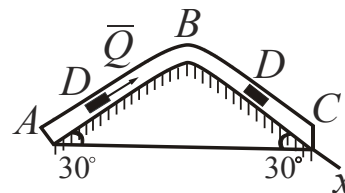
**7.17.** Жисм 10 минутда  $100^\circ$  дан  $60^\circ$  гача совийди. Атроф-муҳитнинг температураси  $20^\circ$  да ушлаб турилса, қачон жисмнинг температураси  $25^\circ$  бўлади? Жисмнинг совиш тезлиги жисм ва атроф-муҳит температуралари айирмасига пропорционал деб ҳисоблансин.

**7.18.** Массаси  $m = 8$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуқтада 10 м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (7-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлақда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 16$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,5 v^2$  Н қаршилиқ кучи таъсир этади.  $B$  нуқтада юк ўз тезлигини

ўзгартирмасдан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $AB = 4$  м ва  $F_x = 6t^2$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканлиги маълум бўлса, юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.



7-расм.



8-расм.

**7.19.** 20 л идишда ҳаво билан тўлдирилган (80% азот, 20% кислород). Идишга секундига 0,1 л азот киритилиб, тинимсиз аралаштирилиб турилибди ва худди шундай тезлик билан аралашма чиқиб кетаяпти. Қанча вақтдан кейин идишда 99% азот бўлади?

**7.20.** Массаси  $m = 3$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуқтада 22 м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (8-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари  $Q = 9$  н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $U$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,5 U$  қаршилик кучи таъсир этади.  $B$  нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$  ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $A$  нуқтадан  $B$  нуқтага ўтиш вақти  $t_1 = 3$  сек ҳамда  $F_x = 4 \sin 2t$  ( $F_x - F$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканлиги маълум бўлса, юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

## 8. Масалани ечинг

**8.1.** Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктасининг абсциссасидан уч марта катта бўлсин.

**8.2.** Шундай чизикларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуктасининг иккиланган абсцисса ва ординаталари айирмасига тенг бўлсин.

**8.3.** Шундай чизикларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуктасининг абсцисса ва ординаталари айирмасига тенг бўлсин.

**8.4.** Чизикнинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуктаси ординатасининг учланганига тенг эканлигини билган ҳолда, унинг тенгламасини тузинг.

**8.5.** Маркази координата бошида бўлган тўғри чизиклар дастасига қуйидаги бурчаклар билан изогонал бўлган траекторияларни топинг:

А)  $30^\circ$ ; В)  $45^\circ$ ; С)  $60^\circ$ ; D)  $90^\circ$ ;

**8.6.** Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: агар чизикнинг ихтиёрий нуктасидан координата ўқларига улар билан кесишгунча параллел тўғри чизиклар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзини шу чизикка 1:4 нисбатда бўлади.

**8.7.**  $y = ax^2$  параболалар оиласига ортогонал траекторияларни топинг.

**8.8.** Шундай чизикларни топингки, уларнинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринманинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуктаси, уриниш нуктасидан ва координата бошидан баравар узоқликда бўлсин.

**8.9.** Шундай чизикларни топингки, унинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринманинг координата бошигача бўлган масофа, уриниш нуктасининг абсциссасига тенг бўлсин.

**8.10.** Шундай чизикларни топингки, унинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринма, уриниш нуктаси ординатаси ва абсциссалар ўқи ҳосил қилган учбурчакда катетлар йиғиндисини ўзгармас 0 сонга тенг бўлсин.

**8.11.** Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктасининг абсциссасидан икки марта кичик бўлсин.

**8.12.** Шундай чизикларни топингки, уларда ҳар бир нуктасида ўтказилган уринма кутб радиус ва кутб ўқлар билан бир хил бурчак ташкил қилсин.

**8.13.** Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктаси абсциссасининг  $2/3$  қисмига тенг бўлсин.

**8.14.** Шундай чизикларни топингки, унинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринмадан координата бошигача бўлган масофа уриниш нуктаси абсциссасининг модулига тенг бўлсин.

**8.15.** Чизикнинг ихтиёрий нуктасидан ўтказилган уринма ординаталар ўқида уриниш нуктасининг иккиланган ординатасига тенг бўлган кесма ажратишни билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

**8.16.** Шундай чизикларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуктаси абсцисса ва ординаталар йиғиндисига тенг бўлсин.

**8.17.** Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: агар кесишгунча қадар параллел чизиклар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзи шу чизик 1:2 нисбатда бўлади.

**8.18.** Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: агар чизикнинг ихтиёрий нуктасидан координата ўқларига улар билан кесишгунча параллел чизиклар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзини шу чизик 1:3 нисбатда бўлади.

**8.19.** Марказлари  $y = 2x$  чизикда ётган радиуси 1 га тенг. Айланаларнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

**8.20.** Ўқлари  $OY$  ўқида параллел ва бир пайтда  $y = 0$  ҳамда  $y = x$  чизикларга уринадиган параболалар оиласининг дифференциал тенгламасини тузинг.

## Дифференциал тенгламалар фанидан оралиқ назоратлар ўтказиш учун саволлар

- 1 Кириш. Дифференциал тенгламаларга келтириладиган масалалар. Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, ечим тушунчаси, хусусий ва умумий ечим, интеграл чизик, Коши масаласи. Егри чизиклар оилсининг дифференциал тенгламасини тузиш.
- 2 Ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли дифференциал тенглама ечимини



- мавжудлик ва ягоналик теоремаси.
- 3 Ўзгарувчилари ажраладиган, бир жинсли ва бир жинслига келтириладиган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар
- 4 Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари.
- 5 Бернулли ва Риккати тенгламалари  
Дарбу тенгламаси
- 6 Тўлиқ дифференциал тенглама, интегралловчи кўпайтувчи.  
Интегралловчи кўпайтувчини топиш усуллари.
- 7 Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли дифференциал тенгламалар, мавжудлик ва ягоналик теоремаси.
- 8 Параметр киритиш усули, тўлиқ болмаган дифференциал тенгламалар.
- 9 Лагранж ва Клеро тенгламалари  
Махсус ечимлар ва уларнинг мавжудлиги. биринчи тартибли ҳар хил синфдаги тенгламалар
- 10 Юғори тартибли дифференциал тенгламалар уни нормал ҳолга келтириш, мавжудлик ва ягоналик теоремаси
- 11 Квадратурага келтириладиган баъзи бир юғори тартибли дифференциал тенгламалар
- 12 Тартибини пасайтиришга имкон берадиган юғори тартибли тенгламалар. Оралик интеграл.
- 13  $n$ - тартибли чизикли дифференциал тенгламалар ва уларнинг асосий хоссалари мавжудлик ва ягоналик теоремаси.
- 14  $n$ - тартибли бир чинсли чизикли дифференциал тенглама. Ечимнинг хоссалари. Остроградский формуласи.
- 15 Бир жинсли бўлмаган  $n$ -чи тартибли чизикли дифференциал тенглама ўғармасларни, вариациялаш усули
- 16  $n$ - тартибли ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар.  
 $n$ - тартибли ўғармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар
- 17  $n$ - тартибли бир жинсли бўлмаган ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламаларнинг хусусий ечимларини топиш усуллари
- 18 Эйлернинг бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган дифференциал тенгламалари. Чебишев, Бессел тенгламалари.
- 19 Қўшма оператор. Қўшма тенгламалар.
- 20 Иккинчи тартибли дифференциал тенгламалар назарияси таққослаш теоремаси  
Чегаравий масалалар. Грин функцияси. Хос сонлари ва хос функциялар тушунчаси.
- 21 Дифференциал тенгламалар системанинг нормал шакли. Нормал система учун мавжудлик ва ягоналик системаси. Гронуолла- Белман леммаси
- 22 Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси Ўзгармасларни вариациялаш усули
- 23 Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган тенгламалар системаси.
- 24 Матрицали дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Экспоненциал матрица.
- 25 Даламбер усули ёрдамида дифференциал тенгламаларни интеграллаш. Юғори тартибли тенгламага келтириш усули.
- 26 Нормал системанинг биринчи интеграллари. Етарли ва зарурий шарт, Системанинг симметрик формаси
- 27 Автоном системалар. Ечимнинг содда хоссалари. Иккинчи тартибли чизикли ва чизикли бўлмаган ўзгармас коэффициентли автоном системанинг ҳолатлар текислиги. Махсус нукта.

- 28 Турғунлик назариясининг элементлари. Ляпунов маъносида турғунлик. Ляпуновнинг биринчи ва иккинчи методи.
- 29 Биринчи тартибли хусусий ҳосилали чизикли дифференциал тенгламалар, Коши масаласи. Характеристика усули. Коши –Ковалевская теоремаси.

**Дифференциал тенгламалар фанидан оралиқ назоратлар  
ўтказиш учун мисол ва масалалар**

**Дифференциал тенгламани ечинг**

1.  $\sqrt{y}dx + x^2dy = 0$

2.  $(1 + y^2)dx = xdy$

$$3. \cos^2 y dx - (x^2 + 1) dy = 0$$

$$5. y' = \sqrt[3]{2x - y} + 2$$

$$7. x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$$

$$9. 4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx$$

$$11. y' = 5x(1 - x^2)^{3/2}$$

$$13. \sqrt{4 + y^2} dx - y dy = x^2 y dy$$

$$15. \frac{dy}{dx} = \frac{e^{-y^2}}{y} x \text{ сош } x, y > 0$$

$$17. y' + 1 = \sqrt{x + y}$$

$$19. y'(x + y)^2 = 1$$

$$21. y' = e^{x-y} - 1$$

$$23. y' = \cos(y - x - 1)$$

$$25. y' = \operatorname{tg}(y - 2x)$$

$$27. y' = y^2/x^2 + 4y/x + 2$$

$$29. y' = (x + y)/(x - y)$$

$$31. xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

$$33. 2y' = y^2/x^2 + 6y/x + 3$$

$$35. xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$$

$$37. y' = \frac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}$$

$$39. y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}$$

$$41. y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$$

$$43. (x^2 y^2 - 1)y' + xy^3 = 0$$

$$45. 2y' + x = 4\sqrt{y}$$

$$47. x^2 y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$$

$$4. (1 + x^3)y' = 3x^2 y, \quad y(0) = 2$$

$$6. dx - xdy = 2ydy, \quad y(0) = -1$$

$$8. \operatorname{tg} x \sin^2 y dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y dy = 0$$

$$10. y' = \sin^2 x$$

$$12. y' + 1/y^2 = 1$$

$$14. 3e^x \operatorname{tg} y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$$

$$16. z' = 2^{x+z}, \quad z(0) = -1$$

$$18. y' = \cos(y - x)$$

$$20. y' + y \sin 2x = 0, \quad y(\pi/4) = 1$$

$$22. y' = -2\sqrt{|y|}$$

$$24. y' = \sqrt[3]{(4x - y + 1)^2}$$

$$26. y' = \sin(y - x - 1)$$

$$28. xy' \cos(y/x) = y \cos(y/x) - 1$$

$$30. xy' = y(1 + \ln(y/x))$$

$$32. (xy' - y) \ln(y/x) = y$$

$$34. xy' = y \ln(y/x)$$

$$36. (x - y \cos(y/x)) dx + x \cos(y/x) dy = 0$$

$$38. y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$$

$$40. y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}$$

$$42. y' = 2 \left( \frac{y + 2}{x + y - 1} \right)$$

$$44. (y^4 - 3x^2) dy + xy dx = 0$$

$$46. y^3 dx + 2(x^2 - xy^2) dy = 0$$

$$48. 2x^2 y' = y^3 + xy$$

49.  $x^2 y' \cos y + 1 = 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y \rightarrow 16/3 \cdot \pi$ .

50.  $e^y = e^{4y} y' + 1$ ,  $x \rightarrow +\infty$  да  $y$  чегараланган.

51.  $\alpha$  ва  $\beta$  ларнинг қандай қийматларида  $y' = ax^\alpha + by^\beta$  тенгламани  $y = z^m$  алмаштириш ёрдамида бир жинсли тенгламага келтириш мумкин?

52. Идишда 10 кг туз солинган 100 литрли қоришма бор. Идишга узлуксиз сув қуйиб (минутига 5 л) у қооришма билан аралашаётган бўлсин. Агар қоришма шундай тезлик билан идишдан чиқиб кетаётган бўлса, бир соатдан кейин идишда қанча туз қолади.

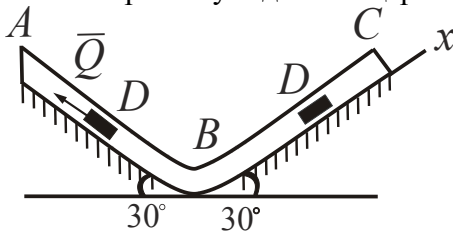
53. Материал нукта тўғри чизик бўйлаб  $\alpha$  тезланиш билан ҳаракат қилиняпти. Шу нуктанинг ҳаракат қонунини топинг.

54. Тандирдан узиб олинган ноннинг температураси 20 минутда  $100^\circ$  дан  $60^\circ$  га тушади. Узиб олгандан неча минут кейин ноннинг температураси  $30^\circ$  бўлади?

55. Моторли қайиқ тинч сувда  $v_0 = 20$  км/соат тезлик билан ҳаракат қилаяпти. Шу юришда қайиқнинг мотори ўчириб қўйилди ва 40 секунддан сўнг унинг тезлиги 8 км/соат бўлиб қолди. Сувнинг қаршилиги қайиқнинг тезлигига тўғри пропорционал бўлса, қайиқнинг мотори ўчирилгандан 2 минут кейинги тезлигини топинг.

56. Идиш конус шаклида бўлиб, асосининг радиуси  $R = 0,4$  м, баландлиги  $H = 1$  м, учи эса пастга қаратилган. Агар идишнинг учида 15 см диаметрли тешик бўлса, ундаги тўла сув қанча вақтда оқиб бўлади? (Сувнинг сатхи тешикдан  $h$  баландликда бўлганда унинг тезлиги  $v = 0,6\sqrt{2gh}$  бўлади деб ҳисоблансин).

57. Массаси  $m = 6$  кг бўлган  $D$  юк  $A$  нуктада  $v_0 = 15$  км/с бошланғич тезлик олиб, букилган  $ABC$  трубада (4-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин.  $AB$  бўлакда юкка оғирлик кўчидан ташқари



$Q = 12H$  ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг  $v$  тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши)  $R = 0,6v^2$  қаршилиқ кучи таъсир этади,  $B$  нуктада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг  $BC$  бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари  $F$

4-расм.

ўзгарувчи куч таъсир қилади.  $AB = 5$  м ва  $F_x = -5 \sin 2t (F_x - F)$  кучнинг  $x$  ўқдаги проекцияси) эканлигини билган ҳолда юкнинг  $BC$  бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

58. Қуйидаги чизиклар оиласига ортогонал бўлган траекторияларни топинг: а)  $y = Cx^2$ ; б)  $y^2 = x + C$ ; в)  $y = Ce^x$ .

59. Координата бошидан ўтувчи, ўқи  $OY$  ўқиға параллел бўлган барча парабодаларнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

60. Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринмаларнинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси уриниш нуктасининг абсциссасидан икки марта ката бўлсин.

61. Шундай чизикларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуктасининг абсциссаси, уриниш нуктасининг абсциссаси ва ординатаси айирмасига тенг бўлсин.

**62.** Қуйидаги хоссага эга бўлган чизикларни топинг: чизикқа ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринма ва нормаларнинг абсцисса ўқидан ажратган кесмаси  $2a$  га тенг.

**Дифференциал тенгламалар фанидан оралиқ назоратлар  
ўтказиш учун намунавий назорат иши вариантлари**

*Вариант – 1*

1. Системанинг симметрик шакли. Ечим тузилиши.
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечими.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг  

$$\dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}$$

$$\dot{y} = x + y + 5e^{-t}$$
4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг  

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x + y)^2 - 9 \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9 \end{cases}$$

*Вариант – 2*

1. Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси. 1,2 хоссалар.
2. Лимитик давра турғунлигини текшириш.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг  

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$$
4. Тенгламани ечинг  

$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$$

*Вариант – 3*

1. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси. 3 – хосса ( $D(x)$  детерминат)
2. Раус – Гурвиси шартлари.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг  

$$\dot{x} = 2x - y$$

$$\dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t$$
4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг  

$$\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2 \\ \dot{y} = 2x(x - y) \end{cases}$$

*Вариант – 4*

1. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Тх.1 умумий ечим тузилиши.
2. Четаева ва Красовский теоремалари
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$$

#### Вариант – 5

1. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Ўзгармасни вариациялаш усули
2. Квази чизикли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 4 \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x) \end{cases}$$

#### Вариант – 6

1. Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли тенгламалар системаси (характеристик тенгламалар илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил)
2. Чизикли тенгламалар системасининг махсус нуқталари (егар, туғма тугун)
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2e^t \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг

$$\frac{dx}{z^2 - y^2} = \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$$

#### Вариант – 7

1. Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли тенгламалар системаси (Характеристик тенглама илдизлари комплекс бўлган ҳол)
2. Чизикли тенгламалар системасининг махсус нуқталари (дикретик тугун, фокус)
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2xy \end{cases}$$

*Вариант – 8*

1. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламалар системаси (характеристик тенгламалари каррали бўлган ҳол)
2. Чизиқли тенгламалар системасининг махсус нуқталари (тугун, марказ)
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

*Вариант – 9*

1. Тенгламалар системасини юқори тартибли тенгламага келтириш усули
2. Чизиқли бўлмаган тенгламалар системасининг махсус нуқталарини текшириш
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8 \\ \dot{y} = 3x + 6y \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x-1)(y-2) \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

*Вариант – 10*

1. Даламбер усули
2. Лимитик давра. Бендиксон ва Дюляк шартлари.
3. Системани ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг

$$(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y$$

*Вариант – 11*

1. Матрисивий экспонента (характеристик тенглама илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлган ҳол)
2. Ляпуновнинг И усули.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \sin t \end{cases}$$
4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = (x + y)^2 - 1 \\ \dot{y} = y^2 - x + 1 \end{cases}$$

*Вариант – 12*

1. Матрисивий чизикли тенгламалар системасига чизикли алмаштириш татбиқ этиш
2. Раус – Гурвиси шарти.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$$
4. Тенгламани ечинг
 
$$(xz + y) \frac{\partial z}{\partial x} + (x + yz) \frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2$$

*Вариант – 13*

1. Матрисивий экспонента (характеристик тенглама илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил бўлган ҳол)
2. Ляпуновнинг ИИ усули.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5 \sin t \end{cases}$$
4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9 \\ \dot{y} = 9 - (x - 2y)^2 \end{cases}$$

*Вариант – 14*

1. Тенгламалар системасининг биринчи интегралли
2. Хусусий ҳосилали чизикли дифференциал тенгламаларни ечиш.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t \\ \dot{y} = 2x + 2t \end{cases}$$
4. Тенгламани ечинг



$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy; \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1$$

*Вариант – 15*

1. Системанинг симметрик шакли. Ечим тузилиши.
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечими.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = (x - y)(x - y + 2) \end{cases}$$

*Вариант – 16*

1. Бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар системаси. 1,2 хоссалар.
2. Лимитик давра турғунлигини текшириш.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 5 \cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2; \quad y = -2, \quad z = x - x^2$$

*Вариант – 17*

1. Бир жинсли чизиқли тенгламалар системаси. 3 – хосса ( $D(x)$  детерминат)
2. Раус – Гурвиси шартлари.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 5 \\ \dot{y} = (x - 1)(x + 3y - 5) \end{cases}$$

*Вариант – 18*

1. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси. 3 – хосса ( $D(x)$  детерминат)
2. Раус – Гурвиси шартлари.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + 4e^{-2t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг

$$-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}$$

#### Вариант – 19

1. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси. 3 – хулоса ( $D(x)$  детерминат)
2. Раус – Гурвиси шартлари.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 6x - 8y \\ \dot{y} = x(2y - x + 5) \end{cases}$$

#### Вариант – 20

1. Ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли тенгламалар системаси (характеристик тенгламалар илдизлари ҳақиқий ва ҳар хил)
2. Чизикли тенгламалар системасининг махсус нуқталари (егар, туғма тугун)
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$$

4. Тенгламани ечинг

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$$

#### Вариант – 21

1. Системанинг симметрик шакли. Ечим тузилиши.
2. Хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар учун Коши масаласи ечими.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = (2x + y)^2 - 9 \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9 \end{cases}$$

*Вариант – 22*

1. Бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар системаси. 1,2 хоссалар.
2. Лимитик давра турғунлигини текшириш.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$$
4. Тенгламани ечинг
 
$$\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$$

*Вариант – 23*

1. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаси. 3 – хосса ( $D(x)$  детерминат)
2. Раус – Гурвиси шартлари.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг
 
$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x - y \\ \dot{y} &= 2y - x - 5e^t \sin t \end{aligned}$$
4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2 + y - x^2 \\ \dot{y} = 2x(x - y) \end{cases}$$

*Вариант – 24*

1. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Тх.1 умумий ечим тузилиши.
2. Четаева ва Красовский теоремалари
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг
 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$
4. Тенгламани ечинг
 
$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$$

*Вариант – 25*

1. Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси. Ўзгармасни вариациялаш усули
2. Квази чизикли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар.
3. Дифференциал тенгламалар системасини ечинг

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$$

4. Системани махсус нуқталарини типини аниқланг

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - 4 \\ \dot{y} = (x - 4)(y - x) \end{cases}$$

### Дифференциал тенгламалар фанидан якуний назорат ўтказиш учун намунавий назорат иш вариантлари

#### Вариант – 1

- Оралиқ интеграл ва номаълум функция қатнашмаган юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
- Махсус нукта ва уни синфлаш.
- Тенгламани синфини аниқлаб умумий ечимини топинг.

$$xy'(\ln y - \ln x) = y$$

4. Тенгламани хусусий ечимини кўринишини ёзинг.

$$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$$

- 5\* Раус – Гурвис шартидан фойдаланиб тенгламани нол ечимини тургунликка текширинг.

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

#### Вариант – 2

- Дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча. Умумий, хусусий махсус ечимлар таърифлар. Коши масаласи.
- $n$  – тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар. (1,2,3,4,-теорема).
- Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$x^2 y' = y(x + y)$$

4. Тенгламани хусусиуй ечимини кўринишини ёзинг.

$$y''' + 6y'' + 10y' = x^{-3x} \cos x + x^3 + x^2 + 3$$

- 5\* Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$$

#### Вариант – 3

- Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.
- $n$  – тартибли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар. (5,6,7,8,-теорема).
- Тенгламанинг синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$\frac{dx}{x} = \left( \frac{1}{y} - 2x \right) dy$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0$$

- 5\* Тенгламани умумий ечимини топинг

$$\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$$

*Вариант – 4*

1. Бир жинсли ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.
2. Фундаментал ечимлар системасига кўра дифференциал тенгламани тузиш. Остраградский - Лиувилл формуласи.
3. Тенгламанинг синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$(\cos x - x \sin x) y dx + (x \cos x - 2y) dy = 0$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y^{IV} + 8y''' + 16y' = 0$$

- 5\* Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

*Вариант – 5*

1. Биринчи тартибли чизиқли тенглама.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламалар. Лагранж методи.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$(2x + y + 5)y' = 3x + 6$$

4. Тенгламани хусусий ечимини кўринишини ёзинг.

$$y^{IV} + 5y''' + 6y'' = x^2 \cos 2x + 3e^x \sin x$$

- 5\* Тенгламани махсус нуктасини топинг ва типини аниқланг.

$$y' = \frac{-6x - 5y}{x + 3y}$$

*Вариант – 6*

1. Бернулли ва Риккати тенгламалари.
2. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xy' = 2\sqrt{y} \cos x - 2y$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y''' - 7y'' + 6y' = x^2$$

- 5\* Тенгламани мувозанат нуктасини топиб, турғунликка текширинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{cases}$$

*Вариант – 7*

1. Дифференциал тенгламалар ечишда параметр киритиш усули.
2. Бир жинсли чизиқли дифференциал тенгламалар системаси.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$x dy - y dx = x \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

4. Тенгламани хусусий ечимини кўринишини ёзинг.

$$y^{IV} - 4y''' + 5y'' = 8e^x \sin x + 2006x$$

- 5\* Тенгламани мувозанат нуктасини топиб, турғунликка текширинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 5y \\ \dot{y} = -2x - 8y \end{cases}$$

#### Вариант – 8

- Лагранж ва Клеро тенгламалари.
- Бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар системаси.
- Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$dy + (xy - xy^3)dx = 0$$

4. Ейлер тенгламасини ечинг:

$$x^2 y'' + xy' + 4y = x$$

- 5\* Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$$yx \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz$$

#### Вариант – 9

1.  $F(x, y^{(n)}) = 0$ ,  $F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0$ ,  $F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$  кўринишдаги тенгламани интегралланг.

2. Ўзгармас коэффисиентли чизикли дифференциал тенгламалар системаси.

3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$(x \cos y + \sin 2y)y' = 1$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$$

- 5\* Тенгламалар системасини умумий ечимини топинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

#### Вариант – 10

1. Оралиқ интеграл ва номаълум функция катнашмаган юқори тартибли дифференциал тенгламалар.

2. Махсус нукта ва уни синфлаш.

3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xy'(\ln y - \ln x) = y$$

4. Тенгламани хусусий ечимини кўринишини ёзинг.

$$y^{III} - 4y'' + 3y' = xe^{2x} \cos x + x^2 e^{2010x}$$

- 5\* Раус – Гурвиси шартидан фойдаланиб тенгламани нол ечимини турғунликка текширинг.

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

#### Вариант – 11

1. Аргумент катнашмаган юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
2. Турғунлик назарияси ҳақида тушунча.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$2xy' - y = \sin y'$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y'' + 2y' + 5y = x$$

- 5\* Тенгламалар системасини умумий ечимини топинг.

$$\begin{cases} \dot{x} + x - 8y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases}$$

#### Вариант – 12

1. Биржинсли ва умумлашган бир жинсли юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
2. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$x^2 y' - 2xy = 3y$$

4. Тенгламани ечимини топинг.

$$y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2, \quad y'''(0) = 1$$

- 5\* Тенгламалар системасини умумий ечимини топинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

#### Вариант – 13

1. Биринси тартибли чизикли тенгламалар.
2. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$2(x - y^2)dy = ydx$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y^{VI} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0$$

- 5\* Раус – Гурвис шартдан фойдаланиб тенгламани нол ечимини турғунликка текширинг.

$$y^{VI} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$$

#### Вариант – 14

1. Бир жинсли ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар. (1,2,3,4, - теорема).
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$yy' + y^2 \operatorname{ctgx} = \cos x$$

4. Эйлер тенгламасини умумий ечимини топинг.

$$x^3 y''' - xy' - 3y = 0$$

- 5\* Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x}$$

*Вариант – 15*

1. Тўлиқ дифференциал тенглама ва интегралловчи кўпайтувчи.
2. Ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламалар. (Бир жинсли бўлган ҳолл)
3. Тенгламани синфни аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xy' = (x^2 + tgy) \cos^2 y$$

4. Агар  $f(x) = x^{10} e^{10x} + x$ ,  $va \quad k_{1,2,3...10} = 10$  бўса  $y_x$  хусусий ечимни кўринишини топинг.

- 5\* Системани ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} + x + 5y = 0 \\ \dot{y} - x - y = 0 \end{cases}$$

*Вариант – 16*

1. Дифференциал тенгламалар ечишда параметр киритиш усули.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар. Лагранж методи.

3. Тенгламани синфни аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y''' - y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1$$

- 5\* Тенгламалар системасини умумий ечимини топинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x + 2y \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

*Вариант – 17*

1. Биринчи тартибли чизикли тенглама.
2. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар.
3. Тенгламани синфни аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$(x^3 \sin y - x) dy + 2y dx = 0$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y^{IV} - 13y'' + 36y = x$$

- 5\* Системани ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases}$$

*Вариант – 18*



1.  $F(x, y^{(n)}) = 0, \quad F(y^{(n)}, y^{(n-1)}) = 0, \quad F(y^{(n)}, y^{(n-2)}) = 0$  кўринишдаги тенгламани интегралланг.
2. Ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системаси.
3. Тенгламани синфни аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$y' = xy^2 + xy$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг

$$y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$$

- 5\* Тенгламалар системасини умумий ечимини топинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -2x + y \end{cases}$$

#### Вариант – 19

1. Дифференциал тенгламалар ечишда параметр киритиш усули.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар. Лагранж методи.
3. Тенгламани синфни аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y''' - y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1$$

- 5\* Системани ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} + x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z, & \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1 \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

#### Вариант – 20

1. Оралиқ интеграл ва номаълум функция қатнашмаган юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
2. Ўзгармас коэффициентли чизикли дифференциал тенгламалар системаси.
3. Тенгламани синфни аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xydy = (y^2 + x)dx$$

4. Тенгламани хусусий ечимини топинг.

$$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 \cos 2x + 3e^x \sin x$$

5. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$yx \frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z) \frac{\partial z}{\partial y} = yx$$

#### Вариант – 21

1. Тўлқин дифференциал тенглама ва интегралловчи кўпайтувчи.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар.
3. Тенгламани синфни аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$2(x - y^2)dy = ydx$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y^{IV} - 13y'' + 36y = x$$

5\* Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$(x + 2y) \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

#### Вариант – 22

1. Бернулли ва Руккати тенгламалари.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли сизикли дифференциал тенгламалар. (5,6,7,8,-теорема)
3. Тенгламанинг синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$\frac{dx}{x} = \left( \frac{1}{y} - 2x \right) dy$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

- 5\* Системани ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$$

#### Вариант – 23

1. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар
2. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенгламалар.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$y = xy'^2 + 2y'^3$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y'' - 3y' + 2y = \sin x$$

- 5\* Системани ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$$

#### Вариант – 24

1. Бернулли ва Руккати тенгламалари.
2. Махсус нукта ва уларни синфлаш
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xy'(\ln y - \ln x) = y$$

4. Тенгламани хусусий ечимини топинг.

$$y''' - 4y'' + 3y' = xe^{2x} \cos x + x^2 e^{2006x},$$

- 5\* Раус – Гурвис шартидан фойдаланиб тенгламани нол ечимини турғунликка текширинг.

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

#### Вариант – 25

1. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.
2. Биринчи тартибли хусусий ҳосилали дифференциал тенглама

3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y''' - 3y'' + 2y' = 9e^{2x},$$

- 5\* Раус – Гурвиси шартидан фойдаланиб тенгламани нол ечимини турғунликка текширинг.

$$y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$$

#### Вариант – 26

1. Дифференциал тенгламалар ечишда параметр киритиш усули.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар. Лагранж методи.
3. Тенгламани синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$xy' = y \cos \ln \frac{y}{x}$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y''' - 4y' = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -1$$

- 5\* Системани ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} + x - 2y - z \\ \dot{y} = -x + y + z, & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1 \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$

#### Вариант – 27

1. Оралик интеграл ва номаълум функция қатнашмаган юқори тартибли дифференциал тенгламалар.
2. Махсус нукта ва уни синфлаш.
3. Тенгламани синфини аниқлаб умумий ечимини топинг.

$$xy'(\ln y - \ln x) = y$$

4. Тенгламани хусусий ечимини кўринишини ёзинг.

$$y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + xe^{2x}$$

- 5\* Раус – Гурвис шартидан фойдаланиб тенгламани нол ечимини турғунликка текширинг.

$$y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$$

#### Вариант – 28

1. Дифференциал тенгламалар ҳақида тушунча. Умумий, хусусий махсус ечимлар таърифлар. Коши масаласи.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар. (1,2,3,4,-теорема).
3. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$x^2 y' = y(x + y)$$

4. Тенгламани хусусиуй ечимини кўринишини ёзинг.

$$y''' + 6y'' + 10y' = x^{-3x} \cos x + x^3 + x^2 + 3$$

- 5\* Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$$

Вариант – 29

1. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламалар.
2.  $n$  – тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламалар. (5,6,7,8,-теорема).
3. Тенгламанинг синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$\frac{dx}{x} = \left( \frac{1}{y} - 2x \right) dy$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y''' - 4y'' + 5y' = 0$$

- 5\* Тенгламани умумий ечимини топинг

$$\sin^2 x \frac{\partial z}{\partial x} + \operatorname{tg} z \frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$$

Вариант – 30

1. Бир жинсли ва унга келтириладиган дифференциал тенгламалар.
2. Фундаментал ечимлар системасига кўра дифференциал тенгламани тузиш. Остраградский - Лиувилл формуласи.
3. Тенгламанинг синфини аниқлаб, умумий ечимини топинг.

$$(\cos x - x \sin x) y dx + (x \cos x - 2y) dy = 0$$

4. Тенгламани умумий ечимини топинг.

$$y^{IV} + 8y''' + 16y' = 0$$

- 5\* Тенгламалар системасини ечинг.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ ОЛИЙ ВА УРТА МАХСУС ТАЪЛИМ  
ВАЗИРЛИГИ

А. НАВОИЙ НОМИДАГИ САМАРКАНД ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Механика - математика факультети

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

## ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ФАНИДАН ТЕСТЛАР

## Самарканд 2011

Дифференциал тенгламалар фанидан тест  
учун

2 курс математика булими узбек гурухлари

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

**1.  $y=e^{cx}$  чизиклар оиласининг дифференциал тенгламасини топинг:**

$$y=e^{xy/y}; \quad y''=0; \quad y''+y=0; \quad y'=\cos x.$$

**2.  $y=\sin(x+c)$  чизиклар оиласининг дифференциал тенгламасини топинг:**

$$y'=\cos x(x+c); \quad B) \ y'=y; \quad C) \ y'=y^2; \quad D) \ y^2+y'^2=1.$$

**3. Кайси шарт бажарилганда  $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$  Риккати тенгламаси Бернулли тенгламасига айланади?**

$$c(x)=0; \quad b(x)=0; \quad a(x)=0; \quad a(x)=1$$

**4. Кайси шарт бажарилганда  $y'=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$  Риккати тенгламаси чизикли тенгламага айланади?**

$$a(x)=0; \quad b(x)=0; \quad c(x)=0; \quad a(x)=1$$

**5.  $y'=f(x) \cdot g(y)$  дифференциал тенглама типини топинг.**

Узгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама; Чизикли тенглама;  
Бернулли тенгламаси; Рикатти тенгламаси.

**6.  $x'=(\frac{x}{y})$  курнишга келтирувчи дифференциал тенглама кандай дифференциал тенглама деб аталади?**

Узгарувчилари ажраладиган; Чизикли тенгламалар;  
Бир жинсли тенгламалар; Бернулли тенгламаси.

**7.  $y'=p(x)y$  дифференциал тенгламанинг умумий ечим формуласини топинг.**

$$y=c \cdot e^{\int p(x)dx}; \quad y=\varphi(x); \quad y=e^{\int p(x)dx}; \quad y=c,$$

**8.  $\varphi(x, y, c_1, c_2)=0$  эгри чизиклар оиласининг дифференциал тенгламасини тузиш учун бу тенгламани неча марта дифференциаллаш керак  $y=y(x)$  деб?**

$$2; \quad 3; \quad 1; \quad 0.$$

**9.  $y'=y-x^2$  дифференциал тенгламанинг изоклаган\\ кандай чизиклар иборат?**

$$y-x=0 \quad y=x^2+c \quad y=x^3 \quad y=x+c.$$

**10. Агар  $dx+dy=0$  дифференциал тенгламада  $M(x,y)$  ва  $N(x,y)$  бир хил тартибдаги бир жинсли функциялар булса тенглама турини топинг?**

Тулиик дифференциал тенглама;  
Чизикли тенгламалар;

Узгарувчилари ажраладиган тенглама;  
Бир жинсли тенгламалар.

Дифференциал тенгламалар фанидан тест  
учун

2 курс математика булими узбек гурухлари

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

**11.  $y = xy' + B(y')$  дифференциал тенгламани турини аникланг.**

Клеро тенгламаси; Чизикли тенгламалар;  
Узгарувчилари ажраладиган тенглама; Лагранж тенгламаси.

**12.  $y = A(y')x + B(y')$  дифференциал тенгламани турини аникланг.**

Лагранж тенгламаси; Чизикли тенгламалар;  
Узгарувчилари ажраладиган тенглама; Клеро тенгламаси.

**13.  $x' + g(t)x = f(t)x^k$  тенгламани турини аникланг.**

Бернулли тенгламаси; Чизикли тенглама;  
Узгарувчилари ажраладиган тенглама; Клеро тенгламаси.

**14.  $y' = f(x, y)$  диф тенглама  $y(x_0) = y_0$  шарт билан ечимини топишга қандай масала дейилади?**

Коши масаласи; Чегаравий масала;  
Умумий ечимни топиш; Махсус ечимни топиш.

**15. Клеро тенгламасини аникланг.**

$x = tx' + g(x')$ ;  $y' = xy + \varphi(y')$ ;  
 $x' = a(t)x + b(t)$ ;  $x = \varphi(x')t + \psi(x')$ .

**16.  $y_1$  ва  $y_2$  биринчи тартибли чизикли оддий дифференциал тенгламани хусусий ечимлари бўлса умумий ечимин курсатинг.**

$y = y_1 + c(y_2 + y_1)$ ,  $c$  – узгармас сон;  
 $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ ,  $c_1$  ва  $c_2$  – узгармас сон  
 $y = c(y_1 + y_2)$ ,  $c$  – узгармас сон;  
 $y = e^{c(y_1 + y_2)}$ ,  $c$  – узгармас сон.

**17.  $kx^2 + y^2 - xy' = 0$  дифференциал тенгламани тартибини топинг.**

1; 3; 2; 0.

**18.  $x' + p(t) \cdot x = q(t)$ ,  $x(t_0) = x_0$  Коши масаласининг ечимини топинг.**

$$x = e^{-\int_{t_0}^t p(t) dt} \left[ x_0 + \int_{t_0}^t q(t) e^{\int_{t_0}^t p(x) dx} dt \right]$$

$y = y_0$

$$x(t) = x_0 + \exp\left(-\int_{t_0}^t p(t)dt\right)$$

$$x = c(t)e^{-\int_{t_0}^t p(x)dt}$$

Дифференциал тенгламалар фанидан тест  
учун

2 курс математика булими узбек гурухлари

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

**19.  $y' \cdot e^{x^2} = x \cdot e^{x^2} - y$  тенглама турини аникланг.**

Бир жинсли булмаган чизикли дифференциал тенглама;  
Бернулли тенгламаси; Клеро тенгламаси;  
Узгарувчилари ажраладиган тенглама.

**20. Кайси шарт бажарилганда  $M(t, x)dt + N(t, x)dx = 0$  тенглама тулик дифференциал булади**

$$\begin{aligned} M(t, x) &= N(t, x); & M(t, x) &= x^2; \\ N(t, x) &= y; & \frac{\partial M}{\partial x} &= \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned}$$

**21.  $y' = a(x) \cdot y^2 + b(x) \cdot y + c(x)$  Рикатти тенгламасини бита хусусий ечими берилган булса, уни кандай турдаги тенгламага келтириш мумкин?**

Бернулли тенгламасига; Узгарувчилари ажраладиган тенглама;  
Чизикли тенгламалар; Рикатти тенгламасига.

**22. Ушбу  $x' + p(t)x = f(t)x^m$  Бернулли тенгламасини  $m$  нинг кандай кийматида чизикли дифференциал тенглама булади?**

0; 1; 2; -1.

**23. Ушбу  $\frac{dx}{dt} = p(t) \cdot x + f(t) \cdot x^m$  Бернулли тенгламаси  $m$  нинг кайси кийматида чизикли бир жинсли дифференциал тенгламага айланади?**

1; 2; 3; 0.

**24. Биринчи тартибли чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими нечта ихтиёрий узгармасларга боглик?**

1; 2; 3; 0.

**25. Биринчи тартибли чизикли бир жинсли диф тенгламанинг умумий ечим структураси кайси?**

$$y = c \cdot \varphi(x); \quad y = g(x), \quad y = 1; \quad y = c \cdot \varphi(x) + g(x).$$



**26. Биринчи тартибли чизикли бир жинсли булмаган диф тенгламанинг умумий ечим структураси қайси?**

$$y = c \cdot \varphi(x) + g(x); \quad y = g(x), \quad y = 1; \quad y = c \cdot \varphi(x).$$

**27.  $y' + y = 7$  диф тенгламанинг хусусий ечимини топинг.**

$$7; \quad 7x; \quad e^x; \quad 0.$$

Дифференциал тенгламалар фанидан тест  
учун

2 курс математика булими узбек гурухлари

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

**28. Ушбу  $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$  бир жинсли диф тенгламанинг  $m = m(x, y)$  интегралловчи купайтувчисини топинг.**

$$\frac{1}{x \cdot M + y \cdot N}; \quad x \cdot z; \quad \frac{1}{x \cdot y}; \quad x^2.$$

**29.  $a(x)dx + b(x)dy = 0$  диф тенгламани турини аникланг.**

Узгарувчилари ажралган тенглама; Чизикли тенглама;  
Бернулли тенгламаси; Рикатти тенгламасига.

**30. Узгарувчилари ажраладиган  $a(x) \cdot b(y)dx + d(x) \cdot e(y)dy = 0$  тенглама учун қайси ифода  $m(x, y)$  интегралловчи купайтувчи булади?**

$$\frac{1}{b(y) \cdot d(x)}; \quad \frac{1}{b(y)}; \quad b(y); \quad d(x).$$

**31. Ушбу  $y' = p(x)y + f(x)$  чизикли диф тенгламанинг интегралловчи купайтувчисини курсатинг.**

$$\exp \int p(x)dx; \quad e^x; \quad e^{p(x)}; \quad \frac{1}{f(x)}$$

**32.  $y'^n + a_1(x, y) \cdot y'^{n-1} + \dots + a_{n-1}(x, y) y' + a_n(x, y) = 0$  тенглама тартибини аникланг.**

$$1; \quad 2; \quad 3; \quad n.$$

**33.  $y'^n + a_1(x, y) \cdot y'^{n-1} + \dots + a_n(x, y) = 0$  диф тенгламани турини аникланг.**

Биринчи тартибли  $n$  даражали; Чизикли тенгламалар;  
Бернулли тенгламасига; Узгарувчилари ажраладиган тенглама.

**34. Биринчи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими формуласини топинг.**

$$y = \varphi(x, c); \quad \varphi(x, c) = 0; \quad y = y(x); \quad \varphi(x, y, c) = 0.$$

**35. Биринчи тартибли  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$  бир жинсли тенглама  $y = xz$  алмаштириш натижасида, кандай турдаги тенгламага келишини топинг.**

Узгарувчилари ажраладиган тенгламага; Чизикли тенглама  
Бернулли тенгламасига; Тулик дифференциал тенгламага.

**36.  $y' + p(x)y = q(x)$  тенгламада функцияни  $y = a(x)z$  чизикли алмаштирганда кандай тенглама хосил булади?**

Чизикли тенглама; Бернулли тенгламасига;  
Узгарувчилари ажраладиган тенглама; Тулик дифференциал тенглама.

Дифференциал тенгламалар фанидан тест  
учун

2 курс математика булими узбек гурухлари

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

**37. b соннинг кандай кийматларида  $y'' + by = 0$  тенгламанинг барча ечимлари бутун сонлар ўқида  $(-\infty, +\infty)$  да чегараланган.**

$b > 0$ ;  $b < 0$ ;  $b = 0$ ;  $b = 1$

**38. Характеристик тенгламаси  $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$  бўлган ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли тенгламани топинг.**

$y'' + 3y' + 2y = 0$ ;  $y'' + y' = 0$   $y'' + 3y' = 0$   $y'' = 0$

**39. Фундаментал ечимлар системаси  $\cos x$  ва  $\sin x$  бўлган дифференциал тенгламани топинг.**

$y'' + y = 0$   $y'' - y' = 0$   $y''' + y' = 0$   $y'' = 0$

**40.  $y'' + 3y' + 2y = 0$  тенгламанинг характеристик сонларини топинг.**

-2, -1; 2, 1; -2; -1.

**41.  $y'' + y' = 0$  тенгламанинг хусусий ечимини топинг.**

$e^{-x}$ ;  $x$ ;  $x^2$ ;  $e^x$ .

**42.  $y'' + 3y' + 2y = 6$  тенгламанинг хусусий ечимини топинг.**

3; 0;  $x$ ;  $x^2$ .

**43. n – тартибли дифференциалли тенгламаларнинг умумий ечими нечта ихтиёрий ўзгармасга боглиқ.**

n; 2; 1; 0.

**44.  $w[1, e^x]$  Вронский детерминантининг  $w(0)$  кийматини топинг.**

1; 2;  $e^x$ ; 10.

**45. Куйидаги дифференциал тенгламанинг  $xy'' + y'^3 = x^4$  тартибини топинг.**

2; 4; 0; 3.

**46. Ушбу  $xy'' - y'^3 = 2xy + 2y = 0$  Эйлер тенгламасининг ечимлар фундаментал системасини топинг.**

$x, x^2$ ; 1,  $x$ ;  $x, x^3$ ; 2,  $x^2$ .

**47. Куйидаги  $ay'' + 3xy' + 5y = f(x)$  Эйлер тенгламаси бўлиши учун a нимага тенг бўлиши керак?**

$x^2$ ;  $x$ ; 1; 0.

**48. Агар  $e^{2ix}$  комплекс функция  $y'' + 4y = 0$  тенгламанинг ечими бўлса, унда унинг хақикий ечимлари қайси функциялар бўлади?**

$\sin 2x, \cos 2x$ ; 2,  $\cos x$ ;  $\cos x, \sin 2x$ ;  $\cos x, \sin x$ .

**49. Ўзгармас коэффициентли иккинчи тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг хусусий ечими  $e^{2x} \cos 3x$  бу тенгламанинг характеристик сонларини топинг.**

$2 \pm 3i$   $2, 3$ ;  $1 \pm 2i$ ;  $3 \pm 2i$ .

**50.  $F(x, y^{(k)})=0$  дифференциал тенглама юкори хосилага нисбатан ечиладиган бўлса интеграллаш усулини топинг:**

K- марта кетма-кет интеграллаб;  $x=y^{(k)}$ ; тўғри жавоб йўқ;  $y'=z$ .

**51.  $x^2y''+a_1xy'+a_2xy=0$  тенглама турини топинг.**

Эйлернинг иккинчи тартибли бир жинсл тенгламаси; Бернулли тенгламаси;

Ўзгармас коэффициентли чизикли тенглама; Эйлернинг бир жинсли.

**52. Иккинчи тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг ечимлар фундаментал системаси  $y_1$  ва  $y_2$  бўлса, умумий ечим формуласини топинг.**

$y=c_1y_1+c_2y_2$ ;  $y=\varphi(x, c_1, c_2)$ ;  $\varphi(x, y, c_1, c_2)=0$ ;  $y=\varphi(x, c)$ .

**53.  $Ly=y''+3y-4y$  бўлса,  $L(e^x)$  ни топинг.**

0; 8; 1; -7.

**54. Характеристик сони 2 ва 3 бўлган, дифференциал тенгламани топинг.**

$y''-5y'+6y=0$ ;  $y''+xy'+y=0$ ;  $y''+y=0$ ;  $y'''=0$ .

**55. Чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг чизикли эркли ечимларнинг максимал сонини топинг.**

2; n; 0; Тенгламанинг тартибига тенг.

Дифференциал тенгламалар фанидан тест  
учун

2 курс математика булими узбек гурухлари

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

**56. Вронский детерминантининг  $w(0)$  кийматини топинг,  $w[e^x, e^{-x}]$  бўлса:**

-2; 1; -1; x.

**57. 2-чи тартибли дифференциал тенгламанинг умумий ечими нечта ихтиёрий ўзгармасларга боглик?**

2; 1; 3; n.

**58.  $Ly=y''+3y$  бўлса  $L(e^x)$  топинг.**

$4e^x$ ;  $e^{2x}$ ;  $3e^x$ ; 4.

**59. Агар  $y=e^{ix}$  комплекс функция  $y''+y=0$  тенгламани ечими бўлса, унда унинг хакикий ечимлари кайси функциялар бўлади?**

$\cos x, \sin x$ ;  $e^x$ ;  $\cos x$ ;  $\sin x$ .

**60.  $y''=f(x, y, y')$  тенгламанинг Коши шаклдаги ечими кайси кўринишда бўлади?**

$y=\varphi(x)$ ;  $y=y(x, c)$ ;  $y(x_0)=y_0$ ;  $y=\varphi(x, x_0, y_0)$ .

**61. n – тартибли дифференциалли тенгламанинг ошкормас кўринишдаги умумий ечимини топинг.**

$\varphi(x, y, c_1, \dots, c_n) = 0$ ;  $y=\varphi(x, c)$ ;  $\varphi(x, y)=0$ ;  $y=y(x)$ ;

**62. n – тартибли дифференциал тенгламанинг параметр кўринишдаги умумий ечимини топинг.**

$x=x(t), y=y(t, c_1 \dots c_n)$ ;  $y=\varphi(x, c)$ ;  $\varphi(x, y)=0$ ;  $x=x(t), y=y(t)$ ;

**63.  $y=x^3+c_1x+c_2$  параболалар оиласининг дифференциал тенгламасини топинг.**

$y''=6x$ ;  $y'=3x^2+c$ ;  $y'=f(x, y)$ ;  $y''+y=0$ .

**64.  $y''-6y'+by=0$ ; b –нинг кандай кийматида дифференциал тенгламанинг характеристик сонлари тенг булади.**

9; 3; 6; 0;

**65.  $y''-2y'+y=0$ ; дифференциал тенгламанинг ечимлар фундаментал системасини топинг**

$e^x, x \cdot e^x$ ;  $e^x, e^{2x}$ ; 1,  $xe^x$ ;  $e^{-x}, xe^{-x}$ .

**66.  $y''+y=0$  дифференциал тенгламанинг ечимлар фундаментал системасини топинг.**

$\sin x, \cos x$ ;  $e^x, e^{-x}$ ;  $\cos x, \sin 2x$ ;  $e^x$ ;

**67.  $x^ky''+axy'+by=0$  тенглама k нинг кийматида Эйлер тенгламаси бўлади.**

2; 1; 3; 5;

68.  $Ly=y''+y$  бўлса  $L(\cos x)$  ни топинг.

0;  $\cos 2x$ ; 2;  $\sin 2x$ .

69.  $\sin x$ ,  $\cos x$  функцияларининг Вронский детерминантини топинг.

-1; 1; 0;  $\cos 2x$ .

70. 1,  $x$  функцияларнинг Вронский детерминантини топинг.

1; 0; -1;  $x$ .

71.  $F(x, y^{(k)}, y(x, y^{(k+1)}, K, y^{(n)}=0$  тенглама тартиби қайси алмаштириш оркали пасайтирилади.

$y^{(k)}=z$ ;  $y'=z$ ;  $z'=y$ ;  $y'=p(y)$ .

72.  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}=0$  тенглама тартиби  $y'=p(y)$  алмаштириш оркали неча бирликга пасайтирилади.

1; 0; 2; 3.

73. 
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y), \end{aligned} \right\} \text{ нормал системанинг умумий ечими нечта ихтиёрий}$$

узгармасларга боғлиқ;

2; 3; 1; 0;

Дифференциал тенгламалар фанидан тест  
учун

2 курс математика булими узбек гурухлари

«Дифференциал тенгламалар» кафедраси

74. Қайси ҳолда нормал система афтаном (стационал) система дейилади;

Агар системанинг унғ тамонидаги функциялар ошкор ҳолда  $t$  – га боғлиқ бўлмаса;

Агар нормал функциялар сони иккита бўлса;

Тугри жавоб йук;

Агар системанинг унғ тамонидаги функциялар  $t$  – га боғлиқ бўлса;

75. 
$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, y), \end{aligned} \right\} \text{ системани қайси усул билан интеграллашини}$$
  
топинг;

Система тенгламаларини ҳар бири алоҳида интеграллаш керак;

Система тенгламаларини кетмк-кет интеграллаш керак;

Битта иккинчи тартибли тенглама келтириб интеграллаш керак;

Интегралловчи комбенация тузиб интеграллаш керак;

$$76. \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y), \end{aligned} \right\} \text{ системани кайси усул билан интеграллашини топинг;}$$

Система тенгламаларини кетмк-кет интеграллаш керак;  
 Система тенгламаларини хар бири алохида интеграллаш керак;  
 Битта иккинчи тартибли тенглама келтириб интеграллаш керак;  
 Интегралловчи комбенация тузиб интеграллаш керак;

$$77. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(t)x + f(t), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t)x + h(t)y + e(t), \end{aligned}$$

**Чизикли тенгламалар системаси кайси усул билан интегралланишини топинг;**

Система тенгламаларини кетмк-кет интеграллаш керак;  
 Система тенгламаларини хар бири алохида интеграллаш керак;  
 Битта иккинчи тартибли тенглама келтириб интеграллаш керак;  
 Интегралловчи комбенация тузиб интеграллаш керак;

$$78. \left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y, z), \\ \frac{dx}{dt} &= g(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= h(t, x, y, z), \end{aligned} \right\} \text{ нормал система тартибини топинг;}$$

3;            2;            1;            4;

79.  $xy'' + y' + xy = 0$  тенгламанинг нечта дифференциал тенгламанинг нормал системага келтиришини топинг;

2;            1;            3;            4;

80.  $\begin{cases} y''-z=0, \\ z''+y=0, \end{cases}$  дифференциал тенгламалар системасининг нечта  
дифференциал тенгламанинг нормал системасига келтиришини топинг;

4; 3; 2; 1;

81.  $\begin{cases} y''-z=0, \\ z''+y=0, \end{cases}$  дифференциал тенгламалар системасининг тартибини  
топинг;

4; 3; 2; Д) 1;

82. Кайси холда дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси  
чизикли система дейилади;

Агар системадаги унг тамонидаги функционалари номалум функцияларга нисбтан  
чизикли булса;

Агар унг тамондаги;

Каноник курунишдаги дифференциал тенгламалар системаси;

Симметрик курунишдаги оддий дифференциал тенгламалар системаси;

83.  $\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y, z), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= h(t, x, y, z), \end{aligned} \right\}$  дифференциал тенгламалар системасининг  
турини топинг;

Оддий дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси;

Каноник курунишдаги дифференциал тенгламалар системаси;

Чизикли дифференциал тенгламалар системаси;

Симметрик курунишдаги оддий дифференциал тенгламалар системаси;

84.  $\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy, \end{aligned} \right\}$  дифференциал тенгламалар системасининг  
турини топинг;

Чизикли дифференциал тенгламаларнинг автаном системаси;

Оддий дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси;

Каноник курунишдаги дифференциал тенгламалар системаси;

Симметрик курунишдаги оддий дифференциал тенгламалар системаси;

$$85. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax^k + by^l \\ \frac{dy}{dt} = cx^m + dy^n \end{cases}$$

Дифференциал тенгламалар системасининг тартибини топинг:  
2                      1                      k                      n

86. Иккинчи тартибли чизикли узгармас коэффициентли бир жинсли ушбу системенинг махсус нуктаси нечта?

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y(1+y^2) - 2z \\ \frac{dy}{dt} = y + z \end{cases}$$

3,                      2,                      1,                      0

87.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

Системанинг ажралган махсус нуктаси нечта?

1,                      2,                      3,                      0

$$88. \quad \frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y)$$

Дифференциал тенгламалар системасининг махсус нукталари қайси тенглик ёки системадан топилади?

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}, \quad P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0, \quad P(x, y) = c$$

89. Иккинчи тартибли чизикли узгармас коэффициентли бир жинсли системанинг характеристик сонлари ҳақиқий ва бир хил ишорали сонлар бўлса, унда (0,0) махсус нукта турини топинг.

**Тугун топдаги нукта,      Эгарсимон типдаги  
нукта,      Фокус,      Марказ.**

- 90. Иккинчи тартибли чизикли узгармас коэффициентли бир жинсли системанинг характеристик сонлари хакикий хар хил ишорали сонлар бўлса, унда (0,0) махсус нукта турини топинг.**

**Эгарсимон типдаги нукта,    Тугун,    Фокус,    Марказ**

- 91. Иккинчи тартибли чизикли узгармас коэффициентли бир жинсли системанинг характеристик сонлари комплекс сон бўлиб, унинг хакикий кисми нолга тенг бўлиб яъни соф мавхум сон бўлса (0,0) махсус нукта турини топинг.**

**Марказ,      Тугун,, эгар, фокус,**

**92.** 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 3y \end{cases}$$

**Дифференциал тенгламалар системасининг мувозанат нуктасининг турини аникланг**

Эгар,      Марказ,    Тугилма тугун,    фокус

**93.** 
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x \\ \frac{dy}{dt} = x + y \end{cases}$$

**Дифференциал тенгламалар системасининг мувозанат нуктасининг турини аникланг**

Тугилма тугун,    Марказ,    Тугун,    фокус

**94.** 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2x \end{cases}$$
      **0 нуктанинг типини аникланг**

Фокус,    Марказ,    Тугун,      Эгар

**95.** 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$$
      **системанинг мувозанат нуктасининг турини аникланг**

Тугун,    Марказ,    Эгар,      Фокус



96. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$
 системанинг мувозанат нуктасининг турини аниқланг

Тугун, Эгар, Фокус, Марказ

97. 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$
 системанинг мувозанат нуктасининг турини аниқланг

Тугилма тугун, Тугун, Фокус, Эгар

98. 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + e' \\ \dot{y} = x \end{cases}$$
 дифференциал тенгламалар системаси учун хусусий

ечим курунишини топинг

$t \cdot e'; (t-1)e'; e'; t; t-1;$

99. 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$$
 дифференциал тенгламалар системаси учун хусусий

ечим курунишини топинг

$-t^2 - 2; -2t; t^2 - 2; 3t; t^2 + 2; -t^2 - 2;$

100. 
$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5 \sin t \end{cases}$$
 дифференциал тенгламалар системаси учун хусусий

ечим курунишини топинг

$3 \sin t - \cos t; 2 \cos t - \sin t; 3 \sin t - \cos t; 2 \cos t - \sin t;$   
 $A \sin t + B \cos t;$

Фойдаланиладиган асосий дарсликлар ва  
ўқув қўлланмалар рўйхати

1. Салоҳиддинов М.С. Насриддинв Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. Тошкент, "Ўзбекистон", 1994.
2. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.Наука, 1969.
3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М. Гиз.Физ-мат. литература. 1958.
4. Эльсгольц Л.Е. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. Наука. 1965.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М. наука, 1979 (5 –е издание).

КУШИМЧА АДАБИЁТЛАР

1. Бибиқов Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1991. 314 с.
2. Богданов Ю.С. Лекции по дифференциальным уравнениям. Минск, "Высшая школа", 1977.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. из-во Моск. Ун-та. 1984.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М Наука, 1987.
5. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М Наука. 1980.
6. Самойленко А.М. и др. Дифференциальные уравнения примеры и решения задач. М., 1989. 384с
7. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М. 1967. 565 с.
8. Амелькин В.В. Дифференциальное уравнение в приложениях. М. Наука. 1987.
9. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инж.тех задач. М. Изд. Министерства просвещения РСФСР, 1962.

**Foydalangan asosiy atamalar va olimlar haqida ma'lumotlar**  
(Glossary)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p style="text-align: center;"><b>A</b></p> <p><b>Argument</b> erkli o'zgaruvchi.</p> <p style="text-align: center;"><b>D</b></p> <p><b>Delamber</b> (Delamber Baptiste de Rond, 1717 - 1783) fransuz matematigi. Dalamber usuli o'zgarvas koeffisiyentli chiziqli tenglamalar sistemasi yechimini topish usuli.</p> <p style="text-align: center;"><b>B</b></p> <p><b>Bernoulli</b> (Bernoulli Iakob, 1667 - 1705) Shvesariya matematiki.</p> <p><b>Bernulli</b> tenglamasi<br/> <math>y' = p(x)y + q(x)y^\alpha, \quad \alpha \neq 0,1</math></p> <p><b>Bernulli usuli</b> chiziqli tenglama yechimini <math>y = u(x) \cdot v(x)</math> shaklida izlash.</p> <p><b>Bir jinsli tenglama</b><br/> <math>y' = f(x, y)</math> tenglamaning o'ng tomoni <math>O</math> – chi darajali bir jinsli funksiya bo'lsa;<br/> <math>M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0</math> tenglamaning koeffisnetlari bir xil darajali bir jinsli funksiyalar bo'lsa.</p> <p><b>Bir jinsli funksiya</b> <math>f(x, y)</math> funksiya <math>\forall + \neq 0 \quad F(tx, ty) \equiv t^m f(x, y)</math> shartni qanoatlantirsa. <math>m</math> – chi darajali bir jinsli funksiya deyiladi.</p> <p><b>Bessel</b> (Bessel Friedrish Vishelm, 1784 - 1846) nemis matematiki.</p> <p style="text-align: center;"><b>G</b></p> <p><b>Gram</b> (Jorgen Pedersen Gram 1850 - 1916)</p> <p style="text-align: center;"><b>J</b></p> <p><b>Jordan</b> (Jordan Camille, 1838 - 1922) fransuz matematiki</p> <p style="text-align: center;"><b>R</b></p> <p><b>Rikkati</b> tenglamasi<br/> <math>y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)</math></p> <p><b>Rikkati</b> (Riccati Iacopo Francesco, 1676 - 1754) italiyan matematiki.</p> | <p style="text-align: center;"><b>T</b></p> <p><b>Tenglama</b> – agar tenglamada bir o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, tenglama <b>oddiy differensial</b> tenglama deyiladi.</p> <p>agar tenglamada bir nechta argumentga bog'liq funksiya o'z hosilalari bilan qatnashsa bunday tenglama <b>xususiy hosilali</b> differensial tenglama deyiladi.</p> <p><b>Trayektoriya</b> integral chiziqli holatlar fazosidagi izi.</p> <p><b>To'liq differensialli tenglama</b><br/> <math>F(x, y, x', \dots, y^{(n)}) = 0</math> tenglamanig chap tomoni biror funsiyaning to'liq differensialiga teng bo'lsa.</p> <p style="text-align: center;"><b>E</b></p> <p><b>Eyler</b> ( Euler Leonhard, 1707 - 1783) fransuz matematiki Peterburg FA a'zosi.</p> <p><b>Eyler</b> tenglamasi<br/> <math>a_0 x^h y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x)</math></p> <p style="text-align: center;"><b>M</b></p> <p><b>Maxsus nuqta</b> Ikki o'zgaruvchili chiziqli birjinsli o'zgarvas koeffisiyentli tenglama maxsus nuqtalari <b>sinflari</b>: egar, tugun, dikretik tugun, tug'ma tugun, fokus, markaz (Bu sinflash Puancare tomonidan taklif etilgan)</p> <p><b>Maple</b> matematik paket(misol va masalalar yechish ychyn dastur).</p> <p style="text-align: center;"><b>P</b></p> <p><b>Puancare</b> (Poincare Henri Iules, 1854 - 1912) fransuz matematiki.</p> <p style="text-align: center;"><b>U</b></p> <p><b>Umumiy yechim</b> tenglama yechimi</p> |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>Umumiy integral</b> tenglama yechimi oshkorlik ko'rinishda.</p> <p style="text-align: center;"><b>O'</b></p> <p><b>O'zgarmasni variatsiyalash usuli</b> mos bir jinsli chiziqli tenglama sistema umumiy yechimidagi o'zgaraslarni argumentga bog'liq funksiyalar bilan shartli almashtirish.</p> <p><b>O'zgaruvchilari ajralgan tenglama</b><br/> <math>M(x)dx + N(y)dy = 0</math></p> <p><b>O'zgaruvchilari ajraladigan tenglama</b><br/> <math>y' = \varphi(x) \cdot \psi(y)</math> yoki<br/> <math>M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0</math>.</p> <p style="text-align: center;"><b>L</b></p> <p><b>Lagrang</b> (Ioseph Louis de Lagrange, 1736 - 1813) fransuz matematiki. Berlin FA prezidenti, Peterburg FA faxriy a'zosi.</p> <p><b>Lagrange usuli</b> – o'zgarmasni variatsiyalash usuli.</p> <p><b>Lagrange tenglamasi</b><br/> <math>y = \varphi(y')x + \psi(y')</math> bunda <math>\varphi(y') \neq y'</math>.</p> <p style="text-align: center;"><b>K</b></p> <p><b>Kochi</b> (Cauchy Augustin Lauis, 1789 - 1857) fransuz matematiki</p> <p><b>Kochi masalasi (boshlang'ich masala)</b> <math>n</math> – chi tartibli tenglamada noma'lum funksiya va uning dastlabki (<math>n - 1</math>) tartibgacha hosilalari argumentning birta qiymatida aniqlangan ya'ni <math>y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}</math></p> <p><b>Klero</b>(Clairaut Alexis Claude, 1713 - 1765) fransuz matematiki.</p> <p><b>Klero</b> tenglamasi <math>y = y'x + \varphi(y')</math>.</p> <p style="text-align: center;"><b>X</b></p> <p><b>Xarakteristik tenglama</b> <math>n</math> - chi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamada <math>y = e^{\lambda x}</math> ni kiritganda <math>\lambda</math> ga nisbatan hosil bo'lgan <math>n</math> – chi darajali tenglama.</p> <p><b>Xususiy yechim</b> umumiy yechimdan o'zgaraslarning ma'lum qiymatlarida hosil bo'lgan yechim.</p> | <p>oshkor ko'rinishda</p> <p style="text-align: center;"><b>M</b></p> <p><b>Maxsus yechim</b> har bir nuqtasida yagonalik sharti bajarilmagan yechim.</p> <p><b>Maxsus nuqta</b> mavjudlik va yagonalik teoremasi shartlari bajarilmagan nuqta.</p> <p style="text-align: center;"><b>Ch</b></p> <p><b>Chiziqli tenglama:</b> birinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan<br/> <math>y' = p(x)y + q(x)</math><br/> <math>n</math> – chi tartibli bir jinsli bo'lmagan<br/> <math>a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x)</math></p> <p>Birinchi tartibli bir jinsli<br/> <math>y' = (x)y</math><br/> <math>n</math> – chi tartibli bir jinsli.<br/> <math>a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0</math>.</p> <p><b>Chegaraviy masala</b> izlanuvchi funksiya va uning hosilalari qiymatlari argumentning ikkidan kam bo'lmagan qiymatlarida berilgan bo'lsa.</p> <p><b>Chebishev</b>(Чебышев Пафнутий Львович ,1821 - 1894) rus matematiki</p> <p style="text-align: center;"><b>I</b></p> <p><b>Integrallovchi ko'paytuvchi</b> – <math>\mu(x, y)</math> ni tenglamaga ko'paytirganda tenglama to'liq differensialli tenglama bo'lsa.</p> <p style="text-align: center;"><b>P</b></p> <p><b>Pikar</b>( Picard Emile Charle, 1856 - 1941) fransuz matematiki.</p> <p><b>Pikar yaqinlashishlari</b> (ketma – ket yaqinlanishlar)<br/> <math>y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t))dt \quad n = 1, 2, 3, \dots</math></p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                                                                                         |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| <p><b>S</b></p> <p><b>Sodda      differensial      tenglama</b></p> <p><math>y' = f(x)</math>.</p> <p><b>W</b></p> <p>Wronski (Joref Maria Wronski, 1778 - 1853) polyak matematiki.</p> |  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|